ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Guido Fubini in Torino | **Salvatore Pincherle** in Bologna
Tullio Levi-Civita in Roma | **Francesco Severi** in Roma

SERIE QUARTA - TOMO XI
(LXVIII DELLA RACCOLTA)

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
MCMXXXIII

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi, 1933-XI

La geometria in Italia, dal Cremona ai giorni nostri.

Prolusione al Corso di geometria superiore
letta dal prof. BENIAMINO SEGRE a Bologna il 13 gennaio 1932.

È per me sommo onore l'esser stato chiamato a far parte di questa gloriosa Università, che vanta origini e tradizioni splendide — studiate con profondità ed acume, per ciò che concerne le matematiche, dal nostro illustre Collega BORTOLOTTI — e che ancor oggi conta fra i suoi membri uomini eminenti, di fama mondiale. Ed è con commozione non scevra da titubanza che salgo su questa cattedra, che vide il sorger radioso di quell'astro che fu LUIGI CREMONA, non a torto detto il Padre della moderna geometria italiana, e sulla quale si son succeduti uomini illustri, quali PIETRO BOSCHI, DOMENICO MONTESANO, FEDERIGO ENRIQUES ed ENRICO BOMPIANI.

Mi sorregge però lo sviscerato amore per la scienza, che han saputo infondermi i venerati maestri CORRADO SEGRE e FRANCESCO SEVERI — ai quali, particolarmente in questo istante, il mio pensiero si volge con riconoscenza — e la ferma volontà di fare quanto è in me per non venir meno al buon nome di Bologna e della scienza italiana.

Non mi nascondo tutta l'entità di questo proposito, per apprezzar giustamente il quale è d'uopo aver presente il prodigioso sviluppo che ha avuto in Italia la matematica, e più specialmente la geometria, da CREMONA ai giorni nostri; ed ora appunto — con rapido schizzo — mi accingo a cogliere i tratti più salienti di questo periodo, che ci ha condotti ad un primato indiscusso, che le altre Nazioni ci invidiano.

Quando nel 1860 il trentenne CREMONA, chiamato dalla fiducia di TERENZIO MAMIANI, saliva sulla cattedra di geometria superiore, allora fondata in Bologna dal dittatore FARINI, le condizioni della geometria in Italia — che pur nei secoli precedenti aveva avuto valenti cultori — erano, fatte poche eccezioni, piuttosto modeste. In Francia ed in Germania, invece, da oltre un cinquantennio, una eletta e numerosa schiera di Geometri andava costruendo quel superbo edificio — degno di reggere il confronto colla immortale costruzione di EUCLIDE — che è la geometria proiettiva.

Le ragioni del nostro assenteismo da questo fervore di ricerche e di studi, son da imputarsi alle disgraziate condizioni politiche di quel periodo della nostra storia, per cui le varie regioni d'Italia erano fra loro divise e rette da governi — in maggior parte stranieri o mancipî dello straniero — che, nell'elevazione scientifica e culturale dei singoli e delle masse, vedevano soltanto un pericolo alla loro stabilità. Sì che, ad esempio, in occasione del VII° Congresso degli Scienziati italiani tenutosi in Napoli nel 1845, ed al quale partecipavano molti di fuori, il re FERDINANDO II° ingiungeva ad un suo ministro di « tenergli d'occhio quei pennaiuoli ».

Per dare un'idea del modo curioso con cui a quei tempi venivano dai governanti considerate le cose universitarie, riferirò col VOLTERRA il seguente aneddoto (1). Essendosi rese vacanti verso il 1835, in un'università toscana, le cattedre di diritto ecclesiastico e di algebra, due cultori di queste materie chiesero ed ottennero di ricoprirle. Però, nell'assegnarle, esse furono per errore scambiate. Le proteste per la rettifica non valsero a nulla e non si vollero cambiare i « mutupropri » granducali di nomina, già firmati: il matematico rinunziò allora ad insegnare il gius canonico, ma il giurista insegnò algebra per tutta la vita.

All'ignavia dei governi occorre poi aggiungere un'altra circostanza, che — pur provando la maturità a cui erano giunti gli Italiani — non poteva certo favorire quella calma che è così necessaria per lo svolgersi proficuo degli studi. Voglio alludere al generoso fermento che accomunava studenti e docenti nelle ideologie di patria e di libertà, e nelle lotte contro lo straniero oppressore. E, fra gli esempi più tipici, ricorderò a questo riguardo che nel 1848 il CREMONA, interrotti gli studi, era accorso volontario in aiuto di Milano insorta, combattendo quindi a Nervesa, alla Piave, a Treviso, e partecipando infine alla difesa di Venezia; e che nello stesso anno il MOSSOTTI, professore di meccanica razionale a Pisa, aveva combattuto a Curtatone e Montanara col battaglione universitario.

In tali condizioni può anzi destar meraviglia che in Italia le tradizioni scientifiche non fosser per anco morte del tutto, e che — non ostante i molti ostacoli — vi fossero uomini aperti alle nuove correnti. « Da molto tempo » dice il CREMONA nella celebre Prolusione da lui tenuta salendo su questa cattedra (2) « nelle università d'Italia non si poterono insegnare fuor che i « primi rudimenti delle scienze esatte; ed i buoni ingegni ne uscivano questo « solo sapendo, esistere vaste e meravigliose dottrine di cui era lor noto ap-

(1) Cfr. « Atti del IV Congresso internazionale dei matematici » (Roma, 1908), t. I, p. 57.
(2) Ved. *Opere matematiche* di L. CREMONA, t. I, p. 238.

« pena l'alfabeto. Se non che ove cessava la scuola, soccorreva talvolta l'opera « generosa d'alcun professore; che con consigli, con libri, con eccitamenti, « indirizzava i giovani a quegli studi che non si eran potuti fare nella pub- « blica scuola ».

Ed ecco infatti a Napoli, ove era vissuto NICOLA FERGOLA (1753–1822), sorgere una numerosa Scuola geometrica che contava fra i migliori VINCENZO FLAUTI (1782–1863), la quale perseguiva con poche varianti i metodi sintetici degli antichi; in contrapposto FORTUNATO PADULA (1816–1881) e NICOLA TRUDI (1811–1884) sostenevano l'opportunità dell'impiego dei metodi analitici, senza giungere però ad una concezione veramente elevata della nuova geometria. Altri distinti cultori della geometria analitica erano gli abati DOMENICO CHELINI (1802–1878) e BARNABA TORTOLINI (1808–1874) a Roma, e GIUSTO BELLAVITIS (1803–1880) — uno dei creatori del moderno calcolo vettoriale — a Padova; infine fra i centri più importanti di studi matematici in Italia vi era allora Pavia, ove insegnavano GASPARE MAINARDI (1800–1879), ANTONIO BORDONI (1788–1860) e FRANCESCO BRIOSCHI (1824–1897), che doveva poi affermarsi come uno dei più grandi algebristi del secolo.

Questi pochi ricercatori avevano fra loro contatti quasi nulli, ed a loro poteva solo giungere affievolita l'eco delle mirabili scoperte che si venivano facendo all'estero, ogni relazione essendo estremamente difficile e — dati i tempi — pericolosa. Una notevole influenza deve, da questo punto di vista, aver avuto il viaggio in Italia compiuto nel 1843–44 da STEINER, JACOBI, DIRICHLET e BORCHARDT, e specialmente la loro permanenza a Roma ed a Napoli. Ad ogni modo le difficoltà che incontravano allora in Italia il progredire ed il diffondersi della scienza, erano gravissime: non ultima quella — a cui già si è accennato — della mancanza di cattedre da dove le nuove verità potessero venir bandite. Dobbiamo quindi esser sommamente grati all'opera di quei solitari, cui non muoveva la speranza di onori o di ricompense, ma solo l'amore disinteressato per la scienza.

Con l'avvento del governo nazionale, venivano nel 1860 create due cattedre di geometria superiore a Bologna ed a Napoli, rispettivamente ricoperte da LUIGI CREMONA e da GIUSEPPE BATTAGLINI; e non tardavano a manifestarsi le benefiche conseguenze di questi provvedimenti, e delle mutate condizioni politiche.

L'opera del CREMONA nella geometria algebrica — per dirla col CASTELNUOVO ([3]) — « chiude un'epoca per aprirne una nuova ». È infatti col CRE-

([3]) Cfr. « Rendiconti R. Acc. Naz. dei Lincei », serie VI, t. 12 (1930), p. 613.

MONA che la geometria proiettiva raggiunge le mete più eccelse, pervenendo alla teoria generale delle curve e delle superficie algebriche; e, d'altro canto, la scoperta fondamentale delle trasformazioni cremoniane crea tutto un nuovo ordine di ricerche importantissime — non per anco esaurite — al quale appartengono i più brillanti risultati della Scuola geometrica italiana nell'ultimo cinquantennio.

La *geometria proiettiva,* sorta quasi miracolosamente dall'antica, principalmente ad opera di DESARGUES e PASCAL, si era sviluppata erigendosi a dottrina solo circa due secoli dopo, con MONGE, CARNOT, LAMÉ, PONCELET, GERGONNE, BOBILLIER, MOEBIUS, STEINER, CHASLES, PLUECKER, mediante l'abile contemporaneo sfruttamento della geometria degli antichi e dello strumento analitico, che era stato forgiato per altri scopi nel secolo XVII° da FERMAT e DESCARTES; finchè nel 1847 VON STAUDT le permette di assurgere a scienza autonoma, creando un'opera di imperitura bellezza e di eleganza inimitabile. È questa la scienza a cui il CREMONA subito si dedica con entusiasmo, prendendola ad argomento del suo Corso di geometria superiore: e si deve in gran parte all'opera scientifica e didattica del CREMONA se essa oggi ci appare assai più elementare, tanto da trovar posto fra i Corsi propedeutici, e se inoltre — grazie alle numerose applicazioni alla geometria descrittiva ed alla statica grafica — essa insegnasi anche agli allievi ingegneri.

I metodi puristi dello STAUDT, se per armonia e rigore posson reggere il paragone con quelli di EUCLIDE, non si prestan che con difficoltà agli sviluppi ulteriori della teoria: ciò intuì il CREMONA, che seppe maestrevolmente unirli ad alcuni principî fondamentali tratti dall'algebra, creando — per così dire — una nuova algebra vivificata da schietto spirito geometrico. Il connubio fra algebra e geometria non era nuovo nella storia [4], ed anzi esisteva assai prima della scoperta della geometria analitica; ma è solo con CREMONA ch'esso assume una forma caratteristica, in cui possono riconoscersi il rigore e la generalità dell'algebra fusi coi preziosi suggerimenti pôrti dall'intuizione geometrica. A questo indirizzo appartengono le ormai classiche ricerche del CREMONA indicate poc'anzi, relative allo studio proiettivo delle *curve* (1862) e delle *superficie algebriche* (1866-67).

Nella geometria proiettiva hanno grande importanza le così dette trasformazioni proiettive: è p. es. proiettiva la corrispondenza che nasce per proiezione fra due piani, e nella quale ovviamente ai punti ed alle rette dell'un piano corrispondono i punti e le rette dell'altro. La nozione di *cor-*

[4] Dell'indirizzo medesimo che il CREMONA seppe magistralmente sfruttare, già si erano avuti saggi pregevoli con PONCELET, CHASLES, MAGNUS.

rispondenza o *trasformazione* è poi stata estesa in vari sensi, e si è dimostrata altrettanto fondamentale per la geometria quanto quella di funzione per l'analisi. Essa può venir sfruttata da due diversi punti di vista. Il primo utilizza la trasformazione di una figura in un'altra mediante una data corrispondenza, per dedurre dalle proprietà note della prima nuove proprietà della seconda. L'altro punto di vista — di gran lunga più elevato, e posto in rilievo da F. KLEIN (1872) — consiste nel caratterizzare ogni ramo di geometria mediante un *gruppo di trasformazioni*: così, ad es., la geometria elementare studia le proprietà delle figure che non si alterano per movimenti; mentre la geometria proiettiva si occupa invece di quelle proprietà che restano inalterate di fronte alle trasformazioni proiettive.

Il CREMONA si propose pel primo la ricerca delle più generali corrispondenze fra due piani o fra due spazi che mutano punti in punti e rette in curve algebriche, pervenendo così a quelle ***trasformazioni birazionali*** che meritamente oggi portano il suo nome. Non già che non si conoscessero prima esempi di tali trasformazioni: ma spetta al CREMONA di aver impostata la questione in tutta la sua generalità, risolvendola brillantemente in un modo che — nel caso del piano — può ritenersi completo. Ben si comprende come, addottando il primo dei due punti di vista di cui dianzi ho fatto cenno, questi risultati si prestassero agevolmente ad una numerosa serie di applicazioni: fra le più memorabili ricorderò lo studio delle superficie algebriche dei primi ordini — e, in particolare, delle cubiche — fatto dallo stesso CREMONA, col quale si ricollegano più o meno intimamente ricerche posteriori di CAPORALI, DE PAOLIS, BERTINI, BERZOLARI, CIANI, ecc. Il secondo punto di vista doveva condurre più tardi — quando, come vedremo, saranno utilizzabili altri strumenti — alla creazione di una *nuova geometria algebrica*: quella che studia le proprietà degli enti algebrici che sono invarianti di fronte alle trasformazioni birazionali; ma ad essa il CREMONA non contribuì in modo diretto.

In pochi anni, mercè l'opera del CREMONA, sorgeva in Italia una fiorente Scuola geometrica, che contava fra i discepoli diretti CAPORALI, DE PAOLIS, VERONESE, BERTINI, GUCCIA e MONTESANO; e vari altri lavoravano con successo nello stesso indirizzo, come p. es. MARTINETTI e DEL RE. Ciò è da ascriversi, oltre alla fecondità e profondità dei metodi e dei risultati del CREMONA, alla rara comunicativa ed alla potenza organizzativa di quel Grande, in cui — come disse M. NOETHER [5] — « i geometri di tutti i paesi, e non « per ultimi i tedeschi, riconoscono uno dei loro geniali Maestri ».

---

[5] « Mathematische Annalen », t. 59 (1904), p

Un' altra Scuola geometrica — notevole pur essa, benchè non altrettanto numerosa ed originale — fu quella che faceva capo al BATTAGLINI, e che, ispirandosi all' opera di CAYLEY, SYLVESTER e GORDAN, si occupava principalmente dello studio geometrico degli *invarianti* e *covarianti* delle forme algebriche; fra i migliori seguaci di questo indirizzo ricordo D' OVIDIO, GERBALDI, e — in epoca più recente — BERZOLARI e PASCAL.

Dovrei infine — per completare il quadro — parlare dell' opera geometrica di BELTRAMI: ma di ciò dirò in seguito, quando tratterò della geometria differenziale.

Ho già accennato che la geometria in Italia nell' ultimo quarto del secolo scorso, superato lo stadio meramente proiettivo — e che, in relazione agli sviluppi ulteriori, può dirsi elementare — si andava gradatamente orientando verso nuove vedute e nuovi problemi, aventi la loro essenza nella considerazione del gruppo delle trasformazioni birazionali. Caratteristico a questo proposito è l' elegante risultato del BERTINI (1877-80), che riduce a 4 soli tipi birazionalmente distinti le *involuzioni piane del secondo ordine*, riguardandosi dunque come identiche due involuzioni piane riducibili l' una all' altra mediante trasformazioni cremoniane.

Il trapasso verso la concezione puramente birazionale dei problemi non poteva tardare; e lo strumento che dapprima meglio doveva prestarsi allo studio di quei problemi, veniva appunto in quell' epoca approntandosi in Italia, collo sviluppo di un altro ramo di geometria, che tosto doveva condurre ad applicazioni notevoli e svariate. Voglio alludere alla ***geometria degli iperspazi*** o ***metageometria,*** che — fondata fin dal 1844 da H. GRASSMANN in ricerche geniali rimaste per lungo tempo ignorate — già aveva avuto in Germania, Francia ed Inghilterra cultori molteplici ([6]).

Non erano però mancati i detrattori che, in base a considerazioni metafisiche che oggi ci appaiono stravaganti, avevano impugnata la legittimità della nozione di spazio ad un numero qualunque di dimensioni; legittimità che oggi è pienamente riconosciuta dal punto di vista matematico non solo, ma anche — attraverso la moderna teoria della relatività — dal punto di vista fisico. Le discussioni sull' argomento servirono almeno a porre in luce che — la geometria non studiando gli oggetti in sè, ma solo le mutue rela-

([6]) Dapprima vari Autori — e particolarmente LAGRANGE, JACOBI, CAYLEY, SYLVESTER, SCHLAEFLI — avevano più o meno timidamente usufruito di considerazioni iperspaziali in ricerche analitiche; poscia via via si giungeva ad una visione sempre più geometrica dei problemi, mercè l' opera di PLUECKER, RIEMANN. CLEBSCH, KLEIN, JORDAN, HALPHEN, SALMON, CLIFFORD, ecc.

zioni fra essi — *è lecito sostituire quegli oggetti con altri, purchè tali relazioni restino inalterate.* Riflessione questa di fondamentale importanza, suggerita specialmente dai lavori del PLUECKER, e che in sostanza già equivale alla concezione di una ***geometria astratta,*** secondo la quale p. es. le coniche di un piano si posson assimilare ai punti di uno spazio a 5 dimensioni.

Queste idee suggestive e feconde, giunsero in Italia ulteriormente elaborate da A. CAYLEY e F. KLEIN, producendovi un largo ed importante movimento di studi e di ricerche. Ed ecco infatti, verso il 1868, il BELTRAMI e, verso il 1877, il D'OVIDIO iniziare nel nostro Paese lo studio degli *spazi ad n dimensioni*, seguiti a breve distanza dal VERONESE, il quale — in una Memoria fondamentale (1881) che segna un momento storico nello sviluppo della geometria italiana — edificò sinteticamente la geometria proiettiva degli iperspazi (di cui esistevano pochi cenni in un lavoro di CAYLEY del 1846), sulla base del *metodo delle proiezioni e sezioni*; il VERONESE, e più tardi altri, fra cui specialmente CORRADO SEGRE, E. BERTINI, G. LORIA e P. DEL PEZZO, fecero altresì varie eleganti applicazioni alla geometria ordinaria, mostrando come certe figure del nostro spazio possano talora venir vantaggiosamente considerate quali proiezioni di figure più semplici degli spazi superiori.

Un assestamento definitivo della geometria proiettiva iperspaziale si ebbe in fine attraverso l'opera multiforme di CORRADO SEGRE, il quale, da un lato — seguendo le orme del CREMONA — seppe opportunamente sfruttare le nozioni ed i risultati che l'algebra deve a KRONECKER, WEIERSTRASS e FROBENIUS, innestandoli nella trattazione geometrica; e dall'altro — mettendo sistematicamente alla prova la concezione astratta della geometria — riuscì a cogliere larga messe di risultati ed a fare dello spazio ad *n* dimensioni l'ambiente naturale in cui si dovevano considerare i fatti geometrici.

Nel suddetto ordine d'idee si inquadra tutta una serie di ricerche di ***geometria numerativa,*** di quel ramo cioè che ha per iscopo di determinare il *numero* delle soluzioni dei problemi che si incontrano nella geometria algebrica, e del quale erano stati fondatori PONCELET, STEINER, CHASLES, JONQUIÈRES, CREMONA, SCHUBERT, ZEUTHEN.

Il SEGRE, pur non contribuendo alla geometria numerativa con notevole copia di risultati personali, fu in essa un Maestro e un incitatore, tanto che quasi tutti i numerosi discepoli diretti o indiretti di lui (CASTELNUOVO, PIERI, FANO, BEPPO LEVI, TANTURRI, SEVERI, GIAMBELLI, TOGLIATTI, ecc.) hanno lavorato in questo campo, nel quale son da segnalarsi come particolarmente importanti i risultati del SEVERI, relativi all'estensione del *metodo funzionale* di CAYLEY, ai *caratteri proiettivi* ed alle *intersezioni delle varietà algebriche superiori,* ed alla validità del *principio della conservazione del numero.*

L'attività di CORRADO SEGRE come Scienziato e come Maestro — secondo avrò occasione di precisare nel seguito — ebbe anche un'influenza decisiva in altri rami della geometria; per ora mi limito a segnalare l'importante ufficio che essa ebbe nell'elaborazione per via iperspaziale — avvenuta verso il 1890 — della nuova ***teoria delle curve algebriche,*** caratterizzata dal gruppo delle trasformazioni birazionali, ed alla quale presero altresì parte attiva il BERTINI ed il CASTELNUOVO. Detta teoria, sorta dalle immortali ricerche di BERNARDO RIEMANN intorno alle funzioni algebriche di una variabile ed ai loro integrali — acutamente sviscerate, da un punto di vista più geometrico, dal CLEBSCH — e dai profondi sviluppi algebrici di BRILL e NOETHER, veniva così completata dalle ricerche suddette, sino a formare un tutto unico — che qui neppur posso adombrare — ove sono elegantemente congiunti i tre suoi aspetti *trascendente, algebrico* e *geometrico*, e nel quale s'inquadrano le classiche ricerche trascendenti di HURWITZ e quelle algebrico-geometriche di SEVERI sulle *corrispondenze.*

Rielaborata così la teoria invariantiva delle curve algebriche in modo che può ritenersi definitivo — e che ha ricevuto assetto in recenti Trattati italiani, da tutti conosciuti — la geometria italiana si volse alla ***teoria invariantiva delle superficie algebriche,*** sempre dal punto di vista delle trasformazioni birazionali. I fondamenti di tale teoria erano stati gittati all'estero, sopratutto attraverso la grande opera di MAX NOETHER. Risultati importanti si possedevano anche in seguito ai lavori di CLEBSCH, CAYLEY, ZEUTHEN, PICARD, per ciò che concerne le superficie qualunque, e degli scolari diretti e indiretti del CREMONA (BERTINI, CAPORALI, DEL PEZZO, GUCCIA, JUNG, MARTINETTI, ecc.), per ciò che concerne le superficie razionali e i sistemi lineari di curve piane, la cui teoria era stata esposta e completata in vari punti essenziali in un bel lavoro del CASTELNUOVO.

Ma tutto questo lasciava presentire le difficoltà gravissime che avrebbe offerto l'inquadramento sistematico dei risultati noti in un'ampia teoria organica, e la risoluzione dei molti problemi elevati e difficili, che occorreva tuttavia di sciogliere.

Quel che in proposito occorreva fu fatto; e fu fatto in Italia in due distinti periodi: il primo dei quali va dal 1893 al 1900 ed è precipuamente dominato dalle idee del CASTELNUOVO e dell'ENRIQUES; il secondo comincia col 1904 ed è nettamente dominato dalle idee del SEVERI. I due quadrienni 1896-1900 e 1904-1908 rappresentano per così dire i momenti eroici della mirabile e grandiosa costruzione.

Nei lavori di CASTELNUOVO ed ENRIQUES giuoca principalmente la considerazione dei *successivi aggiunti* di un dato sistema lineare (considerazione che — in casi particolari — già era stata sfruttata da KANTOR); inoltre

— pur non venendo completamente abbandonate le vedute iperspaziali del SEGRE — in essi diviene più nitida e più largamente operativa la *concezione invariantiva* dei problemi, distinguendosi chiaramente fra invarianza assoluta e relativa, ed andando in fondo nella spinosa questione delle così dette *curve eccezionali,* già considerate nebulosamente dal NOETHER. Al SEVERI debbonsi fra l'altro varie nozioni dimostratesi nella teoria di importanza fondamentale — come quelle di *curva virtuale,* e di *serie caratteristica* d'un sistema continuo di curve su di una superficie algebrica — nonchè la geniale fusione dei metodi algebrico-geometrici coi metodi analitico-trascendenti, che erano stati coltivati in Francia dal POINCARÉ, dal PICARD e dall'HUMBERT; e la *teoria della base* con cui egli crea un'algebra delle curve sopra una superficie algebrica, che ha avuto ripercussioni notevoli anche nello sviluppo della topologia. Al SEVERI si debbon inoltre i fondamenti della ***geometria sulle varietà algebriche a più dimensioni.***

L'edificio grandioso — onore e vanto della scuola geometrica italiana — che in tal guisa si è venuto costruendo, anche per merito di FANO, BERZOLARI, BEPPO LEVI, DE FRANCHIS, BAGNERA. SCORZA, CHISINI e dei discepoli diretti o indiretti del SEVERI — ROSATI, TORELLI, COMESSATTI, ALBANESE e vari altri, fra i quali io stesso — non può venir delineato in pochi tratti; mi limiterò dunque a dire che in esso si fondono armonicamente teorie elevatissime e disparate, con uno stile caratteristico, di classica bellezza, e che la difficile questione della *risoluzione delle singolarità delle superficie* fu sciolta dal nostro illustre Collega BEPPO LEVI (7). Non senza rammarico mi tocca per ultimo osservare che — mentre all'estero vari sono i matematici che attualmente si interessano a questioni che più o meno intimamente si collegano a questa splendida tradizione geometrica (8) — non sono molti fra noi i giovani che la continuano. Che, se è vero che le principali questioni rimaste insolute appaiono assai difficilmente sormontabili, ciò anzi dovrebbe costituire un'ottima ragione per cimentarvisi, in chi — rifuggendo dai facili successi — aspiri veramente a lasciare un'orma personale nella scienza.

Un'altra via maestra, seguendo la quale gli Italiani si son pure brillantemente affermati, è quella della ***geometria differenziale.*** Questa disciplina

(7) Ricorderò ancora i classici risultati di CASTELNUOVO sulla *razionalità delle involuzioni piane* e sulla *caratterizzazione delle superficie razionali;* quelli di ENRIQUES sulle *superficie di genere geometrico nullo,* di ENRIQUES, FANO e SEVERI sulle *superficie con infinite trasformazioni birazionali in sè* e di ENRIQUES e SEVERI sulle *superficie con curva canonica d'ordine zero;* ed infine le fondamentali ricerche di ENRIQUES, SEVERI, BAGNERA e DE FRANCHIS sulle *superficie iperellittiche.*

(8) Basti fare i nomi di LEFSCHETZ, SNYDER, GODEAUX, ROSENBLATT, ZARISKI.

— che occupa per così dire una posizione strategica fra l'analisi e la geometria, e le cui più remote origini si possono far risalire ad ARCHIMEDE — sorge contemporaneamente al calcolo infinitesimale, per tosto elevarsi a scienza in certa guisa autonoma, mercè l'opera di EULER, MONGE, GAUSS e dei loro seguaci, ai quali si debbon lo studio delle prime proprietà relative alla curvatura di curve e superficie, e delle questioni concernenti le congruenze di raggi, le coordinate curvilinee, la costruzione delle carte geografiche e l'applicabilità fra superficie flessibili ed inestendibili.

Non v'era fra noi, prima della proclamazione del Regno d'Italia, alcuna cattedra da cui quella disciplina potesse esser divulgata; tuttavia i rudimenti venivano allora generalmente insegnati nei Corsi di calcolo (gratificati in quei tempi dall'aggettivo di sublime), e non mancavano cultori appassionati, come i già menzionati MAINARDI e BORDONI, ai quali occorre aggiungere DELFINO CODAZZI, più tardi egli pure professore a Pavia, che — in una Memoria presentata nel 1859 all'Accademia di Francia — diede le celebri formule che ora portano il suo nome unitamente a quello del MAINARDI, che le aveva ottenute prima. Dopo il '60, dette teorie trovarono il posto che loro spettava nei Corsi di geodesia, e ricevettero contributi essenziali da parte di Scienziati italiani.

Chi principalmente afferrò l'importanza e la fecondità delle idee di GAUSS, riuscendo in breve a diffonderle fra noi, fu FRANCESCO BRIOSCHI; e dalla sua Scuola uscì EUGENIO BELTRAMI, che — dopo aver insegnato durante l'anno scolastico 1862-63 algebra e geometria analitica qui in Bologna — salì alla cattedra di geodesia dell'università di Pisa, chiamatovi dal BETTI. Durante il triennio trascorso a Pisa, l'attività del BELTRAMI si volse con pieno successo alla geometria differenziale, ispirandosi specialmente alle vedute di BERNARDO RIEMANN, il quale, per motivi di salute, aveva fissato la sua dimora in quella città. E, in breve volger di tempo, divennero classici i risultati del BELTRAMI relativi alla *rappresentazione geodetica* delle superficie, ai *parametri differenziali*, alle *variabili complesse*, alle *superficie di area minima*, agli *spazi di curvatura costante*, ed a quella luminosa *interpretazione della geometria non euclidea*, che venne inaspettatamente a chiarire una controversia allora agitata intorno ai principî della geometria.

Ha così origine tutta una serie di ricerche, che comprende la prima attività del DINI, al cui nome restò legata una particolare *superficie a curvatura costante negativa*; quella del CESARO — relativa alla *geometria intrinseca* — improntata a rara eleganza e densa di contenuto geometrico; quella del RICCI, che — col ***calcolo assoluto***, al quale pure contribuì poderosamente il LEVI-CIVITA — creò uno degli strumenti essenziali di cui si è poi valso EINSTEIN nella sua teoria della relatività; per culminare infine con l'opera grandiosa di LUIGI BIANCHI e della sua Scuola, che valse a far progredire notevolmente quasi tutti i capitoli della geometria differenziale.

Una delle idee più feconde che debbonsi al BIANCHI è quella dell'impiego di opportune trasformazioni, quale ad esempio quella che fa passare dall'una all'altra delle due falde focali di una conveniente congruenza di raggi o di sfere. Di tale tipo è la celebre *trasformazione complementare*, che permette — nota che sia una superficie pseudosferica — di dedurne infinite altre. La reiterata applicazione di questa trasformazione, conduce così a sistemi di superficie pseudosferiche dipendenti da un numero grande a piacere di parametri; e, dal punto di vista analitico, porge un nuovo strumento per lo studio di determinate equazioni a derivate parziali, reso più potente da elegantissimi *teoremi di permutabilità*. L'indirizzo di ricerche in tal guisa inaugurato, ed al quale tosto si associarono attivamente matematici stranieri eminenti quali il LIE, il BAECKLUND ed il DARBOUX, condusse il BIANCHI ad edificare le teorie ormai classiche relative alle *superficie a curvatura costante*, alle *deformate per applicabilità delle quadriche* ed a taluni *sistemi tripli ortogonali* e *tripli coniugati* di superficie. Notevoli anche furono gli apporti del BIANCHI alla *geometria differenziale non euclidea*, e l'abilità con cui egli seppe dedurne proprietà di geometria euclidea. Numerosissimi i suoi scolari diretti ed indiretti, fra cui FUBINI, E. E. LEVI, CALAPSO, TORTORICI, TONOLO e SBRANA.

Un ulteriore importantissimo ramo di geometria differenziale, è quello che — fondandosi sulle profonde concezioni e sui risultati del RIEMANN relativi agli spazi curvi — si è venuto rapidamente sviluppando in questi ultimi anni, in vista specialmente delle applicazioni alla teoria della relatività.

Il germe del nuovo larghissimo movimento d'idee risiede nella geniale nozione di *parallelismo*, introdotta dal LEVI-CIVITA nel 1917, mercè la quale si effettua il trasporto di una direzione spiccata da un punto di uno spazio di RIEMANN, quando il punto si muova in esso arbitrariamente. Da qui ebbero subito origine numerosissime ricerche, quali quelle di SEVERI, BOMPIANI in Italia, e quelle di WEYL, CARTAN, SCHOUTEN all'estero, che portarono alla bella ***teoria delle connessioni,*** relativa allo spazio concepito nel modo più generale come una riunione di celle infinitesime — fra loro opportunamente connesse — in ciascuna delle quali sussiste una data geometria (metrica, affine o proiettiva).

A tale teoria — che alla sua volta intimamente si ricollega alla *geometria proiettiva dei cammini* di VEBLEN, THOMAS ed EISENHART — ha pure contribuito ENEA BORTOLOTTI, il quale fra l'altro ha rilevato una notevole relazione fra essa e l'ordinaria geometria delle varietà immerse in ambiente proiettivo.

Quest'ultima geometria, ossia lo studio delle proprietà infinitesimali delle figure che sono invarianti di fronte alle trasformazioni proiettive, costituisce oggidì un corpo estesissimo di dottrine — più noto col nome di ***geometria proiettivo-differenziale*** — sviluppatosi in gran parte per merito di Geometri italiani.

Principalmente due sono gli indirizzi che qui si riscontrano. Il primo, originato dalle ricerche di HALPHEN, WILCZYNSKI, SANNIA e BERZOLARI, riconduce sostanzialmente lo studio alla determinazione di certi *invarianti* e *covarianti* di determinate equazioni alle derivate ordinarie, o di sistemi d'equazioni alle derivate parziali del 2° ordine. Esso ha recentemente ricevuto una sistemazione definitiva colle fondamentali ricerche del FUBINI, il quale — mediante la sagace introduzione di opportune *forme differenziali*, e l'importante nozione di *deformazione proiettiva* — ha potuto ottenere luminosi raffronti coll'ordinaria geometria differenziale metrica, e completare la teoria in vari punti essenziali.

Il secondo indirizzo ha ricevuto la sua caratteristica impronta, prevalentemente sintetica, dalle ricerche di CORRADO SEGRE relative a questo argomento — precedute da qualche saggio di DEL PEZZO — e conta fra i suoi migliori cultori il TERRACINI ed il BOMPIANI. Per quanto in certe questioni i metodi impiegati da questi Autori non possano penetrare così addentro come i precedenti, pure essi hanno un valore altamente suggestivo, poichè si fondano su d'uno studio diretto degli enti geometrici — quasi sempre considerati negli iperspazi — evitando i lunghi calcoli collo sfruttare in sommo grado l'intuizione geometrica. Vari dei risultati conseguiti in quest'ordine d'idee hanno anche importanza per l'analisi, come ad es. quelli sulle così dette *reti*, che ricevono un'immediata interpretazione nella teoria delle equazioni di LAPLACE. Occorre inoltre, per poter valutare appieno la portata di quelle ricerche, rilevare che molte di esse costituiscono un importante anello di congiunzione fra la geometria differenziale e la geometria algebrica ([9]).

([9]) Numerosissimi sono coloro che all'estero si sono occupati dei diversi rami di geometria differenziale. Oltre a quelli già ricordati nel testo, vanno particolarmente menzionati DUPIN, BINET, LAMÉ, MOUTARD, JACOBI, MINDING, BONNET, SERRET, LIOUVILLE, BERTRAND, M. LÉWY, LAGUERRE, KOENIGS, RIBAUCOUR, ENNEPER, PETERSON, VOSS, SCHUR, KILLING, SCHWARZ, KNOBLAUCH, WEINGARTEN, LIPSCHITZ, CHRISTOFFEL, SCHEFFERS, LILIENTHAL, GUICHARD; e, in epoca più recente, GAMBIER, STRUIK, TZITZÉICA, ČECH e BLASCHKE, quest'ultimo capo di una fiorente Scuola geometrica tedesca.

Dirò infine brevemente di quel potente mezzo di sintesi geometrica che è il moderno ***calcolo vettoriale.*** Sorto dalle ricerche di BELLAVITIS, GRASSMANN, HAMILTON, HEAVISIDE, ecc., esso vanta fra noi numerosi cultori, quali PEANO, BURALI-FORTI, BOGGIO, MARCOLONGO ed il nostro illustre Collega BURGATTI, ai quali deve contributi notevoli — come ad es. lo studio approfondito delle *omografie* ed *iperomografie vettoriali* — ed applicazioni pregevolissime alla geometria differenziale ed a vari altri rami delle matematiche.

Qui arresto la rapida esposizione, di cui non mi nascondo le deficienze e le lacune, in parte dovute alla ristrettezza del tempo. Non ho, ad esempio, potuto parlare delle ricerche sui ***fondamenti della geometria*** di VERONESE. PEANO, PIERI, ENRIQUES, FANO, BEPPO LEVI ([10]), e del grandioso movimento filosofico che — ricollegandosi ad esse — ha portato alle più importanti concezioni della relatività; neppure ho detto della ***topologia*** o ***analysis situs,*** benchè, per dirla col SEVERI ([11]) — alla cui efficace attività si deve la diffusione fra noi dei risultati conseguiti negli ultimi anni all'estero in questo campo — l'Italia abbia avuto nel BETTI ed in vari cultori di geometria algebrica, rispettivamente l'antesignano e gli apostoli dell'importanza di tali studi; ed anche ho taciuto di quella ***geometria ipercomplessa*** che — originata da ricerche di CORRADO SEGRE rimaste in ombra per lungo tempo — ha recentemente trovato applicazioni notevoli e svariate ([12]).

Per dare un'idea completa del periodo storico che ho voluto tratteggiare, avrei poi dovuto porre meglio in luce i legami col movimento scientifico delle altre Nazioni, e cogli altri rami della scienza. A questo proposito mi limito a constatare che l'antagonismo che ancor non molti anni fa sussisteva fra Analisti e Geometri, è oggi completamente superato. « Analisi e geometria » osserva il VOLTERRA ([13]) « che furon ritenuti ed impiegati come due termini « opposti, non possono, nè per la loro origine, nè per la loro storia, nè per « la natura loro, farsi corrispondere a concetti che si eliminino e si esclu« dano a vicenda; dirò anzi che non possono porsi a confronto, come non « può stabilirsi un rapporto fra il colore ed il volume, fra il peso e la forma « dei corpi ».

([10]) A cui occorre aggiungere fra gli stranieri KLEIN, HILBERT, PASCH, SCHUR, POINCARÉ, SCHOENFLIES.

([11]) F. SEVERI, *Moderni indirizzi nelle matematiche.* « Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze » (XVII Riunione, Settembre 1928).

([12]) Specialmente per merito di SEVERI e CARTAN.

([13]) Loc. cit. in ([1]), p. 62.

La distinzione fra analisi e geometria è, secondo me, analoga a quella che intercede fra un' opera di musica ed una di scultura; ambedue agiscono sul nostro intelletto soddisfacendo a quel sentimento estetico — insito in noi — che ricerca nelle cose l' armonia e la proporzione, l' ordine e la misura: l' una trae la sua essenza dal concetto di *numero* il quale — secondo PLATONE — *governa il mondo*, e l' altra da quel *senso plastico* così vivo nell' uomo da far dire allo stesso PLATONE che *Dio eternamente geometrizza*. Ma, come gli antichi vedevano la suprema bellezza del creato nell' *armonia delle sfere*, così non si può penetrare lo spirito di ciò che è oggi la matematica, senza una visione d' assieme che permetta di apprezzare l' unità monolitica del maestoso edificio. Tanto più che i ravvicinamenti sono essenziali al progresso della scienza; e varie delle più recenti teorie non si posson neppure nettamente assegnare all' analisi piuttosto che alla geometria o viceversa. Valga come esempio la perspicua ***geometria dello spazio hilbertiano,*** colla quale l' illustre Collega VITALI ha potuto assoggettare all' intuizione geometrica uno dei più elevati capitoli di analisi — il calcolo funzionale — originato dai magistrali lavori del PINCHERLE e del VOLTERRA.

Il quadro da me delineato — ancorchè imperfetto — non può non colpire per la multiforme ricchezza e la vastità degli argomenti. Dei numerosi rami che si dipartono dal rigoglioso tronco della geometria, formerò oggetto di successivi Corsi di geometria superiore. Principierò intanto colla ***geometria algebrica,*** che più profondamente porta impressa l' orma del genio italiano, riattaccandomi intimamente alla tradizione del CREMONA, la quale non può nè deve morire. Udite le parole di entusiasmo e di fede, pronunciate dallo stesso CREMONA nella chiusa smagliante della sua citata Prolusione ([14]).

« Respingete da voi, o giovani, le malevole parole di coloro che a con-
« forto della propria ignoranza o a sfogo d' irosi pregiudizi vi chiederanno
« con ironico sorriso a che giovino questi ed altri studi, e vi parleranno del-
« l' impotenza pratica di quegli uomini che si consacrano esclusivamente al
« progresso di una scienza prediletta. Quand' anche la geometria non rendesse,
« come rende, immediati servigi alle arti belle, all' industria, alla meccanica,
« all' astronomia, alla fisica; quand' anche un' esperienza secolare non ci am-
« monisse che le più astratte teorie *matematiche* sortono in un tempo più o
« meno vicino applicazioni prima neppur sospettate; quand' anche non ci
« stesse innanzi al pensiero la storia di tanti illustri che senza mai desistere
« dal coltivare la scienza *pura*, furono i più efficaci promotori della presente

([14]) Op. cit. in ([2]), p. 253.

« civiltà — ancora io vi direi: questa scienza è degna che voi l'amiate; « tante sono e così sublimi le sue bellezze ch'essa non può non esercitare « sulle generose e intatte anime dei giovani un'alta influenza educativa, « elevandole alla serena e inimitabile poesia della verità! I sapientissimi « antichi non vollero mai scompagnata la filosofia, che allora era la scienza « della vita, dallo studio della geometria, e PLATONE scriveva sul portico « della sua accademia: *Nessuno entri qui se non è geometra.* Lungi dunque « da voi questi apostoli delle tenebre; amate la verità e la luce, abbiate fede « nei servigi che la scienza rende presto o tardi alla causa della civiltà e « della libertà. Credete nell'avvenire! questa è la religione del nostro secolo ».

La passione travolgente che animava il CREMONA, e ch'egli seppe in modo così efficace trasfondere nei suoi discepoli, pare — s'io non m'inganno — oggi vada leggermente smorzandosi. Diminuito è fra noi il numero dei giovani che si dedicano alla scienza pura, e molti di questi si volgono di preferenza verso le scienze fisiche, attratti forse da ricerche che sembrano avere un maggior interesse pratico, e da quelle recenti vedute che son venute a sconvolgere molte delle nozioni che per l'addietro si ritenevano stabilmente acquisite.

Si rammenti però — col JACOBI ([15]) — che l'unico scopo della scienza è l'onore dello spirito umano; e, da questo punto di vista, una questione sui numeri equivale ad una questione sul sistema del mondo. Aggiungasi — ammonisce il SEVERI ([16]) — che « il giorno che decadesse il livello dei « nostri studi matematici sarebbe un bruttissimo giorno per la Nazione, in « quanto, a scadenza più o meno lunga, ne deriverebbe un decadimento del « livello scientifico generale ed in modo particolare quello delle scienze fi« siche. Ricordiamoci che Napoleone considerava l'alto sviluppo degli studi « matematici legato alla grandezza e alla prosperità della Nazione; e che lo « stesso concetto napoleonico ha ispirato la Germania nel periodo più bril« lante della sua ascensione ».

Possa, o giovani, il mio insegnamento contribuire a dischiudervi le arcane bellezze delle matematiche discipline, e ad iniziare qualcuno di voi alle dolcezze sublimi della ricerca scientifica, paragonate dal JACOBI ([17]) al magico

([15]) Lettera a LEGENDRE (2 luglio 1830); cfr. C. G. J. JACOBI, *Gesammelte Werke,* t. I (Berlin, 1881), p. 453.

([16]) Nel *Rapporto* tenuto alla XIX riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze (Settembre, 1930).

([17]) Cfr. KRONECKER, *Ueber den Zahlbegriff,* « Journal für Math. », t. 101 (1887), p. 337.

effetto che — secondo la narrazione di OMERO — producevan sui messi di Ulisse i fiori del loto:

« Chiunque l'esca dilettosa e nuova
« Gustato avea, con le novelle indietro
« Non bramava tornar: colà bramava
« Starsi e, mangiando del soave loto,
« La contrada natìa sbandir dal petto » [18].

Non già però — come così verrebbe a significare l'ultimo verso preso alla lettera, e come alle volte erroneamente si opina — che lo Scienziato sia quasi estraneo alle contingenze materiali della vita: poichè anzi — attesta la storia — l'amor di patria è sempre stato una delle caratteristiche sue più spiccate; e dai suoi studi astratti egli ha saputo trarre sovente una comprensione della vita più suggestiva e profonda.

E non crediate neppure che il possesso della scienza sia agevole quanto quello dei frutti del loto! Esso esige per contro costanza e abnegazione e spirito di sacrificio grandi, quali solo posson esser dettati ad una mente eletta, dall'amore per la scienza e dalla fede incrollabile nella continua elevazione dello spirito verso uno stato di perfezione sublime, che — per quanto forse irraggiungibile — costituisce la meta ideale in cui armoniosamente si fondono il Buono ed il Bello. Ed è appunto il faticoso sforzo che compie per procedere su questa via — unito all'appagamento del più raffinato senso estetico — che procura allo studioso soddisfazioni purissime, analoghe al senso di gioia che anima l'alpinista nella conquista della vetta.

(18) *Iliade*, canto IX.

Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes

par ELIE CARTAN (à Paris).

L'objet du présent Mémoire est l'étude des propriétés géométriques pseudo-conformes des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes x, y: ce sont les propriétés invariantes par le groupe infini des transformations analytiques des deux variables x, y, transformations qu'avec F. SEVERI, nous appellerons *pseudo-conformes,* pour éviter toute ambiguïté sur le sens du mot *analytique.* Alors que, par une transformation pseudo-conforme, toute surface est réductible soit à la surface caractéristique $y=0$, soit à la surface lieu des points réels de l'espace. les hypersurfaces admettent, comme l'a montré H. POINCARÉ (1), une infinité d'invariants différentiels pseudo-conformes. Font exception les hypersurfaces qu'on appelle maintenant *hyperplanoïdes* (2) et qu'on peut définir comme des lieux à un paramètre de surfaces caractéristiques. Tout récemment, B. SEGRE (3) a montré qu'à toute hypersurface qui n'est pas hyperplanoïde on peut associer une congruence. ou famille à deux paramètres complexes, de surfaces caractéristiques, ou, ce qui revient au même, une équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$: pour que deux hypersurfaces soient équivalentes au point de vue pseudo-conforme, il est nécessaire que leurs équations différentielles associées soient réductibles l'une à l'autre par une transformation analytique ponctuelle: on sait, d'après A. TRESSE (4). raconnaître s'il en est ainsi. Ce

(1) H. POINCARÉ, *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme* (« Rend. Circ. Mat. Palermo », 23, 1907, pp. 185-220).

(2) Cette dénomination est due à ALMER, *Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes* (« Arkiv. för Math Astr., och Fys. », 17, 1922, n. 7, 70 pages).

(3) B. SEGRE, *Intorno al problema di Poincaré della rappresentazione pseudo-conforme* (« Rend. Acc. Lincei », 13, 1931, I, pp. 676-683); *Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse* (« Rend. Semin. Mat. Roma », 7, 1931, parte II).

(4) A. TRESSE, *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre* $y'' = \omega(x, y, y')$ (« Preisschr. Fürstlich Jablon. Ges. », Leipzig, Hirzel, 1896).

résultat, pour important qu'il soit, n'épuise pas la question, car deux hypersurfaces peuvent être associées à deux équations différentielles équivalentes sans être elles-mêmes équivalentes; d'autre part, même si elles le sont, les transformations pseudo-conformes qui font passer de la première équation différentielle à la seconde ne font pas toutes passer de la première hypersurface à la seconde.

Je reprends la question directement comme application de ma méthode générale d'équivalence [5]. La résolution complète du problème de POINCARÉ me conduit à des notions géométriques nouvelles, au moins dans le cas où l'hypersurface n'est pas localement équivalente à l'hypersphère $x\bar{x}+y\bar{y}-1=0$; on peut en particulier définir sur une telle hypersurface trois familles remarquables de courbes *(lignes principales et lignes de courbure)*.

Le Mémoire comprend cinq Chapitres dont les deux derniers paraîtront dans un autre Recueil. Le Chapitre I expose rapidement les résultats classiques relatifs à la classification des surfaces et les propriétés fondamentales des hyperplanoïdes; il introduit d'une manière intrinsèque et plus simple, me semble-t-il, que ne le fait B. SEGRE, la congruence de surfaces caractéristiques associée à une hypersurface qui n'est pas un hyperplanoïde. J'y démontre enfin que si cette congruence admet un groupe G de transformations pseudo-conformes à r paramètres *complexes*, l'hypersurface admet exactement un sous-groupe à r paramètres *réels* de G. J'ajoute que la rédaction de ce Chapitre a été beaucoup influencée par des conversations que j'ai eues avec HENRI CARTAN.

Le Chapitre II a pour but de déterminer, par une méthode directe, toutes les hypersurfaces admettant un groupe pseudo-conforme G à trois paramètres réels. Cette méthode repose sur la considération de la transformation infinitésimale imaginaire de G qui laisse fixe un point de l'hypersurface. Le problème peut du reste être posé soit *localement*, soit *globalement*. Deux hypersurfaces peuvent admettre *globalement* deux groupes *localement semblables* sans être *globalement équivalentes*. Si l'une d'elle est simplement connexe, la recherche de toutes celles qui lui sont localement, mais non globalement, équivalentes est ramenée à un problème facile. Les hypersurfaces sont classées d'après la structure de leurs groupes. Si une hypersurface admet *localement* un groupe à plus de trois paramètres, elle admet *localement* un groupe à 8 paramètres, *mais au point de vue global, il n'en est plus de*

[5] E. CARTAN, *Les sous-groupes des groupes continus de transformations* (« Ann. Éc. Normale », 25, 1908, pp. 57-194; Chap. I).

même. Je détermine toutes les hypersurfaces qui admettent globalement un groupe à plus de 3 paramètres: il est alors à 4, 5 ou 8 paramètres. J'ajoute que certaines des hypersurfaces déterminées dans ce Chapitre ont été rencontrées déjà dans les travaux récents sur les fonctions analytiques de deux variables complexes.

Le Chapitre III est consacré au problème général de l'équivalence *locale* de deux hypersurfaces autres que des hyperplanoïdes. Je signalerai en particulier le résultat suivant: si deux hypersurfaces non localement équivalentes à l'hypersphère sont localement équivalentes entre elles, il existe au plus deux transformations pseudo-conformes faisant passer de l'une à l'autre et transformant un point donné de la première dans le point correspondant de la seconde. Dans le cas où l'hypersurface n'est pas équivalente à l'hypersphère, j'indique la formation (théorique) des invariants fondamentaux et des invariants dérivés, ainsi que la manière de reconnaître l'équivalence de deux hypersurfaces, au moins dans le cas général.

Les deux derniers Chapitres seront consacrés à l'étude proprement géométrique des hypersurfaces (lignes principales, lignes de courbure, etc.) et à leur conception comme *espaces à connexion hypersphérique.*

CHAPITRE I.

Généralités sur les surfaces et les hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes.

1. Les résultats que nous allons rappeler sont pour la plupart classiques [6]; ils se rapportent exclusivement aux variétés *analytiques* de l'espace de deux variables complexes x, y, c'est-à-dire aux variétés susceptibles d'être définies en se donnant une ou plusieurs relations analytiques entre x, y et leurs conjuguées $\bar{x}$, $\bar{y}$, ou encore en se donnant x et y comme fonctions analytiques de paramètres arbitraires réels.

I. Classification des surfaces.

2. Les surfaces analytiques définies paramétriquement par des formules

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \tag{1}$$

f et g étant des fonctions analytiques de deux paramètres réels u et v, se

[6] Cf. le second mémoire cité [3] de B. SEGRE.

partagent en deux classes distinctes suivant que le déterminant fonctionnel $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ est nul ou non pour toutes les valeurs réelles de u et de v.

Dans le premier cas, ce déterminant fonctionnel étant une fonction analytique de u, v nulle pour toutes les valeurs réelles de ses arguments, est nul aussi pour les valeurs complexes; il existe par suite une relation analytique

$$R(x, y) = 0; \tag{2}$$

on a ce qu'on appelle, avec T. LEVI-CIVITA, une *surface caractéristique* (7). Toutes les surfaces caractéristiques sont équivalentes par rapport au groupe infini des transformations pseudo-conformes

$$x' = F(x, y), \quad y' = G(x, y):$$

la transformation $x' = x$, $y' = R(x, y)$ transforme en effet la surface caractéristique (2) dans $y' = 0$.

Le groupe pseudo-conforme devient, sur la surface caractéristique $y = 0$, le groupe conforme du plan de la variable complexe x.

Toute surface caractéristique admet une *orientation naturelle*. Si on considère en un point le vecteur infiniment petit (dx, dy) tangent à cette surface, le vecteur (idx, idy) lui est également tangent et fait un angle droit avec le premier. Le sens de rotation qui amène le premier vecteur en coïncidence avec le second ne dépend pas du choix des variables, c'est le *sens direct* de rotation sur la surface, qui est ainsi orientée naturellement.

3. Si le déterminant fonctionnel $\frac{D(f, g)}{D(u, v)}$ n'est pas nul, la transformation pseudo-conforme

$$x = f(x', y'), \quad y = g(x', y')$$

transforme la surface (1) dans le lieu des points (x', y') à coordonnées réelles. Toutes les surfaces qui ne sont pas caractéristiques sont donc équivalentes entre elles. Elles le sont d'une infinité de manières, et on peut se donner arbitrairement entre deux de ces surfaces une correspondance ponctuelle analytique, qui détermine uniquement la transformation pseudo-conforme faisant passer de la première à la seconde. En effet, les paramètres u et v de la première surface étant choisis, exprimons les coordonnées x', y' d'un point de la seconde en fonctions analytiques des paramètres u, v du point

(7) Surface *génératrice*, d'après ALMER (loc. cit. (2)).

correspondant de la première; soient alors

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v);$$
$$x' = F(u, v), \quad y' = G(u, v)$$

les équations paramétriques respectives des deux surfaces. Pour que

$$x' = R(x, y), \quad y' = S(x, y)$$

soit une transformation pseudo-conforme faisant passer de la première surface à la seconde et respectant la correspondance ponctuelle donnée, il faut et il suffit que les deux fonctions analytiques de u, v

$$F(u, v) - R(f, g), \quad G(u, v) - S(f, g)$$

soient nulles pour toutes les valeurs réelles de leurs arguments: il faut et il suffit pour cela qu'elles soient identiquement nulles; par suite on ne peut avoir la transformation cherchée qu'en tirant u et v en fonctions de x, y, et en portant dans les expressions de x', y'.

Sur une surface qui n'est pas caractéristique, le groupe infini des transformations pseudo-conformes de l'espace ambiant *induit* le groupe infini des transformations analytiques réelles sur les deux variables u, v.

4. Rappelons enfin que par une ligne analytique

(3) $$x = f(t), \quad y = g(t),$$

t étant un paramètre réel, il passe une surface analytique et une seule, à savoir celle qui est définie par les équations (3), où t est regardé comme paramètre complexe.

II. Les hyperplanoïdes.

5. On appelle, d'après Almer [8], *hyperplanoïde* un lieu à un paramètre de surfaces caractéristiques.

Considérons un hyperplanoïde *analytique*, que nous pouvons supposer défini par une relation analytique

(4) $$F(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

dont le premier membre est une fonction analytique réelle des parties réelles et imaginaires des variables complexes

$$x = x_1 + ix_2, \quad y = y_1 + iy_2.$$

Soit (x_0, y_0) un point de l'hyperplanoïde, et soit $y = \varphi(x)$ l'équation de

[8] Loc. cit. [2], p. 6.

la surface caractéristique génératrice qui passe par ce point. On a identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs réelles données à x_1 et x_2,

$$F(x,\ \varphi(x);\ \bar{x},\ \bar{\varphi}(\bar{x})) = 0, \tag{5}$$

où l'on à désigné par $\bar{\varphi}(x)$ la fonction analytique imaginaire conjuguée de $\varphi(x)$. Le premier membre de (5) est une fonction analytique de x_1, x_2 nulle pour toutes les valeurs réelles de ces deux arguments: elle est donc nulle aussi pour les valeurs complexes; autrement dit, la relation (5) a lieu quelles que soient les valeurs complexes données aux deux variables *indépendan'es* x et $\bar{x}$. En particulier, si on donne à $\bar{x}$ la valeur $\bar{x}_0$, on aura l'identité

$$F(x,\ \varphi(x);\ \bar{x}_0,\ \bar{y}_0) = 0.$$

On a donc le théorème suivant:

THÉORÈME I. — *Si un hyperplanoïde est défini par l'équation* (4), *la surface caractéristique génératrice qui passe per le point* $(x_0,\ y_0)$ *de l'hyperplanoïde est définie par l'équation*

$$F(x,\ y;\ \bar{x}_0,\ \bar{y}_0) = 0. \tag{6}$$

6. Parmi tous les points d'une des surfaces caractéristiques génératrices, un et un seul a une abscisse x nulle (si, ce que nous pouvons supposer, la surface n'est pas de la forme $x = c^{te}$). Il résulte de cette remarque le théorème suivant:

THÉORÈME II. — *Tout hyperplanoïde analytique est le lieu des surfaces caractéristiques*

$$F(x,\ y;\ 0,\ t) = 0, \tag{7}$$

où le paramètre complexe t *est assujetti à la relation*

$$F(0,\ \bar{t};\ 0,\ t) = 0. \tag{8}$$

Tirons de l'équation (7), t en fonction (analytique) de x, y:

$$t = \varphi(x,\ y);$$

la relation (8) nous conduit alors au

THÉORÈME III. — *Tout hyperplanoïde analytique peut être obtenu en établissant une relation analytique entre les parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique* $\varphi(x,\ y)$.

Ce théorème à son tour montre que l'hyperplanoïde est le lieu des surfaces caractéristiques

$$\varphi(x,\ y) = u + i\psi(u), \tag{9}$$

u étant un paramètre réel, $\psi(u)$ une fonction analytique réelle de u. L'équation (9), résolue par rapport à u, donne pour u une fonction analytique $\chi(x, y)$, d'où le

THÉORÈME IV. — *Tout hyperplanoïde analytique peut être obtenu en égalant à zéro la partie imaginaire d'une fonction analytique de* x, y [9].

Il résulte de ce dernier théorème que tous les hyperplanoïdes sont équivalents entre eux et équivalents à l'hyperplan

$$y_2 = 0.$$

7. Sur l'hyperplanoïde $y_2 = 0$, le groupe des transformations pseudo-conformes de l'espace ambiant *induit* le groupe infini

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(y),$$

f étant une fonction analytique arbitraire de x, y, et φ étant une fonction analytique *réelle* de y.

Signalons le théorème d'après lequel toute surface caractéristique tangente à un hyperplanoïde est coupée suivant une ligne présentant au point de contact un point double à tangentes rectangulaires. Cela est évident si l'on part de l'hyperplanoïde $y_2 = 0$: toute surface caractéristique tangente à cet hyperplanoïde au point $(x = 0, y = 0)$ a son équation de la forme

$$y = ax^2 + bx^3 + \dots;$$

elle est coupée par l'hyperplanoïde suivant la ligne

$$0 = 2a_1 x_1 x_2 + a_2(x_1^2 - x_2^2) + \dots,$$

en posant $a = a_1 + ia_2$. Il y a exception si $a = 0$.

III. Les surfaces caractéristiques associées à une hypersurface analytique.

8. Reprenons une hypersurface analytique quelconque définie par une équation telle que (4). A chaque point (x_0, y_0) de cette variété est associée la surface caractéristique

$$F(x, y; \bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0;$$

dans le cas d'un hyperplanoïde, cette surface engendre l'hypersurface.

On peut plus généralement considérer la famille à deux paramètres

[9] Ce théorème peut être démontré directement si l'on suppose, avec ALMER [3], que la surface caractéristique génératrice dépend *analytiquement* d'un paramètre réel.

complexes de surfaces caractéristiques

$$F(x, y; a, b) = 0;$$

cette congruence de surfaces est liée d'une manière invariante à l'hypersurface.

Supposons en effet que par la transformation pseudo-conforme

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y), \tag{10}$$

qui entraîne pour les variables conjuguées la transformation analytique

$$\bar{x}' = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{y}' = \bar{g}(\bar{x}, \bar{y}), \tag{11}$$

l'hypersurface (4) soit transformée dans l'hypersurface

$$\Phi(x', y'; \bar{x}', \bar{y}') = 0. \tag{12}$$

Posons

$$x = x_1 + ix_2, \quad y = y_1 + iy_2;$$
$$x' = x_1' + ix_2', \quad y' = y_1' + iy_2';$$

les équations (4) et (12) deviennent respectivement des équations analytiques réelles en x_1, x_2, y_1, y_2 et x_1', x_2', y_1', y_2', et l'équation (12) est une conséquence de l'équation (4), quand on passe des variables réelles x_1, x_2, y_1, y_2 aux variables réelles x_1', x_2', y_1', y_2' par les transformations que définissent les équations (10) (ou les équations (11)). Cela signifie par exemple que si on tire y_2 de (4) en fonction de x_1, x_2, y_1 et qu'on porte dans (12), le premier membre Φ devient une fonction analytique de x_1, x_2, y_1 nulle pour toutes les valeurs *réelles* de ses trois arguments. Il en résulte que cette fonction est aussi nulle pour les valeurs *complexes* de ces arguments. Autrement dit, *l'équation* (12) *est une conséquence de l'équation* (4), *quand on effectue sur les variables* x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$, *regardées comme 4 variables indépendantes, la transformation définie par les équations* (10) *et* (11).

Soient alors a', b' les valeurs que prennent $\bar{x}'$ et $\bar{y}'$, quand, dans les équations (11), on donne à $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les valeurs a et b. Il en résulte que *la surface caractéristique*

$$F(x, y; a, b) = 0 \tag{13}$$

se transforme, par la transformation pseudo-conforme (10), *dans la surface caractéristique*

$$\Phi(x', y'; a', b') = 0.$$

9. On peut envisager le résultat précédent à un autre point de vue plus intuitif. L'équation (4), où l'on regarde x, y, x, $\bar{y}$ comme des variables indépendantes, définit dans l'espace des quatre variables complexes x_1, x_2, y_1, y_2 une variété à six dimensions dont l'hypersurface initiale est la partie réelle. Les surfaces caractéristiques (13) sont les sections de cette variété complexe à six dimensions par les variétés à quatre dimensions

$$\bar{x} = a, \quad \bar{y} = b;$$

comme ces dernières se conservent dans leur ensemble par une transformation pseudo-conforme, il en est de même des surfaces (13) ([10]).

10. Dans le cas d'un hyperplanoïde, les surfaces caractéristiques (13), que nous appellerons les surfaces *associées* à l'hypersurface, ne dépendent que d'un paramètre complexe. En effet, tout hyperplanoïde pouvant être ramené à la forme

$$y - \bar{y} = 0,$$

les surfaces caractéristiques associées $y - b = 0$ ne dépendent que d'un paramètre.

Réciproquement si les surfaces caractéristiques (13) ne dépendent que d'un paramètre complexe, celles qui seront associées aux différents points de l'hypersurface ne pourront dépendre de plus de deux paramètres réels; par suite la surface caractéristique associée à un point de l'hypersurface sera associée au moins à tous les points d'une ligne. Si $y = \varphi(x)$ est l'équation de cette surface, la relation

$$F(x, \varphi(x); \bar{x}, \bar{\varphi}(\bar{x})) = 0$$

aura donc lieu, quel que soit x, pour une infinité de valeurs de $\bar{x}$ dépendant d'un paramètre réel; mais le premier membre, où x est arbitraire, étant une fonction analytique de la variable complexe $\bar{x}$, ne peut être nul pour cette infinité de valeurs sans être identiquement nul. Par suite le surface $y = \varphi(x)$ est située tout entière sur l'hypersurface, qui est ainsi un hyperplanoïde. On arrive donc au

THÉORÉME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une hypersurface soit un hyperplanoïde est que les surfaces caractéristiques associées dépendent d'un seul paramètre complexe.*

11. De là on déduit immédiatement l'équation aux dérivées partielles des hyperplanoïdes: il suffit d'exprimer que la fonction implicite y de x

([10]) C'est au fond à ce point de vue que se place B. SEGRE ([2]) pour définir ce qu'il appelle les *lignes bicaractéristiques*, qui ne sont autres que les surfaces (13).

définie par (13) satisfait, quels que soient a et b, à une équation différentielle du premier ordre. Cette équation est manifestement

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y},$$

dans le second membre de laquelle on remplace $\bar{y}$ par sa valeur en x, y, $\bar{x}$ tirée de (5): il faut et il suffit que, par cette substitution, $\bar{x}$ s'élimine. La condition cherchée est donc

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{F_x}{F_y}\right) - \frac{F_{\bar{x}}}{F_{\bar{y}}}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\frac{F_x}{F_y}\right) = 0,$$

ou, en simplifiant,

$$L(F) \equiv F_y F_{\bar{y}} F_{x\bar{x}} + F_x F_{\bar{x}} F_{y\bar{y}} - F_x F_{\bar{y}} F_{y\bar{x}} - F_y F_{\bar{x}} F_{x\bar{y}} = 0. \tag{14}$$

Cette relation doit être une conséquence de l'équation (5). Le premier membre, que nous désignons par $L(F)$, est *l'expression d'E. E. Levi* [11].

12. Nous dirons qu'un point d'une hypersurface, qui n'est pas un hyperplanoïde, est *simple* si en ce point l'expression d'E. E. LEVI ne s'annule pas.

On a le théorème remarquable suivant:

THÉORÈME. – *En un point simple d'une hypersurface, la surface caractéristique associée est tangente à l'hypersurface et est, au voisinage du point de contact, située tout entière du même côté de l'hypersurface.*

La première partie du théorème est évidente, car si l'on se déplace sur la surface caractéristique associée, on a

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

et par suite aussi, en prenant les quantités conjuguées,

$$F_{\bar{x}} d\bar{x} + F_{\bar{y}} d\bar{y} = 0,$$

d'où

$$dF = 0.$$

Pour démontrer la seconde partie, désignons par $x+h$, $y+k$ les coordonnées d'un point de la surface caractéristique (13) très voisin du point de contact (x, y). On a

$$hF_x + kF_y + \frac{1}{2}(h^2F_{xx} + 2hkF_{xy} + k^2F_{yy}) + \dots = 0,$$

$$\bar{h}F_{\bar{x}} + \bar{k}F_{\bar{y}} + \frac{1}{2}(\bar{h}^2F_{\bar{x}\bar{x}} + 2\bar{h}\bar{k}F_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{k}^2F_{\bar{y}\bar{y}}) + \dots = 0,$$

[11] E. E. LEVI, *Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse* (« Annali di Mat. », 17, 1910, pp. 61-87). La condition (14) pour qu'une hypersurface soit un hyperplanoïde se trouve dans ce mémoire, p. 81.

d'où

$$F(x+h,\ y+k\,;\ \bar{x}+\bar{h},\ \bar{y}+\bar{k}) = h\bar{h}F_{x\bar{x}} + h\bar{k}F_{x\bar{y}} + k\bar{h}F_{y\bar{x}} + k\bar{k}F_{y\bar{y}} + \dots.$$

En se bornant aux infiniment petits du second ordre et remplaçant, ce qui est permis, k par $-h\frac{F_x}{F_y}$ et $\bar{k}$ par $-\bar{h}\frac{F_{\bar{x}}}{F_{\bar{y}}}$, on trouve immédiatement

$$F(x+h,\ y+k\,;\ \bar{x}+\bar{h}+\bar{k}) = \frac{h\bar{h}}{F_y F_{\bar{y}}} L(F) + \dots.$$

Cette formule montre que pour les points de la surface caractéristique voisins du point de contact (x, y), le premier membre F de l'équation de l'hypersurface garde un signe constant, à savoir celui de $L(F)$.

13. Nous conviendrons d'appeler *extérieure* la région de l'espace voisine de l'hypersurface et dans laquelle se trouve la surface caractéristique associée, *intérieure* la région opposée. La propriété d'une des deux régions (prise au voisinage d'un point simple de l'hypersurface) d'être extérieure ou intérieure se conserve évidemment par une transformation pseudo-conforme.

En chaque point simple de l'hypersurface il existe un *élément plan* caractéristique tangent, c'est l'élément plus tangent à la surface caractéristique associée:

$$F_x dx + F_y dy = 0.$$

Considérons une ligne analytique passant par un point simple de l'hypersurface et non tangente en ce point à l'élément caractéristique correspondant. Soit (dx, dy) un déplacement infinitésimal sur cette ligne. Par cette ligne il passe une surface caractéristique: la rotation d'un angle droit dans le sens direct du déplacement (dx, dy) sur cette surface caractéristique donne le déplacement (idx, idy). Nous dirons que le déplacement (dx, dy) est dirigé *dans le sens positif* sur la ligne si le déplacement (idx, idy) pénètre dans la région *intérieure* à l'hypersurface. Pour reconnaître s'il en est bien ainsi, remarquons qu'on a

$$F_x dx + F_y dy + F_{\bar{x}} d\bar{x} + F_{\bar{y}} d\bar{y} = 0;$$

l'expression $F_x dx + F_y dy$ a donc une valeur purement imaginaire. Quand on effectue le déplacement (idx, idy), la fonction F subit un accroissement élémentaire

$$dF = i(F_x dx + F_y dy) - i(F_{\bar{x}} d\bar{x} + F_{\bar{y}} d\bar{y}) = 2i(F_x dx + F_y dy);$$

pour que cet accroissement soit de signe contraire à $L(F)$, il faut et il suffit qu'on ait

$$-iL(F)(F_x dx + F_y dy) > 0. \tag{15}$$

Il existe donc sur chaque ligne tracée sur l'hypersurface un sens positif intrinsèque, à savoir celui qui satisfait à l'inégalité (15).

14. Du résultat précédent découle l'existence d'une *orientation naturelle* d'une hypersurface qui n'est pas un hyperplanoïde. En effet, soit A un point simple: menons dans l'élément plan caractéristique tangent une tangente AT_1; soit AT_2 celle qui s'en déduit, dans cet élément plan, par rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans *le sens direct*; soit enfin AT_3 une tangente à une ligne non tangente à l'élément plan caractéristique, tangente dirigée dans le sens *positif* de la ligne. Il est évident que tous les trièdres ainsi construits ont le même sens, qui définira l'orientation positive intrinsèque de l'hypersurface.

On peut arriver à cette orientation par une voie analytique toute différente. Imaginons exprimées les coordonnées x, y d'un point de l'hypersurface en fonctions analytiques de trois paramètres réels u, v, w, et posons

$$\omega = i(F_x dx + F_y dy).$$

La forme cubique extérieure $[\omega\omega']$ se reproduit, multipliée par un facteur *positif*, quand on remplace ω par $k\omega$, k étant un facteur réel quelconque. Si alors $[\omega\omega']$ est de la forme $H[du\, dv\, dw]$, on aura une orientation intrinsèque de l'hypersurface en convenant d'appeler directs les trièdres obtenus par trois déplacements infiniment petits $(d_i u, d_i v, d_i w)$ $(i = 1, 2, 3)$ satisfaisant à l'inégalité

$$H\begin{vmatrix} d_1 u & d_1 v & d_1 w \\ d_2 u & d_2 v & d_2 w \\ d_3 u & d_3 v & d_3 w \end{vmatrix} > 0. \tag{16}$$

Cette convention est indépendante du choix des paramètres et aussi du choix des coordonnées x, y.

Avec le trièdre considéré tout à l'heure, on a

$$F_x d_1 x + F_y d_1 y = 0,$$
$$d_2 x = i d_1 x, \quad d_2 y = i d_1 y;$$

d'autre part

$$[\omega\omega'] = (F_x dx + F_y dy)\,\{F_{x\bar{x}}[dx d\bar{x}] + F_{x\bar{y}}[dx d\bar{y}] + F_{y\bar{x}}[dy d\bar{x}] + F_{y\bar{y}}[dy d\bar{y}]\}.$$

Par suite, le premier membre de (16) se réduit à

$$(F_x d_3 x + F_y d_3 y)\,\{F_{x\bar{x}}(d_1 x d_2 \bar{x} - d_2 x d_1 \bar{x}) + \ldots\};$$

prenons par exemple

$$d_1x = -F_y, \quad d_1y = F_x;$$
$$d_2x = -iF_y, \quad d_2y = iF_x;$$

on aura, en simplifiant,

$$-iL(F)(F_x d_3x + F_y d_3y),$$

quantité qui est bien positive si le déplacement (d_3x, d_3y) se fait dans le sens positif défini au début de ce numéro.

15. On peut enfin remarquer que l'espace ambiant lui-même est susceptible d'une orientation naturelle, en convenant de regarder comme direct le 4-édre formé par les quatre déplacements infinitésimaux

$$(dx, dy), (idx, idy), \quad (\delta x, \delta y), (i\delta x, i\delta y),$$

où l'on suppose toutefois que les deux déplacements (dx, dy) et $(\delta x, \delta y)$ n'appartiennent pas à un même élément plan caractéristique. Cette convention est légitime, car on peut passer par continuité d'un 4-édre quelconque de cette nature à un autre 4-édre de la même nature: en effet les éléments plans *non caractéristiques* étant tous équivalents entre eux (n. 3), on peut passer par continuité des deux déplacements (dx, dy), $(\delta x, \delta y)$ aux deux déplacements $(d'x, d'y)$, $(\delta' x, \delta' y)$ sans que l'élément plan formé devienne jamais caractéristique ([12]).

Il résulte de cette convention qu'on obtient un 4-édre direct en prenant les trois premiers déplacements tangents à l'hypersurface et formant par rapport à cette hypersurface un trièdre direct, et en prenant ensuite un 4-éme déplacement pénétrant dans la région *intérieure* de l'espace.

IV. Groupe de transformations pseudo-conformes d'une hypersurface.

16. Comme nous l'avons déjà remarqué (n. 7), un hyperplanoïde admet un groupe infini de transformations pseudo-conformes. Dans le cas d'une hypersurface qui n'est pas un hyperplanoïde, uue remarque fondamentale de B. SEGRE ([13]) montre immédiatement qu'il n'en est plus ainsi, et cela simplement parce que la famille des surfaces caractéristiques associées, *que nous pouvons regarder comme une congruence complexe de courbes planes*

([12]) Analytiquement on peut remarquer que le déterminant des accroissements infinitésimaux subis par x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ a la valeur essentiellement positive

$$4(dx\delta y - dy\delta x)(d\bar{x}\delta\bar{y} - d\bar{y}\delta\bar{x}).$$

([13]) B. SEGRE, *Intorno*, *etc.* ([3]).

complexes, ne peut admettre qu'un groupe fini de transformations analytiques ponctuelles portant sur les coordonnées x, y. Ces courbes sont les intégrales d'une équation différentielle du second ordre $R(x, y, y', y'') = 0$, et l'on sait, d'après les recherches de A. TRESSE, que cette équation admet au plus un groupe à 8 paramètres (complexes).

Mais il est clair que malgré son importance, la remarque de B. SEGRE est loin d'épuiser le problème. En premier lieu une équation différentielle du second ordre, prise au hasard, ne peut définir les surfaces caractéristiques associées à une hypersurface. En second lieu, comme nous allons le voir, la congruence des surfaces caractéristiques associées à une hypersurface peut admettre des transformations pseudo-conformes qui ne laissent pas invariante l'hypersurface. En troisième lieu deux hypersurfaces *non équivalentes* peuvent admettre les mêmes surfaces caractéristiques associées.

Dans le chapitre III, nous reprendrons toute la question en étudiant *directement* le problème de l'équivalence pseudo-conforme de deux hypersurfaces.

17. Nous pouvons cependant dès maintenant faire quelques remarques de nature élémentaire.

Supposons qu'une hypersurface, qui n'est pas un hyperplanoïde, admette une transformation pseudo-conforme infinitésimale génératrice d'un groupe à un paramètre *réel*; on peut, comme on le sait, se ramener au cas où le symbole de cette transformation infinitésimale est $\frac{\partial f}{\partial x}$, les équation du groupe étant

$$x' = x + a, \quad y' = y \qquad (a \text{ réel}).$$

L'équation de l'hypersurface, définie par une relation entre x_1, x_2, y_1, y_2, ne contient pas x_1. Il est impossible que l'hypersurface admette en même temps la transformation $i\frac{\partial f}{\partial x}$, car alors son équation ne dépendrait pas non plus de x_2: on aurait affaire à un hyperplanoïde. Par suite

THÉORÈME. — *Si une hypersurface admet les deux transformation infinitésimales* X *et* iX, *c'est un hyperplanoïde.*

Ce théorème prouve que *si la congruence des surfaces caractéristiques associées à une hypersurface qui n'est pas un hyperplanoïde admet un groupe à* r *paramètres complexes, l'hypersurface admet au plus un groupe à* r *paramètres réels.*

18. On peut aller plus loin et montrer que le groupe de l'hypersurface admet *exactement* r paramètres réels. Remarquons d'abord qu'à une transformation infinitésimale

$$\xi_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

du groupe de la congruence $F(x,\ y;\ a,\ b)=0$ correspond une transformation infinitésimale

$$\alpha_i(a,\ b)\frac{\partial f}{\partial a}+\beta_i(a,\ b)\frac{\partial f}{\partial b},$$

qui indique comment les paramètres a, b sont transformés. Cela revient à dire que la transformation

$$\xi_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial y}+\alpha_i(\bar{x},\ \bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}+\beta_i(\bar{x},\ \bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$$

laisse invariante l'équation $F(x,\ y;\ \bar{x},\ \bar{y})=0$, où x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ sont regardées comme des variables indépendantes. D'autre part si ξ_i et η_i sont données, on ne peut avoir $\alpha_i=\beta_i=0$, car alors, en ramenant, ce qui est possible, la transformation infinitésimale donnée à la forme $\frac{\partial f}{\partial x}$, on verrait que l'équation $F=0$ ne dépend pas de x, et par suite pas de $\bar{x}$: l'hypersurface serait un hyperplanoïde.

Il résulte de ce qui précède qu'il existe r transformations infinitésimales linéairement indépendantes laissant invariante l'équation $F=0$, et qui sont de la forme

$$X_i\equiv\xi_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial y}+\alpha_i(\bar{x},\ \bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}+\beta_i(\bar{x},\ \bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}. \tag{17}$$

Elles sont linéairement indépendantes, en ce sens qu'on ne peut trouver r constantes complexes e_i non toutes nulles réalisant les quatre identités

$$\sum_i e_i\xi_i(x,\ y)=0,\quad \sum_i e_i\eta_i(x,\ y)=0,$$
$$\sum_i e_i\alpha_i(\bar{x},\ \bar{y})=0,\quad \sum_i e_i\beta_i(\bar{x},\ \bar{y})=0.$$

Il est même impossible, d'après ce qui a été dit plus haut, de réaliser soit les deux premières, soit les deux dernières de ces identités par des valeurs non toutes nulles des e_i.

Cela posé, il est clair que chacune des transformations infinitésimales

$$\bar{\alpha}_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial x}+\bar{\beta}_i(x,\ y)\frac{\partial f}{\partial y}+\bar{\xi}_i(\bar{x},\ \bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}+\bar{\eta}_i(\bar{x},\ \bar{y})\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$$

fait partie du groupe. On a donc des relations de la forme

$$\tag{18}\left\{\begin{array}{ll}\bar{\alpha}_i(x,\ y)=\sum_k m_{ik}\xi_k(x,\ y), & \bar{\beta}_i(x,\ y)=\sum_k m_{ik}\eta_k(x,\ y),\\ \bar{\xi}_i(\bar{x},\ \bar{y})=\sum_k m_{ik}\alpha_k(\bar{x},\ y), & \bar{\eta}_i(\bar{x},\ \bar{y})=\sum_k m_{ik}\beta_k(\bar{x},\ \bar{y}).\end{array}\right.$$

Il en résulte

$$\bar{\alpha}_i(x, y) = \sum_{kj} m_{ik}\bar{m}_{kj}\bar{\alpha}_j(x, y),$$

$$\beta_i(x, y) = \sum_{kj} m_{ik}\bar{m}_{kj}\bar{\beta}_j(x, y),$$

d'où

(19) $$\sum_k m_{ik}\bar{m}_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Cherchons maintenant les transformations $\sum_i e_i X_i f$ qui sont *réelles* par rapport aux variables réelles x_1, x_2, y_1, y_2. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\sum_i e_i \alpha_i(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_i \bar{e}_i \bar{\xi}_i(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$\sum_i e_i \beta_i(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_i \bar{e}_i \bar{\eta}_i(\bar{x}, \bar{y}),$$

ou encore, d'après (18),

$$\sum_i (e_i - \sum_k m_{ki}\bar{e}_k)\alpha_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

$$\sum_i (e_i - \sum_k m_{ki}\bar{e}_k)\beta_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Cela n'est possible que si l'on a

(20) $$e_i = \sum_k m_{ki}\bar{e}_k,$$

et aussi, en prenant les conjugués des deux membres,

(21) $$\bar{e}_i = \sum_k \bar{m}_{ki} e_k.$$

Les $2r$ relations linéaires (20) et (21) aux $2r$ inconnues e_i et $\bar{e}_i$ forment un système qui pourrait s'écrire sous forme *réelle* en prenant comme inconnues les parties réelles et imaginaires des e_i. Or elles se réduisent à r indépendantes, puisque, d'après les relations (19), les équations (21) sont des conséquences de (20), et que les équations (20) sont évidemment indépendantes. *L'hypersurface admet donc exactement* r *transformations infinitésimales linéairement indépendantes à paramètres réels.* C. Q. F. D.

19. D'après les recherches de A. TRESSE, une équation différentielle du second ordre admet au plus un groupe à 8 paramètres complexes, qui est semblable au groupe homographique (complexe) du plan. Les hypersurfaces correspondantes, s'il y en a, admettront un groupe à 8 paramètres réels. Or on connaît toutes les *formes réelles* du groupe homographique complexe du plan [14]. Il y en a trois, à savoir:

1. le groupe homographique réel;

2. le groupe homographique qui laisse invariante l'équation obtenue en annulant, en coordonnées homogénes x_1, x_2, x_3, une forme d'HERMITE indéfinie

$$\Sigma a_{ik} x_i \bar{x}_k = 0 \qquad (a_{ik} = \bar{a}_{ki}); \tag{22}$$

3. Le groupe analogue relatif à une forme d'HERMITE définie.

Le troisième groupe permet de transformer un point quelconque du plan complexe en un autre point quelconque; il ne laisse donc invariante aucune hypersurface.

Le premier groupe transforme tout point imaginaire du plan en tout autre point imaginaire et tout point réel en tout autre point réel; il laisse donc invariante la surface non caractéristique lieu des points réels, mais ne laisse invariante aucune hypersurface.

Reste le second groupe, qui laisse invariante *l'hyperconique* définie par l'équation (22). D'où le

THÉORÈME. — *Toute hypersurface qui n'est pas un hyperplanoïde et qui admet localement un groupe de transformations pseudo-conformes à 8 paramètres est localement équivalente à l'hyperconique.*

L'équation (22) peut du reste se ramener à la forme canonique

$$x\bar{x} + y\bar{y} - 1 = 0;$$

les surfaces caractéristiques associées ne sont autres que les *droites* du plan complexe

$$ax + by - 1 = 0.$$

CHAPITRE II.

Les hypersurfaces qui admettent un groupe transitif de transformations pseudo-conformes.

I. Généralités.

20. Nous supposerons dans tout ce Chapitre que les hypersurfaces considérées ne sont pas des hyperplanoïdes et que les groupes considérés sont

[14] Voir, par exemple, E. CARTAN, *Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne* (« Journal Math. pures et appl. », 8, 1929, nn. 26 e 27, pp. 28-30).

engendrés par des transformations infinitésimales. Il résulte immédiatement de cette dernière hypothèse que toute hypersurface admettant un groupe transitif de cette nature est *analytique*: on sait en effet qu'on peut choisir les paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$ d'un groupe de LIE de manière que les fonctions φ et ψ qui entrent dans les équations

$$x' = \varphi(x, y; a_1, a_2, \ldots, a_r), \quad y' = \psi(x, y; a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

dépendent analytiquement des paramètres. L'hypersurface lieu des transformés d'un point fixe x_0, y_0, sera donc analytique.

Nous verrons du reste réciproquement (Chapitre III) que le plus grand groupe de transformations pseudo-conformes d'une hypersurface analytique est un groupe de LIE, c'est-à-dire est engendré par des transformations infinitésimales.

21. Si une hypersurface admet un groupe transitif, ce groupe est au moins à 3 paramètres réels. Il résulte des recherches de A. TRESSE [1] que si ce groupe est à plus de trois paramètres, l'hypersurface est localement équivalente à l'hyperconique et admet localement un groupe à 8 paramètres.

Nous verrons un peu plus loin (n. 29) que si une hypersurface admet un groupe à trois paramètres, ce groupe la transforme transitivement.

II. Problème local et problème global.

22. Le problème que nous nous proposons de résoudre peut être envisagé d'un point de vue *local* ou d'un point de vue *global.*

Plaçons-nous d'abord au point de vue local. Soit (Σ) une hypersurface, (σ) une portion connexe de cette hypersurface ne contenant que des points simples, (δ) un domaine de l'espace ambiant découpant sur (Σ) la portion (σ). Soient enfin

$$\text{(I)} \qquad x' = \varphi(x, y; a_1, a_2, \ldots, a_r), \quad y' = \psi(x, y; a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

les équations finies d'un groupe G; les fonctions φ et ψ sont régulières dans le domaine (δ) pour les transformations du groupe qui appartiennent à un voisinage suffisamment petit de la transformation identique. Nous dirons que (Σ) admet localement le groupe G dans la région (σ) si l'on peut trouver une région suffisamment petite (σ_0) intérieure à (σ), et un voisinage V_0 de la transformation identique dans le groupe G, tels que toute transformation appartenant à V_0 et appliquée à un point de (σ_0) donne un point de (σ).

On définit d'une manière analogue *l'équivalence locale* de deux hypersurfaces (Σ) et (Σ'), considérées au voisinage de deux régions (σ) et (σ').

23. Plaçons-nous maintenant au point de vue global. Nous dirons qu'une hypersurface (Σ) à points tous simples admet globalement un groupe de transformations pseudo-conformes G à r paramètres:

1° S'il existe un domaine (Δ) de l'espace ambiant qui contienne complètement (Σ) à son intérieur et tel que toutes les transformations du groupe soient régulières à l'intérieur de (Δ);

2° Si M et M' étant deux points quelconques de (Σ), il existe au moins une transformation de G amenant M en M'.

Les énoncés précédents ne doivent pas être pris trop à la lettre. Il peut arriver qu'on ne puisse pas trouver un système de paramètres réels $a_1, \ldots, a_r$ valable dans toute l'étendue du groupe; il suffit qu'au voisinage de chaque transformation du groupe on puisse trouver un tel système, ce qui a certainement lieu pour tous les groupes de Lie. En second lieu il n'est pas nécessaire qu'il existe un système de coordonnées x, y valable dans toute l'étendue de (Δ): il suffit qu'au voisinage de chaque point de (Δ) on puisse trouver un tel système de coordonnées, mais de manière qu'en passant par continuité d'un point défini par un certain système de coordonnées (x, y) à un point défini par un autre système de coordonnées (ξ, η), on traverse une région dans laquelle les deux systèmes de coordonnées soient utilisables, le passage de l'un à l'autre, dans cette région, se faisant par une transformation pseudo-conforme.

Etant données deux hypersurfaces (Σ) et (Σ') à points tous simples, nous dirons qu'elles sont *globalement équivalentes* s'il existe une correspondance pseudo-conforme biunivoque partout régulière entre un domaine (Δ) contenant (Σ) à son intérieur et un domaine (Δ') contenant (Σ') à son intérieur, cette correspondance transformant (Σ) en (Σ').

24. Considérons deux hypersurfaces (Σ) et (Σ') à points tous simples, admettant chacune globalement un groupe transitif de transformations pseudo-conformes, G pour (Σ), G' pour (Σ').

Supposons de plus:

1° *Que les deux hypersurfaces soient localement équivalentes;*

2° *Que les deux groupes soient localement semblables;*

3° *Que l'hypersurface (Σ) soit simplement connexe.*

Les conditions 1° et 2° peuvent être précisées de la manière suivante. Prenons sur (Σ) et (Σ') deux points arbitraires M_0 et M_0'; nous pouvons trouver deux régions (σ) et (σ') entourant respectivement M_0 et M_0' sur (Σ) et (Σ'), et deux domaines (δ) et (δ') contenant (σ) et (σ'), et enfin une transformation pseudo-conforme T partout régulière dans (δ) transformant biunivoquement (δ) en (δ'), (σ) en (σ') et M_0 en M_0'; de plus cette transformation doit transformer chacune des transformations infinitésimales $\xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y}$ de G, dans les coefficients ξ_i, η_i de laquelle x et y sont les coordonnées d'un point variable de (δ), dans une transformation infinitésimale déterminée de G', la transformation inverse changeant de même toute transformation infinitésimale de G' dans une transformation infinitésimale déterminée de G.

La condition 3° exprime que tout contour fermé à une dimension tracé dans (Σ) est réductible à un point par déformation continue sans quitter (Σ).

Nous allons nous proposer de déterminer, (Σ) *et* G *étant donnés, toutes les hypersurfaces* (Σ') *localement équivalentes à* (Σ) *et admettant globalement un groupe localement semblable à* G.

25. Remarquons d'abord que la correspondance pseudo-conforme T qui existe entre (δ) et (δ') établit entre les transformations de G et celles de G' une correspondance, nécessairement isomorphique, qui entraîne par elle-même une correspondance isomorphique biunivoque entre les transformations finies de G, prises dans un voisinage suffisamment petit de la transformation identique, et les transformations analogues de G'. Soit Γ le groupe abstrait simplement connexe infinitésimalement isomorphe à G et à G' [15]. La correspondance isomorphique qui existe, au voisinage de la transformation identique, entre G, G', et par suite Γ, entraîne une correspondance isomorphique univoque $(\Gamma \rightarrow G)$ et une correspondance isomorphique univoque $(\Gamma \rightarrow G')$ définies dans toute la variété du groupe Γ; à une transformation de Γ correspond une transformation et une seule de G, une transformation et une seule de G'.

Nous pouvons regarder les opérations de Γ comme appliquées aux points de (Σ) en ce sens que, par convention, chacune de ces opérations produit sur (Σ) le même effet que la transformation correspondante de G: seulement Γ peut contenir des opérations qui laissent fixes tous les points de (Σ). De même chaque opération de Γ peut être regardée comme appliquée aux points de (Σ').

Introduisons maintenant l'hypothèse que (Σ) est simplement connexe: cela signifie que l'ensemble des opérations de Γ qui laissent fixe un point donné de (Σ), par exemple M_0, forme un sous-groupe *connexe* γ de Γ [16].

A ce sous-groupe γ correspond dans G' un sous-groupe également connexe, engendré par les transformations infinitésimales de G' qui correspondent aux

---

[15] E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs* (« Mém. Sc. Math. », fasc. XLII, 1930, p. 13).

[16] E. CARTAN, loc. cit. [15], p. 31.

transformations infinitésimales de G laissant fixe le point M_0: elles laissent donc fixe le point M_0'. Autrement dit, le sous-groupe γ de Γ qui laisse fixe le point M_0, quand on le considère comme opérant sur (Σ), laisse aussi fixe le point M_0', quand on le considère comme opérant sur (Σ'). Nous allons déduire de là que la transformation *pseudo-conforme* $\mathcal{T}$ *qui transforme* (σ) *en* (σ') *peut se prolonger sur toute l'hypersurface* (Σ).

En effet, soit M un point donné de (Σ), Θ une opération particulière de Γ amenant M_0 en M: soit M' le point transformé de M_0' par Θ. Toute transformation de Γ qui amène M_0 en M est de la forme ΘR, R appartenant à γ. On voit qu'elle amène toujours M_0' dans le même point M'. Nous établissons donc ainsi une transformation univoque de tout point M de (Σ) en un point déterminé de (Σ'). Cette transformation, que nous désignerons par $\mathcal{T}^*$, se confond, quand M est sur (σ), avec la transformation pseudo-conforme locale $\mathcal{T}$ dont nous avons admis l'existence. Nous allons montrer qu'elle est pseudo-conforme.

26. Soient

(1) $$x' = f(x,\ y), \quad y' = g(x,\ y)$$

les équations de la transformation T de G qui correspond à Θ: nous pouvons supposer les fonctions f et g holomorphes à l'intérieur de (δ); ces équations sont inversement résolubles par rapport à x, y, et donnent

(2) $$x = \varphi(x',\ y'), \quad y = \psi(x',\ y'),$$

les fonctions φ et ψ étant holomorphes à l'intérieur du domaine transformé de (δ) par T, domaine que nous désignerons par $(T\delta)$. Soient de même

(3) $$X' = F(X,\ Y), \quad Y' = G(X,\ Y)$$

les équations de la transformation T' de G' correspondant à Θ, les fonctions F et G étant holomorphes à l'intérieur de (δ'). Soit maintenant $(x,\ y)$ un point quelconque de (σ) résultant de la transformation θ de Γ, voisine de la transformation identique, appliquée au point M_0. Soit $(X,\ Y)$ le point que $\mathcal{T}$ lui fait correspondre sur (σ'), ce point résultant de la même transformation θ appliquée à M_0'. Les points $(x',\ y')$ et $(X',\ Y')$ donnés par (1) et (3) résultent de la transformation $\Theta\theta$ de Γ appliquée respectivement à M_0 et M_0'; $(X',\ Y')$ est donc le transformé de $(x',\ y')$ par la transformation $\mathcal{T}^*$. Or, on peut obtenir cette transformation en effectuant successivement la transformation (2), pseudo-conforme et régulière dans $(T\delta)$, puis la transformation $(\mathcal{T})$, pseudo-conforme et régulière dans (δ), enfin la transformation (3), pseudo-conforme et régulière dans (δ'). La transformation résultante est donc aussi pseudo-conforme. On montre immédiatement qu'elle établit une correspondance biunivoque entre les deux domaines $(T\delta)$ et $(T'\delta')$. c. q. f. d.

27. La transformation pseudo-conforme $\mathfrak{T}^*$, partout régulière au voisinage de (Σ), est *univoque*; de plus elle est *localement* biunivoque. Mais elle n'est pas nécessairement biunivoque d'une manière *globale*. En effet les transformations de Γ qui laissent fixe M_0' peuvent ne pas toutes appartenir à γ et former plusieurs et même une infinité de familles connexes de transformations de Γ, qu'on peut désigner par les symboles

$$\gamma, \quad \Theta_1\gamma, \quad \Theta_2\gamma, \dots,$$

chacune des transformations Θ_i laissant invariant le sous-groupe γ. Toutes les transformations $\Theta_i\gamma$ transforment M_0 en un seul et même point M_i; les différents points M_0, M_1, $M_2, \dots$ sont donc transformés par $\mathfrak{T}^*$ dans le même point M_0'. Soit de même M' un point quelconque de (Σ') résultant par exemple de la transformation Θ appliquée à M_0'; la transformation la plus générale de Γ faisant passer de M_0' à M' sera $\Theta\Theta_i\gamma$; appliquée à M_0, elle donnera les différents points obtenus en appliquant la transformation Θ à M_0, M_1, $M_2, \dots$.

Cela posé, considérons l'opération qui fait passer du point $M = \Theta M_0$ quelconque de (Σ) au point $\Theta\Theta_i M_0$ qui a le même correspondant sur (Σ'): désignons par S_i cette opération; elle est indépendante du choix de la transformation qui amène M_0 en M, car si on remplace Θ par ΘR, où R appartient à γ, le point $\Theta\Theta_i M_0$ est remplacé par $\Theta R\Theta_i M_0$, ou encore $\Theta\Theta_i R' M_0$, puisque Θ_i laisse invariant γ, ou enfin $\Theta\Theta_i M_0$. *L'opération* S_i *est échangeable avec toutes les transformations de* Γ; en effet, effectuons successivement à partir du point M l'opération S_i, puis l'opération Θ', nous obtiendrons d'abord $\Theta\Theta_i M_0$, puis $\Theta'\Theta\Theta_i M_0$; effectuons les opérations dans l'ordre inverse, nous aurons d'abord $\Theta'\Theta M_0$, puis $\Theta'\Theta\Theta_i M_0$.

L'opération S_i, échangeable avec toutes les transformations de Γ, par conséquent de G, est une transformation pseudo-conforme, puisqu'elle résulte de deux transformations pseudo-conformes, à savoir la transformation $\mathfrak{T}^*$ appliquée de M à M', et la transformation inverse $\mathfrak{T}^{*-1}$ appliquée localement de M' à $S_i M$.

En conclusion, nous voyons que si *l'hypersurface* (Σ') *n'est pas simplement connexe, à tout point* M' *de* (Σ') *correspondent plusieurs points, ou une infinité de points* M, $S_1 M$, $S_2 M, \dots$, *de* (Σ), *qui se déduisent tous de l'un d'entre eux par un groupe proprement discontinu de transformations pseudo-conformes, dont chacune est échangeable avec toutes les transformations de* G.

L'hypersurface (Σ) *et le groupe* G *étant donnés, nous aurons donc, pour* *obtenir toutes les hypersurfaces* (Σ') *localement équivalentes à* (Σ) *et admettant globalement un groupe transitif localement semblable à* G, *à déterminer tous les groupes proprement discontinus de transformations pseudo-conformes qui laissent invariante* (Σ) *et dont chaque opération est échangeable avec toutes les transformations de* G. Chacun de ces groupes déterminera une classe d'hypersurfaces (Σ') répondant à la question et toutes globalement équivalentes entre elles.

Nous dirons que le groupe proprement discontinu formé des opérations S_i est le *groupe de connexion* de Σ'; à chaque opération de ce groupe correspond une classe de contours fermés tracés sur (Σ'), deux contours de la même classe étant réductibles l'un à l'autre par déformation continue, deux contours appartenant à deux classes différentes ne l'étant pas.

III. Méthode de recherche des hypersurfaces admettant un groupe pseudo-conforme à trois paramètres.

28. Laissons pour plus tard la recherche des hypersurfaces qui admettent globalement un groupe pseudo-conforme à plus de trois paramètres: nous savons qu'elles admettent alors localement un groupe à 8 paramètres. Commençons par chercher tous les groupes à 3 paramètres susceptibles de laisser invariante une hypersurface qui ne soit pas un hyperplanoïde; nous ne supposerons pas nécessairement un tel groupe transitif. Il est bien entendu que l'hypersurface ainsi invariante pourra admettre un groupe à plus de trois paramètres.

Soient

$$X_i = \xi_i(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

les transformations infinitésimales génératrices du groupe G, qui est ainsi engendré par la transformation $e_1X_1 + e_2X_2 + e_3X_3$, avec des coefficients e_i *réels*. Si nous regardons les e_i comme des paramètres *complexes*, la transformation engendre un groupe à trois paramètres complexes G^*, dont G peut être regardé, au point de vue des paramètres, comme la partie réelle.

Nous remarquons d'abord que les trois déterminants $\xi_i\eta_j - \eta_i\xi_j$ ne peuvent être identiquement nuls; sinon en effet le groupe G admettrait un invariant $\varphi(x, y)$, intégrale première de l'équation $X_1 = 0$, par suite l'hypersurface serait un lieu de surfaces caractéristiques $\varphi(x, y) = \text{const.}$, ce que nous excluons.

Les deux équations

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} u_1\xi_1(x, y) + u_2\xi_2(x, y) + u_3\xi_3(x, y) = 0,\\ u_1\eta_1(x, y) + u_2\eta_2(x, y) + u_3\eta_3(x, y) = 0,\end{aligned}\right.$$

donnent pour les rapports mutuels des u_i deux fonctions analytiques de x, y. L'interprétation de ces quantités est la suivante. Soit (x_0, y_0) un point de (Σ), u_i^0 une solution des équations (4), où on fait $x = x_0$, $y = y_0$; la transformation infinitésimale $u_1^0 X_1 + u_2^0 X_2 + u_3^0 X_3$ du groupe à paramètres complexes prolongé de G laisse invariant le point (x_0, y_0); cette transformation infinitésimale est définie à un facteur complexe constant près; elle engendre un sous-groupe à un paramètre complexe de G^*; nous l'appellerons la transformation infinitésimale complexe associée au point (x_0, y_0). C'est sur la considération de ces transformations que va reposer la méthode que nous allons employer.

Remarquons que *la transformation infinitésimale associée à un point* M *de* (Σ) *se déduit de la transformation infinitésimale associée à* M_0 *en la transformant par la transformation de* G *qui amène* M_0 *en* M.

29. Voici quelques propriétés préliminaires importantes:

1° *La transformation infinitésimale associée à un point de* (Σ) *ne peut être fixe*; autrement dit les rapports mutuels des u_i ne peuvent être constants. En effet on peut toujours choisir la base infinitésimale de G de manière que la transformation infinitésimale fixe associée aux différents points de (Σ) soit $X_1 + iX_2$; mais alors les fonctions $\xi_1 + i\xi_2$, $\eta_1 + i\eta_2$, nulles sur (Σ), seraient identiquement nulles, et l'hypersurface admettrait, en même temps que la transformation X_1, la transformation iX_1, ce qui est impossible (n. 17).

2° *Si l'un des rapports,* $\frac{u_1}{u_3}$ *par exemple, n'est pas constant, les valeurs numériques qu'il prend sur* (Σ) *doivent dépendre de deux paramètres réels;* dans le cas contraire, en effet, (Σ) serait le lieu de surfaces caractéristiques $\frac{u_1}{u_3} = \text{const.}$, dépendant d'un paramètre.

3° *L'hypersurface est transformée transitivement par* G; sinon chacun de ses points admettrait un sous-groupe à un paramètre de G; par suite la transformation infinitésimale associée à ce point serait *réelle*, et chacun des rapports $\frac{u_i}{u_j}$ ne prendrait que des valeurs réelles.

4° *L'hypersurface* (Σ) *est analytique*, car les équations finies du groupe G dépendant analytiquement des paramètres a, b, c du groupe, l'hypersurface est définie paramétriquement par des équations analytiques de la forme

$$x = f(x_0, y_0;\ a, b, c), \quad y = g(x_0, y_0;\ a, b, c),$$

(x_0, y_0) étant un point fixe de (Σ).

5° *Si* $\mathrm{X}_1 + i\mathrm{X}_2$ *est la transformation infinitésimale imaginaire associée* *à un point particulier* M_0 *de* (Σ), *il est impossible que* X_1 *et* X_2 *engendrent un sous-groupe de* G. Supposons en effet que X_1 et X_2 engendrent un groupe g, et soit (σ) la surface lieu des transformés de M_0 par g. La transformation infinitésimale associée à un point M de (σ) est la transformée de $X_1 + iX_2$ par la transformation de g qui amène M_0 en M; elle est donc de la forme $X_1 + uX_2$, et par suite, en tout point de (σ), on a

$$(5) \qquad \begin{cases} \xi_1(x, y) + u\xi_2(x, y) = 0, \\ \eta_1(x, y) + u\eta_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Cela posé, le lieu des transformés de M_0 par le sous-groupe réel à un paramètre engendré par $e_1X_1 + e_2X_2$ est défini comme trajectoire des équations différentielles

$$\frac{dx}{e_1\xi_1 + e_2\xi_2} = \frac{dy}{e_1\eta_1 + e_2\eta_2},$$

ou encore

$$\frac{dx}{\xi_2} = \frac{dy}{\eta_2};$$

la surface (σ) est donc de la forme

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0),$$

$\varphi(x, y)$ étant une intégrale première de $X_2f = 0$; l'hypersurface (Σ) serait donc un lieu de surfaces caractéristiques, cas exclu.

IV. Détermination de toutes les structures possibles des groupes pseudo-conformes à trois paramètres laissant invariante une hypersurface.

30. Nous allons d'abord supposer que la transformation infinitésimale imaginaire associée à un point variable de (Σ) ne dépend que de deux paramètres réels variables, autrement dit que *la transformation associée à un point* M *est associée à tous les points d'une ligne à une dimension passant par* M.

Dans ces conditions, si $X_1 + iX_2$ est la transformation associée à un point particulier M_0, il existe nécessairement une transformation infinitésimale de G laissant invariante $X_1 + iX_2$, ou plutôt laissant invariant le groupe qu'elle engendre; cela veut dire que le crochet de cette transformation infinitésimale et de $X_1 + iX_2$ est un multiple de $X_1 + iX_2$. Cette transformation infinitésimale ne peut être de la forme $mX_1 + nX_2$, car l'égalité

$$(mX_1 + nX_2, X_1 + iX_2) = (\alpha + i\beta)(X_1 + iX_2),$$

ou

$$(X_1X_2) = \frac{\alpha + i\beta}{mi - n}(X_1 + iX_2),$$

n'est possible que si le second membre, *qui doit être à coefficients réels*, est nul; mais alors X_1 et X_2 engendreraient un groupe, ce qui est impossible (n. 29, 5°).

On peut donc supposer que la transformation infinitésimale considérée est X_3, avec

$$(X_3, X_1 + iX_2) = (\alpha + i\beta)(X_1 + iX_2),$$

ou

(6) $$(X_3X_1) = \alpha X_1 - \beta X_2, \quad (X_3X_2) = \beta X_1 + \alpha X_2.$$

Si alors on pose

(7) $$(X_1X_2) = \lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3 \qquad (\nu \neq 0),$$

l'identité de JACOBI donne

(8) $$\alpha\nu = 0, \quad \text{d'où} \quad \alpha = 0,$$

puis

(9) $$\lambda\beta = \mu\beta = 0.$$

31. Si $\beta = \lambda = \mu = 0$, on peut supposer $\nu = 1$ et on a un premier type

(A) $$\boxed{(X_1X_3) = 0, \ (X_2X_3) = 0, \ (X_1X_2) = X_3}.$$

Si $\beta = 0$, λ et μ n'étant pas tous les deux nuls, si par exemple $\mu \neq 0$, on prendra

$$\frac{1}{\mu}X_1, \quad \lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3 \quad \text{et} \quad X_3$$

comme nouvelles transformations infinitésimales de base et on aura le type

(B) $$\boxed{(X_1X_2) = X_2, \ (X_1X_3) = 0, \ (X_2X_3) = 0};$$

on pourra supposer que la transformation infinitésimale associée à un point particulier de (Σ) est $X_1 + iX_2 + iX_3$.

Enfin, si $\beta \neq 0$, on pourra, en multipliant X_1, X_2, X_3 par des facteurs constants k, h, l, se ramener aux cas $\beta = 1$, $\nu = \pm 1$. On aura ainsi les deux types distincts

(C) $$\boxed{(X_1X_2) = X_3, \ (X_1X_3) = X_2, \ (X_2X_3) = -X_1},$$

(D) $$\boxed{(X_1X_2) = -X_3, \ (X_1X_3) = X_2, \ (X_2X_3) = -X_1};$$

dans chaque cas la transformation infinitésimale associée à un point particulier de (Σ) sera $X_1 + iX_2$.

32. *Supposons maintenant que les transformations infinitésimales associées à un point variable de* (Σ) *dépendent de trois paramètres réels.* Ce sont par exemple les transformées par G de $X_1 + iX_2$. Aucune transformation infinitésimale de G ne laisse alors invariant le groupe engendré par $X_1 + iX_2$. En particulier G n'admet aucune transformation infinitésimale *distinguée,* c'est-à-dire échangeable avec toutes les transformations de G.

Cela posé, les seuls groupes n'admettant aucune transformation infinitésimale distinguée rentrent dans les types suivants [17]

(E) $$\boxed{(X_1X_3) = X_1,\ (X_2X_3) = mX_2,\ (X_1X_2) = 0}\ ;$$

(F) $$\boxed{(X_1X_3) = X_1,\ (X_2X_3) = X_1 + X_2,\ (X_1X_2) = 0}\ ;$$

(H) $$\boxed{(X_1X_3) = mX_1 - X_2,\ (X_2X_3) = mX_2 + X_1,\ (X_1X_2) = 0}\ ;$$

(K) $$\boxed{(X_1X_3) = X_2,\ (X_2X_3) = -X_1,\ (X_1X_2) = X_3}\ ;$$

(L) $$\boxed{(X_1X_3) = X_2,\ (X_2X_3) = -X_1,\ (X_1X_2) = -X_3}\ .$$

Au point de vue de la seule structure, (K) est identique à (C) et (L) à (D). Naturellement les transformations de base ne sont plus choisies de manière que $X_1 + iX_2$ soit associée à un point particulier de (Σ).

Les deux catégories de types: (A), (B), (C), (D) d'une part; (E), (F), (H), (K), (L) d'autre part se séparent nettement; nous verrons en particulier que *les hypersurfaces des quatre premiers types admettent localement un groupe à 8 paramètres.* La raison profonde de ce résultat sera donnée plus loin, dans la seconde Partie de ce mémoire (n. 89).

V. Les hypersurfaces du type (A).

33. Nous allons d'abord chercher comment les transformations de G transforment entre elles les transformations infinitésimales de G^*. Pour cela

[17] S. Lie et F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen,* 2ième éd., Leipzig et Berlin, Teubner, 1930, III, p. 715. A noter cependant qu'il s'agit ici de groupes à paramètres réels.

nous considérons le *groupe adjoint* de G ([18]). On a

$$(u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3,\ X_1) = - u_2X_3,$$
$$(u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3,\ X_2) = u_1X_3,$$
$$(u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3,\ X_3) = 0;$$

par suite, les transformations infinitésimales du groupe adjoint sont

$$E_1 \equiv - u_2 \frac{\partial f}{\partial u_3}, \quad E_2 \equiv u_1 \frac{\partial f}{\partial u_3}, \quad E_3 \equiv 0,$$

et ses transformations finies sont

$$u_1' = u_1, \quad u_2' = u_2, \quad u_3' = u_3 - au_2 + bu_1.$$

En particulier les transformées de $X_1 + iX_2$ sont

$$X_1 + iX_2 + (b - ai)X_3 = X_1 + iX_2 + ixX_3,$$

en ramenant, par une transformation pseudo-conforme, le coefficient de X_3 à être égal à ix. En ce qui concerne la coordonnée x, les transformations infinitésimales de G sont donc

$$X_1 \equiv - \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 \equiv i \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_3 = 0.$$

On pourra donc poser

$$X_1 \equiv - \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}.$$
$$X_2 \equiv - i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y},$$
$$X_3 \equiv \eta_3 \frac{\partial f}{\partial y},$$

avec

$$\eta_1 + i\eta_2 + ix\eta_3 = 0.$$

Prenons maintenant pour y un invariant de $X_1 - iX_2$, avec

$$\eta_1 - i\eta_2 = 0;$$

en exprimant que l'on a $(X_1 - iX_2,\ X_3) = 0$, on trouve $\frac{\partial \eta_3}{\partial x} = 0$, ce qui permet, en prenant $\int \frac{dy}{\eta_3}$ comme nouvelle variable y, de poser $\eta_3 = 1$. On en déduit

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 &\equiv - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} ix \frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_2 &\equiv - i \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} x \frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 &\equiv \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

([18]) Loc. cit. ([17]), I, Kap. 6.

Les équations finies de G sont

$$(\mathrm{G_A}) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= x + a + ib, \\ y' &= y + \frac{1}{2}(b + ia)x + \frac{1}{4}i(a^2 + b^2) + c. \end{aligned} \right.$$

L'hypersurface (Σ) est le lieu des points transformés de $(0, y_0)$ ou, en remplaçant $y - y_0$ par y, le lieu des points

$$(\Sigma_\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a + ib, \\ y &= c + \frac{1}{4}i(a^2 + b^2); \end{aligned} \right.$$

son équation est

$$(\Sigma_\mathrm{A}) \qquad 2\frac{y - \bar{y}}{i} - x\bar{x} = 0.$$

C'est une hyperconique, mais privée du point à l'infini dans la direction de l'axe des y. C'est une hypersurface simplement connexe.

34. Passons à la détermination des hypersurfaces non simplement connexes du type (A). Il faut déterminer un groupe proprement discontinu de transformations pseudo-conformes laissant (Σ) invariante et laissant invariante chaque transformation infinitésimale de G. Si M' est le transformé de M par une opération de ce groupe, la transformation infinitésimale $X_1 + iX_2 + ixX_3$ associée à M sera transformée en $X_1 + iX_2 + ix'X_3$; *il en résulte immédiatement, pour toute opération du groupe de connexion,*

$$x' = x.$$

Le groupe de connexion changera tout invariant de $X_1 - iX_2$ en un autre invariant, par suite y sera transformée en une fonction de y; mais, comme la transformation $X_3 = \frac{\partial f}{\partial y}$ doit rester invariante, on aura

$$y' = y + \mathrm{c^{te}};$$

la constante devra être réelle pour que (Σ) soit invariante.

Finalement toute opération du groupe de connexion de (Σ') est de la forme

$$x' = x, \quad y' = y + a \qquad (a \text{ réel});$$

le seul groupe proprement discontinu satisfaisant à cette condition est de la forme

$$x' = x, \quad y' = y + nh \qquad (n \text{ entier arbitraire, } h \text{ réel}).$$

Posons alors

$$X = x, \quad Y = e^{-\frac{2i\pi y}{h}};$$

les fonctions X et Y sont uniformes sur (Σ'), et l'équation de (Σ') est par suite

$$Y\bar{Y} = e^{\frac{\pi}{h}X\bar{X}},$$

ou, par un changement de variables évident,

$$(\Sigma'_{\mathrm{A}}) \qquad Y\bar{Y} = e^{X\bar{X}}.$$

Les équations du groupe G' de (Σ') sont

$$(\mathrm{G}'_{\mathrm{A}}) \qquad \begin{cases} X' = X + a + ib \\ Y' = Ye^{(a-ib)X+\frac{1}{2}(a^2+b^2)+ic}. \end{cases}$$

35. On doit maintenant se demander, pour chacune des hypersurfaces (Σ_{A}) et (Σ'_{A}), quel est son plus grand groupe de transformations pseudo-conformes. Pour (Σ_{A}), il est manifestement formé de toutes les transformations homographiques qui laissent invariante l'hyperconique (Σ_{A}), en laissant invariant le point à l'infini dans la direction de Oy. Ce groupe est à cinq paramètres et a pour équations

$$(10) \qquad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta & (\alpha \neq 0), \\ y' = \alpha\bar{\alpha}y + \frac{1}{2}i\alpha\bar{\beta}x + \frac{1}{4}i\beta\bar{\beta} + c & (c \text{ réel}). \end{cases}$$

Quant au groupe de (Σ'_{A}), il correspond à celles des transformations précédentes qui sont invariantes par

$$x' = x, \quad y' = y + h,$$

ce qui exige $\alpha\bar{\alpha} = 1$. Le groupe de (Σ'_{A}) est donc à quatre paramètres réels, et ses équations finies sont, en remplaçant α par e^{ia},

$$(11) \qquad \begin{cases} X' = e^{ia}X + \beta \\ Y' = Ye^{\bar{\beta}e^{ia}X+\frac{1}{2}\beta\bar{\beta}+ic} \end{cases} \qquad (a, c \text{ réels}).$$

36. En résumé, il y a deux hypersurfaces non globalement équivalentes du type (A). *L'une, simplement connexe, est l'hyperconique privée d'un de ses points: elle admet globalement un groupe* (10) *pseudo-conforme connexe à 5 paramètres. L'autre, non simplement connexe, dont l'équation est réductible à*

$$Y\bar{Y} = e^{X\bar{X}},$$

admet globalement un groupe (11) *à 4 paramètres.*

VI. Les hypersurfaces du type (B).

37. Les équations de structure étant

$$(X_1X_2) = X_2, \quad (X_1X_3) = 0, \quad (X_2X_3) = 0, \tag{B}$$

les transformations infinitésimales du groupe adjoint sont

$$E_1 \equiv -u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2}, \quad E_2 \equiv u_1 \frac{\partial f}{\partial u_2}, \quad E_3 \equiv 0,$$

et ses équations finies sont

$$u_1' = u_1, \quad u_2' = au_2 + bu_1, \quad u_3' = u_3.$$

Les transformées de $X_1 + iX_2 + iX_3$ peuvent donc être mises sous la forme $X_1 + xX_2 + iX_3$. Par suite, les transformations infinitésimales de G sont

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv -x\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_2 &\equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 &\equiv \phantom{-x\frac{\partial f}{\partial x} +{}} \eta_3 \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

On peut choisir pour y un invariant de la transformation $X_1 - iX_2 + iX_3$; on aura alors

$$\begin{aligned} \eta_1 + x\eta_2 + i\eta_3 &= 0, \\ \eta_1 - i\eta_2 + i\eta_3 &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\eta_2 = 0, \quad \eta_1 + i\eta_3 = 0.$$

Les équations de structure donnent $\frac{\partial \eta_3}{\partial x} = 0$, ce qui permet de poser $\eta_3 = 1$. On a donc

$$\left\{ \begin{aligned} X_1 &\equiv -x\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_2 &\equiv \frac{\partial f}{\partial x}\phantom{- i\frac{\partial f}{\partial y}}, \\ Y_3 &\equiv \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \right. \tag{G_B}$$

Les équations finies de ce groupe sont

$$x' = e^c x + a, \quad y' = y + b + ic;$$

(Σ) est le lieu des transformés du point (i, y_0) d'où, en remplaçant $y - y_0$ par y,

$$\left\{ \begin{aligned} x &= a + ie^c, \\ y &= b + ic; \end{aligned} \right. \tag{Σ_B}$$

l'équation de (Σ_B) est

$$(\Sigma_B) \qquad \frac{x-\bar{x}}{i} - e^{\frac{y-\bar{y}}{i}} = 0.$$

38. L'hypersurface (Σ_B) est simplement connexe. On aura le groupe de connexion de toute autre hypersurface localement équivalente du type (B) en remarquant que, comme dans le cas du type (A), on aura, pour toute opération de ce groupe,

$$x' = x;$$

d'autre part y sera transformée en une fonction de y, nécessairement de la forme $y' = y + c^{te}$, la constante étant réelle.

