

# ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

---

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

---

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE,  
H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

**R. MEHMKE**    UND    **C. RUNGE**  
IN STUTTGART    IN GÖTTINGEN

---

60. BAND.

MIT EINER TAFEL UND 145 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.  
1912.

**ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.**



## Inhalt.

	Seite
<b>Assur, L.</b> Die Methode der charakteristischen Kurven, als Beitrag zur graphischen Auswertung mehrfacher Integrale . . . . .	1
<b>Blaschke, Wilhelm.</b> Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. I. II.	61
— Berichtigung dazu . . . . .	203
<b>Blasius, H.</b> Stromfunktionen für die Strömung durch Turbinenschaufeln . .	354
<b>Darapsky, L.</b> Filtergeometrie . . . . .	170
<b>Deimler, W.</b> Zeichnungen zur Kuttaströmung . . . . .	373
<b>Federhofer, Karl.</b> Die Ermittlung des Einflusses von Temperaturänderungen bei einem elastischen, an den Enden eingespannten Bogenträger . . . .	285
<b>Fillunger, Paul.</b> Drei wichtige ebene Spannungszustände des keilförmigen Körpers . . . . .	275
<b>Majcen, G.</b> Zur Darstellung des Drehungsellipsoids in Parallelperspektive .	299
<b>Malmström, R.</b> Technische Anwendungen eines allgemeinen Satzes über erzwungene Schwingungen . . . . .	136
<b>Meißner, Ernst.</b> Drei Gipsmodelle von Flächen konstanter Breite . . . .	92
<b>Menges, Karl.</b> Drehende Schwingungen eines Hohlzylinders in einer zähen Flüssigkeit . . . . .	113
<b>Pfeiffer, F.</b> Experimente mit dem Prandtl'schen Kreiselapparat . . . . .	337
<b>Pöschl, Theodor.</b> Über die zwangsläufige Bewegung materieller Systeme in der Ebene. I. . . . .	144
<b>Röhrich, C.</b> Über den Einfluß der elastischen Kupplung auf den Ungleichförmigkeitsgrad. . . . .	225
<b>Schrutka, Lothar von.</b> Ein Mittel zur Vermeidung wiederholter Divisionen bei der Newton'schen Näherungsmethode . . . . .	294
<b>Stübler, E.</b> Geometrische Probleme bei der Verwendung von Schraubenflächen in der Technik . . . . .	244

---

### Kleinere Mitteilungen.

Aufruf der Vereinigung von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik	95
Bemerkung zu dem Aufsatz von H. Blasius „Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung“. Von <b>Karl Toepfer</b> . . . . .	397

## Bücherschau.

	Seite
E. Sommerfeld. Die Kristallgruppen nebst ihren Beziehungen zu den Raumgittern. Von <b>F. Haag</b> . . . . .	96
Guido Hauck. Lehrbuch der malerischen Perspektive mit Einschluß der Schattenkonstruktionen. Von <b>K. Doehle mann</b> . . . . .	96
O. H. P. Silber. Leitfaden der Projektionslehre und darstellenden Geometrie für technische Hochschulen usw. Von <b>K. Doehle mann</b> . . . . .	204
H. Andoyer. Nouvelles Tables trigonométriques fondamentales. Von <b>P. Werkmeister</b> . . . . .	399
— — — — —	
Neue Bücher . . . . .	98, 205, 308, 400
Eingelaufene Schriften . . . . .	102, 208, 311, 402
Abhandlungsregister 1909—1910. Von <b>Ernst Wölffing</b> . . . . .	106, 211, 318, 404

## Die Methode der charakteristischen Kurven, als Beitrag zur graphischen Auswertung mehrfacher Integrale.

Von L. ASSUR in St. Petersburg.

Mit 17 Figuren im Text und einer Tafel.

Die graphische Auswertung mehrfacher Integrale hat ihren Ursprung in der für den Techniker wichtigen Ermittlung der statischen, Trägheits- und Deviationsmomente. Die bis jetzt erschienenen Veröffentlichungen, behandeln die Frage entweder innerhalb dieses engen Rahmens, oder erweitern dessen Grenzen nur wenig, indem sie auf Momente höheren Grades, also auf Integrale von der Form

$$\iint x^p y^q dx dy,$$

welche auf die Fläche einer ebenen Figur bezogen gedacht werden, Rücksicht nehmen.

Die veröffentlichten Verfahren lassen sich in zwei verschiedene Klassen teilen. Zur ersten gehören die ganz allgemein bekannten Auswertungen der Trägheitsmomente nach Culmann und O. Mohr, deren Verwendung durch die Abhandlung von S. Wellisch<sup>1)</sup> ein neues Gebiet eröffnet wird. Es ist dies ein Näherungsverfahren, indem die Trägheitsmomente gewisser schmaler Streifen in bezug auf die eigene Schwerpunktsachse vernachlässigt werden. Zur zweiten Klasse<sup>2)</sup> gehören diejenigen, welche von der, das Integrationsgebiet bildenden Fläche andere, durch punktweise zu konstruierende Kurven begrenzte Flächen ableiten, deren Inhalte dem Werte der Integrale proportional sind. Diese letzteren Verfahren sind theoretisch genau und darauf gegründet, daß einerseits die Veränderlichen unter dem Integralzeichen getrennt sind, die eine Integration also ohne weiteres ausführbar ist, und daß andererseits der Ausdruck  $x^{p+1} \cdot y^q / a^{p+q}$ , wo  $a$  als konstante,

1) Zeitschr. des Österreich. Ing. und Architekten-Ver. 1905, S. 642.

2) Lewicki, Civilingenieur 1879, S. 527. — Nehls, Civilingenieur 1874, S. 85, 295 und 1875, S. 261. — d' Ocagne (und Collignon). Bull. de la Soc. math. de France 1884, p. 21.

## 2 Methode d. charakt. Kurven, als Beitrag z. graph. Auswertung mehrf. Integrale.

$x$  und  $y$  als veränderliche lineare Größen betrachtet werden, leicht graphisch zu konstruieren ist. Die den Konstruktionen zugrunde gelegten Linienzüge, mit Hilfe deren der genannte Ausdruck graphisch ermittelt wird, sind allerdings verschieden, doch kann uns dies in dem Zeitalter, wo der Rechenschieber ebenso rasch, und bei Darstellung sämtlicher Größen in übersichtlichen Tabellen, vielleicht bequemer zum Ziele führt, nebensächlich erscheinen.

Allgemeinere Fälle werden in der sehr reichhaltigen Schrift von Chr. Nehls allerdings besprochen<sup>1)</sup>, eine nähere Untersuchung derselben wird jedoch nicht vorgenommen. Hierdurch erscheint ein für die graphische Behandlung ebenfalls gut geeigneter Fall aus sämtlichen Betrachtungen ausgeschlossen. Die Untersuchung desselben führte mich auf die eigenartige Methode der charakteristischen Kurven, welche in der vorliegenden Abhandlung entwickelt wird. Ihr verhältnismäßig starker Umfang ist sowohl durch die Mannigfaltigkeit der durch diese Methode zur Verfügung gestellten Hilfsmittel, als auch dadurch bedingt, daß mir daran lag, verschiedene praktische Schwierigkeiten, die in besonderen Fällen entstehen und die Anwendung graphischer Methoden scheinbar unmöglich machen, aus dem Wege zu räumen, — eine Aufgabe, die von meinen Vorgängern ebenfalls übergangen worden ist. So wird es möglich, mit Hilfe gewisser reduzierter Kurven und des Planimeters das im Beispiel 5 gegebene Integral zu ermitteln, trotzdem innerhalb des Integrationsgebietes zwei Gerade liegen, für deren sämtliche Punkte, die unter dem Integralzeichen stehende Funktion unendlich groß wird.

### I. Grundlegende Beziehungen; die einfache Charakteristik.

Wir denken uns, es solle das Integral

$$(I) \quad S = \iint f(x, y) dx dy,$$

welches sich über ein gegebenes, reelles und endliches Integrationsgebiet erstreckt, ermittelt werden. Es wird hierbei nur der besondere Fall unseren Betrachtungen unterliegen, wo  $f(x, y)$  eine eindeutig gegebene homogene, algebraische Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades der Veränderlichen  $x, y$  ist, welche für reelle Werte der letzteren ebenfalls reelle Werte annimmt. Endlichkeit der Funktion wird überall vorausgesetzt, wo nicht der entgegengesetzte Fall einer besonderen Betrachtung unterzogen wird. Im Falle der Unstetigkeit der Funktion denken wir uns das Integrationsgebiet in mehrere Gebiete

1) Civilingenieur 1875, S. 206.

zerlegt, deren Anzahl jedoch endlich sein muß, innerhalb welcher die Funktion stetig bleibt.

Welchen Ursprunges dieses Integral auch sei, wir können immer  $x$  und  $y$  als rechtwinklige Cartesische Koordinaten betrachten. Es wird sodann in der geometrischen Deutung das Integrationsgebiet durch die Fläche einer ebenen Figur dargestellt, die von einer Kurve — im folgenden, immer als  $A$ -Kurve bezeichnet — begrenzt ist. Um auch diejenigen Fälle in unsere Betrachtungen direkt aufnehmen zu können, wo das Integral rein geometrischen Ursprungs ist, und unter Verwendung von schiefwinkligen Koordinatenachsen gewonnen wurde, haben wir dasselbe nur mit dem Sinus des Koordinatenwinkels  $\omega$  (Fig. 1) zu multiplizieren.

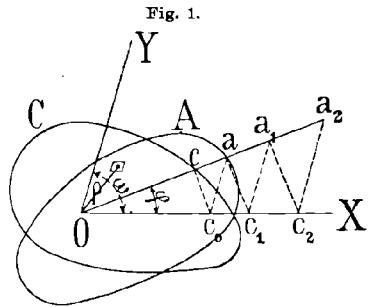


Fig. 1.

Bezeichnen wir den Fahrstrahl eines innerhalb des Integrationsgebietes liegenden Punktes mit  $\rho$ , den Polarwinkel mit  $\varphi$ , so geschieht bekanntlich der Übergang zu Polarkoordinaten durch Verwendung der Beziehungen

$$(1) \quad x = \rho \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin \omega}; \quad y = \rho \frac{\sin \varphi}{\sin \omega},$$

wobei der Ausdruck  $dx dy \sin \omega$  für das Flächenelement durch den entsprechenden  $\rho d\rho d\varphi$  zu ersetzen ist. Durch Einführung der Werte (1) erhalten wir, der Eigenschaften der Funktion  $f$  eingedenk:

$$(2) \quad f(x, y) = \rho^n \Phi,$$

worin  $\Phi$  eine Funktion der einzigen Veränderlichen  $\varphi$  ist. Wir schreiben also:

$$(I \text{ bis}) \quad S = \iint \Phi \rho^{n+1} d\rho d\varphi.$$

Nun sind die Veränderlichen getrennt und die Integration nach  $\rho$  kann ausgeführt werden. Wir denken uns vorläufig  $n + 2 > 0$ , und betrachten hierbei den Fall, daß der Koordinatenursprung innerhalb des Integrationsgebietes zu liegen kommt und die  $A$ -Kurve von jedem Fahrstrahl in einem einzigen Punkte geschnitten wird. Die übrigen Fälle lassen sich entweder durch bekannte Verfahren auf diesen zurückführen, oder es wird denselben eine besondere Betrachtung gewidmet. Werden die Werte der Fahrstrahlen der  $A$ -Kurve mit  $R$  bezeichnet, so sind die Integrationsgrenzen Null und  $R$ , und es ergibt sich

$$(3) \quad S = \frac{1}{n+2} \int R^{n+2} \Phi d\varphi.$$

4 Methode d. charakt. Kurven, als Beitrag z. graph. Auswertung mehrf. Integrale.

Die Werte von  $R$ , als Funktion der Veränderlichen  $\varphi$ , sind durch den Linienzug der  $A$ -Kurve bestimmt, welcher entweder von vornherein als gegeben erscheint, wenn die Aufgabe geometrischer Art ist, oder vorher, den analytischen Bedingungen entsprechend, konstruiert werden muß. Unsere Aufgabe soll nun sein, die Veränderliche  $\Phi$  durch eine oder mehrere neue zu ersetzen, deren Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$  ebenfalls durch Linienzüge, und zwar durch möglichst einfache gegeben ist. Dieses ist der leitende Grundgedanke der Methode.

Im vorliegenden Kapitel denken wir uns die Kurve

$$(4) \quad f(x, y) = a^n,$$

welche wir einfache Charakteristik oder  $C$ -Kurve nennen, aufzeichnet. In der Gleichung derselben ist  $a$  eine beliebige, vorläufig reelle und positive lineare konstante Größe, die man zweckmäßig so wählt, daß die  $A$ -Kurve von der  $C$ -Kurve in einer möglichst großen Anzahl von Punkten geschnitten wird. Bezeichnen wir die Fahrstrahlen der  $C$ -Kurve mit  $r$ , so lautet deren Gleichung in Polarkoordinaten

$$(5) \quad r^n \Phi = a^n.$$

Hieraus läßt sich der in (3) auftretende Wert der Funktion  $\Phi$  durch die Länge des unter dem Winkel  $\varphi$  gezogenen Fahrstrahles  $r$  der  $C$ -Kurve ausdrücken, und wir erhalten

$$(6, I) \quad S = \frac{a^n}{n+2} \int \frac{R^{n+2}}{r^n} d\varphi.$$

Die unter dem Integralzeichen stehenden  $R$  und  $r$  sind entsprechende Werte der unter dem Winkel  $\varphi$  gezogenen Fahrstrahlen der  $A$ - und der  $C$ -Kurve und somit graphisch gegeben.

Nun wird eine dritte Kurve konstruiert, welche als  $U$ -Kurve bezeichnet werden soll und deren Fahrstrahlen  $u$  aus der Beziehung

$$(7) \quad u^2 = \frac{R^{n+2}}{r^n}$$

ermittelt werden. Durch Substitution dieses Wertes in (6, I) erhalten wir

$$(8) \quad S = \frac{2a^n}{n+2} \int \frac{u^2 d\varphi}{2}.$$

Wir erkennen hierin den Ausdruck für die von der  $U$ -Kurve begrenzte Fläche bzw. für den Flächeninhalt eines durch zwei Fahrstrahlen aus derselben ausgeschnittenen Sektors. Diese zu planimetrierende Fläche bezeichnen wir mit  $F'$  und schreiben

$$(9) \quad S = \frac{2a^n}{n+2} F'.$$

Ist  $n$  eine ganze Zahl, so lassen sich die Fahrstrahlen der  $U$ -Kurve leicht konstruieren, andernfalls berechnen. Denken wir uns  $n$  als gerade Zahl, so ergibt sich

$$(10) \quad u = R \cdot \frac{R^{\frac{n}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}}.$$

Möge z. B.  $n = 4$  sein, so erhalten wir folgende Konstruktion (Fig. 1). Es seien  $Oc$  und  $Oa$  unter dem Winkel  $\varphi$  gezogene Fahrstrahlen der  $C$ - und  $A$ -Kurve. Ziehen wir nun durch  $c$  und  $a$  zwei parallele Gerade (Fig. 1), welche die  $X$ -Achse (oder auch eine beliebige andere durch den Koordinatenursprung gezogene Gerade) in den Punkten  $c_0$  und  $c_1$  schneiden, sodann  $c_1 a_1 \parallel c_0 a$ ,  $a_1 c_2 \parallel a c_1$  und  $c_2 a_2 \parallel c_0 a$ , so ist  $Oa_2$  der Fahrstrahl der  $U$ -Kurve, deren punktweise Konstruktion hierdurch gegeben ist.

Betrachten wir den Fall eines ungeraden  $n$ , so läßt sich  $u$  als geometrisches Mittel

$$(11) \quad u = \sqrt{p \cdot q}$$

aus zwei Größen  $p$  und  $q$  konstruieren, deren Werte etwa den Beziehungen

$$(12) \quad p = R \cdot \frac{R^{\frac{n-1}{2}}}{r^{\frac{n-1}{2}}} \quad \text{und} \quad q = p \cdot \frac{R}{r}$$

entnommen und in der soeben besprochenen Weise konstruiert werden.

Die bekannte Konstruktion des Ausdrucks (11) erscheint auf die Dauer recht mühsam. Deswegen hält Chr. Nehls<sup>1)</sup> die Verwendung von Polarkoordinaten bei der Ermittlung statischer Momente für weniger geeignet als diejenige von Cartesischen Koordinaten. Der Rechenschieber führt hier schon rascher zum Ziele als die graphische Konstruktion, doch vollständig wird dieser Übelstand erst durch Verwendung einer Konstruktion, die wir als indirekte Ermittlung des Flächeninhaltes der  $U$ -Kurve bezeichnen wollen, gehoben.

Dieses indirekte Verfahren beruht darauf, daß  $p$  und  $q$  als unter dem Polarwinkel  $\varphi$  zur  $X$ -Achse geneigte Fahrstrahlen konstruiert werden. Der geometrische Ort der Endpunkte der letzteren bildet zwei Kurven, welche entsprechend als  $p$ -Kurve und  $q$ -Kurve bezeichnet werden sollen. Wir stechen die Differenz  $(q - p)$  der Fahrstrahlen beider Kurven ab und konstruieren eine dritte Kurve, in folgendem immer als  $(q - p)$ -Kurve bezeichnet, indem wir diese Differenz als Fahrstrahl der letzteren betrachten. Es ist leicht einzusehen, daß

$$F = \int \frac{u^2 d\varphi}{2} = \int \frac{p q d\varphi}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \int \frac{p^2 d\varphi}{2} + \int \frac{q^2 d\varphi}{2} - \int \frac{(q - p)^2 d\varphi}{2} \right\}.$$

1) Civilingenieur 1874, S. 96—97.

Sämtliche in den Klammern stehende Integrale ergeben sich durch Planimetrieren der entsprechend durch die drei Kurven begrenzten Flächenstücke, welche durch  $F_q$ ,  $F_p$  und  $F_{q-p}$  bezeichnet werden sollen. Wir erhalten sodann

$$(13) \quad F = \frac{1}{2}(F_q + F_p - F_{q-p}).$$

In gleicher Weise könnte auch eine  $(p + q)$ -Kurve zur Geltung kommen, doch ist es ersichtlich, daß hierbei unvermeidliche Konstruktionsfehler das Resultat mehr beeinflussen müssen, als bei der soeben empfohlenen.

Die Werte  $(q - p)$  können entweder mit Beachtung des Vorzeichens, oder absolut aufgetragen werden. Der Flächeninhalt  $F_{q-p}$  könnte jedoch auch negative Werte erhalten, indem das entsprechende

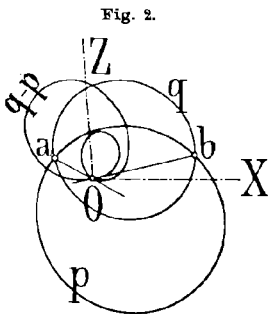


Fig. 2.

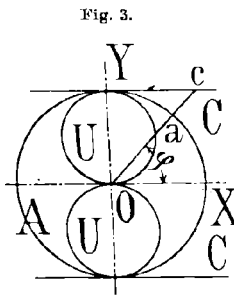


Fig. 3.

Integral im allgemeinen durch das wechselnde Vorzeichen von  $d\varphi$  beeinflusst wird. Aus der Zeichnung wird sich das richtige Vorzeichen immer erkennen lassen. So sind in Fig. 2 die  $q$ - und die  $p$ -Kurve in Form von Kreisen aufgezeichnet. Die  $(q-p)$ -Kurve

wurde mit Beachtung des Vorzeichens der Fahrstrahlen aufgetragen; hierdurch ergab sich ihre schlingenförmige Gestalt. Beide Schlingen werden in derselben Richtung durchlaufen, haben also dasselbe Vorzeichen und zwar das positive, indem beim Durchlaufen der  $q$ - und der  $p$ -Kurve der Winkel  $\varphi$  als stetig wachsend angesehen werden kann. Es ist leicht zu erkennen, daß die Geraden, welche die Schnittpunkte der  $q$ - und der  $p$ -Kurve mit dem Koordinatenursprung verbinden, in letzterem die  $(q-p)$ -Kurve berühren.

Über den allgemeinen Verlauf der  $U$ -, der  $p$ - und der  $q$ -Kurven erlauben die Beziehungen (10) und (12) folgende Schlußfolgerungen zu machen:

1. Schneiden sich die  $A$ - und die  $C$ -Kurve in irgendeinem Punkte, so gehen die drei obengenannten Kurven durch denselben Punkt.
2. Wird der Fahrstrahl der  $C$ -Kurve unendlich groß, so werden die unter demselben Winkel geneigten Fahrstrahlen der drei Kurven gleich Null; letztere werden im Koordinatenursprung durch den erstgenannten Fahrstrahl berührt.
3. Wird der Fahrstrahl der  $C$ -Kurve gleich Null, so sind die unter demselben Winkel gezogenen Fahrstrahlen der drei Kurven unendlich groß.



Diesen allgemeinen Betrachtungen hat sich eine Untersuchung von verschiedenartigen Sonderfällen anzuschließen, doch wollen wir vorerst das hier Gesagte durch einige einfache Beispiele veranschaulichen.

Für das polare Trägheitsmoment einer ebenen Figur ergibt sich, falls der Pol zum Koordinatenursprung gewählt wird, in rechtwinkligen Achsen der Ausdruck

$$J_0 = \iint (x^2 + y^2) dx dy.$$

Die *C*-Kurve ist ein Kreis von beliebig zu wählendem Halbmesser *a*, dessen Mittelpunkt in den Koordinatenursprung fällt. Es bedarf nicht der üblichen Zerlegung des polaren Trägheitsmomentes in die Summe zweier äquatoriellen. Die sich laut Fig. 1 ergebende einfache Konstruktion dieses Trägheitsmomentes läßt sich auch ganz elementar ableiten, bleibt jedoch selbst in den genannten Abhandlungen von Chr. Nehls unerwähnt.

Denken wir uns die *A*-Kurve ebenfalls als Kreis, dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist, so dürfen wir *a* gleich *R* setzen. Hierdurch wird die *U*-Kurve mit der *A*- und *C*-Kurve identisch. Die Beziehung (9) sagt in diesem Falle aus, daß das polare Trägheitsmoment eines Kreises um dessen Mittelpunkt gleich ist dem halben Produkt aus dem Flächeninhalte dieses Kreises mit dem Quadrate des Kreishalbmessers, was sich mit dem bekannten Ausdruck hierfür deckt.

Das äquatorielle Trägheitsmoment einer ebenen Figur um die *X*-Achse schreiben wir, ein rechtwinkliges Achsenkreuz voraussetzend,

$$J = \iint y^2 dx dy.$$

Die *C*-Kurve besteht also aus einem Geradenpaar, dessen Gleichung  $y = \pm a$  lautet. Für den Fall des äquatoriellen Trägheitsmomentes eines Kreises um seine Halbachse setzen wir  $a = R$ . Die beiden Geraden berühren also diesen Kreis in den Schnittpunkten mit der *Y*-Achse (Fig. 3). Setzen wir nun in (10):  $r = Oc = R/\sin \varphi$ , so wird  $u = \pm R \sin \varphi$ . Es ist dies die Gleichung zweier Kreise, welche den Halbmesser des gegebenen zum Durchmesser haben und die *X*-Achse im Koordinatenursprung berühren. Berechnen wir den Flächeninhalt dieser Kreise, so erhalten wir durch (9) wieder einen allgemein bekannten Ausdruck.

Der bekannten Beziehung zwischen den Ordinaten eines Kreises und einer Ellipse entsprechend, ergibt sich für das Trägheitsmoment der letzteren um eine Hauptachse die *U*-Kurve in der Form von zweien ihr ähnlichen Ellipsen, welche die genannte Hauptachse und die erste

Ellipse berühren und deren Hauptachsen den gleichgerichteten Halbachsen derselben gleich sind.

Das Deviationsmoment einer ebenen Figur berechnet sich zu

$$E = \iint xy dx dy.$$

Die  $C$ -Kurve ist eine gleichseitige Hyperbel  $xy = a^2$ , welche auf eine andere Art schon Chr. Nehls<sup>1)</sup> zu demselben Zwecke verwendet hat, ohne hierdurch auf allgemeinere Betrachtungen geführt worden zu sein. Da jedoch innerhalb zweier Koordinatenwinkel die Fahrstrahlen der Hyperbel imaginär sind, bedarf dieser Fall der besonderen Erläuterungen des nächsten Kapitels.

## II. Betrachtung verschiedener Sonderfälle.

Stillschweigend wurde bis jetzt angenommen, daß jedem die  $A$ -Kurve schneidenden Fahrstrahl ein reeller und gleichgerichteter, also positiver Wert des entsprechenden Fahrstrahles der  $C$ -Kurve entspricht. Diese Voraussetzung ist in vielen Fällen unzutreffend. Wenden wir uns dem Ausdruck (5) zu, so erkennen wir, daß es bestimmte Grenzen des Polarwinkels  $\varphi$  geben kann, innerhalb welcher die Funktion  $\Phi$  derselben negative Werte annehmen kann.

Für einen geraden Exponenten  $n$  erhält sodann  $r$  imaginäre Werte. Dieser Übelstand wird leicht gehoben, wenn wir bedenken, daß wir durchaus nicht daran gebunden sind, innerhalb des ganzen Integrationsgebietes eine einzige  $C$ -Kurve zu verwenden. In gewissen Grenzen des Winkels  $\varphi$  dürfen wir der Konstanten  $a$  den einen Wert beilegen, in anderen Grenzen wieder einen neuen. Es wird hierdurch im Ausdruck (9) an Stelle des einen Gliedes auf der rechten Seite nur die Summe mehrerer solcher Glieder treten. Wir setzen somit im genannten Falle an Stelle der willkürlichen konstanten  $a$  eine imaginäre Größe, etwa  $ia$ , worin  $i = \sqrt{-1}$ . Hierdurch erhält in denjenigen Grenzen des Winkels  $\varphi$ , wo  $\Phi$  negativ wird (5),  $r$  reelle Werte. Da jedoch  $(ia)^n$  negativ ist, so erhalten wir an Stelle von (9)

$$(9, \text{ bis}) \quad S = \frac{2a^n}{n+2} (F - F'),$$

wo  $F'$  derjenige Flächeninhalt ist, welcher dem neuen Zweige der  $C$ -Kurve entspricht. Unter den Voraussetzungen des I. Kapitels über den Verlauf der  $A$ -Kurve sind für  $F$  und  $F'$  hierin die absoluten Werte einzusetzen, sonst ist jedoch immer dem Verlauf der Kurven Beachtung zu schenken.

1) Civilingenieur 1875, Taf. XIV Fig. 10.

Die im ersten Kapitel erwähnte Hyperbel  $xy = a^2$  wird innerhalb zweier Koordinatenwinkel durch die konjugierte  $xy = -a^2$  ersetzt. Letztere entspricht demjenigen Teil der von der  $A$ -Kurve umgrenzten Fläche, deren Deviationsmoment negativ ist.

Für einen ungeraden Exponenten  $n$  hat ein negativer Wert der Funktion  $\Phi$  einen ebensolchen von  $r^n$  und daher wegen (7) von  $u^2$  zur Folge. In den entsprechenden Grenzen des Winkels  $\varphi$  hat man, um brauchbare Resultate zu erhalten, an Stelle des positiven Wertes der Konstanten  $a$  einen negativen einzuführen. Im übrigen kommt die Beziehung (9 bis) zur Geltung.<sup>1)</sup>

Die Behandlungsweise eines gebrochenen Exponenten  $n$  bedarf nach Vorstehendem keiner besonderen Erläuterung.

Ein Sonderfall anderer Art ergibt sich, wenn die Funktion  $f(x, y)$  ein algebraischer Bruch ist, dessen Zähler und Nenner homogene Funktionen gleichen Grades sind, so daß der Exponent  $n$  gleich Null zu setzen ist. Einerseits erhalten wir durch Übergang zu Polarkoordinaten  $f(x, y) = \Phi$ , worin  $\Phi$  als veränderliche Größe erscheint, andererseits ergibt (5)  $\Phi = 1$ ; zugleich wird auch die Konstruktion nach Fig. 1 unmöglich, indem die  $C$ -Kurve in sich im Koordinatenursprung schneidende Geraden ausartet. Es bedeutet dieses, daß in diesem Sonderfall zwischen den Fahrstrahlen der  $C$ -Kurve und dem Werte der Funktion  $\Phi$  keinerlei Abhängigkeit besteht.

Diesem Umstande ist nur durch Wahl einer charakteristischen Kurve anderer Art, die als  $C_0$ -Kurve bezeichnet werden soll, Rechnung zu tragen, einer Kurve, deren Gleichung in folgender Form zu schreiben ist:

$$(14) \quad f(x, y) = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega)^p}}{a^p}.$$

Hierin ist  $a$  wiederum eine beliebige Konstante,  $p$  eine beliebige ganze Zahl, außer Null.

Durch Übergang zu Polarkoordinaten erhalten wir, indem wir die früheren Bezeichnungen beibehalten:

$$(15) \quad \Phi = \frac{r^p}{a^p}$$

und somit ergibt die Beziehung (3)

$$(16) \quad S = \frac{1}{2} \int \frac{R^3 \cdot r^p}{a^p} d\varphi.$$

1) Sowohl im Falle der Unstetigkeit der Funktion  $f(x, y)$ , wie auch in dem soeben betrachteten Falle, wo innerhalb verschiedener Integrationsgebiete verschiedene  $C$ -Kurven verwendet werden, müßte von vornherein der Ausdruck (6) als Summe mehrerer Integrale geschrieben werden. Der Kürze halber wird dies überall, solange die Betrachtungen allgemein gehalten werden können, unterlassen.

Der Fahrstrahl der  $U$ -Kurve wird aus der Beziehung:

$$(17) \quad u^2 = R^2 \frac{r^p}{a^p}$$

konstruiert, welche der früher besprochenen (7) nahe verwandt ist und in ähnlicher Weise ausgeführt wird.

