ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa | **Giuseppe Jung** in Milano
Salvatore Pincherle in Bologna | **Corrado Segre** in Torino

SERIE III. * TOMO XXXI.

MILANO
TIPO-LITOGRAFIA - OFFICINA CARTE VALORI
TURATI LOMBARDI E C.

1922.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XXXI.° (SERIE III.ª)

Nuove ricerche sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.

(*Di* Carlo Rosati, *a Pisa.*)

La teoria delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica C del genere p, secondo l'indirizzo da me tenuto in vari precedenti lavori (1), e che muove da una suggestiva interpretazione geometrica delle classiche equazioni di Hurwitz, può ricevere qualche utile contributo, ove insieme ai metodi della geometria proiettiva iperspaziale si applichino alcune importanti teorie aritmetiche, come quella dei numeri e dei corpi algebrici. Il riavvicinamento delle teorie medesime è reso possibile dall'introduzione della nozione di equazione minima di una corrispondenza e dall'estensione del concetto di valenza. E l'importanza delle due nozioni risulta manifesta, quando si pensi che l'equazione minima esprime il modo come una corrispondenza dipende dalle sue potenze e che le valenze della corrispondenza sono interi algebrici che, soddisfacendo a meno del segno alla detta equazione minima, sono invarianti sia rispetto alle trasformazioni birazionali della curva, sia rispetto al gruppo delle retrosezioni sulla relativa riemanniana.

Nel presente lavoro trovasi appunto, insieme ad altri risultati, l'applicazione alla teoria delle corrispondenze di uno dei più profondi teoremi della teoria dei corpi algebrici: il teorema di Dirichlet sulle unità.

(1) C. Rosati, a) *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e in particolare fra i punti di una curva di genere due* [Annali di Matematica pura e applicata, serie 3ª, vol. XXV (1915)]; b) *Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LI (1915-1916)[; c) *Sulle valenze delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LIII (1917)]; d) *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di due curve algebriche* [Annali di Matematica pura e applicata, serie 3ª, vol. XXVIII (1918)].

Prima però di procedere alla detta applicazione, ho creduto utile di precisare ed approfondire alcune proprietà delle valenze.

È noto che due corrispondenze T e T^{-1}, l'una inversa dell'altra, hanno le valenze immaginarie coniugate e che una valenza di T e l'immaginaria coniugata di T^{-1}, pur avendo la stessa dimensione, sono in generale associate a sistemi distinti d'integrali di 1ª specie; ed è pur noto che le valenze delle corrispondenze simmetriche sono reali e quelle delle corrispondenze emisimmetriche sono immaginarie pure.

Nel § 1 sono caratterizzate le corrispondenze simmetriche le cui valenze hanno tutte il medesimo segno, e vien dedotta da ciò una nuova dimostrazione del classico criterio di Castelnuovo per la equivalenza dei gruppi di punti di una serie algebrica.

Alla questione di decidere quando le valenze di una corrispondenza T e le immaginarie coniugate di T^{-1} sono associate agli stessi sistemi d'integrali di 1ª specie, si risponde nel § 3; ciò avviene quando e solo quando T e T^{-1} sono l'una funzione razionale dell'altra.

Alla famiglia delle corrispondenze che sono funzioni razionali delle loro inverse appartengono, oltre che le simmetriche e le emisimmetriche, le corrispondenze *Hermitiane*, cioè quelle di cui le corrispondenze laterali sono dotate di ordinaria valenza. Nel § 4, dopo aver provato che una corrispondenza Hermitiana del 1° ordine è equivalente o residua di una corrispondenza biunivoca, si dà una semplice dimostrazione aritmetica del noto teorema secondo cui una curva di genere $p > 1$ non può ammettere che un numero finito di corrispondenze biunivoche, e vengono infine esposte alcune proprietà delle involuzioni cicliche.

Segue l'applicazione, di cui sopra si è fatto cenno, della teoria dei corpi algebrici.

Data sulla curva C una corrispondenza singolare T, si consideri l'insieme delle corrispondenze che sono funzioni razionali di T, cioè delle corrispondenze S tali che si abbia $lS \equiv f(T)$, dove l è un intero ed f indica un polinomio a coefficienti interi. Al variare di S nel detto insieme, una valenza di S varia nel corpo algebrico definito da una valenza di T, ma non assume in generale per valori tutti gli interi (algebrici) di quel corpo, bensì descrive un insieme o che soddisfa alle condizioni di un *ordine*. Per tal ragione all'insieme delle corrispondenze S si dà pure il nome di *ordine* e si indica con $o(T)$; *grado* dell'ordine si chiama il grado dell'equazione minima di T, e l'ordine si dice *riducibile* o *irriducibile* secondochè è riducibile o irriducibile la detta equazione minima (nel campo assoluto di razionalità).

Il § 5 è dedicato a stabilire varie proprietà degli ordini. Si dimostra ivi che le corrispondenze comuni a due ordini costituiscono pure un ordine, si trovano le condizioni perchè un ordine coincida col suo inverso e si studiano in particolare gli ordini irriducibili coincidenti coi loro inversi.

Ciò premesso, si applicano (§ 6) le cose precedenti alla varietà di JACOBI. Sia dato sulla curva C un ordine irriducibile $o(T)$ ed o sia l'ordine di numeri ad esso corrispondente. Poichè ad ogni corrispondenza di C si può associare una trasformazione unirazionale della relativa varietà di JACOBI V_p, ogni numero di o individua, a meno di trasformazioni ordinarie di 1.ª specie, una tale trasformazione unirazionale; e questa risulta poi birazionale quando il detto numero è una *unità* dell'ordine o. Invocando allora il teorema di DIRICHLET sulle unità dei corpi algebrici, il quale vale, com'è noto, anche per gli ordini contenuti in detti corpi, si deduce che l'esistenza sulla curva C di una corrispondenza singolare T porta all'esistenza su V_p di un gruppo G, in generale infinito discontinuo, di trasformazioni birazionali due a due permutabili. La struttura di questo gruppo, cioè il numero delle trasformazioni generatrici costituenti un sistema fondamentale, dipende dal numero complessivo delle radici reali e delle coppie di radici immaginarie coniugate dell'equazione minima di T. Un altro gruppo G', avente la medesima struttura di G, nasce dalla considerazione della corrispondenza inversa T^{-1}; e i due gruppi $G\,G'$, quando T e T^{-1} non sono funzioni razionali l'una dell'altra, sono in generale distinti. Alle unità ridotte dell'ordine o corrispondono trasformazioni cicliche del gruppo G; quando gli ordini $o(T)$, $o(T^{-1})$ coincidono, e quindi coincidono i due gruppi $G\,G'$, le dette trasformazioni cicliche risultano Hermitiane, e quindi sono associate a corrispondenze biunivoche della curva C. In tal caso la curva C possiede una involuzione ciclica, generata da una corrispondenza biunivoca funzione razionale di T.

Segue infine un'applicazione dei concetti suesposti alle curve C di genere 2 ***semplicemente singolari***, cioè tali che su di esse il numero base delle corrispondenze simmetriche è $\mu_1 = 2$. Le corrispondenze esistenti su queste curve costituiscono un ordine rispettivamente del 2°, 3°, 4° grado, secondo che il numero base delle corrispondenze emisimmetriche è $\mu_2 = 0, 1, 2$. Nel 2° caso l'ordine è certo riducibile, nel 1° e nel 3°, supposta la curva priva d'integrali ellittici, il detto ordine risulta irriducibile. In questa ipotesi, la superficie di JACOBI F relativa a C contiene infiniti sistemi Σ di dimensione, grado, indice e genere due, composti di curve irriducibili prive di punti multipli. Ora possono presentarsi i due casi seguenti: o può avvenire che i sistemi Σ siano tutti di curve birazionalmente identiche, ovvero i sistemi stessi si ripartiscono in due serie distinte di curve birazionalmente identiche, di guisa che F risulta superficie di Jacobi di due curve birazionalmente distinte. Le condizioni aritmetiche per il verificarsi dell'uno o dell'altro di questi casi furono già stabilite per via diversa da Comessatti e da me nell'ipotesi $\mu_1 = 2$ $\mu_2 = 0$ (2). Qui appunto si completa quel risultato, prendendo in esame il caso $\mu_1 = 2$ $\mu_2 = 2$.

§ 1. Sulle valenze delle corrispondenze simmetriche.

1. È noto (3) che una corrispondenza simmetrica T (cioè equivalente alla sua inversa T^{-1}) sopra una curva C di genere p ha le valenze semplici e reali. Vogliamo ora stabilire una ulteriore proprietà di queste valenze, la quale ci condurrà a una nuova dimostrazione dell'importante criterio di Castelnuovo sulla equivalenza dei gruppi di punti di una serie algebrica.

Ricorriamo perciò alla rappresentazione geometrica che abbiamo tante volte utilizzato nelle nostre ricerche. Si consideri cioè entro uno spazio S_{2p-1}, in cui sia fissato un sistema di coordinate proiettivite omogenee, l'S_{p-1} immaginario, che indicheremo con α, sostegno della stella d'iperpiani aventi per coordinate i periodi degli integrali di 1ª specie di C. Lo spazio α ed il suo immaginario coniugato α_0 si diranno gli *spazi dei periodi* della curva C e per brevità diremo *incidente* ad $\alpha\,\alpha_0$ uno spazio reale R_{2l-1}, quando congiunge un S_{l-1} di α col suo immaginario coniugato S^0_{l-1} contenuto in α_0.

Si indichi ora con Σ il sistema lineare ∞^{p^2-1} dei sistemi nulli di S_{2p-1} aventi $\alpha\,\alpha_0$ per spazi autoconiugati, e consideriamo in esso solamente i sistemi nulli reali.

Un sistema nullo reale di Σ, che non sia degenere, si dirà *principale*, quando il relativo complesso lineare non contiene alcuna retta reale incidente ad $\alpha\,\alpha_0$; ed un sistema nullo reale di Σ degenere di specie l, e quindi dotato di un R_{2l-1} singolare incidente ad $\alpha\,\alpha_0$, si dirà *semi-principale*, se il relativo

(2) A. Comessatti, *Sulle superficie di* Jacobi *semplicemente singolari* [Memorie della Società italiana delle Scienze, serie 3ª, tomo XXI (1919)].

C. Rosati, *Intorno alle corrispondenze simmetriche singolari sopra una curva di genere 2* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XLIV (1920)].

(3) C. Rosati, loc. cit. (1) *c*).

complesso lineare non contiene alcuna retta reale incidente ad $\alpha\,\alpha_0$, all'infuori di quelle contenute in R_{2l-1}. Si vede allora subito che un sistema nullo reale di Σ degenere di specie $p-1$ è senz'altro semiprincipale. Infatti il complesso lineare ad esso relativo è costituito da tutte e sole le rette appoggiate al suo spazio singolare R_{2p-3}, e una retta reale incidente ad $\alpha\,\alpha_0$ ed avente con R_{2p-3} un punto comune è contenuta in questo spazio (4).

Ciò premesso, riferiamo proiettivamente e in modo reale gli elementi di Σ ai punti di uno spazio lineare Σ' a p^2-1 dimensioni; nasce allora in Σ' una ipersuperficie F di ordine p, immagine della totalità dei sistemi nulli degeneri di Σ. Questa ipersuperficie è stata studiata da Scorza (5), che ne ha messo in luce le importanti proprietà topologiche. Occorre qui, per ragioni

---

(4) È facile stabilire la condizione analitica equivalente alla suddetta condizione geometrica.

Si indichi perciò con

$$\Sigma\, m_{ik}\, x_i\, y_k \tag{1}$$

la forma bilineare alternata il cui annullarsi definisce un sistema nullo reale S di Σ, e si immagini che in (1) le x, y rappresentino le parti reali e i coefficienti dell'unità immaginaria di un punto P dello spazio α. Si può allora provare che, al variare di P entro α, se Σ è principale, la (1) conserva sempre segno costante; e se Σ è semiprincipale la (1), quando non è nulla, conserva segno costante.

Infatti se $x_r = x'_r + i\,x''_r$ sono le coordinate di P, le $p_{rs} = x'_r\,x''_s - x''_r\,x'_s$ sono le coordinate Grassmanniane della retta che congiunge il punto P col suo immaginario coniugato P_0, e si avrà

$$\Sigma\, m_{ik}\, x'_i\, x''_k = \Sigma\, m_{ik}\, p_{ik}\,. \tag{2}$$

Si vede subito allora che, variando P entro α, quando S è principale, la (2), non annullandosi mai, conserva sempre il medesimo segno. Supposto S semi-principale, si indichi con R_{2q-1} lo spazio singolare di S, congiungente un S_{q-1} di α col suo immaginario coniugato S^0_{q-1} di α_0. È chiaro che la (2) si annulla quando e soltanto quando P cade in S_{q-1}. Si considerino ora due punti P, Q di α, di coordinate $x_r = x'_r + i\,x''_r$, $y_r = y'_r + i\,y''_r$, esterni a S_{q-1} e siano $P_0\,Q_0$ i loro immaginari coniugati situati in α_0. Le due rette sghembe $P\,Q$, $P_0\,Q_0$, immaginarie coniugate, sono assi di una congruenza lineare contenente una ∞^2 reale di generatrici reali, della quale al più una giace in R_{2q-1} (e ciò quando la retta $P\,Q$ abbia con S_{q-1} un punto comune). Sarà dunque possibile variare con continuità una generatrice reale di detta congruenza dalla posizione iniziale $P\,P_0$ alla finale $Q\,Q_0$ senza passare per la eventuale generatrice contenuta in R_{2q-1}. La (2) passerà dunque con continuità dal valore $\Sigma\, m_{ik}\, x'_i\, x''_k$ al valore $\Sigma\, m_{ik}\, y'_i\, y''_k$ senza mai annullarsi, e perciò questi valori avranno ugual segno.

(5) G. Scorza, *Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari* [Memorie della Società italiana delle Scienze, serie 3ª, tomo XIX (1916)].

di chiarezza e per l'applicazione che dovremo farne, richiamare alcune di quelle proprietà.

Ricordiamo perciò che i punti reali di F si distribuiscono in due falde $F^{(1)}$, $F^{(2)}$: i punti della 1ª falda $F^{(1)}$ sono immagini dei sistemi nulli degeneri semi-principali, quelli di $F^{(2)}$ dei rimanenti sistemi nulli reali degeneri. Le due falde hanno comuni i punti reali della varietà di SEGRE (di 2ª specie e di indici uguali a $p-1$) immagine della totalità dei sistemi nulli di Σ degeneri di specie $p-1$; e la falda $F^{(1)}$ divide lo spazio reale Σ' in due regioni I ed E, la regione I rappresentando l'insieme dei sistemi nulli principali, e la regione E (a cui appartiene la falda $F^{(2)}$) l'insieme dei rimanenti sistemi nulli reali. Inoltre una retta reale contenente un punto di I ha in comune con $F^{(1)}$ due punti e soltanto due punti, e questi la dividono in due segmenti, dei quali uno (tolti gli estremi) è contenuto in I, e l'altro (tolti gli estremi) è contenuto in E. Si ha dunque la proprietà:

Se in un fascio di sistemi nulli reali trasformanti in sè $\alpha\,\alpha_0$ esiste un sistema nullo principale, al fascio appartengono due e due soli sistemi nulli semi-principali, i quali dividono il fascio stesso in due tratti, uno dei quali è costituito da tutti e soli i sistemi nulli principali del fascio.

2. Sia ora T una corrispondenza simmetrica della curva C. Se Ω indica l'omografia immagine di T, si avrà, com'è noto ([6]), $\Omega = S\,A$, essendo A il sistema nullo fondamentale, ed S un sistema nullo riemanniano di C, cioè un sistema nullo razionale trasformante in sè gli spazi $\alpha\,\alpha_0$ dei periodi. Rappresentando con I l'omografia identica, le valenze di T sono date dai valori di k (tutti reali) per cui l'omografia $\Omega + k\,I$ risulta singolare; e poichè si ha $\Omega + k\,I = (S + k\,A)\,A$, le stesse valenze saranno i valori di k corrispondenti a sistemi nulli degeneri del fascio $S + k\,A$. Ma il sistema nullo A del fascio (dato dal valore $k=\infty$) è principale ([7]); esistono dunque nel fascio stesso due sistemi nulli degeneri distinti $S+\gamma_1 A$, $S+\gamma_2 A$ $(\gamma_1 < \gamma_2)$ semiprincipali, e i sistemi nulli dati dai valori di k *esterni* all'intervallo $(\gamma_1 \dots \gamma_2)$ saranno tutti e soli i sistemi nulli principali del fascio. I rimanenti eventuali sistemi nulli degeneri corrispondono dunque a valori interni all'intervallo stesso e non saranno semi-principali; donde segue che γ_1 e γ_2 sono le due valenze minima e massima di T. Se ora si osserva che il sistema nullo S è principale o semi-principale quando e soltanto quando il valore $k=0$ è esterno all'intervallo $(\gamma_1 \dots \gamma_2)$ o coincide con un suo estremo, si ottiene:

([6]) C. ROSATI, loc. cit. ([1]) *a*), n.° 6.

([7]) C. ROSATI, loc. cit. ([1]) *a*), n.° 8, nota a piè di pagina.

Le valenze (reali) di una corrispondenza simmetrica T sono (all'infuori di una eventuale valenza nulla) tutte dello stesso segno, quando e soltanto quando il sistema nullo S, immagine di T, è principale o semi-principale.

3. Sia data su C una serie algebrica γ_n^1 di indice ν e genere ϖ e si indichi con Γ una curva birazionalmente identica alla serie stessa. Fra C e Γ intercede allora una corrispondenza (n, ν), e se T, T^{-1} indicano le operazioni, l'una inversa dell'altra, che conducono da un punto di Γ agli n punti omologhi di C, e da un punto di C ai ν punti omologhi di Γ, è noto [8] che le corrispondenze $T^{-1}T$ della curva C e TT^{-1} della curva Γ posseggono, all'infuori di una eventuale valenza nulla, le stesse valenze reali $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_l$; e ciascuna di esse ha per le due corrispondenze la medesima dimensione. Se $q_1 q_2 \dots q_l$ sono queste dimensioni e si pone $q = q_1 + q_2 + \cdots + q_l$, sarà $2q$ la caratteristica delle due matrici di T e di T^{-1}, onde si avrà $q \leq p$, $q \leq \varpi$. Supposto, per maggiore generalità, $q < p$, $q < \varpi$ e indicando con $\alpha \alpha_0$ gli spazi dei periodi di C, con $\tau \tau_0$ quelli di Γ, nell'S_{2p-1} relativo a C si avranno due spazi razionali indipendenti $R_{2(p-q)-1}$, R_{2q-1} incidenti ad $\alpha \alpha_0$, e nell'$S_{2\varpi-1}$ relativo a Γ due spazi razionali pure indipendenti $\overline{R}_{2(\varpi-q)-1}$ $\overline{R}_{2q-1}$ incidenti a $\tau \tau_0$. I primi sono polari l'uno dell'altro rispetto al sistema nullo fondamentale A di C, gli altri sono polari rispetto al sistema nullo fondamentale A' di Γ. La relazione che la T induce fra i cicli di Γ e quelli di C si traduce in una omografia razionale ω che trasforma $\overline{R}_{2q-1}$ in R_{2q-1}, e nella quale si corrispondono i due spazi in cui i suddetti si appoggiano ai rispettivi spazi dei periodi; ed una analoga omografia ω', traducente la relazione che la T^{-1} induce fra i cicli di C e quelli di Γ, sussiste fra R_{2q-1} ed $\overline{R}_{2q-1}$. Indicando poi con $\lambda \lambda'$ i sistemi nulli sezioni di $A A'$ coi due spazi R_{2q-1} $\overline{R}_{2q-1}$, le corrispondenze simmetriche $T^{-1}T$, TT^{-1} hanno per immagine i sistemi nulli degeneri S, S' ottenuti proiettando rispettivamente da $R_{2(p-q)-1}$ il sistema nullo $\sigma = \omega' \lambda' \omega'^{-1}$ e da $\overline{R}_{2(\varpi-q)-1}$ il sistema nullo $\sigma' = \omega \lambda \omega^{-1}$. Poichè i complessi lineari relativi a $\lambda' \lambda$ non posseggono rette reali incidenti agli spazi dei periodi, altrettanto avverrà per quelli relativi ai sistemi nulli $\sigma \sigma'$ trasformati dei primi mediante le omografie razionali ω'^{-1} ω^{-1}, e quindi i sistemi nulli S, S' sono semi-principali. Segue di qui, in forza della proprietà sopra dimostrata, che *le valenze $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_l$ hanno tutte il medesimo segno.*

---

(8) Per questa e per le altre affermazioni di questo n.° tengasi presente: C. Rosati, loc. cit. (1) *d*).

Per vedere quale sia questo segno, si osservi che se h_{ik}, g_{ik}, H_{ik}, G_{ik} $(i=1, 2, \ldots, p;\ k=1, 2, \ldots, \varpi)$ sono gli interi caratteristici della corrispondenza data (n, ν), una corrispondenza, certo esistente, che sia equivalente ad essa, cioè possegga gli stessi interi caratteristici, ed in cui il 1.° indice sia p, ha come 2° indice il numero $\sum(h_{ik} G_{ik} - H_{ik} g_{ik})$ (9); dovrà dunque essere

$$\sum(h_{ik} G_{ik} - H_{ik} g_{ik}) > 0.$$

E poichè fra le valenze $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_l$ e i suddetti interi caratteristici sussiste la relazione

$$-(\rho_1 q_1 + \rho_2 q_2 + \cdots + \rho_l q_l) = \sum(h_{ik} G_{ik} - H_{ik} g_{ik}),$$

si conclude che $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_l$ sono negative. Dunque:

Le valenze che le corrispondenze $T^{-1}\, T$, $T\, T^{-1}$ posseggono, all'infuori della eventuale valenza nulla, sono tutte negative.

Indicando con H la corrispondenza simmetrica indotta su C dalla serie γ_n^1, dalla proprietà ora dimostrata e dalla relazione

$$T^{-1}\, T = \nu I + H$$

si trae che: *Le valenze della corrispondenza simmetrica indotta da una serie algebrica γ_n^1 sono tutte minori o uguali all'indice della serie.*

---

(9) Infatti, se la corrispondenza (p, z) è rappresentata mediante gl'integrali normali di 1ª specie u_i, v_k delle curve C, Γ mediante le formule di Hurwitz

$$u_k(y') + \ldots + u_k(y^p) = \sum_i^{1\ldots\tilde\omega} \pi_{ki} v_i(x) + \pi_k \qquad (k=1, 2, \ldots, p),$$

essa può essere definita anche dall'equazione

$$\vartheta\left[u_k(y) - \sum_i^{1\ldots\tilde\omega} \pi_{ki} v_i(x) - c_k\right] = 0,$$

dove il simbolo ϑ indica la funzione ϑ del 1° ordine a caratteristiche nulle costruita coi periodi degli integrali u_i. Ed allora il numero z dei punti x di Γ corrispondenti a un fissato punto y di C è dato da

$$z = \frac{1}{2\pi i}\int d \log \vartheta \left| u_k(y) - \sum_i^{1\ldots\tilde\omega} \pi_{ki} v_i (v_i(x) - c_k\right],$$

l'integrale essendo esteso al contorno della superficie di Riemann Γ resa semplicemente connessa mediante i tagli alle retrosezioni. Eseguendo l'integrale, si ottiene facilmente

$$z = \Sigma\,(h_{ik} G_{ik} - H_{ik} g_{ik}).$$

Se ora d indica il numero dei punti doppi della serie γ_n^1, si ha, com'è noto, la relazione

$$d = 2\nu(n + p - 1) + 2(\rho_1 q_1 + \cdots + \rho_l q_l).$$

Da questa, in forza della proprietà precedente, consegue

$$d \leq 2\nu(n + p - 1),$$

e l'uguaglianza si avrà nel solo caso $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_l = 0$, cioè quando $T^{-1}T$ è una corrispondenza a valenza zero. Ciò significa che l'insieme dei ν gruppi di γ_n^1 uscenti da un punto x di C, si muove, al variare di x, in una serie lineare; ed allora, per un teorema di SEVERI, di cui fu data una dimostrazione basata sulla teoria delle corrispondenze [10], la γ_n^1 è costituita da gruppi equivalenti. Abbiamo così ritrovato il criterio di CASTELNUOVO.

OSSERVAZIONE. L'equazione di grado p

$$z^{p-q}(z - \rho_1)^{q_1}(z - \rho_2)^{q_2} \cdots (z - \rho_l)^{q_l} = 0$$

che può dirsi l'*equazione delle valenze* della corrispondenza $T^{-1}T$ ha dunque i primi q coefficienti tutti positivi e i rimanenti nulli. Tali coefficienti, come ha mostrato recentemente CASTELNUOVO [11], sono poi degli interi che hanno un significato geometrico importante: essi sono cioè i caratteri introdotti da COMESSATTI per la serie γ_n^1. Poichè l'equazione delle valenze della TT^{-1} è

$$z^{\varpi-q}(z - \rho_1)^{q_1}(z - \rho_2)^{q_2} \cdots (z - \rho_l)^{q_l} = 0$$

si conclude che *le serie* $\gamma_n^1\,\gamma_\nu^1$ *indotte dalla corrispondenza* (n, ν) *sulle curve* C *e* Γ *hanno i medesimi caratteri di* COMESSATTI.

---

[10] ROSATI, loc. cit. [1] *d*), n.° 5.

[11] G. CASTELNUOVO, *Sulle funzioni abeliane*, Nota IV: *Applicazioni alle serie algebriche di gruppi sopra una curva* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol. XXX, serie 5ª, (1921)].

§ 2. Alcune proprietà delle omografie di uno spazio S_r.

4. Occorre ora premettere alcune osservazioni sulle omografie di uno spazio S_r, che avranno nel seguito frequente applicazione.

Teorema I. *Se un punto P è comune a due spazi fondamentali delle omografie A, B di S_r, i quali corrispondono alle radici ρ e θ delle rispettive equazioni caratteristiche, appartiene pure ad uno spazio fondamentale dell'omografia prodotto AB, dato dalla radice $\rho\theta$ della sua equazione caratteristica* ([12]).

Nel caso in cui alcuno dei numeri ρ, θ è nullo, la dimostrazione della proprietà è immediata. Invero se è $\rho = 0$, il punto P, essendo singolare per A, deve essere singolare per il prodotto di A per una omografia qualsiasi, e quindi anche per AB; se è poi $\rho \neq 0$, $\theta = 0$, il punto P, unito per A e singolare per B, dovrà essere singolare per AB.

Supponiamo ora ρ e θ entrambi diversi da zero e si indichi con I la sostituzione identica. Il punto P, essendo singolare per l'omografia $A - \rho I$, sarà singolare anche per

$$\Omega = (A - \rho I)(B + \theta I) = AB - \rho B + \theta A - \rho\theta I;$$

e poichè P è unito per l'omografia $A + \rho I$ e singolare per $B - \theta I$, sarà singolare per

$$\Omega_1 = (A + \rho I)(B - \theta I) = AB + \rho B - \theta A - \rho\theta I.$$

Ma allora P è singolare anche per

$$\Omega + \Omega_1 = 2(AB - \rho\theta I),$$

cioè appartiene ad uno spazio fondamentale di AB, corrispondente alla radice $\rho\theta$ dell'equazione caratteristica.

Il teorema si estende poi immediatamente al prodotto di un qualsivoglia numero di omografie.

([12]) Per la precisione di questo e degli enunciati che seguono, occorre avvertire che delle omografie che si considerano si intendono fissati i rispettivi moduli. Inoltre con la denominazione di *spazio fondamentale* di un'omografia intendiamo significare non solo uno spazio di punti uniti, ma anche uno spazio di punti singolari, corrispondente cioè alla radice zero dell'equazione caratteristica.

5. TEOREMA II. *Se un punto P è contenuto in uno spazio fondamentale di un'omografia A, corrispondente alla radice θ dell'equazione caratteristica, appartiene pure ad uno spazio fondamentale dell'omografia $f(A)$, funzione razionale intera di A, corrispondente alla radice $f(\theta)$ della sua equazione caratteristica.*

Ammesso infatti che sia

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m = a_0 (z - s_1)(z - s_2) \cdots (z - s_m),$$

si dovrà avere

$$f(A) = a_0 I (A - s_1 I)(A - s_2 I) \cdots (A - s_m I).$$

Allora, poichè per l'omografia identica $a_0 I$ il punto P è unito e corrisponde alla radice a_0 dell'equazione caratteristica, e per l'omografia $A - s_i I$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ è un punto di uno spazio fondamentale corrispondente alla radice $\theta - s_i$, in forza del Teor. I dovrà appartenere ad uno spazio fondamentale di $f(A)$, corrispondente alla radice $a_0(\theta - s_1)(\theta - s_2) \cdots (\theta - s_m) = f(\theta)$ della sua equazione caratteristica.

OSSERVAZIONE I. Ragionando sulle omografie inverse operanti sugli iperpiani, le cui sostituzioni sono le trasposte di quelle delle omografie considerate, si giunge alle proprietà correlative riguardanti iperpiani appartenenti a stelle fondamentali.

OSSERVAZIONE II. Dal Teor. II si deduce che ogni spazio fondamentale di A o coincide o è contenuto in uno spazio fondamentale di $f(A)$. Se dunque A è un'omografia generale, se cioè i suoi spazi fondamentali appartengono ad S_r, anche $B = f(A)$ sarà generale, ed ogni suo spazio fondamentale o coincide con uno di A, o congiunge più spazi fondamentali di A. Si ha ora inversamente:

TEOREMA III. *Se ogni spazio fondamentale di un'omografia generale A o coincide o è contenuto in uno di B, l'omografia B è funzione razionale di A.*

Infatti, essendo k il numero degli spazi fondamentali di A, l'equazione minima ([13]) di A, avendo per radici semplici tutte e sole quelle della sua equazione caratteristica, sarà di grado k, e perciò le omografie $I, A, A^2, \ldots A^{k-1}$ sono linearmente indipendenti mentre le potenze successive $A^k, A^{k+1}, \ldots$ di-

([13]) C. ROSATI, loc. cit. ([1]) *b*).

pendono linearmente da quelle. Ne segue che le omografie funzioni razionali di A costituiscono un sistema lineare ∞^{k-1}.

D'altra parte, scrivendo il modulo di A sotto forma canonica e facendo variare con continuità i k parametri in esso contenuti, si ottengono i moduli delle omografie i cui spazi fondamentali coincidono o contengono quelli di A. E dunque quest'ultime omografie costituiscono pure un sistema lineare ∞^{k-1}.

Poichè, in virtù della precedente osservazione, ogni omografia del primo sistema lineare è contenuta in questo, si deduce che i due sistemi coincidono e perciò B è funzione razionale di A.

Corollario. *Due omografie generali A, B con gli stessi spazi fondamentali sono funzioni razionali l'una dell'altra.*

§ 3. Le corrispondenze funzioni razionali delle loro inverse.

6. Si considerino sulla curva C due corrispondenze T, T^{-1}, l'una inversa dell'altra, ed ammettiamo che T^{-1} sia funzione razionale di T; sussista cioè la relazione

$$l\,T^{-1} \equiv f(T), \tag{1}$$

in cui l è un intero positivo ed f indica un polinomio a coefficienti interi. Se n è il grado dell'equazione minima di T, il grado di f può ridursi $\leq n-1$; allora se, come è lecito supporre, nessun divisore di l divide tutti i coefficienti del polinomio f, l'intero l e i coefficienti stessi saranno dalla T individuati. Invero, se oltre alla (1) si avesse anche

$$l'\,T^{-1} \equiv f_1(T),$$

dovrà essere

$$l' f(T) - l f_1(T) \equiv 0.$$

E indicando con a_i a'_i i coefficienti in f f_1 della stessa potenza di T, si avrebbe $l' a_i = l a'_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$; da cui dividendo per il M. C. D. δ di l l' $(l=\delta\lambda,\ l'=\delta\lambda')$, si ottiene $\lambda' a_i = \lambda a'_i$. Il numero λ' (divisore di l') deve quindi dividere tutti i coefficienti a'_i, e λ (divisore di l) tutti i coefficienti a_i; ne segue dunque $\lambda=\lambda'=1$, cioè $l=l'$ e $a_i=a'_i$.

È poi chiaro che, insieme alla (1) si ha pure l'altra relazione

$$l\,T = f(T^{-1}),$$

cioè il legame che abbiamo supposto sussistere fra T e T^{-1} è simmetrico.

Siano ora Ω, Ω' le omografie dello spazio S_{2p-1} immagini di T e di T^{-1};

poichè si ha

$$\Omega' = \frac{1}{l} f(\Omega) \qquad \Omega = \frac{1}{l} f(\Omega'),$$

Ω e Ω' dovranno possedere gli stessi spazi e le stesse stelle fondamentali (n° 5, Teor. II). Indichiamo con S_{q-1} Σ_{q-1} uno spazio fondamentale e la stella coniugata comuni ad Ω Ω', e siano θ ρ le radici corrispondenti delle rispettive equazioni caratteristiche.

Le omografie $\Omega + \Omega'$, $\Omega - \Omega'$ sono funzioni razionali di Ω; dunque S_{q-1} Σ_{q-1} coincideranno o saranno contenuti in spazi e stelle fondamentali di quest'ultime, associati alle radici $\theta + \rho$, $\theta - \rho$ delle rispettive equazioni caratteristiche. Ma le radici dell'equazione caratteristica di $\Omega + \Omega'$, immagine della corrispondenza simmetrica $T + T^{-1}$, sono tutte reali, e quelle dell'equazione caratteristica di $\Omega - \Omega'$, immagine della corrispondenza emisimmetrica $T - T^{-1}$ sono, all'infuori di una eventuale radice nulla, immaginarie pure ([14]). Segue di qui $\rho = \theta_0$, essendo θ_0 il numero immaginario coniugato di θ. Le radici delle equazioni caratteristiche di Ω, Ω', associate allo stesso spazio e alla stessa stella fondamentali, sono dunque immaginarie coniugate.

D'altra parte, indicando $\varDelta$ il sistema nullo fondamentale della curva C, ed Ω^{-1} l'omografia, inversa di Ω, operante sugli iperpiani, fra Ω Ω' sussiste, com'è noto ([15]), la relazione

$$\Omega' = \varDelta\, \Omega^{-1}\, \varDelta; \tag{2}$$

e questa dice che gli spazi e le stelle fondamentali di Ω vengono da $\varDelta$ trasformati nelle stelle e negli spazi fondamentali di Ω', essendo corrispondenti in $\varDelta$ uno spazio (o una stella) di Ω e una stella (o uno spazio) di Ω' associati alla medesima radice delle rispettive equazioni caratteristiche. Denotando allora con S^0_{q-1} Σ^0_{q-1} lo spazio e la stella fondamentali di Ω associati alla radice θ_0 (i quali coincideranno con S_{q-1} Σ_{q-1} quando θ è reale), da questa e dalla precedente osservazione si deduce che il sistema nullo $\varDelta$ trasforma S^0_{q-1} Σ^0_{q-1} rispettivamente in Σ_{q-1} S_{q-1}.

La proprietà ora dimostrata, ove si introduca il *coniugio* K di S_{2p-1}, può enunciarsi semplicemente così:

Se una corrispondenza T è funzione razionale della sua inversa, l'omografia Ω immagine di T gode delle proprietà che ogni suo spazio fondamen-

(14) C. Rosati, loc. cit. (1) *b*).

(15) C. Rosati, loc. cit. (1) *a*), n.° 7.

tale è trasformato nella stella coniugata dall'antireciprocità $K\mathcal{A}$, prodotto del coniugio per il sistema nullo fondamentale.

7. Il precedente risultato può facilmente invertirsi. Supponiamo infatti che nell'omografia Ω immagine di una corrispondenza T ogni spazio fondamentale venga trasformato nella stella coniugata dall'antireciprocità $K\mathcal{A}$. Essendo Ω reale, K muterà ogni spazio o stella fondamentali di Ω in uno spazio e in una stella pure fondamentali; dunque $\mathcal{A}$ trasformerà ogni spazio o stella fondamentali di Ω in una stella e in uno spazio pure fondamentali; da ciò, tenendo presente la (2), si deduce che Ω, Ω' hanno comuni gli spazi e le stelle fondamentali. Ed allora, in virtù dell'osservazione in fine al n° 5 si potrà concludere che Ω, Ω' e quindi T, T^{-1} sono l'una funzione razionale dell'altra, quando si provi che Ω è un'omografia generale, che cioè ogni suo spazio fondamentale è indipendente dal sostegno della stella coniugata. Ora è facile giustificare quest'ultima affermazione.

Invero, siano S_{q-1} Σ_{q-1} lo spazio e la stella fondamentali di Ω associati alla radice θ. Supposto θ reale, q dovrà essere pari ($q = 2q'$), e tanto S_{q-1} come il sostegno di Σ_{q-1} saranno due spazî reali $R_{2q'-1}$, $R_{2(p-q')-1}$ incidenti ad α α_0; e poichè $R_{2q'-1}$, $R_{2(p-q')-1}$ sono, per l'ipotesi fatta, polari l'uno dell'altro rispetto a $\mathcal{A}$, dovranno essere indipendenti ([16]). Se poi θ è complesso, si considerino, insieme ad S_{q-1} Σ_{q-1}, lo spazio e la stella fondamentali S^0_{q-1}, Σ^0_{q-1}, immaginari coniugati dei precedenti, associati alla radice θ_0.

Se lo spazio S_{q-1} avesse comune col sostegno S_{2p-1-q} della stella coniugata un S_{l-1} ($l > 0$), lo spazio S^0_{q-1} avrebbe comune un S^0_{l-1} col sostegno S^0_{2p-1-q} della stella coniugata. Ed allora, tenuto conto che S_{2p-1-q} contiene S^0_{q-1} ed S^0_{2p-1-q} contiene S_{q-1}, lo spazio reale R_{2q-1}, congiungente S_{q-1} S^0_{q-1}, e lo spazio reale $R_{2(p-q)-1}$, intersezione di S_{2p-1-q} S^0_{2p-1-q}, avrebbero comune lo spazio reale R_{2l-1} che congiunge S_{l-1} con S^0_{l-1}; e ciò è assurdo, perchè, come è subito visto, R_{2q-1} $R_{2(p-q)-1}$ sono incidenti ad α α_0 e polari l'uno dell'altro rispetto a $\mathcal{A}$. Abbiamo dunque:

Se nell'omografia Ω immagine di una corrispondenza T ogni spazio fondamentale è trasformato nella stella coniugata dall'antireciprocità $K\mathcal{A}$, Ω è un'omografia generale e la corrispondenza T è funzione razionale della sua inversa.

---

(16) C. Rosati, loc. cit. (7).

8. I risultati precedenti assumono forma più espressiva, quando si prendano in considerazione le valenze della corrispondenza.

È noto che due corrispondenze T, T^{-1} l'una inversa dell'altra hanno valenze immaginarie coniugate, e che una valenza di T e la immaginaria coniugata di T^{-1}, pur avendo la stessa dimensione, sono in generale associate a sistemi distinti d'integrali di 1ª specie. Orbene, si può ora dimostrare che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una corrispondenza T sia funzione razionale della sua inversa T^{-1}, è che ciascuna valenza di T e la immaginaria coniugata di T^{-1} siano associate allo stesso sistema d'integrali di 1ª specie.

Ma per procedere con chiarezza, sarà bene anzitutto richiamare alcune proprietà riguardanti la nozione di valenza.

Ricordiamo perciò che le valenze di T, cambiate di segno, sono le radici dell'equazione caratteristica di Ω, cui corrispondono spazi fondamentali o contenuti o appoggiati ad α_0: precisamente se S_{q-1} Σ_{q-1} sono lo spazio e la stella fondamentali associati alla radice θ, ed S_{q-1} ha comune con α_0 un S_{l-1} ($l > 0$) e quindi Σ_{q-1} ha comune con la stella (α) una stella Σ_{l-1}, il numero $-\theta$ è una valenza di T di dimensione l, e Σ_{l-1} è l'immagine del sistema d'integrali ad essa associato. Sappiamo inoltre che trasformando S_{l-1} mediante l'antireciprocità $K\mathcal{A}$, si ottiene una stella Σ'_{l-1}, contenuta nella stella (α), la quale è immagine del sistema d'integrali associato alla valenza $-\theta_0$ di T^{-1} (17).

Ciò premesso, la necessità della condizione espressa nel precedente enunciato risulta immediata, perchè se T è funzione razionale di T^{-1}, nelle omografie Ω, Ω' immagini di T e di T^{-1} coincidono gli spazi e le stelle fondamentali associati a radici immaginarie coniugate delle rispettive equazioni caratteristiche.

Per dimostrare la sufficienza della condizione medesima, basterà far vedere che, supposta soddisfatta, nell'omografia Ω immagine di T ogni spazio fondamentale vien mutato dall'antireciprocità $K\mathcal{A}$ nella stella coniugata. Siano dunque S_{q-1} Σ_{q-1} lo spazio e la stella fondamentali di Ω associati alla radice θ. Se S_{q-1} è contenuto in α_0 e quindi Σ_{q-1} nella stella (α), la proprietà è conseguenza immediata dell'ipotesi. Se S_{q-1} è contenuto in α e quindi Σ_{q-1} nella stella (α_0), si considerino lo spazio S^0_{q-1} e la stella Σ^0_{q-1} associati alla radice θ_0. Per l'ipotesi, $K\mathcal{A}$ trasforma S^0_{q-1} in Σ^0_{q-1}; dunque muterà anche

(17) C. Rosati, loc. cit. (1) c).

S_{q-1} in Σ_{q-1}. Ammettiamo infine che S_{q-1} congiunga un S_{m-1} di α con un S_{n-1} di α_0, e quindi Σ_{q-1} congiunga una stella Σ_{n-1} appartenente ad (α) con una stella Σ_{m-1} appartenente ad (α_0). L'antireciprocità KA trasforma ora S_{n-1} in Σ_{n-1}; se dunque θ è reale, e quindi $m = n$, poichè $S_{m-1}\, \Sigma_{m-1}$ sono immaginari coniugati di $S_{n-1}\, \Sigma_{n-1}$, KA trasformerà pure S_{m-1} in Σ_{m-1} e quindi S_{q-1} in Σ_{q-1}. Se poi θ è complesso, si considerino lo spazio S^0_{q-1} e la stella Σ^0_{q-1} associati alla radice θ_0: S^0_{q-1} si appoggia ad α_0 nell'S^0_{m-1} immaginario coniugato di S_{m-1}, e Σ^0_{q-1} ha comune con la stella (α) la stella Σ^0_{m-1} immaginaria coniugata di Σ_{m-1}, e KA trasformerà S^0_{m-1} in Σ^0_{m-1}. Ma allora KA muterà ancora S_{m-1} in Σ_{m-1} e quindi S_{q-1} in Σ_{q-1}. La proprietà è dunque dimostrata.

Osservazione. Quali sono le corrispondenze che dipendono *linearmente* dalle loro inverse? Se T è una tale corrispondenza, si avrà $l\, T^{-1} \equiv a\, T + b\, I$ e quindi $l\, T \equiv a\, T^{-1} + b\, I$, da cui, sommando, si deduce $(a - l)\,(T + T^{-1}) + 2\, b\, I \equiv 0$. Ed allora o sarà $a = l$, $b = 0$ e quindi $T \equiv T^{-1}$, ovvero dovrà $2\, b$ essere divisibile per $a - l$ e quindi $T + T^{-1} \equiv k\, I$. Dunque:

Le corrispondenze dipendenti linearmente dalle loro inverse sono le corrispondenze simmetriche e quelle che aggiunte alle loro inverse danno origine a corrispondenze a valenza ([18]) (*in particolare le emisimmetriche*).

§ 4. Corrispondenze Hermitiane. Corrispondenze biunivoche.

9. Due corrispondenze S, T della curva C si dicono *permutabili* quando i prodotti $S\,T$, $T\,S$ sono corrispondenze equivalenti, cioè quando $S\,T - T\,S \equiv 0$.

Se due corrispondenze sono permutabili, saranno permutabili le sostituzioni lineari associate e quindi le omografie immagini. Ma si può inversamente provare che se le omografie immagini di S, T sono permutabili, anche le corrispondenze sono permutabili. In altri termini, se i prodotti $S\,T$, $T\,S$ sono dipendenti, sono addirittura equivalenti. Invero se Ω, Ω' sono le sostituzioni lineari associate ad S, T, avendosi dall'ipotesi $\lambda\, \Omega\, \Omega' = \mu\, \Omega'\, \Omega$,

---

([18]) Le corrispondenze indipendenti soddisfacenti a questa condizione sono in numero di $\mu_2 + 1$, indicando μ_2 il numero base delle corrispondenze emisimmetriche. Cfr. C. Rosati, *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXII, serie 5ª, (1910)], Nota II, n. 11.

si deduce che le equazioni caratteristiche delle sostituzioni lineari $\Omega\,\Omega'$, $\Omega'\,\Omega$ hanno le radici proporzionali. Ma, per un noto teorema ([19]), i determinanti che costituiscono i moduli di tali sostituzioni hanno uguali le somme dei minori principali dello stesso ordine; ne segue che le radici suddette sono addirittura uguali, e quindi è $\lambda = \mu$.

Si abbiano sulla curva C due corrispondenze S, T soddisfacenti alla condizione $T S \equiv k\,I$, in cui k è un intero non nullo. Le corrispondenze S, T saranno allora non speciali; inoltre dovrà pure essere $S\,T \equiv k\,I$, perchè le omografie immagini, l'una inversa dell'altra. sono permutabili. Due corrispondenze nelle condizioni suddette si dicono *complementari.*

Di una corrispondenza non speciale T esistono infinite complementari, ma è facile provare che queste sono tra loro due a due dipendenti. Invero dalle due relazioni

$$T S \equiv k\,I, \qquad T S' \equiv k'\,I$$

si deduce

$$T\,(k'\,S - k\,S') \equiv 0.$$

E poichè l'omografia immagine di T è non singolare, $k'\,S - k\,S'$ avrà per immagine l'omografia nulla, cioè

$$k'\,S - k\,S' \equiv 0.$$

Dimostriamo ora la proprietà:

Due corrispondenze complementari sono funzioni razionali l'una dell'altra.

Sia infatti

$$T^n + a_1\,T^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,T + a_n\,I \equiv 0 \tag{3}$$

l'equazione minima di T, nella quale, supponendosi T non speciale, sarà $a_n \neq 0$. Poichè la (3) può mettersi sotto la forma

$$T\,(T^{n-1} + a_1\,T^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\,I) \equiv -\,a_n\,I,$$

si deduce che la corrispondenza

$$S \equiv T^{n-1} + a_1\,T^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\,I \tag{4}$$

è complementare di T: ed ogni corrispondenza complementare di T, dovendo dipendere da S, sarà funzione razionale di T.

([19]) Cfr. ad es. E. PASCAL, «I determinanti...» Manuale Hoepli, 1897, pag. 69.

Si può inoltre osservare che se T è simmetrica, la S, come combinazione lineare di più corrispondenze simmetriche, è pure simmetrica. Se invece T è emisimmetrica, la (3) avendo radici tutte immaginarie pure e nessuna nulla, conterrà soltanto potenze pari di T, e nell'espressione (4) della S saranno contenute soltanto potenze dispari. La S è allora combinazione lineare di più corrispondenze emisimmetriche, e quindi è emisimmetrica. Dunque:

Ogni corrispondenza complementare di una corrispondenza simmetrica o emisimmetrica è pure simmetrica o emisimmetrica.

10. Una corrispondenza non speciale T che sia complementare della sua inversa, cioè tale che si abbia

$$T^{-1}\,T \equiv k\,I,$$

si dirà una *corrispondenza Hermitiana*; e l'intero k che, come si è visto al n.° 3, deve essere positivo, si dirà l'*ordine* della corrispondenza Hermitiana. Se n, ν sono gl'indici di T e di T^{-1}, ed S, S' sono le corrispondenze *laterali* della corrispondenza data (n, ν), cioè le corrispondenze simmetriche in cui sono omologhi due punti appartenenti rispettivamente allo stesso gruppo delle serie $\gamma'_n\, \gamma'_\nu$ indotte su C da T e da T^{-1}, dalle relazioni

$$T^{-1}\,T \equiv S + \nu\,I \qquad T\,T^{-1} \equiv S' + n\,I$$

si deduce che le corrispondenze Hermitiane sono quelle che hanno le corrispondenze laterali dotate di ordinaria valenza. Se dunque la curva è priva di corrispondenze simmetriche singolari, ogni corrispondenza è necessariamente Hermitiana.

Una corrispondenza Hermitiana è funzione razionale della sua inversa, e se k è il suo ordine, le sue valenze hanno tutte ugual modulo, che è $\sqrt{k}$. Si ha ora inversamente:

Una corrispondenza T che sia funzione razionale della sua inversa e di cui le valenze abbian tutte ugual modulo, è Hermitiana.

Infatti la $T^{-1}\,T$, venendo a possedere, rispetto all'intero sistema d'integrali di 1.ª specie, un'unica valenza reale $-k$, uguale al quadrato di detto modulo cambiato di segno, avrà per immagine un'omografia Ω nella quale sono uniti tutti gli iperpiani uscenti dagli spazi $\alpha\,\alpha_0$ dei periodi, e quindi tutti i punti degli spazi medesimi. Ma poichè l'equazione caratteristica di Ω, per il fatto che la valenza di $T^{-1}\,T$ è reale, non può avere due radici immaginarie coniugate, si conclude che Ω è l'identità e quindi k è un intero.

11. Consideriamo ora in modo particolare le corrispondenze Hermitiane del 1.° ordine, soddisfacenti cioè alla condizione

$$T^{-1}\,T \equiv I. \tag{5}$$

Una corrispondenza biunivoca è manifestamente Hermitiana del 1.° ordine; si può ora inversamente provare che:

Data sopra una curva C di genere $p > 1$ una corrispondenza Hermitiana del 1° ordine T, in una delle due classi $(\pm T)$ è contenuta una ed una sola corrispondenza biunivoca. Se C è iperellittica, e solo allora, in entrambe le classi è contenuta una tale corrispondenza.

Se T è una corrispondenza a valenza (necessariamente uguale a ± 1) la proprietà risulta subito osservando che sopra una curva di genere $p > 1$ le sole corrispondenze biunivoche non singolari sono l'identità, che ha la valenza -1, e, quando la curva è iperellittica, la corrispondenza di valenza $+1$ definita dalla sua g_2^1 [20].

Quando invece T è singolare, la proprietà medesima discende da un noto teorema di R. Torelli [21], il quale afferma che *avendosi sopra C una serie algebrica γ_p^1 di ordine, indice e genere p, priva di gruppi speciali e non di livello costante per alcun integrale di 1ª specie, nella classe di γ_p^1 esiste l'involuzione del 1° ordine data dai punti della curva.*

Si consideri infatti nella classe (T) il sistema continuo ∞^p di corrispondenze aventi il 1° indice $= p$. Indichiamo ancora con T la corrispondenza generica di questo sistema continuo e sia γ_p^1 la serie da essa indotta su C. Poichè T, soddisfacendo alla (5), è non speciale, la γ_p^1 non è di livello costante per alcun integrale di 1ª specie di C. Inoltre la γ_p^1 è birazionalmente identica a C ed ha quindi il genere p. Infatti non può il gruppo generico di γ_p corrispondere ad $\varepsilon > 1$ punti di C, chè, altrimenti, la serie indotta da

---

[20] Che sopra una curva di genere $p > 1$ una corrispondenza biunivoca di valenza -1 è necessariamente l'identità può provarsi con le seguenti semplici considerazioni. Ammesso che C possegga una corrispondenza biunivoca non identica di valenza -1, si indichi con $(A\,A')$ una coppia fissa e con $(X\,X')$ una coppia variabile di punti omologhi. Si avrà allora $A' - A \equiv X' - X$, e quindi $A' + X \equiv A + X'$. Il gruppo $A' + X$ in cui X è variabile ammette dunque un gruppo equivalente contenente A, e quindi distinto da esso; perciò la curva, possedendo infinite g_2^1, sarà ellittica o razionale.

[21] R. Torelli, *Sulle varietà di* Jacobi, Nota I [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXII (1913)].

T^{-1} sarebbe composta con una involuzione I_t, ed ogni integrale di C per cui la I_t è di livello costante darebbe somma costante nei gruppi di quest'ultima serie, onde T^{-1} sarebbe speciale. Infine la γ_p^1, per il fatto che T è stata scelta genericamente nel suo sistema continuo, è priva di gruppi speciali; il suo indice coincide perciò col difetto di equivalenza ([22]), il quale è, in forza della (5), uguale a p. Valgono dunque per la γ_p^1 le ipotesi del teorema di TORELLI; ne segue allora che un gruppo G_p variabile in γ_p individua su C un punto P' tale che $G_p \pm P'$ varia in una serie lineare. E poichè si è supposto T singolare, il punto P' dovrà essere distinto dal punto P che ha nella T il gruppo G_p per corrispondente. Se allora si indica con U la corrispondenza biunivoca nella quale P ha per omologo P', dovrà essere $T \pm U \equiv 0$ e quindi $U \equiv \pm T$, cioè nella classe $(+T)$ o nella classe $(-T)$ esiste la corrispondenza biunivoca U.

Ed è chiaro che nella stessa classe non può esser contenuta un'altra corrispondenza biunivoca. Se infatti V fosse una tale corrispondenza, dovrà essere $U - V \equiv 0$, e quindi $U V^{-1} - I \equiv 0$; e si avrebbe su C una corrispondenza biunivoca non identica $U V^{-1}$ di valenza -1, il che è assurdo, essendo $p > 1$ (Vedasi la nota ([20])).

Nel caso iperellittico si vede subito che entrambe le classi $(\pm T)$ contengono una corrispondenza biunivoca, perchè moltiplicando U per la corrispondenza definita dalla g_2^1 si ottiene una corrispondenza U' residua di U ([23]).

12. Dal precedente risultato può dedursi una semplice dimostrazione aritmetica del noto teorema, secondo il quale una curva di genere $p > 1$ non può possedere che un numero finito di corrispondenze biunivoche.

Abbiamo visto infatti che le corrispondenze Hermitiane del 1.° ordine sono tutte e sole le corrispondenze non speciali T le quali inducono sulla curva serie algebriche aventi uguale a p il difetto di equivalenza. Il numero

---

([22]) R. TORELLI, *Sulle serie semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVII (1914)], n° 4.

([23]) Più in generale, se sopra una curva di genere $p > 1$ si hanno due corrispondenze biunivoche U, V fra loro dipendenti, la curva è iperellittica e una corrispondenza si deduce dall'altra moltiplicandola per la corrispondenza G definita dalla g_2^1. Se infatti è $\lambda V + \mu U \equiv 0$, si avrà $\lambda U^{-1} V + \mu I \equiv 0$; e la corrispondenza non identica $U^{-1} V$, dipendendo dall'identità, sarà dotata di valenza. La curva è dunque iperellittica ed è $V = U G$.

delle corrispondenze biunivoche possedute da una curva C di genere $p > 1$ uguaglia dunque il numero delle corrispondenze soddisfacenti alle condizioni suddette o è la metà di questo, secondochè C è o non è iperellittica. Sia ora $(T_1 T_2 \ldots T_\mu)$ una base minima per il sistema di corrispondenze esistenti sulla curva, $\alpha_i\ \beta_i\ \nu_{ii}$ indichino rispettivamente gl'indici e il grado virtuale di T_i e ν_{ik} il numero delle coppie comuni a T_i, T_k. Ponendo allora

$$\omega_{ik} = \alpha_i \beta_k + \alpha_k \beta_i - \nu_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \mu),$$

è noto [24] che la corrispondenza $T \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \cdots + \lambda_\mu T_\mu$ induce sulla curva una serie il cui difetto di equivalenza è $\frac{1}{2} \sum_{ik}^{1\ldots\mu} \lambda_i \lambda_k \omega_{ik}$. Segue da ciò che C possiede corrispondenze biunivoche quando e soltanto quando l'equazione

$$\sum \lambda_i \lambda_k \omega_{ik} = 2p \tag{6}$$

ammette soluzioni intere, le quali siano associate a corrispondenze non speciali; ed il numero di tali soluzioni uguaglia il numero delle corrispondenze biunivoche di C o è il doppio di questo, secondochè C è o non è iperellittica.

Poichè la forma $\sum \lambda_i \lambda_k \omega_{ik}$ è definita positiva, il numero delle soluzioni intere della (6) è finito [25], ed è quindi finito il numero delle corrispondenze biunivoche di C.

---

(24) C. Rosati, loc. cit. (18), n° 9.

(25) Si consideri infatti una μ^{pla} polare della quadrica $\Sigma \lambda_i \lambda_k \omega_{ik} = 0$, i cui vertici $P_1 P_2 \ldots P_\mu$ siano punti razionali e indichino $c_{1i} \ldots c_{\mu i}$ le coordinate intere di P_i. Eseguendo allora sulle λ la sostituzione lineare

$$\lambda_i = \sum_k^{1\ldots\mu} c_{ik} X_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{a}$$

si otterrà

$$\sum_{ik} \lambda_i \lambda_k \omega_{ik} = \sum_i^{1\ldots\mu} \rho_i X_i^2,$$

essendo i numeri ρ_i interi positivi. Indicando con Δ il modulo della sostituzione (a), a valori interi delle λ_i corrispondono per le X_i valori razionali col denominatore Δ, cioè della forma $\frac{Y_i}{\Delta}$. Ed allora ad una soluzione intera della (6) corrisponde una soluzione intera della

$$\Sigma \rho_i Y_i^2 = 2p\Delta^2.$$

Ma quest'ultima, dovendo essere $\rho_i Y_i^2 \leqq 2p\Delta^2$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$, ammette un numero finito di soluzioni; dunque è finito anche il numero delle soluzioni della (6).

13. Una corrispondenza biunivoca U di periodo m soddisfa all'equazione $U^m - I = 0$; se dunque $\psi(U) \equiv 0$ è l'equazione minima di U, dovrà essere $\psi(z)$ un divisore di $z^m - 1$ [26], e le radici di $\psi(z) = 0$ saranno radici m^{me} dell'unità.

Preso ora un divisore δ del periodo $m\,(m = n\,\delta)$, si separino le radici di $\psi(z) = 0$ in due gruppi, ponendo nel 1.° gruppo le radici $\rho_1\,\rho_2 \ldots \rho_r\ (r \geqq 0)$ appartenenti all'esponente δ o ad un esponente divisore di δ, nel 2.° gruppo le rimanenti radici $\theta_1\,\theta_2 \ldots \theta_s$. Si indichi con Ω l'omografia immagine di U, con $A_1\,A_2 \ldots A_r$ gli spazi fondamentali di Ω associati alle radici del 1.° gruppo, con $B_1\,B_2 \ldots B_s$ quelli associati alle radici del 2.° gruppo, e si consideri la corrispondenza

$$f(U) = I + U^\delta + U^{2\delta} + \cdots + U^{(n-1)\delta},$$

cioè l'involuzione ciclica I_n generata dalla corrispondenza U^δ.

Poichè è manifestamente

$$f(\rho_1) = f(\rho_2) = \cdots = f(\rho_r) = n, \qquad f(\theta_1) = f(\theta_2) = \cdots = f(\theta_s) = 0,$$

l'omografia $f(\Omega)$ immagine di $f(U)$ sarà singolare ed avrà come 1° spazio singolare lo spazio B congiungente $B_1\,B_2 \cdots B_s$, e come 2° spazio singolare quello A congiungente $A_1\,A_2 \cdots A_r$. I due spazi B ed A saranno dunque razionali, incidenti ad $x\ \alpha_0$ e polari l'uno dell'altro rispetto al sistema nullo A. Se allora $2\pi - 1$, $2(p - \pi) - 1$ indicano le dimensioni di A e di B, ciò significa che l'involuzione I_n è di livello costante per un sistema regolare riducibile costituito da $p - \pi$ integrali di 1ª specie, ed è quindi di genere π.

Si osservi d'altra parte che l'$S_{\pi-1}$ comune ad A e ad α_0 è lo spazio congiungente gli spazi comuni ad α_0 e ad $A_1\,A_2 \cdots A_r$, e che se A_i ha comune con α_0 un $S_{m_i-1}\ (m_i \geqq 1)$, $-\rho_i$ risulta una valenza di U della dimensione m_i. Si ha dunque la proprietà:

Se U è una corrispondenza biunivoca di periodo m e δ è un divisore di m, $(m = n\,\delta)$, la somma delle dimensioni delle valenze di U che cambiate di segno danno origine a radici m^{me} dell'unità appartenenti all'esponente δ o a un esponente divisore di δ, uguaglia il genere dell'involuzione ciclica I_n generata da U^δ.

Ne segue che l'involuzione I_n sarà razionale o irrazionale secondochè

---

(26) C. Rosati, loc. cit. (1) *b*).

l'equazione $\psi(z)=0$ non ammette ovvero ammette radici appartenenti all'esponente δ o a un esponente divisore di δ.

In particolare, per $\delta=1$, si ha il risultato:

L'involuzione ciclica generata da una corrispondenza biunivoca U è razionale o irrazionale secondochè la U non ammette ovvero ammette la parziale valenza -1. Nel 2° caso la dimensione di questa valenza uguaglia il genere dell'involuzione.

14. Può una corrispondenza biunivoca U essere simmetrica o emisimmetrica? Se U è simmetrica, dovrà essere $U-U^{-1}\equiv 0$ e quindi $U^2-I\equiv 0$. Supposto $p>1$, la U^2, di valenza ordinaria -1, sarà l'identità, ed U genera un'involuzione del 2° ordine (razionale o irrazionale). Se U è emisimmetrica, dovrà essere $U+U^{-1}\equiv 0$, e quindi $U^2+I\equiv 0$. La curva è dunque iperellittica e la U^2 è definita dalla sua g_2^1; inoltre l'equazione minima di U è $z^2+1=0$, e la U possiede le due valenze $\pm i$. Ma allora U^4, di valenza ordinaria -1, è l'identità, e la U genera una involuzione ciclica del 4° ordine razionale. Dunque:

Le corrispondenze biunivoche simmetriche sulle curve di genere $p>1$ sono a periodo 2; le corrispondenze biunivoche emisimmetriche non possono esistere che sulle curve iperellittiche, sono a periodo 4, e generano involuzioni razionali.

§ 5. Le corrispondenze costituenti un ordine. Proprietà degli ordini.

15. Si consideri sulla curva C una corrispondenza singolare T e sia

$$\psi(T)=T^n+a_1 T^{n-1}+\cdots+a_{n-1} T+a_n I\equiv 0$$

la sua equazione minima. Facciamo l'ipotesi, alla quale sempre ci atterremo, che l'equazione $\psi(z)=0$ sia priva di radici multiple. La omografia Ω immagine di T è in tal caso generale e la T possiede valenze tutte semplici ([27]).

L'equazione $\psi(z)=0$ può essere riducibile o irriducibile nel campo assoluto di razionalità. Se è riducibile, e se $A(z)$ è un fattore di $\psi(z)$, la cor-

([27]) C. Rosati, loc. cit. ([1]) *b*) *c*).

rispondenza $A(T)$, funzione razionale di T, avendo per immagine l'omografia singolare $A(\Omega)$, è speciale. Supponiamo inversamente che esista una corrispondenza speciale S funzione razionale di T, cioè tale che sia $lS = f(T)$. Dette $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_t$ le radici di $f(z) = 0$, l'omografia $f(\Omega) = (\Omega - \rho_1 I)(\Omega - \rho_2 I) \ldots \ldots (\Omega - \rho_t I)$ deve essere singolare, e sarà perciò singolare uno almeno dei fattori $\Omega - \rho_i I$. L'equazione $f(z) = 0$ ha dunque qualche radice comune con $\psi(z) = 0$ senza essere $f(z)$ divisibile per $\psi(z)$. Il M. C. D. di $f(z)$ e $\psi(z)$ è allora un polinomio a coefficienti interi di grado $< n$, e perciò l'equazione $\psi(z) = 0$ è riducibile. Dunque:

L'equazione minima di una corrispondenza T è riducibile o irriducibile, secondochè esistono o no corrispondenze speciali funzioni razionali di T.

16. Sia $\varphi(z) = 0$ l'equazione caratteristica di Ω e supponiamo che $\psi(z) = 0$ sia irriducibile. Poichè $\varphi(z) = 0$ ammette per radici tutte e sole quelle di $\psi(z) = 0$, dovrà essere

$$\varphi(z) = [\psi(z)]^q$$

e quindi $2p = nq$. Le radici di $\varphi(z) = 0$ hanno dunque tutte la stessa molteplicità q, donde segue che gli spazi fondamentali di Ω hanno tutti la stessa dimensione $q - 1$. Sia S_{q-1} uno di questi spazi e ρ la radice corrispondente dell'equazione caratteristica. Se ρ è reale, sarà $q = 2q'$, l'S_{q-1} è un $R_{2q'-1}$ reale incidente agli spazi dei periodi, e $-\rho$ è una valenza di T della dimensione q'. Se ρ è immaginaria, l'S_{q-1} congiunge un S_{m-1} contenuto in α con un S_{n-1} di α_0 ($m, n \geq 0$, $m + n = q$) e $-\rho$ è valenza della dimensione n. Alla radice immaginaria coniugata ρ_0 corrisponde un S^0_{q-1} congiungente un S^0_{n-1} di α con un S^0_{m-1} di α_0, e $-\rho_0$ è valenza della dimensione m. Il numero q ha dunque questo significato: esso uguaglia la somma delle dimensioni di due valenze di T immaginarie coniugate o il doppio della dimensione di una valenza reale.

Quando invece l'equazione minima di T è riducibile e

$$\psi(T) = A_1(T) \,.\, A_2(T) \ldots A_l(T) \equiv 0$$

è l'equazione stessa decomposta nei suoi fattori irriducibili, si avrà

$$\varphi(z) = [A_1(z)]^{q_1} [A_2(z)]^{q_2} \ldots [A_l(z)]^{q_l},$$

e se m_i indica il grado di $A_i(z)$ sarà $2p = m_1 q_1 + m_2 q_2 + \cdots + m_l q_l$.

A ciascuna radice ρ_i di $A_i(z)=0$ è associato uno spazio fondamentale di Ω di dimensione $q_i - 1$, onde q_i sarà il doppio della dimensione della valenza $-\rho_i$ se ρ_i è reale, o la somma delle dimensioni della valenza $-\rho_i$ e della immaginaria coniugata, se ρ_i è immaginaria. L'omografia singolare $A_i(\Omega)$, immagine della corrispondenza speciale $A_i(T)$, ha per 1° spazio singolare l'$S_{m_i q_i - 1}$ congiungente i suddetti spazi fondamentali; esso dovrà dunque essere razionale, di dimensione dispari e incidente ad α α_0. Segue di qui che i sistemi d'integrali associati alle valenze $-\rho_i$ appartengono a un sistema regolare di $\frac{1}{2} m_i q_i$ integrali riducibili.

Osservazione. Si consideri una corrispondenza speciale S funzione razionale di T e sia $lS = f(T)$. Il polinomio $f(z)$ dovrà contenere una o più volte qualcuno dei fattori irriducibili di $\psi(z)$. Se si ha ad es. $lS \equiv A_1(T)^{k_1} \cdots \cdots A_r(T)^{k_r} B(T)$, in cui è $1 \leq r < l$ e $B(T)$ è una corrispondenza non speciale, si vede facilmente che il sistema regolare riducibile per cui è di livello costante la S è quello che ha per immagine la stella d'iperpiani uscenti da α e contenenti gli spazi fondamentali di Ω associati alle radici dei rimanenti fattori $A_{r+1}(z), \ldots, A_l(z)$. Si deduce di qui che *i sistemi regolari riducibili per cui sono di livello costante le corrispondenze speciali funzioni razionali di T sono in numero di* $\binom{l}{1} + \binom{l}{2} + \cdots + \binom{l}{l-1} = 2^l - 2$.

17. Date sulla curva C m corrispondenze indipendenti $T_1\, T_2 \ldots T_m$, l'insieme delle corrispondenze S che dipendono linearmente da quelle, cioè tali che sia

$$lS \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \cdots + \lambda_m T_m$$

si dice una *rete di specie m.*

Se T è una corrispondenza qualsiasi di C ed n è il grado della sua equazione minima, l'insieme delle corrispondenze funzioni razionali di T, cioè delle corrispondenze S tali che

$$lS \equiv f(T)$$

costituisce manifestamente una rete di specie n. Le corrispondenze di questa rete sono due a due permutabili e si riproducono, oltre che per addizione e sottrazione, anche per moltiplicazione; in essa sono poi contenute tutte le corrispondenze a valenza. A questa rete daremo il nome di *ordine* e si indicherà con $o(T)$; la corrispondenza T si dirà *generatrice* dell'ordine, ed

n il suo *grado.* Un ordine si dice *riducibile* o *irriducibile* secondochè è riducibile o irriducibile l'equazione minima della corrispondenza generatrice.

Se una corrispondenza S è funzione razionale di T, l'ordine $o(S)$ è contenuto nell'ordine $o(T)$; due corrispondenze funzioni razionali l'una dell'altra generano lo stesso ordine.

Si può ora dimostrare che:

Se l'ordine $o(T)$ è irriducibile, ogni ordine $o(S)$ in esso contenuto è pure irriducibile ed ha per grado un divisore di quello di $o(T)$.

La irriducibilità di $o(S)$ è conseguenza immediata di ciò che si è detto al n° 15. Si osservi ora che, essendo S funzione razionale di T, ogni spazio fondamentale dell'omografia Ω' immagine di S o coincide con uno dell'omografia Ω immagine di T, o congiunge più spazi fondamentali di questa. Ma, per la irriducibilità delle equazioni minime di T e di S, Ω e Ω' hanno spazi fondamentali tutti della stessa dimensione (n° 16); ne segue che gli spazi fondamentali di Ω' congiungono k a k quelli di Ω. Se dunque n, n' indicano i gradi di $o(T)$ e di $o(S)$, sarà $n = kn'$.

18. Alla ricerca di ulteriori proprietà degli ordini giova premettere la seguente proposizione fondamentale:

In ogni rete di specie k contenuta in un ordine di grado n $(k < n)$ si può in infiniti modi scegliere una corrispondenza di cui tutte le corrispondenze della rete sono funzioni razionali.

Nel caso $k = 1$ la proprietà è evidente, essendo le corrispondenze della rete due a due dipendenti.

Supposto $k > 1$, si indichi con T la corrispondenza generatrice dell'ordine, con $\theta_1\ \theta_2 \ldots \theta_n$ le radici della sua equazione minima e con $S_{q_1-1}\ S_{q_2-1}\ S_{q_n-1}$ gli spazi fondamentali dell'omografia Ω, immagine di T, associati a quelle radici. Se $S_1\ S_2 \ldots S_k$ sono k corrispondenze indipendenti della rete considerata, dovrà aversi $l_i S_i \equiv f_i(T)$. Si ponga allora $f_i^{(rs)} = f_i(\theta_r) - f_i(\theta_s)$ e si scrivano le $\frac{n(n-1)}{2}$ relazioni lineari

$$x_1 f_1^{(rs)} + x_2 f_2^{(rs)} + \cdots + x_k f_k^{(rs)} = 0 \qquad (r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{7}$$

Queste non sono tutte identità nelle x, chè, altrimenti, si avrebbe

$$\frac{1}{l_i} f_i(\theta_1) = \frac{1}{l_i} f_i(\theta_2) = \cdots = \frac{1}{l_i} f_i(\theta_n) \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n),$$

e tutte le S_i, avendo per immagine l'identità, sarebbero a valenza.

Se dunque si interpretano le $x_1 x_2 \ldots x_k$ come coordinate omogenee di un S_{k-1}, le (7) sono le equazioni di m iperpiani $\left(1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}\right)$ di questo spazio. Si prenda allora in S_{k-1} un punto razionale non situato in alcuno dei detti iperpiani e siano $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k$ le sue coordinate intere; dico che la corrispondenza

$$S \equiv F(T) = \lambda_1 f_1(T) + \lambda_2 f_2(T) + \cdots + \lambda_k f_k(T)$$

soddisfa alla condizione richiesta. Invero, poichè è

$$F(\theta_r) - F(\theta_s) = \lambda_1 f_1^{(rs)} + \lambda_2 f_2^{(rs)} + \cdots + \lambda_k f_k^{(rs)} \qquad (r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n),$$

si vede che per ogni coppia $(r,\ s)$ per cui è $F(\theta_r) = F(\theta_s)$ dovrà aversi $f_1^{(rs)} = f_2^{(rs)} = \cdots = f_k^{(rs)} = 0$. Ciò significa che se due spazi S_{q_r-1} S_{q_s-1} fondamentali di Ω sono contenuti nello stesso spazio fondamentale dell'omografia immagine di S, sono contenuti anche nello stesso spazio fondamentale delle omografie immagini di $S_1 S_2 \ldots S_k$; e dunque l'omografia immagine di S ha gli spazi fondamentali contenuti o coincidenti con quelli delle omografie immagini di $S_1 S_2 \ldots S_k$. Le corrispondenze $S_1 S_2 \ldots S_k$ sono dunque funzioni razionali di S, e quindi ogni corrispondenza della rete è funzione razionale di S.

19. Dal teorema dimostrato discendono varie notevoli conseguenze:

a) *Le corrispondenze simmetriche contenute in un ordine $o(T)$ costituiscono un ordine.*

Poichè le corrispondenze a valenza sono contenute in qualsiasi ordine, è chiaro che ogni ordine contiene sempre corrispondenze simmetriche; e siccome ogni combinazione lineare di più corrispondenze simmetriche è pure una corrispondenza simmetrica, si deduce intanto che le corrispondenze simmetriche dell'ordine $o(T)$ formano una rete Σ. Per il teorema precedente può scegliersi in Σ una corrispondenza H tale che le corrispondenze di Σ sono tutte funzioni razionali di H; la rete Σ è dunque contenuta nell'ordine $o(H)$. Ma poichè ogni funzione razionale di una corrispondenza simmetrica H è pure simmetrica e l'ordine $o(H)$ è contenuto in $o(T)$, si deduce che $o(H)$ è formato da corrispondenze simmetriche di $o(T)$, cioè $o(H)$ è contenuto in Σ. Ne segue che la rete Σ coincide con l'ordine $o(H)$.

Se dunque l'ordine $o(T)$ è irriducibile, dovrà essere il grado di $o(H)$ un divisore del grado di $o(T)$. Dal che segue il corollario:

Un ordine irriducibile che ha per grado un numero primo o è tutto di corrispondenze simmetriche, o le corrispondenze simmetriche contenute in esso sono a valenza.

b) *Le corrispondenze comuni a due ordini costituiscono un ordine.*

Poichè un ordine è una rete, è chiaro che le corrispondenze comuni a due ordini formano una rete. Indichiamo con Σ la rete delle corrispondenze comuni agli ordini $o(T)$ $o(T_1)$, e in essa si scelga una corrispondenza H tale che tutte le corrispondenze di Σ siano funzioni razionali di H. La rete Σ è contenuta in $o(H)$, ma $o(H)$ è contenuto in $o(T)$ e in $o(T_1)$ e quindi in Σ; dunque Σ ed $o(H)$ coincidono.

20. Siano $o(T)$ $o(T^{-1})$ gli ordini generati da due corrispondenze l'una inversa dell'altra e si indichi con $o(T,\ T^{-1})$ l'ordine costituito dalle corrispondenze comuni. Se le corrispondenze T, T^{-1} sono l'una funzione razionale dell'altra, si ha $o(T) = o(T^{-1}) = o(T,\ T^{-1})$. In ogni caso $o(T)$ e $o(T^{-1})$ sono biunivocamente riferiti, essendo omologhe due loro corrispondenze inversa l'una dell'altra, e in questo riferimento $o(T,\ T^{-1})$ corrisponde a se stesso; $o(T,\ T^{-1})$ contiene cioè l'inversa di ogni sua corrispondenza. Si può inoltre provare che *ogni corrispondenza di $o(T,\ T^{-1})$ è funzione razionale della sua inversa*

Si considerino infatti due corrispondenze $S\ S^{-1}$, l'una inversa dell'altra, di $o(T,\ T^{-1})$; siano $\Gamma\ \Gamma'$ le omografie immagini di queste corrispondenze e indichiamo con $S_{q_1-1}\ S_{q_2-1} \dots S_{q_n-1}$ gli spazi fondamentali dell'omografia Ω immagine di T associati alle radici $\theta_1\ \theta_2 \dots \theta_n$ della sua equazione minima. Supposto $l S = f(T)$, $l' S^{-1} = \varphi(T)$, lo spazio S_{q_i-1} è contenuto in due spazi fondamentali di $\Gamma\ \Gamma'$, associati alle radici $\frac{1}{l} f(\theta_i)$, $\frac{1}{l'} \varphi(\theta_i)$ delle rispettive equazioni caratteristiche (n.° 5); ed è anche contenuto in due spazi fondamentali delle omografie $\Gamma + \Gamma'$, $\Gamma - \Gamma'$ corrispondenti alle radici

$$\frac{1}{l} f(\theta_i) + \frac{1}{l'} \varphi(\theta_i), \qquad \frac{1}{l} f(\theta_i) - \frac{1}{l'} \varphi(\theta_i).$$

Ma essendo $\Gamma + \Gamma'$ immagine della corrispondenza simmetrica $S + S^{-1}$, e $\Gamma - \Gamma'$ immagine della corrispondenza emisimmetrica $S - S^{-1}$, queste ultime radici dovranno risultare l'una reale, l'altra immaginaria pura; donde segue che $\frac{1}{l} f(\theta_i)$, $\frac{1}{l'} \varphi(\theta_i)$ sono numeri immaginari coniugati. Si deduce di qui che se $\alpha\,\alpha'$ sono due spazi fondamentali di $\Gamma\,\Gamma'$ associati a radici immaginarie coniugate delle rispettive equazioni caratteristiche, ogni spazio fondamentale di Ω contenuto in α è anche contenuto in α' e viceversa. E poichè gli spazi fondamentali di Ω contenuti in α e in α' appartengono a questi spazi, dovrà essere $\alpha = \alpha'$. Ma allora $\Gamma\,\Gamma'$ hanno comuni gli spazi fondamentali e perciò S ed S^{-1} sono l'una funzione razionale dell'altra.

È chiaro inversamente che se una corrispondenza S di $o(T)$ è funzione razionale di S^{-1}, sarà anche funzione razionale di T^{-1} ed appartiene quindi ad $o(T, T^{-1})$. L'ordine $o(T, T^{-1})$ contiene dunque tutte e sole le corrispondenze di $o(T)$ funzioni razionali delle loro inverse.

Corollario. In particolare, se T è funzione razionale di T^{-1}, si ha:

Se un ordine $o(T)$ coincide col suo inverso, ogni ordine contenuto in $o(T)$ coincide pure col suo inverso.

21. Nella rappresentazione geometrica, che abbiamo data altrove ([28]), nella quale le corrispondenze della curva C sono rappresentate dai punti razionali di uno spazio lineare Σ, i due ordini $o(T)$ $o(T^{-1})$ hanno per immagine due S_{n-1} corrispondenti nell'omografia involutoria I che ha per spazi di punti uniti l'S_{μ_1-1} e l'S_{μ_2-1} immagini delle reti delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche di C.

L'ordine $o(T, T^{-1})$ è rappresentato dallo spazio S_{m-1}, trasformato in sè da I, intersezione dei suddetti S_{n-1}. In S_{m-1} è contenuto il punto di S_{μ_1-1} immagine delle corrispondenze a valenza. Se dunque S_{m-1} non è tutto contenuto in S_{μ_1-1}, dovrà congiungere un S_{ν_1-1} di S_{μ_1-1} con un S_{ν_2-1} di S_{μ_2-1}, e sarà $m = \nu_1 + \nu_2$. Segue di qui la condizione perchè i due ordini $o(T)$ $o(T^{-1})$ coincidano; occorre e basta, perchè ciò avvenga, che sia $n = \nu_1 + \nu_2$. Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una corrispondenza T sia funzione razionale della sua inversa, è che il grado dell'equazione minima di T uguagli la somma dei numeri delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti che sono funzioni razionali di T.

22. Vogliamo ora stabilire alcune proprietà di un ordine $o(T)$ coincidente con l'inverso, nell'ipotesi che $o(T)$ sia irriducibile.

Sia S una corrispondenza di $o(T)$ la quale possegga una valenza reale. La S^{-1}, che è funzione razionale di S, avrà la stessa valenza associata al

([28]) C. Rosati, loc. cit. ([18]).

medesimo sistema d'integrali di 1.ª specie, e la $S - S^{-1}$ avrà una valenza nulla. Ma poichè $S - S^{-1}$ è pure contenuta in $o(T)$ e l'ordine $o(T)$ è irriducibile, dovrà essere (n.° 15) $S - S^{-1} \equiv 0$, cioè la S è una corrispondenza simmetrica.

In modo analogo si dimostra che se una corrispondenza S di $o(T)$ ammette una valenza immaginaria pura, la S è emisimmetrica.

Infine si ammetta che in $o(T)$ sia contenuta una corrispondenza S, di cui una valenza abbia per modulo $\sqrt{k}$, essendo k un intero positivo. La $S^{-1}S$ possiede allora la valenza intera $-k$, cioè $S^{-1}S - kI$, contenuta in $o(T)$, ha una valenza nulla. Ne segue che $S^{-1}S \equiv kI$, cioè la S è una corrispondenza Hermitiana. Si ha dunque:

In un ordine irriducibile $o(T)$ coincidente con l'inverso ogni corrispondenza che ha una valenza reale è simmetrica, una corrispondenza che ha una valenza immaginaria pura è emisimmetrica, una corrispondenza di cui una valenza ha per modulo $\sqrt{k}$, con k intero, è Hermitiana.

Abbiamo visto nel n.° precedente che un ordine $o(T)$ del grado n coincidente con l'inverso, se non è tutto di corrispondenze simmetriche, contiene due reti indipendenti Σ_1 Σ_2 di specie ν_1 ν_2, una di corrispondenze simmetriche, l'altra di emisimmetriche ed è $n = \nu_1 + \nu_2$. Poichè la rete Σ_1 è un ordine, se $o(T)$ è irriducibile, dovrà essere ν_1 un divisore di n (n.° 17) e quindi anche di ν_2.

Si scelga ora in Σ_2 una corrispondenza K di cui tutte le corrispondenze di Σ_2 siano funzioni razionali, e si consideri l'ordine $o(K)$.

Essendo K una corrispondenza non speciale, la sua equazione minima ammette radici tutte immaginarie pure e nessuna di esse è nulla; il grado di $o(K)$ sarà dunque un numero pari $2h$. Se ora S è una corrispondenza di $o(K)$, sarà

$$lS \equiv a_0 K^{2h-1} + a_1 K^{2h-2} + a_2 K^{2h-3} + \cdots + a_{2h-2} K + a_{2h-1} I\,; \tag{8}$$

di qui, ricordando che una potenza di K è simmetrica o emisimmetrica secondochè l'esponente è pari o dispari, si deduce

$$lS^{-1} \equiv -a_0 K^{2h-1} + a_1 K^{2h-2} - a_2 K^{2h-3} + \cdots - a_{2h-2} K + a_{2h-1} I; \tag{9}$$

e dalle (8) (9), sommando e sottraendo, si ottiene

$$l(S + S^{-1}) \equiv 2a_1 K^{2h-2} + 2a_3 K^{2h-4} + \cdots + 2a_{2h-1} I$$
$$l(S - S^{-1}) \equiv 2a_0 K^{2h-1} + 2a_2 K^{2h-3} + \cdots + 2a_{2h-2} K.$$

Se ora ammettiamo che S sia simmetrica ($S - S^{-1} \equiv 0$) ovvero emisimmetrica ($S + S^{-1} \equiv 0$), dovrà essere nel 1.° caso $a_0 = a_2 = \cdots = a_{2h-2} = 0$, e nel 2.° caso $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2h-1} = 0$. Ciò significa che nell'ordine $o(K)$ le corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche costituiscono due reti di specie h. Ma poichè $o(K)$ è contenuto in $o(T)$ le due reti saranno contenute rispettivamente in Σ_1 Σ_2; si avrà dunque $h \leq \nu_1$ $h \leq \nu_2$. Ma per il modo con cui è stata scelta K, è Σ_2 la rete delle corrispondenze emisimmetriche di $o(K)$, e perciò $h = \nu_2$. Ma allora è $\nu_2 \leq \nu_1$ ed essendo ν_1 un divisore di ν_2, dovrà infine aversi $\nu_1 = \nu_2$. Si ottiene dunque il notevole risultato:

In un ordine irriducibile $o(T)$ coincidente con l'inverso, se non è tutto di corrispondenze simmetriche, il numero delle corrispondenze simmetriche indipendenti uguaglia quello delle emisimmetriche. Inoltre come generatrice dell'ordine può scegliersi una corrispondenza emisimmetrica K e le corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche dell'ordine sono date da funzioni razionali contenenti soltanto potenze pari o dispari di K.

Gli ordini irriducibili coincidenti coi loro inversi sono dunque quelli che ammettono come generatrice o una corrispondenza simmetrica o una emisimmetrica.

§ 6. La varietà di Jacobi V_p.

a) Le corrispondenze simmetriche della curva C e i sistemi algebrici contenuti in V_p.

23. Si consideri la varietà di Jacobi ([28]) relativa alla curva C, cioè la varietà algebrica a p dimensioni V_p i cui punti corrispondono biunivocamente senza eccezione alle serie lineari g_p di ordine p di C. Fissato sulla riemanniana di C un sistema di retrosezioni, si indichino con $j_1(\zeta)$, $j_2(\zeta)$, $\ldots j_p(\zeta)$ i valori nel punto generico ζ di C dei p integrali normali di 1^a specie re-

([28]) Cfr. la Memoria di G. Castelnuovo: *Sulle funzioni abeliane* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXX, serie 5ª (1921)], Nota III: *Le varietà di* Jacobi.

lativi al detto sistema e sia

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0\ldots 0 & \tau_{11}\ldots\tau_{1p} \\ 0 & 1\ldots 0 & \tau_{21}\ldots\tau_{2p} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 & 0\ldots 1 & \tau_{p1}\ldots\tau_{pp} \end{matrix}\right| \tag{10}$$

la tabella dei loro periodi. La V_p si può allora rappresentare uguagliando le coordinate cartesiane di un punto di S_{p+1} a $p+1$ funzioni abeliane indipendenti dei p parametri

$$u_i = j_i(\zeta_1) + j_i(\zeta_2) + \cdots + j_i(\zeta_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

con la matrice (10) dei periodi.

In V_p esiste un sistema algebrico ∞^p, $\{\Theta\}$, di varietà a $p-1$ dimensioni, ciascuna delle quali si ottiene annullando una funzione ϑ del 1° ordine a caratteristiche nulle delle p variabili $u_1 u_2 \ldots u_p$. I punti di una varietà Θ rappresentano le g_p contenute in una g_{2p-1}^{p-1}. Alle g_{2p-1}^{p-1} aventi un punto fisso corrispondono varietà Θ (*speciali*) costituenti un sistema ∞^1 di grado 1 e di indice p, birazionalmente identico a C. Le varietà Θ speciali contengono poi tutte la W_{p-2} rappresentante l'insieme delle g_p speciali di C. Ogni altra varietà algebrica a $p-1$ dimensioni Φ di V_p, se non è contenuta nel sistema $\{\Theta\}$ o in un suo multiplo, si ottiene annullando una funzione intermediaria φ. Ad ogni funzione intermediaria è associato un determinante gobbo simmetrico di ordine $2p$ costituito da interi m_{ik} (*interi caratteristici* di φ) e quindi una forma bilineare alternata

$$\sum_{ik}^{1\ldots 2p} m_{ik}\, x_i\, y_k. \tag{11}$$

Le condizioni cui devono soddisfare gli interi m_{ik} perchè siano caratteristici di un sistema di funzioni intermediarie di V_p sono state stabilite recentemente per via diversa da Lefschetz [29] e da Castelnuovo [30]; nel

---

[29] S. Lefschetz, *Sur le théorème d'existence des fonctions abéliennes* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXX, serie 5ª (1921)].