Le groupe de connexion est donc nécessairement de la forme

$$x' = x, \quad y' = y + nh \qquad (n \text{ entier}, h \text{ réel}).$$

En posant

$$X = x, \quad Y = e^{-\frac{2i\pi}{h}y},$$

on obtiendra pour équation de (Σ'_B),

$$(\Sigma'_B) \qquad \frac{X-\bar{X}}{i} \quad (Y\bar{Y})^{\frac{h}{2\pi}} = 0 \qquad (Y \neq 0).$$

Les équations finies de (G'_B) sont

$$(G'_B) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X' = e^c X + a, \\ Y' = Y e^{-\frac{2i\pi}{h}(b+ic)}. \end{array} \right.$$

En particulier, on retrouve, pour $h = 2\pi$, *l'hyperconique* $X - \bar{X} - iYY = 0$ *privée des points situés sur la droite* $Y = 0$.

39. Le plus grand groupe pseudo-conforme de (Σ_B) s'obtient facilement en remarquant que, localement, (Σ_B) admet le groupe à 8 paramètres qui se déduit du groupe homographique de l'hyperconique

$$X - \bar{X} - iYY = 0$$

en posant $X = x$, $Y = e^{-iy}$. Il est clair que y restant fini sur (Σ_B), il ne faudra prendre, des transformations de ce groupe, que celles qui laissent invariante la droite $Y = 0$. On trouve sans difficulté le groupe à 4 paramètres

$$X' = \frac{aX+b}{cX+d}, \quad Y' = \frac{e^{ih}Y}{cX+d} \quad (a, b, c, d, h \text{ réels}, ad - bc = 1),$$

d'où, pour le groupe de (Σ_B),

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad y' = y - h - i\log(cx+d). \tag{12}$$

40. En conclusion, nous voyons que *l'hypersurface* (Σ_B) *simplement connexe admet un groupe à 4 paramètres* (12); *il y a une infinité d'hypersurfaces* (Σ'_B) *non simplement connexes, à savoir* [19]:

$$\frac{X-\bar{X}}{i} - (Y\bar{Y})^m = 0 \quad (Y \neq 0) \ (m \text{ constante positive}),$$

dont chacune admet un groupe à 4 paramètres, à savoir:

$$X' = \frac{aX+b}{cX+d}, \quad Y' = \frac{e^{ik}Y}{(cX+d)^{\frac{1}{m}}}. \tag{13}$$

Ces hypersurfaces ne sont pas globalement équivalentes entre elles, sinon leurs groupes de connexion pourraient être transformés entre eux par une des transformations pseudo-conformes qui laissent invariante (Σ_B), ce qui n'est pas.

VII. Les hypersurfaces du type (C).

41. Les équations de structure étant

$$(X_1X_2) = X_3, \quad (X_1X_3) = X_2, \quad (X_2X_3) = -X_1,$$

les transformations infinitésimales du groupe adjoint sont

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv -u_2\frac{\partial f}{\partial u_3} - u_3\frac{\partial f}{\partial u_2}, \\ E_2 &\equiv u_1\frac{\partial f}{\partial u_3} + u_3\frac{\partial f}{\partial u_1}, \\ E_3 &\equiv u_1\frac{\partial f}{\partial u_2} - u_2\frac{\partial f}{\partial u_1}. \end{aligned}$$

Elles laissent invariante la forme quadratique $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2$; le groupe adjoint est le groupe linéaire réel qui laisse cette forme invariante. Comme

---

[19] En posant

$$X = \frac{i}{2}\frac{1+\xi}{1-\xi}, \quad Y = \frac{\eta}{(1-\xi)^{\frac{1}{m}}},$$

l'hypersurface (Σ'_B) a pour équation

$$\xi\bar{\xi} + (\eta\bar{\eta})^m = 1 \qquad (\eta \neq 0);$$

sous cette forme elle a été rencontrée par THULLEN, *Zu den Abbildungen durch analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen* (« Math. Ann. », 104, 1931, pp. 244-259).

les paramètres $u_1=1$, $u_2=i$, $u_3=0$ annulent cette forme, les transformations infinitésimales associées aux différents points de (Σ) sont celles dont les coefficients annulent la forme quadratique. On peut les écrire sous la forme

$$(1-x^2)X_1+2xX_2+(1+x^2)X_3,$$

le point origine correspondant à $x=i$.

La quantité x est manifestement transformée par le groupe homographique réel. Du reste, en remarquant que $x=\frac{u_2}{u_1+u_3}=\frac{u_3-u_1}{u_2}$, on trouve, en ce qui concerne x,

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv -\frac{1-x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x}, \\ X_2 &\equiv \quad -x\frac{\partial f}{\partial x}, \\ X_3 &\equiv \frac{1+x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

On posera donc

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv -\frac{1-x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_1\frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_2 &\equiv \quad -x\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_2\frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 &\equiv \frac{1+x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_3\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

En prenant pour y un invariant de X_3-X_1, on aura

$$\eta_3-\eta_1=0,$$
$$(1-x^2)\eta_1+2x\eta_2+(1+x^2)\eta_3=0,$$

d'où

$$\eta_1=\eta_3=-x\eta_2.$$

La relation

$$(X_3-X_1,\ X_2)=X_1-X_3$$

donne ensuite $\frac{\partial\eta_2}{\partial x}=0$, ce qui permet de poser $\eta_2=-\frac{i}{2}$.

Finalement on trouve

$$(G_C)\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &\equiv -\frac{1-x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{ix}{2}\frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_2 &\equiv \quad -x\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 &\equiv \frac{1+x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{ix}{2}\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Les équations finies de ce groupe s'obtiennent facilement en remarquant que $\eta_k = \frac{i}{2} \xi'_k$, d'où

$$(G_C) \qquad x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad y' = y - i \log (cx+d) \qquad (ad - bc = 1).$$

42. L'hypersurface (Σ_C) est le lieu des transformés du point (i, y_0) ou, en remplaçant $y - y_0$ par y, le lieu des points

$$(\Sigma_C) \qquad x = \frac{ai+b}{ci+d}, \quad y = -i \log (ci+d);$$

l'équation de cette hypersurface est

$$(\Sigma_C) \qquad \frac{x - \bar{x}}{2i} - e^{\frac{y - \bar{y}}{i}} = 0.$$

On voit que c'est la même hypersurface que (Σ_B) et on constate sans difficulté qu'on retrouve aussi les mêmes hypersurfaces (Σ'_B).

Les hypersurfaces du type (C) *sont donc les mêmes que celles du type* (B): *elles admettent globalement un groupe à 4 paramètres.*

VIII. Les hypersurfaces du type (D).

43. Les équations de structure étant

$$(X_1 X_2) = -X_3, \quad (X_1 X_3) = X_2, \quad (X_2 X_3) = -X_1,$$

le groupe adjoint est formé des substitutions linéaires réelles qui laissent invariante la forme quadratique $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$. Comme les paramètres de $X_1 + iX_2$ annulent cette forme, les transformations infinitésimales imaginaires associées aux différents points de (Σ) peuvent être mises sous la forme

$$(1 + x^2) X_1 + i(1 - x^2) X_2 + 2ix X_2,$$

le point origine M_0 correspondant à $x = 0$.

Le groupe G a ses transformations infinitésimales de la forme

$$\begin{aligned}
X_1 &\equiv \frac{1+x^2}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \\
X_2 &\equiv i \frac{1-x^2}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y}, \\
X_3 &\equiv ix \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_3 \frac{\partial f}{\partial y},
\end{aligned}$$

et, là encore, on peut supposer $\eta_k = -\frac{1}{2}\xi'_k$, d'où

$$X_1 \equiv \frac{1+x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{x}{2}\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$X_2 \equiv i\frac{1-x^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{x}{2}\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$X_3 \equiv ix\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Les équations finies de ce groupe sont

$$x' = \frac{ax-b}{\bar{b}x+\bar{a}}, \quad y' = y + \log(\bar{b}x+\bar{a}) \qquad (a\bar{a}+b\bar{b}=1),$$

et l'hypersurface (Σ) est le lieu des transformés du point $(0, y_0)$, d'où en remplaçant $y-y_0$ par y:

$$x = -\frac{b}{\bar{a}}, \quad y = \log \bar{a}.$$

Un changement de variables évident, qui conduit aux nouvelles variables $x = -b$, $y = \bar{a}$, donne

$$(\Sigma_D) \qquad x\bar{x} + y\bar{y} - 1 = 0,$$

avec le groupe

$$(G_D) \qquad \begin{cases} X_1 \equiv \frac{1}{2}\left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ X_2 \equiv \frac{i}{2}\left(y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ X_3 \equiv \frac{i}{2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right), \end{cases}$$

dont les équations finies sont

$$(G_D) \qquad x' = ax - by, \quad y' = \bar{b}x + \bar{a}y$$
$$(a\bar{a} + b\bar{b} = 1).$$

44. L'hypersurface (Σ_D) n'est autre que l'hyperconique (*hypersphère* de H. POINCARÉ); elle admet du reste globalement un groupe à 8 paramètres. Pour avoir les autres hypersurfaces (Σ_D) du type (D), cherchons leurs groupes de connexion possibles. Comme la transformation infinitésimale associée à un point de (Σ_D) est

$$(x^2+y^2)X_1 - i(x^2-y^2)X_2 + 2ixyX_3,$$

le rapport $\frac{y}{x}$ est conservé par toute opération du groupe de connexion. Cette opération est donc de la forme

$$x' = x\varphi(x, y),$$
$$y' = x\varphi(x, y);$$

mais comme elle laisse invariante l'hypersphère, c'est que $\varphi(x, y)$ reste de module égale à 1 sur (Σ_D) : cela n'est possible que si cette fonction se réduit à une constante $e^{i\alpha}$. Or, les seuls groupes proprement discontinus engendrés par des transformations de la forme

$$x' = e^{i\alpha}x, \quad y' = e^{i\alpha}y$$

sont les groupes cycliques finis formés des puissances de

$$x' = e^{\frac{2i\pi}{n}}x, \quad y' = e^{\frac{2i\pi}{n}}y \qquad (n \text{ entier positif donné}).$$

Les hypersurfaces (Σ'_D) *cherchées s'obtiennent donc en regardant deux points de l'hypersphère comme identiques, s'ils se déduisent l'un de l'autre par une homothétie de centre* (0, 0) *admettant pour rapport d'homothétie une racine n-ième de l'unité.*

Ces hypersurfaces, pour $n > 2$, admettent globalement le groupe des transformations de l'hypersphère qui laissent fixe le point origine (0, 0). Ce groupe est à 4 paramètres et a pour équations finies

(14) $$x' = e^{ih}(ax - by), \quad y' = e^{ih}(\bar{b}x + \bar{a}y)$$
$$(a\bar{a} + b\bar{b} = 1, \ h \text{ réel}).$$

En posant

$$\frac{x}{y} = X, \quad y^n = Y,$$

on a l'équation

$$Y\bar{Y} = \frac{1}{(1 + X\bar{X})^n};$$

mais la représentation analytique de (Σ'_D) ainsi obtenue n'est plus partout régulière, car les différents points $(x = e^{i\theta}, \ y = 0)$ de (Σ'_D) sont représentés par les mêmes coordonnées $(X = \infty, \ Y = 0)$.

45. En résumé, *appartiennent au type* (D) *l'hypersphère, qui admet globalement un groupe à 8 paramètres, et une infinité d'autres hypersurfaces dépendant d'un entier positif arbitraire* n, *qui admettent globalement chacune un groupe à 4 paramètres.*

Nous remarquons que les hypersurfaces des types (A), (B), (C), (D) *admettent toutes localement un groupe à 8 paramètres et globalement un groupe à 8, 5 ou 4 paramètres.*

IX. Les hypersurfaces du type (E).

46. Les équations de structure étant

$$(X_1 X_3) = X_1, \quad (X_2 X_3) = m X_2, \quad (X_1 X_2) = 0,$$

avec une constante réelle $m \neq 0$, les transformations infinitésimales du groupe adjoint sont

$$E_1 \equiv -u_3 \frac{\partial f}{\partial u_1},$$
$$E_2 \equiv -m u_3 \frac{\partial f}{\partial u_2},$$
$$E_3 \equiv u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + m u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2};$$

ce sont aussi, en coordonnées homogènes u_1, u_2, u_3, *les transformations infinitésimales de* G.

Comme la variable u_3 est invariante *et qu'elle ne peut être nulle,* sans quoi les transformations associées aux différents points de (Σ) seraient toutes de la forme $X_1 + u X_2$, on peut supposer $u_3 = 1$. En remplaçant u_1 par x et u_2 par y, on a donc

$$(\mathrm{G_E}) \qquad \begin{cases} X_1 \equiv -\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ X_2 \equiv -m \dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 \equiv x \dfrac{\partial f}{\partial x} + m y \dfrac{\partial f}{\partial y}, \end{cases}$$

avec les équations finies

$$(\mathrm{G_E}) \qquad \begin{cases} x' = c x + a, \\ y' = c^m y + b, \end{cases} \qquad (a, b, c \text{ réels}; \ c > 0).$$

On ne peut partir d'un point (x_0, y_0) pour lequel l'une des deux coordonnées, x_0 par exemple, serait réelle, car alors x resterait réelle en tout point de (Σ), qui serait un hyperplanoïde. Soient α et β les coefficients de i dans x_0, y_0; en remplaçant $\frac{x}{\alpha}$ par x et $\frac{y}{\beta}$ par y, on a l'hypersurface

$$(\Sigma_\mathrm{E}) \qquad \begin{cases} x = c i + a, \\ y = c^m i + b, \end{cases}$$

dont l'équation est

$$(\Sigma_\mathrm{E}) \qquad \frac{y - \bar{y}}{2i} - \left(\frac{x - \bar{x}}{2i}\right)^m = 0, \quad \left(\frac{x - \bar{x}}{i} > 0\right).$$

Comme cette hypersurface est simplement connexe et que le groupe de connexion de toute hypersurface du même type doit laisser invariants les coefficients de la transformation infinitésimale $xX_1 + yX_2 + X_3$ associée à un point variable de (Σ), c'est que ce groupe se réduit à la transformation identique. *L'hypersurface* (Σ_E) *est donc la seule du type* (E).

47. Il y a lieu de se demander si (G_E) est le plus grand groupe pseudo-conforme laissant invariante (Σ_E). Remarquons d'abord qu'en général ce plus grand groupe sera à 3 paramètres; dans le cas contraire, en effet, il faudrait que la congruence des surfaces caractéristiques associées à (Σ_E), à savoir

$$\frac{y-b}{2i} - \left(\frac{x-a}{2i}\right)^m = 0,$$

satisfît à une équation différentielle réductible à $y'' = 0$: il est *nécessaire* pour cela que cette équation différentielle soit de la forme

$$y'' = Ay'^3 + By'^2 + Cy' + D,$$

A, B, C, D étant des fonctions analytiques de x, y. Or, ici, cette équation est

$$y'' = \frac{m(m-1)}{2i}\left(\frac{y'}{m}\right)^{\frac{m-1}{m-2}}.$$

Il faut exclure le cas $m = 1$, où les surfaces caractéristiques ne dépendraient que d'un paramètre; restent donc les cas $\frac{m-1}{m-2} = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$ qui se réduisent à $m = 2$ et $m = \frac{1}{2}$; ce dernier se ramène au premier en changeant les rôles de x et y. *On peut du reste supposer* $|m| \geq 1$.

Si donc m *est différent de* 2, le plus grand groupe pseudo-conforme de (Σ_E) est à 3 paramètres. Mais il pourrait contenir plusieurs familles connexes distinctes de transformations. Or toute transformation n'appartenant pas au groupe connexe (G_E) laisse nécessairement ce groupe invariant; par suite X_1, qui engendre un sous-groupe invariant de (G_E), est transformée en X_1 ou en X_2, et réciproquement. Cette transformation est donc, soit de la forme

$$x' = \varphi(x), \quad y' = \psi(y),$$

soit de la forme

$$x' = \varphi(y), \quad y' = \psi(x).$$

Dans le premier cas, elle est de la forme

$$x' = cx + a, \quad y' = dy + b,$$

a, b, c, d étant réels; mais pour qu'elle laisse (Σ_E) invariante, il faut $c > 0$, $d = c^m$; on retrouve le groupe (G_E) lui-même.

Dans le second cas, on aurait

$$x' = cy + a, \quad y' = dx + b,$$

ce qui n'est possible que si $m = -1$, avec a, b, c, d réels, $c > 0$, $d = \frac{1}{c}$.

Par suite *le plus grand groupe pseudo-conforme de* (Σ_E) *est un groupe connexe à trois paramètres si* m, *supposé de valeur absolue supérieure ou égale à* 1, *est différent de* 2 *et de* -1; *il est formé de deux familles connexes à trois paramètres si* $\mathrm{m} = -1$.

Si enfin $m = 2$, l'hypersurface est localement équivalente à l'hyperconique, comme on le voit en posant

$$x = X, \quad y + \frac{i}{2} x^2 = Y;$$

on obtient

$$\frac{Y - \overline{Y}}{i} - X\overline{X} = 0, \quad \left(\frac{X - X}{i} > 0\right).$$

Mais il faut remarquer que la partie imaginaire de x étant positive, *il ne faut garder de l'hyperconique que les points pour lesquels* $X_2 > 0$. On vérifie sans difficulté que les transformations du groupe à 8 paramètres de l'hyperconique qui laissent invariante l'hypersurface (Σ_E) forment un seul groupe connexe à 3 paramètres.

Il n'y a donc que le cas $\mathrm{m} = -1$ *pour lequel* (Σ_E) *admette globalement deux familles distinctes de transformations pseudo-conformes.*

X. Les hypersurfaces du type (F).

48. Les équations de structure étant

$$(X_1 X_3) = X_1, \quad (X_2 X_3) = X_1 + X_2, \quad (X_1 X_2) = 0,$$

les transformations infinitésimales de G sont, en coordonnées homogènes,

$$X_1 \equiv -u_3 \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

$$X_2 \equiv -u_3 \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\right),$$

$$X_3 \equiv (u_1 + u_2) \frac{\partial f}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2}.$$

Là encore on peut supposer $u_3 = 1$ et, revenant aux coordonnées non homogènes x, y, prendre

$$(\mathrm{G_F})\qquad \left\{\begin{aligned} X_3 &\equiv -\frac{\partial f}{\partial x},\\ X_3 &\equiv -\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y},\\ X_3 &\equiv (x+y)\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y},\end{aligned}\right.$$

avec les équations finies

$$(\mathrm{G_F})\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= e^c(x+cy)+a,\\ y' &= e^c y+b.\end{aligned}\right.$$

On peut, comme dans le cas précédent, définir (Σ_F) comme le lieu des transformés du point $(0, i)$, ce qui donne

$$(\Sigma_F)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a+ice^c,\\ y &= b+ie^c.\end{aligned}\right.$$

Cette hypersurface est simplement connexe et on démontre facilement que $(\mathrm{G_F})$ est son plus grand groupe pseudo-conforme.

XI. Les hypersurfaces du type (H).

49. Les équations de structure étant

$$(X_1X_3)=mX_1-X_2,\quad (X_2X_3)=mX_2+X_1,\quad (X_1X_2)=0,$$

les transformations infinitésimales de G s'obtiennent par la même méthode que dans les deux cas précédents. On trouve

$$(\mathrm{G_H})\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &\equiv -m\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y},\\ X_2 &\equiv -\frac{\partial f}{\partial x}-m\frac{\partial f}{\partial y},\\ X_1 &\equiv (mx+y)\frac{\partial f}{\partial x}+(my-x)\frac{\partial f}{\partial y},\end{aligned}\right.$$

avec les équations finies

$$(\mathrm{G_H})\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= e^{mc}(x\cos c+y\sin c)+a,\\ y' &= e^{mc}(-x\sin c+y\cos c)+b.\end{aligned}\right.$$

L'hypersurface peut être regardée comme le lieu des transformés du point $(i, 0)$; elle est définie paramétriquement par

$$(\Sigma_H)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a+ie^{mc}\cos c,\\ y &= b-ie^{mc}\sin c.\end{aligned}\right.$$

Si $m \neq 0$, elle est simplement connexe et (G_H) est le plus grand groupe psendo-conforme qui la laisse invariante.

Si $m = 0$, l'hypersurface n'est plns simplement connexe. Le groupe (G_H) se réduit au groupe des déplacements euclidiens réels du plan, et (Σ_H) a pour équation

$$(\Sigma_{H_0}) \qquad (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + 4 = 0.$$

Elle admet une seconde famille de transformations pseudo-conformes qu'on obtient en combinant (G_{H_0}) avec une symétrie par rapport à une droite réelle du plan. On peut regarder l'hypersurface (Σ_{H_0}) comme simplement connexe, à condition de regarder l'espace des deux variables complexes comme formé d'une infinité de feuillets (à 4 dimensions), le passage d'un feuillet à l'autre se faisant par exemple par la cloison à trois dimensions

$$y_2 = 0, \quad x_2 > 0.$$

Nous laisserons de côte la question de savoir *si on peut, dans un espace analytique complexe à 2 dimensions complexes, supposé simplement connexe, réaliser cette hypersurface simplement connexe de manière que deux points appartenant à deux feuillets différents, mais ayant les mêmes coordonnées initiales* (x, y), *prennent dans le nouvel espace deux positions différentes, de telle sorte que l'hypersurface soit univalente dans cet espace.* Contentons-nous de remarquer que la *surface de ramification*, qui est ici $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, *n'est pas caractéristique* [20].

XII. Les hypersurfaces du type (K): première espèce.

50. Nous avons déjà vu (n. 41) que le groupe adjoint n'est autre que le groupe projectif réel de la conique

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0,$$

que nous appellerons la *conique fondamentale.*

Chacune des hypersurfaces cherchées (Σ) pourra être regardée comme le lieu des transformés d'un certain point M_0 du plan projectif complexe par les transformations projectives réelles de la conique fondamentale. Mais plusieurs cas sont à distinguer, suivant la position par rapport à la conique fondamentale de la droite réelle qui contient ce point M_0, nécessairement imaginaire.

[20] La résolution de ce problème est du domaine de la théorie des fonctions.

Cette droite $M_0\overline{M}_0$ ne peut être tangente à la conique, car alors la transformation infinitésimale associée à M_0 engendrerait, avec la transformation imaginaire conjuguée, un groupe: il suffit pour le voir de prendre le cas particulier de la tangente $u_2 = u_3$, qui donnerait le sous-groupe engendré par X_1 et $X_2 + X_3$.

Cela posé, deux cas sont possibles, suivant que $M_0\overline{M}_0$ est extérieure à la conique ou la coupe.

51. *Supposons d'abord la droite réelle* $M_0\overline{M}_0$ *extérieure à la conique.*

On peut supposer que c'est la droite $u_3 = 0$; le point M_0 a des coordonnées $(1, u, 0)$; mais, par une transformation de G remplaçant respectivement

$$u_1, \ u_2, \ u_3$$

par

$$u_1 \cos\alpha - u_2 \sin\alpha, \quad u_1 \sin\alpha + u_2 \cos\alpha, \quad u_3,$$

on peut multiplier $\frac{u_1 + iu_2}{u_1 - iu_2} = \frac{1 + iu}{1 - iu}$ par $e^{2i\alpha}$, ce qui permet de donner à ce rapport une valeur réelle et positive k; on aura alors

$$u = i\frac{1-k}{1+k} = im \qquad (|m| < 1).$$

Le lieu des transformés du point $(1, im, 0)$ est facile à obtenir. En effet, quand on effectue sur u_1, u_2, u_3 une substitution linéaire *réelle* laissant invariante la forme $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2$, la forme d'HERMITE $u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 - u_3\bar{u}_3$ est également invariante. On a donc, en tout point de (Σ),

$$\frac{u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 - u_3\bar{u}_3}{|u_1^2 + u_2^2 - u_3^2|} = \frac{1+m^2}{1-m^2}.$$

Le second membre est une constante réelle μ plus grande que 1. En remarquant que toute droite réelle qui coupe la conique fondamentale ne contient aucun point de l'hypersurface, on peut introduire des coordonnées non homogènes

$$\frac{u_2}{u_1} = x, \quad \frac{u_3}{u_1} = y,$$

et on a l'équation

$$(15) \qquad 1 + x\bar{x} - y\bar{y} = \mu\,|1 + x^2 - y^2|.$$

52. Il importe maintenant de voir si tout point satisfaisant à l'équation (15) fait partie de l'hypersurface (Σ_K). Il est clair d'abord que les points réels de la conique fondamentale satisfont à l'équation (15), mais ne peuvent être transformés du point imaginaire M_0. Nous allons voir que, ces points exclus, l'équation (15) définit *deux* hypersurfaces connexes distinctes.

Remarquons d'abord qu'un point imaginaire satisfaisant à l'équation (15) ne peut être situé sur une droite réelle ayant un point réel sur la conique fondamentale; en effet cette sécante pourrait, par une transformation de G, être ramenée à $x=0$, et l'égalité

$$1-y\bar{y}=\mu\,|\,1-y^2\,|$$

est impossible, en vertu de l'inégalité

$$|\,1-y^2\,|>1-|\,y^2\,|.$$

Tout point imaginaire est, d'après cela, le transformé d'un point situé sur une droite réelle extérieure à la conique, qu'on peut supposer $y=0$, et, d'après le raisonnement fait plus haut, on peut supposer que les coordonnées de ce point sont ($u_1=1$, $u_2=im'$, $u_3=0$) ou ($x=im'$, $y=0$). On aura alors

$$\mu=\frac{1+m'^2}{1-m'^2},$$

d'où $m'=\pm m$. *Or on ne peut passer par continuité du point* $(1,\ im,\ 0)$ *au point* $(1,\ -im,\ 0)$.

Pour nous rendre compte nettement de ce résultat important, remarquons que si on exprime les coordonnées d'un point réel de la conique fondamentale en fonctions rationnelles d'un paramètre réel t, par exemple

$$x=\frac{2t}{1-t^2},\quad y=\frac{1+t^2}{1-t^2},$$

toute homographie réelle de la conique se traduit par une homographie réelle sur t, et réciproquement. Or les homographies réelles

$$t'=\frac{at+b}{ct+d}$$

forment deux familles distinctes, suivant que $ad-bc$ est >0 ou <0.

Cela posé, la polaire du point $(1,\ im,\ 0)$, à savoir $1+imx=0$, coupe la conique fondamentale aux deux points donnés par

$$1-t^2+2imt=0,$$

d'où

$$t=im\pm\sqrt{1-m^2};$$

au contraire les points où la polaire du point $(1,\ -im,\ 0)$ coupe la conique sont

$$t=-im\pm\sqrt{1-m^2}.$$

Or, les transformations homographiques réelles à déterminant $ad - bc > 0$ effectuées sur t conservent le signe du coefficient de i. Cela suffit pour prouver qu'aucune transformation du groupe connexe ne permet de passer du point $(1, im, 0)$ au point $(1, -im, 0)$.

53. L'hypersurface (Σ) lieu des transformés du point $(1, im, 0)$ s'obtient donc en ajoutant à l'équation (15) une inégalité qui exprime que la partie imaginaire des valeurs de t correspondant aux points de contact des tangentes menées à la conique fondamentale est d'un signe donné, positive per exemple. Ces valeurs de t sont racines de l'équation

$$(16) \qquad 1 - t^2 + 2xt - y(1 + t^2) = 0;$$

la somme des deux racines est $\frac{2x}{1+y}$. L'hypersurface (Σ_K) est donc définie par

$$(\Sigma_K) \qquad \begin{cases} 1 + x\bar{x} - y\bar{y} = \mu \,|\, 1 + x^2 - y^2 \,|, \\ x(1 + \bar{y}) - \bar{x}(1 + y) > 0. \end{cases}$$

On remarquera que *le plus grand groupe pseudo-conforme de* (Σ_K) *est connexe,* les tranformations homographiques sur t de déterminant $ad - bc < 0$ changeant (Σ_K) en une hypersurface distincte. Mais chaque point de (Σ_K) est invariant par une transformation non identique du groupe, celle qui échange entre elles les deux racines de (16).

54. Arrivons maintenant à la détermination des hypersurfaces localement équivalentes à (Σ_K). Toutes ces hypersurfaces sont des variétés de recouvrement de (Σ_K), puisqu'à chaque point d'une telle hypersurface est associée une transformation infinitésimale imaginaire déterminée de (G_K), c'est-à-dire un point déterminé de (Σ_K).

On en obtient immédiatement une par un procédé géométrique simple, en faisant correspondre à tout point (x, y) de (Σ_K) l'ensemble des deux valeurs de t, racines de (16), qui définissent les points d'intersection de la conique fondamentale avec la polaire de (x, y). Nous pouvons ordonner de deux manières différentes ces deux valeurs de t, que nous désignerons par ξ et η, et nous aurons ainsi une hypersurface recouvrant deux fois (Σ_K). On a

$$\xi + \eta = \frac{2x}{1+y}, \quad \xi\eta = \frac{y-1}{y+1},$$

d'où

$$x = \frac{\xi + \eta}{1 - \xi\eta}, \quad y = \frac{1 + \xi\eta}{1 - \xi\eta}.$$

On obtient ainsi, dans le demi-plan de POINCARÉ, un couple ordonné de points (ξ, η) dont la distance *non euclidienne* δ reste évidemment constante quand on effectue sur ξ et η une même homographie réelle à déterminant positif ([21]). L'équation de la nouvelle hypersurface (Σ'_K) est donc ([22]), en remarquant qu'elle contient le point

$$\xi = im + \sqrt{1-m^2}, \quad \eta = im - \sqrt{1-m^2},$$

soit

$$(\Sigma'_K) \qquad (\xi-\eta)(\bar\xi-\bar\eta) + sh^2\frac{\delta}{2}(\xi-\bar\xi)(\eta-\bar\eta) = 0 \qquad \left(\frac{\xi-\bar\xi}{i}>0\right),$$

soit

$$(\Sigma'_K) \qquad (\xi-\bar\eta)(\bar\xi-\eta) + ch^2\frac{\delta}{2}(\xi-\bar\xi)(\eta-\bar\eta) = 0 \qquad \left(\frac{\xi-\bar\xi}{i}>0\right),$$

soit enfin

$$(\Sigma'_K) \qquad (\xi-\bar\eta)(\bar\xi-\eta) - (\xi-\bar\xi)(\eta-\bar\eta) = \mu(\xi-\eta)(\bar\xi-\bar\eta) \qquad \left(\frac{\xi-\bar\xi}{i}>0\right).$$

Cette dernière équation peut se déduire directement de (15). On a du reste

$$sh\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m} \quad \text{ou} \quad ch\frac{\delta}{2} = \frac{1}{m},$$

d'où

$$\mu = \frac{1+ch^2\frac{\delta}{2}}{sh^2\frac{\delta}{2}}.$$

55. On peut enfin arriver à une hypersurface simplement connexe en posant

$$\xi = X + e^Y, \quad \eta = X - e^Y,$$

d'où

$$4e^{Y+\bar Y} - sh^2\frac{\delta}{2}(e^Y - e^{\bar Y})^2 + sh^2\frac{\delta}{2}(X-\bar X)^2 = 0 \qquad \left(\frac{X-\bar X}{i}>0\right),$$

ou encore, en séparant les parties réelles et imaginaires,

$$(\Sigma''_K) \qquad X_2 = e^{Y_1}\sqrt{\sin^2 Y_2 + \frac{1}{sh^2\frac{\delta}{2}}} = e^{Y_1}\sqrt{\frac{\mu-\cos 2Y_2}{2}}.$$

([21]) Cette hypersurface a été rencontrée par E. et H. CARTAN (« Comptes-Rendus », 192, 1931, p. 710). Voir HENRI CARTAN, *Sur les transformations analytiques des domaines cerclés et semi-cerclés bornés* (« Math. Annales », 106, 1932, pp. 540-573).

([22]) On applique la formule

$$sh\frac{\delta}{2} = \frac{d}{2\sqrt{yy'}},$$

d désignant la distance euclidienne des deux points de coordonnées rectangulaires (x, y) et (x', y'). Voir E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie projective complexe* (Paris, Gauthier-Villars, 1931, p. 85).

Sous cette forme, l'équation montre que l'hypersurface est simplement connexe, puisque chacun de ses points est défini analytiquement par la donnée de trois nombres réels finis X_1, Y_1, Y_2.

Les équations du groupe G sont ici

$$(17) \qquad X' = \frac{(aX+b)(cX+d) - ace^{2Y}}{(cX+d)^2 - c^2e^{2Y}}, \quad Y' = Y - \log\{(cX+d)^2 - c^2e^{2Y}\};$$

elles sont régulières en tout point de (Σ''_K), le dénominateur de X' ne pouvant s'annuler que si l'on a

$$cX_2 = ce^{Y_1}\sin Y_2, \quad \text{d'où } c = 0, \quad \text{et par suite } d = 0;$$

mais cela est incompatible avec la relation $ad - bc = 1$.

56. On peut maintenant de (Σ''_K) déduire toutes les hypersurfaces du type (K) qui sont variétés de recouvrement de (Σ_K). Le groupe de connexion proprement discontinu qui caractérise l'une quelconque d'entre elles doit laisser invariantes les deux quantités $\xi + \eta = 2X$, $\xi\eta = X^2 - e^{2Y}$. On a donc

$$(18) \qquad X' = X, \quad Y' = Y + ni\pi \qquad (n \text{ entier}).$$

Inversement, toute transformation de cette nature laisse invariante (Σ''_K), ainsi que chacune des transformations du groupe (17) de (Σ''_K). Le groupe cherché est donc de la forme

$$X' = X, \quad Y' = Y + nhi\pi \quad (h \text{ entier fixe positif, } n \text{ entier variable}).$$

En posant alors

$$X = x, \quad e^{\frac{2Y}{h}} = y \qquad (y \neq 0),$$

on obtient l'équation

$$sh^2\frac{\delta}{2}(x-\bar{x})^2 - sh^2\frac{\delta}{2}(y^h + \bar{y}^h) + 2\left(1 + ch^2\frac{\delta}{2}\right)(y\bar{y})^{\frac{h}{2}} = 0 \qquad \left(\frac{x-\bar{x}}{i} > 0\right),$$

ou encore, en introduisant les parties réelles et imaginaires,

$$(\Sigma'''_K) \qquad y_1{}^h - C_h^2 y_1{}^{h-2} y_2^2 + \dots + 2x_2^2 = \mu(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{h}{2}} \qquad (x_2 > 0).$$

On retrouve (Σ_K), sous une autre forme analytique, en prenant $h = 1$.

57. Nous avons vu que l'hypersurface simplement connexe (Σ''_K) admettait le groupe connexe (17). Il est facile de voir qu'elle admet une autre famille connexe de transformations pseudo-conformes, à savoir celles qu'on obtient en combinant les transformations (17) avec la transformation

$$X' = X, \quad Y' = Y + i\pi,$$

qui ne rentre pas dans les formules (17). On obtient ainsi toutes les transformations pseudo-conformes de (Σ''_{K}), car si S est une quelconque de ces transformations, elle donne sur (Σ_{K}) une transformation pseudo-conforme déterminée qui produit sur (Σ_{K}) le même effet qu'une des transformations (17), puisque le groupe de (Σ_{K}) est connexe; par suite il existe une transformation de la même famille connexe que S qui laisse invariants tous les points de (Σ_{K}) et est donc de la forme (18). Or la transformation correspondant à $n=2$ fait partie des transformations (17); on peut donc supposer $n=1$, ce qu'il fallait démontrer.

De ce qui précède on déduit que le groupe pseudo-conforme de (Σ'''_{K}) est connexe pour h impair, formé de deux familles connexes pour h pair. En effet, dans la famille connexe de transformations de (Σ''_{K}) qui ne contient pas la transformation identique, se trouve, si h est impair, la transformation

$$X'=X, \quad Y'=Y+hi\pi$$

qui laisse invariants tous les points de (Σ'''_{K}); au contraire, si h est pair, aucune des transformations

$$X'=X, \quad Y'=Y+ni\pi \qquad (n \text{ impair})$$

ne laisse fixes les points de (Σ'''_{K}).

XIII. Les hypersurfaces du type (K) : deuxième espèce.

58. On aura une deuxième espèce d'hypersurfaces du type (K) en prenant, dans le plan de la conique fondamentale

$$u_1^2+u_2^2-u_3^2=0,$$

un point imaginaire situé sur une sécante réelle de la conique et le lieu des transformés de ce point par le groupe homographique réel connexe G de cette conique. On peut supposer que cette sécante est $u_2=0$; mais, comme les transformations de G permettent de multiplier $\frac{u_1-u_3}{u_1+u_3}$ par un facteur réel et positif arbitraire, on peut supposer que cette quantité est de module 1, ce qui revient à dire que $\frac{u_1}{u_3}$ est purement imaginaire. La quantité u_3 ne pouvant s'annuler pour aucun point de l'hypersurface, nous poserons

$$\frac{u_1}{u_3}=x, \quad \frac{u_2}{u_3}=y.$$

Cherchons donc le lieu des transformés du point $(x=im,\ y=0)$. On a pour ce point

$$x\bar{x} + y\bar{y} - 1 = m^2 - 1, \quad |x^2 + y^2 - 1| = m^2 + 1.$$

Tous les points de l'hypersurface satisfont donc à l'équation

$$x\bar{x} + y\bar{y} - 1 = \mu\,|x^2 + y^2 - 1|, \tag{19}$$

avec

$$\mu = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}, \quad -1 < \mu < 1.$$

Naturellement il ne faut conserver que les point *imaginaires* satisfaisant à l'équation (19). Mais, réciproquement, tout point imaginaire satisfaisant à (19) est situé sur une droite réelle qui ne peut être extérieure à la conique, sans quoi μ serait plus grand que 1. Cette droite, étant sécante, est la transformée, par une transformation de G, de $y = 0$; le point considéré est donc le transformé d'un point ($x = im'$, $y = 0$) et on a par suite

$$\frac{m'^2 - 1}{m'^2 + 1} = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}, \quad m' = \pm m.$$

Mais ici le point ($x = -im$, $y = 0$) est transformé du point ($x = im$, $y = 0$), par la transformation

$$x' = -x, \quad y' = -y$$

qui fait partie du sous-groupe *continu*

$$x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha, \quad y' = x \sin\alpha + y \cos\alpha$$

de G. Par suite, *l'hypersurface cherchée* ($\Sigma_{K'}$) *est le lieu des points imaginaires satisfaisant à* (19).

Un cas particulier remarquable est le cas $\mu = 0$. *On a dans ce cas le lieu des points imaginaires de l'hyperconique* $x\bar{x} + y\bar{y} = 1$, c'est-à-dire l'hyperconique privée de la ligne à une dimension, lieu de ses point réels.

59. On pourrait aussi considérer les points de la conique fondamentale situés sur la polaire d'un point variable de l'hypersurface, donnés paramétriquement par l'équation

$$(1 - t^2)x + 2ty - (1 + t^2) = 0.$$

En particulier le point ($x = im$, $y = 0$) conduit aux deux valeurs de t:

$$\xi = \sqrt{\frac{im - 1}{im + 1}}, \quad \eta = -\sqrt{\frac{im - 1}{im + 1}}.$$

En regardant ξ et η comme les affixes de deux points, on a un couple de points situés l'un dans le demi-plan positif, l'autre dans le demi-plan négatif de POINCARÉ. La distance non euclidienne δ du premier point au conjugué du second est donnée par

$$sh\frac{\delta}{2} = m.$$

On obtient ainsi l'hypersurface

$$(\xi - \bar{\eta})(\bar{\xi} - \eta) - m^2(\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta}) = 0 \qquad \left(\frac{\xi - \bar{\xi}}{i} > 0\right), \tag{20}$$

équivalente à $(\Sigma_{K'})$, parce que le couple (η, ξ) ne peut pas se déduire par continuité du couple (ξ, η).

L'hypersurface $(\Sigma_{K'})$ admet un groupe mixte formé de deux familles connexes de transformations pseudo-conformes, la seconde famille s'obtenant par composition des transformations de la première famille avec la symétrie

$$x' = x, \quad y' = -y.$$

Dans le cas de l'hypersurface (20), cette symétrie s'écrit

$$\xi' = -\eta, \quad \eta' = -\xi,$$

de sorte que les deux familles de transformations sont

$$\xi' = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \quad \eta' = \frac{a\eta + b}{c\eta + d} \qquad (ad - bc > 0),$$

et

$$\xi' = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}, \quad \eta' = \frac{a\xi + b}{c\xi + d} \qquad (ad - bc < 0).$$

Nous ne traiterons pas le problème de la recherche des hypersurfaces localement équivalentes à $(\Sigma_{K'})$ et appartenant au même type. Contentons-nous de remarquer qu'on a une hypersurface simplement connexe en regardant le produit topologique des deux demi-plans de POINCARÉ (ξ) et (η) comme formé d'une infinité de feuillets, le passage de l'un à l'autre se faisant par la coupure $\eta_1 = \xi_1$, $-\eta_2 < \xi_2$, où l'on a posé $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, $\eta = \eta_1 + i\eta_2$: l'hypersurface (20) devient alors simplement connexe; *la surface de ramification $\eta = \bar{\xi}$ n'est pas caractéristique.*

XIV. Les hypersurfaces du type (L).

60. Les équations de structure sont ici

$$(X_1X_2) = X_3, \quad (X_2X_3) = X_1, \quad (X_3X_1) = X_2.$$

Le groupe adjoint est le groupe homographique réel de la *conique fondamentale*

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0.$$

L'hypersurface cherchée est le lieu des transformés d'un point imaginaire particulier, qu'on peut supposer situé sur la droite $u_3 = 0$, et dont on peut ramener les coordonnées homogènes aux valeurs $(1, im, 0)$, avec $|m| < 1$. On a alors l'équation

$$(\Sigma_L) \qquad u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 + u_3\bar{u}_3 = \mu\,|u_1^2 + u_2^2 + u_3^2| \qquad \left(\mu = \frac{1+m^2}{1-m^2} > 1\right).$$

Tout point vérifiant l'équation précédente peut réciproquement être regardé comme le transformé de l'un des points $(1, \pm im, 0)$. Mais le point $(1, -im, 0)$ est lui-même le transformé de $(1, im, 0)$ par la transformation

$$u_1' = u_1, \quad u_2' = -u_2, \quad u_3' = -u_3,$$

qui fait partie d'un sous-groupe continu de G.

Le groupe des homographies de la conique fondamentale, et par suite celui de (Σ_L), ne contient qu'une famille connexe de transformations. En effet, toute homographie de la conique peut être ramenée à une substitution linéaire orthogonale de déterminant 1; il y a donc correspondance biunivoque entre ces homographies et les rotations de la sphère, qui forment une seule famille connexe.

61. On peut avoir une variété de recouvrement de (Σ_L) en introduisant le paramètre t des points de la conique fondamentale, défini par les équations

$$u_1 = 1 - t^2, \quad u_2 = i(1 + t^2), \quad u_3 = 2t.$$

Par ce choix du paramètre, deux points imaginaires conjugués de la conique ont leurs paramètres t et t' liés par la relation

$$t' = -\frac{1}{\bar{t}}.$$

Cela posé, les transformations de G se traduisent analytiquement par les transformations homographiques sur t de la forme

$$(21) \qquad t' = \frac{at - b}{\bar{b}t + \bar{a}}, \quad \text{avec} \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1.$$

La polaire du point $(1, im, 0)$ rencontre la conique fondamentale en deux points donnés par

$$1 - t^2 - m(1 + t^2) = 0, \quad \text{ou} \quad t^2 = \frac{1-m}{1+m}.$$

Représentons chaque valeur de t par un point de la sphère de Riemann, de telle sorte que deux points diamétralement opposés correspondent à deux valeurs t et $-\frac{1}{\bar{t}}$, en prenant, par exemple, pour coordonnées rectangulaires

X, Y, Z d'un point de la sphère,

$$X = \frac{t + \bar{t}}{1 + t\bar{t}}, \quad Y = \frac{i(t - \bar{t})}{1 + t\bar{t}}, \quad Z = \frac{1 - t\bar{t}}{1 + t\bar{t}}.$$

Les transformations (21) définissent alors les rotations de la sphère, qui ne changent pas la distance élémentaire de deux points. Pour les deux points $\pm\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}$, cette distance δ, comptée sur la sphère, est donnée par

$$\cos\frac{\delta}{2} = m.$$

On obtient ainsi comme variété de recouvrement de (Σ_L) *l'hypersurface* (Σ'_L) *lieu des couples ordonnés* (ξ, η) *de points de la sphère de Riemann situés à une distance constante* δ *l'un de l'autre.*

L'équation de (Σ'_L) est

$$(\Sigma'_L) \qquad (\xi - \eta)(\bar{\xi} - \bar{\eta}) = \operatorname{tg}^2\frac{\delta}{2}(1 + \xi\bar{\eta})(1 + \eta\bar{\xi});$$

elle pourrait se déduire directement de l'équation de (Σ_L) en posant

$$u_1 = 1 - \xi\eta, \quad u_2 = i(1 + \xi\eta), \quad u_3 = \xi + \eta.$$

62. L'hypersurface (Σ'_L) n'est pas simplement connexe. En effet elle est, au point de vue de l'Analysis situs, homéomorphe à la variété représentative des rotations de la sphère, puisque tout point de (Σ'_L) se déduit d'un point particulier par une rotation et une seule. Or le groupe des rotations de la sphère n'est pas simplement connexe; il admet un groupe de recouvrement simplement connexe, qui le recouvre deux fois, à savoir le groupe

$$\begin{aligned} u' &= au - bv \\ v' &= \bar{b}u + \bar{a}v \end{aligned} \qquad (a\bar{a} + b\bar{b} = 1).$$

Nous laisserons de côté la question de savoir s'il existe une hypersurface simplement connexe du type (L): elle recouvrirait deux fois (Σ'_L) et quatre fois (Σ_L).

XV. Les hypersurfaces qui admettent globalement un groupe à plus de trois paramètres.

63. Comme nous le verrons plus loin, et comme cela résulte des travaux de A. TRESSE [1], une hypersurface qui admet localement un groupe pseudo-conforme à plus de trois paramètres admet localement un groupe à 8 paramètres, localement semblable au groupe homographique d'une hyperconique.

Par suite *si une hypersurface admet globalement un groupe à plus de trois paramètres, ce sous-groupe est isomorphe à un sous-groupe du groupe à 8 paramètres de l'hyperconique.*

Or, les seuls groupes homographiques du plan à paramètres complexes qui ne laissent invariant ni un point, ni une droite sont les groupes à trois paramètres qui laissent invariante une conique et le groupe homographique général à 8 paramètres ([23]). Par conséquent tout sous-groupe à plus de trois paramètres réels du groupe de l'hyperconique laisse invariant un point ou une droite. D'autre part, s'il laisse invariante une droite, il laisse aussi invariant un point, à savoir le pôle de la droite par rapport à l'hyperconique; dans tous les cas il y a donc au moins un point invariant.

1° Si ce point est sur l'hyperconique, nous avons vu qu'il a au plus 5 paramètres, auquel cas c'est le groupe (10) (n. 35); s'il a moins de 5 paramètres, c'est un de ses sous-groupes. Dans le premier cas, l'hyperconique privée du point invariant est simplement connexe et nous avons vu qu'alors il n'y avait pas d'autre hypersurface admettant le même groupe. Dans le second cas, le groupe est à 4 paramètres; l'hypersurface cherchée admet pour hypersurface de recouvrement l'hyperconique privée d'un point et le groupe de connexion correspondant doit laisser invariante chaque transformation du groupe à 4 paramètres. Or les méthodes de S. Lie montrent que tout sous-groupe à 4 paramètres du groupe (10) est engendré par les transformations infinitésimales

$$(m+in)x\frac{\partial f}{\partial x}+2my\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}ix\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$i\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}x\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y},$$

où m et n désignent deux constantes réelles. Toute transformation qui laisse invariantes les trois dernières transformations infinitésimales est de la forme

$$x'=x,\quad y'=y+h;$$

elle ne peut laisser invariante la première que si $m=0$. On retombe alors sur l'hypersurface (Σ'_A) du n. 34, avec le groupe (11) (n. 35).

2° Si le point invariant n'est pas sur l'hyperconique, le groupe est à 4 paramètres et on retrouve les hypersurfaces des types (B), (C) et (D).

([23]) S. Lie et F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen* ([17]), III, p. 94.

Toutes les hypersurfaces admettant globalement un groupe à plus de 3 paramètres ont donc déjà été obtenues.

XVI. Résumé général.

63.[bis] *Si une hypersurface admettant un groupe pseudo-conforme transitif est localement équivalente à l'hypersphère, elle est globalement équivalente à l'une des hypersurfaces suivantes:*

1°		$x\bar{x} + y\bar{y} = 1$ (hypersphère);	
2°	(A)	$\frac{y-\bar{y}}{2i} = x\bar{x}$ (hypersphère privée d'un point);	
3°	(A)	$y\bar{y} = e^{x\bar{x}}$;	
4°	(B)	$\frac{y-\bar{y}}{2i} = e^{\frac{x-\bar{x}}{2i}}$;	
5°	(B)	$x\bar{x} + (y\bar{y})^m = 1$ avec $y \neq 0$	$(m > 0)$;
6°	(D)	$y\bar{y}(1 + x\bar{x})^n = 1$	(n entier positif);
7°	(E)	$\frac{y-\bar{y}}{2i} = \left(\frac{x-\bar{x}}{2i}\right)^2$ avec $\frac{x-\bar{x}}{2i} > 0$;	
8°	(K')	Hypersphère privée de ses points réels (ou l'une de ses variétés de recouvrement).	

La première admet un groupe à 8 paramètres, la seconde un groupe à 5 paramètres; les quatre suivantes un groupe à 4 paramètres, les deux dernières un groupe à 3 paramètres.

Si une hypersurface admettant un groupe pseudo-conforme transitif n'est pas localement équivalente à l'hypersphère, elle est globalement équivalente à l'une des hypersurfaces suivantes ou à l'une de leurs variétés de recouvrement:

1°	(E)	$\frac{y-\bar{y}}{2i} = \left(\frac{x-\bar{x}}{2i}\right)^m$, avec $\frac{x-\bar{x}}{2i} > 0$	$(\lvert m\rvert \geq 1,\ m \neq 1,\ 2)$;
2°	(F)	$\frac{y-\bar{y}}{2i} = e^{\frac{x-\bar{x}}{y-\bar{y}}}$;	
3°	(H)	$(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + 4e^{2m \operatorname{arc\,tg} \frac{x-\bar{x}}{y-\bar{y}}} = 0$;	
4°	(K)	$1 + x\bar{x} - y\bar{y} = \mu\lvert 1 + x^2 - y^2\rvert$, avec $\frac{x(1+\bar{y}) - \bar{x}(1+y)}{i} > 0$	$(\mu > 1)$;
5°	(K')	$x\bar{x} + y\bar{y} - 1 = \mu\lvert x^2 + y^2 - 1\rvert$, sauf les point réels	$(\lvert\mu\rvert < 1,\ \mu \neq 0)$;
6°	(L)	$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 = \mu\lvert x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3\rvert$	$(\mu > 1)$.

CHAPITRE III.

Les invariants pseudo-conformes d'une hypersurface.

I. Position du problème.

64. Il est entendu que les hypersurfaces que nous allons considérer dans ce Chapitre seront analytiques et ne seront pas des hyperplanoïdes. Nous pouvons écrire l'équation d'une telle hypersurface sous la forme

$$F(x,\ y;\ \bar{x},\ \bar{y}) = 0, \tag{1}$$

F étant une fonction analytique de ses quatre arguments, qui sera réelle quand on donnera à $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les valeurs complexes conjuguées de celles qui seront attribuées à x et y. Remarquons que les dérivées partielles F_x et $F_{\bar{x}}$, F_y et $F_{\bar{y}}$ sont alors complexes conjuguées.

L'équation de Pfaff

$$i(F_x dx + F_y dy) = 0, \tag{2}$$

dont le premier membre est réel quand le point $(x,\ y)$ est sur l'hypersurface et quand $dx,\ dy$ se rapportent à un déplacement infiniment petit sur cette hypersurface, représente l'élément plan caractéristique tangent à l'hypersurface au point considéré (n. 13). Elle a une signification intrinsèque, c'est-à-dire indépendante de tout changement analytique de variables portant sur x et y.

Si nous exprimons les coordonnées x et y d'un point de l'hypersurface en fonctions analytiques de trois paramètres réels $u,\ v,\ w$, le premier membre de l'équation (2) devient une expression de Pfaff réelle

$$\omega \equiv A du + B dv + C dw, \tag{3}$$

$A,\ B,\ C$ étant des fonctions analytiqnes réelles de $u,\ v,\ w$.

Introduisons en même temps, dans le cas $F_y \neq 0$, la différentielle dx, qui s'exprime sous la forme

$$dx = \omega_1 \equiv (P + iP_1)du + (Q + iQ_1)dv + (R + iR_1)dw. \tag{4}$$

65. Considérons une seconde hypersurface

$$\Phi(x',\ y';\ \bar{x}',\ \bar{y}') = 0,$$

équivalente à la précédente; exprimons $x',\ y'$ en fonctions analytiques de trois paramètres réels $u',\ v',\ w'$ et désignons par $\tilde{\omega}$ et $\tilde{\omega}_1$ les formes analogues à ω et ω_1. Comme les éléments plans caractéristiques tangents des deux hypersurfaces se correspondent, on aura, par la correspondance pseudo-conforme qui est censée exister entre les deux hypersurfaces,

$$\tilde{\omega} = \rho\omega, \tag{5}$$

ρ étant une fonction analytique réelle de u, v, w; on aura d'autre part

$$dx' = \alpha dx + \beta dy,$$

ou

$$\tilde{\omega}_1 = \lambda\omega_1 + \mu\omega, \tag{6}$$

λ et μ étant des fonctions analytiques complexes de u, v, w.

Réciproquement, supposons que par une correspondance ponctuelle analytique convenable entre les deux hypersurfaces, on ait des relations de la forme (5) et (6); x' et y' deviennent des fonctions analytiques des variables réelles u, v, w, et l'on a, d'après (5) et (6), des relations de la forme

$$dx' = \alpha dx + \beta dy,$$
$$dy' = \gamma dx + \delta dy.$$

La première montre que le déterminant fonctionnel de x', x, y est une fonction analytique de u, v, w qui s'annule en tous les points de la première hypersurface, c'est-à-dire pour toutes les valeurs réelles des variables: elle est donc identiquement nulle et, par suite, si l'on regarde x, y, x' comme des fonctions analytiques des trois variables *complexes* u, v, w, la quantité x' est une fonction analytique de x, y; il en est de même de y'. Il existe donc nne transformation pseudo-conforme faisant passer de la première hypersurface à la seconde et réalisant entre elles deux la correspondance ponctuelle donnée.

On peut ajouter que, cette correspondance ponctuelle étant fixée, la transformation pseudo-conforme est unique. Dans le cas contraire en effet, en désignant par

$$x' = \varphi(x, y), \quad \text{et} \quad x' = \varphi_1(x, y),$$
$$y' = \psi(x, y), \quad \text{«} \quad y' = \psi_1(x, y),$$

deux transformations distinctes répondant aux conditions voulues, la fonction $\varphi(x, y) - \varphi_1(x, y)$, nulle en tous les points de la première hypersurface, serait identiquement nulle.

66. On peut compléter le résultat précédent en remarquant que la donnée de trois formes de PFAFF analytiques $\omega, \omega_1, \overline{\omega}_1$ linéairement indépendantes en du, dv, dw, la première réelle, les deux dernières imaginaires conjuguées, définit toujours une hypersurface ou plutôt une classe d'hypersurfaces équivalentes. En effet les équations

$$\omega = 0, \quad \omega_1 = 0 \tag{7}$$

peuvent être considérées comme un système de deux équations différentielles du premier ordre entre les trois variables complexes u, v, w. Soit x, y un système d'*intégrales premières* indépendantes de ces équations: ce sont des fonctions analytiques de u, v, w:

$$\begin{cases} x = f(u, v, w), \\ y = g(u, v, w). \end{cases} \tag{8}$$

En donnant maintenant à u, v, w des valeurs réelles, les équations (8) définissent une hypersurface

$$F(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = 0. \tag{9}$$

On a d'autre part des identités de la forme

$$\omega \equiv \alpha dx + \beta dy, \quad \omega_1 \equiv \gamma dx + \delta dy. \tag{10}$$

La forme ω est réelle quand on donne à u, v, w, du, dv, dw des valeurs réelles, c'est-à-dire quand on se déplace sur l'hypersurface. On a par suite entre $dx, dy, d\bar{x}, d\bar{y}$, quand on se place en un point de l'hypersurface, une relation *identique* de la forme

$$\alpha dx + \beta dy - (\bar{\alpha} d\bar{x} + \bar{\beta} d\bar{y}) \equiv \sigma i(F_x dx + F_y dy + F_{\bar{x}} d\bar{x} + F_{\bar{y}} d\bar{y}),$$

d'où

$$\omega = \alpha dx + \beta dy = \sigma i(F_x dx + F_y dy),$$

σ étant évidemment réel.

La seconde relation (10) montre d'autre part que ω_1 est une combinaison linéaire de dx et de $i(F_x dx + F_y dy)$. Par suite les formes associées à l'hypersurface (9) suivant le procédé exposé au n. 2 sont, la première un multiple de la forme ω donnée, la seconde une combinaison linéaire des formes ω_1 et ω données.

Si on avait choisi deux autres intégrales premières indépendantes x' et y' des équations (7), on aurait eu une transformée pseudo-conforme de l'hypersurface (9).

Si l'on se limite, ce que nous ferons désormais, aux hypersurfaces qui ne sont pas des hyperplanoïdes, la forme réelle ω doit être choisie de telle sorte que l'équation $\omega = 0$ ne soit pas complètement intégrable.

REMARQUE. — Si l'on écrit l'équation $\omega = \alpha dx + \beta dy = 0$ sous la forme $dy - y'dx = 0$, le système $\omega = \omega_1 = 0$ prend la forme $dy - y'dx = 0$, $dy' - \psi(x, y, y')dx = 0$; on retrouve ainsi les surfaces caractéristiques associées comme intégrales de l'équation $y'' = \psi(x, y, y')$.

67. Le problème de l'équivalence de deux hypersurfaces peut maintenant s'énoncer de la manière suivante.

PROBLÈME. — *Etant données d'une part trois formes de Pfaff*

$$\begin{aligned} \omega &= Adu + Bdv + Cdw, \\ \omega_1 &= (P + iP_1)du + (Q + iQ_1)dv + (R - iR_1)dw, \\ \bar{\omega}_1 &= (P - iP_1)du + (Q - iQ_1)dv + (R - iR_1)dw, \end{aligned}$$

linéairement indépendantes, la première réelle, les deux dernières imaginaires conjuguées, à coefficients fonctions analytiques des variables réelles u, v, w, *l'équation* $\omega = 0$ *n'étant pas complètement intégrable;*

d'autre part trois formes analogues

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= A'du' + B'dv' + C'dw', \\ \tilde{\omega}_1 &= (P' + iP_1')du' + (Q' + iQ_1')dv' + (R' + iR_1')dw', \\ \bar{\tilde{\omega}}_1 &= (P' - iP_1')du' + (Q' - iQ_1')dv' + (R' - iR_1')dw', \end{aligned}$$

construites avec les variables u′, v′, w′;

reconnaître s'il existe une transformation analytique réelle faisant passer des variables u, v, w *aux variables* u′, v′, w′ *et telle que, par cette transformation, on ait des identités de la forme*

$$\tilde{\omega} \equiv \gamma\omega, \quad \tilde{\omega}_1 \equiv \alpha\omega_1 + \beta\omega, \tag{11}$$

γ, α, β *étant des fonctions analytiques, dont la première réelle, de* u, v, w.

C'est un cas particulier d'un problème que j'ai traité d'une manière générale [5].

68. Nous allons transformer le problème. Considérons les relations (11). Introduisons deux séries de variables auxiliaires

$$\rho, \lambda, \mu \quad \text{et} \quad \rho', \lambda', \mu',$$

les variables ρ et ρ' étant réelles, les autres complexes, et posons

$$\begin{aligned} \Omega &= \rho\omega, \quad \Omega_1 = \lambda(\omega_1 + \mu\omega); \\ \Pi &= \rho'\tilde{\omega}, \quad \Pi_1 = \lambda'(\tilde{\omega}_1 + \mu'\tilde{\omega}). \end{aligned}$$

Il est clair que les identités

$$\Pi \equiv \Omega, \quad \Pi_1 \equiv \Omega_1 \tag{12}$$

peuvent être résolues en prenant pour u', v', w' les fonctions de u, v, w qui réalisent les identités (11) et en posant

$$\rho' = \frac{1}{\gamma}\rho, \quad \lambda' = \frac{1}{\alpha}\lambda, \quad \mu' = \frac{\alpha\mu - \beta}{\gamma}.$$

Si les deux hypersurfaces sont équivalentes, il est donc possible de réaliser les identités (12) en prenant pour u', v', w', λ', μ', ρ' des fonctions analytiques convenablement choisies de u, v, w, λ, μ, ρ.

Réciproquement, supposons qu'on puisse trouver des fonctions analytiques u', v', w', λ', μ', ρ' de u, v, w, λ, μ, ρ réalisant les identités (12). On aura alors des identités de la forme (11); par suite du', dv', dw' seront des combinaisons linéaires de du, dv, dw, de sorte que les identités (11) seront réalisées par une transformation analytique faisant passer des variables u, v, w aux variables u', v', w'. Les deux hypersurfaces seront donc équivalentes.

Nous pouvons donc dire *en un certain sens*, grâce à l'introduction des variables auxiliaires nouvelles λ, μ, ρ, que les formes Ω, Ω_1, $\overline{\Omega}_1$ sont invariantes par toute transformation pseudo-conforme.

69. Revenons aux formes de Pfaff initiales ω, ω_1, $\overline{\omega}_1$. Nous allons les soummettre à une condition qui ne restreindra en rien la généralité du problème. Le covariant bilinéaire [24] ω' n'est pas nul, en tenant compte de $\omega = 0$, puisque cette dernière équation n'est pas complètement intégrable; on a une relation de la forme

$$(13) \qquad \omega' = ia[\omega_1\overline{\omega}_1] + b[\omega\omega_1] + \overline{b}[\omega\overline{\omega}_1],$$

le coefficient a n'étant pas nul. Quand on remplace ω_1 par $\alpha\omega_1$ et ω par $\gamma\omega$, ce coefficient a, comme on le voit immédiatement, est multiplié par $\frac{\gamma}{\alpha\overline{\alpha}}$; on peut donc toujours s'arranger pour qu'il soit égal à 1. Si ces conditions sont réalisées pour les formes ω, ω_1, $\overline{\omega}_1$ d'une part, pour les formes $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_1$, $\overline{\tilde{\omega}}_1$ d'autre part, les identités (11) prennent la forme

$$\tilde{\omega} \equiv \alpha\overline{\alpha}\omega, \quad \tilde{\omega}_1 \equiv \alpha\omega_1 + \beta\omega;$$

au lieu d'introduire trois variables auxiliaires ρ, λ, μ, il suffira alors d'en introduire deux, λ et μ, en posant

$$(14) \qquad \Omega = \lambda\overline{\lambda}\omega, \quad \Omega_1 = \lambda(\omega_1 + \mu\omega).$$

[24] Voir, pour la notion de covariant linéaire et le calcul extérieur, E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux* (Paris, Hermann, 1922).

Supposons par exemple qu'on prenne

$$\omega_1 = dx;$$

on aura

$$\omega = ik(F_x dx + F_y dy) = -ik(F_{\bar{x}} d\bar{x} + F_{\bar{y}} d\bar{y}),$$

k étant un facteur réel que nous allons déterminer. Le calcul de ω' donne

$$\omega' = \left[\frac{dk}{k}\,\omega\right] + ik\,\{ F_{x\bar{x}}[d\bar{x}\,dx] + F_{x\bar{y}}[d\bar{y}\,dx] + F_{y\bar{x}}[d\bar{x}\,dy] + F_{y\bar{y}}[d\bar{y}\,dy] \}.$$

On peut exprimer dy en fonction linéaire de dx et ω:

$$dy = -\frac{F_x}{F_y}\,dx + \frac{1}{ikF_y}\,\omega,$$

et de même

$$d\bar{y} = -\frac{F_{\bar{x}}}{F_{\bar{y}}}\,d\bar{x} - \frac{1}{ikF_{\bar{y}}}\,\omega;$$

en remplaçant et supprimant les termes qui contiennent ω, on trouve

$$i = -ik\,\frac{F_{x\bar{x}}F_y F_{\bar{y}} + F_{y\bar{y}}F_x F_{\bar{x}} - F_{x\bar{y}}F_y F_{\bar{x}} - F_{y\bar{x}}F_x F_{\bar{y}}}{F_y F_{\bar{y}}} = -ik\,\frac{L(F)}{F_y F_{\bar{y}}},$$

$L(F)$ étant l'expression de E. E. LEVI. Nous poserons donc

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} \omega &= -i\,\frac{F_y F_{\bar{y}}}{L(F)}\,(F_x dx + F_y dy) = i\,\frac{F_y F_{\bar{y}}}{L(F)}\,(F_{\bar{x}} d\bar{x} + F_{\bar{y}} d\bar{y}), \\ \omega_1 &= dx, \quad \bar{\omega}_1 = d\bar{x}. \end{aligned} \right.$$

70. Les formes ω, ω_1, $\bar{\omega}_1$ étant ainsi choisies, nous aurons

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \omega' &= i[\omega_1\bar{\omega}_1] + b[\omega\omega_1] + \bar{b}[\omega\bar{\omega}_1], \\ \omega'_1 &= 0, \\ \bar{\omega}'_1 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Introduisons la convention d'écriture suivante. f étant une fonction de point sur l'hypersurface, nous poserons

$$(17)\quad df = f_0\omega + f_1\omega_1 + f_{\bar{1}}\bar{\omega}_1.$$

Si en particulier f est donnée comme fonction analytique de x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$, on aura identiquement par rapport à dx, dy, $d\bar{x}$, $d\bar{y}$,

$$\begin{aligned} f_x dx + f_y dy + f_{\bar{x}} d\bar{x} + f_{\bar{y}} d\bar{y} = &-if_0\,\frac{F_y F_{\bar{y}}}{L(F)}\,(F_x dx + F_y dy) + f_1 dx + f_{\bar{1}} d\bar{x} \\ &+ \rho\,(F_x dx + F_y dy + F_{\bar{x}} d\bar{x} + F_{\bar{y}} d\bar{y}), \end{aligned}$$

ρ étant un coefficient convenablement choisi. On en déduit

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} f_0 &= i\frac{L(F)}{(F_y F_{\bar y})^2}(f_y F_{\bar y} - f_{\bar y} F_y),\\ f_1 &= \frac{f_x F_y - f_y F_x}{F_y},\\ f_{\bar 1} &= \frac{f_{\bar x} F_{\bar y} - f_{\bar y} F_{\bar x}}{F_{\bar y}}.\end{aligned}\right.$$

Si f est une fonction réelle, il en est de même de f_0, les quantités f_1 et $f_{\bar 1}$ étant imaginaires conjuguées.

Les dérivées des fonctions b et $\bar b$ sont liées par une relation simple, qu'on obtient en exprimant que la dérivée extérieure de ω' est nulle; cette dérivée est, comme le montre un calcul facile,

$$(b_{\bar 1} - \bar b_1)[\omega\omega_1\bar\omega_1];$$

nous poserons

$$(19)\qquad b_{\bar 1} = \bar b_1 = c;$$

la quantité c est évidemment réelle. On a du reste

$$b = \frac{1}{F_y}\left\{-2\frac{F_{x\bar y}F_y - F_{y\bar y}F_x}{F_{\bar y}} + \frac{L_x F_y - L_y F_x}{L(F)}\right\}.$$

Nous aurons à introduire d'autres dérivées des quantités b, $\bar b$, c. Auparavant remarquons que la dérivation extérieure de l'équation (17) nous donne

$$(if_0 + f_{\bar 1 1} - f_{1\bar 1})[\omega_1\bar\omega_1] + (bf_0 + f_{10} - f_{01})[\omega\omega_1] + (\bar b f_0 + f_{\bar 1 0} - f_{0\bar 1})[\omega\bar\omega_1] = 0.$$

On a donc les relations générales

$$f_{1\bar 1} - f_{\bar 1 1} = if_0,\quad f_{01} - f_{10} = bf_0,\quad f_{0\bar 1} - f_{\bar 1 0} = \bar b f_0.$$

Nous en déduisons les relations

$$(20)\qquad \begin{gathered} b_{01} = c_0 + \bar b b_0,\quad \bar b_{01} = c_0 + b\bar b_0,\\ c_{1\bar 1} - c_{\bar 1 1} = ic_0,\end{gathered}$$

ce qui nous permettra de poser

$$(20^{\text{bis}})\qquad c_{1\bar 1} = g + \frac{1}{2}ic_0,\quad c_{\bar 1 1} = g - \frac{1}{2}ic_0,$$

g et c_0 étant réels.

II. Recherche d'un système d'expressions de Pfaff covariantes.

71. Revenons maintenant au problème de l'équivalence. Nous substituons aux formes ω, ω_1, $\bar\omega_1$ définies par les formules (15) les formes covariantes plus générales

$$\Omega = \lambda\bar{\lambda}\omega, \quad \Omega_1 = \lambda(\omega_1 + \mu\omega), \quad \bar{\Omega}_1 = \bar{\lambda}(\bar{\omega}_1 + \bar{\mu}\omega). \tag{14}$$

On obtient, par dérivation extérieure, en tenant compte de (16),

$$\begin{aligned}
\Omega' &= \left[\left(\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}\right)\Omega\right] + \lambda\bar{\lambda}\,\{ i[\omega_1\bar{\omega}_1] + b[\omega\omega_1] + \bar{b}[\omega\bar{\omega}_1]\},\\
\Omega_1' &= \left[\frac{d\lambda}{\lambda}\,\Omega_1\right] + \left[\frac{d\mu}{\bar{\lambda}}\,\Omega\right] + \lambda\mu\,\{ i[\omega_1\bar{\omega}_1] + b[\omega\omega_1] + \bar{b}[\omega\bar{\omega}_1]\},\\
\bar{\Omega}_1' &= \left[\frac{d\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}\,\bar{\Omega}_1\right] + \left[\frac{d\bar{\mu}}{\lambda}\,\Omega\right] + \bar{\lambda}\bar{\mu}\,\{ i[\omega_1\bar{\omega}_1] + b[\omega\omega_1] + \bar{b}[\omega\bar{\omega}_1]\}.
\end{aligned}$$

Comme Ω, Ω_1, $\bar{\Omega}_1$, et par suite aussi Ω', Ω_1', $\bar{\Omega}_1'$, sont invariantes quand on passe de l'hypersurface donnée à une autre équivalente, les expressions

$$\left\{\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{d\lambda'}{\lambda'} + \frac{d\bar{\lambda}'}{\bar{\lambda}'} - \frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{d\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}\right)\Omega\right],\\
&\left[\left(\frac{d\lambda'}{\lambda'} - \frac{d\lambda}{\lambda}\right)\Omega_1\right] + \left[\left(\frac{d\mu'}{\bar{\lambda}'} - \frac{d\mu}{\bar{\lambda}}\right)\Omega\right],\\
&\left[\left(\frac{d\bar{\lambda}'}{\bar{\lambda}'} - \frac{d\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}\right)\bar{\Omega}_1\right] + \left[\left(\frac{d\bar{\mu}'}{\lambda'} - \frac{d\bar{\mu}}{\lambda}\right)\Omega\right],
\end{aligned}\right. \tag{21}$$

quand on y remplacera λ', $\bar{\lambda}'$, μ', $\bar{\mu}'$ par leurs expressions en fonction de u, v, w, λ, $\bar{\lambda}$, μ, $\bar{\mu}$, ne contiendront plus que les différentielles du, dv, dw. Il en est de même par suite des quantités

$$\frac{d\lambda'}{\lambda'} - \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \frac{d\bar{\lambda}'}{\bar{\lambda}'} - \frac{d\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}, \quad \frac{d\mu'}{\bar{\lambda}'} - \frac{d\mu}{\bar{\lambda}}, \quad \frac{d\bar{\mu}'}{\lambda'} - \frac{d\bar{\mu}}{\lambda}.$$

En effet, si, par exemple, la première de ces quatre formes contenait un terme en $d\mu$, ce terme fournirait, dans la seconde expression (21), un terme en $[d\mu\Omega_1]$ qui devrait se retrouver changé de signe dans le second terme de la même expression, ce qui est impossible.

Cela posé, introduisons des variables auxiliaires nouvelles A, B, C,..., et posons

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega_2 &= \frac{d\lambda}{\lambda} + A\omega_1 + B\bar{\omega}_1 + C\omega, & \bar{\Omega}_2 &= \frac{d\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} + \bar{B}\omega_1 + \bar{A}\bar{\omega}_1 + \bar{C}\omega,\\
\Omega_3 &= \frac{1}{\bar{\lambda}}(d\mu + D\omega_1 + E\bar{\omega}_1 + F\omega), & \bar{\Omega}_3 &= \frac{1}{\lambda}(d\bar{\mu} + \bar{E}\omega_1 + \bar{D}\bar{\omega}_1 + \bar{F}\omega).
\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Si deux hypersurfaces sont équivalentes, il est clair qu'on *pourra exprimer les quantités* u', v', w', λ', μ', A', B', C', D', E', F' *relatives à la seconde hypersurface en fonction des quantités analogues relatives à la première, et cela* *de façon à réaliser l'égalité chacune à chacune des formes* Ω, Ω_1, $\bar{\Omega}_1$, Ω_2, $\bar{\Omega}_2$, Ω_3, $\bar{\Omega}_3$. La réciproque est évidente.

Calculons alors les quantités invariantes

$$\begin{gathered}\Omega' + [\Omega(\Omega_2 + \bar{\Omega}_2)] - i[\Omega_1\bar{\Omega}_1],\\ \Omega_1' + [\Omega_1\Omega_2] + [\Omega\Omega_3],\\ \bar{\Omega}_1' + [\bar{\Omega}_1\bar{\Omega}_2] + [\Omega\bar{\Omega}_3];\end{gathered}$$

on trouve

$$\Omega' + [\Omega(\Omega_2 + \bar{\Omega}_2] - i[\Omega_1\bar{\Omega}_1] = \lambda\bar{\lambda}\{(b + i\bar{\mu} + A + \bar{B})[\omega\omega_1] + (\bar{b} - i\mu + \bar{A} + B)[\omega\bar{\omega}_1]\},$$

$$\begin{gathered}\Omega_1' + [\Omega_1\Omega_2] + [\Omega\Omega_3] = \lambda(i\mu + B)[\omega_1\bar{\omega}_1] +\\ + \lambda(b\mu + A\mu - C + D)[\omega\omega_1] + \lambda(\bar{b}\mu + B\mu + E)[\omega\bar{\omega}_1].\end{gathered}$$

Au lieu de regarder A, B,..., comme des variables indépendantes, *nous pouvons les astreindre à la condition que les seconds membres soient identiquement nuls;* c'est évidemment une condition invariante. Nous prendrons donc

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{l} B = -i\mu, \quad \bar{B} = i\bar{\mu}, \quad A = -(b + 2i\bar{\mu}), \quad \bar{A} = -(\bar{b} - 2i\mu),\\ D = C + 2i\mu\bar{\mu}, \quad E = -\mu(\bar{b} - i\mu),\\ \bar{D} = C - 2i\mu\bar{\mu}, \quad \bar{E} = -\bar{\mu}(b + i\bar{\mu}).\end{array}\right.$$

Nous poserons par suite

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Omega_2 = \dfrac{d\lambda}{\lambda} - (b + 2i\bar{\mu})\omega_1 - i\mu\bar{\omega}_1 + C\omega,\\[2ex] \bar{\Omega}_2 = \dfrac{d\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} + i\bar{\mu}\omega_1 - (\bar{b} - 2i\mu)\bar{\omega}_1 + \bar{C}\omega,\\[2ex] \Omega_3 = \dfrac{1}{\bar{\lambda}}[d\mu + (C + 2i\bar{\mu})\omega_1 - \mu(\bar{b} - i\mu)\bar{\omega}_1 + F\omega],\\[2ex] \bar{\Omega}_3 = \dfrac{1}{\lambda}[d\bar{\mu} - \bar{\mu}(b + i\bar{\mu})\omega_1 + (\bar{C} - 2i\mu\bar{\mu})\bar{\omega}_1 + \bar{F}\omega],\end{array}\right.$$

et nous aurons

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Omega' = -[\Omega(\Omega_2 + \Omega_2)] + i[\Omega_1\bar{\Omega}_1],\\ \Omega_1' = -[\Omega_1\Omega_2] - [\Omega\Omega_3],\\ \bar{\Omega}_1' = -[\bar{\Omega}_1\bar{\Omega}_2] - [\Omega\bar{\Omega}_3].\end{array}\right.$$

Nous avons maintenant les variables auxiliaires complexes λ, μ, C, F et les formes covariantes Ω, Ω_1, $\bar{\Omega}_1$, Ω_2, $\bar{\Omega}_2$, Ω_3, $\bar{\Omega}_3$.

72. Considérons la forme

$$\Omega_2 - \bar{\Omega}_2 = \frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{d\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} - (b + 3i\bar{\mu})\omega_1 + (b - 3i\mu)\bar{\omega}_1 + (C - \bar{C})\omega,$$

et formons la quantité

$$\Omega_2' - \overline{\Omega}_2' - 3i[\Omega_1\overline{\Omega}_3] - 3i[\overline{\Omega}_1\Omega_3].$$

Elle est égale, en laissant de côté les termes qui contiennent ω en facteur, à

$$[4i(C - \overline{C}) + 2c - 12\mu\overline{\mu}][\omega_1\overline{\omega}_1].$$

On aura une nouvelle relation invariante en annulant le coefficient de $[\omega_1\overline{\omega}_1]$, ce qui exprime que l'expression totale s'annule avec ω (ou Ω). Nous poserons donc

$$C = \rho + \frac{1}{4}ic - \frac{3}{2}i\mu\overline{\mu}, \quad \overline{C} = \rho - \frac{1}{4}ic + \frac{3}{2}i\mu\overline{\mu}, \tag{26}$$

ρ étant une variable auxiliaire *réelle*. En achevant le calcul, on trouve

$$\begin{aligned}\Omega_2' - \overline{\Omega}_2' - 3i[\Omega_1\overline{\Omega}_3] - 3i[\overline{\Omega}_1\Omega_3] = \Big(3i\overline{F} - \frac{3}{2}\mu\overline{\mu}^2 - 3i\overline{\mu}\rho + \frac{3}{4}c\overline{\mu} - b_0 - \frac{1}{2}ic_1 + \frac{1}{2}ibc\Big)[\omega\omega_1] \\ + \Big(3iF + \frac{3}{2}\mu^2\overline{\mu} - 3i\mu\rho - \frac{3}{4}c\mu + \overline{b}_0 - \frac{1}{2}ic_{\overline{1}} + \frac{1}{2}i\overline{b}c\Big)[\omega\overline{\omega}_1].\end{aligned}$$

Nous aurons encore des relations invariantes en annulant le second membre, ce qui donne

$$\left\{\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}i\mu^2\overline{\mu} + \mu\rho - \frac{1}{4}ic\mu + \frac{1}{6}(c_{\overline{1}} - \overline{b}c + 2i\overline{b}_0), \\ \overline{F} &= -\frac{1}{2}i\mu\overline{\mu}^2 + \overline{\mu}\rho + \frac{1}{4}ic\overline{\mu} + \frac{1}{6}(c_1 - bc - 2ib_0). \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Nous poserons pour abréger

$$l = c_1 - bc - 2ib_0, \quad \overline{l} = c_{\overline{1}} - \overline{b}c + 2i\overline{b}_0. \tag{28}$$

73. Formons maintenant $\Omega_2 + \overline{\Omega}_2$:

$$\Omega_2 + \overline{\Omega}_2 = \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}} - (b + i\overline{\mu})\omega_1 - (\overline{b} - i\mu)\overline{\omega}_1 + 2\rho\omega;$$

sa dérivée extérieure introduira $d\rho$; on éliminera en partie $d\mu$ et $d\overline{\mu}$ en formant la combinaison

$$\Omega_2' + \overline{\Omega}_2' - i[\Omega_1\overline{\Omega}_3] + i[\overline{\Omega}_1\Omega_3];$$

on trouve que cette expression s'annule avec ω et est égale à

$$\begin{aligned}[(2d\rho + i\mu d\overline{\mu} - i\overline{\mu}d\mu)\omega] - \Big(\mu\overline{\mu}^2 - 2i\overline{\mu}\rho - 2b\rho - ib\mu\overline{\mu} + \frac{1}{2}c\overline{\mu} + b_0 - \frac{1}{6}il\Big)[\omega\omega_1] \\ - \Big(\mu^2\overline{\mu} + 2i\mu\rho - 2\overline{b}\rho + i\overline{b}\mu\overline{\mu} + \frac{1}{2}c\mu + \overline{b}_0 + \frac{1}{6}i\overline{l}\Big)[\omega\overline{\omega}_1].\end{aligned}$$

On aura une nouvelle forme covariante en posant

$$(29)\quad \Omega_4 = \frac{1}{\lambda\bar\lambda}\Big\{ d\rho + \frac{i}{2}(\mu d\bar\mu - \bar\mu d\mu) + \Big(\frac{i}{2}\mu\bar\mu^2 - i\bar\mu\rho - b\rho - \frac{1}{2}ib\mu\bar\mu + \frac{1}{4}c\bar\mu + \frac{1}{2}b_0 - \frac{1}{12}il\Big)\omega_1$$
$$+ \Big(\frac{1}{2}\mu^2\bar\mu + i\mu\rho - \bar b\rho + \frac{1}{2}i\bar b\mu\bar\mu + \frac{1}{4}c\mu + \frac{1}{2}\bar b_0 + \frac{1}{12}i\bar l\Big)\bar\omega_1 + G\omega\Big\},$$

G désignant une variable auxiliaire nouvelle, réelle.

On aura, en tenant compte des résultats précédents,

$$(30)\quad \begin{cases} \Omega_2' = 2i[\Omega_1\bar\Omega_3] + i[\bar\Omega_1\Omega_3] - [\Omega\Omega_4], \\ \bar\Omega_2' = -i[\Omega_1\bar\Omega_3] - 2i[\bar\Omega_1\Omega_3] - [\Omega\Omega_4]. \end{cases}$$

Remarquons que la forme Ω_4 est *réelle*.

74. Passons enfin au calcul de Ω_3'; pour éliminer les différentielles $d\bar\lambda$, $d\mu$, $d\bar\mu$, $d\rho$, formons

$$\Omega_3' + [\Omega_1\Omega_4] + [\bar\Omega_2\Omega_3].$$

On trouve, en tenant compte de (20), (20^{bis}) et (28),

$$\frac{1}{\bar\lambda}\Big\{\Big[\frac{11}{48}c^2 + \frac{1}{6}(b\bar b c + b\bar l + \bar b l - g) + \frac{1}{6}i(\mu l - \bar\mu\bar l) - \frac{1}{4}c\mu\bar\mu + \rho^2 + \frac{1}{4}\mu^2\bar\mu^2 - G\Big][\omega\omega_1]$$
$$- \frac{1}{6}(\bar l_1 - 2\bar b\bar l)[\omega\bar\omega_1]\Big\}.$$

On pourra donc poser d'une manière invariante

$$(31)\quad G = \frac{11}{48}c^2 + \frac{1}{6}(b\bar b c + b\bar l + \bar b l - g) + \frac{1}{6}i(\mu l - \bar\mu\bar l) - \frac{1}{4}c\mu\bar\mu + \rho^2 + \frac{1}{4}\mu^2\bar\mu^2.$$

En introduisant maintenant, pour abréger, la notation

$$(32)\quad r = \frac{1}{6}(\bar l_1 - 2\bar b\bar l),$$

on aura les formules

$$(33)\quad \begin{cases} \Omega_3' = -[\Omega_1\Omega_4] - [\bar\Omega_2\Omega_3] - \dfrac{r}{\lambda\bar\lambda^3}[\Omega\bar\Omega_1], \\ \bar\Omega_3' = -[\bar\Omega_1\Omega_4] - [\Omega_2\bar\Omega_3] - \dfrac{\bar r}{\lambda^3\bar\lambda}[\Omega\Omega_1]. \end{cases}$$

75. Résumons maintenant les résultats obtenus:

THÉORÈME. — *Il est possible, par l'introduction de trois variables auxiliaires* λ, μ. ρ, *dont les deux premières sont complexes et la dernière est réelle, d'associer à une hypersurface donnée un système de huit formes de Pfaff covariantes*

$$\Omega,\ \Omega_1,\ \bar\Omega_1,\ \Omega_2,\ \bar\Omega_2,\ \Omega_3,\ \bar\Omega_3,\ \Omega_4,$$

dont la première et la dernière sont réelles, linéairement indépendantes par rapport à du, dv, dw, dλ, d$\bar\lambda$, dμ, d$\bar\mu$, dρ, *et satisfaisant à des relations de la forme*

$$
(34)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Omega' &= i[\Omega_1\bar\Omega_1] - [\Omega(\Omega_2 + \bar\Omega_2)],\\
\Omega_1' &= -[\Omega_1\Omega_2] - [\Omega\Omega_3],\\
\bar\Omega_1' &= -[\bar\Omega_1\bar\Omega_2] - [\Omega\bar\Omega_3],\\
\Omega_2' &= 2i[\Omega_1\bar\Omega_3] + i[\bar\Omega_1\Omega_3] - [\Omega\Omega_4],\\
\bar\Omega_2' &= -i[\Omega_1\bar\Omega_3] - 2i[\bar\Omega_1\Omega_3] - [\Omega\Omega_4],\\
\Omega_3' &= -[\Omega_1\Omega_4] - [\Omega_2\Omega_3] - R[\Omega\Omega_1],\\
\bar\Omega_3' &= -[\bar\Omega_1\Omega_4] - [\Omega_2\Omega_3] - R[\Omega\Omega_1].
\end{aligned}\right.
$$

En faisant dans ces formes $\lambda = 1$, $\mu = \rho = 0$, *on obtient d'abord les formes initiales* ω, ω_1, $\bar\omega_1$, *puis les formes suivantes, construites avec les seules variables* u, v, w *et leurs différentielles,*

$$
(35)\qquad \left\{\begin{aligned}
\omega_2 &= -b\omega_1 + \frac{1}{4}ic\omega,\\
\bar\omega_2 &= -\bar b\bar\omega_1 - \frac{1}{4}ic\omega,\\
\omega_3 &= \frac{1}{4}ic\omega_1 + \frac{1}{6}\bar l\omega,\\
\bar\omega_3 &= -\frac{1}{4}ic\bar\omega_1 + \frac{1}{6}l\omega,\\
\omega_4 &= -i\,\frac{l + 4ib_0}{12}\,\omega_1 + i\,\frac{\bar l - 4i\bar b_0}{12}\,\bar\omega_1 + \left[\frac{11}{48}c^2 + \frac{1}{6}(bbc + b\bar l + \bar b l - g)\right]\omega.
\end{aligned}\right.
$$

On peut alors écrire

$$
(36)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Omega &= \lambda\bar\lambda\omega,\\
\Omega_1 &= \lambda(\omega_1 + \mu\omega),\\
\bar\Omega_1 &= \bar\lambda(\bar\omega_1 + \bar\mu\omega),\\
\Omega_2 &= \frac{d\lambda}{\lambda} + \omega_2 - 2i\bar\mu\omega_1 - i\mu\bar\omega_1 + \left(\rho - \frac{3}{2}\,i\mu\bar\mu\right)\omega,\\
\bar\Omega_2 &= \frac{d\bar\lambda}{\bar\lambda} + \bar\omega_2 + i\bar\mu\omega_1 + 2i\mu\bar\omega_1 + \left(\rho + \frac{3}{2}\,i\mu\bar\mu\right)\omega,\\
\Omega_3 &= \frac{1}{\bar\lambda}\left[d\mu + \omega_3 + \mu\bar\omega_2 + \left(\rho + \frac{1}{2}\,i\mu\bar\mu\right)\omega_1 + i\mu^2\bar\omega_1 + \mu\left(\rho + \frac{i}{2}\,\mu\bar\mu\right)\omega\right],\\
\bar\Omega_3 &= \frac{1}{\lambda}\left[d\bar\mu + \bar\omega_3 + \bar\mu\omega_2 - i\bar\mu^2\omega_1 + \left(\rho - \frac{1}{2}\,i\mu\bar\mu\right)\bar\omega_1 + \bar\mu\left(\rho - \frac{i}{2}\,\mu\bar\mu\right)\omega\right],\\
\Omega_4 &= \frac{1}{\lambda\bar\lambda}\left[d\rho + \frac{i}{2}(\mu d\bar\mu - \bar\mu d\mu) + \omega_4 - i\bar\mu\omega_3 + i\mu\bar\omega_3 + \left(\rho + \frac{i}{2}\,\mu\bar\mu\right)\omega_2 + \left(\rho - \frac{i}{2}\,\mu\bar\mu\right)\bar\omega_2\right.\\
&\qquad\left. - i\bar\mu\left(\rho + \frac{1}{2}\,i\mu\bar\mu\right)\omega_1 + i\mu\left(\rho \quad \frac{1}{2}\,i\mu\bar\mu\right)\bar\omega_1 + \left(\rho^2 + \frac{1}{4}\,\mu^2\bar\mu^2\right)\omega\right].
\end{aligned}\right.
$$

Les ω_i *satisfont aux mêmes relations* (34) *que les* Ω_i, *mais avec un coefficient* r *différent: on a*

(37) $$R = \frac{r}{\lambda\bar{\lambda}^3}, \quad \bar{R} = \frac{\bar{r}}{\lambda^3\bar{\lambda}}.$$

On pourrait enfin calculer Ω_4', mais on peut prévoir la forme du résultat en dérivant extérieurement l'équation qui donne Ω_2'; on obtient ainsi

$$-i[\Omega\Omega_3\bar{\Omega}_3] + [\Omega(\Omega_2 + \bar{\Omega}_2)\Omega_1] + [\Omega\Omega_4'] = 0,$$

d'où une expression de la forme

(38) $$\Omega_4' = i[\Omega_3\bar{\Omega}_3] - [(\Omega_2 + \bar{\Omega}_2)\Omega_4] - S[\Omega\Omega_1] - \bar{S}[\Omega\bar{\Omega}_1].$$

Remarquons que b et $\bar{b}$ font intervenir les dérivés partielles du second ordre du premier membre de l'équation de l'hypersurface, b_0 et c les dérivés du troisième ordre, l celles du quatrième ordre, g et r celles du cinquième. L'expression r est un *invariant différentiel relatif*; on verrait qu'il en est de même de s, valeur à laquelle se réduit S pour $\lambda = 1$, $\mu = \rho = 0$.

Ajoutons une dernière remarque. Supposons que, ω, ω_1, $\bar{\omega}_1$, ω_2, $\bar{\omega}_2$, ω_3, $\bar{\omega}_3$, ω_4 désignent 8 expressions de Pfaff, dont la première et la dernière sont réelles, les trois premières étant linéairement indépendantes, et que ces 8 expressions satisfassent aux relations analogues à (34). *On peut vérifier par le calcul que les expressions données par* (36) *satisfont automatiquement à des relations de la forme* (34): ce sont même les expressions les plus générales qui satisfassent à cette condition et telles que Ω soit multiple de ω et Ω_1 combinaison linéaire de ω_1 et de ω.

III. Cas où l'invariant relatif r s'annule.

76. Si l'invariant relatif r s'annule, il en est de même de s. En effet la dérivation extérieure de l'équation (34) qui donne Ω_3' conduit à la relation

$$-\bar{S}[\Omega\Omega_1\bar{\Omega}_1] = 0, \quad \text{d'où} \quad \bar{S} = 0.$$

Toutes les hypersurfaces pour lesquelles r = 0 *sont équivalentes entre elles et on peut passer de l'une à l'autre par une infinité de transformations pseudo-conformes dépendant de huit constantes arbitraires réelles.*

Soit en effet une seconde hypersurface pour laquelle $r = 0$; soient Π_i les formes associées à cette hypersurface et construites avec les paramètres de position u', v', w' et les variables auxiliaires λ', μ', ρ'. Le système de Pfaff

(39) $$\Pi_i = \Omega_i$$

où u', v', w', λ', $\bar{\lambda}'$, μ', $\bar{\mu}'$, ρ' sont regardées comme huit fonctions inconnues des 8 variables indépendantes u, v, w, λ, $\bar{\lambda}$, μ, $\bar{\mu}$, ρ est complètement intégrable, d'après le théorème de FROBENIUS ([25]); en effet les dérivées extérieures $\Pi_i' - \Omega_i'$ s'annulent toutes en tenant compte des équations (39) du système, puisque les seconds membres des formules (34) et (38) qui donnent les Ω_i' (et aussi les Π_i') ne font intervenir que des coefficients *constants*, R et S étant nuls. La solution générale du système (39) dépend alors de huit constantes arbitraires réelles.

En particulier chacune des hypersurfaces considérées admet un groupe à 8 paramètres réels de transformations pseudo-conformes et les relations (34) et (38) définissent la *structure* de ce groupe.

On peut préciser le résultat précédent. Considérons une région de l'hypersurface suffisamment petite pour que, dans cette région, le déterminant des coefficients de du, dv, dw dans ω, ω_1, $\bar{\omega}_1$ ne s'annule jamais. Les équations (39) sont alors, dans cette région, résolubles sans ambiguïté par rapport à du', dv', dw', $d\lambda'$, $d\bar{\lambda}'$, $d\mu'$, $d\bar{\mu}'$, $d\rho'$ et admettent une solution et une seule telle que pour

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad w = w_0, \quad \lambda = \bar{\lambda} = 1, \quad \mu = \bar{\mu} = \rho = 0,$$

on ait

$$u' = u_0', \quad v' = v_0', \quad w' = w_0', \quad \lambda' = \lambda_0', \quad \bar{\lambda}' = \bar{\lambda}_0', \quad \mu' = \mu_0', \quad \bar{\mu}' = \bar{\mu}_0', \quad \rho' = \rho_0',$$

où $\lambda_0' \neq 0$, et où (u_0, v_0, w_0), (u_0', v_0', w_0') sont deux points arbitrairement donnés de la région. Comme cette solution dépend analytiquement des constantes d'intégration $u_0', \ldots, \rho_0'$, il en résulte que *les transformations pseudo-conformes qu'admet localement l'hypersurface forment une famille connexe dépendant de 8 paramètres réels.*

77. Prenons en particulier *l'hyperconique*

$$F \equiv \frac{y - \bar{y}}{i} - x\bar{x} = 0. \tag{40}$$

On a ici

$$L(F) = -1,$$

$$\omega = dy - i\bar{x}dx, \quad \omega_1 = dx, \quad \bar{\omega}_1 = d\bar{x},$$

$$\omega' = i[dx d\bar{x}] = i[\omega_1 \bar{\omega}_1].$$

Les coefficients b et $\bar{b}$ étant nuls, il en est de même de c, l et r.

([25]) E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux* ([21]), pp. 99-100.

Les hypersurfaces pour lesquelles $r = 0$ *sont donc celles qui sont localement équivalentes à l'hyperconique* (40).

Ici le groupe est bien connu, il est formé de transformations homographiques.

IV. Cas où l'invariant *r* n'est pas nul.

78. Si r n'est pas nul, nous allons montrer qu'on peut exprimer d'une manière invariante les variables λ, μ, ρ en fonction de u, v, w.

Remarquons en effet que R est un invariant *absolu*, mais qui dépend naturellement des variables auxiliaires λ et $\bar\lambda$ en vertu de (37). Nous aurons une détermination invariante de λ et $\bar\lambda$ en réduisant R à l'unité, ce qui donne

$$\lambda\bar\lambda^3 = r, \quad \lambda^3\bar\lambda = \bar r,$$

d'où

$$\lambda\bar\lambda = \sqrt[4]{r\bar r}, \qquad \lambda^2 = \frac{\bar r}{\sqrt[4]{r\bar r}}.$$

Il y a deux manières de satisfaire à ces relations. En désignant par ε l'une des quantités $+1$ et -1, nous poserons

$$\lambda = \varepsilon\sqrt{\frac{\bar r}{\sqrt[4]{r\bar r}}}. \tag{41}$$

79. Considérons maintenant la forme covariante $\Omega_2 + \bar\Omega_2$, à savoir

$$\begin{aligned}\Omega_2 + \bar\Omega_2 &= \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\bar\lambda}{\bar\lambda} - (b + i\bar\mu)\omega_1 - (\bar b - i\mu)\bar\omega_1 + 2\rho\omega \\ &= \left[\frac{1}{4}\left(\frac{r_1}{r} + \frac{\bar r_1}{\bar r}\right) - b - i\bar\mu\right]\omega_1 + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{r_{\bar 1}}{r} + \frac{\bar r_{\bar 1}}{\bar r}\right) - \bar b + i\mu\right]\bar\omega_1 + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{r} + \frac{\bar r_0}{\bar r}\right) + 2\rho\right]\omega.\end{aligned}$$

On aura des relations invariantes en annulant le second membre, ce qui donne

$$\left\{\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{4}i\left(\frac{r_{\bar 1}}{r} + \frac{\bar r_{\bar 1}}{\bar r}\right) - i\bar b, \\ \bar\mu &= -\frac{1}{4}i\left(\frac{r_1}{r} + \frac{\bar r_1}{\bar r}\right) + ib, \\ \rho &= -\frac{1}{8}\left(\frac{r_0}{r} + \frac{\bar r_0}{\bar r}\right). \end{aligned}\right. \tag{42}$$

80. *Il ne reste plus maintenant aucune variable auxiliaire.* Les quantités λ et $\bar{\lambda}$ s'expriment au moyen des dérivées partielles des cinq premiers ordres du premier membre de l'équation de l'hypersurface, tandis que μ, $\bar{\mu}$ et ρ font intervenir les dérivées jusqu'au sixième ordre. Les formes Ω_2, $\bar{\Omega}_2$, Ω_3, $\bar{\Omega}_3$ et Ω_4 deviennent des combinaisons linéaires de Ω, Ω_1, $\bar{\Omega}_1$. Les coefficients de Ω_2 sont du sixième ordre, ceux de Ω_3, $\bar{\Omega}_3$ et Ω_4 du septième ordre.

Nous poserons, sans faire le calcul effectif,

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &= \alpha\Omega_1 - \bar{\alpha}\,\bar{\Omega}_1 + i\beta\Omega,\\
\bar{\Omega}_2 &= -\alpha\Omega_1 + \bar{\alpha}\,\bar{\Omega}_1 - i\beta\Omega.\\
\Omega_3 &= i\gamma\Omega_1 + \theta\,\bar{\Omega}_1 + \eta\Omega,\\
\bar{\Omega}_3 &= \bar{\theta}\Omega_1 - i\gamma\,\Omega_1 + \bar{\eta}\Omega,\\
\Omega_4 &= \sigma\Omega_1 + \bar{\sigma}\,\bar{\Omega}_1 + \zeta\Omega,
\end{aligned}$$

β et ζ étant réels. Mais la relation $\Omega_2 + \bar{\Omega}_2 = 0$, dérivée extérieurement, donne, d'après (34),

$$i[\Omega_1\bar{\Omega}_3] - i[\bar{\Omega}_1\Omega_3] - 2[\Omega\Omega_4] = 0.$$

on, en développant,

$$(\bar{\gamma} - \gamma)[\Omega_1\bar{\Omega}_1] - (2\sigma + i\bar{\eta})[\Omega\Omega_1] - (2\bar{\sigma} - i\eta)[\Omega\bar{\Omega}_1] = 0.$$

On a donc

$$\bar{\gamma} = \gamma, \quad \sigma = -\frac{1}{2}i\bar{\eta}, \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{2}i\eta,$$

d'où les formules définitives

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Omega_2 &= -\bar{\Omega}_2 = \alpha\Omega_1 - \bar{\alpha}\,\bar{\Omega}_1 + i\beta\Omega,\\
\Omega_3 &= i\gamma\Omega_1 + \theta\bar{\Omega}_1 + \eta\Omega,\\
\bar{\Omega}_3 &= \bar{\theta}\Omega_1 - i\gamma\bar{\Omega}_1 + \bar{\eta}\Omega,\\
\Omega_4 &= -\frac{1}{2}i\bar{\eta}\Omega_1 + \frac{1}{2}i\eta\bar{\Omega}_1 + \zeta\Omega,
\end{aligned}\right.$$

avec β, γ et ζ réels, α, θ et η complexes.

La condition d'équivalence de deux hypersurfaces non localement équivalentes à une hyperconique est donc la possibilité d'établir entre ces deux hypersurfaces une correspondance ponctuelle analytique qui réalise l'égalité chacune à chacune des formes Ω, Ω_1 *et* $\bar{\Omega}_1$, *ainsi que l'égalité chacune à chacune des quantités* α, β, γ, θ, η, ζ.

Il y a cependant à l'énoncé précédent une restriction essentielle, tenant à l'indétermination de $\varepsilon = \pm 1$. Quand on change ε de signe, λ change de signe, μ et ρ ne changent pas; par suite, d'après (36), les formes Ω, Ω_2 et Ω_4 ne changent pas. les formes Ω_1 et Ω_3 changent de signe; par conséquent, d'après (43), les quantités β, γ, θ, ζ ne changent pas, les quantités α, η changent de signe. Par suite au lieu des égalités

$$\Pi = \Omega,\ \Pi_1 = \Omega_1,\ \overline{\Pi}_1 = \overline{\Omega}_1; \tag{44}$$
$$\alpha' = \alpha,\ \beta' = \beta,\ \gamma' = \gamma,\ \theta' = \theta,\ \eta' = \eta,\ \zeta' = \zeta,$$

on peut avoir les égalités

$$\Pi = \Omega,\ \Pi_1 = -\Omega_1,\ \overline{\Pi}_1 = -\overline{\Omega}_1; \tag{45}$$
$$\alpha' = -\alpha,\ \beta' = \beta,\ \gamma' = \gamma,\ \theta' = \theta,\ \eta' = -\eta,\ \zeta' = \zeta.$$

La condition d'équivalence réside dans la possibilité de réaliser soit les équations (44), *soit les équations* (45), *par une correspondance ponctuelle convenablement choisie.*

81. On voit en particulier que si *deux hypersurfaces sont localement équivalentes entre elles sans être équivalentes à une hyperconique et si* A *et* A' *sont deux points homologues, il existe au plus deux transformations pseudo-conformes de la première hypersurfaee dans la seconde amenant* A *en* A'; en effet chacun des systèmes (44) et (45) admet au plus une solution telle que u', v', w' prennent des valeurs numériques données pour des valeurs données de u, v, w. Il ne peut exister deux transformations distinctes que si au point A et au point A' on a $\alpha = \eta = 0$.

En particulier *une hypersurface non localement équivalente à une hyperconique admet au plus une transformation pseudo-conforme non identique laissant fixe un de ses points.*

Nous verrons un peu plus loin que si cette transformation non identique existe, *quel que soit le point considéré,* l'hypersurface admet un groupe à trois paramètres.

V. Invariants différentiels fondamentaux et dérivés.

82. Les neuf quantités α, $\bar{\alpha}$, β, γ, θ, $\bar{\theta}$, η, $\bar{\eta}$, ζ sont des invariants différentiels pseudo-conformes; nous les appellerons les invariants *fondamentaux.* Chacun d'eux I donne par dérivation naissance à trois invariants nouveaux (invariants dérivés) I_0, I_1, $I_{\bar{1}}$ définis par l'identité

$$dI \equiv I_0\Omega_0 + I_1\Omega_1 + I_{\bar{1}}\overline{\Omega}_1. \tag{46}$$

Chaque invariant dérivé donne naissance à son tour à des invariants dérivés (du second ordre) et ainsi de suite.

Il existe des relations entre ces invariants dérivés successifs. Pour les obtenir, remarquons d'abord qu'en tenant compte de (34) et de (43), on a les formules importantes

$$
(47)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\Omega' &= i[\Omega_1 \bar{\Omega}_1],\\
\Omega_1{}' &= \bar{\alpha}[\Omega_1 \bar{\Omega}_1] + i(\beta - \gamma)[\Omega \Omega_1] - \theta[\Omega \bar{\Omega}_1],\\
\bar{\Omega}_1{}' &= -\alpha[\Omega_1 \bar{\Omega}_1] - \bar{\theta}[\Omega \Omega_1] - i(\beta - \gamma)[\Omega \bar{\Omega}_1].
\end{aligned}
\right.
$$

Cela posé, on a d'abord entre les premiers invariants dérivés des invariants fondamentaux et ces invariants fondamentaux eux-mêmes une série de relations obtenues en exprimant que les équations (34), *où l'on suppose* $R, \bar{R} = 1$, sont vérifiées. Le calcul donne, en tenant compte des expressions (43) de Ω_2, $\bar{\Omega}_2$, Ω_3, $\bar{\Omega}_3$, Ω_4 et des relations (47),

$$
(48)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\bar{\alpha}_1 + \alpha_{\bar{1}} &= 2\alpha\bar{\alpha} - \beta - 3\gamma,\\
\alpha_0 - i\beta_1 &= -i\alpha(\beta - \gamma) - \bar{\alpha}\bar{\theta} - \frac{3}{2} i\bar{\eta},\\
\bar{\alpha}_0 + i\beta_{\bar{1}} &= i\bar{\alpha}(\beta - \gamma) - \alpha\theta + \frac{3}{2} i\eta,\\
\theta_1 - i\gamma_1 &= 2\alpha\theta - \frac{3}{2} i\eta,\\
\bar{\theta}_{\bar{1}} + i\gamma_1 &= 2\bar{\alpha}\bar{\theta} + \frac{3}{2} i\bar{\eta},\\
\theta_0 - \eta_1 &= 2i\beta\theta + \bar{\alpha}\eta - 1,\\
\bar{\theta}_0 - \bar{\eta}_1 &= -2i\beta\bar{\theta} + \alpha\bar{\eta} - 1,\\
\eta_1 - i\gamma_0 &= \alpha\eta + \gamma^2 - \theta\bar{\theta} - \zeta,\\
\bar{\eta}_1 + i\gamma_0 &= \bar{\alpha}\bar{\eta} + \gamma^2 - \theta\bar{\theta} - \zeta.
\end{aligned}
\right.
$$

En second lieu, la relation (46), dérivée extérieurement en tenant compte de (47), donne

$$
(49)\qquad
\begin{aligned}
I_{1\bar{1}} - I_{\bar{1}1} &= iI_0 + \bar{\alpha} I_1 - \alpha I_{\bar{1}},\\
I_{01} - I_{10} &= i(\beta - \gamma) I_1 - \bar{\theta} I_{\bar{1}},\\
I_{0\bar{1}} - I_{\bar{1}0} &= -i(\beta - \gamma) I_{\bar{1}} - \theta I_1.
\end{aligned}
$$

VI. Les conditions effectives d'équivalence.

83. La discussion des conditions d'équivalence de deux hypersurfaces se fait comme dans les cas classiques analogues. Nous nous bornerons à deux cas, le cas général où trois des neuf invariants fondamentaux sont des fonctions indépendantes de u, v, w, et le cas où les invariants fondamentaux sont tous constants.

Plaçons-nous d'abord dans le premier cas. Supposons que pour une hypersurface donnée trois invariants fondamentaux réels, que nous désignons par I, J, K, soient des fonctions indépendantes de u, v, w. Il faudra d'abord, pour qu'une seconde hypersurface soit équivalente à la première, que les invariants de même nom I', J', K' soient aussi des fonctions indépendantes de u', v', w'. Il faudra ensuite que les relations qui lient I, J, K et les six autres invariants fondamentaux soient les mêmes pour les deux hypersurfaces (à condition de choisir convenablement le signe ε pour la seconde hypersurface, quand on a choisi ce signe pour la première).

Mais cela ne suffira pas en général. Il faudra encore que les relations qui existent entre I, J, K et leurs invariants dérivés du premier ordre soient les mêmes pour les deux hypersurfaces.

Les conditions nécessaires précédentes sont aussi suffisantes. En effet établissons entre les deux hypersurfaces la correspondance ponctuelle définie par les relations

$$I' = I, \quad J' = J, \quad K' = K;$$

par cette correspondance on aura l'égalité chacun à chacun des neuf invariants fondamentaux. De plus les relations

$$\begin{aligned} dI &= I_0\Omega + I_1\Omega_1 + I_{\bar{1}}\bar{\Omega}_1, \\ dJ &= J_0\Omega + J_1\Omega_1 + J_{\bar{1}}\bar{\Omega}_1, \\ dK &= K_0\Omega + K_0\Omega_0 + K_{\bar{1}}\bar{\Omega}_1, \end{aligned}$$

et les relations analogues

$$\begin{aligned} dI' &= I_0'\Pi + I_1'\Pi_1 + I_{\bar{1}}'\bar{\Pi}_1, \\ dJ' &= J_0'\Pi + J_1'\Pi_1 + J_{\bar{1}}'\bar{\Pi}_1, \\ dK' &= K_0'\Pi + K_1'\Pi_1 + K_{\bar{1}}'\bar{\Pi}_1, \end{aligned}$$

montrent que, par la correspondance ponctuelle envisagée, on a

$$\Pi = \Omega, \quad \Pi_1 = \Omega_1, \quad \bar{\Pi}_1 = \bar{\Omega}_1.$$

Cela suffit (n. 78) pour l'équivalence.

84. Supposons maintenant que pour une hypersurface donnée les invariants fondamentaux soient tous constants. Il suffit du reste pour cela que les invariants α, $\bar{\alpha}$, $\beta - \gamma$, θ, $\bar{\theta}$ qui figurent dans les formules (47) soient constants, comme le montrent immédiatement les relations (48). S'il en est ainsi, il faudra que pour la seconde hypersurface, les invariants fondamentaux soient également constants et, par un choix convenable du signe ε, égaux chacun à chacun à ceux de la première hypersurface. Ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes, car les équations

$$\Pi = \Omega, \quad \Pi_1 = \Omega_1, \quad \bar{\Pi}_1 = \bar{\Omega}_1,$$

nécessaires et suffisantes pour réaliser l'équivalence, sont complètement intégrables, puisque, d'après l'hypothèse faite, les dérivées extérieures $\Pi' - \Omega'$, $\Pi_1' - \Omega_1'$, $\bar{\Pi}_1' - \bar{\Omega}_1'$ s'annulent en tenant compte des équations elles-mêmes, les formules (47) montrant que les expressions Π', Π_1', Π_1' contiennent les mêmes coefficients constants que Ω', Ω_1', $\bar{\Omega}_1'$.

Dans ce second cas, les transformations pseudo-conformes qui réalisent l'équivalence dépendent de trois constantes arbitraires. Autrement dit, *toute hypersurface dont les neuf invariants fondamentaux sont constants admet un groupe à trois paramètres de transformations pseudo-conformes.*

On peut préciser davantage. Si l'invariant α est nul, ce qui entraîne, d'après (48), $\eta = 0$, il existe une transformation pseudo-conforme non identique laissant invariante l'hypersurface et laissant fixe un de ses points arbitrairement donné. Il n'en existe pas si $\alpha \neq 0$. Du reste la propriété qui vient d'être énoncée dans le cas $\alpha = 0$ peut se traduire *globalement* de deux manières différentes: *ou bien les transformations pseudo-conformes de l'hypersurface en elle-même forment une seule famille connexe ou bien elles forment deux familles connexes distinctes.*

85. Cherchons, pour terminer, tous les cas dans lequels il existe une transformation pseudo-conforme non identique laissant fixe un point arbitrairement donné d'une hypersurface et laissant localement invariante cette hypersurface. Cela s'exprime par les conditions

$$\alpha = \eta = 0.$$

Les relations (48) donnent alors successivement

$$\beta + 3\gamma = 0, \quad \beta_1 = \beta_{\bar{1}} = 0, \quad \theta_1 = \bar{\theta}_{\bar{1}} = 0,$$
$$\theta_0 = 2i\beta\theta - 1, \quad \bar{\theta}_0 = -2i\beta\bar{\theta} - 1,$$
$$-i\gamma_0 = i\gamma_0 = 0.$$

Il en résulte d'abord que β et γ sont des constantes. La seconde relation (49), appliquée à l'invariant θ, donne, en tenant compte de ce que θ_1 et θ_{01} sont nuls,

$$-\theta\theta_{\bar{1}} = 0, \quad \text{ou} \quad \theta_{\bar{1}} = 0;$$

la première relation (49), appliquée encore à θ, donne

$$i\theta_0 = 0;$$

par suite θ est une constante, ainsi que $\bar{\theta}$. Tous les invariants fondamentaux sont constants et l'hypersurface admet un groupe à trois paramètres.

Sui grandi divisori primi delle coppie di interi in posti corrispondenti di due progressioni aritmetiche. Applicazione del metodo di BRUN.

Memoria di GIOVANNI RICCI (a Pisa).

Sunto. - *Si applica il metodo di* BRUN, *che ha servito a questo autore per dimostrare il suo teorema: « La somma degl' inversi dei numeri primi gemelli* (3, 5; 5, 7; 11, 13; 17, 19; 29, 31;...) *è convergente o finita », a dimostrare un teorema più generale di questo relativo alle coppie di interi che figurano in posti corrispondenti di due progressioni aritmetiche. La dimostrazione viene presentata seguendo l' esposizione analoga che si trova in* LANDAU.

1. Esistono coppie di numeri primi la cui differenza è 2 (cioè coppie di *numeri primi gemelli*), ad esempio: 3, 5; 5, 7; 11, 13; ecc. ma non è ancora noto se tali coppie siano oppure no in numero finito; tuttavia un teorema di BRUN del 1919 (1) assicura che la somma dei loro inversi

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\cdots$$

costituisce una serie convergente nel caso che essi siano in numero infinito. In modo espressivo si può dire: *anche se i numeri primi gemelli sono in numero infinito, essi sono rari,* in opposizione al fatto che la successione dei numeri primi è *più densa,* poichè, come è noto (2), la serie degl' inversi dei numeri primi è divergente.

Il teorema di BRUN riguarda le coppie di interi n, $n+2$ che sono contemporaneamente (cioè per lo stesso valore di n) primi; la successione dei valori assunti da n e quella dei valori assunti da $n+2$ vengono interpretate, nel metodo di BRUN, come appartenenti a una progressione aritmetica di ragione 1. In questa Memoria ci proponiamo di dimostrare (n. 7 e n. 8) due

---

(1) Ved. V. BRUN, *La série* $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\ldots$ *où les dénominateurs sont « nombres premiers jumeaux » est convergente ou finie,* « Bulletin des Sciences Mathématiques », 2e série, t. 43, 1919, pp. 100-104, 124-128; e anche E. LANDAU, *Vorlesungen über Zahlentheorie,* I Bd., Leipzig, 1927, p. 71 e segg.

(2) Ved. ad es. E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen,* Erster Bd., Leipzig, 1909, p. 65.

teoremi (il teorema (A) e il teorema (B) del n. 4) i quali in un certo senso estendono e rafforzano il teorema di Brun. Nella parte essenziale della dimostrazione (n. 7) applicheremo il metodo di Brun, seguendo l'esposizione che se ne trova in Landau ([3]).

Alla dimostrazione dei due teoremi (A) e (B) premettiamo (n. 5) alcune considerazioni geometriche, loro spontanea interpretazione; si giunge così a certe proposizioni di cui un caso particolare ad esempio si ha nella seguente:

« Dalla successione

$$p_1,\ p_2,\ p_3, \dots$$

dei numeri primi per la quale vale la relazione (Mertens, ved. n. 3)

$$\sum_{p \leqq \xi} \frac{1}{p} = \log\log \xi + O(1)$$

si estragga una successione

$\{q\}$ $$q_1,\ q_2,\ q_3, \dots$$

che soddisfi alla condizione

$$\sum_{q \leq \xi} \frac{1}{q} > \theta \log\log \xi \qquad \left(\theta > \frac{1}{2}\right)$$

e del resto arbitraria; i numeri primi p_l rimanenti siano

$\{q^*\}$ $$q_1^*,\ q_2^*,\ q_3^*, \dots$$

che possono essere in numero finito o infinito, oppure addirittura mancanti. Si segni nel piano cartesiano il *reticolato* dei punti (R, R') ove $|R|$ e $|R'|$ sono o interi della successione $\{q\}$ oppure interi divisibili esclusivamente pei numeri primi di $\{q^*\}$.