Es sei noch bemerkt, daß in diesem Falle der Flächeninhalt der  $U$ -Kurve direkt dem gesuchten Integral gleich zu setzen ist, also

$$(18) \quad S = F.$$

Bei Wahl des Exponenten  $p$  können zwei Gesichtspunkte zur Geltung kommen. Der erste, welcher darauf hinausgeht, eine möglichst einfache  $C_0$ -Kurve zu erhalten, gestattet kaum eine allgemeine Erörterung, muß vielmehr von Fall zu Fall betrachtet werden. Dem zweiten, der eine möglichst einfache Konstruktion der Fahrstrahlen  $u$  erzielt, wird durch die Wahl eines geraden  $p$  und womöglich  $p = 2$  Rechnung getragen.

Wir betrachteten im vorigen Kapitel nur den Fall  $n + 2 > 0$ . Liegt der Koordinatenursprung außerhalb des Integrationsgebietes, so ergibt sich für  $n + 2 < 0$  kein Sonderfall, wohl aber für  $n + 2 = 0$ . Denken wir uns, daß jeder Fahrstrahl die  $A$ -Kurve nur in zwei Punkten schneidet — andere Fälle lassen sich bekannterweise aus diesem leicht ableiten — und nennen wir die Grenzen der ersten Integration nach  $\varphi$  (I bis)  $R_1$  und  $R_2$ , so erhalten wir statt (3):

$$(3, \text{III}) \quad s = \int (\lg R_1 - \lg R_2) \Phi d\varphi.$$

Dieses Integral wird in die Differenz zweier anderer gespalten, so dann eine Kurve, deren Fahrstrahlen gleich (oder proportional)  $\lg R$  sind, konstruiert. Um  $u$  linear zu gestalten, schreiben wir die Gleichung der charakteristischen Kurve

$$(4 \text{ bis}) \quad f(x, y) = a^{-1},$$

woraus

$$(5 \text{ bis}) \quad \Phi = \frac{r^2}{a}$$

und

$$(6, \text{II}) \quad S = \int \frac{r^2 \lg R_2}{a} d\varphi - \int \frac{r^2 \lg R_1}{a} d\varphi$$

wird. Dieser Ausdruck kann als doppelter Flächeninhalt einer  $U$ -Kurve aufgefaßt werden, wenn wir

$$(7 \text{ bis}) \quad u^2 = \lg R \cdot \frac{r^2}{a}$$

setzen. Es ist also  $S = 2F$ , worin  $F$  indirekt (13) ermittelt wird, indem wir

$$(12 \text{ bis}) \quad p = \lg R \text{ und } q = \frac{r^2}{a}$$

setzen.

Liegt der Koordinatenursprung innerhalb des Integrationsgebietes, so fassen wir sämtliche Fälle  $n + 2 \geq 0$  zusammen. Das der unteren Integrationsgrenze entsprechende Glied wird nun nicht Null, wie dieses für (3) der Fall war, sondern unendlich groß. Die entsprechenden Formeln wollen wir nur für den Fall  $n + 2 < 0$  entwickeln, die allgemeinen Betrachtungen werden auch für  $n + 2 = 0$  gültig sein.

Da, laut der Voraussetzung, der Koordinatenursprung von der  $A$ -Kurve umschlossen wird, so ziehen wir einen Kreis von endlichem Halbmesser  $\varepsilon$ , der klein genug gewählt wird, damit die  $A$ -Kurve vom Kreise nicht geschnitten wird. Wir spalten nunmehr unser Integral (I) in die Summe zweier, von denen das erste  $S_a$  sich auf die außerhalb des Kreises liegende Fläche, das zweite  $S_k$  auf die innerhalb desselben liegende bezogen ist. Es ist sodann

$$(19) \quad S = S_a + S_k.$$

Weil für  $S_k$  die Integrationsgrenzen konstant sind, so schreiben wir an Stelle von (I bis) das Produkt zweier Integrale

$$S_k = \int_0^{2\pi} \Phi d\varphi \cdot \int_0^\varepsilon \rho^{n+1} d\rho.$$

Hierin ist das zweite dieser Integrale unendlich groß; es dürfte für  $S_k$  ein endlicher Wert nur dann erwartet werden, wenn

$$(20) \quad \int_0^{2\pi} \Phi d\varphi = 0$$

ist. Wir schreiben nun

$$S_k = \int_0^{2\pi} \Phi d\varphi \cdot \lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Delta\varepsilon}^\varepsilon \rho^{n+1} d\rho.$$

Der zweite Faktor wird hierin im Grenzfalle allerdings unendlich groß, der erste ist jedoch keine gegen Null konvergierende Größe, sondern eine konstante Null. Somit ist  $S_k = 0$  für jegliches  $\Delta\varepsilon$ , also auch im Grenzfalle  $\Delta\varepsilon = 0$ . Unter der Voraussetzung (20) wird also

$$S = S_a.$$

1) Diese Behauptung läßt sich leicht veranschaulichen. Wir setzen  $k = \int_{\Delta\varepsilon}^\varepsilon \rho^{n+1} d\rho$

und konstruieren zwei Kurven, deren Ordinaten  $\Phi$ , deren Abszissen jedoch für die eine  $\varphi$ , für die zweite  $k\varphi$  sind. Die Beziehung (20) bedeutet, daß der Flächen-

Es heißt dies nichts anderes, als daß der als Sonderpunkt auftretende Koordinatenursprung durch einen Kreis von endlichem Halbmesser  $\varepsilon$  aus der graphischen Behandlung ausgeschlossen werden darf, falls das Integral überhaupt gegen einen endlichen Wert konvergiert.

Der Halbmesser  $\varepsilon$  dieses Kreises kann auch so groß gewählt werden, daß derselbe die  $A$ -Kurve schneidet; es muß sodann bei Ermittlung von  $S_\varepsilon$  das Resultat derjenigen Integration, welche auf das innerhalb des Kreises und außerhalb der  $A$ -Kurve liegende Gebiet fällt, mit dem umgekehrten Vorzeichen genommen werden, indem es in  $S_\varepsilon$  (19) mit dem ursprünglichen in Rechnung gebracht wird. Das gleiche Verfahren ist auch für  $n + 2 = 0$  mit den notwendigen Änderungen vorzunehmen.

Es werde noch erwähnt, daß die Bedingung (20) jedesmal erfüllt ist, falls die Funktion  $f(x, y)$  bei Veränderung des Vorzeichens bei nur einer, oder bei beiden Veränderlichen zugleich, ebenfalls nur das Vorzeichen wechselt, jedoch denselben absoluten Wert beibehält.

Für denjenigen Fall, daß die  $A$ -Kurve durch den Koordinatenursprung geht und  $n + 2 < 0$  ist, ist es mir nicht gelungen ein brauchbares Verfahren ausfindig zu machen.

### III. Getrennte charakteristische Kurven.

Die einfache  $C$ -Kurve, wie sie in vorstehendem behandelt wurde, ist im allgemeinen eine algebraische Kurve höheren Grades. Da dieselbe aufzuzeichnen ist, würde durch die damit verbundenen Schwierigkeiten das bis jetzt betrachtete Verfahren in den meisten Fällen praktisch unbrauchbar. Es ist deshalb von großer Wichtigkeit, zu bemerken, daß eine  $C$ -Kurve höheren Grades durch mehrere  $C$ -Kurven niederen Grades ersetzt werden kann, sobald die Funktion  $f(x, y)$  als Produkt mehrerer Faktoren erscheint. Ist letzteres auch nicht immer von vornherein der Fall, so wird die Zerlegung der homogenen Funktion in Faktoren durch die bekannten Eigenschaften der homogenen Polynome ungemein erleichtert.

Wir denken uns beispielsweise die Funktion  $f(x, y)$  in drei Faktoren zerlegt, so daß

$$f(x, y) = f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) \cdot f_3(x, y)$$

inhalt der ersten Kurve gleich Null ist. Da die zweite Kurve nur durch den Maßstab der Abszissen von der ersten verschieden ist, so wird deren Flächeninhalt, für jeglichen Wert von  $k$  auch für  $k = \infty$  zu Null; dieser Flächeninhalt ist jedoch gleich  $S_k$ .

ist, worin  $f_1, f_2$  und  $f_3$  die Zeichen ebenfalls homogener algebraischer Funktionen sind, deren Ordnungen beziehlich durch  $s, t$  und  $w$  bezeichnet seien. Somit ist

$$(21) \quad n = s + t + w.$$

Es seien ferner in der Zeichnung die Kurven

$$(22) \quad \begin{cases} f_1(x, y) = a_1^s \\ f_2(x, y) = a_2^t \\ f_3(x, y) = a_3^w \end{cases}$$

aufgetragen, welche als getrennte charakteristische Kurven bezeichnet werden sollen und deren Konstanten  $a_1, a_2, a_3$  beliebig zu wählen sind. Durch Übergang zu Polarkoordinaten erhalten wir die Gleichungen dieser Kurven in der Form

$$(23) \quad \begin{cases} r_1^s \Phi_1 = a_1^s \\ r_2^t \Phi_2 = a_2^t \\ r_3^w \Phi_3 = a_3^w \end{cases}$$

Hierin sind  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  Funktionen einer einzigen Veränderlichen des Polarwinkels  $\varphi$ . Um den neuen Ausdruck für (I) zu erhalten, hat man in (3) nur  $\Phi$  gleich dem Produkt der letztgenannten drei Größen zu setzen. Es lassen sich aber dieselben laut (23) durch die Fahrstrahlen  $r_1, r_2, r_3$  der entsprechenden  $C$ -Kurven ausdrücken, wodurch das Integral (3) in

$$(6, III) \quad S = \frac{a_1^s \cdot a_2^t \cdot a_3^w}{n + 2} \int \frac{R^{n+2}}{r_1^s \cdot r_2^t \cdot r_3^w} d\varphi$$

übergeht.

Die Fahrstrahlen der  $U$ -Kurve entsprechen nun der Beziehung

$$(7, III) \quad u^2 = R^2 \frac{R^n}{r_1^s \cdot r_2^t \cdot r_3^w}$$

und wenn  $F$  wieder den Flächeninhalt derselben bezeichnet, so wird

$$(9, III) \quad S = \frac{2 a_1^s a_2^t a_3^w}{n + 2} F.$$

Je nach Umständen wird hier  $F$  entweder direkt ermittelt, oder es kommt das indirekte Verfahren zur Verwendung, indem  $u^2 = p \cdot q$  gesetzt wird. An Stelle des graphischen Potenzierens der Fig. 1 tritt die graphische Multiplikation; es wird jedoch in verwickelten Fällen übersichtlicher und nicht zeitraubender sein, dieselbe durch Verwendung des Rechenschiebers zu ersetzen.

Beispiel 1. Es soll das Volumen und der Schwerpunkt eines homogenen Körpers, der durch eine beliebige Zylinderfläche und zwei

dieselbe schneidende nicht parallele Ebenen begrenzt ist, sowie sein Trägheitsmoment um eine der Mantellinie paralle Achse  $OY$  gefunden werden.

Der Schnitt der Zylinderfläche mit einer der Ebenen (Fig. 4) sei durch den Linienzug  $abca$  gegeben. Die letztere werde als Koordinatenebene betrachtet,  $OY$  als Koordinatenachse. Die  $X$ -Achse möge die orthogonale Projektion der  $Y$ -Achse auf dieselbe Ebene sein; der Winkel zwischen diesen beiden Achsen sei  $\alpha$ ; die  $Z$ -Achse steht rechtwinklig auf jeder der beiden anderen.

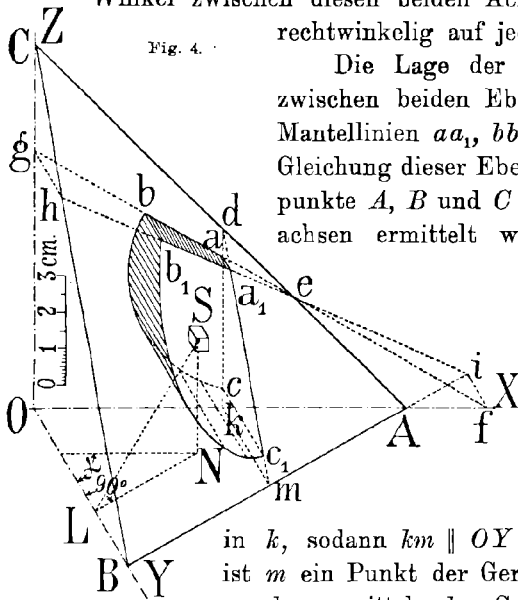


Fig. 4.

Die Lage der zweiten Ebene sei durch die zwischen beiden Ebenen enthaltenen Strecken der Mantellinien  $aa_1, bb_1, cc_1$  bestimmt. Weil wir der Gleichung dieser Ebene bedürfen, mögen die Schnittpunkte  $A, B$  und  $C$  derselben mit den Koordinatenachsen ermittelt werden. Die Zeichnung ist in schiefer Parallelperspektive derart ausgeführt, daß die Winkel  $XOZ$  und  $XOY$  in natürlicher Größe ( $\alpha = 60^\circ$ ) aufgetragen, und derselbe Maßstab für alle drei Achsen gewählt wurde. Ziehen wir nun  $ac$  bis zum Schnitt mit  $OX$

in  $k$ , sodann  $km \parallel OY$  bis zum Schnitt mit  $a_1c_1$ , so ist  $m$  ein Punkt der Geraden  $AB$ . In derselben Weise wurde vermittels der Geraden  $ab$  und  $a_1b_1$  der zweite Punkt  $i$  der Schnittlinie  $AB$ , und der Punkt  $h$  auf  $CB$  erhalten. Hierdurch sind die drei Punkte  $A, B$  und  $C$  bestimmt. Von den Schnittpunkten  $e$  und  $d$  zweier Geradenpaare, welche auf  $AC$  fallen, wurde aus Genauigkeitsrücksichten kein Gebrauch gemacht, weil dieselben verhältnismäßig nahe nebeneinanderliegen.

Es ergeben sich nun aus der Zeichnung die Strecken:  $OA = 10$  cm,  $OB = 5$  cm,  $OC = 10$  cm und hierdurch wird die Gleichung der zweiten Ebene:

$$x + 2y + z = 10, \quad \text{oder} \quad y = 5 - \frac{x+z}{2}.$$

Das dem Punkte  $S$  umschriebene Elementarprisma besitzt das Volumen  $dx dy dz \sin \alpha$ , und somit wird das Volumen  $abca_1b_1c_1$  zu

$$V = \sin \alpha \int_0^5 \int_0^{5 - \frac{x+z}{2}} \int_0^{5 - \frac{x+z}{2}} dx dz dy = \sin \alpha \iint (5 - \frac{x+z}{2}) dx dz.$$



Endgültig wird,  $\alpha = 60^\circ$  angenommen:

$$(24) \quad V = \frac{5\sqrt{3}}{2} \iint dx dz - \frac{\sqrt{3}}{4} \iint (x+z) dx dz.$$

Das erste der beiden Integrale ist gleich dem Inhalt der durch  $abca$  begrenzten Fläche. Das zweite Integral könnte in die Summe zweier statischen Momente derselben Fläche zerlegt werden; durch Anwendung der  $C$ -Kurve wird es direkt konstruiert, wie aus Fig. 5 ersichtlich. Die Gleichung dieser Kurve wurde  $x+z=6$  angenommen; es ist dies die Gerade  $km$ .

Es wurde sowohl die  $U$ -Kurve, wie auch eine  $(q-p)$ -Kurve konstruiert. Bei Verwendung der ersteren, deren Flächeninhalt  $F$  sei, erhalten wir laut (9)

$$s = \int (x+z) dx dz = 4F.$$

Bezeichnen wir nun den Flächeninhalt der  $A$ -Kurve durch  $F_0$ , so wird das Volumen

$$(25) \quad V = \frac{5\sqrt{3}}{2} F_0 - \sqrt{3} F.$$

Durch direktes Planimetrien ergab sich:  $F_0 = 8,76 \text{ cm}^2$ ;  $F = 14,76 \text{ cm}^2$ , somit:  $V = 12,36 \text{ cm}^3$ .

Der Konstruktion der  $U$ -Kurve geht diejenige der  $p$ - und der  $q$ -Kurve voraus. Laut (12) ist

$$p = R \quad \text{und} \quad q = R \cdot \frac{R}{r}.$$

Für den betrachteten Fall ist die  $p$ -Kurve mit der  $A$ -Kurve identisch. Die übrigen Kurven sind durch die Bezeichnungswiese in Fig. 5 zu erkennen. Soll die  $(q-p)$ -Kurve verwendet werden, so ist

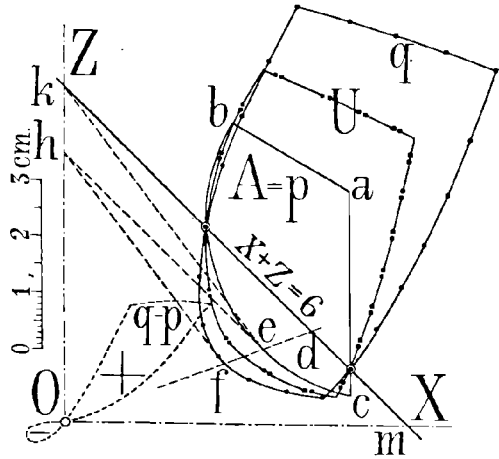
$$F = \frac{F_q + F_0 - F_{(q-p)}}{2} \quad \text{und} \quad V = 2\sqrt{3} F_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \{F_q - F_{q-p}\}.$$

Es ergab sich:  $F_q = 22,93 \text{ cm}^2$ ;  $F_{q-p} = 2,01 \text{ cm}^2$  und somit:  $V = 12,23 \text{ cm}^3$ .

Der Unterschied der beiden Werte für  $V$  überschreitet nicht die zulässigen Genauigkeitsgrenzen für ein graphisches Verfahren, ist jedoch verhältnismäßig groß zu nennen.

Die Konstruktion des Punktes  $f$  der  $q$ -Kurve ist durch die Geraden  $eh \parallel dk$  und  $hf \parallel ke$  angedeutet.

Fig. 5.



Das auf die ZOY-Ebene bezogene statische Moment des dem Punkte S umschriebenen Elementarprismas (Fig. 4) ist

$$LNdx dy dz \sin \alpha = X \sin^2 \alpha dx dy dz.$$

Somit wird das entsprechende Moment des Volumens V:

$$(26) \quad S_x = \sin^2 \alpha \int_0^{5-\frac{x+z}{2}} \int \int x dx dz \int dy.$$

Für  $\alpha = 60^\circ$  wird endgültig

$$S_x = \frac{15}{4} \int \int x dx dz - \frac{3}{8} \int \int x(x+z) dx dz.$$

Das erste dieser beiden Integrale ist das statische Moment der von der A-Kurve umgrenzten Fläche auf OZ bezogen, das zweite könnte in die Summe eines Trägheits- und eines Deviationsmomentes zerlegt werden, ist jedoch durch die Methode der C-Kurven direkt zu ermitteln. Es könnte nun die einfache C-Kurve in der Form  $x^2 + xz = a^2$  verwendet werden, welche eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt O und deren Halbachse den Winkel von  $22,5^\circ$  mit der X-Achse einschließt.

Doch ist es zweckentsprechend, getrennte C-Kurven zu verwenden.

Die Gleichungen derselben seien

$$x + z = 6 \quad \text{und} \quad x = 5.$$

Bezeichnen wir die Fahrstrahlen der ersten dieser Geraden durch  $r_1$ , die der zweiten durch  $r_2$ , so kann

$$p = R \cdot \frac{R}{r_2} \quad \text{und} \quad q = R \cdot \frac{R}{r_1}$$

gesetzt werden. Hierdurch wird die q-Kurve mit derjenigen der Fig. 5 identisch, während die p-Kurve in Fig. 6<sup>1)</sup> konstruiert wurde;

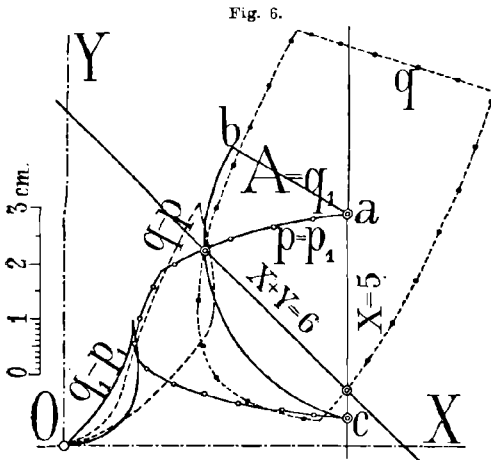
der Verlauf der (q - p)-Kurve ist ebenfalls aus der Zeichnung ersichtlich.

Das zweite der Integrale in (26) wird nunmehr laut (9, III) zu

$$s_2 = 15F = 7,5 \{ F_p + F_q - F_{q-p} \}.$$

Aus der Zeichnung entnehmen wir:  $F_q = 22,93 \text{ cm}^2$ ;  $F_p = 10,54 \text{ cm}^2$ ;  $F_{q-p} = 2,98 \text{ cm}^2$ , und somit:  $s_2 = 228,68 \text{ cm}^4$ .

1) Es ist in Fig. 6 OZ statt OY zu lesen; desgleichen  $x + z = 6$ , statt  $x + y = 6$ .



Bei der Konstruktion der  $(q - p)$ -Kurve wurden solche Zweige derselben, welche derart in sich selbst zurücklaufen, daß im Maßstab der Zeichnung von ihnen ein kaum meßbarer Flächeninhalt umgrenzt wird, dessen Vorzeichen selbst durch Ungenauigkeit der Zeichnung beeinflusst werden kann, einfach unterdrückt.

Wir weisen nun darauf hin, daß die Konstruktion des ersten  $s_1$  der beiden Integrale (26) in derjenigen des zweiten enthalten ist. Denken wir uns  $x = 5$  als  $C$ -Kurve, so wird die  $A$ -Kurve für das Integral  $s_1$  zur  $q$ -Kurve, während die  $p$ -Kurve für beide identisch ist. In Fig. 6 ist dies durch die Bezeichnungen  $A = q_1$  und  $p = p_1$  angedeutet, worauf dann die  $(q_1 - p_1)$ -Kurve konstruiert wurde. Der Flächeninhalt der letzteren ist als negativ zu betrachten, indem die Punkte derselben in der entgegengesetzten Richtung umlaufen werden, als die entsprechenden Punkte der beiden anderen Kurven. Laut (9) ergibt sich:

$$s_1 = \frac{10}{3} F = \frac{5}{3} (F_{q_1} + F_{p_1} - F_{q_1 - p_1}).$$

Der Zeichnung ist zu entnehmen:  $F_{q_1} = F_0 = 8,76 \text{ cm}^2$ ;  $F_{p_1} = F_p = 10,54 \text{ cm}^2$ ;  $F_{q_1 - p_1} = -0,72 \text{ cm}^2$  und somit:  $s_1 = 33,37 \text{ cm}^2$ .

Da nun  $S_x = \frac{15}{4} s_1 - \frac{8}{8} s_2$  ist, so wird die Entfernung des Schwerpunktes von der  $ZOY$ -Ebene:

$$l_x = \frac{S_x}{V} = \frac{39,37 \text{ cm}^4}{12,23 \text{ cm}^3} = 3,36 \text{ cm},$$

und die eine Koordinate desselben:  $x_s = 3,36 : \sin 60^\circ = 3,88 \text{ cm}$ .

Das statische Moment des Volumens  $V$  in bezug auf die  $XOZ$ -Ebene schreiben wir:

$$S_y = \sin^2 \alpha \int \int \int_0^{5-x+z} dx dz \int_0^2 y dy.$$

Endgültig wird:

$$S_y = \frac{3}{8} \{ 25 F_0 - 5 s + \frac{1}{4} s_3 \},$$

worin  $F_0$  und  $s$  bereits bekannte Werte zweier Integrale und

$$s_3 = \int \int (x + z)^2 dx dz$$

ist. Der Wert des letzteren ist jedoch ebenfalls bereits konstruiert worden. Nehmen wir zur  $C$ -Kurve das Geradenpaar  $x + z = \pm 6$ , so wird die  $q$ -Kurve der Fig. 5 zur  $U$ -Kurve für  $s_3$  und somit

$$S_y = \frac{3}{8} \{ 25 F_0 - 5 s + 4,5 F_q \} = 10,20 \text{ cm}^4.$$

Die Schwerpunktskoordinate wird sodann

$$y_s = \frac{S_y}{V \sin 60} = \frac{2 \cdot 10,20}{12,23 \cdot \sqrt{3}} = 0,97 \text{ cm}.$$

Ähnlicherweise ergibt sich das statische Moment desselben Volumens in bezug auf die  $XOY$ -Ebene zu

$$S_z = \frac{V^3}{4} \left\{ 10 \iint z dx dz - \iint (x+z) z dx dz \right\}.$$

Diese beiden Integrale bedürfen ebenfalls keiner Konstruktion,

da das erste derselben gleich  $s - s_1 = 25,67 \text{ cm}^3$ , das zweite gleich  $s_3 - s_2 = 184,06 \text{ cm}^4$  ist. Hierdurch wird  $S_z = 31,42 \text{ cm}^4$  und die Schwerpunktskoordinate  $Z_s = 2,57 \text{ cm}$ .

Die Bestimmung der Trägheitsmomente des Volumens  $V$  um jede der drei Koordinatenachsen stößt ebenfalls auf keinerlei Schwierigkeiten. Wir beschränken uns hier nur auf die  $OY$ -Achse und schreiben das Trägheitsmoment des dem Punkte  $S$  umschriebenen Elementarprismas als

$$\sin \alpha dx dy dz \cdot LS^2 = \sin \alpha (z^2 + x^2 \sin^2 \alpha) dx dy dz.$$

Die Konstruktionen der Fig. 7 sind in der Voraussetzung  $\alpha = 30^\circ$  ausgeführt worden bei den früheren Längen der Strecken  $OA$ ,  $OB$  und  $OC$  der Fig. 4. Es wird sodann das Trägheitsmoment des ganzen Volumens zu

$$J_y = 10 \iint (4z^2 + x^2) dx dz - \iint (4z^2 + x^2)(x+z) dx dz.$$

Bezeichnen wir das erste dieser Integrale mit  $J_1$ , das zweite mit  $J_2$  und verwenden wir die  $C$ -Kurve  $4z^2 + x^2 = 64$ , welche ein Quadrant  $ee_1$  einer Ellipse mit den Hauptachsen 4 cm und 8 cm ist, so wird

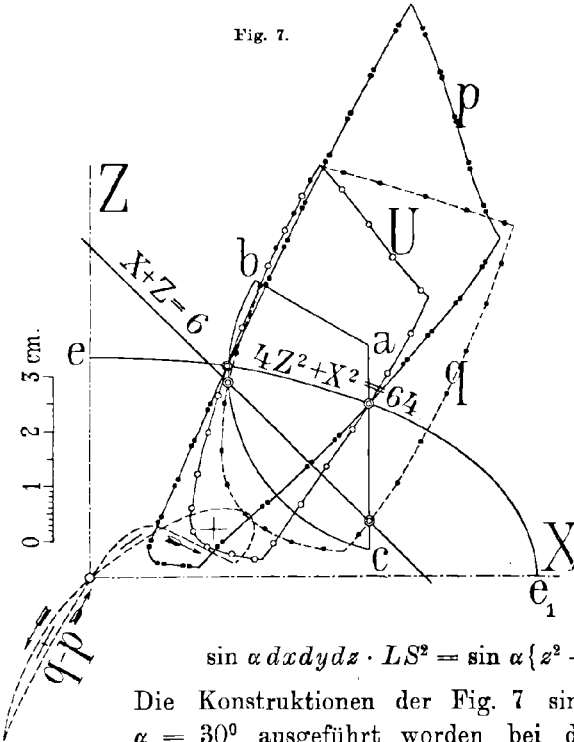
$$J_1 = 32 F_1 = 493,12 \text{ cm}^4,$$

worin  $F_1 = 15,41 \text{ cm}^2$  der Flächeninhalt der entsprechenden  $U$ -Kurve ist.

Bei der Auswertung von  $J_2$  bedienen wir uns zweckmäßig der getrennten  $C$ -Kurven

$$4z^2 + x^2 = 64 \text{ und } x + z = 6.$$

Fig. 7.



Bezeichnen wir die Fahrstrahlen der ersteren durch  $r_1$ , diejenigen der zweiten durch  $r_2$ , so wird

$$u^2 = p \cdot q = \frac{R^5}{r_1^2 \cdot r_2}.$$

Denken wir uns nun

$$p = R \left( \frac{R}{r_1} \right)^2 \text{ und } q = R \cdot \frac{R}{r_2},$$

so wird die  $q$ -Kurve mit derjenigen der Fig. 5 identisch. Da  $R^2 : r_1$  durch die Werte der Fahrstrahlen der  $U$ -Kurve (Fig. 7) für  $J_1$  bereits gegeben ist, gestaltet sich die Konstruktion der  $p$ -Kurve einfach. Alle diese Kurven sind aus der Fig. 7 ersichtlich, sowie auch die  $(q - p)$ -Kurve, deren Verlauf durch Pfeile angedeutet ist, vorausgesetzt, daß die übrigen Kurven dem Uhrzeiger entgegen umfahren werden. So dann ergibt sich:

$$J_2 = \frac{2 \cdot 64 \cdot 6}{5} \cdot \frac{F_p + F_q + F_{q-p}}{2} = 76,8 (F'_p + F'_q + F'_{q-p}).$$

Indem  $F'_p = 24,27 \text{ cm}^2$ ;  $F'_q = 22,93 \text{ cm}^2$ ;  $F'_{q-p} = 1,18 \text{ cm}^2$ , wird  $J_2 = 3585,10 \text{ cm}^5$  und  $J_y = 1346,1 \text{ cm}^5$ .