[30] G. Castelnuovo, *Sulle funzioni abeliane*; Nota I: *Le funzioni intermediarie* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXX, serie 5ª (1921)].

caso $|m_{ik}| \neq 0$ esse si esprimono dicendo che la forma

$$\sum_{ik}^{1\ldots 2p} M_{ik}\,\xi_i\,\eta_k \tag{12}$$

reciproca della (11) si annulla sostituendo in luogo delle $\xi\ \eta$ gli elementi di due righe qualsiansi della matrice (10) e conserva sempre segno positivo quando in luogo delle $\xi\ \eta$ si pongano le parti reali e i coefficienti dell'unità immaginaria dei periodi di una qualsiasi combinazione lineare di $u_1\,u_2\ldots u_p$.

Nella nostra rappresentazione geometrica ([31]) la detta condizione equivale all'altra che il sistema nullo Σ definito annullando la primitiva forma $\Sigma\, m_{ik}\, x_i\, y_k$ trasforma in sè lo spazio α e la forma stessa conserva segno costante positivo sostituendo alle x, y le parti reali e i coefficienti dell'immaginario i delle coordinate di un punto variabile in α ([32]). Dunque Σ è un sistema nullo riemanniano *principale* nel senso che è stato definito al n° 1, ed è quindi immagine di una corrispondenza simmetrica S (e delle infinite altre ad essa equivalenti o residue) le cui valenze hanno tutte ugual segno.

Se poi il determinante $|m_{ik}|$ è nullo e di caratteristica $2\,q$, la funzione φ, con una opportuna sostituzione unimodulare sui periodi e una conveniente trasformazione lineare dei parametri, può ridursi a contenere soltanto q variabili $U_1\ U_2\ \ldots\ U_q$, le quali costituiscono su V_p un sistema regolare

---

([31]) Essa differisce da quella di SCORZA in ciò: che per noi lo spazio α dei periodi, anzichè essere quello congiungente i punti aventi per coordinate le orizzontali della matrice (10), è l'intersezione degli iperpiani aventi le coordinate medesime.

([32]) La 1ª parte subito si giustifica osservando che come la (12) si annulla sostituendo alle ξ, η le coordinate di due iperpiani per α, così la (11) si annullerà sostituendo alle x, y le coordinate di due punti di α. Per dimostrare la 2ª parte, si consideri in α un punto di coordinate $x_r = x'_r + i\,x''_r$ e siano $\xi_r = \xi'_r + i\,\xi''_r$ le coordinate del suo iperpiano polare nel sistema nullo Σ. Si avrà allora

$$\xi'_i = \sum_r m_{ri}\, x'_r, \qquad \xi''_k = \sum_s m_{sk}\, x''_s,$$

e la condizione

$$\Sigma\, M_{ik}\, \xi'_i\, \xi''_k > 0$$

si trasforma nell'altra

$$\sum_{ik} M_{ik} \sum_{rs} m_{ir}\, m_{ks}\, x'_r\, x''_s = \sum_{rs} x'_r\, x''_s \sum_k m_{ks} \sum_i M_{ik}\, m_{ir} = |\, m_{ik}\,| \sum_{rs} m_{rs}\, x'_r\, x''_s > 0$$

e quindi nella

$$\sum_{rs} m_{rs}\, x'_r\, x''_s > 0,$$

perchè $|\, m_{ik}\,|$ è notoriamente positivo.

riducibile d'integrali di 1ª specie. La V_p contiene allora una congruenza ∞^q di indice uno di varietà algebriche w_{p-q} e la φ si riduce a una funzione intermediaria della varietà abeliana W_q immagine di detta congruenza.

La medesima sostituzione unimodulare eseguita sulle x, y muta la forma $\sum m_{ik} x_i y_k$ in un'altra contenente soltanto due serie di $2q$ variabili, la quale, riferita alla W_q, soddisfa alle condizioni del caso precedentemente considerato. Si conclude allora che il sistema nullo degenere rappresentato dall'equazione $\sum m_{ik} x_i y_k = 0$ è *semi-principale* e quindi immagine di una corrispondenza speciale S (e di quelle ad esse equivalenti o residue) la quale possiede, all'infuori della valenza nulla, valenze tutte di ugual segno.

Si ha dunque:

Ad ogni sistema algebrico completo di varietà a $p-1$ dimensioni contenuto in V_p si possono associare sulla curva C due classi $(\pm S)$ di corrispondenze simmetriche dotate di valenze tutte di ugual segno e inversamente [33].

Osservazione I. Il sistema algebrico di V_p associato alle due classi di corrispondenze a valenza ordinaria $\pm k$ è manifestamente il sistema $\{k\Theta\}$.

Osservazione II. Riprendendo le considerazioni geometriche esposte al n.° 1, e le notazioni ivi adoperate, si può osservare che, se μ_1 è il numero base delle corrispondenze simmetriche di C, queste formano una rete di specie μ_1 assimilabile all'insieme dei punti razionali di un S_{μ_1-1} razionale dello spazio Σ'. Poichè il punto O di S_{μ_1-1} immagine delle corrispondenze a valenza ordinaria appartiene alla regione I, è chiaro (facendo muovere con continuità una retta reale di S_{μ_1-1} intorno ad O) che la sezione di F con S_{μ_1-1} è una ipersuperficie f di ordine p di questo spazio contenente infiniti punti reali, dei quali quelli appartenenti alla falda $F^{(1)}$ costituiscono una falda reale $f^{(1)}$ di f, atta a dividere i punti reali di S_{μ_1-1} in due regioni i, e corrispondenti alle regioni I, E di Σ'.

Da quanto precede risulta dunque che i punti razionali di S_{μ_1-1} interni ad $f^{(1)}$ e quelli eventualmente appartenenti ad $f^{(1)}$ sono immagini dei sistemi algebrici di V_{p-1} contenuti in V_p, un tal punto rappresentando un sistema e tutti i suoi multipli.

---

(33) Più precisamente la classe (S) definita, con le notazioni di Hurwitz, dagl'interi caratteristici

$$g_{ik} = -g_{ki} = m_{ik}, \quad G_{ik} = h_{ki} = m_{i,p+k}, \quad H_{ik} = -H_{ki} = -m_{p+i,p+k} \quad (i, k = 1, 2, \dots p)$$

ha le valenze tutte negative; quella opposta ha le valenze tutte positive. Omettiamo la facile dimostrazione.

b) Le corrispondenze della curva C e le trasformazioni unirazionali di V_p.

24. Sia data su C una corrispondenza non speciale T rappresentata dalle formole di HURWITZ

$$j_i(x'_1)+j_i(x'_2)+\cdots+j_i(x'_n)=\pi_{i1}j_1(x)+\cdots+\pi_{ip}j_p(x)+\pi_i$$
$$(i=1,\ 2,\ldots\ p)$$

e sia $\Delta \neq 0$ il suo determinante caratteristico.

È noto che, avendo le u_i il significato del n.° precedente, le equazioni

$$u'_i=\pi_{i1}u_1+\pi_{i2}u_2+\cdots+\pi_{ip}u_p+\pi_i \qquad (i=1,\ 2,\ldots\ p) \tag{13}$$

definiscono una trasformazione unirazionale di V_p, nella quale al punto (u) corrisponde *un* punto (u'), e ad (u') corrispondono Δ punti (u). Moltiplicando la detta trasformazione per le trasformazioni ordinarie di 1ª specie di V_p, cioè variando nelle (13) con continuità le π_i, si ottengono ∞^p trasformazioni, al cui insieme daremo il nome di *schiera*. Si ha dunque:

Ad ogni classe (T) di corrispondenze sulla curva C, avente il determinante caratteristico $\Delta \neq 0$, si può associare una schiera di trasformazioni unirazionali $(1, \Delta)$ della varietà di Jacobi V_p e inversamente.

Sostituendo alle variabili u_i delle nuove variabili U_i, che siano convenienti combinazioni lineari delle u_i, è chiaro che alle (13) può darsi la forma

$$U'_i=\rho_i U_i+k_i. \tag{14}$$

I numeri ρ_i, che coincidono a meno del segno con le valenze di T, si diranno i ***moltiplicatori*** della trasformazione (13) ed il numero di volte che un moltiplicatore è ripetuto nelle (14), cioè la dimensione della corrispondente valenza di T, si dirà la ***molteplicità*** del moltiplicatore stesso. Ad un moltiplicatore di molteplicità q è associato un sistema di q variabili, alle quali possono sempre sostituirsi q loro combinazioni lineari indipendenti, senza che muti la forma delle (14).

Se l'equazione minima di T è irriducibile, nelle (14) è costante la molteplicità complessiva di ogni coppia di moltiplicatori immaginari coniugati ed è eguale al doppio della molteplicità di un moltiplicatore reale (n.° 16).

La schiera di trasformazioni associata alla classe $(-T)$, si deduce dalla (14) cambiando il segno ai moltiplicatori, cioè moltiplicandone le trasformazioni per una trasformazione ordinaria di 2.ª specie. Alla classe (T^{-1}) è associata una schiera di trasformazioni unirazionali $(1, \Delta)$

$$V'_i = \rho_i^{(0)} V_i + k_i \qquad (i = 1, 2, \ldots p) \tag{15}$$

coi moltiplicatori immaginari coniugati di quelli della schiera (14).

Due moltiplicatori di (14), (15) immaginari coniugati hanno la stessa molteplicità, ma sono diversi i sistemi di variabili ad essi associati. I sistemi medesimi coincidono quando e soltanto quando le corrispondenze T, T^{-1} sono l'una funzione razionale dell'altra.

Osservazione. Supponiamo che T sia speciale, cioè sia $\Delta = 0$ e di caratteristica $2q$; le (14) assumono allora la forma

$$U'_1 = k_1, \ldots\ U'_q = k_q,\ U'_{q+1} = \rho_{q+1}\, U_{q+1} + k_{q+1}, \ldots\ U'_p = \rho_p\, U_p + k_p$$

e i sistemi di variabili $(U_1 \ldots U_q)$ $(U_{q+1} \ldots U_p)$ costituiscono su V_p due sistemi regolari riducibili d'integrali di 1.ª specie, fra loro complementari. La V_p contiene allora due congruenze abeliane di indice uno; una Σ_{p-q} di ∞^{p-q} varietà w_q $(U_{q+1} = \text{cost.}, \ldots\ U_p = \text{cost.})$, l'altra Σ_q di ∞^q varietà w_{p-q} $(U_1 = \text{cost.}, \ldots\ U_q = \text{cost.})$, ed ogni trasformazione della schiera (14) riferisce in modo unirazionale la congruenza Σ_{p-q} ed una varietà della congruenza Σ_q.

25. Supposto $\Delta \neq 0$, facendo descrivere al punto (u') una varietà del sistema $\{\Theta\}$, i Δ punti corrispondenti nella trasformazione (13) descrivono una varietà intermediaria del sistema $\{\Phi\}$, il quale è associato alle classi di corrispondenze simmetriche $(\pm\, T\, T^{-1})$ [34]. Se dunque T è una corrispondenza Hermitiana di ordine k, cioè se $T\,T^{-1} \equiv k\,I$, in forza dell'Osservazione I del n.° 23, il sistema $\{\Phi\}$ coincide col sistema $\{k\,\Theta\}$. Abbiamo cioè:

Ad ogni corrispondenza Hermitiana di ordine k è associata una schiera di trasformazioni $(1, k^p)$ di V_p che trasforma ogni varietà del sistema $\{\Theta\}$ in una varietà del sistema $\{k\,\Theta\}$; in particolare ad ogni corrispondenza biunivoca singolare di C è associata una schiera di trasformazioni birazionali singolari di V_p che trasformano in sè il sistema $\{\Theta\}$ [35].

---

(34) Castelnuovo, loc. cit. (11).

(35) A. Comessatti, *Sulle trasformazioni Hermitiane delle varietà di* Jacobi [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. L (1915)].

c) Il teorema di Dirichlet sulle unità dei corpi algebrici e le trasformazioni birazionali di V_p.

26. Sia dato sulla curva C un ordine irriducibile $o(T)$ e sia

$$\psi(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_{n-1} T + a_n I \equiv 0$$

l'equazione minima della corrispondenza generatrice. Le radici $\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_n$ di $\psi(z) = 0$ sono anche radici dell'equazione caratteristica di T ed hanno in essa la stessa molteplicità q (n.° 16).

Si consideri ora una corrispondenza S generica di $o(T)$. Se è $lS \equiv f(T)$, l'equazione caratteristica di S ammette pure, con la molteplicità q, le radici

$$\xi_1 = \frac{1}{l} f(\theta_1), \quad \xi_2 = \frac{1}{l} f(\theta_2), \ldots, \quad \xi_n = \frac{1}{l} f(\theta_n);$$

e al variare di S in $o(T)$ i numeri $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$, che sono interi algebrici, variano nei rispettivi corpi algebrici coniugati individuati da $\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_n$, ed assumono infiniti valori i cui insiemi indicheremo con $o_1 o_2 \ldots o_n$.

È chiaro che l'insieme o_1 (e lo stesso dicasi per $o_2 \ldots o_n$) gode delle seguenti proprietà:

a) In o_1 esistono n numeri indipendenti, cioè non legati da alcuna equazione lineare omogenea a coefficienti interi;

b) L'insieme o_1 si riproduce per addizione, sottrazione, moltiplicazione;

c) In o_1 esiste l'unità.

Secondo la denominazione usata nella teoria dei corpi algebrici ([36]), l'insieme o_1 costituisce dunque un *ordine* nel corpo algebrico individuato dalla radice θ_1; diremo perciò che $o_1 o_2 \ldots o_n$ sono gli *ordini coniugati* associati ad $o(T)$.

Ogni numero di o_1 individua una classe di corrispondenze appartenente ad $o(T)$. Invero, se S S' sono due corrispondenze di $o(T)$ associate allo stesso numero ξ di o_1, alla corrispondenza $S - S'$, che è pure di $o(T)$, è associato in o_1 il numero zero. Ma poichè in $o(T)$ non esistono corrispondenze speciali, dovrà essere $S - S' \equiv 0$, e quindi S S' appartengono alla medesima classe. E siccome ad ogni classe di corrispondenze su C si può

([36]) Cfr. ad es. P. Bachmann, *Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper* (Leipzig, Teubner, 1905), pag. 54.

associare una schiera di trasformazioni unirazionali di V_p (n.° 24), ogni numero di o_1 individuerà una tale schiera. Sia $\xi = \xi_1$ un numero dell'ordine $o = o_1$ e $\xi_2 \dots \xi_n$ siano i suoi corrispondenti negli ordini coniugati $o_2 \dots o_n$; se S è una corrispondenza della classe individuata da ξ, l'equazione caratteristica di S ammette le radici $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ con la molteplicità q, ed allora il determinante caratteristico di S sarà

$$\Delta = (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)^q = [N(\xi)]^q,$$

dove il simbolo $N(\xi)$ indica la *norma* del numero ξ, secondo la denominazione e la notazione della teoria dei corpi algebrici. Si ha dunque:

Ogni numero ξ dell'ordine o individua su V_p una schiera di trasformazioni unirazionali $\{1, [N(\xi)]^q\}$.

Le trasformazioni medesime risultano dunque birazionali quando è $[N(\xi)]^q = 1$, cioè quando $N(\xi) = 1$ se q è dispari, $N(\xi) = \pm 1$ se q è pari. Nel 1° caso ξ è una unità di o_1 di norma positiva, nel 2° caso è una unità qualsiasi. Ma quando q è dispari, le radici $\theta_1 \dots \theta_n$ dell'equazione fondamentale $\psi(z) = o$ sono tutte immaginarie ed ogni numero del corpo $\{\theta_1\}$, in particolare ogni unità di o_1, possiede norma positiva; si conclude pertanto:

Ogni unità dell'ordine o individua su V_p una schiera di trasformazioni birazionali.

In particolare le unità ± 1 di o individuano le due schiere di trasformazioni ordinarie di 2ª e di 1ª specie.

Poichè le trasformazioni di una schiera si deducono da una di esse moltiplicandola per le trasformazioni ordinarie di 1ª specie, in ogni schiera esiste *una* trasformazione che lascia fermo un punto prefissato P di V_p.

Se dunque G indica l'insieme delle trasformazioni birazionali associate alle unità di o e che lasciano fermo P, fra G e le unità di o esiste corrispondenza biunivoca; e la corrispondenza è tale che se G', G'' sono le trasformazioni di G corrispondenti alle unità η', η'' di o, all'unità $\eta' \eta''$ corrisponde la trasformazione $G' G''$. E poichè G contiene l'identità (corrispondente all'unità $+1$ di o) ed insieme ad una trasformazione contiene anche l'inversa (perchè l'unità reciproca di una unità di o è pure contenuta in o), si conclude che *G è un gruppo.*

La struttura di questo gruppo si deduce allora invocando il teorema di Dirichlet sulle unità dei corpi algebrici, il quale vale, com'è noto (37), anche

(37) P. Bachmann, loc. cit. (36), Capitolo 8°.

per gli ordini contenuti in tali corpi. Indichi ν il numero complessivo delle radici reali e delle coppie di radici immaginarie coniugate dell'equazione minima di T; il teorema di Dirichlet afferma che, detto $m \geq 2$ il numero di radici d'unità (unità ridotte) contenute in o, esiste in o un sistema di $\nu - 1$ *unità fondamentali* $\sigma_1\, \sigma_2 \ldots \sigma_{\nu-1}$ tale che tutte le unità η di o sono date ciascuna una sola volta dalla formula

$$\eta = \rho^i \sigma_1^{n_1} \sigma_2^{n_2} \cdots \sigma_{\nu-1}^{n_{\nu-1}},$$

nella quale ρ indica una radice primitiva m^{ma} dell'unità, i percorre i valori interi da 1 ad m, ed $n_1\, n_2 \ldots n_{\nu-1}$ assumono tutti i possibili valori interi da $-\infty$ a $+\infty$. Si può dunque enunciare il teorema:

Sia data sulla curva C una corrispondenza singolare T che abbia l'equazione minima irriducibile. Se ν indica il numero complessivo delle radici reali e delle coppie di radici complesse coniugate di questa equazione, la varietà di Jacobi *V_p relativa a C possiede un gruppo G di trasformazioni birazionali permutabili, il quale è finito e ciclico se $\nu = 1$, è infinito discontinuo se $\nu > 1$. In questo 2° caso le trasformazioni di G sono date ciascuna una sola volta dalla formula*

$$G = g^r G_1^{n_1} G_2^{n_2} \ldots G_{\nu-1}^{n_{\nu-1}},$$

nella quale g indica una trasformazione ciclica di V_p avente un certo periodo m, $G_1\, G_2 \ldots G_{\nu-1}$ un sistema fondamentale di trasformazioni aperiodiche, il numero r percorre i valori interi da 1 ad m e gli esponenti $n_1\, n_2 \ldots n_{\nu-1}$ assumono tutti i valori interi da $-\infty$ a $+\infty$.

27. All'ordine $o(T^{-1})$ inverso di $o(T)$ corrisponde su V_p un altro gruppo G' di trasformazioni birazionali avente la medesima struttura del gruppo G. Se la corrispondenza T è funzione razionale della sua inversa, i due gruppi $G\, G'$ coincidono, ed allora se in una qualsiasi trasformazione di G si cambiano i moltiplicatori nei loro immaginari coniugati, si ottiene ancora una trasformazione di G.

Se T non è funzione razionale di T^{-1} i due gruppi $G\, G'$ sono *in generale* distinti, e G' si deduce da G mutando ancora i moltiplicatori di ogni trasformazione di G nei loro immaginari coniugati, ma al tempo stesso dovranno cambiarsi i sistemi di variabili associati ai detti moltiplicatori.

Nell'ipotesi che T non sia funzione razionale di T^{-1}, un caso in cui si può con certezza affermare che i due gruppi $G\, G'$ sono distinti, è quando fra le valenze di T ne esiste almeno una reale. Se infatti la radice θ_1 dell'equazione minima di T è reale, distribuiamo gli ordini coniugati $o_1\, o_2 \dots o_n$ in due gruppi A, B ponendo in A l'ordine o_1 e in B gli ordini rimanenti. Per il lemma fondamentale da cui muove il teorema di Dirichlet, si può affermare che esiste in $o = o_1$ una unità $\eta = \eta_1$ di modulo < 1 e tale che le corrispondenti unità $\eta_2\, \eta_3 \dots \eta_n$ degli ordini coniugati hanno tutte il modulo > 1.

L'unità η, essendo distinta dalle sue coniugate, può assumersi come numero generatore del corpo algebrico cui appartiene l'ordine o, ed allora una corrispondenza H di $o(T)$ associata ad η può assumersi come generatrice di $o(T)$; si avrà dunque $o(H) = o(T)$ e quindi $o(H^{-1}) = o(T^{-1})$. Segue di qui che la trasformazione di G' corrispondente ad H^{-1} non fa parte di G, chè, altrimenti, dovrebbe H^{-1} esser contenuto in $o(H)$, cioè $o(H^{-1}) = o(H)$, e quindi $o(T^{-1}) = o(T)$, contro il supposto.

Si supponga sempre che T non sia funzione razionale di T^{-1}, e si consideri l'ordine $o(T,\ T^{-1})$ comune a $o(T)$ e ad $o(T^{-1})$. Questo è irriducibile e coincidente con l'inverso; se dunque non è tutto di corrispondenze simmetriche, in esso il numero delle corrispondenze simmetriche indipendenti uguaglia quello delle emisimmetriche (n.° 22). Verificandosi questo secondo caso, può ancora affermarsi che $G\, G'$ sono distinti. Invero sia ν il numero delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti di $o(T,\ T^{-1})$; dovrà essere 2ν un divisore del grado n di $o(T)$, cioè $n = 2k\nu$ $(k > 1)$. L'equazione minima di grado 2ν della corrispondenza generatrice di $o(T,\ T^{-1})$ (per la quale può scegliersi una corrispondenza emisimmetrica) ha radici tutte immaginarie. Ed anche quella della corrispondenza T che genera $o(T)$ deve avere radici tutte immaginarie; chè, se essa ammettesse una radice reale, ogni corrispondenza di $o(T)$ avrebbe almeno una valenza reale, contro l'ipotesi che in $o(T)$ esistano corrispondenze emisimmetriche. Se dunque Γ indica il sottogruppo comune a G e a G', cioè il gruppo di trasformazioni birazionali di V_p associato all'ordine $o(T,\ T^{-1})$, il sistema fondamentale di Γ è composto di $\nu - 1$ unità indipendenti, mentre quello di G (o di G') è composto di $k\nu - 1$ unità. Si conclude che Γ è un sottogruppo proprio di G e quindi G e G' sono distinti.

28. Si consideri in particolare il caso di un ordine irriducibile $o(T)$ coincidente con l'inverso.

Se $o(T)$ è tutto di corrispondenze simmetriche, gli ordini coniugati $o_1\, o_2 \dots o_n$ sono tutti reali.

Se $o\,(T)$ contiene anche corrispondenze emisimmetriche, il grado di $o\,(T)$ è pari ($n = 2\nu$) e gli ordini o_1, $o_2 \ldots o_{2\nu}$ sono due a due immaginari coniugati. E poichè $o\,(T)$ contiene l'inversa di ogni sua corrispondenza, ciascuno degli ordini suddetti contiene, insieme ad ogni suo numero, l'immaginario coniugato. Dunque gli ordini o_1, $o_2 \ldots o_{2\nu}$ coincidono due a due; precisamente ogni ordine coincide con l'immaginario coniugato.

L'ordine $o = o_1$ possiede nel 1° caso le sole unità ridotte ± 1, nel 2° caso può contenere anche unità ridotte immaginarie. In ogni caso sappiamo che esse sono in numero pari $2k$ e sono comuni a tutti gli ordini coniugati. Esse hanno poi rispetto alla curva C un importante significato geometrico. Infatti dalla proprietà dimostrata al n.° 22 si deduce che una corrispondenza H di $o\,(T)$ associata ad una unità ridotta di o deve essere Hermitiana del 1° ordine; e allora in una delle due classi $(\pm H)$ o in entrambe, se la curva è iperellittica, è contenuta una corrispondenza biunivoca.

L'ordine $o\,(T)$ contiene dunque un gruppo finito di corrispondenze biunivoche; e l'ordine di questo gruppo sarà $2k$ ovvero k secondochè la curva è o non è iperellittica. Si può ora provare che il detto gruppo è ciclico.

Quando C è iperellittica la cosa è evidente perchè ad una unità ridotta ρ che sia radice primitiva $2k^{ma}$ dell'unità è associata una corrispondenza biunivoca la quale produce con le sue potenze tutte le corrispondenze del gruppo.

Se poi C non è iperellittica, una corrispondenza biunivoca U sarà associata ad una e ad una sola delle unità ridotte $\pm \rho$. Se dunque $n \leq k$ è il periodo di U, dovrà sussistere l'uguaglianza

$$(\pm \rho)^n = 1.$$

In questa dovrà manifestamente prendersi il segno inferiore, onde si avrà

$$\rho^n = (-1)^n.$$

Ma allora dovrà essere $n = k$, e inoltre k deve essere dispari. Si ha dunque:

Se nell'ordine di numeri o associato ad un ordine di corrispondenze $o\,(T)$, irriducibile e coincidente con l'inverso, sono contenute $2\,k$ unità ridotte, la curva C possiede un'involuzione ciclica generata da una corrispondenza biunivoca funzione razionale di T. L'involuzione è dell'ordine $2\,k$ o dell'ordine k secondochè la curva è o non è iperellittica.

29. Vogliamo infine rilevare una proprietà delle unità dell'ordine o associato ad $o\,(T)$, sempre nell'ipotesi che $o\,(T)$ sia irriducibile, coincidente con l'inverso e non costituito tutto di corrispondenze simmetriche.

Indichiamo con $o_1\, o'_1, o_2\, o'_2, \ldots, o_\nu\, o'_\nu$ gli ordini coniugati associati ad $o\,(T)$, essendo o'_k l'ordine immaginario coniugato di o_k e sia

$$\eta = \rho^r\, \sigma_1^{n_1}\, \sigma_2^{n_2} \cdots \sigma_{\nu-1}^{n_{\nu-1}}$$

una qualsiasi unità di o_1; rappresentiamo inoltre con η_0 e con $(\sigma_i)_0$ i numeri immaginari coniugati di η e σ_i. Poichè, come abbiamo sopra notato, i due ordini $o_1\, o'_1$ coincidono, in o_1 sarà contenuta anche l'unità

$$\eta_0 = \rho^{-r}\, (\sigma_1)_0^{n_1}\, (\sigma_2)_0^{n_2} \cdots (\sigma_{\nu-1})_0^{n_{\nu-1}}$$

immaginaria coniugata di η; onde si avrà l'uguaglianza

$$\rho^{-r}\, (\sigma_1)_0^{n_1} \cdots (\sigma_{\nu-1})_0^{n_{\nu-1}} = \rho^s\, \sigma_1^{m_1} \cdots \sigma_{\nu-1}^{m_{\nu-1}} \tag{16}$$

in cui $s, m_1, \ldots, m_{\nu-1}$ sono convenienti numeri interi; e questa continuerà a sussistere cambiando l'unità ridotta ρ e le unità σ_i nelle loro corrispondenti di uno qualunque degli ordini coniugati.

Indicando allora con r_{ik} il modulo dell'unità che corrisponde a σ_i nell'ordine o_k, dalla (16) si deduce

$$r_{1k}^{m_1-n_1}\, r_{2k}^{m_2-n_2} \cdots r_{\nu-1,k}^{m_{\nu-1}-n_{\nu-1}} = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu);$$

e di qui, denotando l_{ik} il logaritmo di r_{ik}, si ottiene:

$$(m_1 - n_1)\, l_{1k} + (m_2 - n_2)\, l_{2k} + \cdots + (m_{\nu-1} - n_{\nu-1})\, l_{\nu-1,k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu).$$

Ma poichè, com'è noto, nella matrice $\| l_{ik} \|$ esiste un determinante di ordine $\nu - 1$ diverso da zero, dovrà essere

$$m_1 = n_1,\ m_2 = n_2, \ldots, m_{\nu-1} = n_{\nu-1},$$

e allora la (16) assume la forma

$$\eta_0 = \rho^{s-r}\, \eta,$$

e si ha la proprietà:

Nell'ordine di numeri o associato a un ordine irriducibile $o\,(T)$, coincidente con l'inverso e non costituito tutto di corrispondenze simmetriche, ogni unità *moltiplicata per una conveniente unità ridotta produce l'unità immaginaria coniugata* [38].

Osservazione. Dal risultato precedente può dedursi una conseguenza notevole. Supposto che la curva non possegga corrispondenze biunivoche singolari, le sole unità ridotte dell'ordine o saranno ± 1, e quindi ogni altra unità η di o, soddisfacendo alla condizione $\eta_0 = \pm \eta$, sarà o reale o immaginaria pura. In tal caso dunque *ad ogni unità di o è associata in $o(T)$ una corrispondenza simmetrica o emisimmetrica.*

§ 7. Applicazione.

30. Si consideri una curva C del genere 2 *semplicemente singolare*, cioè tale che su di essa il numero base delle corrispondenze simmetriche sia $\mu_1 = 2$. Il numero base delle corrispondenze emisimmetriche può allora assumere i valori $\mu_2 = 0, 1, 2$ [39], e poichè l'omografia immagine della corrispondenza generica nel 1° caso è biassale, nel 2° è assiale e nel 3° possiede quattro punti uniti [40], si conclude che sopra la curva C le corrispondenze costituiscono un ordine, il quale è rispettivamente del 2°, del 3° e del 4° grado. Nel 2° caso, che si presenta quando esistono su C due integrali ellittici dei quali uno a moltiplicazione complessa, l'ordine è certo riducibile; nel 1° e nel 3° può essere riducibile o irriducibile, secondochè la curva possiede o no integrali ellittici.

Sia F la superficie di Jacobi relativa a C. Supposto che C non contenga integrali ellittici, e quindi si trovi nelle condizioni del 1° e 3° dei casi suaccennati, esiste su F una serie infinita

$$\ldots \Sigma_{-1}, \quad \Sigma_0, \quad \Sigma_1 \ldots \tag{1}$$

(38) Si può giungere più rapidamente al risultato nel seguente modo.

Nell'ordine o è contenuta insieme all'unità η anche l'unità immaginaria coniugata η_0 e quindi l'unità $\frac{\eta_0}{\eta}$. Ma avendo questa per modulo 1, una corrispondenza dell'ordine $o(T)$ ad essa associata deve essere Hermitiana del 1° ordine (n.° 22); donde segue che $\frac{\eta_0}{\eta}$ è una unità ridotta.

(39) C. Rosati, loc. cit. (1) *a*), Parte 2ª, n.° 16.

(40) G. Scorza, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XLI (1916)], Parte 2ª, n.° 11.

di sistemi algebrici di dimensione, grado, indice e genere due, composti di curve irriducibili prive di punti multipli, e i sistemi di questa serie possono coordinarsi alle soluzioni intere (z, k) dell'equazione di Pell

$$z^2 - \Delta k^2 = 4$$

nella quale Δ indica l'*invariante* (intero, positivo e non quadrato) della relazione singolare di Humbert che lega i periodi normali g, h, g' della C. E se F si trova nelle condizioni del 1° caso ($\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0$), i sistemi (I), o sono tutti di curve birazionalmente identiche, ovvero si distribuiscono in due serie distinte di curve birazionalmente identiche (di guisa che F risulta superficie di Jacobi di due curve non identiche birazionalmente), secondochè la forma $z^2 - \Delta k^2$ può o non può rappresentare il numero -4 ([41]). Cerchiamo ora di completare questo risultato esaminando il caso $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$.

31. Quando è $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$, le corrispondenze della curva costituiscono un ordine irriducibile $o(T)$ del 4° grado, nel quale è contenuto un ordine irriducibile del 2° grado $o(S)$, formato dalle corrispondenze simmetriche di $o(T)$. L'omografia immagine di S è biassiale ed ha per rette di punti uniti due rette distinte, reali e non razionali, appoggiate alle rette $\alpha\, \alpha_0$ dei periodi; l'omografia immagine di T ha soltanto quattro punti uniti nei punti in cui le rette suddette si appoggiano ad $\alpha\, \alpha_0$. Le radici dell'equazione caratteristica di una corrispondenza variabile in $o(T)$ sono interi algebrici che descrivono quattro ordini $o_1\, o'_1$, $o_2\, o'_2$ nei quattro corpi algebrici coniugati definiti dalle radici dell'equazione minima di T, e l'ordine o_1 coincide col suo immaginario coniugato o'_1, e così o_2 coincide con o'_2. Le due radici distinte dell'equazione caratteristica di una corrispondenza variabile in $o(S)$, le quali, cambiate di segno, dànno poi le valenze $\rho_1\, \rho_2$ della corrispondenza medesima, descrivono due ordini $\omega\, \omega'$ del corpo quadratico reale definito dall'equazione minima di S. Poichè una corrispondenza di $o(T)$ che abbia una valenza reale è simmetrica, ω sarà costituito da tutti e soli i numeri reali dell'ordine $o_1 = o'_1$, e così ω' da tutti e soli i numeri reali dell'ordine $o_2 = o'_2$. E siccome ogni corrispondenza simmetrica di valenze $\rho_1\, \rho_2$ ne ammette una (complementare) di valenze $\rho_2\, \rho_1$ ([42]), si deduce che ω coincide con ω' e che quindi gli ordini $o_1\, o'_1\, o_2\, o'_2$ contengono gli stessi numeri reali.

([41]) Loc. cit. ([2]).

([42]) Se infatti $S_1^2 + a_1 S_1 + a_2 I \equiv 0$ è l'equazione minima della corrispondenza S_1 di $o(S)$ avente le valenze $\rho_1\, \rho_2$, la corrispondenza $S_2 \equiv -(S_1 + a_1 I)$, complementare di S_1, possiede le valenze $\rho_2\, \rho_1$.

Quando i due numeri $\rho_1\, \rho_2$ corrispondenti in $\omega\, \omega'$ sono positivi, esiste su C un sistema continuo di corrispondenze *coincidenti* con le loro inverse dotato delle valenze $\rho_1\, \rho_2$, cioè un sistema continuo di serie γ_2^1 con quelle valenze; e se inoltre è $\rho_1\, \rho_2 = 1$, cioè se ρ_1 è una unità positiva e di norma positiva dell'ordine ω, il detto sistema continuo ha il genere virtuale 2, ed ha per immagine su F uno dei sistemi della serie (I), e inversamente ([43]).

I sistemi (I) *possono dunque coordinarsi alle unità positive e di norma positiva dell'ordine* ω ([44]).

32. Ricerchiamo ora direttamente sulla curva i sistemi continui di serie γ_2 ad essa birazionalmente identiche ed aventi il genere virtuale 2.

A tal uopo si consideri in $o(T)$ la classe di corrispondenze associata ai numeri $\eta\, \eta_0\, \eta'\, \eta'_0$ degli ordini coniugati $o_1\, o'_1\, o_2\, o'_2$; in essa quelle soddisfacenti alla condizione di avere il 1° indice uguale a 2, formano un sistema continuo ∞^2, (T), che induce sulla curva un sistema continuo ∞^2 di serie γ_2. Se h è l'indice della γ_2 generica di questo sistema ed S è la corrispondenza simmetrica (h, h) che nasce dalla serie stessa, si avrà

$$T^{-1}\, T = S + hI. \tag{17}$$

Poichè alla T^{-1} sono associati i numeri $\eta_0\, \eta\, \eta'_0\, \eta'$ degli ordini coniugati $o_1\, o'_1\, o_2\, o'_2$, la $T^{-1}\, T$ avrà le valenze $-\eta\, \eta_0$, $-\eta'\, \eta'_0$ ed allora, per una nota relazione ([45]), sarà $\eta\, \eta_0 + \eta'\, \eta'_0$ il difetto di equivalenza della γ_2. Ma questo, per il fatto che la γ_2 è stata scelta genericamente nel suo sistema continuo, coincide con l'indice, onde si avrà $h = \eta\, \eta_0 + \eta'\, \eta'_0$; dalla (17) allora si deduce che le valenze di S cioè della γ_2 sono

$$\rho_1 = h - \eta\, \eta_0 = \eta'\, \eta'_0, \quad \rho_2 = h - \eta'\, \eta'_0 = \eta\, \eta_0.$$

Se ora supponiamo che il sistema continuo di γ_2 indotto da (T) abbia il genere virtuale 2, dovrà aversi

$$\rho_1\, \rho_2 = \eta'\, \eta'_0\, \eta\, \eta_0 = 1,$$

cioè η dovrà essere una unità dell'ordine o ([46]), e inversamente. Dunque:

([43]) C. Rosati, loc. cit. ([2]), n.° 4.

([44]) Nel caso $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0$ il risultato di Comessatti e mio può dunque enunciarsi così: *I sistemi (I) sono tutti di curve birazionalmente identiche o si distribuiscono in due serie distinte di curve birazionalmente identiche, secondochè esistono o no nell'ordine ω unità di norma negativa.*

([45]) C. Rosati, loc. cit. ([1]) *d*), n.° 8.

([46]) Si avverta che, essendo i corpi coniugati cui appartengono gli ordini $o_1\, o'_1\, o_2\, o'_2$ tutti immaginari, ogni unità di o ha norma positiva.

I sistemi continui (T) *che inducono sistemi continui di* γ_2 *di genere virtuale* 2, *sono tutti e soli quelli associati alle unità* η *dell'ordine* o; *le* γ_2 *di un tal sistema continuo hanno poi nell'ordine* ω *la valenza* $(\eta\,\eta_0)^{-1}$.

È poi chiaro che lo stesso sistema continuo di γ_2 è pure indotto da tutti e soli i sistemi associati alle unità che si deducono moltiplicando η per una qualsiasi unità ridotta dell'ordine o.

33. Si tratta ora di decidere se i sistemi di γ_2 indotti dai sistemi (T) esauriscono o no tutti i sistemi di γ_2 di genere virtuale 2. Conviene perciò distinguere due casi, secondochè C non possiede ovvero possiede corrispondenze biunivoche singolari.

1.° Caso: *La curva C non-possegga corrispondenze biunivoche singolari.*

Le unità dell'ordine o sono allora espresse dalla formula

$$\eta = \pm\, \sigma^n ;$$

e poichè, in virtù dell'osservazione in fine al n.° 29, l'unità fondamentale σ deve essere o reale (e in tal caso può supporsi senz'altro positiva) ovvero immaginaria pura, è opportuno suddividere questo caso nei seguenti:

a) *L'unità fondamentale* σ *sia reale (positiva) ed abbia nell'ordine* ω *norma negativa.*

I sistemi continui (T), di cui si è detto precedentemente, possono ordinarsi in una serie infinita

$$\ldots (\pm\, T_{-1}),\quad (\pm\, T_0),\quad (\pm\, T_1) \ldots \tag{II}$$

nella quale $(\pm\, T_n)$ indica i sistemi associati alle unità $\pm\,\sigma^n$; e poichè le unità positive e di norma positiva di ω sono date dalla formula

$$\xi = \sigma^{2n},$$

i sistemi continui di γ_2 aventi il genere virtuale 2 possono ordinarsi nella serie infinita

$$\ldots (\gamma_2)_{-1}\,,\quad (\gamma_2)_0\,,\quad (\gamma_2)_1\,, \ldots \tag{III}$$

nella quale $(\gamma_2)_n$ è il sistema le cui serie hanno in ω la valenza σ^{2n}.

Ma per ciò che si è detto al n.° 32, i sistemi $(\pm\, T_n)$ inducono sulla curva un sistema continuo di serie aventi in ω la valenza $(\sigma^n\,\sigma_0{}^n)^{-1} = \sigma^{-2n}$; tale sistema è dunque quello che nella serie (III) ha l'indice $-n$, e variando n

da $-\infty$ a $+\infty$ si conclude che in questo caso tutti i sistemi (I) sono costituiti da curve birazionalmente identiche a C.

b) *L'unità fondamentale σ sia reale (positiva) ed abbia nell'ordine ω norma positiva.*

Le unità di ω hanno ora tutte norma positiva, e quelle positive sono date dalla formula

$$\xi = \sigma^n.$$

Questo caso differisce dunque dal precedente per il solo fatto che nella serie (III) il sistema $(\gamma_2)_n$ è costituito da serie aventi in ω la valenza σ^n. Ma allora il sistema indotto da $(\pm T_n)$ è quello che in (III) ha l'indice $-2n$, e variando n da $-\infty$ a $+\infty$ si conclude che in (III) sono birazionalmente identiche a C tutte e sole le serie con indice pari.

Se poi si considera la curva Γ i cui punti corrispondono ai gruppi di una serie del sistema $(\gamma_2)_1$, si vede che Γ non è birazionalmente identica a C possiede la stessa superficie di Jacobi F, ed a Γ sono birazionalmente identiche le serie che in (III) hanno l'indice dispari. I sistemi (I) si ripartiscono dunque in due serie distinte di curve birazionalmente identiche.

c) *L'unità fondamentale σ sia immaginaria pura.*

Le unità di ω, essendo associate a corrispondenze simmetriche che sono quadrati di corrispondenze emisimmetriche, hanno tutte norma positiva, e quelle che sono inoltre positive sono espresse dalla formula

$$\xi = (-1)^n \sigma^{2n};$$

dobbiamo dunque supporre che nella serie (III) il sistema $(\gamma_2)_n$ sia costituito da serie che hanno in ω la valenza $(-1)^n \sigma^{2n}$. Ma il sistema indotto da $(\pm T_n)$ è costituito da serie che hanno in ω la valenza $(\sigma^n \sigma_0^n)^{-1} = (-1)^{-n} \sigma^{-2n}$; tale sistema è dunque quello che in (III) ha l'indice $-n$, e variando n da $-\infty$ a $+\infty$ si conclude in questo caso che i sistemi (I) sono tutti di curve birazionalmente identiche a C.

2.° Caso: *La curva C possegga corrispondenze biunivoche singolari.*

È noto che una curva di genere 2, che sia priva d'integrali ellittici e possegga corrispondenze biunivoche singolari, è necessariamente quella inerente al radicale quadratico $\sqrt{x^5+1}$ [47]. Sopra una tal curva i numeri base

(47) G. Humbert, *Sur les fonctions abéliennes singulières* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5me série, 2me Mémoire, t. VI (1900), nn. 231 e seguenti.

delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche sono rispettivamente $\mu_1 = 2$ $\mu_2 = 2$, ed essa possiede una involuzione ciclica generata da una corrispondenza biunivoca a periodo 10.

Le unità di o sono allora date da

$$\eta = \rho^r \sigma^n, \tag{18}$$

dove ρ indica una radice 10^{ma} primitiva dell'unità, σ l'unità fondamentale, r varia da 1 a 10 ed n percorre tutti gl'interi da $-\infty$ a $+\infty$.

Poichè ogni unità di o, moltiplicata per una conveniente unità ridotta, produce l'unità immaginaria coniugata (n° 29), si dovrà avere la relazione

$$\sigma_0 = \rho^i \sigma. \tag{19}$$

Dico che in questa l'esponente i deve essere pari.

Cerchiamo infatti la formula che esprima tutte le unità dell'ordine ω. Perchè nella (18) η risulti reale dovrà aversi

$$\rho^{-r} \sigma_0^n = \rho^r \sigma^n;$$

da cui, per la (19), si ottiene

$$\rho^{-r+in} = \rho^r$$

e quindi

$$i\, n \equiv 2\, r \pmod{10}.$$

Se dunque i fosse dispari, dovrà essere $n = 2\, m$ ed $r \equiv i\, m \pmod{5}$, cioè $r = i\, m + 5\, \nu$, essendo ν un intero qualsiasi. Le unità di ω sarebbero dunque date dalla formula

$$\xi = \rho^{im+5\nu} \sigma^{2m} = \pm (\rho^i \sigma^2)^m = \pm (\sigma \sigma_0)^m.$$

Se ora H indica una corrispondenza di $o(T)$ associata a σ, alla corrispondenza simmetrica $H^{-1} H$ è associato $\sigma \sigma_0$; e poichè le valenze di $H^{-1} H$ sono di ugual segno (n.° 3), se ne trae che $(\sigma \sigma_0)$ e quindi tutte le unità di ω avrebbero norma positiva.

D'altra parte è noto ([48]) che, con una scelta conveniente dei periodi normali di C, la relazione di Humbert che lega i periodi stessi assume la forma

([48]) G. Humbert, loc. cit. ([46]).

$g = h + g'$ ed ha per invariante 5. Poichè la forma $z^2 - 5k^2$ può rappresentare -4, si deduce che ω contiene unità di norma negativa.

La contradizione cui siamo giunti prova dunque che i deve essere pari. Posto allora $i = 2l$, noi potremo assumere in o come unità fondamentale l'unità reale $\rho^l \sigma$, cioè supporre che in (18) σ sia reale. Allora σ risulta unità fondamentale di ω, e dovrà quindi avere in ω norma negativa. Si conclude pertanto che le unità di ω che sono positive e di norma positiva sono espresse dalla formula

$$\xi = \sigma^{2n}.$$

Allora, con ragionamento analogo a quello dei casi precedenti, si ottiene che i sistemi Σ_i della serie (I) sono in questo caso tutti di curve birazionalmente identiche.

Il risultato a cui conduce la precedente discussione è dunque il seguente:

Sia F la superficie di Jacobi *di una curva C priva d'integrali ellittici e coi numeri base $\mu_1 = 2$ $\mu_2 = 2$, e si considerino i due ordini o ed ω rispettivamente associati a tutte le corrispondenze e alle corrispondenze simmetriche di C. Se le unità di o sono tutte reali (cioè coincidono con quelle di ω) ed hanno in ω norma positiva, la F è pure superficie di* Jacobi *per un'altra (ed una sola) curva Γ non birazionalmente identica a C; diversamente, F è superficie di* Jacobi *per la sola curva C.*

Pisa, settembre 1921.

Determinazione delle ipersuperficie che ammettono rappresentazioni geodetiche.

(*Di* Enrico Bompiani, *a Roma*.)

---

1. Una corrispondenza puntuale fra due varietà V_n, V'_n si dice geodetica (e le due varietà rappresentate geodeticamente una sull'altra) quando alle geodetiche di una di esse corrispondono quelle dell'altra.

Dato un elemento lineare *generico* esso non ammette rappresentazioni geodetiche che su elementi lineari uguali o che ne differiscono per una costante moltiplicativa; cioè una V_n *generica* non è geodeticamente rappresentabile che su quelle isometrico-simili ad essa.

Però come esistono tipi di superficie (di Liouville) che ammettono trasformazioni geodetiche, così esistono tipi di V_n (tutti determinati dal prof. Levi-Civita) che ammettono trasformazioni geodetiche proprie (cioè non prodotti di isometrie per similitudini).

Nel caso delle V_n ($n > 2$) si presenta la questione (che ha sempre risposta affermativa per $n = 2$) di vedere se esistano V_n con trasformazioni geodetiche proprie in un S_{n+1} euclideo, cioè *ipersuperficie* possedenti elementi lineari del Levi-Civita.

Mi è parso che la risoluzione di questa questione riuscisse interessante per la conoscenza più approfondita delle V_n con trasformazioni geodetiche; e perciò la presento qui per le V_3 di S_4 ritenendo non vi siano difficoltà molto maggiori per le V_n di S_{n+1}.

La trattazione consiste nel ricercare quali condizioni impongono ai coefficienti degli elementi lineari di Levi-Civita le equazioni di Gauss e di Codazzi (quali si trovano nelle classiche *Lezioni di Geometria differenziale* del prof. L. Bianchi, vol. I, alle quali il lettore è pregato di riferirsi senza bisogno di citazioni particolari).

Nella determinazione delle V_3 deformabili in S_4 (cioè per le quali la seconda forma fondamentale non è completamente determinata dalla prima) poteva supporsi che fosse necessario ricorrere alla Memoria del Bianchi, *Sulle varietà a tre dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni* [Memorie della Soc. Ital. delle Scienze (detta dei XL), s. III, t. XIII, 1905]; ma dato il tipo particolare degli elementi lineari in esame ciò non è neppur necessario, perchè riesce senza difficoltà la costruzione di modelli sui quali la deformabilità è evidente.

Invece le V_3 rigide con trasformazioni geodetiche, esistenti in uno S_4 euclideo sono: le ipersfere, le iperquadriche (in particolare rotonde, intorno ad un piano principale, o a due piani principali sghembi fra loro), le ipersuperficie rotonde intorno ad una retta (e non intorno ad un piano, escluso il caso detto delle iperquadriche).

Ho poi completato la ricerca, del tutto analoga, aggiungendo la determinazione delle ipersuperficie con trasformazioni geodetiche proprie esistenti in spazi a curvatura costante, di cui ho pure assegnato i modelli.

§ 1. Richiami sulle equazioni di Gauss e di Codazzi.

2. Com'è noto (Bianchi, *Lezioni* cit., vol. I, pag. 362) un'ipersuperficie V_{n-1} di uno spazio ad n dimensioni è individuata rispetto al gruppo dei movimenti da due forme quadratiche

$$d s^2 = \sum_{ik}^{n-1} a_{ik}\, d x_i\, d x_k$$

$$\sum_{ik}^{n-1} \Omega_{ik}\, d x_i\, d x_k$$

i coefficienti delle quali sono legati dalle equazioni di Gauss e di Codazzi che nel caso di un S_n euclideo si scrivono

$$\Omega_{\alpha\beta}\, \Omega_{\gamma\delta} - \Omega_{\alpha\gamma}\, \Omega_{\beta\delta} = (\alpha\, \delta,\ \beta\, \gamma) \tag{G}$$

$$\frac{\partial\, \Omega_{\alpha\beta}}{\partial\, u_\gamma} - \frac{\partial\, \Omega_{\alpha\gamma}}{\partial\, u_\beta} + \sum_{t}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} \alpha\, \beta \\ t \end{matrix} \right\} \Omega_{\gamma t} - \sum_{t}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} \alpha\, \gamma \\ t \end{matrix} \right\} \Omega_{\beta t} = 0 \tag{C}$$

i simboli di Riemann e di Christoffel sono costruiti rispetto al $d s^2$ scritto.

Nel caso di una V_3 di S_4 (posto $u_1 = u,\ u_2 = v,\ u_3 = w$) e supposto, come accadrà nel nostro caso, il ds^2 del tipo

$$ds^2 = H_1\, du^2 + H_2\, dv^2 + H_3\, dw^2$$

si ha

$$(12,12) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial u^2}\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{H_1}\left\{\left(\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial H_1}{\partial u}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right\} + $$
$$+ \frac{1}{4}\frac{1}{H_2}\left\{\left(\frac{\partial H_2}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial H_2}{\partial v}\right\} - \frac{1}{4}\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial w}$$

$$(12,23) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_2}{\partial u\, \partial w} - \frac{1}{4}\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial u} - \frac{1}{4}\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_2}{\partial w} - \frac{1}{4}\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial H_2}{\partial w};$$

quindi le equazioni di Gauss si scrivono:

$$\left.\begin{aligned}
\Omega_{11}\Omega_{22} - \Omega_{12}^2 &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 H_1}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial u^2}\right\} + \frac{1}{4}\frac{1}{H_1}\left\{\left(\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial H_1}{\partial u}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right\} + \\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{1}{H_2}\left\{\left(\frac{\partial H_2}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial H_2}{\partial v}\right\} - \frac{1}{4}\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial w} \\
\Omega_{22}\Omega_{33} - \Omega_{23}^2 &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 H_2}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 H_3}{\partial v^2}\right\} + \frac{1}{4}\frac{1}{H_2}\left\{\left(\frac{\partial H_2}{\partial w}\right)^2 + \frac{\partial H_2}{\partial v}\frac{\partial H_3}{\partial v}\right\} + \\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{1}{H_3}\left\{\left(\frac{\partial H_3}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial H_2}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial w}\right\} - \frac{1}{4}\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial u} \\
\Omega_{33}\Omega_{11} - \Omega_{13}^2 &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 H_3}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial w^2}\right\} + \frac{1}{4}\frac{1}{H_3}\left\{\left(\frac{\partial H_3}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial H_3}{\partial w}\frac{\partial H_1}{\partial w}\right\} + \\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{1}{H_1}\left\{\left(\frac{\partial H_1}{\partial w}\right)^2 + \frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial H_1}{\partial u}\right\} - \frac{1}{4}\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial v}
\end{aligned}\right\} \quad (G_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Omega_{12}\Omega_{23} - \Omega_{13}\Omega_{22} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_2}{\partial u\, \partial w} - \frac{1}{4}\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial u} - \frac{1}{4}\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_2}{\partial w} - \\
&\quad - \frac{1}{4}\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial H_2}{\partial w} \\
\Omega_{23}\Omega_{31} - \Omega_{21}\Omega_{33} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_3}{\partial v\, \partial u} - \frac{1}{4}\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial v} - \frac{1}{4}\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_3}{\partial u} - \\
&\quad - \frac{1}{4}\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial H_3}{\partial u} \\
\Omega_{31}\Omega_{12} - \Omega_{32}\Omega_{11} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_1}{\partial w\, \partial v} - \frac{1}{4}\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial w} - \frac{1}{4}\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_1}{\partial v} - \\
&\quad - \frac{1}{4}\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial w}\frac{\partial H_1}{\partial v}
\end{aligned}\right\} \quad (G_2)$$

e quelle di Codazzi:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial v} - \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial u} &= \frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial v}\left(\Omega_{11} + \frac{H_1}{H_2}\Omega_{22}\right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_2 | H_1}}{\partial u}\Omega_{12} + \\
&\qquad + \frac{H_1}{H_3}\frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial w}\Omega_{23} \\
\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial w} - \frac{\partial \Omega_{13}}{\partial u} &= \frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial w}\left(\Omega_{11} + \frac{H_1}{H_3}\Omega_{33}\right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_3 | H_1}}{\partial u}\Omega_{13} + \\
&\qquad + \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial v}\Omega_{23}
\end{aligned}\right\} \quad (C_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega_{22}}{\partial w} - \frac{\partial \Omega_{23}}{\partial v} &= \frac{\partial \log \sqrt{H_2}}{\partial w}\left(\Omega_{22} + \frac{H_2}{H_3}\Omega_{33}\right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_3 | H_1}}{\partial v}\Omega_{23} + \\
&\qquad + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial \log \sqrt{H_2}}{\partial u}\Omega_{31} \\
\frac{\partial \Omega_{22}}{\partial u} - \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial v} &= \frac{\partial \log \sqrt{H_2}}{\partial u}\left(\Omega_{22} + \frac{H_2}{H_1}\Omega_{11}\right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_1\, H_2}}{\partial v}\Omega_{21} + \\
&\qquad + \frac{H_2}{H_3}\frac{\partial \log \sqrt{H_2}}{\partial w}\Omega_{31}
\end{aligned}\right\} \quad (C_2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega_{33}}{\partial u} - \frac{\partial \Omega_{31}}{\partial w} &= \frac{\partial \log \sqrt{H_3}}{\partial u}\left(\Omega_{33} + \frac{H_3}{H_1}\Omega_{11}\right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_1 | H_3}}{\partial w}\Omega_{31} + \\
&\qquad + \frac{H_3}{H_2}\frac{\partial \log \sqrt{H_3}}{\partial v}\Omega_{12} \\
\frac{\partial \Omega_{33}}{\partial v} - \frac{\partial \Omega_{32}}{\partial w} &= \frac{\partial \log \sqrt{H_3}}{\partial v}\left(\Omega_{33} + \frac{H_3}{H_2}\Omega_{22}\right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_2 | H_3}}{\partial w}\Omega_{32} + \\
&\qquad + \frac{H_3}{H_1}\frac{\partial \log \sqrt{H_3}}{\partial u}\Omega_{12}.
\end{aligned}\right\} \quad (C_3)$$

È noto che date H_1, H_2, H_3 le equazioni (G_1), (G_2) definiscono, *in generale*, le Ω_{ik} e allora la V_3 è indeformabile; affinchè poi esista effettivamente in S_4 occorre e basta che i valori così ricavati soddisfino alle (C_1), (C_2), (C_3). Se invece le (G_1), (G_2) non individuano le Ω_{ik}, allora la V_3 è deformabile sempre che siano soddisfatte in conseguenza le equazioni di Codazzi.

3. Poichè nel seguito accadrà sempre che i secondi membri delle (G_2) sono nulli, vediamo come si semplifichino in tal caso le equazioni precedenti.

I). *Se* $(12,12)\,.\,(23,23)\,.\,(31,31) \mid= 0$ *(in punti generici della* V_3*) è necessariamente* $\Omega_{11}\,.\,\Omega_{22}\,.\,\Omega_{33} =\mid= 0$; $\Omega_{12} = \Omega_{23} = \Omega_{31} = 0$.

In tal caso la V_3, se esiste in S_4, è indeformabile, avendosi dalle (G_1)

$$\Omega_{11}^2 = \frac{(12,\ 12)\ (13,\ 13)}{(23,\ 23)};\ \Omega_{22}^2 = \frac{(23,\ 23)\ (21,\ 21)}{(31,\ 31)}$$

$$\Omega_{33}^2 = \frac{(31,\ 31)\ (32,\ 32)}{(12,\ 12)}.$$

Le equazioni di Codazzi divengono

$$\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial v} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial v}(\Omega_{11} H_2 + \Omega_{22} H_1);\ \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial w} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial w}(\Omega_{11} H_3 + \Omega_{33} H_1)\quad (C_1)$$

$$\frac{\partial \Omega_{22}}{\partial w} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \log \sqrt{H_2}}{\partial w}(\Omega_{22} H_3 + \Omega_{33} H_2);\ \frac{\partial \Omega_{22}}{\partial u} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \log \sqrt{H_2}}{\partial u}(\Omega_{22} H_1 + \Omega_{11} H_2)\quad (C_2)$$

$$\frac{\partial \Omega_{33}}{\partial u} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \log \sqrt{H_3}}{\partial u}(\Omega_{33} H_1 + \Omega_{11} H_3);\ \frac{\partial \Omega_{33}}{\partial v} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \log \sqrt{H_3}}{\partial v}(\Omega_{33} H_2 + \Omega_{22} H_3).\quad (C_3)$$

Se, e solo se, queste sono soddisfatte dai precedenti valori delle Ω_{ii} esiste in S_4 la V_3 di $ds^2 = H_1\,du^2 + H_2\,dv^2 + H_3\,dw^3$ ed è indeformabile.

II). *Se uno dei simboli* $(12,12)$, $(23,23)$, $(31,31)$ *è nullo, ve ne sono almeno due nulli; se p. es.* $(12,12) \mid 0$, $(23,23) = (31,31) = 0$, *allora*

$$\Omega_{13} = \Omega_{23} = \Omega_{33} = 0 \ \text{e}\ \frac{\partial H_3}{\partial u} = \frac{\partial H_3}{\partial v} = 0.$$

Sia infatti $(31,31) = 0$ e gli altri due $=\mid= 0$. Moltiplicando la prima e terza (e poi la prima e la seconda) delle (G_2), per essere $(12,12) -\mid= 0$ e $(23,23) =\mid- 0$ si ricava $\Omega_{13}\,\Omega_{23} = 0$, $\Omega_{13}\,\Omega_{12} = 0$, quindi o $\Omega_{13} = 0$, ovvero $\Omega_{13} =\mid- 0$ e $\Omega_{23} = \Omega_{21} = 0$. Nel primo caso, $\Omega_{13} = 0$, dalle (G_2), $\Omega_{12}\,\Omega_{23} = \Omega_{21}\,\Omega_{33} = \Omega_{32}\,\Omega_{11} = 0$ e dalla terza (G_1) $\Omega_{33}\,\Omega_{11} = 0$: ora se $\Omega_{11} = 0$ avendosi dalla prima (G_1) $\Omega_{12} -\mid 0$ dovrebbe essere $\Omega_{23} = \Omega_{33} = 0$, cioè $(23,23) = 0$ contro l'ipotesi; mentre se $\Omega_{33} = 0$ dalla seconda (G_1) $\Omega_{23} =\mid= 0$, quindi $\Omega_{11} = \Omega_{12} = 0$, cioè $(12,12) = 0$ pure contro le ipotesi. Nel secondo caso $\Omega_{32} = \Omega_{12} = 0$, $\Omega_{13} -\mid 0$, dalla prima (G_2) $\Omega_{22} = 0$, quindi $(12,12) = 0$, $(23,23) = 0$ contro l'ipotesi.

Se invece supponiamo due simboli nulli, p. es. $(23,23) = (31,31) = 0$, ma $(12,12) =\mid= 0$, dalla prima e terza di (G_2) si ha $\Omega_{13}\,\Omega_{23} = 0$; sia p. es. $\Omega_{13} = 0$.

Allora anche $\Omega_{33}\,\Omega_{11} = \Omega_{12}\,\Omega_{23} = \Omega_{21}\,\Omega_{33} = \Omega_{23}\,\Omega_{11} = 0$, quindi o $\Omega_{23} = \Omega_{33} = 0$, o $\Omega_{11} = \Omega_{12} = 0$; ma dovendo essere $(12,12) \neq 0$ l'unica soluzione possibile è $\Omega_{13} = \Omega_{23} = \Omega_{33} = 0$.

In queste condizioni le (C_3) dànno

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\Omega_{11} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial \log H_3}{\partial v}\Omega_{12} = 0$$

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\Omega_{12} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial \log H_3}{\partial v}\Omega_{22} = 0$$

e poichè $\Omega_{11}\,\Omega_{22} - \Omega_{12}^2 = (12,12) \neq 0$ necessariamente $\dfrac{\partial H_3}{\partial u} = \dfrac{\partial H_3}{\partial v} = 0$.

Le altre equazioni di Codazzi sono

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial v} - \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial u} = \frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial v}\left(\Omega_{11} + \frac{H_1}{H_2}\Omega_{22}\right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_2 \mid H_1}}{\partial u}\Omega_{12}; \\ &\frac{\partial \log \Omega_{11}^2}{\partial w} = \frac{\partial \log H_1}{\partial w} \end{aligned}\right\} \qquad (C_1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Omega_{22}}{\partial u} - \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{H_2}}{\partial u}\left(\Omega_{22} + \frac{H_2}{H_1}\Omega_{11}\right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_1 \mid H_2}}{\partial v}\Omega_{12}; \\ &\frac{\partial \log \Omega_{22}^2}{\partial w} = \frac{\partial \log H_2}{\partial w}. \end{aligned}\right\} \qquad (C_2)$$

Essendo il determinante delle Ω_{ik} nullo, in questa categoria andranno ricercate le V_3 deformabili.

III). *Se $(12,12) = (23,23) = (31,31) = 0$, la V_3 è applicabile sopra uno S_3.*

§ 2. Tipi di elementi lineari a tre variabili dotati di trasformazioni geodetiche proprie.

4. Dalla ricerca del prof. Levi-Civita [1] risulta che si hanno due soli tipi di ds^2 appartenenti a V_3 con trasformazioni geodetiche proprie (non semplici prodotti di applicabilità per similitudini) [2]. Il primo di essi (tipo

---

[1] *Sulla trasformazione delle equazioni dinamiche* [Ann. di Matem., 1896].

[2] Perchè sulle molteplicità delle radici dell'equazione cubica che interviene in quella teoria non possono farsi che tre ipotesi; e quella di una radice tripla corrisponde appunto ad isometrie e similitudini.

di LIOUVILLE generalizzato) si può scrivere:

$$\left.\begin{aligned} d s^2 = &|U - V| \cdot |U - W| \, d u^2 + |V - U| \cdot |V - W| \, d v^2 + \\ &+ |W - U| \cdot |W - V| \, d w^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ove U, V, W sono funzioni rispettiv. della sola u, v, w. Esso è rappresentabile geodeticamente sull'altro

$$\left.\begin{aligned} d s'^2 = &\left|\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right| \cdot \left|\frac{1}{U} - \frac{1}{W}\right| d u^2 + \left|\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right| \cdot \left|\frac{1}{V} - \frac{1}{W}\right| d v^2 + \\ &+ \left|\frac{1}{W} - \frac{1}{U}\right| \cdot \left|\frac{1}{W} - \frac{1}{V}\right| d w^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Nella forma (1), e conseguentemente nella (1'), ci si può liberare dai segni di valore assoluto purchè sia assicurato (almeno per determinati campi di variabilità delle u, v, w) il carattere essenzialmente positivo dei suoi coefficienti.

A questa condizione non si può soddisfare prendendo $H_1 = (U - V)(U - W)$, e per H_2, H_3 le espressioni dedotte dalla precedente con permutazioni circolari, perchè si avrebbe $H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_3 H_1 = 0$, il che è incompatibile con la condizione posta; si può invece prendere $H_1 = (U - V)(U - W)$, $H_2 = (V - W)(V - U)$ e $H_3 = -(W - U)(W - V)$ (e si ha $H_1 H_2 - H_2 H_3 - - H_3 H_1 = 0$) e risultano effettivamente H_1, H_2, H_3 positivi p. es. per $U > W > V$ (o $U < W < V$); mi servirò quindi di questa ultima determinazione delle H_i.

L'altro tipo di $d s^2$ è

$$d s^2 = (k - W) \, d \sigma^2 + d w^2 \qquad (2)$$

ove $d \sigma$ è un elemento binario (nelle sole u, v), $W(w)$ è tale che nel campo che si considera $W < k$ (costante); ridotto il $d \sigma^2$ a forma isoterma si ha

$$d s^2 = A(u, v) \, (d u^2 + d v^2) \, (k - W) + d w^2 \qquad (2)$$

rappresentabile geodeticamente sull'altro

$$d s'^2 = A(u, v) \, (d u^2 + d v^2) \, \frac{k - W}{k W} + \frac{d w^2}{W^2} \qquad (2')$$

sicchè in ogni caso il $d s$ delle nostre V_3 è riducibile a forma ortogonale ([3]).

([3]) Ciò non è più vero, in generale, per le V_{n-1} di S_n $(n > 4)$; quindi si potrebbe presentare in conseguenza qualche difficoltà nuova.

§ 3. V_3 ESISTENTI IN S_4 EUCLIDEO (O A CURVATURA COSTANTE) CON ELEMENTO LINEARE

$$ds^2 = (U-V)(U-W)\,du^2 + (V-U)(V-W)\,dv^2 - (W-U)(W-V)\,dw^2.$$

5. Si ha

$$H_1 = (U-V)(U-W); \quad \frac{\partial H_1}{\partial u} = U'(2U - V - W);$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial v} = -V'(U-W); \quad \frac{\partial^2 H_1}{\partial v^2} = -V''(U-W)$$

e le analoghe; sicchè le espressioni dei simboli di RIEMANN sono:

$$(12,12) = \frac{1}{2}(U-W)V'' + \frac{1}{2}(V-W)U'' - \frac{1}{4}\frac{1}{H_1}(V-W)(3U-2W-V)U'^2 -$$
$$-\frac{1}{4}\frac{1}{H_2}(U-W)(3V-2W-U)V'^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{H_3}(U-V)^2 W'^2$$

$$(23,23) = \frac{1}{2}(V-U)W'' - \frac{1}{2}(W-U)V'' + \frac{1}{4}\frac{1}{H_2}(W-U)(3V-2U-W)V'^2 +$$
$$+\frac{1}{4}\frac{1}{H_3}(V-U)(3W-2U-V)W'^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{H_1}(V-W)^2 U'^2$$

$$(31,31) = -\frac{1}{2}(W-V)U'' + \frac{1}{2}(U-V)W'' + \frac{1}{4}\frac{1}{H_3}(U-V)(3W-2V-U)W'^2 +$$
$$+\frac{1}{4}\frac{1}{H_1}(W-V)(3U-2V-W)U'^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{H_2}(W-U)^2 V'^2$$

$$(12,23) = (23,31) = (31,12) = 0.$$

Le ultime tre relazioni indicano che le congruenze delle linee coordinate sono quelle definite in ogni punto dalle direzioni principali della V_3; sicchè, adottando una locuzione proposta dal BIANCHI (4) si può dire che le nostre V_3 sono spazi normali; e siccome questa stessa circostanza si presenta per

(4) L. BIANCHI, *Sugli spazi normali a tre dimensioni colle curvature principali costanti* [Atti R. Accad. dei Lincei, Classe di Scienze, vol. XXV, 1916_1].

l'altro tipo di ds^2 che esamineremo in seguito e non dipende affatto dallo spazio d'immersione della V_3 rileviamo che:

Tutte le V_3 che ammettono trasformate geodetiche proprie (cioè non soltanto isometrico-simili) sono spazi normali del Bianchi.

Una conseguenza del massimo interesse delle prime tre equazioni è la relazione

$$(12,12)-(23,23)-(31,31)=0;$$

dalla quale si ricava che o tutti tre i simboli scritti sono differenti da zero, quindi anche le tre curvature principali; oppure se uno di essi è nullo, dovendo per il n.° 3, II) esserne nulli almeno due, lo sono tutti tre, e la V_3 è applicabile sopra uno S_3 euclideo. Escludiamo dal seguito questo caso evidente.

6. Sia dunque $(12,12)\ (23,23)\ (31,31) \neq 0$.

Converrà porre per semplicità di scrittura

$$(12,12)=A_3,\quad (23,23)=A_1,\quad (31,31)=A_2.$$

Le equazioni di Codazzi, per le espressioni delle Ω_{ik} trovate al n.° 3, I), si scrivono

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \log A_2}{\partial v}+\frac{\partial \log A_3}{\partial v}-\frac{\partial \log A_1}{\partial v}&=\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{A_1}{A_2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial v}\\
\frac{\partial \log A_2}{\partial w}+\frac{\partial \log A_3}{\partial w}-\frac{\partial \log A_1}{\partial w}&=\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{A_1}{A_3}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial w}
\end{aligned}\right\}\qquad (C_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \log A_3}{\partial w}+\frac{\partial \log A_1}{\partial w}-\frac{\partial \log A_2}{\partial w}&=\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\frac{A_2}{A_3}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial w}\\
\frac{\partial \log A_3}{\partial u}+\frac{\partial \log A_1}{\partial u}-\frac{\partial \log A_2}{\partial u}&=\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{A_2}{A_1}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u}
\end{aligned}\right\}\qquad (C_2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \log A_1}{\partial u}+\frac{\partial \log A_2}{\partial u}-\frac{\partial \log A_3}{\partial u}&=\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{A_3}{A_1}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u}\\
\frac{\partial \log A_1}{\partial v}+\frac{\partial \log A_2}{\partial v}-\frac{\partial \log A_3}{\partial v}&=\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{A_3}{A_2}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial v}.
\end{aligned}\right\}\qquad (C_3)$$

Si ottengono combinazioni immediatamente integrabili operando per sottrazione e per addizione sulla seconda equazione di ciascun gruppo e sulla prima del successivo.

Nel primo modo, tenuto conto che $A_1 + A_2 = A_3$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial w} \log \frac{A_2}{A_1} = \frac{W'(U-V)}{(U-W)(V-W)}; \quad \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{A_3}{A_2} = \frac{U'(V-W)}{(U-V)(U-W)}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \log \frac{A_1}{A_3} = \frac{V'(W-U)}{(V-W)(V-U)}.$$

Supponiamo $U'\, V'\, W' \neq 0$ (discuteremo poi l'ipotesi opposta). Integrando si ha

$$\frac{A_2}{A_1} = \varphi_{21}(u, v) \frac{U-W}{W-V}; \quad \frac{A_3}{A_2} = \varphi_{32}(w, u) \frac{U-V}{U-W};$$

$$\frac{A_1}{A_3} = \varphi_{13}(u, w) \frac{V-W}{V-U}$$

le funzioni per ora indeterminate φ_{ik} $(i \neq k)$ devono esser tali che $\varphi_{ik} = 1 / \varphi_{ki}$ e inoltre $\varphi_{21} \cdot \varphi_{32} \cdot \varphi_{13} = 1$, sicchè si può porre

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{y_2(v)}{y_1(u)} \frac{U-W}{W-V}; \quad \frac{A_3}{A_2} = \frac{y_3(w)}{y_2(v)} \frac{U-V}{U-W}; \quad \frac{A_1}{A_3} = \frac{y_1(u)}{y_3(w)} \frac{V-W}{V-U}.$$

Se si sostituiscono le espressioni ora trovate nella relazione $A_1 + A_2 = A_3$ si ottengono le nuove relazioni

$$\frac{y_1 - y_2}{U-V} = \frac{y_2 - y_3}{V-W} = \frac{y_3 - y_1}{W-U}$$

alle quali si può soddisfare in due modi:

1.° caso: $\quad y_1 = y_2 = y_3 = k$ (costante)

2.° caso: $\quad y_1 / U = y_2 / V = y_3 / W = k$ (costante)

potendosi omettere nelle y_i la stessa costante additiva, essendo le U, V, W definite appunto a meno di una tale costante.

Combinando invece per addizione le equazioni di Codazzi si ha

$$\frac{\partial}{\partial w} \log A_3 = \frac{W'}{H_3} \left\{ \frac{A_2}{A_3}(U-V) + V - W \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \log A_1 = \frac{U'}{H_1} \left\{ \frac{A_3}{A_1}(W-V) + U - W \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \log A_2 = \frac{V'}{H_2} \left\{ \frac{A_3}{A_2}(W-U) + V - W \right\}$$

equazioni che bisogna integrare distingendo i due casi segnalati.

7. Nel *1° caso* ($y_i = k$) le equazioni precedenti si riducono a

$$\frac{\partial}{\partial w} \log A_3 = \frac{W'}{H_3}(U + V - 2\,W) = \frac{\partial}{\partial w} \log H_3 ; \ldots$$

da cui

$$A_3 = h_{12}(u, v) H_3 \quad A_1 = h_{23}(v, w) H_1 , \quad A_2 = h_{31}(w, u) H_2$$

e poichè le A_i sono $\neq 0$, anche $h_{il} \neq 0$.

Se si formano di nuovo i rapporti di due A_i nell'ipotesi attuale si trova

$$\frac{h_{12}}{(U - V)^2} = \frac{h_{23}}{(V - W)^2} = \frac{h_{31}}{(W - U)^2} = h \ \text{(cost.)}$$

e in conseguenza

$$A_3 = (12, 12) = h\, H_1\, H_2 , \quad A_2 = (13, 13) = h\, H_1\, H_3 , \quad A_1 = (23, 23) = h\, H_2\, H_3 .$$

Le V_3 attuali sono a curvatura costante h (necessariamente positiva) quindi ipersfere dello S_4: queste sono rappresentabili geodeticamente su S_3 (con proiezione dal centro). L'integrazione delle ultime equazioni, quando si sostituiscano ai simboli di Riemann le loro espressioni date in principio del n.° 5, darebbe la forma di U, V, W, cioè del $d\,s^2$ del tipo di Liouville relativo all'ipersfera.

8. Nel *2° caso* ($y_1 \,/\, U = y_2 \,/\, V = y_3 \,/\, W = k$) le ultime combinazioni delle equazioni di Codazzi divengono

$$\frac{\partial}{\partial w} \log A_3 = \frac{W'}{W H_3} (U\,V - W^2)$$

e integrando

$$A_3 = \frac{H_3}{W}\, \theta_{12}(u, v) ; \quad A_1 = \frac{H_1}{U}\, \theta_{23}(v, w) ; \quad A_2 = \frac{H_2}{V}\, \theta_{31}(w, v).$$

Per determinare le funzioni, per ora incognite, θ_{ik} si osserva che nel caso attuale è pure

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{V}{U}\,\frac{U - W}{W - V} ; \quad \frac{A_3}{A_2} = \frac{W}{V}\,\frac{U - V}{U - W} ; \quad \frac{A_1}{A_3} = \frac{U}{W}\,\frac{V - W}{V - U}$$

quindi

$$\theta_{12} = h \left(\frac{U - V}{U\,V}\right)^2 ; \quad \theta_{23} = h \left(\frac{V - W}{V\,W}\right)^2 ; \quad \theta_{31} = h \left(\frac{U - W}{U\,W}\right)^2$$

e finalmente

$$A_3 = (12,\ 12) = \frac{h\ W H_1\ H_2}{(U\ V\ W)^2}; \quad A_1 = (23,\ 23) = \frac{h\ U\ H_2\ H_3}{(U\ V\ W)^2};$$

$$A_2 = (31,\ 31) = \frac{h\ V\ H_1\ H_3}{(U\ V\ W)^2}.$$

Notiamo le espressioni delle tre curvature principali

$$k_1 = \frac{h\ U}{(U\ V\ W)^2}; \quad k_2 = \frac{h\ V}{(U\ V\ W)^2}; \quad k_3 = \frac{h\ W}{(U\ V\ W)^2}.$$

Per determinare effettivamente le V_3 in esame occorre sostituire le espressioni dei simboli di Riemann (date al n° 5) nelle ultime equazioni ed esaminare se il sistema così ottenuto è integrabile e infine ricavare da esso U, V, W.

Posto $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$, $U_1 = U$, $U_2 = V$, $U_3 = W$ e

$$\beta_{rs} = \frac{1}{\sqrt{H_r}} \frac{\partial \sqrt{H_s}}{\partial u_r} = \frac{1}{2\sqrt{H_r\ H_s}} \frac{\partial H_s}{\partial u_r} \qquad (r \neq s)$$

il sistema di equazioni cui debbono soddisfare le β_{rs} è (5)

$$\frac{\partial \beta_{rs}}{\partial u_t} = \beta_{rt}\,\beta_{ts}$$

$$\frac{\partial \beta_{rs}}{\partial u_r} + \frac{\partial \beta_{sr}}{\partial u_s} + \beta_{tr}\,\beta_{ts} + k_t \sqrt{H_r\ H_s} = 0 \qquad (r \neq s \neq t).$$

Le condizioni d'integrabilità nel caso attuale (k_t variabile) sono

$$(k_t - k_s)\,\frac{\partial \log H_s}{\partial u_t} + (k_t - k_r)\,\frac{\partial \log H_r}{\partial u_t} = -\,2\,\frac{\partial k_t}{\partial u_t}$$

e poichè

$$k_t - k_s = \frac{h}{(U_r\ U_s\ U_t)^2}\,(U_t - U_s)$$

$$\frac{\partial \log H_s}{\partial u_t} = \frac{U'_t}{U_t - U_s}; \quad \frac{\partial k_t}{\partial u_t} = -\,k_t\,\frac{\partial \log U_t}{\partial u_t}$$

esse risultano identicamente soddisfatte, quindi il sistema è completamente integrabile.

---

(5) L. Bianchi, *Sugli spazi normali* ecc., già citato. Le notazioni differiscono un poco perchè il Bianchi parte dal $d\,s^2 = H_1^2\,d\,u_1^2 + H_2^2\,d\,u_2^2 + H_3^2\,d\,u_3^2$.

Del resto riprendendo il sistema sotto la forma primitiva (senza l'intervento delle β_{rs})

$$\frac{h\,W\,H_1\,H_2}{(U\,V\,W)^2}=\frac{1}{2}(U-W)\,V''+\frac{1}{2}(V-W)\,U''-$$

$$-\frac{1}{4}\frac{1}{H_1}(V-W)(3\,U-2\,W-V)\,U'^2-\frac{1}{4}\frac{1}{H_2}(U-W)(3V-2\,W-U)V'^2+$$

$$+\frac{1}{4}\frac{1}{H_3}(U-V)^2\,W'^2$$

$$\frac{h\,U\,H_2\,H_3}{(U\,V\,W)^2}=\frac{1}{2}(V-U)\,W''-\frac{1}{2}(W-U)\,V''+$$

$$+\frac{1}{4}\frac{1}{H_2}(W-U)(3\,V-2\,U-W)\,V'^2+\frac{1}{4}\frac{1}{H_3}(V-U)\,(3\,W-2\,U-V)\,W'^2-$$

$$-\frac{1}{4}\frac{1}{H_1}(V-W)^2\,U'^2$$

$$\frac{h\,V\,H_1\,H_3}{(U\,V\,W)^2}=-\frac{1}{2}(W-V)\,U''+\frac{1}{2}(U-V)\,W''+$$

$$+\frac{1}{4}\frac{1}{H_3}(U-V)(3W-2V-U)W'^2+\frac{1}{4}\frac{1}{H_1}(W-V)\,(3\,U-2\,V-W)\,U'^2-$$

$$-\frac{1}{4}\frac{1}{H_2}(W-U)^2\,V'^2$$

si constata senza difficoltà che le conseguenze differenziali

$$\frac{1}{2}\frac{(U-V)^2}{H_3}W''-\frac{1}{2}U''-\frac{1}{2}V''=\frac{1}{4}\frac{V-U}{H_1^2}\left\{2(U-W)^2+(U-V)^2\right\}U'^2+$$

$$+\frac{1}{4}\frac{U-V}{H_2^2}\left\{2(V-W)^2+(U-V)^2\right\}V'^2+\frac{1}{4}\frac{(U-V)^2}{H_3^2}(U+V-2W)\,W'^2+$$

$$+\frac{h\,(U-V)^2}{(U\,V\,W)^2}(U\,V-W^2);$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(W-V)^2}{H_1}U''+\frac{1}{2}V''-\frac{1}{2}W''=-\frac{1}{4}\frac{W-V}{H_2^2}\left\{2(V-U)^2+(W-V)^2\right\}V'^2-$$

$$-\frac{1}{4}\frac{W-V}{H_3^2}\left\{2(W-U)^2+(W-V)^2\right\}W'^2-\frac{1}{4}\frac{(V-W)^2}{H_1^2}(2\,U-V-W)\,U'^2+$$

$$+\frac{h\,(W-V)^2}{(U\,V\,W)^2}(U^2-V\,W);$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(U-W)^2}{H_2}V''-\frac{1}{2}W''+\frac{1}{2}U''=-\frac{1}{4}\frac{W-U}{H_1^2}\left\{2(U-V)^2+(W-U)^2\right\}U'^2-$$
$$-\frac{1}{4}\frac{W-U}{H_3^2}\left\{2(W-V)^2+(W-U)^2\right\}W'^2-\frac{1}{4}\frac{(W-U)^2}{H_2^2}(2V-U-W)V'^2+$$
$$+\frac{h(W-U)^2}{(U\,V\,W)^2}(V^2-UW)$$

risultano conseguenze algebriche delle precedenti, quindi il sistema è integrabile.

La forma di queste ultime non è senza vantaggio per l'effettiva integrazione in quanto ciascuna di esse contiene due delle derivate seconde con coefficienti costanti; sicche mi servirò di queste piuttosto che delle equazioni di partenza.

Derivando p. es. la seconda rispetto ad u, l'espressione di U''' contiene solo V'^2 e W'^2 (delle derivate di V e W) e così U'''' e U^{V}; talchè è da prevedere che si possano poi eliminare fra le tre equazioni così ottenute V'^2 e W'^2. Se si eseguiscono le operazioni indicate con qualche accorgimento spontaneo si trova

$$\left[\frac{1}{U'}\left(\frac{U'''}{U'}\right)'\right]'=-48\,h\,U'\,/\,U^5$$

e analogamente

$$\left[\frac{1}{V'}\left(\frac{V'''}{V'}\right)'\right]'=-48\,h\,V'\,/\,V^5,\quad \left[\frac{1}{W'}\left(\frac{W'''}{W'}\right)'\right]'=48\,h\,W'\,/\,W^5$$

(gli apici indicando derivazioni ordinarie); integrando si ha

$$U'^2=-\frac{4h}{U}+a_1\,U^3+a_2\,U^2+a_3\,U+a_4$$

$$V'^2=-\frac{4h}{V}+b_1\,V^3+b_2\,V^2+b_3\,V+b_4$$

$$W'^2=+\frac{4h}{W}+c_1\,W^3+c_2\,W^2+c_3\,W+c_4$$

con le a_i, b_i, c_i costanti d'integrazione. Queste costanti non sono però tutte indipendenti come si rileva cercando di soddisfare con le espressioni ora trovate alle equazioni proposte.

Infatti, se si moltiplica la prima delle conseguenze algebrico-differenziali per $U - V$, tutti i termini di essa lo contengono a fattore meno i seguenti

$$\frac{1}{2} U'^2 + \frac{1}{2} V'^2$$

e poichè dunque occorre che anche quest'espressione sia divisibile per $U - V$ bisogna che sia $a_i = b_i$: analogamente ragionando sopra una qualsiasi delle due rimanenti equazioni risulta ancora $a_i = b_i = -c_i$; sicchè posto

$$P_4(t) = a_1 t^4 + a_2 t^3 + a_3 t^2 + a_4 t - 4h$$

si ha

$$\int \frac{\sqrt{U}}{\sqrt{P_4(U)}} d\,U = u; \quad \int \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{P_4(V)}} d\,V = v; \quad \int \frac{\sqrt{W}}{\sqrt{-P_4(W)}} d\,W = w$$

potendosi scegliere sempre nulle le costanti che nascono dalle nuove integrazioni.

Non è detto (poichè non si è spinta a fondo la verifica delle equazioni differenziali) che le relazioni trovate fra le costanti d'integrazione siano le sole esistenti: ma ciò è di fatto, come risulta dal seguente ragionamento geometrico che ci risparmia non solo quella verifica, ma anche le integrazioni che sarebbero ancora necessarie per trovare la forma (cioè le equazioni parametriche o l'equazione cartesiana) delle V_3 in esame.

Poichè queste sono rigide basta trovare un modello con quell'elemento lineare per esser sicuri che la V_3 esiste e coincide necessariamente col modello trovato: cioè che non ve ne sono altre.

Un modello è fornito dalle iperquadriche di S_4. Infatti il $d\,s^2$ di S_4 riferito al sistema 4-plo ortogonale di iperquadriche

$$\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} + \frac{t^2}{\delta - \tau} = 1$$

è (6)

$$d\,s^2 = -\frac{1}{4} \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)(\lambda - \eta)}{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)(\delta - \lambda)} d\,\lambda^2 -$$

$$- \frac{1}{4} \frac{(\mu - \lambda)(\mu - \nu)(\mu - \eta)}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu)(\delta - \mu)} d\,\mu^2$$

$$\frac{1}{4} \frac{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)(\nu - \eta)}{(\alpha - \nu)(\beta - \nu)(\gamma - \nu)(\delta - \nu)} d\,\nu^2 -$$

$$- \frac{1}{4} \frac{(\eta - \lambda)(\eta - \mu)(\eta - \nu)}{(\alpha - \eta)(\beta - \eta)(\gamma - \eta)(\delta - \eta)} d\,\eta^2$$

(6) Cfr. p. es. J. SOMMER, *Math. Annalen*, Bd. 53, 1900, p. 113.

con

$$\alpha > \eta > \beta > \nu > \gamma > \mu > \delta > \lambda > -\infty;$$

quindi sull'iperquadrica $\mu = 0$, p. es., si ha proprio un $d s^2$ del tipo voluto; e tanto basta per concludere che le nostre V_3 sono appunto iperquadriche. Anzi assegnato a piacere P_4 si hanno dal confronto del nostro elemento lineare con quest'ultimo i valori dei semiassi della relativa V_3 (risulta di qua nuovamente che se $h = 0$ la V_3 è applicabile sopra un S_3 perchè tale è il modello). Se in particolare $a_1 = 0$ si hanno paraboloidi, come risulta dall'espressione del loro elemento lineare.