Per ogni retta del piano, che non sia nè bisettrice degli assi nè parallela ad alcuno di questi, se essa contiene infiniti nodi (R^*, R'^*) *del reticolato, la serie*

$$\sum_{R^*, R'^*} \left(\frac{1}{|R^*|} + \frac{1}{|R'^*|}\right)$$

è convergente ».

Per le bisettrici degli assi e per le rette parallele agli assi e a distanza $|R|$ da questi, la serie in discorso manifestamente *diverge,* poichè in questi casi, quando si assòcino le coppie di termini eguali, una sua minorante è la serie divergente

$$\sum \frac{1}{p}.$$

([3]) E. Landau, op. cit. in ([1]), pp. 73-78.

2. In ciò che segue le lettere latine (ad eccezione di e base dei logaritmi naturali) denotano numeri interi, mentre le lettere greche numeri reali; p, p_h, q, q_h denotano numeri primi.

Cominciamo coll'osservare che *se* α *e* β *sono due costanti positive, esistono infiniti interi naturali* N *che si decompongono in fattori primi tutti maggiori di*

$$N^{\frac{1}{\beta(\log\log N)^\alpha}}.$$

Basta infatti osservare che per $N \to +\infty$ è $\beta(\log\log N)^\alpha \to +\infty$. Volendo esemplificare: detto χ_1 il numero positivo che soddisfa alla equazione

$$\beta(\log\log\chi_1)^\alpha = 1,$$

ogni intero primo p' maggiore di χ_1 ammette l'unico fattore $p' > p'^{\frac{1}{\beta(\log\log p')^\alpha}}$, quindi appartiene alla categoria che noi consideriamo. Più in generale, detto χ_g il numero positivo che soddisfa alla equazione

$$\beta(\log\log\chi_g) = g$$

con g intero positivo, ogni intero h maggiore di χ_g che si compone di fattori primi tutti maggiori di $h^{\frac{1}{g}}$, è un numero appartenente alla categoria in discorso. Possiamo affermare anche che: Fissato (comunque grande) un intero positivo $K(\geqq 3)$, si possono scegliere le costanti α e β in guisa che ogni intero h compreso fra 3 e K si componga con fattori primi tutti maggiori di

$$h^{\frac{1}{\beta(\log\log h)^\alpha}};$$

infatti se $2^{l-1} \leq K < 2^l$, assunto $\alpha(\geqq 1)$ arbitrariamente e

$$\beta > \frac{l}{\log\log 3},$$

ogni intero h compreso fra 3 e K si compone al massimo di $l-1$ fattori primi (distinti o coincidenti) e ciascuno di essi è evidentemente $\geq 2 > K^{\frac{1}{l}} \geqq h^{\frac{1}{l}}$ e quindi maggiore di

$$h^{\frac{1}{\beta(\log\log h)^\alpha}}$$

poichè

$$l < \beta\log\log 3 \leqq \beta\log\log h \leqq \beta(\log\log h)^\alpha.$$

3. È noto che per la somma degl' inversi dei numeri primi vale l' uguaglianza (Mertens) ([1])

$$\sum_{p \leqq \xi} \frac{1}{p} = \log\log \xi + \Theta + O\left(\frac{1}{\log \xi}\right). \qquad (\Theta \text{ costante}) \tag{M}$$

Immaginiamo di estrarre dalla successione $p_1, p_2, p_3, \ldots$ dei numeri primi una successione infinita di numeri, ordinati per grandezza crescente

$$q_1, q_2, q_3, \ldots \tag{\{q\}}$$

in guisa che *la serie dei loro inversi soddisfi alla limitazione*

$$\sum_{q \leqq \xi} \frac{1}{q} \geqq \theta \log\log \xi + O(1) \tag{1}$$

essendo θ *una costante reale con* $\frac{1}{2} < \theta \leqq 1$ (la limitazione $\theta \leqq 1$ è conseguenza di (M)). In particolare la $\{q\}$ potrebbe essere anche la successione $p_1, p_2, p_3, \ldots$ di tutti i numeri primi.

Per le considerazioni del n. 2, fissati comunque i numeri positivi α e β, esistono a maggior ragione infiniti interi positivi Q pei quali gli eventuali divisori primi appartenenti a $\{q\}$ risultano tutti maggiori di

$$\frac{1}{Q^{\beta(\log\log Q)^{\alpha}}}.$$

Per intendersi brevemente, tali interi si diranno della *specie* Q, dunque: *Un intero si dirà della specie* Q *quando nessuno dei suoi divisori primi si trova in* $\{q\}$ *oppure i suoi divisori primi contenuti in* $\{q\}$ *risultano tutti maggiori di*

$$\frac{1}{Q^{\beta(\log\log Q)^{\alpha}}}.$$

In particolare i numeri primi, a partire da un certo p_i in poi, sono tutti interi della specie Q, qualunque siano α, β e la successione $\{q\}$ fissata. Fissato un intero positivo K comunque grande esistono infiniti interi della specie Q composti con più di K fattori primi, e di più esistono infini interi della specie Q composti con più di K fattori primi contenuti in $\{q\}$; basta osservare infatti che è $\beta(\log\log Q)^{\alpha} \to +\infty$ per $Q \to +\infty$.

([1]) F. Mertens, *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie*, « Journal für Mathematik », Bd. 78 (1874), pp. 46-62; e anche E. Landau, op. cit. in ([2]), p. 102.

Per note proprietà sui prodotti [5] abbiamo

$$\prod_{q \leq \xi}\left(1-\frac{2}{q}\right) < e^{-2\sum\limits_{q\leq\xi}\frac{1}{q}}$$

e per la (1) si ricava

(2) $$\prod_{q \leq \xi}\left(1-\frac{2}{q}\right) < \frac{\delta}{\log^{2\theta}\xi}$$

essendo δ una costante positiva opportuna.

4. Veniamo ad enunciare i due teoremi oggetto della presente Memoria:

TEOREMA (A). — *Siano a, a', b, b' numeri interi, con $a > 0$, $a' > 0$, $(a, b) = 1$, $(a', b') = 1$, e consideriamo le due progressioni aritmetiche*

(3) $$\left.\begin{matrix} an+b \\ a'n+b' \end{matrix}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

che supponiamo distinte (cioè $|a - a'| + |b - b'| > 0$).

Fissiamo la successione $\{q\}$ *di numeri primi* (n. 3) *e con essa* $\theta \left(> \frac{1}{2}\right)$, *e anche due numeri positivi α e β, con $\alpha \geq 1$.*

Se $P(\xi;\, \alpha,\, \beta,\, \theta)$ denota il numero degl'interi naturali $n' \leq \xi$ pei quali gl'interi

$$Q = an' + b, \quad Q' = a'n' + b'$$

sono ambedue della specie Q $\Big[$cioè i loro eventuali divisori primi contenuti in $\{q\}$ sono tutti maggiori rispettivamente di

$$Q^{\frac{1}{\beta(\log\log Q)^\alpha}}, \quad Q'^{\frac{1}{\beta(\log\log Q')^\alpha}}\Big]$$

vale, per ω costante opportuna (indipendente da ξ) *e* $\xi \geq 3$:

(4) $$P(\xi;\, \alpha,\, \beta,\, \theta) < \omega \frac{\xi}{\log^{2\theta}\xi}(\log\log\xi)^{2\theta\alpha}.$$

TEOREMA (B). — *Se esistono infiniti valori n' di n pei quali ambedue gl'interi*

$$Q = an' + b, \quad Q' = a'n' + b'$$

[5] Ved. ad es. M. CIPOLLA, *Analisi Algebrica*, Palermo, 1921, p. 335.

soddisfano alle condizioni del teorema precedente, la serie

(5) $$\sum_{Q,\,Q'}\left(\frac{\log^{2\theta-1-\varepsilon} Q}{Q}+\frac{\log^{2\theta-1-\varepsilon} Q'}{Q'}\right)$$

è convergente, ε denotando un numero positivo qualunque.

Poichè, come abbiamo osservato al n. 3, ogni intero naturale primo, a partire da un certo p_i in poi, è un numero della specie Q, nei due teoremi (A) e (B) enunciati, in cui si può porre $\alpha=1$, $\theta=1$, sono contenuti i seguenti

TEOREMA (A*). — *Se $P^*(\xi)$ denota il numero degl'interi naturali $n'\leqq\xi$ pei quali i due interi $p=an'+b$, $p'=a'n'+b'$ sono ambedue primi, vale per $\xi\geqq 3$ e ω costante opportuna* (indipendente da ξ) [6]:

$$P^*(\xi)<\omega\,\frac{\xi}{\log^2\xi}\,(\log\log\xi)^2.$$

TEOREMA (B*). — *Se esistono infiniti valori n' di n pei quali ambedue gl'interi $p=an'+b$, $p'=a'n'+b'$ sono primi, la serie*

$$\sum_{p,\,p'}\left(\frac{\log^{1-\varepsilon} p}{p}+\frac{\log^{1-\varepsilon} p'}{p'}\right)$$

è convergente, ε denotando un numero positivo qualunque.

Quando si ponga $a=a'=1$, $b=0$, $\varepsilon=1$ il teorema (B*) si riduce al teorema nella forma datagli da BRUN, e dà notizia sulla distribuzione delle coppie di numeri primi a differenza fissa $=b'$.

5. Interpretazione geometrica. — Fissata la successione $\{q\}$ e le costanti positive α e β, con $\alpha\geqq 1$, riferiamo il piano ad un sistema ortogonale $O(x,y)$ e consideriamo i punti $(\pm Q,\pm Q')$ *le cui coordinate siano in valore assoluto interi della specie Q.* Un tale sistema discreto (reticolato) di infiniti punti (nodi) è simmetrico tanto rispetto a ciascun asse cartesiano quanto rispetto a ciascuna bisettrice $y=x$, $y=-x$ degli assi.

Le bisettrici $y=\pm x$ contengono ciascuna infiniti nodi $(\pm Q,\pm Q)$ del reticolato, poichè contengono fra questi gl'infiniti punti $(\pm p,\pm p)$ con p primo. Ogni retta $y=\beta$ contiene infiniti punti $(\pm Q,\beta)$ oppure nessun punto del reticolato secondochè $|\beta|$ è oppure no intero della specie Q; lo stesso si dica per le rette $x=\alpha$. In ciascuno dei tre casi la serie che ha per termine generale la somma delle inverse delle due coordinate (prese in valore assoluto) del nodo, rispettivamente $(\pm Q^*,\pm Q^*)$, $(\pm Q^*,\beta)$, $(\alpha,\pm Q^*)$ contenuto

[6] Ved. proposizione analoga (per $a=a'$) in V. BRUN, op. cit. in [1], p. 126.

sulla retta (quando su questa ve ne siano), e cioè

$$2\sum_{Q^*}\left(\frac{1}{Q^*}+\frac{1}{Q^*}\right),\quad 2\sum_{Q^*}\left(\frac{1}{Q^*}+\frac{1}{\beta}\right),\quad 2\sum_{Q^*}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{Q^*}\right)$$

è divergente.

Quando si prenda il *carattere* della serie in questione a denotare la *densità* dei nodi del reticolato contenuti sulla retta, si vede come i teoremi (A) e (B) sopra enunciati dànno notizia sulla densità dei nodi sopra una qualunque retta r distinta dalle bisettrici $y=\pm x$ e non parallela ad alcuno degli assi. Infatti se r non contiene due punti di coordinate intere può contenere al più un nodo $(\pm Q, \pm Q')$. Se r contiene due punti di coordinate intere ha il coefficiente angolare razionale e sia $\frac{a'}{a}$ (sotto forma ridotta); se (b, b') è uno dei punti a coordinate intere in essa contenuti, le equazioni parametriche di r sono

$$x=at+b,\quad y=a't+b';$$

essendo a e a' primi fra loro; quando x e y siano ambedue interi, dalle uguaglianze

$$\frac{x-b}{a}=\frac{y-b'}{a'}=t$$

risulta che i primi due membri sono interi e quindi anche t è intero; dunque tutti e soli i punti (x, y) di r a coordinate intere si ottengono dando a t valori interi.

Ebbene dal teorema (A) si ricava in modo ovvio che:

Il numero dei nodi $(\pm Q=at+b, \pm Q'=a't+b')$ *sulla retta* r (non bisettrice degli assi, nè parallela ad alcuno di questi) *contenuti nel quadrato avente il centro nell'origine e semidimensione* $\delta(\geq 3)$ *è minore di*

$$\omega'\,\frac{\delta}{\log^{2\theta}\delta}\,(\log\log\delta)^{2\theta\alpha}$$

essendo ω' *una costante opportuna.*

Dal teorema (B) analogamente si ricava:

Se r *contiene infiniti nodi* $(\pm Q^*, \pm Q'^*)$ *del reticolato, la serie*

$$\sum_{Q,\,Q'^*}\left(\frac{\log^{2\theta-1-\varepsilon}Q^*}{Q^*}+\frac{\log^{2\theta-1-\varepsilon}Q'^*}{Q'^*}\right)$$

è convergente.

Queste due ultime proposizioni valgono a maggior ragione quando ci si limiti al reticolato costituito dai punti $(\pm p, \pm p')$ colle coordinate intere e (in valore assoluto) numeri primi (allora è da porre $\theta=1$).

Riguardo a quest'ultimo caso e limitatamente alle rette $y=x+b'$ il fatto è contenuto nel teorema di Brun che al principio del n. 1 è ricordato per $b' = 2$.

6. La dimostrazione del teorema (A) (il teorema (B) ne è semplice conseguenza) conviene che venga frazionata col premettere alcuni semplici lemma.

Lemma 1°. — *Se* α, β, γ, λ, μ *sono costanti reali, con* $\alpha > 0$, $\gamma > \beta > 0$, $\lambda > 0$ *dall'eguaglianza*

$$\lambda\eta + \mu = (\lambda\tau + \mu)^{\frac{1}{\beta \{\log\log(\lambda\tau+\mu)\}^{\alpha}}} \tag{6}$$

segue

$$\tau = o(\eta^{\gamma(\log\log\eta)^{\alpha}}). \tag{7}$$

Si osservi che nella (6) occorre limitarci a quei valori di τ, non inferiori a un opportuno τ_0, per cui $\lambda\tau + \mu > 0$ e $\log\log(\lambda\tau + \mu) > 0$.

Essendo per la (6)

$$\log(\lambda\eta + \mu) = \frac{\log(\lambda\tau+\mu)}{\beta\{\log\log(\lambda\tau+\mu)\}^{\alpha}} \tag{8}$$

$$\frac{d(\lambda\eta+\mu)}{d(\lambda\tau+\mu)} = \frac{1}{\beta}(\lambda\tau+\mu)^{\frac{1}{\beta\{\log\log(\lambda\tau+\mu)\}^{\alpha}}-1} \cdot \frac{\log\log(\lambda\tau+\mu)-\alpha}{\{\log\log(\lambda\tau+\mu)\}^{\alpha+1}}$$

si vede che $\lambda\eta+\mu$ risulta, per $\tau > \tau_1$ opportuno, funzione crescente di $\lambda\tau+\mu$ e inoltre $\lambda\eta + \mu \to +\infty$ per $\lambda\tau + \mu \to +\infty$. Essendo $\lambda > 0$ si conclude che anche η risulta funzione crescente di τ, per $\tau > \tau_1$, e inoltre $\eta \to +\infty$ per $\tau \to +\infty$.

Per $\eta > \frac{2|\mu|}{\lambda}$ risulta

$$\frac{\lambda}{2}\eta < \lambda\eta + \mu < \frac{3\lambda}{2}\eta,$$

da cui

$$\log\eta\left(1 + \frac{\log\frac{\lambda}{2}}{\log\eta}\right) < \log(\lambda\eta+\mu) < \log\eta\left(1+\frac{\log\frac{3\lambda}{2}}{\log\eta}\right)$$

cioè

$$\log\eta = (1 + o(1))\log(\lambda\eta + \mu) \tag{9}$$

e analogamente

$$\log\tau = (1 + o(1))\log(\lambda\tau + \mu). \tag{10}$$

Per le (8), (9), (10) risulta

$$\begin{aligned}\log\eta &= \frac{\log(\lambda\tau+\mu)}{\beta\{\log\log(\lambda\tau+\mu)\}^{\alpha}}(1+o(1)) \\ &= \frac{(1+o(1))\log\tau}{\beta\{\log[(1+o(1))\log\tau]\}^{\alpha}}(1+o(1)) \\ &= \frac{\log\tau}{\beta(\log\log\tau)^{\alpha}}(1+o(1)). \qquad (11)\end{aligned}$$

Dalla (11) otteniamo

$$\begin{aligned}\log\log\eta &= \log\frac{\log\tau}{\beta(\log\log\tau)^\alpha}+o(1)\\ &= \log\log\tau-\alpha\log\log\log\tau+O(1)\\ &= \log\log\tau\,(1+o(1)).\end{aligned}\tag{12}$$

Introducendo il logaritmo in (7), tenendo presenti le (11) e (12) e detto ε un numero reale con $0<\varepsilon<\frac{\gamma}{\beta}-1$, otteniamo

$$\begin{aligned}\log\left(\eta^{\gamma(\log\log\eta)^\alpha}\right) &= \gamma\log\eta\,(\log\log\eta)^\alpha\,.\\ &= \frac{\gamma}{\beta}\log\tau\,(1+o(1))\\ &= (1+\varepsilon)\log\tau+\left(\frac{\gamma}{\beta}-1-\varepsilon+o(1)\right)\log\tau.\end{aligned}$$

Da questa ultima uguaglianza segue che esiste un η_0 tale che per $\eta>\eta_0$ risulta

$$\tau^{1+\varepsilon}<\eta^{\gamma(\log\log\eta)^\alpha}$$

da cui l'asserto.

LEMMA 2°. — *Se α e γ sono costanti positive, con $\alpha\geqq 1$, dalla relazione*

$$\eta=\xi^{\frac{1}{\gamma(\log\log\xi)^\alpha}}\tag{13}$$

segue

$$\eta^{\gamma(\log\log\eta)^\alpha}=o\left(\frac{\xi}{\log^2\xi}\right).\tag{14}$$

Occorre, al solito, limitarci a quei valori di ξ per cui $\log\log\xi>0$ e $\log\log\eta>0$.

Dalla (13) segue

$$\log\eta=\frac{\log\xi}{\gamma(\log\log\xi)^\alpha},\quad \log\log\eta=\log\log\xi-\alpha\log\log\log\xi-\log\gamma.\tag{15}$$

Dalla prima delle (15) apparisce η funzione crescente di ξ, e inoltre $\eta\to+\infty$ per $\xi\to+\infty$. Introducendo il logaritmo del primo membro di (14) tenendo conto di (15), otteniamo

$$\log\left(\eta^{\gamma(\log\log\eta)^\alpha}\right)=\log\xi\left(1-\frac{\alpha\log\log\log\xi+\log\gamma}{\log\log\xi}\right)^\alpha$$

e poichè, per ξ superiore a un certo ξ_0, risulta

$$\frac{3\log\log\xi}{\log\xi}<\frac{\alpha\log\log\log\xi+\log\gamma}{\log\log\xi}<1$$

per $\xi > \xi_0$, essendo $\alpha \geqq 1$, abbiamo

$$\log\left(\eta^{\gamma(\log\log\eta)^\alpha}\right) < \log\xi\left(1 - \frac{3\log\log\xi}{\log\xi}\right) = \log\left(\frac{\xi}{\log^3\xi}\right)$$

da cui

$$\eta^{\gamma(\log\log\eta)^\alpha} < \frac{\xi}{\log^3\xi}$$

e ne segue la (14).

OSSERVAZIONE. — Nelle posizioni dei Lemma 1° e Lemma 2° abbiamo

(16) $$\tau = o\left(\frac{\xi}{\log^2\xi}\right)$$

e anche evidentemente

(17) $$\lambda\tau + \mu = o\left(\frac{\xi}{\log^2\xi}\right).$$

LEMMA 3°. — *Se* δ *è un numero reale positivo* $> \gamma$, *dalla* (13) *segue che, per* ξ *maggiore di un conveniente* ξ_1, *è:*

(18) $$\log(\lambda\eta + \mu) > \frac{\log\xi}{\delta(\log\log\xi)^\alpha}.$$

Infatti per la (9) e la prima delle (15) è

$$\log(\lambda\eta + \mu) = (1 + o(1))\log\eta = (1 + o(1))\frac{\log\xi}{\gamma(\log\log\xi)^\alpha}$$
$$= \frac{\log\xi}{\delta(\log\log\xi)^\alpha}\left(\frac{\delta}{\gamma} + o(1)\right)$$

ed essendo $\delta > \gamma$ questo ultimo fattore finisce col diventare e restare > 1 quando $\xi \to +\infty$; da cui l'asserto

LEMMA 4°. — *Se* ε *e* ε' *sono due numeri reali, con* $\varepsilon' > \varepsilon > 0$, *dalla* (13), *con* $\alpha \geqq 1$, *segue che per* ξ *maggiore di un conveniente* ξ_2 *è*

(19) $$\{2(\lambda\eta + \mu)\}^{\varepsilon\log\log\xi} < \xi^{\frac{\varepsilon'}{\gamma}}.$$

Infatti per il logaritmo del primo membro di (19), tenendo conto di (9) e di (15), si ha

$$\varepsilon\log\log\xi\,\{\log(\lambda\eta + \mu) + \log 2\} = (1 + o(1))\,\varepsilon\log\eta\log\log\xi$$
$$= (1 + o(1))\frac{\varepsilon}{\gamma}\log\xi\,(\log\log\xi)^{1-\alpha}$$

e poichè $1 - \alpha \leqq 0$ e $(1 + o(1))\varepsilon$ finisce col diventare e restare minore di ε' per ξ indefinitamente crescente, esiste un ξ_2 conveniente tale che, per $\xi > \xi_2$, si ha

$$\varepsilon\log\log\xi\,\{\log(\lambda\eta + \mu) + \log 2\} < \frac{\varepsilon'}{\gamma}\log\xi$$

da cui segue la (19).

LEMMA 5°. — *Se* ε *e* δ *sono due numeri reali, con* $\varepsilon > \delta > 0$, *dalla* (13) *segue che, per* ξ *maggiore di un conveniente* ξ_3, *è* (7)

$$2[\varepsilon \log\log \xi] - 1 > 2\delta \log\log(\lambda\eta + \mu). \tag{20}$$

Infatti dalla seconda delle (15) otteniamo

$$\log\log\eta = (1 + o(1))\log\log\xi$$

e dalla (9)

$$\log\log(\lambda\eta + \mu) = \log\log\eta + o(1);$$

dunque pel secondo membro di (20) abbiamo

$$\begin{aligned} 2\delta\log\log(\lambda\eta+\mu) &= 2\delta\log\log\eta + o(1) \\ &= 2\delta(1+o(1))\log\log\xi + o(1) \\ &= 2\delta(1+o(1))\log\log\xi \\ &= 2\varepsilon\log\log\xi - 2\{\varepsilon - \delta(1+o(1))\}\log\log\xi. \end{aligned} \tag{21}$$

Poichè $\varepsilon > \delta$, per η maggiore di un conveniente η_3 risulta

$$2\{\varepsilon - \delta(1+o(1))\}\log\log\xi > 3$$

e dalla (21) si ricava per $\xi > \xi_3$

$$2\delta\log\log(\lambda\eta+\mu) < 2\varepsilon\log\log\xi - 3 < 2[\varepsilon\log\log\xi] - 1.$$

come volevamo dimostrare.

I Lemma 6°, 7° e 8° vengono presi tali e quali dalla citata dimostrazione di LANDAU (8) del teorema di BRUN.

LEMMA 6°. — *Se* c *e* m *sono interi positivi, e* m *è dispari, risulta*

$$\sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l\binom{c}{l} \geqq 0. \tag{22}$$

Per $m - 1 \geqq c$ il primo membro di (22) vale $(1-1)^c = 0$ e la (22) è soddisfatta. Per $m - 1 \leqq \frac{c}{2}$ la (22) è soddisfatta poichè i termini della somma al primo membro, in numero dispari e a segni alternati, vanno crescendo in valore assoluto e l'ultimo è positivo. Per $\frac{c}{2} < m - 1 < c$ risulta

$$\sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l\binom{c}{l} = -\sum_{l=m}^{c}(-1)^l\binom{c}{l} = \sum_{l=m}^{c}(-1)^{l+1}\binom{c}{l} > 0,$$

poichè nell'ultima somma il primo termine è positivo e tutti i termini, a segni alternati, decrescono in valore assoluto al crescere di l.

(7) Col simbolo $[x]$ si denota la parte intera del numero reale x.

(8) Ved. E. LANDAU, op. cit. in (1), pp. 71-72.

Lemma 7°. — *Denotando S_n la funzione simmetrica elementare di grado n di s numeri positivi $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ $(1 \leqq n \leqq s)$, risulta:*

$$S_n \leqq \frac{S_1^n}{n!}. \tag{23}$$

Infatti nello sviluppo di $S_1^n = (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_s)^n$ compariscono tutti i termini di S_n ciascuno col coefficiente numerico $n!$.

Lemma 8°. — *Sia ξ un numero reale, c e d numeri interi, con $\xi > 0$, $d > 0$. Il numero h degl'interi n che verificano le condizioni*

$$n \equiv c \pmod d, \quad 0 < n \leqq \xi$$

differisce da $\frac{\xi}{d}$ per meno di 1, cioè

$$\frac{\xi}{d} - 1 < h < \frac{\xi}{d} + 1. \tag{24}$$

Se $\frac{\xi}{d}$ è intero, gl'interi positivi $\leqq \xi$ si distribuiscono in $\frac{\xi}{d}$ sistemi completi di resti $(\operatorname{mod} d)$; risulta esattamente

$$h = \frac{\xi}{d},$$

e la (24) è soddisfatta.

Se $\frac{\xi}{d}$ non è intero, gl'interi positivi $\leqq \xi$ si distribuiscono in $\left[\frac{\xi}{d}\right]$ sistemi completi di resti $(\operatorname{mod} d)$ coll'eventuale avanzo di qualche intero

$$\left[\frac{\xi}{d}\right] d + 1, \quad \left[\frac{\xi}{d}\right] d + 2, \dots \tag{25}$$

e fra questi interi (25) è contenuto al più un intero $\equiv c \pmod d$. Ne segue che quando $\frac{\xi}{d}$ non è intero risulta

$$h = \left[\frac{\xi}{d}\right] \quad \text{oppure} \quad h = \left[\frac{\xi}{d}\right] + 1;$$

ma in questo caso è evidentemente

$$\frac{\xi}{d} - 1 < \left[\frac{\xi}{d}\right] < \left[\frac{\xi}{d}\right] + 1 < \frac{\xi}{d} + 1$$

da cui segue l'asserto.

7. Dimostrazione del teorema (A). — Senza limitare la generalità, nel caso $a \neq a'$ si può supporre $a < a'$, e nel caso $a = a'$ si può supporre $b < b'$; ordinate così le due progressioni aritmetiche (3) esiste un intero n_0 tale che sia

$$0 < an + b < a'n + b' \quad \text{per} \quad n \geqq n_0. \tag{26}$$

Quando sia $q > a$ e $q > a'$ (q primo), ciascuna delle due congruenze

$$ax + b \equiv 0 \pmod{q}, \quad a'x + b' \equiv 0 \pmod{q} \tag{27}$$

ammette una ed una sola radice; se le due radici sono uguali $(\bmod\, q)$ è necessariamente $ab' - a'b \equiv 0 \pmod{q}$; ne segue che denotando q_h l'h-esimo numero primo della successione $\{q\}$ fissata al n. 3, e q_{s+1} il minimo primo dispari di $\{q\}$ che soddisfa alla condizione

$$q_{s+1} > \mathrm{Max}\,(an_0 + b,\ a,\ a',\ |ab' - a'b|), \tag{28}$$

le (27) scritte secondo $(\bmod\, q_h)$, $h \geqq s + 1$, ammettono due radici distinte, una per ciascuna, e inoltre per $an + b > q_{s+1}$ è soddisfatta la (26).

Siano ξ, η e τ tre numeri positivi che soddisfano alle limitazioni e relazioni

$$q_{s+2} \leqq a\eta + b = (a\tau + b)^{\frac{1}{\beta\{\log\log(a\tau+b)\}^{\alpha}}} < a\tau + b < a\xi + b \tag{29}$$

e del resto qualunque (in seguito fisseremo η in funzione di ξ, ma per adesso conviene pensarli indipendenti). Si osservi che il numero positivo τ deve essere scelto abbastanza grande in guisa che l'esponente risulti minore di 1, cioè $\beta\{\log\log(a\tau + b)\}^{\alpha} > 1$, ciò che avviene per $\tau > \tau_0$, con τ_0 conveniente. Inoltre dalle (29) segue $\eta < \tau < \xi$.

Se $R(\xi, \tau;\ \alpha, \beta, \theta)$ denota il numero degl'interi n' pei quali $\tau < n' \leqq \xi$ e $an' + b$, $a'n' + b'$ sono ambedue della specie Q, si ha evidentemente

$$P(\xi;\ \alpha, \beta, \theta) \leqq \tau + R(\xi, \tau;\ \alpha, \beta, \theta). \tag{30}$$

Sia q_r il massimo primo di $\{q\}$ che non supera $a\eta + b$ e denotiamo con $A(\xi)$ il numero degl'interi n per cui

$$0 < n \leqq \xi,\ an + b \not\equiv 0 \quad \text{e} \quad a'n + b' \not\equiv 0 \pmod{q_h}, \quad h = s + 1, \dots, r.$$

Ogni coppia $an' + b$, $a'n' + b'$ $(\tau < n' \leqq \xi)$ computata in $R(\xi, \tau;\ \alpha, \beta, \theta)$ è tale che ogni divisore primo appartenente a $\{q\}$ di uno almeno dei due interi $an' + b$, $a'n' + b'$ è maggiore di

$$a\eta + b = (a\tau + b)^{\frac{1}{\beta\{\log\log(a\tau+b)\}^{\alpha}}}$$

cioè maggiore di q_r, e quindi ciascuno non divisibile per q_h $(h = s + 1, \dots, r)$. In conseguenza ogni tale coppia computata in $R(\xi, \tau;\ \alpha, \beta, \theta)$ risulta computata una volta in $A(\xi)$; ne segue evidentemente

$$R(\xi,\ \tau;\ \alpha,\ \beta,\ \theta) \leq A(\xi)$$

e per la (30)

(31) $$P(\xi;\ \alpha,\ \beta,\ \theta) \leq \tau + A(\xi).$$

Il nostro problema si riduce a *maggiorare convenientemente la funzione* $A(\xi)$, la quale, una volta fissate le progressioni aritmetiche (3), fissata la successione $\{q\}$ e in conseguenza θ, fissate le costanti α e β, dipende da η e da ξ, e in definitiva soltanto da ξ non appena avremo fissato $\eta = \eta(\xi)$ come funzione di ξ.

Valutazione della funzione $A(\xi)$. Indichiamo con $\Omega(d)$ il numero dei fattori primi distinti di un qualunque intero $d > 0$. Supponiamo essere $d = q_i q_k \dots q_l$, con $i, k, \dots, l$ tutti diversi e maggiori di s (d risulta non divisibile per alcun quadrato); allora con $B(d,\ \xi)$ denoteremo il numero degl'interi positivi $n \leq \xi$ pei quali una congruenza per ciascuna delle $\Omega(d)$ linee seguenti è soddisfatta

$$\begin{array}{l} an + b \equiv 0 \quad \text{oppure} \quad a'n + b' \equiv 0 \pmod{q_i} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ an + b \equiv 0 \quad \text{oppure} \quad a'n + b' \equiv 0 \pmod{q_l} \end{array}$$

convenendo di porre $B(1,\ \xi) = [\xi]$. Ciascuna congruenza ammette, secondo il proprio modulo, una ed una sola radice e le radici sono distinte per le congruenze della stessa linea (si ricordi la condizione (28) e il fatto che $i, k, \dots, l$ sono tutti $\geq s + 1$); inoltre in $2^{\Omega(d)}$ modi diversi esse possono venire associate a formare sistema lineare; per note proprietà elementari sulle congruenze lineari, ciascun sistema ammette una radice $(\mathrm{mod}\ d)$. Dunque in ogni sistema completo di resti $(\mathrm{mod}\ d)$ abbiamo $2^{\Omega(d)}$ interi, ciascuno dei quali, quando sia $\leq \xi$, da computarsi in $B(d,\ \xi)$. Tenendo conto del Lemma 8° (n. 6) il numero h degl'interi positivi $n \leq \xi$ che soddisfano ad uno dei $2^{\Omega(d)}$ sistemi lineari verifica le limitazioni

$$\frac{\xi}{d} - 1 < h < \frac{\xi}{d} + 1$$

da cui segue

(32) $$2^{\Omega(d)}\left(\frac{\xi}{d} - 1\right) < B(d,\ \xi) < 2^{\Omega(d)}\left(\frac{\xi}{d} + 1\right).$$

Veniamo ad esprimere $A(\xi)$ mediante una combinazione lineare di funzioni nella forma $B(d,\ \xi)$. Poniamo

$$q_{s+1} q_{s+2} \cdots q_r = k$$

e dimostriamo che vale l'identità [9]:

$$A(\xi) = \sum_{d|k} \mu(d)B(d, \xi) \tag{33}$$

$$= B(1, \xi) - B(q_{s+1}, \xi) - \dots - B(q_r, \xi)$$

$$+ B(q_{s+1}q_{s+2}, \xi) + \dots + B(q_{r-1}q_r, \xi)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ (-1)^{r-s}B(q_{s+1} \dots q_r, \xi).$$

Infatti, ogni intero n, con $0 < n \leqq \xi$, computato in $A(\xi)$ si trova computato in $B(1, \xi) = [\xi]$ mentre non è computato in alcun termine $B(d, \xi)$ per $d > 1$, poichè i due elementi delle progressioni $an + b$, $a'n + b'$ ad esso corrispondenti non sono divisibili per alcuno dei numeri primi $q_{s+1}, q_{s+2}, \dots, q_r$. Ogni intero n, con $0 < n \leqq \xi$, non computato in $A(\xi)$ è tale che, per ciascuno di c $(1 \leqq c \leqq r - s)$ numeri primi diversi $q_{h_1}, q_{h_2}, \dots, q_{h_c}$ scelti fra i $q_{s+1}, \dots, q_r$, una almeno delle due congruenze

$$an + b \equiv 0,\ a'n + b' \equiv 0 \pmod{q_{h_i}}\ (i = 1, \dots, c)$$

è soddisfatta; un tale intero n risulta computato, al secondo membro di (33), una volta in ciascuno dei termini $B(d, \xi)$ pei quali d sia divisore del prodotto $q_{h_1}q_{h_2} \dots q_{h_c}$. Tenendo conto del coefficiente $\mu(d)$ a moltiplicare, un tale numero n risulta computato

$$\sum_{d/p_{h_1} \dots p_{h_c}} \mu(d) = 0 \tag{34}$$

volte [10].

Al secondo membro della (33) si trovano $r - s + 1$ gruppi di termini, ciascun gruppo essendo costituito dai simboli $(-1)^{\Omega(d)}B(d, \xi)$ corrispondenti allo stesso valore $\Omega(d)$ (numero dei divisori primi di d), e i gruppi risultando di segno alternato. L'osservazione fondamentale su cui si basa il metodo di Brun è la seguente:

Troncando la somma al secondo membro di (33) *alla fine di un gruppo positivo, la somma ne risulta aumentata o per lo meno non diminuita* (com-

---

(9) Con $\mu(a)$ denotiamo, come d'uso, la funzione di Möbius, cioè $\mu(a) = 1$ per $a = 1$; $\mu(a) = (-1)^r$ quando a è il prodotto di $r(\geq 1)$ fattori primi *distinti*; $\mu(a) = 0$ in ogni altro caso, cioè quando a è divisibile pel quadrato di un numero primo.

Con $\sum_{d|k}$ si intende la somma estesa a tutti i divisori d di k.

(10) L'annullarsi della somma al primo membro di (34) è proprietà fondamentale della funzione di Möbius (ved. ad esempio E. Landau, op. cit. in (1), p. 20):

$$\sum_{d|a} \mu(d) = 1 \ (\text{per } a = 1), \ = 0 \ (\text{per } a > 1).$$

prendendo così anche il caso in cui la troncatura si òperi alla fine togliendo ad essa ogni effetto), cioè vale la disuguaglianza

$$A(\xi) \leqq \sum_{\substack{d|k \\ \Omega(d) < m}} \mu(d) B(d, \xi), \tag{35}$$

essendo m un qualunque intero *dispari* (che alla fine occorrerà assumere come opportuna funzione di ξ).

Infatti, ogni intero n, con $0 < n \leqq \xi$, computato in $A(\xi)$ risulta, come sopra abbiamo veduto, computato una volta in $B(1, \xi)$ e non nei termini rimanenti. Ogni intero n, con $0 < n \leqq \xi$, non computato in $A(\xi)$ risulta, come sopra abbiamo veduto, computato al secondo membro una volta in ciascun termine $B(d, \xi)$ per cui d divide il prodotto $q_{h_1} q_{h_2} \dots q_{h_c}$, colla condizione nuova ulteriore $\Omega(d) < m$. Nel gruppo di termini corrispondenti al valore $\Omega(d) = l (< m)$ tale intero è computato (tenendo conto del segno) esattamente

$$\mu(d)\binom{c}{l} = (-1)^l \binom{c}{l}$$

volte; dunque ogni tale intero n risulta, al secondo membro di (35), computato

$$\sum_{\substack{d/p_{h_1} \dots p_{h_c} \\ \Omega(d) < m}} \mu(d) = \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l \binom{c}{l}$$

volte. Ma per il *Lemma* 6° (n. 6) questa ultima somma è non negativa e in conseguenza la (35) risulta dimostrata.

Nella (35) sostituiamo agl'interi $B(d, \xi)$ i valori maggiori oppure minori assegnati dalla (32), secondochè $\mu(d) = +1$ oppure $\mu(d) = -1$; il secondo membro di (35) ne risulta così aumentato. Tenendo conto che i termini $B(d, \xi)$ per $\Omega(d) = h$ sono esattamente $\binom{r-s}{h}$ risulta

$$A(\xi) < \xi \sum_{\substack{d|k \\ \Omega(d) < m}} \frac{\mu(d) 2^{\Omega(d)}}{d} + \sum_{h=0}^{m-1} 2^h \binom{r-s}{h}. \tag{36}$$

Il problema è dunque ridotto a *maggiorare il secondo membro di* (36). Riguardo al primo termine abbiamo

$$\sum_{\substack{d|k \\ \Omega(d) < m}} \frac{\mu(d) 2^{\Omega(d)}}{d} = \sum_{d|k} \frac{\mu(d) 2^{\Omega(d)}}{d} - \sum_{n=m}^{r-s} \sum_{\substack{d|k \\ \Omega(d) = m}} \frac{\mu(d) 2^{\Omega(d)}}{d}$$

(l'ultima somma essendo da considerarsi nulla per $m \geqq r - s + 1$)

$$= \prod_{q_{s+1} \leqq q \leqq q_r} \left(1 - \frac{2}{q}\right) - \sum_{n=m}^{r-s} (-1)^n 2^n \sum_{\substack{d \mid k \\ \Omega(d)=n}} \frac{1}{d}$$

(37) $$= \prod_{q_{s+1} \leqq q \leqq q_r} \left(1 - \frac{2}{q}\right) - \sum_{n=m}^{r-s} (-1)^n 2^n S_n ,$$

ove S_n denota la funzione simmetrica elementare di grado n degli $r - s$ numeri *positivi*

$$\frac{1}{q_{s+1}}, \dots, \frac{1}{q_r}.$$

Denotando e la base dei logaritmi naturali, è

$$e^n = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{n^h}{h!} > \frac{n^n}{n!},$$

e, tenendo conto del *Lemma* 7° (n. 6), abbiamo:

$$S_n \leqq \frac{S_1{}^n}{n!} < \left(\frac{eS_1}{n}\right)^n,$$

quindi

(38) $$\left| \sum_{n=m}^{r-s} (-1)^n 2^n S_n \right| \leqq \sum_{n=m}^{r-s} \left(\frac{2eS_1}{n}\right)^n \leqq \sum_{n=m}^{r-s} \left(\frac{2eS_1}{m}\right)^n.$$

Riguardo al secondo termine del secondo membro di (36), poichè

$$r - s \geqq 2, \quad r < p_r \leqq q_r \leqq a\eta + b,$$

abbiamo:

$$\sum_{h=0}^{m-1} 2^h \binom{r-s}{h} < 2^m \sum_{h=0}^{m-1} \binom{r-s}{h} = 2^m \sum_{h=0}^{m-1} \frac{(r-s)\dots(r-s-h+1)}{h!} \leqq$$

(39) $$\leqq 2^m \sum_{h=0}^{m-1} r^h = 2^m \frac{r^m - 1}{r - 1} < 2^m r^m < \{ 2(a\eta - b) \}^m .$$

Tenendo conto delle (37), (38) e (39) nella (36) abbiamo:

(40) $$A(\xi) < \xi \prod_{q_{s+1} \leqq q \leqq q_r} \left(1 - \frac{2}{q}\right) + \xi \sum_{n=m}^{r-s} \left(\frac{2eS_1}{m}\right)^n + \{ 2(a\eta + b) \}^m.$$

A questo punto conviene applicare il teorema di Mertens ricordato al n. 3 e la (2) (n. 3). Per la (M) esiste una costante positiva δ_1, che conveniamo di assumere in ogni caso maggiore di 2, per la quale

(41) $$2eS_1 = 2e \sum_{q_{s+1} \leqq q \leqq a\eta + b} \frac{1}{q} < \delta_1 \log\log(a\eta + b);$$

e per la (2) esiste una costante positiva δ_2 per cui

$$\prod_{q_{s+1} \leqq q \leqq a\eta + b} \left(1 - \frac{2}{q}\right) < \frac{\delta_2}{\log^{20}(a\eta + b)}. \tag{42}$$

L'intero dispari m è completamente arbitrario; quando soddisfi alla condizione $m > 2\delta_1 \log\log(a\eta + b)$, per la sommatoria al secondo membro di (40) abbiamo

$$\sum_{n\ m}^{r-s} \left(\frac{2eS_1}{m}\right)^n < \sum_{n\ m}^{r-s} \left(\frac{\delta_1 \log\log(a\eta + b)}{m}\right)^n < \sum_{n\ m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^m}. \tag{43}$$

Dalla (40) tenendo conto della (42) e della (43) otteniamo finalmente

$$A(\xi) < \frac{\delta_2 \xi}{\log^{20}(a\eta + b)} + \frac{2\xi}{2^m} + \{2(a\eta + b)\}^m. \tag{44}$$

Valutazione della funzione $P(\xi;\ \alpha,\ \beta,\ \theta)$. Introducendo la (44) in (31) abbiamo

$$P(\xi;\ \alpha,\ \beta,\ \theta) < \tau + \frac{\delta_2 \xi}{\log^{20}(a\eta + b)} + \frac{2\xi}{2^m} + \{2(a\eta + b)\}^m \tag{45}$$

ove, riepilogando, i numeri q_{s+1}, η, τ e ξ soddisfano alle (28) e (29), mentre l'intero dispari m e la costante δ_1 soddisfano alle disuguaglianze

$$m > 2\delta_1 \log\log(a\eta + b), \quad \delta_1 > 2. \tag{46}$$

Poniamo adesso $\eta(\xi)$ e $m(\xi)$ come funzioni di ξ scelte in guisa che per $\xi > \xi_0$ conveniente le (29) e (46) siano tutte soddisfatte; opportunamente scelte tali funzioni siano

$$\eta = \xi^{\frac{1}{\gamma(\log\log\xi)^\alpha}}, \quad m = 2[\varepsilon \log\log \xi] - 1 \tag{47}$$

con

$$\varepsilon > \delta_1, \quad \gamma > \operatorname{Max}(2\varepsilon,\ \beta). \tag{48}$$

τ risulta funzione di ξ composta mediante la $\eta(\xi)$ attraverso la (29) e definita per $\xi > \xi_1$ conveniente.

Per l'*Osservazione* dopo il *Lemma* 2° (n. 6), essendo $\gamma > \beta$ risulta

$$\tau = o\left(\frac{\xi}{\log^2 \xi}\right), \quad a\tau + b = o\left(\frac{\xi}{\log^2 \xi}\right),$$

dunque si può scegliere un numero positivo ξ_0 abbastanza grande in guisa che per $\xi > \xi_0$ si abbia, in primo luogo poichè $a\tau + b \to +\infty$ per $\xi \to +\infty$

$$\beta\,\{\log\log(a\tau + b)\}^\alpha > 1$$

e anche

$$an_0 + b \leqq q_{s+1} < q_{s+2} \leqq a\eta + b < a\tau + b < a\xi + b,$$

e per il *Lemma* 5° (n. 6), essendo $\varepsilon > \delta_1$,

$$2[\varepsilon \log\log \xi] - 1 > 2\delta_1 \log\log(a\eta + b).$$

Per $\xi > \xi_0$ risultano così verificate tutte le condizioni (29) e (46).

Fissate con le (47) le funzioni $\eta(\xi)$ e $m(\xi)$, per $\xi > \xi_0$ la (45) ci dà

$$(49) \qquad P(\xi;\ \alpha, \beta, \theta) < \tau + \frac{\delta_2 \xi}{\log^{20}(a\eta + b)} + \frac{2^4 \xi}{2^{2\varepsilon \log\log \xi}} + \{2(a\eta + b)\}^{2\varepsilon \log\log \xi}.$$

Il *Teorema* (A) risulterà dimostrato non appena avremo provato che ogni termine al secondo membro di (49) è minore, per $\xi > \xi_2$, di

$$\delta_3 \frac{\xi}{\log^{20} \xi} (\log\log \xi)^{20\alpha} \qquad \left(\frac{1}{2} < \theta \leqq 1\right)$$

con δ_3 costante positiva opportuna. Esaminando ciascun termine in discorso: Per l'*Osservazione* (n. 6) è

$$(50) \qquad \tau = o\left(\frac{\xi}{\log^2 \xi}\right).$$

Per il *Lemma* 3° (n. 6) è con $\delta_3 > \delta_2 \gamma^{20}$ e $\xi > \xi_3$ conveniente

$$(51) \qquad \frac{\delta_2 \xi}{\log^{20}(a\eta + b)} < \delta_3 \frac{\xi}{\log^{20} \xi} (\log\log \xi)^{20\alpha}.$$

Riguardo al terzo termine, essendo $2\varepsilon \log 2 > 2\delta_1 \log 2 > 4 \log 2 > 2$, abbiamo

$$(52) \qquad \frac{\xi}{2^{2\varepsilon \log\log \xi}} = \frac{\xi}{(\log \xi)^{2\varepsilon \log 2}} < \frac{\xi}{\log^2 \xi} \leqq \frac{\xi}{\log^{20} \xi}.$$

Riguardo all'ultimo termine, per il *Lemma* 4° (n. 6), detto ε' un numero positivo per cui $\gamma > \varepsilon' > 2\varepsilon$ (si ricordi la seconda delle (48)), risulta per $\xi > \xi_4$ conveniente

$$(53) \qquad \{2(a\eta + b)\}^{2\varepsilon \log\log \xi} < \xi^{\frac{\varepsilon'}{\gamma}} \qquad \left(\frac{\varepsilon'}{\gamma} < 1\right).$$

Le relazioni (50), (51), (52), (53) portano a concludere che per $\xi > \xi_2$ $(\xi_2 = \mathrm{Max}(\xi_0, \xi_3, \xi_4))$ vale la (4) del *Teorema* (A) (n. 4); coll'aumentare eventualmente la costante ω la (4) stessa vale per $\xi \geqq 3$.

Il *Teorema* (A) risulta così dimostrato.

8. Dimostrazione del Teorema (B). — Per n positivo e maggiore di ambedue gl'interi $2|b|$ e $2|b'|$ risulta

$$0 < \left(a - \frac{1}{2}\right)n < an + b < (a + 1)n$$

$$0 < \left(a' - \frac{1}{2}\right)n < a'n + b' < (a' + 1)n$$

e ne segue, essendo $Q = an' + b$, $Q' = a'n' + b'$, $n' > 2\,|\,b\,|$, $n' > 2\,|\,b'\,|$, $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$:

$$\frac{\log^{2\theta-1-\varepsilon} Q}{Q} < \frac{\log^{2\theta-1-\varepsilon}(a+1)n'}{\left(a-\frac{1}{2}\right)n'} < \delta_4 \frac{\log^{2\theta-1-\delta} n'}{n'}$$

ove δ, con $0 < \delta < \varepsilon$, è comunque fissato e δ_4 è costante opportuna.

Analogamente

$$\frac{\log^{2\theta-1-\varepsilon} Q'}{Q'} < \delta_5 \frac{\log^{2\theta-1-\delta} n'}{n'},$$

dunque il termine generale della serie (5) (n. 4), a partire da un certo posto, non supera la quantità

$$\delta_6 \frac{\log^{2\theta-1-\delta} n'}{n'}$$

con δ_6 costante opportuna, e il teorema risulta dimostrato non appena avremo provato che la serie

$$\sum_{n'} \frac{\log^{2\theta-1-\delta} n'}{n'} \tag{54}$$

è convergente.

Pel *Teorema* (A) abbiamo

$$r = P(n';\ \alpha,\ \beta,\ \theta) < \omega\, \frac{n'}{\log^{2\theta} n'} (\log\log n')^{2\theta\alpha},$$

da cui segue, nel caso che esista almeno una coppia (Q, Q'), cioè sia $r > 0$:

$$\frac{\log^{2\theta-1-\delta} n'}{n'} < \delta_7 \frac{\log^{2\theta-1-\varkappa} n'}{n'} \cdot \frac{1}{(\log\log n')^{2\theta\alpha}} < \frac{\omega\delta_7}{r \log^{1+\varkappa} n'} < \frac{\omega\delta_7}{r \log^{1+\varkappa}(r+1)}$$

ove $\varkappa$, con $0 < \varkappa < \delta$, è del resto qualunque. Nel caso che esistano infinite coppie (Q, Q'), la convergenza della serie [11]

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r \log^{1+\varkappa}(r+1)}$$

conduce alla convergenza della serie (54).

Il *Teorema* (B) risulta così dimostrato.

---

[11] Ved. ad es. M. CIPOLLA, op. cit. in [5], p. 259.

Spazi proiettivamente piani (1).

Memoria di ENEA BORTOLOTTI (a Cagliari).

Sunto. - *L'A. espone nella prima parte, coordinandoli, i principali risultati delle ricerche finora condotte sugli spazi proiettivamente piani, apportandovi qualche complemento (relativo ad esempio alle ipersuperficie di* E_n *affine per le quali la connessione affine* intrinseca *è proiettivamente piana). Nella seconda parte, dà una costruzione geometrica, basata sulla teoria delle connessioni proiettive, di tutte le connessioni affini simmetriche proiettivamente piane, e coglie l'occasione per introdurre e studiare certe connessioni proiettive,* metriche e non affini, *determinate da un campo di quadriche associate ai punti dello spazio supposto; connessioni cui può subordinarsi una metrica riemanniana* qualunque, *come alla geometria proiettiva ordinaria, in relazione a una quadrica data come assoluto, si subordina la geometria metrica riemanniana* a curvatura costante.

I. Notizie sui precedenti sviluppi della teoria.

1. **Generalità. Gli spazi di Riemann proiettivamente piani.** — Uno spazio ad n dimensioni (X_n) in cui

a) esiste un sistema di linee — geodetiche, o « cammini » (2) *— tale che una e una sola linea del sistema esce da un punto di* X_n *secondo una assegnata direzione;* oppure, *ne congiunge due punti, sufficientemente vicini,* viene detto uno *spazio proiettivamente piano* (3) quando

b) è possibile scegliere nello spazio il riferimento curvilineo in modo tale, che le linee del supposto sistema vengano rappresentate in termini finiti da equazioni lineari.

La definizione porta come conseguenza la possibilità di costruire nello spazio supposto una *geometria proiettiva,* per la quale le *geodetiche* dello spazio sono le *linee rette.*

---

(1) Questo lavoro riproduce, con alcuni complementi e modificazioni, una comunicazione (con lo stesso titolo) fatta alla XX Riunione della Soc. Italiana per il Progresso delle Scienze (Milano, 18-9-1931). Negli Atti della Società verrà pubblicato soltanto un brevissimo sommario. Ved. anche « Bollettino Un. Matem. Italiana », X, 1931, pp. 254-255.

(2) « paths », secondo EISENHART e VEBLEN: **18**. (Il numero si riferisce all'Indice Bibliografico).

(3) Cfr. WEYL, **17**, 1921. (La definizione del WEYL riguarda gli *spazi a connessione affine* proiettivamente piani). Altri dice: *spazio proiettivo-euclideo*: ved. SCHOUTEN, **24**, p. 130.

Quando soltanto questa geometria venga presa in considerazione, lo spazio potrà dirsi semplicemente uno *spazio proiettivo* (S_n). Ma non è questo il caso che più interessa; importa invece il vedere *di quali altre geometrie sia suscettibile uno spazio proiettivo*, cioè, quali altre geometrie possano subordinarsi alla geometria proiettiva.

Che questa subordinazione sia possibile per le *metriche riemanniane euclidea e non-euclidee*, è ben noto fino dalle classiche ricerche di BELTRAMI, CAYLEY e KLEIN. Il problema degli spazi riemanniani proiettivamente piani — intendendosi qui per *geodetiche* quelle della metrica — è stato affrontato appunto dal BELTRAMI sotto questo aspetto: ricerca degli spazi di RIEMANN che ammettano *rappresentazioni geodetiche* — cioè: rappresentazioni puntuali, con conservazione delle geodetiche — *su di uno spazio euclideo*. Pel caso delle *superficie* egli ha risolto il problema in modo completo, mostrando che le superficie a curvatura costante, ed esse soltanto, ammettono rappresentazioni geodetiche piane (**2**, 1865). Di questo risultato egli s'è valso poi per trarne una elegante interpretazione della geometria piana non-euclidea (iperbolica) su di una superficie dello spazio euclideo ordinario (la pseudosfera) (**3**, 1868) [4]. Lo stesso BELTRAMI ha esteso, in parte, il suo teorema al caso delle varietà riemanniane *a più dimensioni* (V_n); provando che, fra queste, le V_n *a curvatura costante* sono proiettivamente piane (**4**, 1868). L'estensione è stata completata da SCHLÄFLI (**6**, 1871), il quale ha mostrato come, inversamente, una V_n rappresentabile geodeticamente su di un R_n euclideo sia necessariamente a curvatura costante [5].

La possibilità di *subordinare le geometrie riemanniane a curvatura costante* (anzi, queste soltanto) *alla geometria proiettiva* risultava così implicitamente stabilita: il KLEIN ha mostrato che tale subordinazione può sempre effettuarsi al modo di CAYLEY, cioè, in relazione a una quadrica assunta nello spazio proiettivo come *assoluto* della metrica [6]. E d'altra parte, lo stesso KLEIN ha indicato come la geometria proiettiva nello spazio a tre di-

---

[4] Circa le *superficie* geodeticamente rappresentabili sul piano, o proiettivamente piane, ved. anche DINI, **5**, 1869; ENRIQUES, **15**, 1902, pp. 53-55, ove del teor. di BELTRAMI si dà una assai interessante dimostrazione sintetica; e i trattati del BIANCHI (**12**, 3ª ed., I, pp. 310-313 e 642-645) e del DARBOUX (**13**, III, pp. 40-47, 51-62).

[5] Un'altra dimostrazione di questo teorema di SCHLÄFLI è stata data da O. TEDONE: **14**, 1899, pp. 604-609.

[6] Ved. CAYLEY, **1**, 1859, e KLEIN, **7**, 1871 e 1873. Ved. anche, a proposito degli spazi riemanniani proiettivamente piani, BIANCHI, **12**, 3ª ed., II, pp. 492-504; WEYL, **17**, 1921, p. 109 e seg.; CARTAN, **22**, 1924, pp. 226-229, e gli altri lavori di CARTAN cit. nella nota seguente; EISENHART, **29**, p. 83.

mensioni possa costruirsi indipendentemente dalle nozioni metriche (in particolare, dal postulato delle parallele), basandosi sulla seguente caratterizzazione d'indole *topologica* degli spazi proiettivi o se vogliamo, degli spazi *proiettivamente piani,* intesi nel senso più generale: essi sono gli spazi in cui vale l'*assioma del piano:*

α) *Esiste un sistema continuo* ∞^3 *di superficie tale che entro una regione qualunque* (convenientemente limitata) *dello spazio*

1°) *per tre punti ad arbitrio passa una e una sola superficie del sistema;*

2°) *la linea* (eventuale) *intersezione di due superficie del sistema appartiene a tutte le superficie del sistema che hanno con essa a comune due punti* (7).

Il KLEIN osserva che questa caratterizzazione topologica può estendersi agli spazi *a più di tre dimensioni*, mentre nulla di analogo sussiste pel caso delle *superficie.* La proposizione che corrisponde alla α), cioè:

β) *Esiste un sistema continuo* ∞^2 *di linee tale che, entro una regione* (convenientemente limitata) *della superficie, per due punti ad arbitrio passi una e una sola linea del sistema* vale, in effetto, sulle superficie *proiettivamente piane,* ma non basta a caratterizzarle. Si sa bene, ad es., come essa non porti come conseguenza la validità del teorema di DESARGUES, o *dei triangoli omologici* (8).

Dai risultati di BELTRAMI, SCHLÄFLI, KLEIN consegue in particolare che la validità dell'assioma del piano, in uno spazio di RIEMANN a tre (o più) dimensioni, è condizione necessaria e sufficiente perchè la metrica in tale spazio 1°) *sia a curvatura costante;* 2°) *coincida* (almeno localmente) *con una delle metriche di Cayley, euclidea o non-euclidea.* Il primo di questi teoremi è stato esplicitamente enunciato (9) e dimostrato direttamente da F. SCHUR nel 1886 (10). Il secondo di questi teoremi può provarsi senza fare intervenire

(7) Ved. **8**, 1872; e **7**, 1873 (2. Aufsatz) in « Ges. Math. Abh. », I, p. 333. Sotto altra forma, con ovvia estensione delle nozioni di superficie *geodetica* in un punto e di superficie *totalmente geodetica,* l'assioma del piano può anche così enunciarsi:

α') *Ogni superficie geodetica in un punto è totalmente geodetica.* Cfr. SCHUR, **9**, 1886. p. 560; VERONESE, **10**, 1891, pp. XIX, 304, 582, 583, 597; CARTAN; **34**, 1926, e **40**, 1928, p. 123.

(8) Ved. ad es. HILBERT, **11**, 7ª ed., pp. 83 e seg.; SCHUR, **16**, p. 20; cfr. SCHILLING, **51**, I, pp. 25 e seg.

(9) non proprio in questa forma: ved. SCHUR, **9**, pp. 560, 562.

(10) Ved. **9**. Questo lavoro di SCHUR è assai notevole per vari altri risultati che contiene: (a parte il notissimo « teorema di SCHUR », p. 563) questo particolarmente: che *basta, perchè valga l'assioma del piano in tutto lo spazio, che esso valga* — nella forma α'), (7) — *per le superficie geodetiche uscenti da due punti particolari dello spazio, qualunque purchè sufficientemente vicini.* È anche interessante l'osservazione, che sono equivalenti le ipotesi: *a)* che le superficie geodetiche in un punto siano tutte totalmente geodetiche; *b)* che la

la nozione di curvatura, nè, comunque, le derivate seconde dei coefficienti del ds^2 dello spazio: questa osservazione notevole si deve al CARTAN ([11]).

2. **Gli spazi a connessione affine proiettivamente piani.** — Nel 1921 il WEYL — a cui è dovuta la nozione di spazi a connessione affine — ha esteso a questi la nozione di *spazi proiettivamente piani* ([12]), e ha stabilito questo risultato, che comprende e generalizza quelli di BELTRAMI e SCHLÄFLI per gli spazi riemanniani: detti Γ^r_{st} i parametri, in relazione a un riferimento curvilineo u^r, di una connessione affine n-dimensionale *simmetrica* (o *senza torsione*), ∇_r il corrispondente simbolo di derivazione covariante ed $R_{stp}^{\cdot\cdot\cdot q}$ il tensore di curvatura della connessione, posto infine $R_{st} = R_{pst}^{\cdot\cdot\cdot p}$, *condizione necessaria e sufficiente perchè la connessione* Γ^r_{st} *sia proiettivamente piana* ([13]) *è che si abbia*

$$W_{pqr}^{\cdot\cdot\cdot s} = R_{pqr}^{\cdot\cdot\cdot s} + \frac{1}{n+1}\,\delta^r_s(R_{pq} - R_{qp}) + \frac{1}{n^2-1}\,[\delta^s_q(nR_{pr} + R_{rp}) - \delta^s_p(nR_{qr} + R_{rq})] = 0, \tag{2.1}$$

$$V_{pqr} = \nabla_q(nR_{pr} + R_{rp}) - \nabla_p(nR_{qr} + R_{rq}) = 0. \tag{2.2}$$

Per $n = 2$ la condizione (2.1) è sempre identicamente soddisfatta; per $n > 2$ la condizione (2.2) è conseguenza della (2.1). Il sistema $W_{pqr}^{\cdot\cdot\cdot s}$ è il cosidetto tensore di WEYL, o *di curvatura proiettiva*; per ciascuna connessione affine Γ^r_{st} esso è invariante por le trasformazioni che ne conservano le geodetiche, e tale è pure, per $n = 2$, il tensore V_{pqr}. Alla condizione (2.2) può sostituirsi, come hanno osservato VEBLEN e J. M. THOMAS (**32**), la seguente:

$$r_{pqs} = 0, \quad \text{ove} \quad (n^2-1)r_{pqs} = V_{sqp} + (n-1)\Gamma^t_{tr} W_{sqp}^{\cdot\cdot\cdot r}. \tag{2.3}$$

---

curvatura riemanniana abbia in questo punto un valore indipendente dall'orientazione (**9**, p. 560). Ved. anche ENRIQUES, **15**, 1903, pp. 55-58; CARTAN, **34**, 1926 e **40**, 1928, pp. 127-130. Sugli « *spazi di Schur* », nei quali vale *in un punto* l'assioma α') del piano, ved. MAYER, **46**, 1930, p. 167 e seg.

([11]) Ved. **34**, 1926; e **40**, 1928, pp. 174-176. Il CARTAN dimostra pure, senza fare ricorso alla nozione di curvatura, che in uno spazio riemanniano a tre (o più) dimensioni il sussistere di due qualunque delle seguenti proprietà porta per conseguenza il sussistere della terza: *a) che per lo spazio supposto valga l'assioma* α') *del piano; b) che in esso valga l'assioma della libera mobilità delle figure; c) che esso sia proiettivamente piano* (**40**, 1928, pp. 123-131).

([12]) La denominazione anzi è stata introdotta dal WEYL stesso e proprio per gli *spazi a connessione affine*: cfr. ([3]), ved. **17**, p. 102, cfr. anche **19**, p. 72, ove la nozione è presentata sotto un aspetto alquanto diverso.

([13]) Cioè, perchè sia proiettivamente piano il corrispondente spazio, in cui le geodetiche sono definite dalla supposta connessione affine. Di questo linguaggio abbreviato ci varremo spesso in seguito.

Il sistema r_{pqs}, il « covariante proiettivo » della connessione Γ^r_{st}, è (come $W_{pqr}^{\cdot\cdot\cdot s}$) *per* n *qualunque* invariante per le trasformazioni che conservano le geodetiche, ma soltanto per $n=2$ è un tensore.

Nel 1924 il CARTAN ha introdotto la nozione di *spazi a connessione proiettiva* (**21**, p. 313, **22**, p. 207) e ha esteso questi spazi la nozione di *geodetiche*; ha trovato che fra le connessioni proiettive ve ne è un tipo particolare, la *connessione proiettiva normale,* che *è individuata dalle sue geodetiche.* Questo risultato assai notevole porta una nuova luce sugli *spazi a connessione lineare* (metrica, affine, proiettiva) *proiettivamente piani*: questi vengono caratterizzati dal fatto che *la connessione proiettiva normale determinata dalle loro geodetiche è integrabile* (senza curvatura) ([14]). A una proposizione sostanzialmente equivalente è giunto per altra via T. Y. THOMAS ([15]): questi ha mostrato come le condizioni (2.1) e (2.3) equivalgano all'annullarsi di un unico « tensore proiettivo », tensore di curvatura di una « connessione proiettiva » che non differisce da quella normale del CARTAN.

Lo studio degli spazi proiettivamente piani viene dunque a inquadrarsi in quello degli spazi a connessione proiettiva: è appunto questa veduta che ha guidato le ricerche recenti di WHITEHEAD (**49**), e le mie, di cui dirò nella II Parte del presente lavoro.

Ma debbo ancora ricordare alcuni risultati di EISENHART, che restano nel campo della geometria degli spazi a connessione affine. Si sa come gli spazi riemanniani a curvatura costante siano caratterizzati dal fatto che in essi le equazioni differenziali delle geodetiche ammettono $\frac{n(n+1)}{2}$ integrali primi lineari indipendenti (ved. ad es. **29**, p. 238); e come un S_n a curvatura costante sia sempre realizzabile quale ipersuperficie di R_{n+1} euclideo (*ipersfera,* reale o immaginaria). EISENHART ha mostrato (**36**, 1926; o **37**, 1927, p. 121) come, fra gli spazi a connessione affine (simmetrica) l'esistenza di $\frac{n(n+1)}{2}$ integrali primi lineari indipendenti per le equazioni delle geo-

---

([14]) Ved. **22**, p. 227, ove la proposizione è enunciata per gli spazi riemanniani; ma l'estensione è ovvia.

Si può pensare a un altro modo di caratterizzare gli spazi proiettivamente piani: immaginando (come è sempre lecito) realizzato un tale spazio mediante una *ipersuperficie di* S_{n+1} *proiettivo,* stabilire quali proprietà lo distinguono fra tutte le ipersuperficie di S_{n+1}. L'unico risultato finora raggiunto in quest'ordine d'idee si deve al FUBINI, e riguarda il caso delle *superficie* (Ved. **30**, **31**).

([15]) Ved. **33**, 1926, p. 732. (Cfr. **38**, 1928, p. 166). Su questa e le altre ricerche della Scuola Americana di Princeton circa la « projective geometry of paths », ricerche originate da lavori di WEYL (**17**) e di EISENHART e VEBLEN (**18**) che ho già ricordato, ved. **48**, I, pp. 292-294.

detiche caratterizzi quelli *proiettivamente piani* ed *equiaffini* (pei quali $R_{rsp}^{\cdot\cdot\cdot p} = 0$, cioè $R_{rs} = R_{sr}$) (fra i quali quelli *riemanniani*, e quindi *a curvatura costante*, sono alla loro volta caratterizzati dalla condizione $\nabla_t R_{rs} = 0$ ([16])): la loro connessione affine può sempre subordinarsi, in relazione a un conveniente campo di *pseudonormali*, alla geometria di un ambiente affine $(n+1)$-dimensionale (**36**, p. 338; **37**, p. 168). Di più, data una qualunque ipersuperficie di E_{n+1} affine, ad essa può sempre associarsi un campo di pseudonormali tale che la connessione affine subordinata nella ipersuperficie sia proiettivamente piana ed equiaffine (**37**, p. 170 ([17])). Sembra in certo modo attenuare l'interesse di questa connessione la completa arbitrarietà della X_n che ne può formare il supporto; ma ciò è solo finchè non si limita l'arbitrarietà delle pseudonormali. Se invece si vuole che queste siano le *normali affini* (ved. BLASCHKE, **20**, 1923, pp. 105, 168); si trova che *la connessione affine subordinata, di significato intrinseco alla* X_n *in* E_{n+1}, *è proiettivamente piana, per* $n = 2$, *soltanto sulle superficie per le quali è costante la curvatura affine media* H (**20**, pp. 157, 160), superficie estremali del problema isoperimetrico dell'« area affine » (ibid., p. 203); *per* $n > 2$ *soltanto sulle ipersuperficie per le quali* (inoltre) *le normali affini passano tutte per un punto* (ipersfere affini): *nelle quali la connessione affine intrinseca è, secondo Berwald, non-euclidea* (**20**, p. 172 ([18])).

Tornando ai risultati della Scuola Americana: lo studio delle connessioni equiaffini proiettivamente piane è stato notevolmente approfondito da WHITEHEAD (**49**). Questi ha notato che se le $\Pi_{\beta\gamma}^{\alpha}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots = 0, 1, 2, \ldots, n$) sono, in relazione alla scelta di un riferimento curvilineo u^r e di un « fattore » u^0, un sistema di parametri della connessione proiettiva integrabile

---

([16]) o anche, dal fatto che in essi il trasporto per equipollenza conserva la curvatura. Si noti che quanto precede dà una caratterizzazione di carattere affine degli spazi riemanniani a curvatura costante.

([17]) Ved. anche WHITEHEAD, **49**, 1931, pp. 102-103; il W. mostra che le pseudonormali possono assumersi *uscenti tutte da un punto* O *di* E_{n+1} (centro), cosicchè le geodetiche della connessione subordinata in X_n risultano le proiezioni su X_n, da O, delle rette di un iperpiano. Ved. anche ([20]).

([18]) Aggiungendo alle condizioni (2.1), (2.2) di WEYL le « condizioni di subordinazione »

$$R_{rsp}^{\cdot\cdot\cdot q} = G_{sp}B_r^{\cdot q} - G_{rp}B_s^{\cdot q}, \quad \nabla_r G_{sp} = \nabla_s G_{rp}, \quad \nabla_r B_{sp} = \nabla_s B_{rp},$$

si ha, in ogni caso, $H = -\frac{1}{n} B_r^{\cdot r} = \text{cost.}$; per $n > 2$ inoltre si ottiene $B_{rs} = -HG_{rs}$ onde $R_{rspq} = -H(G_{sp}G_{rq} - G_{rp}G_{sq})$. Circa il significato dei tensori simmetrici B_{rs}, G_{rs}, ved. **20**, pp. 104, 152, 155, 168.

dello spazio proiettivo ([19]), le Π^r_{st} $(r, s, p, q, t, ... = 1, 2, ..., n)$, per le trasformazioni delle coordinate curvilinee *soltanto*, si comportano come i parametri di una *connessione affine*, che è *la più generale connessione equiaffine proiettivamente piana*. La scelta del « fattore » equivale alla scelta di una ipersuperficie dello spazio proiettivo, cioè, di una legge di normalizzazione delle coordinate proiettive pei punti dello spazio, esclusi quelli che giacciono sulla prescelta ipersuperficie. Questa è una *quadrica* allora e solo che si ha $\nabla_r \Pi^0_{st} = 0$, la derivazione covariante (affine) essendo fatta coi parametri Π^r_{st}; allora si ricade nel caso delle metriche non-euclidee, o riemanniane a curvatura costante, di CAYLEY ([20]).

La costruzione di WHITEHEAD delle connessioni affini proiettivamente piane nello spazio proiettivo è semplice ed elegante, ma puramente analitica e formale; nella II Parte del presente lavoro ne esporrò la genesi geometrica, utilizzando e in parte estendendo o precisando risultati di una mia ricerca recente (55). Nello stesso tempo toglierò la limitazione, inessenziale, al caso delle connessioni *equiaffini*: dovuta soltanto alla natura particolare dei « riferimenti » che VEBLEN e WHITEHEAD usano nello studio delle connessioni proiettive. L'esame del caso particolare delle connessioni metriche proiettivamente piane, oltrechè a ritrovare e completare i risultati di WHITEHEAD, di WEYL e di EISENHART, mi condurrà ad una assai naturale generalizzazione: a costruire cioè una *connessione proiettiva subordinata a un campo di quadriche*, associate ai punti di una X_n e situate negli spazi proiettivi tangenti a questa; connessione che a differenza di quelle già considerate da VEBLEN e da SCHOUTEN e van DANTZIG ([21]) è individuata dal campo di quadriche, e può in certo senso riguardarsi come una connessione metrica, in quanto la rappresentazione omografica che essa determina fra gli spazi tangenti in punti infinitamente vicini muta l'una nell'altra le

([19]) Questa è la connessione per la quale, riguardando tutti gli « spazi proiettivi tangenti » come coincidenti con lo spazio proiettivo in parola, la rappresentazione omografica determinata fra gli spazi tangenti in due punti infinitamente vicini si riduce all'*identità*. Cfr. **22**, p. 219; **23**, p. 420; **35**, p. 152; **55**, p. 23 e (più oltre) ([23]). Circa la determinazione dei corrispondenti parametri ved. VEBLEN, **41**, pp. 143 e 156-159, o **43**, pp. 70-71; e il n. 4 di questo lavoro.

([20]) Ved. **49**, p. 110; cfr. il n. 5 del presente lavoro. È interessante questa osservazione di WHITEHEAD: condizione perchè una connessione equiaffine e proiettivamente piana sia *riemanniana* è che lungo le geodetiche *sia un parametro affine* (**37**. p. 57) *la lunghezza d'arco affine* (**20**, pp. 8-10), misurata sul piano che proietta la geodetica dal centro O, in un E_{n+1} ambiente (ved. ([17])).

([21]) Ved. **43**, **44**, **52**; n. 6 di questo lavoro, e nota ([31]).

quadriche associate, e quindi *è un movimento*, in relazione alle metriche di CAYLEY che esse definiscono ([22]).

II. Costruzione geometrica delle connessioni affini proiettivamente piane. Generalizzazione.

3. **Richiami e complementi sulle connessioni proiettive.** — Vengo ora a svolgere quanto ho accennato alla fine della Parte I.

Siano le u^r $(r, s, t, p, q, v, = 1, 2, \ldots, n)$ coordinate curvilinee in una X_n, le x^α $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, = 0, 1, \ldots, n)$ coordinate proiettive dei punti negli « spazi tangenti ». I sistemi $\{u^r, x^\alpha\}$ insieme costituiscono quello che io chiamo un *A-riferimento* per la X_n (considerata nell'aspetto proiettivo) (ved. **55**, p. 6). Generalmente però conviene supporre che pel sistema x^α il punto fondamentale $(100\ldots0)$ sia, su ciascuno spazio tangente, il « punto di contatto », e che a un cambiamento delle coordinate curvilinee, $u^r = u^r(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n)$, sia sempre collegata una trasformazione delle coordinate proiettive, $x^\alpha = \theta^{\alpha}_{\cdot\beta}\bar{x}^\beta$, mediante le formule $\theta^{r}_{\cdot s} = \dfrac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^s}$ (mentre potrà supporsi $\theta^{\alpha}_{\cdot 0} = \delta^\alpha_0$, e le $\theta^{0}_{\cdot r}$ resteranno arbitrarie). In queste ipotesi il « riferimento » $\{u^r, x^\alpha\}$ verrà detto un *B-riferimento* (**55**, p. 8).

Insieme alle u^r fa comodo introdurre una espressione differenziale du^0, tale che per una trasformazione del riferimento vari secondo la legge $du^0 = d\bar{u}^0 + \theta^{0}_{\cdot r}d\bar{u}^r$ (onde $du^\alpha = \theta^{\alpha}_{\cdot\beta}d\bar{u}^\beta$), e del resto, a priori indeterminata (**55**, pp. 6-7).

Ciò premesso: siano $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, in relazione a un *B-riferimento* scelto per la X_n, i *parametri normalizzati* (**55**, pp. 19-21) — tali cioè che $\Gamma^\alpha_{\beta 0} = \Gamma^\alpha_{0\beta} = \delta^\alpha_\beta$ — di una *connessione proiettiva*: che determina la rappresentazione omografica

$$x^{*\alpha} = x^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta r}x^\beta du^r \tag{3.1}$$

dello spazio tangente, Σ_P, nel punto $P(u^r)$ generico della X_n sullo spazio tangente, Σ_{P^*}, nel punto infinitamente vicino $P^*(u^r + du^r)$.

Assegniamo ad arbitrio *un campo* ∞^n *d'iperpiani*, τ, sugli spazi proiettivi tangenti: tali soltanto che ciascun iperpiano τ non passi pel punto P cui è associato, « punto di contatto » di Σ_P. Essi potranno rappresentarsi con equazioni $A_\alpha x^\alpha = 0$, ove non è restrittivo supporre $A_0 = -1$. *Analiticamente*

([22]) La prima idea di una simile connessione proiettiva, metrica e non affine, può riscontrarsi (in un semplice accenno) in un lavoro del CARTAN, del 1924 (**21**, p. 319).

le A_α costituiscono le componenti di un campo di *vettori proiettivi covarianti.* Alla supposta connessione proiettiva e a tale campo d'iperpiani (o di vettori proiettivi) vengono subordinati (**55**, pp. 33-34) una *connessione affine* e un *tensore affine*:

$$A^r_{st} = \Gamma^r_{st} + \delta^r_s A_t + \delta^r_t A_s \tag{3.2}$$

$$p_{st} = \Gamma^0_{st} + \frac{\partial A_s}{\partial u^t} - \Gamma^r_{st} A_r - A_s A_t. \tag{3.3}$$

In particolare se $A_r = 0$, cioè se gli iperpiani del supposto campo sono assunti a iperpiani $x^0 = 0$ del riferimento, i parametri della connessione affine e le componenti del tensore affine si riducono alle Γ^r_{st}, Γ^0_{st}, rispettivamente.

Per ottenere il *significato geometrico* della connessione affine A^r_{st} e del tensore affine p_{st} basta osservare che la omografia Ω rappresentata dalle (3.1) *in uno e in un sol modo si può scindere nel prodotto di una omografia* $\mathfrak{A}$ *fra* Σ_P *e* Σ_{P^*} *che al punto* P *di* Σ_P *faccia corrispondere il punto medesimo, pensato in* Σ_{P^*}, *e muti l'iperpiano* τ (*associato a* P) *di* Σ_P *nell'iperpiano* τ^* (*associato a* P*) *di* Σ_{P^*} *per una omologia speciale,* Π, *di* Σ_{P^*} *in sè, di centro* P*; se il riferimento è scelto in modo da rendere $A_r = 0$, introdotte le coordinate non omogenee $X^r = \frac{x^r}{x^0}$ $\mathfrak{A}$ e Π vengono rappresentate dalle equazioni

$$X^{*r} = X^r - A^r_{st} X^s du^t - du^r, \tag{3.4}$$

$$X^{*r} = \frac{X^{*r}}{1 - p_{st} X^{*s} du^t}. \tag{3.5}$$

Ora: la $\mathfrak{A}$ può riguardarsi come una rappresentazione *affine* di Σ_P su Σ_{P^*} assumendo τ e τ^*, su questi spazi, come *iperpiani impropri*; essa è precisamente *la rappresentazione affine che viene determinata fra* Σ_P *e* Σ_{P^*} *dalla connessione affine* A^r_{st}. L'omologia speciale (3.5) ha come iperpiano d'omologia l'iperpiano d'equazione

$$p_{st} X^s du^t = 0. \tag{3.6}$$

Quanto precede ci dà, per la connessione A^r_{st} e pel tensore p_{st}, le interpretazioni geometriche richieste.

4. Costruzione geometrica delle connessioni affini proiettivamente piane. Caso delle connessioni equiaffini. — Se in particolare la connessione proiettiva $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ è *proiettivamente piana,* lo è naturalmente anche la connessione affine A^r_{st}, che ha sempre (qualunque sia il campo d'iperpiani $A_\alpha x^\alpha = 0$) *le stesse geodetiche.* Anzi: le connessioni affini che in questo modo vengono associate a una connessione proiettiva, proiettivamente piana, sono *tutte e sole* le connessioni affini proiettivamente piane, aventi come *tensore di torsione* quello della connessione proiettiva $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ supposta $\Big(S_{st}^{\cdot\cdot r} = \frac{1}{2}(\Gamma^r_{st} \quad \Gamma^r_{ts})$; ved. **47**, p. 58 e **55**, p. 27$\Big)$. In particolare le A^r_{st} sono tutte e sole le connessioni affini proiettivamente piane *simmetriche* (cioè, *senza torsione*) se $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ è (ved. ([19])) *la connessione proiettiva integrabile dello spazio proiettivo* S_n: cioè, se lo « spostamento proiettivo in Σ_P » (**55**, p. 13), rappresentato dalle (3.1), *in relazione a una conveniente scelta dell' A-riferimento, si riduce all' identità* ([23]).

Ne segue subito che *la più generale connessione affine proiettivamente piana senza torsione in* S_n *si ottiene associando con legge arbitraria* (univoca) *ai punti* P *di* S_n *degli iperpiani* τ *non passanti per essi; e determinando, in relazione alla connessione proiettiva integrabile di* S_n, *la connessione affine subordinata a questo campo d' iperpiani. Geometricamente, questa connessione affine associa a ciascun punto* P *e a ciascun elemento lineare* PP* *uscente da esso una rappresentazione omografica di* S_n *in sè che muta* τ *in* τ^*: *la quale è semplicemente l' omologia speciale di* S_n *che ha* P *come centro e che muta* τ *in* τ^*.

Per la *determinazione analitica* di queste connessioni affini, stabilito in S_n un sistema di coordinate proiettive y^α e un sistema di coordinate curvilinee u^r, cominciamo dal prendere in considerazione il caso particolare in cui gli iperpiani del supposto campo ∞^n siano *gli iperpiani polari dei punti di* S_n *rispetto ad un' ipersuperficie*

$$f(y^0, y^1, \ldots, y^n) = 0. \tag{4.1}$$

Senza restrizione potremo supporre che f^2 sia omogenea di grado 2 rispetto alle y^α; e potremo assumere a coordinate, nel sistema y^α, degli iperpiani associati ai singoli punti di S_n le $\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}$, omogenee di grado zero. *Normalizziamo* le coordinate y^α in S_n mediante la condizione

$$\{ f(y^0, y^1, \ldots, y^n) \}^2 = c, \tag{4.2}$$

([23]) Cfr. **55**, p. 23: ove quanto è detto a proposito della connessione dello spazio proiettivo va dunque rettificato con l'aggiunta delle parole: « in relazione a una conveniente scelta dell' A-riferimento » (righe 21-22). Va tenuto presente che la nozione di « spostamento proiettivo in Σ_P » (**55**, p. 13) non ha un significato indipendente dal riferimento: per questo anche ciò che a p. 16 è detto a proposito del *tensore di deviazione* acquisterebbe un aspetto più espressivo facendo intervenire la rappresentazione proiettiva di Σ_P su Σ_{P^*} (« traslazione proiettiva ») anzichè lo « spostamento proiettivo in Σ_P »: il che del resto riesce ovvio.

Cfr. anche GOLAB, **42**, p. 340, o **45**, pp. 146 e seg., ove si fa ricorso alla interpretazione $(n+1)$-dimensionale delle $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$. (Ved. **55**, p. 14 e cfr. **49**, p. 102).

(ove c è una costante arbitrariamente assegnata, purchè $\neq 0$); il che ha per effetto di escludere dalle nostre considerazioni i punti dell'ipersuperficie (4.1) ([24]). Allora, indicate con $y^{\alpha}_{\cdot 0}$ le coordinate proiettive di un qualunque punto P_0 di S_n (funzioni delle sue coordinate curvilinee u^r), e posto

$$(4.3)\qquad y^{\alpha}_{\cdot r} = \frac{\partial y^{\alpha}_{\cdot 0}}{\partial u^r}, \quad Y_{\alpha}^{\cdot\beta} y^{\alpha}_{\cdot\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma},$$

si ha $Y_{\alpha}^{\cdot 0} = \frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{\alpha}}\right)_0$; e introdotto, in relazione al punto $y^{\alpha}_{\cdot 0}$ di S_n, un riferimento proiettivo locale x^{α} che ha come punti fondamentali $y^{\alpha}_{\cdot 0}$ stesso e i punti $y^{\alpha}_{\cdot r}$ (nei quali le tangenti in $(y^{\alpha}_{\cdot 0})$ alle n linee coordinate u^r che ne escono incontrano l'iperpiano polare del punto $y^{\alpha}_{\cdot 0}$ rispetto alla (4.1)) col porre le coordinate di un qualunque punto y^{α} di S_n sotto la forma $y^{\alpha} = x^{\beta} y^{\alpha}_{\cdot\beta}$, troviamo subito che i parametri normalizzati della connessione proiettiva integrabile di S_n in relazione al riferimento $\{u^r, x^{\alpha}\}$ sono:

$$(4.4)\qquad \Gamma^{\alpha}_{\beta 0} = \Gamma^{\alpha}_{0\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}; \quad \Gamma^{\alpha}_{rs} = \frac{\partial y^{\gamma}_{\cdot r}}{\partial u^s} Y_{\gamma}^{\cdot\alpha};$$

onde seguono le relazioni, di ovvio significato geometrico,

$$(4.5)\qquad \frac{\partial^2 y^{\alpha}_{\cdot 0}}{\partial u^r \partial u^s} = \Gamma^t_{rs} \frac{\partial y^{\alpha}_{\cdot r}}{\partial u^t} + \Gamma^0_{rs} y^{\alpha}_{\cdot 0} \ ([25]).$$

Le Γ^t_{rs}, Γ^0_{rs} sono anche i parametri della connessione affine proiettivamente piana e le componenti del tensore affine subordinati al campo assegnato d'iperpiani, o se si vuole, alla ipersuperficie (4.1). È evidente che il tensore Γ^0_{rs} è *simmetrico*: il che porta per conseguenza ([26]) che la connessione Γ^t_{rs} è equiaffine.

([24]) Ved. WHITEHEAD, **49**, p. 99. Questa ipersuperficie, che dal W. vien detta « missing $(n-1)$-space », in certo modo tiene il luogo, per una qualunque connessione proiettivamente piana *equiaffine*, dell'*assoluto* della metrica di CAYLEY, cui in effetto si riduce quando la connessione Γ^r_{st} è *metrica* (n. 5). Sarebbe interessante vedere fino a qual punto, quando la connessione considerata *non è metrica* nell'ordinario significato della parola, si spinge l'analogia.

([25]) Cfr. VEBLEN, **41**, pp. 143, 155-159; **43**, pp. 70-71; WHITEHEAD, **49**, p. 94, **50**, p. 348. VEBLEN chiama le (4.5) « equazioni differenziali della geometria proiettiva ».

([26]) in forza di relazioni che sussistono fra le Γ^t_{rs} e Γ^0_{rs}: esprimenti che la connessione $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ è a curvatura nulla, o che il sistema (4.5) è illimitatamente integrabile. Infatti si ha in particolare, indicando con $R_{stp}^{\cdots q}$ il tensore di curvatura della connessione *affine* Γ^r_{st},

$$(4.\alpha)\qquad R_{stq}^{\cdots q} = (n+1)(\Gamma^0_{st} - \Gamma^0_{ts}).$$

Passiamo al caso generale, il cui il campo d'iperpiani, $\xi_\alpha y^\alpha = 0$, è qualunque. Si potranno anche ora supporre le ξ_α omogenee di grado zero nelle y^α. Conviene riferirsi ancora ai sistemi proiettivi locali x^α determinati, nel modo indicato poco sopra, dall'assegnazione di una ipersuperficie (4.1), cioè, dalla condizione di normalizzazione (4.2). Nei sistemi x^α gli iperpiani del campo $\xi_\alpha y^\alpha = 0$ son dati da equazioni $A_\alpha x^\alpha = 0$, ove, senza restrizione, possiamo intendere che sia

$$A_0 = -1, \quad A_r = -\frac{\xi_\beta y^\beta_{.r}}{\xi_\gamma y^\gamma_{.0}}. \tag{4.6}$$

Le (3.2), (3.3) dànno allora, corrispondentemente, la connessione affine A^r_{st} e il tensore affine p_{st} subordinati a quegli iperpiani. Mediante le (4.6) è agevole verificare che *soltanto nel caso* (già notato) *in cui le* ξ_β *sono eguali (o proporzionali) alle derivate di una stessa funzione* f *rispetto alle* y^α — cioè: gli iperpiani del campo sono polari dei punti dello spazio rispetto a una ipersuperficie — *il tensore* p_{st} *è simmetrico, e corrispondentemente, la connessione* A^r_{st} *è equiaffine* ([27]).

Con quanto precede è ottenuta, sia per via geometrica che per via analitica, la costruzione della più generale connessione affine *simmetrica* proiettivamente piana. Per quanto riguarda le connessioni *asimmetriche*, si potrebbe procedere in modo analogo, partendo dall'osservazione che, se $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ è una connessione proiettiva senza torsione, le

$$\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \delta^s_\beta \delta^t_\gamma (\delta^\alpha_r S_{st}^{\cdot\cdot r} - \delta^\alpha_0 S_{st}^{\cdot\cdot p} A_p), \tag{4.7}$$

(A_α essendo al solito un vettore proiettivo covariante soggetto alla sola condizione $A_0 = -1$), sono parametri di una connessione proiettiva avente *le stesse geodetiche* di $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ e il *tensore di torsione* $S_{st}^{\cdot\cdot r}$. Ma è più semplice la costruzione diretta delle connessioni affini proiettivamente piane asimmetriche da quelle simmetriche ($\overline{\Gamma}^r_{rt} = \Gamma^r_{st} + S_{st}^{\cdot\cdot r}$).

5. Connessioni metriche proiettivamente piane. — Torniamo alla considerazione delle connessioni proiettivamente piane *equiaffini* subordinate all'assegnazione in S_n di una ipersuperficie (4.1).

Possiamo sempre porre

$$[f(y^0, y^1, \ldots, y^n)]^2 = a_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta, \tag{5.1}$$

([27]) Questo è l'unico caso trattato da WHITEHEAD (cfr. parte I, fine, ved. **49**, pp. 97 e seg).

ove

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f^2}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\frac{\partial f}{\partial y^\beta} + f\frac{\partial^2 f}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}; \tag{5.2}$$

in particolare la (4.1) *è una quadrica* allora (soltanto) che le $a_{\alpha\beta}$ (*omogenee di grado zero nelle* y^α) siano *costanti*, cioè quando si abbia

$$\frac{\partial}{\partial y^\gamma} a_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \ldots, n). \tag{5.3}$$

Rispetto ai singoli riferimenti *locali* x^α la quadrica sarà rappresentata da equazioni della forma

$$c_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 \tag{5.4}$$

ove

$$c_{\alpha\beta} = a_{\delta\gamma} y^{\delta}_{\cdot\alpha} y^{\gamma}_{\cdot\beta}; \tag{5.5}$$

pel riferimento locale associato a un punto P_0 l'iperpiano fondamentale opposto a P_0 deve essere l'iperpiano polare di P_0 rispetto alla quadrica: in conseguenza di questo e delle (4.2), (4.4), (5.5) si ha

$$c_{00} = c, \quad c_{r0} = c_{0r} = 0, \quad c_{rs} = -c\Gamma^0_{rs} = -cp_{rs}. \tag{5.6}$$

Le (5.3), (5.6) portano — tenuto presente che $c_{\alpha\beta}$ è un *tensore relativo* di classe 2 (55, pp. 11, 36) pei cambiamenti della normalizzazione, (4.2) — che

$$\overset{*}{\nabla}_\gamma c_{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_r c_{st} = 0, \tag{5.7}$$

ove con $\overset{*}{\nabla}_\gamma$, ∇_r indichiamo la derivazione covariante *proiettiva* di parametri $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ e la derivazione covariante *affine* di parametri Γ^r_{st}. Ovviamente ne segue, *purchè risulti* $|c_{rs}| \neq 0$, che le Γ^r_{st} *sono i simboli di Christoffel* (di seconda specie) *relativi a* c_{rs}:

$$\Gamma^t_{rs} = \left\{ {rs \atop t} \right\}_c. \tag{5.8}$$

Il significato dell'ipotesi $|c_{rs}| \neq 0$ appare ovvio se si osserva che $c_{rs}x^r x^s = 0$ è, in ciascun punto di S_n, l'equazione *locale* del cono circoscritto da quel punto alla quadrica (4.1).

Dunque: *se la ipersuperficie* (4.1) *è una quadrica, non specializzata o, tangenzialmente, al più una volta specializzata, la corrispondente connessione affine proiettivamente piana è una connessione riemanniana.* Scrivendo che il tensore di curvatura, $L_{rs\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\beta}$ (55, p. 24), della connessione proiettiva $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ è nullo ricaviamo immediatamente che quella connessione riemanniana è *a curvatura costante* $K = \frac{1}{c}$; precisamente, essa è la connessione riemanniana data dalla metrica di CAYLEY che ha la quadrica (4.1) come assoluto. (Cfr. **49**, p. 108).

Il caso $K = 0$ può intendersi incluso, e corrispondente al valore ∞ del parametro c: pel quale la quadrica (5.4) *come luogo* si riduce all'iperpiano doppio $(x^0)^2 = 0$, e come *inviluppo* è una volta specializzata. Allora però la condizione di normalizzazione (4.2) non ha significato che con opportuna convenzione circa la forma in cui è scritto il primo membro [28].

Da quanto si è visto al n. prec. possiamo dedurre questa *costruzione geometrica della rappresentazione congruente fra gli spazi tangenti in due punti* P, P* *infinitamente vicini di una varietà riemanniana a curvatura costante,* determinata dal *trasporto per equipollenza di Levi-Civita*: riguardando, al modo di CAYLEY, la varietà come uno spazio proiettivo, S_n, in cui è data una quadrica, Q, *quella rappresentazione è l'omologia speciale di* S_n *in sè che ha* P *come centro e che muta l'iperpiano polare di* P (rispetto a Q) *nell'iperpiano polare di* P*. L'iperpiano d'omologia è ortogonale, nella metrica di CAYLEY, alla direzione PP^*.

Cerchiamo ora, inversamente, le condizioni perchè una connessione affine proiettivamente piana assegnata (senza torsione) sia metrica. Ritroveremo (cfr. WEYL, 17) che essa per $n \geq 3$ è necessariamente *subordinata a una quadrica di* S_n, e coincide con la connessione definita dalla corrispondente metrica di CAYLEY; per $n = 2$ abbiamo invece delle condizioni differenziali che ammettono infinite altre soluzioni oltre a quella rappresentata dalla metrica di CAYLEY.

Le condizioni perchè una connessione affine generale sia *metrica* si ottengono con opportuna estensione del procedimento col quale EISENHART e VEBLEN hanno stabilito (18) le condizioni perchè una connessione affine *simmetrica* sia *riemanniana*. Si trova che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una connessione affine Γ^r_{st} (per la quale ∇_r è il simbolo di derivazione covariante, $R_{rsp}^{\cdots q}$ il tensore di curvatura) *sia metrica, cioè, esistano un tensore simmetrico covariante* c_{rs} *e un vettore covariante* Q_r *tali che si abbia*

$$\nabla_r c_{st} = -Q_r c_{st} \tag{5.8}$$

è che esista un intero N *tale che le equazioni* $E_1, E_2, \ldots, E_N$, *lineari nelle* c_{rs}

---

[28] Quando la quadrica (4.1) *non è specializzata* e c ha un valore finito, l'equazione della quadrica può sempre scriversi nella forma

$$f^2 = cg^2 + \Psi = 0, \tag{5.β}$$

ove $g = 0$ è l'equazione di un iperpiano e $\Psi = 0$ quella del cono circoscritto alla quadrica dal polo dell'iperpiano. Se la quadrica si riduce, come luogo, a un iperpiano doppio, la $g = 0$ diviene l'equazione di questo iperpiano; d'altra parte la condizione di normalizzazione allora diviene $g^2 = 1$.

— le E_1, E_h $(h = 2, 3, \dots)$ essendo

$$
(5.9)\qquad
\begin{aligned}
&E_1) \qquad c_{tp} R_{rsq}^{\dots t} + c_{tq} R_{rsp}^{\dots t} = \frac{2}{n} c_{pq} R_{rst}^{\dots t} \\
&E_h) \qquad c_{tp} \nabla_{v_{h-1}} \cdots \nabla_{v_1} R_{rsq}^{\dots t} + c_{tq} \nabla_{v_{h-1}} \cdots \nabla_{v_1} R_{rsp}^{\dots t} = \frac{2}{n} c_{pq} \nabla_{v_{h-1}} \cdots \nabla_{v_1} R_{rst}^{\dots t}
\end{aligned}
$$

— *siano algebricamente compatibili, e le loro soluzioni soddisfino alle* E_{N+1}.

Se le condizioni ora dette sono soddisfatte, il *vettore fondamentale* Q_r si ha in termini finiti, a meno d'un gradiente additivo (ved. 37, p. 9) dalle equazioni

$$
(5.10)\qquad \frac{\partial Q_r}{\partial u^s} - \frac{\partial Q_s}{\partial u^r} = \frac{2}{n} R_{rst}^{\dots t};
$$

il *tensore fondamentale* c_{rs} si ricava dalle (5.8) per integrazione, assunti valori iniziali $\overset{0}{c}_{rs}$ che soddisfino (per $u^r = u_0^r$) alle $E_1, E_2, \dots, E_N$.

Ciò premesso: siano le $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ parametri della connessione proiettiva integrabile di S_n e quindi le Γ_{st}^r, per le trasformazioni *sulle sole* u^r, siano i parametri di una (qualunque) connessione affine *proiettivamente piana* simmetrica. Supponiamo dunque che questa sia una connessione *metrica*, e c_{rs}, Q_r ne siano il tensore e il vettore fondamentali. In conseguenza delle E_1 otteniamo

$$
(5.11)\qquad (n^2 - 4)(\Gamma_{qs}^0 - \Gamma_{sq}^0) = 0;
$$

se $n > 2$ se ne deduce

$$
(5.12)\qquad \Gamma_{qs}^0 = \Gamma_{sq}^0, \quad \text{onde} \quad R_{stq}^{\dots q} = 0.
$$

Cosicchè la connessione Γ_{st}^r è *equiaffine*, ed essendo *metrica*, essa è *euclidea*, e non è restrittivo supporre per essa

$$
(5.13)\qquad Q_r = 0, \quad \nabla_r c_{st} = 0.
$$

Per $n = 2$ la precedente deduzione non vale. Ad ogni modo (per n qualunque) quando sussistano le (5.12), sempre in conseguenza delle E_1 abbiamo anche, tenute presenti le (5.13),

$$
(5.14)\qquad \Gamma_{sq}^0 = -\Phi c_{sq}, \quad \text{ove} \quad \Phi = -\frac{1}{n} c^{rp} \Gamma_{rp}^0;
$$

e infine

$$
(5.15)\qquad R_{rsp}^{\dots t} = \Phi(c_{rp}\delta_s^t - c_{sp}\delta_r^t);
$$

il che porta, se $n > 2$ pel teorema di SCHUR (9), se $n = 2$ in forza delle (2.2), che dànno

$$
(5.16)\qquad \nabla_t \Gamma_{qs}^0 - \nabla_s \Gamma_{qt}^0 = 0,
$$

che la connessione Γ_{st}^r è *riemanniana e di curvatura costante* $K = \Phi$.

D'altra parte sappiamo (n. prec.) che la connessione Γ^r_{st}, proiettivamente piana, può subordinarsi a una ipersuperficie (4.1) di S_n: se poniamo (supposto $\Phi \neq 0$), in relazione alla normalizzazione (4.2), ove si intenda $c = \frac{1}{\Phi}$,

$$c_{r0} = c_{0r} = 0, \quad c_{00} = \frac{1}{\Phi}, \tag{5.17}$$

e riguardiamo, come è lecito, $c_{\beta\gamma}$ quale un *tensore relativo di classe* 2 pei cambiamenti della normalizzazione, abbiamo per le (5.13), (5.14)

$$\overset{*}{\nabla}_\alpha(\Phi c_{\beta\gamma}) = 0; \tag{5.18}$$

ma per le (5.13), (5.14); (4.2), (4.4) si ha

$$c_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f^2}{\partial y_\gamma \partial y_\delta} y^\gamma_{\cdot\alpha} y^\delta_{\cdot\beta}, \tag{5.19}$$

dunque per le $a_{\alpha\beta}$, corrispondentemente definite dalle (5.2), valgono le (5.3), cioè *la ipersuperficie* (4.1) *è una quadrica, e la metrica di parametri* Γ^r_{st} *è quella di Cayley che essa determina.* Il caso $\Phi = 0$ dà luogo al caso degenere, della metrica *euclidea.*

Se $n = 2$ però il caso ora contemplato non è quello più generale. Infatti per $n = 2$ si ha, generalmente, al luogo delle (5.14) soltanto

$$\frac{1}{2}(\Gamma^0_{sq} + \Gamma^0_{qs}) = -\Phi c_{sq}, \quad \Gamma^0_{sq} = -\Phi c_{sq} + \frac{1}{6} Q_{qs}, \tag{5.20}$$

ove

$$\Phi = K - \frac{1}{2} c^{rt}\nabla_r Q_t, \quad Q_{qs} = \frac{\partial Q_q}{\partial u^s} - \frac{\partial Q_s}{\partial u^q}; \tag{5.21}$$

sostituendo nelle (5.17), indi moltiplicando per c^{rt} e sommando, abbiamo per le Q_s le seguenti due condizioni differenziali del 2° ordine:

$$\frac{\partial K}{\partial u^s} - KQ_s - \frac{1}{2} c^{pq}\nabla_s\nabla_p Q_q - \frac{1}{6} c^{rt}\nabla_r Q_{ts} = 0. \tag{5.22}$$

Ora: a queste si soddisfa certo ponendo $Q_s = 0$, $K =$ cost.; ma esistono anche infinite altre soluzioni. (Cfr. WEYL, 17, 1921, p. 112).

Ci siamo limitati finora a prendere in considerazione le connessioni metriche, proiettivamente piane, *simmetriche.* È assai più complessa la ricerca delle connessioni proiettivamente piane fra quelle metriche, o euclidee, *asimmetriche.* È vero che *una tale connessione è proiettivamente piana quando lo sia la connessione simmetrica associata* (47, p. 62): ma quest'ultima, di parametri

$$B^r_{st} = \left\{ {st \atop r} \right\}_c + \frac{1}{2}(\delta^r_s Q_t + \delta^r_t Q_s - c^{rp} c_{st} Q_p) - c^{rp}(S_{pts} + S_{pst}). \tag{5.23}$$

ove $S_{pts} = S_{pt}^{\cdot\cdot q} c_{qs}$ (cfr. **24**, pp. 73, 74), *dipende anche dal tensore di torsione* $S_{rs}^{\cdot\cdot t}$ *della supposta connessione metrica* Γ^r_{st}; le condizioni (2.1), (2.2) di WEYL sono allora condizioni differenziali pei tre tensori c_{rs}, Q_r, $H_{pqr} = S_{rpq} + S_{rqp}$, l'ultimo dei quali è *simmetrico rispetto a* p, q e gode della *proprietà ciclica* $H_{pqr} + H_{qrp} + H_{rpq} = 0$. Resta invece del tutto arbitrario il tensore *emisimmetrico* $L_{pqr} = \frac{1}{3}(S_{pqr} + S_{qrp} + S_{rpq})$; il quale insieme ad H_{pqr} e a c_{rs} determina il tensore di torsione:

$$S_{pq}^{\cdot\cdot r} = c^{rt}\left[L_{pqt} + \frac{1}{3}(H_{tqp} - H_{tpq})\right]. \tag{5.24}$$

6. **Connessioni proiettive subordinate a un campo di quadriche.** — Al n. prec. abbiamo, in sostanza, ricondotto la subordinazione della geometria riemanniana a curvatura costante a quella proiettiva mediante l'assegnazione di una quadrica, alla subordinazione della corrispondente *connessione* riemanniana alla connessione proiettiva integrabile dello spazio proiettivo, in relazione a una quadrica (o al campo degli iperpiani polari dei punti dello spazio rispetto ad essa). *Sotto questa forma risulta possibile una estensione alle geometrie riemanniane qualunque in una* X_n. Si assegni *un campo di quadriche negli spazi proiettivi tangenti alla* X_n, non passanti pei punti di contatto ([29]); su ciascuno di quegli spazi viene così determinata una metrica di CAYLEY. Questa nell'intorno del 1° ordine del punto di contatto P si identifica con una metrica *euclidea* ([30]), avente per assoluto l'intersezione della corrispondente quadrica con l'iperpiano polare di P rispetto ad essa: il quale funge da iperpiano improprio di questa metrica. Tali metriche locali nell'intera X_n costituiscono una *metrica riemanniana*, anzi, per l'arbitrarietà del supposto campo di quadriche, una *qualunque* metrica riemanniana per la X_n. Ebbene, questa metrica (o la corrispondente *connessione* riemanniana) è subordinata (in relazione al campo degli iperpiani polari dei punti della X_n rispetto alle quadriche associate) a una ben determinata connessione proiettiva simmetrica, di cui ora indicheremo la costruzione.

Sia (cfr. VEBLEN, **43**, p. 63)

$$G_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} = 0 \tag{6.1}$$

([29]) Se invece si ammette che le quadriche del campo considerato *possano anche passare pei punti della* X_n *cui sono associate,* la trattazione va condotta in modo sostanzialmente diverso, e anche i risultati sono differenti. Per questo caso più generale la teoria degli invarianti differenziali del campo di quadriche potrebbe costruirsi come estensione della teoria delle proprietà di uno spazio riemanniano, invarianti per trasformazioni conformi della metrica. (Ved. WEYL, SCHOUTEN, VEBLEN, J. M. THOMAS, T. Y. THOMAS, **17**, **23**, **25**, **26**, **27**, **28**, **35**, **39**, **54**; cfr. **53**, p. 405). Ma su questo non posso dilungarmi nel presente lavoro.

([30]) quella che KLEIN chiama « die berührende spezielle Massbestimmung » (nel punto P, alla metrica di CAYLEY considerata). (Ved. **7**, in « Ges. Math. Werke », I, 1. Aufsatz, p. 296).

l'equazione (puntuale), in relazione al sistema coordinato proiettivo locale x^α, della quadrica generica del supposto campo. Intenderemo la (6.1) *non specializzata*, o *specializzata tangenzialmente una volta* (cfr. n. prec.). Siccome supponiamo che la quadrica *non passi pel punto di contatto,* $x^\alpha = \delta_0^\alpha$, dello spazio proiettivo tangente cui appartiene, dev'essere $G_{00} \neq 0$; posto

$$\gamma_{\alpha\beta} = c\,\frac{G_{\alpha\beta}}{G_{00}}, \quad \text{onde} \quad \gamma_{00} = c \qquad (c = \text{cost. arbitr.} \neq 0 \tag{6.2}$$

$\gamma_{\alpha\beta}$ è un tensore proiettivo covariante (simmetrico), *determinato dal supposto campo di quadriche* (e dal valore del parametro c), e che, reciprocamente, lo determina. Se poniamo

$$\Phi_\alpha = \frac{\gamma_{\alpha 0}}{c} = \frac{\gamma_{0\alpha}}{c} = \frac{G_{0\alpha}}{G_{00}}, \quad g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - c\Phi_\alpha\Phi_\beta \quad (\Phi_0 = 1\,;\; g_{\alpha 0} = g_{0\alpha} = 0) \tag{6.3}$$

gli iperpiani $\Phi_\alpha x^\alpha = 0$ sono gli iperpiani polari dei punti della X_n rispetto alle quadriche del campo: e g_{rs} è un *tensore affine,* che a meno d'un fattore costante è il tensore fondamentale della metrica riemanniana che il campo di quadriche determina (come abbiamo accennato) sulla X_n (ved. 43, p. 73). *Ponendo quel fattore costante* $= 1$, noi facciamo di ciascuna quadrica (6.1), associata al punto P, nella metrica euclidea locale che essa stessa determina nell'intorno del 1° ordine di P, *una ipersfera di raggio* $\sqrt{-c}$ e dello spazio tangente in P uno spazio riemanniano *di curvatura costante* $K = \frac{1}{c}$.

Ciò premesso: ci si può proporre di costruire una *connessione proiettiva* per la X_n, tale che 1°) *abbia le medesime geodetiche della metrica riemanniana che ha come tensore fondamentale* g_{rs}; 2°) *dia luogo a una rappresentazione omografica fra gli spazi* Σ_P, Σ_{P^*}, *tangenti in punti infinitamente vicini* P, P*, *nella quale le quadriche rispettivamente associate a* P *e a* P* *si corrispondano.* Analiticamente ciò si esprime così: i parametri normalizzati $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ della connessione in parola debbono soddisfare alle condizioni,

$$\Lambda^r_{st} = \left\{ {st \atop r} \right\}_g + \delta^r_s\psi_t + \delta^r_t\psi_s + S_{st}^{\cdot\cdot r} \tag{6.4}$$

$$\overset{*}{\nabla}_\alpha \gamma_{\lambda\mu} = \chi_\alpha \cdot \gamma_{\lambda\mu}, \tag{6.5}$$

ove le derivate $\overset{*}{\nabla}_\alpha$ s'intendono calcolate coi parametri $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$, e i sistemi ψ_r, χ_α, $S_{st}^{\cdot\cdot r}$ (quest'ultimo emisimmetrico rispetto ad s, t) non sono soggetti ad altre condizioni che alle (6.4), (6.5) medesime.

Ebbene: *queste condizioni sono sufficienti a determinare sia le* $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ *che le* ψ_r, χ_α, $S_{st}^{\cdot\cdot r}$, purchè venga assegnato (ad arbitrio) il tensore emisimmetrico

$$L_{rst} = \frac{1}{3}(S_{rst} + S_{str} + S_{trs}) \qquad (S_{rst} = S_{rs}^{\cdot\cdot p} g_{pt}). \tag{6.6}$$

Infatti dalle (6.4), (6.5) ricaviamo:

$$\psi_r = \Phi_r, \quad \chi_\alpha = -2\Phi_\alpha, \tag{6.7}$$

$$S_{rs}^{\cdot\cdot t} = L_{rsp} g^{pt} \ (\text{cioè } H_{rst} = S_{tsr} + S_{trs} = 0), \tag{6.8}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Lambda_{st}^r &= \left\{ {st \atop r} \right\}_g + \delta_s^r \Phi_t + \delta_t^r \Phi_s + S_{st}^{\cdot\cdot r}, \\ \Lambda_{st}^0 &= \frac{\partial \Phi_s}{\partial u^t} - \left(\left\{ {st \atop p} \right\}_g + S_{st}^{\cdot\cdot p} \right) \Phi_p - \Phi_s \Phi_t - \frac{1}{c} g_{st}. \end{aligned} \right. \tag{6.9}$$

In particolare, possiamo porre

$$L_{rst} = 0; \quad \text{onde} \quad S_{rs}^{\cdot\cdot t} = 0; \tag{6.10}$$

corrispondentemente le (6.9) dànno i parametri di una connessione proiettiva *simmetrica* che è *individuata dal supposto campo di quadriche* $\Big($perchè sia Φ_s che $\frac{g_{st}}{c} = \frac{G_{st}}{G_{00}}$ ed $\left\{ {st \atop r} \right\}_g$ non dipendono dal valore attribuito al parametro $c\Big)$, *e soddisfa alle due condizioni dette sopra*: ad essa è subordinata, in relazione al campo di iperpiani $\Phi_\alpha x^\alpha = 0$, la connessione riemanniana definita da g_{rs} [31].

Possiamo sempre assumere, sui singoli spazi proiettivi tangenti alla X_n, gli iperpiani $\Phi_\alpha x^\alpha = 0$, polari dei punti della X_n rispetto alle quadriche ad

---

[31] Cfr. VEBLEN, **43** e **44**. Il sistema $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$, che VEBLEN costruisce a partire da $\gamma_{\alpha\beta}$ (per $c = 1$) con la stessa formula che applicata a un tensore affine g_{rs} dà i relativi simboli di 2ª specie di CHRISTOFFEL (form. (4.2), **43**, p. 66) ha la stessa legge di trasformazione dei parametri di una connessione proiettiva; però, $\Gamma_{\beta 0}^\alpha$ non risultando eguale (nè proporzionale) a δ_β^α, tale sistema $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ dà luogo a una rappresentazione omografica fra gli spazi tangenti in punti infinitamente vicini che *non dipende soltanto dal supposto campo di quadriche, ma anche dalla espressione di* du^0 (n. 3). Ciò non è (cfr. **43**, pp. 74-76) pel sistema $V_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - (\Gamma_{\beta 0}^\alpha - \delta_\beta^\alpha)\Phi_\gamma$, cui però corrisponde una connessione proiettiva *soddisfacente alla seconda delle condizioni sopra enunciate e non alla prima.* I parametri $\Lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ della nostra connessione (ove s'intenda $c = 1$) sono legati alle $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ o alle $V_{\beta\gamma}^\alpha$ dalle formule

$$\begin{aligned} \Lambda_{\beta\gamma}^\alpha &= \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + (\delta_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta 0}^\alpha)\Phi_\gamma + (\delta_\gamma^\alpha - \Gamma_{\gamma 0}^\alpha)\Phi_\beta + \delta_\beta^s \delta_\gamma^t S_{st}^{\cdot\cdot p}(\delta_p^\alpha - \delta_0^\alpha \Phi_p) + \delta_0^\alpha(\delta_\beta^s \Gamma_{\gamma 0}^p g_{sp} - \gamma_{\beta\gamma}) \\ &= V_{\beta\gamma}^\alpha + \delta_\beta^s \delta_\gamma^t S_{st}^{\cdot\cdot p}(\delta_p^\alpha - \delta_0^\alpha \Phi_p) + (\delta_\gamma^\alpha - \gamma^{r\alpha}\Phi_{r\gamma})\Phi_\beta + \delta_0^\alpha(\delta_\beta^s \Phi_{s\gamma} - \gamma_{\beta\gamma}) \end{aligned}$$

$$\left(\text{ove } \Phi_{\alpha 0} = \Phi_{0\alpha} = 0, \ \Phi_{rs} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial u^s} - \frac{\partial \Phi_s}{\partial u^r} \right) \right).$$

Anche SCHOUTEN e VAN DANTZIG (**52**, 1931) hanno costruito una connessione proiettiva che, in relazione a un assegnato campo di quadriche, soddisfa alla condizione 1); ma *dipende anche da un tensore emisimmetrico* F_{rs}, che non viene determinato dal campo di quadriche; essa inoltre ha una *deviazione* non nulla (ved. **55**, p. 16).

essi associate, *come iperpiani fondamentali* $x^0 = 0$; allora si ha $\Phi_r = 0$ e le (6.9) prendono la forma semplicissima

$$(6.11) \qquad \Lambda_{st}^{r} = \left\{ {st \atop r} \right\}_g + S_{st}^{\cdot\cdot r}, \quad \Lambda_{st}^{0} = -\frac{1}{c} g_{st}.$$

Per $c \to \infty$ i precedenti risultati conservano significato soltanto se si suppone che, corrispondentemente, le $\frac{G_{rs}}{G_{00}}$ e $\frac{G_{r0}}{G_{00}}$ divengano nulle, le g_{rs} si mantengano finite, e $|g_{rs}| \neq 0$; allora le quadriche (6.1) divengono specializzate, e la connessione proiettiva $\Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha}$ si identifica con la connessione euclidea Λ_{st}^{r}.

In particolare, quando sia $S_{rs}^{\cdot\cdot t} = 0$ e la curvatura della metrica riemanniana definita da g_{rs} sia costante, ritroviamo le (5.8) e (5.6) del n. 5.

Geometricamente la connessione proiettiva $\Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha}$ ha questo significato: la rappresentazione omografica di Σ_P su Σ_{P^*} che essa determina è il prodotto di un *movimento* (in relazione alle metriche di CAYLEY di Σ_P e Σ_{P^*}) che porta Σ_P in Σ_{P^*}, e P nel punto medesimo pensato in Σ_{P^*}, per una *omologia speciale* di Σ_{P^*} in sè: *il movimento è quello determinato dalla connessione euclidea di parametri* $\left\{ {st \atop r} \right\}_g + S_{st}^{\cdot\cdot r}$, *o in particolare, se* $S_{st}^{\cdot\cdot r} = 0$, *è quello determinato dal parallelismo di Levi-Civita relativo a* g_{rs}; l'*omologia speciale* ha P^* come centro e l'iperpiano di Σ_{P^*} perpendicolare alla direzione P^*P (nella metrica definita da g_{rs}) come iperpiano d'omologia. Naturalmente questa omologia porta la quadrica corrispondente, nel movimento, a quella associata a P nella quadrica associata a P^*.

Si presentano svariati problemi interessanti.