#### IV. Variierte charakteristische Kurven.

Wir stellten uns die Aufgabe, möglichst einfache charakteristische Kurven zu erhalten. In diesem Kapitel wollen wir einen hierfür ganz besonders günstigen Fall betrachten, indem wir voraussetzen, daß die Funktion  $f(x, y)$  ein Produkt homogener Polynome in verschiedenen (positiven, negativen, ganzen oder gebrochenen) Potenzen ist; die Veränderlichen  $x$  und  $y$  in den Polynomen selbst mögen nur in ganzen und positiven Potenzen auftreten.<sup>1)</sup>

Setzen wir ein solches Polynom gleich Null, und führen wir  $z = x/y$  ein, so erhalten wir für  $z$  eine Gleichung, deren Wurzeln  $k_1, k_2, k_3 \dots$  seien. Bekannterweise läßt sich sodann das Polynom in lineare Faktoren von der Form  $(x - k_1 y), (x - k_2 y), (x - k_3 y) \dots$  zerlegen. Sind sämtliche Wurzeln aller das Produkt bildenden Polynome reell, so können wir mit Beachtung der Ausführungen des vorigen Kapitels immer bis auf geradlinige  $C$ -Kurven hinuntergehen, deren Gleichungen in der Form  $x - ky = a$  erscheinen. Erhalten jedoch mehrere Wurzeln der genannten Polynome komplexe Werte von der Form  $a \pm bi$ , wo  $i = \sqrt{-1}$  ist, so sind die linearen Faktoren von der Form  $(x - ay \pm iby)$ , denen imaginäre  $C$ -Kurven ersten Grades ent-

1) Sollten letztere in ganzen negativen Potenzen auftreten, so werden dergleichen Ausdrücke in einfacher Weise auf die soeben definierte Form zurückgebracht. So wird z. B.  $x^7 y^{-1} - x^{-4} y^{10} = (x^{11} - y^{11}) : x^4 y$ .

sprechen. Das Produkt zweier linearer Polynome, welche konjugierten komplexen Wurzeln entsprechen, ergibt ein Polynom zweiten Grades. Solchen Polynomen entsprechen *C*-Kurven von der Form

$$(27) \quad \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = A^2,$$

worin *A* eine beliebige Konstante ist.

Da, der komplexen Wurzeln des Polynomes  $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$  wegen,  $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$  ist, so wird die *C*-Kurve eine Ellipse, deren Mittelpunkt in den Koordinatenursprung fällt. Diese Ellipse kann nur punktweise konstruiert werden; zudem müßten die Elemente derselben (etwa

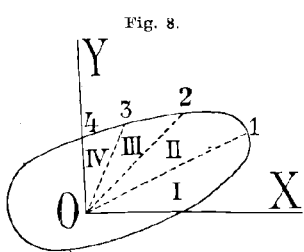


Fig. 8.

Länge und Richtung der Hauptachsen) analytisch ermittelt werden. Mittels der bis jetzt besprochenen Verfahren ist es nicht möglich, die Ellipse durch Gerade zu ersetzen. Wir erhalten jedoch eine befriedigende Lösung der Aufgabe, wenn wir eine neue Art charakteristischer Kurven, die wir als variierte oder *V*-Kurven bezeichnen, verwenden. Denken

wir uns die von der *A*-Kurve umgrenzte Fläche durch die Fahrstrahlen *O*1, *O*2, *O*3 usw. (Fig. 8), welche mit der *X*-Achse beziehlich die Winkel  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  usw. einschließen, in Sektoren I, II, III usw. zerlegt. Das Integral (3) kann in die Summe mehrerer Integrale zerlegt werden, von denen jedes sich über die Fläche des entsprechenden Sektors erstreckt. An Stelle von (3) erhalten wir sodann den Ausdruck

$$(29) \quad S = \frac{1}{n+2} \left\{ \int_0^{\varphi_1} R^{n+2} \Phi d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R^{n+2} \Phi d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} R^{n+2} \Phi d\varphi + \dots \right\}.$$

Die Veränderliche  $\Phi$  muß hierin mit Hilfe der Beziehung (5) durch den Fahrstrahl einer *C*-Kurve ersetzt werden, doch könnte für jeden Sektor eine neue Konstante *a* und somit eine neue *C*-Kurve benützt werden. Wir denken uns dieses ausgeführt und gehen zum Grenzfalle über, indem wir die Winkel  $\varphi_1, \varphi_2 - \varphi_1, \varphi_3 - \varphi_2$  usw. und hiermit den Flächeninhalt der entsprechenden Sektoren unendlich klein annehmen, die Konstante *a* aber stetig, als Funktion des Winkels  $\varphi$ , variieren lassen. Statt jedes der in (29) stehenden Integrale erhalten wir sodann einen unendlich kleinen Ausdruck, statt der Summe aber wiederum ein Integral, welches sich über die ganze von der *A*-Kurve umgrenzte Fläche erstreckt. Es wird also

$$(30) \quad S = \frac{1}{n+2} \int \frac{R^{n+2} a^n}{r^n} d\varphi.$$

Wie gesagt, ist hierin *a* keine Konstante mehr, sondern eine beliebig zu wählende Funktion des Winkels  $\varphi$ ; *r* ist als der unter dem

Winkel  $\varphi$  gezogene Fahrstrahl der diesem Winkel  $\varphi$  zugeordneten  $C$ -Kurve zu ermitteln. Es kommt also von jeder der durch Veränderung der Konstanten erhaltenen  $C$ -Kurven immer nur ein Fahrstrahl zur Verwendung.

Den geometrischen Ort der Schnittpunkte der Fahrstrahlen mit den ihnen zugeordneten  $C$ -Kurven bezeichnen wir als  $V$ -Kurve.

Genau so, wie im besprochenen Falle der einfachen  $C$ -Kurve, erhalten wir auch  $V$ -Kurven, welche getrennten  $C$ -Kurven entsprechen.

Da  $a$  eine beliebige Funktion des Winkels  $\varphi$  sein darf, ist man versucht,  $a$  gleich oder proportional  $r$  zu wählen. Dies würde jedoch eine Entartung der  $C$ -Kurven zur Folge haben, ähnlich der im zweiten Kapitel besprochenen, indem sodann  $\Phi = 1$  wird. Die Werte der Funktion  $\Phi$  treten in diesem Falle in keinerlei Beziehung zu den Werten der Fahrstrahlen  $r$ .

Führen wir in den Ausdruck (30), um  $u$  als lineare Größe konstruieren zu können, eine Konstante  $m$  ein<sup>1)</sup>, die etwa als Halbmesser eines, sich nach der Art der Verwendung den  $C$ -Kurven zugesellenden, Kreises betrachtet werden kann, dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist, so schreiben wir

$$(6, IV) \quad S = \frac{2m^n}{n+2} \int \frac{R^{n+2} a^n}{2r^n m^n} d\varphi.$$

Es wird hierdurch

$$(7, IV) \quad u^2 = R^2 \frac{R^n a^n}{r^n m^n}$$

und

$$(9, IV) \quad S = \frac{2m^n}{n+2} F.$$

Um diese Ausführungen an einem einfachen Beispiele zu prüfen, denken wir uns, es sei das Trägheitsmoment eines Flächenstückes, etwa des in Fig. 8 dargestellten, um die  $X$ -Achse gesucht. Wir erhalten

$$S = \iint y^2 dx dy.$$

Die Gleichung der  $C$ -Kurve ist  $y \pm a$ ; es werde nun  $a$  als veränderlich, sagen wir  $a = \lg R$ , angenommen. Es heißt dieses, daß, wenn der dem Winkel  $\varphi$  entsprechende Fahrstrahl  $R$  der  $A$ -Kurve gezogen ist, wir die Gerade  $y = \lg R$  bis zum Schnitt mit diesem Fahrstrahl ziehen und hierdurch  $r$  ermitteln. Analytisch läßt sich  $r$  aus der Gleichung der Geraden in Polarkoordinaten bestimmen. Dieselbe lautet

$$r = \frac{\lg R}{\sin \varphi}.$$

1) Bei Verwendung des Rechenschiebers bedarf es der Einführung dieser Konstanten nicht.

Führen wir die Werte von  $r$  und  $a$  in den Ausdruck (30) ein, so erhalten wir, da  $n = 2$  ist,

$$S = \frac{1}{4} \int R^4 \sin^2 \varphi d\varphi,$$

was ein bekannter<sup>1)</sup> Ausdruck für das Trägheitsmoment ist.

Wir gehen nun zu dem Falle über, wo die Verwendung der  $V$ -Kurven von wirklichem Nutzen ist und legen beispielsweise das Integral

$$(II) \quad S = \iint \frac{(\alpha_1 x^2 + \beta_1 xy + \gamma_1 y^2)(\alpha_2 x^2 + \beta_2 xy + \gamma_2 y^2)}{\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2} dx dy \sin \omega,$$

worin  $\omega$  der Koordinatenwinkel ist, unseren Betrachtungen zu grunde, mit der Annahme, daß darin die drei homogenen Polynome sich nicht in reelle Faktoren zerlegen lassen. Werden die Wurzeln der Gleichung  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  durch  $a \pm bi$  bezeichnet, so läßt sich das Integral auf die Form

$$S = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha} \iint \frac{(x - a_1 y - ib_1 y)(x - a_1 y + ib_1 y)(x + a_2 y - ib_2 y)(x - a_2 y - ib_2 y)}{(x - ay - iby)(x - ay + iby)} dx dy \sin \omega$$

bringen.<sup>2)</sup>

Bedienen wir uns zweier konjugierter  $C$ -Kurven, deren Gleichungen

$$(31) \quad \begin{cases} x - ay - iby = A - Bi \\ x - ay + iby = A + Bi \end{cases}$$

lauten, so schneiden sich diese beiden Geraden in dem einzigen reellen

Punkt  $S$  einer jeden von ihnen (Fig. 9), der durch den Schnitt der Geraden

$$(32) \quad x - ay = A; \quad y = \frac{B}{b}$$

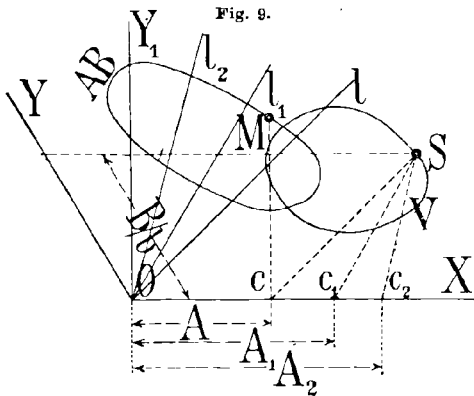
bestimmt wird, und dessen Koordinaten demgemäß

$$(33) \quad x_s = A + \frac{a}{b} B \quad \text{und} \quad y_s = \frac{B}{b}$$

sind.

Dem Produkte der vier homogenen Polynome im Zähler der

unter dem Integralzeichen stehenden Funktion entsprechen ebenfalls zwei Paare konjugierter  $C$ -Kurven, welche wir derart wählen, daß sie durch



1) Civilingenieur 1874, S. 95/96.

2) Sollte einer der Koeffizienten  $\alpha$  gleich Null sein, also eines der Polynome  $x^2$  nicht enthalten, so ist zwar die angedeutete Behandlungsweise unbrauchbar; es läßt sich aber sodann letzteres sofort in reelle Faktoren zerlegen.



denselben reellen Punkt  $S$  gehen. Mit den entsprechenden Bezeichnungen lauten die Bedingungen hierfür mit Rücksicht auf (33)

$$(34) \quad \frac{B_1}{b_1} = \frac{B_2}{b_2} = \frac{B}{b},$$

$$(35) \quad A_1 = A + \frac{B}{b}(a - a_1); \quad A_2 = A + \frac{B}{b}(a - a_2).$$

Die drei Geraden, welche der zweiten der Gleichungen (32) entsprechen, fallen in eine zusammen, welche durch die drei, der ersten dieser Gleichungen entsprechenden, im gemeinsamen Punkte  $S$  geschnitten wird.

Einem gegebenen Punkte  $S$  entsprechen laut (33) ganz bestimmte Werte von  $A$  und  $B$ , folglich auch von  $A_1, B_1, A_2$  und  $B_2$ . Es heißt dies, daß die willkürliche Wahl der Konstanten  $A$  und  $B$  es ermöglicht, jeden beliebigen Punkt der Ebene zum reellen Schnittpunkt der sechs imaginären  $C$ -Kurven zu machen.

Wird letzterer durch die Zeichnung gegeben, so lassen sich die Werte der Konstanten  $A$  und  $B$  graphisch wie folgt bestimmen. Durch den Koordinatenursprung werden die Geraden  $x - ay = 0$ ,  $x - a_1y = 0$ ,  $x - a_2y = 0$  gezogen, welche in Fig. 9 durch  $l, l_1, l_2$  bezeichnet sind. Ziehen wir durch den Punkt  $S$  drei ihnen parallele Gerade  $Sc, Sc_1, Sc_2$ , so ist  $Oc = A$ ,  $Oc_1 = A_1$ ,  $Oc_2 = A_2$ . Die Ordinate des Punktes  $S$  bestimmt direkt die Werte  $\frac{B}{b}, \frac{B_1}{b_1}, \frac{B_2}{b_2}$ , worin  $b, b_1, b_2$  bekannt sind.

Ohne Variation der  $C$ -Kurven ist nun weiter nichts anzufangen. Schneiden sich unsere 6  $C$ -Kurven in dem Punkte  $S$ , so haben wir ja nur den einen reellen Fahrstrahl der sechs  $C$ -Kurven, könnten also bestenfalls einen einzigen Punkt der  $U$ -Kurve konstruieren. Deshalb greifen wir zur Methode der  $V$ -Kurven. In vorstehendem ordneten wir jedem unter dem Winkel  $\varphi$  gezogenen Fahrstrahl eine bestimmte  $C$ -Kurve zu, indem wir die Konstante in ihrer Gleichung als Funktion von  $\varphi$  betrachteten. Sodann ermittelten wir die  $V$ -Kurve als geometrischen Ort der Schnittpunkte der betreffenden Fahrstrahlen mit den ihnen zugeordneten  $C$ -Kurven. Es kann aber auch der umgekehrte Weg eingeschlagen werden. Statt die Konstante in der Gleichung der  $C$ -Kurve als beliebige Funktion des Winkels  $\varphi$  zu variieren, können wir eine ganz beliebige  $V$ -Kurve einzeichnen. Schneiden wir nun diese durch einen beliebigen Fahrstrahl, so erhalten wir die ihm zugeordnete  $C$ -Kurve, indem wir deren Konstante so wählen, daß die  $C$ -Kurve durch den Schnittpunkt geht. Es handelt sich praktisch nur darum, daß die jeweilige Konstante nicht durch schwierige Rechnung zu ermitteln, sondern in einfacher Weise der Zeichnung zu entnehmen sei.

Analytisch lassen sich diese Verhältnisse folgendermaßen beleuchten. Da wir im Falle einer imaginären  $C$ -Kurve statt einer beliebig zu wählenden Konstante zwei erhalten, so denken wir uns dieselben durch die Bedingung

$$(36) \quad \psi(A, B) = 0$$

miteinander verbunden, wo die Funktion  $\psi$  beliebig zu wählen ist. Die Abhängigkeit der Koordinaten des Punktes  $S$  der  $V$ -Kurve von  $A$  und  $B$  wird durch (33) gegeben. Eliminieren wir nun  $A$  und  $B$  aus (33) und (36), so erhalten wir die Gleichung der  $V$ -Kurve. Umgekehrt läßt sich, wenn letztere willkürlich gegeben ist, die Bedingung (36) ableiten.

Die sonst beliebig zu wählende Bedingung (36) darf jedoch nicht ein konstantes Verhältnis von  $A$  zu  $B$  voraussetzen, weil andernfalls die  $V$ -Kurve in eine durch den Koordinatenursprung gehende Gerade ausartet, die für unsere Zwecke unbrauchbar ist.

Fassen wir (36) als Gleichung einer Kurve in rechtwinkligen Koordinaten  $X$  und  $Y_1$  (Fig. 9) auf, und ist  $M$  ein Punkt dieser Kurve, die wir als  $AB$ -Kurve bezeichnen wollen, so läßt sich der entsprechende Punkt  $S$  der  $V$ -Kurve konstruieren, indem wir  $Mc \parallel OY_1$  und  $cS \parallel Ol$  machen; durch den Schnitt der letzteren mit der Geraden  $y = \frac{Mc}{b}$  wird der Punkt  $S$  gefunden. Es ist also möglich, wenn die eine der beiden Kurven ( $V$ , oder  $AB$ ) gegeben ist, verhältnismäßig einfach, jedoch punktweise, die andere zu konstruieren.

Um das Integral in eine Beziehung mit dem Flächeninhalte einer  $U$ -Kurve zu bringen, haben wir nur, wie dieses für (30) im Falle einer einfachen  $C$ -Kurve geschah, die Konstanten  $a$  in (6, III) unter das Integralzeichen zu bringen und sie dann durch die komplexen Konstanten (31) zu ersetzen. Beachten wir hierbei, daß wir für alle sechs  $C$ -Kurven eine gemeinsame  $V$ -Kurve haben, also  $r_1 = r_2 = \dots = r_6$  ist, und führen wir eine Konstante  $m$  ein, die es erlaubt  $u$  linear zu gestalten, so wird

$$(6, V) \quad S = \frac{2\alpha_1 \alpha_2 m^n}{\alpha(n+2)} \int \frac{R^{n+2}(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}{2(A^2 + B^2)r^2 \cdot m^n} d\varphi.$$

Setzen wir hierin, wie es bei (II) der Fall ist,  $n = 2$ , so wird

$$(7, V) \quad u = \frac{R^2}{r} \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}{m\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

In den Ausdrücken  $\sqrt{A^2 + B^2}$  erkennen wir leicht den Fahrstrahl des Punktes  $M$  der  $AB$ -Kurve, welcher dem Fahrstrahl  $OS = r$  der  $V$ -Kurve entspricht. Somit ist für einen gegebenen Winkel  $\varphi$  immer

das Produkt der komplex konjugierten Konstanten durch die direkt der Zeichnung zu entnehmenden Fahrstrahlen der  $AB$ -Kurve ausgedrückt. Es ist zu betonen, daß der Fahrstrahl der  $AB$ -Kurve nicht unter dem Winkel  $\varphi$  geneigt ist; es läßt sich leicht beweisen, daß diese Bemerkung nur dann unzutreffend wird, wenn die  $V$ -Kurve eine durch den Koordinatenursprung gezogene Gerade und somit nicht brauchbar ist.

Die punktweise Konstruktion der  $AB$ -Kurve hat vor dem Einzeichnen dreier Ellipsen für das Integral (II) noch nichts voraus, da nur die  $V$ -Kurve gemeinsam ist, und wir drei verschiedene  $AB$ -Kurven zu konstruieren haben. Doch wählen wir zur  $V$ -Kurve eine beliebige Gerade, so wird infolge der linearen Beziehungen (33) die  $AB$ -Kurve ebenfalls eine Gerade und die punktweise Konstruktion fällt fort. Man braucht nur die einander entsprechenden Punkte der beiden Geraden ( $V$  und  $AB$ ) zu ermitteln, indem man  $Sc \parallel l$  und  $cM \parallel OY_1$  zieht (Fig. 9).

Es ist leicht einzusehen, daß, wenn die geradlinige  $V$ -Kurve parallel der Geraden  $l$ , deren Gleichung  $x - ay = 0$  lautet, gewählt wird, die angegebene graphische Ermittlung der entsprechenden Punkte der  $AB$ -Kurve unmöglich wird, da letztere eine zur  $Y_1$ -Achse (Fig. 9) parallele Gerade ist, welche die  $V$ -Kurve in der  $X$ -Achse schneidet. Hieraus folgt, daß man bei der Wahl der  $V$ -Kurve gewissen praktischen Rücksichten Rechnung tragen muß, und es nicht immer zweckentsprechend sein wird, sämtliche  $V$ -Kurven in eine zu verschmelzen.

Ganz besonders bequem ist es, die  $V$ -Kurve in der Form einer zur  $X$ -Achse parallelen Geraden zu wählen, etwa  $y = z$ . Laut der zweiten der Beziehungen (33) wird sodann die  $AB$ -Kurve ebenfalls derselben Achse parallel und ihre Gleichung wird  $B = zb$ .

Die angeführten Konstruktionen und die geometrische Deutung der Konstanten  $A$  und  $B$  sind unter der Voraussetzung gültig, daß die Gleichungen der konjugierten  $C$ -Kurven (31) derart geschrieben sind, daß der Koeffizient vor  $x$  gleich 1 ist. Ähnliche Konstruktionen und Deutungen würden sich ergeben, wenn der Koeffizient vor  $y$  gleich 1 gewählt würde, wobei selbstverständlich die Konstanten auf der rechten Seite durch neue ersetzt werden müßten; es werden aber hierdurch keinerlei neue Vorteile geboten. Es könnte jedoch auch der Koeffizient vor  $iy$  gleich 1 gemacht werden. Die Gleichungen der konjugierten  $C$ -Kurven lauteten dann etwa

$$(31 \text{ bis}) \quad \begin{cases} gx - hy - iy = A - Bi \\ gx - hy + iy = A + Bi. \end{cases}$$

Der reelle Schnittpunkt  $s$  der beiden imaginären Geraden ist mit demjenigen der reellen

$$(32 \text{ bis}) \quad gx - hy = A; \quad y = B$$

identisch. Einer geradlinigen  $V$ -Kurve entspricht auch hier eine geradlinige  $AB$ -Kurve, falls die Konstanten  $A$  und  $B$  in derselben Weise wie früher als Koordinaten eines Punktes angesehen werden. Wie jedoch aus der zweiten der Beziehungen (32 bis) zu erkennen ist, haben die entsprechenden Punkte der  $V$ - und der  $AB$ -Kurve gleiche Ordinaten, was eine wesentliche Vereinfachung bei Ermittlung dieser Punkte zur Folge hat. Selbstverständlich darf nun zur  $V$ -Kurve keine zur  $X$ -Achse parallele Gerade gewählt werden. Auch wird das zweite Verfahren wenig brauchbar, wenn die geradlinige  $AB$ -Kurve mit der  $X$ -Achse einen kleinen Winkel einschließt.

Wir wollen hier noch auf eine unter Umständen wichtige Vereinfachung aufmerksam machen, welche die Methode der variierten  $C$ -Kurven gestattet. Der Einfachheit wegen denken wir uns die Funktion  $f(x, y)$  im Integral (I) als algebraischen rationalen Bruch, dessen Zähler in  $2\sigma$  Faktoren von der Form  $x - ay \pm iby$  und dessen Nenner in  $2\mu$  Faktoren von der Form  $x - cy \pm idy$  zerlegt ist. Es wird eine gemeinsame  $V$ -Kurve und  $\sigma > \mu$  vorausgesetzt.<sup>1)</sup> Bezeichnen wir die von den Werten  $\alpha$  abhängige Konstante mit  $w$  und die komplexen Konstanten im Zähler durch  $A \pm Bi$ , im Nenner durch  $C \pm Di$ , so erhalten wir an Stelle von (6, V) den allgemeineren Ausdruck

$$(6, VI) \quad S = \frac{2w \cdot m^n}{n+2} \int \frac{H^{n+2} \cdot \prod_{i=1}^{\sigma-\mu} (A_i^2 + B_i^2)}{2m^n r^{2(\sigma-\mu)} \prod_{i=1}^{\mu} (C_i^2 + D_i^2)} d\varphi,$$

worin  $H$  das Zeichen eines Produktes ist.

Die Einführung der Konstanten  $m$ , welche den Ausdruck für  $u$  linear gestalten soll, ist mit dem Übelstande behaftet, daß durch sie die Anzahl der graphischen Multiplikationen vermehrt wird. Bei Verwendung von  $C$ -Kurven zweiten Grades (Ellipsen) wäre die Zahl der Multiplikationen  $\sigma$ , nun ist sie  $\sigma + \frac{1}{2}n$ , oder da  $n$  gerade und zwar  $n = 2(\sigma - \mu)$  ist, so wird die Zahl der graphischen Multiplikationen  $2\sigma - \mu$ .

Dieser Übelstand wird in einfacher Weise gehoben, wenn wir an Stelle der  $A$ -Kurve die dazu inverse Kurve mit dem Modul  $m$  und

1) Andere Fälle werden sich aus dem hier besprochenen ohne Schwierigkeiten ableiten lassen; die Betrachtung derselben würde diese Abhandlung zu weitläufig gestalten.

mit dem Koordinatenursprung als Inversionszentrum verwenden; diese Kurve soll in folgendem als  $J$ -Kurve bezeichnet werden. Ihre Fahrstrahlen  $\rho$  werden aus der Beziehung

$$(37) \quad R\rho = m^2$$

entweder nach Fig. 1 konstruiert, oder die  $J$ -Kurve wird mit Hilfe des als Inversor bekannten Instrumentes gezeichnet. Ersetzen wir im Zähler

von (6, VI)  $R^{\frac{n}{2}} = R^{\sigma-\mu}$  durch den Fahrstrahl der  $J$ -Kurve (37), so erhalten wir

$$(6, VII) \quad S = \frac{2w \cdot m^{2(\sigma-\mu)}}{n+2} \int \frac{R^2}{2} \cdot \frac{R^{\sigma-\mu} \prod_{i=1}^{\sigma-\mu} (A_i^2 + B_i^2)}{\rho^{\sigma-\mu} \cdot r^{2(\sigma-\mu)} \cdot \prod_{i=1}^{\sigma-\mu} (C_i^2 + D_i^2)} d\varphi.$$

Ist nun  $\sigma - \mu$  eine gerade Zahl, so erhalten wir die  $U$ -Kurve durch  $(3\sigma - \mu) : 2$  graphische Multiplikationen, deren Zahl also um  $\frac{1}{2}(\sigma - \mu)$  verringert ist. Sollte  $\sigma - \mu$  eine ungerade Zahl sein, so ergibt das indirekte Verfahren (13) die Zahl von  $(3\sigma - \mu + 1) : 2$  graphische Multiplikationen. Die Zahl der so berechneten Multiplikationen ist um eine zu vermehren, da die Konstruktion der  $J$ -Kurve hinzukommt. Bei der Verwendung von Ellipsen hätten wir zwar nur  $\sigma$  Multiplikationen auszuführen, doch träte die Berechnung der Elemente und die Konstruktion von  $\sigma + \mu$  Ellipsen hinzu, was im ganzen etwa  $2\sigma + \mu$  Multiplikationen gleichgesetzt werden kann. Somit ist der durch die Verwendung von geradlinigen  $V$ -Kurven gebrachte Vorteil etwa einer Verminderung der Zahl der graphischen Multiplikationen um

$$\frac{\sigma + \mu - 2}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma + \mu - 3}{2}$$

gleich zu setzen, je nachdem der eine oder der andere dieser Ausdrücke eine ganze Zahl ist. Diese Ausdrücke gelten auch für den Fall  $\mu > \sigma$  so wie auch (6, VII). Es läßt sich also von Fall zu Fall entscheiden, welches Verfahren vorteilhafter ist. Die  $J$ -Kurve bleibt auch besser weg, wenn  $\sigma - \mu \leq 2$  ist, wobei  $\sigma > \mu$ .<sup>1)</sup>

Wir schließen dieses Kapitel mit einer allgemeinen Betrachtung. Nachdem wir verschiedene Verfahren angegeben haben, welche zur Ermittlung der  $U$ -Kurven dienen, scheint es doch notwendig, klar darüber zu werden, ob letztere von den zur Verwendung gelangten Verfahren abhängig sein könnten und in welcher Beziehung. In den verschiedenen

1) Bei Verwendung des Rechenschiebers darf der konstante Faktor  $m$  in (6, VI) überhaupt fortgelassen werden, denn es ist sodann nicht notwendig,  $u$  linear zu gestalten. Es ist dieses keine unwesentliche Vereinfachung.

Ausdrücken (6, I) bis (6, VII) ist das rechts stehende Integral dem Flächeninhalte eines Sektors der  $U$ -Kurve gleich, und zwar für beliebig zu wählende Integrationsgrenzen, innerhalb welcher  $u^2$  stetig ist. Denken wir uns nun in sämtlichen Ausdrücken den konstanten Faktor gleich gewählt, so muß ein beliebig kleiner, dem Winkel  $d\varphi$  entsprechender Wert eines Sektors der  $U$ -Kurve immer derselbe sein, welches Verfahren auch angewendet wurde. Hieraus folgt, daß die  $U$ -Kurve immer dieselbe bleibt, welchen Verfahrens man sich bei ihrer Konstruktion auch bediene, und daß ihr stetiger Verlauf nicht gestört wird, wenn innerhalb verschiedener Integrationsgrenzen verschiedene Verfahren angewendet werden, vorausgesetzt, daß der konstante Faktor vor dem Integral in den genannten Ausdrücken derselbe bleibt.

Beispiel 2. Das in Fig 7 ermittelte Integral

$$J_1 = \iint (4z^2 + x^2) dx dz$$

soll mit Hilfe einer  $V$ -Kurve konstruiert werden. Die Gleichung der beiden konjugierten  $C$ -Kurven ist:

$$2z \pm ix = A \pm Bi.$$

Statt (32) erhalten wir:  $2z = A$ ;  $x = B$ ; es heißt dies, daß bei gleichen Abszissen die  $AB$ -Kurve doppelte Ordinaten gegenüber der

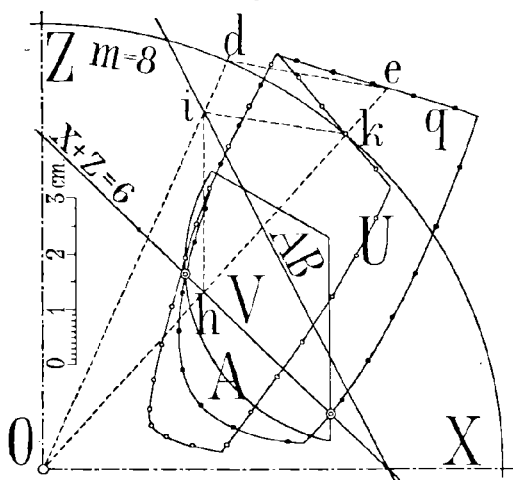
$V$ -Kurve hat. Nehmen wir die letztere zu  $x + z = 6$  an, so ist die Gleichung der  $AB$ -Kurve  $2B + A = 12$ . Laut (7, V) wird nun

$$u = \frac{R^2 \sqrt{A^2 + B^2}}{r m}$$

Es werde  $m = 8$  gesetzt, indem sodann die  $U$ -Kurve mit derjenigen der Fig. 7 identisch wird, weil dort  $a = 8$  gesetzt wurde. Die Konstruktion des Ausdrucks  $R^2/r$  führt auf die  $q$ -Kurve der Fig. 6 zurück. Dem Fahrstrahl  $Oh$  der  $V$ -Kurve (Fig. 10) entspricht  $Oe$  der

$q$ -Kurve und  $Oi$  der  $AB$ -Kurve. Schneidet letztere den Kreis vom Halbmesser  $m = 8$  im Punkte  $d$ , so ergibt sich durch  $ik \parallel de$  der Punkt  $k$  der  $U$ -Kurve. Die Abweichungen in der Form der beiden  $U$ -Kurven

Fig. 10.