9. Prima di enunciare il risultato bisogna esaminare l'ipotesi finora scartata $U' V' W' = 0$.

Se uno solo dei tre fattori è nullo, facciamo $U' V' \neq 0$, $W' = 0$. Poichè interessano le sole differenze fra U, V, W si può fare $W = 0$ (quindi $V < 0$) e con un cangiamento di parametri u, v possiamo partire dal

$$d s^2 = (U - V)(d u^2 + d v^2) - U V d w^2.$$

Per esso

$$(12, 12) = -\frac{1}{2}(U'' - V'') + \frac{1}{2}\frac{U'^2 + V'^2}{U - V}$$

$$(23, 23) = \frac{1}{2} U V'' + \frac{1}{4}\frac{V}{U - V} U'^2 - \frac{1}{4}\frac{U - 2V}{(U - V)V} U V'^2$$

$$(31, 31) = \frac{1}{2} V U'' - \frac{1}{4}\frac{-V + 2U}{(U - V)U} V U'^2 - \frac{1}{4}\frac{U}{U - V} V'^2$$

e gli altri simboli di Riemann sono $= 0$. Posto $(12, 12) = A_3, \ldots$, si ha

$$\frac{A_1}{U} - \frac{A_2}{V} = A_3 .$$

Delle equazioni di Codazzi due sono identicamente soddisfatte; combinando le altre come nel caso precedente si ha

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{A_3}{A_2} = \frac{U'}{U}\frac{V}{U - V}; \quad \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{A_3}{A_1} = -\frac{V'}{V}\frac{U}{U - V}$$

da cui

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{y_2(v)}{V}\frac{U - V}{U}; \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{y_1(u)}{U}\frac{U - V}{V}$$

sostituendo queste espressioni nella relazione fra le A_i si ricava, designando con k una costante,

1°) $$\frac{A_3}{A_1} = \frac{A_3}{A_2} = \frac{V-U}{U\,V};$$

oppure

2°) $$\frac{A_3}{A_2} = \frac{k}{k-V}\,\frac{V-U}{U\,V}; \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{k}{k-U}\,\frac{V-U}{U\,V}.$$

Il primo caso conduce subito alle ipersfere; rimane da esaminare il secondo. Le equazioni rimaste di Codazzi sono:

$$\frac{\partial}{\partial u}\log A_1 = \frac{U'}{U-V}\left\{1 - V\frac{A_3}{A_1}\right\}; \quad \frac{\partial}{\partial v}\log A_2 = -\frac{V'}{U-V}\left\{1 + U\frac{A_3}{A_2}\right\}$$

e da queste integrando e servendosi delle relazioni già note fra le A_i

$$A_1 = \frac{h\,(k-U)\,H_2\,H_3}{(k-U)^2\,(k-V)^2}; \quad A_2 = \frac{h\,(k-V)\,H_1\,H_3}{(k-U)^2\,(k-V)^2}; \quad A_3 = \frac{h\,k\,H_1\,H_2}{(k-U)^2\,(k-V)^2}$$

ove h è una nuova costante d'integrazione.

Notiamo ancora qui che, le U e V essendo definite a meno della stessa costante additiva, si può da per tutto porre U e V in luogo di $U-k$ e $V-k$. Così facendo, e scritte al posto dei simboli A_i le espressioni calcolate in principio di questo numero, si hanno tre equazioni differenziali (delle quali due sole indipendenti); si verifica, come nel caso generale, che il sistema è completamente integrabile.

Dalla prima equazione, p. es.,

$$\frac{h\,k\,(U-V)^2}{U^2\,V^2} = -\frac{1}{2}(U''-V'') + \frac{1}{2}\,\frac{U'^2+V'^2}{U-V}$$

si ha con successive derivazioni rispetto ad u

$$(U'''\,/\,U')' = -\,12\,h\,k\,U'\,/\,U^4$$

che integrata dà

$$\int \frac{\sqrt{U}\,d\,U}{\sqrt{a_1\,U^3 + a_2\,U^2 + a_3\,U - 4\,h\,k}} = u$$

(l'ultima costante d'integrazione si può fare $=0$). In modo analogo, e con osservazioni già esposte nel caso generale, si trova

$$\int \frac{\sqrt{-V}\, d\, V}{\sqrt{a_1 V^3 + a_2 V^2 + a_3 V - 4 h k}} = v.$$

Le superficie $w =$ cost. nelle nostre V_3 hanno l'elemento lineare delle quadriche di S_3 scritto in coordinate ellittiche; e siccome H_1, H_2, H_3 non dipendono da w si può pensare che le V_3 in esame siano quadriche rotonde intorno ad un piano. E infatti presa una quadrica di S_3 riferita ai suoi piani principali come piani coordinati e detto $d\,\sigma$ il suo elemento lineare, la V_3 che nasce facendola ruotare in uno S_4 intorno al piano $(y\,z)$ ha il

$$d\, s^2 = d\, \sigma^2 + x^2\, d\, \theta^2$$

($d\,\theta$ misura la rotazione infinitesima); cioè in coordinate ellittiche (sulla quadrica di S_3)

$$d\, s^2 = \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2) \left\{ \frac{\lambda_1\, d\, \lambda_1^2}{(a^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_1)} - \frac{\lambda_2\, d\, \lambda_2^2}{(a^2 + \lambda_2)(b^2 + \lambda_2)(c^2 + \lambda_2)} \right\} +$$

$$+ \frac{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)\, a^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}\, d\, \theta^2;$$

il confronto fra il $d\, s^2$ di partenza e questo ci assicura (data la rigidità del modello del $d\, s^2$) che le nostre V_3 sono quadriche rotonde intorno ad un piano (principale). Se negli integrali che dànno U, V è $a_1 = 0$, si hanno paraboloidi rotondi.

10. Veniamo all'ultimo caso rimasto da esaminare.

Se U e V sono costanti, mentre $W' \neq 0$, si può sempre, con eventuali cangiamenti di parametri, prender le mosse dal

$$d\, s^2 = (1 + W)\, d\, u^2 + (1 - W)\, d\, v^2 + d\, w^2.$$

Per esso si ha

$$(12, 12) = \frac{1}{4} W'^2$$

$$(23, 23) = \frac{1}{2} W'' + \frac{1}{4} \frac{1}{1 - W} W'^2$$

$$(31, 31) = -\frac{1}{2} W'' + \frac{1}{4} \frac{1}{1 + W} W'^2$$

da cui, con le solite notazioni, segue

$$\frac{A_1 + A_2}{A_3} = \frac{2}{1 - W^2}\,.$$

Le equazioni di Codazzi non identicamente soddisfatte sono

$$\frac{\partial}{\partial w}\log\frac{A_2}{A_1} = \frac{W'}{2}\,\frac{A_1 + A_2}{A_3} + \frac{W'}{1 - W^2}\,;\qquad \frac{\partial}{\partial w}\log A_3 = \frac{W'}{2}\,\frac{A_1 - A_2}{A_3} \quad \frac{W W'}{1 - W^2}$$

e dalla prima, tenuto conto della relazione fra le A_i, si ha integrando

$$\frac{A_2}{A_1} = h\,\frac{1 + W}{1 - W} \qquad (h = \text{cost.}).$$

Se $h = 1$, integrando la seconda equazione, si hanno le ipersfere; se invece $h \neq 1$ posto $\frac{1 + h}{1 - h} = k$, la seconda equazione di Codazzi si scrive

$$\frac{\partial}{\partial w}\log A_3 = \frac{\partial}{\partial w}\log(1 + W) + (1 - k)\,\frac{W'}{(1 - W)\,(k - W)}$$

e da essa si trae

$$A_3 = c\,\frac{1 - W^2}{k - W} \qquad (c = \text{cost.} > 0)$$

e con le due relazioni già note si determinano poi A_1 e A_2. Resta da vedere se si possono soddisfare le equazioni di Riemann con queste A_i.

Dalla prima si ha

$$\frac{1}{4}\,W'^2 = c\,\frac{1 - W}{k - W}$$

quindi

$$\int \frac{\sqrt{k - W}}{\sqrt{1 - W^2}}\,d\,W = 2\sqrt{c}\,w$$

la costante dell'ultima integrazione potendosi prender nulla.

Le altre equazioni ne risultano conseguenza, sicchè il $d\,s^2$ è determinato. Questo elemento lineare appartiene, come facilmente si verifica, alle iperquadriche di S_4 rotonde intorno a *due* piani principali, ortogonali e incidenti in un sol punto $\left(\text{cioè alle iperquadriche di equazione } \frac{x^2 + y^2}{a^2} \pm \frac{z^2 + t^2}{b^2} = 1\right)$; quindi queste sono le sole V_3 della nostra famiglia.

E con ciò la discussione è esaurita.

11. Ne riassumiamo il risultato nel seguente teorema:

Le V_3 che ammettono trasformazioni geodetiche proprie, con elemento lineare

$$d s^2 = (U - V)(U - W)\, d u^2 + (V - U)(V - W)\, d v^2 - (W - U)(W - V)\, d w^2$$

esistenti in uno S_4 euclideo (insieme a loro trasformate geodetiche) sono:

1) *le ipersfere,*

2) *le iperquadriche in generale* ($U' \, V' \, W' - 0$),

3) *le iperquadriche rotonde intorno ad un loro piano principale* (per es. $W' = 0$),

4) *le iperquadriche rotonde intorno a due piani principali (sghembi)* (per es. $U' = V' = 0$),

5) *le ipersuperficie a curvatura nulla (applicabili su S_3;* $U' = V' = W' = 0$).

12. Possiamo giovarci dei calcoli eseguiti, modificandoli lievemente, per la determinazione delle ipersuperficie esistenti in uno spazio a 4 dimensioni a curvatura costante K, e aventi il solito $d s^2$.

Si ricordi a tal fine che le equazioni di Gauss vengono modificate solo in quanto nei secondi membri al posto dei simboli di Riemann $(\alpha \beta, \gamma \delta)$ bisogna leggere $(\alpha \beta, \gamma \delta) - K (a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} - a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma})$; quindi le (G_2) restano inalterate, mentre nelle (G_1) al posto di $(i k, i k)$ va messo $(i k, i k) - K H_i H_k$. Le equazioni di Codazzi restano formalmente inalterate pur di intendere che in esse, p. es. nella forma scritta al n. 6, si abbia

$$A_i = (j \, l, \, j \, l) - K H_j H_l \qquad (i - = j - _| = l).$$

Fra queste A_i vale ancora la relazione $A_1 + A_2 = A_3$, quindi o sono tutt'e tre nulle, e allora *la V_3 è a curvatura relativa (all'ambiente) nulla*, oppure sono tutte diverse da zero.

Il processo d'integrazione delle equazioni di Codazzi resta inalterato e conduce per le A_i alle stesse espressioni ottenute nei nn. 7, 8.

Nel caso del n. 7, col significato attuale delle A, si ha

$$(12, 12) = (K + h) H_1 H_2; \quad (23, 23) = (K + h) H_2 H_3; \quad (31, 31) = (K + h) H_3 H_1$$

quindi si tratta di V_3 *a curvatura costante* (assoluta $K + h$, relativa h).

Infine nel caso del n. 8 (sempre per $U' V' W' \neq 0$) bisogna integrare il sistema di equazioni che nasce dal sostituire ai primi membri delle equazioni del n. 5 le espressioni dei simboli di Riemann tratte dalle A_i, cioè p. es.:

$$(23, 23) = \frac{h\, U}{(U\, V\, W)^2} H_2 H_3 + K H_2 H_3.$$

Il sistema così ottenuto è completamente integrabile; una delle conseguenze algebrico-differenziali è

$$-\frac{1}{2} \frac{(W - V)^2}{H_1} U'' + \frac{1}{2} V'' - \frac{1}{2} W'' =$$

$$- \frac{1}{4} \frac{W - V}{H_2^2} \left\{ 2 (V - U)^2 + (W - V)^2 \right\} V'^2 -$$

$$- \frac{1}{4} \frac{W - V}{H_3^2} \left\{ 2 (W - U)^2 + (W - V)^2 \right\} W'^2 - \frac{1}{4} \frac{(V - W)^2}{H_1^2} (2 U - V - W) U'^2$$

$$+ \frac{h}{(U\, V\, W)^2} (W - V)^2 (U^2 - V W) + K (W - V)^2 (2 U - V - W)$$

e questa successivamente derivata rispetto ad u dà

$$\left[\frac{1}{U'} \left(\frac{U'''}{U'}\right)'\right]' = - 48\, h \frac{U'}{U^5} - 48\, K\, U' \cdot$$

da cui integrando

$$\int \frac{\sqrt{U}\, d\, U}{\sqrt{- 4 K U^5 + \alpha_1 U^4 + \alpha_2 U^3 + \alpha_3 U^2 + \alpha_4 U - 4 h}} = u$$

e similmente per V e W.

Trovato l'elemento lineare si può anche in questo caso esaurire completamente la ricerca e rendere più espressivo il risultato costruendo effettivamente il modello (unico, per la sua rigidità) di V_3 che lo possiede.

Supponiamo l'ambiente a curvatura positiva unitaria, $K = 1$, in modo da potercelo raffigurare nell'ipersfera V_4^2 di equazione

$$\sum_1^5{}_i\, x_i^2 = 1$$

di uno S_5 euclideo.

Dico che le nostre V_3 sono segate su di essa dagli iperconi che hanno il vertice nel centro dell'ipersfera (sono dunque le analoghe delle coniche sferiche). Basta costruirsi il ds^2 per queste V_3 e confrontarlo con quello ultimamente trovato.

Insieme all'ipersfera

$$\sum_i x_i^2 = 1$$

consideriamo i coni

$$\sum_1^5{}_i \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 0.$$

Dall'identità [7]

$$\sum_i x_i^2 (a_{i+1} - \lambda)(a_{i+2} - \lambda)(a_{i+3} - \lambda)(a_{i+4} - \lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)$$

si trae (come nel solito calcolo per la determinazione delle coordinate ellittiche)

$$x_i^2 = \frac{(a_i - \lambda_1)(a_i - \lambda_2)(a_i - \lambda_3)(a_i - \lambda_4)}{P_i}$$

con

$$P_i = (a_i - a_{i+1})(a_i - a_{i+2})(a_i - a_{i+3})(a_i - a_{i+4})$$

quindi sopra una delle V_3 in esame, cioè sopra l'intersezione dell'ipersfera con un determinato cono, per es. $\lambda_4 = 0$,

$$x_i^2 = \frac{a_i}{P_i}(a_i - \lambda_1)(a_i - \lambda_2)(a_i - \lambda_3);$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ saranno le coordinate curvilinee dei punti della V_3.

Ma dall'identità precedente, per $\lambda_4 = 0$, si ha su tutta la V_3

$$\sum x_i^2 a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} a_{i+4} = 0$$

cioè

$$\sum \frac{1}{P_i}(a_i - \lambda_1)(a_i - \lambda_2)(a_i - \lambda_3) = 0$$

quindi

$$\sum \frac{1}{P_i} = 0; \quad \sum \frac{a_i}{P_i} = 0; \quad \sum \frac{a_i^2}{P_i} = 0; \quad \sum \frac{a_i^3}{P_i} = 0.$$

Ancora dalla stessa identità, uguagliando i coefficienti di λ nei due

(7) S'intende che se $i + j > 5$, $a_{i+j} = a_{i+j-5}$.

membri, si ha

$$\Sigma x_i^2 (a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} + a_{i+1} a_{i+2} a_{i+4} + a_{i+1} a_{i+3} a_{i+4} + a_{i+2} a_{i+3} a_{i+4}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

dalla quale segue fra l'altro

$$\Sigma \frac{a_i^4}{P_i} = 1.$$

Le identità rilevate per le a_i permettono di calcolare facilmente il $d s^2$. Per esempio il coefficiente di $d \lambda_1^2$ vale

$$\frac{1}{4} \frac{\Sigma \frac{a_i}{P_i} (a_i - \lambda_2)(a_i - \lambda_3)(a_{i+1} - \lambda_1)(a_{i+2} - \lambda_1)(a_{i+3} - \lambda_1)(a_{i+4} - \lambda_1)}{(a_1 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_1)(a_3 - \lambda_1)(a_4 - \lambda_1)(a_5 - \lambda_1)}.$$

cioè per le precedenti

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_1}{4 Q_5(\lambda_1)}$$

Q_5 essendo un polinomio di quinto grado in λ_1; analogamente si hanno i coefficienti di $d\lambda_2^2$, $d\lambda_3^2$; l'elemento lineare così ottenuto è proprio del tipo richiesto. Dunque:

Le nostre V_3 negli S_4 a curvatura costante positiva K sono segate sull'ipersfera di S_5, di raggio $\sqrt{K}$, dai coni quadrici col vertice nel centro di essa.

Sono insomma le V_3 che per proiezione stereografica dell'ipersfera sopra un S_4 euclideo danno luogo alle V_3 analoghe alle ciclidi.

Rimarrebbero da esaminare i casi $U' V' = 0$, $W' = 0$, e $U' = V' = 0$, $W' \neq 0$; i risultati dei nn.[i] 9, 10 vengono modificati solo in quanto i polinomi che figurano a denominatore degli integrali (iperellittici nel primo caso, ellittici nel secondo) aumentano il loro grado di un'unità (quindi sono di grado 4 e 3 rispettivamente). Analoga alla precedente è la costruzione dei modelli aventi questi elementi lineari.

§ 4. V_3 ESISTENTI IN S_4 EUCLIDEO O A CURVATURA COSTANTE CON ELEMENTO LINEARE $ds^2 = \Lambda(u,v)(du^2 + dv^2)(k - W) + dw^2$.

13. Dalle espressioni dei simboli di RIEMANN per il ds^2 precedente si hanno le equazioni di GAUSS:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{11}\,\Omega_{22} - \Omega_{12}^2 &= -\frac{1}{2}\Lambda\cdot(k - W)\left(\frac{\partial^2 \log\Lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log\Lambda}{\partial v^2}\right) - \\ &\qquad - \frac{1}{4}\Lambda^2 W'^2 = (12,12) \\ \Omega_{22}\,\Omega_{33} - \Omega_{23}^2 = \Omega_{33}\,\Omega_{11} - \Omega_{31}^2 &= \frac{1}{4}\frac{\Lambda W'^2}{k - W} + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\Lambda W'' = (23,23) = (31,31) \end{aligned}\right\} \quad (G_1)$$

$$\Omega_{12}\,\Omega_{23} - \Omega_{13}\,\Omega_{22} = \Omega_{23}\,\Omega_{31} - \Omega_{21}\,\Omega_{33} = \Omega_{31}\,\Omega_{12} - \Omega_{32}\,\Omega_{11} = 0. \quad (G_2)$$

Qui, esclusa la soluzione evidente delle V_3 applicabili su S_3, sono possibili due casi: o $(12,12)(23,23)(31,31) \neq 0$, oppure $(12,12) \neq 0\ (23,23) = (31,31) = 0$.

14. Mettiamoci nella prima ipotesi. Allora (n. 3, I) sono

$$\Omega_{12} = \Omega_{23} = \Omega_{31} = 0; \quad \Omega_{11}^2 = \Omega_{22}^2 = (12,12); \quad \Omega_{33}^2 = \frac{(13,13)^2}{(12,12)}.$$

Le equazioni di CODAZZI divengono

$$\frac{\partial \log\Omega_{11}}{\partial v} = \frac{\partial \log\Lambda}{\partial v}; \quad \frac{\partial \log\Omega_{11}}{\partial w} = -\frac{1}{2}\frac{W'}{k - W}\left\{1 + \Lambda(k - W)\frac{\Omega_{33}}{\Omega_{11}}\right\} \quad (C_1)$$

$$\frac{\partial \log\Omega_{11}}{\partial u} = \frac{\partial \log\Lambda}{\partial u}; \quad \frac{\partial \log\Omega_{11}}{\partial w} = -\frac{1}{2}\frac{W'}{k - W}\left\{1 + \Lambda(k - W)\frac{\Omega_{33}}{\Omega_{11}}\right\} \quad (C_2)$$

$$\frac{\partial\Omega_{33}}{\partial u} = \frac{\partial\Omega_{33}}{\partial v} = 0 \quad (C_3)$$

e danno $\Omega_{33} = \Omega_{33}(w)$; $\Omega_{11} = \Lambda \cdot \varphi(w)$, e per $\varphi(w)$ l'equazione differenziale

$$\frac{d \log \varphi(w)}{dw} = -\frac{1}{2}\frac{W'}{k-W}\left\{1 + (k-W)\frac{\Omega_{33}}{\varphi(w)}\right\}.$$

Bisogna vedere se si può soddisfare a queste con le espressioni delle Ω_{ii} fornite dalle equazioni di Gauss. Poichè Ω_{33} è funzione della sola w, tale dev'essere pure

$$\frac{1}{\Omega_{33}^2} = \frac{(12,12)}{(13,13)^2} = \frac{-\dfrac{k-W}{2\Lambda}\left(\dfrac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial v^2}\right) - \dfrac{W'^2}{4}}{\left(\dfrac{1}{4}\dfrac{W'^2}{k-W} + \dfrac{W''}{2}\right)^2}$$

e perciò occorre e basta che sia Λ soluzione dell'equazione

$$-\frac{1}{2\Lambda}\left(\frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial v^2}\right) = c \text{ (costante)}.$$

L'interpretazione geometrica è immediata; l'espressione a destra divisa per $k - W$ dà la curvatura di una superficie $w = \text{cost.}$ nel punto (u, v): essa è dunque costante $\left(= \dfrac{c}{k-W}\right)$.

Si ha quindi

$$\Omega_{33} = \frac{\dfrac{1}{4}\dfrac{W'^2}{k-W} + \dfrac{W''}{2}}{\sqrt{c(k-W) - \dfrac{1}{4}W'^2}}$$

e perciò dev'essere $c > 0$, anzi tale da rendere positivo il radicando.

Dall'equazione di Gauss rimasta si ha finalmente

$$\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Lambda\sqrt{c(k-W) - \frac{1}{4}W'^2}; \qquad \varphi(w) = \sqrt{c(k-W) - \frac{1}{4}W'^2}.$$

Se si portano queste espressioni nell'equazione differenziale in $\varphi(w)$ si trova ch'essa è identicamente soddisfatta, quindi W non è soggetta ad alcuna condizione.

Si può domandare se fra queste V_3 (indeformabili in S_4) ve ne siano a curvatura costante h (necessariamente $h > 0$). Deve essere in tal caso:

$$(12, 12) = \Lambda^2 \left\{ c(k - W) - \frac{1}{4} W'^2 \right\} = h\, \Lambda^2 (k - W)^2$$

$$(31, 31) = (23, 23) = \Lambda \left\{ \frac{1}{4} \frac{W'^2}{k - W} + \frac{1}{2} W'' \right\} = h\, \Lambda\, (k - W)$$

si hanno quindi le due equazioni differenziali in W:

$$\frac{1}{4} W'^2 + h(k - W)^2 - c(k - W) = 0$$

$$\frac{1}{2} W'' + \frac{1}{4} \frac{W'^2}{k - W} - h(k - W) = 0.$$

Ma la prima è un integrale primo della seconda; infatti derivandola e separando il fattore $W' \neq 0$, si ha

$$\frac{1}{2} W'' - 2h(k - W) = -c$$

e sostituendo nella prima stessa e dividendo per $k - W \neq 0$ si ottiene appunto la seconda. Eseguendo l'integrazione della prima, e prescindendo da costanti inessenziali si ha

$$k - W = \frac{c}{k} \operatorname{sen}^2 \sqrt{h}\, w$$

(si potrebbe far a meno di h passando ad un $d s^2$ simile).

15. Gli elementi lineari del n.º precedente appartengono a V_3 di rotazione intorno ad un asse (l'ultimo, in particolare, ad una ipersfera); il profilo meridiano, data l'arbitrarietà di W, è arbitrario.

Per la forma (2') dell'elemento lineare trasformato di (2) si può anche per esso costruire una V_3 di rotazione in S_4 che lo possegga.

16. Supponiamo $(23, 23) = 0$, $(31, 31) = 0$.

Si ha

$$\frac{1}{2} \frac{W'^2}{k - W} + W'' = 0$$

da cui integrando, per $W' \neq 0$, e prescindendo da costanti inessenziali

$$k - W = w^2.$$

Inoltre per l'annullarsi di quei due simboli deve essere

$$\Omega_{13} = \Omega_{23} = \Omega_{33} = 0; \quad \Omega_{11}\,\Omega_{22} - \Omega_{12}^2 = (12, 12).$$

Le equazioni di Codazzi non identicamente soddisfatte sono

$$\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial v} - \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \Lambda}{\partial v}(\Omega_{11} + \Omega_{22}); \quad \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial w} = \frac{\Omega_{11}}{w}$$

$$\frac{\partial \Omega_{22}}{\partial u} - \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \Lambda}{\partial u}(\Omega_{22} + \Omega_{11}); \quad \frac{\partial \Omega_{22}}{\partial w} = \frac{\Omega_{22}}{w}.$$

Si ha intanto

$$\Omega_{11} = \varphi_1(u, v)\, w; \quad \Omega_{22} = \varphi_2(u, v)\, w$$

e perciò dall'ultima equazione di Gauss

$$\Omega_{12} = w\sqrt{\varphi_1\,\varphi_2 + \Lambda^2 + \frac{\Lambda}{2}\left(\frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial v^2}\right)} = w\sqrt{\Delta}$$

e per le equazioni di Codazzi rimaste

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = \frac{\partial \sqrt{\Delta}}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \Lambda}{\partial v}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \frac{\partial \sqrt{\Delta}}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \Lambda}{\partial u}(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Può forse convenire di assumere come incognite $\theta_1 = \frac{\varphi_1}{\Lambda}$ e $\theta_2 = \frac{\varphi_2}{\Lambda}$; indicando ora con k la curvatura di $\Lambda(d\,u^2 + d\,v^2)$ si ha

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial v} = \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial \Lambda\sqrt{\theta_1\,\theta_2 + 1 - k}}{\partial u} - \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\frac{\partial \log \Lambda}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial u} = \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial \Lambda\sqrt{\theta_1\,\theta_2 + 1 - k}}{\partial v} + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\frac{\partial \log \Lambda}{\partial u}.$$

Ad ogni soluzione (θ_1, θ_2) di questo sistema corrisponde una V_3 del nostro tipo, certo deformabile perchè le espressioni delle Ω_{rs}, soddisfacenti alle equazioni di Gauss-Codazzi, non sono determinate in modo unico dalle equazioni stesse.

Del resto l'effettiva esistenza e deformabilità in S_4 delle V_3 in esame si prova subito geometricamente.

Sopra un'ipersfera di raggio unitario si costruisca una superficie (iniziale) il cui quadrato dell'elemento lineare sia $d\sigma^2 = \Lambda(u,v)(du^2 + dv^2)$. Il cono V_3 che la proietta dal centro dell'ipersfera ha proprio

$$ds^2 = w^2 d\sigma^2 + dw^2 = \Lambda(u,v)(du^2 + dv^2) w^2 + dw^2$$

quando si assuma come parametro w la distanza del punto che si considera dal centro. Ad ogni flessione della superficie iniziale corrisponde una deformazione per applicabilità della V_3.

Ciò vale qualunque sia Λ; se però la superficie iniziale ha curvatura gaussiana (assoluta) $= 1$, cioè se è a curvatura (relativa) nulla considerata entro l'ipersfera (e solo in questo caso) la varietà risulta applicabile su S_3. Basta provare che se e solo se

$$\frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial v^2} = -2\Lambda$$

è $(12, 12) = 0$; il che è immediato essendo ora $k - W = w^2$.

Ci si può domandare se insieme ad una V_3 del tipo esaminato esista in S_4 anche una sua trasformata geodetica.

Poichè al

$$ds^2 = \Lambda(u,v)(du^2 + dv^2)(k - W) + dw^2$$

corrisponde l'altro

$$ds'^2 = \Lambda(u,v)(du^2 + dv^2)\frac{k - W}{kW} + \frac{dw^2}{W^2}$$

per le nostre V_3 $(W = k - w^2)$ si ha

$$ds'^2 = \Lambda(u,v)(du^2 + dv^2)\frac{w^2}{k(k - w^2)} + \frac{dw^2}{(k - w^2)^2} \qquad (k \gtrless 0).$$

Per vedere se questo ds' può esistere in S_4 è opportuno cambiare il parametro w in modo da poter confrontare il ds' trasformato con quelli già riconosciuti esistenti in S_4.

Posto $d\,t = \frac{d\,w}{a^2 - w^2}$ se $k = a^2 > 0$, ovvero $d\,t = \frac{d\,w}{a^2 + w^2}$ se $k = -a^2$ si ha

$$d\,s'^2 = \Lambda\,(u, v)\,(d\,u^2 + d\,v^2)\,\frac{\operatorname{senh}^2 a\,t}{a^2} + d\,t^2$$

oppure

$$d\,s'^2 = \Lambda\,(u, v)\,(d\,u^2 + d\,v^2)\,\frac{\operatorname{sen}^2 a\,t}{a^2} + d\,t^2.$$

Nessuno di questi elementi lineari rientra nei tipi trovati, almeno in generale; non nell'ultimo per la presenza del $\operatorname{senh}^2 a\,t$ o del $\operatorname{sen}^2 a\,t$; non nei precedenti essendo ora Λ qualsiasi.

Però se Λ è tale da dare a $\Lambda\,(d\,u^2 + d\,v^2)$ curvatura costante, il secondo $d\,s'$ appartiene, come s'è trovato, ad un'ipersfera.

17. Rimane da esaminare l'ipotesi $W =$ costante. È evidente che in questo caso si ha un modello del $d\,s^2$ in un cilindro di S_4 la cui sezione retta (in S_3) ha l'elemento $d\,s^2 = c\,\Lambda\,(u, v)\,(d\,u^2 + d\,v^2)$, $c > 0$.

Queste V_3 ammettono non soltanto trasformazioni geodetiche, ma anche per parallelismo di Levi-Civita [8]. Se in particolare il ds^2 è a curvatura nulla le V_3 corrispondenti sono applicabili su S_3.

18. Riassumendo:

Le V_3 di elemento lineare $d\,s^2 = \Lambda\,(u, v)\,(d\,u^2 + d\,v^2)\,(k - W) + d\,w^2$ esistenti in S_4 euclideo sono:

1) *ipersuperficie rotonde intorno ad una retta (rigide; W arbitrario).*

2) *ipersuperficie coniche o cilindriche (deformabili; Λ arbitrario)*; queste ammettono trasformate geodetiche in S_4 solo quando le superficie $w =$ cost. sono a curvatura costante.

3) *applicabili su S_3.*

19. Se l'ambiente ha curvatura costante $K_0 = 0$ si hanno risultati del tutto simili. Sempre i secondi membri delle (G_2) sono nulli, mentre nelle (G_1) al posto di $(12, 12)$ e di $(23, 23) = (13, 13)$ bisogna leggere rispettivamente $(12, 12) - K_0\,\Lambda^2\,(k - W)^2$ e $(23, 23) - K_0\,\Lambda\,(k - W)$. Si presentano quindi gli stessi casi precedenti.

---

[8] Cfr. la mia Nota: *Le trasformazioni puntuali fra varietà che conservano il parallelismo di Levi-Civita* [Rend. Accad. Lincei, 1920_1].

Quando tutte le Ω_{ik} sono determinate dal $d\,s^2$ si ha

$$\Omega_{12} = \Omega_{23} = \Omega_{31} = 0$$

$$\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Lambda\,(u,\ v)\sqrt{c\,(k - W) - K_0\,(k - W)^2 - \frac{1}{4}\,W'^2}$$

$$\Omega_{33} = \frac{\dfrac{1}{4}\,\dfrac{W'^2}{k - W} + \dfrac{1}{2}\,W'' - K_0\,(k - W)^2}{\sqrt{c\,(k - W) - K_0\,(k - W)^2 - \dfrac{1}{4}\,W'^2}}$$

essendo c la curvatura costante del $d\,s^2 = \Lambda\,(d\,u^2 + d\,v^2)$ e W affatto arbitraria.

Quando ciò non accade ($\Omega_{22}\,\Omega_{33} - \Omega_{23}^2 = \Omega_{11}\,\Omega_{33} - \Omega_{13}^2 = 0$) rimane $\Lambda\,(u, v)$ arbitraria, mentre si ha $k - W = \cos^2\,(\sqrt{K_0}\,w)$ oppure $= \cosh^2\,(\sqrt{-K_0}\,w)$ secondo che $K_0 > 0$ oppure $K_0 < 0$.

Sulle equazioni integrali non lineari.

(*Di* ATTILIO VERGERIO, *a Cagliari.*)

Se la teoria delle equazioni integrali lineari è stata ampiamente studiata in modo da essere oggi suscettibile di una esposizione organica, non altrettanto può dirsi della teoria delle equazioni *non lineari*, la quale si trova, ancor oggi, allo stato embrionale. La ragione di tale differenza va ricercata principalmente nella natura stessa dell'argomento, il quale presenta difficoltà molto gravi, specialmente quando si voglia lasciare alla questione tutta la sua generalità.

Per questa ragione, siamo ben lontani dall'avere la pretesa di presentare con questo lavoro una trattazione completa ed esauriente della questione; crediamo soltanto di portare alla teoria un modestissimo contributo, che potrà forse esser seguìto da altri di maggiore portata.

Il tipo di equazioni che studieremo nel primo Capitolo è il seguente:

$$u(s) = h(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) f\left[h(t)\right] dt; \tag{A}$$

dove $u(s)$ e $K(s, t)$ sono due funzioni note, $h(s)$ la funzione incognita ed f è simbolo di un'operazione funzionale, assoggettata a certe condizioni che saranno specificate tra poco. Dimostreremo che per l'equazione (A) valgono risultati analoghi a quelli che si trovano esposti nella mia Memoria: *Sulle equazioni integrali del tipo Fredholm* [1], la quale, ove occorra, sarà richiamata colla lettera M. Dopo aver dimostrato l'esistenza delle *costanti caratteristiche* e delle *funzioni caratteristiche* del nucleo $K(s, t)$, relativamente all'operazione funzionale f, passeremo a definire il *sistema completo* di tali costanti e di tali funzioni, di cui ci serviremo poi per la risoluzione della (A).

[1] *Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo,* t. XLI, 1916, pp. 1-35.

Passeremo poi a studiare nel Cap. II l'equazione fondamentale

$$u(s) = \psi[h(s)] - \varphi\Big[\psi[g(s)]\Big] - \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r \Big[h(t)\Big] dt; \qquad (B)$$

dove le ψ, φ ed $f_r (r = 1, 2, \ldots, p)$ sono simboli di operazioni funzionali distributive soddisfacenti ad assegnate condizioni; e troveremo per essa la formula risolutiva, tanto nel caso in cui i limiti siano variabili, quanto in quello in cui siano costanti.

L'equazione (B) gode d'una grande generalità, che le permette di abbracciare quasi tutti i tipi di equazioni integrali sinora studiati; tra i quali vanno, in ispecial modo, ricordate le equazioni che si presentano nella teoria delle equazioni alle derivate parziali, l'equazione del Burgatti, nonchè le equazioni integro-differenziali dei vari tipi studiati dal Volterra. Tale rassegna si troverà esposta al Cap. III, dove dimostreremo infine che per l'equazione

$$u(s) = h(s) - \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r \Big[h(t)\Big] dt,$$

la quale è un caso particolare della (B), si può avere la soluzione (che sotto certe condizioni è unica) anche quando le operazioni funzionali f_r non siano distributive, come s'era precedentemente supposto; qualunque siano i limiti, variabili o costanti.

CAPITOLO I.

Equazioni a limiti costanti.

§ 1.

La costante e la funzione caratteristica fondamentale del nucleo.

1. Indicheremo con f un'operazione funzionale *univoca*, *continua* e soddisfacente alle seguenti condizioni:

1°) di essere ***distributiva rispetto alla somma***, tale cioè da aversi, per ogni coppia di funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ e per ogni numero finito c,

$$f\Big[\varphi(x)+\psi(x)\Big]=f\Big[\varphi(x)\Big]+f\Big[\psi(x)\Big],$$

$$f\Big[c\,\varphi(x)\Big]=c\,f\Big[\varphi(x)\Big];$$

2°) di essere ***invertibile col segno d'integrale;*** nell'ipotesi, beninteso, che per la funzione integranda siano soddisfatte le condizioni volute perchè tale inversione sia lecita;

3°) di potersi applicare alle funzioni che qui occorrerà considerare quel numero di volte, finito od anche infinito, che sarà necessario, senza introdurvi delle singolarità ([2]) ed infirmarne l'integrabilità.

Qualora l'operazione f debba essere applicata ad una funzione $\varphi(s, t)$ di due variabili e per sua natura sia tale da potersi eseguire separatamente rispetto ad una di esse (come accadrebbe se la f fosse l'operazione di de-

([2]) Da questo punto di vista, le nostre operazioni funzionali si possono dividere in due categorie: operazioni che, applicate ad una funzione *qualunque*, non introducono singolarità, ed operazioni che ne possono o no introdurre, a seconda delle funzioni cui vengono applicate; l'operazione di derivazione, ad esempio, appartiene alla seconda categoria. Noi ammetteremo che l'operazione f appartenga alla prima categoria, e, nel caso appartenesse alla seconda, faremo l'ipotesi che le funzioni cui essa dev'essere applicata siano tali da non presentare, dopo detta applicazione, singolarità alcuna.

rivazione, di integrazione, di passaggio al limite, di moltiplicazione per una funzione d'una sola variabile, ecc.) occorrerà precisare rispetto a quale delle due variabili l'operazione s'intende eseguita; e scriveremo $f_s[\varphi(s, t)]$ oppure $f_t[\varphi(s, t)]$, a seconda che l'operazione f s'intende eseguita rispetto alla s od alla t.

Avvertiamo qui, una volta per tutte, che le operazioni, cui nel presente lavoro intendiamo riferirci, sono quelle che applicate ad una funzione generano una nuova funzione.

Sia, d'altra parte, $K(s, t)$ una funzione reale delle variabili reali s, t, definita nel campo $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$, non identicamente nulla ed in esso integrabile, nel senso di Lebesgue; tale inoltre che il nucleo iterato (che definiremo tra poco)

$$f_s\Big[K_2(s, t)\Big] = \int_a^b f_s\Big[K(s, r)\Big] f_r\Big[K(r, t)\Big]\, d\, r$$

non sia identicamente nullo.

Supporremo da ultimo che la funzione $f_s[K(s, t)]$ risulti *simmetrica* nelle due variabili s e t; cioè si abbia:

$$f_s\Big[K(s, t)\Big] = f_t\Big[K(t, s)\Big].$$

Più avanti vedremo come ci si possa liberare da questa condizione alquanto restrittiva.

2. Ciò premesso, consideriamo la successione:

$$K_1(s, t) = K(s, t)$$

$$K_n(s, t) = \int_a^b K(s, r)\, f_r\Big[K_{n-1}(r, t)\Big]\, d\, r = \int_a^b K_{n-1}(s, r)\, f_r\Big[K(r, t)\Big]\, d\, r. \qquad (1)$$

$$(n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Ad ambo i membri della (1) applichiamo l'operazione f_s ed integriamo, rispetto ad ambedue le variabili, dopo averli moltiplicati per $f_s[K_n(s, t)]$. Posto

$$U_{2n} = \int_a^b \int_a^b \Big\{ f_s\Big[K_n(s, t)\Big] \Big\}^2 d\, s\; d\, t,$$

otterremo

$$U_{2n} = \int_a^b \int_a^b f_r \left[K_{n-1}(r,\ t) \right] f_r \left[K_{n+1}(r,\ t) \right] d\,r\ d\,t;$$

da cui, per la disuguaglianza di SCHWARZ,

$$U_{2n}^2 \leqq U_{2n-2}\, U_{2n+2}\,,$$

cioè

$$\gamma_{n-1} \leqq \gamma_n;$$

avendo posto $\dfrac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = \gamma_n$.

Possiamo osservare subito che nessuna delle funzioni iterate $K_n(s,\ t)$ può essere identicamente nulla. Invero, se fosse $K_{n+1}(s,\ t) = 0$, dovrebbe essere $U_{2n+2} = 0$ e quindi anche $U_{2n} = 0$, cioè $f_s[K_n(s,\ t)] = 0$. Così continuando, si arriverebbe all'eguaglianza $f_s[K_2(s,\ t)] = 0$, che contraddice l'ipotesi.

Avendosi poi

$$U_{2n} \leqq U_{2n-2}\, U_2\,,$$

cioè

$$\gamma_{n-1} \leqq U_2\,,$$

potremo scrivere

$$\lim_{n=\infty} \gamma_n = \Gamma_1\,.$$

Si dimostrerebbe poi seguendo il ragionamento dello SCHMIDT (³) che

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_{2n}}{\Gamma_1^n} = U > 1.$$

3. La successione $\dfrac{K_{2n}(s,\ t)}{\Gamma_1^n}$ *converge in media* verso una funzione $H^{(1)}(s,\ t)$ finita e ben determinata. Ci dispensiamo dal fare la dimostrazione potendo essa condursi in modo affatto simile a quella data dallo SCHMIDT. Ci limiteremo solo ad osservare che, in grazia della relazione

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \int_a^b \frac{\{f_s[K_{2n}(s,\ t)]\}^2}{\Gamma_1^{2n}}\, d\,s\ d\,t = \lim \frac{U_{4n}}{\Gamma_1^{2n}} = U \geqq 1,$$

la funzione $H^{(1)}(s,\ t)$ non può essere identicamente nulla.

(³) *Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener*. Inaugural-Dissertation, Goettingen, 1905.

Essa soddisfa poi evidentemente all'eguaglianza

$$H^{(1)}(s,\ t)=\frac{1}{\Gamma_1}\int_a^b K_2(s,\ r)\, f_r\left[H^{(1)}(r,\ t)\right] d\, r;$$

basta infatti ricordare la seguente relazione

$$\frac{K_{2n}(s,\ t)}{\Gamma_1^n}=\frac{1}{\Gamma_1}\int_a^b K_2(s,\ r)\,\frac{f_r\,[K_{2n-2}(r,\ t)]}{\Gamma_1^{n-1}}\, d\, r,$$

dalla quale, con passaggio al limite, si deduce la precedente.

Se poi indichiamo con $H_1^{(1)}(s,\ t)$ la funzione

$$H_1^{(1)}(s,\ t)=\int_a^b K(s,\ r)\, f_r\left[H^{(1)}(r,\ t)\right] d\, r=\int_a^b H^{(1)}(s,\ r)\, f_r\left[K(r,\ t)\right] d\, r,$$

potremo scrivere la seguente relazione, che, per quanto precede, è ormai di per sè stessa evidente:

$$H^{(1)}(s,\ t)=\frac{1}{\Gamma_1}\int_b^a K(s,\ r)\, f_r\left[H^{(1)}(r,\ t)\right] d\, r.$$

La costante Γ_1 e la funzione $H^{(1)}(s, t)$ si possono denominare rispettivamente *costante fondamentale* e *funzione caratteristica fondamentale del nucleo* $K(s,\ t)$, *relativameute all'operazione* f.

§ 2.

La costante e la funzione caratteristica fondamentale di $g(s)$.

1. Sia $g(s)$ una funzione integrabile in $(a,\ b)$: formiamo la successione:

$$\left.\begin{aligned} g_0(s)&=g(s)\\ g_n(s)&=\int_a^b K(s,\ t)\, f\left[g_{n-1}(t)\right] d\, t=\int_a^b K_n(s,\ t)\, f\left[g(t)\right] d\, t\ (^1).\\ &(n=1,\ 2,\ 3,\ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(1) Trattandosi di funzioni ad una sola variabile s'è omessa al piede della lettera f ogni indicazione, non essendovi pericolo di equivoci.

Applichiamo l'operazione f ai due primi membri delle precedenti uguaglianze ed integriamo dopo averli moltiplicati per $[f g_n(s)]$:

$$\int_a^b \left\{ f\left[g_n(s)\right] \right\}^2 ds = \int_a^b f\left[g_{n-1}(t)\right] f\left[g_{n+1}(t)\right] dt.$$

Posto

$$V_n = \int_a^b \left\{ f\left[g_n(s)\right] \right\}^2 ds, \tag{3}$$

avremo per la disuguaglianza dello Schwarz,

$$V_n^2 \leqq V_{n-1} V_{n+1},$$

$$C_{n-1} \leqq C_n,$$

avendo posto $\frac{V_{n+1}}{V_n} = C_n$. E poichè dalle (2) si ricava

$$V_n \leqq V_2 V_{n-1},$$

si può asserire che esiste il limite delle C_n; porremo perciò $\lim\limits_{n=\infty} C_n = C$.

È poi evidente che se $f[g_1(s)] \neq 0$, nessuna delle $g_n(s)$ può essere identicamente nulla.

2. Seguendo un procedimento simile a quello tenuto al paragrafo precedente, si dimostrerebbe con facilità che la successione $\frac{g_{2n}(s)}{c^n}$ *converge in media* verso una funzione $G^{(1)}(s)$, la quale, se non è soluzione dell'equazione

$$\int_a^b H^{(1)}(s, t) f\left[\theta(t)\right] dt = 0,$$

soddisfa l'eguaglianza

$$G^{(1)}(s) = \frac{1}{\Gamma_1} \int_a^b K_2(s, t) f\left[G^{(1)}(t)\right] dt. \tag{4}$$

Potendosi infatti dimostrare che $C = \Gamma_1$ (Cfr. M I § 3) per avere la (4) basterà dividere per C^{n+1} i membri dell'eguaglianza

$$g_{2n+2}(s) = \frac{1}{\Gamma_1} \int_a^b K_2(s, t) f\left[g_{2n}(t)\right] dt$$

e passare al limite per $n = \infty$. Posto poi

$$G_1^{(1)}(s) = \int_a^b K(s, t) f\left[G^{(1)}(t)\right] dt,$$

si ha la relazione evidente

$$G^{(1)}(s) = \frac{1}{\Gamma_1}\int_a^b K(s,\ t)\, f\left[G_1^{(1)}(t)\right] d\,t.$$

La costante C e la funzione $G^{(1)}(s)$ si potranno rispettivamente denominare *costante caratteristica fondamentale* e *funzione caratteristica fondamentale della $g(s)$, relativamente al nucleo $K(s,\ t)$, ed all'operazione funzionale f.*

§ 3.

Il sistema completo delle costanti e delle funzioni caratteristiche.

Operando, nel modo esposto al § 1, sul nuovo nucleo

$$F^{(2)}(s,\ t) = K(s,\ t) - H^{(1)}(s,\ t),$$

il quale soddisfa evidentemente alle condizioni poste per $K(s,\ t)$ ed è inoltre tale da aversi

$$f_s\left[F^{(2)}(s,\ t)\right] = f_t\left[F^{(2)}(t,\ s)\right] \ (^5),$$

s'otterranno risultati analoghi a quelli ivi trovati. Arriveremo così a dimostrare con facilità l'esistenza d'un'altra funzione $H^{(2)}(s, t)$ e d'un'altra costante Γ_2 legata alla precedente dalla relazione $\Gamma_2 \leqq \Gamma_1$.

Ripetendo il ragionamento pel nucleo

$$F^{(3)}(s, t) = F^{(2)}(s, t) - H_1^{(2)}(s, t),$$

si proverebbe l'esistenza d'un'altra funzione $H^{(3)}(s, t)$ e d'un'altra costante Γ_3 tale da essere $\Gamma_3 \leqq \Gamma_2$. Così continuando s'arriverebbe a definire, analogamente a quanto fu fatto al Cap. II della mia citata Memoria, il *sistema*

---

(5) Si osservi che si ha, per ogni n,

$$\frac{f_s\left[K_{2n+1}(s, t)\right]}{\Gamma_1^n} = \frac{f_t\left[K_{2n+1}(t, s)\right]}{\Gamma_1^n};$$

e quindi al limite

$$f_s\left[H_1^{(1)}(s, t)\right] = f_t\left[H_1^{(1)}(t, s)\right].$$

completo delle funzioni caratteristiche $H^{(\nu)}(s,t)$ *e delle costanti caratteristiche* Γ_ν, *relative al nucleo* $K(s,t)$ *ed all'operazione* f, sistema che risulterà formato, a seconda dei casi, da un numero finito od infinito di elementi.

In modo perfettamente analogo, si può definire per una funzione qualunque $g(s)$ il *sistema completo delle sue funzioni caratteristiche* $G^{(\nu)}(s)$ *relative al nucleo* $K(s,t)$ *ed all'operazione* f nonchè quello delle sue *costanti caratteristiche*, sistema che coinciderà con quello delle Γ_ν, se la $g(s)$ non è soluzione di alcuna delle equazioni

$$\int_a^b H^{(\nu)}(s,\,t)\,f\left[\theta\,(t)\right] d\,t = 0.$$

§ 4.

Ortogonalità delle funzioni caratteristiche.

Diremo che due funzioni $\varphi(s,t)$ e $\psi(s,t)$ sono *ortogonali, relativamente all'operazione* f, se vale per esse la relazione

$$\int_a^b \varphi\,(s,r)\,f_r\left[\psi\,(r,\,t)\right] dr = 0.$$

Ciò posto, possiamo enunciare il teorema:

Le funzioni caratteristiche $H^{(\nu)}(s,t)$ *sono tra loro ortogonali relativamente all'operazione* f;

dal quale discendono i due corollari

I. *Le funzioni* $H^{(\nu)}(s,t)$ *sono ortogonali alle* $H_1^{(\nu)}(s,t)$ *relativamente alla* f.

II. *Le funzioni* $H_1^{(\nu)}(s,t)$ *sono tra loro ortogonali relativamente alla* f.

Il teorema può dimostrarsi con metodo affatto simile a quello che trovasi esposto al § 2 del Cap. II della citata Memoria (M).

L'ortogonalità poi delle $G^{(\nu)}(s)$ non è che un'ovvia conseguenza del teorema precedente.

§ 5.

L'EQUAZIONE INTEGRALE DI 2^a SPECIE.

Si potrebbero ora con facilità estendere tutti i teoremi sulle funzioni e costanti caratteristiche, che si trovano dimostrati al § 3 del Cap. II della M. Però noi ci limiteremo a ricordare soltanto il seguente teorema di cui faremo uso:

Se la funzione $g(s)$ è definita dall'equazioue

$$g(s) = \int_a^b K(s, t) f\Big[h(t)\Big] dt,$$

sarà

$$g(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} G^{(\nu)}(s);$$

e la serie del secondo membro convergerà assolutamente ed uniformemente.

Dopo ciò possiamo passare alla risoluzione dell'equazione

$$u(s) = h(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) f\Big[h(t)\Big] dt. \tag{A}$$

Posto infatti

$$h(s) = u(s) + g(s),$$

l'equazione precedente può scriversi

$$g(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \Big\{ f\Big[u(t)\Big] + f\Big[g(t)\Big] \Big\} dt; \tag{6}$$

e poichè questa ammette soluzione (se ne ammette la (A)), sarà pel teorema ricordato

$$g(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} G^{(\nu)}(s). \tag{7}$$

Nella (6), dopo aver mutato s in r, si applichi ai due membri l'operazione f e si integrino dopo averli moltiplicati per $H^{(\nu)}(s, r)$; avremo

$$G^{(\nu)}(s) = \lambda\, U\, V_1^{(\nu)}(s) + \lambda\, G_1^{(\nu)}(s),$$

cioè

$$G^{(\nu)}(s) - \lambda\, G_1^{(\nu)}(s) = \lambda\, U_1^{(\nu)}(s). \tag{8}$$

In questa uguaglianza mutiamo s in r, applichiamo ai due membri l'operazione f, moltiplichiamoli per $K(s, r)$ ed integriamo. Tenendo presente che

$$\int_a^b K(s, r)\, f\left[G^{(\nu)}(t)\right] dt = \int_a^b \left[K(s, r) - \sum_{i=1}^{\nu-1} H_1^{(i)}(s, r)\right] f\left[G^{(\nu)}(t)\right] dt =$$

$$= \int_a^b F^{\nu}(s, r)\, f\left[G^{(\nu)}(r)\right] dr = G_1^{(\nu)}(s),$$

e similmente che

$$\int_a^b K(s, r)\, f\left[G_1^{(\nu)}(r)\right] dr = \Gamma_\nu\, G^{(\nu)}(s),$$

otterremo

$$G_1^{(\nu)}(s) - \lambda\, \Gamma_\nu\, G^{(\nu)}(s) = \lambda\, \Gamma_\nu\, U^{(\nu)}(s). \tag{9}$$

Quindi, supposto che sia $1 - \lambda^2\, \Gamma_\nu \neq 0$, dalle (7) e (8) s'avrà

$$G^{(\nu)}(s) = \lambda\, \frac{U_1^{(\nu)}(s) + \lambda\, \Gamma_\nu\, U^{(\nu)}(s)}{1 - \lambda^2\, \Gamma_\nu};$$

ed infine ricordando la (7)

$$h(s) = u(s) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{U_1^{(\nu)}(s) + \lambda\, \Gamma_\nu\, U^{(\nu)}(s)}{1 - \lambda^2\, \Gamma_\nu};$$

che rappresenta la soluzione dell'equazione proposta.

Nel caso considerato essa è *unica* perchè l'equazione omogenea

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, f\left[\varphi(t)\right] dt \tag{10}$$

non ammette soluzioni diverse da zero; per dimostrarlo basterebbe ragionare come nella mia Memoria citata (M. Cap. IV, § 1).

Se invece per qualche valore di ν, per esempio n, fosse $1 - \lambda^2\, \Gamma_n = 0$ l'equazione (A) ammetterebbe le infinite soluzioni

$$h(s) = u(s) - \frac{U^{(\nu)}(s)}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{U_1^{(\nu)}(s) + \lambda\, \Gamma_\nu\, U^{(\nu)}(s)}{1 - \lambda^2\, \Gamma_\nu} + \sum_{\nu=1}^{p} C_\nu\, \varphi_\nu(s);$$

dove l'indice ν della prima somma assume tutti i valori interi o positivi, il solo valore n eccettuato; le C_ν sono delle costanti arbitrarie e le $\varphi_\nu(s)$ le p soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (10).

§ 6.

Caso particolare.

Anche per l'equazione (A) vi sarebbe luogo a considerare dei casi particolari interessanti, come sarebbe, ad esempio, quello in cui le costanti γ_n del nucleo $K(s, t)$ sono tutte eguali tra loro; però siccome la trattazione può condursi in modo affatto simile a quello usato pei casi analoghi trattati nella mia Memoria, preferiremo considerare un caso particolare, il quale presenta sugli altri il vantaggio di non richiedere la simmetria del nucleo $f_s[K(s, t)]$.

Supposto che il nucleo si possa mettere sotto la forma

$$K(s, t) = \varphi(s)\psi(t), \tag{11}$$

la soluzione della (A) può ottenersi in modo assai semplice.

Posto infatti

$$\int_a^b \psi(r) f\Big[\varphi(r)\Big] dr = \rho,$$

essendo

$$K_2(s, t) = \rho K(s, t), \tag{12}$$

avremo

$$u(s) = h(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) f\Big[h(t)\Big] dt,$$

$$\lambda u_1(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) f\Big[h(t)\Big] dt - \lambda^2 \int_a^b K_2(s, t) f\Big[h(t)\Big] dt;$$

dalle quali, mediante addizione, si ottiene ricordando la (12)

$$u(s) + \lambda u_1(s) = h(s) - \lambda^2 \rho \int K(s, t) f\Big[h(t)\Big] dt;$$

ed anche

$$u(s) + \lambda u_1(s) = h(s) + \lambda \rho \left[u(s) - h(s) \right] \cdot$$

Da questa si ha immediatamente

$$h(s) = u(s) + \frac{\lambda u_1(s)}{1 - \lambda \rho} \cdot$$

La soluzione è *unica* se $1 - \lambda \rho \neq 0$; in caso contrario, affinchè l'equazione data ammetta soluzione, è necessario che sia $u_1(s) = 0$. Avremo allora infinite soluzioni date dalla

$$h(s) = u(s) + \sum_{n=1}^{p} c_n \varphi_n(s);$$

dove le c_n sono delle costanti e le $\varphi_n(s)$ sono le soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione

$$\varphi(s) = \frac{1}{\rho} \int_a^b K(s, t) f \left[\varphi(t) \right] dt.$$

§ 7.

Risoluzione dell'equazione (A) quando il nucleo $f_s [K(s, t)]$ non è simmetrico.

Nel caso che il nucleo $f_s [K(s, t)$ non sia simmetrico, la risoluzione della (A) si può ricondurre a quella d'un'altra nella quale il nuovo nucleo soddisfi a detta condizione.

Supposto infatti che esista almeno una funzione $M(s, t)$, soddisfacente all'equazione funzionale

$$K(s, t) = f_t \left[M(s, t) \right],$$

l'equazione (A) potrà scriversi:

$$u(s) = h(s) - \lambda \int_a^b f_t \left[M(s, t) \right] f \left[h(t) \right] dt; \tag{14}$$

e se inoltre poniamo

$$u'(s) = u(s) - \lambda \int_a^b f_t \left[M(t, s)\right] f\left[u(t)\right] dt,$$

avremo per la (14)

$$u'(s) = h(s) - \lambda \int_a^b f_t \left[M(s, t)\right] f\left[h(t)\right] dt - \lambda \int_a^b f_t \left[M(t, s)\right] f\left[h(t)\right] dt +$$

$$+ \lambda^2 \int_a^b f_t f_r \left[M(t, r)\right] f\left[h(r)\right] dr.$$

Scambiando t con r nell'ultimo integrale

$$u'(s) = h(s) - \lambda \int_a^b \Big\{ f_t \left[M(s, t)\right] + f_t \left[M(t, s)\right] -$$

$$- \lambda \int_a^b f_r \left[M(r, s)\right] f_r f_t \left[M(r, t)\right] dr \Big\} f\left[h(t)\right] dt,$$

ovvero

$$u'(s) = h(s) - \lambda \int_a^b K'(s, t) f\left[h(t)\right] dt; \tag{15}$$

dove il nucleo

$$K'(s, t) = f_t \left[M(s, t)\right] + f_t \left[M(t, s)\right] - \lambda \int_a^b f_r \left[M(r, s)\right] f_r f_t \left[M(r, t)\right] dr$$

è tale che il nucleo $f_s\,[K'(s, t)]$ è evidentemente simmetrico, qualora si faccia l'ipotesi che le operazioni f_s ed f_t siano invertibili; cioè che sia

$$f_t f_s \left[M(s, t)\right] = f_s f_t \left[M(s, t)\right].$$

È poi evidente che ogni soluzione della (14) lo è anche della (15); di più se la prima è omogenea, lo è anche la seconda.

§ 8.

Altra formula risolutiva per l'equazione (A).

Applicando all'equazione (A) il metodo delle approssimazioni successive, si arriva con facilità alla soluzione

$$h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(s) \qquad \left(u_n(s) = \int_a^b K_n(s,\ t)\, f\left[u(t)\right] dt\right); \tag{16}$$

la quale, quantunque soddisfi *formalmente* l'equazione proposta, ben raramente potrà esserne una *soluzione effettiva*, non essendo in generale soddisfatte le condizioni richieste per la sua convergenza.

Possiamo tuttavia ricercare qualche condizione sufficiente.

Supposto che sia $|u(s)| < m$, $|K(s,\ t)| < M$ e l'operazione f sia tale da aversi per ogni funzione $\chi(s)$.

$$\left| f\left[\chi(s)\right] \right| < A \left| \chi(s) \right|, \tag{17}$$

dove A è una costante arbitraria, ma positiva, avremo

$$|u_n(s)| < M^n A^n (b-a)^n m;$$

e si potrà dire che la serie (16) è convergente se per $|\lambda|$ sarà soddisfatta la condizione

$$|\lambda| < \frac{1}{M A (b-a)}. \tag{18}$$

Qualora la serie (16) non risultasse convergente, essa sarebbe però sempre utilizzabile, perchè è sempre *sommabile* nel senso del Borel ([6]). G. Sannia ha infatti dimostrato ([7]) (nel caso che f sia l'operazione identica)

([6]) E. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, Chap. IV (Gauthier-Villars, Paris).

([7]) *Risoluzione dell'equazione di Fredholm con serie assolutamente sommabili del Borel.* Rend. Acc. dei Lincei, vol. XXVIII, s. 5ª, 2° sem., fasc. 11, pp. 429-433.

che *il campo di validità della* (16) *è la striscia limitata dalle rette parallele all'asse imaginario* (*reale*) *condotte dai punti caratteristici più vicini all'origine, e da bande opposte rispetto a quest'asse se i valori caratteristici sono tutti reali* (*imaginari*), sotto l'ipotesi che la $K(s, t)$ sia limitata e continua nel campo considerato, pur non escludendo che possa presentare delle linee di discontinuità, tali però da essere incontrate in un numero finito di punti dalle rette parallele agli assi coordinati. Questo teorema vale ancora, senza modificazioni di sorta, se la f non è più l'operazione identica, ma invece è quella definita al § 1, purchè la funzione $f_s[K(s, t)]$ sia limitata e soddisfi, circa la continuità, alle condizioni poste per $K(s, t)$.

Dopo ciò, possiamo dire che la (16) è sempre utilizzabile per ogni λ contenuto nella striscia più sopra definita. È poi superfluo aggiungere che la (16) non richiede affatto la simmetria di $f_s[K(s, t)]$.

CAPITOLO II.

Equazioni integrali a limiti variabili.

§ 1.

L'EQUAZIONE FONDAMENTALE.

1. Consideriamo l'equazione

$$u(s) = \psi[h] - \varphi\left[\psi\left\{h(g)\right\}\right] - \lambda\int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s,\ t) f_r\left[h(t)\right] dt \tag{B}$$

dove, per brevità, abbiamo scritto h e g in luogo di $h(s)$ e $g(s)$. La funzione nota $u_1(s)$ è supposta continua ed integrabile in un intervallo γ e le $K_r(s,\ t)$ integrabili nel campo Γ, limitato dalle curve $t = g(s)$ $t = \mu(s)$ e dalle ordinate estreme dell'intervallo γ.

Faremo le seguenti ipotesi:

1°) le operazioni funzionali ψ, φ ed f_r, supposte continue ed univoche, siano distributive rispetto alla somma e non introducano delle singolarità (8); soddisfino inoltre, per ogni funzione $\chi(s)$, alle seguenti condizioni:

$$\left.\begin{aligned} \left|\varphi\left[\chi(s)\right]\right| &\leqq A\left|\chi(s)\right|, \\ \left|f_r\left[\chi(s)\right]\right| &\leqq C\left|\chi(s)\right|, \qquad (r = 1,\ 2, \ldots,\ p) \\ \left|\chi(s) - \psi\left[\chi(s)\right]\right| &\leqq B\left|\chi(s)\right| \ (^9); \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

(8) Veggasi, a questo proposito, la nota (2), pag. 83.

(9) Per alcune operazioni distributive, quali integrazione tra limiti finiti, la moltiplicazione per una funzione ecc., le condizioni (19) possono essere verificate qualunque sia la funzione $\chi(s)$; per altre invece, come per la derivazione, il verificarsi delle (19) può dipendere anche dalla natura della funzione cui vengono applicate. Volendo lasciare alla questione la massima generalità ed evitare, per quanto è possibile, la trattazione di casi particolari, la quale finirebbe col complicare maggiormente l'argomento, già di per se stesso abbastanza

dove A, B e C sono tre costanti finite e positive ed assoggettate alle condizioni

$$A < 1, \quad B < 1, \quad A\varepsilon < 1;$$

ε essendo un numero positivo, il cui significato sarà precisato tra poco. Il segno d'uguaglianza potrà valere per alcuni od anche per tutti i valori di s. Affinchè la terza delle condizioni (19) possa sussistere qualunque sia s, dovrà ammettersi che l'operazione ψ non introduca degli *zeri*. Riguardo a queste operazioni, faremo ancora l'ipotesi che le funzioni, cui queste devono venire applicate, siano tali da consentire che tale applicazione venga effettuata quel numero (finito o no) di volte che sarà necessario.

2°) Posto

$$g\left[g(s)\right] = g_2(s); \quad g\left\{g\left[g(s)\right]\right\} = g_3(s); \ldots$$

esista finito e determinato il $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(s)$ ed inoltre la funzione

$$\left| g_n(s) - \mu\left[g_{n-1}(s)\right]\right|,$$

supposta integrabile in γ, soddisfi alla condizione

$$\left| g_n(s) - \mu\left[g_{n-1}(s)\right]\right| \leqq \varepsilon^{n-1} \, | s |,$$

dove ε è un numero positivo e tale da aversi $A\varepsilon < 1$.

3°) qualunque siano r ed n, si abbia $| K_r(g_n, t) | < M$, entro il campo Γ, e la successione $u[g_n(s)]$ sia limitata.

I risultati, che ora andremo esponendo, valgono anche se la funzione $u(s)$, e di conseguenza anche la $h(s)$, siano funzioni, oltre che di s, anche di

---

complesso, ammetteremo che le condizioni (19) siano verificate almeno per le funzioni cui le suddette operazioni vengono applicate.

Osserveremo tuttavia che, nella pratica, si potrà spesso prescindere dalle condizioni (19), o da alcune di esse, qui poste per garantire la convergenza di certi sviluppi in serie e sostituire ad esse altre condizioni, suggerite dalla natura dell'equazione da risolvere, le quali assicurino ugualmente la validità dei risultati ottenuti. Questo potrà farsi se, per esempio, l'operazione ψ è tale da ammettere l'inversa; perchè allora le equazioni $\psi[h(s)] = \varphi(s)$, che noi dovremo trattare, si potranno risolvere spesso con facilità, senza ricorrere a sviluppi in serie e senza richiedere perciò il verificarsi della terza delle condizioni (19).

altre variabili $x, y, z, \ldots$ definite in un certo campo Γ' per ogni valore di s in γ; e le operazioni ψ, φ ed f_r siano il risultato di una od anche più operazioni eseguite, rispetto ad una o più delle suddette variabili $x, y, z, \ldots$

2. Cerchiamo di risolvere l'equazione (B) mediante una soluzione della forma

$$h(s) = h_0(s) + h_1(s) + h_2(s) + \cdots + h_\nu(s) + \cdots$$

Usando il metodo delle approssimazioni successive otteniamo le seguenti equazioni, nelle quali per brevità scriveremo g invece di $g(s)$:

$$\psi\Big[h_0(s)\Big] - \varphi\Big[\psi[(h_0(g)]\Big] = u(s),$$

$$\psi\Big[h_1(s)\Big] - \varphi\Big[\psi[h_1(g)]\Big] = \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r\Big[h_0(t)\Big] dt,$$

$$\psi\Big[h_2(s)\Big] - \varphi\Big[\psi[h_2(g)]\Big] = \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r\Big[h_1(t)\Big] dt,$$

. . . .

$$\psi\Big[h_n(s)\Big] - \varphi\Big[\psi[h_n(g)]\Big] = \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r\Big[h_{n-1}(t)\Big] dt,$$

. . . .

Per avere le $h_n(s)$ dovremo perciò risolvere le equazioni

$$\left.\begin{array}{c} \psi\Big[h_\nu(s)\Big] - \varphi\Big[\psi[h_\nu(g)]\Big] = \Phi_\nu(s), \\ (\nu = 0, 1, 2 \ldots) \end{array}\right\} \tag{21}$$

dove

$$\Phi_\nu(s) = \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r\Big[h_{\nu-1}(t)\Big] dt.$$

Nella (21) mutiamo s in $g(s)$ successivamente ed applichiamo ad ambo i membri l'operazione φ. Indicando con φ_n l'operazione che risulta applicando la φ, n volte di seguito, otterremo:

$$\psi\Big[h_\nu(s)\Big] - \varphi\Big[\psi\Big\{h_\nu(g)\Big\}\Big] = \Phi_\nu(s),$$

$$\varphi\Big[\psi[h_\nu(g)]\Big] - \varphi_2\Big[\psi[h_\nu(g_2)]\Big] = \varphi\Big[\Phi_\nu(g)\Big],$$

$$\varphi_2\Big[\psi[h_\nu(g_2)]\Big]-\varphi_3\Big[\psi[h_\nu(g_3)]\Big]=\varphi_2\Big[\Phi_\nu(g_2)\Big],$$

. . . .

$$\varphi_{n-1}\Big[\psi[h_\nu(g_{n-1})]\Big]-\varphi_n\Big[\psi[h_\nu(g_n)]\Big]=\varphi_{n-1}\Big[\Phi_\nu(g_{n-1})\Big];$$

dalle quali, mediante addizione membro a membro, si deduce

$$\psi\Big[h_\nu(s)\Big]-\varphi_n\Big[\psi[h_\nu(g_n)]\Big]=\Phi_\nu(s)+\varphi\Big[\Phi_\nu(g)\Big]+$$
$$+\varphi_2\Big[\Phi_\nu(g_2)\Big]+\cdots+\varphi_{n-1}\Big[\Phi_\nu(g_{n-1})\Big].$$

Ora avendosi

$$\left|\varphi_n\Big[\psi\big\{h_\nu(g_n)\big\}\Big]\right|<A^n\left|\psi\Big[h_\nu(g_n)\Big]\right|,$$

supposto che il secondo fattore del secondo membro abbia un limite superiore finito indipendente da n, sarà

$$\lim_{n=\infty}\left|\varphi_n\Big[\psi[h_\nu(g_n)]\Big]\right|=0.$$

Avremo così

$$\psi\Big[h_\nu(s)\Big]=\Phi\ (s)+\varphi\Big[\Phi_\nu(g)\Big]+\varphi_2\Big[\Phi_2(g_2)\Big]+\cdots+\varphi_n\Big[\Phi_\nu(g_n)\Big]+\cdots \tag{22}$$

3. Per il seguito ci sarà utile avere per le $\psi[h_\nu(s)]$ delle espressioni maggioranti, che noi ora andremo a calcolare.

A tale scopo, consideriamo anzitutto la serie che ci dà $\psi[h_0(s)]$. Poichè $\Phi_0(s)=u(s)$, si ha

$$\psi\Big[h_0(s)\Big]=u(s)+\varphi\Big[u(g)\Big]+\varphi_2\Big[u(g_2)\Big]+\cdots$$

e quindi posto, per ogni n,

$$|u(g_n)|<m,\qquad \frac{1}{1-A}=\alpha,$$

sarà

$$|\psi[h_0(s)]|<m+Am+A^2m+\cdots=\frac{m}{1-A}=m\alpha.$$

Ora osserviamo che, dalle condizioni poste per l'operazione ψ, discende $|\psi[\chi(s)]| \geqq (1-B)|\chi(s)|$, e quindi pel nostro caso, posto $\frac{1}{1-B}=\beta$,

$$\left|\psi[h_0(s)]\right| \geqq \frac{1}{\beta}\left|h_0(s)\right|;$$

da cui

$$\left|h_0(s)\right| \leqq \beta\left|\psi[h_0(s)]\right| < \alpha\,\beta\, m. \tag{23}$$

Per la funzione $\psi[h_1(s)]$, usando una notazione abbreviata, potremo scrivere

$$\psi\left[h_1(s)\right] = \lambda\int_\mu^g \sum_1^p K_r f_r(h_0)\,dt + \varphi\left\{\lambda\int_{\mu(g)}^{g_2}\sum_1^p K_r f_r(h_0)\,dt\right\} + \\ + \varphi_2\left\{\lambda\int_{\mu(g_2)}^{g_3}\sum_1^p K_r f_r[h_0]\,dt\right\} + \cdots$$

per cui, ricordando la (23) e ponendo $|\lambda|\,M\,C\,p=\rho$, avremo pel termine generale

$$\left|\varphi_n\left\{\lambda\int_{\mu(g_n)}^{g_{n+1}}\sum_1^p K_r f_r[h_0]\,dt\right\}\right| < A^n\,|\lambda|\,M\,C\,p\,\alpha\,\beta\,m\left|\int_{\mu(g_n)}^{g_{n+1}} dt\right| < \\ < A^n\,\rho\,\alpha\,\beta\,m\left|\int_0^{\varepsilon^n|s|} dt\right| = \rho\,\alpha\,\beta\,m\,A^n\,\varepsilon^n\,|s|,$$

e quindi

$$\left|\psi[h_1(s)]\right| < \rho\,\alpha\,\beta\,m\,|s|\cdot\left[1 + A\,\varepsilon + A^2\,\varepsilon^2 + \cdots\right] = \frac{\rho\,\alpha\,\beta\,m}{1-A\,\varepsilon}\,|s|.$$

Analogamente per la funzione

$$\psi\left[h_2(s)\right] = \lambda\int_\mu^g \sum_1^p K_r f_r[h_1]\,dt + \varphi\left\{\lambda\int_{\mu(g)}^{g_2}\sum_1^p K_r f_r[h_1]\,dt\right\} + \\ + \varphi_2\left\{\lambda\int_{\mu(g_2)}^{g_3}\sum_1^p K_r f_r[h_1]\,dt\right\} + \cdots$$

coll'osservare che, per una relazione analoga alla (23), è

$$\left|h_1(s)\right| < \beta\left|\psi[h_1(s)]\right| < \frac{\alpha\,\rho\,m}{1-A\,\varepsilon}\,\beta^2\,|s|,$$

s'ottiene

$$\left|\varphi_n\left\{\lambda\int_{\mu(g_n)}^{g_{n+1}}\sum_1^p K_r f_r[h_1]\,d\,t\right\}\right| < A^n|\lambda|\,M\,C\,p\,\frac{\alpha\,\rho\,m\,\beta^2}{1-A\,\varepsilon}\int_{\mu(g_n)}^{g_{n+1}}|t\;d\,t <$$

$$< \frac{A^n\,\alpha\,m\,\rho^2}{1-A\,\varepsilon}\,\beta^2\,\varepsilon^n\,\frac{s^2}{2!};$$

e di conseguenza

$$\left|\psi\,[h_2(s)]\right| < \frac{\alpha\,m\,\beta^2\,\rho^2}{1-A\,\varepsilon}\,\frac{|s^2}{2!}\left[1+A\,\varepsilon+A^2\,\varepsilon^2+\cdots\right] = \alpha\,m\,\frac{\beta^2\,\rho^2}{(1-A\,\varepsilon)^2}\,\frac{s^2}{2!}.$$

Avremo così in generale

$$\psi\,[h_\nu]\,(s) < \alpha\,m\left(\frac{\beta\,\rho}{1-A\,\varepsilon}\right)^\nu\frac{s^\nu}{\nu!}; \tag{24}$$

4. Per avere le funzioni $h_\nu(s)$ non resterà ora che risolvere le equazioni

$$\psi\left[h_\nu(s)\right] = F_\nu(s),\quad (\nu=0,\ 1,\ 2\ldots) \tag{25}$$

dove le $F_\nu(s)$ rappresentano le serie che figurano nel secondo membro delle (22); e che, per quanto precede, sono assolutamente ed uniformemente convergenti.

A tale scopo, possiamo operare come segue. Poniamo

$$h_\nu(s) = F_\nu(s) + \omega_1(s)$$

e sostituiamo questo valore nella (25): otterremo l'equazione

$$\psi\left[\omega_1(s)\right] = F_\nu(s) - \psi\left[F_\nu(s)\right]; \tag{26}$$

che è della forma (25). Posto

$$\omega_1(s) = F_\nu(s) - \psi\left[F_\nu(s)\right] + \omega_2(s)$$

e sostituito questo valore nella (26), si trova

$$\psi\left[\omega_2(s)\right] = F_\nu(s) - 2\,\psi\left[F_\nu(s)\right] + \psi_2\left[F_\nu(s)\right],$$

che, usando una notazione abbreviata, può scriversi

$$\psi\Big[\omega_2(s)\Big] = (1-\psi)^2\Big[F_\nu(s)\Big].$$

Analogamente, posto ancora

$$\omega_2(s) = (1-\psi)^2\Big[F_\nu(s)\Big] + \omega_3(s),$$

s'otterrà

$$\psi\Big[\omega_3(s)\Big] = (1-\psi)^3\Big[F_\nu(s)\Big];$$

così continuando avremo *formalmente*

$$h_\nu(s) = F_\nu(s) + (1-\psi)\Big[F_\nu(s)\Big] + (1-\psi)^2\Big[F_\nu(s)\Big] + \cdots \tag{27}$$

È facile però dimostrare la convergenza di questa serie. Si ha infatti per la (24)

$$\Big|F_\nu(s)\Big| = \Big|\psi\Big[h_\nu(s)\Big]\Big| < \alpha\, m\left(\frac{\beta\rho}{1-A\varepsilon}\right)^\nu \frac{|s|^\nu}{\nu!},$$

e per la terza delle condizioni (20)

$$\Big|(1-\psi)^n\Big[F_\nu(s)\Big]\Big| < B^n\,\alpha\, m\left(\frac{\beta\rho}{1-A\varepsilon}\right)^\nu \frac{|s|^\nu}{\nu!};$$

sarà quindi

$$\Big|h_\nu(s)\Big| < \alpha\, m\left(\frac{\beta\rho}{1-A\varepsilon}\right)^\nu \frac{|s|^\nu}{\nu!}\Big[1 + B + B^2 + \cdots\Big] < \alpha\, m\,\beta\left(\frac{\beta\rho}{1-A\varepsilon}\right)^\nu \frac{|s|^\nu}{\nu!}. \tag{28}$$

Questo dimostra che la serie in questione è assolutamente ed uniformemente convergente. Dalla (28) discende poi anche quella pure assoluta ed uniforme della serie $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} h_\nu(s)$, la quale ammette come serie maggiorante

$$\alpha\, m\,\beta \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\beta\rho}{1-A\varepsilon}\right)^\nu \frac{|s|^\nu}{\nu!}.$$

§ 2.

Unicità della soluzione.

Dimostriamo ora che la soluzione trovata è *unica*. Supposto che esistano due soluzioni distinte, la loro differenza $\chi(s)$ dovrà soddisfare l'equazione

$$0 = \psi\left[\chi(s)\right] - \varphi\left[\psi[\chi(g)]\right] - \lambda\int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r\left[\chi(t)\right] dt,$$

la quale può risolversi col metodo usato per la risoluzione dell'equazione (B). A tale scopo scriviamo

$$\psi\left[\chi(s)\right] - \varphi\left[\psi[\chi(g)]\right] = \lambda\int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r\left[\chi(t)\right] dt,$$

e dopo aver mutato s in $g(s)$ applichiamo successivamente l'operazione φ:

$$\varphi\left[\psi[\chi(g)]\right] - \varphi_2\left[\psi[\chi(g_2)]\right] = \varphi\left[\Phi(g)\right],$$

$$\varphi_2\left[\psi[\chi(g_2)]\right] - \varphi_3\left[\psi[\chi(g_3)]\right] = \varphi_2\left[\Phi(g_2)\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{n-1}\left[\psi[\chi(g_{n-1})]\right] - \varphi_n\left[\psi[\chi(g_n)]\right] = \varphi_{n-1}\left[\Phi(g_{n-1})\right];$$

avendo posto

$$\Phi(s) = \lambda\int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r\left[\chi(t)\right] dt. \tag{29}$$

Sommando s'ottiene

$$\psi\left[\chi(s)\right] = \Phi(s) + \varphi\left[\Phi(g)\right] + \varphi_2\left[\Phi(g_2)\right] + \cdots;$$

essendo

$$\lim_{n=\infty}\left|\varphi_n\left[\psi[\chi(g_n)]\right]\right| = 0.$$

Per la condizione posta per l'operazione φ, sarà

$$\left|\psi[\chi(s)]\right| < \left|\Phi(s)\right| + A\left|\Phi(g)\right| + A^2\left|\Phi(g_2)\right| + \cdots$$

e posto $\left|\chi(s)\right| < \sigma$, avremo anche

$$\left|\Phi(g_n)\right| < |\lambda|\, M\, C\, p\, \sigma \left|\int_{\mu(g_{n-1})}^{g_n} d\,t\right| < \rho\,\sigma\,\varepsilon^{n-1}\,|s|;$$

e quindi

$$\left|\psi[\chi(s)]\right| < \rho\,\sigma\,|s|\left[1 + A\,\varepsilon + A^2\,\varepsilon^2 + \cdots\right] = \frac{\rho\,\sigma}{1 - A\,\varepsilon}\,|s|,$$

dalla quale deducesi, per una relazione analoga alla (23),

$$\left|\chi(s)\right| < \frac{\rho\,\sigma\,\beta}{1 - A\,\varepsilon}\,|s|.$$

Sostituendo questo valore a $\chi(s)$ nella (29) s'ottiene

$$\left|\Phi(g_n)\right| < |\lambda|\, M\, C\, p \int_{\mu(g_{n-1})}^{g_n(s)} \frac{\rho\,\sigma\,\beta}{1 - A\,\varepsilon}\,|s|\,d\,t < \beta\,\frac{\sigma\,\rho^2}{(1 - A\,\varepsilon)}\,\varepsilon^{n-1}\,\frac{s^2}{2!},$$

e quindi

$$\left|\psi[\chi(s)]\right| < \beta\,\frac{\sigma\,\rho^2}{1 - A\,\varepsilon}\,\frac{s^2}{2!}\left[1 + A\,\varepsilon + A^2\,\varepsilon^2 + \cdots\right] = \frac{\sigma\,\rho^2\,\beta}{(1 - A\,\varepsilon)^2}\,\frac{|s|^2}{2!};$$

da cui

$$\left|\chi(s)\right| < \sigma\left(\frac{\rho\,\beta}{1 - A\,\varepsilon}\right)^2 \frac{|s|^2}{2!}.$$

Sostituendo nuovamente nella (29) a $\chi(s)$ questo valore, si troverebbe, così continuando

$$\left|\psi[\chi(s)]\right| < \sigma\,\frac{\rho^n\,\beta^{n-1}}{(1 - A\,\varepsilon)^n}\,\frac{|s|^n}{n!};$$

e quindi anche

$$\left|\chi(s)\right| < \sigma\left(\frac{\rho\,\beta}{1 - A\,\varepsilon}\right)^n \frac{|s|^n}{n!};$$

e poichè il secondo membro, al crescere di n tende allo zero, sarà $|\chi(s)| = 0$.

§ 3.

L'equazione (B) a limiti costanti.

È evidente che, con leggere modificazioni, la trattazione suesposta si adatta anche alla equazione del tipo B, a limiti costanti,

$$u(s) = \psi\left[h(s)\right] - \varphi\left[\psi[h(s)]\right] - \lambda\int_a^b \sum_{r=1}^p K_r(s,\ t)\, f_r\left[h(t)\right] dt,$$

che s'ottiene dalla (B) ponendo $\mu(s) = a$ e $g(s) = b$.

In questo caso si ha infatti, per lo sviluppo

$$\psi\left[h_0\ (s)\right] = u(s) + \varphi\left[u(s)\right] + \varphi_2\left[u(s)\right] + \cdots,$$

per cui, ricordando che abbiamo posto $\frac{1}{1-A} = \alpha$ ed $\frac{1}{1-B} = \beta$, s'ottiene

$$\left|\psi\left[h_0(s)\right]\right| < \frac{m}{1-A} = m\,\alpha;$$

da cui, per la (23),

$$\left|h_0(s)\right| < \frac{m\,\alpha}{1-B} = \alpha\,\beta\,m.$$

Così pel termine generale dello sviluppo di $\psi[h_1(s)]$ si avrà, ponendo $b - a = \delta$,

$$\left|\varphi_n\left\{\lambda\int_a^b \sum_{r=1}^p K_r(s,\ t)\, f_r\left[h_0(t)\right] dt\right\}\right| < A^n\,|\lambda\ M\,C\,p\,\delta\,\alpha\,\beta\,m = A^n\,\rho\,\delta\,\alpha\,\beta\,m,$$

per cui

$$\left|\psi\left[h_1(s)\right]\right| < m\,\alpha\,\beta\,\rho\,\delta\left[1 + A + A^2 + \cdots\right] = m\,\delta\,\rho\,\alpha^2\,\beta;$$

e quindi anche

$$\left|h_1(s)\right| < m\,\delta\,\rho\,\alpha^2\,\beta^2.$$

Analogamente, pel termine generale della serie che definisce $\psi[h_2(s)]$, avremo:

$$\left|\varphi_n\left\{\lambda\int_a^b\sum_{r=1}^p K_r(s,t)\,f_r[h_1(t)]\,dt\right\}\right|<|\lambda|\,M\,.\,C\,p\,\delta\,A^n(m\,\delta\,\rho\,\alpha^2\,\beta^2)=$$

$$=A^n\,m\,\rho^2\,\delta^2\,\alpha^2\,\beta^2;$$

e quindi

$$\left|\psi[h_2(s)]\right|<m\,\rho^2\,\delta^2\,\alpha^2\,\beta^2\,[1+A+A^2+\cdots]=m\,\rho^2\,\delta^2\,\alpha^3\,\beta^2;$$

da cui

$$\left|h_2(s)\right|<m\,\rho^2\,\delta^2\,\alpha^3\,\beta^3;$$

ed in generale

$$\left|h_n(s)\right|<m\,\alpha\,\beta\,(\rho\,\delta\,\alpha\,\beta)^n.$$

La serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu(s)$ ammette perciò per serie maggiorante

$$m\,\beta\,\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(\rho\,\delta\,\alpha\,\beta)^n,$$

la quale sarà convergente, se si potrà fare in modo che sia

$$\rho\,\delta\,\alpha\,\beta<1.$$

§ 4.

Altra formola risolutiva per l'equazione (B).

Per la risoluzione dell'equazione (B) si può usare anche un altro metodo, il quale, se da un lato ha lo svantaggio di rendere più difficile la ricerca delle condizioni per la validità dei risultati cui esso conduce, presenta però dall'altro il vantaggio di essere teoricamente molto più semplice, e di potersi inoltre usare per equazioni ancora più generali di quelle del tipo (B), e sotto condizioni meno restrittive.

Faremo la sola ipotesi che le operazioni ψ, φ e f_r siano distributive e non introducano delle singolarità. Poniamo

$$h(s) = u(s) + \omega_1(s);$$

sostituendo questo valore di $h(s)$ nella (B), otterremo

$$u_1(s) = \psi\Big[\omega_1(s)\Big] - \varphi\Big[\psi[\omega_1(g)]\Big] - \lambda\int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r\Big[\omega_1(t)\Big] dt, \tag{30}$$

avendo posto

$$u_1(s) = u(s) - \psi\Big[u(s)\Big] - \varphi\Big[\psi[u(g)]\Big] - \lambda\int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r\Big[u(t)\Big] dt.$$

Similmente, se poniamo

$$\omega_1(s) = u_1(s) + \omega_2(s),$$

e sostituiamo nella (30); otteniamo l'equazione

$$u_2(s) = \psi\Big[\omega_2(s)\Big] - \varphi\Big[\psi[\omega_2(g)]\Big] - \lambda\int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r\Big[\omega_2(t)\Big] dt,$$

cui deve soddisfare $\omega_2(s)$ e dove

$$u_2(s) = u_1(s) - \psi\Big[u_1(s)\Big] - \varphi\Big[\psi[u_1(g)]\Big] - \lambda\int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r\Big[u_1(t)\Big] dt.$$

Analogamente, posto

$$\omega_2(s) = u_2(s) + \omega_3(s),$$

e sostituito questo valore nella precedente uguaglianza, otterremo un'equazione analoga alla proposta, cui deve soddisfare $\omega_3(s)$. Spingendo l'operazione all'infinito, avremo *formalmente*

$$h(s) = u(s) + u_1(s) + u_2(s) + \cdots + u_n(s) + \cdots;$$

la quale può anche scriversi

$$h(s) = u(s) + F\Big[u(s)\Big] + F_2\Big[u(s)\Big] + \cdots + F_n\Big[u(s)\Big] + \cdots,$$

qualora si convenga che F rappresenti l'operazione

$$1 - \psi - \varphi[\psi] - \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r$$

e che venga sostituito $g(s)$ ad s prima di applicare l'operazione $\varphi[\psi]$.