1°) Anzitutto: come la connessione $\Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha}$ (inteso d'ora in poi che valgano le (6.10)) è individuata dal campo di quadriche, lo individua essa a sua volta? Evidentemente due metriche riemanniane g_{rs}. $\bar{g}_{rs}$ che siano subordinate *alla stessa* connessione proiettiva $\Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha}$ *debbono avere le stesse geodetiche:* deve dunque esistere un sistema φ_s tale che si abbia

$$(6.12) \qquad \left\{ {st \atop r} \right\}_{\bar{g}} = \left\{ {st \atop r} \right\}_g + \delta_s^r \varphi_t + \delta_t^r \varphi_s,$$

$$(6.13) \qquad \bar{\Phi}_s = \Phi_s - \varphi_s;$$

ma le (6.9) dànno (indicando con $\bar{c}$ il valore del parametro c che corrisponde a $\bar{g}_{rs}$)

$$(6.14) \qquad \frac{1}{\bar{c}} \bar{g}_{st} = \frac{1}{c} g_{st} + \left\{ {st \atop p} \right\}_g \varphi_p + \varphi_s \varphi_t - \frac{\partial \varphi_s}{\partial u^t}.$$

Quali condizioni di compatibilità fra le (6.12) e (6.14) otteniamo:

$$
(6.15) \qquad \frac{\partial \varphi_s}{\partial u^t} - \frac{\partial \varphi_t}{\partial u^s} = 0, \quad \overset{g}{\nabla}_r \overset{g}{\nabla}_t \varphi_s - 2(\overset{g}{\nabla}_t \varphi_s \cdot \varphi_r + \overset{g}{\nabla}_t \varphi_r \cdot \varphi_s + \overset{g}{\nabla}_r \varphi_s \cdot \varphi_t) + \\
+ \frac{1}{c}(2 g_{st} \varphi_r + g_{rt} \varphi_s + g_{sr} \varphi_t) + 4 \varphi_r \varphi_s \varphi_t = 0,
$$

ove $\overset{g}{\nabla}_r$ è il simbolo della derivazione covariante che è determinata dal tensore g_{rs}; d'altra parte le $\bar{\Phi}_s$ e $\frac{\bar{g}_{rs}}{c}$ determinano, secondo le (6.3), (6.2), le $\frac{G_{\alpha\beta}}{G_{oo}}$, cioè il campo di quadriche. Dunque: *tutti e soli i campi di quadriche corrispondenti alla stessa connessione proiettiva si hanno dalle* (6.13), (6.14) *ponendovi per le* φ_s *una qualunque soluzione (eventuale) del sistema* (6.15).

2°) È senz'altro evidente che le connessioni proiettive determinate, secondo le (6.9), da un campo di quadriche *sono di natura particolare*; come mostrano ovviamente le (6.4), (6.5). Dalle (6.4) si possono eliminare le ψ_r, con un procedimento noto; si ottiene che il tensore $W_{rsp}^{\cdot\cdot\cdot q}$ di WEYL e il tensore V_{rst} (form. (2.1), (2.2)) (oppure $W_{rsp}^{\cdot\cdot\cdot q}$ e il covariante proiettivo di VEBLEN e J. M. THOMAS: form. (2.3)) *debbono essere eguali per* $\left\{ {st \atop r} \right\}_g$ *e per* Λ_{st}^r; queste relazioni insieme alle (6.5) costituiscono un sistema differenziale per le $\gamma_{\alpha\beta}$. Scrivendo le *condizioni di compatibilità* per questo sistema, certo in generale non identicamente soddisfatte, si hanno *le condizioni perchè la supposta connessione proiettiva* $\Lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ *sia in effetto una connessione metrica proiettiva*; così chiamando per brevità una connessione proiettiva costruita mediante le (6.9) a partire da un campo di quadriche.

3°) La connessione $\Lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ può essere *proiettivamente piana*? Questo avverrà *se lo è la connessione riemanniana definita da* g_{rs}, *e allora soltanto.* Ma allora quest'ultima connessione è a curvatura costante, e la metrica è una metrica di CAYLEY. La connessione $\Lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ si riduce alla connessione integrabile dello spazio proiettivo S_n, col quale la X_n viene a identificarsi; le quadriche associate ai punti della X_n, si identificano con un'unica quadrica di S_n, l'*assoluto* della metrica. Cosicchè *esiste una scelta dei riferimenti proiettivi sugli spazi tangenti alla* X_n, *per la quale i coefficienti dell'equazione* (6.1) *della quadrica generica del campo* ∞^n *si riducono a delle costanti.* Anzi: è *condizione necessaria e sufficiente,* perchè la connessione $\Lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ sia proiettivamente piana, che possa farsi una tale scelta dell'A-riferimento [32].

---

[32] Analiticamente ciò si esprime annullando il « tensore di curvatura » della connessione $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ di VEBLEN, e inoltre, anche il tensore affine Φ_{rs} (ved. nota [31]): per quest'ultimo però basta supporre che esso si annulli *in un punto iniziale.*

4°) Nel caso ora detto la connessione proiettiva $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ è, in particolare, una *connessione affine*: ciò avviene pure, naturalmente, nel caso ($c \to \infty$) da cui le quadriche (6.1) siano, tangenzialmente, una volta specializzate. Può in altri casi avvenire che $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sia una connessione affine?

Le condizioni perchè una connessione proiettiva sia affine sono indicate in generale nel mio lavoro **55**, pp. 34-35 ([33]); ma qui è più semplice procedere direttamente. Abbiamo subito che la connessione $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ è affine allora e solo che il sistema differenziale

$$(6.16) \qquad \overset{g}{\nabla}_p \lambda_s = \frac{1}{c} g_{sp} + \lambda_s \lambda_p$$

ammette soluzioni. Le condizioni d'integrabilità delle (6.16) dànno (indicando con $\overset{g}{R}{}_{pqs}^{\cdot\cdot\cdot t}$ il tensore di curvatura della metrica riemanniana definita da g_{rs})

$$(6.17) \qquad A_1) \quad \left[\overset{g}{R}{}_{pqs}^{\cdot\cdot\cdot t} - \frac{1}{c}(g_{ps}\delta^t_q - g_{qs}\delta^t_p)\right]\lambda_t = 0.$$

Di qui per derivazione ed eliminazione, mediante le (6.16), delle derivate delle λ_s abbiamo

$$(6.18) \qquad A_2) \quad \overset{g}{\nabla}_v \overset{g}{R}{}_{pqs}^{\cdot\cdot\cdot t}\lambda_t + \frac{1}{c}\overset{g}{R}_{pqsv} - \frac{1}{c^2}(g_{ps}g_{qv} - g_{qs}g_{pv}) = 0;$$

proseguendo nelle derivazioni e successive eliminazioni otteniamo una successione di equazioni $A_3, A_4, \ldots, A_h, \ldots$; *la connessione sarà affine se esiste un intero* N *tale che le equazioni* $A_1, A_2, \ldots, A_N$ *nelle* λ_r *siano algebricamente compatibili, e le loro soluzioni soddisfino alle* A_{N+1}. La condizione è certo soddisfatta se la metrica g_{rs} è a curvatura costante $\frac{1}{c}$ (e allora in effetto, e soltanto allora, la curvatura della connessione proiettiva $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ risulta nulla); questo ci dà la soluzione già nota e si vede bene che (per c finito) soltanto sotto altre ipotesi particolari circa la supposta metrica potranno esservene altre.

BIBLIOGRAFIA

1 - A. CAYLEY, *A sixth memoir upon quantics*, « Philos. Trans. of the Roy. Society of London », 1859; oppure, « Collected Papers », London, vol. II, 1889.

2 - E. BELTRAMI, *Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano, in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette*, « Annali di Matem. », (1), 7, 1865, 185-204.

3 - E. BELTRAMI, *Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea*, « Giornale di Matematiche », 6, 1868, 284-312.

([33]) Cfr. CARTAN, **21**, p. 318.

4 - E. BELTRAMI, *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*, « Annali di Matem. », (2), 2, 1868-69, 232-255.

5 - U. DINI, *Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra*, « Annali di Matem. », (2), 3, 1869-70, 269-293.

6 - L. SCHLÄFLI, *Nota alla Memoria del sig. Beltrami*, « *Sugli spazii di curvatura costante* », « Annali di Matem. », (2), 5, 1871-73, 178-193.

7 - F. KLEIN, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, « Mathem. Annalen », 4, 1871, 573-625; 6, 1873, 112-145; oppure « Ges. Math. Abhandl. », Berlin, Springer 1921, I. Band, 254-305 e 311-343.

8 - F. KLEIN, *Ueber einen Satz aus der Analysis situs*, « Göttinger Nachrichten », Nr. 14 1872; « Ges. Math. Abhandl. », I. Band, 306-310.

9 - F. SCHUR, *Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen*, « Mathem. Annalen », 27. 1886, 537-567.

10 - G. VERONESE, *Fondamenti di Geometria*, Padova, Tip. del Seminario, 1891.

11 - D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, B. G. Teubner, 1999, [7ª ed., Leipzig 1930].

12 - L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, Pisa, Spoerri 1894, [3ª ed., Pisa-Bologna 1922-24].

13 - G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, III, Paris, Gauthier-Villars, 1894.

14 - O. TEDONE, *Sulla teoria degli spazî a curvatura costante*, « Rendiconti Istit. Lombardo », (2), 32, 1899, 592-609.

15 - F. ENRIQUES, *Sopra le superficie e le varietà a più dimensioni le cui geodetiche sono rappresentabili con equazioni lineari*, « Rendiconti Accad. Bologna », (2), 7, 1902-03, 52-58.

16 - F. SCHUR, *Grundlagen der Geometrie*, B. G. Teubner, 1909.

17 - H. WEYL, *Zur Infinitesimal geometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung*, « Göttinger Nachrichten », 1921, 99-112.

18 - L. P. EISENHART ed O. VEBLEN, *The Riemann Geometry and its generalization*, « Proceedings Nation. Acad. of Sciences of the U. S. A. », 8, 1922, 19-23.

19 - H. WEYL, *Mathematische Analyse des Raumproblems*, Berlin, Springer 1923.

20 - W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, II, *Affine Differentialgeometrie*, Berlin, Springer 1923.

21 - É. CARTAN, *Les récentes généralisations de la notion d'espace*, « Bulletin des Sciences Mathém. », 48, 1924, 294-320.

22 - É. CARTAN, *Sur les variétés à connexion projective*, « Bull. Soc. Mathém. », 52, 1924, 205-241.

23 - J. A. SCHOUTEN, *On the place of conformal and projective geometry in the theory of linear displacements*, « Proceedings Kon. Akad. Amsterdam », 27, 1924, 407-424.

24 - J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, Springer 1924.

25 - J. M. THOMAS, *Conformal correspondence of Riemann spaces*, « Proc. Nation. Acad. », 11, 1925, 257-259.

26 - T. Y. THOMAS, *Invariants of relative quadratics differential forms*; Ibid., 722-725.

27 - T. Y. THOMAS, *On conformal geometry*, Ibid., 12, 1926, 352-359.

28 - J. M. THOMAS, *Conformal invariants*, Ibid., 389-393.

29 - L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, Princeton 1926.

30 - G. FUBINI, *Sulla teoria delle superficie* R *e delle loro trasformazioni*, « Rendic. Accad. Lincei », (6), 4, 1926, 81-85.

31 - G. FUBINI, *Proprietà proiettive delle superficie a curvatura metrica costante*, Ibid., 167-171.

32 - O. VEBLEN e J. M. THOMAS, *Projective invariants of affine geometry of paths*, « Annals of Mathem. », (2), 27, 1926, 279-296.

33 - T. Y. THOMAS, *A projective theory of affinely connected manifolds*, « Mathem. Zeitschrift », 25, 1926, 723-733.

34 - É. CARTAN, *L'axiome du plan et la géométrie différentielle métrique*, « In memoriam N. I. Lobacevski », vol. II, Kazan, 1926.

35 - J. A. SCHOUTEN, *Erlanger Programm und Uebertragunslehre: neue Gesichtpunkte zur Grundlegung der Geometrie*, « Rend. Circ. Matem. Palermo », 50, 1926, 142-169.

36 - L. P. EISENHART, *Geometries of paths for which the equations of the paths admit* $\frac{n(n+1)}{2}$ *independent linear first integrals*, « Trans. Amer. Mathm. Society », 28, 1926, 330-338.

37 - L. P. EISENHART, *Non-riemannian Geometry*, New York, 1927.

38 - O. VEBLEN, *Projective tensors and connections*, « Proc. Nation. Acad. », 14, 1928, 154-166.

39 - O. VEBLEN, *Conformal tensors and connections*, Ibid., 735-745.

40 - É. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Paris, Gauthier-Villars 1928.

41 - O. VEBLEN, *Generalized Projective Geometry*, « Journal of the London Mathem. Society », 4, 1929, 140-160.

42 - S. GOLAB, *Einige projektive Eigenschaften der affinen Geometrie*, « Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves », Warszawa 1929, 339-340.

43 - O. VEBLEN, *A generalisation of the quadratic differential form*, « Quarterly Journ. of Mathem. », Oxford Series, I, 1930, 60-76.

44 - O. VEBLEN e B. HOFFMANN, *Projective Relativity*, « Physical Review », 36, 1930, 810-822.

45 - S. GOLAB, *Ueber verallgemeinerte projektive Geometrie*, « Prace Matematyczno Fizyczne », 37, 1930, 91-153.

46 - A. DUSCHEK e W. MAYER, *Lehrbuch der Differentialgeometrie*, Band II (W. MAYER), *Riemannsche Geometrie*, B. G. Teubner 1930.

47 - E. BORTOLOTTI, *Geometria delle varietà a connessione affine. Teoria invariantiva delle trasformazioni che conservano il parallelismo*, « Annali di Matem. », (4), VIII, 1930, 53-101.

48 - E. BORTOLOTTI, *Connessioni proiettive*. « Bollettino Un. Matem. Italiana », 9, 1930, 288-294, (I) e 10, 1931, 28-34, (II) e 83-90, (III).

49 - J. H. C. WHITEHEAD, *On a class of projectively flat affine connections*, « Proc. of the London Mathem. Society », (2), 32, 1931, 93-114.

50 - J. H. C. WHITEHEAD, *The representation of projective spaces*. « Annals of Mathem. », (2), 32, 1931, 327-360.

51 - F. SCHILLING, *Projektive und nichteuklidische Geometrie*, I e II, B. G. Teubner, 1931.

52 - J. A. SCHOUTEN e D. VAN DANTZIG, *Ueber eine vierdimensionale Deutung der neuesten Feldtheorie*, « Proc. Kon. Akad. v. Wetenschappen », Amsterdam, 34, 1931, 1398-1407.

53 - D. VAN DANTZIG, *Theorie der projektiven Zusammmenhangs* n*-dimensionaler Räumen*, « Mathem. Annalen », 106, 1932, 400-454.

54 - T. Y. THOMAS, *Conformal tensors*. « Proc. Nation. Acad. », 18, 1932, 103-112, 189-193.

55 - E. BORTOLOTTI, *Sulle connessioni proiettive*. « Rendiconti Circ. Matem. di Palermo », 56, 1932, 1-57.

Quelques nouveaux problèmes sur les fonctions harmoniques.

par M. NICOLAS CIORANESCO (Bucarest).

1. Considérons un domaine Ω, de frontière Σ, la surface Σ ayant en chaque point une normale bien déterminée. Une fonction $U(M)$, harmonique dans le domaine $\Omega + \Sigma$, est complétement déterminée dans Ω par la connaissance de ses valeurs sur la frontière Σ du domaine. C'est le principe de DIRICHLET. Lorsque, en outre de la condition précédente, on suppose que la surface Σ a en chaque point ses deux courbures principales finies, on sait qu'il existe un potentiel de double couche qui fournit la solution du problème de DIRICHLET pour le domaine Ω et la distribution des valeurs données sur Σ. La densité de cette double couche vérifie une équation intégrale de FREDHOLM.

Généralement, la plupart des problèmes aux limites qu'on rencontre dans la physique mathématique et qui ont pour objet la détermination d'une certaine fonction harmonique $U(M)$, sont de la forme:

$$a(P)\cdot U(P) + b(P)\cdot\left(\frac{dU}{dn}\right)_P = f(P) \qquad (P \text{ point de } \Sigma). \tag{1}$$

À cause de la linéarité de cette condition initiale, par rapport aux valeurs de U et de sa dérivée normale sur Σ, ces problèmes aux limites sont réductibles à des équations intégrales du type de FREDHOLM.

Je me suis proposé de voir s'il n'y a pas des conditions initiales, en un certain sens plus générales que les conditions (1), susceptibles aussi de déterminer une fonction harmonique dans Ω, d'une manière univoque ou avec un degré d'indétermination bien délimité.

Pour mieux éclairer l'idée qui m'a guidé, l'analogie avec les conditions initiales susceptibles de déterminer une solution d'une équation différentielle linéaire ordinaire, n'est peut-être pas dépourvue d'intérêt.

Considérons, pour fixer les idées, l'équation du second ordre:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = A(x)U + B(x). \tag{2}$$

Les conditions initiales

$$U(a) = c_1; \quad U(b) = c_2 \tag{3}$$

déterminent d'une manière univoque $U(x)$ dans l'intervalle (a, b). L'intervalle ouvert (a, b) jone le rôle du domaine Ω, ses extrémités a et b celui de Σ. À ce point de vu les conditions initiales (3) sont l'analogue du problème de Dirichlet (pour une équation du type elliptique qu'il n'est pas besoin d'écrire).

Mais ces conditions bi-locales (3) ou à la frontière, peuvent apparaître comme des cas particuliers de certaines *conditions globales*, c. à. d. de conditions qui intéressent les valeurs de $U(x)$ dans tout l'intervalle (a, b) et non seulement à ses extrémités. Il suffit pour cela de poser les conditions suivantes:

$$(4) \qquad \int_a^b U(s)d\alpha(s) = c_1 ; \quad \int_a^b U(s)d\beta(s) = c_2$$

$\alpha(s)$ et $\beta(s)$ étant deux fonctions à variations bornées dans (a, b). Les conditions initiales (3) sont bien des cas particuliers des conditions (4), qui sont susceptibles [1], elles, aussi, de déterminer d'une manière univoque une solution de l'équation (2).

Nous cherchons pour les fonctions harmoniques des conditions analogues aux conditions (4), c. à. d. des conditions initiales qui porteront sur les valeurs de $U(M)$ ou de ses dérivées, *dans tout le domaine* Ω, et non pas seulement sur ses valeurs à la frontière. Par conséquent, nous chercherons à déterminer $U(M)$ par des *conditions globales*. telles que les *conditions à la frontière* en seront des cas particuliers. Ces conditions globales seront aussi linéaires par rapport aux valeurs de U et de ses dérivées du premier ordre; ce seront des fonctionnelles linéaires par rapport à ces valeurs.

2. Pour écrire ces conditions globales auquelles doit satisfaire la fonction harmonique $U(M)$, considérons le domaine Ω, de frontière Σ, dont nous avons parlé au début, qu'on suppose situé dans l'espace E_{n+1}, à $n+1$ dimensions. Supposons aussi que la surface Σ admette la représentation suivante:

$$(5) \qquad x_1 = x_1(t_1, t_2, \dots t_n);\ x_2 = x_2(t_1, t_2, \dots t_n) \dots\ x_{n+1} = x_{n+1}(t_1, t_2, t_3, \dots t_n)$$

ou plus brièvement:

$$(1') \qquad x_i = x_i(Q) \qquad (i = 1, 2, \dots n+1)$$

le point $Q(t_1, t_2, \dots t_n)$ variant dans un certain domaine polyédral Π_n d'un E_n, les fonctions $x_i(Q)$ étant continues par rapport aux variables t_j.

[1] Voir pour cela, et pour une analyse des cas singuliers possibles, notre article, inséré dans « Mathematische Zeitschrift », Band 35, S. 603 (1932).

Considérons une famille de surfaces Σ_λ dépendant d'un paramètre λ, qui varie de 0 à 1, dont l'équation peut s'écrire:

$$x_i = x_i(Q;\ \lambda) \qquad (i = 1, 2, \dots n+1). \tag{6}$$

Cette famille de surfaces doit satisfaire aux conditions suivantes: *a)* par chaque point du domaine Ω il passe une surface de la famille et une seule; *b)* pour $\lambda = 1$, Σ_1 est identique à la surface Σ, frontière du domaine Ω; *c)* Σ_0 se réduit à un point M_0 situé à l'intérieur de Ω. En d'autres termes, les surfaces Σ_λ sont telles qu'elles puissent être considérées comme l'image topologique d'une famille d'hypersphères concentriques, dont les rayons varient avec continuité, p. ex. de zéro à un.

Un point quelconque M de Ω est complètement déterminé par la valeur $\lambda = \lambda_0$ du paramètre correspondant à la surface Σ_{λ_0} qui passe par M, et par les valeurs correspondantes des paramètres t_j qui le définissent sur Σ_{λ_0}: d'une manière plus abrégée, on peut écrire: $M = M(Q;\ \lambda)$, Q étant un point du domaine polyèdral Π_n dont on a déjà parlé. Si l'on considère $Q = Q_0$ fixe dans Π_n, alors les $n+1$ équations:

$$M = M(Q_0;\ \lambda) \tag{7}$$

représentent un arc de courbe continue, qui va de M_0 à un certain point de Σ (correspondant à Q_0). Cet arc de courbe joint les points correspondants des surfaces Σ_λ, de telle sorte que les points du domaine $\Omega + \Sigma$ peuvent aussi être considérés comme étant *enfilés* sur des arcs de courbes partant du point M_0.

Nous considérons les points du domaine $\Omega + \Sigma$ comme appartenant aux surfaces Σ_λ, c. à. d. définis par Q et λ, de telle manière qu'une fonction $F(M)$ de la position de M dans Ω, apparaît comme une fonction de Q et λ.

Cela étant dit, soit $U(M)$ une fonction harmonique dans $\Omega + \Sigma$. Cherchons à déterminer $U(M)$ par la condition:

$$\int_0^1 U_{\Sigma_\lambda} d\alpha(\lambda) = f(Q) \tag{8}$$

U_{Σ_λ} désignant la valeur de $U(M)$ lorsque M se trouve sur la surface Σ_λ, $\alpha(\lambda)$ étant une fonction à variation bornée dans (0, 1), $f(Q)$ une fonction continue quelconque, donnée. Cette condition initiale (8) est une fonctionnelle linéaire par rapport aux valeurs de $U(M)$ dans $\Omega + \Sigma$, valeurs qui sont groupées par la famille de surfaces Σ_λ. C'est une condition initiale globale du type de celles que nous nous proposons d'envisager, car on voit que si $\alpha(\lambda) = c^t$ dans $(0, 1)$ sauf au point $\lambda = 1$ où elle a un saut à gauche, alors on a le problème classique de DIRICHLET.

L'interprétation de la condition (8) est facile à faire: on attribue un certain poids aux valeurs de $U(M)$ sur chaque surface Σ_λ, poids qui peut être fini sur un nombre fini de surfaces, mais en général il est infiniment petit, et la valeur moyenne des valeurs de U ainsi prises (dont le poids total $A = \int_0^1 d\alpha(\lambda)$ est $\neq 0$) est une certaine fonction donnée. De la même manière, on voit que $f(Q_0)$ représente la valeur moyenne (à un facteur numérique près) de valeurs de $U(M)$ sur l'arc $Q = Q_0$, allant de M_0 au point Q_0 de Σ. Il est évident que le problème (8) n'est pas le plus général de l'espèce. Nous le considérons tout d'abord à cause de sa simplicité et de ses analogies avec le problème de DIRICHLET. Avant de traiter le problème général posé par la condition (8), pour nous rendre compte de conditions supplémentaires auquelles doit satisfaire la fonction $\alpha(\lambda)$ pour que le problème ait des solutions pour $f(Q)$ continue quelconque, considérons d'abord un cas très particulier mais instructif pour le problème général.

3. Prenons pour Ω l'intérieur du cercle unité, pour Σ_λ le cercle de rayon λ et de centre à l'origine, $\Sigma_0 = C_0$ l'origine 0.

On se propose de déterminer la fonction $U(\rho, \theta)$, harmonique dans le cercle unité C, par la conditions suivante:

$$\int_0^1 U_{C_\lambda} d\alpha(\lambda) = f(\theta) \tag{9}$$

$f(\theta)$ étant une fonction continue donnée. Dans ce cas on a de suite U_{C_λ}: c'est $U(\lambda, \theta)$, et on peut l'écrire:

$$U(\lambda, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^\infty \lambda^n(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \tag{10}$$

α_n et β_n étant à déterminer. La condition (9) nous donne:

$$\frac{\mu_0\alpha_0}{2} + \sum_1^\infty \mu_n(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) = f(\theta) \tag{11}$$

où l'on a posé: $\mu_p = \int_0^1 \lambda^p d\alpha(\lambda)$ c. à. d. les moments de $\alpha(\lambda)$ dans $(0, 1)$. Supposons que la fonction continue $f(\theta)$ ait le développement:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos n\theta + b_\theta \sin n\theta).$$

De la relation (11) on déduit alors que α_n et β_n sont déterminés par:

(12) $$\mu_p\alpha_p = a_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta\,;\ \mu_p\beta_p = b_p = \ldots$$

Pour que $U(\rho,\ \theta)$ soit déterminée quelle que soit la fonction $f(\theta)$, il faut tout d'abord que tous les moments μ_p de $\alpha(\lambda)$ soient différents de zéro. Supposons qu'il en soit ainsi; le cas où quelques-uns des moments μ_p seraient nuls correspond à un *problème singulier* de la classe de problèmes posés par la condition (8) et que nous allons caractériser ultérieurement.

Si $\mu_p \neq 0$, des relations (12) on déduit les valeurs de α_n et β_n et par conséquent on a dans cette hypothèse:

$$U(\rho,\ \theta) = \frac{a_0}{2\mu_0} + \sum_1^\infty \frac{\rho^n}{\mu_n}\,[a_n \cos n\beta + b_n \sin n\theta]$$

solution qui existe dans le domaine D, déterminé par $\rho < 1$.

Pour que la solution existe aussi sur la frontière du domaine, c. à. d. sur le cercle unité, $\alpha(\lambda)$ étant donnée, la fonction continue $f(\theta)$ ne peut pas être quelconque. La relation qui doit exister entre $f(\theta)$ et $\alpha(\lambda)$ est que la série

$$\sum_1^\infty \frac{a_n^2 + b_n^2}{\mu_n^2}$$

soit convergente. Pour que cette série converge, quelle que soit la manière dont la série $\sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2)$ converge, il faut et il suffit que μ_n^2 reste supérieur à un nombre fixe lorsque n augmente indéfiniment. Mais pour que $\mu_n = \int_0^1 \lambda^n d\alpha(\lambda)$ reste en valeur absolue supérieur à un nombre fixe lorsque $n \to \infty$, il faut que $\alpha(\lambda)$ ait un saut à gauche pour $\lambda = 1$.

En effet on peut écrire:

$$\mu_n = \int_0^1 \lambda^n d\alpha(\lambda) = \int_0^{1-\varepsilon} \lambda^n d\alpha(\lambda) + \int_{1-\varepsilon}^1 \lambda^n d\alpha(\lambda)$$

et en appliquant le théorème de la moyenne:

$$|\,\mu_n\,| < (1-\varepsilon)^n V + V_\varepsilon$$

en désignant par V la variation totale de $\alpha(\lambda)$ dans $(0,\ 1)$ et par V_ε cette même variation dans l'intervalle $(1-\varepsilon,\ 1)$. Si $\alpha(\lambda)$ est continue à gauche au voisinage du point $\lambda = 1$, étant donné η arbitrairement petit, on peut trouver ε

tel que $V_\varepsilon < \eta$ et cela quel que soit n. Par conséquent $|\mu_n|$ devient, lorsque n croit, aussi petit que l'on veut, donc il ne peut pas rester supérieur à un nombre fixe. Il est par conséquent nécessaire que la fonction $\alpha(\lambda)$ soit discontinue à gauche au point $\lambda = 1$. Si cela a lieu, on s'assure facilement que la condition requise pour μ_n est satisfaite.

En d'autres termes, pour que la solution du problème posé soit déterminée dans tout le domaine fermé $D + C$, quelle que soit la fonction continue $f(\theta)$ donnée, *il faut attribuer un poids fini aux valeurs sur la frontière de la fonction harmonique cherchée.*

Cette condition à laquelle doit satisfaire la fonction déterminante $\alpha(\lambda)$, dans le cas du cercle et de la famille de cercles C_λ, pour que la solution soit déterminée même sur la frontière du domaine, nous allons la considérer comme satisfaite dans le problème général posé par la condition (8).

4. Nous avons laissé de côté le cas $\mu_p = 0$ pour quelques valeurs de l'entier p, cas que nous avons qualifié comme singulier.

D'une manière générale, nous allons appeler *cas singulier* des conditions initiales (8), ou plus brièvement, *problème singulier*, celui dans lequel la détermination de la fonction harmonique U par la condition (8), la fonction $f(Q)$ étant donnée, est ou *impossible*, ou s'il est possible, U reste *indéterminée* (indétermination qui se manifeste par le fait que la solution U dépend de constantes arbitraires).

Ou, sous une autre forme, dans un cas singulier, à la condition initiale: $\int_0^1 U_{\Sigma_\lambda} d\alpha(\lambda) = 0$ correspondent pour U des solutions qui ne sont pas identiquement nulles dans $\Omega + \Sigma$.

Le cas $\mu_p = 0$ du problème particulier considéré plus haut, rentre bien dans cette définition du problème singulier. En effet, si $\mu_p = 0$, on voit par le système (12) que l'on doit avoir $a_p = b_p = 0$ pour que le problème soit possible, et si ces conditions sont satisfaites, alors α_p et β_p restent indéterminés. Ceci est d'ailleurs un cas particulier de la théorie générale qu'on envisagera plus loin. Remarquons qu'en particulier si $\mu_0 = \int_0^1 d\varphi(\lambda) = 0$, c. à. d. si le poid total est nul, on a aussi un cas singulier, $U(\rho, \theta)$ n'est déterminé, lorsque le problème est possible, qu'à une constante additive près. Cela a d'ailleurs lieu aussi dans le cas de la condition générale (8), car on voit facilement que dans ce cas si U_0 est une solution, $U_0 + C$ l'est aussi, quelle que soit la constante C.

Faisons encore quelques remarques sur la fonction déterminante $\alpha(\lambda)$. Nous l'avons supposée à variation bornée dans $(0, 1)$. Supposons à présent que pour $\lambda = \lambda_0$ elle soit infinie, $f(Q)$ restant finie et continue. Pour que la relation (8) puisse subsister avec un poids infini pour les valeurs de U sur Σ_{λ_0}, il est évident que $U(M)$ doit être nul sur la surface Σ_{λ_0}. Et alors, conformément à la théorie des fonctions harmoniques, il en résulte que U doit être identiquement nul dans Ω. Le poids peut être infini seulement pour $\lambda = 0$, c. à. d. au point $M_0 \equiv \Sigma_0$ où l'on peut avoir $u = 0$ sans qu'il soit $\equiv 0$ dans le domaine Ω. Mais ce sont des cas exceptionnels que nous ne faisons que signaler.

5. Revenons au problème général posé au § 2, que nous allons traiter dans le cas de deux dimensions, car il n'y a pas de difficultés provenant du nombre de dimensions.

Soit D le domaine pour lequel on traite le problème, dont la frontière C est une courbe simple de JORDAN, ayant une normale unique en chaque point, et d'équation: $x = x(t)$; $y = y(t)$, t variant de 0 à 1. Soit C_λ la famille de courbes à un paramètre:

$$(13) \qquad (C_\lambda)\ x = x(t;\ \lambda);\quad y = g(t;\ \lambda) \qquad (0 \leq \lambda \leq 1)(0 \leq t < 1).$$

et qui jouissent de propriétés de la famille Σ_λ, c. à. d. C_λ est homéomorphe à la famille de cercles: $x = \lambda \cos 2\pi t$; $y = \lambda \sin 2\pi t$.

On suppose de plus, ce qui ne diminue pas la généralité du problème, que sur la frontière C, le paramètre t est l'arc de la courbe compté d'une certaine origine, et que par conséquent la longueur de C est l'unité.

Cela étant dit, cherchons à déterminer une fonction harmonique dans $D + C$, par la condition:

$$(8') \qquad \int_0^1 U_{C_\lambda} d\alpha(\lambda) = f(t)$$

$\alpha(\lambda)$ étant une fonction à variation bornée ayant un saut à gauche pour $\lambda = 1$, et $f(t)$ une fonction continue donnée. Pour simplifier, nous allons supposer que le saut de $\alpha(\lambda)$ au point $\lambda = 1$ est égal à un, en divisant au besoin la fonction $f(t)$ par un facteur constant.

Comme dans la méthode de FREDHOLM pour la résolution du problème classique de DIRICHLET, nous allons chercher à déterminer U sous la forme d'un potentiel de double couche. Posons par conséquent:

$$(14) \qquad U(x,\ y) = \int_C \rho(\tau) \frac{\cos\varphi}{r}\, d\tau = \int_0^1 \rho(\tau) \frac{\cos\varphi}{r}\, d\tau$$

où $\rho(\tau)$ est la densité de la couche, $r = \overline{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y \quad \eta)^2}$, $M(x, y)$, $P(\xi, \eta)$ étant un point de C, donc: $\xi = x(\tau)$; $\eta = y(\tau)$, en prenant sur C comme variable d'intégration τ au lien de t, φ désigne, comme on sait, l'angle de PM avec la normale en P à la courbe C (normale dirigée vers l'intérieur de C). Le point M de D est considéré comme appartenant à la courbe C_λ, par conséquent ses coordonnées ont l'expression donnée par la relation (13).

Avant d'introduire l'expression (14) de $U(M)$ dans la condition initiale (8'), mettons en évidence dans cette condition globale que la fonction déterminante $\alpha(\lambda)$ a un saut à gauche égal à un pour $\lambda = 1$. Mais il faut tenir compte que lorsque $\lambda \to 1$, le point M s'approche d'un point de C par l'intérieur et que le potentiel de double couche est discontinu lorsque'on traverse la courbe qui porte la distribution de masse. Désignons par U_c la valeur de U donnée par (14) lorsque M est sur C, par U_{c-} et par U_{c+} les valeurs limites de U lorsque M tend vers un point de C par l'intérieur ou par l'extérieur.

Par conséquent, nous avons une intégrale de Stieltjes: $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ pour laquelle on sait qu'au point $x = x_0$, $\alpha(x)$ elle présente un saut à gauche et qu'en outre, en ce point $f(x)$ a une discontinuité de première espèce (les limites à droite et à gauché sont finies et bien déterminées). Avec ces hypothèses, il est facile de voir que la contribution du point x_0 à la valeur de l'intégrale considérée, est:

$$f(x_0 + 0) \cdot s_d(x_0) + f(x_0 - 0) \cdot s_g(x_0)$$

en désignant par $s_d(x_0)$ et $s_g(x_0)$ la valeur des sauts à droite et à gauche, de $\alpha(x)$. Appliquons ce résultat dans le cas de la condition (8'). D'après nos hypothèses:

$$s_d(1) = 0 \quad \text{et} \quad s_g(1) = 1.$$

Par conséquent:

$$\int_0^1 U_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) = U_{c-} + \int_0^{1-0} U_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) \tag{15}$$

la limite supérieure d'intégration montrant qu'on ne compte plus la discontinuité de $\alpha(\lambda)$ au point $\lambda = 1$. La condition (8') devient:

$$U_{c-} + \int_0^{1-0} U_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) = f(t). \tag{16}$$

Lorsque $\lambda \to 1$, le point $M[x(t;\lambda), y(t;\lambda)]$ tend vers un point de C, dont les équations sont prises sons la forme: $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, défini par son abscisse curviligne $\tau = t$. En tenant compte de propriétés du potentiel de double couche, on a que:

$$U_{c-} = \pi\rho(t) + \int_0^1 \rho(\tau)\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_c d\tau$$

en indiquant par $\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_c$ que M aussi se trouve sur C.

Si l'on porte cette expression dans la relation (16), on obtient:

$$\pi\rho(t) + \int_0^1 \rho(\tau)\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_c d\tau + \int_0^1 d\alpha(\lambda)\int_0^{1-0} \rho(\tau)\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{c_\lambda} d\tau = f(t)$$

ou en changeant l'ordre des intégrations:

$$\pi\rho(t) + \int_0^1 \rho(\tau)\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_c d\tau + \int_0^1 \rho(\tau)d\tau\int_0^{1-0} \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) = f(t)$$

ou bien:

$$\pi\rho(t) + \int_0^1 \rho(\tau)d\tau\int_0^1 \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) = f(t).$$

On a bien le droit de changer l'ordre d'intégration dans l'expression précédente, car on peut montrer facilement que l'on a:

$$\int_a^b f(s)ds\int_c^d h(x,\ s)d\alpha(x) = \int_c^d d\alpha(x)\int_a^b h(x,\ s)f(s)de$$

comme dans le cas d'intégration ordinaire.

Si nous posons:

$$(17) \qquad \int_0^1 \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{c_\lambda} \cdot d\alpha(\lambda) = \pi\Phi(t;\ \tau)$$

on voit que la densité $\rho(t)$ vérifie l'équation intégrale:

$$(18) \qquad \rho(t) + \int_0^1 \Phi(t;\ \tau)\rho(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi} f(t)$$

qui est une équation intégrale du type de FREDHOLM, comme l'équation que vérifie la densité de la double couche qui résout le problème de DIRICHLET, et qui n'est qu'un cas particulier de l'équation (18). Lorsque les courbes C_λ sont données par les équations (13), le noyau $\Phi(\tau;\ t)$ a l'expression suivante:

$$\Phi(t,\ \tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{[x(\tau) - x(t;\ \lambda)]y'(\tau) - [y(\tau) - y(t;\ \lambda)]x'(\tau)}{[x(\tau) - x(t;\ \lambda)]^2 + [y(\tau) - y(t,\ \lambda)]^2} d\alpha(\lambda).$$

Comme de juste, le noyau de l'équation intégrale dépend à la fois de la famille des courbes C_λ et de la fonction déterminante $\alpha(\lambda)$.

Si nous considérons l'équation intégrale:

$$(19') \qquad \rho(t) + \mu \int_0^1 \Phi(t;\, \tau)\rho(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi} f(t)$$

qui contient le paramètre μ, il en résulte que si $\mu = 1$ n'est pas une valeur singulière pour cette équation, alors on peut affirmer que l'équation (18) admet une solution unique $\rho(t)$, et par conséquent il existe une fonction harmonique U, bien déterminée, qui satisfait à la condition (8').

L'équation (18') correspond au problème suivant:

« Trouver la densité $\rho(t)$ d'une double couche étalée sur le contour C, telle que le potentiel W de cette couche, vérifie dans $D + C_+$ la relation:

$$W_{c-} - W_{c+} + \mu[W_{c-} + W_{c+}] + 2\mu \int_0^{1-0} W_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) = 2f(t) \text{ ».}$$

La distribution des valeurs singulières de l'équation (18') est régie par le noyau $\Phi(t;\, \tau)$, par conséquent elle dépend de courbes C_λ et de la fonction $\alpha(\lambda)$. Conformément à la théorie des équations intégrales, si $\mu = 1$ est une valeur singulière, le problème n'est possible que si $f(t)$ satisfait à certaines conditions, faciles à écrire, et si ces conditions sont satisfaites, dans la solution U entrent linéairement des constantes arbitraires. Par conséquent, dans ce cas-là, la condition initiale (8') correspond à un problème singulier, d'après la convention adoptée.

Il en résulte, que le problème correspondant à la condition initiale homogène:

$$(19) \qquad \int_0^1 U_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) = 0$$

aura une solution non identiquement nulle dans $D + C$.

L'exemple suivant nous le montre: Soit à chercher dans le cercle unité $\rho \leq 1$, une fonction harmonique $U(\rho, \theta)$ qui satisfasse à la condition:

$$(20) \qquad U(1,\, \theta) - 3U\left(\frac{1}{2},\, \theta\right) - 4U\left(\frac{1}{4},\, \theta\right) = 0$$

qui est bien du type (19), $\alpha(\lambda)$ ayant un saut pour $\lambda = 1$, donc nous sommes dans les hypothèses adoptées. On trouve facilement que la fonction harmonique dans le cercle unité, qui satisfait à la condition (20) est:

$$U(\rho,\, \theta) = \rho^2(C_1 \cos 2\theta + C_2 \sin 2\theta),$$

C_1, C_2 étant des constantes arbitraires.

Il est par conséquent inutile de chercher, même si les courbes C_λ sont données, si $\mu = 1$ est une valeur singulière pour l'équation (18'), aussi longtemps qu'on n'a pas précisé la forme de la fonction $\alpha(\lambda)$. C'est pour cela que nous nous en tenons ici au problème général posé par (8').

6. Un cas particulier intéressant du problème précédent est le suivant: Soit C' une courbe simple, fermée, située dans le domaine déterminé par la courbe C, et qui en outre est telle qu'elle fait partie d'une famille de courbes C_λ qui jouissent des propriétés assignées au début, c. à. d. que $C' \equiv C_{\lambda_0}$ $(0 \leq \lambda_0 < 1)$ et entre les points desquelles on a une correspondance, établie par les valeurs de la variable commune t, sur les deux courbes. Nous dirons plus brièvement que C et C' sont de la même famille. On peut se proposer de déterminer une fonction harmonique dans C, par la conditiou:

$$U_c + kU_{c'} = f(t)$$

k étant une constante donnée. C'est un cas particulier de la condition (8'), et par conséquent sur l'existence de U on a les mêmes conclusions que plus haut. En particulier C' peut se réduire à un point M_0 de D, et on peut chercher U satisfaisant à la condition:

$$U_c + kU(M_0) = f(t).$$

7. L'étude d'un problème particulier nous a conduit à prendre pour la fonction $\alpha(\lambda)$ qui entre dans la condition générale (8), une fonction ayant un saut à gauche pour $\lambda = 1$. La raison de cette hypothèse est manifeste: c'est grâce à elle que nous sommes arrivés pour la densité de la double couche, à une équation intégrale de seconde espèce. Encore grâce à cette hypothèse, le problème classique de DIRICHLET apparait comme un cas particulier de la condition (8).

Supposons à présent que $\alpha(\lambda)$ soit continue pour $\lambda = 1$, et que nous cherchions U dans D, défini par la condition (8').

En cherchant la fonction harmonique U sous la forme d'un potentiel de double couche, ou même de simple couche, car il n'y a plus à présent aucune raison de préférer l'un à l'autre, on arrive pour la densité du potentiel cherché, à une équation intégrale de première espèce, c. à. d. de la forme:

$$\int_0^1 \rho(s)k(s, t)ds = f(t). \tag{21}$$

D'après la théorie des équations du type (21), $k(s, t)$ étant donnée, on ne peut plus affirmer l'existence d'une solution $\rho(t)$ quelle que soit $f(t)$. Il faut que certaines conditions soient satisfaites, conditions déterminées par E. PICARD et G. LAURICELLA ([2]).

Entre la recherche de la fonction U satisfaisant à la condition (8') avec $\alpha(\lambda)$ continue pour $\lambda = 1$ et celui où $\alpha(\lambda)$ a un saut au point $\lambda = 1$, il y a la même analogie qu'entre la résolution du problème de DIRICHLET par un potentiel de simple couche et la résolution par un potentiel de double couche.

Le problème envisagé au § 3 est un cas particulier de celui-ci, car dans ce problème nous n'avons fait aucune hypothèse sur l'allure de $\alpha(\lambda)$ au point $\lambda = 1$, et on a vu les difficultés qui se présentent même dans ce cas, le plus simple de l'espèce.

8. La condition initiale (8') que doit remplir une fonction harmonique U dans un domaine $D + C$, couvert une seule fois par les courbes d'une famille à un paramètre, n'est pas la plus générale du type des conditions initiales globales, comme nous l'avons d'ailleurs déjà dit. En effet, si l'on considère la condition initiale:

$$\int_0^1 \omega(t;\ \lambda) U_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) = f(t) \tag{22}$$

$\omega(t;\ \lambda)$ étant une fonction continue par rapport à t, on voit qu'elle est aussi linéaire par rapport aux valeurs de U dans $D + C$, et est plus générale que la condition (8'). On suppose aussi que la fonction $\alpha(\lambda)$ a un saut à gauche pour $\lambda = 1$.

L'interprétation de la condition initiale (22) peut se faire de la même manière que pour la condition (8'): on groupe les valeurs de la fonction U dans D par les courbes C_λ, et on attribue à ces valeurs en chaque point de D un certain poids, poids qui varie dans cette condition non seulement d'une courbe à une autre, mais avec la position du point sur une même courbe. L'hypothèse faite sur $\alpha(\lambda)$ montre qu'on attribue un poids fini aux valeurs de U prises sur la frontière de D, tandis que pour les points intérieurs, sauf peut-être pour ceux situés sur un nombre fini de courbes C_λ, ce poids est infiniment petit.

La fonction distributrice des poids sur la frontière du domaine, joue un rôle important dans ce problème, comme on va le voir tout de suite.

([2]) Voir dans: *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles* de M. E. PICARD. Gauthier-Villars, 1927, à la pag. 52 et suiv., un exemple de résolution du problème de DIRICHLET par un potentiel de simple couche.

9. Pour déterminer U satisfaisant à la condition (22), on peut le chercher aussi sous la forme d'un potentiel de double couche:

$$U = \int_0^1 \rho(\tau) \frac{\cos\varphi}{r} d\tau.$$

En tenant compte des propriétés de ce potentiel, et du fait que $\alpha(\lambda)$ a un saut (égal à un) pour $\lambda = 1$, on trouve comme dans le problème précédent, que la densité $\rho(t)$ vérifie l'équation intégrale:

$$\omega(t;\ 1)\rho(t) + \int_0^1 \chi(t;\ \tau)\rho(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} f(t) \tag{23}$$

où le noyau a l'expression:

$$\chi(t;\ \tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \omega(t;\ \lambda) \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{\varphi_\lambda} d\alpha(\lambda). \tag{24}$$

Il y a deux cas à distinguer:

a) Supposons que $\omega(t;\ 1)$ garde un signe constant pour $0 \leq t \leq 1$, p. ex. $\omega(t;\ 1) > 0$. Alors, l'équation intégrale précédente se réduit facilement à une équation intégrale de seconde espèce et on a les mêmes conclusions qu'au § 5.

Par conséquent, lorsque le poids attribué aux valeurs frontières de U est fini et différent de zéro en chaque point de C, le problème posé par la condition (22) ne diffère pas essentiellement de celui posé par la condition (8').

b) Supposons que pour certaines valeurs de t, en nombre limité, la fonction $\omega(t;\ 1)$ s'annulle dans l'intervalle (0, 1). Alors l'équation (23) est une équation intégrale de troisième espèce.

Pour simplifier, considérons tout d'abord le cas où $\omega(t;\ 1)$ a un seul zéro simple dans l'intervalle (0, 1), pour $t = t_0$. Conformément à la théorie générale de l'équation de troisième espèce ([3]), on sait que l'équation (23) a une solution $\rho(t)$, fonction homographique d'une certaine constante arbitraire C. Cette solution admet en général le point $t = t_0$ pour pôle du premier ordre. Si l'on considère l'équation intégrale:

$$\omega(t;\ 1)\rho(t) + \mu\int_0^1 \chi(t;\ \tau)\rho(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} f(t)$$

([3]) É. PICARD, *Sur les équations intégrales de 3e espèce.* « Annales Sc. de l'École Normale supérieure », t. 28, pp. 459-472; et CH. PLATRIER, « Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. Paris », t. 154, p. 808; t. 156, p. 1825; t. 157, p- 28; t. 162, p. 118.

contenant un paramètre μ, si μ est racine d'une certaine équation $G(\mu) = 0$ indépendante de C, on a alors pour l'équation correspondante une solution holomorphe même au point $t = t_0$. Enfin, si μ est donné, p. ex. $\mu - 1$ comme dans le cas qui nous intéresse, on peut encore avoir une solution holomorphe si $f(t)$ a une certaine expression, que nous nous dispensons d'écrire.

Si l'ordre du zéro $t = t_0$ est > 1, ou si $\omega(t;\ 1)$ a plusieurs zéros dans l'intervalle $(0,\ 1)$, les conclusions sont analogues.

Par conséquent, si $\omega(t;\ 1)$ s'annulle en un point de la frontière, on a en général en ce point une densité infinie pour la distribution de masse sur C, et ce point est un point singulier pour U.

Pour nous rendre compte des difficultés que présente ce problème, remarquons que si dans la condition (22) on suppose $\alpha(\lambda)$ constant dans $(0,\ 1)$ sauf au point $\lambda = 1$, on a le problème de DIRICHLET, avec les données suivantes pour U_c: $\omega(t;\ 1) U_c = f(t)$. Par conséquent si $\omega(t;\ 1)$ s'annulle, on a des données singulières pour U sur C; même dans ce cas relativement simple, il est difficile de déterminer la nature de U dans D et dans les autres points de C. D'ailleurs, on verra ce fait plus bas, d'une manière plus précise.

Ce qui est à retenir, c'est le fait qu'on peut avoir, si $f(t)$ a une expression déterminée, des solution régulières dans $D + C$, conséquence de la théorie des équation intégrales de troisième espèce.

10. Nous avons démontré l'existence d'une fonction harmonique satisfaisant dans un domaine D à le condition globale (8'), en cherchant à exprimer cette fonction sous la forme d'un potentiel de double couche, et en prenant pour inconnue la densité de cette couche.

Mais on peut s'y prendre d'une manière toute différente, en prenant pour inconnue les valeurs sur la frontière du domaine de la fonction harmonique cherchée, c. à. d. la fonction à une variable U_c. Si ces valeurs sont trouvées, le problème se réduit à la résolution du problème de DIRICHLET.

Soit par conséquent la condition initiale (8'): $\int_0^1 U_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) = f(t)$, et prenons pour inconnue la fonction $U_c = \varphi(t)$. Grâce à $\varphi(t)$, on peut exprimer $U(M)$ en tout point du domaine D, par la formule bien connue:

$$U(M) = \frac{1}{2\pi} \int_c \varphi(\tau) \frac{dG}{dn}\, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \varphi(\tau) \frac{dG}{dn}\, d\tau \tag{25}$$

car τ est l'arc sur C. $G(M,\ P)$ est la fonction de GREEN de D correspondant au point M, $\frac{dG}{dn}$ la dérivée suivant la normale en P à C. Supposons M situé sur C_λ, c. à. d. ses coordonnées ayant les expressions (13). Multiplions par $d\alpha(\lambda)$ la relation (25) et intégrons de 0 à $1-0$. On obtient:

$$\int_0^{1\ 0} U_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{1-0} d\alpha(\lambda)\int_0^1 \varphi(\tau)\left(\frac{dG}{dn}\right)_{c_\lambda} d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \varphi(\tau)d\tau\int_0^{1-0}\left(\frac{dG}{dn}\right)_{c_\lambda} d\alpha(\lambda).$$

Mais dans l'hypothèse faite sur $\alpha(\lambda)$, on déduit de la relation (8') que:

$$\int_0^{1-0} U_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) = f(t) - U_c = f(t) - \varphi(t).$$

Si d'autre part nous posons:

$$\Gamma(t;\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{1-0}\left(\frac{dG}{dn}\right)_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) \tag{26}$$

on arrive pour $\varphi(t)$ à l'équation suivante:

$$\varphi(t) + \int_0^1 \Gamma(t;\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t) \tag{27}$$

qui est une équation intégrale de seconde espèce.

Lorsque $\alpha(\lambda)$ est constante dans $(0,\ 1-0)$, alors $\Gamma(t;\tau)\equiv 0$ et $\varphi(t) = f(t)$. L'équation (27) nous fournit $\varphi(t)$ toutes les fois que le problème est possible, et à l'aide de la formule (25) on a U.

Nous nous dispensons de tirer les conclusions qui se dégagent de l'équation (27). Remarquons que lorsque C_λ est une famille de cercles concentriques, C le cercle de rayon R, le noyau de l'équation intégrale peut se mettre sons la forme:

$$\Gamma(\omega,\ \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{R-0}\frac{R^2-\lambda^2}{R^2-2R\lambda\cos(\omega-\theta)+\lambda^2}\,d\alpha(\lambda).$$

Lorsque $\alpha(\lambda)$ est continue à gauche au point $\lambda = 1$, l'équation à laquelle satisfait $\varphi(t)$ est de première espèce. À l'aide de cette équation, on peut retrouver dans le cas de la famille des cercles considérés plus haut, les résultats des § 3 et 4.

Enfin, on trouve de la même manière, dans le cas de la condition initiale (22), que $\varphi(t)$ satisfait à l'équation intégrale:

$$\omega(t;1)\varphi(t) + \int_0^1 \mathcal{G}_\omega(t;\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t) \tag{28}$$

où

$$\mathcal{G}_\omega(t;\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{1-0} \omega(t;\lambda)\left(\frac{dG}{dn}\right)_{c_\lambda} d\alpha(\lambda).$$

Comme dans cette équation intégrale c'est toujours $\omega(t;1)$ qui joue le rôle fondamental, les conclusions du § 9 sont pleinement confirmées. Aux points où $\omega(t;1)$ s'annulle, la fonction harmonique cherchée a en général des valeurs infinies et on tombe sur un problème de DIRICHLET avec des conditions initiales singulières.

Cette méthode de résondre les problèmes posés par la condition (8′) ou (22) montre d'une manière évidente l'importance du problème de DIRICHLET, à la résolution duquel on peut réduire tous les problèmes de recherche d'une fonction harmonique satisfaisant aux conditions globales linéaires les plus générales.

11. Les problèmes qu'on a traités jusqu'ici peuvent être appelés, *problèmes intérieurs.* De la même manière, comme on peut se poser un problème de DIRICHLET extérieur, on peut considérer des conditions initiales globales pour le domaine extérieur à une courbe simple C.

On considère de la même manière une famille de courbes C_λ qui vont en se dilatant et telles que par chaque point du domaine extérieur il ne passe qu'une courbe de la famille, pour $\lambda = 0$ se réduisant à C et pour $\lambda = 1$ p. ex. se réduisant au point à l' ∞.

On cherche à déterminer une fonction harmonique dans le domaine extérieur et régulière même à l' ∞, satisfaisant à une condition globale de la forme:

$$\int_0^1 \omega(t:\lambda) U_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) = f(t)$$

$\alpha(\lambda)$ étant une fonction à variation bornée dans (0, 1) et ayant un saut à droite pour $\lambda = 0$. En prenant pour inconnue soit la densité d'une double couche étalée sur C, soient les valeurs U_c de U sur C, on arrive de la même manière que dans le cas du problème intérieur, à une équation intégrale dont la solution resout le problème.

12. Les problèmes que nous avons considérés dans les paragraphes précédents généralisent, de diverses manières, le problème di DIRICHLET. On peut chercher, dans la même voie, à généraliser le problème de NEUMANN, qui consiste dans la recherche d'une fonction harmonique u, telle que $\frac{du}{dn}$ se réduise à la frontière du domaine à des valeurs données.

Considérons toujours le cas de deux dimensions, le domaine D de frontière C, qui est une courbe simple, fermée, ayant en chaque point une normale déterminée. La famille de courbes C_λ jouit des mêmes propriétés que dans le problème précédent, chaque courbe de la famille ayant une normale bien déterminée en chaque point. Cela étant dit, nous cherchons une fonction harmonique dans $D + C$, satisfaisant à la condition:

$$\int_0^1 \left(\frac{du}{dn}\right)_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) = f(t) \tag{29}$$

$\left(\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dn}}\right)_{c_\lambda}$ *désignant la dérivée de* U *suivant la direction positive de la normale en* M *à la courbe* C_λ *qui passe par* M, $\alpha(\lambda)$ étant une fonction à variation bornée dans $(0, 1)$ ayant un saut à gauche (égal à un) pour $\lambda = 1$. En outre, comme pour $\lambda = 0$, C_0 se réduit à un point M_0, et par conséquent la direction suivant laquelle en ce point on dérive U n'est pas déterminée, pour que la condition (29) ne contienne pas d'indétermination, on suppose que $\alpha(\lambda)$ est continue et dérivable autour de $\lambda = 0$, c. à. d. que $d\alpha(\lambda) = \overline{\alpha'(\lambda)}d\lambda$, avec $\overline{\alpha'(0)} = 0$. Cherchons la fonction harmonique U qui satisfait à la condition (29) sous la forme d'un potentiel de simple couche étalée sur C:

$$U(M) = \int_0^1 \rho(\tau) \log \frac{1}{r}\, d\tau$$

où $r = MP$, P étant un point de C, et M un point de D.

En considérant M comme appartenant à C_λ, et en prenant la dérivée de $U(M)$ suivant la direction de la normale intérieure à C_λ, on trouve facilement que l'on a:

$$\left(\frac{dU}{dn}\right)_{c_\lambda} = \int_0^1 \rho(\tau) \frac{\cos \psi_\lambda}{r}\, d\tau$$

en désignant par ψ_λ l'angle de MP avec la normale en M à C_λ. Ponr $\lambda \to 1$, c. à. d. lorsque le point M tend vers un point de la courbe frontière, on sait que la dérivée suivant la normale à C, du potentiel de simple couche, présente une discontinuité. à savoir:

$$\left(\frac{du}{dn}\right)_{c-} = -\pi\rho(t) + \int_0^1 \rho(\tau) \frac{\cos \psi}{r}\, d\tau$$

car le point M tend vers le point $\tau = t$ de C; ψ désigne l'angle de la normale en $M(\tau = t)$ à C avec MP.

En tenant compte de ces faits, on voit que la densité $\rho(t)$ satisfait l'équation:

$$(30)\qquad \rho(t)-\int_0^1\Psi(t;\tau)\rho(\tau)d\tau+\frac{1}{\pi}f(t)=0$$

où le noyau est:

$$\Psi(t;\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\cos\psi\lambda}{r}\,d\alpha(\lambda).$$

On sait, qu'entre les noyaux des équations intégrales auxquelles on réduit la recherche de la densité de la double couche qui résout le problème de DIRICHLET et celle de la simple couche qui résout le problème de NEUMANN, il y a une relation remarquable, à savoir: l'équation intégrale adjointe de l'équation correspondant au problème de DIRICHLET extérieur, est justement l'équation qui donne la densité de la simple couche du problème de NEUMANN intérieur. Cette réciprocité ne se maintient plus dans les problèmes que nous avons considérés, même si la fonction déterminante $\alpha(\lambda)$ est la même dans les deux cas. Il suffit pour cela de comparer les expressions des noyaux correspondants $\Phi(t;\tau)$ et $\Psi(t;\tau)$.

Il n'est pas besoin de remarquer que même dans le cas de possibilité, la condition (29) ne détermine U, comme dans le problème de NEUMANN, qu'à une constante additive près.

13. Au lieu de chercher la fonction harmonique U satisfaisant à la condition (29), on aurait pu, comme au § 10. chercher à déterminer $\left(\frac{du}{dn}\right)_c$, et ramener ainsi le problème à la résolution du problème de NEUMANN. Soit $\left(\frac{du}{dn}\right)_c=\varphi(t)$. On sait que l'on a:

$$U(M)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^1 H(M;P)\varphi(\tau)d\tau+\int_0^1 U(P)d\tau$$

$H(M;P)$ étant la fonction de GREEN de seconde espèce (fonction caractéristique de NEUMANN) $P[x(\tau),\ y(\tau)]$ point de C, τ l'arc sur C. Par conséquent:

$$\left(\frac{dU}{dn}\right)_{c_\lambda}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{dH(M;P)}{dn_{c_\lambda}}\cdot\varphi(\tau)d\tau$$

et en multipliant par $d\alpha(\lambda)$ et en intégrant de 0 à $1-0$, on a:

$$(31)\qquad \varphi(t)-\int_0^1\mathcal{H}(t;\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t)$$

où

$$\mathcal{H}(t; \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{1-0} \frac{dH(M; P)}{dn_{c_\lambda}} \, d\alpha(\lambda).$$

Les conditions de possibilité peuvent être obtenues par l'équation (31).

14. La condition globale qui va suivre et qui généralise le problème de la chaleur, contient comme cas particulier toutes les conditions précédentes. On cherche à déterminer la fonction harmonique U, dans $D+C$, par la condition:

$$\int_0^1 \omega_1(t; \lambda) U_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) + \int_0^1 \omega_2(t; \lambda) \left(\frac{du}{dn}\right)_{c_\lambda} d\beta(\lambda) = f(t) \tag{32}$$

la fonction à variation bornée $\beta(\lambda)$ satisfaisant autour de $\lambda = 0$ aux propriétés précisées au § 12.

Si $\alpha(\lambda)$ a un saut pour $\lambda = 1$, on cherche U sous la forme d'un potentiel de double couche; si c'est $\beta(\lambda)$ qui a un saut à gauche au point $\lambda = 1$, c'est sous la forme d'un potentiel de simple couche qu'on cherchera U.

On arrive, dans un cas ou dans l'autre, à une équation intégrale de troisième espèce, (qui peut se réduire à une équation de seconde espèce si $\omega_1(t; 1)$ ou $\omega_2(t; 1)$ ne s'annulle pas sur C) que doit vérifier la densité du potentiel. Sur l'existence de la fonction U satisfaisant aux conditions (32), on a les mêmes conclusions qu'au § 9.

15. Revenons au problème général posé par la condition:

$$\int_0^1 U_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) = f(t). \tag{8'}$$

Supposons que les courbes C_λ et la fonction $\alpha(\lambda)$ soient telles que les équations intégrales (18) ou (27) aient des solutions uniques, bien déterminées, quelle que soit la fonction continue $f(t)$. Il en résulte que le problème homogène correspondant à $f(t) \equiv 0$ n'a d'autre solution que $U \equiv 0$ dans $D+C$.

Cherchons, dans ce cas, si l'on ne peut pas trouver une solution satisfaisant à la condition:

$$\int_0^1 U_{c_\lambda} d\alpha(\lambda) = 0 \tag{19}$$

non identiquement nulle dans $D+C$, mais qui en échange ait une singularité logarithmique en un point déterminé de D.

Ce sera l'analogue de la fonction de Green, à laquelle d'ailleurs elle devra se réduire pour l'expression particulière de $\alpha(\lambda)$, que nous avons plusieurs fois considérée.

Nous cherchons la solution en question sous la forme:

$$G_\alpha(M;\,P) = \log\frac{1}{MP} - g_\alpha(M;\,P)$$

M et P étant deux points de D, $g_\alpha(M;\,P)$ une fonction harmonique et réguliére dans D. Pour le point P nous allons choisir les coordonnées t et λ, c. à. d. que P est considéré comme appartenant à la courbe C_λ, et $M(a,\,b)$ est un point quelconque de D.

La condition (19) nous montre qu'on a à déterminer la fonction harmonique régulière $g_\alpha(M;\,P)$ par la condition:

$$\int_0^1 g_\alpha(M;\,P)d\alpha(\lambda) = \int_0^1 \log\frac{1}{r}\,d\alpha(\lambda) = h(t;\,a,\,b)$$

c. à. d. on a à déterminer $g_\alpha(M;\,P)$ par une condition tout à fait analogue à la condition (8').

Si la fonction $\alpha(\lambda)$ n'a pas des sauts pour $\lambda \nearrow 1$, alors, M étant un point de D, on peut voir que $h(t;\,a,\,b)$ est en général une fonction continue par rapport à t.

D'après les hypothèses que nous avons faites sur $\alpha(\lambda)$ et sur les courbes C_λ, il résulte que l'on a une solution unique $g_\alpha(M;\,P)$. et par conséquent la fonction $G_\alpha(M;\,P)$ satisfaisant à la condition (19) est unique.

Cette fonction peut rendre dans certains problèmes les mêmes services que la fonction de Green, notament dans la résolution de l'équation $\Delta u = f(x,\,y)$. avec la condition (19).

Mais nous nous bornons ici à considérer les conditions initiales du type global seulement pour les fonctions harmoniques, en nous contentant de les signaler pour les équations plus générales du type elliptique.

En conclusion, nous pouvons dire qu'il résulte des considérations précédentes que pour la détermination d'une fonction harmonique même par des conditions initiales globales, les valeurs de la fonction sur la frontière du domaine jouent un rôle capital. Pour que la solution puisse exister dans le cas général, il faut que l'apport de ces valeurs frontières dans les données soit sensible, et cela en tout point de la frontière.

Proiettività nello spazio hilbertiano.

Memoria di † GIUSEPPE VITALI (a Bologna) (*).

Sunto. - *Si fa l'analisi delle proiettività nello spazio hilbertiano riducendole a soli tre tipi aventi espressione analitica molto semplice.*

INTRODUZIONE

L'applicazione dell'Analisi Infinitesimale allo studio della Geometria ha dato luogo, come è noto, ad una lunga ed interessante fioritura di studi. La prima fra le più notevoli affermazioni di questi studi si ebbe nei risultati conseguiti da GAUSS sulle superficie ordinarie [1]. Due vaste pubblicazioni in nostra lingua stanno ad attestare la varietà e l'importanza dei risultati di più di un secolo di tali ricerche. La prima dovuta al BIANCHI [2] raccoglie i risultati di carattere prevalentemente metrico, la seconda dovuta al FUBINI e al CÈCH [3] rispecchia un indirizzo più moderno e si riferisce prevalentemente ad elementi aventi carattere proiettivo.

Parallelamente allo svolgimento di questi studi, in parte derivanti da essi, in parte dallo studio di questioni di carattere meccanico, si sono affacciati degli elementi quali la *curvatura*, i *parametri differenziali* ed altri

(*) Fra i lavori cui, con singolare fervore, attendeva il compianto GIUSEPPE VITALI nell'ultimo periodo della Sua laboriosa esistenza, una Memoria, dal titolo: *Sulla proiettività dello spazio hilbertiano*, era da Lui destinata agli « Annali di Matematica ». Per quanto la redazione non fosse stata da Lui interamente compiuta, pure manoscritti da Lui lasciati, e sopra tutto gli appunti di un corso di conferenze che Egli aveva tenuto presso l'Istituto matematico della R. Università di Bologna nell'anno 1930-31, redatti dalla Sua scolara Sig.na EMMA SENIGAGLIA e da Lui riveduti, hanno permesso a questa di darle la presente forma. La introduzione, premessa alla Memoria, era stata integralmente scritta dal compianto Maestro. Pubblicando questo lavoro postumo, la Redazione degli « Annali » intende di appagare un desiderio di uno Scienziato cui la matematica italiana deve un largo tributo di riconoscenza, e, nel tempo stesso, di rendere un doveroso omaggio alla di Lui memoria.

(1) C. F. GAUSS, *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

(2) BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale.* (Bologna, Zanichelli, 1923).

(3) FUBINI e CÈCH, *Geometria proiettiva differenziale.* (Bologna, Zanichelli, 1926).

simboli (GAUSS ([1]), LAMÉ ([4]), JACOBI ([5]), BELTRAMI ([6]), RIEMANN ([7]), CHRISTOFFEL ([8])) che attraverso la mente geniale di RICCI-CURBASTRO rientrano tutti in quel metodo potente di ricerca che è noto col nome di *Calcolo Differenziale Assoluto* ([9]), ([10]).

Benchè la magistrale memoria pubblicata dal RICCI e dal LEVI-CIVITA ([11]) non abbia valso a diffondere il senso della utilità di questo Calcolo, vi fu chi credette nell'opportunità di renderlo più vasto e potente, ed il nostro PASCAL in una grossa memoria ([12]) iniziò questa opera. Disgraziatamente rimase allora senza seguaci e solo nel 1923 ([13]) essa fu ripresa seriamente in esame, ma solo dopo che il Calcolo Assoluto del RICCI si era ampiamente affermato e dopo che l'attenzione su di esso era stata richiamata dalla teoria della Relatività.

Lo sviluppo recente del Calcolo Assoluto ed il suo perfezionamento è dovuto ad uno dei più notevoli risultati degli studi che ebbero inizio in principio di questo secolo, e che segnarono un nuovo indirizzo per l'analisi delle funzioni di variabili reali. Alludo alla sviluppabilità delle funzioni a quadrato sommabile in serie di funzioni di un sistema normale ed ortogonale chiuso, e conseguentemente alla considerazione dello spazio detto *hilbertiano*.

L'uso della conseguente rappresentazione funzionale e i più notevoli e recenti progressi del Calcolo Assoluto sono andati di pari passo.

Studi recenti (*) hanno mostrato che nelle ricerche geometriche, e anche in quelle che solo parzialmente si riducono a questioni geometriche, si pos-

([4]) LAMÈ, *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (pag. 79 et suiv.).

([5]) JACOBI, *Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids auf einer Ebene bei welcher die kleinsten Teile ähnlich bleiben.* [« Crelle's Journal », t. LIX, pag. 74 (1861)].

([6]) BELTRAMI, *Opere*, T. II, pag. 86 e *Sulla teorica generale dei parametri differenziali.* [« Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna », serie II, t. VIII (1869)].

([7]) RIEMANN, *Werke*, 2° Auf., pag. 254 e 384.

([8]) CHRISTOFFEL, *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades.* [« Crelle's Journal », T. LXX (1869)].

([9]) RICCI-CURBASTRO, *Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali.* [« Annali di Matematica pura ed applicata », Serie II, Tomo XIV (1886)].

([10]) RICCI-CURBASTRO, *Delle derivazioni covarianti e controvarianti.* [Studi editi dall'Universita di Padova, ecc. (1898)].

([11]) RICCI e LEVI-CIVITA, *Méthodes de Calcul différentiel Absolu.* [« Math. Annalen », Band. 54 (1901)].

([12]) PASCAL, *La teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque.* [« Memorie della R. Acc. dei Lincei » (1910)].

([13]) G. VITALI, *I fondamenti del calcolo assoluto generalizzato.* [« Giornale di Battaglini » Vol. LXI (1923)].

(*) Vedi Elenco bibliografico alla fine della Memoria.

sono trarre notevoli vantaggi dall'uso della rappresentazioue funzionale (il che consiste nel pensare immersa la figura nello spazio hilhertiano e quindi rappresentare i suoi punti con delle funzioni a quadrato sommabile).

Poichè io ritengo che l'uso della rappresentazione funzionale, specialmente se combinato col Calcolo Assoluto, sia destinato a dare nuovo impulso alle ricerche di geometria proiettiva differenziale accelerandole e rendendole più agevoli, ho creduto di esporre in poche conferenze ai miei scolari di Bologna una rapida Analisi delle proiettività nello spazio hilbertiano, avendo cura di ridurle a dei tipi di facile maneggio rappresentabili analiticamente in modo molto semplice.

Varii studi hanno già dimostrato quali vantaggi si possono trarre dalle nuove nozioni di calcolo differenziale assoluto e dalla rappresentazione funzionale nelle ricerche di carattere proiettivo-differenziale. Per questo basta ricordare la doppia estensione che nelle mie note *c)* e *d)* (*) ha avuto quella forma differenziale F_2 che il FUBINI ha segnalato per le V_2 dell' S_4 [14] e la possibilità raggiunta di scrivere in modo semplice le equazioni di certe quasi-asintotiche del BOMPIANI [15].

Ma affinchè gli studi in questo senso possano avere il loro pieno sviluppo è necessario che la teoria delle proiettività nello spazio hilbertiano sia posta su basi semplici e chiare; e a tale scopo è destinata la presente Memoria.

Negli studi che finora ho condotto sullo spazio hilbertiano [16], mi sono limitato a considerare la parte finita di tale spazio (elementi proprii). Ma analogamente a quanto si fa per gli spazi euclidei in relazione colla teoria della proiettività, si è reso necessario fin dal principio di introdurre anche per lo spazio hilbertiano gli elementi all'infinito (elementi improprii).

Continuando ad indicare con H la sola parte finita dello spazio hilbertiano, io indico con H' lo spazio completato coi punti all'infinito.

Precisate le nozioni di retta (propria od impropria) e di iperpiano (proprio od improprio) di H' dico che cosa si deve intendere per successione determinata di punti o di iperpiani (proprii od improprii) di H' e per *limite* di una tale successione.

(*) Vedi Elenco bibliografico alla fine della Memoria.

(14) G. FUBINI e ČECH. *Geometria proiettiva differenziale.* [Ed. N. Zanichelli, Bologna, Tomo II, pag. 632].

(15) V. la mia nota *b)*, pag. 428.

(16) G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano.* [N. Zanichelli, (1929)]. Questo libro sarà nel seguito della presente Memoria indicato con « G. H. »

Le proiettività negli spazi euclidei sono definite come corrispondenze biunivoche che godono delle seguenti proprietà:

A) Conservano le rette

B) Conservano gli iperspazi.

C) Conservano la continuità, cioè ad una successione determinata di punti fanno corrispondere una successione di punti che è determinata ed ha per limite il punto corrispondente al limite della prima.

Io assumo queste proprietà come definizione delle proiettività in H'.

Negli spazi euclidei le condizioni *B)* e *C)* sono conseguenze della *A)*. Sarà così anche per lo spazio H'?. Lascio questa questione aperta. Essa è certamente una questione interessante; ma, qualunque possa essere la ri. sposta, questa non avrà alcuna influenza sulla sostanza di ciò che espongo nel presente lavoro.

Definite le proiettività in H', è necessario trovare per esse una rappresentazione analitica che le renda facilmente maneggiabili.

Ritengo di aver raggiunto questo scopo dimostrando che ogni proiettività si può ottenere come prodotto di proiettività di certe tre classi che nel testo distinguo coi numeri I, II, III. Le proiettività della classe I (traslazioni) sono molto semplici.

La classe II è formata delle trasformazioni lineari omogenee (che naturalmente conservano l'origine di H'). Questa classe è interessante anche in sè, perchè conduce alla considerazione di certi sistemi di funzioni a quadrato sommabili che chiamo *quasi-cartesiani* e che hanno in comune coi sistemi cartesiani ([17]) le proprietà relative agli sviluppi in serie ([18]).

Questi quasi-cartesiani si presentano in modo molto naturale, ma sarebbe desiderabile uno studio sopra di essi per trovare un criterio che consenta di riconoscere a mezzo di operazioni eseguibili sulle funzioni date se queste costituiscano o no un sistema quasi-cartesiano.

Le proiettività delle classi I e II fanno corrispondere ad ogni punto proprio un punto proprio tanto in un verso quanto nell'altro. Questa proprietà non è goduta dalle proiettività della classe III, le quali del resto hanno una rappresentazione molto semplice che ricorda le proiettività sulle forme di prima specie.

Se io ho accennato ai vantaggi del metodo a cui mi riferisco, non ho voluto affermare che il metodo sia da preferirsi da chiunque. Ogni ricer-

([17]) « G. H. », pag. 72.

([18]) « G. H. », pagg. 49-102.

catore usi pure quei metodi che più si addicano alla sua « forma mentis » e a quelle attitudini che nella sua vita scientifica ha maggiormente coltivato: sarà questo un modo di ricercare del massimo rendimento. Ma è specialmente per i giovani che devono ancora formare le loro abitudini mentali che io segnalo questi metodi.

E, intendiamoci, non è per dare una nuova forma alla ricerca di risultati già noti che si deve pensare ai nuovi metodi, e ottenere estensioni banali di questi risultati, perchè mi sembra che nemmanco una maggiore semplicità può giustificare questo noioso e non gradito lavoro di Sisifo. Il metodo, se deve essere utile, deve essere diretto a ricerche di risultati nuovi, e se questi contengono come casi particolari casi conosciuti, la generalizzazione deve essere però impensata e non prima sospettata, ed una volta ottenuta deve poter gettare un nuovo sprazzo di luce in tutto un campo di questioni. G. V.

I. Lo spazio H'.

1. Analogamente a quanto si fa negli spazii euclidei, anche nello spazio hilbertiano conviene attribuire a tutte le rette parallele ad una medesima uno (ed uno solo) punto comune *all'infinito.*

DEF. 1. — L'insieme dei punti di H (spazio hilbertiano finora considerato nei miei lavori) e dei punti all'infinito delle rette di H, si chiamerà lo *spazio* H'. I punti di H si diranno i *punti proprii* di H'. I rimanenti punti di H' si diranno i suoi *punti improprii.*

DEF. 2. — L'origine di H [1] si dirà anche *l'origine* di H' e si continuerà ad indicarla con O.

2. Se f è un punto proprio di H' diverso da O, e se φ è un parametro normale [2] della retta che contiene i punti O ed f, si ha $f = k\varphi$, dove k è un conveniente numero reale finito e diverso da *zero.*

Se P è un punto improprio di H', se φ è un parametro normale delle rette che passano per P, il punto P può essere rappresentato senza equivoco con $\infty\,\varphi$.

Così ogni punto di H' diverso da O, è rappresentato da un'espressione $k\varphi$ dove φ è un parametro normale e k è un numero reale finito e diverso da

(1) « G. H. », pag. 72.
(2) « G. H. », pagg. 87 e 88.

zero, o *infinito*; (all'infinito (∞) non si attribuisce alcun segno, ossia si considera come un solo numero).

Vi sono due modi di tale rappresentazione di un punto di H' diverso da O, e, se si ha $f = k\varphi$ (con k finito) si ha anche $f = (-k)(-\varphi)$ e si ha inoltre $\infty\,\varphi = \infty\,(-\varphi)$.

Anche il punto O può essere rappresentato da un' espressione $h\varphi$, ma in tal caso $k = 0$ e φ può essere un qualunque parametro normale.

Si può aggiungere che ogni parametro (normale o no) individua un punto improprio, e cioè il punto all'infinito delle rette (necessariamente parallele fra loro) che hanno quel parametro.

3. DEF. 1. — Uno spazio euclideo di H (1) coi punti all'infinito delle rette di questo spazio euclideo, si dirà uno *spazio euclideo proprio* di H'. In particolare resta precisato che cosa si deve intendere per *retta propria* e per *piano proprio* di H'.

DEF. 2. — Si dirà *retta impropria* di H' l'insieme dei punti improprii di un piano proprio di H'.

È facile dimostrare il

TEOR. — Due rette (proprie od improprie) aventi in comune due punti distinti, coincidono.

4. DEF. 1. — L'insieme di tutti i punti improprii di H' si chiama l'*iperpiano improprio* di H'. Lo indicheremo con I_∞.

DEF. 2. — Se f è un punto proprio di H' e se φ è un parametro dato, l'insieme di tutti i punti (proprii ed improprii) delle rette che passano per f e sono ortogonali alle rette di parametro φ, si chiama *iperpiano proprio* di H' e lo si indicherà con $I(f;\ \varphi)$.

Se si stabilisce che, essendo φ un parametro normale, $f + \infty\,\psi = \infty\,\psi$, si può dire che $I(f;\ \varphi)$ è l'insieme di tutti i punti $f + k\psi$ (k numero reale finito o infinito) per cui $\int_g \psi\varphi\,dt = 0$.

Ogni punto finito di $I(f;\ \varphi)$ si può sempre scrivere $\int_g f\psi\,dt$ con $\int_g \psi\varphi\,dt = 0$.

Si possono dimostrare facilmente i seguenti

TEOR. I. — Una retta che passa per due punti di un iperpiano, appartiene completamente a questo iperpiano.

(1) « G. H. », pag. 85.

TEOR. II. — Ogni retta propria di $I(f;\ \varphi)$ è ortogonale ad ogni retta di parametro φ (1).

DEF. 3, — Una retta di parametro φ, si dice *perpendicolare* ad $I(f;\ \varphi)$.

TEOR. III. — Se f_1 è un punto proprio di $I(f;\ \varphi)$ si ha $I(f;\ \varphi) = I(f_1;\ \varphi)$ (2).

TEOR. IV. — Se k è un numero reale finito e $\neq 0$ si ha $I(f;\ \varphi) = I(f;\ k\varphi)$.

TEOR. V. — Tutti gli iperpiani che passano per uno stesso punto P hanno in comune il solo punto P (3).

TEOR. VI. — Tutti gli iperpiani che passano per una stessa retta hanno in comune solo i punti di questa retta (4).

TEOR. VII. — Se F è un punto proprio e se φ è un parametro *normale*, la perpendicolare ad $I(f;\ \varphi)$ passante per F incontra questo iperpiano nel punto

$$F_0 = F + \int_g [(f - F)\varphi dt] \cdot \varphi$$

e la distanza dei punti F ed F_0 (che diremo *distanza* di F dall'iperpiano) è uguale a

$$\int_g (f - F)\varphi dt \quad (5).$$

---

(1) Infatti basta indicare con $f + \psi$ ed $f + \vartheta$ due punti di una qualunque retta propria di $I(f;\ \varphi)$ con $\int_g \psi\varphi dt = 0$ e $\int_g \theta\varphi dt = 0$; la differenza dei due punti dà il parametro della retta, parametro ortogonale a φ. (Le note a piè di pagina, da questa in avanti, sono della sig.na E. SENIGAGLIA).

(2) Infatti sarà $f_1 = f + \vartheta$ ed un'altro punto di $I(f;\ \varphi)$, $F = f + \psi$ con $\int_g \theta\varphi dt = 0$ e $\int_g \psi\varphi dt = 0$. Onde $F = f_1 - \vartheta + \psi = f_1 + \omega$ con $\int_g \varphi\omega dt = 0$. Cioè F è un punto di $I(f_1;\ \varphi)$, ma per ipotesi, F era un punto di $I(f;\ \varphi)$, quindi è $I(f;\ \varphi) = I(f_1;\ \varphi)$.

(3) Infatti si vedrebbe facilmente che, dati due punti, è possibile trovare un iperpiano passante per l'uno e non per l'altro. Se dei due punti P e Q, P è proprio, l'iperpiano ortogonale alla PQ in P non contiene Q. Se P fosse infinito è evidente che non ci può essere altro punto proprio comune ai dati iperpiani, perchè tra questi c'è l'iperpiano improprio. Se gli iperpiani avessero comune anche il punto Q avrebbero comune la PQ su cui si trova un punto P' tale che le rette di punti all'infinito P e P' siano ortogonali. Un iperpiano proprio ortogonale alla direzione di P' passa per P e non per P'.

(4) Analogamente.

(5) Infatti è $F_0 = F + \lambda\varphi$. Troviamo λ osservando che F_0 è su $I(f;\ \varphi)$ e che quindi la retta di I, $f - F_0$ deve essere ortogonale a φ, cioè:

$$\int_g (f - F_0) \cdot \varphi dt = \int_g (f - F - \lambda\varphi) \cdot \varphi dt, \quad \text{da cui} \quad \int_g (f - F) \cdot \varphi dt = \lambda.$$

D'altra parte è

$$(F - F_0)^2 = \int_g (F - F_0) \cdot (F - F_0) dt = (F - F - \lambda\varphi)^2 = (\lambda\varphi)^2 = \lambda^2.$$

quindi

$$(F - F_0)^2 = \lambda = \int_g (f - F) \cdot \varphi) dt.$$

Giova inoltre notare che un iperpiano proprio, che non passa per l'origine, è individuato dalla proiezione ortogonale F del punto O sopra di esso, e lo si potrà indicare con $[F]$.

Si avrà dunque

$$J(f;\varphi) = \int_g [f\varphi\, dt]\cdot\varphi$$

ed inoltre

$$[F] = I(F; F).$$

5. È noto che cosa si intende col dire che una successione

(1) $$k_1,\ k_2, \dots,\ k_n, \dots$$

di numeri reali *finiti* è *determinata* ed ha per *limite* un numero *reale finito* k oppure il numero ∞.

Ora aggiungo le seguenti

DEF. 1. — Una successione (1) di numeri reali *finiti* od *uguali* ad ∞ si dirà *determinata* ed avente per *limite* un *numero reale finito* k se i termini di (1) uguali ad ∞ sono in numero finito e se i rimanenti formano una successione avente per limite k.

DEF. 2. — Una successione (1) di numeri reali *finiti* od *uguali* ad ∞ si dirà *determinata* ed avente per *limite* ∞, se i termini di (1) diversi da ∞ sono in numero finito oppure formano una successione avente per limite ∞.

6. Nel seguito diremo che un *punto proprio* ed un *punto improprio* di H' hanno fra loro *distanza* uguale ad ∞.

DEF. 1. — Una successione

(2) $$P_1,\ P_2, \dots,\ P_n, \dots$$

di punti (proprii od improprii) di H' si dirà *determinata* ed avente per *limite* un punto proprio P se la successione delle distanze dei punti (2) da P ha per limite lo *zero*.

Evidentemente *se* (2) *è determinata ed ha per limite un punto proprio* P, *i punti improprii di* (2) *devono essere in numero finito ed i rimanenti devono essere rappresentati da una successione di funzioni (a quadrato sommabile) convergente in media verso la funzione rappresentatrice di* P.

Si dimostrano facilmente i

TEOR. I. — Se le distanze dei punti di una successione (2) da un medesimo *punto proprio* P formano una successione *determinata* avente per limite ∞, anche le distanze dei punti (2) da un altro qualsiasi *punto proprio* Q formano una successione *determinata* avente per limite ∞.

TEOR. II. — Se (2) è una successione di punti le cui distanze da un *medesimo punto proprio* formano una successione *determinata* avente per limite ∞, e se esiste una *retta propria* r tale che gli *angoli acuti* che le rette, che uniscono *un punto proprio* P coi punti (2), formano con r tendono a *zero*, tendono anche a *zero gli angoli acuti* che formano con r le rette che uniscono un altro qualsiasi *punto proprio* Q coi punti (2).

DEF. 2. — Se (2) è una successione di punti di H' tale che le *distanze* dei punti (2) da un medesimo *punto proprio* P formino una successione determinata avente per limite ∞ e se esiste una *retta propria* r tale che gli angoli acuti che le rette che uniscono P coi punti (2) formano con r tendono a *zero*, si dice che la (2) è determinata e che ha per *limite il punto improprio* di r.

In nessun caso diverso da quelli considerati dalle definizioni precedenti una successione (2) sarà da considerarsi come determinata.

Risulta facilmente il

TEOR. III. — Una successione determinata ha un limite ed uno solo.

È pur vero e quasi intuitivo il

TEOR. IV. — Una successione determinata di punti di una medesima retta r (propria od impropria) ha per limite un punto di r.

Non sarebbe difficile dimostrare il

TEOR. V. — Condizione necessaria e sufficiente perchè una successione di punti (2) (proprii od improprii) sia determinata è che si possa porre $P_n = k_n \varphi_n$, in modo che la successione (1) sia determinata e che le φ_n siano parametri normali formanti una successione convergente in media verso un parametro φ (necessariamente normale), e quando ciò accade la (2) ha per limite $k\varphi$ dove k è il limite di (1).

7. TEOR. I. — Se

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \tag{3}$$

è una successione determinata di punti proprii avente per limite un punto proprio f e se

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \tag{4}$$

è una successione di parametri normali convergenti in media verso un parametro (normale) φ; se F_n è un punto di $I(f_n; \varphi_n)$ e se la successione

$$F_1, F_2, \dots, F_n, \dots \tag{5}$$

è determinata ed ha per limite un punto proprio F, il punto F appartiene ad $I(f; \varphi)$.

DIM. — Intanto è

$$\int_g (f_n - F_n)\varphi_n dt = 0.$$

Inoltre, poichè $f_n - F_n$ converge in media verso $f - F$, e φ_n converge in media verso φ, è [1]

$$\lim_{n\,\infty} \int_g (f_n - F_n)\varphi_n dt = \int_g (f - F)\varphi dt$$

e quindi

$$\int_g (f - F)\varphi dt = 0$$

il che prova che F appartiene ad $I(f; \varphi)$.

Il precedente teorema giustifica la seguente

DEF. 1. — Se (3) è una successione determinata di punti proprii avente per limite un punto proprio f, e se (4) è una successione di parametri normali convergente in media verso un parametro (normale) φ, si dice che la successione degli iperpiani

(6) $$I(f_1;\ \varphi_1),\ I(f_2;\ \varphi_2), \ldots,\ I(f_n;\ \varphi_n), \ldots$$

è determinata ed ha per *limite* l'iperpiano $I(f; \varphi)$

TEOR. II. — Se (6) è una successione di iperpiani, e se F è un punto proprio le cui distanze

$$d_1,\ d_2, \ldots,\ d_n, \ldots$$

da detti iperpiani tendono ad ∞, anche le distanze dei detti iperpiani da un altro punto proprio F_0 tendono ad ∞.

DIM. — Intanto per ipotesi (poichè i φ_n sono normali) è (n. 4, teor. VII)

$$\lim_{n=\infty} \left| \int_g (f_n - F)\varphi_n dt \right| = \infty.$$

Inoltre

$$\int_g (f_n - F_0)\varphi_n dt = \int_g (f_n - F)\varphi_n dt + \int_g (F - F_0)\varphi_n dt$$

e per la disuguaglianza di SCHWARZ

$$\int (F - F_0)\varphi_n dt \leq \sqrt{\int (F - F_0)^2 dt}$$

---

[1] « G. H. », pag. 81, cor..

dunque

$$\lim_{n=\infty} \left| \int_g (f_n - F_0)\varphi_n dt \right| = \infty.$$

Questo teorema giustifica la

DEF. 2. — Se le distanze da un punto proprio fisso degli iperpiani di una successione (6) tendono ad ∞, si dice che la (6) è *determinata* ed ha per *limite* I_∞.

DEE. 3. Se una successione di iperpiani proprii ed improprii è tale che la successione dei suoi iperpiani proprii sia determinata ed abbia per limite un iperpiano I, essa si dice pure *determinata* ed avente per *limite* I.

Se $I = I_\infty$ oppure se, essendo I un iperpiano proprio, gli iperpiani improprii contenuti nella data successione sono in numero finito, si dice pure determinata ed avente per limite I_∞ una successione di iperpiani contenente solo un numero finito di iperpiani proprii.

II.

1. TEOR. — Se (3) è una successione determinata di punti di H' avente per limite un *punto proprio* f, se

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ldots, \ \lambda_n, \ldots$$

è una successione determinata di numeri avente per limite un *numero finito* λ, la successione di punti

$$\lambda_1 f_1, \ \lambda_2 f_2, \ldots, \ \lambda_n f_n, \ldots$$

è determinata ed ha per limite λf.

DIM. — Intanto gli n per cui f_n è improprio, o λ_n è infinito, sono in numero finito, per gli altri n si ha:

$$\int_g (\lambda_n f_n - \lambda f)^2 dt = \lambda_n^2 \int_g f_n^2 dt - 2\lambda\lambda_n \int_g f f_n dt + \lambda^2 \int_g f^2 dt$$

e poichè

$$\lim_{n=\infty} \int_g f_n^2 dt = \int_g f^2 dt \ \text{(1)}$$

e

$$\lim_{n=\infty} \int_g f f_n dt = \int_g f^2 dt \ \text{(2)}$$

(1) « G. H. », pag. 80, teor. 1.
(2) « G. H. », pag. 59, teor. 3.

si ha

$$\lim_{n\,\infty} \int_g (\lambda_n f_n - \lambda f)^2 dt = \lambda^2 \int_g f^2 dt - 2\lambda^2 \int_g f^2 dt + \lambda^2 \int_g f^2 dt = 0.$$

COR. — Se i punti (3) ed f del teorema precedente sono diversi da O e se d_n e d sono le loro distanze dall'origine, la successione

$$\frac{f_1}{d_1}, \frac{f_2}{d_2}, \ldots, \frac{f_n}{d_n}, \ldots$$

è determinata ed ha per limite $\frac{f}{d}$.

2. DEF. — Si chiama *biortogonale* un doppio sistema di funzioni

(φ) $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$
(ψ) $$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$$
tale che

$$\int_g \varphi_h \psi_k dt = \begin{cases} 1, & \text{se } h = k \\ 0, & \text{se } h \neq k. \end{cases}$$

Evidentemente se (φ) è un sistema cartesiano [1], il doppio sistema (φ), (φ) è biortogonale.

TEOR. — Se (φ) e (ψ) costituiscono un doppio sistema biortogonale, e se

(8) $$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

è una successione di costanti per cui la serie $\Sigma_n c_n \varphi_n$ e la serie $\Sigma_n c_n \psi_n$ convergano in media rispettivamente verso delle funzioni φ e ψ, si ha

$$c_n = \int_g \varphi_n \psi dt = \int_g \psi_n \varphi dt \text{ [2]}$$

e

$$\Sigma c_n^2 = \int_g \varphi\psi dt \text{ [3]}$$

e quindi la serie $\Sigma_n c_n^2$ converge.

3. Ognuno dei sistemi di un doppio sistema biortogonale (φ) e (ψ) si dice *quasi cartesiano* ed entrambi si dicono fra loro *coniugati* se, condizione necessaria e sufficiente perchè una qualunque delle serie $\Sigma_n c_n \varphi_n$ e $\Sigma_n c_n \psi_n$ converga in media, è che la serie $\Sigma_n c_n^2$ converga, e se inoltre per qualsiasi

(1) « G. H. ». pag. 72. def. 2.
(2) « G. H. ». pag. 59, teor. 3.
(3) Moltiplicando la $\Sigma_n c_n \varphi_n$ per ψ ed applicando il teor. del n. 3 di pag. 59 di « G. H. ».

funzione f a quadrato sommabile esistono due successioni di costanti (8) e

(9) $$d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$$

per cui la serie

$$\Sigma_n c_n \varphi_n$$

e la serie

$$\Sigma_n d_n \psi_n$$

convergano in media verso la funzione f.

Evidentemente allora si avrà

$$c_n = \int_g f\psi_n dt \quad \text{e} \quad d_n = \int_g f\varphi_n dt.$$

Dunque per provare che un doppio sistema biortogonale è costituito da due quasi cartesiani coniugati, bisogna provare per ciascuno dei due sistemi le seguenti tre cose:

indicando con

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

uno qualunque dei due sistemi:

1) Se le (8) sono tali per cui $\Sigma_n c_n f_n$ converga in media, la $\Sigma_n c_n^2$ converge.

2) Se le (8) sono tali per cui $\Sigma_n c_n^2$ converge, la $\Sigma_n c_n f_n$ converge in media.

3) Se f è una funzione a quadrato sommabile, esiste una successione (8) per cui $\Sigma_n c_n f_n$ converge in media verso f.

4. Si ha subito che *un sistema cartesiano è un sistema quasi cartesiano coniugato di sè stesso.*

III. **Proiettività.**

1. Se S indica una corrispondenza biunivoca tra i punti di due H' (che indicherò per distinguerli con H_1 ed H_2 anche quando li penserò sovrapposti): rappresenteremo con S_{12} il passaggio che essa stabilisce da H_1 ad H_2 e con S_{21} il passaggio inverso (da H_2 ad H_1).

DEF. — Una corrispondenza biunivoca tra due H' si dirà *proiettività* se ogni S_{ij} $(i \neq j)$ soddisfa alle seguenti condizioni:

a) a punti di un iperpiano di H_i fa corrispondere punti che appartengono ad un medesimo iperpiano di H_j.

(Per questa proprietà i punti corrispondenti a tutti i punti di un iperpiano dell'uno dei due H' riempiono un iperpiano dell'altro. Due tali iperpiani si diranno *corrispondenti* e la S determina una corrispondenza biunivoca tra gli iperpiani dei due H');

b) a punti di una successione determinata sopra H_i fa corrispondere punti di H_j formanti una successione determinata avente per limite il punto corrispondente al limite della prima successione;

c) ad iperpiani di una successione determinata sopra H_i fa corrispondere iperpiani di H_j formanti una successione determinata avente per limite l'iperpiano corrispondente al limite della prima successione.

2. OSS. — Se una corrispondenza biunivoca S tra due H' è tale che la definizione dell' S_{12} sia analoga a quella dell' S_{21}, per dimostrare che S è una proiettività basterà provare che le condizioni *a), b), c)* della precedente definizione sono soddisfatte dall' S_{12}.

3. TEOR. — Se S fa corrispondere ad ogni punto $\infty\varphi$ di H_1 il punto $\infty\varphi$ di H_2 e ad ogni punto proprio f di H_1, il punto $f+\xi$ di H_2, ξ essendo una funzione non generalmente nulla a quadrato sommabile fissa, la S è una proiettività.

DIM. — Se indichiamo con $T(\xi)$ la S_{12}, la S_{21} è data da $T(-\xi)$. Consegue che la S è una corrispondenza biunivoca e che essa sarà una proiettività se la S_{12} soddisfa alle condizioni *a), b), c)*:

a) La S_{12} fa corrispondere all' I_∞ di H_1, l' I_∞ di H_2 ed ai punti dell' $I(f;\ \varphi)$ di H_1, i punti dell' $I(f+\xi;\ \varphi)$ di H_2 (1).

b) Si vede poi facilmente che ad una successione determinata di punti di H_1 avente per limite un punto proprio f_0 corrisponde in H_2 una successione determinata avente per limite $f_0+\xi$ e che ad una successione determinata di punti di H_1 avente per limite $\infty\varphi$, corrisponde in H_2 una successione determinata di punti avente per limite $\infty\varphi$ (2).

---

(1) Che all' $I(f;\ \varphi)$ di H_1 corrisponda l' $I(f+\xi;\ \varphi)$ di H_2, è evidente per l'ipotesi posta che al punto f di H_1 corrisponde il punto $f+\xi$ di H_2. Infatti in conseguenza di ciò si ha che presi i due punti f ed F di H_1 ed i due corrispondenti di H_2, $f+\xi$ ed $F+\xi$, alla retta di H_1 di parametro $f-F$ corrisponde la retta di H_2 di parametro $f+\xi-F-\xi=f-F$. Quindi all'insieme di tutte le rette di H_1 per f ortogonali alle rette di parametro φ, corrisponde l'insieme di tutte le rette di H_2 per $f+\xi$, ortogonali alle rette di parametro φ.

(2) Infatti una successione di punti di H_1 sarà determinata ed avrà per limite il punto proprio f_0 se i termini della successione uguali ad ∞ sono in numero finito e se i rimanenti formano una successione avente per limite f_0 cioè $\lim\limits_{n\to\infty}\int_g (f_n-f_0)^2dt=0$. D'altra parte, per ipotesi, sono punti impropri di H_2 solo i corrispondenti ai punti impropri di H_1, quindi se questi erano in numero finito, anche i punti impropri di H_2 sono in numero finito. Inoltre, sempre per ipotesi, ad f corrisponde $f+\xi$, onde la successione di punti di H_2 (corrispondente a quella considerata in H_1) è determinata ed ha per limite $f+\xi$.

c) È pure facile vedere che se una successione di iperpiani di H_1 è determinata ed ha per limite $I(f;\ \varphi)$, anche la corrispondente in H_2 è determinata ed ha per limite $I(f+\xi;\ \varphi)$ [1].

4. DEF. 1. — Una proiettività della specie considerata nel teor. prec. si dirà di *I classe.*

DEF. 2. — Diremo di *I categoria* una proiettività fra due H' che faccia corrispondere all' I_∞ dell' uno l' I_∞ dell' altro. Le rimanenti si diranno di *II categoria.*

Evidentemente una proiettività di classe I è di I categoria.

DEF. 3. — Una proiettività di I categoria che fa corrispondere all' origine, l' origine, si dirà di *II classe.*

5. TEOR. — Una proiettività S di I categoria che non sia nè di I, nè di II classe, vale il prodotto di una proiettività di I classe e di una di II classe.

DIM. — Supponiamo che S porti l' origine di H_2 nel punto necessariamente proprio ξ di H_1. Consideriamo un terzo H' che indicheremo con H_3. Sia S_1 la proiettività di I classe fra H_2 ed H_3 che porta ogni punto proprio f di H_1, nel punto $f-\xi$ di H_3. La corrispondenza S_2 fra H_3 ed H_2 che fa corrispondere i punti di questi due spazii che nelle S_1 ed S corrispondono ad un medesimo punto di H_1 è pure una proiettività di I categoria, ma essa fa corrispondere all' origine l' origine perchè tanto la S_1 come la S fanno corrispondere al punto ξ di H_1, l' origine dell' altro spazio.

Dunque S_2 è di II classe. La S è il prodotto di S_1 e di S_2 ed il teor. è dimostrato.

6. TEOR. — La corrispondenza S che fa corrispondere ad ogni punto $k\varphi$ di H_1 il punto $h\varphi$ di H_2, per cui

$$h=\frac{ak}{b-k\int_g \varphi\psi dt},$$

dove a e b sono due *numeri reali finiti e diversi da zero* e ψ è un parametro normale, è una proiettività.

---

[1] Così per esempio una successione di iperpiani di H_1 passanti per il punto f $I(f;\ \varphi_1)$, $I(f;\ \varphi_2),\ldots,$ $I(f;\ \varphi_n),\ldots$ è determinata ed ha per limite $I(f;\ \varphi)$, se $\varphi_1,\ \varphi_2,\ldots,\ \varphi_n,\ldots$ è una successione di parametri normali convergenti in media verso il parametro φ.

Per ipotesi a f corrisponde $f+\xi$, onde alla precedente successione di H_1, corrisponde in H_2 la successione $I(f+\xi;\ \varphi_1)$, $I(f+\xi;\ \varphi_2),\ldots,$ $I(f+\xi;\ \varphi_n),\ldots$ che è determinata ed ha per limite $I(f+\xi;\ \varphi)$.

$$\left[\text{Chiamando } k\varphi = f,\ h\varphi = F \text{ sarebbe } F = \frac{af}{b - \int_g f\psi\, dt}\right].$$

DIM. — Intanto è evidente che, dato il parametro normale φ e il numero reale k (finito ed infinito) resta determinato h $\left(\text{per } k = \infty \text{ si ha } h = \frac{-a}{\int_g \varphi\psi\, dt}\right.$ e quindi sarà $h = \infty$ se $\int_g \varphi\psi\, dt = 0$. Per $k = \frac{b}{\int_g \varphi\psi\, dt}$ è $\left. h = \infty\right)$. Così dato il punto $k\varphi$ di H_1 è determinato il corrispondente $h\varphi$ di H_2.

Dato il punto $h\varphi$ di H_2, è poi determinato in modo unico il corrispondente $k\varphi$ di H_1; per questo è

$$k = \frac{bh}{a + h\int_g \varphi\psi\, dt}.$$

Consegue che se indichiamo la S_{12} con (a, b, ψ), la S_{21} sarà data da $(b, a, -\psi)$.

Consegue che S è una corrispondenza biunivoca e che essa sarà una proiettività se la S_{12} soddisfa alle condizioni *a), b), c)*:

a) 1]. Ad I_∞ di H_1 corrisponde $I(-a\psi; \psi)$ di H_2 perchè ad $\infty\,\varphi$ di H_1 corrisponde il punto $F = \frac{-a\varphi}{\int_g \varphi\psi\, dt}$ di H_2, e in particolare ad $\infty\,\psi$ di H_1 il punto $F_0 = -a\psi$ di H_2, ed infine $F - F_0 = a\psi - \frac{a\varphi}{\int_g \varphi\psi\, dt}$ è ortogonale a ψ (1).

2]. A $I(O; \xi)$ di H_1 corrisponde l' $I(O; \xi)$ di H_2 (2).

3]. Ad $I(b\psi; \psi)$ di H_1 corrisponde l' I_∞ di H_2 (3).

---

(1) Come si verifica subito moltiplicando per ψ e integrando.

(2) Infatti per $k = 0$ è $h = 0$, cioè all'origine 0φ di H_1 corrisponde l'origine 0φ di H_2; inoltre ad ogni punto $k\varphi$ con $\int_g \varphi\xi dt = 0$ corrisponde il punto $h\varphi$ con $\int_g \varphi\xi dt = 0$, quindi ad ogni punto in $I(0; \xi)$ di H_1 corrisponde un punto in $I(0; \xi)$ di H_2.

(3) Un punto generico di $I(b\psi; \psi)$ è infatti della forma $f = b\psi + \lambda\xi$ con $\int_g \xi\psi dt = 0$, o se si vuole $k\varphi = f = b\psi + \lambda\xi$. Il corrispondente F di f in H_2 è:

$$F = h\varphi = \frac{af}{b - \int_g f\psi dt} = \frac{a(b\psi + \lambda\xi)}{b - b\int_g \psi^2 dt} = \frac{a(b\psi + \lambda\xi)}{b - b} \text{ cioè } h = \infty.$$

Dunque il corrispondente di $I(b\psi; \psi)$ è I_∞.

4]. In generale ad $I(f;\,\psi)$ di H_1 per $f = k\varphi$, con k finito e diverso da zero, corrisponde in H_2 l' $I(h\varphi;\,\psi)$ con h finito e diverso da zero.

5]. Consideriamo ora l'iperpiano $I(f;\,\xi)$ di H_1 diverso da quelli finora considerati. Esso non passerà per l'origine, il che porta $\int_g f\xi dt \neq 0$ (1) e conterrà almeno un punto proprio diverso da O (che supporremo sia addirittura f) che ha per corrispondente in H_2 un punto proprio F (2).

Dico che ad $I(f;\,\xi)$ corrisponde lo $I(F;\,\zeta)$ dove

$$(1) \qquad \zeta = \psi - \frac{b\xi}{\int_g f\xi\, dt}.$$

Infatti, se f_1 è un altro punto di $I(f;\,\xi)$, e se F_1 è il suo corrispondente (finito od infinito) si avranno le relazioni

$$(2) \qquad F = \frac{af}{b - \int_g f\psi\, dt}; \quad F_1 = \frac{af_1}{b - \int_g f_1\psi\, dt}; \quad \int_g (f - f_1)\xi dt = 0.$$

Ora se F_1 è improprio esso è individuato dal parametro f_1 e si ha

$$\int_g f_1\zeta dt = \int_g f_1\psi dt - \frac{b\int_g f_1\xi dt}{\int_g f\xi dt} = b - b = 0$$

perchè per essere improprio il punto F_1 è $b = \int_g f_1\psi dt$ e per la terza delle (2) è $\int_g f\xi dt = \int_g f_1\xi dt.$

Dunque F_1 appartiene ad $I(F;\,\zeta)$. Se poi F_1 è proprio, si ha

$$\int_g (F - F_1)\zeta dt = \lambda\int_g [b(f - f_1) - (f\int_g f_1\psi dt - f_1\int_g f\psi dt)]\zeta dt$$

---

(1) Infatti se fosse $\int_g f\xi dt = 0$ sarebbe $\int_g (f - 0)\xi dt = 0$ e l'origine apparterrebbe ad $I(f;\,\xi)$ onde si ricadrebbe in uno dei casi precedenti.

(2) Infatti ad un punto $f = k\varphi$ proprio e diverso da 0 di H_1, corrisponde un punto $h\varphi$ di H_2. Non può essere $h = 0$ perchè sappiamo già che in tal caso dovrebbe aversi anche $k = 0$. Potrebbe essere $h = \infty$ e allora sarebbe $k = \dfrac{b}{\int_g \varphi\psi dt}$. È impossibile che tutti i parametri contenuti in $I(f;\,\xi)$ siano ortogonali a ψ, perchè allora lo stesso iperpiano si potrebbe scrivere $I(f;\,\psi)$ e si ricadrebbe nel caso precedente 4].

Se poi fosse $\varphi = \psi$ si ricadrebbe nel caso precedente 3].

dove

$$\lambda = \frac{a}{(b - \int_g f\psi dt)(b - \int_g f_1\psi dt)}.$$

Ma per la (1) e per la terza delle (2) è

$$\int_g (f - f_1)\zeta dt = \int_g (f - f_1)\psi dt,$$

e inoltre

$$\int_g [f\int_g f_1\psi dt - f_1\int_g f\psi dt]\zeta dt = [\int_g f_1\xi dt\int_g f\psi dt - \int_g f\xi dt\int_g f_1\psi dt]\frac{b}{\int_g f\xi dt} = b\int_g (f - f_1)\psi dt,$$

e si deduce che

$$\int_g (F - F_1)\zeta dt = 0$$

ed infine ancora che il punto F_1 appartiene ad $I(F;\ \zeta)$.

b) Sia

$$f_1,\ f_2, \ldots,\ f_n, \ldots$$

una successione determinata di punti di H_1 avente per limite il punto f. La successione

$$F_1,\ F_2, \ldots,\ F_n, \ldots$$

corrispondente in H_2 sarà tale che

$$F_n = \frac{af_n}{b - \int_g f_n\psi dt}$$

e se la successione degli f_n e quella degli F_n hanno limiti proprii, si vede che (v. § 2, n. 1 teor.) la successione degli F_n è determinata ed ha per limite

$$F = \frac{af}{b - \int_g f\psi dt}.$$

Alle stesse conclusioni si arriverebbe considerando i casi rimanenti [1].

---

[1] Se il limite f è uguale a $\frac{b\varphi}{\int_g \varphi\psi dt}$ si ha corrispondentemente $F = \infty\,\varphi$.

Se poi il limite f è uguale a $\infty\,\varphi$, si ha corrispondentemente $F = \frac{-a\varphi}{\int_g \varphi\psi dt}$ e come caso particolare, se gli f_n ed f sono tutti punti impropri, si ha

$$F_n = \frac{-a\varphi_n}{\int_g \varphi_n\psi dt} \quad \text{ed} \quad F = \frac{-a\varphi}{\int_g \varphi\psi dt}.$$

c) Consideriamo una successione di iperpiani non passanti per O

$$I(f_1;\ \varphi_1),\ I(f_2;\ \varphi_2), \ldots,\ I(f_n;\ \varphi_n), \ldots$$

colla successione delle f_n convergente in media verso f e colla successione delle φ_n che supporremo normali e convergenti in media verso la funzione normale φ.

Gli $I(f_n;\ \varphi_n)$ hanno per limite $I(f;\ \varphi)$ non passante per O.

I punti F_n corrispondenti agli f_n formano una successione determinata. Supponiamo che abbia un limite finito F.

I trasformati dei nostri iperpiani sono (v. § 3, n. 6 *a*) 5], pag. 17)

$$I\left(F_n;\ \psi - \frac{b\varphi_n}{\int\limits_g f_n\varphi_n\,dt}\right)$$

e hanno come limite

$$I\left(F;\ \psi - \frac{b\varphi}{\int\limits_g f\varphi\,dt}\right).$$

Si tratteranno ugualmente i rimanenti casi (¹).

DEF. — Una proiettività della specie considerata nel teorema precedente si dirà di *classe III.*

7. TEOR. — Una proiettività S di II categoria, che non sia di classe III vale il prodotto di una proiettività di I categoria e di una di classe III.

DIM. — Supponiamo che la S porti l' I_∞ di H_1 nell' $I(f;\ \psi)$ di H_2 (ψ normale), sarà $I(f;\ \psi) = I(\alpha\psi;\ \psi)$, dove $\alpha = \int\limits_g f\psi dt$ (²).

Consideriamo ora un terzo H' che indicheremo con H_3 e denotiamo con S_2 la proiettività di classe III che porta i punti $k\varphi$ di H_3, nei punti $h\varphi$ di H_2 con $h = \dfrac{-\alpha k}{b - k\int\limits_g \varphi\psi\,dt}$.

(¹) Se il limite degli $I(f_n;\ \varphi_n)$ di H_1 è $I(0;\ \xi)$ corrispondentemente in H_2 l'iperpiano limite è $I(0;\ \xi)$ (vedi § 3, n. 6, *a*) 2], pag. 16). Se il limite degli $I(f_n;\ \varphi_n)$ di H_1 è I_∞, il corrispondente iperpiano limite in H_2 è $I(-\alpha\psi;\ \psi)$ (vedi § 3, n. 6 *a*) 1], pag. 16). Se il limite degli $I(f_n;\ \varphi_n)$ di H_1 è $I(b\psi;\ \psi)$, il corrispondente iperpiano limite in H_2 è I_∞ (vedi § 3, n. 6 *a*], pag. 16). Se il limite degli $I(f_n;\ \varphi_n)$ di H_1 è $I(f;\ \psi)$ con $f = k\varphi$ dove k è finito e $\neq 0$, corrispondentemente in H_2 l'iperpiano limite è $I(F;\ \psi)$ con $F = h\varphi$ dove h è finito e $\neq 0$ (vedi § 3, n. 6 *a*) 4], pag. 17).

(²) Infatti è $\int\limits_g (\alpha\psi - f)\psi dt = 0$.

La S_2 trasforma l' I_∞ di H_3 nell' $I(\alpha\psi;\ \psi)$ di H_2.

Sia poi S_1 la proiettività tra H_1 ed H_2 che fa corrispondere in questi i punti che nelle S ed S_2 corrispondono ad un medesimo punto di H_2. Evidentemente la S_1 è di I categoria e, poichè la S è il prodotto delle S_1 ed S_2, il teorema è dimostrato.

Combinando questo teorema con quello del n. 5 si vede che ogni proiettività si può scomporre in un prodotto di non più di 3 fattori appartenenti alle classi I, II, III.

8. Le proiettività delle classi I e III hanno struttura abbastanza semplice. Passerò ora ad analizzare quelle di classe II.

Sia

$$(\alpha) \qquad \begin{matrix} \varphi_1, & \varphi_2, \dots, & \varphi_n, \dots \\ \xi_1, & \xi_2, \dots, & \xi_n, \dots \end{matrix}$$

un doppio sistema di quasi cartesiani coniugati in H_1 e

$$(\beta) \qquad \begin{matrix} \psi_1, & \psi_2, \dots, & \psi_n, \dots \\ \zeta_1, & \zeta_2, \dots, & \zeta_n, \dots \end{matrix}$$

un doppio sistema di quasi cartesiani coniugati in H_2.

Se f è un punto proprio di H_1 sarà:

$$f \equiv \Sigma_n c_n \varphi_n \text{ (1)},$$

dove le c_n sono costanti tali per cui $\Sigma_n c_n^2$ sia convergente. Allora $\Sigma c_n \psi_n$ converge in media verso *una* funzione F.

Facciamo corrispondere ad ogni punto proprio f di H_1 il punto proprio F (ottenuto nel modo sopraddetto) di H_2, ed al punto improprio della retta Of, il punto improprio della retta OF. Questa corrispondenza è una proiettività.

Difatti essa è manifestamente biunivoca, inoltre all' I_∞ di H_1 fa corrispondere l' I_∞ di H_2, e all' $I(f;\ \varphi)$ di H_1 fa corrispondere l' $I(F;\ \psi)$ di H_2 dove $F \equiv \Sigma_n c_n \psi_n$ se $f \equiv \Sigma_n c_n \varphi_n$ e $\psi \equiv \Sigma_n d_n \zeta_n$ se $\varphi \equiv \Sigma_n d_n \zeta_n$.

Ciò si vede perchè se f_1 è un punto di $I(f;\ \varphi)$ e se F_1 è il corrispondente, se inoltre $f_1 \equiv \Sigma_n b_n \varphi_n$, si ha

$$f_1 - f \equiv \Sigma_n (b_n - c_n) \varphi_n \quad \text{ed} \quad F_1 - F \equiv \Sigma_n (b_n - c_n) \psi_n$$

ed inoltre

$$\int_g (f_1 - f)\varphi dt = \Sigma_n (b_n - c_n) dn \quad \text{e} \quad \int_g (F_1 - F)\psi dt = \Sigma_n (b_n - c_n) dn.$$

Ma il primo di questi integrali è nullo, quindi è nullo anche il secondo.

(1) Il segno $\equiv$ vale « converge in media verso ».

La proiettività da noi qui considerata è inoltre di classe II. Io dico che ogni proiettività di classe II si può generare in tal modo.

9. Sia S una proiettività di classe II tra H_1 ed H_2. Se f_1 ed f_2 sono due punti diversi di H_1 ed F_1 e F_2 i loro corrispondenti in H_2, le rette f_1f_2 ed F_1F_2 si corrispondono proiettivamente ([1]) e poichè in esse i punti all'infinito si corrispondono, esse sono simili ed al punto $f_1 + \lambda(f_2 - f_1)$ corrisponderà il punto $F_1 + \lambda(F_2 - F_1)$.

E poichè se è $f_1 = 0$, è anche $F_1 = 0$, al punto λf_2 corrisponderà il punto λF_2. Consegue che, qualunque sia f_1, al punto $a[f_1 + \lambda(f_2 - f_1)]$ corrisponderà il punto $a[F_1 + \lambda(F_2 - F_1)]$; e, per $\lambda = \frac{1}{2}$, ed $a = 2$ al punto $f_1 + f_2$ corrisponde il punto $F_1 + F_2$.

Consegue che se a e b sono due numeri reali e finiti, ad $af_1 + bf_2$ corrisponderà $aF_1 + bF_2$.

Più in generale, se $f_1, f_2, \dots, f_n$ sono n punti di H_1 e se $F_1, F_2, \dots, F_n$ sono i punti corrispondenti in H_2, ad $a_1f_1 + a_2f_2 + \dots + a_nf_n$ corrisponderà $a_1F_1 + a_2F_2 + \dots + a_nF_n$.

Consideriamo ora un doppio sistema di quasi cartesiani coniugati (α) in H_1 ed indichiamo con

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$$

i punti di H_2 corrispondenti ai punti

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

a mezzo della S. Sia poi f un punto proprio di H_1. Sarà $f \equiv \Sigma_n c_n \varphi_n$. Allora posto

$$f_n = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

si ha che la successione

$$(\gamma) \qquad f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

è una successione determinata di punti di H_1 avente per limite f.

Ma ai punti di (γ) corrispondono in H_2 i punti

$$F_n = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots + c_n\psi_n \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

e quindi i punti F_n formano una successione determinata avente per limite il punto F corrispondente ad f.

([1]) Infatti gli iperpiani passanti per una retta non hanno in comune che quella retta, onde in una proiettività a punti di una retta corrispondono punti di una retta.

E siccome ogni punto F di H_2 si può considerare come il corrispondente di un punto f di H_1, così per ogni punto F di H_2 esisterà una successione di costanti c_n per cui la serie $\Sigma_n c_n^2$ converga, in modo che la serie $\Sigma_n c_n \psi_n$ converga in media verso F.