(Fig. 7 und Fig. 10), welche theoretisch identisch sein müßten, überschreiten nicht das Maß der unvermeidlichen Ungenauigkeiten der Zeichnung. Der durch mehrmaliges Planimetrieren als Mittelwert gefundene Flächeninhalt erwies sich für beide Kurven identisch zu 15,41 cm<sup>2</sup>.

### V. Zusammengesetzte charakteristische Kurven oder Z-Kurven.

Wir bemerkten schon, daß die ganze Methode der charakteristischen Kurven darauf beruht, daß, nachdem das Integral (I) zum Ausdruck (3) geworden, hierin  $\Phi$  durch die Fahrstrahlen der charakteristischen Kurven ausgedrückt werden kann. Es sind nun die bis jetzt betrachteten Kurven nicht die einzigen dieser Bedingung genügenden. Jede Kurve, deren Gleichung in der Form

$$(38) \quad f(x, y) = \theta(x^2 + 2xy \cos \omega + y^2)$$

erscheint, könnte z. B. an die Stelle der einfachen C-Kurven treten. Es ist hierin  $\theta$  das Zeichen einer beliebig zu wählenden Funktion, doch praktisch können nur solche Funktionen in Betracht kommen, die eine einfache Konstruktion der Fahrstrahlen der U-Kurve ermöglichen. Es ist deshalb in allgemeiner Form kaum etwas über die Wahl der Funktion  $\theta$  zu sagen, weil sie von Fall zu Fall eine besondere wird, doch werden uns hierüber einige Anwendungen belehren.

Gehen wir zu Polarkoordinaten über, so erhalten wir statt (38)

$$(39) \quad r^n \Phi = \theta(r).$$

Hieraus muß  $\Phi$  bestimmt und in (3) eingesetzt werden.

Es werde bemerkt, daß  $\theta$  nie eine homogene Funktion ebenfalls  $n$ ten Grades von  $r$  werden darf, weil dann die Kurve (39) in Geraden zerfiel, die sich im Koordinatenursprung schneiden.

Die durch Gleichung (38) gegebene Kurve nennen wir eine zusammengesetzte charakteristische Kurve, kürzer Z-Kurve. Nach dem Vorbild der C-Kurven lassen sich auch hier getrennte und variierte C-Kurven verwenden.

Beispiel 3. Bei Ermittlung des Deviationsmomentes einer ebenen Figur sowohl mittels der einfachen, als auch zweier getrennten geradlinigen C-Kurven, werden die Fahrstrahlen der letzteren bei einer vollen Umdrehung viermal unendlich groß. Nun wollen wir die Z-Kurve  $xy = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a^2)$  verwenden. Die Gleichung läßt sich leicht in die Form  $(x - y)^2 - a^2 = 0$  bringen und zerfällt in die Gleichungen zweier parallelen Geraden:  $x - y = \pm a$ , welche mit der X-Achse einen Winkel von 45° einschließen. Durch Übergang zu Polarkoordinaten erhalten wir in schon bekannter Weise

$$\Phi = \frac{r^2 - a^2}{2r^2}$$

und folglich

$$\iint xy dx dy = \frac{1}{4} \int \frac{R^4(r^2 - a^2)}{2r^3} d\varphi = \frac{m^2}{4} \int \frac{R^4}{m^2} d\varphi - \frac{a^2}{4} \int \frac{R^4}{2r^2} d\varphi,$$

worin  $m$  eine beliebig zu wählende Konstante ist.

Die  $U$ -Kurve für das erste dieser Integrale wird mit Hilfe eines Kreises vom Halbmesser  $m$ , für das zweite mit Hilfe der genannten parallelen Geraden konstruiert. Der Fahrstrahl der  $Z$ -Kurve wird bei einer vollen Umdrehung bloß zweimal unendlich groß.

Noch günstiger gestalten sich die Verhältnisse, wenn wir eine variierte  $Z$  Kurve benützen. Die variierte Konstante  $a$  wird ermittelt, wenn wir durch den entsprechenden Punkt einer beliebig gewählten  $V$ -Kurve eine Gerade, welche die diesem Punkte zugeordnete  $Z$ -Kurve ist, unter dem Winkel von  $45^\circ$  ziehen. Diese Gerade schneidet sodann die  $X$ -Achse im Abstände  $a$  vom Koordinatenursprung. Nehmen wir zur  $V$ -Kurve die  $A$ -Kurve selbst, so ist  $r = R$  zu setzen, und wir schreiben

$$(40) \quad \iint xy dx dy = \frac{m^2}{4} \int \frac{R^4}{2m^2} d\varphi - \frac{m^2}{4} \int \frac{R^2 a^2}{2m^2} d\varphi.$$

Die Fahrstrahlen der beiden  $U$ -Kurven werden entsprechend

$$u_1 = R^2/m \text{ und } u_2 = Ra/m,$$

die Konstruktion wird genügend einfach und bequem.

In Fig. 11 ist das Deviationsmoment des Querschnittes eines  $U$ -Eisens, auf zwei Koordinatenachsen  $OX$  und  $OY$  bezogen, die mit dessen Hauptträgheitssachsen den Winkel von  $45^\circ$  einschließen, ermittelt worden. Hierbei wurde  $m = 8$  cm gesetzt und ein Kreis von diesem Halbmesser, dessen Mittelpunkt  $O$  ist, gezogen. Das erste der Integrale (40) ist für die obere Hälfte des Querschnitts durch den Flächeninhalt der Kurve I zu  $33,20$  cm<sup>2</sup> der Zeichnung entnommen, das zweite für die untere Hälfte derselben der Kurve II zu  $5,47$  cm<sup>2</sup>. Das Deviationsmoment für den ganzen Querschnitt wird somit

$$E = \frac{2 \cdot 8^2}{4} \{ 33,20 - 5,47 \} = 887,36 \text{ cm}^4.$$

Aus der Tabelle der  $U$ -Eisen wurden zum Vergleich die Hauptträgheitsmomente des Querschnittes  $J_1 = 1911$  cm<sup>4</sup> und  $J_2 = 148$  cm<sup>4</sup> entnommen. Laut einer bekannten Beziehung ergibt sich hieraus  $E = \frac{1}{2} (J_1 - J_2) = 881,5$  cm<sup>4</sup>.

Ist  $e$  ein Punkt der  $A$ -Kurve (Fig. 11) so wird der entsprechende Punkt der Kurve II folgendermaßen konstruiert. Ziehen wir die Gerade  $ec$  unter  $45^\circ$  zu  $OX$ , so ist  $Oc = Ob = a$ . Indem  $Om = m$  ist,



ziehen wir  $cd \parallel me$  bis zum Schnitt mit  $Oe$  in  $d$ . Letzterer ist sodann ein Punkt der gesuchten Kurve II.

Wir wollen nun die wichtigste Verwendung der  $Z$ -Kurven betrachten. Bis jetzt lief unser Betreiben darauf hinaus, die einfache  $C$ -Kurve höheren Grades durch getrennte Gerade zu ersetzen. Da jedoch die Fahrstrahlen einer Geraden bei einer vollen Umdrehung zweimal unendlich groß werden, wird dieser Umstand immer lästig empfunden, wenn auch die Konstruktion hierdurch nicht vollständig unmöglich wird.

Diese Geraden lassen sich durch Kreise, deren sämtliche Fahrstrahlen endliche Werte haben und die wir  $Z$ -Kreise nennen wollen, ersetzen. Die geradlinigen  $V$ - und  $AB$ -Kurven bedürfen eines solchen Ersatzes nicht, denn die willkürliche Wahl der  $V$ -Kurve bedingt es, daß letztere etwa als ein geschlossenes Polygon gewählt werden darf, wodurch die  $AB$ -Kurve ebenfalls zu einem solchen wird.

Wir wollen, der Einfachheit wegen, den Fall betrachten, daß die Funktion  $f(x, y)$  im Integral (I) ein rationaler algebraischer Bruch sei, dessen Zähler in  $\sigma$  Polynome von der Form  $ax + by$ , dessen Nenner in  $\mu$  Polynome von der Form  $a'x + b'y$  zerlegbar sind, worin  $a, b, a'$  und  $b'$  reelle Werte haben. Mit  $\Phi$  und  $\Phi'$  werden die den Polynomen entsprechenden Funktionen des Polarwinkels  $\varphi$  im Zähler und Nenner des an Stelle von (3) tretenden Integrales bezeichnet. Wir erhalten sodann:

$$(41) \quad S = \frac{1}{n+2} \int \frac{R^{n+2} \Phi_1 \cdot \Phi_2 \dots \Phi_\sigma}{\Phi'_1 \cdot \Phi'_2 \dots \Phi'_\mu} d\varphi$$

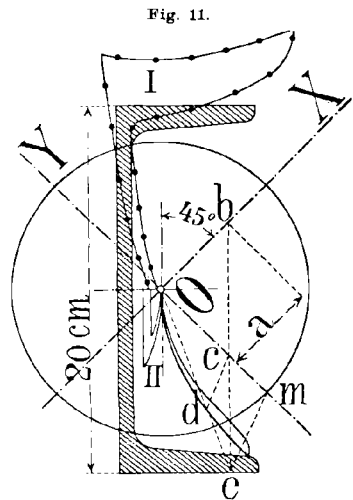
Die Funktionen  $\Phi$  und  $\Phi'$  könnten durch die entsprechenden Fahrstrahlen geradliniger  $C$ -Kurven, deren Gleichungen  $ax + by = A$  lauteten, ausgedrückt werden. Statt einer solchen schreiben wir jedoch die Gleichung eines durch den Koordinatenursprung gehenden Kreises:

$$(42) \quad ax + by = \frac{x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega}{2M},$$

worin  $M$  einen beliebigen konstanten Wert hat.

Betrachten wir die Gleichung dieses Kreises in der Form

$$(43) \quad x^2 + y^2 + xy \cos \omega - 2aMx - 2bMy = 0,$$



so erhalten wir dessen Mittelpunkt  $c$ , indem wir  $Oa = aM$  und  $Ob = bM$  machen (Fig. 12) und sodann die Normalen in  $a$  und  $b$  zu den entsprechenden Achsen sich schneiden lassen.

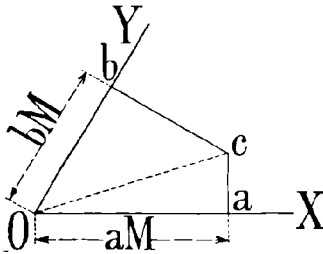
Führen wir in (42) Polarkoordinaten ein, so erhalten wir:

$$(44) \quad \Phi = \frac{r}{2M}$$

worin  $r$  der Fahrstrahl des  $Z$ -Kreises ist. Hierdurch wird (41), wenn wir die entsprechenden Bezeichnungen beibehalten, da  $n = \sigma - \mu$  ist zu:

$$S = \frac{M'_1 \cdot M'_2 \cdot M'_\mu \cdot m^{2(\sigma-\mu)}}{2^{\sigma-\mu-1} (n+2) M_1 \cdot M_2 \dots M_\sigma} \int \frac{R^2}{2} \cdot \frac{R^{\sigma-\mu} r_1 \cdot r_2 \dots r_\sigma}{r'_1 \cdot r'_2 \dots r'_\mu \cdot m^{2(\sigma-\mu)}} d\varphi.$$

Fig. 12.



Es ist hierin  $m$  wiederum eine beliebige konstante lineare Größe, welche wir einführen, um  $u$  linear zu gestalten. Wir sehen sofort, daß die Anzahl der graphischen Multiplikationen  $2\sigma - \mu$  wird, während sie für geradlinige  $C$ -Kurven nur  $\sigma$  war, unter der Annahme  $\sigma > \mu$ . Es würde somit die Verwendung von  $Z$ -Kreisen jeden praktischen Wert verlieren, wenn wir nicht zur Inversion

der  $A$ -Kurve laut (37) griffen. Führen wir nun an Stelle von  $R^{\sigma-\mu}$  die Fahrstrahlen der  $I$ -Kurve ein, so erhalten wir

$$(6 \text{ VIII}) \quad S = \frac{M'_1 \cdot M'_2 \dots M'_\mu \cdot m^{2(\sigma-\mu)}}{2^{\sigma-\mu-1} (n+2) M_1 \cdot M_2 \dots M_\sigma} \int \frac{R^2}{2} \cdot \frac{r_1 \cdot r_2 \dots r_\sigma}{\rho^{\sigma-\mu} \cdot r'_1 \cdot r'_2 \dots r'_\mu}$$

Dieser Ausdruck ist sowohl für  $\sigma > \mu$  als auch für  $\sigma < \mu$  gültig.

Wir erkennen, daß der Konstruktion der  $I$ -Kurve abgerechnet der Verwendung von  $Z$ -Kreisen dieselbe Anzahl graphischer Multiplikationen anhaftet, wie derjenigen von geradlinigen  $C$ -Kurven.

Es möge noch hinzugefügt werden, daß man zur Verwendung von  $Z$ -Kreisen auch durch Inversion der geradlinigen  $C$ -Kurven gelangen könnte.

Beispiel 4. Das Deviationsmoment des Querschnittes eines  $Z$ -Eisens (Fig. 13) um die  $OX$ - und  $OY$ -Achse möge mit Hilfe von  $Z$ -Kreisen ermittelt werden. Da  $O$  der Schwerpunkt des  $Z$ -Eisens ist, so bleibt das Deviationsmoment unverändert, wenn die  $Y$ -Achse durch eine mit ihr parallele  $O_1 Y_1$  ersetzt wird; die Konstruktion wird jedoch hierdurch bequemer.

Die Inversionskonstante  $m$  wurde zu 12 cm angenommen und dem entsprechend die  $J$ -Kurve (in der Zeichnung mit  $I$  bezeichnet) mit Hilfe des Halbkreises vom Durchmesser 24 cm konstruiert.

Hierbei treten an Stelle der Geraden, welche teilweise die *A*-Kurve begrenzen, durch den Koordinatenursprung gehende Kreise, deren größter Fahrstrahl zu ersteren normal ist. Zwei derselben, *b* und *c*, von den Halbmessern 19,25 cm und 16,56 cm, deren Mittelpunkte in die Koordinatenachsen fallen, wurden zu *Z*-Kreisen gewählt. Ihre Gleichungen schreiben wir

$$x = \frac{x^2 + y^2}{M_1} \quad \text{und} \quad y = \frac{x^2 + y^2}{M_2}.$$

Hierbei ist  $M_1 = 9,675$  cm und  $M_2 = 8,28$  cm zu setzen. Das Deviationsmoment schreiben wir nach (6, VIII):

$$E = \frac{12^4}{2 \cdot 4 \cdot 9,68 \cdot 8,28} \int \frac{R^2 \cdot r_1 \cdot r_2}{2 \varrho^2} d\varphi.$$

Sodann machen wir:  $p = r_1 \frac{R}{\varrho}$  und  $q = r_2 \frac{R}{\varrho}$ ; letzteres ist für den unterhalb der *X*-Achse liegenden Teil des Querschnittes als negativ zu betrachten, indem an

Stelle des Kreises *c* der Kreis *c*<sub>1</sub> tritt, dessen Fahrstrahlen als negativ in Rechnung zu ziehen sind. Weil für diesen Teil des Querschnittes das Produkt *p**q* negativ, und das negative Vorzeichen vor dasjenige des Integrales vor dasjenige des Integrals zu setzen ist, spalten wir letzteres in zwei, entsprechend den oberhalb und unterhalb der *X*-Achse liegenden Integrationsgebieten. Die *p*- und die *q*-Kurve sind durch die Bezeichnungsweise

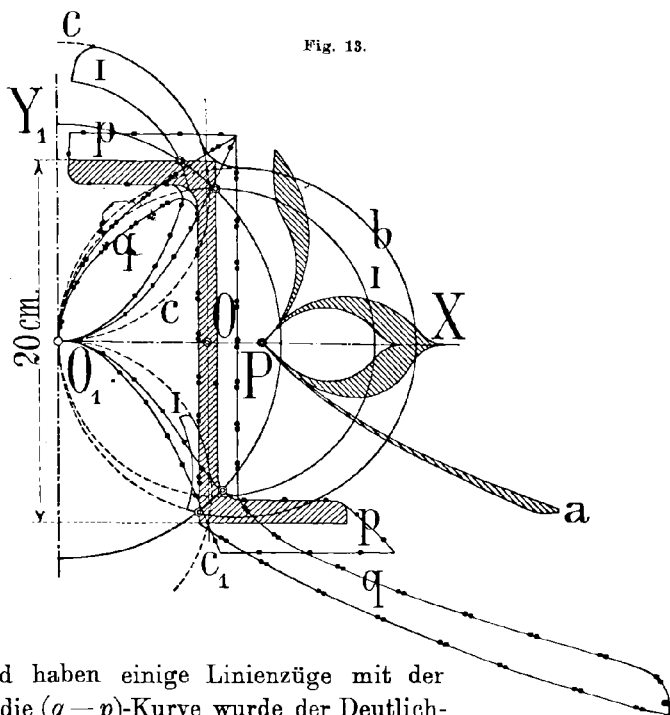


Fig. 13.

sichtbar gemacht und haben einige Linienzüge mit der *A*-Kurve gemeinsam; die (*q* - *p*)-Kurve wurde der Deutlichkeit wegen vom Pol *P* aus aufgetragen; das Vorzeichen der Werte *q* - *p* blieb außer acht, weil es für den Flächeninhalt ohne Bedeutung ist; letzterer ist schraffiert angedeutet. Oberhalb der *X*-Achse erhalten wir:  $F_p = 28,80$  cm<sup>2</sup>;  $F_q = 29,50$  cm<sup>2</sup>;  $F_{q-p} = 13,40$  cm<sup>2</sup>, somit laut (13):

$F = 22,45 \text{ cm}^2$ . Unterhalb der  $X$ -Achse wird:  $F'_p = 31,07 \text{ cm}^2$ ;  $F'_q = 68,60 \text{ cm}^2$ ;  $F'_{q-p} = 12,40 \text{ cm}^2$ , somit  $F' = 43,63 \text{ cm}^2$ . Der Wert des Flächeninhaltes  $F$  in (9) muß also zu  $22,45 - 43,63 = -21,18 \text{ cm}^2$  gesetzt werden. Somit ergibt sich nach Berücksichtigung des Proportionalitätsfaktors:  $E = -685 \text{ cm}^4$ .

Der erhaltene Wert läßt sich mit Hilfe der Tabellen für  $Z$ -Eisen kontrollieren. Wir entnehmen denselben die Hauptträgheitsmomente desselben Querschnittes:  $J_1 = 2509 \text{ cm}^4$  und  $J_2 = 147 \text{ cm}^4$ , wobei die dem ersten entsprechende Trägheitsachse mit unserer Achse  $OX$  den Winkel  $\varphi$  von  $17^\circ 23'$  einschließt. Hieraus erhalten wir:

$$E = -\frac{1}{2} \{J_1 - J_2\} \sin 2\varphi = -674 \text{ cm}^4.$$

Die Übereinstimmung muß als gut bezeichnet werden, wenn wir hinzufügen, daß die Zeichnung im Maßstab 1:2 ausgeführt wurde, jeder Fehler im Flächeninhalt also in vierfacher Vergrößerung zur Geltung kam.

Zu gleicher Zeit werde bemerkt, daß von den vier erwähnten Konstruktionen der Deviationsmomente, welche wir mit Hilfe unserer Methode abgeleitet haben, diese die umständlichste, diejenige der Fig. 11 die einfachste und somit empfehlenswert ist. Es ist letztere jedoch eine Sonderkonstruktion, wie dieses aus der Ableitung der betreffenden  $Z$ -Kurve zu erkennen ist, während die Verwendung von  $Z$ -Kreisen ganz allgemein stattfinden kann.

## VI. Hauptstrahlen und Nebenstrahlen; unendlich große Werte der Funktion $f(x, y)$ innerhalb des Integrationsgebietes.

Setzen wir die Funktion  $f(x, y)$  oder den umgekehrten Wert derselben  $1:f(x, y)$  gleich Null, so erhalten wir die Gleichung der geometrischen Örter, für welche die Funktion  $f(x, y)$  im Integral (I) gleich Null oder unendlich groß wird. Es ist leicht einzusehen, daß jede dieser Kurven in eine Anzahl sich im Koordinatenursprung schneidender Geraden zerfällt. Denn es gilt die Beziehung

$$(45) \quad f(x, y) = \varrho^n \Phi,$$

worin  $\Phi$  denselben Wert wie in (3) erhält,  $\varrho$  aber (1), den Koordinatenursprung und die unendlich ferne Gerade ausgenommen, weder Null noch unendlich groß ist. Also muß für endliche Werte von  $\varrho$  zugleich mit der Funktion  $f(x, y)$  auch die Funktion  $\Phi$  Null oder unendlich groß werden. Da jedoch  $\Phi$  eine Funktion einer einzigen Veränderlichen, des Polarwinkels  $\varphi$  ist, so kann dieses nur für bestimmte Werte des letzteren zutreffen. Die unter diesen Winkeln durch den Koordinatenursprung gezogenen Geraden sind die beiden

obengenannten geometrischen Örter und sollen als Hauptstrahlen bezeichnet werden. Durch Vergleich von (5) und (7) ist nun leicht festzustellen, daß der in einen Hauptstrahl fallende Fahrstrahl der  $U$ -Kurve entweder gleich Null oder unendlich groß ist, je nachdem der erste oder der zweite Fall bei  $\Phi$  zutrifft. Eine Ausnahme könnte nur in dem Falle stattfinden, wo einer der Hauptstrahlen  $\Phi = \infty$  die  $A$ -Kurve im Koordinatenursprung berührte, also  $R = 0$  wäre.

Es ist zu erkennen, daß, die Stetigkeit der Funktion  $f(x, y)$  vorausgesetzt, die verschiedenen Integrationsgebiete, in die wir das anfänglich gegebene Gebiet zu trennen haben, weil wir in jedem derselben das Integral nur nach absolutem Wert ausmitteln, immer durch die Hauptstrahlen begrenzt werden, obwohl nicht jeder Hauptstrahl durchaus zwei Gebiete trennt, innerhalb welcher die Funktion  $f(x, y)$  verschiedene Vorzeichen hat.

Sollte die Funktion  $f(x, y)$  für endliche Werte der Koordinaten  $x, y$  unstetig werden, ohne daß hierdurch ihre Eindeutigkeit beeinträchtigt wird, so werden die Gebiete, innerhalb welcher sie stetig ist, ebenfalls durch im Koordinatenursprung sich schneidende Gerade begrenzt, denn  $\varrho$  in (45) ist immer stetig, und es muß  $\Phi$  unstetig werden.

Diese Geraden, welche Gebiete begrenzen innerhalb deren  $\Phi$  stetig ist, nennen wir Nebenstrahlen. Jeder von ihnen trennt zwei Gebiete, die eine getrennte Ausführung der Integration erfordern.

Sind die Haupt- und die Nebenstrahlen gezogen, so läßt sich leicht übersehen, in wieviel Einzelgebiete das anfängliche Integrationsgebiet zu spalten, und welches Vorzeichen dem Integral in jedem derselben beizulegen ist; letzteres erkennt man, indem man das Vorzeichen der Funktion  $f(x, y)$  für einen beliebigen Wert von  $x$  und  $y$  innerhalb des Einzelgebietes ermittelt.

Ist das Integral (I) auf ein Einzelgebiet bezogen, welches durch einen oder zwei Hauptstrahlen  $\Phi = \infty$  begrenzt ist, so könnte es nur dann einen endlichen Wert annehmen, wenn diese Hauptstrahlen die Asymptoten der  $U$ -Kurve bilden, was nicht unbedingt zutreffen muß. Doch da hierbei der Fahrstrahl der  $U$ -Kurve unendlich groß wird, so läßt sich in diesem Falle auch ihr Flächeninhalt nicht mit dem Planimeter ablesen. Sollte jedoch das Integral innerhalb des Einzelgebietes auch unendlich groß werden, so könnte es sich mit einem der auf ein anderes Einzelgebiet bezogenen bis auf einen endlichen Wert decken. Es soll nun unsere Aufgabe sein, diese letzten Werte durch bequem zu planimetrierende Flächen darzustellen. Dieselben Mittel lassen sich dann auch auf den Fall anwenden, wo die asymptotische Annäherung der  $U$ -Kurve an den Hauptstrahl einen endlichen Wert des Integrales

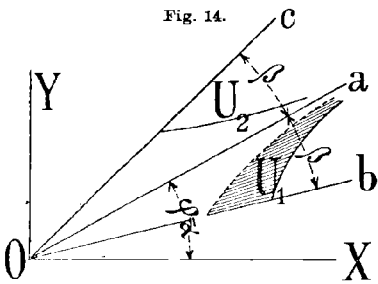
innerhalb des Einzelgebietes zur Folge haben könnte. Wir wollen jedoch diese Aufgabe durch die Voraussetzungen des IV. Kapitels über den Charakter der Funktion  $f(x, y)$  begrenzen. Es ist also die Funktion  $f(x, y)$  als Produkt linearer reeller Polynome von der Form  $ax + by$  und ebenfalls linearer, jedoch komplex konjugierter Polynome von der Form  $x - ay \pm iby$  und gewisser Konstanten aufzufassen. Setzen wir eines dieser linearen Polynome gleich Null, so erhalten wir die Gleichung eines Hauptstrahles. Den in komplexer Form erscheinenden Polynomen entsprechen jedoch Hauptstrahlen, welche in das imaginäre Gebiet fallen und mit den übrigen nur den Koordinatenursprung gemeinsam haben. Da wir dieses Gebiet aus unseren Betrachtungen ausschließen, so brauchen wir auch den entsprechenden Hauptstrahlen keine weitere Beachtung zu schenken. In den reellen Hauptstrahlen wird  $\Phi$  und zugleich der Fahrstrahl der  $U$ -Kurve gleich Null oder unendlich groß, je nachdem der entsprechende Faktor  $ax + by$  zu einer positiven oder negativen Potenz erhoben wird. Ist letztere eine ganze Zahl, so können wir auch von zusammenfallenden Hauptstrahlen reden und bemerken, daß, wenn die Zahl derselben gerade ist, die Funktion  $f(x, y)$  von beiden Seiten derselben dasselbe Vorzeichen hat; ist sie jedoch ungerade, so wechselt letztere das Vorzeichen beim Durchschreiten des Hauptstrahles. Nebenstrahlen ergeben sich nicht, da sämtliche Faktoren stetig sind.

Denken wir uns den Hauptstrahl  $Oa$  (Fig. 14) unter dem Winkel  $\alpha$  zur  $X$ -Achse geneigt und das entsprechende Polynom  $ax + by$  zur negativen Potenz  $-m$  erhoben. Wir schreiben dann

$$(46) \quad F(x, y) = (ax + by)^m \cdot f(x, y)$$

und bemerken, daß

$$(47) \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{b} \quad 1)$$



ist. Denken wir uns beiderseits von  $Oa$  zwei unter dem Winkel  $\beta$  zu letzterem geneigte Fahrstrahlen  $Ob$  und  $Oc$ , die innerhalb der Winkel zu liegen kommen, welche die zu  $Oa$  nächstgelegenen Hauptstrahlen mit demselben bilden, so bleibt unter den erwähnten Voraussetzungen das Vorzeichen der Funktion  $F(x, y)$  innerhalb des Winkels  $bOc$  unverändert.

Untersuchen wir nun den Flächeninhalt des Sektors der  $U$ -Kurve zwischen den Fahrstrahlen  $Ob$  und  $Oa$ . Bezeichnen wir mit  $\Phi'$  die-

1) Die weiteren Betrachtungen werden der Einfachheit wegen unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Achsenkreuzes ausgeführt; die Folgerungen für ein schiefwinkeliges werden sich ohne Schwierigkeiten herausziehen lassen.

jenige Funktion des Polarwinkels  $\varphi$ , welche der ebenfalls homogenen Funktion  $F(x, y)$  entspricht, so erhalten wir an Stelle von (3)

$$(48) \quad S_1 = \frac{1}{n+2} \int_{\alpha-\beta}^{\alpha} \frac{R^{n+2} \Phi' d\varphi}{(a \cos \varphi + b \sin \varphi)^m} \cdot 1)$$

Hierin läßt sich bekannterweise

$$(49) \quad a \cos \varphi + b \sin \varphi = A \sin(\alpha - \varphi)$$

setzen, worin  $A = +\sqrt{a^2 + b^2}$  ist und  $\alpha$  der Beziehung (47) genügt. Setzen wir nun  $\alpha - \varphi = \psi$  und  $W_1 = R^{n+2} \Phi'$ , worin wir nun  $W_1$  als Funktion von  $\psi$  betrachten dürfen, so wird

$$(50) \quad S_1 = \frac{1}{(n+2)A^m} \int_0^{\beta} \frac{W_1 d\psi}{\sin^m \psi}$$

Um den weiteren Untersuchungen den Weg zu ebnen, betrachten wir das Verhältnis  $k$  zweier Integrale

$$k = \int_a^b zy dx : \int_a^b y dx,$$

worin  $y$  und  $z$  reelle, innerhalb der Integrationsgrenzen endliche Funktionen der Veränderlichen  $x$  sind, welche für Werte von  $x$ , die sich endlich, wenn auch wenig von  $x=b$  unterscheiden, stetig verlaufen; hierbei setzen wir voraus, daß  $y$  für  $x=b$ , unendlich groß und  $z=z_b$  wird, und das Integral  $\int_a^b y dx$  ebenfalls unendlich groß ist. Es soll bewiesen werden, daß  $k = z_b$  ist.

Denken wir uns die Funktionen  $y$  und  $z$  durch die Gleichungen  $y = \varphi(x)$  und  $z = \psi(x)$  gegeben, so können letztere als Gleichungen zweier Zylindermantelflächen (Fig. 15) betrachtet werden, deren Projektionen  $ab$  und  $cd$  auf die Koordinatenebenen denselben Gleichungen entsprechen. Denken wir uns dann das Gewicht  $\delta$  pro Flächeneinheit

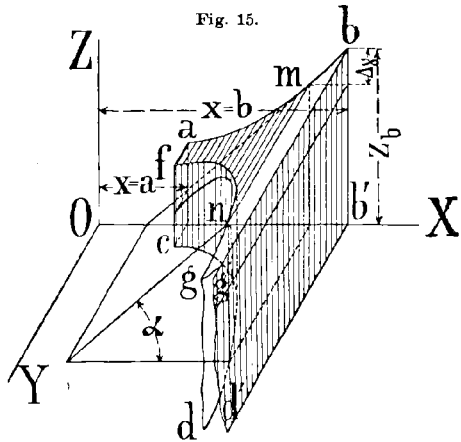


Fig. 15.