Resterà ora a vedersi sotto quali condizioni la serie trovata è convergente; tale ricerca però è tutt'altro che facile, data la larghezza delle ipotesi fatte sulle operazioni ψ, φ ed f_r. Ci limiteremo perciò soltanto a notare che, se $|u(s)| < m$ e l'operazione F risulta tale da aversi

$$\left| F_n\left[u(s)\right] \right| < \alpha^n m, \qquad (0 < \alpha < 1)$$

la serie trovata sarà uniformemente convergente.

CAPITOLO III.

Casi particolari notevoli dell'equazione fondamentale.

§ 1.

EQUAZIONI DI 1ª SPECIE.

α) L'equazione di 1ª specie

$$u(s) = \int_{g(s)}^{s} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r\Big[h(t)\Big] dt,$$

che, nell'ipotesi $p = 1$, $f_r \equiv 1$, si presenta nella teoria delle equazioni alle derivate parziali del 2° ordine, e nella quale supporremo che le funzioni $u(s)$ $g(s)$ e $K_r(s\, t)$ siano derivabili almeno una volta rispetto ad s, derivata ci dà l'equazione

$$u'(s) = \sum_{r=1}^{p} K_r(s, s) f_r\Big[h(s)\Big] - g'(s) \sum_{r=1}^{p} K_r(s, g) f_r\Big[h(g)\Big] +$$
$$+ \int_{g(s)}^{(s)} \sum_{r=1}^{p} \frac{\partial K_r(s, t)}{\partial s} f_r\Big[h(t)\Big] dt:$$

la quale, quando si ponga

$$\psi \equiv \sum_{r=1}^{p} K_r(s, s) f_r\,; \quad \varphi\Big[\psi\Big] \equiv g'(s)\, \psi_g$$

(intendendo col simbolo ψ_g che prima d'applicare l'operazione φ si debba mutare $K_r(s, s)$ in $K_r(s, g)$) è un'equazione del tipo (A).

Ad essa quindi si potrà applicare il procedimento analitico esposto nel Cap. II, qualora siano soddisfatte le condizioni ivi enunciate.

β) L'equazione

$$u(s) = \int_{0}^{s} \sum_{r=0}^{p} K_r(s, t) f_r\Big[h(t)\Big] dt, \tag{31}$$

che è un caso particolare della precedente, mediante derivazione si riconduce immediatamente alla forma (B), quando si ponga

$$\psi \equiv \sum_{r=0}^{p} K_r(s,\ s) f_r\,; \quad \frac{\partial K_r(s,\ t)}{\partial s} = H_r(s,\ t)$$

e si supponga che l'operazione φ sia un'operazione nulla, cioè tale da essere qualunque sia $\chi(s)$ $\varphi[\chi(s)] = 0$. S'ottiene così l'equazione

$$u'(s) = \psi\left[h(s)\right] + \int_0^s \sum_{r=0}^{p} H_r(s,\ t) f_r\left[h(t)\right] d\,t.$$

Essendo nulla l'operazione φ, non rimarrà che da risolvere le equazioni

$$\left.\begin{aligned} \psi\left[h_0(s)\right] &= u'(s) \\ \psi\left[h_\nu(s)\right] &= \int_0^s \sum_{r=0}^{p} H_r(s,\ t) f_r\left[h_{\nu-1}(t)\right] d\,t \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

mediante gli sviluppi trovati al Cap. III, nel caso che siano soddisfatte le condizioni di convergenza.

Se fosse $f_r \equiv \dfrac{\partial^r}{\partial s^r}$, dalla (31) si avrebbe, come caso particolarissimo, l'equazione studiata prima dal Burgatti [10], e poi in modo esauriente dal Lalesco [11].

In tal caso le equazioni (32) diventano

$$K_p(s,\ s)\frac{\partial^p}{\partial s^p} h_\nu(s) + K_{p-1}(s,\ s)\frac{\partial^{p-1}}{\partial s^{p-1}} h_\nu(s) + \cdots + K_1(s,\ s)\frac{\partial}{\partial s} h_\nu(s) +$$
$$+ K_0(s,\ s) h^\nu(s) = \int_0^s \sum_{r=0}^{p} H_r(s,\ t)\frac{\partial^r}{\partial t^r} h_{\nu-1}(t)\, d\,t;$$

e si potranno risolvere, sia ricorrendo alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie, sia agli sviluppi in serie già trovati, se questi saranno convergenti.

Se non fosse lecita o conveniente la derivazione della (31), questa po-

(10) *Rend. Acc. dei Lincei*, 1° sem. 1903 (due Note).

(11) *Sur l'équation de Volterra* (Journ. de Mathém., t. I, 1908, p. 171).

trebbe ricondursi ugualmente al tipo fondamentale scrivendo

$$u(s)=\int_0^s K_0(s,\ t)\, f_0\Big[h(t)\Big]\,d\,t+\int_0^s \sum_{r=1}^{p} K_r(s,\ t)\, f_r\Big[h(t)\Big]\,d\,t,$$

intendendo che sia

$$\psi \equiv \int_0^s K_0(s,\,t)\, f_0\,.$$

Questo metodo ha sul precedente il vantaggio di poter far comparire nell'operazione ψ quella, tra le funzioni $K_r(s,\,t)$, che più si presta per la convergenza delle serie che devono risolvere l'equazione proposta. Nel caso dell'equazione del Burgatti, avremmo così da risolvere le equazioni

$$\psi\Big[h_0(s)\Big]=\int_0^s K_0(s,t)\,h_0(t)\,dt=u(s),$$

$$\psi\Big[h_\nu(s)\Big]=\int_0^s K_0(s,t)\,h_\nu(t)\,dt=\int_0^s \sum_{r=1}^{p} K_r(s,t)\,\frac{\partial^r}{\partial s^r}\,h_{\nu-1}(t)\,dt,$$

$$(\nu=1,\ 2,\ 3\ldots)$$

che sono tutte equazioni di Volterra di 1ª specie. Da queste si potranno avere le $h_\nu(s)$, riserbandoci di discutere poi la convergenza della serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu(s)$.

§ 2.

Equazioni integro-differenziali.

Nel tipo (B) rientrano anche le equazioni integro-differenziali dei vari tipi studiati dal Volterra.

Invero, se si pone $\mu(s)=0,\ g(s)=s$,

$$\psi\equiv\Delta_2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};\quad f_1\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2};\quad f_2\equiv\frac{\partial^2}{\partial y^2};\quad f_3\equiv\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

e si conviene che l'operazione φ sia identicamente nulla, la (B) ci dà subito l'equazione fondamentale del tipo ellittico

$$u(s) = \Delta_2 h(s) -$$

$$- \lambda \int_0^s \left[K_1(s,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} h(t) + K_2(s,t) \frac{\partial^2}{\partial y^2} h(t) + K_3(s,t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} h(t) \right] dt;$$

dove la funzione nota $u(s)$ e l'incognita $h(s)$ sono funzioni delle variabili x, y, z, s definite, per ogni valore di s nell'intervallo γ, in un dato dominio e dotate delle derivate parziali seconde.

Come esempio consideriamo l'equazione integro-differenziale del tipo ellittico

$$(e^{cx} + e^{cy} + e^{cz})\, s = \Delta_2 h(s) -$$

$$- \lambda \int_0^s \left[(s\, t) \frac{\partial^2 h(t)}{\partial x^2} + (s^2\, t) \frac{\partial^2 h(t)}{\partial y^2} + (s^3\, t) \frac{\partial^2 h(t)}{\partial z^2} \right] d\, t.$$

Qui abbiamo

$$\left[1 - \psi\right] u(s) = \left[1 - \Delta_2\right] (e^{cx} + e^{cy} + e^{cz})\, s = (1 - c^2)\, (e^{cx} + e^{cy} + e^{cz})\, s\,;$$

ed in generale

$$\left[1 - \psi\right]^n (e^{cx} + e^{cy} + e^{cz})\, s = (1 - c^2)^n\, (e^{cx} + e^{cy} + e^{cz})\, s.$$

Supposto che sia $| 1 - c^2 | < 1$, avremo per la (27)

$$h_0(s) = (e^{cx} + e^{cy} + e^{cz})\, s + (1 - c^2)\, (e^{cx} + e^{cy} + e^{cz})\, s +$$
$$+ (1 - c^2)^2\, (e^{cx} + e^{cy} + e^{cz})\, s + \cdots$$
$$= \frac{e^{cx} + e^{cy} + e^{cz}}{c^2}\, s.$$

Appresso, essendo

$$\psi\left[h_1(s)\right] = \lambda \int_0^s \left[(s\, t) \frac{\partial^2 h_0(t)}{\partial x^2} + (s^2\, t) \frac{\partial^2 h_0(t)}{\partial y^2} + (s^3\, t) \frac{\partial^2 h_0(t)}{\partial z^2} \right] d\, t =$$

$$= \lambda\, e^{cx}\, s \int_0^s t^2\, d\, t + \lambda\, e^{cy}\, s^2 \int_0^s t^2\, d\, t + \lambda\, e^{cz}\, s^3 \int_0^s t^2\, d\, t = \lambda\, e^{cx} \frac{s^4}{3} +$$

$$+ \lambda\, e^{cy} \frac{s^5}{3} + \lambda\, e^{cz} \frac{s^6}{3},$$

avremo per la (27)

$$h_1(s) = \lambda \frac{e^{cx} s^4}{3c^2} + \lambda \frac{e^{cy} s^5}{3c^2} + \lambda \frac{e^{cz} s^6}{3c^2}.$$

Analogamente

$$\psi\left[h_2(s)\right] = \lambda \int_0^s \left[(s\,t)\frac{\partial^2 h_1(t)}{\partial x^2} + (s^2\,t)\frac{\partial^2 h_1(t)}{\partial y^2} + (s^3\,t)\frac{\partial^2 h_1(t)}{\partial z^2}\right] d\,t =$$

$$= \lambda^2 \frac{e^{cx} s^7}{3.6} + \lambda^2 \frac{e^{cy} s^9}{3.7} + \lambda^2 \frac{e^{cz} s^{11}}{3.8};$$

$$h_2(s) = \frac{\lambda^2 e^{cx}}{c^2}\frac{s^7}{3.6} + \frac{\lambda^2 e^{cy}}{c^2}\frac{s^9}{3.7} + \frac{\lambda^2 e^{cz}}{c^2}\frac{s^{11}}{3.8}.$$

Nello stesso modo si troverebbe

$$h_3(s) = \frac{\lambda^3 e^{cx}}{c^2}\frac{s^{10}}{3.6.9} + \frac{\lambda^3 e^{cy}}{c^2}\frac{s^{13}}{3.7.11} + \frac{\lambda^3 e^{cz}}{c^2}\frac{s^{16}}{3.8.13};$$

avremo così la soluzione

$$h(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu(s) = \frac{e^{cx}}{c^2}\left[s + \lambda\frac{s^4}{3} + \lambda^2\frac{s^7}{3.6} + \lambda^3\frac{s^{10}}{3.6.9} + \cdots\right] +$$

$$+ \frac{e^{cy}}{c^2}\left[s + \lambda\frac{s^5}{3} + \lambda^2\frac{s^9}{3.7} + \lambda^3\frac{s^{13}}{3.7.11} + \cdots\right] +$$

$$+ \frac{e^{cz}}{c^2}\left[s + \lambda\frac{s^6}{3} + \lambda^2\frac{s^{11}}{3.8} + \lambda^3\frac{s^{16}}{3.8.13} + \cdots\right].$$

§ 3.

Equazioni di seconda specie.

1. Nella (B) ponendo $\varphi \equiv 0$ e $\psi \equiv 1$ si ottiene l'equazione

$$u(s) = h(s) - \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s,\ t)\, f_r\left[h(t)\right] d\,t. \tag{33}$$

Essendo qui $\psi\left[h_\nu(s)\right]=h_\nu(s)$, avremo, supposto che sia $|g(s)-\mu(s)| \leqq s$,

$$
\begin{aligned}
h_0(s) &= u(s),\\
h_1(s) &= \lambda\int_{\mu(s)}^{g(s)}\sum_{r=1}^{p} K_r(s,\ t)\, f_r\left[h_0(t)\right] d\,t = \lambda\int_{\mu(s)}^{g(s)}\sum_{r=1}^{p} K_r(s,\ t)\, f_r\left[u(t)\right] d\,t,\\
h_2(s) &= \lambda^2\int_{\mu(s)}^{g(s)}\sum_{r=1}^{p} K_r(s,\ t)\, f_r\left[h_1(t)\right] d\,t =\\
&= \lambda^2\int_{\mu(s)}^{g(s)}\sum_{r=1}^{p} K_r(s,\ t)\, d\,t\, f_r\left\{\int_{\mu(t)}^{g(t)}\sum_{m=1}^{p} K_m(t,\ r)\, f_m\left[u(r)\right] d\,r\right\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\left.\begin{aligned}
h(s) &= u(s) + \lambda\int_{\mu(s)}^{g(s)}\sum_{r=1}^{p} K_r(s,\ t)\, f_r\left[u(t)\right] d\,t +\\
&+ \lambda^2\int_{\mu(s)}^{g(s)}\sum_{r=1}^{p} K_r(s,\ t)\, d\,t\, f_r\left\{\int_{\mu(t)}^{g(t)}\sum_{m=1}^{p} K_m(t,\ r)\, f_m\left[u(r)\right] d\,r\right\} + \cdots
\end{aligned}\right\} \tag{34}
$$

dove la serie del secondo membro, sotto le condizioni poste, sarà assolutamente ed uniformemente convergente.

Se nell'equazione precedente poniamo $\mu(s)=0$, $g(s)=s$ e $p=1$, ritroviamo, come caso particolarissimo, la soluzione dell'equazione del VOLTERRA [12].

Se invece fosse $\mu(s)=a$, $g(s)=b$, con a e b costanti, posto $|u(s)|<m$ e ricordando le condizioni poste al Cap. II per l'operazione f_r, si otterrebbe dalla (34):

$$
\begin{aligned}
h(s) &< m + |\lambda|\, M\, C\, m\,(b-a) + |\lambda|^2 M^2 C^2 m\,(b-a)^2 +\\
&+ |\lambda|^3 M^3 C^3 m\,(b-a)^3 + \cdots = m\,[1 + |\lambda|\, M\, C\,(b-a) +\\
&+ |\lambda|^2 M^2 C^2 (b-a)^2 + |\lambda|^3 M^3 C^3 (b-a)^3 + \cdots].
\end{aligned}
$$

In questo caso, la convergenza sarà assicurata se

$$|\lambda|\, M\, C\,(b-a) < 1.$$

2. Per l'equazione (33), ora considerata, si può avere la soluzione anche prescindendo dall'ipotesi finora fatta che le operazioni f_r siano distri-

---

(12) V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales, etc.* (Gauthier-Villars, Paris, 1913), p. 45 e seg.

butive. Supposto

$$|K_r(s,\ t)| < M \quad (r = 1,\ 2, \ldots,\ p); \qquad g(s) - \mu(s) < s < \tau.$$

e che le operazioni $f_r\,(r = 1,\ 2, \ldots,\ p)$ siano derivabili almeno una volta, limiteremo la nostra ricerca alle funzioni $h(s)$ tali che le funzioni $f_r[h(s)]$ e le loro derivate $f'_r[h(s) + \omega(s)]$, rispetto ad $h(s)$, si mantengano, in modulo, inferiori ad un numero finito m, per ogni valore di s nell'intervallo γ e per ogni funzione $|\omega(s)| < \sigma$; dove σ è un numero maggiore dei termini della successione $\frac{(\alpha\tau)^n}{n!}$ $(n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$ ed α rappresenta le quantità $|\lambda|\,p\,M\,m$.

Per risolvere l'equazione (33) useremo il metodo delle approssimazioni successive. In prima approssimazione poniamo

$$h(s) + \omega_1(s) = u(s);$$

l'errore che si commette

$$\omega_1(s) = \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t)\, f_r\Big[h(t)\Big]\, dt$$

soddisferà alla relazione

$$|\omega_1(s)| < |\lambda|\, p\, M\, m\, |s|;$$

cioè

$$|\omega_1(s)| < \alpha\, |s|. \tag{35}$$

Se in una seconda approssimazione poniamo

$$h(s) + \omega_2(s) = u(s) + \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s,\ t)\, f_r\Big[h(t) + \omega_1(t)\Big]\, dt =$$

$$= u(s) + \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s,\ t)\, f_r\Big[u(t)\Big]\, dt,$$

l'errore commesso sarà

$$\omega_2(s) = \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) \Big\{ f_r\Big[h(t) + \omega_1(t)\Big] - f_r\Big[h(t)\Big] \Big\}\, dt.$$

E poichè

$$\Big| f_r\Big[h(t) + \omega_1(t)\Big] - f_r\Big[h(t)\Big] \Big| = |\omega_1(t)|\, \Big| f'_r\Big[h(t) + \theta_r\, \omega_1(t)\Big] \Big| < |\omega_1(t)|\, m,$$

con $0 < \theta_r < 1$, avremo per la (35)

$$|\omega_2(s)| < |\lambda| M p m \alpha \left| \int_{\mu(s)}^{g(s)} |t| \, d t \right| < |\lambda| M p m \alpha \left| \int_0^s |t| \, d t \right| < \alpha^2 \frac{|s|^2}{2!} .$$

In terza approssimazione, poniamo

$$h(s) + \omega_3(s) = u(s) + \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r \left[h(t) + \omega_2(t) \right] d t =$$

$$= u(s) + \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r \left\{ u(t) + \lambda \int_{\mu(t)}^{g(t)} \sum_{m=1}^{p} K_m(t, r) f_m \left[u(r) \right] d r \right\};$$

l'errore che si commette

$$\omega_3(s) = \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) \left\{ f_r \left[h(t) + \omega_2(t) \right] - f_r \left[h(t) \right] \right\} d t =$$

$$= \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) \, \omega_2(t) f'_r \left[h(t) + \theta'_r \, \omega_2(t) \right] d t,$$

dove $0 < \theta'_r < 1$, soddisferà alla relazione

$$\left| \omega_3(s) \right| < \left| \lambda \right| M p m \alpha^2 \left| \int_{\mu(s)}^{g(s)} \frac{t^2}{2!} \right| < \alpha^3 \frac{|s|^3}{3!} .$$

Così continuando, s'avrebbe in generale

$$\left| \omega_n(s) \right| < \alpha^n \frac{|s|^n}{n!},$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty} | \omega_n(s) | = 0.$$

Se si indica con F l'operazione

$$F \equiv u(s) + \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) f_r ,$$

la soluzione trovata può assumere la forma

$$h(s) = \lim_{n=\infty} F_n [u(s)]. \tag{36}$$

Se le operazioni f_r fossero distributive, si ritroverebbe la (34) del § 3.

3. Anche qui si può dimostrare che la soluzione trovata è *unica*.

Supposto infatti che esistessero due soluzioni distinte $h_1(s)$ ed $h_2(s)$, la loro differenza $\chi(s)$ soddisferà l'equazione

$$\chi(s) = \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t) \left\{ f_r\left[h_1(t)\right] - f_r\left[h_2(t)\right] \right\} dt;$$

per cui posto

$$f_r\left[h_1(t)\right] - f_r\left[h_2(t)\right] = \left[h_1(t) - h_2(t)\right] f'_r\left[(h_1 t) + \theta \left\{ h_1(t) - h_2(t) \right\} \right] =$$

$$= \chi(t) f'_r\left[h_1(t) + \theta\, \chi(t)\right], \qquad (0 < \theta < 1)$$

avremo

$$\chi(s) = \lambda \int_{\mu(s)}^{g(s)} \sum_{r=1}^{p} K_r(s, t)\, \chi(t)\, f'_r\left[h_1(t) + \theta\, \chi(t)\right] dt. \tag{37}$$

Supposto che sia

$$|\chi(s)| < \sigma; \qquad \left|f'_r\left[h_1(s) + \theta\, \chi(s)\right]\right| < m; \qquad |\lambda|\, M p m = \beta,$$

s'avrà

$$|\chi(s)| < |\lambda| M m p \sigma \left| \int_{\mu(s)}^{g(s)} dt \right| < \sigma \beta \left| \int_0^{s} dt \right| = \sigma \beta |s| .$$

Sostituendo nella (37) alla $\chi(t)$ questo valore si troverebbe

$$|\chi(s)| < |\lambda| M m p \sigma \beta \left| \int_0^{|s|} |t|\, dt \right| = \sigma \beta^2 \frac{|s|^2}{2!};$$

e ripetendo l'operazione

$$|\chi(s)| < \sigma \beta^3 \frac{|s|^3}{3!}.$$

Così continuando, s'arriverebbe alla relazione

$$|\chi(s)| < \sigma \beta^n \frac{|s|^n}{n!},$$

di cui il secondo membro, al crescere di n, tende allo zero: sarà quindi $\chi(s)=0$.

4. Se la condizione $\left|g(s)-\mu(s)\right| \leqq (s)$ non fosse verificata, posto allora

$$\left|g(s)-\mu(s)\right| < \nu,$$

s'otterrebbe

$$|\omega_1(s)| < \lambda\, M\, m\, p\, \nu = \alpha,$$

$$|\omega_2(s)| < \alpha^2;$$

ed in generale

$$|\omega_n(s)| < \alpha^n.$$

Perciò l'errore $\omega_n(s)$ tenderà allo zero, se si potrà fare in modo che sia $\alpha < 1$; cioè

$$(\lambda) < \frac{1}{M\, m\, p\, \nu}. \tag{38}$$

5. Se nell'equazione proposta fosse $\mu(s)=a$, $g(s)=b$ con a e b costanti, la (36) ci fornirebbe ancora la soluzione cercata se, posto $b-a=\nu$, fosse soddisfatta la condizione (38).

Noteremo infine che per $u(s)=0$ la (36) si riduce ad $h(s)=0$. Supposto che le f_r siano tali da aversi $f_r(0)=0$, potremo asserire che l'*equazione omogenea*

$$\varphi(s)=\lambda\int_{\mu(s)}^{g(s)}\sum_{r=1}^{p} K_r(s,t)\, f_r\Big[h(t)\Big]\, dt$$

non ammette, qualunque sia λ, *soluzioni diverse da zero* qualunque siano i limiti, costanti o variabili.

Cagliari, febbraio 1921.

Sopra due teoremi di Dirichlet.

(*Di* ALBERTO MARIO BEDARIDA, *a Genova.*)

1. DIRICHLET, nella sua classica Memoria inserita nel volume n.° 24 del *Giornale di Crelle*: « Recherches sur les formes quadratiques à coëfficients et à indéterminées complexes », ha dimostrato i due teoremi seguenti:

a) « *Se D è un intero, razionale, positivo e non quadrato ed H è il numero delle classi di forme a coefficienti interi complessi, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, a determinante D, primitive di prima specie, ed h_1, h_2 sono i numeri delle classi di forme a coefficienti interi razionali, rispettivamente a determinante D e $-D$, primitive di prima specie; si ha: $H=2h_1 h_2$ oppure $H=h_1 h_2$ secondo che l'equazione indeterminata $t^2-Du^2=-1$, ammette soluzioni intere razionali oppure no* ».

b) « *Se D è un intero, razionale, positivo, il cui doppio non sia un quadrato, ed H è il numero delle classi di forme a coefficienti interi complessi, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, a determinante iD, primitive di prima specie, ed h_1, h_2 sono i numeri delle classi di forme a coefficienti interi razionali,, rispettivamente a determinante $2D$ e $-2D$, primitive di prima specie; si ha: $H=h_1 h_2$ oppure $2H=h_1 h_2$ secondo che l'equazione indeterminata $t^2-2Du^2=-1$, ammette soluzioni intere razionali oppure no* ».

Questi due teoremi chiudono la Memoria e, giustamente, sono considerati tra i più belli della teoria delle forme a coefficienti e variabili interi complessi, cioè della teoria delle forme aritmetiche di DIRICHLET. La loro dimostrazione risulta da considerazioni di Aritmetica analitica. I teoremi a) e b) furono inoltre dimostrati con considerazioni di Aritmetica pura da HILBERT, nella Memoria « Ueber den Dirichlet'schen biquadratischen Zahlkörper » (Math. Ann., 45 Bd.), come un'applicazione della teoria dei generi.

Noi ci proponiamo, nella presente Nota, di dimostrare come il teorema b) si possa ricondurre al teorema a), mediante considerazioni di *Aritmetica pura*, senza cioè ricorrere ai mezzi che offre la Teoria dei Numeri, quando vi si introducono considerazioni di Analisi. Precisamente, ciò risulterà, in modo assai semplice, riprendendo alcuni studi sopra le forme aritmetiche di DIRICHLET, dal punto di vista dell'Aritmetica pura, dovuti al prof. BIANCHI e pubblicati nella Nota: *Sulle forme quadratiche a coefficienti ed a indeterminate complesse;* Acc. Lincei, Serie 4ª, vol. V, fasc. 8°, pag. 589 (1).

2. Si abbia un intero di GAUSS $D \equiv 0$ (mod. 2), e sia H_1 il numero delle classi di forme di DIRICHLET a determinante D, primitive (necessariamente di prima specie) ed H_2 il numero delle classi di forme di DIRICHLET, dello stesso determinante, a divisore $1+i$ (necessariamente non primitive): si tratta di determinare le relazioni tra i numeri H_1 ed H_2 (2).

Intanto, un teorema generale (3) ci assicura che H_2 è sempre un divisore di H_1 e che il quoziente intero è il numero delle forme di DIRICHLET a determinante D, primitive di prima specie, non equivalenti tra di loro, il cui primo coefficiente è un quadrato ρ^2 divisore di $(1+i)^2$.

Ora, i valori che ρ può avere sono: $\rho = 1$ e $\rho = 1+i$: al primo corrisponde la forma principale $f_1 \equiv (1, 0, D)$; al secondo, dovendo essere il coefficiente medio delle rispettive forme $\equiv 0$ (mod. 2) oppure $\equiv 1+i$ (mod. 2), corrispondono le due forme:

$$f_2 \equiv \left((1+i)^2,\ 0,\ -\frac{D}{(1+i)^2}\right) \quad \text{ed} \quad f_3 \equiv \left((1+i)^2,\ 1+i,\ -\frac{D}{(1+i)^2}+1\right).$$

Si tratta di considerare di queste tre forme, quelle primitive di prima specie, e vedere quante di esse non sono equivalenti tra di loro. La f_1, intanto, è sempre primitiva di prima specie. Distinguendo il determinante D, rispetto al modulo $(1+i)^3$, si ha che è $D \equiv (1+i)^2$ (mod. $(1+i)^3$) oppure $D \equiv 0$ (mod. $(1+i)^3$): consideriamo separatamente i due casi.

Sia $D \equiv (1+i)^2$ (mod. $(1+i)^3$). La forma f_2 è primitiva di prima specie, la f_3 non è tale. Ora, perchè le forme f_1 e f_2 siano equivalenti, in ordine ad

(1) Per quanto riguarda la nomenclatura adoperata nella presente Nota, noi rimandiamo il lettore al citato lavoro del prof. BIANCHI.

(2) Se invece è $D \equiv 1$ (mod. 2), le forme di DIRICHLET a determinante D ed a divisore $1+i$ sono necessariamente primitive ed in questo caso sono note le relazioni tra i numeri H_1 ed H_2 (cfr. BIANCHI, op. cit., pag. 593, oppure LIPSCHITZ, *Zur Theorie der quadratrischen Formen*, Crelle's Journal, 54 Bd.).

Nei casi $D \equiv i$ (mod. 2) oppure $D \equiv 1+i$ (mod. 2) non si hanno, manifestamente, forme a divisore $1+i$.

(3) Cfr. BIANCHI, op. cit., pag. 591.

un noto teorema [4], occorre e basta che esistano due interi di Gauss x e y, tali che soddisfino alle relazioni:

$$\begin{cases} x^2 - D\,y^2 = (1+i)^2 \\ \qquad x \equiv 0\,(\text{mod. } (1+i)^2), \end{cases}$$

e ciò avviene quando e soltanto quando l'equazione di Pell:

$$x^2 - D\,y^2 = (1+i)^2 \tag{1}$$

sia solubile in numeri interi con x pari (y sarà con ciò, necessariamente, dispari). Le due forme f_1 ed f_2 sono allora ed allora soltanto, equivalenti tra di loro.

Sia $D \equiv 0$ (mod. $(1+i)^3$). La forma f_3 è primitiva di prima specie, la f_2 non è tale. Ora, medesimamente, le due forme f_1 ed f_3 saranno equivalenti tra di loro, quando e soltanto quando esistano due interi x e y per cui si abbia:

$$\begin{cases} x^2 - D\,y^2 = (1+i)^2 \\ x + (1+i)\,y \equiv 0 \;(\text{mod. } (1+i)^2) \\ \qquad x \equiv 0 \;(\text{mod. } (1+i)). \end{cases}$$

Se questo sistema è verificato, l'equazione di Pell (1) è solubile, manifestamente in numeri interi, con x semipari (non pari) ed y dispari. Inversamente, se ciò avviene, il sistema precedente viene verificato. Dunque le forme f_1 ed f_3 sono equivalenti allora e allora soltanto che l'equazione di Pell (1) sia solubile con x semipari ed y dispari.

Le precedenti considerazioni ci offrono dunque il teorema seguente:

Se D è un intero pari ed H_1 è il numero delle classi di forme di Dirichlet ***a determinante D, primitive (necessariamente di prima specie) ed H_2 è il numero delle classi di forme di*** Dirichlet ***dello stesso determinante, a divisore $1+i$ (necessariamente non primitive); si ha: per $D \equiv (1+i)^2$ (mod. $(1+i)^3$), $H_1 = H_2$ oppure $H_1 = 2\,H_2$, secondo che l'equazione di*** Pell:

$$x^2 - D\,y^2 = (1+i)^2$$

è solubile oppure no in numeri interi x e y con x pari (e quindi sarà y dispari); per $D \equiv 0$ (mod. $(1+i)^3$, $H_1 = H_2$ oppure $H_1 = 2\,H_2$ secondo che questa equazione di Pell ***è solubile oppure no in numeri interi x e y, con x semipari ed y dispari.***

---

[4] Cfr. Bianchi, op. cit., pag. 590.

3. Si supponga ora che l'intero pari D sia razionale positivo e non quadrato.

Si ha allora subito che la (1) non è solubile con y dispari. Infatti, dividendo i due membri per $(1+i)^2$, si dedurrebbe:

$$x'^2 + i D' y^2 = 1 \tag{2}$$

ove con x'^2 e D' indichiamo i quozienti interi di x^2 per $(1+i)^2$ e di D per 2 e sarà $D' > 0$. Ora, ad una soluzione (x', y) della (2) corrisponde una soluzione $(x', i y)$ dell'equazione:

$$x'^2 - i D' y^2 = 1$$

ed inversamente; ma le soluzioni di questa equazione hanno la forma $x = u$ ed $y = (1-i) v$, essendo u e v entrambi interi, razionali, oppure entrambi interi, puramente complessi ([5]); dunque nelle soluzioni della (1), nel caso attuale, y non può essere dispari.

Il teorema precedente ci conduce quindi al corollario:

Se D è un intero razionale positivo, pari e non quadrato, il numero H_1 delle classi di forme di Dirichlet *a determinante D, primitive (necessariamente di prima specie) è sempre il doppio del numero H_2 delle classi di forme di* Dirichlet *dello stesso determinante a divisore $1+i$ (necessariamente non drimitive).*

4. Quest'ultimo risultato ci offre il modo di ricondurre, come si è detto, il teorema b) al teorema a).

Infatti: sia D un intero razionale, positivo, il cui doppio non sia un quadrato, H_1 il numero delle classi di forme di Dirichlet a determinante $2D$, primitive di prima specie, h_1 ed h_2 i numeri delle classi di forme di Gauss rispettivamente $2D$ e $-2D$, primitive di prima specie.

Per il teorema a), abbiamo:

$$H_1 = 2 h_1 h_2 \text{ oppure } H_1 = h_1 h_2, \tag{3}$$

secondo che l'equazione indeterminata $t^2 - 2 D u^2 = -1$ ammette soluzioni intere razionali oppure no.

Indichiamo con H il numero delle classi di forme di Dirichlet a determinante $2D$ ed a divisore $1+i$: tali forme, come già si è osservato, non

([5]) Cfr. Dirichlet, op. cit., pag. 342.

possono essere primitive. È evidente, che queste classi di forme corrispondano biunivocamente alle classi di forme a determinante $-iD$, primitive di prima specie. Segue allora che il numero di tali classi è ancora H: d'altra parte questo numero H è pure il numero delle classi di forme di DIRICHLET a determinante $+iD$, primitive di prima specie ([6]). Ora, per il corollario più sopra stabilito è sempre $2H = H_1$ e quindi, tenendo conto delle (3) sarà:

$$H = h_1 h_2 \quad \text{oppure} \quad H = 2 h_1 h_2,$$

secondo che l'equazione indeterminata $t^2 - 2Du^2 = -1$, ammette soluzioni intere razionali oppure no.

Il teorema b) è dunque ricondotto, per via puramente aritmetica, al teorema a).

([6]) Si noti che: ***il numero delle classi di forme di*** DIRICHLET ***è lo stesso per determinanti di segno opposto.*** Ciò si può vedere subito nel modo seguente, senza ricorrere alle considerazioni di Aritmetica analitica di DIRICHLET, della citata Memoria. Ad una forma a determinante $-D$ (D intero di GAUSS qualunque) (a, b, c) si faccia corrispondere la forma $(a, ib, -c)$ a determinante $-D$, e viceversa; la corrispondenza si estende subito dalle forme alle classi ed in modo biunivoco, poichè se:

$$(a, b, c)\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = (m, n, l),$$

ove (m, n, l) è una forma a determinante D ed $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ è una sostituzione aritmetica unimodulare, si avrà:

$$(a, ib, -c)\begin{pmatrix}\alpha, & i\beta \\ -i\gamma, & \delta\end{pmatrix} = (m, in, -l),$$

per le corrispondenti forme a determinante $-D$ ed inversamente: è dunque provato quanto si è asserito.

Intorno alle involuzioni situate sopra le superficie iperellittiche con due fasci di curve ellittiche.

(*Di* Nicolò Spampinato, *a Catania.*)

Nella presente Nota si caratterizzano i valori che può assumere l'ordine ν di una involuzione situata sopra una superficie iperellittica dotata di due (soli) fasci ellittici di curve ellittiche, e che sia birazionalmente identica alla superficie stessa, nell'ipotesi che la superficie possegga più che due schiere ∞^2 di trasformazioni birazionali in sè stessa.

Nel caso poi che dei due fasci di curve ellittiche, di cui la superficie è dotata, uno sia armonico e l'altro equianarmonico, si dà il numero delle involuzioni che la superficie possiede ed aventi per ordine un numero ν assegnato. Per questo mi sono servito di un teorema di Gauss, che dà il numero delle rappresentazioni di un numero mediante la forma quadratica

$$x^2 + y^2,$$

e di altri due teoremi, dimostrati nel § 2 della presente Nota, dei quali uno dà il numero delle rappresentazioni di un numero assegnato mediante la forma

$$x^2 + x\,y + y^2,$$

e l'altro risolve lo stesso problema per la forma

$$(x^2 + y^2)\,(u^2 + u\,v + v^2).$$

Avvertiamo che le tabelle di periodi a cui si può supporre appartenente una qualunque delle superficie che qui si considerano sono state tutte determinate dal prof. Scorza [1] alla cui Memoria ci riferiamo, per tutto quanto riguarda la nomenclatura qui usata.

[1] G. Scorza, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XLI, anno 1916), Parte II, § 7.

§ 1.

1. Chiedersi (²) se sopra una superficie iperellittica Γ esista un'involuzione di ordine ν birazionalmente identica alla superficie stessa vale quanto chiedersi se sopra Γ esista una corrispondenza algebrica con gl'indici $(\nu, 1)$. Ora i possibili valori che può assumere l'indice ν di una tale corrispondenza sono i possibili valori che può assumere il modulo di una sostituzione riemanniana di Γ (³); ci è quindi necessario andare a *caratterizzare le matrici delle sostituzioni riemanniane di* Γ.

2. Appartenga Γ alla tabella

$$\omega \equiv \begin{Vmatrix} \omega_1, & \omega_2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \omega'_1, & \omega'_2 \end{Vmatrix} \tag{1}$$

e siano

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = a_{11} x_1 + \cdots + a_{14} x_4 , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x'_4 = a_{41} x_1 + \cdots + a_{44} x_4 , \end{array}\right\} \tag{2}$$

(con le $a_{r,s}$ interi) le equazioni di una sostituzione riemanniana di Γ.

Allora indicando con le $\lambda_{r,s}$ delle convenienti costanti (complesse), dovranno sussistere le relazioni:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{11} \omega_1 = a_{11} \omega_1 + a_{12} \omega_2 , \\ \lambda_{11} \omega_2 = a_{21} \omega_1 + a_{22} \omega_2 , \\ \lambda_{12} \omega'_1 = a_{31} \omega_1 + a_{32} \omega_2 , \\ \lambda_{12} \omega'_2 = a_{41} \omega_1 + a_{42} \omega_2 ; \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{21} \omega_1 = a_{13} \omega'_1 + a_{14} \omega'_2 , \\ \lambda_{21} \omega_2 = a_{23} \omega'_1 + a_{24} \omega'_2 , \\ \lambda_{22} \omega'_1 = a_{33} \omega'_1 + a_{34} \omega'_2 , \\ \lambda_{22} \omega'_2 = a_{43} \omega'_1 + a_{44} \omega'_2 . \end{array}\right\} \tag{4}$$

(²) Cfr. G. Scorza, *Sulle curve ellittiche singolari* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° semestre, 1918).

(³) G. Scorza, *Alcune questioni di geometria sopra una varietà abeliana qualunque* (Atti dell'Accademia Gioenia, serie 5, vol. XI, mem. XX), n.° 15.

Dalle ultime due delle (3) e dalle prime due delle (4) si ricava:

$$a_{31}\,\omega_1\,\omega'_2 + a_{32}\,\omega_2\,\omega'_2 = a_{41}\,\omega_1\,\omega'_1 + a_{42}\,\omega_2\,\omega'_1\,,$$

$$a_{13}\,\omega_2\,\omega'_1 + a_{14}\,\omega_2\,\omega'_2 = a_{23}\,\omega_1\,\omega'_1 + a_{24}\,\omega_1\,\omega'_2\,.\,.$$

Se una di queste relazioni non fosse un'identità esisterebbe una forma riemanniana simultanea non nulla [4] per le matrici

$$\| \omega_1\,, \quad \omega_2 \| \qquad \text{e} \qquad \| \omega_1\,, \quad \omega'_2 \| \tag{5}$$

e queste sarebbero vincolate, mentre gli *assi* [5] di ω sono *isolati* [6].

Dunque deve essere:

$$a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{32} = a_{41} = a_{42} = 0.$$

3. Dalle prime due delle (3) e dalle ultime delle (4) si ricava:

$$a_{21}\,\omega_1^2 + (a_{22} - a_{11})\,\omega_1\,\omega_2 - a_{12}\,\omega_2^2 = 0, \tag{6}$$

$$a_{43}\,\omega_1'^2 + (a_{44} - a_{33})\,\omega'_1\,\omega'_2 - a_{34}\,\omega_2'^2 = 0. \tag{7}$$

Distinguiamo ora i tre casi:

a) Nessuna delle matrici (5) sia a moltiplicazione complessa, cioè sia la superficie Γ del tipo III [7].

b) Una delle due matrici (5) sia a moltiplicazione complessa, cioè sia Γ del tipo IV.

c) Tutte e due le matrici (5) siano a moltiplicazione complessa, cioè sia Γ del tipo VI.

4. *Ipotesi a*).

In questo caso, siccome le matrici (5) non sono a moltiplicazione complessa, ciascuna delle relazioni (6) e (7) deve essere identica; quindi deve essere

$$a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = 0,$$

$$a_{11} = a_{22} = \rho,$$

$$a_{33} = a_{44} = \sigma,$$

dove con ρ e σ s'indicano degl'interi qualunque.

---

(4) Loc. cit. (1), Parte I, n.° 3.

(5) Loc. cit. (1), Parte I, n.° 32.

(6) Loc. cit. (1), Parte I, n.° 41.

(7) Loc. cit. (1), Parte II, § 3.

Abbiamo quindi che ogni sostituzione riemanniana di ω è quivi della forma:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= \rho\, x_1 \\ x'_2 &= \rho\, x_2 \\ x'_3 &= \sigma\, x_3 \\ x'_4 &= \sigma\, x_4\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

È evidente poi che ogni sostituzione del tipo (8) è una sostituzione riemanniana di ω.

Il modulo della (8) è $\rho^2 \sigma^2$; quindi:

Se una superficie iperellittica Γ *del tipo III appartiene alla tabella* (1), *le infinite corrispondenze algebriche* (ν, 1) *che essa possiede sono tali che l'intero* ν *è sempre rappresentabile mediante la forma:*

$$x^2\, y^2. \tag{9}$$

Inversamente: *fissato un intero che sia rappresentabile mediante tale forma esistono su* Γ *tante schiere* ∞^2 *di corrispondenze algebriche* (ν, 1), *quante sono le sue rappresentazioni mediante la forma stessa.*

5. *Ipotesi b*).

Delle due matrici (5) sia, per es., la prima quella a moltiplicazione complessa; allora sussisterà una relazione del tipo

$$m\, \omega_1^2 + n\, \omega_1\, \omega_2 + p\, \omega_2^2 = 0 \tag{10}$$

con m, n e p convenienti numeri interi, primi tra loro.

Confrontando la (10) con la (6), si trova che deve essere

$$\begin{aligned} a_{21} &= \rho\, m, \\ a_{22} - a_{11} &= \rho\, n, \\ -\, a_{12} &= \rho\, p, \end{aligned}$$

essendo ρ un conveniente fattore intero.

Dalla (7) si deduce, anche qua, che deve essere

$$\begin{aligned} a_{34} &= a_{43} = 0, \\ a_{33} &= a_{44} = \sigma, \end{aligned}$$

essendo anche qua σ un numero intero qualunque.

Abbiamo quindi che, nel caso attuale, ogni sostituzione riemanniana di ω è del tipo:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= \mu\, x_1 - \rho\, p\, x_2\,, \\ x'_2 &= \rho\, m\, x_1 + (\rho\, n + \mu)\, x_2\,, \\ x'_3 &= \sigma\, x_3\,, \\ x'_4 &= \sigma\, x_4\,, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

essendo μ un altro intero qualunque.

Inversamente è evidente che ogni sostituzione del tipo (11) è una sostituzione riemanniana di ω.

Il modulo della (11) è

$$\sigma^2\,(\mu^2 + n\,\mu\,\rho + m\,p\,\rho^2). \tag{12}$$

Abbiamo quindi:

Se una superficie iperellittica Γ *del tipo IV appartiene alla tabella* (1), *le infinite corrispondenze algebriche* (ν, 1) *che essa possiede sono tali che l'intero* ν *è sempre della forma*

$$x^2\,(u^2 + n\cdot u\,v + m\,p\cdot v^2)$$

dove con m, n e p *s' indicano i coefficienti della relazione quadratica a cui soddisfano gli elementi della matrice ellittica rappresentante quello dei due assi di* Γ *che è a moltiplicazione complessa.*

Inversamente: *fissato un numero rappresentabile mediante la forma* (12) *esistono su* Γ *tante schiere di corrispondenze algebriche* (ν, 1), *quante sono le sue rappresentazioni mediante la* (12).

6. *Ipotesi c*).

In questo caso le matrici (5) essendo tutte e due a moltiplicazione complessa, siano la (10) e (con m', n', p' primi tra loro)

$$m'\,\omega'^2_1 + n'\,\omega'_1\,\omega'_2 + p'\,\omega'_2 = 0 \tag{13}$$

le relazioni a coefficienti interi a cui soddisfano gli elementi delle matrici (5).

Ragionando come nel caso *b*), questa volta si trova che deve essere:

$$\begin{aligned} a_{21} &= \rho\, m, \qquad & a_{22} - a_{11} &= \rho\, n, \qquad & -a_{12} &= \rho\, p, \\ a_{43} &= \sigma\, m', \qquad & a_{44} - a_{33} &= \sigma\, n', \qquad & -a_{34} &= \sigma\, p, \end{aligned}$$

dove con ρ e σ s'indicano ancora dei convenienti interi; e come sopra si arriva al teorema:

Se una superficie iperellittica Γ *del tipo VI appartiene alla tabella* (1), *le infinite corrispondenze algebriche* $(\nu, 1)$ *che essa possiede sono tali che l'intero* ν *è sempre della forma:*

$$(x^2 + n\,x\,y + m\,p\,y^2)\,(u^2 + n'\,u\,v + m'\,p'\,v^2) \tag{14}$$

dove con m, n, p *e* m', n', p' *s'indicano i coefficienti delle relazioni quadratiche a cui devono soddisfare le matrici ellittiche corrispondenti ai due assi di* Γ.

Inversamente: *fissato un numero rappresentabile mediante la forma* (14) *esistono su* Γ *tante schiere* ∞^2 *di corrispondenze algebriche* $(\nu, 1)$, *quante sono le sue rappresentazioni mediante la forma stessa.*

7. *Appartenga* Γ *alla tabella*

$$\left\| \begin{matrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\omega'_1}{2} & \omega'_1 & \omega'_2 \end{matrix} \right\|; \tag{15}$$

In questo caso i coefficienli a_{rs} di una sostituzione riemanniana di Γ devono soddisfare alle seguenti relazioni:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{11}\,\omega_1 = a_{11}\,\omega_1 + a_{12}\,\omega_2\,, \\ &\lambda_{11}\,\omega_2 + \frac{1}{2}\lambda_{12}\,\omega'_1 = a_{21}\,\omega_1 + a_{22}\,\omega_2\,, \\ &\lambda_{12}\,\omega'_1 = a_{31}\,\omega_1 + a_{32}\,\omega_2\,, \\ &\lambda_{12}\,\omega'_2 = a_{41}\,\omega_1 + a_{42}\,\omega_2\,; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{21}\,\omega_1 = \frac{1}{2}a_{12}\,\omega'_1 + a_{13}\,\omega'_1 + a_{14}\,\omega'_2\,, \\ &\lambda_{21}\,\omega_2 + \frac{1}{2}\lambda_{22}\,\omega'_1 = \frac{1}{2}\,a_{22}\,\omega'_1 + a_{23}\,\omega'_1 + a_{24}\,\omega'_2\,, \\ &\lambda_{22}\,\omega'_1 = \frac{1}{2}a_{32}\,\omega'_1 + a_{33}\,\omega'_1 + a_{34}\,\omega'_2\,, \\ &\lambda_{22}\,\omega'_2 = \frac{1}{2}a_{42}\,\omega'_1 + a_{43}\,\omega'_1 + a_{44}\,\omega'_2\,, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

essendo le λ_{rs} convenienti numeri complessi.

Dalle ultime due relazioni delle (16) si ricava, come nel n.º 2, che deve essere

$$a_{31} = a_{32} = a_{41} = a_{42} = 0. \tag{18}$$

Segue che deve essere $\lambda_{12} = 0$.

Tenendo conto di questo risultato e delle (18), le prime due delle (16) e le ultime due delle (17) si riducono identiche alle prime due delle (3) e alle ultime due delle (4). Segue che come precedentemente *anche qua si potranno ricavare le relazioni* (6) *e* (7).

Ora si osservi che, tenendo conto delle (18), il modulo della sostituzione si ridurrà al prodotto

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Segue che nel valore del modulo non influiscono mai i coefficienti

$$a_{13}, \quad a_{14}, \quad a_{23}, \quad a_{24}.$$

Ma allora, servendoci delle (6) e (7) si potrà ripetere anche qua tutto ciò che s'è detto in *a*), *b*) e *c*) ed arriveremo agli stessi teoremi ivi dimostrati.

8. Il ragionamento fatto al n.° 7 *può ripetersi in tutti gli altri possibili casi che possono presentarsi*, cioè quando Γ appartiene ad una delle seguenti tabelle:

$$\begin{Vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ \frac{\omega'_1}{2} & \frac{\omega'_2}{2} & \omega'_1 & \omega'_2 \end{Vmatrix}; \tag{20}$$

$$\begin{Vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{Vmatrix} \qquad (i = \sqrt{-1}); \tag{21}$$

$$\begin{Vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{2} & 1 & i \end{Vmatrix}; \tag{22}$$

$$\begin{Vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon \end{Vmatrix} \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right); \tag{23}$$

$$\begin{Vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon - 1}{3} & 1 & \varepsilon \end{Vmatrix}; \tag{24}$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon \end{Vmatrix}. \tag{25}$$

Basta per questo osservare che la presenza di quei due zeri nella prima riga di ciascuna delle precedenti tabelle porta che, quando si vanno a scrivere le relazioni analoghe alle (16), le due ultime restano sempre dello stesso tipo e perciò dovrà essere sempre:

$$a_{31} = a_{32} = a_{41} = a_{42} = 0;$$

dopo di che il ragionamento si conduce come si è fatto per gli altri casi e si arriva agli stessi teoremi stabiliti in *a*), *b*) e *c*).

Si osservi che se Γ appartiene ad una delle tabelle (21), (22), (23), (24) essa sarà o del tipo IV o del tipo VI, perchè ciascuna di queste matrici è dotata di un'asse, almeno, a moltiplicazione complessa.

Se poi Γ appartiene alla tabella (25) essa è del tipo VI, ed i fasci di curve ellittiche che essa contiene saranno uno armonico e l'altro equianarmonico.

9. Raccogliendo quanto abbiamo detto nei numeri precedenti possiamo enunciare il seguente teorema:

In una superficie iperellittica Γ *dotata di due fasci di curve ellittiche e di più che due schiere* ∞^2 *di trasformazioni birazionali in sè stessa l'indice* ν *di ogni sua corrispondenza algebrica* (ν, 1) *è sempre della forma*:

$x^2 \cdot y^2$	*se* Γ *è del tipo* III
$x^2 \cdot (u^2 + n\,u\,v + m\,p\,v^2)$	*se* Γ *è del tipo* IV
$(x^2 + n\,x\,y + m\,p\,y^2)\,(u^2 + n'\,u\,v + m'\,p'\,v^2)$	*se* Γ *è del tipo* VI,

dove con m, n, p e m', n', p' *s' indicano i coefficienti delle forme quadratiche a cui soddisfano le matrici ellittiche corrispondenti agli assi di* Γ *che sono a moltiplicazione complessa.*

Inversamente, *fissato un numero* ν *di una delle tre forme precedenti, secondo il tipo a cui* Γ *appartiene, esistono in* Γ *tante schiere* ∞^2 *di corrispondenze algebriche* (ν, 1), *quante sono le sue rappresentazioni mediante la forma stessa.*

10. Nel caso che la superficie Γ contenga un fascio di curve ellittiche armonico e l'altro equianarmonico, cioè nel caso che Γ appartenga alla tabella (25), le relazioni quadratiche di cui si parla nel teorema precedente sono:

$$1 + i^2 = 0,$$

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0;$$

sicchè nel caso attuale si deve porre

$$m=1, \quad n=0, \quad p=1,$$
$$m'=1, \quad n'=1, \quad p'=1;$$

e la forma, di cui nel teorema precedente, diventa:

$$(x^2+y^2)(u^2+uv+v^2). \tag{26}$$

Ora riguardo al numero delle rappresentazioni di un numero ν mediante la forma (26), cioè qualora si considerino come distinte quelle corrispondenti a due quaterne x, y, u, v che differiscono per il segno di qualcuno dei numeri x, y, u, v oppure per l'ordine in cui sono scritti [le sostituzioni riemanniane di Γ corrispondenti a due siffatte quaterne sono differenti], si ha il seguente teorema (§ 2, n.° 23):

Posto

$$\nu = 2^{\mu}\, 3^{\mu'}\, a_1^{\alpha_1} \dots a_t^{\alpha_t}\, b_1^{\beta_1} \dots b_{r'}^{\beta_{r'}} \,.\, b_{r'+1}^{\beta_{r'+1}} \dots b_r^{\beta_r} \,.\, c_1^{\gamma_1} \dots c_{s'}^{\gamma_{s'}} \cdot c_{s'+1}^{\gamma_{s'+1}} \dots c_s^{\gamma_s}\, d_1^{\delta_1} \dots d_q^{\delta_q}$$

dove con le a_i, b_i, c_i, d_i s' indicano i fattori primi di ν della forma

$$12n+1, \; 12n+5, \; 12n+7, \; 12n+11;$$

rispettivamente, e dove

$$\beta_1, \dots, \beta_{r'}, \; \gamma_1, \dots, \gamma_{s'} \quad \textit{sono interi pari o nulli}$$
$$\beta_{r'+1}, \dots, \beta_r, \; \gamma_{s'+1}, \dots, \gamma_s \quad \textit{sono interi dispari;}$$

posto inoltre

$$A = \frac{(\mu'+\varepsilon+1)^2}{4}\, \sigma(\alpha_1) \dots \sigma(\alpha_t),$$

dove è

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \textit{se } \mu' \textit{ è pari o nullo} \\ 0 & \textit{se } \mu' \textit{ è dispari} \end{cases}$$

e

$$\sigma(\alpha_i) = \frac{(\alpha_i+1)(\alpha_i+2)(\alpha_i+3)}{6},$$

e

$$B = \frac{1}{4^{r'}}(\beta_1+2)^2 \dots (\beta_{r'}+2)^2 \cdot (\beta_{r'+1}+3)(\beta_{r'+1}+1) \dots (\beta_r+3)(\beta_r+1)$$

$$C = \frac{1}{4^{s'}}(\gamma_1+2)^2 \dots (\gamma_{s'}+2)^2 \; (\gamma_{s'+1}+3)(\gamma_{s'+1}+1) \dots (\gamma_s+3)(\gamma_s+1)$$

si ha:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il numero ν *sia rappresentabile nella forma* (26) *è che gli eventuali fattori primi di* ν *della forma* $12n+11$ *vi compariscano con esponenti pari.*

Se ν *è poi rappresentabile, il numero delle rappresentazioni, che esso ammette, è dato da*:

$$K = 12(\mu+\rho)(\delta'_1+1), \dots, (\delta'_q+1)\,A\,B\,C,$$

dove è

$$\delta'_i = \frac{\delta_i}{2},$$

e

$$\rho = \begin{cases} 2 & \textit{se} \quad \mu \textit{ è pari o nullo,} \\ 1 & \textit{se} \quad \mu \textit{ è dispari.} \end{cases}$$

(Si osservi che $\mu+\rho$ è sempre pari, sicchè K *è sempre divisibile per 24*).

Abbiamo allora il seguente teorema:

Se Γ *appartiene alla tabella* (25), *fissato un numero intero* ν, *di corrispondenze algebriche* (ν, 1) *su* Γ *non ne esiste alcuna, se* ν *contiene fattori primi della forma* $12n+11$ *con esponenti dispari; ne esistono invece* K *schiere* ∞^2 *se gli eventuali fattori primi di* ν *della forma* $12n+11$ *sono tutti con esponenti pari.*

(*Queste* K *schiere sono legate a* K *sostituzioni riemanniane di* Γ *di modulo* ν).

11. Si osservi ora che ad una corrispondenza algebrica (ν, 1) su Γ è legata una involuzione γ^2_ν birazionalmente identica a Γ, mentre ad ogni tale involuzione γ^2_ν corrispondono tutte e sole le corrispondenze (ν, 1) che si ottengono dalla precedente moltiplicando per le h schiere ∞^2 di trasformazioni birazionali di Γ in se stessa.

Si noti che su h si hanno le cinque alternative ([5]):

$$h = 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24.$$

Segue che:

Calcolato per una superficie Γ *il numero delle sue sostituzioni riemanniane aventi per modulo un assegnato numero* ν, *cioè calcolato il numero* K *delle schiere* ∞^2 *di corrispondenze* (ν, 1) *che* Γ *ammette, dividendo* K *per* h *si tro-*

verà il numero delle involuzioni γ_ν^2 birazionalmente identiche a Γ che la superficie contiene.

12. Nel caso che Γ appartenga alla tabella (25) è $h = 24$ [1]; segue che il numero delle γ_ν^2 di Γ in questo caso è $\frac{K}{24}$ o zero; e precisamente mette conto di enunciare esplicitamente:

Una superficie iperellittica Γ' dotata di due fasci di curve ellittiche di cui uno armonico e l'altro equianarmonico non possiede alcuna involuzione γ_ν^2 birazionalmente identica a Γ' se ν contiene un fattore primo della forma $12n+11$ con esponente dispari; invece ne possiede

$$\frac{1}{2}(\mu+\rho)(d'_1+1)\ldots(d'_q+1)\,A\,B\,C,$$

se gli eventuali fattori di ν della forma $12n+11$ compariscono tutti con esponenti pari.

13. In particolare si ha che *sulla superficie Γ' esiste un'unica γ_2^2 ed un'unica γ_3^2.*

È bene determinare geometricamente queste due involuzioni.

Ciò si fa immediatamente.

Diciamo $[\varphi]$ il fascio armonico di curve ellittiche di Γ' e $[\psi]$ quello anarmonico. Le curve φ di $[\varphi]$ saranno, com'è noto, equianarmoniche e le curve ψ di $[\psi]$ saranno armoniche (ciò perchè ogni curva di $[\varphi]$ seca ciascuna curva di $[\psi]$ in un punto solo).

Sia A un punto di Γ' e ψ_a la curva di $[\psi]$ passante per A. In ψ_a, che è armonica, esiste un'unica involuzione singolare d'ordine 2 [2]. L'omologo di A in questo caso sarà l'omologo di A in γ_2^2.

Sia φ_a la curva di $[\varphi]$ passante per A. In φ_a, che è equianarmonica, esiste un'involuzione singolare di ordine 3 (unica e di ordine minimo): il gruppo di questa passante per A sarà il gruppo di γ_3^2 passante per A.

Si noti che in γ_2^2 sono unite tutte le curve di $[\psi]$ ed il fascio $[\varphi]$; in questo subordina *l'involuzione* singolare d'ordine 2.

Invece in γ_3^1 sono unite le curve di $[\varphi]$ ed il fascio $[\psi]$; in questo subordina *l'involuzione* singolare di ordine 3.

§ 2.

14. Gauss ha enunciato [8] il seguente teorema:

Dato un numero

$$M = 2^\mu \cdot S \cdot a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

dove con $a, b, c, \ldots$ s'indicano i fattori primi distinti di M della forma $4n+1$ e con S il prodotto di tutti i fattori primi della forma $4n+3$, se S non è un quadrato M non può decomporsi nella somma di due quadrati; se S è invece un quadrato M potrà decomporsi nella somma di due quadrati e di tali decomposizioni ne ammetterà

$$\frac{1}{2}\left[(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots+\varepsilon\right]$$

dove è

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \textit{se tutti i numeri } \alpha, \beta, \gamma, \ldots \textit{ sono pari} \\ 0 & \textit{se almeno uno dei numeri } \alpha, \beta, \gamma, \ldots \textit{ è dispari.} \end{cases}$$

Gauss lascia al lettore la dimostrazione del suddetto teorema.

Noi qui ne daremo la dimostrazione perchè si fanno ragionamenti che poi dovremmo ripetere e che così non ripeteremo.

Cominciamo coll'osservare che *nel numero delle rappresentazioni di M nella forma*

$$x^2 + y^2 \tag{27}$$

non influisce il fattore 2^μ.

Per questo basta far vedere che da ogni rappresentazione di un numero M nella forma (27) se ne deduce una del numero $2M$, e viceversa.

Infatti se è

$$M = \rho^2 + \sigma^2$$

sarà

$$2M = (\rho+\sigma)^2 + (\rho-\sigma)^2,$$

e se è

$$2M = \rho^2 + \sigma^2$$

[8] Gauss, *Recherches arithmétiques*. Paris, Hermann. Nota a pag. 157.

ρ e σ saranno pari, e sarà

$$M = \left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho - \sigma}{2}\right)^2.$$

L'asserzione fatta resta quindi dimostrata.

Si osservi ora che il determinante $-\Delta$ della forma (27) è -1 e perciò i fattori primi di M della forma $4n + 3$ devono portare esponenti pari perchè tali fattori non sono residui quadratici di -1 [9].

Dal metodo generale che dà il GAUSS si scorge poi che detti fattori non influiscono nel numero delle decomposizioni di M nella forma (27).

Abbiamo quindi che il numero delle *decomposizioni* cercato è eguale al numero delle decomposizioni in due quadrati del numero

$$I = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \ldots$$

Cominciamo col calcolare il numero delle decomposizioni proprie (cioè con x ed y primi fra di loro).

Nel nostro caso, indicando con m il massimo comun divisore dei coefficienti della forma, sarà

$$\frac{4\Delta}{m^2} = 4$$

perchè è $\Delta = 1$ e $m = 1$.

Allora [10] per ogni valore $\pm N$ di

$$\sqrt{-1} \pmod{I} \tag{28}$$

avremo due decomposizioni proprie di I, ma queste coincideranno perchè i coefficienti della forma sono 1, 0, 1.

Segue che il numero delle rappresentazioni proprie di I è dato dal numero delle soluzioni $\pm N$ della (28) incongrui mod. I e $< \frac{1}{2} I$.

Un numero N che soddisfi alle condizioni volute deve essere congruo secondo i moduli

$$a^\alpha,\ b^\beta,\ c^\gamma, \ldots$$

(9) Loc. cit. (8), pag. 154 e seguenti, nn. 180, 181, 182.
(10) Loc. cit. (8), n.° 180.

ai numeri

$$a_1\,,\ b_1\,,\ c_1\,,\ldots$$

dove con a_1, b_1, $c_1, \ldots$ si indicano soluzioni qualunque delle congruenze

$$\sqrt{-1}\ (\text{mod. } a^\alpha)$$
$$\sqrt{-1}\ (\text{mod. } b^\beta)$$
$$\sqrt{-1}\ (\text{mod. } c^\gamma)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Ora una qualunque di queste ammette due soluzioni [11]. Segue che il numero dei valori $\pm N$ incongrui (mod. I) è 2^t, se s'indica con t il numero dei fattori $a, b, c, \ldots$ mentre il numero dei valori $\pm N$ con $N < \frac{1}{2} I$ sarà 2^{t-1}.

Abbiamo quindi:

Il numero delle decomposizioni proprie di I è 2^{t-1}.

Andiamo ora a calcolare il numero delle decomposizioni in due quadrati le cui basi x, y non sono numeri primi fra di loro.

Questo numero sarà eguale alla somma delle decomposizioni proprie di tutti i numeri che si ottengono dividendo I per tutti i suoi possibili fattori quadrati. Ora si osservi che se indichiamo con t' ($t' \leq t$) il numero dei fattori primi del quoto di I per un suo fattore quadrato, il numero delle decomposizioni di I relative a tale quoto sarà $2^{t'-1}$.

Siano α, β, $\gamma, \ldots$ tutti dispari.

Allora è impossibile che il quoto di I per un suo fattore quadrato risulti con un numero di fattori primi minore di t.

Tenendo conto quindi che i divisori quadrati di I sono in numero di

$$\frac{(\alpha+1)\,(\beta+1)\,(\gamma+1)\ldots}{2^t}$$

si trova che il numero delle decomposizioni di I in due quadrati è in questo caso

$$\frac{1}{2}\,(\alpha+1)\,(\beta+1)\,(\gamma+1)\ldots$$

---

(11) Loc. cit. (8), n. 104.

Sia α *pari* e β, γ,... *dispari.*

In questo caso i divisori quadrati di I che dànno quoti di t fattori sono in numero di

$$\frac{\alpha(\beta+1)(\gamma+1)\ldots}{2^t}$$

e queste ci dànno

$$\frac{\alpha(\beta+1)(\gamma+1)\ldots}{2}$$

decomposizioni, mentre gli altri divisori quadrati di I dànno quoti con $t-1$ fattori, e sono in numero di

$$\frac{(\beta+1)(\gamma+1)\ldots}{2^{t-1}}$$

e dànno perciò

$$\frac{1}{2}(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$$

decomposizioni.

Il numero totale sarà ancora

$$\frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$$

Analogamente si studiano gli altri casi in cui degli esponenti α, β, γ,... alcuni sono pari ed altri dispari.

Consideriamo *infine il caso che* α, β, γ,... *siano tutti pari.*

In questo caso si trova che il numero delle decomposizioni è dato da

$$\frac{1}{2}\alpha\beta\gamma\delta\cdots+\frac{1}{2}\left\{\beta\gamma\delta\cdots+\alpha\gamma\delta\cdots+\cdots\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\gamma\delta\cdots+\alpha\delta\cdots+\cdots\right\}+\cdots\cdots+1=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1)\cdots+1\right].$$

Il teorema di Gauss resta pertanto dimostrato.

16. Si osservi ora che da una *decomposizione* di M in due quadrati si possono ottenere 8 *rappresentazioni* di M nella forma (27) (cambiando il

segno ad una delle basi o scambiando le basi fra di loro). Ma queste 8 rappresentazioni si riducono a 4 distinte quando è $x = y$ ovvero quando è una delle due basi zero.

Ora perchè M ammetta una rappresentazione nella forma (27) con $x = y$ è necessario e sufficiente che sia M il doppio di un quadrato, cioè deve essere μ dispari e α, β, γ,... pari.

Invece perchè M ammetta una decomposizione dell'altro tipo è necessario e sufficiente che sia M un quadrato, cioè che siano μ, α, β, γ,... pari.

Segue che il numero delle rappresentazioni di M se almeno uno dei numeri α, β, γ,... è dispari è

$$4(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\ldots$$

Se invece tutti i numeri α, β, γ,... sono pari è

$$4[\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\cdots + 1] - 4 = 4(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\ldots$$

Possiamo dunque concludere col teorema:

Il numero delle rappresentazioni del numero M nella forma (27) *è dato da:*

$$4(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\ldots$$

16. Andiamo ora a calcolare il numero delle rappresentazioni di un numero M nella forma:

$$x^2 + xy + y^2. \tag{28}$$

Cominciamo coll'osservare che se è:

$$M = x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2$$

M sarà dispari se almeno una delle x_1 e y_1 è dispari.

M sarà pari se x_1 y_1 sono entrambi pari. Ma in questo caso M è addirittura divisibile per 4.

Ora se M è divisibile per 4 anche $\frac{M}{4}$ sarà rappresentabile nella forma (28); infatti sarà

$$\frac{M}{4} = \left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{x_1}{2} \cdot \frac{y_1}{2} + \left(\frac{y_1}{2}\right)^2.$$

Segue che se $\frac{M}{4}$ è ancora pari esso sarà divisibile per 4 e sarà ancora rappresentabile nella forma (28).

Proseguendo s'arriva alla conclusione:

Un numero M pari contenente il fattore 2^μ con μ dispari non è rappresentabile nella forma (28). E inoltre:

Se M è rappresentabile l'eventuale potenza 2^μ (μ pari) che può contenere non influisce nel numero delle rappresentazioni.

17. Intorno alla potenza del numero 3 che M può contenere si osservi che essa non influisce nemmeno nel numero delle rappresentazioni di M nella forma (28) ([12]).

Si osservi infine che se M è rappresentabile nella forma (28) il numero $2\,M$ lo è nella forma

$$2\,x^2 + 2\,x\,y + 2\,x\,y^2 \tag{29}$$

e viceversa. Noi calcoleremo pertanto il numero delle rappresentazioni di $2\,M$ nella forma (29).

18. Il determinante $-\Delta$ della (29) è -3. Osservando allora che -3 è residuo quadratico dei numeri primi della forma $3\,n+1$, e non residuo quadratico dei numeri primi della forma $3\,n+2$ (eccettuato il 2) ([13]) e tenendo conto del n.° 16 si ricava:

Perchè un numero M sia rappresentabile nella forma (28) *è necessario e sufficiente che i suoi fattori primi della forma* $3\,n+2$ (*il* 2 *compreso*) *compariscano con esponenti* pari ([14]).

19. Si osservi ancora che essendo 2 il massimo comun divisore m dei coefficienti della forma (29) sarà

$$\frac{4\,\Delta}{m^2} = 3$$

e perciò questa volta in corrispondenza ad un valore $\pm N$ di

$$\sqrt{-3} \text{ (mod. } 2\,M)$$

([12]) G. Scorza, *Sulle varietà abeliane contenenti congruenze abeliane* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XLII, anno 1918-19); nota ([31]) a piè di pagina.

([13]) Loc. cit. ([8]), n.° 120.

([14]) Loc. cit. ([12]).

avremo 12 rappresentazioni di $2M$ nella forma (29) e se una di esse è data da $x = \alpha$, $y = \gamma$ l'insieme delle 12 rappresentazioni sarà dato dalle coppie:

$$
\begin{array}{ll}
(\alpha\ \gamma) & (-\alpha,\ -\gamma) \\
(\alpha+\gamma,\ -\alpha) & (-\alpha-\gamma,\ \alpha) \\
(\gamma,\ -\alpha-\gamma) & (-\gamma,\ \alpha+\gamma) \\
(\gamma,\ \alpha) & (-\gamma,\ -\alpha) \\
(-\alpha,\ \alpha+\gamma) & (\alpha,\ -(\alpha+\gamma)) \\
(-\alpha-\gamma,\ \gamma) & (\alpha+\gamma,\ -\gamma).
\end{array}
$$

Però se è $\alpha = \gamma$ o se è α o γ uguale a zero, le 12 rappresentazioni si riducono a 6 distinte. Nel primo caso il numero deve essere il triplo di un quadrato, nel secondo caso un quadrato perfetto.

20. Ciò premesso si osservi che, se M è rappresentabile nella forma (28), posto

$$2M = 2^{\mu+1} \cdot 3^{\nu} S^2 a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$$

con μ pari o nullo, e dove con S^2 s'indica il prodotto delle potenze dei fattori primi di M della forma $3n+2$ e con a, b, c,... i fattori primi di M della forma $3n+1$, il numero dei valori $\pm N$ di $\sqrt{-3}$ (mod. 2 M) è dato da:

$$\frac{1}{2}\left[(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots+\varepsilon\right].$$

Questo risultato si ottiene ripetendo i ragionamenti fatti nel caso della forma $x^2 + y^2$.

Osservando poi che se $2M$ è il triplo d'un quadrato (un quadrato perfetto non può essere perchè $\mu+1$ è dispari) sono α, β, γ,... tutti pari, si ha il teorema:

Il numero delle rappresentazioni di M nella forma (28) *è dato da:*

$$6(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$$

Si noti che (*se si bada soltanto ai quadrati*) *il numero delle decomposizioni di M nella forma* (28) *è dato da*:

$$\frac{3}{2}\left[(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots+\varepsilon\right].$$

21. Vogliamo calcolare ora il numero delle rappresentazioni di un numero M nella forma

$$(x^2+y^2)(u^2+uv+v^2). \tag{30}$$

Osservando in primo luogo che:

un numero	della forma	$12n+1$	è della	forma	$3n+1$	e della	forma	$4n+1$
»	»	$12n+5$	»	»	$3n+2$	»	»	$4n+1$
»	»	$12n+7$	»	»	$3n+1$	»	»	$4n+3$
»	»	$12n+11$	»	»	$3n+2$	»	»	$4n+3$,

segue immediatamente:

Perchè un numero M sia rappresentabile nella forma (30) *è necessario e sufficiente che ogni suo eventuale fattore primo della forma* $12n+11$ *comparisca con esponente pari.*

22. Ciò premesso poniamo

$$M = 2^\mu\, 3^\nu\, a_1^{\alpha_1} \dots a_t^{\alpha_t}\, b_1^{\beta_1} \dots b_{r'}^{\beta_{r'}}\, b_{r'+1}^{\beta_{r'+1}} \dots b_r^{\beta_r}\, c_1^{\gamma_1} \dots c_{s'}^{\gamma_{s'}}\, c_{s'+1}^{\gamma_{s'+1}} \dots c_s^{\gamma_s} \cdot S$$

dove con le a_i, b_i, c_i s'indicano i fattori primi di M della forma $12n+1$, $12n+5$, $12n+7$ rispettivamente e con S il prodotto delle potenze dei fattori primi della forma $12n+11$, ed inoltre siano

$$\beta_1, \dots, \beta_{r'},\ \gamma_1, \dots, \gamma_{s'} \text{ interi pari,}$$
$$\beta_{r'+1}, \dots, \beta_r,\ \beta_{s'+1}, \dots, \gamma_s \text{ interi dispari.}$$

Sia M rappresentabile, sarà S un quadrato perfetto.

Scomponiamo il numero

$$M' = \frac{M}{2^\mu S}$$

in due fattori nel seguente modo:

$$M' = (3^{\nu'}\, a_1^{\alpha_1-\alpha'_1} \dots a_t^{\alpha_t-\alpha'_t}\, b_1^{\beta_1-\beta'_1} \dots b_r^{\beta_r-\beta'_r}\, c_1^{\gamma'_1} \dots c_s^{\gamma'_s}) \times$$
$$\times\, (3^{\nu-\nu'}\, a_1^{\alpha'_1} \dots a_t^{\alpha'_t}\, b_1^{\beta'_1} \dots b_r^{\beta'_r}\, c_1^{\gamma_1-\gamma'_1} \dots c_s^{\gamma_s-\gamma'_s})$$

dove con ν', β'_i, γ'_i s'indicano degl'interi *pari* e tali che sia

$$\nu' \leq \nu, \quad \beta'_i \leq \beta_i, \quad \gamma'_i \leq \gamma_i$$

e con α'_i degl'interi qualunque in modo che sia però

$$\alpha'_i \leq \alpha_i .$$

In corrispondenza ad una tale decomposizione in due fattori avremo

$$4(\nu'+1)(\alpha_1-\alpha'_1+1)\ldots(\alpha_t-\alpha'_t+1)(\beta_1-\beta'_1+1)\ldots(\beta_r-\beta'_r+1)\times$$
$$\times 6(\alpha'_1+1)\ldots(\alpha'_t+1)(\gamma_1-\gamma'_1+1)\ldots(\gamma_s-\gamma'_s+1)$$

rappresentazioni di M' nella forma (30).

Segue che il numero delle rappresentazioni di M' sarà dato da:

$$24\Sigma\Big\{(\nu'+1)(\alpha_1-\alpha'_1+1)(\alpha'_1+1)\ldots(\alpha_t-\alpha'_t+1)(\alpha'_t+1)$$
$$(\beta_1-\beta'_1+1)\ldots(\beta_r-\beta'_r+1)\cdot(\gamma_1-\gamma'_1+1)\ldots(\gamma_s-\gamma'_s+1)\Big\}$$

il sommatorio essendo esteso a tutte le combinazioni $(\nu', \alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i)$.

Ora si osservi che dovendo ν' essere pari il fattore $\nu'+1$ percorrerà la successione

$$1, 3, 5, \ldots, \nu+\varepsilon$$

essendo

$$\varepsilon=\begin{cases} 1 & \textit{se} \quad \nu \quad \textit{è pari o nullo} \\ 0 & \textit{se} \quad \nu \quad \textit{è dispari.}\end{cases}$$

La somma dei termini percorsi da $\nu'+1$ *è*:

$$\frac{(\nu+\varepsilon+1)^2}{4} .$$

Il fattore $(\alpha_i-\alpha'_i+1)(\alpha'_i+1)$ percorre la successione:

$$1\cdot(\alpha_i+1), \quad 2\alpha_i, \quad 3(\alpha_i-1), \ldots, \quad \alpha_i\cdot 2, \quad (\alpha_i+1)1.$$

Indicando con $\sigma(\alpha_i)$ *la somma dei termini di questa successione si ha*:

$$\sigma(\alpha_i)=\sum_j^{1,\ldots,\alpha_i+1} j(\alpha_i+2-j)$$

ovvero

$$\sigma(\alpha_i)=(\alpha_i+2)\sum_j^{1,\ldots,\alpha_i+1} j-\sum_j^{1,\ldots,\alpha_i+1} j^2$$

ossia

$$\sigma(\alpha_i) = (\alpha_i + 2)\frac{(\alpha_i + 2)(\alpha_i + 1)}{2} - \frac{\alpha_i + 1}{3}\left[(\alpha_i + 1)^2 + \frac{3(\alpha_i + 1)}{2} + \frac{1}{2}\right]$$

ed infine

$$\sigma(\alpha_i) = \frac{(\alpha_i + 1)(\alpha_i + 2)(\alpha_i + 3)}{6}.$$

Il fattore $(\beta_i - \beta'_i + 1)$ dovendo essere β'_i pari percorrerà la successione

$$1,\ 3,\ 5, \ldots, \beta_i + 1 \qquad \text{se} \qquad i = 1,\ 2, \ldots, r'$$

$$2,\ 4,\ 6, \ldots, \beta_i + 1 \qquad \text{se} \qquad i = r' + 1, \ldots, r.$$

Nel primo caso la somma dei termini della successione è

$$\frac{(\beta_i + 2)^2}{4}.$$

Nel secondo caso detta somma è invece:

$$\frac{(\beta_i + 3)(\beta_i + 2)}{4}.$$

Analoga osservazione facciasi per il fattore $(\gamma_i - \gamma'_i + 1)$.
Posto allora:

$$A = \frac{1}{4}(\nu + \varepsilon + 1)^2 \sigma(\alpha_1) \ldots \sigma(\alpha_t)$$

$$B = \frac{1}{4^r}(\beta_1 + 2)^2 \ldots (\beta_{r'} + 2)^2 \cdot (\beta_{r'+1} + 3)(\beta_{r'+1} + 1) \ldots (\beta_r + 3)(\beta_r + 1)$$

$$C = \frac{1}{4^s}(\gamma_1 + 2)^2 \ldots (\gamma_{s'} + 2)^2 (\gamma_{s'+1} + 3)(\gamma_{s'+1} + 1) \ldots (\gamma_s + 3)(\gamma_s + 1)$$

avremo che:

Il numero delle rappresentazioni di M' nella forma (30) *è dato dal prodotto $24\,A\,B\,C$.*

23. Poniamo ora

$$S = d_1^{\delta_1} \ldots d_q^{\delta_q}$$

dovendo essere S un quadrato saranno $\delta_1, \ldots, \delta_q$ pari.

Il fattore S si potrà scomporre in 2 quadrati evidentemente in

$$(\delta'_1 + 1) \dots (\delta'_q + 1)$$

modi diversi, dove

$$\delta'_i = \frac{\delta_i}{2}.$$

Il fattore 2^μ si può scomporre in $\frac{\mu + \rho}{2}$ modi in due fattori di cui uno sia un quadrato dove è

$$\rho = \begin{cases} 2 & \text{se } \mu \text{ è pari o nullo} \\ 1 & \text{se } \mu \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Segue immediatamente che:

Il numero delle rappresentazioni del numero M nella forma (30) *è dato da*

$$12 (\mu + \rho) (\delta'_1 + 1) \dots (\delta'_q + 1) A B C.$$

Catania, 2 Settembre 1920.

I gobbo-circolanti e i divisori di zero di un particolare sistema di numeri complessi ad *n* unità.

(*Di* VINCENZO AMATO, *a Catania.*)

La ricerca dei divisori di zero in un sistema di numeri complessi ad n unità formanti, insieme con le opposte, un gruppo ciclico, mi ha condotto allo studio dei gobbo-circolanti e di alcuni determinanti più generali di quello di VANDERMONDE (¹). La prima parte di questo lavoro contiene appunto tale studio che mi sembra non privo d'interesse. I risultati vengono applicati nella seconda parte alla determinazione e alla classificazione dei divisori di zero relativi all'indicato sistema di numeri complessi.

§ I.

GOBBO-CIRCOLANTI E DETERMINANTI DI VANDERMONDE GENERALIZZATI.

1. Consideriamo il gobbo-circolante (ad elementi reali)

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_2 & -a_3 & \dots & a_0 & a_1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}.$$

(¹) Alcuni teoremi interessanti su questi determinanti si trovano nella Memoria di G. TORELLI: *Sui determinanti circolanti* (Rendic. Acc. Napoli, 1882); quanto ai determinanti più generali di quello di VANDERMONDE rimandiamo al lavoro di E. PASCAL: *I determinanti* (Milano, Hoepli, 1897).

Se si moltiplica per orizzontali D per il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

e si pone:

$$\varphi_j = a_0 + a_1 \alpha_j + a_2 \alpha_j^2 + \cdots + a_{n-1} \alpha_j^{n-1} \qquad (j = 1, 2, \dots, n), \tag{1}$$

essendo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ le radici n^{me} di -1, si ha:

$$D \Delta = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n \Delta,$$

cioè:

$$D = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n . \tag{2}$$

Il determinante D è stato così decomposto in n fattori razionali nei suoi elementi.

2. Se D è nullo, cerchiamo la sua caratteristica nell'ipotesi che siano nulli soltanto $k \ (\geqq 1)$ fattori del secondo membro della (2), ad esempio i primi k, cioè che si abbia:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \dots, \quad \varphi_k = 0. \tag{3}$$

Poichè D è ad elementi reali, nella classe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ delle radici figurerà la coniugata di ciascuna di esse.

Se $V(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ è il determinante di Vandermonde di ordine k formato con le potenze delle k radici $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, indicando con $\Delta_r^{(k+\rho)}$, essendo

$$\rho = 0, 1, 2, \dots, n-k-1,$$

il risultato della divisione per V del determinante di ordine k ottenuto da V sostituendo agli elementi della riga r^{ma} le potenze $(k+\rho)^{me}$ delle radici suddette, si ha dalle (3):

$$\left.\begin{aligned} -a_0 &= a_k \Delta_1^{(k)} + a_{k+1} \Delta_1^{(k+1)} + \cdots + a_{n-1} \Delta_1^{(n-1)} \\ -a_1 &= a_k \Delta_2^{(k)} + a_{k+1} \Delta_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n-1} \Delta_2^{(n-1)} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ -a_{k-1} &= a_k \Delta_k^{(k)} + a_{k+1} \Delta_k^{(k+1)} + \cdots + a_{n-1} \Delta_k^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Osserviamo intanto che se si moltiplicano ambo i membri delle (3) rispettivamente per $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ e si tien presente la (1), si hanno le seguenti equazioni:

$$\alpha_1 \varphi_1 = -a_{n-1} + a_0 \alpha_1 + a_1 \alpha_1^2 + \cdots + a_{n-2} \alpha_1^{n-1} = 0$$
$$\alpha_2 \varphi_2 = -a_{n-1} + a_0 \alpha_2 + a_1 \alpha_2^2 + \cdots + a_{n-2} \alpha_2^{n-1} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_k \varphi_k = -a_{n-1} + a_0 \alpha_k + a_1 \alpha_k^2 + \cdots + a_{n-2} \alpha_k^{n-1} = 0,$$

cioè nelle (3) si possono sostituire agli elementi della 1ª orizzontale di D che vi figurano, gli elementi corrispondenti della 2ª orizzontale. Se le (3) si moltiplicano rispettivamente per $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_k^2$ si vede che in esse gli elementi $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ si possono sostituire con quelli corrispondenti della 3ª orizzontale di D. Si può così continuare fino alle moltiplicazioni per $\alpha_1^{n-1}, \alpha_2^{n-1}, \ldots, \alpha_k^{n-1}$.

Segue subito che nella prima delle (4) si possono sostituire ai numeri a gli elementi corrispondenti della 2ª, della 3ª, ..., della n^{ma} orizzontale di D, e lo stesso si può fare per le altre equazioni (4). Questo fatto ci dice intanto che la caratteristica di D non può essere maggiore di $n - k$ perchè le prime k colonne di D sono combinazioni lineari delle rimanenti.

Siano $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n$ le radici che restano escludendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ dalle radici n^{me} di -1, e si ponga:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_{(k+\sigma)}^{(k+\varrho)} = \alpha_{k+\sigma}^{k+\varrho} - \left(\Delta_1^{(k+\varrho)} + \alpha_{k+\sigma} \Delta_2^{(k+\varrho)} + \cdots + \alpha_{k+\sigma}^{k-1} \Delta_k^{(k+\varrho)}\right) \\ \quad \begin{pmatrix} \rho = 0, 1, 2, \ldots, n-k-1 \\ \sigma = 1, 2, 3, \ldots, n-k \end{pmatrix}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Tenendo presenti la (1) e le (4) si ha facilmente:

$$\varphi_{k+\sigma} = a_k \psi_{k+\sigma}^{(k)} + a_{k+1} \psi_{k+\sigma}^{(k+1)} + \cdots + a_{n-1} \psi_{k+\sigma}^{(n-1)}. \tag{6}$$

Se agli elementi a delle (4), pensati come appartenenti alla prima orizzontale di D, si sostituiscono una prima volta quelli corrispondenti della 2ª orizzontale, poi gli altri della 3ª, e così via fino a quelli della $(n-k)^{ma}$, si ottengono le relazioni seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{k+\sigma} \varphi_{k+\sigma} = a_{k-1} \psi_{k+\sigma}^{(k)} + a_k \psi_{k+\sigma}^{(k+1)} + \cdots + a_{n-2} \psi_{k+\sigma}^{(n-1)} \\ \alpha_{k+\sigma}^2 \varphi_{k+\sigma} = a_{k-2} \psi_{k+\sigma}^{(k)} + a_{k-1} \psi_{k+\sigma}^{(k+1)} + \cdots + a_{n-3} \psi_{k+\sigma}^{(n-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{k+\sigma}^{n-k-1} \varphi_{k+\sigma} = a_{2k-n+1} \psi_{k+\sigma}^{(k)} + a_{2k-n+2} \psi_{k+\sigma}^{(k+1)} + \cdots + a_k \psi_{k+\sigma}^{(n-1)} \end{array}\right\} \tag{7}$$

essendo $\sigma = 1, 2, \ldots, n-k$, e avendo supposto:

$$a_{-\nu} = -a_{n\ \nu} \qquad (\nu > 0).$$

Consideriamo il determinante:

$$\Phi = \begin{vmatrix} \psi_{k+1}^{(k)} & \psi_{k+1}^{(k+1)} & \ldots & \psi_{k+1}^{(n-1)} \\ \psi_{k+2}^{(k)} & \psi_{k+2}^{(k+1)} & \ldots & \psi_{k+2}^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{n}^{(k)} & \psi_{n}^{(k+1)} & \ldots & \psi_{n}^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Dimostriamo, perchè ci sarà utile in seguito, che si ha:

$$\Phi -= 0.$$

Infatti, se Φ fosse nullo, le equazioni ottenute eguagliando a zero i secondi membri della (6) per $\sigma = 1, 2, \ldots, n-k$ sarebbero soddisfatte per valori non tutti nulli di $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}$. Ciò è assurdo perchè, in tal caso, le equazioni

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n = 0$$

sarebbero soddisfatte per valori non tutti nulli di $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Dalle (6) e (7) si trae che il prodotto per righe del minore

$$D_{n-k} = \begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} & \ldots & a_{n-1} \\ a_{k-1} & a_k & \ldots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2k-n+1} & a_{2k-n+2} & \ldots & a_k \end{vmatrix}$$

per Φ dà per risultato:

$$D_{n-k}\,\Phi = V(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n)\,\varphi_{k+1}\,\varphi_{k+2} \ldots \varphi_n, \tag{9}$$

cioè D_{n-k} non è nullo perchè ciascuno dei fattori del secondo membro è diverso da zero.