È poi evidente che se $\Sigma_n c_n \psi_n$ converge in media verso una funzione F, la serie $\Sigma_n c_n^2$ è convergente, perchè la serie $\Sigma_n c_n \varphi_n$ dovrebbe convergere in media verso il corrispondente f in H_1 di F.

È poi evidente che i punti

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_{n-1}\varphi_{n-1} + c_{n+1}\varphi_{n+1} + \dots$$

dove le c_i sono delle costanti per cui converga la serie

$$c_1^2 + c_2^2 + \dots + c^2_{n-1} + c^2_{n+1} + \dots$$

formano l'iperpiano $I(O; \xi_n)$. Allora anche i corrispondenti formeranno in H_2 un iperpiano $I(O; \zeta_n)$, ossia esiste uno ed un solo parametro ζ_n ortogonale alle $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}, \psi_{n+1}, \dots$.

Le ψ_n e le ζ_n formano allora un doppio sistema (β) che evidentemente è biortogonale, se scelgo ζ_n tale che sia $\int_g \zeta_n \psi_n dt = 1$. Dico che (β) è un doppio sistema di quasi cartesiani coniugati.

Intanto abbiamo già visto che il primo di questi sistemi ha le proprietà richieste. Resta a provare che anche il secondo ha le stesse proprietà.

Consideriamo in H_1 l'iperpiano $I(O; \xi)$. Sarà $\xi \equiv \Sigma_n \gamma_n \xi_n$ dove le γ_n sono tali per cui la $\Sigma_n \gamma_n^2$ converge.

Poniamo

$$\vartheta_n = \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \dots + \gamma_n\xi_n. \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

Gli iperpiani $I(O; \vartheta_n)$ formano una successione determinata che ha per limite $I(O; \xi)$. I loro corrispondenti in H_2 sono gli $I(O; \tau_n)$ dove

$$\tau_n \equiv \frac{\gamma_1\zeta_1 + \gamma_2\zeta_2 + \dots + \gamma_n\zeta_n}{\rho_n} \quad \text{con} \quad \rho_n = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^2}.$$

E poichè questi formano una successione determinata, anche le τ_n formano una successione determinata che avrà un certo limite ζ, in guisa che $I(O; \zeta)$ sia corrispondente di $I(O; \xi)$. Quello che di queste considerazioni importa è che la serie $\frac{\Sigma_n \gamma_n \zeta_n}{\rho_n}$ converge in media se $\Sigma_n \gamma_n^2$ è convergente. Viceversa, se $\frac{\Sigma_n \gamma_n \zeta_n}{\rho_n}$ converge in media, risulta che convergerà in media anche la $\Sigma_n \gamma_n \xi_n$ e che la $\Sigma_n \gamma_n^2$ è convergente.

Così il teorema è pienamente dimostrato.

10. Possiamo dunque affermare che le proiettività fra due spazii H' si possono scomporre in proiettività di struttura molto semplice e facile a dominarsi.

ELENCO DEI LAVORI DEL PROF. VITALI E DELLA SUA SCUOLA RELATIVI ALLA GEOMETRIA DELLO SPAZIO HILBERTIANO

1) G. VITALI

a) - *I fondamenti del calcolo assoluto generalizzato.* [« Giornale di Mat. del Battaglini », vol. LXI, 1923, 14° della 3ª serie, pagg. 1-46].

b) - *Geometria nello spazio hilbertiano.* [« Atti del R. Ist. Veneto », 1927-28, T. LXXXVII, pagg. 349-428].

c) - *Forme differenziali a carattere proiettivo associate a certe varietà.* [Ib. ib., 1928-29. T. XXXVIII, pagg. 361-368].

d) - *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie.* [« Ann. de la Soc. Polonaise de Math. », T. VII, 1928, pagg. 43-67].

e) - *Sistemi principali di normali ad una varietà giacenti nel suo* σ_2. [Ib. ib., pagg. 243-258].

f) - *Sopra una derivazione covariante nel calcolo assoluto generalizzato.* [« Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », 1927, 2° sem., pagg. 201-206 e pagg. 278-282].

g) - *Sulle derivazioni covarianti nel calcolo assoluto generalizzato.* [Ib., 1929, 1° sem., pagg. 626-629].

h) - *Le identità di Bianchi per i simboli di Riemann nel calcolo assoluto generalizzato.* [Ib., 1929, 1° sem., pagg. 190-192].

i) - *Sulla curvatura delle varietà.* [« Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », 1928, VII, n. 4, pagg. 173-175].

k) - *Sui centri di curvatura delle geodetiche di una varietà.* [Ib. ib., pagg. 391-394].

l) - *Rapporti inattesi fra alcuni rami della matematica.* [« Atti Congresso internazionale dei matematici », Bologna, 1928, T. II, pagg. 299-302].

m) - *Sopra i problemi di massimo o di minimo riguardanti le varietà nello spazio hilbertiano.* [« Rend. del R. Ist. Lombardo », 1929, pagg. 127-137].

n) - *Sopra alcune involuzioni delle tangenti a una superficie.* [« Atti del R. Ist. Veneto », T. LXXXIX, 1929-30, pagg. 107-112].

o) - *Sulle equazioni secolari.* [« Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze », 18ª Riunione, 1929, vol. II, pagg. 3-5].

p) - *Saggio di ricerche geometrico-differenziali.* [« Atti del R. Ist. Veneto », T. LXXXIX, 1929-30, pagg. 379-381].

q) - *Nuovi contributi alla nozione di derivazione covariante,* con appendici di ALIPRANDI, BALDONI, LICENI, SACILOTTO. [« Rend. Semin. Mat. dell'Università di Padova », anno I, 1930, pagg. 46-72].

r) - *Evoluta (?) di una qualsiasi varietà dello spazio hilbertiano.* [« Annali di Matematica », serie IV, T. VIII, 1930, pagg. 161-172].

s) - *Determinazione delle superficie ad area minima nello spazio hilbertiano.* [« Rendic. Seminario Matematico dell'Università di Padova », anno I, 1930, pagg. 157-163].

t) - *Trentennio di pensiero matematico.* [« Atti della Società italiana per il Progresso delle Scienze », 19ª Riunione, 1930, vol. I, pagg. 315-327].

u) - *Alcuni elementi di Meccanica negli spazi curvi.* [« Annali di Matematica », serie IV, T. IX, pagg. 75-89].

v) - *Sulle relazioni lineari fra gli elementi di un ricciano.* [« Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », anno X, n. 5, 1931, pagg. 265-269].

z) - *Sulle derivazioni covarianti.* Conferenze raccolte dalla Sig.na ANGELINA FOSCHI. [Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova », anno III, 1932, pagg. 1-12].

2) ANGELO TONOLO

a) - *Relazioni geometriche fra due sistemi di normali di una superficie dello spazio hilbertiano.* [« Ann. de la Soc. Polonaise de Math. », T. VIII, 1929, pagg. 1-8].

b) - *Classificazione delle superficie il cui spazio 2-tangente è a quattro dimensioni.* [« Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », 1929, 1° sem., pagg. 595-602, 714-718 e 853-857].

c) - *Una proprietà caratteristica delle superficie ipersferiche dello spazio* S_4. [« Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », anno VII, n. 3, 1929, pagg. 132-137].

d) - *Una proprietà delle varietà minime dello spazio hilbertiano.* [« Giornale di Mat. del Battaglini », vol. LXVII, 1929, pagg. 1-5].

3) P. CATTANEO

a) - *Sopra una classe di varietà cubiche.* [« Rendic. R. Acc. dei Lincei », serie VI, vol. XI, 1930, pagg. 659-665, e vol. XII. 1930].

4) GIUSEPPE ALIPRANDI

a) - *Sulle evolute delle curve.* [« Bollettino dell'Unione Matematica ». anno VI, n. 3, 1928, pagg. 142-147].

b) - *Normali di alcune superficie con il* σ_2 *a quattro dimensioni.* [Ib., anno VII, n. 1, 1929, pagg. 25-29].

c) - *Il calcolo assoluto generalizzato in una variabile e le derivate del Vitali.* [« Atti del R. Ist. Veneto », 1927-28, T. LXXXVII, pagg. 1189-1216].

d) - *Sopra le normali principali (secondo il Vitali) di una superficie generica dello spazio hilbertiano.* [« Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », 1928, 2° sem., pagg. 273-276].

e) - *Determinazione della terna principale (del Vitali) di una superficie generica considerata come terna autopolare del cono geodetico.* [Ib. ib., pagg. 356-359].

f) - *Sulle normali principali ad una varietà.* [« Atti della Società italiana per il Progresso delle Scienze », 18ª Riunione, 1929, vol. II, pagg. 8-9].

g) - *Sopra alcune involuzioni delle tangenti ad una superficie.* [« Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. LXV, 1930, pagg. 149-156].

h) - *Sugli estremi di corde normali ad una linea e ad una superficie.* [« Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », vol. IX, 1930, pagg. 90-95].

5) G. ZWIRNER

a) - *Una proprietà della varietà principale di una superficie col* π_2 *a due dimensioni.* [« Atti del R. Ist. Veneto », T. LXXXIX, 1929-30, pagg. 195-198].

6) RITA LICENI

a) - *Sulla forma* F_2 *del Fubini.* [« Rendic. della R. Acc. Naz. dei Lincei », 1929, 1° sem., pagg. 144-146].

b) - *Sulla forma* F_2 *di Fubini-Vitali.* [« Atti del R. Ist. Veneto », 1928-29, T. LXXXVIII, pagg. 903-908].

c) - *Sull'uso della rappresentazione funzionale nello studio della geometria.* [« Atti della Società italiana per il Progresso delle Scienze », 18ª Riunione, 1929, vol. II, pagg. 5-7].

d) - *Sulle espressioni sintetiche della derivazione covariante.* [« Atti della Società italiana per il Progresso delle Scienze », 19ª Riunione, 1930, vol. II, pagg. 7-9].

7) R. BALDONI

a) - *Sistemi principali di normali ad una varietà nel suo* π_3. [« Rendic. della R. Acc. dei Lincei », serie VI, vol. II, 1930, pagg. 149-153 e 261-265].

b) - *Sui sistemi di infinite rette.* [« Atti della Società italiana per il Progresso delle Scienze », 19ª Riunione, 1930. vol. II, pagg. 33-38].

8) L. CESTONARO

a) - *Una proprietà delle superficie col* π_2 *a tre dimensioni.* [« Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », vol. IX, 1930, pagg. 74-79].

9) M. PREVIATTI BORTOLOZZI

a) - *Sopra l'equivalenza di due equazioni che si presentano nella determinazione della terna principale del Vitali per una superficie generica dello spazio hilbertiano.* [« Rendic. R. Acc. dei Lincei », vol. IX, 1929, pagg. 48-49].

10) INES SACILOTTO

a) - *I simboli di Riemann nel calcolo differenziale assoluto generalizzato.* [« Rendic. della R. Acc. dei Lincei », 1929, 1° sem., pagg. 213-217].

b) - *Normali associate alle direzioni di una varietà generica a tre dimensioni giacenti in uno spazio lineare a sei dimensioni.* [« Atti del R. Ist. Veneto », T. LXXXVIII, 1928-29, pagg. 355-359].

11) V. SAVOIA

a) - *Spazî di carattere proiettivo differenziale associati a certe varietà.* [« Atti del R. Ist. Veneto », T. LXXXIX, 1929-30, pagg. 379-381].

b) - *Sulle ipersuperficie considerate come inviluppi di iperpiani.* [« Atti della Società italiana per il Progresso delle Scienze », 19ª Riunione, 1930, vol. II, pagg. 38-41].

12) E. SIMONETTI

a) - *Sopra alcune varietà dello spazio hilbertiano.* [« Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », vol. X, 1931, pagg. 14-16].

Periodische Differentialgleichungen und fastperiodische Funktionen.

Von HELLMUTH KNESER (in Greisswald).

POINCARÉ ([1]), E. E. LEVI ([2]) und BOHL ([3]) behandelten die Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dt} = \varphi(s, t), \tag{1}$$

deren rechte Seite stetig ist, in s und t mit der Periode 1 periodisch ist und z. B. der Lipschitzschen Bedingung genügt, so dass die Lösung eindeutig und stetig dnrch einen Anfangswert bestimmt ist. Insbesondere bewies E. E. LEVI, dass zu jeder Differentialgleichung (1) eine Konstaute μ gehört derart, das für jede Lösung s von (1) die Differenz $s - \mu t$ beschränkt bleibt. Herr WINTNER legte mir die Frage vor, ob und wann $s - \mu t$ eine fastperiodische Funktion von t ist ([4]). Diese Frage lässt sich vollständig beantworten auf Grund der vorliegenden Ergebnisse auf diesem Gebiet, die in der Hauptsache von POINCARÉ ([1]) herrühren und die ich dann einmal ([5]) zusammenstellte und hier wieder anführen muss. Der Wert $s(1)$, den die Lösung von (1) mit dem Anfangswert $s(0) = s_0$ bei $t = 1$ annimmt, werde mit $f(s_0)$ bezeichnet. Die Funktion f ist stetig, monoton und auf keiner Strecke konstant — also eindeutig umkehrbar —, und $f(s) - s$ hat die Periode 1. Es gibt eine monotone Funktion $\chi(s)$ mit den Eigenschaften

$$\chi(s+1) = \chi(s) + 1, \quad \chi(f(s)) = \chi(s) + \mu, \tag{2}$$

von denen die erste die nötige Periodizitätseigenschaft und die zweite die Abelsche Funktionalgleichung ist.

([1]) « Journ. de Math. », IV, 1 (1885), besonders S. 226 f.

([2]) « C. R. », 153 (1911), S. 799- .

([3]) « Acta math. », 40 (1916), S. 321-336.

([4]) Die Beziehung zwischen den von WINTNER behandelten Fragen un der Differentialgleichung (1) sind dargelegt bei T. LEVI-CIVITA, « Ann. de l'Éc. Norm. Sup. », III, 28 (1911), pag. 325-376.

([5]) « Math. Ann. », 91 (1924), S. 135-154, besonders 141-144. Eine ausführlichere Darstellung gab J. NIELSEN, « Mat. Tidsskrift », B. 1928, S. 39-46.

Ich benutze die Gelegenheit, um ein Versehen in meiner genannten Arbeit zu berichtigen: in Zeile 12 auf S. 144 können und sollen deshalb die Worte « endlich oder » wegfallen.

Ist μ rational, $\mu = p/q$, so gibt es ferner mindestens einen Wert s_0 mit

$$f^q(s_0) = s_0 + p = s_0 + \mu q \tag{3}$$

— dabei bedeutet f^q die q^{te} Iterierte der Funktion f —, d. h. einen Anfangswert derart, dass die zugehörige Lösung s von (1) mit $s(0) = s_0$ die Eigenschaft

$$s(t + q) = s(t) + \mu q$$

hat. d. h. dass $s - \mu t$ die Periode q hat. Die durch (3) bestimmten Werte bilden eine nicht leere, abgeschlossene, mit der Periode 1 sich wiederholende Menge M. Gehört s_0 nicht zu M, so seien s_{10} und s_{20} die beiderseits nächsten Werte aus M und s_1 und s_2 die zugehörigen Lösungen von (1). Dann gilt [5]

$$\lim_{n=\infty} (f^{nq}(s_0) - f^{nq}(s_{10})) = \lim_{n=-\infty} (f^{nq}(s_0) - f^{nq}(s_{20})) = 0,$$
$$\lim_{n=\infty} (s(nq) - s_1(nq)) = \lim_{n=-\infty} (s(nq) - s_2(nq)) = 0.$$

Dabei kann sowohl s_{10} wie s_{20} der grössere Wert sein. Da die Lösungen von (1) in beliebigen Intervallen der Länge q gleichmässig stetig vom Werte am Anfang des Intervalls abhängen, so folgt, dass sich $s - \mu t$ für $t \to \infty$ der mit der Periode q periodischen Funktion $s_1 - \mu t$, für $t \to -\infty$ der ebenso periodischen aber, von $s_1 - \mu t$ verschiedenen Funktion $s_2 - \mu t$ annähert. Wenn also die Funktion $s - \mu t$ nicht die Periode q hat, so ist sie auch nicht fastperiodisch, sondern zeigt das angegebene Verhalten.

Bei irrationalem μ bemerkt man zunächst, das $\chi(s)$ wegen (2) die überall dicht liegenden Werte $\chi(0) + m + n\mu$ und daher als monotone Funktion alle Werte annimmt. Der einfachere Fall ist der, dass χ jeden Wert nur einmal annimmt und daher eindeutig und stetig umkehrbar ist. Unterwirft man eine beliebige Lösung s allen ganzzahligen Verschiebungen in der s und t-Richtung, so erhalten sie bei $t = 0$ diejenigen Werte s', für die $\chi(s)$ einen der überall dicht liegenden Werte $\chi(s_0) + m + n\mu$ annimmt. Wegen der Umkehrbarkeit von χ liegen auch die Werte s' überall dicht, und man hat den von BOHL besonders behandelten Fall vor sich, in dem die Lösungskurve die ganze Ebene mod. 1 überall dicht bedeckt. Nach BOHL [6] lässt sich dann $s - \mu t$ durch Polynome in $\sin 2\pi t$, $\cos 2\pi t$, $\sin 2\pi\mu t$ und $\cos 2\pi\mu t$ gleichmässig annähern und ist daher fastperiodisch von einfachem Typus.

Nunmehr nehme die monotone Funktion χ einen Wert a und daher nach (2) alle Werte $a + m + n\mu$ auf ganzen Intervallen an. Ist dann s_1 eine Lösung von (1) mit fastperiodischem Restglied $s_1 - \mu t$, so gilt dasselbe von

---

[6] « A. a. O. » [3], Fussnote 1 auf S. 322.

$s_2(t) = s_1(t+1) - [s_1(1) - s_1(0)]$ [7]. Ferner ist $s_1(1) - s_1(0)$ keine ganze Zahl; denn dann wäre nach (2) auch $\chi(s_1(1)) - \chi(s_1(0)) = \chi(f(s_1(0))) - \chi(s_1(0)) = \mu$ ganz. Also ist

$$0 < s_2(0) - s_1(0) < 1. \tag{4}$$

Wir führen nun statt s eine neue Veränderliche $r = F(s)$ ein. Dabei sei F eine stetige monotone nirgends konstante Funktion mit der Eigenschaft

$$F(s+1) = F(s) + 1,$$

sodass wir

$$r = G(\cos 2\pi s,\ \sin 2\pi s) + s$$

setzen können mit einer stetigen Funktion G. Aus den Funktionen s_1 und s_2 werden zwei Funktionen $r_1(t)$ und $r_2(t)$ mit ganz analogen Eigenschaften: es gilt

$$r_k(n+1) = g(r_k(n)),\quad \psi(g(r)) = \psi(r) + \mu,$$

wenn man

$$g(r) = F[f(F^{-1}(r))],\quad \psi(r) = \chi(s) = \chi(F^{-1}(r))$$

setzt. Die Differenzen $r_k - \mu t$ sind wieder fastperiodisch; denn sie lassen sich darstellen in der Form

$$r_k(t) - \mu t = G(\cos 2\pi s_k(t),\ \sin 2\pi s_k(t)) + s_k(t) - \mu t.$$

Setzt man hierin

$$\cos 2\pi s_k = \cos 2\pi(s_k - \mu t) \cos 2\pi\mu t - \sin 2\pi(s_k - \mu t) \sin 2\pi\mu t,$$

und entsprechend für $\sin 2\pi s_k$ ein, so hat man $r_k - \mu t$ dargestellt als stetige Funktion der fastperiodischen Funktionen $\cos 2\pi\mu t$, $\sin 2\pi\mu t$ und $s_k - \mu t$. Daraus folgt aber, dass $r_k - \mu t$ selbst fastperiodisch ist [8].

---

(7) In üblicher Weise bezeichnet $[u]$ die ganze Zahl mit der Eigenschaft

$$[u] \leq u < [u] + 1.$$

(8) Der hier angewandte Satz wäre etwa folgendermassen zu formulieren. Sind $f_1, \ldots, f_n$ fastperiodische Funktionen von t und ist M ihr Wertbereich, d. h. die Menge der Punkte mit Koordinaten $x_1 = f_1(t), \ldots, x_n = f_n(t)$, ist ferner die Funktion $G(x_1, \ldots, x_n)$ gleichmässig stetig auf M oder stetig auf einer M enthaltenden abgeschlossenen Menge M', so ist $G(f_1, \ldots, f_n)$ eine fastperiodische Funktion von t. Er lässt sich mit dem Weierstrasschen Satz über Polynomannäherungen sofort aus den Sätzen III, IV und VI bei H. Bohr, « Acta math. », 45 (1924), S. 29-127, ableiten oder direkt ganz ähnlich beweisen wie diese, so wie es Wintner (« Math. Zschr. », 30 (1929), s. 299), für $n = 2$ getan hat.

Wenn also $s_1 - \mu t$ fastperiodisch war, so ist insbesondere auch $r_2 - r_1$ eine fastperiodische Funktion von t. Hieraus läst sich bei geeigneter Wahl von F leicht ein Widerspruch herleiten. Laut Definition ist

$$s_2(0) = s_1(1) - [s_1(1) - s_1(0)] = f(s_1(0)) - [s_1(1) - s_1(0)],$$
$$\chi(s_2(0)) - \chi(s_1(0)) = \mu - [s_1(1) - s_1(0)].$$

Dieser Wert ist nicht ganz und liegt wegen (2), (4) und der Monotonie von χ zwischen 0 und 1. Ist wie oben a ein Konstanzwert von χ, d. h. ein Wert, der in einem ganzen Intervall angenommen wird, so sind auch die Werte $a + m + n\mu$ Konstanzwerte. Da sie überall dicht liegen, liegt einer — er heisse b — zwischen $\chi(s_1(0))$ und $\chi(s_2(0))$. Das Intervall, auf dem $\chi(s) = b$ ist, sei $\alpha \leqq s \leqq \beta$. Wir wählen nun $F(s)$ so, dass $F(\beta) - F(\alpha) \geqq \frac{2}{3}$ wird. Das ist unter Erfüllung der vorher an die Funktion F gestellten Forderungen möglich; es genügt z. B.,

$$F(s) = \frac{\int_0^s \left(2 + \cos 2\pi\left(\sigma - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)^n d\sigma}{\int_0^1 \left(2 + \cos 2\pi\left(\sigma - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)^n d\sigma}$$

zu setzen mit genügend grossem n. Gehen wir nun, wie oben angegeben, über zu der neuen Veränderlichen $r = F(s)$ statt s, zu den Funktionen $g(r)$ und $\psi(r)$ statt $f(s)$ und $\chi(s)$, so hat ein Intervall (r', r'') nur dann mindestens die Länge $\frac{1}{2}$, wenn es sich mit einem Intervall $(F(\alpha) + m, F(\beta) + m)$ bei geeignetem ganzem m mindestens teilweise überdeckt. Nun ist $\chi(s) = b$ für $\alpha \leqq s \leqq \beta$, also $\chi(s) = b + m$ für $\alpha + m < s \leqq \beta + m$, also $\psi(r) = b + m$ für $F(\alpha + m) \leqq$ $\leqq r \leqq F(\beta + m)$, d. h. für $F(\alpha) + m \leq r \leqq F(\beta) + m$; daher liegt in jedem Intervall der Länge $\frac{1}{2}$ ein Wert r mit $\psi(r) = b + m$ bei geeignetem ganzem m. Dafür können wir auch sagen: Es ist nur dann $r'' - r' \geqq \frac{1}{2}$, wenn bei geeignetem ganzem m die Ungleichungen $\psi(r') \leqq b - m \leqq \psi(r'')$ gelten. Gilt keines der beiden Gleichheitszeichen, so liegt das ganze Konstanzintervall $\psi(r) = b + m$ zwischen r' und r'', und es ist sogar $r'' - r' > \frac{2}{3}$.

Ist nun $s_1(t) - \mu t$ und daher, wie wir gesehen haben, auch $q(t) = r_2(t) - r_1(t)$ fastperiodisch, so hat diese Funktion nach H. BOHR [9] eine positive ganze

[9] « Acta math. », 45 (1924), S. 29-127; Hilfssatz 7 auf S. 88.

Verschiebungszahl n zur Höchstdifferenz $\varepsilon = \frac{1}{6}$, d. h. es gilt $|q(t+n) - q(t)| \leq \frac{1}{6}$. Für t nehmen wir einen ganzzahligen Wert p und setzen zur Abkürzung

$$\psi(r_k(0)) = \chi(s_k(0)) = \omega_k,$$

so dass $0 < \omega_2 - \omega_1 < 1$ wird. Dann ist jedenfalls $q(p) > \frac{2}{3}$, sobald

$$\psi(r_1(p)) = \omega_1 + p\mu < b + m < \omega_2 + p\mu = \psi(r_2(p))$$

ist bei geeignetem ganzem m. Nach der Verschiebungseigenschaft von n ist dann $q(p+n) > \frac{1}{2}$, d. h.

$$\psi(r_1(p+n)) = \omega_1 + (p+n)\mu \leq b + m' \leqq \omega_2 + (p+n)\mu = \psi r_2(p+n)).$$

Aus unseren Annahmen folgt also die Existenz zweier Zahlen ω_1 und ω_2, deren Differenz zwischen 0 und 1 liegt, derart dass, sobald $b - p\mu$ mod. 1 im Inneren des Intervalles (ω_1, ω_2) liegt, dann $b - p\mu$ auch mod. 1 im Inneren oder an einem Ende des Intervalles $(\omega_1 + n\mu, \omega_2 + n\mu)$ liegt. Da μ irrational ist, sind die beiden Intervalle mod. 1 voneinander verschieden, und da beide gleich lang sind, enthält das erste ein Teilintervall, das nicht im zweiten liegt. Den Wert $b - p\mu$ können wir — wieder wegen der Irrationalität von μ (mod. 1) — in dies Teilintervall verlegen durch geeignete Wahl von p. Damit ist der Widerspruch hergestellt; die anfängliche Annahme, $s_1 - \mu t$ sei eine fastperiodische Funktion von t, muss fallen. Damit ist bewiesen:

Ist die Konstante μ irrational, und liegt der Fall vor, dass die Funktion χ Konstanzintervalle hat, d. h. dass eine Lösungskurve von (1) *— und übrigens jede — die Ebene nicht* mod. 1 *überall dicht bedeckt, so ist das — nach* E. E. Levi *beschränkte — Restglied* $s - \mu t$ *bei keiner Lösung von* (1) *fastperiodisch.*

Welchem schwächeren Periodizitätsbegriff diese Art von Funktionen etwa unterzuordnen ist, bleibt noch zu untersuchen.

Sulla stabilità del movimento generale laminare dei liquidi viscosi incompressibili.

Memoria di ALFREDO ROSENBLATT (Kraków - Polonia).

In parecchi lavori pubblicati da un anno in vari giornali (¹), mi sono già occupato dello studio della stabilità dei movimenti laminari dei liquidi viscosi incompressibili. Ho studiato nei suddetti lavori la stabilità dei movimenti detti dagli inglesi « simple shearing » nei quali movimenti la velocità fondamentale u_0 è funzione *lineare* dell' altezza y. Ho anche studiato il caso di u_0 *nullo*, cioè di moto fondamentale nullo. Nel presente lavoro mi propongo di iniziare lo studio del moto generale nel quale u_0 è funzione *quadratica* di y. Questo caso molto più difficile, ha formato l' oggetto di una delle mie Conferenze nel Seminario Matematico di Sofia (Aprile 1932).

1. Consideriamo dunque al solito due pareti $y=0$, $y=H$, la prima immobile, la seconda animata di un moto di scorrimento su se stessa di velocità $U(>0)$. Siano

(1) $$u=-\Psi_y, \quad v=\Psi_x$$

le componenti della velocità del moto perturbato, e Ψ_0 la funzione di STOKES del moto quadratico fondamentale. Si ha

(2) $$\Psi_0=-\frac{Uy^2}{2H}+Ky\left(H\frac{y}{2}-\frac{y^3}{3}\right)$$

dove K è eguale a $\frac{\partial p_0}{\partial x}:2\mu$, p_0 essendo la pressione media (costante) e μ il coefficiente della viscosità. Studiamo il caso $K \neq 0$, supponendo $K<0$.

Abbiamo

(3) $$u_0=\frac{U}{H}y-Ky(H-y).$$

(¹) In quattro Note dei « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei » in una Nota del « Phil. Mag. » 1932, nonchè in un lavoro dei « Prace matematyczno-fizyczne di Varsavia » 1931.

Poniamo come di solito

$$(4) \qquad \Psi = \Psi_0 + \sum_1^\infty \varepsilon^k e^{-k(\lambda x + \mu t)} \cdot f_k(y),$$

$\lambda > 0$, $\mu > 0$. Poniamo anche

$$(5) \qquad \varphi_k(y) = f_k''(y) + k^2\lambda^2 f_k(y), \qquad k = 1, 2, \dots$$

Allora le funzioni incognite $\varphi_k(y)$ sono determinate dalle seguenti equazioni differenziali ordinarie

$$(6) \qquad \varphi_k'' + \varphi_k \left\{ k^2\lambda^2 + \frac{k\lambda}{\nu}\left[\frac{U}{H}y - Ky(H-y)\right] + \frac{k\mu}{\nu} \right\} - \frac{2Kk\lambda}{\nu} f_k =$$

$$= F_k(y) = \frac{\lambda}{\nu} \sum_{\substack{l=1\dots k-1 \\ m=1\dots k-1 \\ l+m=k}} [-l f_l \varphi'_m + m f_l' \varphi_m].$$

Introducendo le quantità senza dimensioni

$$(7) \qquad \xi = \frac{x}{H}, \quad \eta = \frac{y}{H}, \quad \tau = \frac{U}{H}t, \quad \gamma = \lambda H, \quad \delta = \frac{\mu H}{U}, \quad R = \frac{UH}{\nu}, \quad M = -\frac{KH^3}{\nu}$$

nonchè le funzioni

$$(8) \qquad \bar{f}_k(\eta) = f_k(y),$$

$$(9) \qquad \bar{\varphi}_k(\eta) = \bar{f}_k''(\eta) + k^2\gamma^2 \bar{f}_k(\eta) = H^2\varphi_k(y)$$

avremo le equazioni

$$(10) \qquad \bar{\varphi}_k''(\eta) + \bar{\varphi}_k(\eta) \{ k^2\gamma^2 + kR\delta + k\gamma[(R+M)\eta - M\eta^2] \} +$$

$$+ 2Mk\gamma \bar{f}_k(\eta) = \frac{\gamma}{\nu} \Sigma [-l\bar{f}_l\bar{\varphi}'_m + m\bar{f}_l'\bar{\varphi}_m] = D_k(\eta).$$

2. Introdurremo nuove variabili indipendenti nelle equazioni (10). Il coefficiente di $\bar{\varphi}_k(\eta)$ è

$$A_k(\eta) = a_k + 2b_k\eta + c_k\eta^2,$$

$$(11) \qquad a_k = k^2\gamma^2 + kR\delta, \quad b_k = \frac{1}{2}k\gamma(R+M), \quad c_k = -k\gamma M.$$

Il discriminante d_k è

$$d_k = a_k c_k - b_k^2 = -\frac{1}{4}k\gamma \{ 4M(k^2\gamma^2 + kR\delta) + k\gamma(R+M)^2 \},$$

negativo per $M > 0$, $K < 0$. Supponiamo $K < 0$ e poniamo

$$d_k = -\delta_k^2, \quad \delta_k > 0.$$

Poniamo anche

$$e_k = 2Mk\gamma.$$

Abbiamo

$$A_k(\eta) = \frac{1}{c_k}\,[(b_k + c_k\eta)^2 + d_k] = \frac{d_k}{c_k}\left[1 + \frac{(b_k + c_k\eta)^2}{d_k}\right].$$

Introduciamo le variabili indipendenti

(12) $$\xi_k = \frac{b_k + c_k\eta}{\delta_k}.$$

Ai valori $\eta = 0$, $\eta = 1$ corrispondono i valori di ξ_k

$$\xi_k{}^1 = \frac{b_k}{\delta_k}, \quad \xi_k{}^0 = \frac{b_k + c_k}{\delta_k},$$

essendo $\xi_k{}^1 > \xi_k{}^0$, e $\xi_k{}^0 > 0$ o < 0 secondo che è $R > M$ o $R < M$. Si ha

(13) $$\begin{aligned} \xi_k{}^0 &= \frac{k\gamma(R-M)}{2} : \sqrt{\frac{k\gamma}{4}\,\{\,4M(k^2\gamma^2 + kR\delta) + k\gamma(R+M)^2\,\}}, \\ \xi_k{}^1 &= \frac{k\gamma(R+M)}{2} : \sqrt{\frac{k\gamma}{4}\,\{\,4M(k^2\gamma^2 + kR\delta) + k\gamma(R+M)^2\,\}}. \end{aligned}$$

Trasformeremo una seconda volta le variabili indipendenti ponendo

(14) $$z_k = \alpha_k \xi_k,$$

dove si è posto

(15) $$\alpha_k = \frac{\sqrt{-2d_k}}{\sqrt[4]{M^3k^3\gamma^3}}.$$

Si ha allora, ponendo

(16) $$\overline{\overline{\varphi}}_k(z_k) = \overline{\varphi}_k(\eta),$$

$$\overline{\varphi}_k''(\eta) = \overline{\overline{\varphi}}_k''(z_k)\,\frac{d^2 z_k}{d\eta^2} = \overline{\overline{\varphi}}_k''(z_k)\,\frac{\alpha_k{}^2 c_k{}^2}{-d_k} = 2c_k{}^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{M^3k^3\gamma^3}}\,\overline{\overline{\varphi}}''(z_k) = \sqrt{4Mk\gamma}\,\overline{\overline{\varphi}}_k''(z_k),$$

$$A_k(\eta) = \frac{d_k}{c_k}\left(1 - \frac{z_k{}^2}{\alpha_k{}^2}\right) = \frac{d_k}{c_k} + \frac{d_k}{k\gamma M}\cdot\frac{\sqrt{M^3k^3\gamma^3}}{-2d_k}\,z_k{}^2 = \frac{d_k}{c_k} - \sqrt{\frac{Mk\gamma}{4}}\,z_k{}^2.$$

Risulta dunque

$$\overline{\overline{\varphi}}_k''(z_k) + \left(\frac{-d_k}{\sqrt{4M^3k^3\gamma^3}} - \frac{1}{4}z_k{}^2\right)\overline{\overline{\varphi}}_k(z_k) + \sqrt{Mk\gamma}\,\overline{\overline{f}}_k(z_k) = \frac{1}{\sqrt{4Mk\gamma}}\,\overline{\overline{D}}_k(z_k),$$

dove si è posto

(17) $$\overline{\overline{f}}_k(z_k) = \overline{f}_k(\eta),$$ (18) $$\overline{\overline{D}}_k(z_k) = \overline{D}_k(\eta).$$

3. Poniamo

(19) $$g_k = \frac{\sqrt{-d_k}}{\sqrt[4]{4M^3k^3\gamma^3}},$$ (20) $$e_k' = \sqrt{Mk\gamma},$$ (21) $$m_k = \frac{1}{\sqrt{4Mk\gamma}},$$

allora si hanno le equazioni

(22) $$\bar{\bar{\varphi}}_k''(z_k) + \left(g_k^2 - \frac{1}{4} z_k^2\right)\bar{\bar{\varphi}}_k(z_k) + e_k'\bar{f}_k(z_k) = m_k\bar{D}_k(z_k), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Le corrispondenti equazioni *omogenee*, per $e_k' = 0$ appartengono alla classe delle equazioni del *cilindro parabolico* o di WEBER:

(23) $$y'' + \left(g^2 - \frac{1}{4} z^2\right) y = 0.$$

La rappresentazione *asintotica* degli integrali per grandi valori di z è nota (cfr. WHITTAKER-WATSON: *Modern Analysis*). Tuttavia g_k è qui d'ordine $k^{\frac{3}{4}}$, z_k d'ordine $k^{\frac{1}{4}}$. Si ha infatti

$$z_k = \frac{\sqrt{-2d_k}}{\sqrt[4]{M^3 k^3 \gamma^3}} \cdot \frac{k\gamma}{2} [R + M(1 - 2\eta)] \cdot \frac{1}{\sqrt{-d_k}} = \sqrt[4]{\frac{k\gamma}{4M^3}} [R + M(1 - 2\eta)].$$

Consideriamo una soluzione $\eta(x)$ dell'equazione (23) di WEBER. Avremo

$$\eta'' + g^2\eta = \frac{1}{4} z^2 \eta,$$

da cui segue che η soddisfa all'*equazione integrale di* VOLTERRA

(24) $$\eta = A \sin gz + B \cos gz + \frac{1}{4g}\int_{z_0}^{z} u^2\eta(u) \sin g(z-u)du.$$

Inversamente, supponiamo che $\eta(x)$ sia una soluzione dell'equazione integrale (24), dove A, B sono numeri arbitrari non entrambi nulli. Abbiamo

$$\eta' = Ag \cos gz - Bg \sin gz + \frac{1}{4}\int_{z_0}^{z} u^2\eta(u) \cos g(z-u)du,$$

$$\eta'' = -Ag^2 \sin gz - Bg^2 \cos gz + \frac{z^2}{4}\eta(z) - \frac{g}{4}\int_{z_0}^{z} u^2\eta \cdot \sin g(z-u)du.$$

Perciò

$$\begin{aligned} \eta'' + \left(g^2 - \frac{1}{4} z^2\right)\eta = & -Ag^2 \sin gz - Bg^2 \cos gz + \frac{z^2}{4}\Big(A \sin gz + B \cos gz + \\ & + \frac{1}{4g}\int_{z_0}^{z} u^2\eta(u) \sin g(z-u)du\Big) - \frac{g}{4}\int_{z_0}^{z} u^2\eta(u) \cdot \sin g(z-u)du + \\ & + \left(g^2 - \frac{1}{4} z^2\right)\left(A \sin gz + B \cos gz + \frac{1}{4g} \cdot \int_{z_0}^{z} u^2\eta(u) \sin g(z-u)du\right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Il nucleo dell'equazione (24) è

$$K(z, u) = -\frac{1}{4g} u^2 \sin g(z-u); \tag{25}$$

esso è dunque d'ordine $\leqq k^{-\frac{1}{4}}$ per grandi valori di k.

L'equazione (24) si risolve mediante la formola

$$\eta(x) = A \sin gz + B \cos gz + \int_{z_0}^{z} S(z, u)[A \sin gu + B \cos gu]du, \tag{26}$$

dove $S(z, u)$ è il nucleo risolvente, e si ha

$$S(z, u) = \sum_{i|1}^{\infty} K^{(i)}(z, u), \tag{27}$$

$$K^1(z, u) = -K(z, u), \tag{28}$$

$$K^2(z, u) = -\int_{u}^{z} K(z, \tau) K^1(\tau, u) d\tau,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$K^i(z, u) = -\int_{z_0}^{z} K(z, \tau) K^{i-1}(\tau, u) d\tau.$$

Se N è un numero positivo maggiorante il nucleo $K(z, u)$, il nucleo risolvente $S(z, u)$ è maggiorato dalla serie

$$N + N^2 |z - z_0| + N^3 \frac{|z - z_0|}{2!} + \dots = Ne^{N|z-z_0|}.$$

4. Applichiamo questi risultati alle equazioni (22). Designiamo con η_{k_1}, η_{k_2} i due integrali della k-ma equazione omogenea (di Weber) che si ottengono ponendo $A_k = 1$, $B_k = 0$ e $A_k = 0$, $B_k = 1$. Avremo .

$$\eta_{k_1} = \sin g_k z_k + \int_{z_k^0}^{z_k} S_k(z_k, u) \sin g_k u \, dn, \tag{29}$$

$$\eta_{k_2} = \cos g_k z_k + \int_{z_k^0}^{z_k} S_k(z_k, u) \cos g_k u \, du,$$

$S_k(z_k, u)$ essendo il nucleo risolvente della k-ma equazione.

Siano Y_{ki}, $i = 1, 2$, i massimi dei valori assoluti delle funzioni η_{ki}, $i = 1, 2$ nell'intervallo z_k^0, z_k^1. Si hanno allora le disuguaglianze

$$Y_{ki} \leqq 1 + \frac{1}{4g_k} \int_{z_k^9}^{z_k^1} u^2 |\eta(u)| du, \tag{30}$$

e, in particolare,

$$Y_{ki} \leqq 1 + \frac{1}{4g_k} \frac{({z_k^1}^3 - {z_k^0}^3)}{3} Y_{ki}.$$

Abbiamo

$$z_k^{1^3} - z_k^{0^3} = \alpha_k^3 (\xi_k^{1^3} - \xi_k^{0^3}) = \frac{\sqrt{-8d_k^3}}{\sqrt[4]{M^9 k^9 \gamma^9}} \cdot \frac{k^3\gamma^3}{8} [(R+M)^3 -$$

$$-(R-M)^3] \cdot \frac{1}{\sqrt{-d_k^3}} = \sqrt[4]{\frac{k^3\gamma^3}{64M^9}} (2M^3 + 6R^2M);$$

inoltre, pei grandi valori di k,

$$g_k = \frac{\sqrt{-d_k}}{\sqrt[4]{4M^3k^3\gamma^3}} = \frac{\sqrt{Mk^3\gamma^3(1+\varepsilon(k))}}{\sqrt[4]{4M^3k^3\gamma^3}} = \sqrt[4]{\frac{k^3\gamma^3}{4M}} (1 + \varepsilon(k)),$$

$\varepsilon(k) \to 0$ se $k \to +\infty$. Dunque è

$$\frac{1}{12g_k}(z_k^1 - z_k^0) = \frac{\sqrt[4]{4M}}{\sqrt[4]{64M^9}} \frac{2M^3 + 6R^2M}{12} (1 + \varepsilon(k)) = \frac{M^2 + 3R^2}{12M} (1 + \varepsilon(k)).$$

Supponendo

$$M^2 + 3R^2 < 12M$$

e ponendo

(31) $$\frac{M^2 + 3R^2}{12M - (M^2 + 3R^2)} = S$$

abbiamo le disuguaglianze

(32) $$Y_{ki} \leqq \frac{12M}{12M - (M^2 + 3R^2)} (1 + \varepsilon(k)),$$

quindi anche le disuguaglianze

(33) $$\left| \frac{1}{4g_k} \int_{z_k^0}^{z_k} u^2 \eta_{ki}(u) \sin g_k(z_k - u) du \right| \leqq S(1 + \varepsilon(k)).$$

Vediamo, che S è arbitrariamente piccolo se M e $R^2 : M$ sono abbastanza piccoli.

5. Consideriamo adesso le formole (9). Abbiamo

$$\overline{\overline{f}}_k''(z_k) = \overline{\overline{f}}_k''(\eta) \cdot \frac{-d_k}{\alpha_k^2 c_k^2} = \frac{1}{\sqrt{4Mk\gamma}} \overline{\overline{f}}_k''(\eta) = m_k \overline{f}_k''(\eta).$$

Si ha dunque

$$\overline{f}_k''(z_k) + m_k k^2 \gamma^2 \overline{\overline{f}}_k(z_k) = m_k \overline{\overline{\varphi}}_k(z_k).$$

Poniamo

$$\bar{g}_k^2 = m_k k^2 \gamma^2 = \sqrt{\frac{k^3\gamma^3}{4M}}, \tag{34}$$

allora, notando che le $\bar{f}_k(z_k)$ *si annullano* per z_k^0 e per z_k^1 colle loro derivate, abbiamo

$$\bar{\bar{f}}_k(z_k) = \frac{\sqrt{m_k}}{k\gamma}\int_{z_k^0}^{z_k} \sin \bar{g}_k(z_k - u)\bar{\bar{\varphi}}_k(u)du. \tag{35}$$

Siano poi $\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(z_k)$, $\bar{\bar{\varphi}}_{k_2}(z_k)$ i due integrali delle equazioni di Weber che soddisfano alle condizioni di normalizzazione

$$\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(z_k)\bar{\bar{\varphi}}'_{k_2}(z_k) - \bar{\bar{\varphi}}_{k_2}(z_k)\bar{\bar{\varphi}}'_{k_1}(z_k) = 1 \tag{36}$$

e che sono proporzionali agli integrali η_{k_1}, η_{k_2}. Ponendo

$$\bar{\bar{\varphi}}_{ki}(z_k) = A_{ki}\eta_{ki}(z_k), \qquad i = 1, 2 \tag{37}$$

abbiamo

$$\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(z_k^0) = A_{k_1} \sin g_k z_k^0, \quad \bar{\bar{\varphi}}_{k_2}(z_k^0) = A_{k_2} \cos g_k z_k^0,$$
$$\bar{\bar{\varphi}}'_{k_1}(z_k^0) = A_{k_1} g_k \cos g_k z_k^0, \quad \bar{\bar{\varphi}}'_{k_2}(z_k^0) = -A_{k_2} g_k \sin g_k z_k^0;$$

unque viene

$$-A_{k_1}A_{k_2}g_k = 1, \tag{38}$$

e si può prendere

$$A_{k_1} = (\sqrt{\bar{g}_k})^{-1}, \quad A_{k_2} = -(\sqrt{\bar{g}_k})^{-1}. \tag{39}$$

Otteniamo così l'integrale generale dell'equazione (22)

$$\bar{\bar{\varphi}}_k(z_k) = A_k\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(z_k) + B_k\bar{\bar{\varphi}}_{k_2}(z_k) + \int_{z_k^0}^{z_k}[m_k\bar{\bar{D}}_k(u) - e'_k\bar{\bar{f}}_k(u)][\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(u)\bar{\bar{\varphi}}_{k_2}(z_k) - \bar{\bar{\varphi}}_{k_2}(u)\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(z_k)]du. \tag{40}$$

Ponendo queste espressioni nelle formole (35) che danno le $\bar{\bar{f}}_k(z_k)$ mediante le $\bar{\bar{\varphi}}_k(z_k)$, otteniamo le formole

$$\bar{\bar{f}}_k(z_k) = \frac{\sqrt{m_k}}{k\gamma}\int_{z_k^0}^{z_k}\sin \bar{g}_k(z_k - u)\Big\{A_k\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(u) + B_k\bar{\bar{\varphi}}_{k_2}(u) + \int_{z_k^0}^{u}[m_k\bar{\bar{D}}_k(\tau) - e'_k\bar{\bar{f}}_k(\tau)][\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(\tau)\bar{\bar{\varphi}}_{k_2}(u) - \bar{\bar{\varphi}}_{k_2}(\tau)\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(u)]d\tau\Big\}du, \tag{41}$$

e, cambiando l'ordine d'integrazione, le formole

$$(42)\quad \bar{\bar{f}}_k(z_k) = \frac{\sqrt{m_k}}{k\gamma}\Big\{A_k\int_{z_k^0}^{z_k}\sin\bar{g}_k(z_k-u)\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(u)du + B_k\int_{z_k^0}^{z_k}\sin\bar{g}_k(z_k-u)\cdot\bar{\bar{\varphi}}_{k_2}(u)du +$$

$$+\int_{z_k^0}^{z_k}[m_k\bar{\bar{D}}_k(\tau)-e'_k\bar{\bar{f}}_k(\tau)]\int_{\tau}^{z_k}[\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(\tau)\bar{\varphi}_{k_2}(u)-\bar{\bar{\varphi}}_{k_2}(\tau)\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(u)]\sin g_k(z_k-u)du\cdot d\tau\Big\}.$$

Giovandoci delle notazioni

$$(43)\quad \begin{aligned} I_{k_1}(\alpha,\ \beta) &= \int_{\alpha}^{\beta}\sin\bar{g}_k(\beta-u)\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(u)du,\\ I_{k_2}(\alpha,\ \beta) &= \int_{\alpha}^{\beta}\sin\bar{g}_k(\beta-u)\bar{\bar{\varphi}}_{k_2}(u)du,\\ J_{k_1}(\alpha,\ \beta) &= \int_{\alpha}^{\beta}\cos\bar{g}_k(\beta-u)\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(u)du,\\ J_{k_2}(\alpha,\ \beta) &= \int_{\alpha}^{\beta}\cos\bar{g}_k(\beta-u)\bar{\bar{\varphi}}_{k_2}(u)du, \end{aligned}$$

possiamo scrivere la formola seguente

$$(44)\quad \bar{f}_k(z_k) = \frac{\sqrt{m_k}}{k\gamma}\Big\{A_kI_{k_1}(z_k^0,\ z_k) + B_kI_{k_2}(z_k^0,\ z_k) + \int_{z_k^0}^{z_k}[m_k\bar{\bar{D}}_k(\tau) -$$

$$- e'_k\bar{\bar{f}}_k(\tau)][\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(\tau)I_{k_2}(\tau,\ z_k) - \bar{\bar{\varphi}}_{k_2}(\tau)I_{k_1}(\tau,\ z_k)]d\tau\Big\}.$$

Studieremo in seguito i determinanti

$$(45)\quad \Delta_k(z_k^0,\ z_k^1) = I_{k_1}(z_k^0,\ z_k^1)J_{k_2}(z_k^0,\ z_k^1) - I_{k_2}(z_k^0,\ z_k^1)J_{k_1}(z_k^0,\ z_k^1).$$

6. Dobbiamo adesso soddisfare alle *condizioni ai limiti*

$$(46)\quad \bar{\bar{f}}_k(z_k^1) = 0,\quad \bar{\bar{f}}_k'(z_k^1) = 0.$$

Ora abbiamo

$$(47)\quad \bar{\bar{f}}_k'(z_k) = m_k\Big\{A_kJ_{k_1}(z_k^0,\ z_k) + B_kJ_{k_2}(z_k^0,\ z_k) + \int_{z_k^0}^{z_k}[m_k\bar{D}_k(\tau) -$$

$$- e'_k\bar{\bar{f}}_k(\tau)][\bar{\bar{\varphi}}_{k_1}(\tau)J_{k_2}(\tau,\ z_k) - \bar{\bar{\varphi}}_{k_2}(\tau)J_{k_1}(\tau,\ z_k)]d\tau\Big\}.$$

Otteniamo dunque

(48)
$$A_k I_{k_1}(z_k^0, z_k^1) + B_k I_k(z_k^0, z_k^1) + \int_{z_k^0}^{z_k^1} [m_\gamma \overline{\overline{D}}_k(\tau) - e'_k \overline{\overline{f}}_k(\tau)] \cdot$$
$$\cdot [\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) I_{k_2}(\tau, z_k^1) - \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) I_{k_1}(\tau, z_k^1)] d\tau = 0,$$
$$A_k J_{k_1}(z_k^0, z_k^1) + B_k J_{k_2}(z_k^0, z_k^1) + \int_{z_k^0}^{z_k^1} [m_k \overline{D}_k(\tau) - e'_k \overline{\overline{f}}_k(\tau)] \cdot$$
$$\cdot [\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) J_{k_2}(\tau, z_k^1) - \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) J_{k_1}(\tau, z_k^1)] d\tau = 0,$$

(49)
$$A_k = -\frac{1}{\Delta_k(z_k^0, z_k^1)} \int_{z_k^0}^{z_k^1} [m_k \overline{D}_k(\tau) - e'_k \overline{\overline{f}}_k(\tau)] \{ \overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) I_{k_2}(\tau, z_k^1) J_{k_2}(z_k^0, z_k^1) -$$
$$- \overline{\varphi}_{k_1}(\tau) J_{k_2}(\tau, z_k^1) I_{k_2}(z_k^0, z_k^1) + \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) J_{k_1}(\tau, z_k^1) I_{k_2}(z_k^0, z_k^1) -$$
$$- \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) I_{k_1}(\tau, z_k^1) J_{k_2}(z_k^0, z_k^1) \} d\tau,$$
$$B_k = -\frac{1}{\Delta_k(z_k^0, z_k^1)} \int_{z_k^0}^{z_k^1} [m_k \overline{D}_k(\tau) - e'_k \overline{\overline{f}}_k(\tau)] \{ \overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) J_{k_2}(\tau, z_k^1) I_{k_1}(z_k^0, z_k^1) -$$
$$- \overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) I_{k_2}(\tau, z_k^1) J_{k_1}(z_k^0, z_k^1) + \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) I_{k_1}(\tau, z_k^1) J_{k_1}(z_k^0, z_k^1) -$$
$$- \overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) J_{k_1}(\tau, z_k^1) I_{k_1}(z_k^0, z_k^1) \} d\tau.$$

Introducendo le notazioni

(50)
$$\Delta_k^{11}(\alpha, \beta, \gamma) = I_{k_1}(\alpha, \beta) I_{k_2}(\alpha, \gamma) - I_{k_2}(\alpha, \beta) I_{k_1}(\alpha, \gamma),$$
$$\Delta_k^{12}(\alpha, \beta, \gamma) = I_{k_1}(\alpha, \beta) J_{k_2}(\alpha, \gamma) - I_{k_2}(\alpha, \beta) J_{k_1}(\alpha, \gamma),$$

$\Delta_k^{12}(z_k^0, z_k^1, z_k^1)$ essendo uguale a $\Delta_k(z_k^0, z_k^1)$, otteniamo le seguenti formole per le $\overline{f}_k(z_k)$

(51)
$$\overline{\overline{f}}_k(z_k) = \frac{\sqrt{m_k}}{k\gamma} \Bigg\{ \int_{z_k^0}^{z_k} [m_k \overline{D}_k(\tau) - e'_k \overline{\overline{f}}_k(\tau)] [\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) I_{k_2}(\tau, z_k) -$$
$$- \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) I_{k_1}(\tau, z_k)] d\tau - \frac{1}{\Delta_k(z_k^0, z_k^1)} \int_{z_k^0}^{z_k^1} [m_k \overline{\overline{D}}_k(\tau) - e'_k \overline{\overline{f}}_k(\tau)] \cdot$$
$$\cdot \Big[[\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) I_{k_2}(\tau, z_k^1) - \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) I_{k_1}(\tau, z_k^1)] \Delta_k^{12}(z_k^0, z_k, z_k^1) -$$
$$- [\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) J_{k_2}(\tau, z_k^1) - \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) J_{k_1}(\tau, z_k^1)] \Delta_k^{11}(z_k^0, z_k, z_k^1) \Big] d\tau \Bigg\}.$$

7. Otteniamo così *equazioni integrali* per le funzioni incognite $\overline{\overline{f}}_k(z_k)$. Queste equazioni hanno la forma

$$\overline{\overline{f}}_k(z_k) + s_k \int_{z_k^0}^{z_k} \overline{\overline{f}}_k(\tau)[\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) I_{k_2}(\tau, z_k) - \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) I_{k_1}(\tau, z_k)] d\tau = u_k(z_k), \tag{52}$$

e sono quindi equazioni di VOLTERRA. Le funzioni $u_k(z_k)$ contengono tuttavia *integrali definiti* contenenti sotto il segno le funzioni incognite $\overline{\overline{f}}_k(z_k)$.

Abbiamo qui posto

$$s_k = \frac{\sqrt{m_k}}{k\gamma} e'_k = \frac{1}{\sqrt[4]{4Mk\gamma}} \frac{\sqrt{Mk\gamma}}{k\gamma} = \sqrt[4]{\frac{M}{4k^3\gamma^3}}, \tag{53}$$

$$\begin{aligned} u_k(z_k) = \frac{\sqrt{m_k}}{k\gamma} \Bigg\{ & \int_{z_k^0}^{z_k} m_k \overline{\overline{D}}_k(\tau)[\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) I_{k_2}(\tau, z_k) - \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) I_{k_1}(\tau, z_k)] d\tau - \\ & - \frac{1}{\Delta_k(z_k^0, z_k^1)} \int_{z_k^0}^{z_k^1} [m_k \overline{\overline{D}}_k(\tau) - e'_k \overline{\overline{f}}_k(\tau)] \Big| [\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) I_{k_2}(\tau, z_k^1) - \\ & - \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) I_{k_1}(\tau, z_k^1)] \Delta_k^{12}(z_k^0, z_k, z_k^1) - [\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) J_{k_2}(\tau, z_k^1) - \\ & - \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) J_{k_1}(\tau, z_k^1)] \Delta_k^{11}(z_k^0, z_k, z_k^1)] \Big| \Bigg\}. \end{aligned} \tag{54}$$

Il nucleo $K_k(z_k, \tau)$ è

$$K_k(z_k, \tau) = s_k[\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) I_{k_2}(\tau, z_k) - \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) I_{k_1}(\tau, z_k)]. \tag{55}$$

Pei grandi valori di k, s_k è d'ordine $k^{-\frac{3}{4}}$, i $\overline{\overline{\varphi}}_{ki}$ sono dello stesso ordine degli A_{ki}, dunque d'ordine $k^{-\frac{3}{8}}$; e gli I_{ki} sono dell'ordine di $z_k^1 - z_k^0$, cioè $k^{\frac{1}{4}}$ moltiplicato per l'ordine $k^{-\frac{3}{8}}$ dei $\overline{\overline{\varphi}}_{ki}$. Dunque $K_k(z_k, \tau)$ è d'ordine $k^{-\frac{5}{4}}$. Per conseguenza l'integrale nella formola (49) è d'ordine $\frac{1}{k}$ moltiplicato per l'ordine di $\overline{\overline{f}}_k$. Dunque $\overline{\overline{f}}_k$ è dello stesso ordine di u_k.

Sia allora $S_k(z_k, \tau)$ il *nucleo risolvente* dell'equazione (49). Abbiamo

$$S_k(z_k, \tau) = \sum_1^\infty K_k^{(i)}(z_k, \tau), \tag{56}$$

$$K_k^{(i)}(z_k, \tau) = -\int_{z_k^0}^{z_k} K_k(z_k, u) K_k^{(i-1)}(u, \tau) du \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{57}$$

Le $\overline{\overline{f}}_k(z_k)$ sono date dalle formole

$$\overline{f}_k(z_k) = u_k(z_k) + \int_{z_k^0}^{z_k} S_k(z_k, \tau) u_k(\tau) d\tau. \tag{58}$$

8. Poniamo adesso

$$L_k(z_k) = \frac{m_k^{\frac{3}{2}}}{k\gamma} \left\{ \int_{z_k^0}^{z_k} \overline{\overline{D}}_k(\tau)[\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) I_{k_2}(\tau, z_k) - \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) I_{k_1}(\tau, z_k)] d\tau \right. \tag{59}$$

$$- \frac{1}{\Delta_k(z_k^0, z_k^1)} \int_{z_k^0}^{z_k^1} \overline{\overline{D}}_k(\tau) \Big[[\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) I_{k_2}(\tau, z_k^1) - \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) I_{k_1}(\tau, z_k^1)] \Delta_k^{12}(z_k^0, z_k, z_k^1) -$$

$$\left. - [\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) J_{k_2}(\tau, z_k^1) - \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) J_{k_1}(\tau, z_k^1)] \Delta_k^{11}(z_k^0, z_k, z_k^1) \Big] \right\},$$

$$a_{k_1}(\tau) = - \frac{\sqrt{m_k} \cdot e'_k}{k\gamma} \frac{1}{\Delta_k(z_k^0, z_k^1)} [\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) J_{k_2}(\tau, z_k^1) - \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) J_{k_1}(\tau, z_k^1)], \tag{60}$$

$$a_{k_2}(\tau) = \frac{\sqrt{m_k} \cdot e'_k}{k\gamma} \frac{1}{\Delta_k(z_k^0, z_k^1)} [\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(\tau) I_{k_2}(\tau, z_k^1) - \overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(\tau) I_{k_1}(\tau, z_k^1)],$$

$$b_{k_1}(z_k) = \Delta_k^{11}(z_k^0, z_k, z_k^1), \quad b_{k_2}(z_k) = \Delta_k^{12}(z_k^0, z_k, z_k^1), \tag{61}$$

$$C_k(\tau, z_k) = \sum_1^2 a_{k_i}(\tau) b_{k_i}(z_k), \tag{62}$$

allora $u_k(z_k)$ avrà la forma

$$u_k(z_k) = L_k(z_k) + \int_{z_k^0}^{z_k^1} \overline{\overline{f}}_k(\tau) C_k(\tau, z_k) d\tau. \tag{63}$$

Consideriamo l'ordine di $C_k(\tau, z_k)$, cominciando col calcolare l'ordine delle $a_{k_i}(\tau)$. Abbiamo

$$\frac{\sqrt{m_k} \cdot e'_k}{k\gamma} = \frac{1}{\sqrt[4]{4Mk\gamma}} \cdot \sqrt{Mk\gamma} \cdot \frac{1}{k\gamma} = \sqrt[4]{\frac{M}{4k^3\gamma^3}},$$

dunque l'ordine è uguale al prodotto di $k^{-\frac{3}{4}}$ per $k^{-\frac{1}{4}} = k^{-1}$. Le b_{k_i} sono dell'ordine $k^{-\frac{1}{4}}$, dunque C_k è d'ordine $k^{-\frac{5}{4}}$ e l'integrale nella formola (63) è d'ordine $\frac{1}{k}$ moltiplicato per l'ordine delle $\overline{f}_k$.

Così $u_k(z_k)$ ha l'ordine di $L_k(z_k)$, dunque le $\overline{\overline{f}}_k$ sono dell'ordine delle $L_k(z_k)$.

Quanto all'ordine di $L_k(z_k)$, l'integrando ha intanto l'ordine di $\overline{\overline{D}}_k(\tau)$ moltiplicato per l'ordine di $\frac{m_k^{\frac{3}{2}}}{k\gamma}$, cioè $k^{-\frac{7}{4}}$, e per l'ordine delle $\overline{\overline{\varphi}}_{k_i}\cdot I_{k_i}$ cioè $k^{-\frac{1}{2}}$. Dunque le $L_k(z_k)$ sono dell'ordine k^{-2} moltiplicato per l'ordine delle $\overline{D}_k(\tau)$.

9. Le equazioni (58) si possono scrivere come equazioni di FREDHOLM. Infatti, si ha

$$\overline{\overline{f}}_k(z_k) = L_k(z_k) + \int_{z_k^0}^{z_k^1} f_k(\tau) C_k(\tau, z_k) d\tau + \int_{z_k^0}^{z_k^1} S_k(z_k, \tau) \cdot$$

$$\cdot \left[L_k(\tau) + \int_{z_k^0}^{z_k^1} \overline{\overline{f}}_k(u) C_k(u, \tau) du \right] d\tau.$$

Poniamo

$$\overline{L}_k(z_k) = L_k(z_k) + \int_{z_k^0}^{z_k} S_k(z_k, \tau) L_k(\tau) d\tau, \tag{64}$$

$$G_k(\tau, z_k) = C_k(\tau, z_k) + \int_{z_k^0}^{z_k} S_k(z_k, u) C_k(\tau, u) du; \tag{65}$$

avremo le equazioni

$$\overline{\overline{f}}_k(z_k) - \int_{z_k^0}^{z_k^1} \overline{\overline{f}}_k(\tau) G_k(\tau, z_k) d\tau = \overline{L}_k(z_k). \tag{66}$$

Le $\overline{L}_k(z_k)$ sono dell'ordine delle $L_k(z_k)$. Infatti l'integrale nelle formole (64) ha l'ordine delle L_k moltiplicato per k^{-1}. L'integrale nelle formole (65) ha l'ordine delle C_k moltiplicato per k^{-1}. Dunque $G_k(\tau, z_k)$ è dello stesso ordine delle $C_k(\tau, z_k)$, cioè d'ordine $k^{-\frac{5}{4}}$. Le $\overline{\overline{f}}_k$ sono dunque dell'ordine delle $\overline{L}_k$.

Poniamo

$$c_{ki}(z_k) = b_{ki}(z_k) + \int_{z_k^0}^{z_k} S_k(z_k, u) b_{ki}(u) du, \tag{67}$$

le c_{ki} sono dell'ordine delle b_{ki}, cioè $k^{-\frac{1}{4}}$. Avremo

$$G_k(\tau, z_k) = \sum_1^2 a_{ki}(\tau) c_{ki}(z_k). \tag{68}$$

10. Risolviamo le equazioni (66), che sono del tipo di GOURSAT. Poniamo

$$K_{ki} = - \int_{z_k^0}^{z_k^1} \overline{\overline{f}}_k(\tau) a_{ki}(\tau) d\tau. \tag{69}$$

Avremo le formole

(70) $$\bar{f}_k(z_k) = \bar{L}_k(z_k) - \sum_1^2 K_{ki} c_{ki}(z_k).$$

Per calcolare le K_{ki} poniamo

(71) $$\alpha_{kij} = -\int_{z_k^0}^{z_k^1} a_{ki}(\tau) c_{ki}(\tau) d\tau,$$

(72) $$\gamma_{ki} = -\int_{z_k^0}^{z_k^1} \bar{L}_k(\tau) a_{ki}(\tau) d\tau,$$

allora avremo le equazioni

(73) $$K_{k_1} + \sum_1^2 \alpha_{k_1 i} K_{ki} = \gamma_{k_1},$$

$$K_{k_2} + \sum_1^2 \alpha_{k_2 i} K_{ki} = \gamma_{k_2}.$$

Consideriamo i *determinanti*

(74) $$D_k = \begin{vmatrix} 1 + \alpha_{k_{11}} & \alpha_{k_{12}} \\ \alpha_{k_{21}} & 1 + \alpha_{k_{22}} \end{vmatrix};$$

$\bar{L}(z_1)$ essendo nullo identicamente, si ha la condizione

(75) $$D_1 = 0,$$

che è una equazione tra γ e δ.

Le α_{kij} sono dell'ordine delle a_{ki} cioè k^{-1}, moltiplicato per l'ordine delle c_{ki} cioè $k^{-\frac{1}{4}}$ e per $k^{\frac{1}{4}}$; dunque esse sono dell'ordine k^{-1}. Dunque le D_k *tendono verso zero con* $\frac{1}{k}$.

K_{11} e K_{12} sono dati dalle formole

(76) $$K_{11} = Ck_1, \quad K_{12} = Ck_2,$$

C essendo un numero arbitrario.

11. Occupiamoci adesso dei *determinanti* $\Delta_k(z_k^0, z_k^1)$ che compaiono nelle formole (65), per assicurarci che essi possono essere *minorizzati sotto certe ipotesi*, riconoscendo così che i loro inversi sono dell'ordine $k^{\frac{1}{4}}$. Consideriamo a tale scopo gli integrali (43) e sostituiamo in questi integrali le espressioni delle $\overline{\overline{\varphi}}_{ki}$. Avremo le formole

$$\begin{aligned}(77)\qquad I_{k_1}(z_k^0, z_k^1) &= \int_{z_k^0}^{z_k^1} \sin \bar{g}_k(z_k^1 - u)\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(u)du = A_{k_1}\int_{z_k^0}^{z_k^1} \sin \bar{g}_k(z_k^1 - u)\cdot \\ &\cdot \{ \sin g_k u + \Theta_1(u) S(1+\varepsilon(k)) \}\, du, \\ I_{k_2}(z_k^0, z_k^1) &= \int_{z_k^1}^{z_k^1} \sin \bar{g}_k(z_k^1 - u)\overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(u)du = A_{k_2}\int_{z_k^0}^{z_k^1} \sin \bar{g}_k(z_k^1 - u)\cdot \\ &\cdot \{ \cos g_k u + \Theta_2(u) S(1+\varepsilon(k)) \}\, du, \\ J_{k_1}(z_k^0, z_k^1) &= \int_{z_k^0}^{z_k^1} \cos \bar{g}_k(z_k^1 - u)\overline{\overline{\varphi}}_{k_1}(u)du = A_{k_1}\int_{z_k^0}^{z_k^1} \cos \bar{g}_k(z_k^1 - u)\cdot \\ &\cdot \{ \sin g_k u + \Theta_3(u) S(1+\varepsilon(k)) \}\, du, \\ J_{k_2}(z_k^0, z_k^1) &= \int_{z_k^0}^{z_k^1} \cos \bar{g}_k(z_k^1 - u)\overline{\overline{\varphi}}_{k_2}(u)du = A_{k_2}\int_{z_k^0}^{z_k^1} \cos \bar{g}_k(z_k^1 - u)\cdot \\ &\cdot \{ \cos g_k u + \Theta_4(u) S(1+\varepsilon(k)) \}\, du.\end{aligned}$$

Integrando si ottiene

$$\begin{aligned}(78)\qquad I_1 &= \int_{z_k^0}^{z_k^1} \sin \bar{g}_k(z_k^1 - u) \sin g_k u du = \frac{1}{2}\int_{z_k^0}^{z_k^1} \{ \cos[\bar{g}_k(z_k^1 - u) - g_k u] - \\ &- \cos[\bar{g}_k(z_k^1 - u) + g_k u] \}\, du = - \frac{\sin[\bar{g}_k(z_k^1 - u) - g_k u]}{2(g_k + \bar{g}_k)}\Bigg|_{z_k^0}^{z_k^1} - \\ &- \frac{\sin[\bar{g}_k(z_k^1 - u) + g_k u]}{2(g_k - \bar{g}_k)}\Bigg|_{z_k^0}^{z_k^1} = -\frac{1}{2}\left\{ \frac{\sin(-g_k z_k^1) - \sin[\bar{g}_k(z_k^1 - z_k^0) - g_k z_k^0]}{g_k + \bar{g}_k} + \right. \\ &\left. + \frac{\sin(g_k z_k^1) - \sin[g_k z_k^0 + \bar{g}_k(z_k^1 - z_k^0)]}{g_k - \bar{g}_k} \right\} = \frac{1}{g_k + \bar{g}_k} \sin \frac{1}{2}(g_k + \bar{g}_k)(z_k^1 - z_k^0)\cdot \\ &\cdot \cos\frac{1}{2}[g_k(z_k^1 + z_k^0) - \bar{g}_k(z_k^1 - z_k^0)] - \frac{1}{g_k - \bar{g}_k} \sin\frac{1}{2}(g_k - \bar{g}_k)(z_k^1 - z_k^0)\cdot \\ &\cdot \cos\frac{1}{2}[g_k(z_k^1 + z_k^0) + \bar{g}_k(z_k^1 - z_k^0)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{z_k^0}^{z_k^1} \sin \bar{g}_k(z_k^1 - u) \cos g_k u du = \frac{1}{2}\int_{z_{k0}}^{z_k^1} \{ \sin[g_k u + \bar{g}_k(z_k^1 - u)] + \\ &+ \sin[\bar{g}_k(z_k^1 - u) - g_k u] \}\, du = -\frac{1}{2}\frac{\cos[g_k u + \bar{g}_k(z_k^1 - u)]}{g_k - \bar{g}_k}\Bigg|_{z_k^0}^{z_k^1} - \\ &- \frac{1}{2}\frac{\cos[\bar{g}_k(z_k^1 - u) - g_k u]}{-g_k - \bar{g}_k}\Bigg|_{z_k^0}^{z_k^1} = -\frac{1}{2(g_k - \bar{g}_k)}\{ \cos g_k z_k^1 - \cos[g_k z_k^0 + \bar{g}_k(z_k^1 - z_k^0)] \} +\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2(g_k+g_k)}\{\cos g_k z_k^1-\cos[\bar{g}_k(z_k^1-z_k^0)-g_k z_k^0]\}=\frac{1}{g_k-\bar{g}_k}\sin\frac{1}{2}(g_k-\bar{g}_k)(z_k^1-z_k^0)\cdot$$
$$\cdot\sin\frac{1}{2}[g_k(z_k^1+z_k^0)+\bar{g}_k(z_k^1-z_k^0)]-\frac{1}{g_k+\bar{g}_k}\sin\frac{1}{2}[g_k(z_k^1+z_k^0)-\bar{g}_k(z_k^1-z_k^0)]\cdot$$
$$\cdot\sin\frac{1}{2}[g_k+\bar{g}_k)(z_k^1-z_k^0),$$

nonchè

$$I_3=\int_{z_k^0}^{z_k^1}\cos\bar{g}_k(z_k^1-u)\sin g_k u\,du=\frac{1}{2}\int_{z_k^0}^{z_k^1}\{\sin[g_k u+\bar{g}_k(z_k^1-u)]+$$
$$+\sin[g_k u-\bar{g}_k(z_k^1-u)]\}\,du=-\frac{1}{2}\frac{\cos[g_k u+\bar{g}_k(z_k^1-u)]}{g_k-\bar{g}_k}\Bigg|_{z_k^0}^{z_k^1}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\cos[g_k u-\bar{g}_k(z_k^1-u)]}{g_k+\bar{g}_k}\Bigg|_{z_k^0}^{z_k^1}=-\frac{1}{2(g_k-\bar{g}_k)}\{\cos g_k z_k^1-\cos[g_k z_k^0+$$
$$+\bar{g}_k(z_k^1-z_k^0)]\}-\frac{1}{2(g_k+\bar{g}_k)}\{\cos g_k z_k^1-\cos[g_k z_k^0-\bar{g}_k(z_k^1-z_k^0)]\}=\frac{1}{g_k-\bar{g}_k}\cdot$$
$$\cdot\sin\frac{1}{2}[g_k(z_k^1+z_k^0)+\bar{g}_k(z_k^1-z_k^0)]\sin\frac{1}{2}(g_k-\bar{g}_k)(z_k^1-z_k^0)+\frac{1}{g_k+\bar{g}_k}\cdot$$
$$\cdot\sin\frac{1}{2}[g_k(z_k^1+z_k^0)-\bar{g}_k(z_k^1-z_k^0)]\sin\frac{1}{2}(g_k+\bar{g}_k)(z_k^1-z_k^0),$$

$$I_4=\int_{z_k^0}^{z_k^1}\cos\bar{g}_k(z_k^1-u)\cos g_k u\,du=\frac{1}{2}\int_{z_k^0}^{z_k^1}\{\cos[\bar{g}_k(z_k^1-u)+g_k u]+$$
$$+\cos[\bar{g}_k(z_k^1-u)-g_k u]\}\,du=\frac{1}{2(g_k-\bar{g}_k)}\sin[g_k u+\bar{g}_k(z_k^1-u)]\Bigg|_{z_k^0}^{z_k^1}-$$
$$-\frac{1}{2(g_k+\bar{g}_k)}\sin[\bar{g}_k^1-u)-g_k u]\Bigg|_{z_k^0}^{z_k^1}=\frac{1}{2(g_k-\bar{g}_k)}\{\sin g_k z_k^1-\sin[g_k z_k^0+$$
$$+\bar{g}_k(z_k^1-z_k^0)]\}-\frac{1}{2(g_k+\bar{g}_k)}\{-\sin g_k z_k^1-\sin[\bar{g}_k(z_k^1-z_k^0)-g_k z_k^0]\}=$$
$$=\frac{1}{g_k-\bar{g}_k}\sin\frac{1}{2}(g_k-\bar{g}_k)(z_k^1-z_k^0)\cos\frac{1}{2}[g_k(z_k^1+z_k^0)+\bar{g}_k(z_k^1-z_k^0)]+$$
$$+\frac{1}{g_k+\bar{g}_k}\sin\frac{1}{2}(g_k+\bar{g}_k)(z_k^1-z_k^0)\cos\frac{1}{2}[\bar{g}_k(z_k^1-z_k^0)-g_k(z_k^1+z_k^0)].$$

12. Poichè si ha

$$z_k^1-z_k^0=\sqrt[4]{4Mk\gamma},$$

sussistono le disuguaglianze

$$\left|\int_{z_k^0}^{z_k^1}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\}\bar{g}_k(z_k^1-u)\Theta_i(u)(1+\varepsilon(k))du\right|\leq\sqrt[4]{4Mk\gamma}\,(1+\varepsilon(k)),\tag{79}$$

le $\varepsilon(k)$ essendo funzioni che tendono verso zero con $\frac{1}{k}$.

Abbiamo dunque

$$I_{k_1}(z_k^0, z_k^1) = A_{k_1} \left\{ -\frac{1}{g_k - \bar{g}_k} \sin\alpha\cos\beta + \frac{1}{g_k + \bar{g}_k} \sin\gamma\cos\delta + \right.$$
$$\left. + \Theta_1 S \sqrt[4]{4Mk\gamma}\,(1 + \varepsilon(k)) \right\}, \tag{80}$$

$$I_{k_2}(z_k^0, z_k^1) = A_{k_2} \left\{ \frac{1}{g_k - \bar{g}_k} \sin\alpha\sin\beta - \frac{1}{g_k + \bar{g}_k} \sin\gamma\sin\delta + \right.$$
$$\left. + \Theta_2 S \sqrt[4]{4Mk\gamma}\,(1 + \varepsilon(k)) \right\},$$

$$J_{k_1}(z_k^0, z_k^1) = A_{k_1} \left\{ \frac{1}{g_k - \bar{g}_k} \sin\alpha\sin\beta + \frac{1}{g_k + \bar{g}_k} \sin\gamma\sin\delta + \right.$$
$$\left. + \Theta_3 S \sqrt[4]{4Mk\gamma}\,(1 + \varepsilon(k)) \right\},$$

$$J_{k_2}(z_k^0, z_k^1) = A_{k_2} \left\{ \frac{1}{g_k - \bar{g}_k} \sin\alpha\cos\beta + \frac{1}{g_k + \bar{g}_k} \sin\gamma\cos\delta + \right.$$
$$\left. + \Theta_4 S \sqrt[1]{4Mk\gamma}\,(1 + \varepsilon(k)) \right\},$$

dove le Θ_i sono funzioni in valore assoluto ≤ 1.

D'altra parte possiamo calcolare $g_k - \bar{g}_k$ in base alla formula

$$g_k - \bar{g}_k = \frac{\sqrt{-d_k}}{\sqrt[4]{4M^3k^3\gamma^3}} - \sqrt[4]{\frac{k^3\gamma^3}{4M}} = \sqrt[4]{\frac{k^2\gamma^2 \{4Mk^2\gamma^2 + k[4MR\delta + \gamma(R+M)^2]\}^2}{64M^3k^3\gamma^3}} -$$
$$- \sqrt[4]{\frac{k^3\gamma^3}{4M}} = \sqrt[4]{\frac{16M^2k^6\gamma^6}{64M^3k^3\gamma^3}} \cdot \left[1 + \frac{k[4MR\delta + \gamma(R+M)]}{4Mk^2\gamma^2}\right]^{\frac{1}{2}} -$$
$$- \sqrt[4]{\frac{k^3\gamma^3}{4M}} = \sqrt[4]{\frac{k^3\gamma^3}{4M}} \cdot \left(\frac{4MR\delta + \gamma(R+M)^2}{8Mk\gamma^2} + \left(\frac{1}{k^2}\right)\right) =$$
$$= \frac{4MR\delta + \gamma(R+M)^2}{8M\gamma \cdot \sqrt[4]{4Mk\gamma}} + \left(k^{-\frac{5}{4}}\right).$$

Se ne desume che $g_k + \bar{g}_k$ è d'ordine $k^{\frac{3}{4}}$. Dunque $\frac{1}{g_k - \bar{g}_k}$ è uguale a

$$\frac{8M\gamma \sqrt[4]{4Mk\gamma}}{4RM\delta + \gamma(R+M)^2} + \left(k^{-\frac{3}{4}}\right),$$

e $\frac{1}{g_k + \bar{g}_k}$ è d'ordine $k^{-\frac{3}{4}}$. Abbiamo nelle formole (80) posto

$$\alpha = \frac{1}{2}(g_k - \bar{g}_k)(z_k^1 - z_k^0), \tag{81}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(g_k + \overline{g}_k)(z_k^1 - z_k^0),$$
$$\beta = \frac{1}{2}[g_k(z_k^1 + z_k^0) + \overline{g}_k(z_k^1 - z_k^0)],$$
$$\delta = \frac{1}{2}[g_k(z_k^1 + z_k^0) - \overline{g}_k(z_k^1 - z_k^0)].$$

Possiamo dunque dedurre dalle formole (80) le formole

$$I_{k1}(z_k^0, z_k^1) = A_{k1}\left\{ -\frac{\sqrt[4]{4Mk\gamma}}{T}\sin\alpha\cos\beta + O\left(k^{-\frac{3}{4}}\right) + \Theta_1 S\sqrt[4]{4Mk\gamma}(1 + \varepsilon(k))\right\}, \tag{82}$$

$$I_{k2}(z_k^0, z_k^1) = A_{k2}\left\{ \frac{\sqrt[4]{4Mk\gamma}}{T}\sin\alpha\sin\beta + O\left(k^{-\frac{3}{4}}\right) + \Theta_2 S\sqrt[4]{4Nk\gamma}(1 + \varepsilon(k))\right\}.$$

$$J_{k1}(z_k^0, z_k^1) = A_{k1}\left\{ \frac{\sqrt[3]{4Mk\gamma}}{T}\sin\alpha\sin\beta + O\left(k^{-\frac{3}{4}}\right) + \Theta_3 S\sqrt[4]{4Mk\gamma}(1 + \varepsilon(k))\right\},$$

$$J_{k2}(z_k^0, z_k^1) = A_{k2}\left\{ \frac{\sqrt[4]{4Mk\gamma}}{T}\sin\alpha\cos\beta + O\left(k^{-\frac{3}{4}}\right) + \Theta_4 S\sqrt[4]{4Mk\gamma}(1 + \varepsilon(k))\right\},$$

dove abbiamo posto

$$T = \frac{4RM\delta + \gamma(R + M)^2}{8M\gamma}. \tag{83}$$

13. Otteniamo così l'espressione seguente di $\Delta_k(z_k^0, z_k^1)$

$$\Delta_k(z_k^0, z_k^1) = \frac{1}{g_k}\left\{ -\frac{\sqrt{4Mk\gamma}}{T^2}\sin^2\alpha + \frac{\sqrt{4Mk\gamma}}{T}4S\Theta(1 + \varepsilon(k))\cdot\sin\alpha + \right. \tag{84}$$
$$\left. + \sqrt{4Mk\gamma}\cdot 2S^2\Theta'(1 + \varepsilon(k)) + O\left(k^{-\frac{1}{2}}\right)\right\},$$
$$|\Theta| \leqq 1, \quad |\Theta'| \leqq 1;$$

e ulteriormente

$$\Delta_k(z_k^0, z_k) = \sqrt[4]{\frac{64M^3}{k\gamma}}\left\{ -\frac{\sin^2\alpha}{T^2} + \frac{4S}{T}\Theta(1 + \varepsilon(k))\cdot\sin\alpha + \right. \tag{85}$$
$$\left. + 2S^2\Theta'(1 + \varepsilon'(k)) + O(k^{-1})\right\}.$$

Si ha

$$\alpha = \frac{1}{2}(g_k - \overline{g}_k)(z_k^1 - z_k^0) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{4Mk\gamma}\cdot\frac{T}{\sqrt[4]{4Mk\gamma}} + \left(k^{-\frac{5}{4}}\right) = \frac{T}{2} + \left(\frac{1}{k}\right).$$

Il quoziente

$$\frac{\sin\alpha}{T} = \frac{\sin\left(\frac{T}{2} + \left(\frac{1}{k}\right)\right)}{T}$$

è inferiore all'unità (in valore assoluto) e tende verso zero col crescere di T.

Dunque *se T è limitato* $< \pi$ e se S è *abbastanza piccolo,* il termine nelle parentesi di (85) rimane compreso, in valore assoluto, tra due numeri positivi σ, σ' *inferiori ad* 1 *e fissi* (indipendenti da k). Δ_k è d'ordine $k^{-\frac{1}{4}}$.

Basta dunque che M e $R^2:M$ siano *piccoli,* $R\frac{\delta}{\gamma}$ essendo *limitato* e $T < \pi$.

14. Dimostriamo adesso la *convergenza* della serie (4). Notiamo che le $\overline{\overline{\varphi}}'_k(z_k)$ sono (dalle formole (40)) dell'ordine delle $\overline{\overline{\varphi}}_k(z_k)$ moltiplicato per l'ordine di g_k cioè $k^{\frac{3}{4}}$.

Le $\overline{\overline{f}}'_k(z_k)$, come segue dalle formole (41), sono parimenti dell'ordine delle $\overline{\overline{f}}_k(z_k)$ moltiplicato per $k^{\frac{3}{4}}$.

Consideriamo adesso la formola che dà le $\overline{D}_k$

$$\overline{D}_k(\eta) \equiv \frac{\gamma}{\nu}\Sigma\left[-l\overline{f}_l\overline{\varphi}'_m + m\overline{f}'_l\overline{\varphi}_m\right]. \tag{86}$$

Scrivendola nelle variabili indipendenti abbiamo

$$\overline{\varphi}'_m(\eta) = \overline{\overline{\varphi}}'_m(z_m)\frac{dz_m}{d\eta} = \overline{\overline{\varphi}}'_m(z_m)\cdot\frac{\alpha_m c_m}{\delta_m},$$

$$\overline{f}'_l(\eta) = \overline{\overline{f}}_l(z_l)\frac{dz_l}{d\eta} = \overline{\overline{f}}'_l(z_l)\cdot\frac{\alpha_l c_l}{\delta_l}.$$

Ma

$$\frac{\alpha_m c_m}{\delta_m} = \frac{\sqrt{-2d_m}\cdot m\gamma M}{\sqrt{-d_m}\cdot\sqrt[4]{M^3m^3\gamma^3}} = m^{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{M\gamma}, \quad \frac{\alpha_l c_l}{\delta_l} = l^{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{M\gamma};$$

dunque

$$-l\overline{f}_l\overline{\varphi}'_m + m\overline{f}'_l\overline{\varphi}_m = -l\overline{\overline{f}}_l(z_l)\cdot m^{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{M\gamma}\cdot\overline{\overline{\varphi}}'_m(z_m) +$$
$$+ m\overline{\overline{f}}'_l(z_l)\cdot l^{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{M\gamma}\cdot\overline{\overline{\varphi}}_m(z_m).$$

$\overline{\overline{D}}_k(z_k)$ è pertanto maggiorato dall'espressione

$$N\Sigma\, lm^{\frac{1}{4}}\left|\overline{\overline{f}}_l(z_l)\right|\left|\overline{\overline{\varphi}}'_m(z_m)\right| + l^{\frac{1}{4}}m\left|\overline{\overline{f}}'_l(z_l)\right|\left|\overline{\overline{\varphi}}_m(z_m)\right|,$$

dove N è un numero positivo fisso indipendente da k.

Supponiamo adesso che i numeri positivi

$$\Phi_i, \quad i = 1 \ldots k-1$$

maggiorino le funzioni $\overline{\overline{\varphi}}_1, \overline{\overline{\varphi}}_2, \ldots, \overline{\overline{\varphi}}_{k-1}$ per un certo valore di k. Supponiamo di più che le $\overline{\overline{\varphi}}'_i(z_i)$ siano maggiorate dai numeri $i^{\frac{3}{4}}\Phi_i$, le $\overline{\overline{f}}_i(z_i)$ dai numeri $\frac{\Phi_i}{i}$ e le funzioni $\overline{f'}_i(z_i)$ dai numeri $\frac{\Phi_i}{i^{\frac{1}{4}}}$. Allora $\overline{\overline{D}}_k(z_k)$ è maggiorato dalla espressione

$$N\Sigma\, l m^{\frac{1}{4}} \cdot m^{\frac{3}{4}} \frac{\Phi_l\Phi_m}{l} + l^{\frac{1}{4}} m \cdot \frac{\Phi_l}{l^{\frac{1}{4}}} \cdot \Phi_m = N' \Sigma\, m \Phi_l \Phi_l .$$

Poniamo

(87) $$\Phi_k = N \sum_{\substack{l+m\ k, \\ l,m-1\ldots k-1}} \Phi_l \Phi_m ,$$

N essendo un numero positivo fisso. Sappiamo già che le $\overline{\overline{f}}_k(z_k)$ sono dell' ordine delle $\overline{\overline{D}}_k(z_k)$ moltiplicato per k^{-2}. È dunque evidente che si può scegliere N assai grande, tale che siano verificate le maggiorazioni seguenti:

$$\Phi_k \text{ maggiora } \overline{\overline{\varphi}}_k,\ \frac{\Phi_k}{k} \text{ maggiora } \overline{f}_k,\ k^{\frac{3}{4}}\Phi_k \text{ maggiora } \overline{\overline{\varphi'}}_k \text{ e } \frac{\Phi_k}{k^{\frac{1}{4}}} \text{ maggiora } \overline{\overline{f'}}_k .$$

Inoltre N è *indipendente* da k.

15. Otteniamo così la *serie maggiorante*

(88) $$S = \sum_1^{\infty} \varepsilon^k E_1^{\,k} \Phi_k ,$$

dove

$$E_1 = e^{-(\lambda x + \mu t)},$$

e si prova facilmente (cfr. i miei lavori anteriori) che questa serie maggiorante è

(89) $$S = \frac{1}{2N} \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \varepsilon^k \cdot \binom{\frac{1}{2}}{k} E_1^{\,k} \Phi_1^{\,k} (4N)^k .$$

Il raggio ρ di convergenza è dunque

(90) $$\rho = \frac{1}{4E_1\Phi_1 N},$$

e possiamo enunciare il seguente:

TEOREMA: « Supponiamo che $\gamma = \lambda H$, $\delta = \frac{\mu H}{U}$ soddisfino all' *equazione*
« *trascendente,*

(91) $$D_1 = 0$$

« dove si ha

(92) $$D_1 = \begin{vmatrix} 1 + \alpha_{k11} & \alpha_{k12} \\ \alpha_{k21} & \alpha_{k22} \end{vmatrix}$$

« le α essendo date dalle formole

$$\alpha_{1ij} = -\int_{z_1^0}^{z_1^1} a_{1i}(\tau) c_{1j}(\tau) d\tau.$$

« Supponiamo di più che i numeri D_k, $k > 1$, siano *diversi da zero.* Essi « tendono verso 1, come già sappiamo.

« Supponiamo inoltre che M, R siano abbastanza piccoli, essendo altresì « $R^2 : M$ piccolo per modo che S sia *piccolo* per T *limitato* $< \pi$, il che im« plica $\frac{R\delta}{\gamma}$ *limitato.* Allora le espressioni $k^{\frac{1}{4}} \Delta_k(z_k^0, z_k^1)$ saranno, da un certo nu« mero k_0 in avanti, superiori in valore assoluto ad un numero positivo fisso.

« Supponiamo che *tutti* i Δ_k sieno diversi da zero ($k \geq 1$).

« Allora esistono *perturbazioni del movimento quadratico generale* che sva« niscono *esponenzialmente* all'infinito dell'asse $x(+\infty)$ nonchè per $t \to +\infty$. « Queste perturbazioni sono date dalle formole precedenti ».

On the summability $(c, 1)$ of the conjugate series of a FOURIER series.

By B. N. PRASAD, Allahabad (India).

1. Let

$$(1.1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

be the conjugate series of the FOURIER series corresponding to the function $f(x)$ which is periodic and integrable in the sense of LEBESGUE. The conjugate function associated with the above conjugate series is

$$(1.2) \qquad g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \{ f(x+t) - f(x-t) \} \cot \frac{t}{2} \, dt,$$

in which the integral is generally not a LEBESGUE integral, but a generalized integral in the sense of CAUCHY.

The usual way (¹) of obtaining theorems for the convergence and summability $(c, 1)$ of the conjugate series, is to take, *a priori*, the integral $g(x)$ to converge and then to impose suitable additional conditions on $f(x)$ (²). Moreover, it follows from the researches of PLESSNER, BESICOVITCH, ZYGMUND, HARDY and LITTLEWOOD that $g(x)$ exists as a convergent integral *almost everywhere* and also the conjugate series is summable $(c, 1)$ (indeed summable (c, δ) for every positive δ) *almost everywhere* (³). It is also known that the existence of $g(x)$ implies summability $(c, 1+\eta)$ for every $\eta > 0$ of the conjugate series (⁴). The question arises: *can the existence of $g(x)$, by itself, which is certainly sufficient to ensure the Abel summability of the series, be a sufficient condition for the summability* $(c, 1)$ *of the conjugate series?*

---

(1) See PRINGSHEIM, (8); YOUNG, (10, 11).

(2) For the convergence and the summability of the conjugate series when $g(x)$ does not exist, see PRASAD, (5, 6).

(3) PLESSNER, (4); BESICOVITCH, (1); ZYGMUND, (12); HARDY and LITTLEWOOD, (2).

(4) PALEY, (3); (theorem 2 with $\alpha = 1$). A direct proof of it can be easily given on the lines of my paper (7).

I prove by constructing an example that the answer to the above question is in the negative. The construction of such an example, however, essentially depends, as is shown in § 2, upon a *suitable type* of another example for which, at a point, the original function is continuous and also the integral $g(x)$ exists, but still the corresponding conjugate series fails to converge at that point.

In what follows, we shall put

$$\psi(t) = f(x+t) - f(x-t),$$

and

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(u)du.$$

2. THEOREM. — *The existence of $g(x)$ as a non-absolutely convergent integral at a point, is not sufficient for the summability* (c, 1) *of the conjugate series at that poiut.*

It follows from a theorem of mine [5] that when the integral $g(x)$ exists at a point, the *necessary and sufficient* condition that the conjugate series be summable (c, 1) at that point is that the integral

$$\int_0^\delta \frac{\Psi(t)}{t} \cdot \frac{\cos nt}{t} dt \tag{2.1}$$

is $O(1)$ as $n \to \infty$, where $0 < \delta < \pi$. Hence our theorem will be demonstrated, if we can construct an example $f(x)$ or $\psi(t)$ corresponding to which the conjugate function $g(x)$ exists at a point, which without loss of generality may be taken to be the origin, but the corresponding integral (2.1) is not $O(1)$. We require the following lemmas.

LEMMA α. — *When the integral*

$$\int_0^\delta \frac{\Psi(t)}{t^2} dt \tag{2.2}$$

exists, the necessary and sufficient condition that the integral

$$\int_0^\delta \frac{\psi(t)}{t} dt \tag{2.3}$$

may exist, is that the $\lim\limits_{t \to 0} \Psi(t)/t$ *is zero.*

(5) PRASAD, (6); theorem I (when $\Psi(t) = O(t)$).

If $\varepsilon > 0$, we get by integrating by parts

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{\psi(t)}{t}\, dt = \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{\Psi(t)}{t^2}\, dt + \frac{\Psi(\delta)}{\delta} - \frac{\Psi(\varepsilon)}{\varepsilon}, \tag{2.4}$$

from which the sufficiency of the condition is evident. That the condition is necessary follows from the fact that when (2.3) exists, $\lim\limits_{t \to 0} \Psi(t)/t$ is necessarily zero ([6]).

LEMMA β. — *When the integral* (2.3) *exists, the integral* (2.2) *necessarily exists.*

From (2.4), the lemma follows immediately.

When $g(x)$ exists, it is clear that also (2.3) exists. Then $\lim\limits_{t \to 0} \Psi(t)/t$ is zero, $\Psi(t) \cdot t^{-1}$ is continuous, and in virtue of lemma β, the integral (2.2) exists, i. e. the conjugate function corresponding to the conjugate series of $\Psi(t) \cdot t^{-1}$ exists. Hence for the demonstration of a case in which (2.1) is not $O(1)$, we require a conjugate series corresponding to a continuous function, such that the series fails to converge at a point, although the conjugate function exists at that point.

3. *Example of a conjugate series which fails to converge at a point of continuity, although the conjugate function exists at that point.*

Let ([7])

$$k_\mu = 1 \cdot 5^{1^3} \cdot 9^{2^3} \cdot 13^{3^3} \cdot \ldots. (4\mu + 1)^{\mu^3}.$$

Let us divide the interval $(0, \delta)$, where $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ into the following sequence of diminishing sub-intervals

$$\left(\frac{\pi}{2k_{\lambda_1}}, \frac{\pi}{2k_{\lambda_1+1}}\right), \left(\frac{\pi}{2k_{\lambda_1+1}}, \frac{\pi}{2k_{\lambda_1+2}}\right), \ldots, \left(\frac{\pi}{2k_{\mu-1}}, \frac{\pi}{2k_\mu}\right), \ldots,$$

where λ_1 is a fixed integer and we may suppose δ so chosen that $\frac{\pi}{2k_{\lambda_1}} = \delta$. Let a function $V(z)$ be defined such that in $(0, \delta)$

$$V(z) = c_\mu \cos k_\mu z, \quad \text{where} \quad \frac{\pi}{2k_\mu} \leq z \leq \frac{\pi}{2k_{\mu-1}},$$

([6]) See THOMAE, (9).

([7]) The example can be presented in a simpler or still more general form; the form selected here is a suitable one for proving the theorem in view. Compare SCHWARZ'S well-known example for the non-convergence of a FOURIER series corresponding to a continuous function.

and

$$V(\delta) = 0 = V(0),$$

where

$$c_\mu = \{\log (4\mu + 1)^{\mu^3}\}^{-\frac{1}{2}}.$$

This function is continuous; it decreases when z approaches zero by making an infinite number of maxima and minima with decreasing amplitudes.

We first show that the integral

$$\int_0^\delta V(z) \frac{\cos nz}{z}\, dz \tag{3.1}$$

is not convergent, but increases indefinitely as n takes successively the values of integers in a certain sequence. Let

$$n = 1 \cdot 5^{1^3} \cdot 9^{2^3} \cdot 13^{3^3} \cdot \dots (4\mu + 1)^{\mu^3} = k_\mu.$$

Then the integral

$$\int_0^\delta V(z) \frac{\cos k_\mu z}{z}\, dz$$

may be written as

$$c_\mu \int_{\frac{\pi}{2k_\mu}}^{\frac{\pi}{2k_{\mu-1}}} \frac{\cos^2 k_\mu z}{z}\, dz + \sum_{\nu=\lambda_1}^{\nu=\mu-1} \int_{\frac{\pi}{2k_\nu}}^{\frac{\pi}{2k_{\nu-1}}} \frac{\cos k_\nu z \cdot \cos k_\mu z}{z}\, dz$$

$$+ \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} c_\nu \int_{\frac{\pi}{2k_\nu}}^{\frac{\pi}{2k_{\nu-1}}} \frac{\cos k_\nu z \cdot \cos k_\mu z}{z}\, dz$$

$$= J_1 + J_2 + J_3.$$

Now

$$J_1 = \frac{1}{2} c_\mu \int_{\frac{\pi}{2k_\mu}}^{\frac{\pi}{2k_{\mu-1}}} \frac{1 + \cos 2k_\mu z}{z}\, dz$$

$$= \frac{1}{2} c_\mu \left[\log \frac{\pi}{2k_{\mu-1}} - \log \frac{\pi}{2k_\mu}\right] + \frac{1}{2} c_\mu \frac{2k_\mu}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2k_\mu}}^{\xi} \cos 2k_\mu z\, dz,$$

where $\frac{\pi}{2k_\mu} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2k_{\mu-1}}$, by the second mean value theorem. Thus

$$J_1 = \frac{1}{2}\{\log(4\mu+1)^{\mu^3}\}^{-\frac{1}{2}} \cdot \log(4\mu+1)^{\mu^3} + \frac{1}{2\pi} c_\mu \cdot \sigma,$$

where σ is some number whose absolute value is not greater than 2.

Therefore J_1 will become indefinitely great as $\mu \to \infty$. Again

$$\begin{aligned}
J_2 &= \sum_{\nu=\lambda_1}^{\mu-1} c_\nu \int_{\frac{\pi}{2k_\nu}}^{\frac{\pi}{2k_{\nu-1}}} \frac{1}{2} \frac{\cos(k_\mu - k_\nu)z + \cos(k_\mu + k_\nu)z}{z} dz \\
&\leq \sum_{\nu=\lambda_1}^{\mu-1} c_\nu \frac{2k_\nu}{\pi}\left[\frac{1}{k_\mu - k_\nu} + \frac{1}{k_\mu + k_\nu}\right] \\
&\leq \frac{4}{\pi} c_{\lambda_1} \sum_{\nu=\lambda_1}^{\mu-1} \frac{k_\nu}{k_{\mu-1}} \cdot \frac{(4\mu+1)^{\mu^3}}{\{(4\mu+1)^{\mu^3}\}^2 - 1} \\
&\leq \frac{4}{\pi} c_{\lambda_1} \frac{(4\mu+1)^{\mu^3}}{\{(4\mu+1)^{\mu^3}\}^2 - 1}\left[1 + \frac{1}{(4\mu-3)^{(\mu-1)^3}} + \frac{1}{(4\mu-3)^{(\mu-1)^3} \cdot (4\mu-7)^{(\mu-2)^3}} + \dots\right] \\
&= \frac{4}{\pi} c_{\lambda_1} \frac{(4\mu+1)^{\mu^3}}{\{(4\mu+1)^{\mu^3}\}^2 - 1} k,
\end{aligned}$$

where k represents the sum of the series in the square brackets. Hence $\lim_{\mu \to \infty} J_2 = 0.$

Finally

$$\begin{aligned}
J_3 &= \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} c_\nu \int_{\frac{\pi}{2k_\nu}}^{\frac{\pi}{2k_{\nu-1}}} \frac{\cos k_\nu z}{z} dz - \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} c_\nu \int_{\frac{\pi}{2k_\nu}}^{\frac{\pi}{2k_{\nu-1}}} 2 \frac{\cos k_\nu z \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2}k_\mu z\right)}{z} dz \\
&= I_1 - I_2.
\end{aligned}$$

Now by the second mean value theorem

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} c_\nu \frac{2k_\nu}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2k_\nu}}^{\eta_\nu} \cos k_\nu z\, dz \qquad \left(\frac{\pi}{2k_\nu} \leq \eta_\nu \leq \frac{\pi}{2k_{\nu-1}}\right) \\
&\leq \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{3/2}\{\log(4\nu+1)\}^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Therefore $\lim_{\mu \to \infty} I_1 = 0$, for the above series is convergent. Again in I_2, we have

$$\left|\frac{\sin \frac{k_\mu z}{2}}{z}\right| \leq \frac{k_\mu}{2}, \quad \left|\cos k_\nu z \cdot \sin \frac{k_\mu z}{2}\right| \leq 1.$$

Hence

$$I_2 < \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} c_\nu \int_{\frac{\pi}{2k_\nu}}^{\frac{\pi}{2k_{\nu-1}}} k_\mu dz$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \left\{ \log (4\mu + 5)^{(\mu+1)^3} \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Therefore $I_2 \to 0$, as $\mu \to \infty$.

Thus it is shown that the integral (3.1) becomes indefinitely great as n takes this given sequence of values. Also reasoning as in the case of I_1, it can be easily shown that the integral

$$\int_0^\delta \frac{V(z)}{z} dz$$

exists. Thus the conjugate series corresponding to the continuous function defined by

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \qquad (-\pi \leq x \leq 0) \\ f(x) &= V(x) \qquad (0 \leq x \leq \delta) \\ f(x) &= 0 \qquad (\delta \leq x \leq \pi), \end{aligned}$$

does not converge at the point $x = 0$, although the conjugate function exists at that point.

4. In order to prove the theorem, let us take for $\Psi(t) \cdot t^{-1}$ the function $V(t)$ which has been defined in the previous section, so that

$$\Psi(t) = t \left\{ \log (4\mu + 1)^{\mu^3} \right\}^{-\frac{1}{2}} \cos k_\mu t, \quad \left(\frac{\pi}{2k_\mu} \leq t < \frac{\pi}{2k_\mu}\right)$$

and

$$\Psi(0) = 0.$$

Then

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \psi(t) = c_\mu \cos k_\mu t - t c_\mu k_\mu \sin k_\mu t,$$

where

$$c_\mu = \left\{ \log (4\mu + 1)^{\mu^3} \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

is an integrable function. For the first term on the right in the above is continuous and therefore integrable. Also

$$\sum_{\nu=\lambda_1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2k_\nu}}^{\frac{\pi}{2k_{\nu-1}}} | t \cdot c_\nu k_\nu \sin k_\nu t | \, dt$$

$$\leq \sum_{\nu=\lambda_1}^{\infty} c_\nu k_\nu \frac{\pi^2}{8} \left\{ \frac{1}{k^2_{\nu-1}} - \frac{1}{k^2_\nu} \right\}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} \sum_{\nu=\lambda_1}^{\infty} c_\nu \frac{(4\nu+1)^{\nu^3}}{1 \cdot 5^{1^3} \cdot 9^{2^3} \cdot \ldots \cdot (4\nu-3)^{(\nu-1)^3}} - \frac{\pi^2}{8} \sum_{\nu=\lambda_1}^{\infty} c_\nu \frac{1}{k_\nu}$$

$$< k,$$

where k is a constant, since both the series are convergent. Therefore $\Psi(t)$ is an indefinite integral.

Now $\lim_{t \to 0} \Psi(t) \cdot t^{-1}$ is zero, and the integral

$$\int_0^\delta \frac{\Psi(t)}{t^2} \, dt$$

exists; hence in virtue of lemma α, the integral

$$\int_0^\delta \frac{\psi(t)}{t} \, dt$$

also exists, which means that the conjugate function corresponding to $\psi(t)$ exists. But as shown in § 3, the integral (2.1) is not $O(1)$. Hence the conjugate series corresponding to $\psi(t)$ is not summable $(c, 1)$, and the theorem is proved.

REFERENCES

1 - A. S. Besicovitch, *On a general metric property of summable functions*, « Journal London Math. Soc. », 1 (1926), 120-128.

2 - G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *The allied series of a Fourier series*, « Proc. London Math. Soc. », (2), 24 (1925), 211-246.

3 - R. E. A. C. Paley, *On the Cesàro summability of Fourier series and allied series*, « Proc. Cambridge Phil. Soc. », 26 (1936), 173-203.

4 - A. Plessner, *Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen*, « Mitteilungen des Math. Seminars der Univ. Giessen », 10 (1923), 1-36.

5 - B. N. Prasad, *Sur la convergence de la série conjuguée d'une série de Fourier*, « Comptes Rendus », 193 (1931), 1159-1162.

6 - B. N. PRASAD, *Sur la sommabilité de la série conjuguée d'une série de Fourier,* « ibid. », 1385-1387.

7 - B. N. PRASAD, *A theorem for the Cesàro summability of the allied series of a Fourier series,* « Journal London Math. Soc. », 6 (1931), 274-278.

8 - A. PRINGSHEIM, *Ueber das Verhalten von Potenzreihe auf dem Convergenzkreise,* « Münchener Sitzungsberichte », 30 (1900), 37-100 (79-100).

9 - J. THOMAE, *Ueber die Differenzierbarkeit eines Integrales nach der oberen Grenze,* « Gött. Nach. », (1893), 696-700.

10 - W. H. YOUNG, *Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe,* « Münchener Sitz. », 41 (1911), 361-371.

11 - W. H. YOUNG, *On the convergence of a Fourier series and of its allied series,* « Proc. London Math. Soc. », (2), 10 (1912), 254-272.

12 - A. ZYGMUND, *Sur la sommation des séries trigonométriques conjuguées aux séries de Fourier,* « Bulletin Acad. Polonaise », A (1924), 251-258.

Equazioni intrinseche della meccanica dei sistemi continui perfettamente od imperfettamente flessibili.

Memoria di B. FINZI (a Milano).

Sunto. - *L'A. esprime in forma intrinseca le leggi che governano i sistemi continui perfettamente od imperfettamente flessibili. Ciò è possibile individuando mediante insiemi di tensori della* V_n *che i sistemi continui costituiscono, vettori o tensori di una* V_m *in cui è immersa la* V_n, *ed istituendo un calcolo assoluto che operi su questi insiemi.*

Un sistema continuo monodimensionale sia rappresentato geometricamente da una linea l. Se il sistema è in equilibrio per azione di forze su di esso agenti e pratichiamo un taglio in un punto P, per ristabilire l'equilibrio di uno dei due tratti in cui esso risulta diviso, basta aggiungere alle altre forze agenti sul tratto considerato un sistema di forze traducente l'azione della parte contigua. Questo sistema è riducibile ad un vettore $\boldsymbol{T}$ applicato in P e ad una coppia Γ. Se quest'ultima è nulla, il sistema continuo considerato è un sistema continuo *perfettamente flessibile*, che si dice *filo*. $\boldsymbol{T}$ risulta, in questo caso, un vettore tangente alla linea l in P, risulta cioè un vettore della varietà monodimensionale costituita dal filo. Se $\Gamma \neq 0$, il sistema continuo monodimensionale considerato è *imperfettamente flessibile* e $\boldsymbol{T}$ non è, in generale, tangente a l in P, non è cioè un vettore della varietà monodimensionale costituita dal sistema continuo, che nel caso considerato si dice *verga*. In meccanica classica $\boldsymbol{T}$ è considerato vettore dello spazio euclideo tridimensionale in cui è immersa la verga. Analogamente, si consideri la sollecitazione di un sistema continuo bidimensionale: se essa è rappresentata da un unico tensore doppio della varietà bidimensionale V_2 — che, rappresenta gli sforzi specifici che si esercitano su ogni elemento lineare della V_2 — il sistema continuo è un sistema continuo perfettamente flessibile, che si dice *membrana*. Se, invece, la sollecitazione è rappresentata da un sistema di parametri, che, senza definire un tensore doppio della V_2, individuano gli sforzi specifici, e da un sistema rappresentante i momenti di questi sforzi, il sistema continuo è un sistema continuo imperfettamente flessibile, che si dice *lastra*: questi sistemi di parametri, che rappresentano sforzi e momenti relativi ad un elemento lineare della V_2, possono però, in meccanica classica, considerarsi tensori dello spazio euclideo tridimensionale in cui è immersa la V_2.

Come si vede, carattere specifico della perfetta flessibilità di un sistema continuo è quello della possibilità di caratterizzazione della sollecitazione con un unico tensore della varietà V_n costituita dal sistema continuo stesso, mentre l'imperfetta flessibilità non permette di caratterizzare la sollecitazione con un unico tensore della V_n, sollecitazione che può essere invece individuata da una coppia di tensori appartenenti ad una varietà V_m in cui la V_n è immersa.

I sistemi continui tridimensionali sono dunque, in meccanica classica, considerati come perfettamente flessibili.

La nozione di perfetta od imperfetta flessibilità, ora precisata, ci permette di affermare (in virtù di ragionevole definizione) che il cronotopo gravitazionale della relatività einsteiniana, essendo caratterizzato da vettori e tensori della V_4, ha i caratteri della perfetta flessibilità; mentre lo spazio dei più recenti tentativi dell'Einstein e del Mayer (1), volti allo scopo di fondere in un'unica geometria il campo gravitazionale ed il campo elettromagnetico, essendo caratterizzato da vettori e tensori di una V_5, che, se si vuole, possono considerarsi appartenere ad una V_m ($m \leq 15$) in cui sia la V_4 che la V_5 sono immerse (2), è uno spazio che ha i caratteri della imperfetta flessibilità.

Dalle cose dette scende che i sistemi materiali e gli spazi perfettamente flessibili godono di un privilegio in confronto agli imperfettamente flessibili: quello di poter essere caratterizzati mediante tensori della V_n che costituiscono, il che permette — quando questi sistemi sono considerati nella V_n — di esprimere le leggi meccaniche e geometriche che li governano in forma intrinseca, tale cioè che una legge vera per particolari coordinate della varietà, si mantenga tale per ogni cambiamento delle coordinate stesse.

Mi propongo di mostrare come, anche per sistemi continui aventi, o non aventi il carattere della perfetta flessibilità, considerati in una V_m qualsivoglia, sia possibile esprimere le leggi che li governano mediante equazioni intrinseche. Ciò mi è possibile, senza uscire dalla V_n che i sistemi continui costituiscono, individuando mediante un *insieme* di tensori della V_n vettori o tensori di una V_m, funzioni dei punti della V_n, che si considera immersa nella V_m, ed istituendo un calcolo differenziale assoluto, il quale operi, invece che sui

---

(1) « Sitzungsber. der preuss. Akademie der Wiss. Phys.-Math. Klasse », 1931, XXV, p. 541.

(2) Infatti, la V_4 è sempre immersa in uno spazio euclideo avente un numero di dimensioni non maggiore di 10, mentre la V_5 è sempre immersa in uno spazio euclideo avente un numero di dimensioni non maggiore di 15. Entrambe sono dunque sempre immerse in uno spazio euclideo avente un numero di dimensioni non maggiore di 15.

tensori della V_n, su gli insiemi di tensori della V_n che (collettivamente considerati) rappresentano tensori della V_m.

Calcolo differenziale assoluto di insiemi tensoriali.

1. **Insiemi tensoriali di prima classe.** — Consideriamo, da prima, una varietà V_n ad n dimensioni, immersa in una varietà V_{n+1} ad $n+1$ dimensioni. La configurazione di V_n in V_{n+1} sia assegnata. Indichiamo con $\boldsymbol{v}$ un vettore di V_{n+1}, funzione dei punti P di V_n. Sia $\boldsymbol{u}$ il componente di $\boldsymbol{v}$ tangente a V_n, $\boldsymbol{N}$ un vettore unitario di V_{n+1} normale a V_n, λ la componente di $\boldsymbol{v}$ secondo $\boldsymbol{N}$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{N}. \tag{1}$$

Poichè $\boldsymbol{u}$ è un vettore di V_n, funzione dei punti P di V_n e λ è uno scalare funzione dei punti P di V_n, $\boldsymbol{v}$ sarà individuato dall'*insieme* di un vettore di V_n e di uno scalare λ, che non variano al variare delle coordinate con le quali si caratterizza P in V_n. $\boldsymbol{v}$ sarà cioè individuato dall'*insieme* di un tensore di ordine uno di V_n e di un tensore di ordine zero pure di V_n. Precisamente: rispetto ad un sistema di coordinate $x^1,\ldots, x^n$, la metrica di V_n sia espressa dalla seguente forma:

$$ds^2 = a_{ik}dx^i dx^k, \quad a_{ik} = a_{ki} \qquad (i, k = 1,\ldots, n); \tag{2}$$

rappresentiamo, ad esempio, in forma covariante, $\boldsymbol{u}$ mediante il sistema u_r $(r = 1,\ldots, n)$; $\boldsymbol{v}$ sarà rappresentato dall'insieme che indicheremo così: (u_r, λ); oppure, più brevemente, ispirandoci ad una notazione di EINSTEIN e MAYER (1), indicheremo l'insieme considerato con v_ρ $(\rho = 1,\ldots, n, 0)$, essendo $v_\rho = u_r$, per $\rho = r = 1,\ldots, n$, $v_\rho = \lambda$, per $\rho = 0$. Scriveremo

$$v_\rho \equiv (u_r, \lambda) \tag{3}$$

e gli $n+1$ numeri u_r e λ che individuano l'insieme v_ρ sono vettorialmente così espressi:

$$u_r = \boldsymbol{u} \times \frac{\partial P}{\partial x^r} = \boldsymbol{v} \times \frac{\partial P}{\partial x^r} \text{ (2)}, \tag{3'}$$

$$\lambda = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{N}. \tag{3''}$$

Per evitare ogni equivoco potremo pensare i vettori che compaiono in (3')

(1) Loco citato, § 1.

(2) P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, *Analisi vettoriale generale*, vol. II; *Geometria differenziale*, Bologna, 1930, p. 284.

e (3″) in uno stesso spazio euclideo, nel quale compiere le operazioni indicate in (3′) e (3″).

Dalla definizione di eguaglianza di due vettori scende che, se $v_\rho^{(1)} \equiv (u_r^{(1)}, \lambda^{(1)})$ e $v_\rho^{(2)} \equiv (u_r^{(2)}, \lambda^{(2)})$, $v_\rho^{(1)} = v_\rho^{(2)}$ allora e allora soltanto che $u_r^{(1)} = u_r^{(2)}$, $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$. In particolare, $v_\rho \equiv (u_r, \lambda) = 0$ allora e allora soltanto che $u_r = 0$, $\lambda = 0$.

Manifestamente da (3′) e (3″) scende che se $\boldsymbol{v}$ è rappresentato da $v_\rho \equiv (u_r, \lambda)$, ed m è uno scalare, $m\boldsymbol{v}$ è rappresentato da $mv_\rho \equiv (mu_r, m\lambda)$; se $\boldsymbol{w}$ è rappresentato da $w_\rho \equiv (s_r, \mu)$, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ è rappresentato da $v_\rho + w_\rho \equiv (u_r + s_r, \lambda + \mu)$. Dunque gli insiemi considerati costituiscono un sistema lineare.