1) Der Sonderfall  $n+2=0$ , wird außer im II. Kapitel nie einer speziellen Untersuchung unterzogen; es würde dieses die Abhandlung zu umständlich gestalten; doch sind der Betrachtung desselben die Wege genügend geebnet.

der Mantelfläche  $z = \psi(x)$  derart von  $x$  abhängig, daß  $\delta = a \cos \alpha$ , worin  $a$  konstant und  $\alpha$  der absolute Wert des Winkels ist, den die  $XOY$ -Ebene mit der diese Mantelfläche in der Geraden  $mn$  berührenden Ebene einschließt, so dürfen wir das Verhältnis der genannten Integrale als Schwerpunktskoordinate  $z$  desjenigen Stückes derselben Mantelfläche auffassen, das durch die Fläche  $y = \varphi(x)$  und die Ebenen  $x = a$ ,  $x = b$  und  $y = 0$  ausgeschnitten wird, wobei wir vorläufig voraussetzen, daß  $y$  innerhalb der Integrationsgrenzen das Vorzeichen nicht wechselt.

Betrachten wir die durch die Gleichung  $z = z_0 - \Delta\gamma$  gekennzeichnete Ebene, worin  $\Delta\gamma$  eine kleine Größe ist. Sie könnte die Zylinderfläche in mehreren Mantellinien schneiden, von denen  $mn$  die zur unendlich langen nächste sei. Das statische Moment in bezug auf diese Ebene des Flächenstückes  $afmn$  ist endlich. Die Schwerpunktskoordinate  $z$  des Flächenstückes  $mnb'g'$  hat von der Ebene  $z = z_0 - \Delta\gamma$  einen endlichen Abstand, solange  $\Delta\gamma$  endlich, wie dieses ja schon für eine Fläche, deren sämtliche Mantellinien endlich sind, zutreffen mußte; das Flächenstück  $mnb'g'$  ist jedoch unendlich groß, da letzteres schon für seine Projektion vorausgesetzt ist. Solange also  $\Delta\gamma$  endlich ist, bleibt das statische Moment des rechts von  $mn$  liegenden Flächenstückes unendlich groß. Somit muß für die zu  $OZ$  senkrechte Schwerpunktschwerpunktsebene  $\Delta\gamma$  unendlich klein werden, womit der Beweis dafür erbracht ist, daß unter den gemachten Voraussetzungen

$$(51) \quad k = \int_a^b zy dx : \int_a^b y dx = z_0$$

ist. In ähnlicher Weise wird bewiesen, daß der Schwerpunkt desselben zylindrischen Flächenstückes  $fabg$  bis auf eine unendlich kleine Größe in die Ebene  $x = b$  und somit in die unendlich lange Mantellinie fällt.

Nunmehr muß der Beweis für die Richtigkeit der Beziehung (64) auch auf den Fall ausgedehnt werden, daß  $y$  innerhalb der Integrationsgrenzen das Vorzeichen wechselt. Die vorigen Betrachtungen sind nur insofern abzuändern, als wir auch die einem negativen  $y$  entsprechenden Flächenstücke als positiv betrachten, deren Gewicht pro Flächeneinheit aber negativ machen, also  $\delta = -a \cos \alpha$  setzen, worin  $a > 0$  und für  $\cos \alpha$  dessen absoluter Wert einzusetzen ist. Sodann muß vorausgesetzt werden, daß  $\Delta\gamma$  vorerst ebenfalls endlich, jedoch klein genug gewählt wird, damit  $y$  für sämtliche Mantellinien zwischen  $mn$  und der unendlich langen dasselbe Vorzeichen behält; die weiteren Folgerungen lassen sich sodann mit Leichtigkeit ziehen.



Im folgenden wird öfters der Fall eintreten, daß  $z_b = 0$  ist; es wäre falsch, sodann das  $\int_a^b zy dx$  gleich Null zu setzen. Wir wollen

deswegen diesen Sonderfall eingehender untersuchen. Denken wir uns, es solle das statische Moment desselben Stückes der Mantelfläche in bezug auf eine durch die unendlich lange Mantellinie gelegte und zur  $Z$ -Achse senkrechte Ebene gefunden werden. Nehmen wir letztere als  $XOY$ -Ebene an. In (Fig. 16) sind die beiden Schnittlinien  $ab$  und  $cd$  der beiden Zylinderflächen mit den Koordinatenebenen wiedergegeben. Es ist leicht einzusehen, daß das zu ermittelnde statische Moment, welches

ja gleich  $\int_a^b zy dx$  ist, nicht allgemein gleich

Null gesetzt werden darf, trotzdem, daß der Schwerpunkt bis auf eine unendlich kleine Größe in die unendlich lange Mantellinie fällt. Sonst müßte, und zwar für eine beliebige Form der Kurve  $ab$  und für eine beliebige Lage des Punktes  $m$  auf derselben das statische Moment sowohl der den Kurvenstücken  $ab$  wie auch  $mb$  entsprechenden Flächen gleich Null gesetzt werden und somit würde auch das statische Moment einer beliebigen Zylindermantelfläche, welche dem ganz willkürlich gewählten Kurvenstück  $am$  entspricht, ebenfalls gleich Null.

Es steht der endliche Wert des statischen Momentes in keinem Widerspruch mit (51), wenn wir bedenken, daß in diesem Falle an Stelle von  $z_b$  nicht die absolute Null, sondern eine unendlich kleine

Größe tritt, welche mit dem unendlich großen  $\int_a^b y dx$  multipliziert einen

endlichen Wert ergibt. Für diesen Wert  $Q$  des Integrales  $\int_a^b zy dx$  ist allerdings der gesamte Verlauf der Kurve  $ab$  maßgebend, doch gibt der Verlauf derselben in der Nähe des Punktes  $b$  das Kriterium der Endlichkeit desselben. Wir schreiben

$$Q = \int_a^b zy dx = \int_a^x zy dx + \int_x^b zy dx^1),$$

1) Dieser Ausdruck ist eigentlich nur für den Fall der Eindeutigkeit der Funktionen  $z$  und  $y$  ohne weiteres richtig. Ist  $y$  mehrdeutig, so bleibt er jedoch unverändert, falls wir uns dieses etwa wie ein Durchlochen oder Ausschneiden

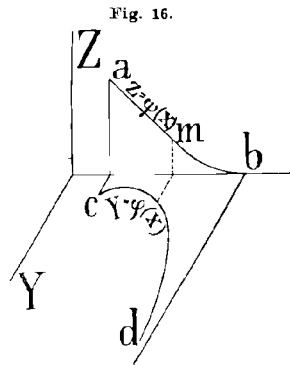


Fig. 16.

worin  $a < x < b$  gedacht wird. Nehmen wir an, daß  $x$  sich dem Grenzwerte  $b$  nähert, so wird

$$(α) \quad Q = \lim_{x=b} \int_a^x zy dx + \lim_{x=b} \int_x^b zy dx = Q + \lim_{x=b} \int_x^b zy dx.$$

Wir bezeichnen

$$(52) \quad h = \lim_{x=b} \int_x^b zy dx = \lim_{x=b} [zy(b-x)].$$

Da nun der Grenzwert von  $y$  unendlich groß ist, so läßt sich erkennen, daß  $h$  nicht durchaus Null zu sein braucht. Ist  $h$  nicht gleich Null, so könnte man der Beziehung (α) nur dadurch gerecht werden, daß  $Q$  unendlich groß gesetzt wird, indem sich aus ihr dann  $h = \infty - \infty$  ergibt. Ist jedoch  $h$  gleich Null, so ist  $Q$  unbedingt endlich, denn unter den gemachten Voraussetzungen über die Stetigkeit der Funktionen  $y$  und  $z$  für Werte von  $x$ , welche sich endlich, wenn auch wenig, von  $x = b$

unterscheiden, kann sich das Integral  $\int_x^b zy dx$  dem Werte Null nur nähern, indem es vorher endliche positive oder negative Werte annimmt. Es gibt also in den Grenzen zwischen  $a$  und  $b$  solche Werte von  $x$ , welche einen endlichen Wert für das Integral  $\int_x^b zy dx$  liefern. Da nun

das Integral  $\int_x^b zy dx$  unter den gemachten Voraussetzungen für  $h < x < b$  immer endlich ist, und  $Q$  als Summe der beiden Integrale erscheint, so ist  $Q$  immer endlich, wenn  $h = 0$  ist.

Somit darf die Beziehung

$$(52 \text{ bis}) \quad h = \lim_{x=b} [zy(b-x)] = 0$$

als notwendige und zugleich genügende Bedingung der Endlichkeit des Integrales  $\int_a^b zy dx$  unter den gemachten Voraussetzungen aufgefaßt werden. Diese Bedingung zeigt, daß das Integral auch dann einen endlichen Wert haben kann, wenn das Produkt  $zy$  unendlich

gewisser Teile der Zylindermantelfläche vorstellen und sodann  $y$  die Gesamtlänge der wirklich in Rechnung zu ziehenden Mantellinienstücke nennen. Mehrdeutigkeit von  $z$  hätte unter der Voraussetzung nur einer unendlich langen Mantellinie zur Folge, daß zum obgenannten Ausdruck noch gewisse endliche Integrale mit konstanten Integrationsgrenzen hinzutreten würden, wodurch der Beweis keineswegs gestört wird.

groß ist; es muß jedoch die Ordnung der Unendlichkeit für letzteres kleiner als  $+ 1$  sein. Für einen unendlich großen Grenzwert dieses Produktes ist eine graphische Ermittlung kaum möglich, für einen endlichen jedoch leicht ausführbar, indem wir etwa die Werte des Produktes  $zy$  als Ordinaten, die Werte von  $x$  als Abszissen auftragen und hierdurch die Begrenzungslinie eines zu planimetrierenden Flächeninhaltes verzeichnen. Wichtiger als (52 bis) ist somit für unsere Zwecke die Betrachtung des Kriteriums der graphischen Konstruktionsfähigkeit, welches auf den endlichen Wert des Ausdruckes

$$(53) \quad H = \lim (zy)_{x=b}$$

zurückzuführen ist.

Wenden wir uns nun wieder dem Integral (50) zu, indem wir in folgendem ganz allgemein die Werte sämtlicher von  $\varphi$  abhängigen Größen, die letztere für  $\varphi = \alpha$  annehmen, mit dem Index  $\alpha$  und innerhalb des Winkels  $bOa$  mit dem Index 1 bezeichnen. Durch die Beziehung (51) erhalten wir, indem wir  $x = \psi$ ,  $y = \sin^m \psi$ ,  $z = W_1$  setzen:

$$(54) \quad S_1 = \frac{1}{(n+2)A^m} \int_0^\beta \frac{W_1 d\psi}{\sin^m \psi} = \frac{W_\alpha}{(n+2)A^m} \int_0^\beta \frac{d\psi}{\sin^m \psi}.$$

Diese Beziehung (51) darf nur angewendet werden, wenn das  $\int_0^\beta \frac{d\psi}{\sin^m \psi}$  unendlich groß ist, oder  $m \geq 1$  ist. Der Grenzwert für  $m$  läßt

sich am einfachsten daraus ableiten, daß sich dieses Integral von einem anderen  $\int_0^\beta \frac{d\psi}{\psi^m}$  nur um einen endlichen Wert unterscheidet. Es könnte

also, für  $m \geq 1$ ,  $S_1$  nur dann endlich werden, wenn  $W_\alpha = 0$  würde. Da jedoch  $W = R^{n+2} \Phi'$  und  $\Phi'$  nur in einem der Hauptstrahlen, den betrachteten ausgeschlossen, zu Null werden kann, so erhält  $S_1$  nur dann einen endlichen Wert, wenn  $R_\alpha = 0$  und  $n + 2 > 0$  ist, also der betrachtete Hauptstrahl die  $A$  Kurve im Koordinatenursprung berührt.

Ehe wir diesen Sonderfall genauer betrachten, untersuchen wir noch den Wert von  $S_1$ , wenn  $0 < m < 1$  und  $W_\alpha$  endlich ist. Wir bedienen uns hierzu des Kriteriums (52), welches für unseren Fall

$$h = \lim \left[ \frac{W_1}{\sin^m \psi} \cdot \psi \right]_{\psi=0} = \lim [W_1 \psi^{1-m}]_{\psi=0}$$

lautet. Da nun  $W_\alpha$  endlich und  $1 - m > 0$  ist, so wird  $h = 0$ . Das Integral ist also endlich.

Das Kriterium der graphischen Konstruktionsfähigkeit schreiben wir, für sämtliche positive Werte von  $m$ , da  $\Phi'_\alpha$  nicht Null ist

$$(55) \quad H = \lim_{\psi \rightarrow 0} \left[ \frac{W_1}{\sin^m \psi} \right]_{\psi=0} = \lim_{\psi \rightarrow 0} \left[ \frac{\Phi'_1 R_1^{n+2}}{\psi^m} \right]_{\psi=0} = \Phi'_\alpha \lim_{\psi \rightarrow 0} \left[ \frac{R_1^{n+2}}{\psi^m} \right]_{\psi=0}.$$

Ein endlicher Wert für  $H$  setzt ebenfalls  $n + 2 > 0$  und  $R_\alpha = 0$  voraus; ist also das Integral auch endlich, so kann es dennoch nur dann graphisch ermittelt werden, wenn  $R_\alpha = 0$  ist. Unter dieser Bedingung nähern sich sowohl  $R_1$  als  $\psi$  dem Grenzwerte Null, und es bedarf der Ermittlung des unbestimmten Ausdruckes  $\frac{0}{0}$ . Denken wir uns, um vorläufig einen Anhaltspunkt zu haben,  $m$  als ganze Zahl, so würde der endliche Wert von  $H$  durch das Verhältnis der  $m^{\text{ten}}$  Ableitung des Zählers und des Nenners nach  $\psi$  für  $\psi = 0$  oder  $\varphi = \alpha$  ausgedrückt. Der wirkliche Wert von  $H$  erscheint hierdurch als Funktion der Werte der Ableitungen verschiedener Ordnung von  $R_1$  nach  $\psi$ , für  $\psi = 0$  oder  $\varphi = \alpha$ ; letztere müssen somit ermittelt werden. Ist die  $A$ -Kurve analytisch bestimmt, so bereitet dieses kaum irgend welche Schwierigkeiten; und dennoch hat es hiermit eine eigentümliche Bewandnis, falls die Auswertung des Integrals für irgend welche praktische Zwecke wichtig ist. Es sei deshalb gestattet, hier eine Bemerkung einzuschalten, welche für die Verwendung des soeben ermittelten Ausdruckes (55), wie auch der folgenden von weittragender Bedeutung ist.

Wir denken uns, daß die Rechnung sich auf irgend einen Körper bezieht, bei dessen Herstellung in der Werkstatt die  $A$ -Kurve maßgebend ist. Nun ist aber auf dem Reißbrett im allgemeinen nicht die wahre Kurve eingezeichnet, sondern eine angenäherte Ersatzkurve, welche aus Stücken von Geraden, Kreisbögen und anderen, analytisch nicht bestimmten, Kurvenstücken besteht. Um letztere ganz auszuschalten, kann es sich empfehlen, Kurvenstücke, deren Krümmungshalbmesser so groß werden, daß ein Ersatz durch Kreisbögen beschwerlich ist, durch Parabelbögen zu begrenzen. Diese Parabelbögen lassen sich in bekannter Weise durch die umhüllenden Tangenten, falls zwei von ihnen samt den Berührungspunkten, gewöhnlich in den Endpunkten des Bogenstückes, gegeben sind, leicht konstruieren. Für die Werkstattausführung ist nun die gezeichnete Ersatzkurve und nicht die analytisch bestimmte die maßgebende, somit haben auch alle Berechnungen auf die erstgenannte Bezug zu nehmen.

Mathematisch genau ist aber auch die Ersatzkurve weder auf dem Zeichenbrett, noch in der Werkstatt auszuführen und die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung von der in Rechnung gezogenen Form wächst mit abnehmender Größe der vorausgesetzten Abweichungen. Denken

wir uns letztere so klein, daß sie für unsere Instrumente unmeßbar werden, so ist es ganz unwahrscheinlich, vorauszusetzen, daß solche Abweichungen in der Ausführung nicht stattfinden. Es soll nun bewiesen werden, daß dergleichen unmeßbare Abweichungen von der vorausgesetzten Form unter Umständen geeignet sind, das Resultat der mühsamen Rechnung vollständig über den Haufen zu werfen.

Bezeichnen wir den zwischen Fahrstrahl und Tangente im Schnittpunkte des Fahrstrahles mit der Kurve eingeschlossenen Winkel mit  $\theta$ , den Polarwinkel mit  $\varphi$ , den Krümmungshalbmesser mit  $\rho$ , so bestehen die bekannten Beziehungen

$$(56) \quad \frac{dR}{d\varphi} = R \operatorname{ctg} \theta$$

$$(57) \quad \rho \left[ 2 \left( \frac{dR}{d\varphi} \right)^2 - R \frac{d^2 R}{d\varphi^2} + R^2 \right] = \left[ \left( \frac{dR}{d\varphi} \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}.$$

Hieraus ist zu sehen, daß die erste Ableitung des Fahrstrahles durch den Tangentenwinkel  $\theta$ , die zweite durch diesen und den Krümmungshalbmesser, die höheren Ableitungen jedoch nur durch die Ableitungen verschiedener Ordnung des Krümmungshalbmessers ausgedrückt werden können.

Bekanntlich kann nun ein immerhin endliches Bogenstück einer beliebigen Kurve, wenn es klein genug gewählt wird, dermaßen durch ein durch drei Punkte desselben gezogenes Kreisbogenstück ersetzt werden, daß die Abweichung praktisch unmeßbar wird. Es kann wohl angenommen werden, daß die Abweichung im Tangentenwinkel  $\theta$  ebenfalls sehr klein ist; der Halbmesser des Ersatzkreises wird von demjenigen des Krümmungshalbmessers eine merklichere Abweichung zeigen; jedoch schon die erste Ableitung des ersteren ist gleich Null, welchen Wert auch die wahre Ableitung  $\frac{d\rho}{d\varphi}$  zwischen  $+\infty$  und  $-\infty$  besitzen mag. In der Ausführung könnte nun der entgegengesetzte Fall eintreten, daß nämlich ein vorgeschriebenes Kreisbogenstück aus kleineren Bogenstücken anderer uns unbekannt bleibender Kurven zusammengesetzt erscheint. Denken wir uns auch, daß die Krümmungshalbmesser derselben wenig vom Halbmesser des Kreises abweichen, so bleiben doch die Ableitungen der Halbmesser der wirklich ausgeführten Kurven gänzlich unbekannt. Da nun, wie gesagt, die Voraussetzung, daß unmeßbare Abweichungen nicht stattfinden, unwahrscheinlich ist, so ist zu erkennen, daß der analytischen Entwicklung unbestimmter Ausdrücke von der Form (55) nur dann ein praktischer Wert beizulegen ist, falls dieselbe auf Ableitungen des Fahrstrahles zurückführt, deren Ordnung die zweite nicht über-

steigt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so bleiben dergleichen Ausdrücke praktisch eben unbestimmt, da es durchaus nicht bekannt ist, in welchem Maße die gedachten analytischen Vorbedingungen erfüllt sind.

Wird die  $\mathcal{A}$ -Kurve, wie empfohlen, nur durch Gerade, Kreis- und Parabelbögen gebildet, so lassen sich sowohl  $\varrho$  wie auch  $\theta$  der Zeichnung entnehmen. Es bedarf also keiner analytischen Bestimmung der Ableitungen erster und zweiter Ordnung aus den Gleichungen der Kurvenstücke, sondern nur der Verwendung der Beziehungen (56) und (57). Genügen letztere nicht, so helfen uns die analytischen Kunstgriffe in Fällen rein praktischer Art ebensowenig.

Wir wenden uns nun wieder dem Ausdrucke (55) zu, dessen Betrachtung durch die eingeschalteten Bemerkungen unterbrochen wurde. Indem laut der gemachten Voraussetzung der Hauptstrahl die Kurve im Koordinatenursprung schneidet, bildet er zugleich die Tangente an dieselbe. Wir erhalten  $R_\alpha = 0$  und  $\theta = 0$ . Die erste Ableitung kann in diesem Falle nicht direkt aus der Beziehung (56) gefunden werden, wohl aber aus (57), falls hierin  $R = 0$  gesetzt wird. Wir erhalten, allerdings unter der Voraussetzung eines endlichen  $\frac{d^2 R}{d\varphi^2}$ ,

$$(58) \quad \frac{dR}{d\varphi} = \pm 2\varrho.$$

Auf die höheren Ableitungen werden wir aus den genannten Gründen hier nicht eingehen, indem, ausnahmsweise, schon die erste durch den Krümmungshalbmesser ausgedrückt wird. Die Beziehung (58) ist nur für den Fall gültig, daß  $\frac{d\varrho}{d\varphi}$  nicht unendlich groß wird. Wir schreiben (55), angenommen, daß  $\varrho_\alpha$  weder Null noch unendlich groß ist:

$$(59) \quad H = \frac{(n+2)\Phi'_\alpha}{m} \left[ R_1^{n+1} \psi^{1-m} \frac{dR_1}{d\psi} \right]_{\psi=0} = \pm \frac{2(n+2)\Phi'_\alpha \varrho_\alpha}{m} \left[ R_1^{n+1} \psi^{1-m} \right]_{\psi=0}.$$

Ist hierin  $n+1 \geq 0$ , so wird, für  $0 < m < 1$ ,  $H$  gleich Null; ist jedoch  $n+1 = 0$  und  $m = 1$ , so erhalten wir

$$(60) \quad H = \pm 2\Phi'_\alpha \varrho_\alpha.$$

Die Untersuchung des Falles  $n+1 < 0$  würde uns zu weit führen, kann auch zum Teil ohne Kenntnis der Gleichung der  $\mathcal{A}$ -Kurve nicht ausgeführt werden. Wir halten also den Sonderfall  $R_\alpha = 0$  für erledigt und fügen nur hinzu, daß, wenn im Koordinatenursprung zwei Bögen verschiedener Kurven unter einem Winkel zusammenstoßen, selbstverständlich der Wert des Krümmungshalbmessers des vom Hauptstrahl berührten Kurvenstückes in die Formeln einzusetzen ist.

Wir wenden uns nun der Betrachtung des allgemeineren Falles  $R_\alpha > 0$  zu, vorläufig unter der Voraussetzung, daß die  $A$ -Kurve auf beiden Seiten des Hauptstrahls verläuft. Es wird hierfür allerdings das auf den Sektor  $bOa$  (Fig. 14) bezogene Integral  $S_1$  unendlich groß, doch ebenso auch das auf den Sektor  $aOc$  bezogene. Bezeichnen wir letzteres mit  $S_2$ , und setzen  $\xi = \varphi - \alpha$ , so erhalten wir durch die schon erwähnten Ausführungen den (54) entsprechenden Ausdruck

$$(61) \quad S_2 = \frac{1}{(n+2)A^m} \int_0^\beta \frac{W_2 d\xi}{(-\sin \xi)^m}.$$

Bemerken wir nun, daß für zwei symmetrisch gegen den Hauptstrahl geneigte Fahrstrahlen  $\xi = \psi$  ist, so schreiben wir, wenn  $m$  eine ungerade ganze Zahl oder ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner ungerade Zahlen sind:

$$(62) \quad S_1 + S_2 = \frac{1}{(n+2)A^m} \int_0^\beta \frac{(W_1 - W_2) d\psi}{\sin^m \psi}.$$

Setzen wir hierin  $x = \psi$ ,  $z = W_1 - W_2$  und  $y = \frac{1}{\sin^m \psi}$ , und erleidet der Fahrstrahl der  $A$ -Kurve im Hauptstrahl keine sprungweise Änderung, so daß er nicht teilweise zur Begrenzungslinie des Integrationsgebietes wird, so ist im Hauptstrahl, da  $\Phi$  stetig ist,  $W_1 = W_2 = W_\alpha$  und somit  $z_\alpha = 0$ . Es wäre also möglich, daß (Fig. 16)  $S_1 + S_2$  endlich wäre (51) und zwar proportional dem schraffiert angedeuteten Flächeninhalte der Fig. 14, der zwischen dem Zweige  $U_1$  der  $U$ -Kurve und der gestrichelten Kurve, welche den um den Hauptstrahl symmetrisch umgeklappten Zweig  $U_2$  derselben darstellt, eingeschlossen ist. Wir beschränken unsere Untersuchungen auf das Kriterium der graphischen Konstruktionsfähigkeit

$$(63) \quad H = \lim_{\psi \rightarrow 0} \left[ \frac{R_1^{n+2} \Phi_1^1 - R_2^{n+2} \Phi_2^1}{\sin^m \psi} \right]_{\psi=0} = \lim_{\psi \rightarrow 0} \left[ \frac{R_1^{n+2} \Phi_1^1 - R_2^{n+2} \Phi_2^1}{\psi^m} \right]_{\psi=0}.$$

Mit dem Index 2 sind sämtliche von  $\varphi$  abhängige Werte innerhalb  $aOc$  bezeichnet. Da für  $m > 2$  schon die dritte Ableitung zur Geltung kommt, so sind wir auf den Fall  $m < 2$  beschränkt. Der weiteren Untersuchung soll nur der Fall  $m = 1$  zugrunde gelegt werden: Bemerken wir, daß

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{d\Phi_1^1}{d\varphi} \right]_{\varphi=\alpha} = - \left[ \frac{d\Phi_1^1}{d\psi} \right]_{\psi=0} \quad \text{und} \quad \left[ \frac{d\Phi_2^1}{d\varphi} \right]_{\varphi=\alpha} = \left[ \frac{d\Phi_2^1}{d\psi} \right]_{\psi=0} \\ \text{so wie auch} \\ \left[ \frac{dR_1}{d\varphi} \right]_{\varphi=\alpha} = - \left[ \frac{dR_1}{d\psi} \right]_{\psi=0} \quad \text{und} \quad \left[ \frac{dR_2}{d\varphi} \right]_{\varphi=\alpha} = \left[ \frac{dR_2}{d\psi} \right]_{\psi=0}, \end{array} \right.$$

so wird

$$H = -(n+2) R_\alpha^{n+1} \Phi'_\alpha \left[ \left( \frac{dR_1}{d\varphi} \right)_{\varphi=\alpha} + \left( \frac{dR_2}{d\varphi} \right)_{\varphi=\alpha} \right] - R_\alpha^{n+2} \left[ \left( \frac{d\Phi_1}{d\varphi} \right)_{\varphi=\alpha} + \left( \frac{d\Phi_2}{d\varphi} \right)_{\varphi=\alpha} \right].$$

Hierin ist  $\left( \frac{dR_1}{d\varphi} \right)_{\varphi=\alpha} = \left( \frac{dR_2}{d\varphi} \right)_{\varphi=\alpha}$ , falls der Hauptstrahl die  $A$ -Kurve nicht in einem Winkelpunkt schneidet.  $\Phi'_\alpha$  wird nur in jedem der übrigen Hauptstrahlen, den betrachteten ausgenommen, Null oder unendlich groß. Eingehenderer Betrachtung bedarf der Ausdruck  $\left( \frac{d\Phi}{d\varphi} \right)_{\varphi=\alpha}$ .

Laut unseren Voraussetzungen dürfen wir uns (46) die Funktion  $F'(x, y)$  als Produkt verschiedener Potenzen linearer Polynome von der Form  $ax + by$ , und solcher Polynome  $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$  zweiten Grades denken, welche innerhalb eines reellen Integrationsgebietes das Vorzeichen nicht wechseln. Diesen Polynomen entsprechen in der Funktion  $\Phi'$  Faktoren von der Form  $a \cos \varphi + b \sin \varphi$  und  $\alpha \cos^2 \varphi + \beta \cos \varphi \sin \varphi + \gamma \sin^2 \varphi$ , die, wie auch deren Ableitungen nach  $\varphi$ , eindeutig bestimmt sind und nie unendlich groß werden. Hieraus folgt, daß  $\left[ \frac{d\Phi'}{d\varphi} \right]_{\varphi=\alpha}$  nie un-

endlich groß wird und zugleich eindeutig bestimmt ist. Wir schreiben deshalb unter Berücksichtigung von (56):

$$(65) \quad H = -R_\alpha^{n+2} \left[ (n+2) \Phi'_\alpha (\operatorname{ctg} \theta_1 + \operatorname{ctg} \theta_2) + 2 \left( \frac{d\Phi}{d\varphi} \right)_{\varphi=\alpha} \right].$$

Unendlich groß wird  $H$ , wenn  $\theta_1$  oder  $\theta_2$  gleich Null ist, wenn also im Hauptstrahl zwei von den Kurvenstücken zusammenstoßen, welche die  $A$ -Kurve bilden, und eines von ihnen den Hauptstrahl in diesem Punkte berührt, oder wenn  $\theta_1$  und  $\theta_2$  beide gleich Null sind, was etwa einem Wendepunkte der  $A$ -Kurve entspricht, da vorausgesetzt ist, daß sie auf beiden Seiten des Hauptstrahls liegen.