Si ha perciò il seguente teorema:

·1. *Se nel secondo membro della* (2) *sono nulli soltanto k fattori della decomposizione di D, la caratteristica di questo determinante è $n-k$ e viceversa.*

Si può anche dire:

·2. *Condizione necessaria e sufficiente perchè nel secondo membro della* (2) *siano nulli soltanto k fattori della decomposizione di D è che, posto:*

$$D_{n-\lambda}=\begin{vmatrix} a_\lambda & a_{\lambda+1} & \dots & a_{n-1} \\ a_{\lambda-1} & a_\lambda & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2\lambda-n+1} & a_{2\lambda-n+2} & \dots & a_\lambda \end{vmatrix} \qquad (a_{-\nu}=-a_{n-\nu} \quad \text{per} \quad \nu>0),$$

si abbia:

$$D=D_{n-1}=\dots=D_{n-k+1}=0, \quad D_{n-k}\neq 0.$$

La condizione risulta infatti, da quanto precede, ovviamente necessaria. Quanto alla sufficienza, basta osservare che la caratteristica di D non può essere maggiore di $n-k$ perchè per il teorema ·1 i fattori φ diversi da zero sarebbero allora più di $n-k$ e dalla corrispondente relazione (9) risulterebbe l'impossibilità dell'annullamento di tutti i minori $D_{n-1}, D_{n-2}, \dots, D_{n-k+1}$ di D.

3. Dal teorema ·1 risulta la seguente proprietà dei determinanti gobbo-circolanti:

Se un gobbo-circolante di ordine pari D (ad elementi reali) è nullo, la caratteristica di D è pari.

Infatti dalla (2) si ha che debbono essere nulli k fattori (complessi a due a due coniugati), e quindi, dovendo essere k un numero pari, la caratteristica di D è pari.

4. *Se il gobbo circolante D ha la caratteristica $n-k$, in ogni sua matrice di $n-k$ colonne (righe) tutti i minori di ordine $n-k$ a righe (colonne) consecutive in D hanno eguale valore assoluto. Se n è pari, i detti minori sono tutti eguali.*

Supponiamo dapprima che le $n-k$ colonne di D siano le ultime e nella matrice da esse costituita consideriamo il minore $D_{n-k}^{(k-\lambda)}$ di ordine $n-k$, a righe consecutive in D, avente per primo elemento principale $a_{k-\lambda}$ (con λ non minore di 0 e non maggiore di k). Si ha:

$$D_{n-k}^{(k-\lambda)}=\begin{vmatrix} a_{k-\lambda} & a_{k-\lambda+1} & \dots & a_{n-\lambda-1} \\ a_{k-\lambda-1} & a_{k-\lambda} & \dots & a_{n-\lambda-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2k-\lambda-n+1} & a_{2k-\lambda-n+2} & \dots & a_{k-\lambda} \end{vmatrix},$$

con la solita convenzione:

$$a_{-\nu} = -a_{n-\nu} \qquad (\nu > 0).$$

Se si moltiplica $D_{n-k}^{(k-\lambda)}$ per il determinante Φ dato dalla (8) e si tiene presente la relazione:

$$a_{k-p}\,\psi_{k+\sigma}^{(k)} + a_{k-p+1}\,\psi_{k+\sigma}^{(k+1)} + \cdot \cdot + a_{n-p-1}\,\psi_{k+\sigma}^{(n-1)} = \alpha_{k+\sigma}^{p}\,\varphi_{k+\sigma}$$
$$(p = \lambda,\ \lambda+1, \ldots,\ \lambda+n-k-1),$$

si ha in virtù della (9):

$$D_{n-k}^{(k-\lambda)}\,\Phi = (\alpha_{k+1}\,\alpha_{k+2}\ldots\alpha_n)^{\lambda}\,V(\alpha_{k+1},\,\alpha_{k+2},\ldots,\,\alpha_n)\,\varphi_{k+1}\,\varphi_{k+2}\ldots\varphi_n$$
$$= (-1)^{(n-k)\lambda}\,D_{n-k}\,\Phi,$$

e poichè Φ, come sappiamo, è diverso da zero, si ottiene:

$$D_{n-k}^{(k-\lambda)} = (-1)^{(n-k)\lambda}\,D_{n-k}.$$

Analogamente sarà:

$$D_{n-k}^{(k-\lambda')} = (-1)^{(n-k)\lambda'}\,D_{n-k},$$

donde si ricava infine:

$$D_{n-k}^{(k-\lambda)} = (-1)^{(n-k)(\lambda-\lambda')}\,D_{n-k}^{(k-\lambda')}.$$

Il teorema è così dimostrato per due minori qualunque di ordine $n-k$ a righe consecutive in D appartenenti alla matrice costituita delle ultime $n-k$ colonne di questo determinante.

Consideriamo ora una matrice di $n-k$ colonne di D di caratteristica $n-k$. Se $P^{(\lambda)}$ e $P^{(\lambda')}$ sono i due minori di ordine $n-k$ presi in questa matrice appartenenti rispettivamente alle stesse righe di $D_{n-k}^{(k-\lambda)}$ e $D_{n-k}^{(k-\lambda')}$, si ha [2]:

$$P^{(\lambda)} = \frac{D_{n-k}^{(k-\lambda)}}{D_{n-k}^{(k-\lambda')}}\,P^{(\lambda')} = (-1)^{(n-k)(\lambda-\lambda')}\,P^{(\lambda')},$$

cioè tutti i minori di ordine $n-k$ della matrice considerata, a righe consecutive in D, hanno eguale valore assoluto e se n è pari (nel qual caso è pure pari $n-k$), hanno anche lo stesso segno.

---

(2) Cfr. Cipolla, ***Analisi algebrica ed introduzione al calcolo infinitesimale,*** Palermo, Capozzi, 1914, pag. 100, t. 5.

Poichè D è simmetrico rispetto alla diagonale secondaria, la stessa proprietà vale pei minori di ordine $n-k$ contenuti in una matrice di $n-k$ righe di D, quando le loro colonne siano consecutive in D.

5. Il teorema sopra dimostrato si può estendere, come vedremo, ad una classe più generale di minori di ordine $n-k$ appartenenti ad una stessa matrice di $n-k$ colonne (righe) di D.

Poniamo:

$$r_{i+1}-r_1=s_{i+1}-s_1=d_i \begin{pmatrix} i=1,\ 2,\dots,\ n-k-1 \\ 0<r_1<k+2,\ 0<s_1<k+2 \end{pmatrix}$$

e denotiamo con ρ e σ rispettivamente le combinazioni

$$r_1\,,\ r_2\,,\dots,\ r_{n-k}$$
$$s_1\,,\ s_2\,,\dots,\ s_{n-k}$$

dei numeri $1,\ 2,\dots,\ n$ e con $D_{\rho,\nu}$, $D_{\sigma,\nu}$ i minori di ordine $n-k$ appartenenti alle ultime $n-k$ colonne di D, determinati rispettivamente dalle righe ρ e σ di questo determinante.

Posto:

$$W=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{k+1}^{d_1} & \alpha_{k+2}^{d_1} & \dots & \alpha_n^{d_1} \\ \alpha_{k+1}^{d_2} & \alpha_{k+2}^{d_2} & \dots & \alpha_n^{d_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{k+1}^{d_{n-k-1}} & \alpha_{k+2}^{d_{n-k-1}} & & \alpha_n^{d_{n-k-1}} \end{vmatrix}$$

si ha:

$$D_{\rho,\nu}\,\Phi=(\alpha_{k+1}\,\alpha_{k+2}\dots\alpha_n)^{r_1-1}\,\varphi_{k+1}\dots\varphi_n W=(-1)^{(n-k)(r_1-1)}\,\varphi_{k+1}\dots\varphi_n W,$$
$$D_{\sigma,\nu}\,\Phi=(-1)^{(n-k)(s_1-1)}\,\varphi_{k+1}\dots\varphi_n W.$$

Se W è diverso da zero e si considera la matrice di D costituita dalle colonne date dalla combinazione $\tau=(t_1,\ t_2,\dots,\ t_{n-k})$, si ricava:

$$D_{\rho,\tau}=\frac{D_{\rho,\nu}}{D_{\sigma,\nu}}\,D_{\sigma,\tau}=(-1)^{(n-k)(r_1-s_1)}\,D_{\sigma,\tau}.$$

Se è poi $W=0$, siccome Φ non è nullo, sono nulli i minori $D_{\rho,\nu}$ e $D_{\sigma,\nu}$ e quindi gli altri ad essi corrispondenti della matrice di D formata con le colonne date dalla combinazione τ.

Abbiamo così dimostrato che:

In ogni matrice di $n-k$ colonne (righe) di un gobbo-circolante D di caratteristica $n-k$ due minori di ordine $n-k$ aventi i numeri d'ordine ρ e σ delle righe (colonne) in D tali che sia:

$$r_{i+1}-r_1=s_{i+1}-s_1$$

hanno eguale valore assoluto. Se n è pari, i detti minori sono eguali.

Dalla relazione

$$D_{\rho,\tau}=(-1)^{(n-k)(r_1-s_1)}\,D_{\sigma,\tau}$$

si deducono le altre:

$$D_{\rho,\sigma}=(-1)^{(n-k)(r_1-s_1)}\,D_{\sigma,\sigma}\,,\quad D_{\sigma,\rho}=(-1)^{(n-k)(r_1-s_1)},\quad D_{\rho,\rho}$$

e poichè la matrice di $D_{\rho,\rho}$ è identica a quella di $D_{\sigma,\sigma}$ (se la combinazione ρ è equidifferente alla combinazione σ), si ha:

$$D_{\rho,\sigma}=D_{\sigma\,\rho}\,,$$

cioè:

Se un gobbo-circolante D ha la caratteristica $n-k$, un minore di ordine $n-k$ le cui righe distino fra loro in D come le colonne è eguale al suo coniugato.

Se in corrispondenza ad una combinazione

$$\sigma=(s_1\,,\ s_2\,,\ldots,\ s_{n-k})$$

consideriamo la combinazione

$$\sigma'=(n+1-s_{n-k}\,,\quad n+1-s_{n-k-1}\,,\ldots,\ n+1-s_1),$$

allora $D_{\sigma,\sigma'}$ è un minore principale relativo alla diagonale secondaria e $D_{\rho,\sigma}$, $D_{\sigma',\rho'}$ sono due minori coniugati rispetto alla stessa diagonale.

Dalla solita relazione

$$D_{\rho,\tau}=(-1)^{(n-k)(r_1-s_1)}\,D_{\sigma,\tau}$$

si hanno le due altre:

$$D_{\rho,\rho'}=(-1)^{(n-k)(r_1-s_1)}\,D_{\sigma,\rho'}\,,\quad D_{\rho,\sigma'}=(-1)^{(n-k)(r_1-s_1)}\,D_{\sigma,\sigma'}\,,$$

avendo supposto che ρ e σ siano combinazioni equidifferenti. E poichè $D_{\rho,\sigma}=D_{\sigma,\rho'}$ perchè il gobbo-circolante è simmetrico rispetto alla diagonale secondaria, si ha:

$$D_{\rho,\rho'} = D_{\sigma,\sigma'},$$

e quindi:

In un gobbo-circolante di caratteristica $n-k$ due minori principali di ordine $n-k$, relativi alla diagonale secondaria, aventi le righe (colonne) equidifferenti in D, sono eguali.

6. Passiamo al calcolo delle espressioni $\Delta_r^{(k+\varrho)}$ che intervengono nella (4).

Sia

$$x^k + A_{k-1}\,x^{k-1} + \cdots + A_1\,x + A_0 = 0 \tag{10}$$

l'equazione che ammette per radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Applicando una formola del GARBIERI ([3]) si ha:

$$\Delta_r^{(k+\varrho)} = (-1)^{\rho+1} \begin{vmatrix} A_{r-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ A_{r-2} & A_{k-1} & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{r-\rho-1} & A_{k-\rho} & A_{k-\rho+1} & \ldots & A_{k-1} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

e poichè la (10), dovendo essere soddisfatta da radici n^{me} di -1 complesse coniugate, cioè da radici a due a due inverse (con la presenza di -1 se k è dispari), è reciproca coi coefficienti estremi ed equidistanti dagli estremi eguali, la (11) si può mettere sotto la seguente forma:

$$\Delta_r^{(k+\varrho)} = (-1)^{\rho+1} \begin{vmatrix} A_{r-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ A_{r-2} & A_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{r-\rho-1} & A_\rho & A_{\rho-1} & \ldots & A_1 \end{vmatrix}, \tag{12}$$

supponendo che, per ν positivo, sia:

$$A_{-\nu} = A_{k-\nu} = 0.$$

Dalla (12) si ha:

$$\Delta_r^{(k+\varrho)} = -A_1\,\Delta_r^{(k+\varrho-1)} - A_2\,\Delta_\nu^{(k+\varrho-2)} - \ldots - A_{\rho-1}\,\Delta_r^{(k)} - A_{\nu-\rho-1},$$

([3]) GARBIERI, *Nuovo teorema algebrico e sua speciale applicazione ad una maniera di studiare le curve razionali,* Giorn. di Batt., Vol. XVI (1878).

donde si ricava il noto risultato [1]:

$$\Delta_r^{(k)} = -A_{r-1}.$$

Un'espressione più semplice per $\Delta_r^{(k+\varrho)}$ si ottiene considerando i coefficienti $B_1, B_2, \dots$ del quoziente della divisione di x^n+1 per $x^k + A_{k-1} \cdot x^{k-1} + \cdots + A_1 x + 1$, cioè considerando i coefficienti dell'equazione:

$$x^{n-k} + B_{n-k-1} x^{n-k-1} + \cdots + B_1 x + 1 = 0$$

che ammette per radici $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n$, cioè quelle che rimangono dalle n radici n^{me} di -1 escludendo le $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Detta equazione è reciproca coi coefficienti estremi ed equidistanti dagli estremi eguali, legati ai coefficienti della (10) dalle relazioni:

$$B_t + A_1 B_{t-1} + A_2 B_{t-2} + \cdots + A_{t-1} B_1 + A_t = 0, \tag{13}$$

dove t può prendere i valori $1, 2, \dots, n-1$ (con $B_{n-k+\nu} = 0$ per $\nu > 0$), i cui primi membri sono i coefficienti di $x, x^2, \dots, x^{n-1}$ del prodotto

$$(x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \cdots + A_1 x + 1)(x^{n-k} + B_{n-k-1} x^{n-k-1} + \cdots + B_1 x + 1).$$

È evidente che la (13) corrispondente ad un dato valore t coincide con l'altra in cui si eguaglia a zero il coefficiente di x^{n-t}.

Premesso questo, se agli elementi dell'ultima riga del determinante che figura nella (12) si aggiungono gli elementi della 1ª moltiplicati per B_ρ, quelli della 2ª moltiplicati per $B_{\rho-1}, \dots$, quelli della penultima moltiplicati per B_1, si ricava:

$$\Delta_r^{(k+\varrho)} = -A_{r-1} B_\rho - A_{r-2} B_{\rho-1} - \cdots - A_{r-\rho} B_1 - A_{r-\rho-1}, \tag{14}$$

donde si ha in particolare:

$$\Delta_1^{(k+\varrho)} = -B_\rho. \tag{15}$$

Poichè $A_i = A_{k-i}$, se si tiene presente la (13), la (14) si può anche mettere sotto questa forma:

$$\Delta_r^{(k+\varrho)} = -A_{k-r+1} B_\rho - A_{k-r+2} B_{\rho-1} - \cdots - A_{k-r+\rho} B_1 - A_{k-r+\rho-1} =$$
$$= A_{k-r} B_{\rho+1} + A_{k-r-1} B_{\rho+2} + \cdots + B_{k-r+\rho+1}.$$

---

(1) Cfr., p. es., PASCAL, loc. cit., pag. 172.

Si ha perciò ancora:

$$\Delta_r^{(k+\varrho)} = A_r\, B_{\rho+1} + A_{r+1}\, B_{\rho+2} + \cdots + A_{k-1}\, B_{\rho+k-r} + B_{\rho+k-r+1}, \qquad (16)$$

e in particolare:

$$\Delta_k^{(k+\varrho)} = B_{\rho+1}.$$

Intanto la (14) fornisce la seguente formola di ricorrenza:

$$\Delta_r^{(k+\varrho)} = \Delta_{r-1}^{(k+\varrho-1)} - A_{r-1}\, B_\rho$$

con la quale si effettua facilmente il calcolo dei determinanti $\Delta_r^{(k+\varrho)}$.

Basta infatti formare il quadro:

	$1\ (=B_0)$	B_1	$B_2 \ldots$	$B_{\rho-1}$	$B_\varrho \ldots$	B_{n-k-1}	$1\ (=B_{n-k})$
$1\ (=A_0)$	$\Delta_1^{(k)}$	$\Delta_1^{(k+1)}$	$\Delta_1^{(k+2)} \ldots$	$\Delta_1^{(k+\varrho-1)}$	$\Delta_1^{(k+\varrho)} \ldots$	$\Delta_1^{(n-1)}$	
A_1	$\Delta_2^{(k)}$	$\Delta_2^{(k+1)}$	$\Delta_2^{(k+2)} \ldots$	$\Delta_2^{(k+\varrho-1)}$	$\Delta_2^{(k+\varrho)} \ldots$	$\Delta_2^{(n-1)}$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
A_{r-2}	$\Delta_{r-1}^{(k)}$	$\Delta_{r-1}^{(k+1)}$	$\Delta_{r-1}^{(k+2)} \ldots$	$\Delta_{r-1}^{(k+\varrho-1)}$	$\Delta_{r-1}^{(k+\varrho)} \ldots$	$\Delta_{r-1}^{(n-1)}$	
A_{r-1}	$\Delta_r^{(k)}$	$\Delta_r^{(k+1)}$	$\Delta_r^{(k+2)} \ldots$	$\Delta_r^{(k+\varrho-1)}$	$\Delta_r^{(k+\varrho)} \ldots$	$\Delta_r^{(n-1)}$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
A_{k-1}	$\Delta_k^{(k)}$	$\Delta_k^{(k+1)}$	$\Delta_k^{(k+2)} \ldots$	$\Delta_k^{(k+\varrho-1)}$	$\Delta_k^{(k+\varrho)} \ldots$	$\Delta_k^{(n-1)}$.	
$1\ (=A_k)$							

dove gli elementi della 1ª riga (colonna) interna sono gli opposti degli elementi della riga (colonna) esterna, e ogni elemento $\Delta_r^{(k+\varrho)}$ $(r > 1,\ \rho > 0)$ si ottiene sottraendo dall'elemento $\Delta_{r-1}^{(k+\sigma-1)}$ che gli sta sopra diagonalmente il prodotto $A_{r-1}\, B_\rho$ degli elementi esterni sulla stessa riga e colonna di $\Delta_r^{(k+\varrho)}$. Inoltre, in virtù delle relazioni sopra trovate, gli elementi dell'ultima riga (colonna) sono ordinatamente eguali agli elementi della riga (colonna) esterna a partire dal secondo.

7. Dalle (12) e (15) si ha:

$$\begin{vmatrix} A_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ A_2 & A_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_\rho & A_{\rho-1} & A_{\rho-2} & \ldots & A_1 \end{vmatrix} = (-1)^\rho\, B_\rho$$

Insieme con questa formola sussiste evidentemente l'altra:

$$\begin{vmatrix} B_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ B_2 & B_1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_\tau & B_{\tau-1} & B_{\tau-2} & \dots & B_1 \end{vmatrix} = (-1)^\tau A_\tau \qquad (17)$$

Consideriamo ora il determinante $D^{(n-r)}_{n-k-\varrho}$ ottenuto dalla divisione per il determinante di VANDERMONDE $V(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n)$ del determinante di ordine $n-k$ ottenuto da $V(k_{k+1}, \dots, k_n)$ sostituendo agli elementi della riga $(n-k-\rho)^{\text{ma}}$ le potenze $(n-r)^{\text{me}}$ di $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n$.

Applicando la formola di GARBIERI richiamata al n. 6 si ha:

$$D^{(n-r)}_{n-k-\varrho} = (-1)^{k-r+1} \begin{vmatrix} B_{\rho+1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_{\rho+2} & B_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ B_{\rho+3} & B_2 & B_1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{\rho+(k-r+1)} & B_{k-r} & B_{k-r-1} & B_{k-r-2} & \dots & B_1 \end{vmatrix},$$

donde, applicando la (17), si ricava:

$$D^{(n-r)}_{n-k-\varrho} = -B_{\rho+1} A_{k-r} - B_{\rho+2} A_{k-r-1} - \dots - B_{\rho+k-r-1},$$

cioè, se si tien presente la (16):

$$D^{(n-r)}_{n-k-\varrho} = -\Delta^{(k+\varrho)}_r. \qquad (18)$$

Questo risultato ci sarà utile in seguito.

8. Se riprendiamo le (5), tenendo presente il quadro dato al n. 6 per il calcolo dei determinanti $\Delta^{(k+\varrho)}_r$, abbiamo:

$$\psi^{(k+\varrho)}_{k+\sigma} = (B_\rho + \alpha_{k+\sigma} B_{\rho-1} + \dots + \alpha^{\varrho-1}_{k+\sigma} B_1 + \alpha^{\varrho}_{k+\sigma})\, \psi^{(k)}_{k+\sigma},$$

essendo:

$$\psi^{(k)}_{k+\sigma} = 1 + A_1 \alpha_{k+\sigma} + A_2 \alpha^2_{k+\sigma} + \dots + \alpha^k_{k+\sigma} \neq 0$$

perchè la (10) non è soddisfatta dalle radici n.$^{\text{me}}$ di -1: $k_{k+1}, k_{k+2}, \dots, k_n$.

Sostituendo nella (8) si trova facilmente:

$$\Phi = \psi^{(k)}_{k+1} \psi^{(k)}_{k+2} \dots \psi^{(k)}_n V(\alpha_{k+1}, k_{k+2}, \dots, \alpha_n) \neq 0,$$

com'è stato provato al n. 2.

§ II

I DIVISORI DI ZERO IN UN SISTEMA DI NUMERI COMPLESSI AD n UNITÀ FORMANTI CON LE OPPOSTE UN GRUPPO CICLICO.

9. Sia dato un sistema di numeri complessi ad n unità le quali, insieme con l'elemento -1, formino un gruppo ciclico G. Il campo dei coefficienti sia il corpo dei numeri reali.

Le operazioni di G saranno:

$$1,\ e,\ e^2, \dots,\ e^{2n-1}$$

con

$$e^n = -1.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè il numero

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_{n-1} e^{n-1}$$

sia divisore di zero è che si annulli il gobbo-circolante dato al n.° 1.

Infatti, perchè sia nullo il prodotto

$$(a_0 + a_1 e + \cdots + a_{n-1} e^{n-1})(x_0 + x_1 e + \cdots + x_{n-1} e^{n-1}),$$

senza che siano nulle tutte le a (o tutte le x), debbono verificarsi le relazioni

$$\left.\begin{array}{l} a_0 \quad x_{n-1} + a_1 x_{n-2} + \cdots + a_{n-2} x_1 + a_{n-1} x_0 = 0 \\ -a_{n-1} x_{n-1} + a_0 x_{n-2} + \cdots + a_{n-3} x_1 + a_{n-2} x_0 = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -a_2 \quad x_{n-1} - a_3 x_{n-2} - \cdots + a_0 \quad x_1 + a_1 \quad x_0 = 0 \\ -a_1 \quad x_{n-1} - a_2 x_{n-2} - \cdots - a_{n-1} x_1 + a_0 \quad x_0 = 0 \end{array}\right\} \qquad (19)$$

e quindi è dimostrato l'asserto.

Chiameremo divisore di zero di *ordine* k e *appartenente* alle k radici α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ (considerate nella prima parte di questo lavoro) il divisore indicato con

$$\delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$$

i cui coefficienti soddisfino alle equazioni che si ottengono eguagliando a zero i k fattori del secondo membro della (2) nei quali figurano le k radici date, senza che sia nullo nessuno dei rimanenti fattori.

Un criterio per riconoscere l'ordine di un divisore di zero è dato dal teor. 2 del n. 2.

10. Se chiamiamo divisore *coniugato* di $\delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ il più generale divisore di zero di minimo ordine, tale che moltiplicato per δ dia per prodotto 0, si può dimostrare il seguente teorema:

Il divisore coniugato di un divisore di zero di ordine k appartenente alle radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ è di ordine $n-k$ e appartiene alle rimanenti radici n^{me} di -1.

Infatti, poichè D_{n-k} (n. 2) è diverso da zero, si possono risolvere le prime $n-k$ equazioni (19) rispetto ad $x_0, x_1, \ldots, x_{n-k-1}$. Se si tiene presente che in ciascuna delle (4) ai coefficienti a, pensati come appartenenti alla 1ª orizzontale di D, si possono ordinatamente sostituire gli elementi corrispondenti di un'altra orizzontale di questo determinante, le formole risolutive si possono porre sotto la seguente forma:

$$\left.\begin{array}{ll} x_0 & = x_{n-k}\,\Delta_k^{(n-1)} + x_{n-k+1}\,\Delta_{k-1}^{(n-1)} + \cdots + x_{n-1}\,\Delta_1^{(n-1)} \\ x_1 & = x_{n-k}\,\Delta_k^{(n-2)} + x_{n-k+1}\,\Delta_{k-1}^{(n-2)} + \cdots + x_{n-1}\,\Delta_1^{(n-2)} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-k-1} & = x_{n-k}\,\Delta_k^{(k)} + x_{n-k+1}\,\Delta_{k-1}^{(k)} + \cdots + x_{n-1}\,\Delta_1^{(k)} \end{array}\right\} \qquad (20)$$

E poichè, per la (18), si ha:

$$\Delta_r^{(k+\varrho)} = -\,D_{n-k-\varrho}^{(n-r)},$$

le formole precedenti ci provano che il divisore di zero che moltiplicato per δ dia per prodotto 0 appartiene alle radici $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n$. Il teorema è perciò dimostrato se si pensi che il minimo ordine di un siffatto divisore è $n-k$.

Viceversa, tenendo presente la relazione precedente, si ha il teorema:

Se un divisore di zero appartenente alle radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ si moltiplica per un altro appartenente alle radici rimanenti, il prodotto è nullo.

11. Se riprendiamo le (3), troviamo subito che sono soddisfatte dalle seguenti $n-k$ soluzioni indipendenti:

a_0	a_1	a_2	...	a_{k-1}	a_k	a_{k+1}	...	a_{n-2}	a_{n-1}
1	A_1	A_2	...	A_{k-1}	1	0	...	0	0
0	1	A_1	...	A_{k-2}	A_{k-1}	1	...	0	0
0	0	1	...	A_{k-3}	A_{k-2}	A_{k-1}	...	0	0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0	0	0	...	...	...	...	...	A_{k-1}	1

Ne segue che la soluzione più generale del sistema (3) è

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda_0 \\ a_1 &= \lambda_0 A_1 + \lambda_1 \\ a_2 &= \lambda_0 A_2 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

essendo $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k-1}$ parametri arbitrarî.

In conseguenza di ciò che si è detto per le $n-k$ soluzioni indipendenti delle (3) si ha che le espressioni

$$\begin{array}{l} 1 + A_1 \quad e + A_2 \quad e^2 + \cdots + A_{k-1} e^{k-1} + e^k \\ e + A_1 \quad e^2 + A_2 \quad e^3 + \cdots + A_{k-1} e^k + e^{k+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{n-k-1} + A_1 e^{n-k} + A_2 e^{n-k+1} + \cdots + A_{k-1} e^{n-2} + e^{n-1} \end{array}$$

sono particolari divisori di zero, come del resto si può verificare immediatamente se si tien presente la (10). Questi divisori di zero sono di ordine k, appartengono alle radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ e sono linearmente indipendenti. Se li indichiamo rispettivamente con $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-k-1}$, possiamo dire che qualsiasi divisore di zero di ordine k, appartenente alle radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, è una combinazione lineare di $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-k-1}$, cioè:

$$\begin{aligned} \delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) &= \lambda_0 \delta_0 + \lambda_1 \delta_1 + \cdots + \lambda_{n-k-1} \delta_{n-k-1} \\ &= (\lambda_0 + \lambda_1 e + \cdots + \lambda_{n-k-1} e^{n-k-1}) \delta_0, \end{aligned}$$

essendo $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k-1}$, tali che sia

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_0 + \lambda_1 \alpha_{k+\sigma} + \lambda_2 \alpha_{k+\sigma}^2 + \cdots + \lambda_{n-k-1} \alpha_{k+\sigma}^{n-k-1} \neq 0 \\ (\sigma = 1, 2, \ldots, n-k). \end{array}\right\} \tag{21}$$

Queste ultime disuguaglianze si ricavano sostituendo nelle $\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \ldots, \varphi_n$ date dalla (1) le espressioni trovate pei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ del divisore di zero supposto di ordine k.

Dalle (21) segue che un divisore di zero

$$(\lambda_0 + \lambda_1 e + \cdots + \lambda_{n-k-1} e^{n-k-1}) \delta_0$$

è di ordine k e appartiene alle radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ se il polinomio

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_{n-k-1} x^{n-k-1}$$

a coefficienti reali è primo con l'altro

$$1 + B_1 x + \cdots + B_{n-k-1} x^{n-k-1} + x^{n-k}.$$

Se si pone:

$$\delta'_0 = 1 + B_1 e + B_2 e^2 + \cdots + B_{n-k-1} e^{n-k-1} + B_{n-k},$$

si ha

$$\delta_0 \delta'_0 = e^n + 1 = 0$$

e il teorema enunciato alla fine del n. 10 risulta evidente.

Catania, 9 febbraio 1921.

Riavvicinamento di geometrie differenziali delle superficie: metriche, affine, proiettiva.

(*Di* Gustavo Sannia, *a Torino.*)

Il Fubini [1] ha dimostrato che nella geometria proiettivo-differenziale (che dirò *geometria* P e che è invariante rispetto al gruppo P delle collineazioni) una superficie [2] non rigata, si può individuare mediante forme differenziali del primo ordine, precisamente come nelle geometrie M, M_e, M_i, A (invarianti cioè rispetto ai gruppi dei movimenti dello spazio euclideo, ellittico, iperbolico, o a quello delle affinità unimodulari, tutti sottogruppi di P).

Nella prima parte di questa Memoria mostrerò (n.° 2) che il substrato analitico su cui è fondato il procedimento seguìto dal Fubini (n.° 1) può essere preso come punto di partenza per lo sviluppo di *tutte* le altre geometrie ora ricordate. Mostrerò poi (n.° 3) che l'analogia che così vengono a presentare i fondamenti delle varie geometrie fin qui considerate

$$M,\quad M_e,\quad M_i,\quad A,\quad P \tag{0}$$

si può spingere tanto oltre nelle trattazioni delle A e P, da rendere queste trattazioni quasi identiche. Infine tale analogia renderò (n.° 4) più intima con alcune considerazioni sulla *normalizzazione* delle coordinate cartesiane omogenee, che perciò sembrano interessanti.

Nella 2.ª parte (n.° 6 e segg.) mostrerò che delle rette introdotte come *normali* ad una superficie nelle varie geometrie (0) si può dare una definizione *unica*.

(1) *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XLIII, 1918-19).

(2) E così una ipersuperficie. Qui per maggior semplicità e chiarezza mi limito alle superficie dello spazio ordinario. Per la trattazione diretta di questo caso cfr. due note del Fubini nei Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XXVII, serie 5ª, 2° sem., pagg. 41 e 44.

Tutto ciò credo che, non solo getti qualche luce sul passato, ma che possa anche servire di guida qualora si voglia edificare qualche nuova geometria, cioè invariante rispetto a qualche altro sottogruppo di P.

PRIMA PARTE.

1. Una superficie Σ sia definita dando in funzione di due parametri u, v $(o,\ u_1,\ u_2)$ le coordinate cartesiane omogenee x, y, z, t di un suo punto P, le quali perciò comportano un fattore arbitrario di proporzionalità.

Assunta una forma differenziale quadratica *arbitraria* $g = \sum a_{rs}\, d\,u_r\, d\,u_s$ col discriminante $A \neq 0$, si costruiscano le due forme differenziali (quadratica e cubica, e tra loro *apolari*)

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{A}} \left| x,\ x_1,\ x_2,\ d^2 x \right| = \frac{1}{\sqrt{A}} \left| x;\ x_1,\ x_2,\ D_2 x \right| {}^{(3)}, \tag{1}$$

$$F_3 = \frac{2}{\sqrt{A}} \left| x,\ x_1,\ x_2,\ D_3 x \right| + \frac{3}{4} F_2\, d \log \frac{\nabla}{A} - 3\, \delta F_2\,, \tag{2}$$

ove ∇ è il discriminante di F_2 e, dette $x_r,\ x_{rs},\ x_{rst}, \ldots$ le successive *derivate covarianti* di x prese rispetto a g, è

$$D_2 x = \sum x_{rs}\, d\,u_r\, d\,u_s\,, \qquad D_3 x = \sum x_{rst}\, d\,u_r\, d\,u_s\, d\,u_t\,;$$

poi

$$\delta F_2 = \frac{1}{A} \left| x,\ x_1,\ x_2,\ D_3 x \right| - \frac{1}{A} \left| x,\ d\,x,\ x_{11}\, d\,u_1 + x_{12}\, d\,u_2,\ x_{21}\, d\,u_1 + x_{22}\, d\,u_2 \right|$$

è la *derivata covariante* di F_2 rispetto a g, che (si noti) è nulla se $g = F_2$. Le forme $F_2,\ F_3$ sono *intrinseche*, cioè hanno un significato indipendente dalla scelta delle linee $u_1,\ u_2$ (4). Invece variano se le x, y, z, t si sottopongono ad una sostituzione lineare intera omogenea a coefficienti costanti di mo-

(3) Il simbolo $| x,\ x_1,\ x_2,\ d^2 x |$ indica il determinante le cui orizzontali si deducono dalla 1^a (quella scritta) cambiando x in y, z, t. Lo stesso dicasi di altri simboli analoghi.

(4) Segue da ciò che le equazioni $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ definiscono linee di Σ intrinseche ed invarianti per collineazioni, e precisamente le asintotiche e quelle che il Fubini chiama *linee di Darboux-Segre*.

dulo M (collineazione) o si moltiplicano per un fattore ρ, o se si cambia la forma g in un'altra g' di modulo A'; ma in modo molto semplice, perchè: *si riproducono a meno di uno « stesso » fattore k* (che è rispettivamente M, ρ^4 e $\sqrt{A:A'}$).

2. Quanto precede lascia prevedere che le due forme F_2, F_3, o due altre ad esse proporzionali $\varphi_2 = \sigma F_2$, $\varphi_3 = \sigma F_3$, possono servire quando si voglia edificare (al modo di Gauss) una geometria delle superficie che sia invariante rispetto a qualche gruppo G di collineazioni, purchè si riesca a *normalizzarle*, fissando in modo opportuno ciò che fin qui è rimasto indeterminato: g, ρ e σ.

Il processo di normalizzazione varierà passando da un gruppo G ad un altro, ma dovrà essere sempre intrinseco ed invariante (cioè fatto con legge indipendente dalla scelta delle linee u_1, u_2 ed unica per il punto generico P di Σ e per i suoi trasformati mediante le collineazioni di G) e tale che, dopo, le collineazioni di G siano rappresentate ancora da sostituzioni lineari intere (5) a coefficienti costanti.

Concretiamo tutto ciò, passando in rassegna i gruppi fin qui considerati.

1.° Gruppo M dei movimenti euclidei. Poichè tali movimenti sono rappresentati da sostituzioni lineari intere unimodulari nelle coordinate *non omogenee*, adottiamo tali coordinate x, y, z (6). Prendiamo come forma g la prima forma di Gauss

$$g = d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2 = E\,d\,u^2 + 2\,F\,d\,u\,d\,v + G\,d\,v^2$$

di Σ (intrinseca e invariante in M). Allora la F_2 è completamente determinata e si riduce alla nota 2^a forma di Gauss:

$$F_2 = \sum X\,d^2\,x = D\,d\,u^2 + 2\,D'\,d\,u\,d\,v + D''\,d\,v^2 \ (7). \tag{4}$$

Ora è appunto con tali due forme g e F_2 che si edifica la geometria M di Σ.

(5) Perchè sono le sole considerate nel n. 1.

(6) Corrispondenti alla legge di normalizzazione $\rho = 1 : t$ ossia $t = 1$, unica per tutti i punti dello spazio (quindi intrinseca e invariante rispetto a M).

(7) Se si ricorda che $t = 1$, quindi $F_2 = \frac{1}{\sqrt{E\,G - F^2}} \,|\, x_1,\ x_2,\ d^2 x \,|$, e che i complementi algebrici di $d^2 x$, $d^2 y$, $d^2 z$ sono i coseni direttori X, Y, Z della normale a Σ.

2.° Gruppo M_e o M_i dei movimenti dello spazio ellittico o iperbolico (di curvatura $+1$ o -1, come è lecito supporre) rappresentati da sostituzioni lineari intere unimodulari quando si assumano le *coordinate di Weierstrass*, cioè le cartesiane omogenee x, y, z, t normalizzate con la legge

$$t^2 \pm (x^2 + y^2 + z^2) = 1 \text{ (}^8\text{)}.$$

Allora, assunte tali coordinate e per g l'elemento lineare

$$g = d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2 \pm d\,t^2 = E\,d\,u^2 + \cdots$$

di Σ, la F_2 è completamente determinata e si riduce alla (4) [9].

Ora è ben noto che con tali forme g e F_2 si edifica la geometria M_e o M_i di Σ.

3.° Gruppo A delle affinità unimodulari, rappresentate in coordinate ***non omogenee*** x, y, z dalle sostituzioni lineari intere di modulo 1. Noi perciò assumeremo tali coordinate [10] e per g la stessa forma F_2 [11].

Allora sarà $\nabla = A$ e $\delta F_2 = 0$ (cfr. n.° 1), quindi le (1) e (2) diventeranno:

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{\nabla}} \left| x,\, x_1\,,\, x_2\,,\, d^2 x \right| = \frac{1}{\sqrt{\nabla}} \left| x,\, x_1\,,\, x_2\,,\, D_2\, x \right|, \tag{1$'$}$$

$$\left.\begin{aligned} F_3 = \frac{2}{\sqrt{\nabla}} \left| x,\, x_1\,,\, x_2\,,\, D_3\, x \right| = \frac{2}{\sqrt{\nabla}} \Big| x,\, d\,x,\, x_{11}\, d\,u_1 + x_{12}\, d\,u_2\,, \\ x_{21}\, d\,u_1 + x_{22}\, d\,u_2 \Big| \,. \end{aligned}\right\} \tag{2$'$}$$

In pratica per costruire F_2 e F_3 converrà adoperare la 1ª espressione di F_2 e la 2ª di F_3 (nella quale compaiono le x_{rs} e non le x_{rst} come nella 1ª),

---

(8) Ossia $\rho^2 = 1 : [t^2 \pm (x^2 + y^2 + z^2)]$, unica in tutti i punti dello spazio.

(9) Ove X, Y, Z, T sono le costanti di direzione della normale a Σ, tali che

$$\Sigma\, X x = 0, \quad \Sigma\, X \frac{\partial x}{\partial u_r} = 0, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 \pm T^2 = 1.$$

(10) Cfr. (6) ove si cambii M in A.

(11) Qui apparentemente facciamo un circolo vizioso, poichè nella definizione di F_2 interviene il discriminante di g *che è la stessa* F_2. Toglieremo ogni dubbio dando la effettiva espressione di F_2.

le quali, essendo $t=1$, si riducono a

$$\left.\begin{aligned} F_2 = \frac{1}{\sqrt{\nabla}}\left| x_1, x_2, d^2 x \right|, \quad F_3 = \frac{2}{\sqrt{\nabla}} \Big| d x,\ & x_{11} d u_1 + x_{12} d u_2, \\ & x_{21} d u + x_{22} d u_2 \Big| . \end{aligned}\right\} \tag{1)''}$$

Si incomincerà col costruire la forma

$$\psi = | x_1, x_2, d^2 x | = L d u^2 + 2 M d u d v + N d v^2$$

che interviene in (1)″ e che è indipendente dalla scelta di g [12]; poi si calcolerà ∇ tenendo conto che il discriminante $(LN - M^2) : \nabla$ di $F_2 = \psi : \sqrt{\nabla}$ dev'essere uguale a ∇, il che dà $\nabla = \sqrt[4]{LN - M^2}$.

Così F_2 è determinata

$$F_2 = \frac{L d u^2 + 2 M d u d v + N d v^2}{\sqrt[4]{LN - M^2}}$$

e coincide con una delle due forme con le quali è stata edificata la geometria affine delle superficie non sviluppabili ($\nabla \neq 0$) [13].

Allora è nota anche g (uguale a F_2), quindi anche F_3 si può costruire usando la (2)″. Orbene si può verificare che *essa* $\left(\text{più precisamente } \frac{1}{2} F_3\right)$ *coincide con l'altra delle dette due forme.*

È facile (ed è anche sufficiente) far la verifica supponendo che le linee u_1, u_2 (o u, v) siano le asintotiche.

In tal caso le due forme di Blaschke e Pick sono: F_2 (come si è visto), che qui diventa

$$F_2 = 2 \varphi \, d u \, d v \quad \text{con} \quad \varphi = \sqrt{-i \, | x_u, x_v, x_{uv} |}, \tag{3}$$

essendo

$$L = | x_u, x_v, x_{uu} | = 0, \ N = | x_u, x_v, x_{vv} | = 0, \ M = | x_u, x_v, x_{uv} | \neq 0 \ (^{14}), \tag{4}$$

---

(12) Perchè le derivate ***prime*** covarianti x_1, x_2 coincidano con le ordinarie.

(13) Principalmente da Blaschke e Pick nei *Ber. Ges. der Wissen. zu Leipzig*, Bd. 69 e segg.

(14) Si tenga presente che $F_2 = 0$ o $\psi = 0$ definisce le asintotiche, per la nota (4), che qui sono le u, v; perciò $L = N = 0$. Avvertiamo poi che qui x_u, x_v, x_{uu}, ..., φ_u, φ_v indicano derivate ***ordinarie*** (non covarianti).

e l'altra

$$P\,d u^3 + Q\,d v^3, \text{ ove } P = i\,|\,x_{uu}\,,\ x_v\,,\ x_{uv}\,|:\varphi,\quad Q = i\,|\,x_{vv}\,,\ x_v\,,\ x_{uv}\,|:\varphi. \tag{5}$$

Sussistono poi le equazioni (fondamentali nella geometria A)

$$\varphi\, x_{uu} = \varphi_u\, x_u + P\, x_v\,,\quad \varphi\, x_{vv} = Q\, x_u + \varphi_v\, x_v\,, \tag{6}$$

(soddisfatte anche da y e z).

Ciò premesso, poichè le derivate covarianti di x rispetto a $g = F_2$ valgono

$$x_1 = x_u\,,\ x_2 = x_v\,,\ x_{11} = x_{uu} - \varphi_u\, x_u : \varphi,\ x_{22} = x_{vv} - \varphi_v\, x_v : \varphi,\ x_{12} = x_{21} = x_{uv}\,,$$

sostituendo in (2)″ e tenendo conto delle (4) e (6), si vede facilmente che $\frac{1}{2} F_3$ coincide con la forma (5).

4.° Gruppo P delle collineazioni. Per tal caso meno semplice il Fubini ha escogitato un processo di normalizzazione [15] nel quale si incomincia col normalizzare le forme φ_2, φ_3 (anzichè le coordinate, come nei casi precedenti) scegliendo σ in guisa che *il discriminante di* φ_3 *sia uguale al cubo del discriminante di* φ_2, a meno di un fattore *numerico* f prefissato a piacere.

Ciò costituisce una effettiva normalizzazione *se* Σ *non è una superficie rigata*, perchè allora φ_2 e φ_3 [16] *sono invarianti per collineazione e indipendenti dalla forma* g *e dalle coordinate da cui si è partiti.*

Infatti supponiamo che, *partendo da una* g *e da coordinate omogenee qualunque*, si siano calcolate, mediante le (1) e (2), le forme

$$F_2 = \sum b_{rs}\, d u_r\, d u_s\,,\quad F_3 = \sum c_{rst}\, d u_r\, d u_s\, d u_t$$

coi discriminanti

$$\left.\begin{aligned} \nabla &= b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2\,, \\ \nabla &= c_{112}^2\, c_{122}^2 - 6\, c_{111}\, c_{122}\, c_{222} - 4\, c_{111}\, c_{122}^3 - 4\, c_{112}^3\, c_{222} - c_{111}^2\, c_{222}^2\,; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

poi le forme $\varphi_2 = \sigma F_2$, $\varphi_3 = \sigma F_3$ col fattore σ tale che i loro discriminanti

---

(15) Loc. cit. (1), fine del § 1 e § 2, B); oppure loc. cit. (2). Esso è interessante anche perchè potrebbe servire di modello in altri casi analoghi; perciò lo espongo qui con maggiori particolari.

(16) Certamente intrinseche, perchè tali sono F_2, F_3 e la legge che determina σ.

$\sigma^2 \nabla$ e $\sigma^4 \Delta$ siano legati dalla relazione

$$\sigma^4 \Delta = 16\,\varepsilon\,(\sigma^2 \nabla)^3 \text{ (}^{17}\text{)}$$

che dà

$$\sigma = \sqrt{\Delta : 16\,\varepsilon\,\nabla^3} \text{ (}^{18}\text{)}. \tag{7$'$}$$

Poichè, applicando una collineazione o cambiando g o moltiplicando le coordinate per un fattore ρ, le F_2 e F_3 diventano $k\,F_2$ e $k\,F_3$ (n.° 1), ∇ e Δ diventano $k^2 \nabla$ e $k^4 \Delta$, quindi σ diventa $\sigma : k$, e perciò φ_2 e φ_3 rimangono inalterate. (c. d. d.).

Ora non resta che da normalizzare g e le coordinate. Il Fubini assume $g = \varphi_2 = \sigma F_2$ e moltiplica le coordinate di partenza per un fattore ρ tale che risulti $\varphi_2 = F_2$, quindi $\sigma = 1$. Ora, poichè per tale moltiplicazione F_2 si moltiplica per $k = \rho^4$ (n.° 1), quindi (come ora si è visto) σ diventa $\sigma : \rho^4$, bisogna assumere $\rho^4 = \sigma$, ossia per la (7)'

$$\rho = \sqrt[8]{\Delta : 16\,\varepsilon\,\nabla^3}. \tag{8}$$

Le coordinate omogenee così normalizzate sono dette *coordinate normali* dal Fubini.

È da notarsi che le coordinate normali di due punti corrispondenti in Σ e in una superficie collineare Σ' sono legate da una sostituzione lineare intera a coefficienti costanti ed *unimodulare*. Perchè se tale non fosse, applicando a Σ la collineazione che muta Σ in Σ', le forme φ_2, φ_3 (che ora sono uguali a F_3, F_3) si moltiplicherebbero per il suo modulo (n.° 1), mentre non debbono alterarsi.

Essendo $g = \varphi_2 = F_2$, si conclude (come nel 3° caso) che F_2, F_3 hanno le espressioni (1')' (2'). Ed è con l'uso di queste forme e di una terza quadratica f_2 che il Fubini ha costruito la geometria delle superficie non rigate.

3. Nel n.° 2 ho dimostrato che le due forme che si adoperano nella geometria A sono sostanzialmente le stesse F_2, F_3 $\left(\text{precisamente } F_2, \frac{1}{2} F_3\right)$.

---

(17) Abbiamo qui assunto $f = \varepsilon : 16$, ove ε indica il segno del prodotto $\Delta\nabla$, perchè le forme che il Fubini considera nel caso importante in cui le u e v sono le asintotiche corrispondono a questa assunzione. Il fattore ε è introdotto per far sì che σ sia sempre reale (quando si considerano superficie reali).

(18) Risulta $\sigma \neq 0$, come dev'essere, se non è $\Delta = 0$, cioè (come si dimostra) *se Σ non è rigata;* ed allora Σ non può essere una sviluppabile, quindi non è neppure $\nabla = 0$.

che (con una terza f_2) sono adoperate dal FUBINI nella geometria P; o per meglio dire dette due forme *hanno le medesime espressioni* (1)′ e (2)′. La differenza consiste *soltanto nella interpretazione delle x, y, z, t che vi compaiono*: nella geometria A sono le coordinate cartesiane non omogenee (ossia è $t = 1$), nella P sono le coordinate normali del FUBINI.

Ora osservo che il FUBINI nello sviluppo dell'algoritmo della geometria P, in loc. cit. ([1]), *non fa mai uso del significato specifico delle x, y, z, t.*

Ne deduco che: *questo algoritmo può servire anche per la geometria A, sol che vi si ponga $t = 1$.*

Per esempio, posto

$$F_2 = \sum_{r,s} \Delta_{rs}\, d\,u_r\, d\,u_s\,, \quad F_3 = 2 \sum_{r,s,t} \Delta_{rst}\, d\,u_r\, d\,u_s\, d\,u_t\,, \quad f_2 = \sum_{r,s} b_{rs}\, d\,u_r\, d\,u_s\,,$$

il FUBINI dimostra ([19]) che la sua coordinata x (e così y, z, t) soddisfa il sistema

$$x_{rs} = \Delta_{rs1}\, x^u + \Delta_{rs2}\, x^v + b_{rs}\, x + \Delta_{rs}\, x \qquad (r,\ s = 1,\ 2), \qquad (8)'$$

essendo: x^u e x^v (o $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$) le derivate prime *controvarianti* di x rispetto a F_2 ossia

$$x^{(r)} = \partial_{r1}\, x_1 + \partial_{r2}\, x_2 = \partial_{r1}\, x_u + \partial_{r2}\, x_v\,,$$

ove ∂_{rs} è il complemento algebrico di Δ_{rs} nel discriminante ∇ di F_2 diviso per ∇; poi $X = \frac{1}{2} \Delta_2\, x$, essendo $\Delta_2\, x$ il parametro differenziale secondo di x calcolato rispetto a F_2; e così $Y = \frac{1}{2} \Delta_2\, y, \ldots, T = \frac{1}{2} \Delta_2\, t$.

Da ciò il FUBINI desume che, date le forme F_2, F_3, f_2 (soddisfacenti certe condizioni) la superficie Σ è individuata a meno di una collineazione.

Orbene si ponga $t = 1$, onde $t^u = t^v = t_{rs} = T = 0$. Allora, poichè t è soluzione del sistema (8)′, ne risulta che è $b_{rs} = 0$, quindi $f_2 = 0$ e (8)′ diventa

$$x_{rs} = \Delta_{rs1}\, x^u + \Delta_{rs2}\, x^v + \Delta_{rs}\, X \qquad (r,\ s = 1,\ 2) \qquad (8)''$$

ed è soddisfatto dalle coordinate cartesiane non omogenee x, y, z nella geometria A, se vi si adopera F_3 anzichè (come è di uso) $\frac{1}{2} F_3$ ([20]).

([19]) In loc. cit. ([1]), § 5.

([20]) Come conferma si può constatare che le (8)″ $\left(\text{se vi si cambia } \Delta_{rst} \text{ in } \frac{1}{2} \Delta_{rst}\right)$ dànno le (6), in uso nella geometria A, quando le u, v sono le asintotiche. Allora, come si è visto

Essendo qui $f_2 = 0$ identicamente, si spiega perchè passando dalla geometria P alla A, *bastino due sole forme* (e non tre) *per individuare una superficie.*

Così pure la *normale proiettiva* n_p di Σ che il FUBINI definisce come la congiungente il punto (x, y, z, t) col punto $N \equiv (X, Y, Z, T)$ si muta nella *normale affine* n_a che il BLASCHKE definisce come la retta congiungente (x, y, z, t) col punto all'infinito $(X, Y, Z, 0)$ (cfr. n.° 6).

L'interesse di questo nuovo modo di presentare la geometria A è evidente.

4. Per ciascuno G dei gruppi (0) sono state introdotte delle coordinate per i punti di Σ che dirò *coordinate normali* per il gruppo G corrispondente.

α): *Esse sono coordinate dedotte dalle cartesiane omogenee, normalizzandole in modo intrinseco ed invariante rispetto a G; e sono determinate dalla superficie stessa Σ a meno delle sostituzioni lineari intere esprimenti le collimazioni di G* (21).

Ma esse non sono le sole coordinate godenti la proprietà α), e quindi adoperabili per edificare la geometria invariante rispetto a G, perchè: *moltiplicandole per una funzione I che sia un invariante intrinseco della superficie* (22), *si hanno coordinate godenti ancora la proprietà α).*

Anzi: *si hanno così (variando I) tutte le coordinate aventi la proprietà α).* Perchè il rapporto $\dfrac{x}{x'} = \cdots = \dfrac{t}{t'}$ che nasce da due quaterne di coordinate (x, y, z, t), (x', y', z', t') di un punto P di Σ aventi la proprietà α) è certamente intrinseco ed invariante rispetto a G.

---

al n.° 2 (Gruppo A), F_2 e $\frac{1}{2} F_3$ sono le (3) e la (5), quindi si ha:

$$\Delta_{11} = \Delta_{22} = \vartheta_{11} = \vartheta_{22} = 0, \ \Delta_{12} = \varphi, \ \vartheta_{12} = 1 : \varphi,$$

$$x^u = x^{(1)} = x_u : \varphi, \ x^v = x^{(2)} = x_v : \varphi,$$

$$\Delta_{111} = P, \ \Delta_{222} = Q, \ \Delta_{121} = \ldots = 0;$$

quindi le (8)'' dànno

$$x_{11} = P\, x_u : \varphi, \ x_{22} = Q\, x_v : \varphi.$$

Or sostituendo a x_{11} e x_{22} i loro valori (già dati in loc. cit.) si vede subito che queste coincidono con le (6).

(21) Perchè solo a meno di tali collimazioni vien considerata Σ nella geometria G.

(22) Rispetto al gruppo che si considera. Per es. per I si può assumere la *curvatura assoluta* ordinaria nel caso dei gruppi M, M_e, M_i, quella *affine* (di BLASCHKE) nel caso del gruppo A, quella *proiettiva* di (FUBINI) nel caso del gruppo P.

Ora è importante osservare che le coordinate normali per i vari gruppi (0) sono *le più semplici* fra quelli aventi la proprietà α), nel senso (per ora un po' vago) che sono le sole coordinate deducibili dalle coordinate omogenee con legge dipendente da elementi di Σ *del minimo ordine possibile* (variabile col gruppo).

Precisiamo. Per normalizzare le coordinate, ossia per passare dalle coordinate omogenee *qualunque* x, y, z, t di un punto P di Σ a coordinate godenti la proprietà α), occorre moltiplicare le prime per un certo fattore ρ che sarà una funzione di x, y, z, t e delle loro derivate rispetto a u, v fino a quelle di un certo ordine $n > 0$.

Orbene: *nelle normalizzazioni che conducono precisamente alle coordinate normali per i gruppi* (0) *i valori di n sono i più bassi possibili; e d'altra parte non esistono altre normalizzazioni corrispondenti a tali valori minimi di n* (*che sono 3 per il gruppo e 0 per tutti gli altri*).

Ciò riavvicina ancor più le trattazioni delle geometrie (0), mostrando che le coordinate adottate per ciascuna di esse hanno *una proprietà comune che le caratterizza* fra tutte quelle adottabili.

Si tratta di dimostrare l'ultimo teorema.

Per i gruppi M, M_e, M_i, A la dimostrazione è immediata; perchè allora è $n = 0$ (valore minimo), essendo $\rho = 1 : t$ (gruppi M e A) o

$$\rho = 1 : \left[t^2 \pm (x^2 + y^2 + z^2)\right]$$

(gruppi M_e e M_i); e d'altra parte non esiste (come è noto) un invariante intrinseco I di Σ nella cui espressione non entrino *anche le derivate di* x, y, z, t.

Per il gruppo P si osservi anzitutto che il valore (8) di ρ assunto nella normalizzazione del n.° 2 (4.° caso), dipende da x, y, z, t e dalle loro derivate fino a quelle del 3.° ordine [23], sicchè per essa è $n = 3$. Ora per ottenere un'altra normalizzazione con $n \leq 3$ bisognerebbe moltiplicare le coordinate già normalizzate per una funzione effettiva [24] I intrinseca e invariante per collineazione *che dipendesse solo da x, y, z, t e dalle loro derivate dei primi tre ordini* (al più).

Ora: *una tale funzione non esiste*, cioè *si riduce ad una costante.*

---

[23] Che intervengono nella espressione (2) di F_3 e quindi di Δ, suo discriminante.

[24] Poichè una costante non condurrebbe ad una normalizzazione effettivamente nuova.

5. Per dimostrarlo, supponiamo che Σ sia riferita alle *asintotiche* come linee u, v [25], nel qual caso sono nulli i coefficienti di $d u_1^2 = d u^2$ e $d u_2^2 = d v^2$ in F_2, definita dalla (1) (prima espressione), sicchè

$$|x, x_u, x_v, x_{uu}| = 0, \quad |x, x_u, x_v, x_{vv}| = 0, \tag{9}$$

ove x_u, x_v (che coincidono con x_1, x_2) x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}, x_{uuu}, . . . indicano derivate *ordinarie* (non covarianti) di x.

L'invariante supposto I sarà funzione delle 10 variabili

$$x_0 = x, \quad x_1 = x_u, \quad x_2 = x_v, \quad x_3 = x_{uv}, \quad x_4 = x_{uuu}, \quad x_5 = x_{uuv}, \quad x_6 = x_{uvv},$$

$$x_7 = x_{vvv}, \quad x_8 = x_{uu}, \quad x_9 = x_{vv}.$$

e delle analoghe in y, z, t; in tutto di 40 variabili. Ma tal numero può subito ridursi con le considerazioni seguenti.

I è una funzione delle coordinate dei punti $P_r(x_r)$ [26] ($r = 0, 1, \ldots, 9$). I punti P_8 e P_9, per le (9), giacciono sul piano dei punti $P_0 P_1 P_2$ (tangente a Σ in P_0); non così P_3, per cui passa la normale proiettiva n_p di Σ in P_0 [27]; quindi $P_0 P_1 P_2 P_3$ sono i vertici di un tetraedro. Poi P_4 non giace su nessuna faccia del tetraedro [28]; dunque possiamo assumere il tetraedro e P_4 come elementi di riferimento di un sistema di coordinate proiettive, nel quale

---

(25) Ciò è lecito, trattandosi di una funzione *intrinseca,* il cui valore nei punti di Σ è perciò indipendente dalla scelta delle coordinate curvilinee. Avverto poi che esigendo la dimostrazione calcoli molto laboriosi, ma facili, mi limiterò ad esporla nei suoi tratti più essenziali, cioè senza entrare nei particolari dei calcoli stessi.

(26) Ossia di coordinate x_r, y_r, z_r, t_r.

(27) Già ricordata al n.° 3. Ed infatti qui il punto (X, Y, Z, T) del n.° 3 che la individua coincide con P_3 (x_{uv}).

(28) Non essendo nulli

$$|x_0, x_1, x_2, x_4|, \ |x_0, x_1, x_3, x_4|, \ |x_0, x_2, x_3, x_4|, \ |x_1, x_2, x_3, x_4|,$$

perchè differiscono solo per un fattore da $|x_0, x_1, x_2, x_3| = |x, x_u, x_v, x_{uv}|$, unico coefficiente di F_2 non nullo. Lo si vede tenendo conto che (come è noto) x, y, z, t soddisfano equazioni del tipo

$$\varphi_{uu} = \alpha \varphi_u + \beta \varphi_v + \lambda \varphi, \quad \varphi_{vv} = \gamma \varphi_u + \delta \varphi_v + \mu \varphi,$$

dalle quali è possiblie calcolare $x_4 = x_{uuu}$ ed esprimerla come funzione lineare delle $x_0 = x$, $x_1 = x_u$, $x_2 = x_v$, $x_3 = x_{uv}$, (e così y_4, z_4, t_4).

i punti rimanenti P_r ($r=5, 6, \ldots, 9$) avranno per coordinate omogenee

$$p_{r1}=\frac{(0\,1\,3\,4)}{(0\,1\,3\,r)},\quad p_{r2}=\frac{(1\,2\,3\,4)}{(1\,2\,3\,r)},\quad p_{r3}=\frac{(0\,2\,3\,4)}{(0\,2\,3\,r)},\quad p_{r4}=\frac{(0\,1\,2\,4)}{(0\,1\,2\,r)} \tag{10}$$

($r=5, 6, \ldots, 9$), ove si è posto per semplicità di scrittura

$$|x_p,\ x_q,\ x_r,\ x_s|=(p\,q\,r\,s)\ (^{29});$$

sicchè le (9), che equivalgono a

$$|x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_8|=0,\quad |x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_9|=0,$$

si possono scrivere anche

$$(0\,1\,2\,8)=0,\quad (0\,1\,2\,9)=0. \tag{9$'$}$$

Dopo ciò I può trasformarsi in una funzione delle coordinate (10); però conviene meglio considerare I come funzione delle $(p\,q\,r\,s)$ (non nulle) che compaiono nelle (10) e che, per le (9)$'$, sono 22:

$$\left.\begin{array}{l}(0\,1\,3\,r),\quad (0\,2\,3\,r),\quad (1\,2\,3\,r)\qquad (r=4,\ 5,\ldots,\ 9)\\ (0\,1\,2\,r)\quad (r=4,\ 5,\ 6,\ 7).\end{array}\right\} \tag{11}$$

Proveremo (a tappe) che I è indipendente da tali variabili.

1.ª I per essere un invariante di Σ, non deve alterarsi se si moltiplicano le coordinate omogenee x, y, z, t per un fattore $\rho(u, v)$, e in particolare per uno del tipo $\rho=1+c\,f$, con c costante ed f funzione arbitraria di u, v; quindi la derivata rispetto a c di I trasformata dev'essere nulla. Imponendo che lo sia per $c=0$, si ha l'equazione

$$\Sigma\,(p\,q\,r\,s)'\,I_{pqrs}=0, \tag{12}$$

---

(29) Le (10) si trovano calcolando i birapporti che i punti P_4 e P_r fanno coi punti d'incontro della retta congiungente con la faccia $P_0\,P_1\,P_2$ del tetraedro, di equazione $|X,\ x_0,\ x_1,\ x_2|=0$, e con ciascuna delle rimanenti. Considerando per esempio la $P_0\,P_1\,P_3$, di equazione $|X,\ x_0,\ x_1,\ x_3|=0$, si trova che i detti punti hanno le coordinate $X=x_3+k\,x_r,\ldots$, ove k ha i valori $-|x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_4|:|x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_r|$ e $-|x_0,\ x_1,\ x_3,\ x_4|:|x_0,\ x_1,\ x_3,\ x_r|$ ossia $-(0\,1\,2\,4):(0\,1\,2\,r)$ e $-(0\,1\,3\,4):(0\,1\,3\,r)$, il cui rapporto è appunto il detto birapporto, che perciò vale $p_{r4}:p_{r1}$.

ove I_{pqrs} indica la derivata di I rispetto a $(p\,q\,r\,s)$, e $(p\,q\,r\,s)'$ indica la derivata rispetto a c (calcolata per $c=0$) di ciò che $(p\,q\,r\,s)$ diventa a trasformazione eseguita.

Per esempio $(0\,1\,2\,4) = |\,x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uuu}\,|$ diventa

$$|\,x,\ \rho\, x_u + \rho_u\, x,\ \rho\, x_v + \rho_v\, x,\ \rho_{uuu}\, x + 3\,\rho_{uu}\, x_u + 3\,\rho_u\, x_{uu} + \rho\, x_{uuu}\,| =$$

$$= \rho^4\,|\,x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uuu}\,| = (1 + c\,f)^4\,(0\,1\,2\,4),$$

la cui derivata rispetto a c per $c=0$ vale $4(0\,1\,2\,4)\,f$.

Del pari si trova che

$$(0\,1\,3\,4)' = 4\,(0\,1\,3\,4)\,f + (0\,1\,2\,4)\,f_u$$

$$(0\,2\,3\,4)' = 4\,(0\,2\,3\,4)\,f - 3\,(0\,1\,2\,3)\,f_{uu} - 3\,(0\,2\,3\,8)\,f_u - (0\,1\,2\,4)\,f_v,\ \text{ecc.}$$

In generale si trova che $(p\,q\,r\,s)'$ è funzione lineare delle $(p\,q\,r\,s)$ con coefficienti che sono funzioni lineari di f e delle sue derivate $f_u,\ f_v,\ f_{uu},\ldots$ fino a quelle di terzo ordine.

Sostituendo in (12), si ha un'equazione lineare omogenea nelle derivate parziali prime di I rispetto alle variabili (11) i cui coefficienti contengono linearmente (0 1 2 3) *da cui I non dipende*; perciò essa si scinde in due altre, che si ottengono uguagliando a zero il coefficiente di (0 1 2 3) e la rimanente parte. E poichè tali nuove equazioni contengono linearmente la funzione *arbitraria f* e sue derivate, ciascuna di esse si scinde in altre allo stesso modo. Si perviene così a 12 equazioni distinte, 5 delle quali (come $I_{1234}=0$) esprimono che I non dipende da (1 2 3 4), (1 2 3 5), (1 2 3 6), (1 2 3 7), (0 1 2 6); delle 7 rimanenti una contiene linearmente nei coefficienti l'ultima variabile (0 1 2 6) da cui I non dipende, e perciò si scinde in altre due, una delle quali esprime che I non contiene (0 2 3 6).

Insomma si trova che: *I non dipende da*

$$(1\,2\,3\,4),\quad (1\,2\,3\,5),\quad (1\,2\,3\,6),\quad (0\,1\,2\,6),\quad (0\,2\,3\,6),\quad (1\,2\,3\,7) \tag{13}$$

e soddisfa le equazioni

$$3\,I_{0234} + I_{0135} + I_{1238} = 0, \quad (14) \qquad I_{0235} - I_{0136} = 0, \quad (15)$$

$$I_{0125} + I_{0238} = 0, \quad (16) \qquad 3\,I_{0137} + 2\,I_{0139} + I_{1239} = 0, \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned}&(0\,1\,2\,4)\,I_{0134} + 3\,(0\,2\,3\,8)\,I_{0234} + (0\,1\,2\,5)\,I_{0135} + (0\,1\,3\,9)\,I_{0136} +\\ &+ (0\,1\,2\,7)\,I_{0138} + (0\,2\,3\,8)\,I_{1238} + (0\,2\,3\,9)\,I_{1239} = 0,\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

$$\left.\begin{array}{l}(0138)I_{0135}-(0124)I_{0234}+\Big[(0238)-(0125)\Big]I_{0235}+3(0139)I_{0138}+\\ +\Big[3(0239)-(0127)\Big]I_{0237}-(0139)I_{1238}-(0139)I_{1239}=\end{array}\right\}\quad(19)$$

e quella $\Sigma\ (p\ q\ r\ s)\ I_{pqrs}=0$ che esprime essere I *funzione omogenea* (30).

2.ª Ulteriori condizioni per I si ottengono imponendo che sia intrinseca, e perciò che non muti (in particolare) con una trasformazione del tipo,

$$u=U+c\,f(U),\quad v=V+c\,g\,(V), \tag{20}$$

ove U e V sono nuovi parametri, c una costante, ed f, g funzioni arbitrarie dei rispettivi argomenti. Allora, ragionando come per la trasformazione precedente, si trova che I deve soddisfare ancora l'equazione (12), ove però $(p\ q\ r\ s)'$ e la derivata rispetto a c per $c=0$ di ciò che diventa $(p\ q\ r\ s)$ in seguito alla (20).

Per esempio il determinante $(0\,1\,3\,4)=|\,x,\,x_u,\,x_{uv},\,x_{uuu}\,|$ si muta per la (20) in un altro i cui elementi della prima riga sono x, $(1+c\,f)\,x_u$, $(1+c\,f')$ $(1+c\,g')\,x_{uu}$ e

$$(1+c\,f')^3\,x_{uuu}+3\,c\,(1+c\,f')\,f''\,x_{uu}+c\,f'''\,x_u$$

e che perciò vale

$$(1+cf')^5\,(1+c\,g')\,|\,x,\,x_u,\,x_{uv},\,x_{uuu}\,|+3\,c\,(1+c\,f')^3\,(1+c\,g')\,|\,x,\,x_u,\,x_{uv},\,x_{uu}\,|\,f''$$

ossia

$$(1+c\,f')^5\,(1+c\,g')\,(0\,1\,3\,4)+3\,c\,(1+c\,f')^3\,(1+c\,g')\,(0\,1\,3\,8)\,f''$$

e la cui derivata rispetto a c per $c=0$ vale

$$(0\,1\,3\,4)'=(5\,f'+g')\,(0\,1\,3\,4)+3\,(0\,1\,3\,8)\,f''.$$

In generale si trova che $(p\ q\ r\ s)'$ è funzione lineare delle $(p\ q\ r\ s)$ con coefficienti che sono funzioni lineari delle derivate f', g', f'',... di f e g fino a quelle di terzo ordine.

Sostituendo in (12), si ha un'equazione lineare omogenea nelle derivate parziali prime di I rispetto alle variabili (11), *escluse le* (13), e con coeffi-

(30) E il sistema di tali equazioni è *completo*, come è facile verificare.

cienti che sono lineari nella $(0\,1\,2\,3)$, *da cui I non dipende*, e lineari nelle funzioni *arbitrarie f, g* e loro derivate; allora, procedendo come nel caso precedente, si trova che: *I non dipende da*

$$(0\,2\,3\,4),\ (0\,1\,3\,4),\ (0\,1\,3\,7),\ (0\,2\,3\,7),\ (0\,1\,3\,9) \tag{21}$$

e deve soddisfare certe equazioni due delle quali sono

$$I_{0127} + I_{0238} = 0, \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} &4\,(0\,1\,2\,4)\,I_{0124} + 3\,(0\,1\,2\,5)\,I_{0125} + 4\,(0\,1\,3\,5)\,I_{0135} + 3\,(0\,2\,3\,5)\,I_{0235} + \\ &+ 3\,(0\,1\,3\,6)\,I_{0136} + (0\,1\,2\,7)\,I_{0127} + 4\,(0\,1\,3\,8)\,I_{0138} + 3\,(0\,2\,3\,8)\,I_{0238} + \\ &+ 4\,(1\,2\,3\,8)\,I_{1238} + (0\,2\,3\,9)\,I_{0239} + 2\,(1\,2\,3\,9)\,I_{1239} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

3.ª I deve anche soddisfare l'equazione che nasce formando la *parentesi* delle (22) e (23) ossia $I_{0127} + 3\,I_{0238} = 0$, dalla quale e dalla (22) segue che $I_{0127} = I_{0238} = 0$, cioè che *I non dipende da*

$$(0\,1\,2\,7),\ (0\,2\,3\,8). \tag{24}$$

4.ª Ora consideriamo le equazioni (14), . . ., (19) e (23).

Le (16), (17), mancando in I le variabili (21) e (24), si riducono, ed esprimono che *I non dipende da*

$$(0\,1\,2\,5),\ (1\,2\,3\,9); \tag{25}$$

e le (18), (19) si riducono ad equazioni i cui coefficienti sono formati linearmente con le variabili (13), (21), (24), (25) da cui I non dipende, e perciò si scindono in equazioni che esprimono che *I non dipende da*

$$(0\,1\,3\,5),\ (0\,2\,3\,5),\ (0\,1\,3\,6),\ (0\,1\,3\,8),\ (1\,2\,3\,8).$$

Ed allora anche (23) si riduce ed esprime che *I non dipende da* $(0\,2\,3\,9)$.

5.ª Da tutto ciò che precede segue che I non può essere che una funzione della sola variabile $(0\,1\,2\,4)$; ma dev'essere omogenea (cfr. 1ª), dunque *non può essere che una costante.*

SECONDA PARTE.

6. Nell'edificare le geometrie A e P, quando si è voluto definire una *normale affine* n_a [31] o *proiettiva* n_p [32], ossia una retta che tenesse il posto di quella ordinaria n (e di quelle non euclidee n_e, n_i) ad una superficie Σ in un suo punto P, le si sono imposte le seguenti condizioni geometriche [33]:

I^a di passare per P senza giacere nel piano tangente a Σ;

II^a di essere intrinsecamente definita

III^a ed invariante rispetto al gruppo considerato [34];

IV^a di esser tale che le sviluppabili da essa generate, variando P su Σ, traccino su Σ un doppio sistema coniugato di linee (che perciò si diranno *linee di curvatura*).

E poichè tali condizioni sono soddisfatte da tutto un insieme di rette, dipendente da una funzione arbitraria (entro certi limiti imposti dalle condizioni II^a e III^a) delle coordinate curvilinee u, v di P su Σ, la scelta di n_a è n_p è caduta su quelle che presentavano un'altra analogia con la n nelle trattazioni analitiche seguìte. Ma questa analogia è *formale* e si riscontra in altre rette dell'insieme, sol che si modifichi leggermente la trattazione [35].

Perciò io mi son chiesto: è possibile formulare una *V^a* condizione che (aggiunta alle precedenti) *individui* una retta in ciascuna delle geometrie (0), e *precisamente le n, n_e, n_i nelle geometrie M, M_e, M_i?*

---

(31) Da W. Blaschke nel § 5 della IV^a nota sulla geometria A in loc. cit. (13).

(32) Dal Fubini in una Nota degli Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, t. LIII, 1917-18, p. 1032. Poco dopo, ma indipendentemente, G. M. Green (in *Trans. of the Amer. Mat. Soc.*, vol. 2°, 1919, p. 79) ha definito la *pseudo-normale* (dandone una costruzione geometrica) che, come si può verificare, coincide con la n_p del Fubini.

(33) Che fra quelle soddisfatte da n sono le sole che hanno senso anche nelle geometrie A e P.

(34) Ossia A o P.

(35) Infatti abbiamo già ricordato (n.° 3) che la n_a o n_p è la retta congiungente P col punto N di coordinate omogenee $(\Delta_2 x, \Delta_2 y, \Delta_2 z, \Delta_2 t)$, precisamente come la n_i solo che Δ_2 si riferisce alla forma F_2 invece che all'elemento lineare di Gauss.

Orbene, se in luogo delle coordinate normali si adoperassero nelle geometrie A e P le stesse moltiplicate per una funzione I intrinseca e invariante, come è lecito (cfr. n.° 4), la forma F_2 e quindi il punto N muterebbero; e così pure le rette n_a, n_p.

Perchè nel caso affermativo si sarebbe potuto dare una definizione di normale *unica nelle cinque geometrie*, e quindi affatto *naturale* per le più recenti A e P ([36]).

Orbene, dopo le considerazioni svolte nella 1ª parte, è facile trovare una V^a condizione fondandosi sulla seguente proprietà della n e delle n_e, n_i: di dipendere da elementi di Σ del prim'ordine, che è anche *il minimo possibile;* nel senso che dipendono dalle derivate *prime* delle coordinate cartesiane *non omogenee* e delle *coordinate di Weierstrass* di P rispettivamente.

Infatti tali coordinate sono quelle normali (n.° 4) per il gruppo M e per i gruppi M_e e M_i rispettivamente; ed intanto il concetto di coordinate normali sussiste anche per i gruppi A e P; dunque è spontaneo imporre alla normale la seguente condizione:

V^a *di dipendere dalle derivate del minimo ordine possibile delle coordinate normali di* P.

Ed io dimostrerò (n.° 3) che: *nelle geometrie* (0) *una superficie generica* ([37]) *ha in ciascun punto* P *una sola retta soddisfacente le condizioni* $I^a, \ldots, V^a$, *retta che è rispettivamente* n, n_e, n_i, n_a, n_p.

Si può dunque dare effettivamente una definizione di normale unica per le cinque geometrie: *è la retta individuata dalle condizioni* $I^a, \ldots, V^a$ *in una superficie generica.*

7. Geometria M. Qui le coordinate normali sono le cartesiane non omogenee x, y, z $(t=1)$ e una superficie Σ è individuata, a meno di un movimento, dalle due forme di Gauss

$$d s^2 = E d u^2 + G d v^2, \quad D d u^2 + D'' d v^2 \tag{26}$$

nell'ipotesi che le linee u, v siano quelle di curvatura. Detti (X_i, Y_i, Z_i) $(i=1, 2, 3)$ i coseni direttori delle tangenti alle linee u, v e della normale ordinaria n in $P(x, y, z)$, ossia posto

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \; X_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \; X_3 = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)} \tag{27}$$

(con le analoghe), quelli di ogni retta r per P e non del piano tangente a Σ

([36]) È forse adottabile anche in eventuali nuove geometrie.

([37]) Le superficie eccezionali sono particolarissime, come apparirà dalla dimostrazione.

(condiz. 1ª) saranno proporzionali a numeri del tipo

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + X_3, \ldots \tag{28}$$

Ora imponiamo ad r le rimanenti condizioni $II^a, \ldots, V^a$. Per la III^a, c_1 e c_2 debbono essere funzioni di u, v invarianti per movimenti, quindi funzioni delle sole E, G, D, D'' e loro derivate; inoltre $X_i\ Y_i\ Z_i$ dipendono solo dalle derivate prime (di ordine minimo) di x, y, z, quindi, volendo che lo stesso accada di X, Y, Z (condiz. V^a) dovremo supporre che c_1 e c_2 siano funzioni delle sole E, G (e non di D, D'' e derivate di E, G, D, D'', che dipendono dalle derivate seconde almeno).

Inoltre, per la II^a, c_1 e c_2, debbono essere intrinseche (come X_i, Y_i Z_i). Ora le linee u, v assunte sono intrinseche; non così i parametri u, v, perchè suscettibili ancora di una trasformazione del tipo

$$u' = u'(u), \quad v' = v'(v), \tag{29}$$

in seguito alla quale E, G diventano:

$$E' = E\,U^2, \quad G' = G\,V^2 \qquad (U = d\,u : d\,u', \quad V = d\,v : d\,v'), \tag{30}$$

quindi, affinchè le $c_i(E, G)$ $(i = 1, 2)$ siano intrinseche occorre che soddisfino le relazioni $c_i(E', G') = c_i(E, G)$, e queste non potrebbero dedursi che dalle *due* relazioni (30) eliminando le (*altrettante*) funzioni U, V; ma ciò è impossibile, dunque le c_i debbono essere costanti.

Imponiamo infine la IV^a. Fissate le costanti c_1, c_2, l'equazione differenziale

$$|\,d\,x,\ X,\ d\,X\,| = 0 \tag{31}$$

delle sviluppabili generate da r, variando P su Σ, è del tipo

$$L\,d\,u^2 + 2\,M\,d\,u\,d\,v + N\,d\,v^2 = 0; \tag{32}$$

quindi affinchè le loro tracce su Σ formino un sistema coniugato occorre che sia

$$L\,D'' + N\,D = 0. \tag{33}$$

Ora risulta dalle (31) e poi dalle (27) che

$$L = \left|\frac{\partial x}{\partial u},\ X,\ \frac{\partial X}{\partial u}\right| = \sqrt{E}\,\left|X_1,\ X,\ \frac{\partial X}{\partial u}\right| = \sqrt{E}\,\left|X_1,\ c_2 X_2 + X_3,\ \frac{\partial X}{\partial u}\right|;$$

ma, per la (28) e per note formole che esprimono le $\frac{\partial X_i}{\partial u}$ mediante le stesse X_i ([38]), si ha:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\left(\frac{c_2}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}-\frac{D}{\sqrt{E}}\right)X_1-\frac{c_1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2+c_3\frac{D}{\sqrt{E}}X_3,$$

quindi, ricordando che $|X_1, X_2, X_3|=1$, si trova che

$$L=c_1 c_2 D+\frac{c_1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v},\quad \left(N=-c_1 c_2 D''-\frac{c_2}{2\sqrt{E}}\frac{\partial G}{\partial u}\right);$$

perciò la (33) si muta nella relazione

$$4c_1 c_2 D D''+c_1\frac{D''}{\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v}+c_2\frac{D}{\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}=0 \tag{34}$$

che, non essendo identica in una superficie generica ([39]), esige che sia $c_1=c_2=0$.

Dunque $X=X_3,\ldots$, cioè r coincide con la normale n.

2.° Geometria M_e. — Nello spazio ellittico di curvatura 1 (come può supporsi) le coordinate normali sono quelle x, y, z, t di Weierstrass, e una superficie è individuata a meno di un movimento (dello spazio ellittico) da due forme del tipo (26), quando le linee u, v sono quelle di curvatura.

Dette (X_i, Y_i, Z_i, T_i) le costanti di direzione delle tangenti a queste linee e della normale n_e in $P(x, y, z, t)$, sussistono le formole ([40])

$$\frac{\partial x}{\partial u}=X_1\sqrt{E},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=X_2\sqrt{G}, \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial u}&=-x\sqrt{E}+\frac{D}{\sqrt{E}}X_3-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_1,\\ \frac{\partial X_3}{\partial u}&=-\frac{D}{\sqrt{E}}X_1,\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

([38]) Cfr. L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, 3ª ed., vol. I, p. 181.

([39]) Se pure esistono superficie eccezionali, caratteristiche dalla (34) con c_1, c_2 costanti. Per decidere, bisognerebbe esaminare se la (34) è compatibile con le equazioni di Gauss e di Codazzi, ma ciò qui non interessa. Analoga osservazione si può fare per gli altri casi.

([40]) Cfr. loc. cit. ([38]), 2ª ed., vol. I, p. 498, formole (41). Da queste si deducono quelle del testo, ponendovi $R=1$, cambiandovi ξ, η, ζ in X_3, X_1, X_2 ed eliminando ρ_1, ρ_2 mediante le formole di p. 497.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2,\quad \frac{\partial X_2}{\partial v}&=-x\sqrt{G}+\frac{D''}{\sqrt{G}}X_3-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1,\\ \frac{\partial X_3}{\partial v}&=-\frac{D''}{\sqrt{G}}X_2,\end{aligned}\right\}\tag{36'}$$

con le analoghe.

Ragionando come nel 1.° caso, si vede che una retta r soddisfacente le condizioni I^a, II^a, III^a, V^a ha le costanti di direzione proporzionali a numeri del tipo (28) con c_1 e c_2 costanti. Fissate c_1 e c_2, l'equazione delle sviluppabili generate da r variando P è:

$$|x,\ dx,\ X,\ dX|=0,\tag{37}$$

del tipo (32); e la condizione affinchè sia soddisfatta la condizione IV^a è la (8).

Ora risulta dalla (37) e poi dalle (28) che:

$$L=\left|x,\ \frac{\partial x}{\partial u},\ X,\ \frac{\partial X}{\partial u}\right|=\sqrt{E}\left|x,\ X_1,\ c_2X_2+X_3,\ \frac{\partial X}{\partial u}\right|;$$

ma, per le (28), (36) e (36)',

$$\frac{\partial X}{\partial u}=-c_1x\sqrt{E}+\left(\frac{c_2}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}-\frac{D}{\sqrt{E}}\right)X_1-\frac{c_1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2+c_1\frac{D}{\sqrt{E}}X_3,$$

quindi

$$L=c_1\left(c_2D+\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v}\right)|x,\ X_1,\ X_2,\ X_3|;$$

e del pari si troverebbe che:

$$N=-c_2\left(c_1D''+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)|x,\ X_1,\ X_2,\ X_3|.$$

Sostituendo in (38), si ha la relazione:

$$c_1\frac{D''}{\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}=c_2\frac{D}{\sqrt{E}}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}\tag{38}$$

che, non essendo identica per una superficie generica, esige che sia $c_1=c_2=0$. Ciò prova che $X=X_3,\ldots$ ossia che r coincide con n_α.

3.° GEOMETRIA M_i. Analoga dimostrazione.

4.° GEOMETRIA A. Qui le coordinate normali sono le cartesiane non omogenee x, y, z. Scelte le asintotiche (invarianti per affinità) come linee u, v sulla superficie, questa è individuata (a meno di una collineazione di A) dalle due forme (3) e (5), come si è detto nel n.° 2, ove si è visto che x soddisfa le equazioni:

$$\varphi x_{uu} = \varphi_u x_u + P x_v, \quad \varphi x_{vv} = Q x_u + \varphi_v x_v \tag{39}$$

(soddisfatte anche da y e z). Ricordiamo poi le altre (di BLASCHKE)

$$\frac{\partial X_3}{\partial u} = (\varphi - \sigma) x_u - \frac{P_v}{\varphi^2} x_v, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\frac{Q_u}{\varphi^2} x_u + (\varphi - \sigma) x_v \tag{40}$$

con le analoghe in y, Y_3 e z, Z_3. In esse

$$X_3 = -\frac{1}{2} \Delta_2 x = -x_{uv} : \varphi, \ldots \tag{41}$$

sono numeri proporzionali ai coseni direttori della normale affine (fine del n.° 4) e $\sigma = PQ : \varphi^3$ è una funzione *intrinseca ed invariante* (41).

Le linee u e v sono intrinseche; non così i parametri u, v, suscettibili di una trasformazione del tipo (29), che muta φ, P, Q in

$$\varphi' = \varphi U V, \quad P' = P U^3, \quad Q' = Q V^3 \text{ (42)}; \tag{42}$$

sicchè $\sqrt[3]{P}$, $\sqrt[3]{Q}$, φ si moltiplicano per U, V, $U V$. Ora, poichè lo stesso accade di x_u, x_v, x_{uv}, ne segue che i rapporti di queste quantità alle precedenti non mutano, e perciò che i punti

$$P_1 (x + x_u / \sqrt[3]{P}), \quad P_2 (x + x_v / \sqrt[3]{Q}), \quad P_3 (x - X_3) \text{ (43)} \tag{43}$$

sono intrinsecamente definiti ed anche invarianti per affinità (44).

---

(41) Per tutto ciò, in parte già richiamato nel n.° 2, cfr. il § 6 di una Memoria di BLASCHKE. Cfr. loc. cit. (13), Bd. 70, p. 18.

(42) Risulta dalle espressioni di φ, P, Q; o anche dal fatto che le (39) sono intrinseche, quindi si ha $2\varphi' du' dv' = 2\varphi \, du \, dv$, $P' du'^3 + Q' dv'^3 = P dv^3 + Q dv^3$ (onde $P' du'^3 = P du^3, \ldots$).

(43) Rispettivamente sulle tangenti alle linee u, v e sulla n_a nel punto P. Di tali punti abbiamo scritto solo la 1ª coordinata; così faremo in seguito.

(44) Le loro coordinate essendo *cogredienti* alle x, y, z (come subito si vede) rispetto ad ogni affinità unimodulare.

Dunque *il tetraedro* $P\,P_1\,P_2\,P_3$ *è intrinseco ed invariante per affinità* (unimodulari).

Or consideriamo una retta r per P e imponiamole le $I^a, \dots, V^a$.