Consideriamo ora un' omografia vettoriale β, trasformante vettori di V_{n+1} in vettori di V_{n+1}. β corrisponderà ad un tensore doppio $\boldsymbol{T}$ di V_{n+1} (1). Osserviamo che β può sempre scomporsi nella somma di due omografie ξ ed η, tali che ξ trasformi i vettori di V_{n+1} in vettori di V_n e la diade η trasformi vettori di V_{n+1} in vettori normali a V_n. Allora

$$(4') \qquad \beta \frac{\partial P}{\partial x^r} \times \frac{\partial P}{\partial x^s} = \xi \frac{\partial P}{\partial x^r} \times \frac{\partial P}{\partial x^s} = u_{rs} \ (^2).$$

u_{rs} è un sistema doppio, rappresentante in forma covariante in V_n, rispetto alla metrica (2), il tensore corrispondente all' omografia ξ di V_n. Si ha pure, indicando con $D\beta$ e $A\beta$ la dilatazione e l' assiale di β (3):

$$\beta \frac{\partial P}{\partial x^r} \times \boldsymbol{N} = D\beta \frac{\partial P}{\partial x^r} \times \boldsymbol{N} + A\beta \frac{\partial P}{\partial x^r} \times \boldsymbol{N} = D\beta \boldsymbol{N} \times \frac{\partial P}{\partial x^r} - \frac{\partial P}{\partial x^r} \times A\beta \boldsymbol{N}.$$

Posto $D\beta \boldsymbol{N} = \boldsymbol{h}$, $A\beta \boldsymbol{N} = \boldsymbol{k}$, si ha, in virtù di (3′)

$$(4'') \qquad \beta \frac{\partial P}{\partial x^r} \times \boldsymbol{N} = h_r - k_r = \lambda_r',$$

dove λ_r' è un sistema semplice rappresentante covariantemente nella metrica (2) un vettore di V_n. Avremo anche:

$$(4''') \qquad \beta \boldsymbol{N} \times \frac{\partial P}{\partial x^s} = h_s + k_s = \lambda_s'',$$

dove λ_s'' è un sistema semplice rappresentante covariantemente nella metrica (2) un vettore di V_n. Avremo in fine, in virtù di (3″):

$$(4^{\text{IV}}) \qquad \beta \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} = \lambda,$$

---

(1) B. FINZI, *Matrici, tensori, omografie.* « Rend. Seminario Matematico e Fisico di Milano », vol. V, 1931.

(2) P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, loco citato, p. 287.

(3) P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, loco citato, p. 146.

dove λ è uno scalare, o, se si vuole, nella metrica (2), un tensore di ordine zero di V_n.

Concludendo dunque, in virtù di (4'), (4''), (4'''), (4^IV), l'omografia β, e quindi un tensore doppio $\boldsymbol{T}$ di V_{n+1} sono rappresentati dall'insieme

$$T_{\rho\sigma} \equiv (u_{rs},\ \lambda_r',\ \lambda_s'',\ \lambda) \tag{4}$$

costituito da un tensore doppio di V_n, due vettori (tensori di ordine uno) di V_n, uno scalare (tensore d'ordine zero di V_n). In (4) intendiamo, in conformità alla notazione (3), che $T_{\rho\sigma} = u_{rs}$ per $\rho = r = 1,\dots, n$, $\sigma = s = 1,\dots, n$; $T_{\rho\sigma} = \lambda_r'$ per $\rho = r = 1,\dots, n$, $\sigma = 0$; $T_{\rho\sigma} = \lambda_s''$ per $\rho = 0$, $\sigma = s = 1,\dots, n$; $T_{\rho\sigma} = \lambda$ per $\rho = 0$, $\sigma = 0$.

Analogamente si vede che un tensore di terzo ordine $\boldsymbol{T}$ di V_{n+1} è rappresentato dall'insieme:

$$T_{\rho\sigma\tau} \equiv (u_{rst},\ \lambda_{rs}',\ \lambda_{rt}'',\ \lambda_{st}''',\ \lambda_r',\ \lambda_s'',\ \lambda_t''',\ \lambda). \tag{5}$$

Se γ è l'iperomografia corrispondente a $\boldsymbol{T}$, in (5) è

$$\begin{aligned}
&u_{rst} = \gamma \frac{\partial P}{\partial x^r} \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^t},\\
&\lambda_{rs}' = \gamma \frac{\partial P}{\partial x^r} \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \boldsymbol{N}, \quad \lambda_{rt}'' = \gamma \frac{\partial P}{\partial x^r} \boldsymbol{N} \times \frac{\partial P}{\partial x^t}, \quad \lambda_{st}''' = \gamma \boldsymbol{N} \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^t},\\
&\lambda_r' = \gamma \frac{\partial P}{\partial x^r} \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}, \quad \lambda_s'' = \gamma \boldsymbol{N} \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \boldsymbol{N}, \quad \lambda_t''' = \gamma \boldsymbol{N}\boldsymbol{N} \times \frac{\partial P}{\partial x^t},\\
&\lambda = \gamma \boldsymbol{N}\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}.
\end{aligned}$$

In generale, in base alla formula

$$(n+1)^m = n^m + mn^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2} + \dots + mn + 1,$$

un tensore di ordine m in V_{n+1} sarà caratterizzato dall'*insieme* dei seguenti tensori di V_n: un tensore di ordine m, m tensori di ordine $m-1$, $\binom{m}{2}$ tensori di ordine $m-2,\dots$, m tensori di ordine uno (vettori), un tensore di ordine zero (scalare).

Manifestamente i vettori e tensori che intervengono nelle considerazioni precedenti, invece che in forma covariante, possono essere rappresentati in forma controvariante o mista. Le modificazioni da apportarsi alle formule scritte sono ovvie.

Gli enti ora definiti, atti a rappresentare mediante insiemi di tensori di V_n tensori di V_{n+1}, li diremo *insiemi tensoriali di prima classe.* Così (3) sarà un insieme tensoriale di prima classe di primo ordine, (4) un insieme tensoriale di prima classe di secondo ordine, (5) un insieme tensoriale di prima classe di terzo ordine, ecc.. Uno scalare potrà considerarsi come un insieme tensoriale di prima classe di ordine zero.

2. **Operazioni.** — Sugli enti definiti da (4), (5) ecc. si stabilisce l'eguaglianza come per gli enti (3), e per gli enti espressi da (3), (4), (5) ecc. possono definirsi le ordinarie operazioni algebriche del calcolo tensoriale. Così, $S_{\rho\sigma} = T^{(1)}_{\rho\sigma} + T^{(2)}_{\rho\sigma}$, se essendo $T^{(1)}_{\rho\sigma} \equiv (u^{(1)}_{rs}, \lambda'^{(1)}_r, \lambda''^{(1)}_s, \lambda^{(1)})$, $T^{(2)}_{\rho\sigma} \equiv (u^{(2)}_{rs}, \lambda'^{(2)}_r, \lambda''^{(2)}_s, \lambda^{(2)})$, $S_{\rho\sigma} \equiv (u^{(1)}_{rs} + u^{(2)}_{rs}, \lambda'^{(1)}_r + \lambda'^{(2)}_r, \lambda''^{(1)}_s + \lambda''^{(2)}_s, \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)})$; $M_{\rho\sigma} = mT_{\rho\sigma}$, se $M_{\rho\sigma} \equiv (mu_{rs}, m\lambda_r', m\lambda_s'', m\lambda)$. Ne segue allora che gli insiemi definiti da (4), (5) ecc. costituiscono, come gli insiemi definiti da (3) sistemi lineari.

È manifesto anche che dall'insieme rappresentato in forma mista da $T^\sigma_\rho \equiv (u^s_r, \lambda_r', \lambda''^s, \lambda)$, contraendo si ottiene lo scalare $T = u^r_r + \lambda$. Così pure, se $K_\tau \equiv (h_t, \mu)$, $P_{\rho\sigma\tau} = T_{\rho\sigma} K_\tau$, se $P_{\rho\sigma\tau} \equiv (u_{rs}h_t, u_{rs}\mu, \lambda_r'h_t, \lambda_s''h_t, \lambda_r'\mu, \lambda_s''\mu. \lambda h_t, \lambda\mu)$.

Notiamo che l'operazione prodotto può essere eseguita anche fra gli insiemi considerati e i tensori di V_n, dando luogo ad *insiemi misti*, che potremo rappresentare con una lettera munita di indici greci e di indici latini. Così, se $v_\rho \equiv (u_r, \lambda)$, se w_s è un vettore di V_n, potremo rappresentare con il simbolo $P_{\rho s}$ il prodotto $v_\rho w_s$, e $P_{\rho s} \equiv (u_r w_s, \lambda w_s)$.

3. **Insiemi tensoriali misti.** — Abbiamo detto che l'operazione prodotto porta alla introduzione di insiemi misti. In generale potremo pensare questi insiemi misti come insiemi rappresentanti omografie trasformanti vettori di V_n in vettori di V_{n+1}, e operanti soltanto su vettori di V_n, o come iperomografie trasformanti gruppi di vettori, parte di V_n, parte di V_{n+1}, in vettori di V_{n+1}, e operanti soltanto su questi gruppi di vettori. Infatti, se β è un'omografia operante soltanto su vettori di V_n, che essa trasforma in vettori di V_{n+1}, avremo, per (4') e (4''):

$$(6')\quad \beta \frac{\partial P}{\partial x^r} \times \frac{\partial P}{\partial x^s} = u_{rs}, \qquad (6'')\quad \beta \frac{\partial P}{\partial x^r} \times N = \lambda_r;$$

β è dunque rappresentata dall'insieme

$$(6)\qquad T_{r\sigma} \equiv (u_{rs}, \lambda_r).$$

Così pure, se γ è un'iperomografia operante soltanto su coppie di vettori di V_n, che essa trasforma in vettori di V_{n+1}, avremo:

$$(7')\quad \gamma \frac{\partial P}{\partial x^r} \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^t} = u_{rst}, \qquad (7'')\quad \gamma \frac{\partial P}{\partial x^r} \frac{\partial P}{\partial x^s} \times N = \lambda_{rs};$$

γ è dunque rappresentata dall'insieme

$$(7)\qquad T_{rs\tau} \equiv (u_{rst}, \lambda_{rs}).$$

Se invece γ è un'iperomografia operante soltanto su coppie di vettori, il primo di V_n, il secondo di V_{n+1}, che essa trasforma in vettori di V_{n+1}, avremo:

$$(8') \quad \gamma \frac{\partial P}{\partial x^r} \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^t} = u_{rst}, \qquad (8''') \quad \gamma \frac{\partial P}{\partial x^r} \boldsymbol{N} \times \frac{\partial P}{\partial x^t} = \lambda_{rt}'',$$

$$(8'') \quad \gamma \frac{\partial P}{\partial x^r} \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \boldsymbol{N} = \lambda_{rs}', \qquad (8^{\text{IV}}) \quad \gamma \frac{\partial P}{\partial x^r} \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} = \lambda_r;$$

γ è dunque rappresentata dall'insieme

$$(8) \qquad T_{r\sigma\tau} \equiv (u_{rst},\ \lambda_{rs}',\ \lambda_{rt}'',\ \lambda_r).$$

È superfluo dire come possano considerarsi, in generale, insiemi di tensori di V_n, rappresentanti enti analoghi a quelli ora considerati.

4. **Derivazione di insiemi tensoriali di prima classe.** — Mostriamo come per gli insiemi tensoriali di prima classe, costituiti da tensori di V_n (collettivamente considerati), possa definirsi l'operazione di derivazione, quando si assegnino *due* forme differenziali quadratiche, che si considerano invarianti rispetto ai cambiamenti di coordinate.

Incominciamo a considerare un vettore $\boldsymbol{v}$ di V_{n+1}, funzione dei punti P di V_n avente metrica (2). Passiamo da un punto P di V_n ad un punto $P+dP$ pure di V_n. Trasportando per parallelismo (1) in V_{n+1} $\boldsymbol{v}(P+dP)$ in P, otterremo in P un vettore di V_{n+1}: la differenza fra questo vettore e $\boldsymbol{v}(P)$ è un vettore di V_{n+1}, che coincide con il componente su V_n dell'incremento subito da $\boldsymbol{v}$, passando da P a $P+dP$. Indichiamo tale componente con $d^*\boldsymbol{v}$. d^* è dunque ciò che Boggio (2), con espressione felice, chiama simbolo di differenziale sulla varietà V_{n+1}.

Consideriamo l'omografia $\frac{d^*\boldsymbol{v}}{dP}$: essa opera soltanto su vettori di V_n, generando vettori di V_{n+1}. Essa sarà dunque caratterizzata da un insieme misto di tensori di V_n, che potrà dirsi insieme derivato dell'insieme che caratterizza $\boldsymbol{v}$. Proponiamoci di determinare questo insieme misto. All'uopo, per quanto dicemmo al § 3 (form. (6') e (6'')), basta calcolare

$$(9) \quad \frac{d^*\boldsymbol{v}}{dP} \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^r} \qquad \text{e} \qquad (10) \quad \frac{d^*\boldsymbol{v}}{dP} \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \boldsymbol{N},$$

ossia

$$(9') \quad \frac{\partial^*\boldsymbol{v}}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^r} \qquad \text{e} \qquad (10') \quad \frac{\partial^*\boldsymbol{v}}{\partial x^s} \times \boldsymbol{N}.$$

(1) T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*. Roma 1925, p. 118.
(2) P. Burgatti, T. Boggio, C. Burali-Forti, loco citato, p. 177.

Ma $d^*\boldsymbol{v}$ differisce dall'ordinario differenziale $d\boldsymbol{v}$ per un vettore normale a V_{n+1}, normale quindi a $\frac{\partial P}{\partial x^r}$ e a $\boldsymbol{N}$. Per individuare l'insieme misto corrispondente a $\frac{d^*\boldsymbol{v}}{dP}$ basterà dunque calcolare le seguenti due espressioni:

$$(9'') \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^r}, \qquad (10'') \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^s} \times \boldsymbol{N}.$$

Calcoliamo da prima l'espressione (9''). In virtù di (1), avremo:

$$(11) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^r} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^r} + \lambda \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^r}.$$

Il secondo membro della (11) risulta somma di due termini. Incominciamo ad occuparci del primo.

Esso coincide con la componente covariante del vettore $\frac{\partial_v \boldsymbol{u}}{\partial x^s}$, dove con tal simbolo si indichi la derivata sulla varietà V_n di $\boldsymbol{u}$ rispetto ad x^s (¹). Dunque (²)

$$(12) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^r} = u_{r|s},$$

dove $u_{r|s}$ è un sistema doppio rappresentante in forma covariante, nella metrica (2), il tensore derivato del vettore $\boldsymbol{u}$.

Occupiamoci ora del secondo termine della (11).

Osserviamo che se la V_n è una V_2 immersa in uno spazio euclideo S_3, se si considera la seconda forma differenziale quadratica $d\sigma^2 = b_{rs}dx^r dx^s$ ($b_{rs} = b_{sr}$), che insieme alla (2) caratterizza la configurazione geometrica della V_2 immersa in S_3, $-\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^r}$ non è altro che il coefficiente b_{rs} di questa forma differenziale quadratica (³).

Se allora riteniamo, come nel caso di una V_2, che la configurazione di una generica V_n immersa in una V_{n+1} sia nota quando si conosca la metrica definita da (2) e l'incremento subito dall'elemento lineare, espresso da (2), quando si passa dalla V_n ad un'altra $\overline{V}_n$, pure appartenente a V_{n+1}, parallela ed infinitamente vicina, tale configurazione è ancora definita dalla (2) e da una forma differenziale quadratica

$$(13) \qquad d\sigma^2 = b_{rs}dx^r dx^s, \quad b_{rs} = b_{sr} \qquad (r, s = 1,..., n),$$

(¹) P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, loco citato, p. 177 e p. 284.

(²) P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, loco citato, p. 285.

(³) L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. I, parte I, Pisa 1920, p. 166. Cfr. BURALI-FORTI, *Fondamenti per la Geometria differenziale su di una superficie col metodo vettoriale generale.* « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », t. XXXIII, n. 46.

nella quale

$$b_{rs} = -\frac{\partial N}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^r}. \tag{14}$$

Infatti, se $\overline{P}$ è un punto di $\overline{V}_n$, $\overline{P} - P = \varepsilon N$, essendo ε una costante infinitesima. Da questa relazione differenziando e quadrando, per (14) e (13) si trae $\overline{ds}^2 - ds^2 = 2\varepsilon dN \times dP = -2\varepsilon d\sigma^2$. Questa relazione conferma appunto quanto avevamo annunciato.

Osserviamo che assegnata, non soltanto la metrica di V_n, ma la sua configurazione in V_{n+1}, b_{rs} ha carattere doppio covariante rispetto a tutte le trasformazioni di variabili che lasciano inalterate la (2) e la (13): b_{rs} rappresenta dunque un tensore doppio di V_n, che accanto al tensore fondamentale, rappresentato covariantemente da a_{rs}, caratterizza la configurazione di V_n in V_{n+1} (¹). È appunto questo tensore, individuato da b_{rs}, che, in virtù di (14) permette di valutare il secondo termine di (11), valutazione che è dunque possibile quando, accanto alla prima forma differenziale quadratica (2), se ne assegni una seconda, la (13); forme che si considerano invarianti rispetto ai cambiamenti di coordinate.

Il tensore rappresentato da b_{rs} permette di calcolare le curvature delle linee di V_n. Così, ad esempio nel caso di una V_1 immersa in una S_2 euclidea (linea piana), N coincide con la normale alla linea e, posto $ds = dx^1$, $\frac{dP}{dx^1}$ è il vettore unitario tangente t e $b_{11} = -\frac{dN}{ds} \times t = \frac{1}{\rho}$, eguale cioè alla curvatura della linea piana. Nel caso in cui la V_1 è immersa in una V_2 anche non euclidea, posto $ds = dx^1$, $\frac{dP}{dx^1} = t$ e $b_{11} = -\frac{dN}{ds} \times t = \frac{1}{R}$, eguale cioè alla curvatura normale della linea tracciata su V_2. Così pure, ad esempio, nel caso di una V_2 immersa in uno spazio euclideo S_3, si ha notoriamente che la curvatura di una generica sezione normale di V_2 è così espressa (²):

$$\frac{1}{R} = \frac{d\sigma^2}{ds^2} = \frac{b_{ik}dx^i dx^k}{a_{ik}dx^i dx^k} \text{ (³)}.$$

Torniamo ora finalmente alla relazione (11). Da essa, in virtù di (12) e (14),

---

(¹) Si intende che a_{rs} e b_{rs} non sono qualunque: essi debbono ubbidire alle condizioni di integrabilità, che per $n = 2$ sono le condizioni note sotto il nome di GAUSS e CODAZZI. (L. BIANCHI, loco citato, p. 174).

(²) L. BIANCHI, loco citato, p. 192.

(³) È pure noto che la curvatura totale $K = \frac{b}{a}$ e la curvatura media $H = -b_i^i$. (L. BIANCHI, loco citato, p. 197).

avremo:

(15) $$\frac{\partial v}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^r} = u_{r|s} - \lambda b_{rs} = u_{sr},$$

e u_{sr} rappresenta in forma covariante un tensore doppio di V_n.

Calcoliamo ora l'espressione (10''). Da (1) scende:

$$\frac{\partial v}{\partial x^s} \times N = \frac{\partial u}{\partial x^s} \times N + \frac{\partial \lambda}{\partial x^s} + \lambda \frac{\partial N}{\partial x^s} \times N.$$

Ma $N \times N = 1$, dunque $\frac{\partial N}{\partial x^s} \times N = 0$, e quindi

(16) $$\frac{\partial v}{\partial x^s} \times N = \frac{\partial \lambda}{\partial x^s} + \frac{\partial u}{\partial x^s} \times N.$$

Ma $u \times N = 0$, dunque $\frac{\partial u}{\partial x^s} \times N = -u \times \frac{\partial N}{\partial x^s}$.

Ma (1) $u = u^t \frac{\partial P}{\partial x^t}$, dunque, in virtù di (14),

(17) $$\frac{\partial u}{\partial x^s} \times N = u^t b_{ts}.$$

Ponendo (17) in (16) si ha:

(18) $$\frac{\partial v}{\partial x^s} \times N = \frac{\partial \lambda}{\partial x^s} + u^t b_{ts} = \lambda_s,$$

e λ_s è un tensore semplice di V_n (vettore) rappresentato in forma covariante.

Concludendo dunque, l'omografia $\frac{d^* v}{dP}$, operante su vettori di V_n e generante vettori di V_{n+1}, è individuata dall'insieme misto che indicheremo con $v_{\rho|s}$, essendo

(19) $$v_{\rho|s} \equiv (u_{sr},\ \lambda_s) = \left(u_{r|s} - \lambda b_{rs},\ \frac{\partial \lambda}{\partial x^s} + u^t b_{ts}\right).$$

L'insieme (19) rappresenta dunque in forma covariante l'*insieme derivato* dell'insieme (3).

In modo perfettamente analogo a quello seguito per derivare l'insieme $v_\rho \equiv (u_r, \lambda)$, si deriva l'insieme $T_{\rho\sigma} \equiv (u_{rs},\ \lambda_r',\ \lambda_s',\ \lambda)$, rappresentante un tensore doppio di V_{n+1} funzione dei punti di V_n. Si ottiene:

(20) $$T_{\rho\sigma|i} \equiv (u_{irs},\ \lambda_{ir}',\ \lambda_{is}'',\ \lambda_i),$$

essendo

(20') $$\begin{cases} u_{irs} = u_{rs|i} - \lambda'_r b_{si} - \lambda''_s b_{ri}, \\ \lambda'_{ir} = \lambda'_{r|i} + u_r{}^t b_{ti} - \lambda b_{ri}, \qquad \lambda''_{is} = \lambda''_{s|i} + u_s{}^t b_{ti} - \lambda b_{si}, \\ \lambda_i = \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} + \lambda'^t b_{ti} + \lambda''^t b_{ti}. \end{cases}$$

(1) P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, loco citato. p. 284.

Così pure si deriva l'insieme misto $T_{\rho s} \equiv (u_{rs},\ \lambda_s)$, ottenendo

(21) $$T_{\rho s|i} \equiv (u_{irs},\ \lambda_{is}),$$

dove

(21') $$u_{irs} = u_{rs|i} - \lambda_s b_{ri}, \quad \lambda_{is} = \lambda_{s|i} + u_s{}^t b_{ti}.$$

Analogamente si deriva un insieme tensoriale qualsivoglia.

Osservazione. — È utile osservare quanto segue: Si consideri l'insieme $v_\rho \equiv (u_r,\ \lambda)$ e si tratti v_ρ come un vettore di V_{n+1}. Sapremo derivare v_ρ se conosceremo i simboli di Christoffel $\left\{ {\tau \atop \rho s} \right\}$, che sono i coefficienti di trasporto per parallelismo in V_{n+1}. Orbene, se, per $\rho = r = 1,\dots,\ n$, $\tau = t = 1,\dots,\ n$, poniamo

(22') $$\left\{ {\tau \atop \rho s} \right\} = \left\{ {t \atop r s} \right\},$$

eguale cioè ai coefficienti di trasporto in V_n avente la metrica (2); se, per $\rho = r = 1,\dots,\ n$, $\tau = 0$, poniamo

(22'') $$\left\{ {\tau \atop \rho s} \right\} = b_{rs}\ ;$$

se, per $\rho = 0$, $\tau = t = 1,\dots,\ n$, poniamo

(22''') $$\left\{ {\tau \atop \rho s} \right\} = -\, b_s{}^t\ ;$$

se, per $\rho = 0$, $\tau = 0$, poniamo

(22$^{\text{IV}}$) $$\left\{ {\tau \atop \rho s} \right\} = 0:$$

la derivata covariante di v_ρ coincide con $v_{\rho|s}$ definito da (19).

Infatti, applicando l'ordinaria regola di derivazione covariante, si ha:

$$v_{\rho|s} = \frac{\partial v_\rho}{\partial x^s} - \left\{ {\tau \atop \rho s} \right\} v_\tau,$$

ossia

(23) $$v_{\rho|s} = \frac{\partial v_\rho}{\partial x^s} - \left\{ {t \atop \rho s} \right\} v_t - \left\{ {0 \atop \rho s} \right\} v_0,$$

ossia, posto $v_{\rho|s} \equiv (u_{sr},\ \lambda_s)$, $v_\rho \equiv (u_r,\ \lambda)$, ponendo in (23) $\rho = r = 1,\dots,\ n$, per (22') e (22'') si ha:

$$u_{sr} = u_{r|s} - \lambda b_{rs}\ ;$$

ponendo in (23) $\rho = 0$, per (22''') e (22$^{\text{IV}}$) si ha:

$$\lambda_s = \frac{\partial \lambda}{\partial x^s} + b_s{}^t u_t = \frac{\partial \lambda}{\partial x^s} + u^t b_{ts}. \qquad \text{C. v. d.}$$

Analogamente si perviene a (20), (20') e (21), (21').

5. **Trasporto.** — Passiamo da un punto P di V_n ad un punto $P + dP$ pure di V_n: l'incremento subito dall'insieme $v_\rho \equiv (u_r, \lambda)$ sulla varietà V_{n+1} sarà espresso da $\frac{d^*v}{dP} dP$, ossia da

$$d^*v_\rho \equiv (u_{sr} dx^s, \ \lambda_s dx^s),$$

dove u_{sr} e λ_s sono espressi da (15) e (18); cioè, per (19):

$$d^*v_\rho = v_{\rho/s} dx^s. \tag{24}$$

Scriveremo dunque, per (15) e (18),

$$d^*v_\rho \equiv \left(du_r - \left\{ {t \atop rs} \right\} u_t dx^s - \lambda b_{rs} dx^s, \ d\lambda + u^t b_{ts} dx^s\right). \tag{25}$$

La (25) mostra in modo esplicito che sarà nota la legge di trasporto di un insieme tensoriale (3) lungo una linea di V_n quando si conoscano le due forme differenziali quadratiche (2) e (13), che, sotto opportune condizioni di integrabilità, definiscono la metrica e la configurazione di V_n in V_{n+1}. Conoscendo le due forme (2) e (13), la metrica ed il trasporto degli enti (3) saranno individuati, sarà dunque completamente individuata la geometria degli enti considerati.

In modo perfettamente analogo si stabilisce la legge di trasporto degli enti definiti da (4), (5), ecc., individuandone completamente la geometria.

In particolare, considerando per semplicità l'insieme (3), esso sarà trasportato per parallelismo se $d^*v_\rho = 0$, se cioè

$$du_r = \left(\left\{ {t \atop rs} \right\} u_t + b_{rs}\lambda\right) dx^s, \quad d\lambda = - b_{ts} u^t. \tag{26}$$

6. **Insiemi tensoriali notevoli di prima classe.** — Consideriamo un vettore $\boldsymbol{v}$ di V_{n+1}, appartenente a V_n: sia cioè $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$. $\boldsymbol{v}$ sarà rappresentato dall'insieme tensoriale

$$v_\rho \equiv (u_r, \ 0). \tag{27}$$

Derivando, per (19), si ha:

$$v_{\rho/s} \equiv (u_{r/s}, \ u^t b_{ts}). \tag{28}$$

L'insieme ottenuto *non* caratterizza un tensore di V_n, ma è bensì un insieme tensoriale misto formato da un tensore doppio di V_n e da un vettore di V_n. Il primo tensore coincide con il tensore derivato del vettore $\boldsymbol{u}$ appartenente a V_n. Dunque la derivata dell'insieme (27) non coincide con la derivata del vettore $\boldsymbol{u}$ di V_n.

Consideriamo il vettore $\boldsymbol{N}$ di V_{n+1}: esso è rappresentato dall'insieme

$$N_\rho \equiv (0, \ 1). \tag{29}$$

Derivando, per (19), si ha:

(30) $$N_{\rho/s} \equiv (-b_{rs},\ 0).$$

Da (30) scende un notevole significato del tensore doppio $\boldsymbol{b}$ che rappresenta le curvature delle linee di V_n.

Consideriamo l'omografia unità: essa è rappresentata dall'insieme (form. (4))

$$\delta_{\rho\sigma} \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial x^r} \times \frac{\partial P}{\partial x^s},\ \frac{\partial P}{\partial x^r} \times \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{N} \times \frac{\partial P}{\partial x^s},\ \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}\right),$$

ossia [1]

(31) $$\delta_{\rho\sigma} \equiv (a_{rs},\ 0,\ 0,\ 1).$$

Derivando per (20), (20'), si ha (ricordando il teorema di RICCI):

(32) $$\delta_{\rho\sigma/i} = 0.$$

La (32) generalizza il teorema di RICCI.

Consideriamo in V_3 l'iperomografia ε, che applicata ad un vettore $\boldsymbol{h}$ genera l'omografia assiale $\boldsymbol{h}\wedge$: essa è caratterizzata da un tensore triplo di V_3, che rappresenteremo con $\varepsilon_{\rho\sigma\tau}$, ossia con il seguente insieme di tensori di V_2:

(33) $$\varepsilon_{\rho\sigma\tau} \equiv (u_{rst},\ \lambda_{rs}',\ \lambda_{rt}'',\ \lambda_{st}''';\ \lambda_r',\ \lambda_s'',\ \lambda_t''',\ \lambda),$$

essendo

(33') $$\left\{\begin{aligned}
u_{rst} &= \varepsilon \frac{\partial P}{\partial x^r} \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^t} = \frac{\partial P}{\partial x^r} \wedge \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^t} = 0,\\
\lambda_{rs}' &= \varepsilon \frac{\partial P}{\partial x^r} \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \boldsymbol{N} = \frac{\partial P}{\partial x^r} \wedge \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \boldsymbol{N} = \pm \sqrt{a} = \varepsilon_{rs},\\
\lambda_{rt}'' &= \varepsilon \frac{\partial P}{\partial x^r} \boldsymbol{N} \times \frac{\partial P}{\partial x^t} = \frac{\partial P}{\partial x^r} \wedge \boldsymbol{N} \times \frac{\partial P}{\partial x^t} = -\varepsilon_{rt},\\
\lambda_{st}''' &= \varepsilon \boldsymbol{N} \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^t} = \boldsymbol{N} \wedge \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^t} = \varepsilon_{st},\\
\lambda_r' &= \varepsilon \frac{\partial P}{\partial x^r} \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} = \frac{\partial P}{\partial x^r} \wedge \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} = 0,\\
\lambda_s'' &= \varepsilon \boldsymbol{N} \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N} \wedge \frac{\partial P}{\partial x^s} \times \boldsymbol{N} = 0,\\
\lambda_t''' &= \varepsilon \boldsymbol{N}\boldsymbol{N} \times \frac{\partial P}{\partial x^t} = \boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{N} \times \frac{\partial P}{\partial x^t} = 0,\\
\lambda &= \varepsilon \boldsymbol{N}\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} = 0,
\end{aligned}\right.$$

ossia

(33'') $$\varepsilon_{\rho\sigma\tau} \equiv (0,\ \varepsilon_{rs},\ -\varepsilon_{rt},\ \varepsilon_{st},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Se ε opera su vettori di V_2 generando omografie assiali di V_3, ε è carat-

[1] P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, loco citato, p. 279.

terizzata dal seguente insieme tensoriale misto

(34) $$\varepsilon_{i\rho\sigma} \equiv (0,\ \varepsilon_{ir},\ -\varepsilon_{is},\ 0).$$

In generale, è facile esprimere, in modo analogo, il tensore ε di V_{n+1} mediante tensori ε di V_n (¹).

7. **Operatori differenziali.** — *Gradiente:* Sia φ uno scalare, tensore d'ordine zero di V_{n+1}, funzione dei punti P di V_n; cioè $\varphi = \varphi(x^1, \ldots, x^n)$. Il gradiente di φ è un vettore di V_{n+1} rappresentato dall'insieme $\varphi_\rho \equiv (u_r, \lambda)$, dove $u_r = \text{grad}\, \varphi \times \frac{\partial P}{\partial x^r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^r}$, $\lambda = \text{grad}\, \varphi \times N = 0$. Dunque

(35) $$\varphi_\rho \equiv \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^r},\ 0\right).$$

Esso coincide, per $n = 2$, con il gradiente superficiale, quale è stato definito da BURGATTI e MARCOLONGO (²). Il vettore u_r di V_n che lo caratterizza coincide con il gradiente di φ, quale si considera nell'ordinario calcolo differenziale assoluto.

Divergenza: Sia v un vettore di V_{n+1}, rappresentato dall'insieme $v_\rho \equiv (u_r, \lambda)$. Derivando, si ha $v_\rho{}^{/i} \equiv (u_r{}^i, \lambda^i)$, e quindi

$$\text{div}\, v = v_i{}^{/i} = u_i{}^i,$$

e, per (19)

(36) $$\text{div}\, v = u_i{}^{/i} - \lambda b_i{}^i.$$

La divergenza ora definita coincide con quella che, per $n = 2$, BURGATTI e MARCOLONGO chiamarono divergenza superficiale (³). In particolare, se v è un vettore di V_n, $v = u$, e la (36) diviene

(36′) $$\text{div}\, v = u_i{}^{/i}.$$

La (36′) coincide con la nota definizione di divergenza del calcolo differenziale assoluto.

Rotore: Sia v un vettore di V_3, funzione dei punti di V_2, rappresentato dall'insieme $v_\rho \equiv (u_r, \lambda)$. Derivando si ha: $v_{\rho/i} \equiv (u_{ir}, \lambda_i)$. Da (34) scende allora che rot v è il vettore di V_{n+1} rappresentato dall'insieme $\omega_\sigma \equiv (w_s, \nu)$ tale che:

$$w_s = -\varepsilon_{is}\lambda^i, \quad \nu = \varepsilon_{ir} u^{ir}.$$

Per (19), dunque,

(37) $$\omega_\sigma \equiv (-\varepsilon_{is}(\lambda^{/i} + u^t b_t{}^i),\ \varepsilon_{ir}(u^{r/i} - \lambda b^{ri})).$$

(¹) Derivando gli insiemi ε... si ottengono insiemi nulli, come facilmente si può verificare.

(²) P. BURGATTI, *I teoremi del gradiente,...*. « Memoria dell'Accademia delle Scienze di Bologna », 1917; R. MARCOLONGO, *Su alcuni operatori superficiali.* « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XXVI, 1917.

(³) P. BURGATTI, loco ultimo citato; R. MARCOLONGO, loco citato.

La (37) coincide con la definizione di rotore superficiale di BURGATTI e MARCOLONGO [1]. Nell'ipotesi $\lambda = 0$, nell'ipotesi cioè che $\boldsymbol{v}$ coincida con un vettore $\boldsymbol{u}$ di V_2, da (37) si ha:

$$\omega_\sigma \equiv (-\, \varepsilon_{is} u^t b^i{}_t,\ \varepsilon_{ir} u^{r|i}). \tag{37'}$$

Lo scalare

$$\nu = \varepsilon_{ir} u^{r|i} \tag{38}$$

dell'insieme ω_σ coincide, nel caso in esame, con lo scalare rot $\boldsymbol{u}$ del calcolo differenziale assoluto [2]. Però, si noti, il rotore di un vettore $\boldsymbol{v}$ di V_3, tangente a V_2, è l'insieme ω_σ, definito da (37'), che *non* coincide con lo scalare ν, definito da (38), che rappresenta il rotore di un vettore $\boldsymbol{u}$ di V_2, coincidente con $\boldsymbol{v}$. È manifesto come si estendano le considerazioni svolte nel caso $n = 2$, considerando una V_n generica [3].

8. **Insiemi tensoriali di classe 2, 3, ecc.** — È facile generalizzare quanto abbiamo stabilito per gli insiemi tensoriali di classe uno. Occupiamoci degli insiemi tensoriali di *seconda classe.*

Si consideri una varietà V_n immersa in una varietà ad $n + 2$ dimensioni. Sia $\boldsymbol{v}$ un vettore di V_{n+2}, funzione dei punti P di V_n. Sia $\boldsymbol{u}$ il componente di $\boldsymbol{v}$ tangente a V_n; siano $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{B}$ due vettori unitari di V_{n+2} normali fra di loro e normali a V_n; λ e μ le componenti di $\boldsymbol{v}$ secondo $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{B}$. Sarà:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{N} + \mu \boldsymbol{B}. \tag{39}$$

$\boldsymbol{v}$ sarà individuato dall'insieme costituito da un vettore di V_n e da due scalari. Da (39) si ha:

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{v} \times \dfrac{\partial P}{\partial x^r} = \boldsymbol{u} \times \dfrac{\partial P}{\partial x^r} = u_r, \\ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{N} = \lambda, \quad \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \mu; \end{array}\right. \tag{40'}$$

cioè $\boldsymbol{v}$ è rappresentato dall'insieme costituito da un tensore di ordine uno di V_n (che in forma covariante, rispetto alla metrica (2), è rappresentato da u_r) e da due scalari, pur essi tensori di ordine zero di V_n. Scriveremo:

$$v_{\bar\rho} \equiv (u_r,\ \lambda,\ \mu) \qquad (\bar\rho = 1, \ldots, n, 0, \bar 0), \tag{40}$$

dove per $\bar\rho = r = 1, \ldots, n$, $v_{\bar\rho} = u_r$; per $\bar\rho = 0$, $v_{\bar\rho} = \lambda$; per $\bar\rho = \bar 0$, $v_{\bar\rho} = \mu$.

---

[1] P. BURGATTI, loco ultimo citato; R. MARCOLONGO, loco citato.

[2] U. CISOTTI, *Sul rotore dei tensori.* « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. VII, 1928, p. 169. Cfr. B. FINZI, *Meccanica dei sistemi continui non euclidei.* « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXII, p. 859.

[3] U. CISOTTI, loco citato.

Analogamente, se β è un'omografia trasformante vettori di V_{n+2} in vettori di V_{n+2}, a β corrisponderà un tensore doppio di V_{n+2}, che potrà rappresentarsi con il seguente insieme di tensori di V_n:

(41) $$T_{\bar\rho\,\bar\sigma} \equiv (u_{rs},\ \lambda_r',\ \lambda_s'',\ \mu_r',\ \mu_s'',\ \lambda',\ \mu',\ \lambda,\ \mu),$$

dove

(41') $$\begin{cases} u_{rs} = \beta \dfrac{\partial P}{\partial x^r} \times \dfrac{\partial P}{\partial x^s}, & \\ \lambda_r' = \beta \dfrac{\partial P}{\partial x^r} \times \boldsymbol{N}, & \lambda_s'' = \beta \boldsymbol{N} \times \dfrac{\partial P}{\partial x^s}, \\ \mu_r' = \beta \dfrac{\partial P}{\partial x^r} \times \boldsymbol{B}, & \mu_s'' = \beta \boldsymbol{B} \times \dfrac{\partial P}{\partial x^s}, \\ \lambda' = \beta\, \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{N}, & \mu' = \beta \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{B}, \\ \lambda = \beta\, \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}, & \mu = \beta \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}. \end{cases}$$

$T_{\bar\rho\,\bar\sigma}$ è dunque costituito da un tensore doppio di V_n, 4 vettori (tensori d'ordine uno) di V_n e 4 scalari (tensori d'ordine zero di V_n). In (41) intendiamo, in conformità alla notazione (40) che $T_{\bar\rho\,\bar\sigma} = u_{rs}$, per $\bar\rho = r = 1,\dots, n$, $\bar\sigma = s = 1,\dots, n$; $T_{\bar\rho\,\bar\sigma} = \lambda_r'$, per $\bar\rho = r = 1,\dots, n$, $\bar\sigma = 0$; $T_{\bar\rho\,\bar\sigma} = \lambda_s''$, per $\bar\rho = 0$, $\bar\sigma = s = 1,\dots, n$; $T_{\bar\rho\,\bar\sigma} = \mu_r'$, per $\bar\rho = r = 1,\dots, n$, $\bar\sigma = \bar 0$, ecc..

Analogamente si rappresenta un tensore di terzo ordine di V_{n+2} mediante l'insieme $T_{\bar\rho\,\bar\sigma\,\bar\tau}$ di tensori di V_n. In generale, in base alla formula

$$(n+2)^m = n^m + 2mn^{m-1} + 4\binom{m}{2} n^{m-2} + \dots + 2^{n-1}mn + 2^n,$$

un tensore di ordine m in V_{n+2} sarà caratterizzato dall'*insieme* dei seguenti tensori di V_n: un tensore di ordine m, $2m$ tensori di ordine $m-1$, $4\binom{m}{2}$ tensori di ordine $m-2,\dots$, $2^{n-1}m$ tensori di ordine uno (vettori), 2^n tensori di ordine zero (scalari).

Gli enti ora definiti, atti a rappresentare mediante insiemi di tensori di V_n tensori di V_{n+2}, li diremo insiemi tensoriali di *seconda classe*. Così (40) sarà un insieme tensoriale di seconda classe di primo ordine, (41) un insieme tensoriale di seconda classe di secondo ordine, ecc..

Manifestamente, come si sono definiti insiemi tensoriali di prima e di seconda classe, si possono definire insiemi tensoriali di classe c, rappresentanti tensori di V_{n+c} mediante tensori di V_n. Per $c = 0$, si ottengono, in particolare, gli ordinari tensori, che possono essere pensati come insiemi tensoriali di classe zero, formati cioè da un unico tensore.

Su gli insiemi tensoriali di classe qualsivoglia si definisce l'eguaglianza e le operazioni addizione e prodotto per un numero, in modo del tutto identico a quanto si è fatto per gli insiemi tensoriali di prima classe. Risulta così che gli insiemi tensoriali di una data classe e di un dato ordine costituiscono un sistema lineare.

Anche le altre operazioni algebriche del calcolo tensoriale, già stabilite per gli insiemi di prima classe, si estendono ad insiemi di classe qualsivoglia. Si possono così considerare anche insiemi tensoriali misti di classe qualsivoglia. Ad esempio, i sistemi tensoriali misti di seconda classe, rappresentabili con i simboli $T_{\bar{\rho}\, s}$ ($\bar{\rho}=1,\dots, n, 0, \bar{0},\ s=1,\dots, n$), $T_{\bar{\rho}\,\sigma}$ ($\bar{\rho}=1,\dots, n, 0, \bar{0},\ \sigma=1,\dots, n, 0$).

9. **Derivazione di insiemi tensoriali di classe 2, 3, ecc.** — Fissiamo, per semplicità, la nostra attenzione sugli insiemi tensoriali di classe due, rappresentanti vettori o tensori di V_{n+2}, funzioni dei punti di V_n, ed occupiamoci della loro derivazione.

Consideriamo un vettore v di V_{n+2}, funzione dei punti P di V_n. Passiamo da un punto P di V_n ad un punto $P+dP$ pure di V_n. Se d^* è simbolo di differenziale sulla varietà V_{n+2}, si consideri l'omografia $\frac{d^*v}{dP}$, operante su vettori di V_n, che essa trasforma in vettori di V_{n+2}. Questa omografia è caratterizzata dal seguente insieme misto tensoriale di classe due di secondo ordine:

$$v_{\bar{\rho}|s} \equiv (u_{sr},\ \lambda_s,\ \mu_s), \tag{42}$$

dove, per (39),

$$\left\{\begin{aligned} u_{sr} &= \frac{d^*v}{dP}\frac{\partial P}{\partial x^s}\times\frac{\partial P}{\partial x^r} = \frac{\partial v}{\partial x^s}\times\frac{\partial P}{\partial x^r} = \frac{\partial u}{\partial x^s}\times\frac{\partial P}{\partial x^r} + \lambda\frac{\partial N}{\partial x^s}\times\frac{\partial P}{\partial x^r} + \mu\frac{\partial B}{\partial x^s}\times\frac{\partial P}{\partial x^r},\\ \lambda_s &= \frac{d^*v}{dP}\frac{\partial P}{\partial x^s}\times N = \frac{\partial v}{\partial x^s}\times N = \frac{\partial u}{\partial x^s}\times N + \frac{\partial\lambda}{\partial x^s} + \mu\frac{\partial B}{\partial x^s}\times N,\\ \mu_s &= \frac{d^*v}{dP}\frac{\partial P}{\partial x^s}\times B = \frac{\partial v}{\partial x^s}\times B = \frac{\partial u}{\partial x^s}\times B + \frac{\partial\mu}{\partial x^s} + \lambda\frac{\partial N}{\partial x^s}\times B.\end{aligned}\right. \tag{42'}$$

Ma

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial x^s}\times\frac{\partial P}{\partial x^r} = u_{r|s},\\ \frac{\partial u}{\partial x^s}\times N = -u\times\frac{\partial N}{\partial x^s} = -u^t\frac{\partial P}{\partial x^t}\times\frac{\partial N}{\partial x^s},\\ \frac{\partial u}{\partial x^s}\times B = -u\times\frac{\partial B}{\partial x^s} = -u^t\frac{\partial P}{\partial x^t}\times\frac{\partial B}{\partial x^s}.\end{gathered} \tag{43}$$

Consideriamo allora le due omografie $-\frac{d^*N}{dP}$ e $-\frac{d^*B}{dP}$, che operano su vettori di V_n trasformandoli in vettori di V_{n+2}. Esse sono rispettivamente caratterizzate dai seguenti insiemi tensoriali di classe due:

(44) $(b_{rs},\ 0,\ \varepsilon_s)$, (45) $(c_{rs},\ \delta_s,\ 0)$,

essendo

$$(44') \qquad b_{rs} = -\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^r} = b_{sr}, \quad 0 = -\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x^s} \times \boldsymbol{N}, \quad \varepsilon_s = -\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x^s} \times \boldsymbol{B},$$

$$(45') \qquad c_{rs} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x^s} \times \frac{\partial P}{\partial x^r} = c_{sr}, \quad \delta_s = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x^s} \times \boldsymbol{N}, \quad 0 = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x^s} \times \boldsymbol{B}.$$

Manifestamente, poichè $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{N} = 0$,

$$(46) \qquad \delta_s = -\varepsilon_s.$$

b_{rs}, c_{rs}, ε_s caratterizzano, insieme al tensore fondamentale a_{rs}, la configurazione di V_n in V_{n+2}.

Mentre a_{rs} definisce la metrica di V_n, b_{rs}, c_{rs}, ε_s caratterizzano le curvature delle linee di V_n in V_{n+2}. Ad esempio, per una V_1 immersa nello spazio euclideo tridimensionale, se α è l'angolo che $\boldsymbol{N}$ forma con la normale principale di versore $\boldsymbol{n}$, detto $\boldsymbol{b}$ il versore binormale, si ha:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{n} \cos \alpha + \boldsymbol{b} \operatorname{sen} \alpha, \quad \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{n} \operatorname{sen} \alpha + \boldsymbol{b} \cos \alpha.$$

Posto allora $ds = dx^1$, e detto $\boldsymbol{t}$ il versore tangente, $\frac{1}{\rho}$ la prima curvatura o flessione, $\frac{1}{\tau}$ la seconda curvatura o torsione, si ha:

$$a_{11} = 1,$$

$$b_{11} = -\cos \alpha \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \times \boldsymbol{t} - \operatorname{sen} \alpha \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \times \boldsymbol{t} = \frac{1}{\rho} \cos \alpha,$$

$$c_{11} = \operatorname{sen} \alpha \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \times \boldsymbol{t} - \cos \alpha \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \times \boldsymbol{t} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{sen} \alpha,$$

$$\varepsilon_1 = -\delta_1 = -\cos^2 \alpha \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \times \boldsymbol{b} - \cos^2 \alpha \frac{d\alpha}{ds} + \operatorname{sen}^2 \alpha \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \times \boldsymbol{n} - \operatorname{sen}^2 \alpha \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\tau} - \frac{d\alpha}{ds}.$$

Se $\boldsymbol{N}$ coincide con $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{B}$ con $\boldsymbol{b}$, si ha:

$$a_{11} = 1, \quad b_{11} = \frac{1}{\rho}, \quad c_{11} = 0, \quad \varepsilon_1 = -\delta_1 = \frac{1}{\tau}.$$

Tornando dunque alle relazioni (42'), avremo finalmente che, in virtù di (43), (44'), (45'), esse diverranno:

$$(42'') \qquad \begin{cases} u_{sr} = u_{r|s} - \lambda b_{rs} - \mu c_{rs}, \\ \lambda_s = \dfrac{\partial \lambda}{\partial x^s} + u^t b_{ts} - \mu \delta_s, \\ \mu_s = \dfrac{\partial \mu}{\partial x^s} + u^t c_{ts} - \lambda \varepsilon_s. \end{cases}$$

(42), e (42'') generalizzano evidentemente (19).

L'insieme tensoriale (42), ora completamente definito, rappresenta in forma covariante l'*insieme derivato* dell'insieme tensoriale (40).

In modo perfettamente analogo a quello seguito per derivare l'insieme tensoriale (40), si deriva l'insieme tensoriale (41), o un insieme misto, come, ad esempio, (42).

Facilmente si generalizzano gli argomenti svolti ai §§ 5, 6, 7, agli insiemi tensoriali di classe due. È poi manifesto come le considerazioni ora svolte possano estendersi ad insiemi tensoriali di classe qualsivoglia.

***

A mo' di conclusione vogliamo osservare che il calcolo ora istituito riguarda gli insiemi di tensori di una V_n, rappresentanti tensori di una V_{n+c}, o enti ottenuti da questi con le operazioni algebriche di cui si è detto al § 2. Però l'algoritmo definito può essere inteso, prescindendo completamente dalla rappresentazione accennata, come una abbastanza naturale estensione del calcolo tensoriale di Ricci e Levi-Civita in un calcolo più generale degli insiemi tensoriali, fra i quali rientrano gli ordinari tensori come insiemi di classe zero. E ciò con il vantaggio di non dover invocare enti estranei alla V_n nella quale si opera, V_n che può rappresentare lo spazio geometrico o cinematico sede dei fenomeni naturali che fuori di questo spazio non sono concepibili che in virtù di astrazione.

Per contrapposto, si può però considerare l'algoritmo di cui si è detto come interpretazione dell'ordinario calcolo assoluto ad $n+c$ variabili. Quest'ultimo è precisamente il punto di vista nel quale si pose Levi-Civita allorchè, occupandosi dei ds^2 che interessano la statica einsteiniana, stabilì un abbassamento invariantivo da $n+1$ ad n variabili (1).

Vogliamo ora mostrare, a mo' d'applicazione, come gli insiemi tensoriali considerati possano rappresentare la sollecitazione di sistemi continui perfettamente flessibili, quali i fili e le membrane, od imperfettamente flessibili, quali le verghe e le lastre.

Applicazione alla meccanica dei sistemi continui perfettamente od imperfettamente flessibili.

10. **Equilibrio dei fili perfettamente flessibili.** — Vediamo, da prima, come mediante insiemi tensoriali, formati con vettori di una V_1 costituita da un continuo monodimensionale, si possano scrivere, con perfetto parallelismo di

(1) T. Levi-Civita, *Statica einsteiniana.* « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XXVI, 1917, p. 458. - *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani,* III. *Formule ausiliarie.* « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XXVII, 1918, § 3, p. 183.

procedimento, sia le equazioni indefinite intrinseche di equilibrio di un filo flessibile libero, sia quelle di un filo vincolato ad una superficie o ad una linea prefissate.

Incominciamo a considerare il caso del filo flessibile *libero*, caso che se dal nostro punto di vista non è forse il più semplice, è però quello in cui il nostro procedimento coincide con il notissimo classico procedimento vettoriale [1]. Mi sia concesso, per maggior chiarezza, di ripetere il procedimento ben noto.

Consideriamo un sistema continuo monodimensionale perfettamente flessibile, che diciamo filo, immerso in uno spazio euclideo tridimensionale. Cioè, come si dice in meccanica classica, un sistema continuo monodimensionale libero. Geometricamente il filo è rappresentato da una V_1 immersa in una assegnata V_3: la V_3 costituita dall'S_3 euclideo. Il filo considerato stia in equilibrio sotto l'azione di due forze finite applicate agli estremi A e B, e di una assegnata sollecitazione continua, essendo le forze applicate agli estremi e la forza unitaria $\boldsymbol{F}$ rappresentate da vettori dell'S_3. Se pratichiamo un taglio in un punto P, perchè una delle due parti in cui risulta decomposto il filo stia in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne assegnate, basta aggiungere alle altre forze che su di essa agiscono il sistema di forze traducente l'effetto della parte contigua. Tale sistema si riduce ad un'unica forza $\boldsymbol{T}$ applicata in P: con ciò si sfrutta appunto l'ipotesi della perfetta flessibilità del filo. A priori, $\boldsymbol{T}$ è rappresentato da un vettore di S_3, che si dice tensione del filo. Se diciamo s la lunghezza dell'arco AP di filo, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(s)$. Considerato allora l'elemento ds di filo, per l'equilibrio di questo elemento, sarà $\boldsymbol{T}$ tangente al filo e

$$d\boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}ds = 0. \tag{47}$$

Dunque *$\boldsymbol{T}$ coincide con un vettore di V_1*, ed ubbidisce all'equazione indefinita (47). Agli estremi $\boldsymbol{T}$ ubbidisce alle equazioni ai limiti che facilmente potrebbero scriversi.

Rappresentando $\boldsymbol{T}$ coll'insieme tensoriale di classe due $T_{\bar\rho} \equiv (T_1, 0, 0)$, $\boldsymbol{F}$ coll'insieme tensoriale di classe due $F_\rho \equiv (F_1, \varphi, \psi)$, ricordando (42), (24), la (47) si scriverà così:

$$\boxed{\sqrt{a^{11}}\, T_{\bar\rho/1} + F_{\bar\rho} = 0}\,. \tag{I}$$

ossia, per (42″),

$$\sqrt{a^{11}}(T_{1/1},\ T^1 b_{11},\ T^1 c_{11}) + (F_1,\ \varphi,\ \psi) = 0. \tag{I′}$$

---

[1] Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. I, Bologna, 1923, cap. XIV.

Ma, per $x^1 = s$, T_1 coincide con T, F_1 con la componente tangenziale F_t di $\boldsymbol{F}$; ricordando allora le formule stabilite al § 9, se α è l'angolo formato dal vettore unitario $\boldsymbol{N}$ con la normale principale, da (I') scende:

$$
\text{(I'')} \qquad \begin{cases} \dfrac{dT}{ds} + F_t = 0, \\[2mm] T\dfrac{\cos\alpha}{\rho} + \varphi = 0, \\[2mm] -T\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\rho} + \psi = 0. \end{cases}
$$

In particolare, assumendo i versori $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{B}$ coincidenti con i versori $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{b}$ della normale principale e della binormale, φ coincide con F_n, ψ con F_b, e da (I'') scende:

$$
\text{(I''')} \qquad \begin{cases} \dfrac{dT}{ds} + F_t = 0, \\[2mm] \dfrac{T}{\rho} + F_n = 0, \\[2mm] \qquad F_b = 0. \end{cases}
$$

Le (I''') sono le notissime equazioni indefinite intrinseche di equilibrio di un filo flessibile libero.

Consideriamo ora un filo teso *su di una superficie prestabilita.* Geometricamente il filo è rappresentato da una V_1 immersa in una assegnata V_2. Stabiliamo le condizioni di equilibrio in V_2, cioè le equazioni « pure » di equilibrio, nelle quali non intervengono ignote reazioni vincolari. Il filo considerato stia in equilibrio sotto l'azione di due forze finite applicate agli estremi A e B e di una assegnata sollecitazione continua, essendo le forze applicate agli estremi e la forza unitaria $\boldsymbol{F}$ rappresentate da vettori di V_2 [1]. Se pratichiamo un taglio in un punto P, perchè una delle due parti in cui risulta decomposto il filo stia in equilibrio, sotto l'azione delle forze esterne assegnate, basta aggiungere alle altre forze che su di essa agiscono il sistema di forze traducente l'effetto della parte contigua. Tale sistema si riduce ad un'unica forza $\boldsymbol{T}$ applicata in P. A priori, $\boldsymbol{T}$ è rappresentato da un vettore di V_2, che si dice tensione del filo. Se diciamo s la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{AP}$ di filo, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(s)$. Considerato allora un elemento ds di filo, per l'equilibrio di questo elemento, ***T*** *coincide con un vettore di* V_1 ed ubbidisce, in V_2, all'equazione indefinita (47). Agli estremi poi $\boldsymbol{T}$ ubbidisce alle equazioni ai limiti che facilmente potrebbero scriversi.

[1] La forza unitaria $\boldsymbol{F}$ si considera come forza impressa, e, seguendo MAGGI (« Selecta », Milano, 1932, p. 84), si annoverano fra le forze impresse anche le eventuali forze d'attrito.

Rappresentando $\boldsymbol{T}$ con l'insieme tensoriale di prima classe $T_\rho \equiv (T_1, 0)$, $\boldsymbol{F}$ con l'insieme tensoriale di prima classe $F_\rho \equiv (F_1, \varphi)$, ricordando (19), (24), la (47) si scriverà così:

(II) $$\boxed{\sqrt{a^{11}}\, T_{\rho/1} + F_\rho = 0}$$

ossia

(II') $$\sqrt{a^{11}}(T_{1/1},\ T^1 b_{11}) + (F_1,\ \varphi) = 0.$$

Ma, per $x^1 = s$, T_1 coincide con T, F_1 con la componente tangenziale di $\boldsymbol{F}$, F_t, φ con la componente F_N secondo $\boldsymbol{N}$, essendo $\boldsymbol{N}$ un versore di V_2 normale al versore tangente $\boldsymbol{t}$ al filo. Per quanto dicemmo al § 4, la (II') si scriverà così:

(II'') $$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} + F_t = 0, \\ \dfrac{T}{R} + F_N = 0, \end{cases}$$

dove $\frac{1}{R}$ è la curvatura normale del filo su V_2. Le (II'') sono le equazioni «pure» indefinite intrinseche di equilibrio di un filo flessibile teso su superficie prestabilita. Se V_2 è un piano $\frac{1}{R}$ coincide con la curvatura $\frac{1}{\rho}$ della linea piana, e le (II'') sono ben note.

Consideriamo, in fine, un caso molto semplice, quasi banale; il caso di un sistema continuo monodimensionale adagiato *su di una linea prestabilita.* Un filo, ad esempio, contenuto entro un tubetto di forma assegnata. Il filo stia in equilibrio sotto l'azione di due forze applicate agli estremi A e B e di una sollecitazione continua, essendo le forze applicate agli estremi e la forza unitaria $\boldsymbol{F}$ rappresentate da vettori della V_1 costituita dal filo stesso. Stabiliamo le condizioni di equilibrio in V_1, scriviamo cioè l'equazione « pura » di equilibrio, nella quale non intervengono ignote reazioni vincolari. Se si pratica un taglio in un punto P, il sistema di forze traducente l'effetto di una parte del filo sulla rimanente, si riduce ad un'unica forza $\boldsymbol{T}$ applicata in P, e $\boldsymbol{T}$ è un vettore di V_1. Se diciamo s la lunghezza dell'arco AP, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(s)$. Rappresentati allora $\boldsymbol{T}$ ed $\boldsymbol{F}$ con i vettori di V_1, T_1 e F_1 (insiemi tensoriali di classe zero), per l'equilibrio di un elemento di filo sarà:

(III) $$\boxed{\sqrt{a^{11}}\, T_{1/1} + F_1 = 0}.$$

Ma, per $x^1 = s$, $T_1 = T$, $F_1 = F$, dunque (III) si scriverà:

(III') $$\frac{dT}{ds} + F = 0,$$

(III'), unitamente alle condizioni ai limiti, che facilmente si potrebbero scrivere, caratterizza l'equilibrio nel caso in esame. (III') è ben nota: essa è l'equazione « pura » cercata.

11. Equilibrio delle verghe. — Incominciamo a considerare un caso che non è forse, dal nostro punto di vista il più semplice, ma che però è il più abitudinario: il caso dell'equilibrio di una verga *libera*.

Consideriamo un sistema continuo monodimensionale imperfettamente flessibile, che diciamo verga, immerso in uno spazio euclideo tridimensionale. La verga è geometricamente rappresentata da una V_1, immersa in una assegnata V_3, costituita dall'S_3 euclideo. La verga stia in equilibrio sotto l'azione di due sistemi di forze agenti agli estremi A e B e di una sollecitazione continua. Le forze agenti agli estremi e la forza unitaria $\boldsymbol{F}$ sono rappresentate da vettori di S_3. Se pratichiamo un taglio in un punto P, perchè una delle due parti in cui risulta decomposta la verga stia in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne assegnate, basta aggiungere alle altre forze che su di essa agiscono il sistema di forze traducente l'effetto della parte contigua. Poichè il sistema continuo considerato non è perfettamente flessibile, tale sistema *non* si ridurrà ad un unico vettore $\boldsymbol{T}$ di S_3 applicato in P (come per i fili perfettamente flessibili) ma bensì ad un sistema di vettori applicati, riducibili ad un vettore $\boldsymbol{T}$, applicato in P, ed una coppia di momento Γ. $\boldsymbol{T}$ è un vettore di S_3 e Γ è un vettore rappresentante il momento di un sistema di vettori di S_3. Se diciamo s la lunghezza dell'arco AP di verga $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(s)$ e $\Gamma=\Gamma(s)$. Considerato allora un tratto ds di verga, delimitato dai punti P e $P+dP$, per l'equilibrio di questo sarà:

$$(48) \qquad \begin{cases} d\boldsymbol{T}+\boldsymbol{F}ds=0, \\ d\Gamma+dP\wedge\boldsymbol{T}=0. \end{cases}$$

Le (48) sono le ben note equazioni indefinite di equilibrio di una verga [1]. Agli estremi $\boldsymbol{T}$ e Γ ubbidiscono alle equazioni ai limiti, che facilmente potrebbero scriversi.

Rappresentiamo $\boldsymbol{T}$ con l'insieme tensoriale di classe due $T_{\bar\rho}\equiv(T_1, \lambda, \mu)$, Γ con l'insieme tensoriale di classe due $\Gamma_{\bar\rho}\equiv(\Gamma_1, \alpha, \beta)$, $\boldsymbol{F}$ con l'insieme tensoriale di classe due $F_{\bar\rho}\equiv(F_1, \varphi, \psi)$. Da (48), si ha:

$$(\mathrm{IV}) \qquad \boxed{\begin{cases} \sqrt{a^{11}}\,T_{\bar\rho/1}+F_{\bar\rho}=0 \\ \Gamma_{\bar\rho/1}+\varepsilon_{\bar\rho 1\bar\sigma}T^{\bar\sigma}=0 \end{cases}},$$

(1) T. Levi-Civita e U. Amaldi, loco citato, cap. XIV, § 5.

ossia, per (42), (42''), esplicando,

$$
(\mathrm{IV}')\qquad
\begin{cases}
T_{1/1} - \lambda b_{11} - \mu c_{11} + F_1\sqrt{a_{11}} = 0, \\
\dfrac{d\lambda}{dx^1} + T^1 b_{11} - \mu\delta_1 + \varphi\sqrt{a_{11}} = 0, \\
\dfrac{d\mu}{dx^1} + T^1 c_{11} - \lambda\varepsilon_1 + \psi\sqrt{a_{11}} = 0,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\Gamma_{1/1} - \alpha b_{11} - \beta c_{11} = 0, \\
\dfrac{d\alpha}{dx^1} + \Gamma^1 b_{11} - \beta\delta_1 - \mu\sqrt{a_{11}} = 0, \\
\dfrac{d\beta}{dx^1} + \Gamma^1 c_{11} - \alpha\varepsilon_1 + \lambda\sqrt{a_{11}} = 0.
\end{cases}
$$

Ponendo $dx^1 = ds$, e scegliendo, per semplicità (come è tradizionale) $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b}$, sarà $F_1 = F_t$, $\Gamma_1 = \Gamma_t$, $T_1 = T_t$, $\varphi = F_n$, $\psi = F_b$, $\lambda = T_n$, $\mu = T_b$, $\alpha = \Gamma_n$, $\beta = \Gamma_b$. Poichè, per quanto dicemmo al § 9, b_{11} risulta eguale alla flessione $\frac{1}{\rho}$, $c_{11} = 0$, $-\delta_1 = \varepsilon_1 =$ alla torsione $\frac{1}{\tau}$, dalle (IV') scenderanno senz'altro le note equazioni [1]:

$$
(\mathrm{IV}'')\qquad
\begin{cases}
\dfrac{dT_t}{ds} - \dfrac{T_n}{\rho} + F_t = 0, \\
\dfrac{dT_n}{ds} + \dfrac{T_t}{\rho} + \dfrac{T_b}{\tau} + F_n = 0, \\
\dfrac{dT_b}{ds} - \dfrac{T_n}{\tau} + F_b = 0,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dfrac{d\Gamma_t}{ds} - \dfrac{\Gamma_n}{\rho} = 0, \\
\dfrac{d\Gamma_n}{ds} + \dfrac{\Gamma_t}{\rho} + \dfrac{\Gamma_b}{\tau} - T_b = 0, \\
\dfrac{d\Gamma_b}{ds} - \dfrac{\Gamma_n}{\tau} + T_n = 0.
\end{cases}
$$

Da (IV') o (IV''), per $\Gamma = 0$, si deduce che T_ρ^- è un vettore di V_1 e si ottengono le equazioni (I''') relative al filo flessibile.

Consideriamo ora il caso di una verga adagiata *su superficie prestabilita*, costituente un sistema continuo monodimensionale adagiato su di una assegnata V_2. La verga considerata stia in equilibrio sotto l'azione di forze agenti agli estremi A e B e di una sollecitazione continua. Le forze agenti agli estremi e la forza unitaria $\boldsymbol{F}$ siano rappresentate da vettori di V_2 [2]. Stabiliamo le condizioni di equilibrio in V_2, scriviamo cioè le equazioni « pure » di equilibrio, nelle quali non intervengono ignote reazioni vincolari. Se pratichiamo un taglio in un punto P, perchè una delle due parti in cui risulta decomposta la verga stia in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne assegnate, basta aggiungere alle altre forze che su di essa agiscono il sistema di forze traducente l'effetto della parte contigua. Tale sistema si riduce ad un vettore $\boldsymbol{T}$ di V_2 applicato in P e ad una coppia formata da vettori di V_2 applicati in punti infinitamente vicini a P, il cui momento è caratterizzato da uno scalare Γ funzione di P. Se diciamo s la lunghezza dell'arco AP, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(s)$ e $\Gamma = \Gamma(s)$. Rappresentando allora $\boldsymbol{T}$ con l'insieme tensoriale di

---

[1] T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, loco citato, p. 627.
[2] Cfr. la seconda nota di § 10.

classe uno $T_\rho \equiv (T_1, \lambda)$, $\boldsymbol{F}$ con l'insieme tensoriale di classe uno $F_\rho \equiv (F_1, \varphi)$, le equazioni indefinite di equilibrio si scriveranno così:

$$(\mathrm{V}) \qquad \boxed{\begin{cases} \sqrt{a^{11}}\,T_{\rho/1} + F_\rho = 0 \\ \Gamma_{/1} + \varepsilon_{1\rho} T^\rho = 0 \end{cases}}$$

ossia, per (19),

$$(\mathrm{V}') \qquad \begin{cases} T_{1/1} - \lambda b_{11} + F_1 \sqrt{a_{11}} = 0, \\ \dfrac{d\lambda}{dx^1} + T^1 b_{11} + \varphi \sqrt{a_{11}} = 0, \end{cases} \qquad \Gamma_{/1} + \lambda \sqrt{a_{11}} = 0.$$

Ma, per $x^1 = s$, $F_1 = F_t$, $\varphi = F_N$, $T_1 = T_t$, $\lambda = T_N$. Se $\frac{1}{R}$ indica la curvatura normale su V_2 della linea costituente la verga, le (V′) si scriveranno così:

$$(\mathrm{V}'') \qquad \begin{cases} \dfrac{dT_t}{ds} - \dfrac{T_N}{R} + F_t = 0, \\ \dfrac{dT_N}{ds} + \dfrac{T_t}{R} + F_N = 0, \end{cases} \qquad \frac{d\Gamma}{ds} + T_N = 0.$$

In particolare, se V_2 è un piano, $\frac{1}{R}$ coincide con la curvatura $\frac{1}{\rho}$ e $\boldsymbol{N}$ coincide con $\boldsymbol{n}$: le equazioni intrinseche di equilibrio di una verga piana si scriveranno così:

$$(\mathrm{V}''') \qquad \begin{cases} \dfrac{dT_t}{ds} - \dfrac{T_n}{\rho} + F_t = 0, \\ \dfrac{dT_n}{ds} + \dfrac{T_t}{\rho} + F_n = 0, \end{cases} \qquad \frac{d\Gamma}{ds} + T_n = 0.$$

Osserviamo, in fine, che la trattazione del caso ancor più semplice in cui il sistema continuo monodimensionale si adagi *su di una linea*, costituente una V_1 prefissata e sia soggetto a forze esterne ed interne appartenenti alla V_1, non dipende dall'essere il sistema stesso flessibile o no, ed è già stato trattato al § 10.

Vediamo ora come, mediante insiemi tensoriali formati con tensori di una V_2 costituita da un sistema continuo bidimensionale, si possano scrivere le equazioni indefinite intrinseche di equilibrio di una membrana flessibile e di una lastra non perfettamente flessibile, sia nel caso che questi sistemi siano liberi, oppure adagiati su di una superficie prefissata.

12. **Equilibrio delle membrane flessibili.** — Consideriamo un sistema continuo bidimensionale perfettamente flessibile, che diciamo membrana, immerso

in uno spazio euclideo tridimensionale, cioè, come si dice in meccanica classica, un sistema continuo bidimensionale libero. Geometricamente la membrana è rappresentata da una superficie σ, cioè da una V_2 di assegnata metrica

$$ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k \qquad (i, k = 1, 2), \tag{49}$$

immersa in una assegnata V_3: la V_3 costituita dall' S_3 euclideo. La membrana considerata stia in equilibrio sotto l'azione di forze applicate al contorno e di una assegnata sollecitazione continua, essendo le forze applicate al contorno e la forza unitaria $\boldsymbol{F}$ rappresentate da vettori di S_3. Pratichiamo un taglio secondo una linea di σ: perchè una delle due parti in cui risulta decomposta la membrana stia in equilibrio, bisogna aggiungere alle altre forze che su di essa agiscono il sistema di forze traducente l'azione della parte contigua sulla parte considerata. Tale sistema di forze è costituito dall'insieme delle forze che agiscono su ogni elemento del taglio praticato. Su ogni elemento ds di taglio tale sistema si riduce ad un'unica forza applicata ad un punto qualunque di ds. Con ciò si sfrutta appunto l'ipotesi della perfetta flessibilità della membrana. Diciamo allora β l'omografia degli sforzi: se $\boldsymbol{n}$ è il versore di V_2 normale all'elemento ds, $\beta\boldsymbol{n}$ sarà la forza per unità di lunghezza agente in un punto dell'elemento ds di taglio. Manifestamente β è un'omografia che opera su vettori di V_2, generando, a priori, vettori di S_3: essa sarà individuata dal seguente insieme tensoriale misto di prima classe:

$$T_{i\rho} \equiv (\Phi_{ir}, \lambda_i), \tag{50}$$

essendo

$$\Phi_{ir} = \beta \frac{\partial P}{\partial x^i} \times \frac{\partial P}{\partial x^r}, \qquad \lambda_i = \beta \frac{\partial P}{\partial x^i} \times \boldsymbol{N}. \tag{50'}$$

Per l'equilibrio di un generico elemento superficiale sarà:

$$\begin{cases} T_{i\rho}{}^{|i} + F_\rho = 0, \\ \varepsilon_{\sigma i \rho} T^{i\rho} = 0. \end{cases} \tag{51}$$

La seconda delle (51) può scindersi, per (34) e (50) nelle due:

$$\varepsilon_{ir} T^{ir} = 0, \quad \varepsilon_{is} \lambda^i = 0. \tag{52}$$

Dalla seconda delle (52) scende che

$$\lambda^i = 0, \tag{53}$$

ossia scende che $T_{i\rho}$ *coincide con un tensore doppio* Φ_{ir} *di* V_2. Dalla prima di (52) scende che il tensore degli sforzi è simmetrico:

$$\Phi_{ir} = \Phi_{ri}. \tag{54}$$

Avendo dunque così specificata la natura di $T_{i\rho}$, le equazioni indefinite di equilibrio di una membrana libera si scriveranno semplicemente così:

(VI) $$\boxed{T_{i\rho}{}^{|i} + F_\rho = 0} \; .$$

Se dunque $F_\rho \equiv (F_r, \varphi)$, ricordando (21'), da (VI) si trae:

(VI') $$\begin{cases} \Phi_{ir}{}^{|i} + F_r = 0, \\ \Phi^{ti} b_{ti} + \varphi = 0. \end{cases}$$

(VI') sono le equazioni intrinseche di equilibrio di una membrana libera [1]. Ad esse bisogna aggiungere le condizioni al contorno, che facilmente si potrebbero scrivere.

Consideriamo ora un caso più semplice di quello poc'anzi trattato: quello di una membrana tesa *su superficie prestabilita.* Osserviamo che il caso in esame coincide con quello dell'equilibrio di un sistema continuo bidimensionale su superficie, costituente una V_2 prestabilita. Detto T_{ir} il tensore di V_2 che rappresenta gli sforzi, detto F_r il vettore di V_2 che rappresenta la forza uni taria, le equazioni indefinite di equilibrio della membrana si scrivono così [2]:

(VII) $$\boxed{T_{ir}{}^{|i} + F_r = 0}$$

e

(55) $$T_{ir} = T_{ri}.$$

A queste equazioni bisogna aggiungere, evidentemente, le equazioni al contorno, che facilmente si potrebbero scrivere.

13. **Equilibrio delle lastre.** — Consideriamo un sistema continuo bidimensionale non perfettamente flessibile, che diremo lastra, immersa in uno spazio euclideo tridimensionale. Consideriamo cioè una lastra *libera.* La lastra è geometricamente rappresentata da una superficie σ, costituente una V_2 immersa in una assegnata V_3, costituita dall'S_3 euclideo. La lastra stia in equilibrio sotto l'azione di forze agenti al contorno e di una sollecitazione continua. Le forze

---

(1) Si noti che, mentre le prime (VI') fanno intervenire soltanto elementi metrici, l'ultima fa intervenire la seconda forma (13). Ciò fu da me già constatato in un caso particolare (*Sui veli elastici,* « Annali di Matematica », serie IV, tomo V, § 3. Cfr. anche B. Caldonazzo, *Sulla meccanica della superficie,* « Monitore Tecnico », nn. 1 e 2, 1920).

(2) B. Finzi, *Meccanica dei sistemi continui non euclidei.* « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXII, 1929, p. 859.

agenti al contorno e la forza unitaria $\boldsymbol{F}$ sono rappresentate da vettori di S_3. Pratichiamo un taglio secondo una linea di σ: perchè una delle due parti in cui risulta decomposta la lastra stia in equilibrio, basta aggiungere alle altre forze su di essa agenti il sistema di forze traducenti l'effetto della parte contigua sulla parte considerata. Tale sistema di forze è costituito dall'insieme delle forze che agiscono su ogni elemento del taglio praticato. Su ogni elemento *ds* di taglio tale sistema si ridurrà ad un'unica forza applicata ad un punto qualunque di *ds* e ad una coppia. A differenza di quanto avviene per una membrana perfettamente flessibile, gli sforzi specifici che si esercitano su di un generico elemento lineare di σ non saranno rappresentati soltanto da un insieme tensoriale misto di prima classe $T_{i\rho}$, ma da un insieme tensoriale misto di prima classe $T_{i\rho}$, che rappresenta i risultanti degli sforzi agenti su ogni elemento lineare di σ e da un insieme tensoriale misto di prima classe $\Gamma_{i\rho}$, che rappresenta i momenti degli sforzi agenti su ogni elemento lineare di σ.

Se diciamo allora F_ρ l'insieme tensoriale di prima classe che rappresenta il vettore $\boldsymbol{F}$ di S_3, per l'equilibrio di un generico elemento superficiale scriveremo le seguenti equazioni:

$$\text{(VIII)} \qquad \boxed{\begin{cases} T_{i\rho}{}^{/i} + F_\rho = 0 \\ \Gamma_{i\rho}{}^{/i} + \varepsilon_{\rho i\sigma} T^{i\sigma} = 0 \end{cases}}$$

(VIII) sono le equazioni indefinite di equilibrio della lastra libera considerata. Ad esse bisogna aggiungere le equazioni al contorno, che facilmente si potrebbero scrivere.

Se $F_\rho \equiv (F_r, \varphi)$, $T_{i\rho} \equiv (\Phi_{ir}, \lambda_i)$, $\Gamma_{i\rho} \equiv (g_{ir}, \gamma_i)$ le (VIII) (per (21), (21'), (34)) si traducono nelle seguenti relazioni fra tensori di V_2:

$$\text{(VIII')} \qquad \begin{cases} \Phi_{ir}{}^{/i} - \lambda^i b_{ri} + F_r = 0, \\ \lambda_i{}^{/i} + \Phi^{ti} b_{ti} + \varphi = 0, \\ g_{ir}{}^{/i} - \gamma^i b_{ri} - \varepsilon_{ir}\lambda^i = 0, \\ \gamma_i{}^{/i} + g^{ti} b_{ti} + \varepsilon_{is}\Phi^{is} = 0. \end{cases}$$

Se, in particolare, $\Gamma_{i\rho} = 0$, dalle (VIII') si deduce che $\Phi_{is} = \Phi_{si}$ e che $\lambda_i = 0$, si deduce cioè che $T_{i\rho}$ coincide con un tensore Φ_{ir} di V_2. Le (VIII'), nel caso in esame, si riducono alle (VI') relative ad una membrana flessibile.

Se ora si vuole che $T_{i\rho}$ e $\Gamma_{i\rho}$ possano interpretarsi come sforzi e momenti di sforzi di un sistema continuo tridimensionale appartenente a S_3, tendente al limite in σ, basta specificare la natura di $T_{i\rho}$ e $\Gamma_{i\rho}$, ritenendo:

(56) $$\Phi_{ij} = \Phi_{ji},$$

(57) $$\Gamma_\tau{}^i \equiv (\varepsilon^{si} p_{st}, 0), \quad \text{essendo} \quad p_{st} = p_{ts} \text{ (1)}.$$

Da (57) scende

(57′) $$g_t{}^i = \varepsilon^{si} p_{st}, \quad \gamma^i = 0.$$

Dalle prime (57′) scende:

(58) $$g_1^1 = -g_2^2.$$

In virtù delle (56) e (57′), le ultime due (VIII′) si riducono alle seguenti:

(59) $$\begin{cases} g_{ir}{}^{|i} - \varepsilon_{ir}\lambda^i = 0, \\ g^{ti} b_{ti} = 0. \end{cases}$$

Si noti che nel caso considerato gli sforzi e i loro momenti sono caratterizzati da 10 scalari, che si riducono a 8 tenendo conto di (56) e (58). Fra queste 8 quantità hanno luogo le relazioni date dalle prime due (VIII′) e dalle (59).

Consideriamo il caso particolare, notevole, in cui la lastra è piana. In tal caso $b_{rs} = 0$, e le prime due (VIII′) e le (59) si riducono alle 5 relazioni seguenti:

(60) $$\begin{cases} \Phi_{ir}{}^{|i} + F_r = 0, \\ \lambda_i{}^{|i} + \varphi = 0, \\ g_{ir}{}^{|i} - \varepsilon_{ir}\lambda^i = 0. \end{cases}$$

Ad esempio, se diciamo x e y le coordinate cartesiane di un punto della lastra piana, le (60) si scrivono così:

(60′) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_{yx}}{\partial y} + F_x = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_{yy}}{\partial y} + F_y = 0, \\ \dfrac{\partial \lambda_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \lambda_y}{\partial y} + \varphi = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial g_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial g_{yx}}{\partial y} + \lambda_y = 0, \\ \dfrac{\partial g_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial g_{yy}}{\partial y} - \lambda_x = 0. \end{cases}$$

Queste cinque equazioni, relative all'equilibrio della lastra piana, fra le 8 quantità Φ_{xx}, Φ_{yy}, $\Phi_{xy} = \Phi_{yx}$, λ_x, λ_y, $g_{xx} = -g_{yy}$, g_{xy}, g_{yx}, non sono altro che le equazioni ottenute da CLEBSCH (2).

(1) Questa specificazione è manifestamente inutile nel caso delle membrane flessibili, perchè essa è automaticamente verificata.

(2) A. CLEBSCH, *Theorie der Elastizität fester Körper*, § 69, Leipzig, 1862. Cfr. anche *Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik*, Band. III (J. W. GECKELER), p. 150, Leipzig, 1927.

Rimane ora da trattare il caso di un sistema continuo bidimensionale adagiato *su superficie prefissata*; ma esso coincide con il problema già trattato al § 12 e risolto dalle (VII).

14. Equilibrio dei sistemi continui tridimensionali. — Per esaurire il nostro studio, nell'ambito della meccanica classica, diciamo dell'equilibrio di un sistema continuo tridimensionale appartenente all'S_3 euclideo. La forza unitaria, che individua la sollecitazione continua esterna, e gli sforzi che si esercitano in seno al sistema continuo, sono caratterizzati, rispettivamente, da un vettore, F_r, e da un tensore doppio, T_{ir}, dell'S_3 stesso. Il sistema continuo considerato si comporta dunque come un sistema flessibile, e la sua equazione tensoriale indefinita di equilibrio si scriverà così:

$$\boxed{T_{ir}{}^{|i} + F_r = 0} \quad (^1), \tag{IX}$$

essendo

$$T_{ir} = T_{ri}. \tag{61}$$

* * *

È utile porre a raffronto le formule (I), (II),..., (IX) stabilite nei varî casi trattati nei §§ 10, 11, 12, 13, 14, per constatarne le analogie e le differenze, dipendenti dal numero di dimensioni delle varietà rappresentanti i varî sistemi continui considerati, e dal numero di dimensioni delle varietà a cui appartengono i vettori ed i tensori che caratterizzano le sollecitazioni meccaniche che si esercitano in seno ai sistemi continui stessi.

Così (III), (VII), (IX) sono identiche, salvo che (III) si riferisce ad un sistema continuo monodimensionale, (VII) ad un sistema continuo bidimensionale, (IX) ad un sistema continuo tridimensionale. In tutti tre i casi si considera l'equilibrio di un sistema ad n dimensioni in uno spazio pure ad n dimensioni. Analogamente sono simili (II) e (VI), (V) e (VIII).

Così (I), (II), (III) sono identiche, salvo che gli insiemi tensoriali che compaiono in (I) sono di classe due, quelli che compaiono in (II) di classe uno, quelli che compaiono in (III) di classe zero. In tutti e tre i casi si considera l'equilibrio di uno stesso sistema continuo in uno spazio, una prima volta a tre, una seconda a due, una terza ad una dimensione. Analogamente sono identiche (IV) e (V), salvo che gli insiemi tensoriali che com-

---

(1) In meccanica, nel caso di un corpo continuo tridimensionale, è tradizione assumere come tensore degli sforzi non proprio T_{ir}, ma il suo opposto $-T_{ir}$.

paiono in (IV) sono di classe due, mentre quelli che compaiono in (V) sono di classe uno. Sono pure identiche (VI) e (VII), salvo che gli insiemi tensoriali che compaiono in (VI) sono di classe uno, mentre quelli che compaiono in (VII) sono di classe zero.

Si osservi, in fine, che le prime equazioni di (IV), (V), (VIII) coincidono rispettivamente con (I), (II), (VI).

15. **Dinamica dei sistemi continui.** — È facile passare dal problema dell'equilibrio a quello del movimento dei sistemi continui considerati nei paragrafi precedenti. Basta all'uopo sostituire nelle formule stabilite alla forza unitaria $\boldsymbol{F}$, che caratterizza la sollecitazione esterna continua, la differenza fra questa forza ed il prodotto della densità per l'accelerazione $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}$ essendo un vettore della stessa specie di $\boldsymbol{F}$. Alle equazioni così ottenute bisogna però aggiungere l'equazione che traduce il principio di conservazione della massa, equazione che facilmente si può scrivere.

16. **Estensioni.** — Come si sono stabilite nei paragrafi precedenti le equazioni della meccanica dei fili e delle verghe in una V_1, in una V_2, in S_3, e le equazioni delle membrane e delle lastre in una V_2 ed in S_3, si potrebbero, senza difficoltà, con l'algoritmo degli insiemi tensoriali, trattare le medesime questioni in una V_m qualsivoglia. Ad esempio, si potrebbe svolgere la meccanica dei fili, delle verghe, delle membrane, delle lastre in una V_3 non euclidea; questione questa che può avere interesse in meccanica relativistica. Così pure si potrebbero stabilire le equazioni della meccanica di un corpo continuo tridimensionale, flessibile o no, in una varietà assegnata avente un numero di dimensioni non minore di tre.

Sur l'équation algébrique du cinquième degré.

par K. BOHLIN (de Stockholm).

L'exposé des recherches sur l'équation du cinquième degré, données succinctement dans les pages suivantes, a pour but, en complétant sur divers points les mémoires antérieurs (1), d'en assembler et assurer les points principaux, mais aussi d'ajouter aux recherches antérieures de nouvelles, auxquelles nous sommes récemment conduits à insister. Les recherches nouvelles dont il s'agit se trouvent dans la seconde et la troisième partie de cet exposé.

Rappelons que le point de départ a été l'équation normale du cinquième degré, nommée de *forme libre*, à savoir

$$\eta^5 + \frac{5\eta}{u^3} = \frac{1}{u^5} - 27 \tag{1}$$

contenant le seul paramètre u. Les équations algébriques de *forme libre* fournissent, dans les cas considérés du 3ième, du 4ième et du 5ième degré, des simplifications considérables, soit pour les expressions des racines, soit par beaucoup de relations qui s'y rapportent. Pour prendre un exemple, l'équation (1) conduit facilement aux particularités de l'équation de cinquième degré.

En mettant

$$\eta = -\frac{1}{u^2} \tag{a}$$

l'équation (1) se transforme en

$$\frac{1}{u^{10}} + \frac{6}{u^5} = 27$$

donnant les valeurs

$$\frac{1}{u^5} = +3; \quad \frac{1}{u^5} = -9.$$

(1) I) *Sur une équation algébrique remarquable se trouvant en rapport à la mécanique céleste. Astron. iaktt. och unders.* (« Annales »), Stockholms Observatorium, Band 8, Nr. 7, 1907; II) *Sur les développements autologues de la racine d'une équation du cinquième degré à l'infini.* « Arkiv f. Mathematik, Astronomi o. Physik, Vetenskapsakademien », Stockholm, Band 12, Nr. 1, 1917; III) *Sur l'équation algébrique du cinquième degré,* « Arkiv f. Mathematik, Astronomi o. Physik, Vetenskapsakademien », Stockholm, Band 16, Nr. 4, 1921; IV) *Sur l'équation algébrique du cinquième degré,* « Arkiv f. Mathematik, Astronomi o. Physik, Vetenskapsakademien », Stockholm, Band 23 A, Nr. 9, 1932.

points où les racines sont respectivement [1]

$$\eta = -3^{2/5}; \quad \eta = -3^{4/5}.$$

En posant au contraire

(b) $$\eta = +\frac{1}{u^2}$$

on aura de même

$$\frac{1}{u^5} = -2 \pm i\sqrt{23}$$

avec les racines

$$\eta = (-2 \pm i\sqrt{23})^{2/5}.$$

Mettant encore

(c) $$\eta = \frac{1}{u},$$

on trouve

$$\frac{1}{u^4} = -\frac{27}{5}$$

et

$$\eta = \sqrt[4]{-\frac{27}{5}}.$$

Pour

(d) $$\eta = u^3$$

on aura

$$(u^5)^4 + 32u^5 = 1$$

et pour

(e) $$\eta = -u^3$$

de même

$$(u^5)^4 - 22u^5 = 1$$

de manière que, dans ces deux derniers cas, l'équation du cinquième degré se trouve réduite à une équation du quatrième degré.

Nous avons déjà remarqué (III, page 21) que l'équation (1) a des racines égales pour

(f) $$\frac{1}{u^5} = 7 + 4i\sqrt{2}$$
$$= -(1 + i\sqrt{2})^4$$

les racines étant données par

$$\eta = (5 - i\sqrt{2})^{1/5}$$
$$= -(1 + i\sqrt{2})^{3/5}.$$

---

[1] On a encore respectivement (cfr. la note à page 267).

$$\frac{\eta}{K} = -9p''' \quad \text{et} \quad \frac{\eta}{K} = -27p'''^3.$$

Mais il faut ajouter qu'on a des racines égales,

$$\eta = 3^{3/5}$$

aussi pour

$$\text{(g)} \qquad \frac{1}{u^5} = -81.$$

Mais, ce point étant lui-même double, le point (g), doit, de manière usuelle, être considéré comme régulier. Il n'y a donc pas d'autres points doubles que (f).

I. Sur les expressions des racines de l'équation du cinquième degré en forme de séries autologues.

Rappelons que, par un procédé facile, on peut réduire les équations algébriques à ce qu'on a appelé la *forme libre*, fournissant des expressions simplifiées des racines. Si aux équations réduites du troisième, du quatrième et du cinquième degré, savoir

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} z^3 + 3sz &= 2\tau \\ z^4 + 4sz &= 3\tau \\ z^5 + 5sz &= 4\tau \end{aligned}$$

on applique les *fonctions restreintes* w, définies par

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} w^2 + 2\tau w &= s^{3/1} \\ w^3 + 3\tau w &= 2s^{4/2} \\ w^4 + 4\tau w &= 3s^{5/3} \end{aligned}$$

et que de plus on fait les substitutions

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} u &= \frac{\left(\frac{w}{1}\right)^{2/3}}{s}; \quad & \zeta &= z\cdot\frac{\left(\frac{w}{1}\right)^{1/3}}{s} \\ u &= \frac{\left(\frac{w}{2}\right)^{3/4}}{s^{1/2}}; \quad & \zeta &= z\cdot\frac{\left(\frac{w}{2}\right)^{1/4}}{s^{1/2}} \\ u &= \frac{\left(\frac{w}{3}\right)^{4/5}}{s^{1/3}}; \quad & \zeta &= z\cdot\frac{\left(\frac{w}{3}\right)^{1/5}}{s^{1/3}} \end{aligned}$$

on obtient la *forme libre* des équations, savoir

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} \zeta^3 + 3u\zeta &= 1 - u^3 \\ \zeta^4 + 4u\zeta &= 1 - 2\cdot 2\cdot u^4 \\ \zeta^5 + 5u\zeta &= 1 - 3\cdot 3\cdot 3\cdot u^5. \end{aligned}$$

Mais on peut même simplifier ces équations, en mettant

$$\eta = \frac{\zeta}{u}, \tag{6}$$

substitution conduisant aux formes suivantes:

$$\begin{aligned} \eta^3 + \frac{3\eta}{u} &= \frac{1}{u^3} - 1 \\ \eta^4 + \frac{4\eta}{u^2} &= \frac{1}{u^4} - 4 \\ \eta^5 + \frac{5\eta}{u^3} &= \frac{1}{u^5} - 27. \end{aligned} \tag{7}$$

Pour ces équations on trouve respectivement les résolvantes:

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{w_i}{u^3}, \\ v_i &= \frac{1}{2}\frac{w_i}{u^4}, \\ v_i &= \frac{1}{3}\frac{w_i}{u^5}, \end{aligned}$$

assujetties aux équations de degré inférieur suivantes

$$\begin{aligned} v_i + \frac{1}{u^3} &= 0 \\ v_i^2 + v_i + \frac{1}{4u^4} &= 0 \\ v_i^3 + v_i^2 + v_i + \frac{1}{27u^5} &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Les équations (7), encore de forme libre, donnent des expressions simplifiées des racines. Ainsi, par exemple, l'équation du troisième degré (7) possède bien la racine rationelle

$$\eta = \frac{1}{u} - 1.$$

L'équation du quatrième degré se résout en les deux équations suivantes du second degré:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^2} &= 2 + 2\eta + \eta^2 \\ \frac{1}{u^2} &= 2 + 2\eta - \eta^2 \end{aligned}$$

dont la première a les racines

$$\eta = -1 + v; \quad v^2 = \frac{1}{u^2} - 1,$$

isolées des racines de la seconde des équations.

Posant, dans les divers cas,

$$p_i = v_i^{1/3}$$
$$p_i = v_i^{2/4}$$
$$p_i = v_i^{3/5}$$

on obtient, pour l'équation du troisième degré,

$$\eta = -1 \quad p_1,$$

et pour celle du quatrième degré

$$\eta = -1 + p_1 + p_2$$
$$\eta = -1 - p_1 - p_2$$
$$\eta = +1 - p_1 + p_2$$
$$\eta = +1 + p_1 - p_2.$$

Afin de juger de la forme des racines pour l'équation du cinquième degré, on peut considérer celle de l'équation du troisième degré sous une forme un peu variée. Si, dans ce cas, on pose, d'après (8)

$$p = \binom{v}{1}^{1/3} = -\frac{1}{u}$$

des considérations analytiques simples conduisent à supposer la forme suivante:

$$\eta = a + bp$$

de la racine de l'équation du troisième degré

$$\eta^3 + \frac{3\eta}{u} = \frac{1}{u^3} - 1.$$

Écrivons, pour garder l'analogie avec l'équation du cinquième degré,

$$p = p(10)$$

et considérons la valeur de u, pour laquelle la racine s'évanouit, savoir

$$\frac{1}{u^3} = 1.$$

Soit de plus $p(10)$ la valeur que prend $p(10)$ pour cette valeur spéciale de u. On trouve

$$\bar{p}(10) = -1.$$

Si maintenant on met la racine sous la forme

$$\eta = K\left[1 + A_{10} \cdot \frac{p(10)}{\bar{p}(10)}\right],$$

il s'ensuit qu'il faut avoir

$$A_{10} = -1$$

afin que $\eta = 0$ pour $\frac{1}{u^3} = 1$. On aura en effet de cette manière

$$\eta = K\left[1 - \frac{p(10)}{\bar{p}(10)}\right],$$

— expression qui fut nommée *autologue*, par la raison que le dénominateur $\bar{p}(10)$ est déterminé par le numérateur même, pris pour la valeur spéciale de u, pour laquelle la fonction η s'évanouit.

Pour raccourcir, on peut de plus écrire

$$p(10) = \frac{p(10)}{\bar{p}(10)},$$

de manière que l'expression de η soit

$$\eta = K[1 - p(10)].$$

Considérons encore, pour la détermination de la constante K, le point $\frac{1}{u} = 0$, pour lequel on a $p(10) = 0$. Puisque, en ce point, on a $\eta = -1$, il s'ensuit $K = -1$, l'expression de la racine devenant ainsi

$$(9) \qquad \eta = -\frac{(1)^{1/3}}{1}\left[1 - \frac{p(10)}{\bar{p}(10)}\right].$$

Équation de cinquième degré. Je vais indiquer succinctement les résultats obtenus, en cherchant de représenter la racine de l'équation du cinquième degré par un procédé analogue à celui qui a conduit à l'expression simple (9), pour le cas de l'équation du troisième degré.

Remarquons, tout d'abord, que les expressions *autologues* dans le cas de l'équation du cinquième degré ne peuvent pas être finies. Elles vont se donner en forme de séries autologues. En général le nombre de termes qu'on doit envisager est assez grand, et il faut compter sur des systèmes de formules étendus. Il n'y aura pas lieu de les compiler ici dans toute l'étendue nécessaire pour les calculs numériques. Pour ceux qui voudraient s'en informer de plus près, il suffira de renvoyer au premier mémoire (I) cité au commencement de cet exposé. Néanmoins il conviendra d'esquisser succinctement le procédé et les résultats obtenus.

Ayant formé les racines v_i de la résolvante (8)

$$(10) \qquad v_i^3 + v_i^2 + v_i + \frac{1}{27u^5} = 0,$$

on aura à calculer les fonctions correspondentes

$$(11) \qquad p_i = v_i^{3\ 5}$$

après quoi il faut procéder à former les fonctions symétriques suivantes,

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
p(00) &= 6\\
p(10) &= 2(p_1 + p_2 + p_3)\\
p(20) &= 2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\\
p(11) &= 2(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1)\\
p(30) &= 2(p_1^3 + p_2^3 + p_3^3)\\
p(21) &= p_1^2p_2 + p_2^2p_3 + p_3^2p_1\\
&\quad + p_1^2p_3 + p_2^2p_1 + p_3^2p_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

pour en former les développements de la racine. On obtient de plus, pour $\frac{1}{u^5} = 27$, point où l'on a $\eta = 0$, les dénominateurs correspondant à (12), savoir

$$
(12a)\qquad
\begin{array}{lll}
p(00) = 6 & p(20) = -2 & \bar{p}(30) = -2\\
p(10) = -2 & p(11) = +2 & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Par analogie avec le cas de l'équation du troisième degré, où l'on a

$$
\eta = K \left|\begin{array}{c} p(00)\\ -p(10)\\ * \end{array}\right| \quad \text{et} \quad K = -\frac{1^{1/3}}{1}
$$

ou bien, avec une notation raccourcie,

$$
\eta = K \left|\begin{array}{c} P_0\\ -P_1\\ * \end{array}\right|,
$$

il faut, pour l'équation du cinquième degré, admettre

$$
(13)\qquad K = \frac{3^{3/5}}{3}
$$

et un développement de la forme

$$
(14)\qquad
\frac{\eta}{K} = \begin{array}{l} P_0 + p''' \\ -P_1 \\ * \\ +P_8 \\ -P_9 \\ +P_{10} \\ -P_{11} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\left|\begin{array}{l} P_0 + p'''^2 \\ -P_1 \\ +P_2 \\ -P_3 \\ * \\ +P_{10} \\ -P_{11} \\ +P_{12} \\ -P_{13} \\ \\ \end{array}\right|
\begin{array}{l} * \quad + \ldots, \\ +P_2 \\ -P_3 \\ +P_4 \\ -P_5 \\ * \\ +P_{12} \\ -P_{13} \\ +P_{14} \\ -P_{15} \end{array}
$$

où les quantités P_m sont des expressions formées sur les éléments

$$P_{(m\cdot n)} = \frac{p_{(m\cdot n)}}{p_{m\cdot n)}}$$

et où, de plus, on a

(15) $$p''' = p_1 p_2 p_3 \cdot$$

quantité dont la convergence de la série va principalement dépendre.

Pour raccourcir l'écriture, nous introduisons encore des *complexes parfaites*, savoir

(16) $$P_{(0)} = \begin{array}{l} P_0; \\ -P_1 \\ +P_2 \\ -P_3 \end{array} \quad P_{(2)} = \begin{array}{l} +P_2; \\ -P_3 \\ +P_4 \\ -P_5 \end{array} \quad P_{(4)} = \begin{array}{l} +P_4 \\ -P_5 \\ +P_6 \\ -P_7 \end{array}$$

et des *demi-complexes*,

(16a) $$P_{(0)}{}^* = \begin{array}{l} +P_0 \\ -P_1 \cdot \end{array}$$

Une expression telle que (14) s'écrit alors, par exemple,

(17) $$\frac{\eta}{K} = P_{(0)}{}^* + p'''P_{(0)} + p'''^2 P_{(2)} + p'''^3 P_{(4)} + p'''^4 P_{(6)} + P_{(8)} + p'''^5 \left[\begin{array}{l|l} P_{(0)}{}^* + p''' & P_{(0)} + \ldots \\ \quad * & \quad * \\ + P_{(8)} & P_{(10)} \end{array}\right].$$

Il faut cependant considérer en particulier les signes des quantités

$$p_1 = v_1{}^{3|5}; \quad p_2 = v_2{}^{3|5}; \quad p_3 = v_3{}^{3|5}$$

qui peuvent acquérir les facteurs

$$e^{3|5 \cdot 2k_0\pi i} \quad \text{ou} \quad e^{3|5 \cdot 2k\pi i}.$$

Supposons que le nombre entier k_0 se rapporte à p_1, et que les nombres entiers k et $-k$ se rapportent à p_2 et p_3, qui peuvent être conjuguées. En résumé et pour les applications numériques sur l'axe réel des u^5, on aura à déterminer k_0 de manière que l'on ait

(18) $$p_1 = \text{réelle},$$

d'où par exemple $k_0 = +2$ pour $u^5 =$ négative et $k_0 = 0$ pour $u^5 =$ positive.

D'un autre côté, nous aurons les trois cas possibles

(19) $$\begin{array}{l} k = 0; \quad +1; \quad -2 \\ k = 0; \quad -1; \quad +2 \end{array}$$

sur des parties différentes de l'axe réel.

Venons, après cette digression, à l'exposé des développements que nous indiquerons par E; A; J; obtenus par des calculs effectués pour les points

$$\frac{1}{u^5} = +14; \quad \frac{1}{u^5} = +7; \quad \frac{1}{u^5} = -7$$

arbitrairement choisis. Chacun de ces développements est formé des quantités

$$P_{(m)}^* \quad \text{et} \quad P_{(m)}$$

définies plus haut. Ces quantités s'évanouissent pour

$$\frac{1}{u^5} = 27$$

conformément à la condition que

$$\eta = 0$$

dans ce point.

En effet, comme on doit mettre

$$(20) \qquad \begin{aligned} P_0 &= p(00) \\ P_1 &= p(10) \\ P_2 &= p(20) + p(11) \\ P_3 &= p(30) + p(21) \\ P_4 &= p(40) + p(31) + p(22) \\ P_5 &= p(50) + p(41) + p(32) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

et puisque, en général

$$p_{(m.n)} = 1$$

pour

$$\frac{1}{u^5} = 27$$

toutes les différences, comme $P_0 - P_1$; $P_2 - P_3$. $P_4 \quad P_5, \ldots$ s'évanouissent dans ce point. Ainsi les quantités $P_{(m)}^*$; $P_{(m)}$; s'évanouissent encore, selon (16), dans le point $\frac{1}{u^5} = 27$, centre des développements.

Les divers développements sont formés en faisant arranger de manières diverses les expressions telles que (17) et notamment en y assignant aux termes successifs des suites de signes convenables en chaque cas. Il va sans dire qu'il y aura d'abord quelque indécision à cet égard, surtout comme il s'est trouvé plus tard, que les valeurs choisies de

$$\frac{1}{u^5} = +14; \quad \frac{1}{u^5} = +7; \quad \frac{1}{u^5} = -7$$

soient en une certaine mesure des valeurs spéciales par rapport à notre équation, admettant en effet parfois de certaines identités parmi les différents développements autologues. C'est ce qui a porté, de temps à autre, à diverses hypothèses sur l'arrangement des signes des termes des développements.

Voici maintenant les divers développements, qui se trouvent déterminés.

1. **Développement E.** (*Fonction externe*)

$$k_0 = +2; \quad k = +1.$$

Éléments,

$$
\begin{aligned}
E_0 &= +P_{(0)}{}^* - p'''P_{(0)} + p'''^2 P_{(2)} - p'''^3 P_{(4)} + p'''^4 P_{(6)} \\
E_1 &= +P_{(8)} \quad\; p'''P_{(10)} + p'''^2 P_{(12)} - p'''^3 P_{(14)} + p'''^4 P_{(16)} \qquad (21) \\
E_2 &= +P_{(18)} + p'''P_{(20)} + p'''^2 P_{(22)} + p'''^3 P_{(24)} + p'''^4 P_{(26)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Suites de signes,

E_0	E_1	E_2	E_3
+	+	+	+
—	—	+	+
+	+	+	+
—	—	+	+
+	+	+	+

et ainsi de suite.

Représentation de la racine,

$$\frac{\eta}{K} = \frac{E_0 + p'''^5 E_1}{1 - p'''^5} + p'''^{10} \frac{E_2 + p'''^5 E_3}{1 - p'''^5} + \ldots \qquad (22)$$

En développant les dénominateurs, on aura le développement primairo autologue, dont l'expression (22) provient. Pour $\frac{1}{u^5} = +14$ cela donne (avec une extrapolation de E_3 qui n'est pas exempte d'incertitude)

$$\frac{\eta}{K} = +0.8267\,; \text{ valeur vraie } = +0.8255.$$

Désormais la répartition de signes suivante est alternativement supposée, en modification de [III, (23)]

E_0	E_1	E_2	E_3
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

La formule, actuellement employée pour le calcul, était

$$(23)\quad \frac{\eta}{K} = E_0 \quad p'''^5(E_0 + E_1) \quad p'''^{10}(E_0 + E_1 + E_2) - p'''^{15}(E_0 + E_1 + E_2 + E_3) + \ldots,$$

donnant, avec quelque incertitude, due à l'extrapolation de E_3,

$$\frac{\eta}{K} = +0.8171 \quad \text{valeur vraie} = 0.8255.$$

Ni l'accord ni la forme même du développement (23) ne paraissent cependant autoriser la formule (23), quoique il s'agisse évidemment d'un accord approché.

2. **Développement A.** (*Fonction alterne*)

$$k_0 = +2; \quad k = 0.$$

Éléments.

$$(24)\quad \begin{aligned} A_0 &= + P_{(0)}{}^* + p''' P_{(0)} + p'''^2 P_{(2)} + p'''^3 P_{(4)} + p'''^4 P_{(6)} \\ &\quad + P_{(8)} \\ A_1 &= + P_{(10)}{}^* + p''' P_{(10)} + p'''^2 P_{(12)} + p'''^3 P_{(14)} + p'''^4 P_{(16)} \\ &\quad + P_{(18)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Signes,

$$\begin{array}{cccc} + & + & + & + \ldots \\ + & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Représentation de la racine,

$$(25)\quad \begin{aligned} \frac{\eta}{K} &= A_0(1 + p'''^5) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{10}}[p'''^{10} A_1 + p'''^{20} A_2 + \ldots]. \end{aligned}$$

Le calcul, effectué pour $\frac{1}{u^5} = +7$ a donné

$$\frac{\eta}{K} = +1.753454; \ \text{valeur vraie} = +1.753453.$$

3. **Développement J.** (*Fonction interne*)

$$k_0 = 0; \quad k = \quad 2.$$

Éléments,

$$(26)\quad \begin{aligned} J_0 &= + \left| \begin{array}{l} P_{(0)}{}^* + p''' \\ P_{(8)} \end{array} \right| \begin{array}{l} P_{(0)} - p'''^2 \\ P_{(10)} \end{array} \left| \begin{array}{l} P_{(2)} - p'''^3 \\ P_{(12)} \end{array} \right| \begin{array}{l} P_{(4)} + p'''^4 \\ P_{(14)} \end{array} \left| \begin{array}{l} P_{(6)} \\ P_{(16)} \end{array} \right. \\ J_1 &= + \left| \begin{array}{l} P_{(0)}{}^* - p''' \\ P_{(8)} \\ P_{(18)} \end{array} \right| \begin{array}{l} P_{(0)} - p'''^2 \\ P_{(10)} \\ P_{(20)} \end{array} \left| \begin{array}{l} P_{(2)} + p'''^3 \\ P_{(12)} \\ P_{(22)} \end{array} \right| \begin{array}{l} P_{(4)} + p'''^4 \\ P_{(14)} \\ P_{(24)} \end{array} \left| \begin{array}{l} P_{(6)} \\ P_{(16)} \\ P_{(26)} \end{array} \right. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Suite de signes,

(27)

J_0	J_1	J_2	J_3
+	+	—	—
+	—	—	+
—	—	+	+
—	+	+	—
+	+	—	—

À cette suite de signes, originalement supposée, correspond la représentation de la racine, suivante

$$\frac{\eta}{K} = \frac{J_0 + p'''^5 J_1}{1 - p'''^5} + p'''^{10}\,\frac{J_2 + p'''^5 J_3}{1 - p'''^5} + \dots \tag{28}$$

donnant pour $\frac{1}{u^5} = -7$

$$\frac{\eta}{K} = +3.6481 \quad \text{valeur vraie} + 3.6479.$$

L'accord étant ainsi satisfaisant, il faut pourtant remarquer que les dénominateurs $1 - p'''^5$ indispensables en effet pour l'accord, ne sont pas d'autre côté appuyés par une déduction analytique ou par sommation directe. Par les circonstances empressées de la recherche originale, la représentation (23), qui paraissait bien unique, fut adoptée.

Plus tard j'ai été conduit à la représentation suivante, plus convenable,

$$(29)\quad \begin{array}{ll} J_0 = + & \begin{array}{ll|ll|ll|ll|l} P_{(0)}^* & + p''' & P_{(0)} & + p'''^2 & P_{(2)} & + p'''^3 & P_{(4)} & + p'''^4 & P_{(6)} \\ P_{(8)} & & P_{(10)} & & P_{(12)} & & P_{(14)} & & P_{(16)} \end{array} \\[2ex] J_1 = + & \begin{array}{|ll|ll|ll|ll|l} P_{(0)}^* & - p''' & P_{(0)} & + p'''^2 & P_{(2)} & + p'''^3 & P_{(4)} & + p'''^4 & P_{(6)} \\ P_{(8)} & & P_{(10)} & & P_{(12)} & & P_{(14)} & & P_{(16)} \\ P_{(18)} & & P_{(20)} & & P_{(22)} & & P_{(24)} & & P_{(26)} \end{array} \end{array}$$

. . . .

Suite de signes,

J_0	J_1	J_2	J_3
+	+	+	+
+	—	—	—
+	+	+	+
+	—		—
+	+	+	+

Représentation de la racine,

$$\frac{\eta}{K} = J_0 + p'''^5 J_1 + p'''^{10} J_2 + p'''^{15} J_3 + \dots \tag{30}$$

où il n'y a plus de dénominateurs $1 - p'''^5$.

Le calcul, effectué pour $\frac{1}{u^5} = -7$ a donné

$$\frac{\eta}{K} = +3.6474; \text{ valeur vraie } = 3.6479.$$

Je suis persuadé encore qu'il n'y a pas de développement E, fondé sur les éléments (29), qui vienne contenir, dans la première colonne, la complexe $P_{(8)}$, et qui admette la suite de signes

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ - & - & + & + \\ + & - & + & - \\ - & - & + & + \\ + & - & + & - \end{array}$$

le résultat devenant dans ce cas

$$+0.7381 \quad \text{devant être} \quad +0.8255.$$

Il ne reste ainsi qu'à adopter pour E la formule primordiale (22).

On peut de même se convaincre que le développement A avec les éléments I (29) n'est pas non plus possible. Il ressortit en effet, par l'arrangement de signes convenable choisi dans ce cas, au lieu de la valeur $+1.753453$ la valeur de $+1.1571$ ce qui est, à peu près, la valeur de $P_{(0)}^{*}$ dans le point $\frac{1}{u^5} = +7$ savoir

$$+1.1577.$$

Il faudra ainsi adopter les développements suivants

Pour	E	l'expression	(22)
»	A	»	(25)
»	J	»	(30).

***

Il faut ajouter les développements $\mathfrak{Y}_{-1}$ et $\mathfrak{Y}_{-2}$, valables dans le voisinage de $\frac{1}{u^5} = +\infty$ et $\frac{1}{u^5} = -\infty$ respectivement, qui pour des valeurs assez grandes de l'argument $\frac{1}{u^5}$ se prêtent à une solution plus aisée des racines que les développements dans les environs de l'origine des valeurs de $\frac{1}{u^5}$, cas de E, A, J, considérés ci-haut. Toutefois, comme il n'y a pas grand chose à ajouter à l'exposé des recherches s'y rapportant, données dans (II), il suffira de citer ici les développements dont il s'agit.

Développement $\mathfrak{Y}_{-1}$, $k_0 = +2$; $k = -1$

$$(31)\quad -\frac{\eta}{K}\cdot\bar{p}_{(10)} = \frac{2}{3}\left|\begin{array}{l} \bar{P}_0 \\ -\bar{P}_1 \\ +2\bar{P}_2 \\ -2\bar{P}_3 \end{array}\right.$$

$$+\frac{1}{3}\left\{\left|\begin{array}{l} \bar{P}_0 + \bar{p}''' \\ -\bar{P}_1 \\ +2\bar{P}_2 \\ -2\bar{P}_3 \end{array}\right|\begin{array}{l} 2\bar{P}_2 + \bar{p}'''^2 \\ -2\bar{P}_3 \\ +3\bar{P}_4 \\ -3\bar{P}_5 \end{array}\left|\begin{array}{l} 3\bar{P}_4 + \ldots \\ -3\bar{P}_5 \\ +4\bar{P}_6 \\ -4\bar{P}_7 \end{array}\right.\right.$$

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} +6^2\bar{P}_{10} + \bar{p}''' \\ -6^2\bar{P}_{11} \\ +7^2\bar{P}_{12} \\ -7^2\bar{P}_{13} \end{array}\right|\begin{array}{l} 7^2\bar{P}_{12} + \ldots \\ -7^2\bar{P}_{13} \\ +8^2\bar{P}_{14} \\ -8^2\bar{P}_{15} \end{array}\left|\begin{array}{l} +10^3\bar{P}_{20} + \ldots \\ -10^3\bar{P}_{21} \\ +11^3\bar{P}_{22} \\ -11^3\bar{P}_{23} \end{array}\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\},$$

donnant, pour $\frac{1}{u^5} = 7^5 = 16807$

$$\frac{\eta}{K} = -9.05687;\ \text{valeur vraie} = -9.056871.$$

Développement $\mathfrak{Y}_{-2}$, $k_0 = 0$; $k = -2$

$$(32)\quad -\frac{\eta}{K}\cdot\bar{p}_{(10)} = \frac{1}{2}(\bar{P}_0 - \bar{P}_1)$$

$$+\frac{1}{2}\left|\begin{array}{l} \bar{P}_0 - \frac{2}{3}\bar{p}''' \\ -\bar{P}_1 \\ +\bar{P}_2 \\ -\bar{P}_3 \end{array}\right|\begin{array}{l} \bar{P}_2 + \frac{3}{4}\bar{p}'''^2 \\ -\bar{P}_3 \\ +\bar{P}_4 \\ -\bar{P}_5 \end{array}\left|\begin{array}{l} \bar{P}_4 + \ldots \\ -\bar{P}_5 \\ +\bar{P}_6 \\ -\bar{P}_7 \end{array}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left|\begin{array}{l} \bar{P}_{10} - \ldots \\ -\bar{P}_{11} \\ +\bar{P}_{12} \\ -\bar{P}_{13} \end{array}\right.$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

donnant, pour $\frac{1}{u^5} = -16807$

$$\frac{\eta}{K} = + 12.225453; \text{ valeur vraie } = + 12.22546.$$

Pour ce qui concerne les domaines des divers développements trouvés, on pourra consulter la figure 1, donnée en (III, page 19). Il s'ensuit que, des nombres possibles de k (19), le nombre

$$k = + 2$$

seul n'est pas représenté dans les développements jusqu'ici considérés. Par cette circonstance il paraît probable qu'il doit exister encore un développement appartenant à notre équation. Un développement nouveau $\mathfrak{Y}$ (*Fonction verbale*) fut en effet supposé, dans le cours des recherches primaires et fut encore, malgré des difficultés incontestables, réalisé avec les valeurs de

$$k_0 = + 2; \quad k = 0$$

représentant, avec toute rigueur, la racine pour le point $\frac{1}{u^5} = + 7$ comme au développement (25). C'est là probablement pourtant une identité occasionelle. Car d'une part la forme même du développement cité [I, (187)] n'est pas assez satisfaisante en soi et d'un autre côté, d'après ce que nous venons de voir ci-dessus, il aurait fallu appliquer la valeur de

$$k = + 2 \quad \text{au lieu de} \quad k = 0$$

pour un tel développement. Comme encore, selon l'aperçu des domaines divers, montrés par la figure 1 (page 19, *loco citato*) il y a l'apparence que le domaine de $\mathfrak{Y}$ vient tomber tout entier dans la partie imaginaire de $\frac{1}{u^5}$, où les applications numériques seront considérablement compliquées, le développement dont il s'agit reste jusqu'ici inconnu. Les conclusions susdites ne sont pas en outre décisives proprement dit, car en échangeant v_1 et v_2, on aurait aussi à échanger $k = + 2$ et $k = \quad 2$, et inversement.

II. Sur l'emploi de l'expression raccourcie.

$$\frac{\eta}{K} = 1 + p_1 + p_2 + p_3.$$

De même que l'équation du troisième degré, sous la forme libre, possède la solution simple

$$\frac{\eta}{K} = 1 + p_1$$

et que des expressions analogues ont lieu pour celle du quatrième degré, on pourrait supposer, pour l'équation du cinquième degré, une solution de la forme

$$\frac{\eta}{K} = 1 + p_1 + p_2 + p_3$$

mais pourtant, comme il ressort des expressions en forme de séries considérées dans ce qui précède, seulement à condition qu'on fasse varier les quantités dont dépendent les éléments

$$p_1, \ p_2, \ p_3$$

d'une manière convenable.

Les recherches sur ce sujet, quoique elles n'aboutissent pas à une solution unique ou finie, comprennent pourtant quelques résultats valables au point de vue de la théorie générale. Je vais donner succinctement le procédé s'y rapportant.