Unter der letztgenannten Voraussetzung, sowie  $R_\alpha > 0$ , untersuchen wir nun den Fall, daß  $m$  eine gerade ganze Zahl, oder ein Bruch ist, dessen Zähler eine gerade Zahl ist.  $S_1$  und  $S_2$  haben sodann dasselbe Vorzeichen; der betrachtete Hauptstrahl  $\varphi = \alpha$  (Fig. 14) begrenzt nicht ein Einzelgebiet, wie letzteres am Anfang des Kapitels definiert wurde, sondern durchschneidet es. Es könnte nun vorkommen, daß ein anderer Hauptstrahl  $\varphi = \gamma$ , welchem dieselbe Potenz  $m$  entspricht, innerhalb eines Gebietes zu liegen kommt, für welches das umgekehrte Vorzeichen der Funktion  $f(x, y)$  gilt. Bezeichnen wir für denselben die  $A$  entsprechende Konstante (47) mit  $C$ , ziehen ebenfalls zwei Fahrstrahlen unter den Winkeln  $\beta$  symmetrisch zu diesem Hauptstrahl und nennen die auf die beiden Sektoren mit den Winkeln  $\beta$  bezogenen Integrale  $S^I$  und  $S_{II}$ , so könnten sie sich paarweise mit den



Integralen  $S_1$  und  $S_2$  decken. Es müßten jedoch zuerst zahlenmäßige Vorbedingungen erfüllt sein, und zwar für  $0 < m < 1$  die Bedingung

$$(66) \quad \frac{R_\alpha^{n+2} \Phi'_\alpha}{A^m} + \frac{R_\gamma^{n+2} \Phi'_\gamma}{C^m} = 0$$

und für  $1 < m \leq 2$ , wenn etwa  $S_2$  und  $S_{II}$  summiert werden, außerdem

$$(67) \quad \left( \frac{d}{d\varphi} \frac{R_2^{n+2} \Phi'_2}{A^m} \right)_{\varphi=\alpha} + \left( \frac{d}{d\varphi} \frac{R_{II}^{n+2} \Phi'_{II}}{C^m} \right)_{\varphi=\gamma} = 0,$$

wie dieses die Entwicklung des unbestimmten Ausdrucks  $\frac{0}{0}$  mit sich bringt. Diese Bedingungen gestalten sich einfacher, wenn  $\gamma = \alpha + \pi$  ist, indem dann  $C = A$  und  $\Phi'_\alpha$  und  $\Phi'_\gamma$  denselben absoluten Wert erhalten, so wie auch  $\Phi'_2$  und  $\Phi'_{II}$  für sämtliche Punkte einer durch den Koordinatenursprung gehenden Geraden. Eine eingehendere Untersuchung dieser Fälle möge unterbleiben.

Für  $m > 2$  ist das Kriterium  $H$  von Ableitungen des Fahrstrahles von höherer Ordnung als der zweiten abhängig; diese Fälle sind also praktisch aussichtslos.

Wir gehen nun zu dem Falle über, wo die  $A$ -Kurve vom Hauptstrahl entweder berührt oder in einem Winkelpunkt derartig geschnitten wird, daß sie auf einer Seite des Hauptstrahls liegt. Innerhalb des Winkels  $bOa$  (Fig. 14) möge der Fahrstrahl, der einem gegebenen  $\varphi$  und hierdurch eindeutig bestimmten  $\Phi'$  entspricht, zwei verschiedene Werte  $R_1$  und  $R_2$  erhalten. Wir wollen annehmen, daß in unmittelbarer Nähe des Hauptstrahles  $R_1 > R_2$  ist. Das auf den Sektor  $bOa$  bezogene Integral wird

$$(68) \quad S' = \frac{1}{(n+2)A^m} \int_0^\beta \frac{R_1^{n+2} \Phi' - R_2^{n+2} \Phi'}{\sin^m \psi} d\psi.$$

Setzen wir hierin  $x = \psi$ ,  $y = \frac{1}{\sin^m \psi}$  und  $z = R_1^{n+2} \Phi' - R_2^{n+2} \Phi'$ , so ist zu erkennen (51), daß dieses Integral nur dann einen endlichen Wert erhalte, wenn entweder  $\Phi'_\alpha = 0$  wäre, was nicht zutrifft, oder wenn für  $\varphi = \alpha$  die beiden Fahrstrahlen  $R_1$  und  $R_2$  gleich werden. Es darf also wiederum der Hauptstrahl nicht teilweise zur Begrenzungslinie des Integrationsgebietes gehören.

Das Kriterium der graphischen Konstruktionsfähigkeit gestaltet sich zu

$$(69) \quad H = \lim \left[ \frac{(R_1^{n+2} - R_2^{n+2}) \Phi'}{\psi^m} \right]_{\psi=0}.$$

Für  $m = 1$  erhalten wir mit Bezug auf (56), (57) und (64)

$$(70) \quad H = (n+2) R_\alpha^{n+2} \Phi'_\alpha (\text{ctg } \theta_2 - \text{ctg } \theta_1).$$

Es darf also die  $A$ -Kurve vom Hauptstrahl auch nicht berührt werden, weil dann entweder einzeln oder zusammen  $\operatorname{ctg} \theta_2$  und  $\operatorname{ctg} \theta_1$  unendlich groß und zwar von entgegengesetztem Vorzeichen werden. Somit ist ein endliches Resultat nur dann zu erwarten, wenn im Hauptstrahl zwei Kurvenstücke zusammenstoßen, von denen keines in diesem Punkte den Hauptstrahl berührt.

Für  $m > 1$  besteht noch die zweite Vorbedingung

$$(71) \quad \left( \frac{d}{d\varphi} [R_1^{n+2} - R_2^{n+2}] \right)_{\varphi=\alpha} = 0,$$

die sich sofort, wenn  $R_\alpha > 0$ , auf  $\operatorname{ctg} \theta_1 = \operatorname{ctg} \theta_2$  zurückführen läßt.  $H$  könnte nur dann endlich sein, wenn im Hauptstrahl die  $A$ -Kurve derart in eine Spitze ausläuft, daß die beiden zusammenstoßenden Zweige einander berühren. Es ist leicht einzusehen, daß es kaum wahrscheinlich ist, mit mathematischer Genauigkeit dieser Bedingung praktisch zu genügen. Sollte nun dieser Fall dennoch vorausgesetzt werden, so wäre es weder für  $m > 1$ , noch für  $m = 1$  ausgeschlossen, daß der Hauptstrahl zur Tangente an die  $A$ -Kurve werden darf. Für  $m = 2$  ergibt sich, wenn in (57) ebenfalls der Winkel  $\theta$  eingeführt wird,

$$(72) \quad H = \frac{(n+2)R_\alpha^{n+3}\Phi}{2} \left[ \frac{1}{\varrho_2 \sin^3 \theta_2} - \frac{1}{\varrho_1 \sin^3 \theta_1} \right],$$

wo  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  die Krümmungshalbmesser der im Hauptstrahl zusammenstoßenden und eine gemeinsame Tangente besitzenden Kurvenstücke sind. Der Fall  $m > 2$  ist praktisch aussichtslos.

Für  $R_\alpha > 0$  und  $m < 1$  war das Integral (54) wohl endlich, konnte jedoch graphisch nicht ermittelt werden. Durch Verbindung zweier Integrale mit verschiedenem Vorzeichen können wir in der uns schon bekannten Weise ein konstruierbares erhalten. Beiderseitige Lagerung der  $A$ -Kurve in bezug auf einen Hauptstrahl, der zwei Einzelgebiete trennt, vorausgesetzt, erhalten wir hierfür den Ausdruck (62) und sehen, daß wenn (65) endlich ist, für unseren Fall  $H = 0$  wird. Für beiderseitige Lagerung der  $A$ -Kurve gilt in derselben Weise (69) und (70).

Eine ausführliche Behandlung dieses und anderer Fälle würde uns zu weit führen, ist auch kaum notwendig, nachdem die allgemeine Methode angedeutet worden ist und nur übrig bleibt, dieselbe für den einzelnen Fall zurechtzulegen.

Es muß nun angegeben werden, wie die zur Ermittlung von  $h$  notwendigen Werte von  $\Phi'_\alpha$  und  $\left( \frac{d\Phi'}{d\varphi} \right)_{\varphi=\alpha}$  am einfachsten mit Hilfe der Zeichnung zu berechnen sind. Denken wir uns auf dem Hauptstrahl einen beliebigen Punkt gewählt, dessen Entfernung vom Koordinaten-

ursprung  $l$  sei. Der Zeichnung entnehmen wir dessen Koordinaten  $x$  und  $y$ , setzen  $n + m = \nu$  und wenden uns zu der Beziehung

$$(73) \quad F(x, y) = l^\nu \cdot \Phi'_\alpha.$$

Der Wert der Funktion  $F(x, y)$  läßt sich leicht berechnen, wodurch  $\Phi'_\alpha$  ermittelt erscheint. Da letzteres nur vom Polarwinkel abhängt, so denken wir uns den gewählten Punkt auf einem Kreisbogen vom Halbmesser  $l$  bewegt. Wir erhalten sodann, indem wir von beiden Seiten (75) die Ableitung nach  $\varphi$  nehmen und rechtwinkelige Koordinatenachsen voraussetzen

$$(74) \quad x \frac{\partial F}{\partial y} - y \frac{\partial F}{\partial x} = l^\nu \left( \frac{d\Phi'}{d\varphi} \right)_{\varphi=\alpha}.$$

Unter Umständen müßte noch die zweite Ableitung von  $\Phi'$  bestimmt werden. Wir erhalten die Beziehung

$$(75) \quad x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2xy \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - x \frac{\partial F}{\partial x} - y \frac{\partial F}{\partial y} = l^\nu \left( \frac{d^2 \Phi'}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=\alpha}.$$

### VII. Praktische Behandlung schwieriger Fälle; $\Sigma$ -Kurven.

Unter schwierigen Fällen wollen wir alle die verstehen, in denen die bisher angegebenen Verfahren ein Umgehen mit Strecken erfordern, die zu klein oder zu groß sind, um sich praktisch verwenden zu lassen. Zuerst denken wir an die im vorigen Kapitel mehr theoretisch behandelten Fälle, wo die Fahrstrahlen der  $U$ -Kurve unendlich groß werden. Die Untersuchung zeigte, daß dieselben sich zum teil auf unbestimmte Ausdrücke von der Form  $\frac{0}{0}$  von endlichem Wert zurückführen ließen. Der wahre Wert solcher Ausdrücke im Hauptstrahl selbst kann nur berechnet werden, jedoch in der Nähe desselben lassen sich die entsprechenden Werte ebenfalls weder mit Sicherheit konstruieren, noch mit Hilfe von Größen, die der Zeichnung entnommen sind, berechnen, da die unvermeidlichen Fehler in der Zeichnung im Verhältnis zu letzteren groß sind. Man wird bald wahrnehmen, wo die Konstruktion unsicher wird, und meist lassen sich die Kurven derart nahe beim Hauptstrahl konstruieren, daß der in den Hauptstrahl fallende berechnete Punkt genügt, um die Kurve mit Sicherheit zu ziehen.

Wir haben uns noch den Bedingungen anzupassen; welche uns die Verwendung von Polarkoordinaten bietet und wenden uns vorerst dem durch (55) charakterisierten Falle  $R_\alpha = 0$ ,  $n + 2 > 0$  zu. Das auf den Sektor  $bOa$  (Fig. 14) bezogene Integral schreiben wir (54)

$$S_1 = \frac{1}{(n+2)A^n} \int_0^\delta \frac{W_1 d\psi}{\sin^n \psi} = \pm k \int_0^\delta \frac{u_1^2 d\psi}{2}.$$

Hierin ist  $u_1$  der Fahrstrahl der  $U$ -Kurve,  $k$  ein Proportionalitätsfaktor, welcher von der Wahl der Konstanten in den Gleichungen der charakteristischen Kurven abhängt. Da diese Beziehung für jeden beliebig kleinen Winkel  $\beta$  besteht, so erhalten wir

$$\pm 2 \lim_{\psi \rightarrow 0} \left[ \frac{W_1}{\sin^m \psi} \right] = (n+2) A^m k u_\alpha^2,$$

wobei  $u_\alpha$  der Fahrstrahl des Schnittpunktes der  $U$ -Kurve mit dem Hauptstrahl ist. Es wird

$$(76) \quad u_\alpha^2 = \frac{\pm 2H}{(n+2)kA^m}.$$

Hierin wird  $H$  nach (59) bzw. (60) berechnet. Die Werte von  $u_1$  werden in der üblichen Weise erhalten.

Betrachten wir nun den durch (62) oder (68) charakterisierten Fall, so schreiben wir

$$(77) \quad S_1 + S_2 = \frac{1}{(n+2)A^m} \int_0^\beta \frac{(W_1 - W_2) d\psi}{\sin^m \psi} = k \int_0^\beta \frac{(u_1^2 - u_2^2) d\psi}{2},$$

wobei  $u_1$  und  $u_2$  zwei symmetrisch gegen den Hauptstrahl geneigte Fahrstrahlen sind.

Hieraus erhalten wir:

$$2H = k(n+2)A^m \lim (u_1 - u_2)_{\varphi=\alpha} \cdot \lim (u_1 + u_2)_{\varphi=\alpha},$$

folglich:

$$\lim (u_1 - u_2)_{\varphi=\alpha} = \frac{2H}{k(n+2)A^m \lim (u_1 + u_2)_{\varphi=\alpha}}.$$

Da in diesem Falle sowohl der Grenzwert von  $u_1^2$  als auch von  $u_2^2$  unendlich groß ist, so ist  $\lim (u_1 + u_2) = \infty$ , und für ein endliches  $H$

$$\lim (u_1 - u_2)_{\varphi=\alpha} = 0.$$

Es wurden  $u_1^2$  und  $u_2^2$  im Grenzfall unendlich groß, weil ein endlicher Wert durch  $\sin^m \psi$  dividiert wurde. Hieraus ist zu erkennen, daß die Grenzwerte von

$$(u_1 + u_2) (\sin \psi)^{\frac{m}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{u_1 - u_2}{(\sin \psi)^{\frac{m}{2}}}$$

endlich sind. Setzen wir nun

$$(78) \quad p = (u_1 + u_2) (\sin \psi)^{\frac{m}{2}} \quad \text{und} \quad q = \frac{u_1 - u_2}{(\sin \psi)^{\frac{m}{2}}},$$

so erhalten wir eine  $p$ - und eine  $q$ -Kurve, deren sämtliche Fahrstrahlen endlich sind. Dieselben werden sodann in der üblichen Weise behandelt, liegen jedoch nur in einem der Winkel  $bOa$  oder  $aOc$  (Fig. 14).

Wir begnügen uns hier mit dem Beweis der Möglichkeit der Konstruktion einer  $p$ - und einer  $q$ -Kurve, deren Fahrstrahlen für  $\varphi = \alpha$  endlich sind. Ihre praktische Ausführung und Handhabung soll an dem diesem Kapitel beigefügten Beispiel gezeigt werden. Doch ist schon jetzt zu erkennen, daß  $p_\alpha$  eben diejenige endliche Größe ist, welche durch die unendlich kleine  $(\sin \psi)_{\psi=0}^{m/2}$  dividiert, das unendlich große  $(u_1 + u_2)_{\varphi=\alpha}$  ergibt; in der Reihenfolge der Konstruktion wird  $p_\alpha$  eher ermittelt, als  $(u_1 + u_2)_{\varphi=\alpha}$ , und zwar ohne jegliche Schwierigkeiten. Sodann erhalten wir  $q_\alpha$  aus der Beziehung

$$(79) \quad p_\alpha \cdot q_\alpha = \lim (u_1^2 - u_2^2)_{\varphi=\alpha} = \frac{2H}{k(n+2)A^m},$$

worin  $H$  nach den Angaben des vorigen Kapitels zu berechnen ist.

Außer den bis jetzt betrachteten Fällen kann auch der ebenfalls im vorigen Kapitel erwähnte Fall, in welchem der Hauptstrahl  $\Phi = 0$  die Tangente an die  $U$ -Kurve im Koordinatenursprung bildet, große praktische Schwierigkeiten zur Folge haben. Liegen dergleichen Hauptstrahlen dicht gedrängt nebeneinander, so wird die entsprechende Fläche der  $U$ -Kurve in schmale lange Flächenstücke, wie  $Pa$  (Fig. 13) gespalten. Hierbei wird selbstverständlich die Flächenmessung desto ungenauer, je schmaler die Stücke sind, die Konstruktion jedoch schon sehr bald höchst peinlich. Um vorteilhafter gestaltete Flächen der Messung unterziehen zu können, konstruieren wir zwei Kurven, die wir als  $U_\sigma$ -Kurven bezeichnen, indem wir sämtliche Fahrstrahlen der  $U$ -Kurve um zwei konstante Werte  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  verlängern. Bezeichnen wir den Flächeninhalt eines Sektors der  $U$ -Kurve mit  $F$ , den Flächeninhalt der durch dieselben Fahrstrahlen ausgeschnittenen Sektoren der  $U_\sigma$ -Kurven entsprechend mit  $F'_\sigma$  und  $F''_\sigma$  und den der Kreissektoren von den Halbmessern  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  mit  $K_1$  und  $K_2$ , so ergeben sich in einfacher Weise die Beziehungen

$$F = F'_\sigma - K_1 - \sigma_1 \int u d\varphi$$

$$F = F''_\sigma - K_2 - \sigma_2 \int u d\varphi.$$

Hieraus folgt

$$(80) \quad F = \frac{(F''_\sigma - K_2)\sigma_1 - (F'_\sigma - K_1)\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

Die Differenzen  $(F''_\sigma - K_2)$  und  $(F'_\sigma - K_1)$  sind die zwischen den entsprechenden  $U_\sigma$ -Kurven und den Kreisbögen von den Halbmessern  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  eingeschlossenen Flächen. Es kann je nach Umständen beliebig entweder die ganze  $U$ -Kurve oder ein Teil

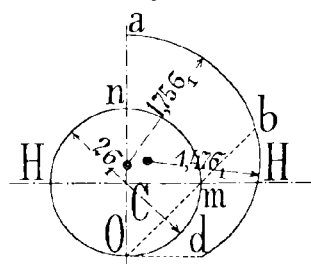
derselben durch  $U_\sigma$ -Kurven ersetzt werden. Die indirekten Konstruktionen dieses und des vorigen Kapitels lassen sich ohne weiteres auf die  $U_\sigma$ -Kurven übertragen. Wir haben nur die Fahrstrahlen der  $p$ - und  $q$ -Kurven ebenfalls um die Werte  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  zu verlängern und nennen die so gewonnenen Kurven  $p_\sigma$ - und  $q_\sigma$ -Kurven.

Es muß jedoch ein Verfahren angegeben werden, um die  $\Sigma$ -Kurven (allgemeine Bezeichnung jeder Kurve, deren Fahrstrahlen um einen konstanten Wert  $\sigma$  verlängert erscheinen) direkt zu konstruieren, denn wie einfach auch die Verlängerung der Fahrstrahlen einer fertigen  $U$ -Kurve um einen konstanten Wert sein mag, ist dieselbe im genannten Fall kaum ausführbar. In der Nähe des Koordinatenursprungs erscheinen die Fahrstrahlen der  $U$ -Kurve dermaßen gedrängt, daß die Punkte der letzteren kaum auf dem richtigen Fahrstrahl aufzutragen sind; bei Verlängerung der letzteren wird aber der Fehler bedenklich. Nachträglich lassen sich die Schnittpunkte der die  $U$ -Kurve beinahe berührenden Fahrstrahlen ebensowenig bestimmen. Zudem wird die Konstruktion der letzteren in einem gar nicht zulässigen Grade peinlich.

Deswegen sind wir auf folgendes Verfahren angewiesen. Statt die graphische Multiplikation der Fahrstrahlen mit Hilfe eines Winkels auszuführen, dessen Scheitel im Koordinatenursprung liegt und dessen eine Seite durch den betreffenden Fahrstrahl, die andere durch eine beliebige Gerade gebildet ist (Fig. 1), ziehen wir einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung und dessen Halbmesser  $\sigma_1$  ist ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ), und ersetzen den genannten Winkel durch einen ebensolchen, dessen Scheitel jedoch im Schnittpunkt des Fahrstrahles mit dem Kreise liegt. Hierdurch wird die ganze Konstruktion in jedem Fahrstrahl um den konstanten Wert  $\sigma_1$  längs desselben verschoben. Selbstverständlich ist nun, daß die Punkte der charakteristischen Kurven, ebenso wie auch der  $A$ - oder  $J$ -Kurven um denselben Wert  $\sigma_1$  verschoben werden. Es treten also an Stelle dieser Kurven andere, die aus denselben durch Verlängerung der Fahrstrahlen um den konstanten Wert  $\sigma_1$  entstehen und  $A_\sigma$ -,  $J_\sigma$ -Kurven usw. genannt werden mögen. Sämtliche geradlinigen  $C$ -Kurven werden hierdurch in Nicomedische Konchoiden verwandelt, die einer punktwisen Konstruktion bedürfen und in die Unendlichkeit verlaufen. Hier ist es, wo der im V. Kapitel behandelte Ersatz der Geraden durch  $Z$ -Kreise ganz besonders wichtig ist. Letztere verwandeln sich nämlich in dasjenige Stück einer Pascalschen Kurve, dessen Fahrstrahlen größer als  $\sigma_1$  sind, und dieses Kurvenstück wollen wir nicht punktwise konstruieren, sondern annähernd durch Kreisbogenstücke, wie folgt, ersetzen.

Zu diesem Zwecke werden sämtliche  $Z$ -Kreise vom Halbmesser  $\sigma_1$  gewählt. Die Konstruktion der Fig. 12 ist nur insofern abzuändern, als statt der Strecken  $Oa$  und  $Ob$ , des unbekanntes  $M$  wegen, zwei andere, etwa  $Oa'$  und  $Ob'$ , die den Werten der Koeffizienten  $a$  und  $b$  proportional sind, aufgetragen werden. Der Schnittpunkt der in  $a'$  und  $b'$  auf den Koordinatenachsen errichteten Senkrechten bestimmt einen Punkt der Geraden  $Oc$ . Wird nun  $Oc = \sigma_1$  gemacht, so wird durch Ziehen einer der Geraden  $ca$  oder  $cb$  der Wert  $M$  bestimmt, der in den Ausdruck (6 VIII) einzutragen ist. Eine brauchbare Annäherung an die Pascalsche Kurve liefert folgende Konstruktion (Fig. 17). Es sei  $O$  der Doppelpunkt der Kurve, der für uns immer in den Koordinatenursprung fällt,  $Oc$  der in Fig. 12 ebenso bezeichnete Halbmesser des  $Z$ -Kreises  $HH$  der auf diesem senkrecht stehende Durchmesser, dessen Schnittpunkt mit dem  $Z$ -Kreise  $m$ . Machen wir nun  $na = mb = Od = \sigma_1$ , wo  $Od \perp On$ , so sind  $a, b$  und  $d$  drei Punkte der Pascalschen Kurve. Ziehen wir durch  $a$  und  $b$  einen Kreisbogen vom Halbmesser  $1,75\sigma_1$  und durch  $b$  und  $d$  einen solchen von  $1,47\sigma_1$ , so kann durch dieselben die genaue Kurve ersetzt werden. Die größte Abweichung liegt auf dem Bogenstück  $bd$ , näher zum letztgenannten Punkt, und übersteigt nicht 1% der Länge des entsprechenden Fahrstrahles der Pascalschen Kurve, wie dieses aus einer in großem Maßstab ausgeführten Zeichnung zu ersehen war; für praktische Zwecke genügt dies in den meisten Fällen. In den Punkten  $a$  und  $b$  erfährt die Ersatzkurve eine unwesentliche Knickung; größer ist die Abweichung der Tangente in  $d$ .

Fig. 17.



Werden die Multiplikationen nicht graphisch, sondern mittels des Rechenschiebers ausgeführt, so bedarf es außer der  $U_\sigma$ -Kurven keiner anderen  $\Sigma$ -Kurven. Trotzdem wird man sich leicht überzeugen, wie sehr die Übersichtlichkeit und bequeme Handhabung der Zeichnung gewinnt, wenn letztere aufgetragen sind, so daß hierdurch der kleine Fehler, den die angenäherte Konstruktion der Pascalschen Kurven mit sich bringt, unter Umständen mit Vorteil in den Kauf genommen werden kann. Die zweite  $U_\sigma$ -Kurve wird selbstverständlich aus der ersten durch Verkürzung sämtlicher Fahrstrahlen um den Wert  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  gewonnen.

Das Verfahren der  $\Sigma$ -Kurven erlaubt auch in gewöhnlichen Fällen die Schwierigkeiten zu umgehen, die aus dem verschlungenen Charakter der  $(q-p)$ -Kurve entstehen. Es werden ebenfalls die nur nach abso-

ludem Werte aufgetragenen Fahrstrahlen dieser Kurven um konstante Werte verlängert.

Beispiel 5. Es soll das auf ein beliebiges endliches und reelles Integrationsgebiet bezogene Integral

$$S = \iint \frac{(2x+y)(2y-x)\sqrt{4x^2-4xy+2y^2}}{(2y+x)(2x-y)} dx dy,$$

worin die Quadratwurzel mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen ist, graphisch ermittelt werden.

Da die Form der das Integrationsgebiet begrenzenden  $A$ -Kurve von keiner prinzipiellen Bedeutung ist, so wählen wir als solche (Fig. 18) einen Kreis<sup>1)</sup>, dessen Mittelpunkt in den Koordinatenursprung fällt, und dessen Halbmesser gleich 3,5 cm gesetzt wurde. Wird nun  $m$  in (37) ebenfalls gleich 3,5 cm gewählt, so ist die  $A$ -Kurve mit der  $J$ -Kurve identisch; in (6 VIII) ist einfach  $m = R = \rho$  zu setzen und letzteres vor das Integralzeichen zu nehmen.

Das Integrationsgebiet wird durch die vier Hauptstrahlen  $H_1, H_2, H_3, H_4$  deren Gleichungen entsprechend  $2x+y=0, 2y-x=0, 2y+x=0, 2x-y=0$  lauten, in acht Einzelgebiete geteilt; einem jeden von ihnen entspricht ein nicht eingezeichneter  $Z$ -Kreis. Die Mittelpunkte derselben fallen je in einen Hauptstrahl, was nur dadurch bedingt ist, daß die Hauptstrahlen  $H_1$  und  $H_2$  senkrecht aufeinander stehen, desgleichen  $H_3$  und  $H_4$ .

Indem die Verwendung von  $\Sigma$ -Kurven kaum zu vermeiden war, wurden an Stelle der  $Z$ -Kreise, deren Halbmesser ebenfalls zu  $\sigma = 3,5$  cm gesetzt ist, acht Pascalsche Kurven, den Hauptstrahlen entsprechend mit I, I', II, II' usw. bezeichnet, nach Fig. 17 eingezeichnet. Die Konstanten  $a$  und  $b$  in der Gleichung der  $Z$ -Kreise (43) lassen sich den Gleichungen der vier Hauptstrahlen entnehmen, und da in letzteren die Zeichen gewechselt werden können, sind sie für sämtliche acht Kreise bekannt. Da für jedes Einzelgebiet das Vorzeichen in (6, VIII) immer gesondert festzustellen ist, so wurde der Zeichnung nach abso-

1) Es war nicht möglich, die Zeichnung auch nur einigermaßen übersichtlich zu gestalten, ohne daß farbige Linienzüge verwendet wurden. Den farbigen Bezeichnungen wurde folgendes Schema zugrunde gelegt:  $A$ -Kurve,  $J$ -Kurve, Hauptstrahlen — schwarz ausgezogen;  $C$ -,  $V$ -,  $AB$ -,  $Z$ -Kurven — blau ausgezogen;  $C_\sigma$ -,  $V_\sigma$ -,  $AB_\sigma$ -,  $Z_\sigma$ -Kurven — blau gestrichelt;  $p$ -Kurven — schwarz + rot;  $q$ -Kurven schwarz + gelb;  $(q-p)$ -Kurven schwarz + grün; durch Summieren erhaltene Kurven — rot; durch Subtrahieren erhaltene Kurven grün; symmetrisch umgeklappte Kurvenzweige — schwarz gestrichelt; verschiedene Zwischenkurven — beliebig, außer: schwarz, blau, rot und grün; in Fig. 18 nur gelb und braun (sepia).



luten Werte entnommen, daß  $a_1 \cdot M_1 = b_2 \cdot M_2 = b_3 \cdot M_3 = a_4 \cdot M_4 = 3,14 \text{ cm}$ , und da, ebenfalls nach absolutem Werte,  $a_1 = b_2 = b_3 = a_4 = 2$  ist, so wird  $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 1,57 \text{ cm}$ .

Der Faktor  $4x^2 - 4xy + 2y^2$  läßt die beiden imaginären  $C$ -Kurven

$$(81) \quad 2x - y + iy = A + Bi \text{ und } 2x - y - iy = A - Bi$$

erscheinen, welche durch eine  $V$ - und  $AB$ -Kurve zu ersetzen sind. Der reelle Schnittpunkt der beiden imaginären Geraden wird durch die Gleichungen

$$(82) \quad 2x - y = A, \quad y = B$$

bestimmt. Zur  $V$ -Kurve nehmen wir ein Quadrat, welches der  $A$ -Kurve derart eingeschrieben ist, daß dessen Ecken in die Koordinatenachsen fallen. Die Gleichungen der vier Seiten dieses Quadrates lauten: 1)  $x + y = 3,5$ ; 2)  $y - x = 3,5$ ; 3)  $x + y = -3,5$ ; 4)  $x - y = 3,5$ . Indem nun in jeder dieser Gleichungen die Werte von  $x$  und  $y$  mit Hilfe von (82) eliminiert werden, erhalten wir die Gleichungen der vier Seiten der  $AB$ -Kurve, welche ein Parallelogramm ist: 1)  $A + 3B = 7$ ; 2)  $B - A = 6$ ; 3)  $A + 3B + 7 = 0$ ; 4)  $A - B = 6$ . Hierin sind die Werte von  $A$  auf der  $X$ -Achse, diejenigen von  $B$  auf der  $Y$ -Achse aufzutragen. Da in (81) der Koeffizient vor  $iy$  gleich 1 ist, so haben die entsprechenden Punkte der  $V$ - und der  $AB$ -Kurve gleiche Ordinaten (32 bis; auch 82). Durch Verlängerung der Fahrstrahlen derselben um 3,5 cm entstanden die  $V_\sigma$ -Kurve und die  $AB_\sigma$ -Kurve. Die letztere ist jedoch in der Zeichnung verzerrt wiedergegeben, indem die Fahrstrahlen der  $AB$ -Kurve zugleich in die entsprechenden Fahrstrahlen der  $V$ -Kurve gedreht wurden, was die Verwendung derselben übersichtlicher machte.