La r è determinata dal suo punto d'incontro R col piano $P_1\,P_2\,P_3$, punto che, non dovendo giacere sulla retta $P_1\,P_2$ (condiz. I^a), deve essere del tipo:

$$R\left(x + \frac{c_1}{c\sqrt[3]{P}}x_u + \frac{c_2}{c\sqrt[3]{Q}}x_v - \frac{X_3}{c}\right) \qquad (c = c_1 + c_2 + 1).$$

Poi r dev'essere (cond. III^a) invariante per affinità (come lo è il piano $P_1\,P_2\,P_3$), quindi tale dev'essere R; e perciò c_1, c_2 debbono essere delle funzioni di φ, P, Q e delle loro derivate. Ma, poichè nelle coordinate di R già entrano le derivate prime e *seconde* di x, y, z (45), affinchè la cond. V^a sia soddisfatta occorre che c_1, c_2 siano funzioni di φ, P, Q (e non delle loro derivate, che contengono derivate terze): $c_r = c_r(\varphi, P, Q)$. Inoltre c_1, c_2 debbono essere intrinseche (cond. II^a), quindi tali che, in seguito alla (29), risulti:

$$c_r(\sqrt[3]{P'\,Q'} : \sigma, P', Q') = c_r(\sqrt[3]{P\,Q} : \sigma, P, Q) \quad (^{46});$$

ma siffatte relazioni, del tipo $f(P', Q') = f(P, Q)$, non potrebbero dedursi che dalle *due* ultime relazioni (42) eliminando le (*altrettante*) funzioni U, V, e ciò è impossibile, dunque c_1, c_2 debbono essere *costanti.*

Imponiamo infine la cond. IV^a. Sopprimendo il primo termine nelle coordinate di R e poi moltiplicandole per c, si hanno i numeri

$$X = \frac{c_1}{\sqrt[3]{P}}x_u + \frac{c_2}{\sqrt[3]{Q}}x_v - X_3, \dots \tag{44}$$

proporzionali ai coseni direttori di r, la quale, variando P su Σ, genera una sviluppabile quando è soddisfatta la (31). Queste sviluppabili tracciano su Σ un sistema coniugato quando nell'equazione (31), del tipo (32), manca il termine rettangolo, ossia quando

$$|\, x_u,\ X,\ X_v \,| + |\, x_v,\ X,\ X_u \,| = 0. \tag{45}$$

Calcolando X_u dalla (44) ed eliminando x_{uu}, x_{vv}, $\partial X_3 / \partial u$ mediante le (39)

---

(45) Perchè φ, P, Q dipendono da tali derivate, come risulta dalle (3) e (5).

(46) Si noti che $\varphi = \sqrt[3]{P\,Q} : \sigma$ e che σ *non muta per la* (29) (essendo intrinseca).

e (40), si trova

$$X_u = \left(\frac{c_1}{\sqrt[3]{P}} \cdot \frac{\varphi_u}{\varphi} - \frac{c_1}{3\sqrt[3]{P}} \cdot \frac{P_u}{P} + \sigma - \varphi\right) x_u - \frac{c_2 \varphi}{\sqrt[3]{Q}} X_3$$

a meno di un termine in x_v; quindi, per la (44) e l'espressione (3) di φ, si trova:

$$| x_v, X, X_u | = -i\varphi\left[\frac{c_1 c_2 \varphi}{\sqrt[3]{PQ}} - \left(\frac{c_1}{\sqrt[3]{P}} \frac{\varphi_u}{\varphi} - \frac{c_1}{3\sqrt[3]{P}} \frac{P_u}{P} + \sigma - \varphi\right)\right].$$

Sostituendo in (45) questa espressione e l'analoga di $| x_u, X, X_v |$ (47), si ha la relazione

$$c_1 \frac{\partial}{\partial u} \frac{\varphi}{\sqrt[3]{P}} = c_2 \frac{\partial}{\partial v} \frac{\varphi}{\sqrt[3]{Q}}, \tag{46}$$

non identica per una Σ generica, e che perciò esige che sia $c_1 = c_2 = 0$, e quindi che r coincida con n_a.

5.° Geometria P. Qui le coordinate normali son quelle di Fubini x, y, z, t.

Una superficie Σ riferita alle asintotiche come linee u, v è individuata, a meno di una collineazione, da due forme del tipo

$$2\beta\gamma\, du\, dv, \qquad 2\beta\gamma(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3), \tag{47}$$

(ove β e γ sono invarianti per collineazioni e si esprimono mediante x, y, z, t e loro derivate *prime* e *seconde*) e da una terza forma $n\, du^2 + \nu\, dv^2$ (i cui coefficienti dipendono *anche dalle derivate terze di* $x, \ldots$).

Sono da ricordare le equazioni

$$x_{uu} = \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} x_u + \beta x_v + n x, \quad x_{vv} = \gamma x_u + \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} x_v + \nu x \tag{48}$$

soddisfatte anche da y, z e t.

I parametri u, v delle asintotiche sono suscettibili ancora di una trasformazione del tipo (29), che muta β e γ in

$$\beta' = \beta\, U^2 : V, \quad \gamma' = \gamma\, V^2 : U; \tag{49}$$

---

(47) Che si deduce dalla precedente cambiandovi i, c_1, c_2, P, Q, u rispettivamente in $-i$, c_2, c_1, Q, P, v.

sicchè $\sqrt[3]{\beta^2\gamma}$, $\sqrt[3]{\beta\gamma^2}$, $\beta\gamma$ si moltiplicano per U, V, UV [48]. Ora, poichè lo stesso accade di x_u, x_v, x_{uv}, si deduce che i rapporti di queste funzioni alle precedenti non mutano, e perciò che i punti

$$P_1\,(x + x_u/\sqrt[3]{\beta^2\gamma}),\quad P_2\,(x + x_v/\sqrt[3]{\beta\gamma^2}),\quad P_3\,(x + x_{uv}/\beta\gamma)$$

sono intrinseci ed anche invarianti per collineazioni [49].

Dunque: *il tetraedro $PP_1P_2P_3$ è intrinseco ed invariante per collineazioni.*

Ciò posto, come nel caso 4°, si riconosce che ogni retta r soddisfacente la cond. I^a è la congiungente P con un punto del tipo

$$R\left(x + \frac{c_1}{c\sqrt[3]{\beta^2\gamma}}\,x_u + \frac{c_2}{c\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\,x_v + \frac{x_{uv}}{c\beta\gamma}\right) \qquad (c = c_1 + c_2 + 1).$$

Volendo che r soddisfi la cond. III^a, c_1, c_2 dovranno essere funzioni invarianti per collineazioni e perciò funzioni di β, γ, n, ν e loro derivate. Poichè nelle coordinate di R già entrano le derivate prime e seconde (*ma non terze*) di x, y, z, t, affinchè la cond. V^a sia soddisfatta occorre che c_1, c_2 siano funzioni di β e γ (e non di n, ν e delle derivate di β, γ, n, ν che contengono derivate terze): $c_r = c_r(\beta, \gamma)$. Inoltre c_1 e c_2 debbono essere intrinseche (cond. II^a), quindi tali che, in seguito alle (29), risulti $c_r(\beta', \gamma') = c_r(\beta, \gamma)$; ma ogni relazione di tal tipo non potrebbe dedursi che dalle *due* relazioni (49) eliminando le (*altrettante*) funzioni U, V, e ciò è impossibile; dunque c_1, c_2 debbono essere *costanti.*

Imponiamo infine la cond. IV^a. L'equazione differenziale delle sviluppabili generate da r, variando P su Σ, è la (37) ove

$$X = \frac{c_1}{\sqrt[3]{\beta^2\gamma}}\,x_u + \frac{c_2}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\,x_v + \frac{x_{uv}}{\beta\gamma}, \ldots \text{ [50]} \tag{50}$$

---

[48] Tutto ciò che precede si desume dalle Note di FUBINI citate in [2].

[49] Per ragione analoga a quella addotta in [44].

[50] Infatti dette ξ, η, ζ, τ le coordinate di R, l'equazione delle sviluppabili si ottiene imponendo che i 4 punti (x), $(x + dx)$, (ξ), $(\xi + d\xi)$ stiano in un piano, e perciò è $|x, x + dx, \xi, \xi + d\xi| = 0$ ossia $|x, dx, \xi, d\xi| = 0$; or questa si trasforma subito nella (37) osservando che $\xi = x + X/c, \ldots$

La (37) è del tipo (32), quindi le sviluppabili tracciano su Σ un sistema coniugato se $M=0$ ossia

$$|x, x_v, X, X_u| + |x, x_u, X, X_v| = 0. \tag{51}$$

Derivando (50) rispetto ad u ed eliminando poi x_{uu}, x_{uuv} mediante la prima delle (48) e quella che se ne deduce derivandola rispetto a v, si trova che

$$X_u = \left(\frac{c_1}{\beta\gamma} \cdot \frac{\partial \sqrt[3]{\beta\gamma^2}}{\partial u} + \frac{1}{\beta\gamma} \frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u \partial v} + 1\right) x_u + \frac{c_2}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}} x_{uv},$$

a meno di un termine in x e di uno in x_v; quindi (con facile calcolo)

$$|x, x_v, X, X_v| = k\left(\frac{c_1}{\beta\gamma} \cdot \frac{\partial \sqrt[3]{\beta\gamma^2}}{\partial u} + \frac{1}{\beta\gamma} \frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u \partial v} + 1 - c_1 c_2\right),$$

ove $k \neq 0$ [51].

Sostituendo in (51) questa espressione e l'analoga di $|x, x_u, X, X_v|$ (che se ne deduce cambiandovi k, c_1, c_2, β, γ, u, v rispettivamente in $-k$, c_2, c_1, γ, β, v, u), si ha la relazione

$$c_1 \frac{\partial \sqrt[3]{\beta\gamma^2}}{\partial u} = c_2 \frac{\partial \sqrt[3]{\beta^2\gamma}}{\partial v} \tag{52}$$

non identica per una superficie generica, e che perciò esige che sia $c_1 = c_2 = 0$, e quindi che il punto R giaccia sulla retta PP_3, che è appunto la normale n_p del FUBINI [52]; dunque r coincide con la n_p.

Morcone (Benevento), 3 Ottobre 1921.

---

(51) Precisamente: $k = |x, x_u, x_v, x_{uv}| : \beta\gamma$, che vale 1, come si desume dalle Note del FUBINI, citate in (2).

(52) Perchè passa per quel punto N di coordinate $X = \frac{1}{2}\Delta_2 x = x_{uv} : \beta\gamma \ldots$ che individua la n_p. (Cfr. n.° 3).

L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista projettivo.

(*Di* EDUARD ČECH, *a Praga.*)

1. L'oggetto di questa Memoria è il problema di trovare un sistema di enti geometrici, invarianti per trasformazioni projettive, la cui conoscenza equivalga a quella dei coefficienti dell'equazione di una superficie, nell'intorno d'un punto regolare, non parabolico, sino al quarto grado inclusivamente; un sistema tale sarà indicato nel n.° 8. Giova definire la superficie in questione, secondo WILCZYNSKI (¹), mediante un sistema di due equazioni a derivate parziali del tipo:

$$\left.\begin{aligned} y_{uu} + 2\,b\,y_v + f\,y &= 0, \\ y_{vv} + 2\,a'\,y_u + g\,y &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

di cui si suppongono riempite le condizioni d'integrabilità.

Il sistema (1) possiede quattro soluzioni linearmente indipendenti $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, $y^{(4)}$. Interpretando queste soluzioni come coordinate omogenee puntuali, si ha una superficie Π riferita alle asintotiche. Ci occorre considerare un altro sistema di riferimento, *variabile con* u, v, chiamato il sistema di *coordinate locali*, determinato nella maniera seguente: Dati i valori u, v, siano $z^{(i)}$ le coordinate d'un punto qualunque nel sistema primitivo e x_i le coordinate dello stesso punto nel sistema locale; allora si ha

$$z^{(i)} = x_1\,y^{(i)} + x_2\,y_u^{(i)} + x_3\,y_v^{(i)} + x_4\,y_{uv}^{(i)}. \tag{2}$$

Faremo uso costante delle coordinate così definite, le quali, come si vede, sono affatto indipendenti dalla scelta speciale delle soluzioni particolari $y^{(i)}$; ed anche adopereremo le coordinate contragredienti ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4. L'equa-

(¹) *Projective differential geometry of curved surfaces,* cinque Memorie pubblicate nelle Transactions of the Amer. Math. Soc., vol. 8-10, 1907-09. V. specialmente il *First Memoir* e il *Second Memoir.*

zione di Π, nel sistema locale, è

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_4}{x_1} &= \frac{x_2}{x_1}\frac{x_3}{x_1} + \frac{2}{3} b \frac{x_2^3}{x_1^3} + \frac{2}{3} a' \frac{x_3^3}{x_1^3} + \\ &+ \frac{1}{6 x_1^4} (b_u x_2^4 + 4 b_v x_2^3 x_3 + 4 a'_u x_2 x_3^3 + a'_v x_3^4) + \cdots\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

In tutta la Memoria, O sarà il punto $(1, 0, 0, 0)$ in considerazione, ω il piano tangente $(x_4 = 0)$, $\alpha_1 (x_2 = x_4 = 0)$ e $\alpha_2 (x_3 = x_4 = 0)$ le tangenti asintotiche.

2. Nella Memoria « *O křivkovém a plošném elementu třetího řádu projektivního prostoru* » (Intorno all'elemento del terz'ordine di una curva gobba ed una superficie dello spazio projettivo) [1], mi ero già occupato del tema proposto, limitandomi però ai termini del terzo grado. Conviene stabilirè alcuni risultati ivi raggiunti. All'elemento della superficie, vi avevo riattaccato una *serie di trasformazioni* Σ_k *tra il piano punteggiato* ω *e la stella di piani* O, dipendenti da un parametro k. Le equazioni di Σ_k, nel sistema delle coordinate locali, sono

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= 0, & \sigma x_1 &= 2k(a'\xi_2^3 + b\xi_3^3) - 3\xi_2\xi_3\xi_4, \\
\rho\xi_2 &= 3 x_2 x_3^2, & \sigma x_2 &= 3\xi_2\xi_3^2, \\
\rho\xi_3 &= 3 x_2^2 x_3, & \sigma x_3 &= 3\xi_2^2\xi_3, \\
\rho\xi_4 &= 2k(b x_2^3 + a' x_3^3) - 3 x_1 x_2 x_3, & x_4 &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

La trasformazione Σ_0 è subordinata alla polarità rispetto alla quadrica H, la così detta quadrica di Lie, la cui equazione è

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 + 2 a' b x_4^2 = 0. \quad (5)$$

Questa quadrica è l'iperboloide osculatore delle due rigate generate dalle tangenti asintotiche di un sistema lungo la curva asintotica dell'altro sistema. Se $b' = a' = 0$, il che soltanto per una quadrica accade identicamente, tutte le trasformazioni Σ_k si riducono a Σ_0. Per le superficie rigate, una delle funzioni b ed a' è identicamente zero, e le Σ_k sono trasformazioni quadratiche. Qui ci limiteremo al caso generale $a' b \neq 0$, rimandando pel caso delle rigate alla mia Memoria « *Projektivní geometrie pěti soumezných mimoběžek* »

[1] *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky,* Praga, t. 50, 1920-21, pp. 219-249.

(Geometria projettiva di cinque rette sghembe infinitamente vicine) (¹). Per un valore dato di k, ai fasci di piani della stella O, corrisponde nelle Σ_k una rete di cubiche razionali, con un punto base doppio in O e due punti base semplici infinitamente vicini su ciascuna tangente asintotica, sì che la curvatura dei due rami in O è il prodotto di $-\frac{2k}{3}$ per quella della curva asintotica corrispondente. I punti corrispondenti nelle Σ_k a un piano generico della stella O formano una punteggiata sulla tangente coniugata all'intersezione del piano con ω, omografica col parametro k. Le cubiche corrispondenti nelle Σ_k ad un fascio di piani d'asse r formano un fascio con un punto base doppio in O, un punto base infinitamente vicino sopra ciascuna tangente asintotica, e tre altri punti base, che si trovano nelle intersezioni della polare reciproca di r rispetto ad H colle tangenti di DARBOUX-SEGRE (²)

$$x_4 = b\, x_2^3 + a'\, x_3^3 = 0\,;$$

questi ultimi sono i flessi delle cubiche. Segue incidentemente che *la posizione delle tangenti di* DARBOUX-SEGRE *non dipende che dalle curvature delle due asintotiche, anzi soltanto dal loro rapporto.* Ciò spiega il fatto segnalato da FUBINI (³) che, date su tutta la superficie le asintotiche, si ha una espressione per le direzioni di DARBOUX-SEGRE, la quale non contiene le derivate di D, D', D''. Vedremo in appresso (n.° 12) la costruzione effettiva delle tangenti di DARBOUX-SEGRE dalle curvature delle asintotiche.

Fra le trasformazioni Σ_k ve ne sono due d'un significato geometrico semplice. Il piano che corrisponde ad un punto P del piano ω nella trasformazione Σ_1 è il luogo delle polari di P rispetto alle coniche osculatrici delle intersezioni di Π coi piani del fascio OP, e correlativamente; che il luogo in questione è un piano, è in sostanza un risultato ottenuto da TRANSON già nel 1841 (⁴). Nella trasformazione Σ_{-3} invece, al punto P corrisponde il

(¹) Publications de la Faculté des sciences de l'Université Masaryk, Brno, 1921, n.° 4 (con un riassunto francese).

(²) Segnalo qui una definizione semplicissima di queste tangenti, che mi pare finora inosservata: I punti delle tangenti di DARBOUX-SEGRE sono i centri delle omologie, trasformanti la superficie in un'altra che ha in O un contatto del terz'ordine colla proposta; tutte queste omologie sono involutorie e il piano d'omologie è il piano polare del centro rispetto ad H.

(³) *Applicabilità projettiva di due superficie* (Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, t. 41, 1916, p. 153).

(⁴) *Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces.* Journal de Liouville, t. 6, 1841.

piano osculatore della curva di contatto di π col cono circoscritto, avente il centro nel punto P. Questa trasformazione è stata considerata da SEGRE nella Memoria « *Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie* [1]. La connessione di quelle due trasformazioni con le curvature delle asintotiche, le tangenti di DARBOUX-SEGRE e la quadrica di LIE sembra essere stata svolta per la prima volta nella mia Memoria citata al principio di questo numero. Giova però considerare tutte le trasformazioni Σ_k.

3. Alle cose dette, che furono svolte nella Memoria citata, aggiungiamo qui una *costruzione effettiva del punto P corrispondente in Σ_k a un piano ξ $(0_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ della stella O, supposta la conoscenza della correlazione Σ_0 e della curvatura delle asintotiche.* Si costruisca dapprima il polo P_0 del piano ξ rispetto ad H; poi si scelga, nel piano ω, una conica p_i $(i = 1, 2)$, toccante α_i in O e la cui curvatura in questo punto sia il prodotto di $\frac{4k}{3}$ per quella dell'asintotica corrispondente, sì che p_i passi per P_0; si determini l'intersezione P_i della retta OP con la tangente di p_i nel punto d'intersezione con α_j $(i, j = 1, 2)$. Il punto cercato P, insieme con O, divide armonicamente $P_1 P_2$. Il punto P_i è indipendente dalla scelta particolare della conica p_i, come si vede semplicemente osservando che, da una conica soddisfacente le condizioni, si ottengono le altre mediante omologie di centro O ed asse OP_0. Per la dimostrazione si può dunque la conica p_1 far passare per il punto $(0, 1, 0, 0)$. L'equazione di p_1 ha la forma

$$2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + 2\, a_{23}\, x_2\, x_3 + a_{33}\, x_3^2 = 0.$$

Dalle condizioni prescritte, si trova

$$a_{12} : a_{23} : a_{33} = 3\, \xi_2\, \xi_3 : (3\, \xi_3\, \xi_4 - 4\, k\, a'\, \xi_2^2) : 8\, k\, a'\, \xi_2\, \xi_3.$$

L'equazione della tangente di p_1 nel punto $(0, 1, 0, 0)$ è

$$3\, \xi_2\, \xi_3\, x_1 + (3\, \xi_3\, \xi_4 - 4\, k\, a'\, \xi_2^2)\, x_3 = 0$$

e le coordinate di P_1 risultano

$$x_1^{(1)} : x_2^{(1)} : x_3^{(1)} : x_4^{(1)} = (-3\, \xi_3\, \xi_4 + 4\, k\, a'\, \xi_2^2) : 3\, \xi_3^2 : 3\, \xi_2\, \xi_3 : 0.$$

---

(1) *Rendiconti Acc. Lincei*, t. 17, 1908.

Similmente si trova per P_2

$$x_1^{(2)} : x_2^{(2)} : x_3^{(2)} : x_4^{(2)} = (-3\,\xi_2\,\xi_4 + 4\,k\,b\,\xi_3^2) : 3\,\xi_2\,\xi_3 : 3\,\xi_2^2 : 0.$$

Per il coniugato armonico di O rispetto a $P_1 P_2$ si ha evidentemente

$$\rho\,x_i = \xi_2\,x_i^{(1)} + \xi_3\,x_i^{(2)} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

il che, per le (4), prova l'asserzione fatta. Se $b = 0$ (superficie rigate), la costruzione di P_2 diviene illusoria; ma allora si ha semplicemente $P \equiv P_1$. S'intende che si può fare anche la costruzione correlativa.

4. Cominciando a considerare anche i termini del quarto grado nell'equazione (3), fa d'uopo accennare un teorema dovuto a MOUTARD [1]: *Il luogo delle coniche osculatrici delle curve sezioni di* Π *coi piani passanti per una tangente fissa, è una quadrica, che diremo la quadrica di* MOUTARD. L'equazione della quadrica di MOUTARD appartenente alla tangente

$$x_4 = x_3 - n\,x_2 = 0 \tag{6}$$

è

$$\left.\begin{aligned}\Big[8\,(b + a'\,n^3)^2 - 3\,n\,(b_u + 4\,b_v\,n + 4\,a'_u\,n^3 + a'_v\,n^4)\Big]\,x_4^2 &+ \\ + 18\,n^3\,(x_1\,x_4 - x_2\,x_3) + 24\,n^2\,(a'\,n^3 - 2\,b)\,x_2\,x_4 &- \\ - 24\,n\,(2\,a'\,n^3 - b)\,x_3\,x_4 &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Bisogna indicare degli enti geometrici, per mezzo di cui si possa costruire la quadrica di MOUTARD appartenente a una tangente qualsiasi. Mi sono occupato di questo problema nella Memoria: « *Moutardovy kvadriky* » (Le quadriche di MOUTARD) [2], della quale occorre adesso riferire qualche risultato. Si stabilisca dapprima *la trasformazione* Ω *nella varietà delle rette dello spazio* nella maniera seguente: Una retta generica r incontra il piano ω nel punto P. A questa retta si farà corrispondere la sua polare reciproca rispetto alla quadrica di MOUTARD appartenente alla tangente OP. È chiaro senz'altro che la conoscenza di Ω basti a costruire le quadriche di MOUTARD. Le equazioni di Ω sono del settimo grado nelle coordinate di retta. Ma si può decomporre Ω

---

(1) V. DARBOUX, *Sur le contact des courbes et des surfaces*. Bull. des Sc. Math. (2), t. 4, 1880.

(2) Publications de la Faculté des sciences de l'Université Masaryk, Brno, n.° 3 (con un riassunto francese).

in operazioni più semplici. Diciamo r' la retta corrispondente a r in Ω e r'' quella corrispondente a r in Ω^{-1}; sia P l'intersezione di r con ω, π il piano $r\,O$. Nel fascio delle quadriche toccanti $\dot{H}$ lungo le due tangenti asintotiche, si fissi una qualunque, Q^λ, d'equazione

$$2\,(x_1\,x_4 - x_2\,x_3) - \lambda\,x_4^2 = 0\,; \tag{8}$$

e sia r_0 la retta polare di r rispetto a Q^λ. Nella schiera rigata determinata dalle tre rette r', r'', r_0 si ha una retta $P'\,P''$ giacente nel piano ω e una retta $(\pi'\,\pi'')$ passante per O; intendiamo che il punto P'' ed il piano π'' siano incidenti colla tangente $O\,P$, mentre il punto P' ed il piano π' sono incidenti colla tangente coniugata. Si trova poi, come ho mostrato nella Memoria citata, che le rette $P'\,P''$ e $\pi'\,\pi''$ rimangono fisse, quando la retta r descrive il fascio $(P\,\pi)$. Inoltre, il punto P'' ed il piano π' non dipendono che dal punto P; il punto P' e il piano π'' invece dipendono soltanto dal piano π. I piani π, π' corrispondono risp. ai punti P', P nella trasformazione $\Sigma_{3/2}$. La corrispondenza tra P e P'' e quella tra π e π'' sono due corrispondenze biunivoche involutorie di DE JONQUIÈRES; nella prima, si ha una curva C^λ, nell'altra un cono Γ^λ di elementi uniti. L'equazione di C^λ è

$$\left.\begin{aligned} x_4 = {} & 10\,b^2\,x_2^6 + (44\,a'\,b + 9\,\lambda)\,x_2^3\,x_3^3 + 10\,a'^2\,x_3^6 + \\ & + 12\,x_1\,x_2\,x_3\,(b\,x_2^3 + a'\,x_3^3) - 3\,x_2\,x_3\,(b_u\,x_2^4 - 2\,b_v\,x_2^3\,x_3 - \\ & - 2\,a'_u\,x_2\,x_3^3 + a'_v\,x_3^4) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

e quella del cono Γ^λ

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 = {} & 10\,a'^2\,\xi_2^6 + (28\,a'\,b - 9\,\lambda)\,\xi_2^3\,\xi_3^3 + 10\,b^2\,\xi_3^6 + \\ & + 12\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4\,(a'\,\xi_2^3 + b\,\xi_3^3) + 3\,\xi_2\,\xi_3\,(a'_v\,\xi_2^4 - 2\,a'_u\,\xi_2^3\,\xi_3 - \\ & - 2\,b_v\,\xi_2\,\xi_3^3 + b_u\,\xi_3^4) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Supponiamo ora che, *fatta la scelta della quadrica Q^λ, si sappia costruire l'intersezione d'una tangente arbitraria t con C^λ e il piano tangente di Γ^λ passante per t; allora si è in grado di costruire la retta corrispondente ad una retta arbitraria r in Ω.* Sia, come sopra, P l'intersezione di r con ω, π il piano $r\,O$, r_0 la retta polare di r rispetto a Q^λ, P' il punto corrispondente al piano π, e π' il piano corrispondente al punto P in $\Sigma_{3/2}$. Costruiamo l'intersezione R della retta $O\,P$ colla curva C^λ, come pure il piano tangente ρ del cono Γ^λ, contenente la medesima retta. Si determini il punto P'' e il piano π'', incidenti con la retta OP, sicchè

$$(O\,R\,P\,P'') = (\omega\,\rho\,\pi\,\pi'') = -1.$$

Le rette r_0, $r_1 \equiv P'\,P''$, $r_2 \equiv (\pi'\,\pi'')$ determinano una serie rigata (¹); la retta r' richiesta appartiene a questa serie e si determina coll'essere il rapporto anarmonico

$$(r_1\,r_2\,r_0\,r') = \frac{1}{3}.$$

La costruzione così esposta è abbastanza semplice, ma ci rimane il problema di sostituire C^λ e Γ^λ con elementi più semplici. Già nella Memoria citata ho fatto l'osservazione che conviene sostituire Γ^λ e C^λ con le loro trasformate mediante $\Sigma_{-\frac{5}{4}}$. Lo sono la curva D^λ

$$\left.\begin{aligned}(16\,a'\,b + 3\,\lambda)\,x_2^2\,x_3^2 - (b_u\,x_2^4 - 2\,b_v\,x_2^3\,x_3 - 2\,a'_u\,x_2\,x_3^3 + a'_v\,x_3^4) +\\ + 4\,(b\,x_2^3 + a'\,x_3^3)\,x_1 = x_4 = 0\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

e il cono Δ^λ

$$\left.\begin{aligned}(8\,a'\,b + 3\,\lambda)\,\xi_2^2\,\xi_3^2 - (a'_v\,\xi_2^4 - 2\,a'_u\,\xi_2^3\,\xi_3 - 2\,b_v\,\xi_2\,\xi_3^3 + b_u\,\xi_3^4) -\\ - 4\,(a'\,\xi_2^3 + b\,\xi_3^3)\,\xi_4 = \xi_1 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

5. Cerchiamo ora come si possa *ridurre la costruzione di D^λ e Δ^λ a qualche operazione eseguibile.* Se λ è variabile, la curva D^λ descrive un fascio. Si vede dapprima che O ne è un punto base triplo con tre punti base semplici infinitamente vicini rispettivamente sulle tre tangenti di Darboux-Segre. Inoltre, la tangente asintotica α_i $(i = 1, 2)$ contiene un altro punto base semplice E_i, di coordinate

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \begin{matrix} a'_v : 0 : 4\,a' : 0\ (E_1) \\ b_u : 4\,b : 0 : 0\ (E_2). \end{matrix} \tag{13}$$

Infine si ha un punto base infinitamente vicino ad E_i, sì che la tangente, in E_i, delle curve del fascio incontra l'altra tangente asintotica α_j nel punto D_j

(¹) Ovvero un fascio, se OP o la tangente coniugata è una tangente di Darboux-Segre.

di coordinate

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \begin{matrix} b_v : 0 : -2\,b : 0\,(D_1) \\ a'_u : -2\,a' : 0 : 0\,(D_2). \end{matrix} \tag{14}$$

Correlativamente: Δ^λ tocca il piano ω lungo le tre tangenti coniugate a quelle di Darboux-Segre; inoltre, per α_i passa un piano tangente fisso ε_i di coordinate

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \begin{matrix} 0 : 4\,a' : 0 : -a'_v\,(\varepsilon_1) \\ 0 : 0 : 4\,b : -b_u\,(\varepsilon_2). \end{matrix} \tag{15}$$

È pure fissa la retta di contatto di ε_i con Δ^λ, la quale determina, insieme con α_j, il piano δ_j di coordinate

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \begin{matrix} 0 : 2\,b : 0 : b_v\,(\delta_1) \\ 0 : 0 : 2\,a' : a'_u\,(\delta_2). \end{matrix} \tag{16}$$

ε_1, ε_2, δ_1, δ_2 sono, come si vede subito, ordinatamente i piani polari di E_1, E_2 D_1, D_2 rispetto ad H.

6. Prima di proseguire, vogliamo determinare *il significato geometrico dei punti e piani che qui compariscono.* Indichiamo con d la retta $D_1 D_2$, e la retta $E_1 E_2$, d' l'intersezione $(\delta_1\, \delta_2)$, e' l'intersezione $(\varepsilon_1\, \varepsilon_2)$. Le equazioni di queste rette sono

$$x_4 = 2\,a'\,b\,x_1 + a'_u\,b\,x_2 + a'\,b_v\,x_3 = 0 \;\; (d) \tag{17}$$

$$2\,b\,x_2 + b_v\,x_4 = 2\,a'\,x_3 + a'_u\,x_4 = 0 \;\; (d') \tag{18}$$

$$x_4 = 4\,a'\,b\,x_1 - a'\,b_u\,x_2 - a'_v\,b\,x_3 = 0 \;\; (e) \tag{19}$$

$$4\,a'\,x_2 - a'_v\,x_4 = 4\,b\,x_3 - b_u\,x_4 = 0 \;\; (e'). \tag{20}$$

Ora confrontando le nostre equazioni (17) e (18) colle equazioni (70^a) e (70^b) nel *Second Memoir* di Wilczynski, p. 95, si vede che *le nostre rette d e d' sono identiche colle « directrix lines » di* Wilczynski, vale a dire sono le direttrici della congruenza lineare intersezione dei complessi lineari osculatori delle due asintotiche. Ma anche le rette e, e' sono in stretta connessione colle asintotiche. Seguendo Wilczynski (1), chiamiamo *cono osculatore* di una curva gobba il cono proiettante dal punto considerato della curva la sua cubica gobba osculatrice, mentre *conica osculatrice* della curva sarà la se-

(1) *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces.* Teubner, 1906.

zione della sviluppabile delle tangenti di quella cubica col piano osculatore [1]. Ciò posto, si può facilmente trovare l'equazione della conica osculatrice di un'asintotica, confrontando l'equazione (40) p. 250 del libro citato or ora, colle equazioni (59), (62), (63) p. 93 del *Second Memoir*. In questa maniera si verifica subito che *il punto* E_i $(i, j = 1, 2)$ *è il polo di* α_j *rispetto alla conica osculatrice della curva asintotica di cui* α_i *è tangente.* Correlativamente ε_i è il piano polare di α_j rispetto al cono osculatore di quella asintotica.

7. Mentre le rette d, d' furono già considerate da Wilczynski, le rette e, e' sembrano nuove [2]. Ed è qui il luogo di far menzione d'una *terza coppia di rette polari rispetto a H che è in stretta connessione colle precedenti.* Nella nota: « *O trilineárních systémech čar na ploše a projektivní aplikaci ploch* » (Sui sistemi trilineari di curve sopra una superficie e l'applicazione proiettiva delle superficie) [3] ho dimostrato che, in ogni punto della superficie, *i piani osculatori delle tre curve coniugate a quelle di* Darboux-Segre *contengono una retta* l' *e, correlativamente, i punti di regresso delle sviluppabili circoscritte alla superficie lungo quelle tre linee giacciono sopra una retta* l [4]. Le equazioni di l sono

$$x_4 = 6\,a'\,b\,x_1 - (a'\,b_u - a'_u\,b)\,x_2 + (a'\,b_v - a'_v\,b)\,x_3 = 0 \tag{21}$$

e quelle di l'

$$6\,a'\,b\,x_2 + (a'\,b_v - a'_v\,b)\,x_4 = 6\,a'\,b\,x_3 - (a'\,b_u - a'_u\,b)\,x_4 = 0. \tag{22}$$

---

(1) Ho dato qualche proprietà di questi due enti correlativi nella nota « *K diferenciální geometrii prostorových křivek* » (Intorno alla geometria differenziale delle curve gobbe). Mem. dell'Acc. delle Scienze di Praga, t. 30, 1921, n.° 15.

(2) 18-5-1922. Le rette e, e' compariscono nella Memoria di Green, *Memoir on the general theory of surfaces and rectilinear congruences*, Transactions of the Amer. Math. Soc., vol. 20, 1919, sotto il nome di *canonical edges.*

(3) Memorie dell'Acc. delle Scienze di Praga, t. 30, 1921, n.° 23 (con un riassunto francese).

(4) Si ha, sopra una superficie non rigata, un'infinità di sistemi tripli di curve, dotati di queste due proprietà duali. (Son quelli che nella nota ora citata chiamo *trilineari*). Il sistema definito dall'equazione differenziale $(d\,v - \tau_1\,d\,u)\,(d\,v - \tau_2\,d\,u)\,(d\,v - \tau_3\,d\,u) = 0$ possiede queste proprietà quando si ha $\tau_1\,\tau_2\,\tau_3\,a' - b = \left| \tau_i^2\,,\ \tau_i\,,\ \frac{\partial \tau_i}{\partial u} + \tau_i \frac{\partial \tau_i}{\partial v} \right| = 0$. Si vede subito che, se in una corrispondenza tra due superficie si corrispondono le linee di Darboux-Segre, tutti i sistemi trilineari si corrispondono; e viceversa, se si corrispondono le asintotiche ed un sistema trilineare, le linee di Darboux-Segre si corrispondono.

Ora la (21) si può scrivere

$$x_4 = (2\,a'\,b\,x_1 + a'_u\,b\,x_2 + a'\,b_v\,x_3) + (4\,a'\,b\,x_1 - a'\,b_u\,x_2 - a'_v\,b\,x_3) = 0.$$

Confrontando colle (17) e (19) si vede che *le rette d, e, l appartengono ad un fascio* e, se m è quella retta del fascio che passa per O, si ha

$$(d\,e\,l\,m) = -2. \tag{23}$$

Correlativamente sia m' quella retta del fascio $d'\,e'$ che giace nel piano ω; la retta l appartiene pure al fascio e si ha

$$(d'\,e'\,l'\,m') = -2. \tag{24}$$

Se

$$\frac{\partial}{\partial v}\,a'\,b^2 = \frac{\partial}{\partial u}\,a'^2\,b = 0, \tag{25}$$

le tre rette d, e, l e anche le tre rette d', e', l' coincidono. Le superficie dotate di questa proprietà ammettono un gruppo continuo a due parametri di deformazioni proiettive in sè [1].

8. Adesso siamo in grado di indicare il sistema di enti geometrici, atto a sostituire i coefficienti dell'equazione (3) sino al quarto grado inclusivamente. Basta conoscere: *la quadrica di Lie, le curvature delle due asintotiche e le due rette d, e,* la cui definizione geometrica era data nel n.° 6. Basterà infatti dimostrare che, scegliendo H per la quadrica Q^λ, cioè facendo $\lambda = -4\,a'\,b$, la curva C^λ e il cono Γ^λ riescono determinati. Ora consideriamo nel piano ω due coniche c_1^k, c_2^k, definite nella maniera seguente (k è arbitrario): La conica c_i^k ($i = 1, 2$) tocca nel punto O la tangente asintotica α_i, la sua curvatura ivi è il prodotto di $-\frac{2k}{3}$ per quella dell'asintotica corrispondente, e tocca nel punto E_j ($i, j = 1, 2$) la retta $D_i E_j$. L'equazione

(1) Incidentemente noto che si può, come ho mostrato in una nota attualmente in corso di stampa nelle Memorie dell'Acc. delle Scienze di Praga, definire la deformazione proiettiva più semplicemente che non l'abbia fatto Fubini e precisamente: ***affinchè la corrispondenza fra due superficie sia una deformazione proiettiva, occorre e basta che, in ogni coppia di punti corrispondenti, i piani osculatori delle linee corrispondenti formino due stelle omografiche.***

di c_1^k è

$$c_1^k \equiv 3\, x_2\,(4\, b\, x_1 - b_u\, x_2 + 2\, b_v\, x_3) - 8\, k\, a'\, b\, x_3^2 = x_4 = 0, \tag{26}$$

e quella di c_2^k

$$c_2^k \equiv 3\, x_3\,(4\, a'\, x_1 + 2\, a'_u\, x_2 - a'_v\, x_3) - 8\, k\, a'\, b\, x_2^2 = x_4 = 0. \tag{27}$$

Le due quartiche spezzate $c_1^k \,.\, x_2^2 = 0$, $c_2^k \,.\, x_3^2 = 0$ hanno un punto triplo in O, e le tre tangenti in O dell'una coincidono in α_1, quelle dell'altra in α_2; segue che nel fascio da esse determinato esiste una quartica che tocca in O le tre tangenti di Darboux-Segre. L'equazione di questa curva è

$$c_1^k\, x_2^2 + c_2^k\, x_3^2 = 0$$

ossia

$$12\, x_1\,(b\, x_2^3 + a'\, x_3^3) - 3\,(b_u\, x_2^4 - 2\, b_v\, x_2^3\, x_3 - 2\, a'_u\, x_2\, x_3^3 + a'_v\, x_3^4) -$$
$$- 16\, k\, a'\, b\, x_2^2\, x_3^2 = 0.$$

Ma confrontando con (11) si vede che per

$$\lambda = -\frac{(16\, k + 3)}{9}\, a'\, b \tag{28}$$

la quartica così ottenuta coincide con D^λ.

Correlativamente sia γ_i^k $(i = 1, 2)$ il cono quadrico di centro O che tocca ω lungo α_i, la cui curvatura lungo α_i è il prodotto di $-\dfrac{3}{2\, k}$ per quella della sviluppabile delle tangenti dell'asintotica corrispondente, e che tocca ε_j lungo l'intersezione di ε_j con δ_i (1). L'equazione di γ_1^k è

$$\gamma_1^k \equiv 3\, \xi_3\,(-2\, b_v\, \xi_2 + b_u\, \xi_3 + 4\, b\, \xi_4) - 8\, k\, a'\, b\, \xi_2^2 = \xi_1 = 0, \tag{29}$$

e quella di γ_2^k

$$\gamma_2^k \equiv 3\, \xi_2\,(a'_v\, \xi_2 - 2\, a'_u\, \xi_3 + 4\, a'\, \xi_4) - 8\, k\, a'\, b\, \xi_3^2 = \xi_1 = 0. \tag{30}$$

Il cono Δ^λ appartiene alla schiera determinata dai coni spezzati $\gamma_1^k \,.\, \xi_3^2 = 0$, $\gamma_2^k \,.\, \xi_2^2 = 0$, allorchè si ha

$$\lambda = \frac{8\,(2\, k - 3)}{9}\, a'\, b, \tag{31}$$

(1) Si può osservare che c_i^k e $\gamma_i^{(-k)}$ sono polari rispetto ad H.

dunque generalmente per un altro valore di k che prima. Ma *se si sceglie* $Q^\lambda \equiv H$, cioè $\lambda = -4a'b$, si ha, in ambedue i casi,

$$k = -\frac{3}{4}. \tag{32}$$

Si vede dunque che $D^{(-4a'b)}$ e $\Delta^{(-4a'b)}$ sono completamente determinati, se si conoscono gli elementi enunciati al principio di questo numero, come si era asserito.

9. Rimane però desiderabile di fornire una costruzione geometrica della curva

$$c_1^k x_2^2 + c_2^k x_3^2 = 0 \tag{33}$$

dalle coniche c_1^k e c_2^k, e precisamente la costruzione della sua intersezione con una tangente data t della superficie Π. A tale scopo si consideri, accanto alla curva (33), la quartica generale del fascio predetto

$$c_1^k x_2^2 + \mu\, c_2^k x_3^2 = 0. \tag{34}$$

Si può in una maniera ben determinata stabilire il valore del parametro μ così che la retta t sia una delle tre tangenti della curva (34) nel punto triplo O. Indicando con R_1, R_2, P ordinatamente i punti d'intersezione di t colle curve c_1^k, c_2^k (33), si ha allora

$$(R_1 R_2 O P) = \mu. \tag{35}$$

Ora l'equazione delle tangenti della curva (34) nel punto triplo O è

$$b\, x_2^3 + \mu\, a' x_3^3 = x_4 = 0. \tag{36}$$

Ma questa equazione rappresenta un'involuzione cubica I_3^1, proiettiva col sistema dei valori del parametro μ, sì che al valore $\mu = 0$ ($\mu = \infty$) corrisponde la tangente asintotica α_1 (α_2) contata tre volte, mentre le tangenti di Darboux-Segre corrispondono al valore $\mu = 1$. Si è dunque condotti al problema già accennato nel n.° 2, di costruire le tangenti di Darboux-Segre dalle curvature delle asintotiche, al quale torneremo nel n.° 12.

10. Nella Memoria di Segre « *Complementi alla teoria*, ecc. », citata nel n.° 2, si rileva l'esistenza di un cono di centro O, della sesta classe in generale, e di una curva del sesto ordine nel piano ω, le quali godono della proprietà seguente: Il cono circoscritto alla superficie Π da un punto della *curva di* SEGRE tocca la superficie in una curva la quale ammette un piano tangente del *cono di* SEGRE come piano iper-osculatore, e correlativamente. L'equazione (13) della Memoria citata del *cono di* SEGRE, nel sistema di riferimento di cui qui si fa uso, è

$$\left.\begin{array}{l} 4\,a'^2\,\xi_2^6 - 4\,b^2\,\xi_3^6 + 4\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4\,(a'\,\xi_2^3 - b\,\xi_3^3) + \\ + \xi_2\,\xi_3\,(a'_v\,\xi_2^4 - 2\,a'_u\,\xi_2^3\,\xi_3 + 2\,b_v\,\xi_2\,\xi_3^3 - b_u\,\xi_3^4) = \xi_1 = 0. \end{array}\right\} \tag{37}$$

Trasformando mediante $\Sigma_{3/2}$, si ha la curva

$$x_4 = b_u\,x_2^4 - 2\,b_v\,x_2^3\,x_3 + 2\,a'_u\,x_2\,x_3^3 - a'_v\,x_3^4 - 4\,(b\,x_2^3 - a'\,x_3^3)\,x_1 = 0, \tag{38}$$

che è una quartica con punto triplo in O, toccante ivi le tre tangenti coniugate a quelle di DARBOUX-SEGRE. Ora questa equazione si può scrivere

$$c_1^k\,x_2^2 - c_2^k\,x_3^2 = 0, \tag{39}$$

il che ci conduce alle stesse considerazioni fatte sopra. Essendo Q l'intersezione della curva (39) colla tangente t, si ha, invece dell'equazione (35), quest'altra

$$(R_1\,R_2\,O\,Q) = -\mu. \tag{40}$$

Si ha anche

$$(R_1\,R_2\,P\,Q) = -1.$$

Però dobbiamo osservare che, nel caso attuale, il valore del parametro k resta ad arbitrio nostro.

11. Nel n.° 6 abbiamo ottenuto una costruzione assai semplice per i piani osculatori delle linee coniugate a quelle di DARBOUX-SEGRE ed i punti di regresso delle sviluppabili circoscritte alla superficie lungo queste. Proponiamoci ancora lo stesso problema per le linee di DARBOUX-SEGRE. Nella Memoria « *O trilineárních*, ecc. », citata nel n.° 7, ho provato che, data sulla superficie una famiglia di curve mediante l'equazione differenziale

$$\frac{d\,v}{d\,u} = \tau\,(u,\ v), \tag{41}$$

l'equazione del piano osculatore della curva della famiglia passante per il punto in considerazione è

$$2\,\tau^2\,x_2 - 2\,\tau\,x_3 + (\tau_u + \tau\,\tau_v - 2\,b + 2\,\tau^3\,a')\,x_4 = 0, \tag{42}$$

mentre l'equazione del punto di regresso della sviluppabile circoscritta è

$$-2\tau^2 \xi_3 + 2\tau \xi_2 + (\tau_u + \tau \tau_v + 2b - 2\tau^3 a') \xi_1 = 0. \tag{43}$$

Nel caso attuale delle linee di DARBOUX-SEGRE, τ è radice dell'equazione cubica

$$\tau^3 a' + b = 0 \tag{44}$$

sicchè le coordinate del punto di regresso sono

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (\tau_u + \tau \tau_v + 4b) : 2\tau : -2\tau^2 : 0, \tag{45}$$

Complessivamente si hanno tre punti, corrispondenti alle tre radici della (44). Per questi punti mandiamo una conica k_i $(i = 1, 2)$, toccante α_i nel punto O. Si trova come equazione di k_1, essendo $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$:

$$\begin{vmatrix} x_2^2, & x_3^2, & x_1 x_2, & x_2 x_3, \\ 4\tau^2, & 4\tau^4, & 2\tau(\tau_u + \tau\tau_v + 4b), & -4\tau^3 \\ 4\rho^2\tau^2, & 4\rho\tau^4, & 2\rho\tau(\rho\tau_u + \tau^2\tau_v + 4b), & -4\tau^3 \\ 4\rho\tau^2 & 4\rho^2\tau^4, & 2\rho^2\tau(\rho^2\tau_u + \tau\tau_v + 4b), & -4\tau^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Alla terza colonna del determinante, si aggiunga la prima moltiplicata per $-\frac{\tau_v}{2\tau}$, la seconda moltiplicata per $-\frac{2b}{\tau^3}$, e la quarta moltiplicata per $\frac{\tau_0}{2\tau}$; si trova così come valore del determinante

$$-2^6 \tau^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \rho^2 & \rho & 1 \\ \rho & \rho^2 & 1 \end{vmatrix} (2\tau^3 x_1 x_2 - \tau^2 \tau_u x_2^2 - 4b x_3^2 + \tau^2 \tau_v x_2 x_3).$$

Semplificando ancora mediante l'equazione (44) e le sue derivate, abbiamo come equazione della conica k_1:

$$x_4 = 6a'b x_1 x_2 + 12 a'^2 b x_3^2 - (a' b_u - a'_u b) x_2^2 + (a' b_v - a'_v b) x_2 x_3 = 0. \tag{46}$$

Scambiando u, x_2, a' con v, x_3, b, si ha l'equazione della conica k_2:

$$x_4 = 6a'b x_1 x_3 + 12 a' b^2 x_2^2 + (a' b_v - a'_v b) x_3^2 - (a' b_u - a'_u b) x_2 x_3 = 0. \tag{47}$$

I tre punti di regresso, insieme con O sono l'intersezione delle due coniche k_1 e k_2, cosicchè si tratta ancora della posizione di queste. Ma l'equazione (46) può scriversi

$$x_4 = \left[6\, a'\, b\, x_1 - (a'\, b_u - a'_u\, b)\, x_2 + (a'\, b_v - a'_v\, b)\, x_3\right] x_2 + 12\, a'^2\, b\, x_3^2 = 0.$$

Confrontando colla (21), si vede che k_1 tocca le rette α_1, l, intersezioni con α_2; similmente k_2. La determinazione di queste due coniche si finisce allora osservando che la curvatura in O di ciascuna è il doppio di quella della curva asintotica corrispondente. Correlativamente per *i piani osculatori delle linee di* DARBOUX-SEGRE; ma si può anche cambiare il segno delle curvature di k_1 e k_2 in O e poi costruire i piani polari rispetto a H, delle intersezioni delle due coniche così ottenute.

12. Si vede subito l'esattezza del seguente corollario del risultato or ora raggiunto: *Nel piano* ω *si conduca una retta arbitraria* r, *pur non passante per* O. *Si costruisca una conica* s_i $(i, j = 1, 2)$, *toccante le rette* α_i, r *nelle intersezioni con* α_j. *Se, nel punto* O, *la curvatura della conica* s_i *è il prodotto di* λ_i *per quella della curva asintotica corrispondente, si ottiene, congiungendo* O *coi tre altri punti d'intersezione delle due coniche* s_1, s_2, *quel gruppo dell'involuzione* I_3^1, *rappresentata dalla equazione* (36), *che corrisponde al valore* $-\lambda_1 : \lambda_2$ *del parametro* μ. *Specialmente si hanno le tangenti di* DARBOUX-SEGRE *per* $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ *e quelle coniugate per* $\lambda_1 = \lambda_2$. Ora si può facilmente condurre al termine la costruzione delle curve (33) e (39). Occorre stabilire il valore del parametro μ corrispondente a quel gruppo di I_3^1 che contiene la tangente data t. Sia R_i $(i, j = 1, 2)$ l'intersezione di t con c_i^k, S_i l'intersezione di α_i con c_j^k. La tangente di c_1^k in S_2 intersechi α_1 nel punto T. Si costruisca la conica c, la quale tocca le tangenti passanti per S_2 nei punti O e T e passa per R_1. Allora il rapporto delle curvature delle coniche c_2^k e c in O è $-\mu$. Si può facilmente rappresentarlo con un rapporto anarmonico. Basta costruire la retta congiungente le due intersezioni, diverse da O, delle coniche c_2^k e c, la quale intersechi α_1 in U. Si ha poi

$$-\mu = (O\, U\, T\, S_1). \tag{48}$$

Indicando, come sopra, con Q l'intersezione della retta t colla curva (38), abbiamo dunque

$$(O\,Q\,R_1\,R_2) = (O\,U\,T\,S_1)$$

ed il punto Q si ottiene, congiungendo l'intersezione delle rette $R_1\,T$, $R_2\,S_1$ col punto U e segando colla retta t. Il punto P d'intersezione di t con D^λ, valendo la (28), è il coniugato armonico di Q rispetto a R_1, R_2; ricordiamo che, se si è scelta la quadrica di Lie per la quadrica Q^λ, si deve porre $k = -\frac{3}{4}$, determinare cioè le coniche c_1^k, c_2^k così che le curvature in O siano le curvature delle asintotiche divise per due.

Torino, Ottobre 1921.

Sulle serie di polinomi di una variabile complessa. Le serie di Darboux.

(*Di* N. ABRAMESCU, *Prof. all'Università di Cluj* (*Romania.*))

INTRODUZIONE.

Le serie di polinomi, $\sum a_n P_n(x)$, appaiono come una generalizzazione delle serie di TAYLOR, $\sum a_n x^n$. Lo studio delle serie di polinomi si può fare da due punti di vista. Primo, si dà una funzione $f(x)$, regolata in un campo limitato da una curva chiusa (C), con connessione semplice, e si chiede lo sviluppo in serie di polinomi della funzione $f(x)$, valevole solamente nell'interno della curva (C). Questo problema è stato completamente risolto ([1]), dimostrando che lo sviluppo è valevole solamente nell'interno della curva (C), i polinomi $P_n(x)$ dipendono solamente dal contorno (C), mentre i coefficienti a_n dello sviluppo dipendono e dal contorno (C) e dalla funzione $f(x)$.

Un altro punto di vista dello studio delle serie di polinomi è anche il seguente. Data una successione di polinomi, $P_0(x)$, $P_1(x)$, ... $P_n(x)$, ..., di gradi uguali con gli indici, come pure i coefficienti $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$, si chiede la regione di convergenza delle serie $\sum a_n P_n(x)$. Questo problema ha cominciato ad essere studiato da 45 anni da DARBOUX ([2]), e da POINCARÉ ([3]).

---

(1) FABER, *Ueber polynomische Entwickelungen* (Math. Annalen, 1903, p. 389; 1907, p. 118); N. ABRAMESCU, *Sur les séries de polynomes à une variable complexe, Séries de M. Faber* (Bulletin de la Société des sciences de Cluj, Roumanie, 1921).

(2) *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série* (Journal de mathématiques pures et appliquées, 1878).

(3) *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (American Journal of Mathematics, vol. VII); PINCHERLE, *Sui sistemi di funzioni analitiche* ... (Annali di Mat., II, t. XII).

Nel presente lavoro studio il ***problema messo la prima volta da Darboux*** [4], nella Memoria citata, cioè considero le serie di polinomi $\sum a_n P_n(x)$, i polinomi $P_n(x)$ essendo dati dalle relazioni di ortogonalità

$$\int_a^b \varphi(x) P_m(x) P_n(x)\, dx = 0, \quad m \neq n; \qquad \int_a^b \varphi(x) P_n^2(x)\, dx = I_n = c - t\, a,$$

$\varphi(x)$ essendo una funzione positiva ed integrabile nell'intervallo (a, b) [5].

Cominciando con lo studio dei polinomi $P_n(x)$, dimostro che il polinomio $P_n(x)$ si può mettere sotto la forma

$$P_n(x) = \frac{1}{n!(b-a)^n} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^n (x-b)^n \psi_n(x)\right], \quad n! = 1, 2 \ldots n.$$

In ciò che segue *studio* [6] *quelle serie di polinomi $P_n(x)$, ai quali corrisponde la stessa funzione $\psi_n(x)$ indipendente da n, che indico con $\psi(x)$.*

Studio infine il *caso generale delle serie di Darboux*, $\sum a_n P_{pn}(x)$, il polinomio [7] $P_{pn}(x)$ essendo dato da $p \,.\, n$ equazioni lineari

$$\int_{a_{q-1}}^{a_q} \varphi(x)\, x^s P_{pn}(x)\, dx = 0, \quad q = 0, 1, \ldots, p; \quad s = 0, 1, \ldots, n-1,$$

p ed $a_0 < a_1 \ldots < a_p$ essendo numeri dati, e $\varphi(x)$ una funzione positiva ed integrabile negli intervalli $(a_0, a_1), \ldots, (a_{p-1}, a_p)$.

I risultati che trovo sono strettamente connessi con l'espressione che ho ottenuta per il polinomio $P_{pn}(x)$,

$$P_{pn}(x) = \frac{1}{n!\,\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a_0)^n (x-a_1)^n \ldots (x-a_p)^n \psi_n(x)\right],$$

e studio quelle serie di polinomi $P_{pn}(x)$, ai quali corrisponde la stessa funzione $\varphi_n(x)$ indipendente da n, che indico con $\psi(x)$.

---

(4) Per questo le chiamo *Serie di Darboux* e non serie di polinomi ortogonali come le chiamano i Tedeschi.

(5) Queste serie sono state considerate anche dal sig. Picard nel suo corso di *Analisi superiore* professato alla Sorbonne (Paris) nel 1918.

(6) Vegg. il riassunto di queste ricerche nelle mie note: ***Sulle serie di polinomi di una variabile complessa*** e ***Sulle serie di Darboux e di Poincaré*** (Atti della Reale Accademia dei Lincei, vol. XXXI, serie 5ª, 1° sem., p. 89 e 152).

(7) Vedi certe proprietà di questi polinomi nella nota del sig. Angelescu, *Sur une classe de polynômes à une variable* (Comptes Rendus, Académie des Sciences, Paris, t. 162, janv. 1916).

Nel caso $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, ritrovo i polinomi del sig. APPELL (8),

$$P_{2n}(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\,x^n}\left[x^n\,(1-x^2)^n\right].$$

Il presente lavoro è una parte dello studio che ho intrapreso sulle serie di polinomi di una variabile complessa, quando sono date certe relazioni fra i polinomi $P_n(x)$ e vogliamo trovare il campo di convergenza, sia nel caso delle serie dirette (9) di polinomi, $\sum a_n P_n(x)$, sia per le serie del sig. APPELL, $\sum \frac{a_n}{P_n(x)}$, serie di inverse di polinomi (10).

PARTE I.

I polinomi ortogonali.

1. *Definizione dei polinomi ortogonali.* Consideriamo una funzione $\varphi(x)$ positiva ed integrabile nell'intervallo (a, b) e proponiamoci di determinare i polinomi

$$P_0(x),\quad P_1(x),\ldots,\quad P_n(x),\ldots$$

di un grado eguale agli indici, che verifichino le relazioni di ortogonalità

$$\int_a^b \varphi(x)\,P_m(x)\,P_n(x)\,d\,x = 0,\ \ m \neq n;\quad \int_a^b \varphi(x)\,P_n^2(x)\,d\,x = I_n = C - t\,e. \qquad (1)$$

(8) APPELL, *Sur une suite de polynomes ayant toutes leurs racines réelles* [Archiv der Mathematik und Physik, 1 (1901), p. 71].

(9) N. ABRAMESCU, *Su una classe di serie di polinomi di una variabile complessa* (Atti della Reale Accademia dei Lincei, vol. XXXI, 1° sem., p. 197).

(10) APPELL, *Sur les développements en série suivant les inverses de polynomes donnés* (Comptes Rendus, t. 157, p. 5 et 1042; Bulletin des Sciences mathématiques, Novembre 1913; Bulletin de la Société mathématique de France, t. 58, 1920, p. 1). N. ABRAMESCU (Comptes Rendus, t. 172, 1921, p. 649); *Sur les séries de polynomes à une variable complexe* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, fasc. 1, 1922).

Per determinare il polinomio

$$P_n(x) = c_{n,n} x^n + c_{n,n-1} x^{n-1} + \cdots + c_{n,0},$$

osserviamo che dato un polinomio $\Pi_m(x)$, di un grado $m < n$, si possono determinare i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$, in modo da avere

$$\Pi_m(x) = \alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x) + \cdots + \alpha_m P_m(x).$$

Moltiplicando questa relazione per $\varphi(x) P_n(x) dx$, tenendo conto di (1) ed integrando, abbiamo

$$\int_a^b \varphi(x) \Pi_m(x) P_n(x) dx = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \int_a^b \varphi(x) P_i(x) P_n(x) dx = 0. \tag{2}$$

Supponendo $\Pi_k(x) = x^k$, abbiamo

$$\int_a^b \varphi(x) x^k P_n(x) dx = 0, \quad K = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Ponendo

$$g_s = \int_a^b \varphi(x) x^s dx,$$

queste n equazioni lineari si possono scrivere

$$\left.\begin{array}{l} c_{n,0} g_0 + c_{n,1} g_1 + \cdots + c_{n,n} g_n = 0, \\ c_{n,0} g_1 + c_{n,1} g_2 + \cdots + c_{n,n} g_{n+1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n,0} g_{n-1} + c_{n,1} g_n + \cdots + c_{n,n} g_{2n-1} = 0, \end{array}\right\} \tag{4}$$

da cui si deducono i valori proporzionali per $c_{n,0}, c_{n,1}, \ldots, c_{n,n}$. Il polinomio $P_n(x)$ è quindi completamente determinato, all'infuori di un fattore arbitrario il cui valore è dato dalla seconda delle relazioni (1).

I polinomi così ottenuti si dicono *polinomi ortogonali.*

2. *Il polinomio $P_n(x)$ è unico*, poichè, se si fossero ottenuti dalle equazioni (4) due polinomi $P_n(x)$ e $P'_n(x)$, moltiplicandoli con i fattori λ e λ', scelti in modo da avere i coefficienti di x^n eguali ad 1, dalle relazioni (2)

avremmo

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda\int_a^b \varphi(x)\,\Pi_m(x)\,P_n(x)\,dx=0, \qquad \lambda'\int_a^b \varphi(x)\,\Pi_m(x)\,P'_n(x)\,dx=0, \qquad m<n\\
&\int_a^b \varphi(x)\,\Pi_m(x)\Big[\lambda P_n(x)-\lambda' P'_n(x)\Big]dx=0,\\
&\qquad\qquad\qquad\int_a^b \varphi(x)\,\Pi_m(x)\,Q_{n-1}(x)\,dx=0,
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$Q_{n-1}(x)=\lambda P_n(x)-\lambda' P'_n(x)$ essendo un polinomio di grado $(n-1)$. Prendendo per $\Pi_m(x)$ lo stesso $Q_{n-1}(x)$, dalla relazione (5) risulterebbe

$$\int_a^b \varphi(x)\,Q^2_{n-1}(x)\,dx=0,$$

ciò che è impossibile poichè $\varphi(x)>0$ nell'intervallo (a, b). Ritroviamo quindi il teorema conosciuto che il polinomio $P_n(x)$ è unico e ben determinato.

3. *Il polinomio $P_n(x)$ si può mettere sotto la forma di un quoziente di due determinanti di ordine n.* Abbiamo visto che il polinomio

$$P_n(t)=c_{n,0}+c_{n,1}\,t+\cdots+c_{n,n-1}\,t^{n-1}+t^n$$

verifica le relazioni

$$\int_a^b \varphi(t)\,t^s\,P_n(t)\,dt=0, \quad s=0,\ 1,\ldots,\ n-1\,; \quad \int_a^b \varphi(t)\,P_n^2(t)\,dt=I_n.$$

Le prime n sono le equazioni (4), mentre l'ultima, che si può anche scrivere

$$\int_a^b \varphi(t)\,(c_{n,0}+c_{n,1}\,t+\cdots+c_{n,n-1}\,t^{n-1}+t^n)\,(c_{n,0}+\cdots+t^n)\,dt=I_n,$$

diventa, tenendo conto delle (4),

$$c_{n,0}\,g_n+c_{n,1}\,g_{n+1}+\cdots+g_{2n}=I_n. \quad (6)$$

Dalle equazioni (4) si deduce

$$\frac{c_{n,0}}{\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n\\ g_2 & g_3 & \cdots & g_{n+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g_n & g_{n+1} & \cdots & g_{2n-1}\end{vmatrix}}=\frac{c_{n,1}}{\begin{vmatrix} g_2 & \cdots & g_n & g_0\\ g_3 & \cdots & g_{n+1} & g_1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g_{n+1} & \cdots & g_{2n-1} & g_{n-1}\end{vmatrix}}=\cdots=\frac{1}{\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-1}\\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g_{n-1} & g_n & \cdots & g_{2n-2}\end{vmatrix}}$$

Eliminando $c_{n,0}, c_{n,1}, \ldots, c_{n,n-1}$ dalle relazioni (4) e (6), si ottiene

$$\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \ldots & g_n \\ g_1 & g_2 & \ldots & g_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n & g_{n+1} & \ldots & g_{2n} \end{vmatrix} - I_n \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \ldots & g_{n-1} \\ g_1 & g_2 & \ldots & g_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n-1} & g_n & \ldots & g_{2n-2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$I_n = \frac{D_n(\varphi)}{D_{n-1}(\varphi)}, \quad D_n(\varphi) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \ldots & g_n \\ g_1 & g_2 & \ldots & g_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n & g_{n+1} & \ldots & g_{2n} \end{vmatrix}$$

Il polinomio $P_n(x) = x^n + c_{n,n-1} x^{n-1} + \cdots + c_{n,0}$ si può scrivere

$$D_{n-1}(\varphi) \cdot P_n(x) = x^n \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \ldots & g_{n-1} \\ g_1 & g_2 & \ldots & g_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n-1} & g_n & \ldots & g_{2n-2} \end{vmatrix} -$$

$$- x^{n-1} \begin{vmatrix} g_0 & \ldots & g_{n-2} & g_n \\ g_1 & \ldots & g_{n-1} & g_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n-1} & \ldots & g_{2n-3} & g_{2n-1} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^n \begin{vmatrix} g_1 & \ldots & g_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n & \ldots & g_{2n-1} \end{vmatrix},$$

$$P_n(x) = \frac{1}{D_{n-1}(\varphi)} \begin{vmatrix} x g_0 - g_1 & x g_1 - g_2 & \ldots & x g_{n-1} - g_n \\ x g_1 - g_2 & x g_2 - g_3 & \ldots & x g_n - g_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x g_{n-1} - g_n & x g_n - g_{n+1} & \ldots & x g_{2n-2} - g_{2n-1} \end{vmatrix} = \frac{D_{n-1}(F)}{D_{n-1}(\varphi)},$$

$$F = (x - t)\varphi(t), \quad g_s = \int_a^b \varphi(t)\, t^s\, dt.$$

Si vede che $D_{n-1}(F)$ e $D_{n-1}(\varphi)$ sono i determinanti delle forme quadratiche

$$\int_a^b (x - t)\varphi(t)(y_0 + t y_1 + \cdots + t^{n-1} y_{n-1})^2\, dt = \Sigma\Sigma (x g_{p+q} - g_{p+q+1})\, y_p y_q,$$

$$\int_a^b \varphi(t)(y_0 + \cdots + t^{n-1} y_{n-1})^2\, dt = \Sigma\Sigma g_{p+q} y_p y_q, \quad p, q = 0, 1, \ldots, n-1.$$

4. *Il polinomio $P_n(x)$ verifica la relazione*

$$P_n(x) = \frac{1}{(b-a)^n\, n!} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^n}{d\,x^n}\Big[(x-a)^n (x-b)^n \psi_n(x)\Big],$$

$\psi_n(x)$ *essendo finita per $x=a$ ed $x=b$.* Infatti, abbiamo la relazione

$$\int_a^b \varphi(x)\, Q(x)\, P_n(x)\, d\,x = 0, \quad Q(x) = 1, x, \ldots, x^{n-1}. \tag{7}$$

Possiamo presupporre che $\varphi(x)\, P_n(x)$ è la n^{-a} derivata di una funzione $U(x)$, dimodochè la funzione $U(x)$ e le sue prime $(n-1)$ derivate si annullino per $x=a$, cioè

$$U(a)=0, \ U'(a)=0, \ldots, \ U^{(n-1)}(a)=0. \tag{8}$$

La relazione (7) diventa

$$\int_a^b Q \frac{d^n U(x)}{d\,x^n} d\,x = 0$$

ed integrando per parti, si deduce

$$\int_a^b Q \frac{d^n U(x)}{d\,x^n} d\,x =$$

$$= \Big[Q(x)\, U^{(n-1)}(x) - Q'(x)\, U^{(n-2)}(x) + \cdots + (-1)^{n-1} Q^{(n-1)}(x)\, U(x)\Big]_a^b = 0.$$

Tenendo conto delle relazioni (8), si ottiene

$$Q(b)\, U^{(n-1)}(b) - Q'(b)\, U^{(n-2)}(b) + \cdots + (-1)^{n-1} Q^{(n-1)}(b)\, U(b) = 0. \tag{9}$$

Facendo successivamente $Q(x)$ eguale a $1, x, \ldots, x^{n-1}$, dalla relazione (9) risulta mano a mano

$$U(b)=0, \ U'(b)=0, \ldots, \ U^{(n-2)}(b)=0.$$

Dunque la funzione $U(x)$ e le sue prime $(n-1)$ derivate si annullano per $x=a$, $x=b$, cioè

$$U(x) = K(x-a)^n (x-b)^n \psi_n(x),$$

$\psi_n(x)$ essendo finita per $x=a$, $x=b$. Quindi

$$\varphi(x)\, P_n(x) = \frac{d^n}{d\,x^n}\Big[K(x-a)^n (x-b)^n \psi_n(x)\Big],$$

e, senza diminuire la generalità, si può presupporre la costante K così scelta, da avere

$$P_n(x) = \frac{1}{(b-a)^n\, n!}\,\frac{1}{\varphi(x)}\,\frac{d^n}{d\,x^n}\left[(x-a)^n\,(x-b)^n\,\psi_n(x)\right], \tag{10}$$

$\psi_n(x) =$ essendo finita per $x = a$ ed $x = b$.

Determinazione della funzione $\psi_n(x)$. Dalla relazione (10) risulta

$$\psi_n(x) = \frac{(b-a)^n\, n!}{(x-a)^n\,(x-b)^n}\int_a^x d\,x \ldots \int_a^x \varphi(x)\, P_n(x)\, d\,x, \tag{11}$$

$P_n(x)$ essendo il polinomio ottenuto colle relazioni (3). Osservando che

$$\int_a^x d\,x \ldots \int_a^x f(x)\, d\,x = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\, d\,z,$$

la funzione $\psi_n(x)$ è data da un integrale semplice

$$\psi_n(x) = \frac{(b-a)^n\, n}{(x-a)^n\,(x-b)^n}\int_a^x (x-z)^{n-1}\,\varphi(z)\, P_n(z)\, d\,z. \tag{12}$$

Considerando la funzione

$$h(x) = \int_a^x (x-z)^{n-1}\,\varphi(z)\, P_n(z)\, d\,z,$$

si vede che questa funzione e le sue prime $(n-1)$ derivate rispetto ad x, si annullano per $x = a$; quindi $h(x)$ è divisibile per $(x-a)^n$. Analogamente, la funzione $h(x)$ e le sue prime $(n-1)$ derivate rispetto ad x, sono eguali ad una somma di integrali della forma

$$\int_a^x \varphi(z)\, z^k\, P_n(z)\, d\,z, \quad K < n,$$

le quali, in virtù delle relazioni (3), si annullano per $x = b$. Quindi, $h(x)$ è divisibile per $(x-b)^n$, in modo che la funzione $\psi_n(x)$, definita dall'equazione (12), è finita per $x = a$ ed $x = b$, il polinomo $P_n(x)$ essendo quello ottenuto dalle relazioni (3).

Se $\varphi(x) = (x-a)^\lambda R(x)$, $\lambda + 1 > 0$, in modo che l'integrale abbia un senso, allora esiste una funzione che contiene come fattore $(x-a)^{\lambda+1}$ e la cui derivata è eguale a $\varphi(x)\, P_n(x)$. Per conseguenza l'integrale di ordine n

della funzione $\varphi(x) P_n(x)$ contiene come fattore $(x-a)^{\lambda+n}$ e quindi, dalla relazione (11) si vede che $\psi_n(x)$ contiene come fattore $(x-a)^\lambda$. Dalla relazione (10) si vede che nella formola (11) possiamo prendere come limite x e b invece di a ed x e dunque, in modo analogo, vedremo che, se $\varphi(x)$ contiene il fattore $(x-b)^\mu$, allora anche $\psi_n(x)$ contiene il fattore $(x-b)^\mu$. Per conseguenza $\varphi(x)$ e $\psi_n(x)$ contengono nello stesso tempo $(x-a)$ oppure $(x-b)$ alla stessa potenza. Quindi se $\varphi(x) = (x-a)^\lambda (x-b)^\mu$, $\lambda + 1 > 0$, $\mu + 1 > 0$, allora anche $\psi_n(x) = (x-a)^\lambda (x-b)^\mu$.

Quando la funzione $\psi_n(x)$ data dall'equazione (12) *è indipendente da n*, il secondo membro della (12) è uguale all'espressione analoga per $n = 1$,

$$\frac{(b-a)}{(x-a)(x-b)} \int_a^x (\alpha x + \beta)\, \varphi(x)\, dx, \quad P_1(x) = \alpha x + \beta, \tag{13}$$

dove i coefficienti α e β sono dati dall'equazione

$$\int_a^b \varphi(x)(\alpha x + \beta)\, dx = 0, \quad \alpha \int_a^b x\, \varphi(x)\, dx + \beta \int_a^b \varphi(x)\, dx = 0,$$

che è verificata per

$$\alpha = \int_a^b \varphi(x)\, dx, \quad \beta = -\int_a^b x\, \varphi(x)\, dx.$$

La relazione (13) diviene

$$\psi_1(x) = \frac{b-a}{(x-a)(x-b)} \left[\int_a^b \varphi(x) dx \int_a^x x \varphi(x) dx - \int_a^b x \varphi(x) dx \int_a^x \varphi(x) dx \right]. \tag{14}$$

Considerando i polinomi $P_n(x)$ dati dalla relazione (10) a cui corrisponde la funzione $\psi_n(x)$ indipendente da n, risulta che la funzione $\varphi(x)$ è la soluzione comune ad un numero infinito di equazioni integrali ottenute uguagliando le espressioni (12) e (14), i coefficienti del polinomio $P_n(x)$ essendo dati dalle equazioni (3).

Nel caso particolare in cui $\varphi(x) = \psi_n(x)$, $\varphi(x)$ è la soluzione comune ad un numero infinito di equazioni integrali di prima specie

$$\varphi(x) = (b-a)^n\, n \int_a^x \frac{(x-z)\, P_n(z)}{(x-a)^n (x-b)^n}\, \varphi(z)\, dz,$$

in cui i coefficienti del polinomio $P_n(x)$ sono dati dalle equazioni (3).

In quel che segue considereremo i polinomi $P_n(x)$ dati dalla relazione (10) *a cui corrisponde una funzione $\psi_n(x)$ indipendente da n, che indicheremo con $\psi(x)$.*

5. *L'equazione $P_n(x) = 0$ ha tutte le radici reali, distinte e comprese nell'intervallo (a, b).* Infatti, l'espressione $U(x) = (x-a)^n (x-b)^n \psi_n(x)$ si annulla per $x = a$ ed $x = b$; per conseguenza la sua derivata $U'(x)$ si annulla per un valore $x = a_1$, compreso fra a e b. $U'(x)$ annullandosi per $x = a$, a_1, b, la sua derivata $U''(x)$ si annulla per i valori a_2 e b_2 compresi rispettivamente fra a ed a_1, a_1 e b; e così di seguito. Quindi la n^{-a} derivata $U^{(n)}(x)$ si annulla per n valori compresi fra a e b. Perciò, $\varphi(x) P_n(x)$ si annulla per n valori compresi nell'intervallo (a, b), e siccome $\varphi(x)$ è positiva in quest'intervallo, risulta che $P_n(x)$ si annulla per n valori distinti e compresi nell'intervallo (a, b); cioè l'equazione $P_n(x) = 0$, di grado n, ha tutte le radici reali, distinte e comprese nell'intervallo (a, b), ottenendo così una nuova dimostrazione di questo teorema conosciuto.

6. *Il polinomio $P_n(x)$ è il coefficiente di t^n nello sviluppo in serie di t dell'espressione $\dfrac{\psi(z)}{\varphi(x)} \dfrac{\partial z}{\partial x}$, z essendo la radice dell'equazione*

$$z = x + t\,\frac{(z-a)(z-b)}{b-a}, \quad z = x, \quad t = 0,$$

che si può sviluppare colla formola del Lagrange. Infatti, abbiamo la formola del LAGRANGE

$$\left.\begin{aligned} F(z) = F(x) + \frac{t}{1}\Big[F'(x) f(x)\Big] + \cdots + \frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big[F'(x) f^n(x)\Big] + \ldots, \\ F'(x) = \frac{d\,F(x)}{d\,x}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

dove z è la radice dell'equazione

$$z = x + t\,f(z), \tag{16}$$

che tende verso x quando t tende verso zero, mentre $f(z)$ e $F(z)$ sono due funzioni analitiche [che si sviluppano in serie secondo le potenze di $(z-x)$]. Vedremo in seguito la regione di convergenza di questo sviluppo.

Prendendo la derivata rispetto ad x dell'espressione (15), abbiamo

$$F'(z)\frac{\partial z}{\partial x}=F'(x)+\frac{t}{1}\frac{d}{dx}\left[F'(x)f(x)\right]+\cdots+\frac{t^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[F'(x)f^n(x)\right]+\cdots \tag{17}$$

dove $\frac{\partial z}{\partial x}$ è data dall'equazione

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1+t\,f'(z)\frac{\partial z}{\partial x},$$

che si ottiene prendendo la derivata rispetto ad x dell'espressione (16).

Sostituendo nella (17) $F'(z)$ con $\psi(z)$ e facendo

$$f(z)=\frac{(z-a)(z-b)}{b-a},$$

e quindi dividendo ambi i membri con $\varphi(x)$, abbiamo

$$\left.\begin{aligned}\frac{\psi(z)}{\varphi(x)}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}+\frac{t}{1}\frac{1}{(b-a)\varphi(x)}\frac{d}{dx}\left[(x-a)(x-b)\psi(x)\right]+\cdots\\ +\frac{t^n}{n!}\frac{1}{(b-a)^n\varphi(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^n(x-b)^n\psi(x)\right]+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Questa relazione prova che il polinomio $P_n(x)$ è il coefficiente di t^n nello sviluppo in serie di t della funzione

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(x)}\frac{\partial z}{\partial x},$$

z essendo la radice dell'equazione

$$z=x+t\frac{(z-a)(z-b)}{(b-a)}, \tag{19}$$

che si sviluppa con la formola del LAGRANGE.

Dalla relazione (18) risulta che l'espressione $\frac{\psi(z)}{\varphi(x)}\frac{\partial z}{\partial x}$ è una funzione generatrice dei polinomi $P_n(x)$.

Considerando la radice z dell'equazione (19) che è uguale ad x per $t=0$, abbiamo

$$z=\frac{b-a+t(b+a)-\sqrt{(b-a)^2(t^2+1)-4tx(b-a)+2t(b^2-a^2)}}{2t},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{b-a}{\sqrt{(b-a)\left[(b-a)(t^2+1)-4tx+2t(b+a)\right]}}$$

e quindi una funzione generatrice dei polinomi $P_n(x)$ è $\frac{\psi(z)}{\varphi(x)}\frac{\partial z}{\partial x}$, lo sviluppo in serie di t di quest'espressione essendo valevole in un determinato campo di convergenza, come vedremo più tardi.

Casi particolari. 1.° $\varphi(x)=\psi(x)=1$, $a=1$, $b=-1$,

$$z=x+t\frac{z^2-1}{2};\quad z=x,\ t=0;$$

$$z=\frac{1-\sqrt{1-2tx+t^2}}{t},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}.$$

La funzione generatrice è

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\Sigma t^n P_n(x),\ \ P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

e $P_n(x)$ è il polinomio di LEGENDRE.

2.° $\varphi(x)=\psi(x)=(1-x)^\lambda(1+x)^\mu$, $\lambda+1>0$, $\mu+1>0$, $a=-1$, $b=1$;

$$z=x+t\frac{1-z^2}{2},\quad z=\frac{1}{t}\left(-1+\sqrt{1+2tx+t^2}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1+2tx+t^2}},$$

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(x)}\frac{\partial z}{\partial x}=2^{\lambda+\mu}\left(1+t+\sqrt{1+2tx+t^2}\right)^{-\lambda}\left(1-t+\sqrt{1+2tx+t^2}\right)^{-\mu}\times$$

$$\times(1+2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}(1-x)^{-\lambda}(1+x)^{-\mu}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\lambda}(1+x)^{n+\mu}\right],$$

$P_n(x)$ essendo il polinomio di JACOBI.

7. *Se* $\varphi(x)=\psi(x)=(x-a)^\lambda(x-b)^\mu$, $\lambda+1>0$, $\mu+1>0$, *il polinomio* $P_n(x)$ *verifica un'equazione differenziale lineare di secondo ordine.* Abbiamo

$$P_n(x)=\frac{1}{(b-a)^n n!}(x-a)^{-\lambda}(x-b)^{-\mu}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^{n+\lambda}(x-b)^{n+\mu}\right].\qquad(20)$$

Ponendo $U=(x-a)^{n+\lambda}(x-b)^{n+\mu}$, abbiamo

$$\frac{U'}{U}=\frac{n+\lambda}{x-a}+\frac{n+\mu}{x-b},$$

oppure

$$(x-a)(x-b)\,U' = \Big[x(2n+\lambda+\mu)-(n+\lambda)\,b-(n+\mu)\,a\Big]\,U.$$

Prendendo la derivata d'ordine $(n+1)$ di ambi i membri con la formola del Leibnitz, abbiamo

$$(x-a)(x-b)\frac{d^{n+2}U}{dx^{n+2}}+\Big[(2-\lambda-\mu)\,x+(\lambda-1)\,b+(\mu-1)\,a\Big]\frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}}-$$
$$-(n+1)(n+\lambda+\mu)\frac{d^nU}{dx^n}=0,$$

e notando con

$$z=\frac{d^nU}{dx^n},$$

si ottiene

$$\left.\begin{aligned}(x-a)(x-b)\frac{d^2z}{dx^2}+\Big[(2-\lambda-\mu)\,x+(\lambda-1)\,b+(\mu-1)\,a\Big]\frac{dz}{dx}-\\ -(n+1)(n+\lambda+\mu)\,z=0.\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

Osservando (20), si deduce

$$y=P_n(x)=\frac{1}{(b-a)^n\,n!}(x-a)^{-\lambda}(x-b)^{-\mu}z,\quad(22)$$

cosicchè in seguito a questa trasformazione l'equazione (21) diventa

$$\left.\begin{aligned}(x-a)(x-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\Big[(2+\lambda+\mu)\,x-a(\mu+1)-b(\lambda+1)\Big]\frac{dy}{dx}-\\ -n(n+1+\lambda+\mu)\,y=0\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

ed è l'equazione differenziale che soddisfa il polinomio $P_n(x)$.

L'equazione (23) è completamente integrabile, poichè le sue soluzioni sono date dalla relazione (22), z essendo data dall'equazione differenziale (21), che oltre alla soluzione

$$z=\frac{d^n}{dx^n}\Big[(x-a)^{n+\lambda}(x-b)^{n+\mu}\Big],\quad(24)$$

ammette anche la soluzione

$$u=\int_a^b(t-a)^{n+\lambda}(t-b)^{n+\mu}(t-x)^{-n-1}\,dt.\quad(25)$$

Per mostrare ciò, proveremo che u soddisfa l'equazione differenziale (21). Abbiamo (11)

$$d\left[(t-a)^{n+\lambda+1}(t-b)^{n+\mu+1}(t-x)^{-n-2}\right]=v\,(n+\lambda+1)(t-b)(t-x)+$$
$$+(n+\mu+1)(t-a)(t-x)-(n+2)(t-a)(t-b)\Big],$$

dove

$$v=(t-a)^{n+\lambda}(t-b)^{n+\mu}(t-x)^{-n-3}\,d\,t.$$

Integrando fra a e b e moltiplicando con $-(n+1)$, abbiamo

$$0=\int_a^b(n+1)\,v\Big[-(n+\lambda+1)(t-b)(t-x)-(n+\mu+1)(t-a)(t-x)+$$
$$+(n+2)(t-a)(t-b)\Big],$$

ed ordinando secondo le potenze di $(t-x)$, si ottiene

$$\left.\begin{array}{l} 0=\displaystyle\int_a^b(n+1)\,v\Big\{(n+2)(x-a)(x-b)+(t-x)\Big[(2-\lambda-\mu)\,x+ \\ \qquad +b\,(\lambda-1)+a\,(\mu-1)\Big]-(n+\lambda+\mu)(t-x)^2\Big\}. \end{array}\right\} \quad (26)$$

Ma, dalla (25), abbiamo

$$u=\int_a^b v\,(t-x)^2,\quad \frac{d\,u}{d\,x}=(n+1)\int_a^b v\,(t-x),\quad \frac{d^2\,u}{d\,x^2}=(n+1)\,(n+2)\int_a^b v,$$

e quindi l'espressione (26) diventa

$$0=(x-a)\,(x-b)\frac{d^2\,u}{d\,x^2}+\Big[(2-\lambda-\mu)\,x+b\,(\lambda-1)+a\,(\mu-1)\Big]\frac{d\,u}{d\,x}-$$
$$-(n+1)\,(n+\lambda+\mu)\,u,$$

che è precisamente l'equazione (21). Perciò quest'equazione ammette le soluzioni (24) e (25) e colla relazione (22) otteniamo quelle dell'equazione dif-

(11) Seguendo il procedimento del sig. PICARD, *Traité d'Analyse*, tome III, *Intégrales hypergéométriques*, p. 319.

ferenziale (23), cioè

$$P_n(x), \quad \frac{1}{(b-a)^n\, n!}(x-a)^{-\lambda}(x-b)^{-\mu}\int_a^b (t-a)^{n+\lambda}(t-b)^{n+\mu}(t-x)^{-n-1}\, d\, t. \quad (25\text{ bis})$$

8. *I polinomi $P_n(x)$ verificano una relazione di ricorrenza.* Indicando con $c_{n,n}$ il coefficiente di x^n del polinomio

$$P_n(x) = \frac{1}{(b-a)^n \,.\, n!\, \varphi(x)}\frac{d^n}{d\, x^n}\Big[(x-a)^n(x-b)^n\,\psi(x)\Big],$$

osserviamo che si possono determinare le costanti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, in modo da avere

$$x\, P_n(x) = \frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} P_{n+1}(x) + \alpha_n P_n(x) + \alpha_{n-1} P_{n-1}(x) + \cdots + \alpha_0 P_0(x). \qquad (26)$$

Moltiplicando questa relazione con $\varphi(x)\, P_{n-q}(x)\, d\, x$, integrando e tenendo conto della (1), abbiamo

$$\int_a^b x\,\varphi(x)\, P_n(x)\, P_{n-q}(x)\, d\, x = \alpha_{n-q}\int_a^b \varphi(x)\, P_{n-q}^2(x)\, d\, x = \alpha_{n-q} I_{n-q}. \qquad (27)$$

Ma, se $q \geq 2$, $x\, P_{n-q}(x)$ è tutt'al più di grado $(n-1)$, e in virtù della relazione (1) il primo membro è nullo. Quindi, $\alpha_{n-q} = 0$, $q \geq 2$. La relazione (26) è perciò della forma

$$x\, P_n = \frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} P_{n+1} + \alpha_n P_n + \alpha_{n-1} P_{n-1}\,. \qquad (28)$$

Avremo analogamente

$$x\, P_{n-1} = \frac{c_{n-1,n-1}}{c_{n,n}} P_n + \beta_{n-1} P_{n-1} + \beta_{n-2} P_{n-2}\,. \qquad (29)$$

Facendo nella (27) $q=1$, abbiamo

$$\int_a^b x\,\varphi(x)\, P_{n-1}\, P_n\, d\, x = \alpha_{n-1} I_{n-1}\,,$$

dove sostituendo $x\, P_{n-1}$ col suo valore della (29), si deduce

$$\int_a^b \varphi\, P_n\left(\frac{c_{n-1,n-1}}{c_{n,n}} P_n + \beta_{n-1} P_{n-1} + \beta_{n-2} P_{n-2}\right) d\, x = \alpha_{n-1} I_{n-1}\,,$$

$$\frac{c_{n-1,n-1}}{c_{n,n}} I_n = \alpha_{n-1} I_{n-1}\,, \quad \alpha_{n-1} = \frac{c_{n-1,n-1}\, I_n}{c_{n,n}\, I_{n-1}}.$$

Sostituendo nella (28), otteniamo la relazione di ricorrenza ([12])

$$x P_n = \frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} P_{n+1} + \alpha_n P_n + \frac{c_{n-1,n-1} I_n}{c_{n,n} I_{n-1}} P_{n-1},$$

oppure

$$\frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} P_{n+1} - (x - \alpha_n) P_n + \frac{c_{n-1,n-1} I_n}{c_{n,n} I_{n-1}} P_{n-1} = 0, \tag{30}$$

fra tre polinomi consecutivi P_n.