Rappelons d'abord les traits principaux de la solution. Ayant déterminé les racines de la *résolvante*

$$v_i^3 + v_i^2 + v_i + \frac{1}{27u^5} = 0$$

on a

(33) $$p_1 = v_1^{3/5}; \quad p_2 = v_2^{3/5}; \quad p_3 = v_3^{3/5}.$$

Comme il arrive, en général, que deux des racines deviennent imaginaires, on posera

$$\begin{aligned} v_1 &= \rho_0 \\ v_2 &= \rho\, e^{i\theta} \quad \text{ou bien} = \rho e^{i\theta + 2k\pi i} \\ v_3 &= \rho\, e^{-i\theta} \qquad\qquad = \rho e^{\ i\theta - 2k\pi i}. \end{aligned}$$

Les valeurs de ρ et θ étant par cela connues, on obtient

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho_0^{3/5} \\ p_2 &= \rho^{3/5} \cdot e^{i\left(\frac{3}{5}\theta + \frac{3}{5}2k\pi\right)} \\ p_3 &= \rho^{3/5} \cdot e^{-i\left(\frac{3}{5}\theta + \frac{3}{5}2k\pi\right)}. \end{aligned}$$

Mettant

(34) $$\vartheta = \frac{3}{5}\theta + \frac{3}{5}2k\pi + 360^\circ$$

d'où il s'ensuit

(34a) $$k = \frac{\vartheta - \frac{3}{5}\theta - 360^\circ}{216^\circ},$$

on a les expressions plus simples

$$(35)\qquad \begin{aligned} p_1 &= \rho_0^{3/5} \\ p_2 &= \rho^{3/5} e^{i\vartheta} \\ p_3 &= \rho^{3/5} e^{-i\vartheta}. \end{aligned}$$

Pour les séries infinies nous avons employé les valeurs de

$$k = -2;\quad 0;\quad +1,$$

pour les trois domaines principaux considérés. Mais, au cas présent, où l'on se rélie à l'expression finie

$$\frac{\eta}{K} = 1 + p_1 = p_2 + p_3,$$

il faut varier la valeur de k d'une manière continue. Afin d'avoir une progression uniforme de ces valeurs depuis $\frac{1}{u^5} = -\infty$ à $\frac{1}{u^5} = +\infty$ nous avons dû adopter une expression de k, qui pour $\frac{1}{u^5} = 27$ donne la valeur de

$$k = -\frac{3}{2},$$

qui admet les mêmes valeurs des diviseurs

$$\bar{p}_{(m.n)}$$

que dans la supposition faite dans la théorie primaire du n° 1 de

$$k = +1.$$

C'est pourquoi, dans l'expression (34), nous avons ajouté au numérateur le terme de 360°. Il convient de partager la formule (34a) en les deux suivantes

$$(36)\qquad \begin{aligned} k_0 &= \frac{-\frac{3}{5}\theta - 360^\circ}{216^\circ} \\ k_1 &= \frac{\vartheta}{216^\circ}. \end{aligned}$$

de manière qu'on aura

$$(37)\qquad k = k_0 + k_1.$$

Pour avoir, d'un autre côté, la valeur de ϑ, devant être employée, il faut recourir à la formule supposée de

$$\frac{\eta}{K} = 1 + p_1 + p_2 + p_3.$$

Il s'agit d'abord de calculer la valeur de $\frac{\eta}{K}$, par des approximations successives pour les valeurs de $\frac{1}{u^5}$ qu'on choisit pour la recherche. Cela fait, comme p_1, p_2, p_3 se calculent bien d'après les formules (33), on aura aussi, d'après les deux dernières des formules (35)

$$2 \cos \vartheta = \frac{p_2 + p_3}{\rho^{3/5}}. \tag{38}$$

On obtient de cette manières les valeurs de k pour les arguments choisis $\frac{1}{u^5} = 0, + 7, + 14 \ldots$, qu'il faut discuter en vue d'obtenir quelque représentation convenable de la fonction k.

Cependant il va se trouver des valeurs de ϑ purement imaginaires, pour les valeurs *négatives* de $\frac{1}{u^5}$. Dans ce cas, il faudra remplacer ϑ par $i\psi$, ce qui donne

$$2 \cos \vartheta = e^{\psi} + e^{-\psi}$$

et ainsi

$$k_1 = i \frac{\psi}{216^\circ},$$

où il faut employer la valeur de 216° exprimée en unités du rayon. Dans ces circonstances, pour avoir un procédé général, nous allons considérer la fonction

$$f = k_0^2 - k_1^2 - 4, \tag{39}$$

d'ou s'obtient toujours la valeur de k_1, puisque la quantité k_0 est donnée au moyen de (36) en fonction de θ. On a en effet

$$k_1 = \sqrt{k_0^2 - 4 - f}. \tag{40}$$

En considérant les arguments particuliers

$$\frac{1}{u^5} = -\infty; \quad \frac{1}{u^5} = 0; \quad \frac{1}{u^5} = 27; \quad \frac{1}{u^5} = +\infty$$

auxquels correspondent:

$$3\theta = 360^\circ \qquad 3\theta = 360^\circ \qquad 3\theta = 270^\circ \qquad 3\theta = 180^\circ$$

et

$$f = 0 \qquad f = 0 \qquad f = -\tfrac{1}{2} \qquad f = -\tfrac{4}{3}$$

on est conduit à supposer, pour la représentation de la fonction f, une forme telle que

(41) $$f_{00} = \frac{-1+\cos 3\theta}{2}\cdot\left(1-\frac{\cos 3\theta}{3}\right).$$

Néanmoins il s'ensuit des différences assez grandes entre ces valeurs et celles des valeurs vraies de f, à savoir les $f - f_{00}$ du tableau ci-joint,

	$\frac{1}{u^5}=3$	$\frac{1}{u^5}=7$	$\frac{1}{u^5}=14$	$\frac{1}{u^5}=27$	$\frac{1}{u^5}=-9$	$\frac{1}{u^5}=-81$,
$h=f-f_{00}=$	-0.041380	-0.104482	0.128366	0.000000	$+0.046871$	$+0.080096$.

Il faut pour cela tenir compte de la fonction

(42) $$h = f - f_{00}.$$

On peut représenter les différences h, d'une manière assez approchée par la fonction

$$h = -\frac{1}{6}\sin 6\theta$$

admettant les résidue donnés ci-après

$h=$	-0.041031	-0.121403	-0.151491	0.000000	$+0.052961$	$+0.087297$.
Résidus $=$	-0.000349	$+0.016921$	$+0.023125$	0.000000	-0.006090	0.007201.

Ces résidus, étant, en général, peu considérables, on pourrait employer la formule

(43) $$h = a\sin 6\theta$$

pour le calcul des *valeurs approchées* de la racine de l'équation du cinquième degré. Il ressort en effet de la synopse donnée plus loin, que la valeur du coëfficient a reste à peu près constante, excepté pour les valeurs de l'argument $\frac{1}{u^5}$ au voisinage immédiat de $\frac{1}{u^5}=0$ ainsi que pour un domaine de l'argument, s'étendant dequis $\frac{1}{u^5} = +27$ à $\frac{1}{u^5}=\infty$, où la valeur de a va-t-en croissant.

Remarquons ici encore le fait singulier, que la fonction simple

$$2f + p_1^2$$

s'évanouit à peu près pour une partie de l'axe des $\frac{1}{u^5}$, et de même pour

$$2f - p_1^2.$$

On a en effet

	$\frac{1}{u^5}$	$2f$	p_1^2	$2f \mp p_1^2$
	— 1361367	+ 0.017176	+ 75.20317	
	— 16807	+ 0.052625	+ 12.45425	
	— 729	+ 0.106062	+ 3.151089	
	— 81	+ 0.134552	+ 1.000000	
	— 27	+ 0.121690	+ 0.481305	— 0.359615
	— 9	+ 0.084990	+ 0.192266	— 0.107276
	— 7	+ 0.075220	+ 0.151372	— 0.076252
	— 1	+ 0.021054	+ 0.018342	+ 0.002712
	— 0.1	+ 0.003903	+ 0.001204	+ 0.002699
	0	0.000000	0.000000	0.000000
	+ 3	— 0.087930	+ 0.082254	— 0.005676
	+ 5	— 0.166269	+ 0.166227	— 0.000035
	+ 6	— 0.213679	+ 0.215235	+ 0.001656
	+ 7	— 0.265934	+ 0.267580	+ 0.001646
	+ 8	— 0.321538	+ 0.321699	+ 0.000161
	+ 10.126	— 0.441895	+ 0.435279	— 0.006616
$6\theta = -90^\circ$	+ 11.19509	— 0.499684	+ 0.489016	— 0.010672
	+ 13	— 0.589108	+ 0.572432	— 0.016676
	+ 14	— 0.633982	+ 0.614767	— 0.019215
	+ 21	— 0.869154	+ 0.850793	— 0.018361
	+ 27	— 1.000000	+ 1.000000	0.000000
	+ 54	— 1.298272	+ 1.437602	+ 0.139330
	+ 81	— 1.452236	+ 1.724456	+ 0.272220
$6\theta = 75^\circ$	+ 121.51176	— 1.556148	+ 2.044924	+ 0.488776
	+ 729	— 1.918098	+ 4.112950	+ 2.194852
	+ 16807	— 2.231866	+ 13.67754	+ 11.44567

À partir de $\frac{1}{u^5} = 27$ les valeurs de $2f + p_1^2$ vont rapidement en croissant. Au voisinage de $\frac{1}{u^5} = 0$ on pourra, avec une approximation très considérable, supposer

(44) $$2f + p_1^2 = 0$$

ou

(44a) $$2f - p_1^2 = 0$$

selon qu'on se trouve sur la partie *positive* ou *négative* de l'axe des $\frac{1}{u^5}$. C'est le domaine où la formule (43) ne s'applique pas convenablement. La formule (43) est approximativement valable, à l'exception de l'intervalle très serré au voisinage de $\frac{1}{u^5} = 0$ sur l'axe négatif jusqu'à $\frac{1}{u^5} = -\infty$. Mais, pour l'axe positif, depuis $\frac{1}{u^5} = 27$ à $\frac{1}{u^5} = +\infty$, ni l'une ni l'autre des formules (43) et (44) n'est applicable. Depuis $\frac{1}{u^5} = 0$ à $\frac{1}{u^5} = 27$ la formule (44) est bien approchée.

L'exposé des valeurs de $2f \mp p_1^2$ montre quelques discontinuités, notamment aux valeurs de

$$\frac{1}{u^5} = -9 \quad \text{et} \quad \frac{1}{u^5} = +3 \cdot$$

et il semble ainsi, que les solutions particulières viennent s'opposer à la marche en général regulière des racines, d'autant plus qu'il y a plus de cas particuliers. On peut se convaincre que, par rapport à l'équation du troisième degré, cette circonstance devient réduite par elle même [1]. Quant à la discontinuité visible à $2f + p_1^2$ dans le voisinage des arguments $\frac{1}{u^5} = 6$ et $\frac{1}{u^5} = 7$ il semble hors de doute, que cela tient au voisinage de la solution particulière ayant lieu dans les points doubles, savoir $\frac{1}{u^5} = 7 + 4i\sqrt{2}$.

Revenons, après cette digression, à la formule (43) c. à. d.

$$h = a \sin 6\theta$$

où la valeur de a reste à peu près constante, à l'exception de l'axe *positif* depuis $\frac{1}{u^5} = 27$ à $\frac{1}{u^5} = +\infty$. Comme pourtant il y a de petites variations de a aussi depuis $\frac{1}{u^5} = -\infty$ à $\frac{1}{u^5} = 27$, j'ai procédé à étudier la marche du coëfficient a, considéré comme une fonction de l'argument θ. Il ressort de cette recerche, qu'il n'y a pas une expression générale de la fonction a. C'est au

---

[1] En effet, si dans l'équation $\eta^3 + \frac{3\eta}{u} = \frac{1}{u^3} - 1$ on suppose $\eta = -\frac{1}{u^2}$, il s'ensuit la valeur spéciale $\frac{1}{u^3} = -2 + \sqrt{5}$, avec la racine particulière $\eta = -[-2 + \sqrt{5}]^{2/3}$; de plus $v = -\frac{1}{u^3} = 2 - \sqrt{5}$ et $p = (2 - \sqrt{5})^{1/3}$.

On a par suite $\frac{\eta}{K} = p^2$, tandis que la forme générale de la racine est $\frac{\eta}{K} = 1 + p$. contradiction apparente, réduite cependant par ce que, identiquement, $p^2 = p + 1$, d'où, en effet, $p = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = (2 - \sqrt{5})^{1/3}$ c. a. d. la valeur directement évaluée ci-haut (cfr. la note page 248).

contraire à ce point de l'analyse que la subdivision de l'espace de l'argument se fait remarquer. Mais, on réussit à supprimer considérablement les différences, en appliquant, selon les cas, des expressions différentes de la fonction a, comme il suit:

1. Depuis $\frac{1}{u^5}=0$ à $\frac{1}{u^5}=11.19509$: $a=a_0+a_1\cos^5 6\theta$; $a_0=0.1379$; $\log a_1=8.561$ $(6\theta=90^\circ)$

2. » $\frac{1}{u^5}=11.19509$ à $\frac{1}{u^5}=27$: $a=a_0+a_1\cos^2 6\theta$; $a_0=0.1379$; $\log a_1=8.316$

3. » $\frac{1}{u^5}=27$ à $\frac{1}{u^5}=121.51176$: $a=a_0+a_1\cos 6\theta$; $a_0=0.2787$; $\log a_1=9.0796$.

Je n'insisterai pas ici sur d'autres domaines de la variable indépendante, parceque les trois résultats indiqués suffisent pour montrer l'existence de points de discontinuité sur l'axe réel des $\frac{1}{u^5}$, qui peuvent correspondre aux limites des domaines de convergence des développements généraux du n° précédent.

En outre, il ne paraît pas aussi simple de former de plus des expressions des nouveaux coëfficients a_1, et ainsi de suite.

Voici cependant l'exposé raccourci des calculs jusqu'ici accomplis, dans l'hypothèse qui nous occupe.

I. $h=a\sin 6\theta$; $a=a_0+a_1\cos^5 6\theta$; $a_0=+0.1379$; $\log a_1=8.561$

$\frac{1}{u^5}$	$+3$	$+5$	$+6$	$+7$	$+8$	$+10.125$	$+11.19509$
$h=$	-0.04138	-0.07278	-0.08906	-0.1044	-0.1171	-0.1354	-0.1379
$\log\sin 6\theta$	9.3913_n	9.6774_n	9.7806_n	9.8624_n	9.9238_n	9.9924_n	0.0000_n
$\log\cos 6\theta$	9.9864	9.9443	9.9017	9.8358	9.7356	9.2676	$-\infty$
$a=$	$+0.1681$	$+0.1530$	$+0.1476$	$+0.1434$	$+0.1405$	$+0.1378$	$+0.1379$
$a-a_0=$	$+0.0302$	$+0.0151$	$+0.0097$	$+0.0055$	$+0.0026$	-0.0001	0.0000
$a_1\cos^5 6\theta=$	$+0.0311$	$+0.0191$	$+0.0117$	$+0.0055$	$+0.0017$	$0,0000$	0.0000
Résidus.	-0.0009	-0.0040	-0.0020	0.0000	$+0.0009$	-0.0001	0.0000

II. $h=a\sin 6\theta$; $a=a_0+a_1\cos^2 6\theta$; $a_0=+0.1379$; $\log a_1=8.316$

$\frac{1}{u^5}=$	$+11.19509$	$+13$	$+14$	$+21$	$+27$
$h=$	-0.1379	-0.1339	-0.1284	-0.0607	0.0000
$\log\sin 6\theta$	0.0000_n	9.9819_n	9.9585_n	9.5914_n	$-\infty$
$\log\cos 6\theta$	$-\infty$	9.4518_n	9.6200_n	9.9641_n	0.0000_n
$a=$	$+0.1379$	$+0.1396$	$+0.1413$	$+0.1556$	$+0.1586$
$a-a_0=$	0.0000	$+0.0017$	$+0.0034$	$+0.0177$	$+0.0207$
$a_1\cos^2 6\theta=$	0.0000	$+0.0017$	$+0.0036$	$+0.0175$	$+0.0207$
Résidus.	0.0000	0.0000	-0.0002	$+0.0002$	$0.0000.$

III. $h = a \sin 6\theta$; $a = a_0 + a_1 \cos 6\theta$; $a_0 = + 0.2787$; $\log a_1 = 9.080$

$\frac{1}{u^5} =$	$+27$	$+54$	$+81$	$+121.51176$	$+729$	$+16807$
				$\theta = 75^\circ$		
$h =$	0.0000	$+0.1631$	$+0.2314 =$	0.2787	$+0.3079$	$+0,2112$
$\log \sin 6\theta$	$-\infty$	9.8850	9.9785	0.0000	9.8273	9.3440
$\log \cos 6\theta$	0.0000_n	9.8070_n	$9,4876_n$	$-\infty$	9.8696	9.9891
$a =$	$+0.1586$	$+0.2125$	$+0.2432 +$	0.2787	$+0.4582$	$+0.9565$
$a - a_0 =$	-0.1201	-0.0662	-0.0355	0.0000	$+0.1795$	$+0.6778$
$a_1 \cos 6\theta =$	-0.1201	-0.0771	-0.0370	0.0000	$+0.089$	$+0.117$
Résidus.	0.0000	$+0.0109$	$+0.0015$	0.0000	$+0.0091$	$+0.561$

IV. $h = a \sin 6\theta$

$\frac{1}{u^5} =$	-0.1	-1	-7	-9	-27	-81	-729	-16807	-1361367
$h =$	$+0.0020$	$+0.0107$	$+0.0409$	$+0.0469$	$+0.0710$	$+0.0801$	$+0.0604$	$+0.0277$	$+0.0087$
$\log \sin 6\theta$	7.8037	8.7729	9.4416	9.5021	9.6735	9.7191	9.6095	9.2602	8.6610
$\log \cos 6\theta$	0.0000	9.9992	9.9827	9.9769	9.9454	9.9304	9.9607	9.9927	9.9995
$a =$	$+0.3069$	$+0.1800$	$+0.1479$	$+0.1475$	$+0.1506$	$+0.1529$	$+0.1485$	$+0.1522$	$+0.1894$

— valeur de a sensiblement constante jusqu'au voisinage de $\frac{1}{u^5} = 0$.

Il doit ressortir de cet exposé que les formules différentes adoptées pour la fonction h, suffiront pour le calcul approché des racines, à deux exceptions près:

1. le voisinage immédiat de $\frac{1}{u^5} = 0$, où pourtant on peut employer les formules (44) et (44a), c. à. d.

$$2f + p_1^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2f - p_1^2 = 0;$$

2. la partie de l'axe positif, s'étendant depuis $\frac{1}{u^5} = 121.51176$ à $\frac{1}{u^5} = +\infty$, cas auquel nous aurons l'occasion de revenir dans le n° suivant.

Ce qui cependant semble le plus remarquable dans l'exposé dont il s'agit, ce sont les discontinuités ayani lieu pour $\frac{1}{u^5} = 0$ et

$$\frac{1}{u^5} = +11.19509 \ (6\theta = -90^\circ).$$

Ces discontinuités paraissent bien liées aux limites du domaine A du *développement alterne* (Figure 1 de III, page 19). Sans cela on se trouverait, en effet, en doute sur l'existence de ce domaine. Le domaine E du *développement externe* est naturellement limité au point $\frac{1}{u^5} = 27$. Mais, quant au domaine J du *développement interne,* notre exposé (IV) ne paraît pas indiquer de limite finie. C'est pourtant seulement jusqu'au point $\frac{1}{u^5} = -27$ que le développement J peut rester régulier ou adapté aux besoins pratiques. Mais au delà de ce point il pourrait encore se trouver de convergence, établie de cette manière, que les divers termes de la forme $p_{(m.n)}$ pourriaient se détruire de plus en plus, circonstance qui, en effet, fut remarquée dans un cas des calculs, savoir en cherchant à représenter E sous la supposition de $k = 0$ au lieu de celle de $k = +1$, ce qui pourtant a semblé aboutir à la valeur de $E = 0$.

En terminant l'exposé du cas spécial considéré dans le n° présent, nous donnerons, à l'usage, les valeurs des racines actuellement calculées par la methode d'approximations successives à l'aide de l'équation originale du cinquième degré:

$\frac{1}{u^5} =$	$\frac{\eta}{K} =$	$\frac{1}{u^5} =$	$\frac{\eta}{K} =$
0	+ 3.000000	0	+ 3.000000
+ 3	+ 2.408225	− 0.1	+ 3.055106
+ 5	+ 2.083806	− 1	+ 3.218447
+ 6	+ 1.918493	− 7	+ 3.647920
+ 7	+ 1.753453	− 9	+ 3.737194
+ 8	+ 1.592151	− 27	+ 4.242792
+ 10.125	+ 1.276667	− 81	+ 4.951887
+ 11.195091	+ 1.136148	− 729	+ 7.055410
+ 13	+ 0.9274050	16807	+ 12.225460
+ 14	+ 0.8255050	1361367	+ 27.625625
+ 21	+ 0.2996944		
+ 27	0.0000000		
+ 54	− 0.7644326		
+ 81	− 1.194008		
+ 121.51176	− 1.624705		
+ 729	− 3.709927		
+ 16807	− 9.056871		

$$K = -\frac{3^{2/5}}{3}.$$

III. Sur les expressions purement algébriques, se rapportant à l'équation du cinquième degré sous la forme libre.

Afin de donner un aperçu préliminaire sur les recherches de ce chapitre, nous allons d'abord envisager les cas plus simples des équation du troisième et du quatrième degré, sous le point de vue dont il s'agit.

1. Équation du 3^{ième} degré. — L'équation libre du troisième degré est

$$\eta^3 + \frac{3\eta}{u} = \frac{1}{u^3} - 1.$$

Pour effectuer la solution, d'une manière directe, on peut envisager une valeur de u dans le voisinage de

$$u = 0.$$

Mettant

$$\eta^3 = \frac{1}{u^3}[1 - 3\eta u^2 - u^3]$$

ou bien

(45) $$\eta = \frac{1}{u}\left[1 + 3\left(-\eta u^2 - \frac{u^3}{3}\right)\right]^{1/3}$$

on trouve par des approximations successives

$$1) \qquad \eta = \frac{1}{u}$$

$$2) \qquad \eta = \frac{1}{u}[1 - 3u]^{1/3} = \frac{1}{u} - 1$$

$$3) \qquad \eta = \frac{1}{u}[1 - 3(u - u^2)]^{1/3}$$

$$= \frac{1}{u}[1 - u \; *] = \frac{1}{u} - 1.$$

Les approximations successives, dans lesquelles les faculté, successives

$$\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

vont entrer, aboutissent à l'expression

$$\begin{aligned} \eta = \frac{1}{u}&[1 \quad * \quad * \quad * \cdots] \\ -1&[1 \quad * \quad * \quad * \cdots] \\ +u&[* \quad * \quad * \quad * \cdots], \end{aligned}$$

c'est à dire à la racine bien connue

$$\eta = \frac{1}{u} - 1.$$

2. Équation du 4^{ième} degré. — L'équation libre étant

$$\eta^4 + \frac{4\eta}{u^2} = \frac{1}{u^4} - 4,$$

on aura, de même, à effectuer les approximation d'après la formule (analogue à (45))

(46) $$\eta = \frac{1}{u}[1+4(-\eta u^2 - u^4)]^{1/4}.$$

Les approximations aboutissent à l'expression suivante,

(47) $$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{u}\left(1 - \frac{1}{8}u^4 - \frac{5}{128}u^8 - \frac{21}{1024}u^{12} - \frac{13.33}{16.2048}u^{16}\ldots\right)\\ &+ 1\,(-1 \quad * \quad * \quad * \quad * \quad \ldots)\\ &+ u\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{16}u^4 - \frac{7}{256}u^8 - \frac{33}{2048}u^{12} - \frac{5.11.13}{32.2048}u^{16}\ldots\right)\\ &+ u^3(\quad * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad \ldots)\\ &= \frac{1}{u}A\\ &- 1\\ &+ u\,B,\end{aligned}$$

et il s'ensuit que

(48) $$A = \frac{\sqrt{1-u^2}+\sqrt{1+u^2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-u^4}}$$

$$B = \frac{\sqrt{1-u^2}-\sqrt{1+u^2}}{2u^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-u^4}}}.$$

Comme il n'est pas toujours, et notamment pour l'équation du cinquième degré, aisé de voir comment des séries de la forme obtenue se puissent représenter par des expressions algébriques telles que (48), on peut convenablement procéder comme il suit, en mettant

(49) $$A = \sqrt{-\alpha}$$
$$B = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}$$

d'où il résulte, d'une part

$$\eta = \frac{1}{u}\sqrt{-\alpha} - 1 - \frac{1}{2}u\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}$$

et d'un autre côté

(50) $$\alpha^2 + \alpha + \frac{u^4}{4} = 0,$$

équation analogue à celle de la *résolvante* proprement dite, savoir

(51) $$v_i^2 + v_i + \frac{1}{4u^4} = 0$$

et ayant les mêmes points de racines égales que celle-là. Il sera même avantageux d'introduire une nouvelle quantité β, définie par

(52) $$\alpha + 1 = -\beta$$

par où l'on obtient

(53) $$\beta^2 + \beta + \frac{u^4}{4} = 0$$

et d'autre part

(54) $$A = \sqrt{1+\beta} \qquad B = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\beta}}.$$

C'est qui se voit immédiatement, si l'on indroduit d'après (53) la quantité β au lieu de u^4 dans les séries (47). On obtient, en effet, par cela

$$A = 1 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 + \frac{1}{16}\beta^3 - \frac{5}{128}\beta^4 \ldots$$
$$B = -\frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{8}\beta^2 - \frac{5}{16}\beta^3 + \frac{35}{128}\beta^4 \ldots\right]$$

expressions plus simples que celles de (47) et qui immédiatement font voir que

(55) $$A = (1+\beta)^{1/2}; \quad B = -\frac{1}{2}(1+\beta)^{-1/2}$$

de manière que la racine soit

(56) $$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{u}\sqrt{1+\beta} \\ &\quad -1 \\ &\quad -\frac{1}{2}u\,\frac{1}{\sqrt{1+\beta}}.\end{aligned}$$

C'est une nouvelle forme finie de la solution de l'équation du $4^{\text{ième}}$ degré, différente de celle précédemment considérée, savoir

$$\eta = -1 + \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2}$$

où v_1 et v_2 se rapportent à la *résolvante*

(57) $$v_i^2 + v_i + \frac{1}{4u^4} = 0.$$

La *résolvante nouvelle* s'écrit au contraire (selon 53)

(58) $$\beta^2 + \beta + \frac{1}{4u'^5} = 0$$

où l'on a mis

(59) $$u' = \frac{1}{u}.$$

3. **Équation du $5^{\text{ième}}$ degré.** — Pour cette équation, qui en effet équivaut à l'équation générale du cinquième degré, j'avais déduit (I, page 62) l'expression suivante du développement de la racine pour $\frac{1}{u^5} = 0$ (à remplacer,

loco citato, le nombre 32 par 52)

$$(60)\qquad \begin{aligned} \eta = \frac{1}{n}&\left[1 - \frac{6}{5}u^5 - \frac{52}{25}u^{10} + \ldots\right] \\ - &\left[1 + \frac{3}{5}u^5 + \frac{77}{25}u^{10} + \ldots\right] \\ - u&\left[1 + \frac{2}{5}u^5 - \frac{33}{25}u^{10} + \ldots\right] \\ - u^2&\left[1 - \frac{11}{5}u^5 + \frac{168}{25}u^{10} + \ldots\right] \\ + u^3&[* \quad * \quad * \quad \ldots] \end{aligned}$$

expression, analogue à celles remarquées ci-dessus pour les équations du $3^{\text{ième}}$ et du $4^{\text{ième}}$ degré. L'expression (60) est remarquable par la circonstance que sa dernière série s'évanouit identiquement. C'est l'expression de la racine qui, dans tous les cas, s'obtient de manière tout à fait directe. On pourrait peut-être considérer comme autorisé à assigner une dénomination particulière, par exemple de *racinal,* à cette expression, qui en effet sert, dans les cas déjà considérés, à la solution des équations d'une manière univoque.

Nous venons de voir comment le *racinal* conduit, pour les équations du troisième et du quatrième degré à des expressions purement algébriques des racines, en remarquant que les séries, dont elles consistent, sont bien sommables en forme finie. Quant aux séries, appartenant à l'expression (60), outre certaines identités, comme

$$-\frac{6}{5} - \frac{3}{5} - \frac{2}{5} + \frac{11}{5} = 0,$$

une loi générale des coëfficients n'est pas encore immédiatement visible. Par cette raison et pour vérifier le fait évident, que les coëfficients de la dernière série s'évanouissent identiquement, j'ai procédé récemment à pousser le développement plus loin qu'à l'occasion d'autrefois. Voici les résultats ainsi obtenus,

$$(61)\qquad \begin{aligned} \eta = \frac{1}{u}&\left[1 - \frac{6}{5}u^5 - \frac{52}{5^2}u^{10} + \frac{234}{5^3}u^{15} + \frac{46644}{5^4}u^{20}\ldots\right] \\ - &\left[1 + \frac{3}{5}u^5 + \frac{77}{5^2}u^{10} + \frac{1672}{5^3}u^{15} + \frac{18964}{5^4}u^{20}\ldots\right] \\ - u&\left[1 + \frac{2}{5}u^5 - \frac{33}{5^2}u^{10} - \frac{2352}{5^3}u^{15} - \frac{83961}{5^4}u^{20}\ldots\right] \\ - u^2&\left[1 + \frac{11}{5}u^5 + \frac{168}{5^2}u^{10} + \frac{721}{5^3}u^{15} - \frac{107406}{5^4}u^{20}\ldots\right] \\ + u^3&[* \quad * \quad * \quad * \quad \ldots\ldots \quad \ldots]. \end{aligned}$$

On voit que le quatrième terme de la dernière ligne s'évanouit encore comme les précédents, par où les autres coëfficients de u^{15} sont aussi contrôlés. Quant au cinquième terme de la dernière ligne, la déduction directe en fut omise, par suite des grandes difficultés des calculs, déjà remarquables aux dernièrs coëfficients de u^{20} calculés, resultant en effet de multiplications itérées, où figurent des nombres à treize chiffres. Les coëfficients donnés sont pourtant bien contrôlés et l'on s'aperçoit qu'ils se décomposent en produits de nombres simples, comme

$$\begin{aligned}46644 &= 3.4.13.13.23\\ 18964 &= 4.11.431\\ 83961 &= 9.19.491\\ 107406 &= 2.3.9.9.13.17\end{aligned}$$

ce qu'on peut considérer comme un contrôle ultérieur qualitatif.

Prenons maintenant, comme point de départ, la résolvante de l'équation du cinquième degré

$$\eta^5 + \frac{5\eta}{u^3} = \frac{1}{u^5} - 27$$

ayant la forme

(62) $$v^3 + v^2 + v + \frac{1}{27u^5} = 0.$$

Cette équation admet des racines égales pour

(63) $$\begin{aligned}\frac{1}{u^5} &= 7 \pm i\sqrt{32}\\ &= \frac{1}{7 \mp i\sqrt{32}}.\end{aligned}$$

Écrivons la *résolvante secondaire*, qui doit être considérée dans notre cas, sous la forme

(64) $$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{27u'^5} = 0,$$

analogue à (58). L'équation (64) a des racines égales pour

(65) $$\frac{1}{u'^5} = 7 \mp i\sqrt{32}.$$

Afin que les deux équations (62) et (64) aient les mêmes lieux de racines égales, il faut que

(66) $$\frac{1}{u'^5} = 81u^5$$

d'où il s'ensuit, d'après (64),

(67) $$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 3u^5 = 0.$$

Écrivons la racine de l'équation du cinquième degré sous la forme, analogue à (47),

$$\eta = \frac{1}{u} A - B - u\,C - u^2 D \tag{68}$$

*

où A, B, C, D sont données, d'après (61), en développements procédant suivant les puissances de u^5. D'une manière toute analogue au procédé suivi dans le cas de l'équation du quatrième degré, on peut au moyen de (67) remplacer les développements suivant u^5 par d'autres procédant suivant les puissances de la quantité α. Les résultats de cette transformation sont les suivants,

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{6}{15}\alpha + \frac{38}{15^2}\alpha^2 - \frac{444}{15^3}\alpha^3 \ldots \\ B &= 1 - \frac{3}{15}\alpha + \frac{32}{15^2}\alpha^2 - \frac{37}{15^3}\alpha^3 \ldots \\ C &= 1 - \frac{2}{15}\alpha - \frac{63}{15^2}\alpha^2 + \frac{912}{15^3}\alpha^3 \ldots \\ D &= 1 - \frac{11}{15}\alpha + \frac{3}{15^2}\alpha^2 + \frac{1844}{15^3}\alpha^3 \ldots \end{aligned} \tag{69}$$

Évidemment, on peut s'attendre à une certaine réduction, en considérant les développements respectifs de

$$\begin{aligned} (1-\alpha)^{-\frac{6}{15}} &= 1 + \frac{6}{15}\alpha + \frac{63}{15^2}\alpha^2 + \frac{756}{15^3}\alpha^3 \ldots \\ (1-\alpha)^{+\frac{3}{15}} &= 1 - \frac{3}{15}\alpha \ldots \\ (1-\alpha)^{+\frac{2}{15}} &= 1 - \frac{2}{15}\alpha \ldots \\ (1-\alpha)^{+\frac{11}{15}} &= 1 - \frac{11}{15}\alpha \ldots, \end{aligned} \tag{69a}$$

réduction qui pour l'équation du quatrième degré s'est trouvée parfaite, mais qui dans le cas présent est assujettie à des résidus, comme, par exemple, pour A:

Résidu:
$$\begin{aligned} & - \frac{25}{15^2}\alpha^2 - \frac{1200}{15^3}\alpha^3 + \ldots \\ & = -\frac{1}{9}\alpha^2\left[1 + \frac{16}{5}\alpha + \ldots\right]. \end{aligned}$$

On peut alors mettre

$$A = (1-\alpha)^{-\frac{6}{15}}\left[1 - \frac{\frac{1}{9}\alpha^2\left(1+\frac{16}{5}\alpha\right)}{(1-\alpha)^{-\frac{6}{15}}}\right]$$

$$= (1-\alpha)^{-\frac{6}{15}} \cdot A_1 .$$

En continuant, on aura

$$A_1 = 1 - \frac{1}{9}\alpha^2 \ldots$$

$$= (1-\alpha^2)^{\frac{1}{9}} \ldots ,$$

et il s'ensuit ainsi qu'on pourra effectuer une représentation de A en forme de produit

$$A = (1-\alpha)^{-\frac{6}{15}}(1-\alpha^2)^{\frac{1}{9}} \ldots , \tag{70}$$

et de même pour les coëfficients B, C, D. Aucun d'eux ne se réduit, comme au cas de l'équation du quatrième degré ($C = -1$), à une constante.

Il y a cependant de l'indécision par rapport aux exposants figurant dans une expression telle que (70). Par exemple, on pourrait évidemment aborder le développement de A aussi par le facteur

$$(1+\alpha)^{+\frac{6}{15}}.$$

C'est pourtant ce qui a lieu également pour l'équation du quatrième degré, et c'est seulement par la discussion des divers hypothèses qu'on peut décider sur le choix des exposants convenables. C'est ainsi, pour l'équation de quatrième degré (voir (55)), seulement l'hypothèse de

$$A = (1+\beta)^{+\frac{1}{2}}$$

qui conduit à une expression finie, l'hypothèse de

$$A = (1-\beta)^{-\frac{1}{2}}$$

devenant exclu.

Quant aux coëfficients de α dans les expression (69), soit A, B, C, D, on a

$$A_1 = +\frac{6}{15}, \quad B_1 = -\frac{3}{15}, \quad C_1 = -\frac{2}{15}, \quad D_1 = -\frac{11}{15},$$

et l'on peut remarquer les relations suivantes,

$$A_1 + D_1 = B_1 + C_1 = -\frac{1}{3} \tag{71}$$

ou bien

$$A_1 - B_1 - (C_1 - D_1) = 0.$$

On peut aussi mettre

$$(72)\qquad \begin{aligned} A_1 &= +\frac{6}{15} \\ B_1 &= -\frac{1}{3}+\frac{2}{15} \\ C_1 &= \phantom{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{15} \\ D_1 &= -\frac{1}{3}-\frac{6}{15} \end{aligned} \qquad \text{ou bien} \qquad \begin{aligned} A_1 &= \phantom{-\frac{1}{3}}+\frac{6}{15} \\ B_1 &= \phantom{-\frac{1}{3}}-\frac{3}{15} \\ C_1 &= -\frac{1}{3}+\frac{3}{15} \\ D_1 &= -\frac{1}{3}-\frac{6}{15} \end{aligned}$$

manifestant une certaine symétrie, qui, pour l'équation du 4ième degré, se manifeste aux valeurs

$$\begin{aligned} A_1 &= +\frac{1}{2} \\ C_1 &= 0 \\ B_1 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mais, parcequ'il manque de symétrie par rapport au terme $-\frac{1}{3}$, on ne peut pas s'attendre de cette manière, à une expression finie dans le cas présent. Il semble, dans ces circonstances, que le plus naturel est de se tenir, comme pour l'équation du quatrième degré, aux valeurs immédiates des coëfficients dont il s'agit, savoir

$$+\frac{6}{15}; \quad -\frac{3}{15}; \quad -\frac{2}{15}; \quad -\frac{11}{15},$$

en abordant la tâche de former les exposants dans les produits infinis, qui doivent représenter les expressions (69) des A, B, C, D. C'est de cette manière qu'il a fallu remplacer les expressions (69a) d'abord considérées, par celles de

$$(73)\qquad \begin{aligned} (1+\alpha)^{+\frac{6}{15}} &= 1 + \frac{6}{15}\alpha + \dots \\ (1+\alpha)^{-\frac{3}{15}} &= 1 - \frac{3}{15}\alpha + \dots \\ (1+\alpha)^{-\frac{2}{15}} &= 1 - \frac{2}{15}\alpha + \dots \\ (1+\alpha)^{-\frac{11}{15}} &= 1 - \frac{11}{15}\alpha + \dots \end{aligned}$$

donnant les mêmes termes du premier ordre, mais d'autres termes de l'ordre supérieur.

Il semble plus avantageux de remplacer la quantité α par celle de

$$\beta = \alpha + \alpha^2 \tag{74}$$

qui touche de plus près la résolvante (67) que la quantité α. Ayant par cela

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta - \beta^2 + 2\beta^3 - 5\beta^4 + 14\beta^5 \ldots \\ \alpha^2 &= \beta^2 - 2\beta^3 + 5\beta^4 - 14\beta^5 \ldots \\ \alpha^3 &= \beta^3 - 3\beta^4 + 9\beta^5 \ldots, \end{aligned} \tag{74a}$$

il est facile de transformer les expressions (69) de façon à procéder suivant les puissances de β. On peut aussi effectuer la transformation dont il s'agit aux expressions (61) mêmes, en observant que, d'après (67) et (74), on a

$$\begin{aligned} u^5 &= -\frac{1}{3}\beta - \frac{1}{3}\beta^3 + \beta^4 - 3\beta^5 \ldots \\ u^{10} &= +\frac{1}{9}\beta^2 + \frac{2}{9}\beta^4 - \frac{2}{3}\beta^5 \ldots \\ u^{15} &= -\frac{1}{27}\beta^3 - \frac{1}{9}\beta^5 \ldots \\ u^{20} &= +\frac{1}{81}\beta^4 \ldots \\ u^{25} &= -\frac{1}{243}\beta^5 \ldots . \end{aligned} \tag{75}$$

On obtient par l'un ou l'autre procédé

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{6}{5.3}\beta - \frac{52}{5^2.9}\beta^2 + \frac{1116}{5^3.27}\beta^3 - \frac{37506}{5^4.81}\beta^4 \ldots \\ B &= 1 - \frac{3}{5.3}\beta + \frac{77}{5^2.9}\beta^2 - \frac{2347}{5^3.27}\beta^3 + \frac{83989}{5^4.81}\beta^4 \ldots \\ C &= 1 - \frac{2}{5.3}\beta - \frac{33}{5^2.9}\beta^2 + \frac{1902}{5^3.27}\beta^3 - \frac{78561}{5^4.81}\beta^4 \ldots \\ D &= 1 - \frac{11}{5.3}\beta + \frac{168}{5^2.9}\beta^2 - \frac{3196}{5^3.27}\beta^3 + \frac{79569}{5^4.81}\beta^4 \ldots . \end{aligned} \tag{76}$$

En prenant les expressions (76) pour point de départ, j'ai insisté sur la réduction de ces *séries* aux *produits* de la manière simple signalée dans ce qui précède. Il suffit de donner ici le résultat, auquel les réductions ont abouti, sans entrer en plus de détails du calcul. On a obtenu

$$\begin{aligned} A &= (1+\beta)^{+\frac{6}{15}}(1+\beta^2)^{-\frac{1}{9}}(1+\beta^3)^{+\frac{1}{5}+\frac{9}{81}}(1+\beta^4)^{\frac{1}{9}-\frac{4}{5}+\frac{1}{81}} \ldots \\ B &= (1+\beta)^{-\frac{3}{15}}(1+\beta^2)^{+\frac{2}{9}}(1+\beta^3)^{-\frac{3}{5}+\frac{3}{81}}(1+\beta^4)^{+\frac{2}{9}+\frac{7}{5}-\frac{7}{81}} \ldots \\ C &= (1+\beta)^{-\frac{2}{15}}(1+\beta^2)^{-\frac{2}{9}}(1+\beta^3)^{+\frac{3}{5}-\frac{1}{81}}(1+\beta^4)^{\frac{2}{9}-\frac{7}{5}-\frac{1}{81}} \ldots \\ D &= (1+\beta)^{-\frac{11}{15}}(1+\beta^2)^{+\frac{1}{9}}(1+\beta^3)^{-\frac{1}{5}-\frac{7}{81}}(1+\beta^4)^{+\frac{1}{9}+\frac{4}{5}-\frac{9}{81}} \ldots . \end{aligned} \tag{77}$$

En développant ces expressions suivant les puissances de la quantité β ou de u^5, on va retrouver les expressions (76) ou (61) aux quantités d'ordre u^{25} près.

Il y a certaines relations entre les exposants entrant dans les expressions (77). En désignant par a, b, c, d les numérateurs des exposants ou des fractions individuelles, dont les exposants sont composés, on trouve, qu'en général, $a + d = b + c$. À l'exception des exposants, ayant les dénominateurs 15 ou 81, on a de plus

$$a + d = 0, \quad b + c = 0.$$

Aux environs plus ou moins étendus de

$$\frac{1}{u^5} = \infty$$

β devenant assez petite, on peut employer les expressions (77) pour le calcul approché des racines de l'équation du cinquième degré, notamment dans les cas. signalés dans ce qui précède, où il n'y a pas d'autre représentation approchée des racines.

En résumé, nous disposons ainsi, pour le problème qui nous occupe, d'une part des développements autologues envisagés dans n° 1; d'intérêt théorique, mais qui par leur étendue considérable, tenant à la nécessité d'inclure bien de cas spéciaux de l'équation du cinquième degré, ne sont pas en général appropriés aux besoins pratiques; et d'autre côté des expressions approchées du n° 2 et 3, d'usage bien facile, mais qui exigent l'application d'approximations successives, pour obtenir les racines avec toute la rigueur désirable.

On peut s'arranger, pour les approximations successives, selon le procédé donné dans « Arkiv för Mathematik, Astronomi o. Physik, Bd 3, n° 5, 1906, Vetenskaps-akademien, Stockholm, Theorie der algebraische Gleichungen » formule (50) et suivantes. Il suffit d'en rappeler, que dans le cas où l'équation est réduite à la forme

$$\theta^5 + 5a\theta^2 = 3b \tag{a}$$

on a la solution

$$\theta = \xi^{1/5} + \eta^{1/5} + \zeta^{1/5} \tag{b}$$

où

$$\xi = b + x, \quad \eta = b + y, \quad \zeta = b + z,$$

x, y, z étant les racines de l'équation du troisième degré

$$x^3 + 3sx = 2t, \tag{c}$$

dont les coëfficients sont donnés par

$$s = s_0 + s_1\theta, \quad t = t_0 + t_1\theta \tag{d}$$

et où l'on a

$$s_0 = -b^2; \qquad t_0 = \frac{a^5 + 2b^3}{2}$$

$$s_1 = -\frac{5}{3}a^3; \quad t_1 = -\frac{5}{2}a^2b.$$

En prenant pour point de départ un nombre quelconque, soit θ_0, par exemple $\theta_0 = 0$, on atteint la racine cherchée à une exactitude de cinq chiffres, par six approximations. Il va sans dire que, si dès le commencement on dispose d'une valeur approchée de la racine, le calcul soit encore plus expéditif. Cette methode de solution doit être toute générale, et n'exige pas même la réduction de Bring–Jerrard à la forme normale supposée ci-haut. Il ne doit pas y avoir de l'indécision importante, si l'on a soin, en chaque approximation, de partir, aux formules (d), de la moyenne des valeurs de θ obtenues par les deux approximations précédentes.

La transformation analogue de l'équation originale du cinquième degré, savoir

$$\theta^5 + 5a\theta^3 + 5b\theta^2 + 5c\theta = 5d$$

renferme, pour $b = 0$, $c = a^2$ le cas spécial de Porro, considéré dans son « Traité d'Algèbre », aboutissant à une solution finie remarquable, qui s'étend de plus aux équations de degré supérieur.

Sopra certe classi di connessioni lineari.

Memoria di STANISLAO GOLAB (Cracovia).

L'oggetto della seguente nota è l'esposizione di una serie di teoremi ammessi da una classe di connessioni lineari. Queste considerazioni hanno avuto origine dalla generalizzazione di una affermazione del sig. G. CORBELLINI [1]. Ho assunto le notazioni che si trovano nel libro di J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül* [2].

1. Sia dato nello spazio n-dimensionale X_n il sistema di n congruenze indipendenti di curve. Diciamo che questo sistema è *olonomo* se può essere stabilito in ogni punto ξ dello spazio X_n un sistema di riferimento $\underset{i}{e}^{\nu}$ [3] (composto di n vettori controvarianti) tale, che i vettori del detto sistema siano tangenti alle curve delle congruenze e formino un sistema olonomo nel senso ordinario [4]. Il sistema di riferimento composto dei vettori $\underset{i}{e}^{\nu}$ verrà indicato con (i). La condizione necessaria e sufficiente per l'olonomia del sistema (i) è:

$$\partial_{[\mu} \overset{k}{e}_{\lambda]} = 0 \qquad (k = 1, \dots, \mathrm{n}), \tag{1}$$

---

[1] G. CORBELLINI, *Di una classe di varietà caratterizzate per mezzo del parallelismo*, « Rend. dei Lincei », Vol. IV, 1926, ser. 6, p. 92-99. Cfr. anche E. BORTOLOTTI, *Reti di Cebiceff e sistemi coniugati nelle* V_n *riemanniane*, « Rend. dei Lincei », Vol. V, ser. 6 (1927), p. 741-747.

[2] J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, Springer, 1924. Quanto concerne le posteriori correzioni e semplificazioni, può trovarsi sistematicamente raccolto nel mio lavoro, *Ueber verallgemeinerte projektive Geometrie*, « Prace matematyczno-fizyczne », Warszawa, 1930, T. 37, p. 91-153.

[3] Gli indici correnti dell'alfabeto greco percorrono la serie *1*,..., *n*, gli indici dell'alfabeto latino, invece la serie: 1,..., n. I valori dei simboli 1,..., n debbono essere considerati come totalmente diversi dai valori *1*,..., *n*.

[4] La letteratura concernente le ricerche sui sistemi anolonomi nella geometria è citata nel lavoro di J. A. SCHOUTEN, *Ueber nichtholonome Uebertragungen in einer* L_n, « Mathematische Zeitschrift », 30, 1929, p. 149-172.

dove il sistema $\overset{k}{e}_\lambda$ dei vettori covarianti è reciproco al sistema $\underset{i}{e}^\nu$ [5] e ∂_μ vale per $\partial/\partial\xi^\mu$. Se il sistema (i) è dato per mezzo di arbitrari vettori tangenti $\underset{i}{p}^\nu$, allora le condizioni necessarie e sufficienti per l'olonomia sono le seguenti:

$$\overset{k}{p}_{[\nu}\partial_\mu \overset{k}{p}_{\lambda]} = 0 \quad (6) \qquad (k = 1, \dots, n), \tag{2}$$

dove $\overset{i}{p}_\lambda$ è di nuovo il sistema reciproco al sistema $\underset{i}{p}^\nu$. Quando la varietà X_n è dotata di una connessione affine (lineare e simmetrica) ed in questa ∇ significa la derivazione covariante, allora la condizione d'olonomia può essere scritta nella seguente forma, invariante rispetto alle trasformazioni di coordinate:

$$\overset{k}{p}_{[\nu}\nabla_\mu \overset{k}{p}_{\lambda]} = 0 \quad (7) \qquad (k = 1, \dots, n). \tag{3}$$

2. Lo spazio X_n sia dotato di una connessione lineare, generalmente non simmetrica, di parametri $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$. Per comodità introduciamo il seguente breve modo di esprimersi. Se è data una famiglia di curve ad uno o più parametri, ed oltre a ciò una curva L contenuta nella varietà luogo dei punti delle curve della nostra famiglia, allora l'espressione, che la data famiglia è parallela, nel senso del parallelismo generato dalla connessione, lungo la curva L, vuol dire che sussiste il fatto seguente: Se in un punto qualunque ξ della curva L prendiamo un vettore controvariante tangente a una curva della nostra famiglia e lo spostiamo parallelamente lungo la curva L, otteniamo sempre un vettore tangente a una curva della famiglia.

Introduciamo adesso le due seguenti definizioni:

DEFINIZIONE I. — Diciamo che la connessione appartiene alla classe (C) — o più in breve, che essa ha la proprietà (C) —, se esiste un sistema (i)

---

(5) Il sistema reciproco $\overset{\lambda}{e}_\lambda$ è univocamente definito per mezzo del sistema di equazioni

$$\underset{k}{e}^\nu \overset{k}{e}_\lambda = A^\nu_\lambda$$

dove A^ν_λ è l'affinore-unità.

(6) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *The absolute Differential Calculus*, London, 1927, p. 26-29 come pure G. CORBELLINI, *Sopra i sistemi di coordinate di una varietà qualunque*, « Rend. dei Lincei », Vol. 32, 1923, p. 112-114.

(7) Per le connessioni lineari generali (non simmetriche) la condizione d'olonomia si presenta nella forma un po più complicata:

$$\overset{k}{p}_{[\nu}\nabla_\mu \overset{k}{p}_{\lambda]} + \frac{1}{3}\overset{k}{p}_\rho(\overset{k}{p}_\nu S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho} + \overset{k}{p}_\lambda S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\rho} + \overset{k}{p}_\mu S_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot\rho}) = 0, \quad S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho} = \Gamma^\rho_{[\lambda\mu]}. \tag{3a}$$

di n congruenze indipendenti tale che ciascuna delle congruenze $[i]$ (8) è parallela lungo ogni curva della congruenza $[j]$, per $j \neq i$ (9).

DEFINIZIONE II. — Diciamo che la connessione appartiene alla classe (D), o più in breve, che essa ha la proprietà (D), se esiste un sistema (i) di n congruenze indipendenti tale che ciascuna delle congruenze $[i]$ è parallela lungo ogni curva di una qualunque congruenza $[j]$.

Si vede subito che ogni connessione della classe (D) appartiene alla classe (C), ma non reciprocamente. La definizione II esprime che la connessione ha la proprietà (C) ed oltre a ciò, che le curve di ogni congruenza sono geodetiche. È chiaro che dal fatto, che una data connessione appartiene alla classe (C) e che non tutte le congruenze, delle quali si parla nella definizione, sono geodetiche, non si può dedurre, che la connessione non appartiene alla classe (D).

Indicheremo le condizioni, alle quali debbono soddisfare i parametri $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$, affinchè la connessione abbia la proprietà (C) o risp. (D). Queste condizioni non hanno però forma intrinseca. Valgono soltanto nel sistema (i), dato per mezzo dei vettori $\underset{i}{p}^{\nu}$, tangenti alle congruenze. La trasformazione di queste condizioni a forma intrinseca ci sembra un problema molto difficile.

Supponiamo che la connessione appartenga alla classe (C) o risp. (D), e denotiamo con Γ^{k}_{ij} i parametri della connessione riferiti al sistema (i), dato per mezzo dei vettori $\underset{i}{p}^{\nu}$. Siano $[r]$, $[s]$ due delle n congruenze, menzionate nella definizione. Nel caso (C) si suppone $r \neq s$, nel caso (D) può anche essere $r = s$. Nel punto ξ arbitrario prendiamo un vettore tangente alla curva della congruenza $[r]$ e del resto arbitrario. Poichè — e questo è facile a dimostrare — la proprietà espressa al principio del § 2 è soddisfatta da ogni vettore tangente, se è soddisfatta da uno, allora basterà prendere come punto di partenza il vettore $\underset{r}{p}^{\nu}$. Le componenti di questo vettore $\underset{r}{p}^{k}$ rispetto al sistema (i) sono uguali a:

$$\underset{r}{p}^{k} \stackrel{*}{=} \delta^{k}_{r} \quad (10). \tag{4}$$

(8) Il segno $[i]$ vuol denotare, a differenza del segno (i), quella delle congruenze del sistema (i), della quale il numero ordinale è i.

(9) Appunto le connessioni della classe (C) sono state introdotte nella geometria riemanniana da G. CORBELLINI nel lavoro citato sotto (1). E. BORTOLOTTI chiama in questo caso il sistema (i) *rete di Cebiceff*.

(10) Le $\underset{r}{p}^{\nu}$ sono le componenti del vettore menzionato nel sistema (ν) appartenente alle coordinate ξ^{ν}. Il sistema (i), dato per mezzo dei sistemi locali, può essere anolonomo e può non appartenere a nessun sistema di coordinate ξ^{i}. Cfr. J. A. SCHOUTEN, l. c. (4).

Il segno $\stackrel{*}{=}$ vuol significare che l'equazione non ha il carattere intrinseco, ma vale sol-

Dopo lo spostamento parallelo di questo vettore lungo la curva della congruenza $[s]$ le componenti dell'elemento lineare dello spostamento essendo $(d\xi)^k$ — le nuove componenti saranno

(5) $$\bar{\underset{r}{p}}^k = \underset{r}{p}^k - \Gamma^k_{ij}\underset{r}{p}^i (d\xi)^j.$$

Tenendo conto che conformemente alla definizione

(6) $$(d\xi)^k = \underset{s}{p}^k dt$$

e che le equazioni (4) valgono per k, r arbitrari, otteniamo

(7) $$\bar{\underset{r}{p}}^k \overset{*}{=} \delta^k_r - \Gamma^k_{rs} dt.$$

Poichè il vettore $\bar{\underset{r}{p}}^k$ deve restare tangente alla congruenza $[r]$, abbiamo la relazione

(8) $$\underset{r}{p}^k \overset{*}{=} \alpha \delta^k_r,$$

dove α è un certo coefficiente. Dalle (7) e (8) risulta, che

(9) (D) $$\boxed{\Gamma^k_{rs} \overset{*}{=} 0 \quad \text{per} \quad k \neq r} \; .$$

Le equazioni (7) e (8) per $k = r$ non forniranno niente di nuovo. Per le connessioni della classe (D) siamo allora condotti alle equazioni (9) come condizioni necessarie. Com'è evidente conseguenza di tutte le considerazioni precedenti, nel caso delle connessioni della classe (C) otteniamo le equazioni:

(10) (C) $$\boxed{\Gamma^k_{rs} \overset{*}{=} 0 \quad \text{per} \quad k \neq r \quad \text{e} \quad s \neq r} \; .$$

Si può adesso verificare, con la massima facilità, che le relazioni (10) o risp. (9) sono nello stesso tempo sufficienti affinchè la connessione lineare abbia la proprietà (C) o risp. (D).

Si può anche dedurre, dalle considerazioni precedenti, che le condizioni (9) o risp. (10) sono invarianti rispetto ai cambiamenti di sistemi di riferimento che consistono in dilatazioni locali [11] (non soltanto però per tali

---

tanto nel supposto sistema di riferimento. δ^k_r denota — come sempre — il simbolo di KRONECKER, uguale a 1 per $k = r$ e a 0 per $k \neq r$.

[11] Cfr. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*. Pisa, 1922, Vol. I. § 60, p. 155 e 156. Diciamo, che il sistema $\underset{I}{e}{}^\nu$ è derivato del sistema $\underset{i}{e}{}^\nu$ per dilatazione locale, se $\underset{I}{e}{}^\nu = \underset{I}{\rho}\, \underset{i}{e}{}^\nu$, dove $\underset{I}{\rho}$ sono scalari.

cambiamenti), cioè se con (I) denotiamo il sistema che è ottenuto dal sistema (i) mediante una dilatazione, allora le equazioni (9) o risp. (10) implicano le equazioni

(9a) $$\Gamma^K_{IJ} \overset{*}{=} 0 \quad \text{per} \quad K \neq I.$$

risp.

(10a) $$\Gamma^K_{IJ} \overset{*}{=} 0 \quad \text{per} \quad K \neq I \quad \text{e} \quad J \neq I.$$

3. Per le connessioni affini (simmetriche) vale il seguente

TEOREMA. — Se la connessione affine appartiene alla classe (C), allora il sistema di congruenze (i), menzionato nella definizione, è un sistema olonomo.

DIMOSTRAZIONE. — Conservando le notazioni, abbiamo fra i parametri Γ^k_{ij} nel sistema (i) e i parametri $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ nel sistema (ν) la relazione

(11) $$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^k_{ij}\underset{k}{p}^\nu \overset{i}{p}_\lambda \overset{j}{p}_\mu + \underset{k}{p}^\nu \partial_\mu \overset{k}{p}_\lambda .$$

Moltiplicando i due membri dell'equazione precedente per $\overset{l}{p}_\nu$ e sommando rispetto all'indice ν, otteniamo:

(12) $$\partial_\mu \overset{l}{p}_\lambda = \overset{l}{p}_\nu \Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \Gamma^l_{ij}\overset{i}{p}_\lambda \overset{j}{p}_\mu$$

donde

(13) $$\overset{l}{p}_{[\nu}\partial_\mu \overset{l}{p}_{\lambda]} = \overset{l}{p}_{[\nu}\overset{l}{p}_{|\rho|}\Gamma^\rho_{\lambda\mu]} - \Gamma^l_{ij}\overset{l}{p}_{[\nu}\overset{i}{p}_\lambda \overset{j}{p}_{\mu]} .$$

Badando al fatto che la connessione è simmetrica e che il sistema (ν) è olonomo, abbiamo:

(14) $$\overset{l}{p}_{[\nu}\overset{l}{p}_{|\rho}\Gamma^\rho_{\lambda\mu]} = \overset{l}{p}_\rho \overset{l}{p}_{[\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu]} = 0$$

dunque

(15) $$\overset{l}{p}_{[\nu}\partial_\mu \overset{l}{p}_{\lambda]} = -\Gamma^l_{ij}\overset{l}{p}_{[\nu}\overset{i}{p}_\lambda \overset{j}{p}_{\mu]} .$$

Osserviamo però che fra i trivettori

(16) $$\overset{l}{p}_{[\nu}\overset{i}{p}_\lambda \overset{j}{p}_{\mu]}$$

sono diversi da zero (non degeneri) soltanto quelli pei quali $l \neq i$, $l \neq j$, $i \neq j$.

Dunque nella somma a destra della equazione (15) basta considerare soltanto i termini pei quali $l \neq i$, $l \neq j$, $i \neq j$. I coefficienti Γ^k_{ij} di questi termini sono appunto uguali a zero in forza della (10), e in conseguenza

(17) $$\overset{l}{p}_{[\nu}\partial_\mu \overset{l}{p}_{\lambda]} = 0 \qquad (l = 1, \dots, n),$$

e questo esprime, che il sistema (i) delle congruenze è olonomo.

Osserviamo che il teorema precedente non è vero in generale per le connessioni lineari. Esso è ovvio nel caso $n=2$, perchè in questo caso il trivettore (16) è sempre nullo.

4. Poichè le equazioni (9) o risp. (10) non hanno carattere intrinseco rispetto a tutte le trasformazioni di coordinate, si presenta la questione di decidere, quando sono dati i parametri Γ della connessione in un qualunque sistema di riferimento, se la connessione appartenga alla classe (D) o risp. (C) o no. Questo problema appare nel caso generale molto difficile a risolvere. Noi mostriamo soltanto che per $n \geq 3$ la risposta è in generale negativa.

Fermiamoci nel caso particolare $n=2$, nel quale caso sussiste il seguente

Teorema. — Per $n=2$ ogni connessione lineare gode della proprietà (C).

Dimostrazione. — Osserviamo anzitutto che per $n=2$ il sistema (10) consta, sia nel caso generale della connessione assimetrica, come nel caso della connessione affine (cioè simmetrica), soltanto di due equazioni. Mostreremo che esiste un sistema di vettori $\underset{i}{e}{}^{\nu}$ tale che i parametri Γ^k_{ij}, riferiti a questo sistema, soddisfano alle equazioni

$$\Gamma^1_{21} \overset{*}{=} 0, \quad \Gamma^2_{12} \overset{*}{=} 0 \tag{18}$$

e questo — come già sappiamo — basta per provare la nostra asserzione. Introduciamo a tale scopo le seguenti brevi notazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sigma^1 = -\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} A^2_{\nu} A^{\lambda}_1 A^{\mu}_2, \quad \sigma^2 = -\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} A^1_{\nu} A^{\lambda}_1 A^{\mu}_2 \\ &\qquad A^k_{\nu} = \frac{\partial \xi^k}{\partial \xi^{\nu}}, \quad A^{\nu}_k = \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial \xi^k}, \end{aligned} \right. \tag{19}$$

e consideriamo il seguente sistema d'equazioni a derivate parziali del secondo ordine:

$$\boxed{\partial_1 A^{\nu}_2 = \sigma^k A^{\nu}_k \quad (\nu = 1, 2)} \; [12]. \tag{20}$$

Il sistema precedente è un sistema di due equazioni parziali con due funzioni incognite $\xi^1(\xi^1, \xi^2)$, $\xi^2(\xi^1, \xi^2)$, equazioni risolute rispetto alle derivate parziali del secondo ordine miste, e che nei secondi membri contengono i quozienti di due polinomi nelle derivate parziali del primo ordine. Segue manifestamente dalle equazioni (19) e (20) che i denominatori sono del quarto,

[12] Le equazioni (20) possono essere chiamate equazioni generalizzate di Servant. Cfr. L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, (1922), Vol. I, p. 157.

i numeratori del secondo grado ([13]), i coefficienti sono funzioni note delle funzioni incognite ξ^ν. Tale sistema — com'è ben noto della teoria generale delle equazioni a derivate parziali — ammette sempre soluzioni (la questione delle condizioni iniziali non ha alcun interesse per noi). Prendendo una delle soluzioni con jacobiano diverso da zero (e tali certamente ne esistono), otteniamo nello stesso tempo un passaggio dall'originario sistema di coordinate ξ^ν a un nuovo sistema di coordinate ξ^k. Se calcoleremo i parametri della connessione Γ^k_{ij} nel nuovo sistema (k) per mezzo delle formule di trasformazione

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} A^k_\nu A^\lambda_i A^\mu_j + A^k_\lambda \partial_j A^\lambda_i \tag{21}$$

e terremo conto che sussistono le equazioni (20), otterremo immediatamente le relazioni (18).

Osservazione I. — Il teorema precedente non può essere esteso (neppure nel caso $n = 2$) alle connessioni lineari della classe (D). Esistono connessioni, anche simmetriche e riemanniane, che non appartengono alla classe (D). Come più semplice esempio, basta prendere una qualunque connessione riemanniana non-euclidea (cfr. il teorema del paragrafo seguente).

Osservazione II. — Il teorema precedente non può essere generalizzato pel caso di un numero di dimensioni maggiore di 2. Infatti, supponiamo che sia $n \geq 3$. Nel caso (C) il sistema (10) contiene $n(n-1)^2$ equazioni con n^2 funzioni incognite $\underset{i}{p}^\nu$. Siccome per $n \geq 3$ si ha $n(n-1)^2 > n^2$, allora il sistema non ha in generale soluzioni. Anche supponendo che la connessione sia affine (simmetrica) e presumendo l'esistenza di soluzioni olonome, il sistema (10) si riduce a $\frac{n^2(n-1)}{2}$ equazioni, ma d'altra parte ha n funzioni incognite, in generale, quindi, non esisteranno soluzioni, perchè si ha $\frac{n^2(n-1)}{2} > n$ per $n \geq 3$.

Osservazione III. — Siccome il sistema (9) contiene in sè come sottosistema il sistema (10), è chiaro che in generale per $n \geq 3$ la connessione lineare non appartiene alla classe (D).

Per mostrare come siano *restrettive* le condizioni affinchè la connessione abbia la proprietà (D), citiamo i seguenti teoremi.

([13]) Se immaginiamo di esprimere le derivate parziali A^k_λ che vengono introdotte nelle formule (19) per mezzo delle derivate del sistema reciproco, le prime saranno funzioni razionali di queste ultime, e precisamente, frazioni col numeratore del primo, il denominatore del secondo grado.

5. TEOREMA. — Se una connessione affine è una connessione riemanniana avente come ds^2 una forma definita positiva e se essa appartiene alla classe (D), allora essa è una connessione euclidea (secondo SCHOUTEN: cioè, essa fa della X_n uno spazio euclideo) ([14]).

DIMOSTRAZIONE. — Denotiamo con (i) il sistema nel quale sussistono le equazioni (9). Secondo il teorema del paragrafo 3 possiamo da capo supporre che il sistema sia olonomo. Dunque i parametri Γ^k_{ij} della connessione calcolati nel sistema (i) sono simmetrici rispetto ai indici i, j, e per conseguenza il sistema (9) nel caso considerato equivale al sistema

$$\Gamma^k_{ij} \overset{*}{=} 0 \quad \text{per} \quad k \neq i \quad \text{o} \quad k \neq j \quad \text{o} \quad i \neq j. \tag{22}$$

In altre parole: nel sistema considerato sono diversi da zero soltanto i parametri della forma

$$\gamma_j = \Gamma^j_{jj} \qquad \text{(non sommare!)}. \tag{23}$$

Vediamo quale influenza hanno le equazioni (22) su la forma delle componenti del tensore di curvatura. Denotandolo come usualmente, abbiamo

$$R_{lji}^{\cdots k} = \partial_j \Gamma^k_{il} - \partial_l \Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{mj} \Gamma^m_{il} - \Gamma^k_{ml} \Gamma^m_{ij}. \tag{24}$$

Tenendo conto delle equazioni (22) e (23), constatiamo successivamente che:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a)}\ R_{lji}^{\cdots k} \overset{*}{=} 0 & \text{per} & l, j, i, k \neq \\ \text{b)}\ R_{kji}^{\cdots k} \overset{*}{=} 0 & \text{per} & k, j, i \neq \\ \text{c)}\ R_{ljk}^{\cdots k} \overset{*}{=} 0 & \text{per} & l, j, k \neq \\ \text{d)}\ R_{iji}^{\cdots k} \overset{*}{=} 0 & \text{per} & i, j, k \neq \\ \text{e)}\ R_{iki}^{\cdots k} \overset{*}{=} 0 & \text{per} & k \neq i \\ \text{f)}\ R_{lkk}^{\cdots k} \overset{*}{=} -\partial_l \gamma_k & \text{per} & k \neq l \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}\text{Non sommare rispetto agli} \\ \text{indici che si ripetono!}\end{array} \tag{25}$$

Da questa tabella e dalla emmisimmetria del tensore $R_{lji}^{\cdots k}$ rispetto agli indici l, j segue che sono eventualmente diverse da zero soltanto le componenti

$$R_{lkk}^{\cdots k} \overset{*}{=} -\partial_l \gamma_k, \qquad R_{klk}^{\cdots k} \overset{*}{=} \partial_l \gamma_k. \tag{26}$$

L'ipotesi che la connessione sia riemanniana equivale a supporre l'esistenza d'un tensore metrico g_{ik} pel quale sussiste la proprietà:

$$\partial_j g_{ik} = \Gamma^l_{ij} g_{lk} + \Gamma^l_{kj} g_{il}, \tag{27}$$

([14]) Questo teorema non ha niente in comune con quello contenuto nel § 1 del lavoro di E. BORTOLOTTI, già menzionato in ([1]).

onde, tenute presenti le (22), otteniamo

$$\partial_j g_{ik} \overset{*}{=} \Gamma^i_{ij} g_{ik} + \Gamma^k_{kj} g_{ik} \overset{*}{=} g_{ik}(\Gamma^i_{ij} + \Gamma^k_{kj}) \tag{28}$$

(non sommando nè rispetto a i nè rispetto a k!).

La formula precedente ci fornisce

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{a)} & \partial_j g_{ik} \overset{*}{=} 0 \quad \text{per} \quad i, j, k \neq \\ \text{b)} & \partial_j g_{ii} \overset{*}{=} 0 \quad \text{per} \quad i \neq j \\ \text{c)} & \partial_j g_{ij} \overset{*}{=} \gamma_j g_{ij} \quad \text{per} \quad i \neq j \\ \text{d)} & \partial_j g_{jj} \overset{*}{=} 2\gamma_j g_{jj}. \end{array}\right. \tag{29}$$

Da queste relazioni segue in particolare, che la componente g_{ij} è funzione di due variabili soltanto ξ^i e ξ^j. L'ultimo fatto può essere del resto dedotto dalla ipotesi meno restrittiva che la connessione sia riemanniana e possegga la proprietà (C). (Cfr. su questo punto G. CORBELLINI, l. c., [1], § 5). Dalla ipotesi che la forma differenziale $g_{ij}\, d\xi^i\, d\xi^j$ sia definita (positiva) segue in particolare che

$$g_{jj} > 0 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{30}$$

Il nostro scopo è di dimostrare, che

$$\partial_j \gamma_i \overset{*}{=} 0 \quad \text{per} \quad i \neq j, \tag{31}$$

perchè allora, in virtù delle relazioni (25), svanirà identicamente il tensore di curvatura e questo — com'è ben noto — basta perchè la connessione sia euclidea. A tale scopo deriviamo (29 d)) rispetto a ξ^i, supponendo $i \neq j$:

$$\partial_{ij} g_{jj} \overset{*}{=} 2\gamma_j \partial_i g_{jj} + 2 g_{jj} \partial_i \gamma_j. \tag{32}$$

Ora in virtù di (29 b)) abbiamo:

$$\partial_{ij} g_{jj} = \partial_j(\partial_i g_{jj}) \overset{*}{=} 0. \tag{33}$$

Le (29 b)), (33) e (32) dànno finalmente

$$g_{jj} \partial_i \gamma_j \overset{*}{=} 0, \tag{34}$$

donde, in forza della (30), otteniamo la (31).

6. TEOREMA. — Se una connessione affine appartiene alla classe (D) e gode della proprietà $R_{ik} = 0$ [15], allora essa è una connessione euclidea.

---

[15] Si ha $R_{ik} = R_{jik}^{\cdot\cdot\cdot j}$.

DIMOSTRAZIONE. — Osserviamo che nel sistema (i) abbiamo

$$(35) \qquad \begin{cases} R_{ii} \overset{*}{=} 0 \\ R_{ik} \overset{*}{=} \partial_i \gamma_k \quad \text{per} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Dalla relazione $R_{ik} = 0$ segue allora che ha luogo l'equazione (31) e questo — come già sappiamo — ha per conseguenza la « euclideità » della connessione.

OSSERVAZIONE. — Per $n = 2$ il teorema precedente è ovvio. Per $n = 3$ le cose vanno già diversamente. Bisogna ricordarsi che per $n = 3$ la relazione $R_{ik} = 0$ implica la relazione $R_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k} = 0$ soltanto nel caso in cui la connessione è riemanniana, la quale ipotesi non è qui posta.

7. TEOREMA. — Se la connessione affine è proiettivamente euclidea ([16]) e appartiene alla classe (D), allora è una connessione euclidea.

DIMOSTRAZIONE. — Sia (i) — come prima — il sistema nel quale valgono le equazioni (9). Denotiamo con $P_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k}$ il tensore di curvatura proiettiva di WEYL ([17]). Abbiamo

$$(36) \qquad \begin{cases} P_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k} = R_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k} + \dfrac{1}{n^2 - 1} \{ (n-1) A_i^k (R_{lj} - R_{jl}) - \\ \qquad - A_l^k (n R_{ji} + R_{ij}) + A_j^k (n R_{li} + R_{il}) \}. \end{cases}$$

Tenendo conto delle (25) e (35), otteniamo successivamente:

$$(37) \qquad \begin{cases} \text{a)} \quad P_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k} \overset{*}{=} 0 \quad \text{per} \quad l, j, i, k \neq \\ \text{b)} \quad P_{kji}^{\cdot\cdot\cdot k} \overset{*}{=} \dfrac{1}{1-n^2} (\partial_i \gamma_j + n \partial_j \gamma_i) \quad \text{per} \quad k, j, i \neq \\ \text{c)} \quad P_{ljk}^{\cdot\cdot\cdot k} \overset{*}{=} \dfrac{1}{n+1} (\partial_l \gamma_j - \partial_j \gamma_l) \quad \text{per} \quad k, l, j \neq \\ \text{d)} \quad P_{iji}^{\cdot\cdot\cdot k} \overset{*}{=} 0 \quad \text{per} \quad i, j, k \neq \\ \text{e)} \quad P_{iki}^{\cdot\cdot\cdot k} \overset{*}{=} 0 \quad \text{per} \quad k \neq i \\ \text{f)} \quad P_{lkk}^{\cdot\cdot\cdot k} \overset{*}{=} \dfrac{2-n}{n^2-1} (n \partial_l \gamma_k + \partial_k \gamma_l) \quad \text{per} \quad k \neq l. \end{cases}$$

(Non sommare rispetto agli indici che si ripetono!).

Siccome secondo l'ipotesi abbiamo

$$(38) \qquad P_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k} = 0$$

([16]) Vedi J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, p. 130.
([17]) Vedi J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, p. 131.

segue dalla (37 c))

(39) $$\partial_j \gamma_i \stackrel{*}{=} \partial_i \gamma_j$$

e l'ultima relazione confrontata per esempio con (37 b)) fornisce

(40) $$\partial_j \gamma_i \stackrel{*}{=} 0.$$

Ne segue, in forza della (25 f)), che

(41) $$R_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k} = 0.$$

L'ultimo teorema è interessante, in quanto ne segue che la proprietà (D) è la caratteristica che fra le connessioni affini proiettivamente euclidee distingue le connessioni euclidee.

Sull' approssimazione delle funzioni di due variabili (*).

Memoria di SILVIO CINQUINI (a Pisa).

Sunto. - *Considerata una funzione* $z_0(x, y)$, *la quale sia assolutamente continua* (*nel senso del* TONELLI) *in un campo aperto limitato* D *del piano* (x, y), *continua nel corrispondente campo chiuso* $\bar{D}$, *e tale che esista finito l'integrale*

$$I_D[z_0] = \iint\limits_D f\left(x, y, z_0(x, y), \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

ove $f(x, y, z, p, q)$ *è una funzione finita e continua in tutti i punti* (x, y) *di* $\bar{D}$ *e per tutti i valori finiti di* z, p, q, *si danno delle condizioni sotto le quali è possibile approssimare, a meno di un* ε *arbitrario, la funzione* $z_0(x, y)$, *mediante una funzione* $z(x, y)$ *finita e continua con le sue derivate parziali del primo ordine in ogni punto di* $\bar{D}$, *in modo che anche l'integrale* $I_D[z]$ *approssimi l'integrale* $I_D[z_0]$ *a meno dell'* ε *prefissato.*

Sia D un *campo aperto limitato* del piano (x, y) e si indichi con $\bar{D}$ il campo chiuso costituito da tutti i punti di D e della sua frontiera, sia poi $f(x, y, z, p, q)$ una funzione finita e continua in tutti i punti (x, y) di $\bar{D}$ e per tutti i valori finiti di z, p, q, e si consideri una funzione $z_0(x, y)$, continua in $\bar{D}$, *assolutamente continua* (nel senso del TONELLI) (¹) in D, e tale che esista finito l'integrale (del LEBESGUE)

$$I_D[z_0] = \iint\limits_D f(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y)) dx\, dy,$$

ove è

$$p_0 = \frac{\partial z_0}{\partial x}, \quad q_0 = \frac{\partial z_0}{\partial y}.$$

Nel presente lavoro mi propongo di vedere sotto quali ipotesi (relative alla funzione f o alla z_0), si può dare una rappresentazione approssimata, a meno di un ε prefissato, della funzione $z_0(x, y)$, mediante una funzione $z(x, y)$, la quale sia, in ogni punto di $\bar{D}$, finita e continua con le sue derivate par-

---

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(¹) Per le definizioni di *campo aperto limitato* e di *funzione di due variabili assolutamente continua*, vedi: L. TONELLI. *Sur la semi-continuité des intégrales doubles du Calcul des Variations*, « Acta Mathematica », T. 53 (1929), pag. 325 e segg., n.i 1 e 2.

ziali del primo ordine e tale inoltre che l'integrale $I_D[z]$ approssimi l'integrale $I_D[z_0]$ a meno dell' ε prefissato.

Osservo, che mentre l'analoga questione per le funzioni di una sola variabile è già stata ampiamente studiata ([2]), specialmente da parte del TONELLI, per le funzioni di due variabili finora sono stati trattati, sempre da parte del TONELLI, due soli casi particolari $f \equiv \sqrt{1+p^2+q^2}$ ([3]), $f \equiv p^2+q^2$ ([4]); e sotto opportune condizioni, in questi due casi, il problema è stato da tale Autore risolto mediante il noto polinomio di STIELTJES.

Il presente lavoro, che è inspirato a questi studi del TONELLI, è diviso in due paragrafi.

Nei casi considerati nel § I, che contengono come caso particolare quelli finora trattati, il problema è risolto, seguendo completamente i procedimenti del TONELLI, ancora mediante il polinomio di STIELTJES.

Nel § II invece, poichè l'uso di tale polinomio richiederebbe qualche maggiore restrizione, pur seguendo un metodo analogo a quello del § I, si ricorre ad una successione di funzioni, che il TONELLI ha considerato in un altro Suo lavoro ([5]).

§ I.

1. **Teorema I.** — *Sia* D *un campo aperto limitato del piano* (x, y), *sia* f(x, y, z, p, q) *una funzione finita e continua in tutti i punti* (x, y) *del corrispondente campo chiuso* $\overline{\mathrm{D}}$ *e per tutti i valori finiti di* z, p, q, *e si supponga che la funzione* $z_0(x, y)$, *definita e continua in* $\overline{\mathrm{D}}$, *sia lipschitziana* ([6]) *in* D, *e che essa si possa continuare fuori di* D *in un campo aperto limitato* D',

---

([2]) L. TONELLI, *Sopra alcuni polinomi approssimativi*, « Annali di Matematica », Serie III, T. XXV, pag. 275 e segg., § V, n.° 26; L. TONELLI, *Successioni di curve e derivazione per serie*, Nota II, « Rend. della R. Accademia dei Lincei ». Serie V, vol. XXV (1916, 1° sem.), pag. 85 e segg., n.° 4; L. TONELLI. *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Zanichelli, Bologna, vol. I, Cap. IX, n.° 141: M. LAURENTIEFF. *Sur quelques problèmes du Calcul des Variations*, « Annali di Matematica », Serie IV, T. IV, pag. 7 e segg.. n.° 4; L. TONELLI, *Sur une question du Calcul des Variations*, « Rec. Math. Moscou », T. XXXIII, 1 (1926).

([3]) L. TONELLI, *Sopra alcune proprietà di un polinomio di approssimazione*, « Rend. della R. Accademia dei Lincei », vol. III (1926), pag. 714 e segg..

([4]) L. TONELLI, *Su l'integrale di Dirichlet*, « Mem. della R. Accademia delle Scienze di Bologna » (1929).

([5]) L. TONELLI, *Sulla definizione di funzione di due variabili a variazione limitata*. « Rend. della R. Accademia dei Lincei », vol. VII (1928), pag. 357 e segg..

([6]) È noto che ogni funzione lipschitziana è assolutamente continua. Vedi: L. TONELLI, luogo cit. in ([4]), n.° 2.

contenente $\overline{\mathrm{D}}$ *in modo da soddisfare anche in* D′ *ad una condizione di Lipschitz*

$$(1)\qquad | z_0(x_1, y_1) - z_0(x_2, y_2) | < M \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Allora posto

$$I_D[z_0] = \iint_D f(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))dx\,dy,$$

considerato un nuovo campo aperto limitato D_1, *contenente* $\overline{\mathrm{D}}$ *e tutto contenuto, insieme con la sua frontiera, in* D′ *e costruita la successione dei polinomi di Stieltjes*

$$\pi_1(x, y),\ \pi_2(x, y), \dots\ \pi_n(x, y), \dots$$

della funzione $\mathrm{z}_0(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, *considerata in* $\overline{\mathrm{D}}_1$, *risulta, per* $\mathrm{n} \to \infty$,

$$\pi_{\mathrm{n}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \mathrm{z}_0(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \textit{ uniformemente in tutto } \overline{\mathrm{D}},$$
$$\mathrm{I}_{\mathrm{D}}[\pi_{\mathrm{n}}] \to \mathrm{I}_{\mathrm{D}}[\mathrm{z}_0].$$

Si potrà sempre supporre che il campo D' sia tutto contenuto nel quadrato Q_0, del piano (x, y), avente per vertici opposti i punti $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

Pertanto, considerato un campo aperto D_1, contenente $\bar{D}$ e tutto contenuto insieme con la sua frontiera in D', la successione dei polinomi di STIELTJES della funzione $z_0(x, y)$, considerata in $\bar{D}_1$, è definita da [7]

$$(2)\qquad \pi_n(x, y) = \frac{k_n^2}{4} \iint_{\bar{D}_1} z_0(u, v)[1 - (u - x)^2]^n[1 - (v - y)^2]^n du\,dv, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ove $\dfrac{1}{k_n} = \displaystyle\int_0^1 (1 - t^2)^n dt.$

Poichè il campo $\bar{D}$ è completamente interno a D_1 in virtù della (1) sono verificate le seguenti proprietà [8]:

a) per $n \to \infty$, è $\pi_n(x, y) \to z_0(x, y)$ uniformemente in tutto il campo $\bar{D}$; inoltre, quasi dappertutto in D, è

$$p_n(x, y) \to p_0(x, y), \quad q_n(x, y) \to q_0(x, y) \text{ [9]};$$

[7] Vedi L. TONELLI, luogo cit. in [3].

[8] Vedi L. TONELLI, *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali*, « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », T. XXIX (1910, 1.° sem.), pagg. 1-36; n.i 10, 19, 21. Si tenga presente la nota [3] del luogo cit. in [4].

[9] In tutto il § I è: $p_n(x, y) = \dfrac{\partial \pi_n(x, y)}{\partial x}$, $q_n(x, y) = \dfrac{\partial \pi_n(x, y)}{\partial y}$.

b) esiste un numero $M' > M$ tale che sia

$$|p_n(x, y)| < M', \quad |q_n(x, y)| < M',$$

in tutti i punti di D, e per qualunque valore di n.

Per la proprietà *a)* in quasi tutti i punti di D, per $n \to \infty$, è

$$f(x, y, \pi_n(x, y), p_n(x, y), q_n(x, y)) \to f(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y));$$

inoltre poichè la funzione $f(x, y, z, p, q)$ è continua in ogni (x, y) di D e della sua frontiera, e poichè i polinomi $\pi_n(x, y)$ risultano, in tutto D e per qualunque n, inferiori in modulo al massimo modulo di $z_0(x, y)$ in $\bar{D}_1$, per la proprietà *b)* è possibile determinare un numero $L > 0$, in modo che risulti in tutti i punti (x, y) di D, e per qualunque n

$$|f(x, y, \pi_n(x, y), p_n(x, y), q_n(x, y))| < L.$$

Pertanto in virtù del noto teorema di integrazione per serie di ARZELÀ-LEBESGUE, risulta

$$\lim_{n \to \infty} I_D[\pi_n] = I_D[z_0].$$

2. **Teorema II.** — *Sia* D *un campo aperto limitato del piano* (x, y) *e sia* f(x, y, z, p, q) *una funzione finita e continua in tutti i punti* (x, y) *del corrispondente campo chiuso* $\bar{\mathrm{D}}$ *e per tutti i valori finiti di* z, p, q, *e si supponga che la funzione* $\mathrm{z}_0(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, *definita e continua in* $\bar{\mathrm{D}}$, *sia assolutamente continua in* D, *che essa renda finito l'integrale*

$$I_D[z_0] = \iint_D f(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))\,dx\,dy$$

e che si possa continuare fuori di D *in un nuovo campo aperto limitato* D', *contenente* $\bar{\mathrm{D}}$, *in modo da essere assolutamente continua anche in* D'. *Indicato con* K *il massimo modulo della funzione* $\mathrm{z}_0(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *in* $\bar{\mathrm{D}}$ *si supponga poi che esistano tre numeri positivi* Λ_1, Λ_2, Λ_3, *tali che risulti*

$$|f(x, y, z, p, q)| < \Lambda_1 |p| + \Lambda_2 |q| + \Lambda_3, \tag{3}$$

in ogni punto (x, y) *di* D, *per ogni* $|\mathrm{z}| \leq \mathrm{K} + 1$, *e per tutte le coppie* p, q.

Allora considerato un nuovo campo aperto limitato D_1, *contenente* $\bar{\mathrm{D}}$, *e tutto contenuto, insieme colla sua frontiera, in* D', *e costruita la successione* $\pi_n(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, $(\mathrm{n} = 1, 2, \ldots)$ *dei polinomi di Stieltjes della funzione* $\mathrm{z}_0(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, *considerata in* D_1, *risulta, per* $\mathrm{n} \to \infty$,

$$\pi_n(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \mathrm{z}_0(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \text{ uniformemente in tutto } \bar{\mathrm{D}},$$
$$\mathrm{I_D}[\pi_n] \to \mathrm{I_D}[\mathrm{z}_0].$$

Si può sempre supporre che il campo D' sia tutto contenuto nel quadrato Q_0, di cui al precedente n.°; pertanto la successione dei polinomi di STIELTJES della funzione $z_0(x, y)$ è definita dalla (2).

Poichè il campo D è completamente interno a D_1 è ancora verificata la proprietà *a)* del n.° precedente; è quindi, per $n \to \infty$, $\pi_n(x, y) \to z_0(x, y)$, uniformemente in tutto D, e in quasi tutti i punti di D, per $n \to \infty$, è

$$f(x, y, \pi_n(x, y), p_n(x, y), q_n(x, y)) \to f(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y)).$$

Inoltre, poichè gli integrali $\iint |p_n(x, y)|\, dx\, dy$, $\iint |q_n(x, y)|\, dx\, dy$ sono in tutto D funzioni equidoppiamente assolutamente continue [10], in virtù della (3) anche gli integrali $\iint |f(x, y, \pi_n(x, y), p_n(x, y), q_n(x, y))|\, dx\, dy$ godono in D di tale proprietà.

Per il noto teorema d'integrazione per serie di VITALI risulta quindi

$$\lim_{n \to \infty} I_D[\pi_n] = I_D[z_0].$$

3. Teorema III. — *Sia* D *un campo aperto limitato del piano* (x, y) *e sia* $z_0(x, y)$ *una funzione, definita e continua nel corrispondente campo chiuso* $\bar{D}$, *la quale sia assolutamente continua in* D, *e tale da rendere finiti gli integrali*

$$\iint_D \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right|^{\nu} dx\, dy, \quad \iint_D \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right|^{\nu'} dx\, dy,$$

ove ν, ν' *sono due numeri qualunque maggiori di* 1.

Supposto che la frontiera del campo D *sia di misura (superficiale) nulla e che la funzione* $z_0(x, y)$ *si possa continuare, fuori di* D *in un campo aperto limitato* D′, *contenente* $\bar{D}$, *in modo da essere assolutamente continua in* D′ *e da rendere finiti gli integrali*

$$\iint_{D'} \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right|^{\nu} dx\, dy, \quad \iint_{D'} \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right|^{\nu'} dx\, dy,$$

considerato un nuovo campo aperto limitato D_1, *contenente* D, *e tutto contenuto, con la sua frontiera, in* D′, *e costruita la successione dei polinomi di Stieltjes* $\pi_n(x, y)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ *della funzione* $z_0(x, y)$, *considerata in* $\bar{D}_1$, *risulta, per* $n \to \infty$,

$$\pi_n(x, y) \to z_0(x, y) \text{ uniformemente in tutto } \bar{D},$$

$$\iint_D \left|\frac{\partial \pi_n}{\partial x}\right|^{\nu} dx\, dy \to \iint_D \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right|^{\nu} dx\, dy; \quad \iint_D \left|\frac{\partial \pi_n}{\partial y}\right|^{\nu'} dx\, dy \to \iint_D \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right|^{\nu'} dx\, dy.$$

---

(10) Vedi L. TONELLI, luogo cit. in (3), n.° 2.

a) Dimostreremo il teorema per l'integrale

$$I_D[z_0] = \iint_D \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right|^{\nu} dx\, dy \quad (^{11}),$$

poichè per l'altro integrale basterà ripetere lo stesso procedimento.

b) Si può sempre supporre che il campo D' sia tutto contenuto nel quadrato Q_0 del piano (x, y) di vertici opposti $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

Continuata la funzione $z_0(x, y)$ in tutto D', in modo da essere anche in tal campo assolutamente continua e da rendere finito l'integrale $I_{D'}[z_0]$ si consideri un nuovo campo aperto limitato D_1 contenente D e tutto contenuto insieme con la sua frontiera in D'. La funzione $z_0(x, y)$ risulta in tal modo continua in tutto $\overline{D}_1$ e assolutamente continua in D_1 e l'integrale $I_{D_1}[z_0]$ è certamente finito, essendo minore di $I_{D'}[z_0]$. Poichè tutti i punti di $\overline{D}$ appartengono a D_1 e sono quindi interni a D_1 la minima distanza fra la frontiera di D e quella di D_1 è certamente positiva; la si indichi con λ.

La successione dei polinomi di STIELTJES della funzione $z_0(x, y)$, considerata in D_1, è definita dall'uguaglianza

$$\pi_n(x, y) = \frac{k_n^2}{4} \iint_{\overline{D}_1} z_0(u, v)[1 - (u - x)^2]^n [1 - (v - y)^2]^n du\, dv, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

dove è $\dfrac{1}{k_n} = \displaystyle\int_0^1 (1 - t^2)^n dt.$

Per una nota proprietà dei polinomi di STIELTJES, per $n \to \infty$, risulta $\pi_n(x, y) \to z_0(x, y)$ uniformemente in tutto $\overline{D}$.

c) Sia Q un qualunque quadrato a lati paralleli agli assi coordinati e tutto contenuto nel campo aperto D. Suddivisi i lati di Q paralleli all'asse delle x in m parti uguali mediante i punti di ascisse $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, e quelli paralleli all'asse delle y pure in m parti uguali mediante i punti di ordinate $y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m$, e, condotte per i punti di divisione le parallele agli assi coordinati, il quadrato Q risulta suddiviso in m^2 quadrati

(11) È opportuno rilevare che nella dimostrazione di questa parte del teorema non si fa uso delle ipotesi che esistano finiti gli integrali $\iint_D \left|\dfrac{\partial z_0}{\partial y}\right|^{\nu'} dx\, dy$, $\iint_{D'} \left|\dfrac{\partial z_0}{\partial y}\right|^{\nu'} dxdy$.

Il procedimento del presente n.° è, con una necessaria modificazione, l'estensione di quello seguito dal TONELLI nello studio dell'integrale di DIRICHLET; vedi luogo cit. in (4).

uguali $Q_{r,s} \equiv [x_{r-1} \leq x \leq x_r, \ y_{s-1} \leq y \leq y_s]$, $(r, s = 1, 2, \ldots m)$. Si ponga

$$b_{r,s} = \left| \int_{y_{s-1}}^{y_s} \{ z_0(x_r, y) - z_0(x_{r-1}, y) \} \, dy \right|$$

(4) $$A_{r,s} = \iint_{Q_{r,s}} dx\, dy$$

e si consideri l'espressione

(5) $$\tau_{r,s} = \frac{b^{\nu}_{r,s}}{A^{\nu-1}_{r,s}}$$

e la somma $\sum\limits_{r,s} \tau_{r,s}$ estesa a tutti i quadrati $Q_{r,s}$.

Posto $p_0(x, y) = \dfrac{\partial z_0(x, y)}{\partial x}$, dall'assoluta continuità della funzione $z_0(x, y)$ in D, risulta

(6) $$b_{r,s} = \left| \iint_{Q_{r,s}} p_0(x, y) dx\, dy \right|,$$

e in virtù della nota disuguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER ([12]), tenendo conto che $I_D[z_0]$ esiste finito, si ha

$$b^{\nu}_{r,s} \leq A^{\nu-1}_{r,s} \iint_{Q_{r,s}} | p_0(x, y) |^{\nu} dx\, dy,$$

(7) $$\tau_{r,s} \leq \iint_{Q_{r,s}} | p_0 |^{\nu} dx\, dy = I_{Q_{r,s}}[z_0],$$

(8) $$\sum_{r,s} \tau_{r,s} \leq I_Q[z_0].$$

d) Siano $b^{(n)}_{r,s}$, $\tau^{(n)}_{r,s}$ le espressioni analoghe alle $b_{r,s}$, $\tau_{r,s}$, relative al polinomio $\pi_n(x, y)$. Tali espressioni possono opportunamente trasformarsi. Scelto un $\delta > 0$ e minore di $\frac{\lambda}{2}$, indicato con M il massimo modulo della funzione $z_0(x, y)$ in $\overline{D}_1$ e posto

$$c_n = 6Mn(n+1)^2(1-\delta^2)^{n-1}$$

risulta, come ha provato il TONELLI ([13]),

$$b^{(n)}_{r,s} \leq \frac{k_n^2}{4} \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} b_{r,s}(\xi, \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta + c_n A_{r,s},$$

([12]) Vedi L. TONELLI, opera cit. per terza in ([2]), n.° 56, pag. 165.

([13]) Vedi luogo cit. in ([4]), n.° 3.

dove $b_{r,s}(\xi, \eta)$ indica l'espressione $b_{r,s}$ relativa, non al quadrato $Q_{r,s}$, ma al quadrato $Q_{r,s}(\xi, \eta)$, che si ottiene dal precedente con la traslazione $X=x+\xi$, $Y=y+\eta$.

Applicando il teorema del valor medio, risulta

$$\tau_{r,s}^{(n)} \leq \frac{1}{A_{r,s}^{\nu-1}}\left[\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} b_{r,s}(\xi, \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta + c_n A_{r,s}\right]^{\nu} =$$

$$= \frac{1}{A_{r,s}^{\nu-1}}\left[\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} b_{r,s}(\xi, \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta\right]^{\nu} +$$

$$+ \nu c_n A_{r,s}\left[\frac{\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} b_{r,s}(\xi, \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta + \theta c_n A_{r,s}}{A_{r,s}}\right]^{\nu-1},$$

ove θ è compreso fra 0 e 1.

Se μ è il massimo intero inferiore a ν si ha in ogni caso

$$\tau_{r,s}^{(n)} \leq \frac{1}{A_{r,s}^{\nu-1}}\left[\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} b_{r,s}(\xi, \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta\right]^{\nu} +$$

$$+ \nu c_n A_{r,s}\left[\frac{\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} b_{r,s}(\xi, \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta + \theta c_n A_{r,s}}{A_{r,s}}\right]^{\mu} + \nu c_n A_{r,s}$$

ed anche

$$\tau_{r,s}^{(n)} \leq \frac{1}{A_{r,s}^{\nu-1}}\left[\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} b_{r,s}(\xi, \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta\right]^{\nu} +$$

$$+ \frac{\nu c_n}{A_{r,s}^{\mu-1}}\left[\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} b_{r,s}(\xi, \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta + c_n A_{r,s}\right]^{\mu} + \nu c_n A_{r,s}$$

e per la nota formula del binomio di NEWTON risulta

$$\tau_{r,s}^{(n)} \leq \frac{1}{A_{r,s}^{\nu-1}}\left[\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} b_{r,s}(\xi, \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta\right]^{\nu} +$$

$$+ \frac{\nu}{A_{r,s}^{\mu-1}}\left[\sum_{j=0}^{\mu-2}\binom{\mu}{j} c_n^{j+1} A_{r,s}^{j}\left\{\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} b_{r,s}(\xi, \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta\right\}^{\mu-j} +\right.$$

$$\left.+\binom{\mu}{\mu-1} c_n^{\mu} A_{r,s}^{\mu-1}\left\{\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} b_{r,s}(\xi, \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta\right\} + c_n^{\mu+1} A_{r,s}^{\mu}\right] + \nu c_n A_{r,s}.$$

Applicando ora a ciascuno degli integrali che figurano al secondo membro (eccettuato l'ultimo) la disuguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER [14] risulta

$$\tau_{r,s}^{(n)} \leq \frac{1}{A_{r,s}^{\nu-1}}\left[\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} b_{r,s}^{\nu}(\xi,\ \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta\right] H^{\nu-1} +$$

$$+\frac{\nu}{A_{r,s}^{\mu-1}}\left\{\sum_{j=0}^{\mu-2}\binom{\mu}{j}c_n^{j+1}A_{r,s}^{j}\left[\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} b_{r,s}^{\mu-j}(\xi,\ \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta\right]H^{\mu-j-1}+\right.$$

$$\left.+\binom{\mu}{\mu-1}c_n^{\mu}A_{r,s}^{\mu-1}\left[\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} b_{r,s}(\xi,\ \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta\right]+c_n^{\mu+1}A_{r,s}^{\mu}\right\}+\nu c_n A_{r,s},$$

ove si è posto

$$H=\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta.$$

Poichè $\int_{-\delta}^{\delta}(1-\xi^2)^n d\xi<\frac{2}{k_n}$, è $0<H<1$, e perciò risulta « a fortiori »

$$\tau_{r,s}^{(n)}\leq\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{b_{r,s}^{\nu}(\xi,\ \eta)}{A_{r,s}^{\nu-1}}(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta +$$

$$+\nu\left\{\sum_{j=0}^{\mu-2}\binom{\mu}{j}c_n^{j+1}\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{b_{r,s}^{\mu-j}(\xi,\ \eta)}{A_{r,s}^{\mu-j-1}}(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta+\right.$$

$$\left.+\binom{\mu}{\mu-1}c_n^{\mu}\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} b_{r,s}(\xi,\ \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta+c_n^{\mu+1}A_{r,s}\right\}+\nu c_n A_{r,s}.$$

Dalla (6) tenendo presente che dall'integrabilità della funzione $|p_0(x,y)|^{\nu}$ scende « a fortiori » l'integrabilità della funzione $|p_0(x,y)|^{i}$ per $i=2, 3, \ldots \mu$, applicando ancora la disuguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER, risulta

$$b_{r,s}^{i}\leq A_{r,s}^{i-1}\iint_{Q_{r,s}}|p_0|^{i}dx\,dy \qquad \text{(per } i=2, 3, \ldots \mu).$$

[14] Nell'applicare questa disuguaglianza:

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}FG\,dx\,dy\right|^{\alpha}\leq\left[\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}|F|^{\alpha}dx\,dy\right]\left[\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}|G|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}dx\,dy\right]^{\alpha-1}$$

si faccia

$$F\equiv b_{r,s}(\xi,\ \eta)[(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n]^{\frac{1}{\alpha}},\quad G\equiv[(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

ove α assume i valori $\nu, \mu, \mu-1, \ldots, 2$.

Pertanto in virtù della (5), di quanto si è ora osservato e della (6), è

$$\tau_{r,s}^{(n)} \leq \frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\tau_{r,s}(\xi,\ \eta)(1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta +$$

$$+\nu\left\{\sum_{j=0}^{\mu-2}\binom{\mu}{j}c_n^{j+1}\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\left[\iint_{Q_{r,s}(\xi,\eta)}|p_0(x,\ y)|^{\mu-j}dx\, dy\right](1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta +\right.$$

$$\left.+\binom{\mu}{\mu-1}c_n^{\mu}\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\left[\iint_{Q_{r,s}(\xi,\eta)}|p_0(x,\ y)|\, dx\, dy\right](1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta + c_n^{\mu+1}A_{r,s}\right\} + \nu c_n A_{r,s},$$

ed anche per la (7)

$$\tau_{r,s}^{(n)} \leq \frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}I_{Q_{r,s}(\xi,\eta)}[z_0](1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta +$$

$$+\nu\sum_{j=0}^{\mu-1}\binom{\mu}{j}c_n^{j+1}\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\left[\iint_{Q_{r,s}(\xi,\eta)}|p_0(x,\ y)|^{\mu-j}dx\, dy\right](1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi d\eta + \nu(c_n^{\mu+1}+c_n)A_{r,s}.$$

Sommando da 1 a m rispetto ad ambedue gli indici r e s, e tenendo conto della (8) risulta

$$\sum_{r,s}\tau_{r,s}^{(n)} \leq \frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}I_{Q(\xi,\eta)}[z_0](1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta + \tag{9}$$

$$+\nu\sum_{j=0}^{\mu-1}\binom{\mu}{j}c_n^{j+1}\frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\left[\iint_{Q(\xi,\eta)}|p_0(x,\ y)|^{\mu-j}dx\, dy\right](1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta + \nu(c_n^{\mu+1}+c_n)A,$$

ove si è indicata con A l'area del quadrato Q.

e) Si osservi ora che, ponendo $p_n=\frac{\partial\pi_n}{\partial x}$, $q_n=\frac{\partial\pi_n}{\partial y}$, si deduce dalle analoghe delle (5) e (6)

$$\tau_{r,s}^{(n)} = \frac{\left[b_{r,s}^{(n)}\right]^\nu}{A_{r,s}^{\nu-1}} = A_{r,s}\,|\bar{p}_n|^\nu$$

ove $\bar{p}_n$ è il valore di $p_n(x,\ y)$ in un punto convenientemente scelto nel quadrato $Q_{r,s}$. Perciò se nella somma $\sum\limits_{r,s}\tau_{r,s}^{(n)}$ si passa al limite per $m\to\infty$, facendo cioè tendere allo zero le aree dei quadrati $Q_{r,s}$, si ha

$$\sum_{r,s}\tau_{r,s}^{(n)} \to \iint_Q |p_n(x,\ y)|^\nu dx\, dy = I_Q[\pi_n],$$

e dalla (9) risulta

$$
(10) \qquad I_Q[\pi_n] \leq \frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} I_{Q(\xi,\eta)}[z_0](1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta +
$$

$$
+ \nu \sum_{j=0}^{\mu-1}\binom{\mu}{j} c_n^{j+1} \frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\left[\iint_{Q(\xi,\eta)} |p_0(x,y)|^{\mu-j} dx\, dy\right](1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta + \nu(c_n^{\mu+1}+c_n)A.
$$

f) Si divida ora il quadrato Q_0 in 4^i quadrati uguali, e di questi si considerino quelli che appartengono completamente al campo aperto D. Indicato con $\bar{D}_i$ l'insieme chiuso interno a D e costituito da questi quadrati, D_i è tutto contenuto in $\bar{D}_{i+1}$, e, per $i \to \infty$, è $m(D_i) \to m(D)$, onde $I_{\bar{D}_i}[\pi_n] \to I_D[\pi_n]$. Applicando la (10) ai vari quadrati di cui è composto $\bar{D}_i$, si ottiene

$$
(11) \qquad I_D[\pi_n] \leq \frac{k_n^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} I_{D(\xi,\eta)}[z_0](1-\xi^2)^n(1-\eta^2)^n d\xi\, d\eta +
$$

$$
+ \nu \sum_{j=0}^{\mu-1}\binom{\mu}{j} c_n^{j+1}\iint_{D_1} |p_0(x,y)|^{\mu-j} dx\, dy + \nu(c_n^{\mu+1}+c_n)m(D).
$$

Si indichi con D_δ il campo aperto costituito da tutti i punti di D_1 che distano da almeno un punto di D di non più di 2δ, e si osservi che D_δ contiene $\bar{D}$, e che, per $\delta \to 0$, è $m(D_\delta) \to m(D)$, $I_{D_\delta}[z_0] \to I_{\bar{D}}[z_0]$.

Scelto un ε ad arbitrio, si prenda δ abbastanza piccolo, in modo che sia $I_{D_\delta}[z_0] < I_{\bar{D}}[z_0] + \varepsilon$. Poichè per $|\xi| \leq \delta$, $|\eta| \leq \delta$, $D(\xi, \eta)$ è sempre contenuto in D_δ, per tali valori di ξ e η risulta $I_{D(\xi,\eta)}[z_0] < I_{\bar{D}}[z_0] + \varepsilon$.

Osservando poi che, per $n \to \infty$, è $c_n \to 0$, dalla (11) si deduce che per tutti gli n maggiori di un certo n' è $I_D[\pi_n] \leq I_{\bar{D}}[z_0] + 2\varepsilon$, e poichè ε è ad arbitrio, risulta

$$
(12) \qquad \overline{\lim}\, I_D[\pi_n] \leq I_{\bar{D}}[z_0].
$$

D'altra parte l'integrale $I_D[z_0]$ è funzione semicontinua inferiormente: infatti, ponendo $f(x, y, z, p, q) = |p|^\nu$, si ha $f_p = \pm\nu|p|^{\nu-1}$, ove il segno è concorde con quello di p, $f_q = 0$, e la derivata f_p è continua per ogni $p \neq 0$ ed anche per $p = 0$, perchè, essendo $\nu > 1$, risulta $\lim_{p\to 0} f_p = 0$; si ha quindi $\mathcal{E}(x, y, z; p, q; p', q') = |p'|^\nu - |p|^\nu \pm \nu(p - p')|p|^{\nu-1}$, ove $\mathcal{E}$ è la nota funzione di WEIERSTRASS e si deve prendere il segno positivo o il negativo secondochè è $p > 0$, o $p < 0$; e applicando il teorema del valor medio alla differenza $|p'|^\nu - |p|^\nu$ si conclude facilmente che in ogni punto (x, y) di D e per tutte le quintuple z, p, q, p', q' è sempre $\mathcal{E} \geq 0$.

L'integrale $I_D[z_0]$ è dunque quasi-regolare positivo ed essendo inoltre $f \geq 0$, per un noto teorema stabilito dal TONELLI [15], tale integrale è funzione semicontinua inferiormente.

Pertanto poichè, per $n \to \infty$, è $\pi_n(x, y) \to z_0(x, y)$, uniformemente in tutto D, risulta

(13) $$\underline{\lim}\, I_D[\pi_n] \geq I_D[z_0].$$

Dall'ipotesi che la frontiera di D abbia misura superficiale nulla risulta $m(D) = m(\bar{D})$ e perciò $I_D[z_0] = I_{\bar{D}}[z_0]$ e dalle (12) e (13) si deduce l'esistenza del limite di $I_D[\pi_n)$ e l'uguaglianza

(14) $$\lim_{n \to \infty} I_D[\pi_n] = I_D[z_0].$$

che prova il teorema enunciato.

OSSERVAZIONE. — Il teorema ora dimostrato sussiste anche, se è $\nu \geq 1$, $\nu' \geq 1$. Così, per esempio se è $\nu = 1$ gli integrali $\iint |p_n|\, dx\, dy$ sono in D equi-doppiamente assolutamente continui [16] e si ha, per il teorema d'integrazione per serie del VITALI, per $n \to \infty$

$$\iint_D |p_n(x, y)|\, dx\, dy \to \iint_D |p_0(x, y)|\, dx\, dy.$$

4. Nuovo enunciato del teorema III. — Il teorema del n.° precedente è ancora valido anche se la frontiera del campo D ha misura superficiale positiva, purchè su di essa la funzione $z_0(x, y)$ sia costante. In tal caso il teorema si enuncia nei seguenti termini:

Sia D *un campo aperto limitato del piano* (x, y) *e sia* $z_0(x, y)$ *una funzione definita e continua in* $\bar{D}$, *la quale sia assolutamente continua in* D, *sia costante sulla frontiera di* D, *e tale da rendere finiti gli integrali*

$$\iint_D \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right|^{\nu} dx\, dy, \quad \iint_D \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right|^{\nu'} dx\, dy,$$

ove ν, ν' *sono due numeri qualunque maggiori di* 1.

Se Q_0 *è un quadrato a lati paralleli agli assi coordinati contenente nel suo interno* $\bar{D}$, *sotto queste ipotesi è possibile continuare la funzione* $z_0(x, y)$, *fuori di* D, *in tutto* $\bar{Q}_0$ *in modo che risulti continua in* $\bar{Q}_0$, *e assolutamente continua in* Q_0; *inoltre costruita la successione dei polinomi di Stieltjes* $\pi_n(x, y)$,

[15] Vedi L. TONELLI, luogo cit. in [1], n.° 13.

[16] Vedi L. TONELLI, luogo cit. in [10].

$(\mathrm{n}=1, 2, \ldots)$ *della funzione* $z_0(x, y)$, *considerata in* $\overline{Q}_0$, *risulta, per* $n \to \infty$,

$$\pi_n(x, y) \to z_0(x, y), \text{ uniformemente in tutto } \overline{D};$$
$$\iint_D \left| \frac{\partial \pi_n}{\partial x} \right|^\nu dx\,dy \to \iint_D \left| \frac{\partial z_0}{\partial x} \right|^\nu dx dy; \quad \iint_D \left| \frac{\partial \pi_n}{\partial y} \right|^{\nu'} dx\,dy \to \iint_D \left| \frac{\partial z_0}{\partial y} \right|^{\nu'} dx\,dy.$$

Basta limitarsi alla considerazione dell' integrale

$$I_D[z_0] = \iint_D \left| \frac{\partial z_0}{\partial x} \right|^\nu dx\,dy,$$

poichè per l' altro integrale si ripete lo stesso procedimento.

Si può sempre supporre che il quadrato Q_0 del piano (x, y) sia il quadrato di vertici opposti $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

Indicato con C il valore (costante) della funzione $z_0(x, y)$ sulla frontiera Γ di D, e posto $z_0(x, y) = C$ in tutti i punti di $\overline{Q}_0$ esterni a $\overline{D}$, la funzione $z_0(x, y)$ risulta evidentemente continua in tutto $\overline{Q}_0$, e inoltre, come ha dimostrato il TONELLI ([17]), essa risulta assolutamente continua in Q_0. Si osservi poi che in tutti i punti di Q_0 esterni a $\overline{D}$ la derivata parziale $\frac{\partial z_0}{\partial x}$ $\left(\text{analoga osservazione vale anche per la } \frac{\partial z_0}{\partial y}\right)$ esiste ed è nulla e che inoltre, come ha provato il TONELLI, questa derivata esiste ed è nulla quasi dappertutto sulla frontiera Γ di D. Ne segue

$$I_{Q_0}[z_0] = I_{\overline{D}}[z_0] = I_D[z_0], \tag{15}$$

e perciò l' integrale $I_{Q_0}[z_0]$ esiste finito. Sono dunque verificate tutte le ipotesi del teorema del n.° 3 (eccezion fatta per quella relativa alla misura di Γ) e si può quindi ripetere tutta la dimostrazione del n.° 3 a partire dalla fine del capoverso *b)*, tenendo presente che al campo D_1 del n.° 3 si può ora sostituire il quadrato Q_0.

Risultano perciò valide le disuguaglianze (12) e (13) dalle quali, tenendo ora presente la (15), si deduce la (14).

OSSERVAZIONE. — Anche questo teorema sussiste se si suppone $\nu \geq 1$, $\nu' \geq 1$.

5. **Lemma.** – *Sia* D *un campo aperto limitato del piano* (x, y) *e sia* $g(x, y, z, p, q)$ *una funzione finita e continua in tutti i punti* (x, y) *del corrispondente campo chiuso* $\overline{D}$ *e per tutti i valori finiti di* z, p, q, *e sia sempre*

$$g(x, y, z, p, q) \geq 0.$$

([17]) Vedi L. TONELLI, luogo cit. in ([4]), n.° 6.

Sia poi $z_0(x, y)$ *una funzione definita e continua in* D, *la quale sia assolutamente continua in* D, *e tale che esista finito l'integrale*

$$J_D[z_0] = \iint_D g(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))dxdy,$$

con $p_0 = \frac{\partial z_0}{\partial x}$, $q_0 = \frac{\partial z_0}{\partial y}$.

Allora se

$$z = z_n(x, y), \qquad (n = 1, 2, ...),$$

è una successione di funzioni finite e continue, colle loro derivate parziali del primo ordine, in tutti i punti di $\overline{D}$, *e se, per* $n \to \infty$, *è*

$$z_n(x, y) \to z_0(x, y), \text{ uniformemente in tutto } D,$$
$$\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} \to p_0(x, y), \quad \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} \to q_0(x, y), \text{ quasi dappertutto in } D,$$
$$J_D[z_n] \to J_D[z_0],$$

gli integrali

$$\iint g\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right)dx\,dy, \qquad (n = 1, 2, ...),$$

sono tutti, in D, *funzioni equidoppiamente assolutamente continue* ([18]).

Poichè $\lim_{n \to \infty} J_D[z_n] = J_D[z_0]$, preso un σ ad arbitrio, si può determinare un numero intero $n_1 > 0$, tale che per ogni $n > n_1$, sia

$$(16) \qquad \left| \iint_D g\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right)dx\,dy - \iint_D g(x, y, z_0, p_0, q_0)dx\,dy \right| < \sigma.$$

Indicato con E_R l'insieme dei punti di D, in cui esistono ambedue le derivate $p_0(x, y)$, $q_0(x, y)$, ed è $p_0^2 + q_0^2 \leq 2R^2$, si prenda R abbastanza grande, affinchè sia

$$(17) \qquad \iint_D g(x, y, z_0, p_0, q_0)dx\,dy - \iint_{E_R} g(x, y, z_0, p_0, q_0)dx\,dy < \sigma.$$

([18]) Cioè, preso un $\eta > 0$, ad arbitrio, è possibile determinare un $\delta > 0$, tale che per ogni gruppo $R_1, R_2, ..., R_m$ di rettangoli di D, non sovrapponentisi, a lati paralleli agli assi coordinati e di area complessiva minore di δ, sia per tutti gli n,

$$\sum_{s=1}^{m} \left| \iint_{R_s} g\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right) dx\,dy \right| < \eta.$$

Cfr. la dimostrazione del presente lemma con quella data dal TONELLI al n.° 141, *c*) dell'opera citata per terza in ([2]).

Si indichi poi con $E_{R,n}$ l'insieme dei punti di E_R, in cui è $\left[\frac{\partial z_n}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z_n}{\partial y}\right]^2 \leq 4R^2$.

Poichè, quasi dappertutto in D, per $n \to \infty$, è $\frac{\partial z_n}{\partial x} \to p_0$, $\frac{\partial z_n}{\partial y} \to q_0$, le $\frac{\partial z_n}{\partial x}$, $\frac{\partial z_n}{\partial y}$ convergono pressochè uniformemente verso le p_0, q_0 rispettivamente; pertanto poichè, per $n \to \infty$, è $z_n(x, y) \to z_0(x, y)$ uniformemente in $\bar{D}$, si può determinare un intero $n_2 > n_1$, in modo che, per ogni $n > n_2$, sia

$$\left|\iint\limits_{E_{R,n}} g\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right) dx\,dy - \iint\limits_{E_{R,n}} g(x, y, z_0, p_0, q_0) dx\,dy\right| < \sigma, \tag{18}$$

ed anche

$$\iint\limits_{E_R} g(x, y, z_0, p_0, q_0) dx\,dy - \iint\limits_{E_{R,n}} g(x, y, z_0, p_0, q_0) dx\,dy < \sigma. \tag{19}$$

Dalle (16) e (18) risulta

$$\left|\iint\limits_{D-E_{R,n}} g\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right) dx\,dy - \iint\limits_{D-E_{R,n}} g(x, y, z_0, p_0, q_0) dx\,dy\right| < 2\sigma,$$

e per le (17) e (19) segue da quest'ultima

$$\iint\limits_{D-E_{R,n}} g\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right) dx\,dy < 4\sigma, \tag{20}$$

la quale, tenuto fisso R, vale per ogni $n > n_2$.

Poichè le funzioni $z_n(x, y)$, per $n \to \infty$, convergono uniformemente in tutto $\bar{D}$ verso $z_0(x, y)$, e questa funzione è continua in tutto $\bar{D}$ e quindi anche limitata, le funzioni $z_n(x, y)$ risultano in tutto $\bar{D}$ (e per qualunque n) in modulo ugualmente limitate; sia M tale massimo modulo. Si indichi poi con L il massimo modulo della funzione $g(x, y, z, p, q)$ per ogni (x, y) di $\bar{D}$, $|z| \leq M$, $|p| \leq 2R$, $|q| \leq 2R$.

Se E è un insieme qualunque di D di misura inferiore a δ' con $\delta' < \frac{\sigma}{L}$, indicata con E' la parte di E, contenuta in $D - E_{R,n}$, risulta

$$\iint\limits_{E} g\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint\limits_{E'} \ldots + \iint\limits_{E-E'} \ldots < \iint\limits_{E'} \ldots + \sigma,$$

ed inoltre, se $n > n_2$, è in virtù della (20)

$$\iint\limits_{E} g\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right) < 4\sigma + \sigma = 5\sigma.$$

Quest'ultima disuguaglianza è dunque verificata per $n = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots$.