Der Ausdruck (6, VIII) kann nicht direkt für unseren Fall verwendet werden, denn zu den vier Polynomen ersten Grades kommt noch ein solches zweiten Grades  $4x^2 - 4xy + 2y^2$  hinzu, dem in der Funktion  $\Phi$  (3) der Faktor  $\Phi_5 = \frac{A^2 + B^2}{r^2}$  entspräche (23 und 81), wenn dasselbe in der ersten Potenz gedacht wird. Durch das Radikal wird jedoch  $\Phi_5 = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{r}$ ; hierin ist  $r$  der Fahrstrahl der  $V$ -Kurve (siehe auch 6, VI). Nun bilden wir den Ausdruck für  $\Phi$  in (3). Da sich in vier Faktoren von der Form (44) alle  $2M$  heben, so wird  $\Phi = \frac{r_1 \cdot r_2 \sqrt{A^2 + B^2}}{r_3 r_4 \cdot r}$ ; hierin sind  $r_1, r_2, r_3$  und  $r_4$  die Fahrstrahlen der den vier Hauptstrahlen entsprechenden  $Z$ -Kreise, oder die um 3,5 cm verminderten Fahrstrahlen der Pascalschen Kurven; in unserem Falle sind also für alle

$\Sigma$ -Kurven die Fahrstrahlen von der  $A$ -Kurve an zu rechnen. Wir erhalten somit an Stelle von (3), wenn  $2R = 7$  vor das Integralzeichen genommen wird

$$(83) \quad S = \pm \frac{7}{3} \iint \frac{R^2}{2} \cdot \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot \sqrt{A^2 + B^2}}{r_3 \cdot r_4 \cdot r} d\varphi = \frac{7}{3} F.$$

Das doppelte Vorzeichen bedeutet, daß sämtliche unter dem Integralzeichen stehenden Größen, außer  $d\varphi$ , nur dem absoluten Werte nach in Rechnung gezogen werden, das richtige Vorzeichen aber für jedes Einzelgebiet gesondert festgestellt wird; unter  $F$  verstehen wir jedoch die algebraische Summe sämtlicher mit dem richtigen Vorzeichen versehenen Werte des Inhaltes der den Einzelgebieten entsprechenden Flächenstücke der  $U$ -Kurve.

Die beiden in die Hauptstrahlen  $H_3$  und  $H_4$  fallenden Fahrstrahlen der  $U$ -Kurve werden unendlich groß. Diese Hauptstrahlen sind jedoch Begrenzungsstrahlen zweier Einzelgebiete mit verschiedenem Vorzeichen der Funktion  $f(x, y)$ . In (77) ist  $m = 1$  zu setzen, und für beide Hauptstrahlen  $A = \sqrt[3]{5}$ , nach (49), sodann  $k = \frac{7}{3}$ . Zum Winkel  $\beta$  wählen wir, indem wir uns nun dem Hauptstrahl  $H_3$  zuwenden, den Winkel zwischen den beiden Hauptstrahlen  $H_3OH_1$ , welcher kleiner ist als  $H_3OH_2$ ; von letzterem bleibt also ein Rest  $h_3OH_2$  übrig, der in gewöhnlicher Weise zu behandeln ist. Sämtliche Größen innerhalb des Winkels  $H_3OH_1$  wollen wir durch den Index I, innerhalb des Winkels  $H_3Oh_3$  durch den Index II kennzeichnen. Wir erhalten sodann unter dem rechts stehenden Integralzeichen (77) mit Bezug auf (83)

$$(84) \quad u_{II}^2 - u_I^2 = \left( R^2 \cdot \frac{r_1 r_2}{r_3 \cdot r_4} \cdot \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{r} \right)_{II} - \left( R^2 \cdot \frac{r_1 r_2}{r_3 r_4} \cdot \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{r} \right)_{I}.$$

Die zu subtrahierenden Werte entsprechen immer je zwei symmetrisch zum Hauptstrahl geneigten Fahrstrahlen, wie dieses aus der Ableitung der Formel (62) und Fig. 14 folgt. Nun ist die dem Hauptstrahl  $H_3$  zugeordnete Pascalsche Kurve III symmetrisch gegen denselben gelegen; in unserem Fall bildet außerdem der Hauptstrahl die Symmetrieachse der  $A$ -Kurve und der Pascalschen Kurve IV. Es ist deshalb

$$(85) \quad \left( \frac{R^2}{r_3 r_4} \right)_{II} = \left( \frac{R^2}{r_3 r_4} \right)_{I}$$

für zwei symmetrisch gegen den Hauptstrahl geneigte Fahrstrahlen. Um den Beziehungen (78) gerecht zu werden, bemerken wir, daß an Stelle von  $\sin \psi$  auch ein demselben proportionaler Wert verwendet werden darf, und daß in unserem Falle der letztere  $r_3$  gleich gesetzt

werden könnte, da die Gleichung des  $Z$ -Kreises in Polarkoordinaten  $r_3 = d \sin \psi$  lautet, wo  $d$  dessen Durchmesser. Wir wählen nun

$$(86) \quad p = \frac{(u_{II} + u_I) \sqrt{r_3 r_4}}{R}; \quad q = \frac{(u_{II} - u_I) R}{\sqrt{r_3 r_4}},$$

indem ja  $pq = u_{II}^2 - u_I^2$  sein muß, und weder  $r_4$  noch  $R$  im Hauptstrahl  $H_3$  zu Null werden. Mit Bezug auf (84) wird nun

$$(87) \quad p = \mu_{II} + \mu_I \quad \text{und} \quad q = \frac{R^2}{r_3 r_4} (\mu_{II} - \mu_I),$$

wo unter  $\mu$  der Ausdruck

$$(88) \quad \mu = \frac{\sqrt{r_1 r_2} \cdot \sqrt{r} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}}{r}$$

gemeint ist und die Indizes II und I Werte von  $\mu$  bedeuten, die zwei symmetrisch gegen den Hauptstrahl geneigten Fahrstrahlen entsprechen. Wir konstruieren nacheinander folgende Kurven mit den Fahrstrahlen

$$(89) \quad \lambda = \sqrt{r_1 \cdot r_2}; \quad \lambda' = \sqrt{r \sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\lambda \cdot \lambda'}{r}.$$

Diese Kurven sind in der Zeichnung, durch  $\lambda$ ,  $\lambda'$  und  $\mu$  bezeichnet, jedoch als  $\Sigma$ -Kurven ausgebildet, so daß deren Fahrstrahlen ( $\lambda + 3,5$ ) cm, ( $\lambda' + 3,5$ ) cm und ( $\mu + 3,5$ ) cm gleich sind. Klappen wir nun den im Winkel  $H_3 O h_3$  verlaufenden Teil der Kurve  $\mu$  symmetrisch gegen den Hauptstrahl um, so erhalten wir innerhalb des Winkels  $H_3 O H_1$  zwei Kurven:  $\mu_{II}$  und  $\mu = \mu_I$ . Da  $p = \mu_I + \mu_{II}$  ist und keine Notwendigkeit vorliegt, diese Kurve als  $\Sigma$ -Kurve auszubilden, so summieren wir die Fahrstrahlen der Kurve  $\mu_I$  mit den um  $2\sigma = 7$  cm verkürzten<sup>2)</sup> Fahrstrahlen des symmetrisch umgeklappten Zweiges und erhalten direkt die  $p$  Kurve. Entnehmen wir der Zeichnung die Differenz der Fahrstrahlen der Kurven  $\mu_{II}$  und  $\mu_I$ , so ist dieselbe gleich  $\mu_{II} - \mu_I = \mu'$ . Die Fahrstrahlen der die Punkte 1 und 2 verbindenden Kurve sind gleich  $(\mu' + 3,5)$  cm. Sodann konstruieren wir nur innerhalb des Winkels  $H_3 O H_1$  eine Kurve mit den Fahrstrahlen  $\varepsilon = \frac{R^2}{r_4}$  — die Fahrstrahlen der Kurve  $\overline{34}$  sind gleich  $(\varepsilon + 3,5)$  cm — und hierauf

$$(90) \quad q = \frac{\varepsilon \mu'}{r_3}.$$

In der Nähe des Hauptstrahles lassen sich die Fahrstrahlen der  $q$ -Kurve mit Genauigkeit weder konstruieren noch berechnen, indem

- 1)  $\sqrt{A^2 + B^2}$  ist als lineare Größe direkt der Zeichnung zu entnehmen.
- 2) Einfach durch Ziehen eines Kreises vom Halbmesser 7 cm zu bewerkstelligen

für letzteren  $\mu' = 0$  und  $r_3 = 0$  wird. Es muß deswegen  $q_\alpha$  aus (79) berechnet werden; die punktweise Konstruktion in der Nähe des Hauptstrahls muß eingestellt werden, sobald man merkt, daß die Kurve entweder einem anderen Grenzwert zuzustreben anfängt als  $q_\alpha$ , oder durch die gewonnenen Punkte überhaupt eine Kurve nicht zu ziehen ist. In der Nähe des Hauptstrahls  $H_3$  mußte dies schon im Punkte 5 geschehen, während in der Nähe von  $H_4$  der Punkt 7 noch zu ermitteln war. Jedenfalls stimmt der ganze Verlauf der  $q$ -Kurve mit den dem analytischen Ausdruck (79) entnommenen Punkten 6 und 8 gut überein. In letzterem ist nun zuerst der Wert von  $H$  zu bestimmen. In dem von uns betrachteten Fall ist der Ausdruck (65) maßgebend und, da  $\text{ctg } \theta_1 = \text{ctg } \theta_2 = 0$  ist, so erhalten wir

$$H = -2R_\alpha^3 \left( \frac{d\Phi}{d\varphi} \right)_{\varphi=\alpha}$$

Es ist

$$F(x, y) = \frac{(2x+y)(2y-x)\sqrt{4x^2-4xy+2y^2}}{2x-y}$$

Laut (74) müssen nun die Werte der partiellen Ableitungen<sup>1)</sup> der Funktion nach  $x$  und  $y$ , für irgend einen Wert der letzteren, welcher der Gleichung  $2y+x=0$  des Hauptstrahles  $H_3$  genügt, bestimmt werden, und für unseren Fall, da  $\nu=2$  ist, wird  $l^\nu = x^2 + y^2$ . Setzen wir  $x=10$ ,  $y=-5$ , so erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{360}{\sqrt{650}} - \frac{79\sqrt{650}}{25}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = +\frac{360}{\sqrt{650}} + \frac{22\sqrt{650}}{25}$$

Die Beziehung (74) wird nun

$$\frac{1800}{\sqrt{650}} - \frac{175}{25}\sqrt{650} = 125 \left( \frac{d\Phi}{d\varphi} \right)_{\varphi=\alpha}$$

woraus

$$\left( \frac{d\Phi}{d\varphi} \right)_{\varphi=\alpha} = -0,864$$

Hierdurch erhalten wir (nur der absolute Wert ist von Bedeutung)

$$H = 2 \cdot 3,5^3 \cdot 0,864 = 74,2$$

und laut (79), da  $k = \frac{1}{3}$ ,  $A = \sqrt{5}$  und  $n = 2$  ist

$$p_\alpha \cdot q_\alpha = \frac{148,4}{7 \cdot \sqrt{5}}$$

1) Diese lassen sich rasch in zahlenmäßiger Form schreiben, wenn vorläufig die Werte sämtlicher Faktoren der Funktion  $F(x, y)$ , so wie deren partieller Ableitungen ausgeschrieben werden und sodann nach der Formel des Differentialquotienten eines Produktes verfahren wird, welches letzterer direkt in Zahlenwerten geschrieben werden kann.

Der bereits eingezeichneten  $p$ -Kurve entnehmen wir  $p_\alpha = 11,5$  cm, und erhalten  $q_\alpha = 0,825$  cm. In der Zeichnung sind die Kurven  $(q + 3,5)$  cm und  $(q + 7)$  cm aufgetragen. Die zu planimetrierenden Flächeninhalte sind durch Kreise mit den Halbmessern 3,5 cm und 7 cm begrenzt. Der erste derselben ergab sich zu  $3,25$  cm<sup>2</sup>, der zweite zu  $6,07$  cm<sup>2</sup> und laut (80) der Flächeninhalt der  $q$ -Kurve zu

$$F_q = \frac{3,25 \cdot 7 - 6,07 \cdot 3,5}{3,5} = 0,429 \text{ cm}^2.$$

Für die einfachen  $p$ - und  $(p-q)$ -Kurven erhalten wir<sup>1)</sup>:  $F_p = 49,30$  cm<sup>2</sup> und  $F_{p-q} = 40,47$  cm<sup>2</sup>, worauf nach (13) für den Sektor  $aOb$  der Flächeninhalt der  $U$ -Kurve  $F_1 = 4,63$  cm<sup>2</sup> ist.

Für den Sektor  $bOc$ , innerhalb dessen, so wie auf den Begrenzungsstrahlen sich keine Punkte befinden, für welche die Funktion  $f(x, y)$  unendlich große Werte annimmt, setzen wir in einfacherer Weise

$$p = \frac{R \cdot r_1 r_2}{r_3 r_4} \quad \text{und} \quad q = \frac{R\sqrt{A^2 + B^2}}{r}.$$

Die  $p$ -Kurve wurde durch zwei  $\Sigma$ -Kurven ersetzt, deren Flächeninhalte  $1,15$  cm<sup>2</sup> und  $2,13$  cm<sup>2</sup> betragen; somit

$$F_p = \frac{1,15 \cdot 7 - 2,13 \cdot 3,5}{3,5} = 0,17 \text{ cm}^2.$$

Durch direktes Planimetrieren ergaben sich  $F_q = 4,63$  cm<sup>2</sup> und  $F_{q-p} = 3,20$  cm<sup>2</sup>; der Flächeninhalt des entsprechenden Teiles der  $U$ -Kurve wird somit  $F_2 = \frac{1}{2}(0,17 + 4,63 - 3,20) = 0,80$  cm<sup>2</sup>.

Genau in derselben Weise wurde in bezug auf den Hauptstrahl  $H_4$  verfahren. Die Rollen von  $r_3$  und  $r_4$  müssen selbstverständlich vertauscht werden. Da die farbigen Bezeichnungen der entsprechenden Kurven dieselben, wie im besprochenen Falle, sind, lassen sich dieselben aus der Zeichnung ohne weitere Besprechung erkennen. Zum Winkel  $\beta$  wurde  $H_2OH_4$  gewählt, so daß für die gewöhnliche Behandlungsweise nur der Winkel  $h_4OH_1$  übrig blieb. Die  $(p-q)$ -Kurve und die  $p$ - mit der  $q$ -Kurve sind in verschiedenen Winkeln  $\beta$  gezeichnet. Es ergaben sich folgende Zahlenwerte. In dem durch den Winkel  $H_2Oh_4$  bestimmten Integrationsgebiet:

$$F_p = 24,63 \text{ cm}^2, \quad F_q = \frac{3,5 \cdot 7,0 - 6,17 \cdot 3,5}{3,5} = 0,43 \text{ cm}^2, \quad F_{p-q} = 18,00 \text{ cm}^2,$$

folglich  $F_3 = \frac{1}{2}(24,63 + 0,43 - 18,00) = 3,53$  cm<sup>2</sup>. In dem durch den Winkel  $h_4OH_1$  bestimmten Gebiet:  $F_p = \frac{1,03 \cdot 7 - 1,97 \cdot 3,5}{3,5} = 0,09$  cm<sup>2</sup>,  $F_q = 5,77$  cm<sup>2</sup> und  $F_{q-p} = 4,37$  cm<sup>2</sup>, hieraus

$$F_4 = \frac{1}{2}(5,77 + 0,09 - 4,37) = 0,25 \text{ cm}^2.$$

1) Die zu planimetrierende Fläche erstreckt sich bis zum Koordinatenursprung  $O$ .

Da in unserem Falle die Funktion  $f(x, y)$  bei gleichzeitiger Änderung der Vorzeichen von  $x$  und  $y$  weder das Vorzeichen noch den absoluten Wert ändert, und die  $A$ -Kurve durch den Hauptstrahl  $H_1H'_1$  in zwei symmetrische Teile getrennt wird, so brauchen wir das auf den Halbkreis  $abeOa$  bezogene Integral nur zu verdoppeln, um das auf den ganzen Kreis bezogene zu erhalten. Wir sind nun soweit gekommen, daß die Vorzeichen der Werte  $F_1, F_2, F_3$  und  $F_4$  ermittelt werden müssen. Innerhalb des Einzelgebietes  $H_3OH_2$  hat die Funktion  $f(x, y)$  dasselbe Vorzeichen, wie für den Punkt der  $X$ -Achse:  $x = 1, y = 0$ ; und zwar wird für denselben  $f(x, y) = -2$ . Das auf den Sektor  $aO1$  bezogene Integral ist positiv, das auf  $1Ob$  bezogene negativ. Die Summe derselben hat also das umgekehrte Vorzeichen (84) wie  $u_{II} - u_{IV}$  oder (86), (87), wie  $\mu_{II} - \mu_{IV}$ . Sollte letzteres innerhalb des Winkels  $H_3OH_1$  das Vorzeichen mehrmals wechseln, so ist letzteres auch für  $q$  der Fall, und da  $p$  immer positiv gedacht werden kann, so müßte noch innerhalb dieses Winkels eine Spaltung vorgenommen werden. In unserem Falle schneiden sich die Kurven  $\mu_{II}$  und  $\mu_{IV}$  innerhalb  $H_3OH_1$  nicht, und es bleibt  $\mu_{II} > \mu_{IV}$ ; somit ist  $F_1 = -4,63 \text{ cm}^2$ . Zugleich ist  $F_2 = -0,80 \text{ cm}^2$ , da es sich noch auf einen Teil des Winkels  $H_3OH_2$  bezieht. Da die Funktion  $f(x, y)$  in jedem Hauptstrahl das Vorzeichen wechselt, so ist aus dem Verlauf der Kurven zu erkennen, daß auch  $F_3$  und  $F_4$  negativ sind. Es folgt hieraus

$$S = \frac{7}{3} F = \frac{14}{3} (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) = -\frac{14 \cdot 8,20}{3} = -38,3.$$

Mit diesem Beispiel mag die vorliegende Abhandlung geschlossen werden. Der Verfasser hofft, dieselbe in kurzem durch Betrachtung charakteristischer Flächen mit Bezug auf dreifache Integrale zu erweitern. Die Anwendung derselben kann jedoch nur eine beschränkte sein, da nur Drehungsflächen eine zeichnerische Behandlung erlauben. Doch lassen sich immerhin einige Anwendungen finden, z. B. die Bestimmung der Trägheitsmomente von Drehungskörpern und Teilen derselben, welche durch eine zylindrische Fläche mit zur Drehungsachse senkrechten Mantellinien aus letzteren ausgeschnitten sind.

## Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. I. II.

Von WILHELM BLASCHKE in Greifswald.

### Inhalt.

	Seite
I. Eine Abbildung der Geraden des Raumes auf geordnete Punktepaare einer Ebene. Die quasielliptische Geometrie, ein Grenzfall der elliptischen Geometrie.	
§ 1. Konstruktion der Abbildung . . . . .	62
§ 2. Ihre analytische Darstellung . . . . .	66
§ 3. Zusammensetzung von Bewegungen und Umlagungen . . . . .	69
§ 4. Links- und rechtsparallele Geraden . . . . .	71
§ 5. Die Transformationsgruppen der quasielliptischen Geometrie . . . . .	73
§ 6. Transformationsformeln . . . . .	76
§ 7. Grenzübergang von der elliptischen zur quasielliptischen Geometrie . . . . .	77
§ 8. Invarianten gegenüber Quasibewegungen . . . . .	79
§ 9. Die Regelscharen auf Flächen zweiter Ordnung . . . . .	80
II. Gruppentheoretische Grundlegung der Kinematik in der Euklidischen Ebene.	
§ 10. Positive und negative Somen . . . . .	83
§ 11. Elementare Äquivalenzbegriffe der Kinematik . . . . .	84
§ 12. Die projektive Geometrie der Somen . . . . .	86
§ 13. Die Inversionsgeometrie der Somen . . . . .	88

Im folgenden soll eine systematische Behandlung der ebenen Kinematik skizziert werden, welche die Gedanken zur Richtschnur nimmt, die Herr E. Study im Anhang zu seiner *Geometrie der Dynamen* angegeben hat. Für den Fall der Ebene kann man die wesentlichen gruppentheoretischen Gesichtspunkte leichter klarlegen als für den Raum, und es gelingt leichter, die differentialgeometrischen Probleme der Bewegungsgeometrie, die bei der sonst üblichen Darstellungsweise in erster Linie behandelt werden, in den Gedankenkreis von Studys Kinematik einzureihen. Die vorliegende Arbeit kann daher auch als eine Einführung in Studys kinematische Methode gelten.

Der leitende Gedanke der Untersuchung ist der folgende. *Es wird gezeigt, daß sich die ebene Kinematik einordnen läßt in die projektive Geometrie des Raumes. Man kommt hierbei auf eine projektive Maßbestimmung, die durch einen Grenzübergang aus der nichteuklidischen, und zwar elliptischen Maßbestimmung hervorgeht.* Die dadurch definierte Geometrie soll *quasielliptische Geometrie* genannt werden. Ihr absolutes Gebilde besteht aus einem Paar konjugiert-imaginärer Ebenen und einem Paar konjugiert-imaginärer Punkte auf der Schnittlinie dieser Ebenen.

Den Übergang von der ebenen Kinematik zu dieser quasielliptischen Geometrie vermittelt eine Abbildung der geordneten Punktepaare der Ebene auf die Geraden des Raumes, eine Abbildung, welche den Bewegungen in der Ebene die Punkte und den Umlegungen die Ebenen des Raumes zuordnet.

## I.

Abbildung der Geraden des Raumes auf die geordneten Punktepaare der Ebene. Die quasielliptische Geometrie.

## § 1. Konstruktion der Abbildung.

Wir nehmen ein (reelles) rechtwinkliges Achsenkreuz an und bezeichnen die unhomogenen Punktkoordinaten, die wir zunächst benutzen wollen, mit  $x$ ,  $y$  und  $z$ . Die Ebene  $z = 0$  nennen wir *Grundebene*. Hierin erklären wir als *positiven Drehungssinn* den Sinn der kürzesten Drehung, welche die Halbachse der positiven  $x$  in die der positiven  $y$  überführt. Die Ebenen  $z = -1$  und  $z = +1$  seien entsprechend mit  $\alpha_l$  und  $\alpha_r$  bezeichnet. Durch die Marken  $l, r$  deuten wir auf die Worte links, rechts hin, die später verwendet werden.

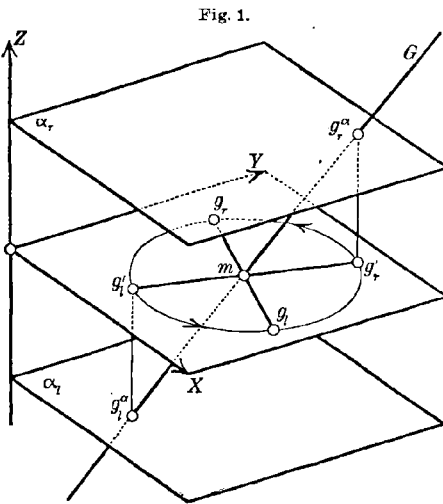


Fig. 1.

Wir nehmen ein (reelles) rechtwinkliges Achsenkreuz an und bezeichnen die unhomogenen Punktkoordinaten, die wir zunächst benutzen wollen, mit  $x$ ,  $y$  und  $z$ . Die Ebene  $z = 0$  nennen wir *Grundebene*. Hierin erklären wir als *positiven Drehungssinn* den Sinn der kürzesten Drehung, welche die Halbachse der positiven  $x$  in die der positiven  $y$  überführt. Die Ebenen  $z = -1$  und  $z = +1$  seien entsprechend mit  $\alpha_l$  und  $\alpha_r$  bezeichnet. Durch die Marken  $l, r$  deuten wir auf die Worte links, rechts hin, die später verwendet werden.

Es sei nun  $G$  eine (reelle) Gerade<sup>1)</sup>, welche die uneigentliche Gerade  $C$  der Grundebene nicht schneidet.  $G$  ist also dann eine eigentliche Gerade, die zur Grundebene nicht parallel läuft. Wir führen folgende Konstruktion aus (siehe die Figur 1).

Man bringe die Gerade  $G$  zum Schnitt mit den Ebenen  $\alpha_l, \alpha_r$  in den Punkten  $g'_l, g'_r$  und suche den Normalriß  $g'_l, g'_r$  dieser beiden Schnittpunkte auf die Grundebene. Dann drehe man das geordnete Punktepaar  $(g'_l, g'_r)$  um seinen Mittelpunkt  $m$  in der Grundebene durch einen positiven rechten Winkel nach  $(g_l, g_r)$ , so daß also durch diese Drehung der Punkt  $g'_l$  in den Punkt  $g_l$  und  $g'_r$  in  $g_r$  übergeführt wird.<sup>2)</sup>

1) Wir beschränken unsere Überlegungen zunächst durchweg auf reelle Elemente.

2) Die Abbildung der Geraden  $G$  auf die geordneten Paare  $(g'_l, g'_r)$  findet in der darstellenden Geometrie Anwendung, wie Herr E. Müller in seinen Vorlesungen auszuführen pflegt.



Auf diese Art findet man zu jeder Geraden  $G$  ein geordnetes Punktepaar  $(g_i, g_r)$ . Nehmen wir anderseits in der Grundebene ein geordnetes Paar reeller eigentlicher (nicht notwendig voneinander verschiedener) Punkte  $(g_i, g_r)$  an, so können wir dazu in eindeutiger Weise die zugehörige Gerade  $G$  aufsuchen durch Umkehrung der angegebenen Konstruktion. Somit hat man zwischen den Geraden des Raumes, welche  $C$  nicht treffen und den geordneten Paaren reeller eigentlicher Punkte der Grundebene eine umkehrbar eindeutige Beziehung  $G \leftrightarrow (g_i, g_r)$  hergestellt. Was dieser Zuordnung erst ein Interesse verleiht, ist die folgende Tatsache:

**Satz I.** *Zwei Geraden  $G$  und  $G^*$ , die sich schneiden, gehen durch unsere Zuordnung in zwei geordnete Punktepaare über  $(g_i, g_r)$  und  $(g_i^*, g_r^*)$ , die so zueinander liegen, daß die Strecken  $g_i g_i^*$  und  $g_r g_r^*$  einander gleich werden. Umgekehrt sind derartigen Punktepaaren Geraden zugeordnet, die in einer Ebene liegen.*

Beweisen wir gleich einen etwas weiter reichenden Satz, der den ersten umfaßt.

**Satz IIa.** *Die  $\infty^2$  Geraden  $G$  durch einen Punkt  $p$ , der nicht auf  $C$  liegt, werden durch die Zuordnung  $G \rightarrow (g_i, g_r)$  abgebildet auf  $\infty^2$  geordnete Paare  $(g_i, g_r)$ , deren Anfangspunkte  $g_i$  den Endpunkten  $g_r$  in einer Bewegung  $g_i \rightarrow g_r$  zugeordnet sind.*

Nehmen wir vorerst an, der Punkt  $p$  liege im Endlichen und habe die Koordinaten  $x, y, z$ ; sein „Grundriß“  $p'$  hat dann die Koordinaten  $x, y, 0$ . Ziehen wir durch  $p$  eine Gerade  $G$  (die, wie wir hier stets voraussetzen haben,  $C$  nicht trifft) und wenden wir unsere Konstruktion an. (Vgl. die Fig. 2, in der die Konstruktion in Auf- und Grundriß dargestellt ist.) Die Punkte  $p', g_i'$  und  $g_r'$  liegen in gerader Linie, und es ist (auch dem Vorzeichen nach)

$$p'g_i' : p'g_r' = (1 + z) : (1 - z)$$

und

$$p'm : mg_i' = z : 1.$$

Drehen wir nun das Paar  $(g_i', g_r')$  um seinen Mittelpunkt  $m$  durch einen positiven rechten Winkel nach  $(g_i, g_r)$ , so werden die Strecken  $p'g_i'$  und  $p'g_r'$  einander absolut gleich und für den (mod  $2\pi$  einschließlich des Vorzeichens bestimmten) Winkel  $2\varphi$  zwischen diesen beiden gerichteten Strecken findet man

$$(1) \quad \cotg \varphi = -z.$$

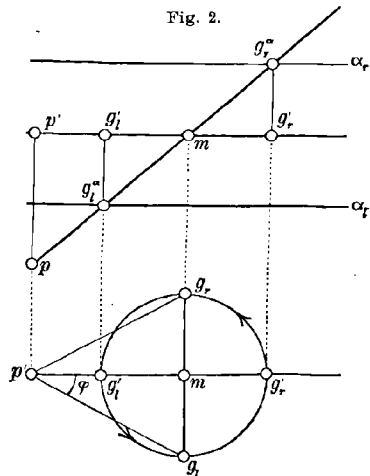


Fig. 2.

Die Transformation  $g_i \rightarrow g_r$  ist also eine *Drehung* um  $p'$  durch den Winkel  $2\varphi$ .

Liegt  $p$  im Unendlichen (aber nicht auf  $C$ ), so tritt an Stelle der Drehung eine *Schiebung* (Translation), wie man leicht bestätigen wird.

Durch eine analoge Überlegung findet man:

**Satz IIb.** Die  $\infty^2$  Geraden  $G$ , die in einer Ebene  $\pi$  liegen, die nicht durch  $C$  hindurchgeht, bilden sich durch die Zuordnung  $G \rightarrow (g_i, g_r)$  auf  $\infty^2$  geordnete Punktepaare ab, deren Anfangspunkte  $g_i$  ihren Endpunkten  $g_r$  in einer Umlegung entsprechen.

Dabei soll wie üblich unter einer *Umlegung* eine Punkttransformation in der Grundebene verstanden werden, die durch Zusammensetzung der Spiegelungen an drei geraden Linien einer Ebene erzeugt werden kann.

Man kann die Richtigkeit von IIb folgendermaßen einsehen.  $\pi$  schneidet  $\alpha_i$  und  $\alpha_r$  in zwei parallelen eigentlichen Geraden, deren Grundrisse wir  $P_i$  und  $P_r$  nennen wollen (Fig. 3).

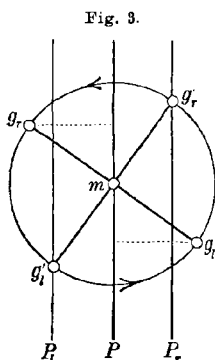


Fig. 3.