Calcolo del valore di I_n. Abbiamo la funzione generatrice (18),

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(x)} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} + \cdots + t^n P_n(x) + \cdots$$

$$z = x + t \frac{(z-a)(z-b)}{b-a}, \quad (z = x, \ t = 0).$$

Innalzando ambi i membri a quadrato, moltiplicando con $\varphi(x)\, d x$, integrando e tenendo conto della (1), abbiamo

$$\int_a^b \frac{\left[\psi(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right]^2}{\varphi(x)} d x = \int_a^b \frac{\psi^2(x)}{\varphi(x)} d x + \cdots + t^{2n} \int_a^b \varphi(x) P_n^2(x)\, d x + \cdots$$

Eguagliando i coefficienti di t^{2n} di ambi i membri, si deduce il valore di

$$I_n = \int_a^b \varphi(x) P_n^2(x)\, d x.$$

Possiamo determinare I_n anche col seguente procedimento. Abbiamo

$$I_n = \int_a^b \varphi P_n P_n \, d x = \frac{1}{(b-a)^n n!} \int_a^b P_n \frac{d^n U}{d x^n} d x,$$

$$U = (x-a)^n (x-b)^n \psi(x);$$

$$I_n = \frac{1}{(b-a)^n n!} \left[P_n U^{(n-1)} - P' U^{(n-2)} + \cdots + (-1)^{n-1} P^{(n-1)} U \right]_a^b +$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{(b-a)^n n!} \int_a^b P_n^{(n)} U \, d x,$$

$$I_n = (-1)^n \frac{c_{n,n}}{(b-a)^n} \int_a^b (x-a)^n (x-b)^n \psi(x)\, d x, \tag{31}$$

dove $c_{n,n}$ è il coefficiente di x^n in $P_n(x)$.

---

(12) Ottenuta anche dal DARBOUX, vedi la Memoria citata p. 412.

Calcolo del valore di α_n. Innalzando a quadrato l'espressione (18), abbiamo

$$\frac{x}{\varphi(x)}\left[\psi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 = x\frac{\psi^2(x)}{\varphi(x)} + \cdots + t^{2n} x \varphi P_n^2(x) + \cdots$$

Integrando e tenendo conto della (1), otteniamo

$$\int_a^b \frac{x}{\varphi(x)}\left[\psi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 dx = \cdots + t^{2n}\int_a^b x\,\varphi(x)\,P_n^2(x)\,dx + \cdots$$

Eguagliando i coefficienti di t^{2n} di ambi i membri, si deduce il valore di α_n dato dalla relazione

$$\alpha_n I_n = \int_a^b x\,\varphi(x)\,P_n^2(x)\,dx,$$

ottenuta moltiplicando la (30) con $\varphi(x)\,P_n(x)\,dx$, tenendo conto della (1).

Oppure, possiamo ancora trovare α_n colla relazione (30) eguagliando a zero il coefficiente di x^n. Infatti, indicando con $c_{n,n-1}$, $c_{n+1,n}$ rispettivamente i coefficienti di x^{n-1} ed x^n nei P_n, P_{n+1}, abbiamo, eguagliando a zero il coefficiente di x^n della relazione (30),

$$\frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}}c_{n+1,n} - c_{n,n-1} + \alpha_n c_{n,n} = 0,\quad \alpha_n = \frac{c_{n,n-1}}{c_{n,n}} - \frac{c_{n+1,n}}{c_{n+1,n+1}}. \tag{32}$$

Valore approssimato del polinomio $P_n(x)$.

9. *Serie del Lagrange.* Stabiliremo dapprima la serie del Lagrange e troveremo il campo di convergenza nel caso della variabile complessa.

Perciò, consideriamo, in generale, la radice Z dell'equazione

$$E(z) = z - x - t\,f(z) = 0, \tag{33}$$

che si riduce ad x quando t tende verso zero, e proponiamoci di trovare lo sviluppo in serie di t di una funzione $\psi(Z)$, Z essendo la radice dell'equazione (33) suaccennata.

Consideriamo un contorno (c) chiuso con connessione semplice e supponiamo che le funzioni $f(z)$ e $\psi(z)$ siano regolate nell'interno del contorno (c).

Il numero n delle radici dell'equazione (33) contenute nell'interno della curva (c) è dato dalla

$$2\pi i n = \int_c \frac{E'(z)}{E(z)} d z, \quad 2\pi i n = \int_c \frac{1 - t f'(z)}{z - x - t f(z)} d z. \tag{34}$$

Supponiamo che lungo il contorno (c) si abbia

$$|z - x| > |t f(z)|, \tag{35}$$

ciò che è possibile per valori abbastanza piccoli di t. In questo caso possiamo sviluppare il secondo membro della relazione (34) secondo le potenze di t, ed avremo

$$2\pi i n = \int_c \left[1 - t f'(z)\right] \left[\frac{1}{z - x} + \frac{t f(z)}{(z - x)^2} + \cdots + \frac{t^n f^n(z)}{(z - x)^{n+1}} + \cdots\right] d z,$$

oppure

$$\left.\begin{aligned} 2\pi i n = \int_c \Bigg\{ \frac{1}{z - x} + t\left[\frac{f(z)}{(z - x)^2} - \frac{f'(z)}{z - x}\right] + \cdots + t^n \Bigg[\frac{f^n(z)}{(z - x)^{n+1}} - \\ - \frac{f^{n-1}(z) f'(z)}{(z - x)^n}\Bigg] + \cdots \Bigg\} d z. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Supponiamo che x sia nell'interno del contorno (c). Poichè abbiamo

$$\int_c \frac{F(z)}{(z - x)^{n+1}} d z = \frac{2\pi i}{(n - 1)!} F^{(n-1)}(x), \tag{37}$$

ne segue che tutti i coefficienti delle potenze di t dalla formola (36) sono nulli e perciò risulta $n = 1$.

Cosicchè, il contorno (c), lungo il quale abbiamo la relazione (35), contiene nell'interno soltanto una radice dell'equazione (33). Sia Z questa radice ed $F(z)$ una funzione regolata nell'interno del contorno (c). Abbiamo

$$2\pi i F(Z) = \int_c \frac{1 - t f'(z)}{z - x - t f(z)} F(z) d z.$$

Tenendo conto della condizione (35), si ottiene

$$2\pi i F(Z) = \int_c [1 - t f'(z)] \left[\frac{1}{z - x} + \frac{t f(z)}{(z - x)^2} + \cdots\right] F(z) d z,$$

$$2\pi i F(Z) = \int_c F(z) \left\{ \frac{1}{z-x} + t\left[\frac{f(z)}{(z-x)^2} - \frac{f'(z)}{z-x}\right] + \cdots \right.$$
$$\left. + t^n \left[\frac{f^n(z)}{(z-x)^{n+1}} - \frac{f^{n-1}(z) f'(z)}{(z-x)^n}\right] + \cdots \right\} dz,$$

che, in virtù della relazione (37), diventa

$$F(Z) = F(x) + t\left[\frac{d}{dx} F(x) f(x) - f'(x) F(x)\right] + \cdots$$
$$+ t^n \left[\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} F(x) f^n(x) - \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} F(x) f^{n-1}(x) f'(x)\right] + \cdots,$$

oppure

$$F(Z) = F(x) + \frac{t}{1}\left[F'(x) f(x)\right] + \cdots + \frac{t^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[F'(x) f^n(x)\right] + \cdots \tag{38}$$

Questa è la celebre formola del LAGRANGE.

Facendo $F(z) = z$, sviluppiamo appunto la radice dell'equazione (33) che si riduce ad x per $t = 0$, x essendo nell'interno del contorno (c).

Affinchè lo sviluppo sia valevole, bisogna che la radice Z sia nell'interno del contorno (c) ***che contiene nell'interno il punto x e lungo il quale abbiamo***

$$|z - x| > t f(z)|,$$

oppure

$$|t < \frac{1}{\left|\frac{f(z)}{z-x}\right|}, \tag{39}$$

cioè che, ***il modulo di t sia inferiore all'inversa del massimo del modulo dell'espressione*** $\frac{f(z)}{z-x}$ ***lungo il contorno*** (c).

Prendendo la derivata rispetto ad x dell'espressione (38), abbiamo

$$F'(Z) \frac{\partial Z}{\partial x} = F'(x) + \frac{t}{1} \frac{d}{dx}\left[F'(x) f(x)\right] + \cdots + \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[F'(x) f^n(x)\right] + \cdots$$

Sostituendo $F'(x)$ con $\psi(x)$, si ottiene

$$\psi(Z) \frac{\partial Z}{\partial x} = \psi(x) + \frac{t}{1} \frac{d}{dx}\left[f(x) \psi(x)\right] + \cdots + \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[f^n(x) \psi(x)\right] + \cdots \tag{40}$$

Prendendo la derivata rispetto a z dell'equazione (33), abbiamo

$$\frac{dz}{dx}-1-t\,f'(z)\frac{dz}{dx}=0,\quad \frac{dz}{dx}=\frac{1}{1-t\,f'(z)}.$$

Sostituendo, (40) diventa

$$\frac{\psi(Z)}{1-t\,f\,(Z)}=\psi(x)+\frac{t}{1}\frac{d}{dx}\Big[f(x)\,\psi(x)\Big]+\cdots+\frac{t^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\Big[f^n(x)\,\psi(x)\Big]+\cdots \tag{41}$$

Lo sviluppo (41), e quindi la serie del LAGRANGE, è valevole se

$$|t|<|r|,\quad 1-r\,f'(\beta)=0,\quad \beta-x-r\,f(\beta)=0,$$

oppure

$$t<|r|,\quad 1-r\,f'(\beta)=0,\quad f'(\beta)(\beta-x)-f(\beta)=0,$$

β essendo la radice multipla dell'equazione (33) per cui $|f'(\beta)|$ è un massimo.

In queste condizioni, e poichè abbiamo

$$f'(\beta)=\frac{f(\beta)}{\beta-x},$$

ne segue che l'ineguaglianza (39) è soddisfatta lungo il cerchio di raggio $r|=\frac{1}{|f'(\beta)|}$.

Dunque la serie del LAGRANGE *è valevole se*

$$t<\frac{1}{|f'(\beta)},\quad f'(\beta)(\beta-x)-f(\beta)=0, \tag{42}$$

per cui $|(f'(\beta)|$ *è un massimo.*

10. Esporremo, precisando, *il valore approssimato* ([13]) *del termine generale della serie del Lagrange* (41),

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\Big[f^n(x)\,\psi(x)\Big]=\frac{\psi(\beta)}{\sqrt{2\pi n}}\frac{[f'(\beta)]^{n+1}}{\sqrt{2f(\beta)\,f''(\beta)}}(1+\varepsilon) \tag{43}$$

([13]) DARBOUX, vedi la memoria citata p. 28.

in funzione del valore β dato dall'equazione

$$f'(\beta)(\beta - x) - f(\beta) = 0, \tag{44}$$

per la quale $|f'(\beta)|$ è un massimo.

11. *Valore approssimato del polinomio $P_n(x)$.* Abbiamo veduto (§ 4) che il polinomio $P_n(x)$ è dato dall'espressione (10)

$$\varphi(x) P_n(x) = \frac{1}{(b-a)^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\Big[(x-a)^n (x-b)^n \psi(x)\Big],$$

e (§ 6) che questa espressione è il coefficiente del termine generale della serie (18) del Lagrange, in modo che il valore approssimato del polinomio $P_n(x)$ è dato dalla relazione (43), con la condizione (42).

In questo caso $f(z)$ è di second'ordine, $(z-a)(z-b)$, e senza diminuire la generalità, possiamo supporre

$$f(z) = z(1-z),$$

poichè possiamo fare il cambiamento di variabile $u = a + v(b-a)$, $(u = a, v = 0;\ u = b,\ v = 1)$. Abbiamo allora

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(x)}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^n}{dx^n}\Big[x^n(1-x)^n\psi(x)\Big] + \cdots,$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,\varphi(x)}\frac{d^n}{dx^n}\Big[x^n(1-x)^n\psi(x)\Big],\quad z = x + tz(1-z),\ (z = x,\ t = 0).$$

Il valore approssimato del polinomio $P_n(x)$ è dato dalla relazione (43), che moltiplicata per $\frac{1}{\varphi(x)}$, dà

$$\frac{\psi(\beta)}{\varphi(x)\sqrt{2\pi n}}\frac{[f'(\beta)]^{n+1}}{\sqrt{2f(\beta)f''(\beta)}}(1+\varepsilon),$$

e nel nostro caso diventa

$$\frac{\psi(\beta)}{\varphi(x)\sqrt{2\pi n}}\frac{(1-2\beta)^{n+1}}{\sqrt{\beta^2-\beta}}(1+\varepsilon), \tag{45}$$

β essendo una delle radici dell'equazione (44)

$$f'(\beta)(\beta - x) - f(b) = 0, \quad \beta^2 - 2\beta x + x = 0,$$

per la quale $|f'(\beta)| = |1 - 2\beta|$ è un massimo.

Alle radici

$$\beta = x \pm \sqrt{x^2 - x},$$

corrispondono per $(1 - 2\beta)$ i valori

$$\beta' = x - \sqrt{x^2 - x}, \quad 1 - 2\beta' = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x} = \xi,$$

$$\beta'' = x + \sqrt{x^2 - x}, \quad 1 - 2\beta'' = 1 - 2x - \sqrt{4x^2 - 4x} = \frac{1}{\xi},$$

il cui prodotto dei moduli è 1, dimodochè se un modulo è maggiore di 1, l'altro è minore di 1.

Scegliendo opportunamente il segno del radicale, abbiamo $|\xi| > 1$, e quindi il massimo del modulo di $f'(\beta) = 1 - 2\beta$ corrisponde a

$$\beta = x - \sqrt{x^2 - x}, \quad \xi = 1 - 2\beta = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x}.$$

Da cui

$$\xi^2 - 2\xi(1 - 2x) + 1 = 0, \quad x = -\frac{(\xi - 1)^2}{4\xi}, \quad \beta = \frac{1 - \xi}{2}.$$

Sostituendo nella relazione (45), risulta che il valore approssimato del polinomio $P_n(x)$ è

$$P_n(x) = \frac{\psi\left(\frac{1-\xi}{2}\right)}{\varphi(x)} \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} \frac{\xi^{n+1}}{\sqrt{\xi^2 - 1}}(1 + \varepsilon),$$

oppure

$$P_n(x) = \Psi(\xi)\, n^{-\frac{1}{2}} \xi^{n+1}(1 + \varepsilon), \tag{46}$$

dove

$$\xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x}, \tag{47}$$

e $\Psi(\xi)$ è una funzione indipendente da n ed ε.

Osservazioni. 1.° La serie del Lagrange (41) è valevole per i valori di t che soddisfano la relazione

$$|t| < \frac{1}{|\xi|}.$$

2.° Questo modulo $|\xi|$ ha un'interpretazione geometrica interessante. Infatti, dalla (47) si deduce

$$1-2x=\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right) \tag{48}$$

e supponendo $|\xi|=c-t\,a=r$, allora $\xi=r\,e^{i\theta}$. Indicando con $(X,\ Y)$ le coordinate del punto x, abbiamo dalla relazione (48)

$$1-2(X+i\,Y)=\frac{1}{2}\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)\right],$$

da cui

$$1-2X=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta,\quad -2Y=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta,$$

ed eliminando θ, si ottiene

$$\frac{4(1-2X)^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{4(2Y)^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1.$$

Dunque, se $|\xi|=r=C-t\,a$, il punto x descrive un'ellisse i cui fuochi sono O ed 1.

3.° *I valori approssimati dei coefficienti $c_{n,n}$, $c_{n,n-1}$ di x^n e x^{n-1} del polinomio $P_n(x)$* si possono calcolare osservando, dalla relazione (48), che, per n sufficientemente grande, ξ^n si può sostituire con $[2(1-2x)]^n$,

$$\left[2(1-2x)\right]^n=(-1)^n\,2^n\left[2^n x^n-n\,2^{n-1}x^{n-1}+\cdots\right].$$

Sostituendo nella relazione (46), abbiamo

$$P_n(x)=\Psi(\xi)\,.\,\xi\,n^{-\frac{1}{2}}(-1)^n\,2^n\,(2^n x^n-n\,2^{n-1}x^{n-1}+\cdots);$$

risulta che i valori approssimati dei coefficienti $c_{n,n}$, $c_{n,n-1}$, sono

$$c_n=k\,n^{-\frac{1}{2}}(n-1)^n\,2^n\,(1+\varepsilon),\quad c_{n,n-1}=k\,n^{-\frac{1}{2}}(-1)^{n+1}\,2^{2n-1}\,n, \tag{49}$$

k essendo una funzione indipendente da n.

Da cui

$$\frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}}=-\sqrt{\frac{n+1}{n}}\,\frac{1}{4}(1+\varepsilon'),\quad \frac{c_{n,n-1}}{c_{n,n}}=-\frac{n}{2},\quad \frac{c_{n+1,n}}{c_{n+1,n+1}}=-\frac{n+1}{2}, \tag{49'}$$

e quindi per valori grandissimi di n, abbiamo

$$\lim \frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} = -\frac{1}{4}, \tag{50}$$

e dalla (32)

$$\lim . \alpha_n = \lim \left(\frac{c_{n,n-1}}{c_{n,n}} - \frac{c_{n+1,n}}{c_{n+1,n+1}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \tag{51}$$

Determinazione della regione di convergenza delle serie del Darboux.

12. Essendo data una serie del Darboux $\Sigma a_n P_n(x)$, dove $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}$, abbiamo veduto che il valore approssimato di questi polinomi $P_n(x)$ è conosciuto per mezzo dell'espressione (46),

$$P_n(x) = \psi(\xi) n^{-\frac{1}{2}} \xi^{n+1} (1 + \varepsilon), \quad \xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x},$$

$$1 - 2x = \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right) .$$

Da qui risulta che si possono assimilare queste serie a quelle ordinate secondo le potenze intere di ξ. *Le curve di convergenza* sono quelle per le quali ξ ha un modulo costante, cioè *sono ellissi omofocali i cui fuochi sono* 0 *ed* 1 (*oppure* a e b). Per la qual cosa, le serie del Darboux, se sono convergenti, si trovano nell'interno di ellissi omofocali coi fuochi in 0 ed 1 (oppure a e b).

Bisogna osservare che la relazione (48) fra x e ξ è *una trasformazione conforme della regione interna del cerchio* $|\xi| = c - t$ *e nel campo esterno dell'ellisse del piano* x *coi fuochi* 0 e 1. Questa trasformazione è stata proposta, 45 anni or sono, dal Darboux per la determinazione dei valori approssimati dei polinomi che risultano dalla serie ipergeometrica, dimodochè, la trasformazione conforme proposta dal sig. Faber, per lo studio delle serie di polinomi, è già conosciuta da 45 anni.

13. *Possiamo ancora ottenere la regione di convergenza delle serie del Darboux senza conoscere il valore approssimato dei polinomi* $P_n(x)$. Basta sol-

tanto sapere che il polinomio $P_n(x)$ è il coefficiente di t^n della serie (41) del LAGRANGE.

Infatti, sia la serie del DARBOUX,

$$\Sigma\, a_n\, P_n(x), \quad \lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\rho}, \tag{52}$$

$P_n(x)$ essendo il coefficiente di t^n della serie del LAGRANGE

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(x)} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} + \Sigma\, t^n\, P_n(x). \tag{53}$$

Abbiamo visto peraltro (§ 11, osserv. 1.ª) che questa serie del LAGRANGE è valevole se

$$t < \frac{1}{|\xi|}, \quad \xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x}.$$

Supponiamo che x appartenga alla regione di convergenza della serie (52); allora

$$\sqrt[n]{a_n\, P_n|} < 1, \quad \sqrt[n]{P_n(x)\,|} < \rho.$$

Analogamente, la serie (53) è convergente se

$$\sqrt[n]{t^n\, P_n|} < 1, \quad |\, t < \frac{1}{\sqrt[n]{|\, P_n(x)}}.$$

Quindi, basta prendere

$$\frac{1}{|\xi|} \leq \frac{1}{\rho},$$

poichè allora abbiamo

$$t\,| < \frac{1}{|\xi|} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{\sqrt[n]{|\, P_n(x)\,|}}.$$

e per conseguenza le serie (52) e (53) sono valevoli nello stesso tempo.

Quindi, le curve di convergenza della serie (52) del DARBOUX sono date dalla relazione

$$|\,\xi\,| = \rho = c - t\, a,$$

cioè sono ellissi omofocali coi fuochi nei punti 0 ed 1 (oppure a e b).

Sviluppo in serie dei polinomi $P_n(x)$ di una funzione $F(x)$.

14. *Le funzioni $Q_n(y)$ di seconda specie.* La funzione

$$Q_n(y) = \int_a^b \frac{\varphi(t)\, P_n(t)}{t-y}\, dt$$

si chiama di seconda specie, e il polinomio $P_n(x)$ funzioni di prima specie di Darboux.

Abbiamo

$$Q_n(y) = -\int_a^b \varphi(t)\, P_n(t) \left(\frac{1}{y} + \frac{t}{y^2} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{y^n} + \cdots \right) dt;$$

ma, dalle relazioni (1),

$$\int_a^b \varphi(t)\, P_n(t)\, t^s\, dt = 0, \quad s < n,$$

e quindi

$$Q_n(y) = \frac{1}{y^n} \int_a^b \frac{\varphi(t)\, P_n(t)\, t^n}{t-y}\, dt,$$

$$Q_n(y) = \frac{\alpha_{n,0}}{y^{n+1}} + \frac{\alpha_{n,1}}{y^{n+2}} + \cdots, \quad \alpha_{n,s} = -\int_a^b \varphi(t)\, P_n(t)\, t^{n+s}\, dt.$$

15. *Le funzioni $Q_n(y)$ verificano una relazione di ricorrenza.* Abbiamo infatti

$$\frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} Q_{n+1}(y) + \alpha_n Q_n(y) - y\, Q_n(y) + \frac{c_{n-1,n-1}\, I_n}{c_{n,n}\, I_{n-1}} Q_{n-1}(y) =$$

$$= \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-y} \left[\frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} P_{n+1}(t) + \alpha_n P_n(t) - y\, P_n(t) + \frac{c_{n-1,n-1}\, I_n}{c_{n,n}\, I_{n-1}} P_{n-1}(t) \right] dt =$$

$$= \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-(y)} \left[\frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} P_{n+1}(t) + \alpha_n P_n(t) - t\, P_n(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{c_{n-1,n-1}\, I_n}{c_{n,n}\, I_{n-1}} P_{n-1}(t) + (t-y)\, P_n(t) \right] dt.$$

Tenendo conto della relazione di ricorrenza (30), verificata dai polinomi

$P_n(t)$, cioè

$$\frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} P_{n+1}(t) - (t - \alpha_n) P_n(t) + \frac{c_{n-1,n-1}\, I_n}{c_{n,n}\, I_{n-1}} P_{n-1}(t) = 0,$$

la relazione di sopra diventa

$$\frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} Q_{n+1}(y) - (y - \alpha_n) Q_n(y) + \frac{c_{n-1,n-1}\, I_n}{c_{n,n}\, I_{n-1}} Q_{n-1}(y) = \int_a^b \varphi(t) P_n(t)\, dt. \qquad (54)$$

Tenendo conto di (1), il secondo membro della (54) è zero per $n > 0$ ed è uguale a $\frac{I_0}{P_0}$ quando $n = 0$. Quindi, la relazione (54) diventa

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} Q_{n+1}(y) - (y - \alpha_n) Q_n(y) + \frac{c_{n-1,n-1}\, I_n}{c_{n,n}\, I_{n-1}} Q_{n-1}(y) = 0, \quad n > 0, \\ \frac{c_{0,0}}{c_{1,1}} Q_1(y) - (y - \alpha_0) Q_0(y) = \frac{I_0}{P_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Queste relazioni precisano quelle ottenute dal Darboux, e permettono di calcolare le funzioni di seconda specie quando si conosce $Q_0(y)$.

16. *Le funzioni $Q_n(y)$ intervengono nella determinazione del campo di convergenza dello sviluppo in serie di polinomi $P_n(x)$ della funzione $\frac{1}{x-y}$.* Abbiamo infatti le relazioni (30) e (55),

$$\frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} P_{n+1}(x) - (x - \alpha_n) P_n(x) + \frac{c_{n-1,n-1}\, I_n}{c_{n,n}\, I_{n-1}} P_{n-1}(x) = 0,$$

$$\frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} Q_{n+1}(y) - (y - \alpha_n) Q_n(y) + \frac{c_{n-1,n-1}\, I_n}{c_{n,n}\, I_{n-1}} Q_{n-1}(y) = 0.$$

Moltiplicando la prima con $Q_n(y)$, la seconda con $-P_n(x)$ e sommando, abbiamo

$$\frac{P_n(x)\, Q_n(y)}{I_n} = \frac{P_{n+1}(x)\, Q_n(y) - P_n(x)\, Q_{n+1}(y)}{I_n \frac{c_{n+1,n+1}}{c_{n,n}} (x-y)} -$$

$$- \frac{P_n(x)\, Q_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)\, Q_n(y)}{I_{n-1} \frac{c_{n,n}}{c_{n-1,n-1}} (x-y)}.$$

Facendo $n = 1, 2, \ldots, n$ e sommando, otteniamo

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)\, Q_i(y)}{I_i} &= \frac{P_{n+1}(x)\, Q_n(y) - P_n(x)\, Q_{n+1}(y)}{I_n \frac{c_{n+1,n+1}}{c_{n,n}}(x-y)} - \\ &- \frac{P_1(x)\, Q_0(y) - P_0(x)\, Q_1(y)}{I_0 \frac{c_{1,1}}{c_{0,0}}(x-y)}. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Dalla seconda delle (55) e dalla (30), abbiamo

$$\frac{c_{0,0}}{c_{1,1}} Q_1(y) - (y - \alpha_0)\, Q_0(y) = \frac{I_0}{P_0},$$

$$\frac{c_{0,0}}{c_{1,1}} P_1(x) - (x - \alpha_0)\, P_0(x) = 0.$$

Moltiplicando rispettivamente con P_0, $-Q_0$, e sommando, troviamo

$$-\frac{P_1(x)\, Q_0(y) - P_0(x)\, Q_1(y)}{I_0 \frac{c_{1,1}}{c_{0,0}}(x-y)} = \frac{1}{x-y} - \frac{P_0(x)\, Q_0(y)}{I_0}.$$

Sostituendo nella (56), otteniamo [14]

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_0(x)\, Q_0(y)}{I_0} + \frac{P_1(x)\, Q_1(y)}{I_1} + \cdots + \frac{P_n(x)\, Q_n(y)}{I_n} &= \\ = \frac{1}{x-y} + \frac{P_{n+1}(x)\, Q_n(y) - P_n(x)\, Q_{n+1}(y)}{I_n \frac{c_{n+1,n+1}}{c_{n,n}}(x-y)}&. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Per trovare il campo di convergenza dello sviluppo della funzione $\frac{1}{x-y}$, dovremo ricercare, nel caso dei nostri polinomi P_n, in che condizioni l'espressione

$$\frac{P_{n+1}(x)\, Q_n(y) - P_n(x)\, Q_{n+1}(y)}{I_n \frac{c_{n+1,n+1}}{c_{n,n}}(x-y)} \tag{58}$$

tende verso zero quando $n \to \infty$. Perciò bisognerà trovare il valore approssimato della funzione $Q_n(y)$.

---

(14) Relazione trovata anche dal Darboux nella nota citata, p. 415.

17. *Valori approssimati della funzione $Q_n(y)$ e di I_n.* Senza diminuire la generalità, possiamo fare il cambiamento di variabile $u = a + v(b - a)$, in modo che ai limiti $u = a$, $u = b$, corrisponda $v = 0$, $v = 1$. Così, l'espressione di $Q_n(y)$ si può scrivere

$$Q_n(y) = \int_0^1 \frac{\varphi(t) P_n(t)}{t - y} dt,$$

e

$$\varphi(t) P_n(t) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left[t^n (1 - t)^n \psi(t) \right].$$

Quindi

$$Q_n(y) = \frac{1}{n!} \int_0^1 \frac{\frac{d^n}{dt^n} \left[t^n (1 - t)^n \psi(t) \right]}{t - y} dt,$$

ed integrando per parti, rimane

$$Q_n(y) = \int_0^1 \psi(t) \frac{t^n (1 - t)^n}{(t - y)^{n+1}} dt. \tag{59}$$

Sotto questa forma cercheremo il valore approssimato di $Q_n(y)$.

Osservazione. Abbiamo veduto (§ 7) che se $\varphi(x) = \psi(x) = (x - a)^\lambda (x - b)^\mu$, le soluzioni dell'equazione differenziale

$$(x - a)(x - b) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[(2 + \lambda + \mu) x - a(\mu + 1) - b(\lambda + 1) \right] \frac{dy}{dx} -$$
$$- n(n + 1 + \lambda + \mu) y = 0$$

sono

$$P_n(x), \quad \frac{1}{(b - a)^n n!} (x - a)^{-\lambda} (x - b)^{-\mu} \int_a^b (t - a)^{n+\lambda} (t - b)^{n+\mu} (t - x)^{-n-1} dt,$$

cioè il polinomio $P_n(x)$ e

$$(x - a)^{-\lambda} (x - b)^{-\mu} Q_n(y).$$

Valore approssimato della funzione $Q_n(y)$. Per questo, ci serviamo dell'espressione trovata dal Darboux [15] per il calcolo del valore approssimato

[15] Memoria citata, p. 29.

dell'integrale del LAPLACE,

$$\int_{a}^{b} f(t)\, g^{n}(t)\, d\, t = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, f(\alpha)\, g^{n}(\alpha) \sqrt{\frac{-2\, g(\alpha)}{g''(\alpha)}}\, (1+\varepsilon), \tag{60}$$

dove α è dato dall'equazione $g(\alpha) = 0$ e per cui $|g(\alpha)|$ è un ***minimum massimorum.***

Nel caso dell'integrale

$$\int_{0}^{1} f(t) \frac{t^{n}(1-t)^{n}}{(t-y)^{n}}\, d\, t, \quad g(t) = \frac{t(1-t)}{t-y},$$

α è data dall'equazione $g'(\alpha) = 0$, $\alpha^2 - 2\alpha y + y = 0$.

Prendendo $\alpha = y + \sqrt{y^2 - y}$, abbiamo

$$g(\alpha) = \frac{\alpha - \alpha^2}{\alpha - y} = 1 - 2y \quad \sqrt{4y^2 - 4y} = \frac{1}{1 - 2y + \sqrt{4y^2 - 4y}}.$$

Ponendo

$$\eta = 1 - 2y + \sqrt{4y^2 - 4y},$$

e scegliendo il segno del radicale in modo che $\eta > 1$, abbiamo

$$y = -\frac{(1-\eta)^2}{4\eta}, \quad \alpha = \frac{1-\eta^{-1}}{2}, \quad \alpha - y = \frac{\eta}{4}(1-\eta^{-2});$$

$$g(\alpha) = \frac{1}{\eta}, \quad g''(\alpha) = -\frac{8}{\eta(1-\eta^{-2})}.$$

Sostituendo nella (60), otteniamo

$$\int_{0}^{1} f(t) \frac{t^{n}(1-t)^{n}}{t-y)^{n}}\, d\, t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, f\left(\frac{1-\eta^{-1}}{2}\right) \eta^{-n} (1-\eta^{-2})^{\frac{1}{2}}.$$

Per trovare il valore approssimato della nostra funzione $Q_n(y)$, facciamo nella formola precedente

$$f(t) = \frac{\psi(t)}{t-y}$$

e quindi

$$\left.\begin{aligned} Q_n(y) = \int_{0}^{1} \psi(t) \frac{t^{n}(1-t)^{n}}{(t-y^{n+1}}\, d\, t = \Phi(\eta)\, n^{-\frac{1}{2}} (1+\varepsilon), \\ \eta = 1 - 2y + \sqrt{4y^2 - 4y}, \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

dove $\Phi(\eta)$ è una funzione indipendente da n ed ε.

Valore approssimato di I_n. Abbiamo veduto (31), che

$$I_n = (-1)^n \frac{c_{n,n}}{(b-a)^n} \int_a^b (x-a)^n (x-b)^n \psi(x)\, dx.$$

Avendo presupposto d'aver fatto il cambiamento di variabile

$$u = a + v(b-a),$$

il valore di I_n, senza diminuire la generalità, è dato da

$$I_n = (-1)^n c_{n,n} \int_0^1 t^n (1-t)^n \psi(t)\, dt.$$

Servendoci della formola (60), abbiamo

$$g(\alpha) = \alpha(1-\alpha); \quad g'(\alpha) = 1 - 2\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2},$$

e il valore approssimato di I_n è

$$I_n = (-1)^n c_{n,n} \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, \psi\left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]^n \sqrt{-\frac{2\,\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{-2}}\,(1+\varepsilon),$$

$$I_n = (-1)^n c_{n,n} \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, K \frac{1}{2^{2n}} (1+\varepsilon), \tag{62}$$

K essendo una costante che non dipende da n.

Tenendo conto della relazione (49) che dà il valore approssimato di $c_{n,n}$, abbiamo il valore approssimato di I_n

$$I_n = K_2 \frac{1}{n}, \tag{63}$$

K_2 essendo una costante indipendente da n.

Analogamente, si ottiene dalla (62),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{c_{n,n}} \frac{c_{n-1,n-1}}{I_{n-1}} = -\frac{1}{4}. \tag{64}$$

18. *Altro metodo per determinare la regione di convergenza delle serie del Darboux.* Abbiamo veduto che fra tre polinomi P_n, esiste la relazione di

ricorrenza (30)

$$\frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} P_{n+1}(x) - (x - \alpha_n) P_n(x) + \frac{c_{n-1,n-1} I_n}{I_{n-1} c_{n,n}} P_{n-1}(x) = 0.$$

Le serie di polinomi $P_n(x)$ sono un caso particolare delle serie del Poincaré ([16]), $\sum a_n P_n(x)$, dove fra $(k+1)$ polinomi P_n, $P_{n+1}, \ldots, P_{n+k}$ abbiamo la relazione

$$R_k P_{n+k} + R_{k-1} P_{n+k-1} + \cdot \cdot + R_0 P_n = 0,$$

R_s essendo funzioni di n e di x, e k un numero dato.

Dividendo questa relazione per $R_k P_n$, abbiamo

$$\frac{P_{n+k}}{P_{n+k-1}} \cdot \frac{P_{n+k-1}}{P_{n+k-2}} \cdots \frac{P_{n+1}}{P_n} + \frac{R_{k-1}}{R_k} \frac{P_{n+k-1}}{P_{n+k-2}} \cdots \frac{P_{n+1}}{P_n} + \cdots + \frac{R_0}{R_k} = 0,$$

e supponendo che il rapporto $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ tenda verso un limite λ per $n \to \infty$, e che $\lim \frac{R_s}{R_k} = A_s$, otteniamo al limite

$$\lambda^k + A_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + A_0 = 0. \tag{65}$$

Quindi il rapporto $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ tende verso una radice di questa equazione, e in generale verso quella, α, di modulo più grande. Le curve di convergenza di queste serie ([17]) sono date dall'equazione $\alpha = c - te$.

Nel caso delle serie del Darboux, si vede, dalle relazioni (50), (51), (64), che $\frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}}$, α_n, $\frac{c_{n-1,n-1} I_n}{c_{n,n} I_{n-1}}$ tendono rispettivamente verso $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$. Le curve di convergenza sono date dall'equazione $\alpha = c - te$, α essendo la radice di modulo più grande dell'equazione (65),

$$-\frac{1}{4}\alpha^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)\alpha - \frac{1}{4} = 0,$$

da cui

$$1 - 2x = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right).$$

([16]) Poincaré, ***Sur les équations différentielles ordinaires et aux différences finies*** (American Journal of Mathematics, vol. VII).

([17]) Vegg. ([16]); Picard, *Traité d'Analyse*, tome III, p. 420.

Le curve di convergenza del piano x sono date da questa trasformazione conforme, $|\alpha| = c - te$, cioè sono ellissi omofocali coi fuochi in 0 ed 1 (oppure a e b).

19. *Sviluppo in serie dei polinomi* $P_n(x)$ *dell'espressione* $\frac{1}{x-y}$. Abbiamo visto (57) che

$$\frac{P_0(x)\,Q_0(y)}{I_0} + \frac{P_1(x)\,Q_1(y)}{I_1} + \cdots + \frac{P_n(x)\,Q_n(y)}{I_n} = \frac{1}{x-y} +$$

$$\frac{P_{n+1}(x)\,Q_n(y) - P_n(x)\,Q_{n+1}(y)}{I_n \frac{c_{n+1,n+1}}{c_{n,n}}(x-y)}.$$

Per vedere in quali condizioni abbiamo

$$\frac{1}{x-y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)\,Q_n(y)}{I_n},$$

sostituiamo $P_n(x)$, $Q_n(y)$ coi loro valori approssimati (46), (61),

$$P_n(x) = \Psi(\xi)\cdot n^{-\frac{1}{2}}\,\xi^{n+1}(1+\varepsilon), \quad \xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x},$$

$$Q_n(y) = \Phi(\eta)\,n^{-\frac{1}{2}}\,\eta^{-n-1}(1+\varepsilon), \quad \eta = 1 - 2y + \sqrt{4y^2 - 4y},$$

e I_n, $\frac{c_{n+1,n+1}}{c_{n,n}}$ coi loro valori approssimati (63), (49'),

$$I_n = K_2\frac{1}{n}, \quad \frac{c_{n+1,n+1}}{c_{n,n}} = -4\sqrt{\frac{n}{n+1}}(1+\varepsilon).$$

L'espressione (58) diventa

$$\frac{P_{n+1}(x)\,Q_n(y) - P_n(x)\,Q_{n+1}(y)}{I_n \frac{c_{n+1,n+1}}{c_{n,n}}(x-y)} = \frac{\Psi(\xi)\,\Phi(\eta)\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{n+1}\left(\xi - \frac{1}{n}\right)}{-\frac{K_2}{n}4\sqrt{\frac{n}{n+1}}(x-y)}.$$

Il valore di questa espressione per $n \to \infty$ dipende da $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{n+1}$. Tenderà quindi verso zero quando $|\xi| < |\eta|$ e crescerà indefinitamente in caso contrario.

Da ciò segue che *la serie*

$$\frac{P_0(x)\,Q_0(y)}{I_0} + \frac{P_1(x)\,Q_1(y)}{I_1} + \cdots + \frac{P_n(x)\,Q_n(y)}{I_n} + \cdots$$

è convergente ed ha come somma $\dfrac{1}{x-y}$ *soltanto se il punto* x *è nell'interno dell'ellisse che passa per* y *ed ha come fuochi* 0 *ed* 1 (*oppure* a *e* b).

20. *Sviluppo in serie di polinomi* $P_n(x)$ *e funzioni* $Q_n(x)$ *di una funzione regolata nell'interno della corona limitata da due ellissi omofocali.* Sia $f(x)$ una funzione regolata nella corona limitata dalle ellissi omofocali E ed E'. Secondo il teorema del LAURENT, abbiamo ($E > E'$)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{f(y)}{y-x}\,dy - \frac{1}{2\pi i}\int_{E'} \frac{f(y)}{y-x}\,dy. \tag{66}$$

Lungo il contorno E abbiamo (§ 19)

$$\frac{1}{y-x} = -\sum \frac{P_n(x)\,Q_n(y)}{I_n}$$

e quindi

$$\int_E \frac{f(y)}{y-x}\,dy = -\sum P_n(x)\,\frac{1}{I_n}\int_E f(y)\,Q_n(y)\,dy.$$

Lungo il contorno E', abbiamo

$$\frac{1}{y-x} = \sum \frac{P_n(y)\,Q_n(x)}{I_n}$$

e quindi

$$\int_{E'} \frac{f(y)}{y-x}\,dy = \sum Q_n(x)\,\frac{1}{I_n}\int_{E'} f(y)\,P_n(y)\,dy.$$

Sostituendo nella (66), abbiamo

$$f(x) = \sum A_n\,P_n(x) + \sum B_n\,Q_n(x), \tag{67}$$

dove

$$A_n = -\frac{1}{2\pi i\,I_n}\int_E f(y)\,Q_n(y)\,dy, \quad B_n = -\frac{1}{2\pi i\,I_n}\int_{E'} f(y)\,P_n(y)\,dy.$$

Abbiamo quindi ottenuto lo sviluppo [18] in serie di polinomi $P_n(x)$ e funzioni $Q_n(x)$ di una funzione regolata nella corona limitata dalle ellissi omofocali coi fuochi in 0 ed 1 (a e b).

Se $f(x)$ è regolata in tutta l'ellisse E, le integrali che definiscono i coefficienti B_n sono nulle ed abbiamo

$$f(x) = \Sigma A_n P_n(x), \quad A_n = -\frac{1}{2\pi i I_n}\int_E f(y)\, Q_n(y)\, d\, y.$$

Quindi, *una funzione regolata nell'interno di un'ellisse si rappresenta con una serie di polinomi* $P_n(x)$.

Se, per contro, la funzione $f(x)$ è regolata all'infuori dell'ellisse E', la serie (67) contiene soltanto funzioni di seconda specie, ed abbiamo

$$f(x) = \Sigma B_n Q_n(x), \quad B_n = -\frac{1}{2\pi i I_n}\int_{E'} f(y)\, P_n(y)\, (d\, y),$$

dimodochè, *una funzione regolata all'infuori di un'ellisse, si può rappresentare con una serie di funzioni* $Q_n(x)$ *di seconda specie del Darboux.*

21. *Altra proprietà delle funzioni* $Q_n(x)$. Sia

$$f(x) = \Sigma A_n P_n(x), \quad A_n = -\frac{1}{2\pi i I_n}\int_E f(y)\, Q_n(y)\, d\, y,$$

lo sviluppo in serie di polinomi $P_n(x)$ di una funzione regolata nell'interno dell'ellisse E. Supponendo $f(x) = P_n(x)$, si deve avere

$$P_n(x) = \Sigma A_n P_n(x),$$

e quindi $A_m = 0, m \gtrless n$ e $A_n = 1$. Per conseguenza

$$\int_E P_m(y)\, Q_n(y)\, d\, y = 0, \; m \gtrless n; \quad \frac{1}{2\pi i I_n}\int_E P_n(y)\, Q_n(y)\, d\, y = 1,$$

e dunque le funzioni $Q_n(x)$ verificano coi polinomi $P_n(x)$ queste relazioni di ortogonalità [19].

---

(18) Risultati analoghi sono stati ottenuti dal Darboux per i polinomi che nascono dalla serie ipergeometrica, vegg. loc. cit., p. 407.

(19) Relazioni analoghe sono state trovate dal Heine nel caso di *polinomi del Legendre* (Kugelfunktionen, t. I, p. 200).

PARTE II.

Generalizzazione delle serie di polinomi Darboux.

22. Consideriamo le serie di polinomi Darboux $\sum a_n P_{pn}(x)$, il polinomio $P_{pn}(x)$, di grado $p\,n$ in (x), essendo dato dalle equazioni

$$\int_{a_{q-1}}^{a_q} \varphi(x)\, x^s P_{pn}(x)\, d\,x = 0, \quad q = 1, 2, \ldots, p, \quad s = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad (68)$$

$\varphi(x)$ essendo una funzione positiva ed integrabile negli intervalli (a_0, a_1), $\ldots (a_{p-1}\, a_p)$, e $a_0 < a_1 < \cdots < a_p$ p numeri dati.

Proprietà dei polinomi $P_{pn}(x)$.

23. Oltre le note proprietà di questi polinomi, ci proponiamo di indicarne delle nuove. *Il polinomio $P_{pn}(x)$ verifica la relazione*

$$\varphi(x)\, P_{pn}(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\,x^n}\Big[(x-a_0)^n (x-a_1)^n \ldots (x-a_p)^n\, \psi_n(x)\Big],$$

$\psi_n(x)$ *essendo una funzione finita per* $x = a_0, a_1, \ldots, a_p$. Abbiamo, infatti

$$\int_{a_{q-1}}^{a_q} \varphi(x)\, Q\, P_{pn}(x)\, d\,x = 0, \quad q = 1, 2, \ldots, p; \quad Q = 1, x, \ldots, x^{n-1}.$$

Poniamo

$$\varphi(x)\, P_{pn}(x) = \frac{d^n U}{d\,x^n},$$

in modo che la funzione U e le sue prime $(n-1)$ derivate siano nulle per $x = a_{q-1}$.

Abbiamo

$$\int_{a_{q-1}}^{a_q} Q \frac{d^n U}{d x^n} d x = \left[Q U^{(n-1)} - Q' U^{(n-2)} + \cdots + (-1)^{n-1} Q^{n-1} U\right]_{a_{q-1}}^{a_q} = 0.$$

Ma

$$U(a_{q-1}) = 0, \quad U'(a_{q-1}) = 0, \ldots, \quad U^{(n-1)}(a_{q-1}) = 0,$$

quindi

$$Q(a_q) U^{(n-1)}(a_q) - Q'(a_q) U^{(n-2)}(a_q) + \cdots + (-1)^{n-1} Q^{(n-1)}(a_q) U(a_q) = 0.$$

Prendendo per Q i valori $1, x, x^{n-1}$, si deduce da questa relazione successivamente

$$U^{(n-1)}(a_q) = 0, \ldots, \quad U'(a_q) = 0, \quad U(a_q) = 0.$$

Quindi la forma della funzione U è

$$U = (x - a_{q-1})^n (x - a_q)^n R(x), \quad q = 1, 2, \ldots, p,$$

da cui segue

$$U = \frac{1}{n!} (x - a_0)^n (x - a_1)^n \ldots (x - a_p)^n \psi_n(x),$$

e quindi

$$\varphi(x) P_{pn}(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d x^n} \left[(x - a_0)^n (x - a_1)^n \ldots (x - a_p)^n \psi_n(x)\right], \tag{69}$$

$\psi_n(x)$ essendo una funzione finita per $x = a_0, a_1, \ldots, a_p$.

La funzione $\psi_n(x)$ è data dall'espressione

$$\psi_n(x) = \frac{n!}{(x-a_0)^n \ldots (x-a_p)^n} \int_{a_{q-1}}^{x} d x \ldots \int_{a_{q-1}}^{x} \varphi(x) P_{pn}(x) d x, \quad q = 1, 2, \ldots, p, \tag{70}$$

oppure

$$\psi_n(x) = \frac{n!}{(x-a_0)^n \ldots (x-a_p)^n} \int_{a_{q-1}}^{x} (x - z)^{n-1} \varphi(z) P_{pn}(z) d z, \quad q = 1, 2, \ldots, p, \tag{71}$$

P_{pn} essendo dato dalle equazioni (68).

Nella (71) si vede che l'integrale

$$\int_{a_{q-1}}^{x} (x - z)^{n-1} \varphi(z) P_{pn}(z) d z, \quad q = 1, 2, \ldots, p,$$

e le sue $(n-1)$ derivate sono nulle per $x=a_{q-1}$, e quindi pure per $x=a_q$, a causa delle relazioni (68). Quest'integrale contiene quindi il fattore $(x-a_0)^n \ldots (x-a_p)^n$, e perciò, dalla (71), risulta che $\psi_n(x)$ è finita per $x=a_0, a_1, \ldots, a_p$.

Perchè la funzione $\psi_n(x)$ sia indipendente da n, bisogna che la funzione $\varphi(x)$ sia soluzione comune ad una infinità di equazioni integrali, ottenute eguagliando i valori di $\psi_n(x)$ dati dalla (71), e dove $P_{pn}(x)$ è dato dalle relazioni (68).

Se $\varphi(x)=\psi_n(x)$, $\varphi(x)$ è soluzione comune delle equazioni integrali

$$\varphi(x)=n\int_{a_{q-1}}^{x} \frac{(x-z)^{n-1} P_{pn}(z)}{(x-a_0)^n \ldots (x-a_p)^n} \varphi(z)\, dz, \quad q=1,2,\ldots,p, \quad n=1,2,\ldots,$$

$P_{pn}(x)$ essendo dato dalle equazioni (68).

Quando $\varphi(x)$ contiene come fattore $(x-a_q)^{\lambda_q}$, si vede dalla (70), che l'integrale multipla contiene $(x \quad a_q)^{n+\lambda_q}$ come fattore, e quindi $\psi_n(x)$ contiene il fattore $(x-a_q)^{\lambda_q}$. Se

$$\varphi(x)=(x-a_0)^{\lambda_0} \ldots (x-a_p)^{\lambda_p},$$

λ_s essendo scelte in modo che le integrali (68) abbiano un senso), abbiamo

$$\psi_n(x)=(x-a_0)^{\lambda_0} \ldots (x-a_p)^{\lambda_p},$$

$$P_{pn}(x)=\frac{1}{n!}(x-a_0)^{-\lambda_0} \ldots (x-a_p)^{-\lambda_p} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a_0)^{n+\lambda_0} \ldots (x-a_p)^{n+\lambda_p}\right].$$

Nel caso in cui $p=1$, $a_0=-1$, $a_1=1$, $\varphi(x)=\psi(x)=1$, troviamo i polinomi del Legendre; $p=1$, $a_0=a$, $a_1=b$, $\varphi(x)=\psi_n(x)=(x-a)^{\lambda}(x-b)^{\mu}$, $\lambda+1>0$, $\mu+1>0$, abbiamo i polinomi dell'Jacobi; $p=2$, $\varphi(x)=\psi_n(x)=1$, $a_0=-1$, $a_1=0$, $a_2=1$, ritroviamo i polinomi del Sig. Appell ([20])

$$P_{2n}(x)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^n(1-x^2)^n\right].$$

In ciò che segue, *considero quelle serie di polinomi $P_{pn}(x)$, ai quali corrisponde la stessa funzione $\psi_n(x)$, indipendente da n, che indico con $\psi(x)$.*

([20]) Vegg. ([8]).

24. *L'equazione $P_{pn}(x)=0$ ha tutte le radici* [21], *distinte, delle quali ce ne sono n in ciascuno degli intervalli* $(a_0, a_1), \ldots, (a_{p-1}, a_p)$. Infatti applicando il teorema del ROLLE alla funzione

$$U=\frac{1}{n!}(x-a_0)^n \ldots (x-a_p)^n \psi(x),$$

si vede, p. es., che nell'intervallo (a_{q-1}, a_q) la derivata U' si annulla. Analogamente, U' si annulla per $x=a_{q-1}, a_q$ e per un valore b di x compreso in quest'intervallo, e perciò la sua derivata, U'', si annulla per un valore c_1, compreso nell'intervallo (a_{q-1}, b) e per $x=c_2$ dell'intervallo (b, a_q). Per conseguenza, U'' si annulla per due valori distinti di x compresi nell'intervallo (a_{q-1}, a_q). Quindi, $U^{(n)}(x)$ si annulla per n valori distinti, compresi nell'intervallo (a_{q-1}, a_q). Cioè, $\varphi(x) P_{pn}(x)$ si annulla per n valori in ognuno degli intervalli (a_{q-1}, a_q), e siccome $\varphi(x)>0$ in tutti questi intervalli, risulta che $P_{pn}(x)$ si annulla per pn valori di x, compresi n ad n in ciascuno degli intervalli (a_{q-1}, a_q); con altre parole, l'equazione $P_{pn}(x)=0$ ha tutte le radici reali.

25. *Il polinomio $P_{pn}(x)$ è il coefficiente di t^n nello sviluppo in serie della funzione*

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(x)}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}+\Sigma \frac{t^n}{n!\,\varphi(x)}\frac{d^n}{d x^n}\left[(x-a_0)^n \ldots (x-a_p)^n \psi(x)\right], \tag{72}$$

z essendo la radice dell'equazione

$$z=x+t f(z), \quad z=x, \quad t=0, \quad f(z)=(z-a_0)\ldots(z-a_p). \tag{73}$$

Il primo membro dell'espressione (72) è una funzione generatrice dei polinomi $P_{pn}(x)$. Se $\varphi(x)=\psi(x)=1$, $a_0=-1$, $a_1=0$, $a_2=1$, i polinomi del sig. APPEL ammettono la funzione generatrice

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\Sigma t^n P_{2n}(x),$$

$$z=x+t z(1-z^2), \quad z^3+z\frac{1-t}{t}-\frac{x}{t}=0.$$

Troviamo

$$z=\sqrt[3]{\frac{x}{2t}+\sqrt{\left(\frac{x}{2t}\right)^2+\left(\frac{1-t}{3t}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{x}{2t}-\sqrt{\left(\frac{x}{2t}\right)^2+\left(\frac{1-t}{3t}\right)^3}}, \quad z=x, \quad t=0.$$

da cui si può calcolare $\frac{\partial z}{\partial x}$.

---

[21] Teorema dimostrato in altro modo dal sig. ANGELESCU (C. R., t. 162, Janv. 1916).

26. *Se* $\varphi(x) = \psi(x) = (x - a_0)^{\lambda_0} \dots (x - a_p)^{\lambda_p}$, ***il polinomio*** $P_{pn}(x)$ ***verifica un'equazione differenziale lineare di ordine*** $(p+1)$ ***completamente integrabile.*** Infatti, abbiamo

$$U = (x - a_0)^{n+\lambda_0} \dots (x - a_p)^{n+\lambda_p},$$

$$\frac{U'}{U} = \frac{n+\lambda_0}{x-\alpha_0} + \frac{n+\lambda_1}{x-a_1} + \dots + \frac{n+\lambda_p}{x-a_p},$$

$$(x - a_0) \dots (x - a_p) \frac{dU}{dx} =$$

$$= \sum_{s=0}^{p} (n+\lambda_s)(x-a_0) \dots (x-a_{s-1})(x-a_{s+1}) \dots (x-a_p).$$

Prendendo la derivata di ordine $(n+p)$, con la formola del Leibnitz, di ambi i membri, si ottiene

$$(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_p)\frac{d^{n+p+1}U}{dx^{n+p+1}} + A_p \frac{d^{n+p}U}{dx^{n+p}} + \dots + A_0 \frac{d^n U}{dx^n} = 0,$$

in cui sostituendo

$$y = \varphi(x) P_{pn}(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n U}{dx^n},$$

si ottiene l'equazione differenziale

$$(x-a_0)\dots(x-a_p)\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} + A_p \frac{d^p y}{dx^p} + \dots + A_0 y = 0, \tag{74}$$

che ammette come soluzione

$$y = \varphi(x) P_{pn}(x) = (x-a_0)^{\lambda_0} \dots (x-a_p)^{\lambda_p} P_{pn}(x).$$

Facendo il cambiamento di variabile

$$y = (x-a_0)^{\lambda_0} \dots (x-a_p)^{\lambda_p} z,$$

si ottiene l'equazione differenziale

$$(x-a_0)\cdots(x-a_p)\frac{d^{p+1}z}{dx^{p+1}} + B_p \frac{d_p z}{dx^p} + \dots + B_0 z = 0, \tag{75}$$

che ammette come soluzione il polinomio $P_{pn}(x)$, dove B_s è un polinomio di grado s in x.

L'equazione (75) è completamente integrabile, poichè, facendo il cambiamento

$$z = (x - a_0)^{-\lambda_0} \dots (x - a_p)^{-\lambda p}\, y.$$

si ottiene l'equazione (74), le cui soluzioni sono [22]

$$\frac{d^n}{d\,x^n}\left[(x - a_0)^{n+\lambda_0} \dots (x - a_p)^{n+\lambda p}\right],$$

$$\int_{a_{q-1}}^{a_q} (z - a_0)^{n+\lambda_0} \dots (y - a_p)^{n+\lambda p} (z - x)^{-n-1}\, d\,z,\ \ q = 1, 2, \dots, p,$$

ciò che si può facilmente verificare seguendo lo stesso procedimento del § 7.

Per conseguenza, le soluzioni dell'equazione differenziale (75) sono

$$P_{pn}(x),\ \ \frac{1}{n!}(x - a_0)^{-\lambda_0} \dots (x - a_p)^{-\lambda p} \int_{a_{q-1}}^{a_q} (z - a_0)^{n+\lambda_0} \dots (z - a_p)^{n+\lambda p} (z - x)^{-n-1}\, d\,z,$$

$$q = 1, 2, \dots, p.$$

27. *Valore approssimato del polinomio* $P_{pn}(x)$. La serie del Lagrange (72), e convergente se (§ 9)

$$|t| < \frac{1}{\left|\frac{f(z)}{z - x}\right|},\ \ f(z) = (z - a_0) \dots (z - a_p),\ \ z = x + t\,f(z),$$

quindi se

$$|t| < \frac{1}{|\xi|},\ \ \xi = f'(\beta),\ \ (\beta - x)\, f'(\beta) - f(\beta) = 0, \tag{76}$$

$|f'(\beta)|$ essendo un massimo.

Il valore approssimato di $P_{pn}(x)$ è dato dalla relazione (43)

$$\frac{\psi(\beta)}{\sqrt{2\pi n}}\,\frac{[f'(\beta)]^{n+1}}{\sqrt{2 f(\beta) f''(\beta)}}(1 + \varepsilon),$$

ed è

$$\Psi(\xi)\, n^{-\frac{1}{2}} \xi^{n+1} (1 + \varepsilon),$$

$\Psi(\xi)$ essendo una funzione indipendente da n ed ε, β e ξ essendo dati dalle equazioni (76).

---

(22) Laurent, *Sur le calcul inverse des intégrales définies* (Journal de Liouville, 1878 p. 245).

Nel caso dei polinomi del Sig. APPELL, abbiamo

$$\left.\begin{array}{c} f(\beta)=\beta-\beta^3,\ \ f'(\beta)=1-3\beta^2=\xi,\ \ \beta=\dfrac{3x\xi}{2(\xi-1)}, \\ x^2=\dfrac{4(1-\xi)^3}{27\xi^2}, \end{array}\right\} \tag{77}$$

$$P_{2n}(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{(\xi-1)(\xi+2)}}n^{-\frac{1}{2}}\xi^{n+1}(1+\varepsilon).$$

Regione di convergenza delle serie generalizzate del Darboux.

28. Essendo data una serie del DARBOUX, $\sum a_n P_{pn}(x)$, abbiamo veduto che il valore approssimato del polinomio $P_{pn}(x)$ è

$$P_{pn}(x)=\Psi(\xi)n^{-\frac{1}{2}}\xi^{n+1}(1+\varepsilon),\ \ \xi=f'(\beta),\ \ (\beta-x)f'(\beta)=f(\beta).$$

Da cui risulta che si possono assimilare queste serie alle serie di potenze intere di ξ. Le curve di convergenza sono quelle per cui $|\xi|=c-te$, cioè le curve del piano x date dalla trasformazione (76),

$$\xi=f'(\beta),\ \ (\beta-x)f'(\beta)=f(\beta),\ \ |\xi|=c-te.$$

Nel caso dei polinomi del Sig. APPELL, le curve di convergenza sono date dalla trasformazione (77),

$$x^2=\frac{4(1-\xi)^3}{27\xi^2},\ |\xi|=c-te.$$

Le curve di convergenza si sarebbero potute ottenere senza calcolare il valore approssimato del polinomio $P_{pn}(x)$. Infatti, la serie (72) è convergente se

$$|t|<\frac{1}{|\xi|},\ \ \xi=f'(\beta),\ \ (\beta-x)f'(\beta)=f(\beta).$$

Ma, x essendo nel campo di convergenza delle serie

$$\Sigma a_n P_{pn}(x), \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho},$$

le curve di convergenza di queste serie sono date (§ 13) dalla relazione $|\xi| = \rho$, e quindi, nel piano x, sono date dalla trasformazione

$$(\beta - x) f'(\beta) = f(\beta), \quad f'(\beta) = \xi, \quad |\xi| = \rho = c - t e.$$

I fondamenti della geometria proiettivo-differenziale secondo il metodo di Fubini.

(*Di* EDUARD ČECH, *a Praga.*)

In una serie di Memorie [1], il prof. FUBINI ha edificato in questi ultimi anni i fondamenti della geometria proiettivo-differenziale delle ipersuperficie [2] col metodo delle forme differenziali, che si era mostrato tanto efficace nella geometria metrica. Studiando queste ricerche, mi sono accorto sempre più che la natura intima del metodo appare più chiara, se si fa uso conseguente del principio di dualità. Inoltre mi è sembrato sempre più fondamentale l'ufficio compiuto in tali ricerche dalla scelta dei fattori arbitrarî delle coordinate omogenee dei punti e iperpiani tangenti. Analizzando il significato geometrico di tale scelta, mi sono convinto che occorre, anche per le applicazioni, di estendere le formole date dal FUBINI per le coordinate normali, al caso che i fattori detti siano fissati in modo qualunque. Nello sviluppo di tali idee mi è stata molto utile anche una Memoria del prof. SANNIA [3], di prossima pubblicazione negli *Annali di Matematica*, gentilmente fattami conoscere dall'Autore, del che gli esprimo qui la mia riconoscenza. Si è mostrato opportuno di esporre i risultati che ho ottenuti in modo da potersi leggere senza supporre la conoscenza dei lavori del prof. FUBINI in argomento. Avendo qui reso più intuitivi i concetti analitici introdotti dal FUBINI mediante qualche considerazione geometrica, posso forse sperare di avere anche reso con ciò più evidente la loro importanza. Rilevo, fra i risultati particolari che sem-

(1) V. specialmente la Memoria: *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale.* Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, t. 43, 1918-19.

(2) E anche in altri casi.

(3) *Riavvicinamento di geometrie differenziali delle superficie: ordinaria, affine, proiettiva, ecc.*

brano nuovi, la generalizzazione della quadrica di Lie e del gruppo delle tangenti di Segre alle ipersuperficie, e l'estensione delle due forme differenziali, e dell'applicazione proiettiva, alle *varietà d'elementi*.

Ho divisa la Memoria in tre parti. Nella prima pongo il concetto generale della congruenza delle normali e deduco le equazioni fondamentali per una scelta fissa dei fattori delle coordinate. Nella seconda parte studio l'effetto della moltiplicazione per fattori arbitrarii delle coordinate, considerò la normalizzazione delle coordinate, delle forme e delle normali, e infine studio le geodetiche della forma quadratica. Nella terza parte dò un breve cenno dell'estensione della teoria alle varietà di elementi.

§ 1.

Consideriamo in uno spazio lineare S_{n+1} ad $n+1$ dimensioni un'ipersuperficie Π. Indichiamo sempre con una lettera sola, x e ξ rispettivamente, $\left(\text{e analogamente } \frac{\partial x}{\partial u_i}, X, \ldots\right)$ le coordinate omogenee dei punti e degli iperpiani tangenti di Π, le quali siano funzioni date di n variabili indipendenti $u_1, u_2, \ldots u_n$. Saranno dunque identicamente soddisfatte le equazioni

$$S x \xi = S \xi \, d x = S x \, d \xi = 0 \tag{1}$$

dove, come sempre nel seguito, il simbolo S significa la somma estesa alle diverse $n+2$ coordinate. Ora la nostra ipersuperficie non muta:

1.° moltiplicando tutte le x per un fattore ρ e le ξ per σ, le funzioni ρ e σ delle u essendo legate all'unica condizione $\rho \sigma == 0$;

2.° cambiando comunque le variabili indipendenti $u_1, \ldots, u_n$; e infine, trattandosi di geometria *proiettiva*;

3.° eseguendo sulle x e ξ due sostituzioni lineari contragredienti, a coefficienti *numerici* e a determinante uguale all'unità. Però tutti i calcoli che si faranno saranno tali da non mutare eseguendo le operazioni 2 e 3. In quanto all'operazione 1, cominciamo per supporre scelti in modo *fisso* i fattori delle x e delle ξ, mentre più tardi studieremo l'effetto del cambiamento di essi. Astraendo da fattori *numerici* delle coordinate, possiamo dare a questa scelta un significato geometrico semplice. Cominciamo con le ξ. Ad ogni punto di Π associamo la retta intersezione degli iperpiani

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u_2}, \ldots, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u_n} \tag{2}$$

evidentemente indipendente dalla scelta delle variabili indipendenti. Questa retta, passante per il punto x, sarà per brevità di linguaggio nel seguito chiamata semplicemente la *normale.* Si può osservare che prendendo per le ξ i coseni direttori e la distanza dall'origine, essa coincide colla normale metrica, e similmente nello spazio non euclideo prendendo per ξ le coordinate di WEIERSTRASS. Però data una congruenza di rette (4) affinchè sia possibile scegliere il fattore delle ξ in modo che essa diventi la congruenza delle normali, è necessario che sia soddisfatta una condizione che si vedrà alla fine di questo paragrafo. Per ora osserviamo soltanto che, date le normali, il fattore delle ξ è determinato a meno di un fattore numerico. Per il seguito, ci conviene di fissare sopra ogni normale un punto X e il fattore delle sue coordinate secondo le condizioni

$$S\,X\,\xi = 1, \quad S\,X\,\frac{\partial \xi}{\partial u_i} = 0 \text{ (5)}. \tag{3}$$

Correlativamente l'S_{n-1} determinato dai punti

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial x}{\partial u_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial u_n} \tag{4}$$

sarà chiamato l'S_{n-1} *pseudonormale.* Per esso si farà passare l'iperpiano Ξ secondo le equazioni

$$S\,\Xi\,x = 1, \quad S\,\Xi\,\frac{\partial x}{\partial u_i} = 0. \tag{5}$$

L'indeterminazione che resta nelle X, Ξ si può del resto, come vedremo, togliere in modo intrinseco.

Ci occorre considerare ancora un altro ente geometrico legato alla scelta dei fattori delle x e ξ. Si tratta della proiettività π fra i punti di ξ e gli

(4) Congruenza di rette sarà per noi varietà ∞^n di rette.

(5) Gli indici i, k, l, r, s vanno sempre da 1 a n. Queste notazioni e formole coincidono con quelle del FUBINI nel caso di coordinate *normali.*

iperpiani per x, nella quale al punto

$$\lambda x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial x}{\partial u_n} \tag{6}$$

corrisponde l'iperpiano

$$\lambda \xi + \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial \xi}{\partial u_n}. \tag{6'}$$

In questa proiettività, in particolare, l'S_{n-1} pseudonormale e la normale si corrispondono. Anzi, essa si può definire come quella proiettività nella quale si corrispondono tutti gli S_{n-1} pseudonormali e rette normali, ai quali si giunge moltiplicando le x e ξ per *lo stesso* fattore. Estendiamo questa proiettività a tutto lo spazio facendo corrispondere al punto

$$\lambda x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial x}{\partial u_n} + \mu X \tag{α}$$

l'iperpiano

$$\lambda \xi + \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial \xi}{\partial u_n} + \mu \Xi.$$

Osserviamo che (α) definisce $\lambda, \lambda_1 \ldots \lambda_n, \mu$ come coordinate *locali* dei punti di S_n, cioè in un sistema di riferimento variabile al variare delle u. La proiettività estesa è la polarità rispetto ad una quadrica Q, la cui equazione nelle coordinate locali è

$$\sum_{ik} \Delta_{ik} \lambda_i \lambda_k - 2 \lambda \mu - \mu^2 S X \Xi = 0 \tag{7}$$

dove le Δ_{ik} sono quantità che ora definiremo. Vedremo più tardi che Q è una *quadrica osculatrice* di Π, vale a dire ha con Π un contatto del secondo ordine.

In ciò che precede si è tacitamente ammesso che gli iperpiani (2) e i punti (4) sono linearmente indipendenti. Noi anzi, *in tutto ciò che segue,* ammettiamo che ciascuna delle due matrici

$$\left\| x, \ \frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \ \frac{\partial x}{\partial u_n} \right\|, \quad \left\| \xi, \ \frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \ldots, \ \frac{\partial \xi}{\partial u_n} \right\|$$

sia di caratteristica $n+1$, cioè che Π è proprio una ipersuperficie sia come luogo di punti, sia come inviluppo d'iperpiani. Questa supposizione si può esprimere introducendo la *forma quadratica differenziale*, di importanza fondamentale per il seguito,

$$F_2 = -S\,dx\,d\xi = \sum_{ik} \Delta_{ik}\,du_i\,du_k, \tag{8}$$

la quale, per le (1), si può anche scrivere

$$F_2 = S\,\xi\,d^2x = S\,x\,d^2\xi, \tag{8 bis}$$

sicchè

$$\Delta_{ik} = S\,\xi\,\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_k} = -S\,\frac{\partial \xi}{\partial u_i}\,\frac{\partial x}{\partial u_k} = S\,x\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i\,\partial u_k}. \tag{9}$$

Invero si riconosce subito che la supposizione fatta equivale all'altra

$$\nabla = |\Delta_{ik}| -= 0. \tag{10}$$

Accanto alla forma F_2 uguale importanza ha per noi la forma differenziale cubica

$$\Lambda_3 = S\,(dx\,d^2\xi - d\xi\,d^2x) = 2\sum_{ikl} D_{ikl}\,du_i\,du_k\,du_l, \tag{11}$$

dove i differenziali secondi delle u non entrano che in apparenza. Si ha

$$\Lambda_3 = \sum_{ikl}\left(\frac{\partial x}{\partial u_l}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i\,\partial u_k} - \frac{\partial \xi}{\partial u_l}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_k}\right) du_i\,du_k\,du_l$$

e da ciò semplicemente

$$2\,D_{ikl} = \frac{\partial x}{\partial u_l}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i\,\partial u_k} - \frac{\partial \xi}{\partial u_l}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_k}, \tag{12}$$

perchè, definendo D_{ikl} dalle equazioni (12) e derivando le (9) si trova subito che

$$D_{ikl} = D_{ilk}.$$

Ora, derivando le (9), si ottiene

$$\frac{\partial \Delta_{il}}{\partial u_k} = -\frac{\partial}{\partial u_k} S\,\frac{\partial x}{\partial u_i}\,\frac{\partial \xi}{\partial u_l} = -S\,\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_k}\,\frac{\partial \xi}{\partial u_l} - S\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_k\,\partial u_l}\,\frac{\partial x}{\partial u_i},$$

$$\frac{\partial \Delta_{kl}}{\partial u_i} = -\frac{\partial}{\partial u_i} S\,\frac{\partial x}{\partial u_l}\,\frac{\partial \xi}{\partial u_k} = -S\,\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_l}\,\frac{\partial \xi}{\partial u_k} - S\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i\,\partial u_k}\,\frac{\partial x}{\partial u_l},$$

$$-\frac{\partial \Delta_{ik}}{\partial u_l} = \frac{\partial}{\partial u_l} S\,\frac{\partial x}{\partial u_i}\,\frac{\partial \xi}{\partial u_k} = S\,\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_l}\,\frac{\partial \xi}{\partial u_k} + S\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_k\,\partial u_l}\,\frac{\partial x}{\partial u_i},$$

e sommando

$$\frac{\partial \Delta_{il}}{\partial u_k}+\frac{\partial \Delta_{kl}}{\partial u_i}-\frac{\partial \Delta_{ik}}{\partial u_l}=-S\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_k}\frac{\partial \xi}{\partial u_l}-S\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i\,\partial u_k}\frac{\partial x}{\partial u_l}.$$

Questa equazione, confrontata con (12), ci dà

$$\left.\begin{aligned} &S\,\xi\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_k}=\Delta_{ik},\\ &S\frac{\partial \xi}{\partial u_l}\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_k}=-D_{ikl}-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Delta_{il}}{\partial u_k}+\frac{\partial \Delta_{kl}}{\partial u_i}-\frac{\partial \Delta_{ik}}{\partial u_l}\right], \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} &S\,x\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i\,\partial u_k}=\Delta_{ik},\\ &S\frac{\partial x}{\partial u_l}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i\,\partial u_k}=+D_{ikl}-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Delta_{il}}{\partial u_k}+\frac{\partial \Delta_{kl}}{\partial u_i}-\frac{\partial \Delta_{ik}}{\partial u_l}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

Ora i punti x, $\frac{\partial x}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}$, X essendo $n+2$ punti linearmente indipendenti, valgono necessariamente equazioni del tipo

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_k}=\sum_l A_{ikl}\frac{\partial x}{\partial u_l}+C_{ik}X+b_{ik}x.$$

Ora sostituendo queste espressioni al posto di $\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_k}$ nelle equazioni (13), si ha, ricordando (1), (3) e (9),

$$C_{ik}=\Delta_{ik},\quad \sum_r A_{ikr}\,\Delta_{lr}=D_{ikl}+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Delta_{il}}{\partial u_k}+\frac{\partial \Delta_{kl}}{\partial u_i}-\frac{\partial \Delta_{ik}}{\partial u_l}\right].$$

Indichiamo con ϑ_{ik} il complemento algebrico di Δ_{ik} in $\nabla=|\Delta_{ik}|$ diviso per ∇ stesso, sicchè

$$\sum_i \vartheta_{ik}\,\Delta_{il}=1 \text{ o } 0 \tag{14}$$

rispettivamente se $k=l$ oppure $k\gtrless l$, e con $\left\{ {ik \atop l} \right\}$ i simboli di Christoffel per la forma F_2

$$\left\{ {ik \atop r} \right\}=\frac{1}{2}\sum_l \vartheta_{lr}\left[\frac{\partial \Delta_{il}}{\partial u_k}+\frac{\partial \Delta_{kl}}{\partial u_i}-\frac{\partial \Delta_{ik}}{\partial u_l}\right]$$

e otteniamo

$$A_{ikr} = \sum_l \vartheta_{lr} D_{ikl} + \left\{ {ik \atop r} \right\}.$$

Così abbiamo trovate le *equazioni fondamentali per le coordinate x*:

$$x_{ik} = \sum_{rs} \vartheta_{rs} D_{ikr} \frac{\partial x}{\partial u_s} + \Delta_{ik} X + b_{ik} x. \tag{15}$$

Similmente dalle (13') si trovano le *equazioni fondamentali per le coordinate ξ*:

$$\xi_{ik} = - \sum_{rs} \vartheta_{rs} D_{ikr} \frac{\partial \xi}{\partial u_s} + \Delta_{ik} \Xi + \beta_{ik} \xi. \tag{15 bis}$$

Qui x_{ik} e ξ_{ik} sono le derivate seconde covarianti costruite rispetto alla forma F_2,

$$x_{ik} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \, \partial u_k} - \sum_r \left\{ {ik \atop r} \right\} \frac{\partial x}{\partial u_r} \text{ (e analoghe per le } \xi_{ik}\text{).}$$

Le equazioni fondamentali (15) e (15 bis) stesse mostrano che le forme differenziali

$$\sum_{ik} b_{ik} \, d u_i \, d u_k, \quad \sum_{ik} \beta_{ik} \, d u_i \, d u_k$$

sono forme covarianti della F_2. Possiamo usare queste forme, se vogliamo togliere l'indeterminazione che ci è restata per X e Ξ. Invero, sostituendo $X + \lambda x$ al posto di X, b_{ik} si muta in $b_{ik} + \lambda \Delta_{ik}$ e si può supporre

$$\sum_{ik} \vartheta_{ik} b_{ik} = 0,$$

relazione intrinseca, che determina X univocamente. Similmente, per fissare Ξ, si può supporre

$$\sum_{ik} \vartheta_{ik} \beta_{ik} = 0.$$

Inversamente si supponga l'ipersuperficie Π definita (a meno di collineazioni) dalle equazioni differenziali cui soddisfano le x. Introducendo un'incognita ausiliaria τ, queste equazioni saranno del tipo

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \, \partial u_k} = \sum_r A_{ikr} \frac{\partial x}{\partial u_r} + \Delta_{ik} \tau + b_{ik} x. \tag{16}$$

Derivando si ricavano

$$\Delta_{ik} \frac{\partial \tau}{\partial u_l} - \Delta_{il} \frac{\partial \tau}{\partial u_k}$$

come forme lineari in x, $\frac{\partial x}{\partial u_i}$, τ. Ora se, come in tutta questa Memoria, si suppone che l'ipersuperficie Π abbia proprio ∞^n iperpiani tangenti distinti, il determinante $\nabla = | \Delta_{ik} |$ è diverso da zero, sicchè si trova in un modo ben determinato (le equazioni non possono essere contradditorie)

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = a_i \tau + \cdots,$$

dove i termini trascurati sono forme lineari in x, $\frac{\partial x}{\partial u_i}$. Se si sceglie il fattore di proporzionalità delle ξ in modo che sia

$$S \tau \xi = 1, \tag{17}$$

si passa dalle equazioni (16) alle (15) ponendo

$$\tau = X + \sum_{ik} \vartheta_{ik} a_i \frac{\partial x}{\partial u_k} . \tag{18}$$

Invero le equazioni (3) si trovano essere soddisfatte. È dunque facile costruire le forme F_2 e Λ_3 per un'ipersuperficie definita dalle equazioni (16).

Quale è il significato geometrico delle equazioni $F_2 = 0$, $\Lambda_3 = 0$? È ben noto che $F_2 = 0$ dà il *cono delle tangenti all'intersezione di* Π *e* ξ. Similmente $\Lambda_3 = 0$ rappresenta il *cono delle tangenti all'intersezione di* Π *colla quadrica osculatrice* Q. Per dimostrare questa proposizione, calcoliamo le coordinate locali del punto

$$x + d x + \frac{1}{2} d^2 x + \frac{1}{6} d^3 x + \cdots$$

Si ha

$$d^2 x = \sum_i \frac{\partial x}{\partial u_i} \delta^2 u_i + \sum_{ik} x_{ik} d u_i d u_k ,$$

$$d^3 x = \sum_i \frac{\partial x}{\partial u_i} \delta^3 u_i + 3 \sum_{ik} x_{ik} d u_i \delta^2 u_k + \sum_{ikl} x_{ikl} d u_i d u_k d u_l ,$$

dove x_{ik} e x_{ikl} sono le derivate covarianti e

$$\delta^2 u_i = d^2 u_i + \sum_{rs} \left\{ \begin{matrix} r\ s \\ i \end{matrix} \right\} d u_r\, d u_s, \quad \delta^3 u_i = d(\delta^2 u_i) + \sum_{rs} \left\{ \begin{matrix} r\ s \\ i \end{matrix} \right\} d u_r\, \delta^2 u_s$$

sono i differenziali controvarianti [6].

Le (15) dànno subito

$$d^2 x = \sum_i \frac{\partial x}{\partial u_i} \delta^2 u_i + \sum_{ikrs} \vartheta_{rs} D_{ikr}\, d u_i\, d u_k \frac{\partial x}{\partial u_s} + F_2 X + x \sum_{ik} b_{ik}\, d u_i\, d u_k,$$

e derivando covariantemente le (12) e ricordandoci che $\frac{\partial X}{\partial u_i}$ è una combinazione lineare di x e $\frac{\partial x}{\partial u_i}$, troviamo per $d^3 x$ una forma lineare in x, $\frac{\partial x}{\partial u_i}$ e X, nella quale il coefficiente di X vale

$$3 \sum_{ik} \Delta_{ik}\, d u_i\, \delta^2 u_k + \sum_{iklrs} \vartheta_{rs} D_{ikr} \Delta_{ls}\, d u_i\, d u_k\, d u_l = 3 \sum_{ik} \Delta_{ik}\, d u_i\, \delta^2 u_k +$$
$$+ \sum_{ikl} D_{ikl}\, d u_i\, d u_k\, d u_l.$$

Così si ottiene

$$x + d x + \frac{1}{2} d^2 x + \frac{1}{6} d^3 x + \cdots = \lambda x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial x}{\partial u_n} + \mu X,$$

dove

$$\lambda = 1 + \sum_{ik} b_{ik}\, d u_i\, d u_k + \cdots, \quad \lambda_i = d u_i + \frac{1}{2} \left(\delta^2 u_i + \sum_{krs} \vartheta_{is} D_{krs}\, d u_r\, d u_s \right) + \cdots,$$

$$\mu = \frac{1}{2} F_2 + \frac{1}{2} \sum_{ik} \Delta_{ik}\, d u_i\, \delta^2 u_k + \frac{1}{6} \sum_{ikl} D_{ikl}\, d u_i\, d u_k\, d u_l + \cdots$$

Da ciò segue

$$\sum_{ik} \Delta_{ik} \lambda_i \lambda_k = F_2 + \sum_{ik} \Delta_{ik}\, d u_i\, \delta^2 u_k + \sum_{ikl} D_{ikl}\, d u_i\, d u_k\, d u_l + \cdots,$$

$$\frac{2\mu}{\lambda} - \sum_{ik} \Delta_{ik} \frac{\lambda_i}{\lambda} \frac{\lambda_k}{\lambda} = 2\mu - \sum_{ik} \Delta_{ik} \lambda_i \lambda_k + \cdots = -\frac{2}{3} \sum_{ikl} D_{ikl}\, d u_i\, d u_k\, d u_l + \cdots,$$

da cui si vede l'esattezza della proposizione enunciata. (Il termine in μ^2 nel-

[6] Cf. G. Fubini, *I differenziali controvarianti*, Atti Acc. Torino, vol. 54, 17-11-1918.

l'equazione della Q appare trascurabile, perchè infinitesimo di ordine superiore).

La congruenza delle normali dipende, come sappiamo, dal fattore delle ξ; moltiplicando queste per σ, essa viene sostituita dalla congruenza delle rette xZ, dove Z soddisfa alle equazioni

$$S\,Z\frac{\partial}{\partial u_i}(\sigma\,\xi)=0$$

ossia

$$S\,Z\left(\frac{\partial \xi}{\partial u_i}+\alpha_i\,\xi\right)=0 \tag{19}$$

dove $\alpha_i=\dfrac{\partial \log \sigma}{\partial u_i}$ sicchè

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial u_k}=\frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i}. \tag{20}$$

Sia ora Z un punto soluzione delle equazioni (19), senza che siano necessariamente soddisfatte le condizioni (20) per una congruenza delle normali. Si supporrà $S\,Z\xi \mid\!\!- 0$, che esprime che Z non sta nell'iperpiano ξ. Cerchiamo le ***sviluppabili*** della congruenza xZ, ossia le curve con tangenti appartenenti alla congruenza. Se

$$Z+\lambda\,x$$

è il punto di contatto della tangente xZ di una tale curva, è possibile determinare $d\,u_i$ in guisa che sia

$$d\,(Z+\lambda\,x)=\mu\,(Z+\lambda\,x),$$

ciò che equivale alle equazioni

$$S\left(\frac{\partial \xi}{\partial u_i}+\alpha_i\,\xi\right)d\,(Z+\lambda\,x)=0,$$

le quali, differenziando l'identità

$$S\left(\frac{\partial \xi}{\partial u_i}+\alpha_i\,\xi\right)(Z+\lambda\,x)=0$$

che è conseguenza di (19), si possono scrivere anche

$$S\,(Z+\lambda\,x)\,d\left(\frac{\partial \xi}{\partial u_i}+\alpha_i\,\xi\right)=0.$$

Se si sviluppano queste condizioni tenendo conto di (9) e (19) si ottiene

$$\sum_k d\,u_k \left\{ \lambda\,\Delta_{ik} + S\,Z\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i\,\partial u_k} + \xi\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial u_k} - \alpha_i\,\alpha_k\right)\right]\right\} = 0.$$

Ma i valori di $d\,u_1,\ d\,u_2, \ldots,\ d\,u_n$ soddisfacenti a queste equazioni danno quelle direzioni della stella $(d\,u_1,\ d\,u_2, \ldots,\ d\,u_n)$, alle quali corrispondono i medesimi spazî in tutte le correlazioni del fascio

$$\lambda \sum_{ik} \Delta_{ik}\,d\,u_i\,\delta\,u_k + \sum_{ik} S\,Z\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i\,\partial u_k} + \xi\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial u_k} - \alpha_i\,\alpha_k\right)\right] d\,u_i\,\delta\,u_k = 0. \qquad (21)$$

Supponiamo, come avviene in generale, che il determinante caratteristico del fascio (21) abbia *n radici distinte.* In questa ipotesi esistono precisamente n direzioni cercate. Ora fra le correlazioni del fascio (21) ve ne è una simmetrica, la polarità rispetto a $F_2 = 0$; e, come è noto, e si dimostra facilmente, le nostre n direzioni formano un n — edro polare o coniugato rispetto a questa quadrica allora e allora soltanto che tutte le correlazioni del fascio sono simmetriche, ossia soltanto se sono soddisfatte le condizioni (20). Vediamo dunque che *condizione necessaria e sufficiente* (7) *affinchè una congruenza possa considerarsi come congruenza di normali è che tale congruenza sia coniugata all' ipersuperficie* Π *nel senso che le n direzioni su* Π *corrispondenti alle sviluppabili della congruenza formino un n — edro polare della quadrica delle direzioni asintotiche.*

Applicando l'equazione (21) in particolare alla congruenza $x\,X$ delle normali corrispondenti al fattore speciale delle ξ che si considera si trova ricordando (15 bis)

$$(\lambda + S\,X\,\Xi) \sum_{ik} \Delta_{ik}\,d\,u_i\,\delta\,u_k + \sum_{ik} \beta_{ik}\,d\,u_i\,\delta\,u_k = 0, \qquad (21\text{ bis})$$

sicchè *le n direzioni su* Π *corrispondenti alla congruenza $x\,X$ delle normali formano l' n — edro polare comune delle due quadriche*

$$F_2 = 0, \quad \sum_{ik} \beta_{ik}\,d\,u_i\,d\,u_k = 0$$

e sopra ogni normale, il gruppo dei fochi è proiettivo al gruppo delle quadriche speciali del fascio determinato da quelle due. Correlativamente dicasi per la forma $\sum_{ik} b_{ik}\,d\,u_i\,d\,u_k$ e la congruenza degli spazî pseudonormali.

(7) *Sotto l'ipotesi fatta sul determinante caratteristico del fascio* (21).

§ 2.

Moltiplichiamo ora le x per un fattore ρ e le ξ per un fattore σ. Dalle definizioni (8) e (11) delle forme F_2 e Λ_3 si vede immediatamente l'effetto di questa moltiplicazione sulle due forme:

$$F'_2 = \rho\sigma F_2, \quad \Lambda'_3 = \rho\sigma\left(\Lambda_3 + 3 F_2\, d\log\frac{\rho}{\sigma}\right). \tag{22}$$

In particolare per $\rho = \sigma$ le equazioni $\Lambda_3 = 0$, $\Lambda'_3 = 0$ sono equivalenti, come devono essere secondo il loro significato geometrico. Ponendo

$$\tau_i = \frac{\partial}{\partial u_i}\log\frac{\rho}{\sigma}, \tag{23}$$

la forma Λ_3, al variare di ρ e σ, descrive il sistema lineare

$$\Lambda'_3 = \rho\sigma\,[\Lambda_3 + 3 F_2 (\tau_1\, d u_1 + \tau_2\, d u_2 + \cdots + \tau_n\, d u_n)]. \tag{24}$$

Per $u_1, \ldots, u_n$ *fisse*, è sempre possibile determinare ρ e σ in guisa che Λ'_3 coincida con una forma *generica* (il coefficiente di Λ_3 deve essere diverso da zero) del sistema lineare. Un tal sistema lineare rappresenta, come è noto, un'ipersuperficie cubica di uno spazio ad n dimensioni con un punto doppio corrispondente alla quadrica fondamentale $F_2 = 0$ del sistema lineare. A tali ipersuperficie ben determinate dello spazio ξ si arriva qui colla seguente considerazione geometrica: Essendo y un punto generico dell'iperpiano ξ, si seghi Π con tutti i piani passanti per la retta xy e si costruiscano le rette polari del punto y rapporto alle coniche osculatrici (con contatto cinquepunto) di ognuna delle curve sezioni. Il luogo di queste rette, al variare del piano per la retta xy, è un iperpiano η della stella x (8); precisamente l'iperpiano polare di y rispetto ad una qualunque di quelle quadriche osculatrici per le quali il cono $\Lambda'_3 = 0$ contiene la tangente xy. Correlativamente si ritorna dall'iperpiano η al punto y. Così nasce una corrispondenza birazionale fra gli iperpiani η della stella x e i punti dell'i-

(8) Proveremo più oltre una proposizione più generale.

perpiano ξ, nella quale agli iperpiani passanti per una retta generica della stella x si vede corrispondere un' ipersuperficie cubica dello spazio ξ imagine del sistema lineare (24), con punto doppio in x, nel quale $F_2 = 0$ è il cono delle tangenti.