D'altra parte, per una nota proprietà dell'integrale di LEBESGUE, si può determinare un numero positivo δ'' tale che, per ogni insieme E di D di misura superficiale inferiore a δ'', risulti

$$\iint_E g\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right) dx\, dy < \sigma, \qquad (\text{per } n = 1, 2, \dots n_2).$$

Pertanto, indicato con δ il minore dei due numeri δ', δ'', per ogni gruppo di rettangoli R_i di D, a lati paralleli agli assi coordinati, non sovrapponentisi e di area complessiva minore di δ, risulta

$$\sum_i \iint_{R_i} g\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right) dx\, dy < 5\sigma$$

e con ciò, poichè σ è arbitrario, ed è sempre $g \geq 0$, il lemma è dimostrato.

6. **Corollari del teorema III.** — Dai teoremi dei n.[i] 3 e 4, in virtù del lemma del n.° 5, si deducono immediatamente due corollari

α) Sia D *un campo aperto limitato del piano* (x, y), *la cui frontiera abbia misura (superficiale) nulla: sia* f(x, y, z, p, q) *una funzione finita e continua in tutti i punti* (x, y) *di* D, *e per tutti i valori finiti di* z, p, q *e sia* z_0(x, y) *una funzione definita e continua in* $\bar{D}$, *la quale sia assolutamente continua in* D *e tale da rendere finito l'integrale*

$$I_D[z_0] = \iint_D f(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))\, dx\, dy.$$

Si supponga poi che esista un nuovo campo aperto limitato D', *contenente* $\bar{D}$, *tale che la funzione* f(x, y, z, p, q) *sia finita e continua anche per ogni* (x, y) *di* D' *e per tutti i valori finiti di* z, p, q, *che la funzione* z_0(x, y) *si possa continuare fuori di* D *in* $\bar{D}'$, *in modo da essere continua in* $\bar{D}'$ *e assolutamente continua in* D' *e da rendere finito l'integrale* $I_{D'}[z_0]$ *e che inoltre, indicato con* K' *il massimo modulo di* z_0(x, y) *in* D', *si possano determinare otto numeri* $\nu_1 \geq 1$, $\nu_2 \geq 1$, $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 > 0$, $\Lambda_3 > 0$, $\Lambda_1' > 0$, $\Lambda_2' > 0$, Λ_3', *quest'ultimo anche negativo, in modo che risulti*

$$(21) \qquad \Lambda_1' |p|^{\nu_1} + \Lambda_2' |q|^{\nu_2} + \Lambda_3' < |f(x, y, z, p, q)| < \Lambda_1 |p|^{\nu_1} + \Lambda_2 |q|^{\nu_2} + \Lambda_3$$

per ogni (x, y) *di* $\bar{D}'$, *per* $|z| \leq K' + 1$ *e per tutte le coppie* p, q.

Allora, considerato un nuovo campo aperto limitato D_1, *contenente* D *e tutto contenuto insieme colla sua frontiera in* D', *e costruita la successione dei polinomi di Stieltjes* π_n(x, y), (n = 1, 2,...) *della funzione* z_0(x, y), *considerata* *in* $\bar{D}_1$, *risulta*, $n \to \infty$,

$$\pi_n(x, y) \to z_0(x, y), \text{ uniformemente in tutto } \bar{D},$$
$$I_D[\pi_n] \to I_D[z_0].$$

Poichè l'integrale $I_{D'}[z_0]$ è finito esistono pure finiti, in virtù della (21), gli integrali

$$\iint_{D'} |p_0(x, y)|^{\nu_1} dx\, dy, \quad \iint_{D'} |q_0(x, y)|^{\nu_2} dx\, dy.$$

Quindi per il teorema del n.° 3, considerato un campo aperto limitato D_1 contenente $\bar{D}$, e tutto contenuto, insieme con la sua frontiera, in D' e costruita la successione $\pi_n(x, y)$, $(n = 1, 2, ...)$ dei polinomi di STIELTJES della funzione $z_0(x, y)$, considerata in $\bar{D}_1$, risulta, per $n \to \infty$,

$$\pi_n(x, y) \to z_0(x, y), \text{ uniformemente in tutto } \bar{D},$$
$$\iint_D |p_n(x, y)|^{\nu_1} dx\, dy \to \iint_D |p_0(x, y)|^{\nu_1} dx\, dy,$$
$$\iint_D |q_n(x, y)|^{\nu_2} dx\, dy \to \iint_D |q_0(x, y)|^{\nu_2} dx\, dy.$$

Pertanto, poichè per una nota proprietà dei polinomi di STIELTJES, quasi dappertutto in D, per $n \to \infty$, è

(22) $$p_n(x, y) \to p_0(x, y), \quad q_n(x, y) \to q_0(x, y),$$

si può applicare il lemma del n.° 5; perciò gli integrali

$$\iint |p_n(x, y)|^{\nu_1} dx\, dy, \quad \iint |q_n(x, y)|^{\nu_2} dx\, dy \qquad (n = 1, 2, ...)$$

sono, in D, funzioni equidoppiamente assolutamente continue e in virtù della (21) anche gli integrali

$$\iint f(x, y, \pi_n(x, y), p_n(x, y), q_n(x, y))\, dx\, dy$$

godono della stessa proprietà.

Essendo inoltre per le (22), per $n \to \infty$,

$$f(x, y, \pi_n(x, y), p_n, q_n) \to f(x, y, z_0(x, y), p_0, q_0)$$

quasi dappertutto in D, è applicabile il noto teorema d'integrazione per serie di VITALI e risulta

$$\lim_{n \to \infty} I_D[\pi_n] = I_D[z_0].$$

β) *Sia* D *un campo aperto limitato del piano* (x, y), *sia* f(x, y, z, p, q) *una funzione finita e continua in tutti i punti* (x, y) *del corrispondente campo chiuso* D *e per tutti i valori finiti di* z, p, q, *e sia* $z_0(x, y)$ *una funzione definita e continua in* D, *la quale sia assolutamente continua in* D, *costante sulla frontiera* Γ *di* D *e tale da rendere finito l'integrale*

$$I_D[z_0] = \iint_D f(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y)) dx\, dy.$$

Si supponga poi, indicato con K *il massimo modulo della funzione* $z_0(x, y)$ *in* D, *che si possano determinare otto numeri* $\nu_1 \geq 1$, $\nu_2 \geq 1$, $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 > 0$, $\Lambda_3 > 0$, $\Lambda_1' > 0$, $\Lambda_2' > 0$, Λ_3', *quest'ultimo anche negativo, in modo che risulti*

$$(23) \quad \Lambda_1' |p|^{\nu_1} + \Lambda_2' |q|^{\nu_2} + \Lambda_3' < |f(x, y, z, p, q)| < \Lambda_1 |p|^{\nu_1} + \Lambda_2 |q|^{\nu_2} + \Lambda_3$$

per ogni (x, y) *di* $\bar{D}$, *per* $|z| \leq K + 1$ *e per tutte le coppie* p, q.

Sotto queste ipotesi, se Q_0 *è un quadrato a lati paralleli agli assi coordinati, contenente nel suo interno* D, *è possibile continuare la funzione* $z_0(x, y)$ *fuori di* D *in tutto* Q_0, *in modo che risulti continua in* Q_0, *e assolutamente continua in* Q_0; *inoltre, costruita la successione dei polinomi di Stieltjes* $\pi_n(x, y)$, $(n = 1, 2, ...)$ *della funzione* $z_0(x, y)$, *considerata in* Q_0, *risulta, per* $n \to \infty$,

$$\pi_n(x, y) \to z_0(x, y), \text{ uniformemente in tutto } \bar{D},$$
$$I_D[\pi_n] \to I_D[z_0].$$

Poichè l'integrale $I_D[z_0]$ è finito esistono pure finiti, in virtù della (23), anche gli integrali

$$\iint_D |p_0(x, y)|^{\nu_1} dx\, dy, \quad \iint_D |q_0(x, y)|^{\nu_2} dx\, dy.$$

Si può quindi applicare il teorema del n.° 4; procedendo poi come in α) si prova l'asserto.

7. **Osservazioni sui corollari del n.° 6.** — α) È opportuno rilevare che le proposizioni del n.° 6 sussistono anche se, essendo $\nu_1 = 1$, è $\Lambda_1' = 0$; ed analogamente se, essendo $\nu_2 = 0$, è $\Lambda_2' = 0$.

Basta infatti ripetere le dimostrazioni del n.° 6, tenendo presente che essendo $\bar{D}$ interno al campo $\bar{D}_1$ (al quadrato Q_0), dalle ipotesi ivi fatte segue che gli integrali $\iint |p_n(x, y)| \, dx\, dy$, $\iint |q_n(x, y)| \, dx\, dy$, $(n = 1, 2, ...)$ sono in D funzioni equidoppiamente assolutamente continue.

β) È evidente che se la funzione $f(x, y, z, p, q)$ è indipendente da una delle variabili p, q, per esempio, per fissare le idee, dalla q, nelle condizioni (21) e (23) si deve fare $\Lambda_2 = \Lambda_2' = 0$.

§ II.

8. **Teorema IV.** *Sia* $\Phi(u)$ *una funzione definita per* $u \geq 0$, *non negativa e insieme con la sua derivata prima continua e non decrescente.*

Sia poi $z_0(x, y)$ *una funzione assolutamente continua nel campo aperto limitato* D, *continua in tutto il campo chiuso* $\bar{D}$ *corrispondente, e tale inoltre che esista finito l'integrale*

$$I_D[z_0] = \iint_D \Phi(\sqrt{p_0^2 + q_0^2})dx\,dy,$$

con $p_0 = \frac{\partial z_0}{\partial x}$, $q_0 = \frac{\partial z_0}{\partial y}$.

Supposto che la funzione $z_0(x, y)$ *si possa continuare fuori di* D *in un campo aperto limitato* D', *contenente* D, *in modo da essere assolutamente continua in* D', *e da rendere finito l'integrale* $I_{D'}[z_0]$, *è possibile determinare una successione di funzioni* $z_n(x, y)$, $(n = 1, 2....)$, *continue, insieme con le loro derivate parziali del primo ordine in tutto un nuovo campo aperto limitato* D_1, *contenente* D *e opportunamente scelto, in modo che risulti, per* $n \to \infty$,

$$z_n(x, y) \to z_0(x, y), \text{ uniformemente in } \bar{D},$$
$$I_D[z_n] \to I_D[z_0].$$

a) Si può sempre supporre che il campo D' sia tutto contenuto nel quadrato Q_0 del piano (x, y) di vertici opposti (0, 0) e (1, 1).

Continuata la funzione $z_0(x, y)$ in tutto D' in modo da essere anche in tal campo assolutamente continua e da rendere finito l'integrale $I_{D'}[z_0]$, si osservi che, poichè tutti i punti di $\bar{D}$ appartengono a D' e sono quindi interni a $\bar{D}'$, la minima distanza fra la frontiera di D e quella di $\bar{D}'$ è sicuramente positiva; indicatala con λ, si consideri il campo D_1 costituito da tutti i punti di D' che distano da almeno un punto di D di non più di $\frac{\lambda}{2}$.

La funzione $z_0(x, y)$ risulta in tal modo continua in tutto $\bar{D}_1$ e assolutamente continua in D_1 e l'integrale $I_{D_1}[z_0]$ è certamente finito, essendo minore di $I_{D'}[z_0]$.

Scelto un numero positivo $\delta < \frac{\lambda}{4}$ si considerino in D_1 le funzioni ([19])

$$(24) \qquad z_n(x, y) = \frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n} z_0(x+\xi,\ y+\eta)\,d\xi\,d\eta, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ove si è posto $h_n = \frac{\delta}{n}$.

La funzione $z_n(x, y)$ risulta continua in tutto D_1, insieme con le sue derivate parziali ([20])

$$p_n(x, y) = \frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}[z_0(x+h_n,\ y+\eta) - z_0(x-h_n,\ y+\eta)]\,d\eta,$$

$$q_n(x, y) = \frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}[z_0(x+\xi,\ y+h_n) - z_0(x+\xi,\ y-h_n)]\,d\xi.$$

Inoltre al tendere di n all'infinito è $z_n(x, y) \to z_0(x, y)$ uniformemente in tutto $\overline{D}$. Infatti in virtù dell'uniforme continuità della funzione $z_0(x, y)$ in tutto D_1, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si può determinare un numero positivo σ tale che in ogni quadrato di D_1 di lato non superiore a σ, l'oscillazione della $z_0(x, y)$ sia minore di ε. Sia $\overline{n}$ il più piccolo numero intero positivo tale che per ogni $n > \overline{n}$ risulti $\frac{\delta}{n} < \sigma$. Allora, tenuta presente la (24), per tutti gli $n > \overline{n}$ risulta in tutto $\overline{D}$

$$|\, z_n(x, y) - z_0(x, y)\,| < \varepsilon.$$

Si osservi poi che per $n \to \infty$ è, quasi dappertutto in D, $p_n(x, y) \to p_0(x, y)$, $q_n(x, y) \to q_0(x, y)$. Infatti si ha

$$p_n(x, y) = \frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n} p_0(x+\xi,\ y+\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

e poichè, per $n \to \infty$, è $h_n \to 0$, il

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n} p_0(x+\xi,\ y+\eta)\,d\xi\,d\eta$$

([19]) Tali funzioni sono state considerate dal TONELLI nel luogo cit. in ([5]).

([20]) In tutto il § II è: $p_n(x, y) = \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x}$, $q_n(x, y) = \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y}$.

è, per definizione, la derivata totale ([21]) della funzione $\int_{c_1}^{x}\int_{c_2}^{y} p_0(x, y)dx\,dy$ (ove (c_1, c_2) è un punto di D) e perciò, quasi dappertutto in D, è uguale a $p_0(x, y)$: dunque quasi dappertutto in D, è, per $n \to \infty$

$$p_n(x, y) \to p_0(x, y).$$

Analogamente per $q_n(x, y)$.

Ne segue che, quasi dappertutto in D, è, per $n \to \infty$

$$\Phi(\sqrt{p_n^2 + q_n^2}) \to \Phi(\sqrt{p_0^2 + q_0^2}). \tag{25}$$

b) Si tratta ora di dimostrare che gli integrali $\iint \Phi(\sqrt{p_n^2 + q_n^2})dxdy$, $(n = 1, 2, ...)$ sono in D funzioni equidoppiamente assolutamente continue.

A tal uopo si consideri un qualunque rettangolo R del piano (x, y) a lati paralleli agli assi coordinati e tutto contenuto nel campo aperto D.

Si dividano i lati di R paralleli all'asse delle x in m parti uguali mediante i punti di ascisse $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_m$, e quelli paralleli all'asse delle y pure in m parti uguali mediante i punti di coordinate $y_0 < y_1 < < y_2 < ... < y_m$. Per i punti di divisione ottenuti si conducano le parallele agli assi coordinati: in tal modo R viene diviso in m^2 rettangoli uguali $R_{s,t} = [x_{s-1} \leq x \leq x_s,\ y_{t-1} \leq y \leq y_t]$, $[s, t = 1, 2, ... m]$. Posto ([22])

$$a_{s,t} = \left|\int_{x_{s-1}}^{x_s}[z_0(x, y_t) - z_0(x, y_{t-1})]dx\right|, \quad b_{s,t} = \left|\int_{y_{t-1}}^{y_t}[z_0(x_s, y) - z_0(x_{s-1}, y)]dy\right|,$$

$$A_{s,t} = \iint_{R_{s,t}} dxdy,$$

si consideri l'espressione

$$\varphi_{s,t} = A_{s,t}\,\Phi\left(\frac{\sqrt{a_{s,t}^2 + b_{s,t}^2}}{A_{s,t}}\right) \tag{26}$$

e la somma $\sum_{s,t} \varphi_{s,t}$ estesa a tutti i rettangoli $R_{s,t}$.

Essendo, per l'assoluta continuità della $z_0(x, y)$ in D,

$$\begin{cases} a_{s,t} = \left|\int_{x_{s-1}}^{x_s}\int_{y_{t-1}}^{y_t} q_0(x, y)dx\,dy\right| = \left|\iint_{R_{s,t}} q_0(x, y)dx\,dy\right|, \\ b_{s,t} = \left|\iint_{R_{s,t}} p_0(x, y)dx\,dy\right|, \end{cases} \tag{27}$$

([21]) Vedi G. VITALI. *Sui gruppi di punti ecc.*, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLIII (1907-8).

([22]) Cfr. L. TONELLI, luogo cit. in ([4]), n.° 2.

applicando una nota disuguaglianza [23], risulta

$$\varphi_{s,t} = A_{s,t}\Phi\left(\frac{\sqrt{\left[\iint\limits_{R_{s,t}} p_0(x, y)dx\,dy\right]^2 + \left[\iint\limits_{R_{s,t}} q_0(x, y)dx\,dy\right]^2}}{A_{s,t}}\right) \leq$$

$$\leq A_{s,t}\Phi\left(\frac{\iint\limits_{R_{s,t}} \sqrt{p_0^2 + q_0^2}\,dx\,dy}{A_{s,t}}\right) = A_{s,t}\Phi\left(\frac{\iint\limits_{R_{s,t}} \sqrt{p_0^2 + q_0^2}\,dx\,dy}{\iint\limits_{R_{s,t}} dx\,dy}\right).$$

In virtù della nota disuguaglianza di JENSEN [24], che è applicabile per le ipotesi fatte sulla funzione Φ, tenendo conto che $I_D[z_0]$ esiste finito, si ha

$$\varphi_{s,t} \leq A_{s,t} \frac{\iint\limits_{R_{s,t}} \Phi(\sqrt{p_0^2 + q_0^2})dx\,dy}{\iint\limits_{R_{s,t}} dx\,dy} = \iint\limits_{R_{s,t}} \Phi(\sqrt{p_0^2 + q_0^2})dx\,dy,$$

$$\sum_{s,t} \varphi_{s,t} \leq \iint\limits_{R} \Phi(\sqrt{p_0^2 + q_0^2})dx\,dy. \tag{28}$$

c) Siano $a_{s,t}^{(n)}$, $b_{s,t}^{(n)}$, $\varphi_{s,t}^{(n)}$ le espressioni, analoghe alle $a_{s,t}$, $b_{s,t}$, $\varphi_{s,t}$, relative alla funzione $z_n(x, y)$. Risulta, tenendo conto della (24),

$$a_{s,t}^{(n)} = \left|\int_{x_{s-1}}^{x_s} [z_n(x, y_t) - z_n(x, y_{t-1})]dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\left|\int_{x_{s-1}}^{x_s}[z_0(x + \xi, y_t + \eta) - z_0(x + \xi, y_{t-1} + \eta)]dx\right| d\xi d\eta \leq$$

$$\leq \frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n} a_{s,t}(\xi, \eta)d\xi d\eta,$$

dove $a_{s,t}(\xi, \eta)$ indica l'espressione $a_{s,t}$ relativa, non al rettangolo $R_{s,t}$, ma

---

[23] $\left[\iint\limits_D |f|\,dx\,dy\right]^2 + \left[\iint\limits_D |g|\,dx\,dy\right]^2 \leq \left[\iint\limits_D \sqrt{f^2 + g^2}\,dx\,dy\right]^2$, disuguaglianza usata dal TONELLI nel luogo cit. in [5], n.° 5.

[24] Vedi J. L. W. V. JENSEN, *Sur les fonctions convexes ecc.*, « Acta Mathematica », T. 30 (1906), pag. 186, n.° 4.

al rettangolo $R_{s,t}(\xi, \eta)$, che si ottiene dal precedente con la traslazione $X = x + \xi$, $Y = y + \eta$. Analogamente si ha

$$b_{s,t}^{(n)} \leq \frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n} b_{s,t}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Quindi

$$\varphi_{s,t}^{(n)} = A_{s,t}\Phi\left(\frac{\sqrt{[a_{s,t}^{(n)}]^2 + [b_{s,t}^{(n)}]^2}}{A_{s,t}}\right) \leq$$

$$\leq A_{s,t}\Phi\left(\frac{\sqrt{\left[\frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n} a_{s,t}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta\right]^2 + \left[\frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n} b_{s,t}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta\right]^2}}{A_{s,t}}\right)$$

e, applicando una disuguaglianza già usata [25], risulta

$$\varphi_{s,t}^{(n)} \leq A_{s,t}\,\Phi\left(\frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\frac{\sqrt{a_{s,t}^2(\xi, \eta) + b_{s,t}^2(\xi, \eta)}}{A_{s,t}}\,d\xi\,d\eta\right).$$

Tenendo conto che $4h_n^2 = \int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n} d\xi\,d\eta$, ed applicando poi la disuguaglianza di JENSEN, si ha

$$\varphi_{s,t}^{(n)} \leq \frac{A_{s,t}}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\Phi\left(\frac{\sqrt{a_{s,t}^2(\xi, \eta) + b_{s,t}^2(\xi, \eta)}}{A_{s,t}}\right)d\xi\,d\eta,$$

e tenendo conto della (26)

$$\varphi_{s,t}^{(n)} \leq \frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\varphi_{s,t}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Sommando da 1 ad m rispetto ad ambedue gli indici s, t, e tenendo conto della (28) risulta

$$(29) \qquad \sum_{s,t}\varphi_{s,t}^{(n)} \leq \frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\left[\iint_{R(\xi,\eta)}\Phi\left(\sqrt{p_0^2 + q_0^2}\right)dx\,dy\right]d\xi\,d\eta.$$

---

[25] Vedi nota [23].

d) Si osservi che dalle analoghe delle (27) si deduce

$$\varphi_{s,t}^{(n)} = A_{s,t}\Phi\left(\frac{\sqrt{[a_{s,t}^{(n)}]^2 + [b_{s,t}^{(n)}]^2}}{A_{s,t}}\right) = A_{s,t}\Phi(\sqrt{\bar{p}_n^2 + \bar{\bar{q}}_n^2}),$$

ove $\bar{p}_n$, $\bar{\bar{q}}_n$ sono i valori di p_n, q_n in due punti convenientemente scelti nel rettangolo $R_{s,t}$. Tenendo conto della continuità delle derivate parziali p_n e q_n, e della continuità della funzione Φ, si ha

$$\sum_{s,t} \varphi_{s,t}^{(n)} = \sum_{s,t} A_{s,t}\Phi(\sqrt{\bar{p}_n^2 + \bar{q}_n^2}) + \varepsilon_1,$$

ove $\bar{p}_n$ e $\bar{q}_n$ sono i valori di p_n, q_n in uno stesso punto di $R_{s,t}$, ed è $\varepsilon_1 \to 0$, per $m \to \infty$, cioè al tendere allo zero di tutte le differenze $x_s - x_{s-1}$, $y_t - y_{t-1}$. Facendo tale passaggio al limite risulta

$$\sum_{s,t} \varphi_{s,t}^{(n)} \to \iint_R \Phi(\sqrt{p_n^2 + q_n^2})dx\,dy.$$

Dalla (29) si ha quindi

$$(30) \qquad \iint_R \Phi(\sqrt{p_n^2 + q_n^2})dxdy \leq \frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\left[\iint_{R(\xi,\eta)} \Phi(\sqrt{p_0^2 + q_0^2})dxdy\right]d\xi\, d\eta.$$

Poichè l'integrale $I_{D'}[z_0]$ esiste finito, preso un $\varepsilon_2 > 0$ ad arbitrio, si può determinare un δ_2 tale che per ogni gruppo di rettangoli R_1', R_2',... R_μ' appartenenti a D', senza punti interni comuni, a lati paralleli agli assi coordinati e di area complessiva $< \delta_2$, risulti

$$\sum_{i=1}^{\mu} \iint_{R_i'} \Phi(\sqrt{p_0^2 + q_0^2})dx\,dy < \varepsilon_2.$$

Allora per ogni gruppo di rettangoli R_1, R_2,... R_μ, appartenenti a D, senza punti interni comuni, a lati paralleli agli assi coordinati e di area complessiva $< \delta_2$, risulta dalla (30), in virtù di quest'ultima

$$\sum_{i=1}^{\mu} \iint_{R_i} \Phi(\sqrt{p_n^2 + q_n^2})dxdy < \varepsilon_2$$

per qualunque valore di n; e poichè è sempre $\Phi \geq 0$, si conclude che gli integrali $\iint \Phi(\sqrt{p_n^2 + q_n^2})dxdy$, $(n = 1, 2,...)$ sono, in D, funzioni equidoppiamente assolutamente continue.

Da tale proprietà e dalla (25) in virtù del noto teorema d'integrazione per serie del VITALI risulta

$$\lim_{n \to \infty} \iint_D \Phi(\sqrt{p_n^2 + q_n^2})dxdy = \iint_D \Phi(\sqrt{p_0^2 + q_0^2})dxdy.$$

9. **Nuovo enunciato del teorema IV.** — L'enunciato del teorema del numero precedente assume una forma più semplice quando la funzione $z_0(x, y)$ è costante sulla frontiera del campo.

Sia $\Phi(u)$ *una funzione definita per* $u \geq 0$, *non negativa e, insieme con la sua derivata prima, continua e non decrescente.*

Sia poi $z_0(x, y)$ *una funzione assolutamente continua nel campo aperto limitato* D, *continua in tutto il campo chiuso* $\bar{D}$ *corrispondente, costante sulla frontiera di* D, *e tale inoltre che esista finito l'integrale*

$$I_D[z_0] = \iint_D \Phi(\sqrt{p_0^2 + q_0^2})dx\,dy,$$

con $p_0 = \frac{\partial z_0}{\partial x}$, $q_0 = \frac{\partial z_0}{\partial y}$.

Allora è possibile determinare una successione di funzioni $z_n(x, y)$, *continue insieme con le loro derivate parziali del primo ordine, in tutto un nuovo campo aperto limitato* D_1, *contenente* $\bar{D}$, *in modo che risulti, per* $n \to \infty$,

$$z_n(x, y) \to z_0(x, y), \text{ uniformemente in } D,$$
$$I_D[z_n] \to I_D[z_0].$$

Sia Q_0 un quadrato del piano (x, y) a lati paralleli agli assi coordinati, nel cui *interno* sia contenuto il campo $\bar{D}$.

Indicato con C il valore (costante) della funzione $z_0(x, y)$ sulla frontiera Γ di D, e posto $z_0(x, y) = C$ in tutti i punti di $\bar{Q}_0$ esterni a $\bar{D}$, la funzione $z_0(x, y)$ è evidentemente continua in tutto $\bar{Q}_0$, e inoltre, come ha dimostrato il TONELLI ([26]) in caso analogo, essa risulta assolutamente continua in Q_0. Si osservi poi che in tutti i punti di Q_0 esterni a D le derivate parziali $p_0(x, y)$, $q_0(x, y)$ esistono e sono ambedue nulle, e che inoltre, come ha provato il TONELLI, queste esistono e sono nulle quasi dappertutto sulla frontiera Γ di D. Ne segue che l'integrale $I_{Q_0}[z_0]$ esiste finito.

Sono dunque verificate tutte le ipotesi del teorema del n.° precedente: e ciò basta per provare il teorema enunciato nel presente n.°.

([26]) Vedi L. TONELLI, luogo cit. in ([17]).

10. Osservazione sul teorema IV. — *I teoremi dei* n^i. 8 *e* 9 *continuano a sussistere anche sostituendo nei rispettivi enunciati all'integrale* $\iint_D \Phi(\sqrt{p_0^2+q_0^2})dxdy$, *uno qualunque dei due integrali*

$$\iint_D \Phi(|p_0|)dxdy, \quad \iint_D \Phi(|q_0|)dxdy.$$

11. Teorema generale. — Dai teoremi dei n.^{i} 8 e 9, tenendo presente l'osservazione del n.^{o} 10, si deducono facilmente i seguenti teoremi:

α) *Sia* D *un campo aperto limitato del piano* (x, y), *sia* f(x, y, z, p, q) *una funzione finita e continua in tutti i punti* (x, y) *del campo chiuso* $\bar{D}$ *corrispondente e per tutti i valori finiti di* z, p, q, *e sia poi* $z_0(x, y)$ *una funzione assolutamente continua in* D, *continua in tutto* $\bar{D}$, *e tale inoltre che esista finito l'integrale*

$$I_D[z_0] = \iint_D f(x,\ y,\ z_0(x, y),\ p_0(x, y),\ q_0(x, y))dxdy,$$

con $p_0 = \frac{\partial z_0}{\partial x}$, $q_0 = \frac{\partial z_0}{\partial y}$.

Si supponga poi che esista un nuovo campo aperto limitato D', *contenente* $\bar{D}$, *in modo che la funzione* f(x, y, z, p, q) *sia finita e continua per ogni* (x, y) *di* $\bar{D}'$, *e per tutti i valori finiti di* z, p, q, *che la funzione* $z_0(x, y)$ *si possa continuare fuori di* D *in tutto* D', *in modo da essere continua in* $\bar{D}'$, *assolutamente continua in* D', *e da rendere finito l'integrale* $I_{D'}[z_0]$, *e che inoltre indicato con* K' *il massimo modulo di* $z_0(x, y)$ *in* D' *si possano determinare tre funzioni* $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$, $\Phi_3(u)$, *ognuna delle quali sia definita per* $u \geq 0$, *sia non negativa e, insieme con la propria derivata prima, continua e non decrescente, e otto numeri* $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 > 0$, $\Lambda_3 > 0$, $\Lambda_4 > 0$, $\Lambda_1' > 0$, $\Lambda_2' > 0$, $\Lambda_3' > 0$, Λ_4', *quest'ultimo anche negativo, in modo che risulti*

$$\begin{aligned}(31)\qquad & \Lambda_1'\Phi_1(\sqrt{p^2+q^2}) + \Lambda_2'\Phi_2(|p|) + \Lambda_3'\Phi_3(|q|) + \Lambda_4' < \\ & < f(x, y, z, p, q) < \Lambda_1\Phi_1(\sqrt{p^2+q^2}) + \Lambda_2\Phi_2(|p|) + \Lambda_3\Phi_3(|q|) + \Lambda_4,\end{aligned}$$

per ogni (x, y) *di* $\bar{D}'$, *per ogni* $|z| \leq K' + 1$ *e per tutte le coppie* p, q.

Sotto queste ipotesi è possibile determinare una successione di funzioni $z_n(x, y)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, *continue insieme con le loro derivate parziali del primo ordine in tutto un campo aperto limitato* D_1', *contenente* D, *e tutto contenuto, insieme con la sua frontiera in* D' *e opportunamente scelto, in modo che ri-*

sulti, per $n \to \infty$,

$$z_n(x, y) \to z_0(x, y), \text{ uniformemente in tutto } \bar{D},$$
$$I_D[z_n] \to I_D[z_0].$$

Si può sempre supporre che il campo D' sia tutto contenuto nel quadrato Q_0 del piano (x, y) di vertici opposti $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

Continuata la funzione $z_0(x, y)$ in tutto D' in modo da essere assolutamente continua anche in tal campo e da rendere finito l'integrale $I_{D'}[z_0]$, per la (31) esistono finiti i tre integrali

$$\iint_{D'} \Phi_1(\sqrt{p_0^2 + q_0^2})dxdy, \quad \iint_{D'} \Phi_2(|p_0|)dxdy, \quad \iint_{D'} \Phi_3(|q_0|)dxdy.$$

Riesaminando la dimostrazione del teorema del n.° 8 e tenendo poi presente l'osservazione del n.° 10, si vede che è possibile determinare una successione di funzioni $z_n(x, y)$, $(n = 1, 2, ...)$ ([27]), continue insieme con le loro derivate parziali del primo ordine in tutto un nuovo campo aperto limitato D_1, definito nella dimostrazione del n.° 8, e tali che

a) sia per $n \to \infty$

$$z_n(x, y) \to z_0(x, y), \text{ uniformemente in tutto } \bar{D},$$
$$p_n(x, y) \to p_0(x, y), \quad q_n(x, y) \to q_0(x, y), \text{ quasi dappertutto in } D,$$

b) gli integrali

$$\iint \Phi_1(\sqrt{p_n^2 + q_n^2})dxdy, \quad \iint \Phi_2(|p_n|)dxdy, \quad \iint \Phi_3(|q_n|)dxdy, \qquad (n = 1, 2, ...),$$

siano tutti, in D, funzioni equidoppiamente assolutamente continue.

Per la proprietà *a)* è, quasi dappertutto in D, per $n \to \infty$,

$$f(x, y, z_n, p_n, q_n) \to f(x, y, z_0, p_0, q_0),$$

e per la proprietà *b)* si deduce dalla (31) che gli integrali

$$\iint f(x, y, z_n, p_n, q_n) \, dxdy, \qquad (n = 1, 2, ...),$$

sono, in D, funzioni equidoppiamente assolutamente continue.

Pertanto applicando il noto teorema d'integrazione per serie del VITALI risulta

$$\lim_{n \to \infty} I_D[z_n] = I_D[z_0].$$

([27]) Si tenga presente che, continuata la funzione $z_0(x, y)$ in tutto D', le funzioni $z_n(x, y)$ definite al n.° 8 dipendono soltanto dai valori della $z_0(x, y)$ in D', e non dalla funzione Φ.

β) *Sia* D *un campo aperto limitato del piano* (x, y), *sia* f(x, y, z, p, q) *una funzione finita e continua in tutti i punti* (x, y) *del corrispondente campo chiuso* D *e per tutti i valori finiti di* z, p, q, *e sia* $z_0(x, y)$ *una funzione definita e continua in* $\bar{D}$, *la quale sia assolutamente continua in* D, *sia costante sulla frontiera* Γ *di* D, *e tale inoltre che esista finito l'integrale*

$$I_D[z_0] = \iint_D f(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y)) dx dy.$$

Si supponga poi che indicato con K *il massimo modulo di* $z_0(x, y)$ *in* $\bar{D}$, *si possano determinare tre funzioni* $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$, $\Phi_3(u)$, *ciascuna delle quali sia definita per* $u \geq 0$, *sia non negativa e, insieme con la propria derivata prima, continua e non decrescente, e otto numeri* $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 > 0$, $\Lambda_3 > 0$, $\Lambda_4 > 0$, $\Lambda_1' > 0$, $\Lambda_2' > 0$, $\Lambda_3' > 0$, Λ_4', *quest'ultimo anche negativo, in modo che risulti*

$$\Lambda_1'\Phi_1(\sqrt{p^2+q^2}) + \Lambda_2'\Phi_2(|p|) + \Lambda_3'\Phi_3(|q|) + \Lambda_4' <$$
$$< |f(x, y, z, p, q)| < \Lambda_1\Phi_1(\sqrt{p^2+q^2}) + \Lambda_2\Phi_2(|p|) + \Lambda_3\Phi_3(|q|) + \Lambda_4, \tag{31}$$

per ogni (x, y) *di* $\bar{D}$, *per ogni* $|z| \leq K + 1$ *e per tutte le coppie* p, q.

Sotto queste ipotesi è possibile determinare una successione di funzioni $z_n(x, y)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, *continue insieme con le loro derivate parziali del primo ordine in tutto un nuovo campo aperto limitato* D_1, *contenente* $\bar{D}$, *in modo che risulti, per* $n \to \infty$,

$$z_n(x, y) \to z_0(x, y), \text{ uniformemente in tutto } \bar{D},$$
$$I_D[z_n] \to I_D[z_0].$$

Basta ripetere la dimostrazione fatta in *α)*, facendo la seguente modificazione:

Dall'ipotesi che esista finito l'integrale $I_D[z_0]$ risulta per la (31) che esistono finiti i tre integrali

$$I_D^{(1)}[z_0] = \iint_D \Phi_1(\sqrt{p_0^2+q_0^2}) dx dy, \quad I_D^{(2)}[z_0] = \iint_D \Phi_2(|p_0|) dx dy,$$
$$I_D^{(3)}[z_0] = \iint_D \Phi_3(|q_0|) dx dy.$$

È possibile, ripetendo le considerazioni del n.° 9, continuare la funzione $z_0(x, y)$ in tutto $\bar{Q}_0$, in modo che risulti continua in Q_0, assolutamente continua in Q_0 e che esistano finiti i tre integrali $I_{Q_0}^{(1)}[z_0]$, $I_{Q_0}^{(2)}[z_0]$, $I_{Q_0}^{(3)}[z_0]$.

12. **Osservazioni.** α) *È opportuno rilevare che i teoremi del n.° precedente continuano a sussistere se è verificata una qualunque delle tre seguenti ipotesi*

$$\Lambda_1 = \Lambda_1' = 0; \quad \Lambda_2 = \Lambda_2' = 0; \quad \Lambda_3 = \Lambda_3' = 0;$$

inoltre essi sussistono anche se sono verificate contemporaneamente due qualunque delle precedenti ipotesi ed anche contemporaneamente tutte e tre.

β) Si osservi poi che, tenendo conto dell'osservazione fatta in α), le ipotesi fatte nei n.i 3, 4, 6 e 7 del § 1 rientrano come caso particolare in quelle del n.° 11. Basta fare nella (31) $\Lambda_1 = \Lambda_1' = 0$, e prendere $\Phi_2(u) = u^{\nu_1}$, $\Phi_3(u) = u^{\nu_2}$, con $\nu_1 \geq 1$, $\nu_2 \geq 1$. Se poi è $\nu_1 = 1$ o $\nu_2 = 1$, si può fare nella (31) $\Lambda_2' = 0$ o $\Lambda_3' = 0$ rispettivamente. Se la funzione $f(x, y, z, p, q)$ non dipende o dalla p o dalla q, si può fare nella (31) $\Lambda_2 = \Lambda_2' = 0$ o $\Lambda_3 = \Lambda_3' = 0$ rispettivamente.

Sur l'emploi de relations globales dans quelques problèmes physiques.

Par N. Théodoresco (à Bucarest).

PREMIÈRE PARTIE

Les problèmes d'équilibre relatifs aux milieux continus ont toujours attiré l'attention des chercheurs autant par leur beauté que par les difficultés qui s'y présentent, et qui semblent différer d'un cas à l'autre.

En effet, malgré leurs origines communes, les divers systèmes d'équations aux dérivées partielles auxquels on ramène l'étude du phénomène, posent des problèmes assez variés.

D'autre part, l'intégration de ces systèmes introduit des conditions gênantes à l'égard des données, ce qui restreint souvent sensiblement le degré de généralité des solutions.

En même temps, un phénomène d'équilibre n'étant pas local mais global, c'est-à-dire intéressant toute portion détachée par la pensée dans le milieu considéré, il ne saurait être exprimé dans toute sa généralité à l'aide des équations aux dérivées partielles.

Les difficultés que nous venons d'énumérer se rencontrent dans toute question physique, et ont été remarquées depuis longtemps.

Elles sont dues en premier lieu à notre façon d'envisager les phénomènes, au passage à la limite auquel on ramène toujours les méthodes de calcul.

Il existe pourtant, à l'heure actuelle, bien des tendances vers une autre interprétation des faits à l'aide de relations globales, comme celles de M. M. G. Bouligand (1) pour le problème de Neumann, Evans (2) pour le problème de Dirichlet, Oseen (3) pour les équations des fluides visqueux.

(1) G. Bouligand, *Sur quelques problèmes de la dynamique des fluides*, Paris 1930.

(2) G. C. Evans, *Fundamental points of potential theory*, (« Rice Inst. Pamphlet », vol. 7, 1920).

(3) C. W. Oseen, *Neure Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*, Leipzig 1927.

1. *Nous nous proposons de montrer comment on peut envisager le problème d'équilibre d'un milieu continu en partant des équations générales sous forme globale, c'est-à-dire en exprimant les théorèmes généraux de la résultante générale et du moment résultant et comment on peut remonter par une voie simple et naturelle de la distribution des forces massiques données à celle des pressions, tensions, vitesses, suivant le cas, en n'introduisant qu'un nombre réduit de restrictions.*

Nous traiterons d'abord le cas du plan, par une méthode qu'on peut rattacher à la *dérivée aréolaire* due à M. D. POMPEIU, sous la forme générale que nous lui avons donnée dans notre Thése [1].

Toutefois, les raisonnements qui vont suivre, n'exigent pas une étude préliminaire de cette notion.

Désignons — suivant les notations classiques — par $X(x, y)$, $Y(x, y)$ les forces massiques données en chaque point intérieur d'un milieu continu et exprimées par deux fonctions bornées et intégrables au sens de M. LEBESGUE.

Soient X_1, Y_1, X_2, Y_2, les efforts s'exerçant sur deux éléments normaux respectivement aux axes ox, oy; on suppose seulement qu'ils sont continus en chaque point du milieu plan envisagé.

On sait que les équations d'équilibre intérieur sont:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\int_\gamma (\alpha X_1 + \beta X_2) ds = \iint_\delta \rho X d\sigma \\ &\int_\gamma (\alpha Y_1 + \beta Y_2) ds = \iint_\delta \rho Y d\sigma \\ &\int_\gamma [\alpha(xY_1 - yX_1) + \beta(xY_2 - yX_2)] ds = \iint_\delta \rho(xY - yX) d\sigma \end{aligned}$$

le contour γ étant simple, rectifiable, doué d'une tangente unique et intérieur au milieu envisagé.

La troisième de ces équations peut être transformée si l'on fait appel à la notion de *dérivée extérieure* [2] de M. CARTAN. Considérons une forme différentielle linéaire à deux variables

$$\omega = Pdx + Qdy.$$

S'il existe une fonction $R(x, y)$ bornée et intégrable, telle que l'on ait

$$(2) \qquad \int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_\delta R dx dy$$

[1] N. THÉODORESCO, *La dérivée aréolaire et ses applications à la Physique Mathématique*, (Paris, Gauthier Villars, 1931).

[2] Voir à ce sujet: E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, p. 69.

pour tout γ limitant un domaine δ intérieur à une région du plan, on dit que $\omega' = R dx dy$ est la *dérivée extérieure* de la forme ω.

Soit maintenant $\lambda(x, y)$ une fonction admettant des dérivées partielles du premier ordre continues.

On peut démontrer qu'on aura aussi, en vertu de (2):

$$\int_\gamma \lambda(Pdx + Qdy) = \iint_\delta \left(\lambda R + Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - P\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)dx\,dy. \tag{3}$$

Rappelons la démonstration de cette importante propriété de la dérivée extérieure.

ε étant un nombre positif donné, on peut diviser le domaine δ en un nombre fini de régions; par exemple, par des parallèles aux axes, telles que dans chacune d'elles il existe un point x_0, y_0 pour lequel on ait à la fois:

$$|\lambda(x, y) - \lambda(x_0, y_0)| < \varepsilon, \quad |P(x, y) - P(x_0, y_0)| < \varepsilon, \quad |Q(x, y) - Q(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

$$\left|Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - Q_0\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_0\right| < \varepsilon; \quad \left|P\frac{\partial\lambda}{\partial y} - P_0\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_0\right| < \varepsilon$$

x, y étant un point quelconque de la région ou du contour, λ_0, P_0, Q_0, $\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_0$, les valeurs des fonctions au point x_0, y_0.

On pourra donc écrire dans toute région partielle envisagée

$$P = P_0 + \varepsilon_1 \qquad Q = Q_0 + \varepsilon_2$$

$$\lambda = \lambda_0 + (x - x_0)\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_0 + \varepsilon_3\right] + (y - y_0)\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_0 + \varepsilon_4\right]$$

avec $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$, $|\varepsilon_3|$, $|\varepsilon_4| < \varepsilon$.

Soit δ_i une de ces régions. Calculons la différence

$$\begin{aligned}
D_i &= \int_{\gamma_i} \lambda(Pdx + Qdy) - \iint_{\delta_i}\left(\lambda R + Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - P\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)dxdy \\
&= \int_{\gamma_i} \lambda_0(Pdx + Qdy) - \iint_{\delta_i}\left(\lambda R + Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - P\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)dxdy \\
&+ \int_{\gamma_i}\left[(x - x_0)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_0 + (y - y_0)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_0\right][P_0dx + Q_0dy] + \eta \\
&= -\iint_{\delta_i}\left\{(\lambda - \lambda_0)R + \left[Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - Q_0\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_0\right] - \left[P\frac{\partial\lambda}{\partial y} - P_0\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_0\right]\right\}dxdy + \eta
\end{aligned}$$

avec $|\eta| < \varepsilon M \Delta_i l_i$, M étant un nombre fixe indépendant de δ_i, Δ_i étant le diamètre de δ_i, l_i la longueur de γ_i.

On aura donc:

$$|D_i| < \varepsilon M' \iint_{\delta_i} dxdy + \varepsilon M \Delta_i l_i < \varepsilon N \alpha_i$$

en désignant par M' et N deux nombres fixes indépendants de δ_i et par α_i l'aire de cette portion.

En ajoutant terme à terme les diverses contributions des δ_i et en remarquant que le premier membre de l'inégalité obtenue est une constante indépendante de ε, qu'on peut d'ailleurs prendre aussi petite que l'on voudra, on obtient facilement l'identité (3).

Revenons maintenant aux équations d'équilibre. La troisième peut s'écrire:

$$\int_\gamma x(\alpha Y_1 + \beta Y_2)ds - \int_\gamma y(\alpha X_1 + \beta X_2)ds = \iint_\delta \rho(xY - yX)d\sigma.$$

Appliquons à chacun des deux termes de la différence du premier membre, l'opération indiquée par (3), tout en y tenant compte des deux autres équations d'équilibre et en remarquant que les fonctions x et y sont bien des fonctions λ. Il vient:

$$\int_\gamma x(\alpha Y_1 + \beta Y_2)ds = \iint_\delta (\rho x Y + Y_1)d\sigma$$

$$\int_\gamma y(\alpha X_1 + \beta X_2)ds = \iint_\delta (\rho y X + X_2)d\sigma$$

d'où

$$\iint_\delta (X_2 - Y_1)d\sigma = 0$$

pour tout δ et, par conséquent, à cause de la continuité des deux fonctions,

$$X_2 = Y_1$$

conclusion identique à celle qu'on déduirait par l'application de la formule de GREEN, si cela avait été possible.

Dans ces conditions, les équations d'équilibre se réduisent à deux seulement:

$$\text{(4)} \quad \begin{aligned} \int_\gamma (\alpha X_1 + \beta Y_1)ds &= \iint_\delta \rho X d\sigma \\ \int_\gamma (\alpha Y_1 + \beta Y_2)ds &= \iint_\delta \rho Y d\sigma. \end{aligned}$$

2. Appliquons ces considérations à l'étude d'un problème particulier concernant un milieu dans lequel

$$X_1 = -Y_2.$$

Supposons que l'on connaisse le long du contour C *rectifiable simple et fermé limitant un domaine* D, *une relation linéaire de la forme:*

$$a(s)X_1(s) + b(s)Y_1(s) = c(s) \tag{5}$$

a(s), b(s), c(s) *étant des fonctions continues données.*

Dans ces conditions, nous allons déterminer les fonctions $X_1(x, y)$, $Y_1(x, y)$, c'est-à-dire la distribution des efforts, à l'aide des équations fonctionnelles (4), en supposant ρ connue (constante par exemple).

Posons:

$$X_1 - iY_1 = f(z), \quad \rho(X - iY) = 2\varphi(z), \quad z = x + iy.$$

Les équations (4) se réduisent alors à la relation unique

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} f(z)dz - \frac{1}{\pi}\iint_{\delta} \varphi(v)d\omega = 0 \tag{6}$$

$(v = x + iy)$.

Nous avons montré dans le travail précité, que cela exprime le fait que la fonction $\varphi(v)$ est presque partout la dérivée aréolaire de $f(v)$, ce qui entraîne la connaissance de toutes les fonctions $f(v)$ jouissant de cette propriété.

Introduisons la fonction

$$g(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D} \frac{\varphi(v)}{v - \zeta}\, d\omega \tag{7}$$

$\zeta = \xi + i\eta$ *étant un point intérieur à* D.

La fonction g(ζ) *est continue dans ce domaine et satisfait à une condition de Hölder de la forme*:

$$|\, g(\zeta') - g(\zeta)\, | < K\, |\, \zeta' - \zeta\, |^{\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1). \tag{8}$$

A cet effet, remarquons que si ζ est intérieur à D et que l'on décrive un cercle Γ de centre ζ et de rayon fini r, assez petit pour qu'il soit aussi intérieur à D, on peut négliger la contribution du domaine $D - \Delta$, car la fonction $g_1(\zeta)$ définie par

$$g_1(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D-\Delta} \frac{\varphi(v)}{v - \zeta}\, d\omega$$

admet des dérivées partielles du premier ordre continues au point ζ et, satisfait, à plus forte raison, à une condition de Hölder.

Considérons donc l'expression

$$g_0(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\,d\omega.$$

Soit ζ' un point intérieur à Γ. Posons $|\zeta' - \zeta| = h$. On aura:

$$g_0(\zeta') - g_0(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta} \frac{\varphi(v)(\zeta - \zeta')}{(v-\zeta)(v-\zeta')}\,d\omega.$$

Notons $v - \zeta = \rho e^{i\theta}$ en prenant pour axe des x la direction $\zeta\zeta'$.

Soit M une borne supérieure de $|\varphi(v)|$ dans D. On aura:

$$|g_0(\zeta') - g_0(\zeta)| < \frac{Mh}{\pi}\iint_{\Delta} \frac{d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho h\cos\theta + h^2}} = \frac{Mh}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho h\cos\theta + h^2}}.$$

Posons $\rho = ht$ et calculons l'intégrale relative à ρ.

La présence du pôle $t = 1$ pour $\theta = 0$ n'est pas gênante.

On trouve comme résultat après une intégration par rapport à θ

$$\pi N + 2\pi \log\frac{1}{h} \qquad (N = \text{borné et positif})$$

On en déduit

$$|g_0(\zeta') - g_0(\zeta)| < MNh + 2Mh\log\frac{1}{h}.$$

Supposons $h < 1$. L'expression $h^{1-\alpha}\log\frac{1}{h}$ tendant vers zéro avec h, on peut, α étant donné, déterminer une valeur de $h < 1$, telle que l'on ait

$$h^{1-\alpha}\log\frac{1}{h} < 1 \quad \text{d'où} \quad h\log h < h^\alpha$$

et par conséquent:

$$|g_0(\zeta') - q_0(\zeta)| < Kh^\alpha.$$

La fonction g(ζ) *est une intégrale particulière de l'équation fonctionnelle* (6).

Calculons, en effet, l'expression

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(\zeta)d\zeta$$

lorsque le point ζ décrit le contour γ intérieur à D.

Décrivons deux contours voisins γ' et γ'' respectivement intérieur et extérieur à γ; désignons par δ' le domaine intérieur à γ', par δ'' le domaine compris entre γ'' et C et par d le domaine compris entre γ' et γ''.

On aura: $D = \delta' + \delta'' + d$,

$$\int_\gamma g(\zeta)d\zeta = -\frac{1}{\pi}\int_\gamma d\zeta \iint_{\delta'} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega - \frac{1}{\pi}\int_\gamma d\zeta \iint_{d} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega - \frac{1}{\pi}\int_\gamma d\zeta \iint_{\delta'} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega.$$

La fonction $\frac{\varphi(v)}{v-\zeta}$ étant bornée et intégrable en chaque point des domaines à trois dimensions résultant de la variation de v dans δ' et δ'', et de ζ le long de γ, le changement d'ordre d'intégration peut être effectué (1).

Quant au terme concernant d, il est facile de voir qu'il tendra vers zéro qund les deux contours tendent vers γ.

En effet, décalons autour de ζ un rectangle curviligne, à l'aide de deux normales menées à l'une des courbes γ' ou γ''.

On peut s'arranger pour qu'on puisse le regarder comme un véritable rectangle lorsque les courbes sont assez voisines. Soit a une borne inférieure de $|v-\zeta|$ lorsque v décrit le domaine qui reste, après avoir enlevé le rectangle d_0, en question.

On aura:

$$\left|\iint_{d-d_0} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega \right| < \frac{M}{a}\iint_{d-d_0} d\omega$$

M étant comme ci-dessus une borne supérieure de $|\varphi(v)|$, $a > 0$, et fixe.

Quant à la contribution de d_0, eu prenant des axes au point ζ et en désignant par b et h les côtés d'un rectangle renfermant complètement d_0, on aura à calculer une intégrale de la forme

$$\int_0^h dy \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^h dy \int_\varepsilon^b \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^h \log \frac{b+\sqrt{b^2+y^2}}{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+y^2}}\, dy$$

$$< \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^h \log \frac{b+\sqrt{b^2+y^2}}{y}\, dy < \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^h \log b(1+\sqrt{2})dy - \log y\, dy$$

$$= h \log b(1+\sqrt{2}) - h\log h + h$$

en prenant $h < b$ ce qui est évidemment possible, b étant une constante.

Or, on voit que pour h suffisamment petit, on peut rendre cette quantité aussi petite que l'on veut, ce qui montre que lorsque les deux courbes tendent vers γ, le terme relatif à d tendra vers zéro.

(1) À condition de négliger un ensemble de mesure nulle convenable. Voir H. Lebesgue, *Sur l'intégration des fonctions discontinues*, « Annales Ec. Norm. », 1910, p. 430.

Les autres termes vont donner successivement:

$$\int_\gamma d\zeta \iint_{\delta'} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega = \iint_{\delta'} \varphi(v) d\omega \int_\gamma \frac{d\zeta}{v-\zeta} = -\, 2i\pi \iint_{\delta'} \varphi(v) d\omega$$

$$\int_\gamma d\zeta \iint_{\delta''} \frac{\varphi(v)}{v-\zeta}\, d\omega = \iint_{\delta''} \varphi(v) d\omega \int \frac{d\zeta}{v-\zeta} = 0.$$

En plus, ε étant donné arbitrairement, on peut choisir le contour γ' de manière que l'on ait:

$$\left|\iint_{\delta-\delta'} \varphi(v) d\omega\right| < \varepsilon.$$

Dans ces conditions, on déduit aisément l'inégalité

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_\delta \varphi(v) d\omega < K\varepsilon$$

et par conséquent:

(9) $$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_\delta \varphi(v) d\omega = 0.$$

Cela montre que $g(\zeta)$ est en effet une intégrale particulière de l'équation fonctionnelle (6).

3. Intégration de l'équation (6). — En retranchant (9) de (6) on obtient:

$$\int_\gamma [f(z) - g(z)] dz = 0$$

pour tout γ. Or, la fonction $f(z) - g(z)$ est continue; par conséquent, en vertu du théorème de Morera, *elle est holomorphe.*

Posons

$$f(z) - g(z) = h(z).$$

Le problème revient à la détermination d'une fonction holomorphe par un problème d'Hilbert [1]. En effet posons:

$$h(z) = h_0(x, y) + ih_1(x, y); \quad g(z) = g_0(x, y) + ig_1(x, y);$$

la condition aux limites imposée peut s'écrire:

$$a(s)h_0(s) + b(s)h_1(s) = c(s) - [a(s)g_0(s) + b(s)g_1(s)],$$

le second membre étant parfaitement connu car $g(\zeta)$ est continue dans tout le plan.

[1] Voir par exemple H. Villat, *Leçons sur l'Hydrodynamique.* p. 226.

Cela nous fera connaître $h(z)$ et par suite $f(z)$. On aura, l'intégrale unique à deux constantes près sous la forme:

$$X_1(\xi, \eta) - iY_1(\xi, \eta) = h(\zeta) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\varphi(v)}{v - \xi - i\eta} d\omega. \tag{10}$$

En conclusion, sans passer par les équations aux dérivées partielles, un problème d'équilibre se trouve résolu par une méthode simple et rapide.

4. Un problème relatif à une plaque plane. — Le cas dont nous nous sommes occupé nous permet de traiter le problème suivant:

Etant donnée une distribution de forces massiques X, Y *bornées et intégrables. déterminer la distribution des tensions (et des déplacements) dans une plaque élastique* D, *connaissant le long du contour* C, *simple, fermé et rectifiable deux relations linéaires de la forme:*

$$\begin{aligned} A(s)u(s) + B(s)v(s) &= C(s) \\ a(s)\theta(s) + b(s)\theta_2(s) &= C(s) \end{aligned} \tag{11}$$

où A(s), B(s), C(s), a(s), b(s), c(s) *sont des fonctions continues données sur* C; u(x, y), v(x, y) *désignent les déplacements dans la plaque; on suppose l'existence et la continuité de leurs dérivées partielles du premier ordre; on pose:*

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \theta_2 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (1 + \xi)\theta = \theta_1.$$

On sait, en vertu de la loi de Hooke, que dans une plaque élastique, on a:

$$\left\{\begin{aligned} N_1 &= -\lambda\theta - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ N_2 &= -\lambda\theta - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ T &= -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}\right.$$

Introduisons ces valeurs dans les équations générales d'équilibre.

Il vient:

$$-\int\limits_\gamma(\lambda + 2\mu)\theta dy + \mu\theta_2 dx + \int\limits_\gamma 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) = \iint\limits_\delta \rho X\, d\sigma$$

$$\int\limits_\gamma(\lambda + 2\mu)\theta dx - \mu\theta_2 dy - \int\limits_\gamma 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy\right) = \iint\limits_\delta \rho Y\, d\sigma.$$

Posons:

$$1 + \frac{\lambda}{\mu} = \xi; \quad -\frac{\rho}{2\mu} = \nu$$

et remarquons les termes qui se détruisent par intégration.

Il vient:

$$\int_\gamma (1+\xi)\theta dy + \theta_2 dx = \iint_\delta 2\nu X\, d\sigma$$

$$\int_\gamma (1+\xi)\theta dx - \theta_2 dy = -\iint_\delta 2\nu Y\, d\sigma.$$

Multiplions la première relation par i et ajoutons-y membre à membre la seconde, ce qui donne:

$$\int_\gamma (\theta_1 + i\theta_2)(dx + idy) = \iint_\delta 2\nu i(X+iY)d\sigma$$

d'où l'on tire en posant:

$$\theta_1 + i\theta_2 = f(z), \quad \nu(X+iY) = \varphi(z), \quad z = x+iy,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'} f(z)dz - \frac{1}{\pi}\iint_\delta \varphi(v)d\omega = 0.$$

Or, cette équation est du type (6), et par conséquent l'intégration en est effectuée, puisqu'on connait une relation linéaire entre θ_1 et θ_2 sur C.

On aura:

$$\theta_1 + i\theta_2 = h(\zeta) - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\nu(X+iY)}{v-\zeta}\, d\omega.$$

Pour aller plus loin, remarquons qu'une fois θ_1 et θ_2 déterminés, la recherche de u, v est ramenée a l'intégration du système:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\theta_1}{1+\xi}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \theta_2.$$

Supposons $\xi \neq -1$. Nous avons montré dans un autre travail (¹) que si θ_1 et θ_2 satisfont à une condition de Hölder, ce système admet une intégrale particulière donnée par la fonction

$$u_0 + iv_0 = -\frac{1}{2\pi}\iint_D \frac{\theta_2 + \dfrac{\theta_1}{1+\xi}}{w-z}\, dw$$

w décrivant le domaine D, $z = x+iy$.

Posons $U = u - u_0$, $V = v - v_0$. On aura:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

ce qui exprime que la fonction $H(z) = V + iU$ est holomorphe dans D.

(¹) Thèse op. cit., p. 75.

En vertu de la première relation au contour, la recherche de $H(z)$ est ramenée à un problème d'HILBERT, car:

$$AU + BV = C - (Au_0 + Bv_0).$$

On connaîtra u, v par la formule:

$$v + iu = H(z) - \frac{1}{2\pi}\iint_D \frac{\theta_2 + i\frac{\theta_1}{1+\xi}}{w - z}\, d\omega$$

à deux constantes, introduites par $H(z)$, près.

Le problème que nous venons de traiter diffère du problème qu'on se pose habituellement en élasticité quand on se donne u, v sur C. On sait d'ailleurs que dans ce problème-là, le paramètre ξ possède des valeurs critiques situées à gauche de -1 sur l'axe réel.

Dans le cas du problème que nous nous sommes posé, il n'y a que le point -1 qui soit critique. Pour cette valeur de ξ, X et Y ne peuvent plus être arbitraires. En effet, supposons en particulier qu'ils soient dérivables. Le problème revient à l'intégration de

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial x} = 2\nu X, \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial y} = 2\nu Y$$

qui n'est possible que si

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

Si cette relation est vérifiée, on aura θ_2 à une constante près, mais de $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \theta_2$, on ne peut pas déduire u, v, d'une façon unique. On voit donc que -1 est une valeur critique.

5. Un problème concernant les petits mouvements stationnaires d'un fluide visqueux. — On suppose un vase dans lequel il y a un fluide visqueux en mouvement lent et permanent et tel que les vitesses ne dépendent que des coordonnées x, y. Le long du contour de chaque section plane on connaît les valeurs de la pression p et une relation de la forme

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s) \tag{12}$$

entre les composantes de la vitesse: $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ étant continues.

Cela étant, on peut se proposer de déterminer la distribution des vitesses u, v, *supposées dérivables une fois et à dérivées partielles continues, et de la pression* p *supposée continue.*

On sait, que dans le cas d'un tel fluide

$$\begin{cases} N_1 = p - 2\mu \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ N_2 = p - 2\mu \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ T = -\mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (\mu = \text{coefficient de viscosité})$$

l'introduction de ces valeurs dans les équations d'équilibre (ou du mouvement) va nous donner:

$$\int_\gamma p\,dy + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + 2\mu \int_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = \iint_\delta \rho X\,d\sigma$$

$$\int_\gamma \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)dy - p\,dx - 2\mu \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = \iint_\delta \rho Y\,d\sigma$$

d'où, si l'on pose $\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = q(x, y)$ et qu'on remarque les termes qui se détruisent par intégration:

$$\int_\gamma (p + iq)(dx + idy) = i \iint_\delta \rho(X + iY)\,d\sigma.$$

Il suffit de poser:

$$p + iq = f(z); \quad \rho(X + iY) = 2\varphi(z); \quad z = x + iy$$

pour arriver à l'équation fonctionnelle:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\iint_\delta \varphi(v)\,d\omega = 0$$

(ω décrivant le domaine D), qu'on sait intégrer facilement.

On aura d'ailleurs

$$p + iq \doteq h(\zeta) - \frac{1}{2\pi}\iint_D \frac{X + iY}{w - \zeta}\,d\omega = h(\zeta) + g(\zeta).$$

Le détermination de $h(\zeta)$ se fait facilement.

On aura $h(z) = h_0(x, y) + ih_1(x, y)$ et sur le contour

$$p(s) = h_0(s) + g_0(s).$$

La connaissance de $h_0(s)$ entraîne celle de $h(z)$ par un problème de Dirichlet.

p et q satisfaisant à une condition de Hölder, il sera très facile de déterminer u et v par le système:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{q}{\mu}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

La fonction $g(\zeta)$ correspondante admettant des dérivées partielles du premier ordre continues, on aura

$$v + iu = H(\zeta) + \frac{1}{2\mu\pi}\iint_D \frac{q}{w-\zeta}\, d\omega = H(\zeta) + G(\zeta).$$

Posons $H(z) = H_0(x, y) + iH_1(x, y)$ et remarquons qu'on a:

$$a(s)H_0(s) + b(s)H_1(s) = c(s) - a(s)G_0(s) - b(s)G_1(s).$$

Le problème relatif à $H(z)$ est donc un nouveau problème d'Hilbert.

Dans tout ce qui précède on a supposé $\mu \neq 0$; le cas où $\mu = 0$ est singulier.

Supposons, comme dans l'autre exemple, l'existence des dérivées partielles pour X et Y.

Il faut d'abord que $\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$. Ensuite on remarque l'équation $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ne détermine pas uniquement u et v.

Ces deux exemples montrent que les restrictions imposées par l'emploi des équations aux dérivées partielles dans les problèmes relatifs aux milieux continus, ne tiennent pas à la nature intrinsèque de ces questions.

La méthode que nous venons d'employer s'impose d'elle-même et suit, pour ainsi dire, la voie logique et naturelle du phénomène exprimé par les relations globales initiales.

DEUXIÈME PARTIE

6. Le cas de l'espace offre une grande analogie avec celui du plan, bien qu'il fasse intervenir certaines transformations de méthode et quelques restrictions dans la généralité des surfaces et des conditions aux limites.

Montrons d'abord que les équations générales se réduisent à trois, sous des conditions semblables à celles que nous venons d'imposer dans le plan.

Supposons que les forces massiques X, Y, Z soient bornées et intégrables et que les composantes des efforts: X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3 soient continues.

Les théorèmes généraux donnent pour toute surface fermée σ, douée d'un champ continu de normales, limitant un domaine ω, les relations suivantes:

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \iint_\sigma (\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3) d\sigma - \iiint_\omega \rho X \, d\omega = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \iint_\sigma [\alpha(yZ_1 - zY_1) + \beta(yZ_2 - zY_2) + \gamma(yZ_3 - zY_3)] d\sigma - \iiint_\omega \rho(yZ - zY) d\omega = 0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Dans les conditions où nous nous sommes placés, il est évident que l'application de la formule de GREEN est impossible.

Faisons appel à la *dérivée extérieure*, qui est définie dans l'espace par la relation:

$$(14)\qquad \iint_\sigma (\alpha P + \beta Q + \gamma R) d\sigma = \iiint_\omega H \, d\omega$$

où P, Q, R sont continues, H bornée et intégrable.

Il est facile de prouver que, $\lambda(x, y, z)$, étant une fonction qui admet des dérivées partielles du premier ordre continues, on a, en vertu de (14), la relation:

$$(15)\qquad \iint_\sigma \lambda(\alpha P + \beta Q + \gamma R) d\sigma = \iiint_\omega \left(\lambda H + P\frac{\partial\lambda}{\partial x} + Q\frac{\partial\lambda}{\partial y} + R\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right) d\omega.$$

Or, les équations du moment résultant s'écrivent facilement sous la forme:

$$\iint_\sigma [y(\alpha Z_1 + \beta Z_2 + \gamma Z_3) - z(\alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3)] d\sigma = \iiint_\omega \rho(yZ - zY) d\omega.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Mais on a, en vertu des équations de la résultante générale, tenu compte du fait que les fonctions x, y, z, sont des fonctions λ et de la relation (15):

$$\iint_\sigma y(\alpha Z_1 + \beta Z_2 + \gamma Z_3) d\sigma = \iiint_\omega (\rho y Z + Z_2) d\omega$$

$$\iint_\sigma z(\alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3) d\sigma = \iiint_\omega (\rho z Y + Y_3) d\omega$$

et par conséquent:

$$\iiint_\omega (Y_3 - Z_2) d\omega = 0$$

ce qui entraîne, à cause de la continuité de ces deux fonctions, l'identité

$$Y_3 = Z_2$$

et par permutations, les analogues.

L'introduction des notations consacrées:

$$Y_3 = Z_2 = T_1; \quad Z_1 = X_3 = T_2; \quad X_2 = Y_1 = T_3$$
$$X_1 = N_1; \quad Y_2 = N_2; \quad Z_3 = N_3$$

conduit aux équations générales sous la forme suivante:

$$(16) \qquad \begin{cases} \iint\limits_\sigma (\alpha N_1 + \beta T_3 + \gamma T_2) d\sigma = \iiint\limits_\omega \rho X \, d\omega \\ \iint\limits_\sigma (\alpha T_3 + \beta N_2 + \gamma T_1) d\sigma = \iiint\limits_\omega \rho Y \, d\omega \\ \iint\limits_\sigma (\alpha T_2 + \beta T_1 + \gamma N_3) d\sigma = \iiint\limits_\omega \rho Z \, d\omega. \end{cases}$$

Nous allons montrer dans la suite comment on peut les utiliser dans divers cas tirés des applications.

La méthode qui sera employée exige quelques développements préliminaires.

7. Etude d'un système d'équations aux dérivées partielles. — Soient ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 des fonctions continues admettant des dérivées partielles du premier ordre continues dans un domaine V.

Formons les combinaisons linéaires

$$(17) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi_3}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi_4}{\partial z} = \Psi_1 \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi_4}{\partial y} - \dfrac{\partial \psi_3}{\partial z} = \Psi_2 \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi_2}{\partial z} - \dfrac{\partial \psi_4}{\partial x} = \Psi_3 \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial z} + \dfrac{\partial \psi_3}{\partial x} - \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y} = \Psi_4. \end{cases}$$

Par l'introduction du symbolisme des matrices, on peut les envisager comme un opérateur, ce qui est recommandable au point de vue de la simplicité et conduit, en plus, à une série de formules fondamentales qui établissent comme l'a montré M. Gr. C. Moisil [1], une analogie très remarquable avec les formules de Cauchy, ou de M. D. Pompeiu relatives à la dérivée aréolaire.

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler les points essentiels du calcul symbolique [2], dont il sera question dans la suite.

On désignera l'ensemble des quatre fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 par une seule lettre et on l'appellera demivecteur. Une matrice telle que

$$\begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{Vmatrix}$$

sera désignée par une seule lettre γ.

Le demivecteur

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{4} \gamma_{ik}\psi_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

sera le produit de ψ par γ.

On écrira

$$\varphi = \gamma\psi.$$

Soient γ et λ deux matrices. Si l'on a: $\varphi = \gamma\psi$ et ensuite $\theta = \lambda\gamma$, on pourra écrire $\theta = \mu\psi$ avec $\mu = \lambda\gamma$; cela veut dire que

$$\mu_{ik} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij}\gamma_{jk} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

La matrice unité sera désignée par e

$$e = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

L'introduction de e s'impose pour l'homogénéité des formules. Ces conventions admises, par l'introduction des matrices:

$$\gamma_x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \gamma_y = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \gamma_z = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

---

[1] Voir Gr. C. Moisil, « C. R. de l'Académie des Sciences de Paris », t. 191, p. 984 et p. 1192.

[2] Voir Gr. C. Moisil et N. Théodoresco, *Sur une extension dans l'espace de la théorie des fonctions analytiques*, (« Mathematica », Tome V, Cluj).

le système (17) peut s'écrire

$$\left(\gamma_x \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi = \Psi.$$

Cela met en évidence une opération symbolique qui, appliquée au demivecteur ψ, conduit au demivecteur Ψ.

Posons

$$D = \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_z \frac{\partial}{\partial z},$$

donc remplaçons (17) par

(18) $$D\psi = \Psi.$$

On peut envisager D comme un produit scalaire des vecteurs symboliques $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ et γ_x, γ_y, γ_z.

Admettons pour un instant que ψ ait *des dérivees partielles du second ordre continues.*

Cela nous permettra de démontrer qu'on a:

(19) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} = \Delta\psi_1 \\ &\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} = \Delta\psi_2 \\ &\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial x} = \Delta\psi_3 \\ &\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} = \Delta\psi_4 \end{aligned}\right.$$

ce qu'on peut écrire, à l'aide des matrices:

$$\bar{\gamma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{\gamma}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{\gamma}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sous la forme

$$\left(\bar{\gamma}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{\gamma}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{\gamma}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi = e\Delta\Psi.$$

Posons

(20) $$\bar{D} = \bar{\gamma}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{\gamma}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{\gamma}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

On a donc:

$$\bar{D}\Psi = \Delta\psi$$

ou bien,

$$D\bar{D} = \bar{D}D = e\Delta$$

on même temps, on en tire:

$$(21)\qquad \begin{cases} \bar\gamma_x\gamma_x = \bar\gamma_y\gamma_y = \bar\gamma_z\gamma_z = e \\ \bar\gamma_x\gamma_y + \bar\gamma_y\gamma_x = \bar\gamma_y\gamma_z + \bar\gamma_z\gamma_y = \bar\gamma_z\gamma_x + \bar\gamma_x\gamma_z = 0 \end{cases}$$

et

$$(21')\qquad \begin{cases} \gamma_x\bar\gamma_x = \gamma_y\bar\gamma_y = \gamma_z\bar\gamma_z = e \\ \gamma_x\bar\gamma_y + \gamma_y\bar\gamma_x = \gamma_y\bar\gamma_z + \gamma_z\bar\gamma_y = \gamma_z\bar\gamma_x + \gamma_x\bar\gamma_z = 0. \end{cases}$$

Si $(u_x,\ u_y,\ u_z)$ est un vecteur, le produit scalaire symbolique, sera désormais désigné par

$$(u\gamma) = u_x\gamma_x + u_y\gamma_y + u_z\gamma_z\,.$$

Il est à retenir l'identité

$$(22)\qquad (u\bar\gamma)(v\gamma) + (v\bar\gamma)(u\gamma) = 2e(uv)$$

où

$$(uv) = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z\,.$$

De même

$$(22')\qquad (u\gamma)(v\bar\gamma) + (v\gamma)(u\bar\gamma) = 2e(uv).$$

Cela étant, on peut établir quelques identités fondamentales ([1]) conçernant les opérateurs introduits

(A) *On a pour toute surface fermée* σ, *limitant un domaine* ω *intérieur à* V:

$$(23)\qquad \iint_\sigma (n\gamma)\psi d\sigma + \iiint_\omega D\psi d\omega = 0$$

où n *est le vecteur unité de la normale à* σ.

En particulier si $D\psi = 0$, il s'ensuit que:

$$(24)\qquad \iint_\sigma (n\gamma)\psi d\sigma = 0.$$

Ces deux relations généralisent les formules de Cauchy et de Riemann qui se trouvent à la base de la théorie des fonctions

(B) *Les composantes de* ψ *peuvent se représenter par la formule*

$$(25)\qquad \psi_P = \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar\gamma)(\overrightarrow{n_M}\gamma)}{\overline{MP}^3}\psi_M d\sigma_M + \frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar\gamma)}{\overline{MP}^3} D\psi_M d\omega.$$

où la surface Σ est supposée douée en chaque point d'une normale unique, P étant un point de Ω

([1]) Gr. C. Moisil, loc. cit.

(C) *On a les relations:*

(26) $$\iint_\sigma (n\gamma)d\sigma = 0 \quad \text{et} \quad \iint_\sigma (n\bar{\gamma})d\sigma = 0,$$

(D) *Si l'on suppose* $D\psi = 0$:

(27) $$\iint_\sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\psi_M d\sigma_M = 0, \quad \text{si } P \text{ est extérieur à } \sigma$$

de même

(28) $$\frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}d\sigma_M = \begin{cases} 0 & \text{si } P \text{ est extérieur à } \sigma \\ e & \text{si } P \text{ est intérieur à } \sigma \end{cases}$$

et

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \frac{(n_M\bar{\gamma})(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3} = \begin{cases} 0 & \text{si } P \text{ est extérieur à } \sigma \\ e & \text{si } P \text{ est intérieur à } \sigma. \end{cases}$$

Dans ces deux dernières formules les rôles des γ et $\bar{\gamma}$ peuvent être intervertis.

Supposons maintenant qu'on considère les relations (17) *comme un système d'équations définissant les fonctions* ψ_i *et bornons-nous au système homogène*

(29) $$D\psi = 0.$$

Les intégrales de ce système peuvent être représentées, en vertu de (25), *par la formule*

(30) $$\psi_P = \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\psi_M d\sigma_M$$

lorsqu'on en connait les valeurs sur Σ.

Cela montre, en plus, que ces intégrales sont *analytiques,* auquel cas en vertu de la relation $D\bar{D} = e\Delta$, qui s'y applique légitimement, *elles sont des fonctions harmoniques.*

Pour être rigoureux, il nous resterait à montrer que réciproquement, tout ψ exprimé par une formule telle que (30) est une intégrale du système (29).

Or cela est très facile.

Supposons donné un demivecteur arbitraire, dont les composantes $\Psi_i(i = 1, 2, 3, 4)$ soient des fonctions simplement continues sur la surface.

Une expression de la forme:

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\Psi_M d\sigma_M$$

représente dans le domaine Ω des fonctions analytiques de P, comme les fonctions $\frac{\overrightarrow{MP}}{\overline{MP}^3}$.

Calculons $D\psi$ par dérivations, ou mieux calculons

$$A = \iiint_\omega D\psi d\omega = -\iint_\sigma (n_P\gamma)\psi_P d\sigma_P.$$

On aura:

$$A = -\frac{1}{4\pi}\iint_\sigma (n_P\gamma)d\sigma_P \iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\Psi_M d\sigma_M$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \left[\iint_\sigma \frac{(n_P\gamma)(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3} d\sigma_P\right](n_M\gamma)\Psi_M d\sigma_M.$$

Or, d'après la formule (28), l'intégrale relative à σ (intérieure à Σ) est nulle; donc $A = 0$, et par conséquent $D\psi = 0$ aussi:

Il est bon de remarquer que ψ ainsi obtenu est une intégrale de $D\psi = 0$ *dans* Ω *ouvert*, et qu'on ne saurait rien dire de la façon dont il se comporte sur Σ.

8 Extension du théorème de Morera. — Complétons ces résultats par un théorème dont l'importance au point de vue de l'intégration du système se fera voir dans la suite.

On sait quels services rend le théorème de Morera en Théorie des Fonctions. Nous l'avons d'ailleurs employé dans la première partie de ce travail.

On peut dire qu'il sert à partager la classe des fonctions continues $P + iQ$ en deux parties, en discernaut les fonctions holomorphes d'une part et les autres de l'autre part. En d'autres termes — et c'est ici le point intéressant pour nous — il caractérise les intégrales du système de Cauchy. La proposition, dont il sera question, est appelée à généraliser à ce point de vue le théorème de Morera.

Elle s'énonce comme suit:

Soit un demivecteur ψ *de composantes continues dans un domaine* V.

Si pour toute surface fermée σ, *douée d'un champ continu de normales intérieure à* V, *on a la relation:*

$$\iint_\sigma (n_M\gamma)\psi_M d\sigma_M = 0 \tag{31}$$

les fonctions ψ_i sont analytiques en tout point de V *et satisfont au système* [1]

$$D\psi = 0.$$

Soit Σ une surface intérieure à V, fermée, douée en chaque point d'une normale unique et soit Ω le domaine qu'elle limite. Calculons l'intégrale

$$\Psi_P = \iint_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\,\psi_M d\sigma_M .$$

A cet effet, décrivons la plus grande sphère σ_0 centrée au point P et de rayon ρ, telle que pour ε' positif arbitrairement donné, on ait

$$|\psi_{P'} - \psi_P| < \varepsilon' \quad \text{pour} \quad \overline{PP'} \leq \rho.$$

Désignons par ω_0 le domaine sphérique limité par σ_0. *Le rayon ρ une fois fixé,* on peut partager le domaine en un nombre fini de régions telles que dans chacune d'elles il existe au moins un point Q tel que $|\psi_{Q'} - \psi_Q| < \varepsilon\rho^3$, quel que soit le point Q' dans la portion envisagée ou sur la surface qui la limite.

C'est une propriété qui résulte de la continuité des fonctions ψ_i, compte tenu du fait que ρ est déterminé et fixe pour σ_0 donnée.

On peut, en particulier, réaliser cette subdivision à l'aide d'un nombre fini de *cubes de diamètre inférieur à* ρ, parmi lesquels il en existe qui sont écornés soit par Σ soit par σ_0, car il est clair que si la propriété existe pour un cube d'un diamètre r_0, elle est d'autant plus valable pour un diamètre inférieur.

Calculons

$$I = \iint_{\sigma_0} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\,\psi_M d\sigma_M$$

qui peut s'écrire

$$I = \iint_{\sigma_0} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\,[\psi_M \quad \psi_P] d\sigma_M + 4\pi\psi_P$$

en vertu de la formule (28)

On a donc

$$|I - 4\pi\psi_P| < \frac{\varepsilon'}{\rho^3}\iint_{\sigma_0} |(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)|\, d\sigma_M < 144\pi\varepsilon'.$$

---

[1] Ce n'est qu'un cas particulier d'un théorème que nous avons établi pour les systèmes d'équations du type elliptique envisagés par M. Gr. C. Moisil. Voir N. Théodoresco, *Sur les systèmes de Dirac du type elliptique.* « R. Lincei », vol. XIII. 1931.

Soit ω_h un des cubes de la subdivision. Soit Q le point tel que $|\psi_Q - \psi_M| < \varepsilon\rho^3$ quel que soit M dans ω_h ou sur σ_h. Le triangle MPQ fournit la relation

$$\overline{MP}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{MQ}^2 - 2\overline{PQ}\cdot\overline{MQ}\cos\alpha \qquad (\alpha = \sphericalangle MQP)$$

ou bien

$$\left(\frac{\overline{MP}}{\overline{PQ}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\right)\left(\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}} - 2\cos\alpha\right) = 1 + \lambda\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}$$

avec

$$\lambda = \frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}} - 2\cos\alpha.$$

Or, $\overline{MQ} < \overline{PQ}$, puisque d'une part Q est extérieur à σ_0, et d'autre part les diamètres des cubes ω_h, sont inférieurs à ρ [1].

Donc

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}} < 1 \quad \text{et} \quad |\lambda| < 3.$$

On peut alors écrire, en vertu du théorème des accroissements finis

$$\left(\frac{\overline{MP}}{\overline{PQ}}\right)^3 = \left(1 + \lambda\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\right)^{3/2} = 1 + \frac{3\lambda}{2}\left(1 + \lambda\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\theta\right)^{1/2}\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}; \qquad (0 < \theta < 1).$$

On a d'ailleurs l'identité suivante

$$\frac{\overrightarrow{MP}}{\overline{MP}^3} = -\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overline{PQ}^3} + \frac{\vec{v}}{\overline{MP}^3} \quad \text{avec} \quad \vec{v} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ}\left(\frac{\overline{MP}}{\overline{PQ}}\right)^3.$$

En vertu de la relation ci-dessus

$$\vec{v} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3\lambda}{2}\left(1 + \lambda\theta\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\right)^{1/2}\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\overrightarrow{PQ}.$$

Cela établi, calculons

$$\begin{aligned}
I_h &= \iint_{\sigma_h} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}\psi_M d\sigma_M = \iint_{\sigma_h}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}(\psi_M - \psi_Q)d\sigma_M \\
&= -\iint_{\sigma_h}\frac{(\overrightarrow{PQ}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{PQ}^3}(\psi_M - \psi_Q)d\sigma_M + \iint_{\sigma_h}\frac{(\overrightarrow{MQ}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}(\psi_M - \psi_Q)d\sigma_M \\
&+ \frac{3\lambda}{2}\iint_{\sigma_h}\left(1 + \lambda\theta\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\right)^{1/2}\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\cdot\frac{(\overrightarrow{PQ}\cdot\bar{\gamma})(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3}(\psi_M - \psi_Q)d\sigma_M \\
&= i_h + i_h' + i_h''.
\end{aligned}$$

---

[1] Cette précaution n'est pas essentielle. Il suffit de remarquer que $\frac{MQ}{PQ}$ est toujours borné, quand on se donne σ_0.

La première de ces intégrales est nulle par hypothèse, pouvant être écrite sous la forme:

$$i_h = \frac{(\overrightarrow{PQ}\cdot\gamma)}{\overline{PQ}^3} \iint_{\sigma_h} (n_M\gamma)(\psi_M - \psi_Q) d\sigma_M .$$

D'autre part

$$|i_h'| \leq \iint_{\sigma_h} |(\overrightarrow{MQ}\cdot\gamma)(n_M\gamma)| \left| \frac{\psi_M - \psi_Q}{\overline{MP}^3} \right| d\sigma_M < 144\sqrt{3}\varepsilon l_h \iint_{\sigma_h} d\sigma_M < 864\sqrt{3}\varepsilon\omega_h$$

en désignant par ω_h le volume du cube et par l_h son côté; en effet $\overline{MP} \geq \rho$ et dans ω_h, $|\psi_M - \psi_Q| < \varepsilon\rho^3$. En plus, $MQ \leq$ diamètre de $\omega_h = l_h\sqrt{3}$.

De même

$$|i_h''| < 3\lambda \iint_{\sigma_h} MQ \left| \left(\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overline{PQ}} \gamma \right) \right| \left| \frac{\psi_M - \psi_Q}{\overline{MP}^3} \right| d\sigma_M < 144\varepsilon\lambda\sqrt{3} \iint_{\sigma_h} d\sigma_M$$

$$< 6\lambda \cdot 144\sqrt{3}\varepsilon\omega_h$$

car

$$\left| 1 + \lambda\theta \frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}} \right| < 1 + 3 = 4.$$

Il s'ensuit que

$$|I_h| < 576\sqrt{3}\varepsilon \cdot 8\omega_h .$$

Le même raisonnement appliqué aux portions écornées donnera facilement

$$|L_k| < 576\sqrt{3}(8\omega_k + S_k l_k)\varepsilon$$

S_k étant l'aire de la portion de $\Sigma + \sigma_0$ qui traverse le cube ω_k.

En ajoutant ces inégalités, on voit que:

$$|\Psi_P - 4\pi\psi_P| < 576\sqrt{3}(8\Omega + lS)\varepsilon$$

l étant une limite supérieure des l_k et S désignant l'aire de $\Sigma + \sigma_0$.

Or, le premier membre étant une constante indépendante du nombre ε et de la division faite, tandis que le second membre, par le choix convenable de ε, peut être rendu aussi petit que l'on veut, il en résulte qu'on a rigoureusement

$$\Psi_P = 4\pi\psi_P$$

et par conséquent

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)(n_M\gamma)}{\overline{MP}^3} \psi_M d\sigma_M .$$

Or, cela exprime d'une part que les fonctions ψ_i sont analytiques au point P, et d'autre part par l'application de l'équation (31) que $D\psi = 0$, donc que le demivecteur ψ est une intégrale de ce système.

9. Sur le système qui s'introduit dans la détermination des vitesses en fonction des tourbillons. — La détermination des vitesses en fonction des tourbillons conduit au système bien connu

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\xi \quad \text{etc.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

avec la supposition

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

qui restreint la généralité des données.

Nous nous proposons de remplacer cette condition par une autre plus générale de la forme:

(32) $$\iint_\sigma (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) d\sigma = 0$$

pour toute σ tracée dans le milieu tourbillonnaire, en supposant toutefois que les ξ, η, ζ soient continus et qu'ils satisfassent à des conditions de Hölder telles que:

$$|\xi(P) - \xi(P')| < k\overline{PP'}^\alpha \qquad (0 < \alpha \leq 1).$$

Il n'est pas difficile de construire des exemples qui mettent en évidence le fait qu'une condition intégrale de la forme (92) est plus large que celle qui exprime que la divergence est nulle.

En effet, soient a, b, c, trois fonctions bornées et intégrables dans un domaine V.

Posons

$$A = \iiint_\Omega \frac{a'}{r} d\omega; \quad B = \iiint_\Omega \frac{b'}{r} d\omega; \quad C = \iiint_\Omega \frac{c'}{r} d\omega$$

$a' = a(x', y', z')$, le point x', y', z' décrivant un domaine Ω intérieur à V et r désignant le rayon vecteur

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

On sait que les potentiels A, B, C, sont continus dans Ω et qu'ils y admettent des dérivées partielles du premier ordre mais que les dérivées secondes n'existent pas sans conditions supplémentaires.

On a pour toute surface s s'appuyant sur un contour γ la formule de STOKES, donc pour toute surface fermée

$$\iint_\sigma (\alpha P + \beta Q + \gamma R) d\sigma = 0$$

avec

$$P = \iiint_\Omega \left(c' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - b' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\omega \text{ etc.}$$

mais les fonctions P n'admettent pas de dérivées partielles et, par conséquent, la divergence ne peut pas être construite.

Cela étant, abordons le problème relatif aux tourbillons, en supposant que la paroi est une surface régulière telle que le problème de NEUMANN soit possible, c'est-à-dire:

1.° En tout point de Σ il existe un plan tangent déterminé.

2.° Autour de chaque point de Σ on peut décrire une sphère de rayon asez petit mais déterminé, de telle façon qu'une parallèle à la normale à Σ puisse rencontrer la surface à l'intérieur de la sphère en un seul point.

3.° L'angle aigu θ que font les normales à Σ en deux points satisfait à la condition

$$\theta < a r_0$$

$a =$ indépendant des deux points, $r_0 =$ distance des deux points. Σ peut être animée, à la rigueur, d'un mouvement connu.

La condition à la paroi est de la forme:

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = f$$

avec

$$\iint_\Sigma f d\sigma = 0.$$

Posons

$$P = \frac{1}{2\pi} \iiint_\Omega \frac{\xi'}{r} d\omega ; \quad Q = \frac{1}{2\pi} \iiint_\Omega \frac{\eta'}{r} d\omega ; \quad R = \frac{1}{2\pi} \iiint_\Omega \frac{\zeta'}{r} d\omega.$$

Nous montrerons qu'on a:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \iint_\Sigma \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta}{r} d\omega. \tag{33}$$

En effet, traçons dans Ω une surface fermée σ limitant un domaine ω.

On sait que $P, Q, R,$ admettent des dérivées partielles des deux premiers ordres et qu'on a

$$\Delta P = -2\xi \text{ etc.}$$

si, bien entendu, on suppose l'existence de la condition de HÖLDER imposée.

Entourons σ de deux autres surfaces assez voisines σ_1 et σ_2 respectivement intérieure et extérieure, désignons par ω_1, ω_2 et ω_3, les domaines: intérieur à σ_1, compris entre σ_2 et Σ et compris entre σ_1 et σ_2.

Calculons

$$M = \iint_\sigma (\alpha P + \beta Q + \gamma R) d\sigma = \iiint_\omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) d\omega.$$

On aura:

$$M = \frac{1}{2\pi} \iint_\sigma \left[\alpha \iiint_\Omega \frac{\xi'}{r} d\omega + \beta \iiint_\Omega \frac{\eta'}{r} d\omega + \gamma \iiint_\Omega \frac{\zeta'}{r} d\omega\right] d\sigma.$$

Dans les domaines ω_1 et ω_2, on peut intervertir l'ordre d'intégration, ce qui va donner successivement pour les contributions de ces domaines

$$M_1 = \frac{1}{2\pi} \iiint_{\omega_1} \left[\xi' \iint_\sigma \frac{\alpha}{r} d\sigma + \eta' \iint_\sigma \frac{\beta}{r} d\sigma + \zeta' \iint_\sigma \frac{\gamma}{r} d\sigma\right] d\omega.$$

Or

$$\iint_\sigma \frac{\alpha}{r} d\sigma = \iiint_\omega \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} d\sigma$$

malgré la présence du pôle $r = 0$ (1).

Donc

$$M_1 = \iiint_{\omega_1} \left(\xi' \frac{\partial \lambda}{\partial x'} + \eta' \frac{\partial \lambda}{\partial y'} + \zeta' \frac{\partial \lambda}{\partial z'}\right) d\omega$$

si l'on pose

$$\lambda(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iiint_\omega \frac{d\omega}{r}.$$

Maintenant, si l'on fait appel de nouveau à la dérivée extérieure de M. CARTAN, la forme

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$$

a, d'après l'hypothèse faite, la dérivée extérieure nulle. D'autre part la fonction λ admet des dérivées partielles continues.

Il s'ensuit que la règle de dérivabilité d'un produit s'y applique.

Il vient donc:

$$M_1 = \iint_{\sigma_1} \lambda(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) d\sigma = \iiint_{\omega_1} \left(\xi' \frac{\partial \lambda}{\partial x'} + \eta' \frac{\partial \lambda}{\partial y'} + \zeta' \frac{\partial \lambda}{\partial z'}\right) d\omega.$$

(1) GOURSAT, tome III, p. 272.

Un calcul analogue relatif à M_2, va donner

$$M_2 = \iint\limits_{\Sigma} \lambda(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)d\sigma - \iint\limits_{\sigma_2} \lambda(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)d\sigma.$$

Enfin remarquons que la contribution du domaine ω_3, peut être négligée par le choix convenable des deux surfaces σ_1 et σ_2.

En même temps, puisque λ est continue, les intégrales relatives à σ_1 et σ_2 diffèrent par une quantité qui tend vers zéro lorsque celles-ci tendent vers σ; elles se détruisent donc mutuellement, de façon qu'on aura rigoureusement:

$$M = \iint\limits_{\Sigma} \lambda(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)d\sigma = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Sigma}(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)d\sigma \iiint\limits_{\omega} \frac{d\omega}{r}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{\omega} d\omega \iint\limits_{\Sigma} \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta}{r} d\sigma.$$

Par conséquent

$$\iiint\limits_{\omega}\left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta}{r} d\sigma\right]d\omega = 0$$

quel que soit ω, d'où le résultat annoncé.

Posons

(34) $$H(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta}{r} d\sigma$$

H est un potentiel de simple couche, donc une fonction harmonique dans tout l'espace (Σ exclue).

Posons encore:

$$u_1 = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad v_1 = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \quad w_1 = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}.$$

On aura facilement

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial H}{\partial x} - \Delta P = \frac{\partial H}{\partial x} + 2\xi.$$

Or, la fonction H étant harmonique, div (grad H) $= 0$, ce qui permettra, d'après les propriétés classiques, d'en mettre le gradient sous la forme d'un tourbillon, par les formules $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial z}$, en prenant par exemple

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial H}{\partial z'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right)d\omega \ldots \text{ etc.}$$

Il s'ensuit que:

$$\frac{\partial(w_1 - w_0)}{\partial y} - \frac{\partial(v_1 - v_0)}{\partial z} = 2\xi \text{ etc.,}$$

$$\frac{\partial(u_1 - u_0)}{\partial x} + \frac{\partial(v_1 - v_0)}{\partial y} + \frac{\partial(w_1 - w_0)}{\partial z} = 0.$$

Retranchons ces relations du système proposé, en posant

$$u + u_0 - u_1 = U, \quad v + v_0 - v_1 = V, \quad w + w_0 - w_1 = W.$$

Il viendra

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \text{etc.} \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Posons encore

$$U = \frac{\partial\theta}{\partial x}; \quad V = \frac{\partial\theta}{\partial y}; \quad W = \frac{\partial\theta}{\partial z}.$$

La dernière équation du système devient

$$\Delta\theta = 0.$$

Or, on a:

$$\alpha U + \beta V + \gamma W = \frac{d\theta}{dn} = f + (\alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0) - (\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1).$$

Ce qui ramène le problème à un problème de NEUMANN relatif à la fonction θ (1).

La condition de possibilité est remplie puisqu'elle se réduit à

$$\iint_\Sigma f d\sigma = 0.$$

On en déduit rapidement les valeurs de u, v, w

(35) $$u = \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{1}{2\pi}\iiint_\Omega \left[\zeta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'} - \eta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right] d\omega - \frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \left[\frac{\partial H}{\partial z'}\cdot\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\cdot\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right] d\omega.$$

10. Intégration du système $D\psi = 0$. — Supposons qu'on connaisse sur Σ les valeurs de ψ_1 et une relation de la forme

$$\alpha\psi_2 + \beta\psi_3 + \gamma\psi_4 = f$$

avec

$$\iint_\Sigma f d\sigma = 0.$$

(1) La réduction du problème des tourbillons à un problème de NEUMANN a été réalisée pour la première fois par STEKLOFF.

Récemment, M. G. BOULIGAND a envisagé le même problème à un point de vue global, ce qui permet de considérer des surfaces Σ extrêmement générales.

Intégrer le système revient à traiter le problème des tourbillons en supposant

$$2\xi = -\frac{\partial\psi_1}{\partial x}; \quad 2\eta = -\frac{\partial\psi_1}{\partial y}; \quad 2\zeta = -\frac{\partial\psi_1}{\partial z}$$

car la connaissance des valeurs de ψ_1, sur Σ détermine directement cette fonction qui — on l'a vu — doit être harmonique. L'intégrale sera de la forme (**34**), H étant ici

$$H = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{1}{r}\cdot\frac{d\psi_1}{dn}\,d\sigma.$$

Cela suppose bien entendu l'existence et la continuité de $\frac{d\psi_1}{dn}$.

Or la surface Σ a été choisie telle qu'un potentiel de double couche admette des dérivées normales continues, ou bien que ψ_1 obtenu par un problème de Dirichlet, en admette aussi [1].

11. Etude d'un demivecteur. — Soient Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4 quatre fonctions bornées et intégrables dans Ω; définissons le demivecteur χ par la formule:

$$\chi_P = \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}\,\Psi_M d\omega_M. \tag{36}$$

Les composantes de χ, étant des combinaisons linéaires des dérivées du premier ordre de divers potentiels newtoniens, seront des fonctions continues.

En plus, on peut montrer, en vertu de certaines inégalités de Korn [2] que les χ_i satisfont à des conditions de Hölder. Traçons dans Ω une surface régulière σ, limitant un domaine ω.

Calculons

$$I = \iint_{\sigma}(n_P\gamma)\chi_P d\sigma_P.$$

A cet effet, répétons le raisonnement fait dans le cas du plan, en entourant σ de deux autres surfaces σ_1 et σ_2, limitant les domaines ω_1, ω_2, ω_3, dont il a été question à différentes reprises.

Dans les domaines ω_1 et ω_2, la fonctiou $\frac{1}{\overline{MP}^3}$ restant toujours bornée, on

(1) Consulter à ce sujet le mémoire de Stekloff (« Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », t. II).

(2) Voir par exemple H. Villat, *Théorie des tourbillons*, p. 242.

pourra faire l'interversion d'ordre d'intégration. On aura

$$\iint_{\sigma}(n_P\gamma)d\sigma_P\iiint_{\omega_1}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\,\Psi_M d\omega_M=\iiint_{\omega_1}\left[\iint_{\sigma}\frac{(n_P\gamma)(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\,d\sigma_P\right]\Psi_M d\omega_M$$
$$=-4\pi e\iiint_{\omega_1}\Psi_M d\omega_M,$$

en vertu des identités (28).

De même

$$\iint_{\sigma}(n_P\gamma)d\sigma_P\iiint_{\omega_2}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\,\Psi_M d\omega_M=\iiint_{\omega_2}\left[\iint_{\sigma}\frac{(n_P\gamma)(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\,d\sigma_P\right]\Psi_M d\omega_M=0.$$

Quant à la contribution de la portion comprise entre σ_1 et σ_2 elle tend vers zéro, lorsque ces deux surfaces tendent vers σ.

Un raisonnement facile conduira à la relation

$$\iint_{\sigma}(u_P\gamma)\chi_P d\sigma_P+\iiint_{\omega}e\Psi_M d\omega_M=0 \tag{37}$$

pour toute σ.

Il est bon de remarquer l'analogie de ce résultat avec celui obtenu dans le cas du plan.

La méthode que nous allons suivre pour traiter les problèmes à trois dimensions, aura aussi beaucoup de caractères communs avec celle que nous avons exposée dans la première partie.

12. Intégration d'une équation fonctionnelle. — Supposons qu'on connaisse dans Ω les composantes bornées et intégrables d'un demivecteur Ψ.

Nous nous proposons de déterminer le demivecteur continu ψ tel que

$$\iint_{\sigma}(n_P\gamma)\psi_P d\sigma_P+\iiint_{\omega}e\Psi_M d\omega_M=0 \tag{38}$$

en supposant en plus que sur Σ, on connaisse les valeurs de ψ_1, et qu'on ait

$$\alpha\psi_2+\beta\psi_3+\gamma\psi_4=f.$$

A cet effet, retranchons l'identité (36) de l'équation (37). On aura:

$$\iint_{\sigma}(n_P\gamma)[\psi_P-\chi_P]d\sigma_P=0.$$

Or, la fonction $\varphi_P=\psi_P-\chi_P$ est continue. En vertu du théorème de Morera que nous avons établi plus haut, on aura par conséquent

$$D\varphi = 0$$

le problème proposé est donc ramené à l'intégration de ce système.

Remarquons que χ_P étant continu dans tout l'espace on le connait parfaitement sur Σ.

On aura donc

$$\varphi_1 = \psi_1 - \chi_1 = \text{connu sur } \Sigma$$

et

$$\alpha\varphi_2 + \beta\varphi_3 + \gamma\varphi_4 = f - (\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4) = \text{connu sur } \Sigma.$$

Pour que le problème soit possible, il faudra que

$$\iint_\Sigma f d\sigma = \iint_\Sigma (\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4) = -\iiint_\Omega \Psi_1 d\omega.$$

Dans ces conditions, on a une solution unique, obtenue en écrivant

$$\psi_P = \varphi_P + \frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^3}\Psi_M d\omega_M. \tag{39}$$

L'analogie entre cette formule et celle que nous avons établie dans la première partie, ainsi que le parallélisme des deux méthodes montre que le symbolisme employé est utile et naturel.

Nous allons appliquer maintenant toutes ces considérations à deux problèmes relatifs: le premier à un corps élastique, le second aux petits mouvements permanents d'un fluide visqueux.

13. Un problème d'équilibre relatif aux corps élastiques. — Comme application des principes et méthodes précédents, nous allons traiter deux exemples tirés de la pratique.

Commençons par le problème suivant qui se rattache à l'elasticitè:

Dans un milieu élastique Ω limité par une surface (régulière au sens du problème de Neumann) on connait la distribution des forces extérieures X, Y, Z *supposées bornées et intégrables.*

Posons

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = -\psi_2; \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\psi_3; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\psi_4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta; \quad (1+\xi)\theta = \psi_1.$$

Supposons connues sur Σ deux relation telles que

$$(40) \qquad \begin{cases} \alpha\psi_2 + \beta\psi_3 + \gamma\psi_4 = f \\ \alpha u + \beta v + \gamma w = g \end{cases}$$

ainsi que les valeurs de la fonction θ [1].

Cela posé, nous allons déterminer la distribution des déplacements (et des tensions) qu'on suppose continus et à dérivées partielles du premier ordre continues.

Revenons aux équations générales d'équilibre d'un milieu continu. Posons, pour être dans le cas d'un corps élastique qui suit la loi de Hooke

$$\begin{cases} N_1 = -\lambda\theta - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \dots \\ T_1 = -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\dots \quad \xi = 1 + \frac{\lambda}{\mu}; \quad -\frac{\rho}{\mu} = \nu. \end{cases}$$

On aura:

$$\iint_\sigma \left[\alpha\left(\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \beta\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \gamma\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] d\sigma = \iiint_\omega \rho X d\omega$$

ou bien

$$\iint_\sigma \left[\alpha(1+\xi)\theta - \beta\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] d\sigma$$

$$-2\iint_\sigma \left(\alpha\frac{\partial v}{\partial y} - \beta\frac{\partial v}{\partial x}\right) d\sigma - 2\iint_\sigma \left(\alpha\frac{\partial w}{\partial z} - \beta\frac{\partial w}{\partial x}\right) d\sigma = -\iiint_\omega \nu X d\omega.$$

Or, les intégrales telles que

$$\iint_\sigma \left(\alpha\frac{\partial v}{\partial y} - \beta\frac{\partial v}{\partial x}\right) d\sigma = 0$$

par l'application de la formules de Stokes à un contour parcouru deux fois dans des sens opposés.

Les équations ci-dessus deviendront par la suite:

$$(41) \qquad \begin{aligned} &\iint_\sigma (\alpha\psi_1 + \beta\psi_4 - \gamma\psi_3) d\sigma = -\iiint_\omega \nu X d\omega \\ &\iint_\sigma (-\alpha\psi_4 + \beta\psi_1 + \gamma\psi_2) d\sigma = -\iiint_\omega \nu Y d\omega \\ &\iint_\sigma (\alpha\psi_3 - \beta\psi_2 + \gamma\psi_1) d\sigma = -\iiint_\omega \nu Z d\omega \end{aligned}$$

[1] α, β, γ étant les cosinus de la normale intérieure.

auxquelles il faut adjoindre la condition

$$\iint_\sigma (\alpha\psi_2 + \beta\psi_3 + \gamma\psi_4)\,d\sigma = 0 \tag{42}$$

qui exprime le fait que le système

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = -\psi_2 \text{ etc.}$$

est compatible et qui remplace la condition classique, comme nous l'avons fait voir par l'emploi de la dérivée extérieure, qui nous a permis de nous affranchir de l'existence des dérivées secondes des fonctions u, v, w.

Or, le système d'équations fonctionnelles (40) et (41) peut s'écrire sous une forme condensée à l'aide des matrices introduites.

On aura:

$$\iint_\sigma (n_P\gamma)\psi_P\,d\sigma_P + \iiint_\omega e\Psi_M\,d\omega_M = 0$$

en posant ψ pour le demivecteur ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 et Ψ pour le demivecteur 0, νX, νY, νZ.

Or, l'intégration de cette équation est immédiate.

On en connaît en effet l'intégrale particulière

$$\chi_P = \frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^3}\,\Psi_M\,d\omega_M.$$

Cela réduit la recherche du demivecteur ψ à celle du demivecteur $\varphi = \psi - \chi$, satisfaisant à la relation

$$\iint_\sigma (n_P\gamma)\varphi_P\,d\sigma_P = 0$$

et par conséquent

$$D\varphi = 0.$$

On aura comme conditions aux limites

$$\varphi_1 = \psi_1 - \chi_1 = \text{connu}$$
$$\alpha\varphi_2 + \beta\varphi_3 + \gamma\varphi_4 = f - (\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4) = \text{connu}.$$

Cela déterminera d'abord φ_1, puis par un problème de NEUMANN, on aura les autres composantes.

La condition de possibilité se réduit ici à:

$$\iint_\Sigma f\,d\sigma = 0$$

car on a pour toute σ

$$\iint_\sigma (\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4) d\sigma = 0$$

et par continuité (car χ est continu dans tout l'espace)

$$\iint_\Sigma (\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4) d\sigma = 0.$$

Les fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 satisfont à des conditions de HÖLDER.

Obtenir les u, v, w, revient maintenant à intégrer le système

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = -\psi_2; \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\psi_3; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\psi_4;$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\psi_1}{1+\xi}$$

dans la supposition $\xi \neq -1$.

C'est un système qui ne diffère pas essentiellement du système des tourbillons dont nous nous sommes occupé. C'est le même problème, dans un fluide compressible, dont on connaît la dilatation en chaque point.

La condition (41) montre qu'il est intégrable, compte tenu toutefois des conditions de HÖLDER qui assurent l'existence des dérivées.

On aura ici:

$$H = -\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{\alpha\psi_2 + \beta\psi_3 + \gamma\psi_4}{r} d\sigma.$$

Σ étant convenablement choisie, H aura des dérivées normales

$$u_0 = -\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \left(\frac{\partial H}{\partial z'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right) d\omega \text{ etc.}$$

$$P = -\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\psi_2'}{r} d\omega; \quad Q = \frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\psi_3'}{r} d\omega; \quad R = -\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\psi_4'}{r} d\omega;$$

$$u_1 = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \text{ etc.}$$

et en posant

$$U = u + u_0 - u_1 \text{ etc.}$$

et ensuite

$$U = \frac{\partial \Theta}{\partial x} \text{ etc.}$$

la dernière équation donnera

$$\Delta\Theta = \frac{\psi_1}{1+\xi}.$$

Posons

$$\Theta_0 = -\frac{1}{4\pi(1+\xi)}\iiint_\Omega \frac{\psi_1'}{r}\,d\omega; \quad \Delta\Theta_0 = \frac{\psi_1}{1+\xi}.$$

En posant ensuite

$$\Phi = \Theta - \Theta_0.$$

On aura:

$$\Delta\Phi = 0$$

avec

$$\frac{d\Phi}{dn} = g + (\alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0) - (\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1) - \frac{d\Theta_0}{dn}.$$

La condition de possibilité se reduit ici à:

$$\iint_\Sigma g\,d\sigma + \frac{1}{1+\xi}\iiint_\Omega \psi_1\,d\omega = 0.$$

Nous n'insisterons plus sur le cas $\xi = -1$, ainsi que sur les différences qui existent entre la nature du problème posé et celui qu'on se propose d'habitude sur le même système.

14. Les petits mouvements stationnaires d'un fluide visqueux. — Occupons-nous enfin d'un fluide visqueux en mouvement permanent et lent au voisinage d'une position d'équilibre.

Supposons-le limité par une surface Σ *régulière comme ci-dessus et soumis à l'action d'un champ de forces* X, Y, Z *bornées et intégrables.*

Posons:

(43) $$\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \psi_2; \quad \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \psi_3; \quad \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \psi_4$$

et

$$p = \psi_1.$$

On aura, le fluide étant incompressible:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Supposons données sur Σ *(qui peut être en mouvement).*

1°) *la pression* p,

une relation exprimant la vitesse normale,

2°) $\alpha u + \beta v + \gamma w = g$

une relation exprimant le tourbillon normal,

3°) $\alpha\psi_2 + \beta\psi_3 + \gamma\psi_4 = f.$

Reportons-nous aux équations générales.

On aura:

$$N_1 = p - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \dots$$

$$T_1 = -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \dots$$

D'où:

$$\iint_\sigma \left[\alpha\left(p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \beta\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \gamma\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] d\sigma = -\iiint_\omega \rho X d\omega.$$

Ou bien

$$\iint_\sigma \left[\alpha p + \beta\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \gamma\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] d\sigma - 2\mu \iint_\sigma \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\sigma$$

$$+ 2\mu \iint_\sigma \left(\alpha\frac{\partial v}{\partial y} - \beta\frac{\partial v}{\partial x}\right) d\sigma + 2\mu \iint_\sigma \left(\alpha\frac{\partial w}{\partial z} - \beta\frac{\partial w}{\partial x}\right) d\sigma = -\iiint_\omega \rho X d\omega.$$

En remarquant les termes qui disparaissent et en passant aux notations proposées, on aura:

$$\iint_\sigma (\alpha\psi_1 + \beta\psi_4 - \gamma\psi_3) d\sigma + \iiint_\omega \rho X d\omega = 0$$

(44)
$$\iint_\sigma (-\alpha\psi_4 + \beta\psi_1 + \gamma\psi_2) d\sigma + \iiint_\omega \rho Y d\omega = 0$$

$$\iint_\sigma (\alpha\psi_3 - \beta\psi_2 + \gamma\psi_1) d\sigma + \iiint_\omega \rho Z d\omega = 0$$

auxquelles nous adjoindrons la condition de compatibilité du système (42), savoir

(45)
$$\iint_\sigma (\alpha\psi_2 + \beta\psi_3 + \gamma\psi_4) d\sigma = 0$$

qui remplace la condition classique de la divergence nulle et qui la généralise, au sens qu'elle permet de renoncer à considérer les dérivées partielles des fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 comme nécessaires pour la possibité du problème; cela fait en même temps que l'existence des dérivées secondes des u, v, w ne soit plus exigible et réduit le problème qui portait sur des équations du deuxième ordre à un problème concernant seulement les dérivées premières.

L'intégration du système d'équations fonctionnelles (43), (44) est immédiate si on l'écrit sous la forme condensée

$$\iint_\sigma (n_P\gamma)\psi_P d\sigma_P + \iiint_\omega e\Psi_M d\omega_M = 0$$

où ψ désigne le demivecteur ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 et Ψ le demivecteur $0, \rho X, \rho Y, \rho Z$.

On a une intégrale particulière par la formule:

$$\chi_P = \frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^3}\,\Psi_M d\omega_M$$

ce qui réduit le problème à l'obtention d'un demivecteur $\varphi = \psi - \chi$, et vérifiant le système

(46) $$D\varphi = 0.$$

Les conditions aux limites se transforment aisément en les suivantes:

$$\varphi_1 = p - \chi_1 = \text{connu}$$
$$\alpha\varphi_2 + \beta\varphi_3 + \gamma\varphi_4 = f - (\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4) = \text{connu}.$$

Cela fait connaître d'abord φ_1, et puis par un problème de NEUMANN. les autres composantes.

La condition de possibilité se réduit à

$$\iint_\Sigma f d\sigma = 0$$

car on a pour toute surface σ

$$\iint_\sigma (\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4) d\sigma = 0$$

et par continuité, compte tenu du fait que χ est continu dans tout le plan

$$\iint_\Sigma (\alpha\chi_2 + \beta\chi_3 + \gamma\chi_4) d\sigma = 0$$

Les fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, satisfont à des conditions de HÖLDER.

Déterminer u, v, w, revient maintenant à l'intégration du système

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\psi_2}{\mu}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\psi_3}{\mu}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\psi_4}{\mu};$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

avec $\mu \neq 0$.

Ce système est celui qu'on rencontre dans la théorie des tourbillons.

Il est compatible, car on a:

$$\iint_\sigma (\alpha\psi_2 + \beta\psi_3 + \gamma\psi_4) d\sigma = 0$$

les fonctions ψ_2, ψ_3, ψ_4 étant dans les conditions du problème que nous avons résolu.

On aura ici:

$$H = \frac{1}{4\mu\pi}\iint_{\Sigma} \frac{\alpha\psi_2 + \beta\psi_3 + \gamma\psi_4}{r}\, d\sigma$$

$$u_{,} = \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial H}{\partial z'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right) d\omega \ldots \text{ etc.}$$

$$P = \frac{1}{4\mu\pi}\iiint_{\Omega} \frac{\psi_2'}{r}\, d\omega \ldots \text{ etc.}$$

$$u_1 = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \text{ etc.} \ldots$$

Posons

$$U = u + u_{,} - u_1 \text{ etc.} \ldots$$

et ensuite

$$U = \frac{\partial \Theta}{\partial x} \text{ etc.} \ldots$$

la dernière équation du système se réduit à

$$\Delta\Theta = 0$$

avec

$$\frac{d\Theta}{dn} = g + (\alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0) - (\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1).$$

La condition de possibilité du problème de Neumann revient à:

$$\iint_{\Sigma} g\, d\sigma = 0.$$

Le cas où $\mu = 0$, conduit à une dégénérescence du problème qui n'admet plus une intégrale unique (s'il en admet une).

15. *En conclusion*, le but de ce mémoire a été de montrer comment on peut se poser des problèmes plus généraux sur les milieux continus, à l'aide de certains algorithmes convenables.

Cela permet de suivre une voie bien naturelle et très simple où les restrictions s'introduisent d'elles-mêmes sans changer la nature du problème qui doit rester global comme le phénomène qu'il exprime.

Il est bon de remarquer que la notion fondamentale a été celle de dérivée extérieure, dont on a fait un large usage toutes les fois que l'emploi de la formule de Green était dicté par les circonstances.

Ernest Julius Wilczynski (in Memoriam).

Nota del Dr. Prof. ERNEST P. LANE (*).

Nato ad Amburgo nel 1876, il prof. WILCZYNSKI si è spento, dopo lunga malattia, nel Settembre 1932 a Denver (Colorado).

Lascia la moglie contessa Ines Macola e tre figlie. Nella sua giovinezza studiò e si laureò (1897) a Berlino; ritornò più tardi in Europa (1903-05), studiando a Cambridge, Gottinga, Parigi e Roma. Fu assistente e poi Professore nelle Università di California e dell'Illinois. Ebbe negli Stati Uniti parecchie onorificenze scientifiche, vinse nel 1909 un premio della R. Accademia delle Scienze del Belgio, e nel 1919 divenne membro della National Academy of Sciences.

Egli cominciò la sua carriera come astronomo matematico, dedicandosi specialmente allo studio della rotazione solare. Passò quindi allo studio delle equazioni differenziali, da cui fu tratto all' interpretazione geometrica di alcune loro proprietà. Questi studii lo hanno naturalmente portato alla geometria proiettivo-differenziale, di cui egli si può ben a diritto considerare il fondatore, nonostante che prima di lui anche altri se ne siano occupati (specialmente l'HALPHEN per la teoria delle curve). Ma WILCZYNSKI fu il primo che diede una trattazione sistematica per la teoria delle curve, delle superficie rigate, e delle superficie più generali. Il suo metodo consiste nell'associare all'ente geometrico studiato un certo sistema completamente integrabile di equazioni differenziali lineari. Di questo si studiano sia le condizioni di integrabilità, sia gli invarianti fondamentali, cioè quelle espressioni che non variano nel passare da un sistema ad un altro che corrisponda al medesimo ente geometrico.

Notevoli sono gli studii così compiuti per le curve, le congruenze, e le trasformazioni *flecnodali* di una rigata, i corrispondenti *reguli* osculatori ed asintotici lungo una generatrice, ecc. Importanti sono le ricerche della sua Memoria premiata relative alle congruenze di rette. Per le superficie generali

(*) Ringrazio il collega dell'Università di Chicago di avermi permesso di pubblicare qui un breve sunto della commemorazione da lui scritta; e sono dolente che lo spazio concessomi non me ne abbia permesso la pubblicazione integrale. GUIDO FUBINI sono stati di fondamentale importanza molti concetti da Lui introdotti nella scienza: la *axis congruence* e la *ray congruence* associate ad un sistema coniugato, la *directrix congruence* e la *canonical quadric.* A lui si devono gli studii di alcune classi di superficie specialmente notevoli, ed eleganti interpretazioni geometriche di alcuni fatti analitici, specialmente dei sistemi isotermi coniugati.

Negli ultimi anni della sua attività scientifica si dedicò alle funzioni di variabile complessa, e ne investigò alcune proprietà proiettivo-differenziali.

Oltre alle commemorazioni di LAZZARO FUCHS e di G. M. GREEN, così immaturamente rapito alla scienza, egli scrisse un saggio sulla poesia e sulla matematica, e un resoconto popolare sulla quarta dimensione.

Maestro indimenticabile, si occupò molto dei giovani, dirigendone con cura le ricerche relative alle dissertazioni dottorali, si occupò con amore di tutte le questioni riguardanti l'insegnamento della matematica e l'organizzazione dell'American Mathematical Society.

La sua morte ci fa rimpiangere la perdita di un uomo illustre che amava l'Italia, e la cui opera fu così stimata in Italia, dove Egli trovò tanti continuatori dell'opera sua.

INDICE DEL TOMO XI DELLA SERIE 4ª