Se

$$\Lambda'_3 = 2 \sum_{ikl} D'_{ikl}\, d\, u_i\, d\, u_k\, d\, u_l,$$

dalla (24) si ha

$$2\, D'_{ikl} = \rho\, \sigma \left[2\, D_{ikl} + \Delta_{kl}\, \tau_i + \Delta_{li}\, \tau_k + \Delta_{ik}\, \tau_l \right].$$

Da ciò si vede che è possibile, e in un sol modo, di determinare le τ_i così che la forma Λ'_3 sia *apolare* o coniugata alla reciproca della forma F_2, cioè secondo le condizioni

$$\sum_{ik} \vartheta_{ik}\, D'_{ikl} = 0.$$

Infatti queste equazioni dànno

$$\tau_r = -\frac{2}{n+2} \sum_{ik} \vartheta_{ik}\, D_{ikr}. \tag{25}$$

Indichiamo con F_3 tale forma cubica, cioè poniamo

$$F_3 = \Lambda_3 - \frac{6}{n+2} F_2 \sum_{ikl} \vartheta_{ik}\, D_{ikl}\, d\, u_l = 2 \sum_{ikl} \Delta_{ikl}\, d\, u_i\, d\, u_k\, d\, u_l, \tag{26}$$

$$\Delta_{ikl} = D_{ikl} - \frac{1}{n+2} \sum_{rs} \vartheta_{rs} (\Delta_{kl}\, D_{rsi} + \Delta_{li}\, D_{rsk} + \Delta_{ik}\, D_{rsl}), \quad \sum_{ik} \vartheta_{ik}\, \Delta_{ikl} \equiv 0. \tag{26 bis}$$

Si può fare la verifica che, moltiplicando x e ξ per ρ e σ rispettivamente, si ottiene

$$F'_3 = \rho\, \sigma\, F_3, \tag{27}$$

sicchè la forma differenziale fratta $\frac{F_3}{F_2}$ ha un valore unico.

È possibile determinare ρ e σ in guisa che sia $F'_3 = \Lambda'_3$? Formalmente si ha la condizione

$$\log \frac{\rho}{\sigma} = -\frac{2}{n+2} \int \sum_{ik} \vartheta_{ik}\, D_{ikl}\, d\, u_l, \tag{28}$$

ma bisogna vedere se la quantità sotto il segno $\int$ è un differenziale esatto.

È facile vedere che ciò infatti avviene sempre. Perciò si considerino i determinanti

$$\nabla_1 = \left| x, \ \frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \ \frac{\partial x}{\partial u_n}, \ X \right|, \quad \nabla_2 = \left| \xi, \ \frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \ \frac{\partial \xi}{\partial u_2}, \ldots, \ \frac{\partial \xi}{\partial u_n}, \ \Xi \right|. \tag{29}$$

Per il calcolo pratico di questi determinanti si può osservare che ∇_1, ad esempio, non muta se al posto di X mettiamo un altro punto qualunque X' soddisfacente l'unica condizione

$$S X' \xi = 1.$$

Del resto si può dire, senza parlare del punto X, che ∇_1 è il rapporto dei determinanti della matrice

$$\left\| x, \ \frac{\partial x}{\partial u_1}, \ \frac{\partial x}{\partial u_2}, \ldots, \ \frac{\partial x}{\partial u_n} \right\|$$

alle quantità ξ loro proporzionali; similmente per ∇_2. Calcoliamo le derivate logaritmiche di (29), facendo uso delle equazioni fondamentali (15) e (15 bis) e ricordandoci che $\frac{\partial X}{\partial u_i}$ è combinazione lineare di x e $\frac{\partial x}{\partial u_i}$ e similmente $\frac{\partial \Xi}{\partial u_i}$. Così si trova

$$\frac{\partial \log \nabla_1}{\partial u_k} = \sum_i \left\{ \begin{matrix} i\,r \\ i \end{matrix} \right\} + \sum_{ik} \vartheta_{ik} D_{ikr}, \quad \frac{\partial \log \nabla_2}{\partial u_r} = \sum_i \left\{ \begin{matrix} i\,r \\ i \end{matrix} \right\} - \sum_{ik} \vartheta_{ik} D_{ikr}$$

e sottraendo (9)

$$2 \sum_{ik} \vartheta_{ik} D_{ikr} = \frac{\partial}{\partial u_r} \log \frac{\nabla_1}{\nabla_2}, \tag{30}$$

il che prova ciò che si era enunciato, e permette di scrivere (26) sotto la forma

$$F_3 = \Lambda_3 - \frac{3}{n+2} F_2 \, d \log \frac{\nabla_1}{\nabla_2}. \tag{31}$$

Così siamo giunti al risultato che, *scelto comunque il fattore delle* x, *si*

(9) Invece sommando si ha la nota formola del calcolo assoluto $\frac{\partial \log \sqrt{\nabla}}{\partial u_r} = \sum_i \left\{ \begin{matrix} i\,r \\ i \end{matrix} \right\}$, essendo evidentemente $\nabla_1 \nabla_2 = (-1)^{n-1} \nabla$.

può determinare il fattore delle ξ (e in un modo solo, negligendo un fattore numerico) *in guisa che sia* $F_3 \equiv \Lambda_3$.

Interpretiamo in un altro modo l'uguaglianza $F_3 = \Lambda_3$ o, ciò che è lo stesso, le equazioni

$$\sum_{ik} \vartheta_{ik} D_{ikr} = 0. \tag{32}$$

Sia

$$\Delta_2 x = \sum_{ik} \vartheta_{ik} x_{ik} \tag{33}$$

il parametro differenziale secondo di x rispetto alla forma F_2. Dalle equazioni fondamentali (15) si ha

$$S \xi \Delta_2 x = \sum_{ik} \vartheta_{ik} \Delta_{ik} = n,$$

$$S \frac{\partial \xi}{\partial u_l} \Delta_2 x = - \sum_{ikrs} \vartheta_{ik} \vartheta_{rs} D_{ikr} \Delta_{ls} = - \sum_{ik} \vartheta_{ik} D_{ikl}$$

e ricordandoci (3) vediamo che allora e allora soltanto quando le (32) sono soddisfatte, si può scegliere

$$X = \frac{1}{n} \Delta_2 x, \quad \Xi = \frac{1}{n} \Delta_2 \xi. \tag{34}$$

E si vedono anche, con tale scelta di X e Ξ, soddisfatte le equazioni

$$\sum_{ik} \vartheta_{ik} b_{ik} = \sum_{ik} \vartheta_{ik} \beta_{ik} = 0, \tag{35}$$

le quali abbiamo visto potersi assumere anche per fattori qualsiansi delle x e ξ.

Sotto queste condizioni, consideriamo ora la quadrica osculatrice Q, cioè quella ipersuperficie quadrica, rispetto alla quale l'iperpiano polare del punto

$$\lambda x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial x}{\partial u_n} + \mu \Delta_2 x \tag{36}$$

è

$$\lambda \xi + \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial \xi}{\partial u_n} + \mu \Delta_2 \xi, \tag{36'}$$

i fattori delle x e ξ essendo tali che siano soddisfatte le condizioni (32).

Si vede subito che questa quadrica è ben determinata dall'ipersuperficie Π e dal punto x di essa, giacchè la polarità (36), (36') non muta moltiplicando x e ξ per il medesimo fattore. Per $n=1$, si ha la *conica con contatto cinquepunto*, per $n=2$ la nota *quadrica di Lie*, la quale viene così generalizzata per uno spazio a un numero qualunque di dimensioni. Per il calcolo pratico si può osservare che in (36) e (36') si potrebbe al posto di $\Delta_2 x$ e $\Delta_2 \xi$ mettere anche

$$\sum_{ik} \vartheta_{ik} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \, \partial u_k} \text{ e } \sum_{ik} \vartheta_{ik} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \, \partial u_k}.$$

Le quadriche di Lie godono della seguente proprietà:

Sia α uno spazio lineare a ν dimensioni $(1 \leqq \nu \leqq n)$ passante per un punto O di Π e contenuto nell'iperpiano tangente; le quadriche di Lie (a ν dimensioni) delle sezioni di Π mediante tutti gli spazî $S_{\nu+1}$ a $\nu+1$ dimensioni passanti per α giacciono sopra una quadrica ad n dimensioni.

Le coordinate x dei punti e ξ degli iperpiani tangenti sono date funzioni di n variabili $u_1, u_2, \ldots u_n$, dalle quali si calcolino le due forme F_2 e Λ_3. Per ottenere le coordinate x' dei punti della sezione Π' di Π mediante uno spazio $S_{\nu+1}$ che si supponga dapprima fisso, bisogna porre

$$u_{\nu+1} = \varphi_1(u_1, \ldots, u_\nu), \ldots, u_n = \varphi_{n-\nu}(u_1, \ldots, u_\nu) \tag{37}$$

le φ essendo certe funzioni ben determinate di $u_1, \ldots, u_\nu$. Facendo la sostituzione (37) nelle ξ, si ottengono delle espressioni ξ'. Perchè l'$S_n \, \xi'$ contiene l'S_ν tangente di Π' in x' [10], si calcolano le due forme F'_2, Λ'_3 di Π' semplicemente dalle equazioni

$$F'_2 = -S \, dx' \, d\xi', \quad \Lambda'_3 = S(dx' \, d^2\xi' - d\xi' \, d^2 x'),$$

e dunque si ottengono F'_2 Λ'_3 eseguendo la sostituzione (37) nelle forme F_2, Λ_3. Ora si determini $\rho = \rho(u_1 \ldots u_\nu)$ dalle condizioni

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial u_r} = -\frac{2}{\nu+2} \sum_{ik} \vartheta'_{ik} D'_{ikr} \qquad (i, k, r = 1, 2 \ldots \nu) \tag{37 bis}$$

dove ϑ'_{ik} e D'_{ikr} si riferiscono alle forme F'_2 e Λ'_3. La forma

$$\Lambda''_3 = \rho \Lambda'_3 + 3 F'_2 \, d\rho$$

---

(10) Per veder chiaramente che le ξ' possono usarsi al posto delle coordinate (nello spazio $S_{\nu+1}$) degli S_ν tangenti di Π', si supponga p. es. che $S_{\nu+1}$ sia uno spazio fondamentale della piramide di riferimento in S_n. Il fatto enunciato risulta in tal caso evidente: ed esso sarà perciò vero generalmente, perchè tutte le nostre formole hanno significato indipendente dalla scelta della piramide fondamentale di riferimento.

è apolare alla reciproca della forma

$$F''_2 = \rho F'_2 .$$

Dal fatto che l'$S_n \, \xi'$ contiene l'S_ν tangente di Π' in x' concludiamo che l'S_n

$$\lambda \xi' + \lambda_1 \frac{\partial \xi'}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_\nu \frac{\partial \xi'}{\partial u_\nu} + \mu \sum_{ik} \frac{\vartheta'_{ik}}{\rho} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u_i \, \partial u_k} \qquad (i, k = 1, 2 \ldots \nu) \tag{38}$$

contiene l'S_ν polare del punto

$$\lambda \cdot \rho x + \lambda_1 \frac{\partial (\rho x')}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_\nu \frac{\partial (\rho x')}{\partial u_\nu} + \mu \sum_{ik} \frac{\vartheta'_{ik}}{\rho} \frac{\partial^2 (\rho x')}{\partial u_i \, \partial u_k} \tag{38'}$$

rispetto alla quadrica di Lie di Π' nel punto O (nelle (38) e (38') bisogna, dopo aver eseguito le derivazioni, sostituire quei valori di $u_1, \ldots, u_\nu$ che appartengono al punto O). Al variare delle λ, λ_i, μ il punto (38') descrive evidentemente lo spazio $S_{\nu+1}$.

La quadrica di Lie di Π' in O compare così come luogo di quei punti (38') che sono contenuti nell'iperpiano (38) corrispondente. Ora si faccia variare l'$S_{\nu+1}$ considerato così che contenga sempre lo spazio fisso α a ν dimensioni. Le funzioni φ nelle (37) dipenderanno oltre che dalle $u_1, \ldots, u_\nu$, da altri $n - \nu$ parametri

$$a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_{n-\nu} \tag{39}$$

i quali determinano l'$S_{\nu+1}$. Dimostreremo che si possono scegliere questi parametri in guisa che i coefficienti di $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ ne siano indipendenti, mentre i coefficienti di μ siano polinomî lineari in essi ([11]). Le espressioni (38) e (38') saranno allora forme lineari nelle $n + 2$ quantità indipendenti

$$\lambda, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \quad \lambda_\nu, \quad \mu, \quad \mu \, a_1, \quad \mu \, a_2, \ldots, \quad \mu \, a_{n-\nu},$$

sicchè la corrispondenza fra i punti (38') e gli iperpiani (38) sarà una semplice *correlazione* dello spazio ambiente. La *quadrica dei punti d'incidenza* di questa correlazione, cioè la quadrica di quei punti che sono contenuti negli iperpiani corrispondenti, è evidentemente il luogo cercato delle quadriche di Lie delle sezioni.

([11]) Tutto ciò dopo aver sostituito per $u_1 \ldots u_\nu$ quei valori speciali che si riferiscono al punto O.

Per vedere che le quantità (39), convenientemente scelte, compaiono nelle espressioni (38) e (38′) nel modo asserito, supponiamo l'ipersuperficie Π definita dalle equazioni

$$x = (u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_n, \quad w, \quad 1),$$

$$\xi = \left(\frac{\partial w}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial w}{\partial u_2}, \ldots, \quad \frac{\partial w}{\partial u_n}, \quad -1, \quad w - \sum_i u_i \frac{\partial w}{\partial u_i}\right),$$

$$w = \frac{1}{2} \sum_{i,k} c_{ik} u_i u_k + \frac{1}{6} \sum_{ikl} d_{ikl} u_i u_k u_l + \cdots; \quad (i, \ k, \ l = 1, \ 2, \ldots, \ n)$$

nel punto O sia $u_1 = \cdots = u_n = 0$, e nei punti dell'$S_\nu\, \alpha$ siano nulle la $(\nu+1)^{\text{ma}} \ldots (n+1)^{\text{ma}}$ coordinata x. Per l'intersezione Π' di Π mediante l'$S_{\nu+1}$ generico passante per α sarà

$$u_{\nu+\lambda} = a_\lambda w \quad (\lambda = 1, \ 2, \ldots, \ n - \nu).$$

Tutte queste supposizioni sono evidentemente lecite. Si trova dapprima

$$u_{\nu+\lambda} = \varphi_\lambda (u_1, u_2, \ldots, u_\nu) = a_\lambda \frac{1}{2} \sum_{ik} c_{ik} u_i u_k + \cdots$$
$$i, \ k = 1, \ 2, \ldots, \ \nu, \ \lambda = 1, \ 2, \ldots, \ n - \nu,$$

e se ω è una funzione analitica di $u_1, u_2, \ldots, u_n$, e ω' quella funzione di $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, che ne sorge sostituendo $u_{\nu+\lambda} = \varphi_\lambda$, si ha

$$\omega = E_0 + \sum_{i=1}^{n} E_i u_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} E_{ik} u_i u_k + \cdots,$$

$$\omega' = E_0 + \sum_{i=1}^{\nu} E_i u_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{\nu} \left(E_{ik} + c_{ik} \sum_{\lambda=1}^{n-\nu} E_{\nu+\lambda} a_\lambda\right) u_i u_k + \cdots,$$

sicchè per $u_1 = u_2 = \cdots = u_\nu = 0$

$$\omega' = E_0, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial u_i} = E_i, \quad \frac{\partial^2 \omega'}{\partial u_i \partial u_k} = E_{ik} + c_{ik} \sum_{\lambda=1}^{n-\nu} E_{\nu+\lambda} a_\lambda .$$

Da ciò si vede che, in O, x', ξ', $\frac{\partial x'}{\partial u_i}$, $\frac{\partial \xi'}{\partial u_i}$ non dipendono dalle quantità (3), mentre $\frac{\partial^2 x'}{\partial u_i \partial u_k}$ sono polinomî lineari in esse. Essendo

$$\frac{\partial (\rho x')}{\partial u_i} = \rho \frac{\partial x'}{\partial u_i} + \frac{\partial \rho}{\partial u_i} x', \quad \frac{\partial^2 (\rho x')}{\partial u_i \partial u_k} = \rho \frac{\partial^2 x'}{\partial u_i \partial u_k} + \frac{\partial \rho}{\partial u_i} \frac{\partial x'}{\partial u_k} + \frac{\partial \rho}{\partial u_k} \frac{\partial x'}{\partial u_i} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial u_i \partial u_k} x'$$

resta ancora a far vedere che anche ϑ'_{ik}, ρ, $\frac{\partial \rho}{\partial u_i}$, per $u_1 = \cdots = u_\nu = 0$ non dipendono dalle (3) e $\frac{\partial^2 \rho}{\partial u_i \partial u_k}$ ne dipendono linearmente. Ora per arrivare dalle forme F_2, Λ_3 alle F'_2, Λ'_3, bisogna nei coefficienti di F_2 e Λ_3 eseguire la sostituzione $u_{\nu+\lambda} = \varphi_\lambda$ e inoltre porre

$$d\, u_{\nu+\lambda} = \sum_{i=1}^{\nu} d\, u_i \left(a_\lambda \sum_{k=1}^{\nu} c_{ik}\, u_k + \cdots \right)$$

e si vede subito che per $u_1 = \cdots = u_\nu = 0$, i coefficienti Δ'_{ik} e D'_{ikl} delle forme F'_2 e Λ'_3 non dipendono dalle quantità (39), mentre le derivate prime di questi coefficienti sono polinomî lineari in esse. Lo stesso vale allora per una funzione analitica qualunque di tali coefficienti, sicchè ϑ'_{ik} e il secondo membro di (37 bis), fatto $u_1 = \cdots = u_\nu = 0$, non dipendono dalle (39). Derivando (37 bis) si vede che

$$\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial u_r \partial u_s}$$

per $u_1 = \cdots = u_\nu = 0$ sono lineari nelle (39). Ma si supponga, come è lecito,

$$\rho\,(0,\, 0,\ldots,\, 0) = 1$$

e si osservi che

$$\frac{\partial \rho}{\partial u_i} = \rho \frac{\partial \log \rho}{\partial u_i}, \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u_i \partial u_k} = \rho \frac{\partial^2 \log \rho}{\partial u_i \partial u_k} + \rho \frac{\partial \log \rho}{\partial u_i} \frac{\partial \log \rho}{\partial u_k}$$

e si vede che, per $u_1 = \cdots = u_\nu = 0$, ρ e $\frac{\partial \rho}{\partial u_i}$ infatti non dipendono dalle (39) e $\frac{\partial^2 \rho}{\partial u_i \partial u_k}$ ne dipendono linearmente. La dimostrazione del teorema enunciato è ora completa.

Dalle formole (30) si era rilevato che dato comunque il fattore di x, è possibile fissare il fattore di ξ *a meno di un fattore numerico* mediante la condizione $F_3 = \Lambda_3$. Ma la formola (30) permette di precisare la formola (28) ponendo

$$\frac{\rho}{\sigma} = \sqrt[n+2]{\frac{\nabla_2}{\nabla_1}}, \tag{40}$$

sicchè *date le* x, *è possibile normalizzare le* ξ (e viceversa) *a meno di un fattore radice* $(n+2)^{ma}$ *dell'unità.* Condizione necessaria e sufficiente affinchè le x, ξ siano così normalizzate è

$$\nabla_1 = \nabla_2 . \tag{41}$$

Per un momento, pensiamo invece della geometria proiettiva, alla geometria del gruppo *delle affinità unimodulari* ([12]). In questo caso si possono assumere come x le coordinate non omogenee, le quali nel passaggio ad una ipersuperficie equivalente nel gruppo subiscono una sostituzione a coefficienti numerici e a determinante unità. Ora per la nostra formola (10) ne deduciamo una normalizzazione delle ξ la quale gode la medesima proprietà. L'S_{n-1} pseudonormale è semplicemente l'intersezione di ξ coll'iperpiano all'infinito, sicchè la normale corrispondente, la *normale affine*, è il diametro della quadrica di Lie. Le forme F_2 e $\Lambda_3 \equiv F_3$ corrispondenti sono ben determinate dalla ipersuperficie a meno di un fattor comune radice $(n+2)^{ma}$ dell'unità, e determinano la ipersuperficie insieme alle sue equivalenti nel gruppo.

Ritorniamo alla geometria proiettiva. Qui l'equazione (41) non determina completamente le x, ξ, F_2 e $\Lambda_3 \equiv F_3$, essendo lecito moltiplicare le x e ξ per il medesimo fattore ρ qualunque, il che moltiplica F_2 e F_3 per ρ^2. In generale, cioè quando il discriminante $\mathbf{D}$ di F_3 è diverso da zero, possiamo porre

$$\rho = \frac{\mathbf{D}^{\frac{1}{n.2^{n-1}}}}{\nabla^{\frac{3}{2n}}} . \tag{42}$$

Infatti si riconosce subito che tale normalizzazioue è intrinseca. Però per $n > 2$ si possono definire altre normalizzazioni analoghe, usando altri invarianti algebrici assoluti delle due forme F_2 e F_3. Per $n = 2$ invece, tale normalizzazione è unica in questo senso: per dedurre tali coordinate normali dalle coordinate omogenee x qualunque, si moltiplicano le x per una espressione formata dalle x e dalle loro derivate fino al terzo ordine. Per

([12]) Sannia ha il merito di avere riconosciuto, nella Memoria che ho citato in principio, che alle formole fondamentali della geometria affine si può venire semplicemente considerando nelle formole della geometria proiettiva, come è stata edificata dal Fubini, le coordinate non omogenee di punti invece di coordinate omogenee qualunque.

altre coordinate normali, che non ne differirebbero per un solo fattore numerico, sarebbe d'uopo far uso anche delle derivate delle x di ordine superiore ([13]).

Non è forse senza interesse questo fatto, che rileviamo esplicitamente: La normalizzazione delle x, delle ξ, delle forme F_2 e F_3, delle rette normali e gli S_{n-1} pseudonormali sono, a meno di fattori numerici, cose equivalenti. È chiaro che, per ipersuperficie generali, di tutti questi problemi, la normalizzazione delle forme facendo uso degli invarianti algebrici simultanei è molto più semplice di ogni altro procedimento. È anche probabilissimo, benchè non sia, almeno per $n > 2$, dimostrato in modo perfettamente rigoroso, che ogni altra normalizzazione intrinseca delle coordinate esigerebbe derivate di ordine superiore al terzo; ossia, che non esistono altre congruenze di rette, intrinsecamente definite da espressioni contenenti derivate delle x fino al quarto ordine, coniugate all'ipersuperficie Π nel senso qui usato. Però esistono altre tali congruenze di rette, le quali, pur non essendo coniugate a Π in generale, *lo diventano per particolari tipi di ipersuperficie.* E per lo studio di tali tipi può essere utile considerare una tale congruenza. Per fare un semplice esempio, si consideri il caso che le forme F_2, F_3, supposte scelte convenientemente le variabili indipendenti, siano del tipo

$$F_2 = \rho\, \varphi_2\,, \quad F_3 = \tau\, \varphi_3\,,$$

ρ e τ essendo funzioni delle u e φ_2 e φ_3 forme a coefficienti *numerici.* In questo caso possiamo prendere

$$F'_2 = \varphi_2\,, \quad F'_3 = \frac{\tau}{\rho}\, \varphi_3\,.$$

Per $n = 2$ si hanno le *superficie isotermo-asintotiche di Fubini.* Daremo in appresso una proprietà delle normali corrispondenti.

Ritorniamo al caso che i fattori delle x e ξ siano scelti comunque (senza che siano necessariamente soddisfatte le (32) e consideriamo, sopra Π, le *linee geodetiche* della forma $F_2 \equiv -S\, d\, x\, d\, \xi$. Le equazioni differenziali di

---

([13]) Ciò viene dimostrato dal Sannia nella sua Memoria citata. Però i due fatti dimostrati dal Sannia indipendentemente l'uno dall'altro, cioè quello del testo e l'altro che la *normale* corrispondente è unica nel senso di essere intrinseca e di dipendere soltanto dalle derivate delle x fino al quarto ordine, sono, secondo le considerazioni fatte in questa Memoria, equivalenti.

queste linee sono

$$\delta^2 u_1 : \delta^2 u_2 : \cdots : \delta^2 u_n = d u_1 : d u_2 : \cdots : d u_n , \tag{43}$$

dove $\delta^2 u_i$ sono i differenziali secondi contravarianti

$$\delta^2 u_i = d^2 u_i + \sum_{rs} \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ i \end{matrix} \right\} d u_r \, d u_s ,$$

formati rispetto a F_2. Il piano osculatore di una linea qualunque di Π è determinato dai tre punti

$$x, \quad d x = \sum_i \frac{\partial x}{\partial u_i} d u_i , \quad d^2 x = \sum_i \frac{\partial x}{\partial u_i} \delta u_i + \sum_{ik} x_{ik} \, d u_i \, d u_k$$

dove x_{ik} sono derivate covarianti, e perciò, per una geodetica, dai punti

$$x, \quad d x, \quad \sum_{ik} x_{ik} \, d u_i \, d u_k . \tag{44}$$

Vogliamo determinare la direzione $d u_1, \ldots, d u_n$ in guisa che il piano osculatore della geodetica contenga il punto X. Secondo le equazioni fondamentali (15) deve essere in questo caso

$$\sum_{ikrs} \vartheta_{rs} D_{ikr} \frac{\partial x}{\partial u_s} d u_i \, d u_k = \lambda \sum_s \frac{\partial x}{\partial u_s} d u_s$$

ossia:

$$\sum_{ikr} \vartheta_{rs} D_{ikr} \, d u_i \, d u_k = \lambda \, d u_s . \tag{45}$$

Moltiplichiamo le (45) per $\Delta_{ls} \, \varepsilon_l$, dove le ε sono indeterminate, e sommiamo rispetto agli indici l e s. Così si ottiene l'equazione equivalente

$$\sum_{ikl} D_{ikl} \, d u_i \, d u_k \, \varepsilon_l = \lambda \sum_{ls} \Delta_{ls} \, \varepsilon_l \, d u_s .$$

Le direzioni cercate sono dunque quelle che hanno la stessa polare lineare rispetto alla quadrica $F_2 = 0$ e alla cubica $\Lambda_3 = 0$. Esse annullano la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \sum_{ik} D_{ik1} \, d u_i \, d u_k , \ldots , & \sum_{ik} D_{ikn} \, d u_i \, d u_k \\ \sum_s \Delta_{s1} \, d u_s \quad , \ldots , & \sum_s \Delta_{sn} \, d u_s \end{matrix} \right\|$$

e perciò, *in generale*, il loro numero è $(2^n - 1)$.

Avendo così trovate le tangenti di quelle geodetiche della forma F_2 i cui piani osculatori contengono la normale xX corrispondente ai fattori dati di x e ξ, per arrivare allo studio, in un dato punto di Π, dell'insieme dei piani osculatori di tutte le geodetiche di F_2 che vi passano, cambiamo tali fattori in modo da non cambiare la forma F_2, cioè moltiplichiamo le ξ per un fattore qualunque σ e, simultaneamente, le x pel fattore reciproco σ^{-1}. Ora la normale xX era l'intersezione degli iperpiani $\frac{\partial \xi}{\partial u_i}$; dunque la nuova normale sarà l'intersezione degli iperpiani $\frac{\partial (\sigma \xi)}{\partial u_i}$ ossia degli iperpiani

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_i} + \frac{\partial \log \sigma}{\partial u_i} \xi ;$$

similmente il nuovo S_{n-1} pseudonormale è lo spazio dei punti

$$\frac{\partial x}{\partial u_i} - \frac{\partial \log \sigma}{\partial u_i} x$$

e si vede che questo S_{n-1} corrisponde alla retta normale in quella proiettività fra l'iperpiano ξ e la stella x, nella quale al punto

$$\lambda x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial x}{\partial u_n}$$

corrisponde l'iperpiano

$$-\lambda \xi + \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial \xi}{\partial u_n} .$$

Associamo dunque ad ogni punto di Π e alla forma F_2, questa proiettività. Il cono $\Lambda_3 = 0$ era il cono delle tangenti all'intersezione di Π mediante quella quadrica osculatrice Q che corrisponde ai dati fattori di x e ξ; per vedere come muta tale quadrica eseguendo le moltiplicazioni per σ^{-1} e σ, si ricordi che la normale e lo spazio pseudonormale sono spazi polari rispetto alla quadrica osculatrice corrispondente.

Ora se per x tiriamo una retta qualunque r, per avere quei piani osculatori delle geodetiche di F_2 che la contengono, basta costruire l' S_{n-1} R corrispondente ad essa nella nostra proiettività e il cono $\Lambda_3 = 0$ delle tangenti in x alla varietà intersezione di Π con una qualunque di quelle ∞^1 quadriche osculatrici per le quali r ed R sono polari; le tangenti delle geodetiche cercate sono quelle che hanno la stessa polare lineare rispetto a $F_2 = 0$ e $\Lambda_3 = 0$.

In particolare abbiamo trovato che per una retta generica passante per x passano *in generale* $(2^n - 1)$ piani osculatori di geodetiche di F_2. Osserviamo anche che l'S_{n-1} R compie l'ufficio correlativo di r per le stesse $(2^n - 1)$ geodetiche considerate come luogo di ∞^1 iperpiani. I nostri gruppi di $(2^n - 1)$ tangenti formano una involuzione ∞^2 di gruppi di $(2^n - 1)$ « punti » dello spazio $(du_1, \ldots, du_n)$, nel senso che per due « punti » generici di questo spazio ne passa uno e un solo gruppo. Anzi tale involuzione dipende soltanto dall'ipersuperficie Π e dal punto x di essa, e *non* dalla forma particolare F_2 scelta. Data la forma F_2 e il punto x, è specialmente importante considerare quella retta r della stella x, per la quale l'S_{n-1} R che le corrisponde nella proiettività (45), (45') è il suo S_{n-1} polare rispetto alla quadrica di Lie. Questa retta si può chiamare *la normale della forma* F_2. Il corrispondente gruppo di $(2^n - 1)$ tangenti, cioè il gruppo di quelle direzioni le quali hanno la stessa polare lineare rispetto ai due coni apolari $F_2 = 0$ e $F_3 = 0$ costituisce la generalizzazione della terna delle *tangenti di Segre* del caso $n = 2$, e le linee integrali delle equazioni differenziali corrispondenti generalizzano le *linee di Segre*. Per $n = 2$ avevo dimostrato che, in ogni punto di Π, i piani osculatori delle tre curve di Segre passanti per esso contengono una medesima retta, la quale per le superficie isotermo-asintotiche descrive una congruenza coniugata a Π. Le considerazioni precedenti mostrano che, anche per $n > 2$, in ogni punto di Π, e per ogni scelta di F_2, i piani osculatori delle geodetiche che toccano le linee di Segre generalizzate passano per la normale di F_2 (e correlativamente). Non sono finora riuscito ad estendere al caso generale la proposizione che avevo data per $n = 2$. Osservo soltanto che per le ipersuperficie generalizzazione delle superficie isotermo-asintotiche che avevo definito poco fa, scelto $F_2 = \varphi_2$, le linee di Segre generalizzate diventano geodetiche e la proprietà è evidente.

§ 3.

Siano ora x (ξ) le coordinate di punti (iperpiani) in uno spazio lineare S_{n+d+1} a $n + d + 1$ $(d > 0)$ dimensioni, e siano le x e ξ, come era per le ipersuperficie di S_{n+1}, funzioni di n parametri $u_1, \ldots, u_n$, soddisfacenti identicamente le condizioni

$$S x \xi = S x \, d\xi = S \xi \, dx = 0. \tag{1}$$

I punti x (gli iperpiani ξ) formano una varietà $V(W)$. Supponiamo che V e W siano proprio ad n dimensioni. Anzi facciamo l'ipotesi più restrittiva che il discriminante ∇ della forma differenziale quadratica

$$F_2 = -S\, dx\, d\xi = \sum_{ik} \Delta_{ik}\, du_i\, du_k$$

sia diverso da zero. L'insieme (V, W) delle due varietà V e W forma una *varietà di elementi* ad n dimensioni che possiamo dire *regolare* per esprimere l'ipotesi $\nabla \neq 0$. Come per le ipersuperficie, consideriamo, accanto a F_2, la forma cubica

$$\Lambda_3 = S(dx\, d^2\xi - d\xi\, d^2 x) = 2 \sum_{ikl} D_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l .$$

Chiamiamo *spazio caratteristico* di W lo spazio a d dimensioni intersezione degli iperpiani

$$\xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u_2}, \ldots, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u_n}$$

e siano x, $X^{(1)}$, $X^{(2)}, \ldots,$ $X^{(d)}$ $d+1$ punti linearmente indipendenti di questo spazio, sicchè valgono le identità:

$$S\xi X^{(\lambda)} = S \frac{\partial \xi}{\partial u_i} X^{(\lambda)} = 0.$$

X sia un punto (funzione delle u) soddisfacente alle equazioni

$$S\xi X = 1, \quad S \frac{\partial \xi}{\partial u_i} X = 0.$$

Significato correlativo abbiano gli iperpiani $\Xi^{(\lambda)}$, Ξ. Precisamente come per le ipersuperficie, si trovano equazioni fondamentali della forma

$$x_{ik} = \sum_{rs} \vartheta_{rs} D_{ikr} \frac{\partial x}{\partial u_s} + \Delta_{ik} X + b_{ik} x + \sum_{\lambda=1}^{d} c_{ik}^{(\lambda)} X^{(\lambda)}, \tag{46}$$

$$\xi_{ik} = -\sum_{rs} \vartheta_{rs} D_{ikr} \frac{\partial \xi}{\partial u_s} + \Delta_{ik} \Xi + \beta_{ik} \xi + \sum_{\lambda=1}^{d} \gamma_{ik}^{(\lambda)} \Xi^{(\lambda)}. \tag{46'}$$

Moltiplicando x per ρ e ξ per σ, le due forme F_2 e Λ_3 si mutano secondo le equazioni (22) e si può anche qui definire la forma cubica F_3 mediante l'equazione (26). Ciò permette di estendere diversi concetti della teoria delle ipersuperficie alle varietà di elementi. Però è importante di csservare una differenza essenziale, cioè che *non* è possibile, in generale, scegliere i fattori di x e ξ in modo che risulti $F_3 \equiv \Lambda_3$. Basta dare un esempio: Sia

$$x = \left[u_1\,,\ u_2\,,\ f_1(u_1),\ f_2\ (u_2),\ 1\right],$$

$$\xi = \left[-\varphi_1(u_1\,,\ u_2)\frac{d f_1}{d u_1},\ -\varphi_2(u_1\,,\ u_2)\frac{d f_2}{d u_2},\ \varphi_1(u_1\,,\ u_2),\right.$$

$$\left.\varphi_2(u_1\,,\ u_2),\ \varphi_1\left(u_1\frac{d f_1}{d u_1}-f_1\right)+\varphi_2\left(u_2\frac{d f_2}{d u_2}-f_2\right)\right].$$

Le condizioni (1) sono soddisfatte; però

$$\sum_{ikl} \vartheta_{ik} D_{ikl}\, d\, u_l = d \log \nabla - \frac{\partial \log \varphi_1}{\partial u_1} d\, u_1 - \frac{\partial \log \varphi_2}{\partial u_2} d\, u_2$$

non è in generale un differenziale esatto. Alla normalizzazione delle forme, insomma, qui non corrisponde una normalizzazione delle coordinate.

Contentiamoci di dare la dimostrazione di un teorema fondamentale. Per dati valori di $u_1 \dots u_n$, proiettiamo i piani osculatori delle curve di V passanti per x dallo spazio caratteristico della varietà W; se (V', W') è un'altra varietà di elementi in corrispondenza con la prima, facciamovi l'operazione analoga. Se, per ogni sistema di valori di $u_1 \dots u_n$, i due sistemi di spazi proiettanti sono *omografici*, diciamo, estendendo la locuzione del Fubini, che le due varietà di elementi sono *proiettivamente applicabili*. Il teorema che vogliamo dimostrare si enuncia così: *Condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità proiettiva di due varietà regolari di elementi è l'uguaglianza delle forme differenziali fratte* $\frac{F_3}{F_2}$. In tal caso, date comunque le $u_1 \dots u_n$, è possibile determinare i fattori ρ e σ in guisa che le forme F_2 siano identiche e le forme Λ_3 uguali per i dati valori di u.

Che la condizione sia sufficiente, mostrano immediatamente le equazioni fondamentali (46). Ma essa è anche necessaria. Indichiamo con y, η, $Y^{(\lambda)}$, Y le quantità analoghe alle x, ξ, $X^{(\lambda)}$, X per la seconda varietà e supponiamo, come è lecito, che le due varietà stiano in un medesimo spazio ambiente S_{n+d+1}. Modifichiamo il fattore delle η in guisa che, per dati valori delle u, i punti X, Y si corrispondano in un'omografia Ω dell'S_{n+d+1} in sè scelta fra quelle alle quali è subordinata l'omografia fra i due sistemi di spazi proiettanti. Le equazioni analoghe alle (46) per la seconda varietà siano

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_k} - \sum_r \left\{ \begin{matrix} i\, k \\ r \end{matrix} \right\}' \frac{\partial y}{\partial u_r} = \sum_{rs} \vartheta'_{rs} D'_{ikr} \frac{\partial y}{\partial u_s} + \Delta'_{ik} Y + b'_{ik} y + \sum_{\lambda=1}^{d} c'^{(\lambda)}_{ik} Y^{(\lambda)}. \tag{47}$$

Alle y applichiamo una sostituzione lineare a coefficienti numerici tale che Ω diventi l'identità. Sarà allora *per i valori considerati di* u (*e ciò si intende anche per il seguito*)

$$X = Y$$

e i punti

$$\frac{\partial y}{\partial u_i}, \quad y, \quad Y^{(\lambda)}$$

stanno in ξ. Ora vale necessariamente un'identità nelle $d u_i$ e $d^2 u_i$ della forma

$$d^2 y = \sum_i E_i \frac{\partial x}{\partial u_i} + G X + \sum_\lambda G^{(\lambda)} X^{(\lambda)} + E x,$$

dove E, E_i, G, G_λ sono somme di forme quadratiche nelle $d u_i$ e forme lineari nelle $d^2 u_i$. Ma siccome Ω è un'identità, la precedente sarà del tipo

$$d^2 y = a\, d^2 x + d x \sum_i \lambda_i\, d u_i + E x + \sum_\lambda G^{(\lambda)} X^{(\lambda)} \tag{48}$$

con a, λ_i numeriche. Confrontando con (46) e (47) si vede dapprima che $\Delta'_{ik} = a\, \Delta_{ik}$ e, il ragionamento valendo per ogni altro sistema di valori delle u, si può supporre che si fosse disposto del fattore delle y in modo che sia identicamente $F_2 \equiv F'_2$ (d'onde $a = 1$). In tale ipotesi si vede che

$$\frac{\partial y}{\partial u_i} - \frac{\partial x}{\partial u_i}$$

è una combinazione lineare delle sole $X^{(\lambda)}$, x; altrimenti si otterrebbe dalle (46) e (47) come coefficiente di $\dfrac{\partial x}{\partial u_i}$ in $d^2 y$ un'espressione contenente anche i differenziali secondi delle u, in contraddizione colla (48). E in virtù di questo fatto tale coefficiente, calcolato secondo (46) e (47), sarà

$$\sum_{irs} \vartheta_{ik} (D'_{rsi} - D_{rsi})\, d u_r\, d u_s$$

il che, per la (48), deve essere identico a

$$d\,u_k\,.\,\sum_i \lambda_i\,d\,u_i\,.$$

Moltiplicando le due espressioni uguali per $\Delta_{kl}\,d\,u_l$ e sommando rispetto agli indici k, l si ha

$$\sum_{rsl}(D'_{rsl}-D_{rsl})\;d\,u_r\,d\,u_s\,d\,u_l=\sum_i \lambda_i\,d\,u_i\,.\sum_{kl}\Delta_{kl}\,d\,u_k\,d\,u_l\,,$$

e da questo si deduce ciò che si era asserito.

Una conseguenza ne è questa: *Se due varietà regolari di elementi sono proiettivamente applicabili, lo sono anche le varietà correlative.*

Sull'indipendenza di un integrale dai parametri nel caso più generale.

(*Di* GIUSEPPE USAI, *a Milano.*)

La ricerca delle condizioni di indipendenza di un integrale dai parametri nei lavori di KOBB, KNESER, RADON, VIVANTI (sino al 1913), USAI [1], si è basata sempre sullo studio di sistemi di equazioni a derivate parziali e le difficoltà di integrazione, a somiglianza di quanto è avvenuto in altri campi dell'Analisi, non hanno permesso la soluzione del problema che in casi particolari, facendo piuttosto intravvedere la necessità di cambiar rotta. Ora questa, a mio parere, è segnata al presente da un lavoro recentissimo del prof. VIVANTI [2], il quale tratta il caso dell'integrale semplice, evitando la risoluzione di equazioni e tenendo un procedimento geniale ed elegante. L'Illustre Autore poi volle gentilmente consigliarmi (e cordialmente io Lo ringrazio) di riprendere

---

(1) G. KOBB, *Sur les maxima et les minima des intégrales doubles*, Acta Mathematica, t. XVI (1892-93), pp. 65-140; t. XVII (1893), pp. 321-43.

A. KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung* (Braunschweig, Vieweg, 1900).

J. RADON, *Ueber einige Fragen betreffend die Theorie der maxima und minima mehrfächer Integrale*. Monatshefte für Mathematik und Physik, t. XXII, 1911, pp. 53-63.

C. VIVANTI, *Sull'equazione di Eulero per gli integrali multipli*. Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1912, t. XXXIII, pp. 268-274.

C. VIVANTI, *Sul calcolo delle variazioni degli integrali multipli*. Annali di Matematica pura ed applicata (1913), Tomo XX, Serie III, pag. 49 e seguenti.

G. USAI, *Sulle condizioni di indipendenza di un integrale semplice dal parametro*. Regio Ist. Lombardo, Milano, Adunanza 14 Gennaio 1915, Rend., Vol. 48, pag. 77.

G. USAI, *Sul calcolo delle variazioni per il caso di un integrale doppio*. R. Ist. Lombardo, Milano, Adunanza 27 Maggio 1915. Rend., Vol. 48, pag. 628.

G. USAI, *Sulle variazioni di un integrale doppio con le derivate quarte*. R. Ist. Lombardo, Milano, Adunanza 16 Gennaio 1919. Rend., Vol. 52, pag. 115.

(2) G. VIVANTI, *Sull'indipendenza di un integrale dal parametro*. Rendiconti Circolo Matematico di Palermo. Adunanza 22 Gennaio 1922. Tomo XLVI.

dal nuovo punto di vista in esame i problemi trattati e come risultato dei miei studi sono riuscito, e con piacere, a risolvere la questione nel caso più completo e generale di un integrale ennuplo a espressione integranda contenente $n+1$ funzioni di n variabili indipendenti con le derivate di qualunque ordine: tali risultati molto semplici ed interessanti in relazione alla complessità e all'importanza dell'argomento si leggono nei nn. 2, 3 di questa Memoria, mentre i nn. 4, 5, 6 sono riservati a speciali confronti dai quali può venir bene in luce la superiorità del nuovo metodo.

2. Abbiasi l'integrale

$$J = \int^{(n)} \Phi\,(x_i,\ x_{ih}, \ldots,\ x_{ihk\ldots pq})\, d\,\nu_1 \ldots d\,\nu_n \tag{1}$$

in cui Φ contenga $n+1$ funzioni di n variabili

$$x_i = x_i\,(\nu_1 \ldots \nu_n) \qquad i = 1,\ 2, \ldots,\ n+1 \tag{2}$$

colle derivate prime, seconde, ..., emmesime

$$x_{ih} = \frac{\partial\, x_i}{\partial\, \nu_h} \quad x_{ihk} = \frac{\partial^2\, x_i}{\partial\, \nu_h\ \partial\, \nu_k} \ldots x_{ihk\ldots pq} =$$

$$= \frac{\partial^m\, x_i}{\partial\, \nu_h\ \partial\, \nu_k \ldots \partial\, \nu_p\ \partial\, \nu_q} (h,\ k \ldots,\ p,\ q = 1,\ 2, \ldots,\ n),$$

essendo $h\,k \ldots p\,q$ una permutazione con ripetizione di classe m dei numeri $1,\ 2, \ldots,\ n$.

Se poniamo col Vivanti

$$\xi_s = (-1)^{n+1-s} \frac{d\,(x_1 \ldots x_{s-1}\ x_{s+1} \ldots x_{n+1})}{d\,(\nu_1 \ldots \nu_n)} \qquad s = 1,\ 2, \ldots,\ n+1$$

basterà supporre $\xi_{n+1} \neq 0$ perchè in un S_{n+1} o spazio ad $n+1$ dimensioni, la regione dell'ipersuperficie (2) alla quale riteniamo estesa l'integrazione, si possa immaginare definita considerando la x_{n+1} espressa mediante le x_1, $x_2, \ldots,\ x_n$.

Dopo di ciò dalle relazioni

$$x_{n+1,h} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial\, x_{n+1}}{\partial\, x_\alpha}\, x_{\alpha h} \qquad h = 1,\ 2, \ldots,\ n$$

avremo facilmente:

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_\alpha} = - \frac{\xi_\alpha}{\xi_{n+1}} \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

e quindi:

$$\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} = - \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\xi_\alpha}{\xi_{n+1}}\right) = - \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \nu_h}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial \nu_h}\left(\frac{\xi_\alpha}{\xi_{n+1}}\right) \qquad \beta = 1, 2, \ldots, n$$

e poichè dal sistema:

$$\sum_{h=1}^{n} x_{rh} \frac{\partial \nu_h}{\partial x_\beta} = \begin{cases} 0 & \text{per } r \neq \beta \\ 1 & \text{per } r = \beta \end{cases} \qquad r = 1, 2, \ldots, n$$

si ricava (3):

$$\frac{\partial \nu_h}{\partial x_\beta} = - \frac{1}{\xi_{n+1}} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_{n+1,h}} \tag{3}$$

sarà:

$$\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} = \frac{1}{\xi_{n+1}} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_{n+1,h}} \frac{\partial}{\partial \nu_h}\left(\frac{\xi_\alpha}{\xi_{n+1}}\right) = \frac{1}{\xi_{n+1}^3} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_{n+1,h}} \left(\xi_{n+1} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \nu_h} - \xi_\alpha \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \nu_h}\right).$$

Scriveremo:

$$\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} = \frac{1}{\xi_{n+1}^3} \sigma_{\alpha\beta} \ (4)$$

e da questa:

$$\frac{\partial^3 x_{n+1}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta\, \partial x_\gamma} = \frac{1}{\xi_{n+1}^4} \left(\xi_{n+1} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} - 3\, \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial x_\gamma}\right) =$$

$$= \frac{1}{\xi_{n+1}^4} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \nu_h}{\partial x_\gamma} \left(\xi_{n+1} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \nu_h} - 3\, \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \nu_h}\right)$$

e per le (3):

$$\frac{\partial^3 x_{n+1}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta\, \partial x_\gamma} = \frac{1}{\xi_{n+1}^5} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial x_{n+1,h}} \left(3\, \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \nu_h} - \xi_{n+1} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \nu_h}\right) = \frac{1}{\xi_{n+1}^5} \sigma_{\alpha\beta\gamma}.$$

In generale se $\alpha\beta\ldots\lambda\mu$ rappresenta una permutazione con ripetizione

---

(3) Si trova subito la: $\dfrac{\partial \nu_h}{\partial x_\beta} - (-1)^{\beta+h} \dfrac{1}{\xi_{n+1}} \dfrac{d(x_1 \ldots x_{\beta-1}\, x_{\beta+1} \ldots x_n)}{d(\nu_1 \ldots \nu_{h-1}\, \nu_{h+1} \ldots \nu_n)}$ e dopo si fa uso della: $\dfrac{\partial \xi_\beta}{\partial x_{n+1,h}} = (-1)^{1-\beta+h} \dfrac{d(x_1 \ldots x_{\beta-1}\, x_{\beta+1} \ldots x_n)}{d(\nu_1 \ldots \nu_{h-1}\, \nu_{h+1} \ldots \nu_n)}$.

(4) L'espressione $\sigma_{\alpha\beta}$ dovrà risultare simmetrica in α e β. Ciò si vedrà in seguito.

di classe m dei numeri 1, 2, . ., n avremo la:

$$\frac{\partial^m x_{n+1}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta \ldots \partial x_\lambda\, \partial x_\mu} = \frac{1}{\xi_{n+1}^{2m-1}}\, \sigma_{\alpha\beta\ldots\lambda\mu}$$

ove le σ sono determinate dalle relazioni ricorrenti:

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha &= -\xi_\alpha,\\
\sigma_{\alpha\beta} &= \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_{n+1,h}} \left(\xi_{n+1} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \nu_h} - \xi_\alpha \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \nu_h}\right) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_{n+1,h}} \left(\sigma_\alpha \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \nu_h} - \xi_{n+1} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \nu_h}\right)\\
\sigma_{\alpha\beta\gamma} &= \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial x_{n+1,h}} \left(3\, \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \nu_h} - \xi_{n+1} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \nu_h}\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sigma_{\alpha\beta\ldots\lambda\mu} &= \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_{n+1,h}} \left((2m-3)\, \sigma_{\sigma\beta\ldots\lambda} \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \nu_h} - \xi_{n+1} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta\ldots\lambda}}{\partial \nu_h}\right).
\end{aligned}$$

3. Introduciamo ora la rappresentazione parametrica (2) in un integrale

$$I = \int^{(n)} F\left(x_i, \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}, \ldots, \frac{\partial^m x_{n+1}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta \ldots \partial x_\lambda\, \partial x_\mu}\right) d x_1 \ldots d x_n$$

esteso alla regione di ipersuperficie considerata; risulta:

$$I = \int^{(n)} F\left(x_i, \frac{-\xi_\alpha}{\xi_{n+1}}, \frac{1}{\xi_{n+1}^3}\sigma_{\sigma\beta}, \frac{1}{\xi_{n+1}^5}\sigma_{\sigma\beta\gamma}, \ldots, \frac{1}{\xi_{n+1}^{2m-1}}\sigma_{\alpha\beta\ldots\lambda\mu}\right) \xi_{n+1}\, d\nu_1 \ldots d\nu_n$$

e posto:

$$F(x_i, -p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m) = G\left(x_i, p_1, \sqrt[3]{p_2}, \sqrt[5]{p_3}, \ldots, \sqrt[2m-1]{p_m}\right)$$

si può (5) scrivere:

$$I = \int^{(n)} G\left(x_i, \frac{\xi_\alpha}{\xi_{n+1}}, \frac{1}{\xi_{n+1}}\sqrt[3]{\sigma_{\alpha\beta}}, \frac{1}{\xi_{n+1}}\sqrt[5]{\sigma_{\sigma\beta\gamma}}, \ldots, \frac{1}{\xi_{n+1}}\sqrt[2m-1]{\sigma_{\alpha\beta\ldots\lambda\mu}}\right) \xi_{n+1}\, d\nu_1 \ldots d\nu_n$$

e la funzione integranda come si vede è omogenea (positiva se si suppone

(5) L'integrale che segue è della forma (1), giacchè le ξ contengono le x_{ih}, le $\sigma_{\alpha\beta}$, le $x_{ihk}, \ldots$, le $\sigma_{\alpha\beta\ldots\lambda\mu}$, le $x_{ihk\ldots pq}$.

in ogni punto $\xi_{n+1} > 0$) di primo grado nelle:

$$\xi_i,\ \sqrt[3]{\sigma_{\alpha\beta}},\ \sqrt[5]{\sigma_{\alpha\beta\gamma}},\ \ldots,\ \sqrt[2m-1]{\sigma_{\alpha\beta\ldots\lambda\mu}}. \tag{4}$$

Reciprocamente sia nell'integrale (1) Φ una funzione omogenea di primo grado degli argomenti (4)

$$\Phi\,(x_i,\ x_{ih},\ x_{ihk},\ \ldots,\ x_{ihk\ldots pq}) = \Psi\,(x_i,\ \xi_i,\ \sqrt[3]{\sigma_{\alpha\beta}},\ \ldots,\ \sqrt[2m-1]{\sigma_{\alpha\beta\ldots\lambda\mu}}). \tag{5}$$

Introducendo dei nuovi parametri $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \ldots, \bar{\nu}_n$ e tali che $\dfrac{d\,(\bar{\nu}_1 \ldots \bar{\nu}_n)}{d\,(\nu_1 \ldots \nu_n)} = \Delta$ sia positivo in tutto il campo considerato e posto $\dfrac{\partial \bar{\nu}_r}{\partial \nu_h} = u_{rh}$ indichiamo con U_{rh} il complemento algebrico di u_{rh} nel determinante Δ delle u. Soprassegnando tutti gli elementi relativi al nuovo sistema di parametri e utilizzando i risultati già dati dal Vivanti abbiamo:

$$x_{ih} = \sum_{h=1}^{n} \overline{x_{ir}}\, u_{rh} \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1 \quad h = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

$$\xi_i = \Delta\, \bar{\xi}_i \tag{7}$$

onde:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \nu_h} = \frac{\partial \Delta}{\partial \nu_h}\,\bar{\xi}_i + \Delta \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial \bar{\nu}_k}\, u_{kh} \tag{8}$$

e con facili riduzioni

$$\xi_{n+1}\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \nu_h} - \xi_\alpha \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \nu_h} = \Delta^2 \sum_{k=1}^{n} u_{kh} \left(\bar{\xi}_{n+1}\frac{\partial \bar{\xi}_\alpha}{\partial \bar{\nu}_k} - \bar{\xi}_\alpha \frac{\partial \bar{\xi}_{n+1}}{\partial \bar{\nu}_k}\right) \tag{9}$$

e poichè dalle (6) si hanno le:

$$\bar{x}_{n+1,r} = \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^{n} x_{n+1,s}\, U_{rs} \qquad\qquad r = 1, 2, \ldots, n$$

risulta:

$$\frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_{n+1,h}} = \Delta \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{\xi}_\beta}{\partial \bar{x}_{n+1,j}}\, \frac{\partial \bar{x}_{n+1,j}}{\partial x_{n+1,h}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{\xi}_\beta}{\partial \bar{x}_{n+1,j}}\, U_{jh} \tag{10}$$

e ([6]) col tener presente le (9) e (10) si ha:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_{n+1,h}} \left(\xi_{n+1} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \nu_h} - \xi_\alpha \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \nu_h} \right) =$$

$$= \Delta^2 \sum_{h=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{\xi}_\beta}{\partial \bar{x}_{n+1,j}} U_{jh} \sum_{k=1}^{n} u_{kh} \left(\bar{\xi}_{n+1} \frac{\partial \bar{\xi}_\alpha}{\partial \bar{\nu}_k} - \bar{\xi}_\alpha \frac{\partial \bar{\xi}_{n+1}}{\partial \bar{\nu}_k} \right).$$

ed essendo:

$$\sum_{h=1}^{n} U_{jh} u_{kh} = \begin{cases} \Delta & \text{per } k = j \\ O & \text{per } k == j \end{cases} \tag{11}$$

ci si riduce alla:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_{n+1,h}} \left(\xi_{n+1} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \nu_h} - \xi_\alpha \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \nu_h} \right) = \Delta^3 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{\xi}_\beta}{\partial \bar{x}_{n+1,j}} \left(\bar{\xi}_{n+1} \frac{\partial \bar{\xi}_\alpha}{\partial \bar{\nu}_j} - \bar{\xi}_\alpha \frac{\partial \bar{\xi}_{n+1}}{\partial \bar{\nu}_j} \right)$$

cioè:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \Delta^3 \bar{\sigma}_{\alpha\beta}$$

e da questa insieme alle (7) e (8):

$$3\, \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \nu_h} - \xi_{n+1} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \nu_h} = 3\, \Delta^3 \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \nu_h} \xi_{n+1} + \Delta \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{\xi}_{n+1}}{\partial \bar{\nu}_k} u_{kh} \right) -$$

$$- \Delta \bar{\xi}_{n+1} \left(3\, \Delta^2 \frac{\partial \Delta}{\partial \nu_h} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} + \Delta^3 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\nu}_k} u_{kh} \right) = \sum_{k=1}^{n} \Delta^4 \left(3\, \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{\xi}_{n+1}}{\partial \bar{\nu}_k} - \bar{\xi}_{n+1} \frac{\partial \bar{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\nu}_k} \right) u_{kh}$$

onde, anche per le (10) e (11):

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial x_{n+1,h}} \left(3\, \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \nu_h} - \xi_{n+1} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \nu_h} \right) =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{\xi}_\gamma}{\partial \bar{x}_{n+1,j}} U_{jh} \sum_{k=1}^{n} \Delta^4 \left(3 \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{\xi}_{n+1}}{\partial \bar{\nu}_k} - \bar{\xi}_{n+1} \frac{\partial \bar{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\nu}_k} \right) u_{kh} =$$

$$= \Delta^5 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{\xi}_\gamma}{\partial \bar{x}_{n+1,j}} \left(3\, \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{\xi}_{n+1}}{\partial \bar{\nu}_j} - \bar{\xi}_{n+1} \frac{\partial \bar{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\nu}_j} \right)$$

([6]) Se si osserva la notazione del VIVANTI $M_{\lambda\mu r} - (-1)^{\lambda+\mu-r} \dfrac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_{\mu r}}$ la (10) può scriversi $M_{\beta,n+1,h} = \sum_{j=1}^{n} \bar{M}_{\beta,n+1,j} U_{jh}$ e in tale forma fu già trovata dal VIVANTI; a noi convenne però ricavarla direttamente per segnare la strada dei calcoli successivi.

ovverosia:

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma} = \Delta^5 \, \bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} .$$

In generale si trova per le σ ad m indici la:

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda\mu} = \Delta^{2m-1} \, \bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda\mu} . \qquad (a)$$

Infatti ammettendo l'uguaglianza:

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda} = \Delta^{2m-3} \, \bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}$$

si ottiene:

$$(2\,m-3)\,\sigma_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}\frac{\partial\,\xi_{n+1}}{\partial\,\nu_h} - \xi_{n+1}\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}}{\partial\,\nu_h} =$$

$$= (2\,m-3)\,\Delta^{2m-3}\,\bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}\left(\frac{\partial\,\Delta}{\partial\,\nu_h}\,\bar{\xi}_{n+1} + \Delta\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\,\bar{\xi}_{n+1}}{\partial\,\bar{\nu}_k}\,u_{kh}\right) -$$

$$-\,\Delta\,\bar{\xi}_{n+1}\left((2\,m-3)\,\Delta^{2m-4}\,\bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}\frac{\partial\,\Delta}{\partial\,\nu_h} + \Delta^{2m-3}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\,\bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}}{\partial\,\bar{\nu}_k}\,u_{kh}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\Delta^{2m-2}\left((2\,m-3)\,\bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}\frac{\partial\,\bar{\xi}_{n+1}}{\partial\,\bar{\nu}_k} - \bar{\xi}_{n+1}\frac{\partial\,\bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}}{\partial\,\bar{\nu}_k}\right)u_{kh}$$

e quindi per le (10) e (11):

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda\mu} = \sum_{h=1}^{n}\frac{\partial\,\xi_\mu}{\partial\,x_{n+1,h}}\left((2\,m-3)\,\sigma_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}\frac{\partial\,\xi_{n+1}}{\partial\,\nu_h} - \xi_{n+1}\frac{\partial\,\sigma_{\alpha\beta\dots\lambda}}{\partial\,\nu_h}\right) =$$

$$= \sum_{h=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\,\bar{\xi}_\mu}{\partial\,\bar{x}_{n+1,j}}\,u_{jh}\sum_{k=1}^{n}\Delta^{2m-2}\left((2\,m-3)\,\bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}\frac{\partial\,\bar{\xi}_{n+1}}{\partial\,\bar{\nu}_k} - \bar{\xi}_{n+1}\frac{\partial\,\bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}}{\partial\,\bar{\nu}_k}\right)u_{kh} =$$

$$= \Delta^{2m-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\,\bar{\xi}_\sigma}{\partial\,x_{n+1,j}}\left((2\,m-3)\,\bar{\sigma}_{\alpha\beta\dots\lambda}\frac{\partial\,\bar{\xi}_{n+1}}{\partial\,\bar{\nu}_j} - \bar{\xi}_{n+1}\frac{\partial\,\bar{\sigma}_{\alpha\beta\dots\lambda}}{\partial\,\bar{\nu}_j}\right)$$

pari all'espressione (a).

Sostituendo ora nell'integrale i nuovi parametri $\bar{\nu}$ si ha:

$$J = \int^{(n)}\Psi\left(x_i,\ \Delta\,\bar{\xi}_i,\ \Delta\sqrt[3]{\bar{\sigma}_{\alpha\beta}},\ \dots,\ \Delta\sqrt[2m-1]{\bar{\sigma}_{\alpha\beta\dots\lambda\mu}}\right)\frac{1}{\Delta}\,d\,\bar{\nu}_1\dots d\,\bar{\nu}_n$$

e per l'omogeneità supposta nella (5):

$$J = \int^{(n)}\Psi\left(x_i,\ \bar{\xi}_i,\ \sqrt[3]{\bar{\sigma}_{\alpha\beta}},\ \dots,\ \sqrt[2m-1]{\bar{\sigma}_{\alpha\beta\dots\lambda\mu}}\right)d\,\bar{\nu}_1\dots d\,\bar{\nu}_n$$

donde si vede che il valore di J è indipendente dalla scelta dei parametri.

Pertanto la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'integrale (1) sia indipendente dai parametri è che Φ sia omogenea positiva di primo grado nelle espressioni (4) le quali, è bene notarlo, sono in numero di $n+1$ per le ξ, di $\binom{n+1}{2}$ per le $\sigma_{\alpha\beta}$, $\binom{n+2}{3}$ per le $\sigma_{\alpha\beta\gamma}, \ldots,$ $\binom{n+m-1}{m}$ per le $\sigma_{\alpha\beta\ldots\lambda\mu}$ (o σ ad m indici).

4. Come caso particolare dai risultati odierni si dovrebbero ricavare quelli dei lavori già menzionati ed è opportuno un esame al riguardo.

Nel caso in cui la Φ contenga le sole derivate prime, allora le (4) si riducono alle ξ e si ha la conferma del primo problema già trattato dal Vivanti (7).

Se poi Φ contiene anche le derivate seconde, delle (4) restano le

$$\xi_i, \quad \sqrt[3]{\sigma_{\alpha\beta}}$$

mentre Vivanti (8) trova come condizioni caratteristiche l'omogeneità analoga nelle:

$$\xi_i, \quad \sqrt[3]{S_{\lambda\mu}} \qquad \lambda,\ \mu = 1, \ldots, n+1 \qquad \lambda < \mu$$

essendo:

$$S_{\lambda\mu} = \sum_{h=1}^{n} \Omega_{hh} M^2_{\lambda\mu h} + \sum_{\substack{h,k=1 \\ h \neq k}}^{n} \Omega_{hk} M_{\lambda\mu h} M_{\lambda\mu k} \tag{12}$$

$$\Omega_{rs} = \sum_i^n \xi_i x_{irs} = \Omega_{sr} \qquad r,\ s = 1,\ 2, \ldots, n \tag{13}$$

$$M_{\lambda\mu r} = (-1)^{\lambda+\mu-1} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_{\mu r}} \qquad \lambda,\ \mu = 1,\ 2, \ldots,\ n+1. \tag{14}$$

Per trovare le relazioni tra le σ e le S, le quali ultime sono pure in numero di $\binom{n+1}{2}$, consideriamo le n identità

$$\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i x_{ir} = 0 \qquad r = 1,\ 2, \ldots, n \tag{15}$$

(7) Nella Nota: *Sull'equazione di Eulero, ecc.*

(8) Nella Nota: *Sul Calcolo delle Variazioni, ecc.*

e deriviamole rispetto a ν_h. Servendoci delle (13) otteniamo le:

$$\sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \nu_h} x_{ir} + \Omega_{rh} = 0 \qquad r = 1, 2, \ldots, n.$$

Se queste le sommiamo dopo averle moltiplicate rispettivamente per $\frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial x_{\alpha 1}} \cdots \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial x_{\alpha n}}$, dopo facili riduzioni e col tener presenti le:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial x_{\alpha s}} x_{\gamma s} = \begin{cases} \xi_{n+1} & \text{per } \alpha = \gamma \\ 0 & \text{per } \alpha \neq \gamma \end{cases} \quad \alpha \neq n+1, \quad \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial x_{\alpha l}} = -$$

$$= - \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_{n+1,l}}, \quad \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_{n+1,s}} x_{n+1,s} = \xi_\alpha$$

avremo infine:

$$\xi_{n+1} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \nu_h} - \xi_\alpha \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \nu_h} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_{n+1,j}} \Omega_{jh}$$

e quindi:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_{n+1,h}} \left(\xi_{n+1} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \nu_h} - \xi_\alpha \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \nu_h} \right) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_{n+1,h}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_{n+1,j}} \Omega_{jh}$$

la quale per la (14) si può ridurre alla forma:

$$\sigma_{\alpha,\beta} = (-1)^{\alpha+\beta} \left[\sum_{h=1}^{n} M_{\alpha,n+1,h} M_{\beta,n+1,h} \Omega_{hh} + \sum_{\substack{h,k=1 \\ h \neq k}}^{n} M_{\beta,n+1,h} M_{\alpha,n+1,k} \Omega_{hk} \right] (^9) \quad (16)$$

e da questa per $\alpha = \beta$ avremo:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sum_{h=1}^{n} M^2_{\alpha,n+1,h} \Omega_{hh} + \sum_{\substack{h,k=1 \\ h \neq k}}^{n} M_{\alpha,n+1,h} M_{\alpha,n+1,k} \Omega_{hk} \quad (17)$$

e quindi col tener presenti le (12) le relazioni:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = S_{\alpha,n+1} \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n. \quad (18)$$

Se poi nel caso di $\alpha \neq \beta$ consideriamo i sistemi di $n-1$ equazioni che si hanno dalle (15) trascurando l'equazione h^a $(h = 1, 2, \ldots, n)$ ed eliminiamo tutte le ξ meno le tre ξ_α, ξ_β, ξ_{n+1} $(\alpha < \beta \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$ avremo in cor-

---

(9) Risulta manifesto ora $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$ [Osservazione (4)].

rispondenza ad ogni valore di h un determinante di ordine $n-1$ il quale sviluppato può ridursi alla forma:

$$(-1)^{n-\alpha-1}\xi_\alpha \frac{d(x_1 \ldots x_\alpha \ldots x_{\beta-1}\; x_{\beta+1} \ldots x_n)}{d(\nu_1 \ldots \nu_{h-1}\; \nu_{h+1} \ldots \nu_n)} +$$
$$+(-1)^{n-\beta}\xi_\beta \frac{d(x_1 \ldots x_{\alpha-1}\; x_{\alpha+1} \ldots x_\beta \ldots x_n)}{d(\nu_1 \ldots \nu_{h-1}\; \nu_{h+1} \ldots \nu_n)}$$
$$+\xi_{n+1}\frac{d(x_1 \ldots x_{\alpha-1}\; x_{\alpha+1} \ldots x_{\beta-1}\; x_{\beta+1} \ldots x_{n+1})}{d(\nu_1 \ldots \nu_{h-1}\; \nu_{h+1} \ldots \nu_n)} = 0 \tag{19}$$

e poichè si trovano ([10]) le:

$$\frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_{\mu h}} = (-1)^{n+\mu+h-\lambda}\frac{d(x)}{d(\nu)} \qquad (\lambda < \mu)$$

dove nel determinante tra le x mancano x_λ e x_μ e tra le ν la ν_h avremo che la (19) dopo facili riduzioni diventa:

$$\xi_\alpha \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_{n+1,h}} - \xi_\beta \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_{n+1,h}} + \xi_{n+1}\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_{\beta h}} = 0 \qquad h = 1, 2, \ldots, n$$

pari alle:

$$M_{\alpha\beta h}\,\xi_{n+1} = (-1)^{n-\alpha}\left[\xi_\alpha M_{\beta,n+1,h} + (-1)^{\alpha-\beta+1}\xi_\beta M_{\alpha,n+1,h}\right]$$

e da queste, ricavando le $M_{\alpha\beta_h}$ e sostituendo nelle:

$$S_{\alpha\beta} = \sum_{h=1}^{n} M^2_{\alpha\beta_h}\,\Omega_{hh} + \sum_{\substack{h,k=1\\ h \neq k}}^{n} M_{\alpha\beta_h}\, M_{\alpha\beta_k}\,\Omega_{hk} \qquad (\alpha \neq \beta)$$

si trovano tenendo presenti le (16) e (17) le relazioni:

$$S_{\alpha\beta} = \frac{\xi_\alpha^2\,\sigma_{\beta\beta} + \xi_\beta^2\,\sigma_{\alpha\alpha} - 2\,\xi_\alpha\,\xi_\beta\,\sigma_{\alpha\beta}}{\xi_{n+1}^2} \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots\, n \quad \alpha \neq \beta. \tag{20}$$

Il legame cercato tra le S e le σ viene dato dalle espressioni (18) e (20). Avendosi poi da queste:

$$\sqrt[3]{\sigma_{\alpha\alpha}} = \sqrt[3]{S_{\alpha,n+1}}$$
$$\sqrt[3]{\sigma_{\alpha\beta}} = \sqrt[3]{S_{\alpha\beta}}\sqrt[3]{\frac{\xi_\alpha\,\sigma_{\beta\beta}}{2\,\xi_\beta\,S_{\alpha\beta}} + \frac{\xi_\beta\,\sigma_{\alpha\alpha}}{2\,\xi_\alpha\,S_{\alpha\beta}} - \frac{\xi_{n+1}^2}{2\,\xi_\alpha\,\xi_\beta}}$$

([10]) Si noti che il segno del determinante ξ_λ è $(-1)^{n+1-\lambda}$ e che in esso la $x_{\mu h}$ giace nella linea $\mu-1$ $(\mu > 1)$ e nella colonna h^a.

ed essendo quest'ultima radice omogenea di grado zero nelle ξ, σ, S avremo che l'omogeneità lineare nelle $\sqrt[3]{\sigma}$ trae di conseguenza l'analoga nelle $\sqrt[3]{S}$ onde i risultati si accordano.

5. Il caso in cui Φ contenga le derivate terze è stato da me già studiato nel 1915 ([11]), però per le difficoltà del metodo di allora mi limitai ad un integrale doppio con 3 funzioni di 2 variabili indipendenti. Ho trovato come condizioni caratteristiche l'omogeneità lineare nelle:

$$(n=2) \qquad \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3 \qquad \sqrt[3]{S_{12}},\ \sqrt[3]{S_{13}},\ \sqrt[3]{S_{23}},\ \sqrt[4]{S_{124}},\ \sqrt[4]{S_{134}},\ \sqrt[4]{S_{234}},\ \sqrt[4]{S_{123}}$$

essendo:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_{21}\, x_{32} - x_{22}\, x_{31} & S_{12} &= \Omega_{11}\, x_{32}^2 + \Omega_{22}\, x_{31}^2 - 2\,\Omega_{12}\, x_{32}\, x_{31} \\ \xi_2 &= x_{12}\, x_{31} - x_{11}\, x_{32} & S_{13} &= \Omega_{11}\, x_{22}^2 + \Omega_{22}\, x_{21}^2 - 2\,\Omega_{12}\, x_{22}\, x_{21} \\ \xi_3 &= x_{11}\, x_{22} - x_{12}\, x_{21} & S_{23} &= \Omega_{11}\, x_{12}^2 + \Omega_{22}\, x_{11}^2 - 2\,\Omega_{12}\, x_{12}\, x_{11}. \end{aligned}$$

In quanto poi alle S a tre indici conviene e si può ([12]) sostituire alle espressioni allora date le seguenti:

$$\begin{aligned} S_{124} = {} & T_{111}\, x_{22}^2\, x_{12} - T_{112}\, x_{22}\, (2\, x_{21}\, x_{12} + x_{22}\, x_{11}) + T_{122}\, x_{21}\, (x_{21}\, x_{12} + 2\, x_{22}\, x_{11}) - \\ & - T_{222}\, x_{21}^2\, x_{11} \\ S_{134} = {} & T_{111}\, x_{22}^3 - 3\, T_{112}\, x_{22}^2\, x_{21} + 3\, T_{122}\, x_{22}\, x_{21}^2 - T_{222}\, x_{21}^3 \\ S_{234} = {} & T_{111}\, x_{12}^3 - 3\, T_{112}\, x_{12}^2\, x_{11} + 3\, T_{122}\, x_{12}\, x_{11}^2 - T_{222}\, x_{11}^3 \\ S_{123} = {} & T_{111}\, x_{12}^2\, x_{22} - T_{112}\, x_{12}\, (2\, x_{11}\, x_{22} + x_{12}\, x_{21}) + T_{122}\, x_{11}\, (x_{11}\, x_{22} + 2\, x_{12}\, x_{21}) - \\ & - T_{222}\, x_{11}^2\, x_{21} \end{aligned}$$

con:

$$T_{111} = \Omega_{111} - 3\,\frac{\Omega_{11}}{\xi_3}\left[x_{111}\, x_{22}\right] - 3\,\frac{\Omega_{12}}{\xi_3}\left[x_{211}\, x_{11}\right]$$

$$T_{112} = \Omega_{112} - 2\,\frac{\Omega_{11}}{\xi_3}\left[x_{112}\, x_{22}\right] - \frac{\Omega_{12}}{\xi_3}\left\{\left[x_{111}\, x_{22}\right] + 2\left[x_{212}\, x_{11}\right]\right\} - \frac{\Omega_{22}}{\xi_3}\left[x_{211}\, x_{11}\right]$$

([11]) Si veda la seconda delle mie Note citate.

([12]) La convenienza è per avere espressioni concordantisi colle attuali σ a tre indici. La possibilità risulta benissimo dal procedimento tenuto nella Nota in questione per cui le pagine 637 (Vedi anche l'osservazione), 638, 639, 640 giustificano le attuali $T_{111}\, T_{112}\, T_{122}\, T_{222}$ e le pagine 640 . . . 647 le $S_{124}\, S_{134}\, S_{234}\, S_{123}$ ora usate le quali d'altra parte, come può verificarsi facilmente, sono sempre integrali indipendenti pei sistemi di equazioni relativi al problema.

$$T_{122} = \Omega_{122} - 2\,\frac{\Omega_{22}}{\xi_3}\left[x_{221}\,x_{11}\right] - \frac{\Omega_{12}}{\xi_3}\left\{\left[x_{222}\,x_{11}\right] + 2\left[x_{121}\,x_{22}\right]\right\} - \frac{\Omega_{11}}{\xi_3}\left[x_{122}\,x_{22}\right]$$

$$T_{222} = \Omega_{222} - 3\,\frac{\Omega_{22}}{\xi_3}\left[x_{222}\,x_{11}\right] - 3\,\frac{\Omega_{12}}{\xi_3}\left[x_{122}\,x_{22}\right]$$

essendo:

$$\left[x_{rst}\,x_{uv}\right] = x_{rst}\,x_{uv} - x_{ust}\,x_{rv} \qquad \Omega_{hkl} = \sum_i \xi_i\,x_{ihkl} \qquad h,\ k,\ l = 1,\ 2.$$

Col procedimento attuale si trova invece l'omogeneità nelle

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \sqrt[3]{\sigma_{11}}\ \sqrt[3]{\sigma_{22}}\ \sqrt[3]{\sigma_{12}}\ \sqrt[5]{\sigma_{111}}\ \sqrt[5]{\sigma_{112}}\ \sqrt[5]{\sigma_{122}}\ \sqrt[5]{\sigma_{222}}\,.$$

Le ξ sono le stesse di prima; per le σ a due indici calcoli molto semplici (formole 16 e 17) dànno:

$$\sigma_{11} = \Omega_{11}\,x_{22}^2 + \Omega_{22}\,x_{21}^2 - 2\,\Omega_{12}\,x_{21}\,x_{22}$$

$$\sigma_{22} = \Omega_{11}\,x_{12}^2 + \Omega_{22}\,x_{11}^2 - 2\,\Omega_{12}\,x_{12}\,x_{11}$$

$$\sigma_{12} = -\Omega_{11}\,x_{12}\,x_{22} - \Omega_{22}\,x_{11}\,x_{21} + (x_{21}\,x_{12} + x_{11}\,x_{22})\,\Omega_{12}$$

ed è facile verificare le:

$$\sigma_{11} = S_{13} \qquad \sigma_{22} = S_{23} \qquad \sigma_{12} = \frac{\xi_1^2\,\sigma_{22} + \xi_2^2\,\sigma_{11} - \xi_3^2\,S_{12}}{2\,\xi_1\,\xi_2}$$

d'accordo colle (18) e (20).

Più lunghi invece sono i calcoli per le σ a tre indici. A noi però basta fissare i capisaldi.

Abbiamo:

$$\sigma_{111} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{31}}\left(3\,\sigma_{11}\,\frac{\partial \xi_3}{\partial \nu_1} - \xi_3\,\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \nu_1}\right) + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{32}}\left(3\,\sigma_{11}\,\frac{\partial \xi_3}{\partial \nu_2} - \xi_3\,\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \nu_2}\right)$$

$$\sigma_{112} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_{31}}\left(3\,\sigma_{11}\,\frac{\partial \xi_3}{\partial \nu_1} - \xi_3\,\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \nu_1}\right) + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_{32}}\left(3\,\sigma_{11}\,\frac{\partial \xi_3}{\partial \nu_2} - \xi_3\,\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \nu_2}\right)$$

$$\sigma_{122} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_{31}}\left(3\,\sigma_{12}\,\frac{\partial \xi_3}{\partial \nu_1} - \xi_3\,\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \nu_1}\right) + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_{32}}\left(3\,\sigma_{12}\,\frac{\partial \xi_3}{\partial \nu_2} - \xi_3\,\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \nu_2}\right)$$

$$\sigma_{222} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_{31}}\left(3\,\sigma_{22}\,\frac{\partial \xi_3}{\partial \nu_1} - \xi_3\,\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \nu_1}\right) + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_{32}}\left(3\,\sigma_{22}\,\frac{\partial \xi_3}{\partial \nu_2} - \xi_3\,\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \nu_2}\right)$$

essendo:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \nu_h} = x_{21h}\, x_{32} + x_{21}\, x_{32h} - x_{22h}\, x_{31} - x_{22}\, x_{31h} \qquad h = 1,\ 2,$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \nu_h} = x_{12h}\, x_{31} + x_{12}\, x_{31h} - x_{11h}\, x_{32} - x_{11}\, x_{32h}$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial \nu_h} = x_{11h}\, x_{22} + x_{11}\, x_{22h} - x_{12h}\, x_{21} - x_{12}\, x_{21h}$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \nu_h} = 2\, x_{22}\, x_{22h}\, \Omega_{11} + 2\, x_{21}\, x_{21h}\, \Omega_{22} - 2\,(x_{21h}\, x_{22} + x_{21}\, x_{22h})\, \Omega_{12} + \\ + x_{22}^2 \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial \nu_h} + x_{21}^2 \frac{\partial \Omega_{22}}{\partial \nu_h} - 2\, x_{21}\, x_{22} \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial \nu_h}$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \nu_h} = 2\, x_{12}\, x_{12h}\, \Omega_{11} + 2\, x_{11}\, x_{11h}\, \Omega_{22} - 2\,(x_{12h}\, x_{11} + x_{12}\, x_{11h})\, \Omega_{12} + \\ + x_{12}^2 \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial \nu_h} + x_{11}^2 \frac{\partial \Omega_{22}}{\partial \nu_h} - 2\, x_{12}\, x_{11} \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial \nu_h}$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \nu_h} = -\,(x_{12h}\, x_{22} + x_{12}\, x_{22h})\, \Omega_{11} - (x_{11h}\, x_{21} + x_{11}\, x_{21h})\, \Omega_{22} + \\ + (x_{21h}\, x_{12} + x_{21}\, x_{12h} + x_{11h}\, x_{22} + x_{11}\, x_{22h})\, \Omega_{12} \\ - x_{12}\, x_{22} \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial \nu_h} - x_{11}\, x_{21} \frac{\partial \Omega_{22}}{\partial \nu_h} + (x_{21}\, x_{12} + x_{11}\, x_{22}) \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial \nu_h}$$

ed avendosi per il significato delle Ω a due o tre indici le:

$$\frac{\partial \Omega_{lm}}{\partial \nu_h} = \Omega_{lmh} + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \xi_i}{\partial \nu_h}\, x_{ilm}\,.$$

Possiamo osservare che le σ_{ijl} sono composte di una parte lineare ed omogenea nelle derivate terze (x a 4 indici) e di un'altra omogenea di secondo grado nelle derivate seconde (x a 3 indici) ed i coefficienti sia per l'una che per l'altra sono espressioni colle derivate prime. La stessa cosa sussiste per le S_{pqr}.

Se si considera la σ_{111} la parte colle derivate terze è:

$$-\frac{\partial \xi_1}{\partial x_{31}}\, \xi_3 \left[x_{22}^2\, \Omega_{111} - 2\, x_{21}\, x_{22}\, \Omega_{121} + x_{21}^2\, \Omega_{221}\right] \\ - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{32}}\, \xi_3 \left[x_{22}^2\, \Omega_{112} - 2\, x_{21}\, x_{22}\, \Omega_{122} + x_{21}^2\, \Omega_{222}\right]$$

$$= \xi_3 \left[x_{22}^3\, \Omega_{111} - 3\, x_{21}\, x_{22}^2\, \Omega_{112} + 3\, x_{21}^2\, x_{22}\, \Omega_{122} - x_{21}^3\, \Omega_{222}\right]$$

e, come si vede, è uguale al prodotto di ξ_3 per la parte con le derivate terze in S_{134}.

Nei riguardi poi della parte colle derivate seconde ci conviene dividerla in 6 gruppi, il primo composto dei termini aventi per fattore x_{111}, il secondo dei termini con fattore x_{211}, il terzo x_{112}, il quarto x_{212}, il quinto x_{122}, il sesto x_{222}, potendo tali fattori essere lineari o al quadrato e tenendo presente di non includere mai in un gruppo dei termini già inclusi in un gruppo precedente. La medesima cosa e nello stesso ordine si faccia in S_{134} e si trova che i 6 gruppi ottenuti confrontati rispettivamente con quelli di σ_{111} hanno in più il fattore ξ_3 e poichè dopo tali operazioni tanto in S_{134} come in σ_{111} non restano altri termini [13] risulta:

$$\sigma_{111} = \xi_3 \xi_{134}.$$

Gli stessi procedimenti portano poi alle:

$$\sigma_{222} = - \xi_3 S_{234}$$
$$\sigma_{112} = - \xi_3 S_{124}$$
$$\sigma_{122} = + \xi_3 S_{123}.$$

Pertanto si può scrivere:

$$\Psi\left(x_i,\ \xi_i,\ \sqrt[3]{\sigma_{11}},\ \sqrt[3]{\sigma_{12}},\ \sqrt[3]{\sigma_{22}},\ \sqrt[5]{\sigma_{111}},\ \sqrt[5]{\sigma_{112}},\ \sqrt[5]{\sigma_{122}},\ \sqrt[5]{\sigma_{222}}\right) =$$
$$= \Psi\Bigg(x_i,\ \xi_i,\ \sqrt[3]{S_{13}},\ \sqrt[3]{S_{12}}\ .\ \sqrt[3]{\frac{\xi_1 \sigma_{22}}{2 \xi_2 S_{12}} + \frac{\xi_2 \sigma_{11}}{2 \xi_1 S_{12}} - \frac{\xi_3^2}{2 \xi_1 \xi_2}},$$
$$\sqrt[3]{S_{23}},\ \sqrt[5]{\xi_3 S_{134}},\ \sqrt[5]{-\xi_3 S_{124}},\ \sqrt{\xi_3 S_{123}},\ \sqrt[5]{-\xi_3 S_{234}}\Bigg)$$

e ponendo queste espressioni uguali ad una funzione:

$$\Theta\left(x_i,\ \xi_i,\ \sqrt[3]{S_{12}},\ \sqrt[3]{S_{13}},\ \sqrt[3]{S_{23}},\ \sqrt[4]{S_{134}},\ \sqrt[4]{S_{124}},\ \sqrt[4]{S_{123}},\ \sqrt[4]{S_{234}}\right)$$

risulta facilmente che quest'ultima è omogenea e lineare [14] nelle ξ_i, $\sqrt[3]{S_{ab}}$, $\sqrt[4]{S_{lmn}}$, onde l'accordo coi miei risultati del 1915.

---

(13) Ciò perchè i termini colle x_{3ij} essendo in queste di primo grado hanno l'altro fattore uguale ad uno dei 6 predetti.

(14) La dimostrazione è perfettamente simile a quella che per il caso dell'integrale semplice dà il prof. VIVANTI alla fine della sua Nota: *Sull'indipendenza di un integrale, ecc.* ...

In modo analogo, per quanto con calcoli molto più lunghi, se Φ contiene anche le derivate quarte ([15]) si ha a meno del fattore ξ_3^2 un'uguaglianza tra una σ ed una S a 4 indici essendo queste ultime integrali indipendenti (da scegliersi in modo opportuno) dei sistemi di equazioni corrispondenti al problema e col procedimento di prima si arriva anche qui a stabilire l'accordo.

6. È interessante per ultimo trarre dai risultati generali esposti nei nn. 2 e 3 quelli relativi ad un integrale semplice con le derivate di qualunque ordine. Avendosi $n = 1$ le x_i sono due x_1 e x_2 funzioni di un solo parametro e le ξ calcolate come caso particolare dei determinanti funzionali ben noti si riducono alle:

$$\xi_1 = (-1)^{1+1-1} \frac{d x_2}{d \nu_1} = - x_{21} \qquad \xi_2 = (-1)^{1+1-2} \frac{d x_1}{d \nu_1} = x_{11}$$

ma per uniformarci alle notazioni VIVANTI ([16]) chiamiamo le x_i con $x(t)$ e $y(t)$ e per le derivate prime poniamo:

$$x_{11} = x' \qquad x_{21} = y'$$

sicchè:

$$\xi_1 = - y' \qquad \xi_2 = x'.$$

Per quanto poi si è detto alla fine del n. 3 avremo una sola $\sigma_{\alpha\beta}$, una sola $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ ed in generale un'unica σ ad r indici (tutti unitari) e precisamente:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial \xi_1}{\partial y'} \left(\xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \right) = - (- x' y'' + y' x'') = x' y'' - x'' y'.$$

Scriveremo:

$$\sigma_{11} = \psi_2(t)$$

$$\sigma_{111} = \frac{\partial \xi_1}{\partial y'} \left(3 \sigma_{11} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - \xi_2 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} \right) = - \left[3 \psi_2(t) x'' - x' \psi'_2(t) \right]$$

([15]) Si veda la mia Nota citata del 1919.

([16]) Anche per queste occorre confrontare la sua recentissima Nota del 1922.

cioè:

$$\sigma_{111} = x' \psi'_2(t) - 3\,x'' \psi_2(t) = \psi_3(t)$$

e così continuando la σ ad r indici sarà uguale all'espressione

$$\psi_r(t) = x' \psi'_{r-1}(t) - (2\,r - 3)\,x'' \psi_{r-1}(t)$$

ed in tal modo si ritrovano le stesse funzioni ψ introdotte dal prof. VIVANTI.

Milano, 26 Settembre 1922.