Diese beiden Geraden werden durch Spiegelung an der zu ihnen parallelen Spur  $P$  von  $\pi$  auf der Grundebene miteinander vertauscht. Zu einer beliebigen Geraden  $G$  von  $\pi$  gehört zunächst ein Paar  $(g_i', g_r')$ , dessen Anfangspunkt  $g_i'$  auf  $P_i$  und dessen Endpunkt  $g_r'$  auf  $P_r$  liegt. Dreht man dieses Paar um seinen Mittelpunkt  $m$  auf  $P$  nach  $(g_i, g_r)$  durch einen positiven rechten Winkel, so ist das neue Paar so gelegen, daß man den Anfangspunkt  $g_i$  dadurch in den Endpunkt  $g_r$  überführen kann, daß man  $g_i$  zuerst an  $P$  spiegelt und dann noch in der Richtung von  $P$  verschiebt. Die Größe der Verschiebung ist gleich dem Abstand von  $P_i$  und  $P_r$  oder gleich  $-2 \cotg \omega$ , wenn wir mit  $\omega$  den Winkel bezeichnen, welchen die Grundebene mit  $\pi$  einschließt. Bilden wir somit alle Geraden  $G$  von  $\pi$  auf die Grundebene ab, so erhalten wir  $\infty^2$  Punktepaare  $(g_i, g_r)$ , die eine Umlegung  $g_i \rightarrow g_r$  bestimmen, die dadurch entsteht, daß man die Spiegelung an der Spur  $P$  von  $\pi$  zusammensetzt mit einer Schiebung um die Strecke

$$(2) \quad 2\vartheta = -2 \cotg \omega$$

in der Richtung von  $P$ .

Hierbei ist noch eine *Bemerkung über das Vorzeichen* von Wichtigkeit. Orientiert man die Spur  $P$ , d. h. zeichnet man einen Durchlaufungssinn dieser Geraden als den „positiven“ aus, so ist dadurch sowohl für den (mod  $\pi$  bestimmten) Winkel  $\omega$ , wie auch für die

Schiebungsgröße  $2\vartheta$  ein bestimmtes Vorzeichen festgelegt, wenn man die folgenden naheliegenden Vereinbarungen trifft. Die Größe  $\vartheta$  soll positiv oder negativ gezählt werden, je nachdem der Sinn der Schiebung mit dem positiven Durchlaufungssinn von  $P$  übereinstimmt oder nicht. Ferner setzen wir zur Vorzeichenerklärung von  $\omega$  fest, daß der positive Drehungssinn um  $P$  zum positiven Durchlaufungssinn dieser Geraden ebenso liegen soll, wie der positive Drehungssinn in der Grundebene zum positiven Durchlaufungssinn der  $z$ -Achse.

Unter diesen Annahmen ist die Formel (2) richtig, wie man auch den positiven Sinn auf  $P$  angenommen haben mag. Ändert man nämlich die Orientierung von  $P$ , so vertauschen  $\vartheta$  und  $\omega$  gleichzeitig ihre Vorzeichen.

Fassen wir die letzten Ergebnisse noch übersichtlich zusammen.

**Satz IIIa.** Die Punkte  $p$  des Raumes, welche nicht auf  $C$  liegen, sind eineindeutig abgebildet auf die Bewegungen  $g_i \rightarrow g_r$  der Grundebene. Jedem eigentlichen Punkt  $p$  entspricht eine Drehung. Der Mittelpunkt der Drehung ist der Grundriß von  $p$ . Zwischen dem Drehwinkel  $2\varphi$  und dem Abstand  $z$  des Punktes  $p$  von der Grundebene besteht die Beziehung

$$(1) \quad \cotg \varphi = -z.^1)$$

**Satz IIIb.** Die Ebenen  $\pi$  des Raumes, welche nicht durch  $C$  hindurchgehen, sind eineindeutig abgebildet auf die Umlegungen  $g_i \rightarrow g_r$  der Grundebene. Jeder dieser Ebenen  $\pi$  entspricht eine Umlegung, deren Mittelgerade die Spur von  $\pi$  auf der Grundebene ist. Zwischen der Schiebungsgröße  $2\vartheta$  und dem Winkel der Grundebene mit  $\pi$  besteht die Beziehung

$$(2) \quad \cotg \omega = -\vartheta.$$

Zum Satze rechter Hand ist folgendes zu bemerken. Bei jeder Umlegung in der Ebene wird eine einzige eigentliche Gerade derart in sich transformiert, daß ihr Durchlaufungssinn erhalten bleibt. Wir nennen sie die *Mittelgerade* der Umlegung. Man kann die Umlegung zusammensetzen aus der Spiegelung aus ihrer Mittelgeraden und einer damit vertauschbaren Schiebung um die Strecke  $2\vartheta$  in der Richtung der Mittelgeraden.

Die Analogie zwischen den Sätzen links und rechts läßt sich noch ein wenig weiter treiben, wenn man die Schiebungen mit zu den Drehungen rechnet, und als Mittelpunkt einer Schiebung denjenigen uneigentlichen Punkt erklärt, zu dem die Normalen auf die Schiebungsrichtung hinführen.

1) Eine ähnliche Zuordnung zwischen den Punkten des Raumes und den Drehungen einer Ebene hat Herr R. Bricard benutzt, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (4) 10, 1910.

Die angegebene Zuordnung  $G \longleftrightarrow (g_i, g_r)$  ist auch für die darstellende Geometrie verwendbar. Ferner stellt sie ein Übertragungsprinzip dar, indem sie Zusammenhänge zwischen Sätzen der räumlichen und ebenen Geometrie vermittelt. Ein Beispiel dafür wird später gebracht (§ 9). Hier wollen wir zunächst unsere Zuordnung in Formeln fassen.

### § 2. Analytische Darstellung der Abbildung.

Es ist hier zweckmäßig, homogene Koordinaten einzuführen. Wir setzen

$$(3) \quad x = \frac{x_2}{x_1}, \quad y = \frac{x_3}{x_1}, \quad z = \frac{x_0}{x_1}.$$

In der Grundebene behalten wir die unhomogenen Koordinaten bei, um die Formeln möglichst übersichtlich zu gestalten. Die Koordinaten von  $g_i$  seien  $x, y$  und die von  $g_r$  seien  $\xi, \eta$ .

Für die homogenen Koordinaten der Punkte  $g_i^\alpha$  und  $g_r^\alpha$  (vgl. Fig. 1) findet man

$$(4) \quad g_i^\alpha \begin{cases} x_0 = -2, \\ x_1 = +2, \\ x_2 = +x + y + \xi - \eta, \\ x_3 = -x + y + \xi + \eta; \end{cases} \quad g_r^\alpha \begin{cases} y_0 = +2, \\ y_1 = +2, \\ y_2 = +x - y + \xi + \eta, \\ y_3 = +x + y - \xi + \eta. \end{cases}$$

Die zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

sind proportional den Plückerschen Linienkoordinaten  $G_{ik}$  von  $G$

$$G_{ik} = \varrho \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix}, \quad \varrho \neq 0.$$

Man findet

$$(5) \quad \left. \begin{matrix} G_{01} : G_{02} : G_{03} \\ G_{23} : G_{31} : G_{12} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 & : & x + \xi : y + \eta : \\ -\frac{(x^2 + y^2)}{2} - \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2} & : & x - \xi : y - \eta. \end{matrix} \right.$$

und daraus umgekehrt

$$(6) \quad \begin{cases} x = \frac{G_{02} + G_{31}}{G_{01}}, & y = \frac{G_{03} + G_{12}}{G_{01}}, \\ \xi = \frac{G_{02} - G_{31}}{G_{01}}, & \eta = \frac{G_{03} - G_{12}}{G_{01}}. \end{cases}$$

Die hierbei nötige Voraussetzung

$$(7) \quad G_{01} \neq 0$$

besagt gerade, daß  $G$  die uneigentliche Gerade  $C$  der Grundebene nicht treffen soll. Diese hat nämlich die Koordinaten

$$(8) \quad \left. \begin{matrix} C_{01} : C_{02} : C_{03} \\ C_{23} : C_{31} : C_{12} \end{matrix} \right\} = \begin{cases} 0 : 0 : 0 : \\ 1 : 0 : 0 \end{cases}$$

und daher ist

$$G_{01} C_{23} + G_{02} C_{31} + G_{03} C_{12} + \left. \begin{matrix} \\ + G_{23} C_{01} + G_{31} C_{02} + G_{12} C_{03} \end{matrix} \right\} = \lambda G_{01}, \lambda \neq 0.$$

$G_{01} = 0$  ist somit die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $G$  und  $C$  sich schneiden.

Nehmen wir zwei Geraden  $G$  und  $G^*$ , so finden wir unter der Annahme  $G_{01} \neq 0, G_{01}^* \neq 0$

$$(9) \left\{ \begin{matrix} G_{01} G_{23}^* + G_{02} G_{31}^* + G_{03} G_{12}^* \\ + G_{23} G_{01}^* + G_{31} G_{02}^* + G_{12} G_{03}^* \end{matrix} \right\} = \kappa \left\{ \begin{matrix} + [(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2] \\ - [(\xi - \xi^*)^2 + (\eta - \eta^*)^2] \end{matrix} \right\},$$

$$\kappa \neq 0.$$

Dies ist die analytische Formulierung unseres Satzes I.<sup>1)</sup>

Es sei nun auf der Geraden  $G$ , die wir als Verbindungslinie zweier Punkte  $x$  und  $y$  gegeben denken, der Punkt  $p$  gelegen. Dann müssen die dreireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & y_2 & y_3 \\ y_0 & y_1 & x_2 & x_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}$$

sämtlich verschwinden. Halten wir die Voraussetzung  $x_0 y_1 - x_1 y_0 \neq 0$  fest, so genügt es, zwei dieser Determinanten gleich Null zu setzen, die beiden andern müssen dann auch verschwinden. Wir haben die Determinanten gleich Null zu setzen, welche aus unserer Matrix dadurch entstehen, daß man einmal die vierte und das andermal die dritte Spalte wegstreicht. Entwickelt man nach der letzten Zeile, so findet sich

$$(10) \quad \begin{aligned} p_0 G_{12} - p_1 G_{02} + p_2 G_{01} &= 0, \\ p_0 G_{31} + p_1 G_{03} - p_3 G_{01} &= 0 \end{aligned}$$

oder, wenn wir die Formeln (5) heranziehen

$$(11) \quad \begin{aligned} p_0(y - \eta) - p_1(x + \xi) + 2p_2 &= 0, \\ p_0(x - \xi) + p_1(y + \eta) - 2p_3 &= 0. \end{aligned}$$

Nach unserer Annahme  $G_{01} \neq 0$  kann  $p$  nicht auf  $C$  liegen,  $p_0$  und  $p_1$  können also nicht gleichzeitig Null sein und  $p_0^2 + p_1^2$  ist somit positiv (wir beschränken uns doch hier stets auf reelle Elemente). Daher kann man die Formeln (11) nach  $\xi, \eta$  auflösen

$$(12) \quad \begin{aligned} (p_0^2 + p_1^2)\xi &= (p_0^2 - p_1^2)x + 2p_0 p_1 \cdot y + 2(p_1 p_2 - p_0 p_3), \\ (p_0^2 + p_1^2)\eta &= -2p_0 p_1 \cdot x + (p_0^2 - p_1^2)y + 2(p_1 p_3 + p_0 p_2). \end{aligned}$$

1) Die Formeln (5) und (9) sind, wie ich durch persönliche Mitteilung erfahre, auch von Herrn Study gefunden worden. Vgl. den letzten § des demnächst erscheinenden 1. Heftes der Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie (Leipzig 1911).

Denkt man hierin die Parameter  $p_k$  festgehalten, so stellen diese Gleichungen die Bewegung  $g_i(x, y) \rightarrow g_r(\xi, \eta)$  dar, welche dem Punkt  $p$  zugeordnet ist (Satz IIa).<sup>1)</sup>

Für  $p_1 \neq 0$  finden wir aus (11) die Koordinaten des Drehungsmittelpunktes (vgl. Satz IIIa)

$$(13) \quad x = \xi = \frac{p_2}{p_1}, \quad y = \eta = \frac{p_3}{p_1}.$$

Auch unsere Formel (1) für den Drehwinkel  $2\varphi$  bestätigt sich, da wir hier finden

$$(14) \quad \cotg \varphi = -\frac{p_0}{p_1}.$$

Rückt  $p$  ins Unendliche ( $p_0 \neq 0, p_1 = 0$ ), so vereinfachen sich die Formeln (12)

$$(15) \quad \begin{aligned} \xi &= x - 2\frac{p_2}{p_0}, \\ \eta &= y + 2\frac{p_3}{p_0}. \end{aligned}$$

Die Größe dieser Verschiebung ist

$$(16) \quad 2\vartheta = \frac{2}{p_0} \sqrt{p_2^2 + p_3^2}.$$

Eine analoge Überlegung können wir anstellen, wenn wir die Gerade  $G$  als Schnittlinie zweier Ebenen  $\mu, \nu$  ansehen. Geht auch  $\pi$  durch  $G$ , so müssen die dreireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{vmatrix}$$

verschwinden. Man findet insbesondere

$$(17) \quad \begin{aligned} \pi_0 G_{01} - \pi_2 G_{12} + \pi_3 G_{31} &= 0, \\ \pi_1 G_{01} + \pi_2 G_{02} + \pi_3 G_{03} &= 0 \end{aligned}$$

und daraus

$$(18) \quad \begin{aligned} 2\pi_0 - \pi_2(y - \eta) + \pi_3(x - \xi) &= 0, \\ 2\pi_1 + \pi_2(x + \xi) + \pi_3(y + \eta) &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$(19) \quad \begin{aligned} -(\pi_2^2 + \pi_3^2)\xi &= (\pi_2^2 - \pi_3^2)x + 2\pi_2\pi_3 \cdot y + 2(\pi_1\pi_2 - \pi_0\pi_3), \\ -(\pi_2^2 + \pi_3^2)\eta &= 2\pi_2\pi_3 \cdot x - (\pi_2^2 - \pi_3^2)y + 2(\pi_1\pi_3 + \pi_0\pi_2). \end{aligned}$$

1) Diese Parameterdarstellung der Bewegungen in der Ebene findet sich schon bei E. Study, von den Bewegungen und Umlegungen, Math. Ann. 39 (1891) § 11, S. 585 u. ff.

Diese Gleichungen stellen bei festen Werten der  $\pi_k$  die Umlegung  $g_i(x, y) \rightarrow g_r(\xi, \eta)$  dar, welche der Ebene  $\pi$  entspricht.<sup>1)</sup> Aus der zweiten Formel (18) ergibt sich die Gleichung der Mittelgeraden

$$(20) \quad + (\pi_1 + \pi_2 x + \pi_3 y) = - (\pi_1 + \pi_2 \xi + \pi_3 \eta) = 0.$$

Für die Schiebungsgröße  $2\vartheta$  erhält man

$$(21) \quad \vartheta = \frac{q_0}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2}},$$

wenn man

$$(22) \quad \cotg w = - \frac{q_0}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2}}$$

setzt.

### § 3. Zusammensetzung von Bewegungen und Umlegungen.

Es sollen hier in Kürze die Formeln wiedergegeben werden, die Herr Study für die Zusammensetzung der Bewegungen und Umlegungen in der Ebene gefunden hat.<sup>2)</sup>

Wir hatten für eine Bewegung, welche den Punkt  $(x, y)$  nach  $(x', y')$  bringt, die Parameterdarstellung gefunden [Formel 12]

$$(23) \quad \begin{aligned} (p_0^2 + p_1^2)x' &= (p_0^2 - p_1^2)x + 2p_0p_1 \cdot y + 2(p_1p_2 - p_0p_3), \\ (p_0^2 + p_1^2)y' &= -2p_0p_1 \cdot x + (p_0^2 - p_1^2)y + 2(p_1p_3 + p_0p_2). \end{aligned}$$

Führen wir nach dieser Bewegung  $(x, y) \rightarrow (x', y')$  mit den Parametern  $p_i$  eine weitere Bewegung  $(x', y') \rightarrow (x'', y'')$  mit den Parametern  $p_i'$  aus, so erhalten wir durch Zusammensetzung eine neue Bewegung  $(x, y) \rightarrow (x'', y'')$ . Für ihre Parameter  $p_i''$  findet man die Ausdrücke

$$(24) \quad \begin{cases} qp_0'' = p_0p_0' - p_1p_1' & * & * & * \\ qp_1'' = p_0p_1' + p_1p_0' & * & * & * \\ qp_2'' = p_0p_2' - p_1p_3' + p_2p_0' + p_3p_1', \\ qp_3'' = p_0p_3' + p_1p_2' - p_2p_1' + p_3p_0'. \end{cases}$$

Für eine Umlegung  $(x, y) \rightarrow (x', y')$  hatten wir die Formeln (19)

$$(25) \quad \begin{aligned} - (\pi_2^2 + \pi_3^2)x' &= (\pi_2^2 - \pi_3^2)x + 2\pi_2\pi_3 \cdot y + 2(\pi_1\pi_2 - \pi_0\pi_3), \\ - (\pi_2^2 + \pi_3^2)y' &= 2\pi_2\pi_3 \cdot x - (\pi_2^2 - \pi_3^2)y + 2(\pi_1\pi_3 + \pi_0\pi_2). \end{aligned}$$

Setzen wir zwei Umlegungen  $(x, y) \rightarrow (x', y')$ ,  $(x', y') \rightarrow (x'', y'')$  mit den Parametern  $\pi_i$  und  $\pi_i'$  zusammen, so entsteht eine Bewegung mit den Parametern

$$(26) \quad \begin{cases} qp_0'' = * & * & -\pi_2\pi_2' - \pi_3\pi_3', \\ qp_1'' = * & * & +\pi_2\pi_3' - \pi_3\pi_2', \\ qp_2'' = \pi_0\pi_2' - \pi_1\pi_3' + \pi_2\pi_0' + \pi_3\pi_1', \\ qp_3'' = \pi_0\pi_3' + \pi_1\pi_2' - \pi_2\pi_1' + \pi_3\pi_0'. \end{cases}$$

1) Auch die Formel (19) findet sich bei Study a. a. O.

2) Math. Ann. 39 (1891) S. 558—561. Vgl. auch Monatshefte f. Math. und Phys. I (1900) S. 352.

Für die Zusammensetzung einer Bewegung mit einer Umlegung findet man je nach der Reihenfolge, in der diese Transformationen ausgeübt werden

$$(27) \quad \begin{cases} \varrho \pi_0'' = p_0 \pi_0' - p_1 \pi_1' - p_2 \pi_2' - p_3 \pi_3', \\ \varrho \pi_1'' = p_0 \pi_1' + p_1 \pi_0' + p_2 \pi_3' - p_3 \pi_2', \\ \varrho \pi_2'' = p_0 \pi_2' - p_1 \pi_3' & * & * & , \\ \varrho \pi_3'' = p_0 \pi_3' + p_1 \pi_2' & * & * & , \end{cases}$$

oder

$$(28) \quad \begin{cases} \varrho \pi_0'' = \pi_0 p_0' - \pi_1 p_1' - \pi_2 p_2' - \pi_3 p_3', \\ \varrho \pi_1'' = \pi_0 p_1' + \pi_1 p_0' + \pi_2 p_3' - \pi_3 p_2', \\ \varrho \pi_2'' = * & * & + \pi_2 p_0' + \pi_3 p_1', \\ \varrho \pi_3'' = * & * & - \pi_2 p_1' + \pi_3 p_0'. \end{cases}$$

Nach Study kann man diese Formeln in eleganter Weise zusammenfassen, wenn man sich höherer komplexer Größen bedient. Wir setzen

$$(29) \quad \begin{aligned} \dot{p} &= p_0 e_0 + p_1 e_1 + p_2 \varepsilon e_2 + p_3 \varepsilon e_3, \\ \dot{\pi} &= \pi_0 \varepsilon e_0 + \pi_1 \varepsilon e_1 + \pi_2 e_2 + \pi_3 e_3. \end{aligned}$$

Darin mögen die  $e_k$  Quaternioneneinheiten bedeuten, welche bekanntlich der Multiplikationsregel genügen

$$(30) \quad \begin{aligned} e_0 &= e_0 e_0 = -e_1 e_1 = -e_2 e_2 = -e_3 e_3, \\ e_1 &= e_0 e_1 = +e_1 e_0 = +e_2 e_3 = -e_3 e_2, \\ e_2 &= e_0 e_2 = -e_1 e_3 = +e_2 e_0 = +e_3 e_1, \\ e_3 &= e_0 e_3 = +e_1 e_2 = -e_2 e_1 = +e_3 e_0, \end{aligned}$$

und  $\varepsilon$  bedeute eine mit den Quaternioneneinheiten vertauschbare Einheit, welche der Rechenregel

$$(31) \quad \varepsilon^2 = 0$$

unterworfen ist.

Mittels dieser komplexer Verbindungen kann man die Formeln (24), (26), (27), (28) für  $\varrho = 1$  so schreiben

$$\begin{aligned} (24)^* \quad \dot{p}'' &= \dot{p} \dot{p}', & (26)^* \quad \dot{p}'' &= \dot{\pi} \dot{\pi}', \\ (27)^* \quad \dot{\pi}'' &= \dot{p} \dot{\pi}', & (28)^* \quad \dot{\pi} &= \dot{\pi} \dot{p}'. \end{aligned}$$

Führen wir noch zwei Bezeichnungen ein. Wenn

$$(32) \quad \begin{aligned} \dot{p} &= p_0 e_0 + p_1 e_1 + p_2 \varepsilon e_2 + p_3 \varepsilon e_3 \\ \bar{\dot{p}} &= p_0 e_0 - p_1 e_1 - p_2 \varepsilon e_2 - p_3 \varepsilon e_3. \end{aligned}$$

Ebenso folge aus

$$\dot{\pi} = \pi_0 \varepsilon e_0 + \pi_1 \varepsilon e_1 + \pi_2 e_2 + \pi_3 e_3$$



die Beziehung

$$(33) \quad \bar{\pi} = \pi_0 \varepsilon e_0 - \pi_1 \varepsilon e_1 - \pi_2 \varepsilon e_2 - \pi_3 \varepsilon e_3.$$

Ferner definieren wir

$$(34) \quad \begin{aligned} N(\dot{p}) &= p_0^2 + p_1^2 = \dot{p} \bar{p}, \\ N(\dot{\pi}) &= \pi_2^2 + \pi_3^2 = \dot{\pi} \bar{\pi}. \end{aligned}$$

Es gelten für die beiden eingeführten Zeichen folgende *Rechenregeln*, die man entweder durch Ausrechnung bestätigen oder aus bekannten Formeln der Quaternionentheorie unmittelbar entnehmen kann. Wir deuten durch kleine deutsche Buchstaben an, daß es freisteht, die folgenden Formeln auf die komplexen Größen anzuwenden, welche wir den Bewegungen zugeordnet hatten ( $\dot{p}$ ,  $\dot{p}'$ ,  $\dot{p}'' \dots$ ), oder die, welche den Umlegungen entsprechen ( $\dot{\pi}$ ,  $\dot{\pi}'$ ,  $\dot{\pi}'' \dots$ ).

Aus  $\dot{p}'' = \dot{p} \dot{p}'$  folgt  $\bar{p}'' = \bar{p}' \bar{p}$ . Daher ergibt sich aus  $\dot{p}'' = \dot{p} \dot{p}'$  auch  $N(\dot{p}'') = N(\dot{p}) N(\dot{p}')$ .

Die komplexen Verbindungen ermöglichen auch, die Formeln (23) und (25) zusammenzufassen. Man setzt

$$(35) \quad \dot{g} = e_1 + x \varepsilon e_2 + y \varepsilon e_3.$$

Dann findet man für die *Bewegungen*

$$(23)^* \quad N(\dot{p}) \cdot \dot{g}' = \dot{p} \dot{g}' \bar{p}$$

und für die *Umlegungen*

$$(25)^* \quad N(\dot{\pi}) \cdot \dot{g}' = \bar{\pi} \dot{g}' \pi.$$

#### § 4. Linksparallele und rechtsparallele Geraden.

Es seien zwei Geraden  $G$ ,  $G^*$  gegeben, welche die uneigentliche Gerade  $C$  der Grundebene nicht treffen. ( $g_1, g_r$ ), ( $g_1^*, g_r^*$ ) seien ihre Bilder. Wir stellen folgende *Definition* auf:

Zwei Geraden  $G$ ,  $G^*$  heißen *linksparallel* [*rechtsparallel*], wenn die zugehörigen Punkte  $g_i$  und  $g_i^*$  [ $g_r$  und  $g_r^*$ ] zusammenfallen.

Aus den Formeln (6) ergibt sich als Bedingung für *Linksparallelismus*

$$(36) \quad G_{01} : G_{02} + G_{31} : G_{03} + G_{12} = G_{01}^* : G_{02}^* + G_{31}^* : G_{03}^* + G_{12}^*,$$

*Rechtsparallelismus*

$$(37) \quad G_{01} : G_{02} - G_{31} : G_{03} - G_{12} = G_{01}^* : G_{02}^* - G_{31}^* : G_{03}^* - G_{12}^*.$$

Aus der Definition ergeben sich folgende Eigenschaften dieses Parallelismus.

Spiegelt man links-[rechts-]parallele Geraden an der Grundebene, so gehen daraus rechts-[links-]parallele Geraden hervor. Der Spiege-

lung entspricht nämlich die Vertauschung von Anfangs- und Endpunkt der Punktepaare.

Durch einen jeden Punkt, der nicht auf  $C$  liegt, geht zu einer beliebig vorgegebenen Geraden  $G$  eine und nur eine Links-[Rechts-]parallele.

In einer Ebene, die nicht durch  $C$  hindurchgeht, liegt zu jeder Geraden  $G$  eine und nur eine Links-[Rechts-]parallele.

Wir führen jetzt *imaginäre Elemente* ein, die zu unseren reellen Figuren in ausgezeichnete Beziehung stehen. Zunächst zwei Punkte  $c_i, c_r$ , die dem absoluten Kegelschnitt (Kugelschnitt) der Euklidischen Maßbestimmung angehören und in der Grundebene liegen,

$$(38) \quad \begin{array}{l} c_i \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 0 : i : 1, \\ c_r \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 0 : 1 : i \end{array}$$

und zwei Ebenen

$$(39) \quad \begin{array}{l} \gamma_i \quad x_0 - ix_1 = 0, \\ \gamma_r \quad x_0 + ix_1 = 0. \end{array} \quad \{i = \sqrt{-1}\}$$

Betrachten wir alle Geraden  $G^*$ , die zur festen Geraden  $G$  linksparallel laufen [Gleichung (36)], so sehen wir, daß sie sämtlich zwei konjugiert-imaginäre Geraden  $\underline{M}, \overline{M}$  treffen mit den Koordinaten

$$(40) \quad \begin{array}{l} \underline{M}_{01} : \underline{M}_{02} : \underline{M}_{03} : \\ \underline{M}_{23} : \underline{M}_{31} : \underline{M}_{12} : \\ \overline{M}_{01} : \overline{M}_{02} : \overline{M}_{03} : \\ \overline{M}_{23} : \overline{M}_{31} : \overline{M}_{12} : \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \underline{M}_{01} : \underline{M}_{02} : \underline{M}_{03} : \\ \underline{M}_{23} : \underline{M}_{31} : \underline{M}_{12} : \\ \overline{M}_{01} : \overline{M}_{02} : \overline{M}_{03} : \\ \overline{M}_{23} : \overline{M}_{31} : \overline{M}_{12} : \end{array}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \quad \quad : -G_{01} : +iG_{01} : \\ (G_{02} + G_{31}) - i(G_{03} + G_{12}) : -G_{01} : +iG_{01} : \\ 0 \quad \quad \quad : -G_{01} : -iG_{01} : \\ (G_{02} + G_{31}) + i(G_{03} + G_{12}) : -G_{01} : -iG_{01} : \end{array} \right.$$

Für die Schnittpunkte  $g'_i, g'_r$  von  $G$  mit  $\gamma_i$  und  $\gamma_r$  finden wir die Koordinaten [vgl. die Formeln (10)]

$$(41) \quad \begin{array}{l} g'_i \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = +iG_{01} : G_{01} : G_{02} - iG_{12} : G_{03} + iG_{31}, \\ g'_r \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = -iG_{01} : G_{01} : G_{02} + iG_{12} : G_{03} - iG_{31}. \end{array}$$

Man ersieht hieraus, daß  $\underline{M}$  die Punkte  $g'_i$  und  $c_i$  und  $\overline{M}$  die Punkte  $g'_r$  und  $c_r$  verbindet.

**Satz IV.** Die  $\infty^2$  Geraden, welche zu einer festen Geraden  $G$  links-[rechts-]parallel laufen, gehören einem elliptischen Netze an, d. h. der Gesamtheit aller Geraden, die zwei konjugiert-imaginäre Geraden (die Leitlinien des Netzes) schneiden.

Die Leitlinien eines Netzes linksparalleler Geraden sind eine imaginäre Gerade in  $\gamma_i$  durch  $c_i$  und die konjugiert-imaginäre in  $\gamma_r$  durch  $c_r$ .

Die Leitlinien eines Netzes rechtsparalleler Geraden sind eine imaginäre Gerade in  $\gamma_i$  durch  $c_r$  und die konjugiert-imaginäre in  $\gamma_r$  durch  $c_i$ .

Wir haben nur die Beziehung für linksparallele Geraden bewiesen, doch folgt daraus auch die für rechtsparallele Geraden, wenn man eine Spiegelung an der Grundebene anwendet. Man kann, wie hier nicht ausgeführt werden soll, den Inhalt des Satzes IV auch rein geometrisch, ohne Verwendung von Formeln unschwer bestätigen.

Nennen wir den uneigentlichen Punkt der Normalen auf die Grundebene  $p^0(1:0:0:0)$  und formulieren wir den Satz IV noch ein wenig anders:

**Satz V.** *Es seien  $\gamma'_i, \gamma'_r$  die Schnittpunkte einer Geraden  $G$  mit  $\gamma_i$  und  $\gamma_r$ . Die zwei konjugiert-imaginären Verbindungsebenen  $[g'_i c_i p^0]$ ,  $[g'_r c_r p^0]$  schneiden die Grundebene im reellen Anfangspunkt  $g_i$  und die beiden konjugiert-imaginären Ebenen  $[g'_i c_i p^0]$ ,  $[g'_r c_r p^0]$  schneiden die Grundebene im reellen Endpunkt  $g_r$  des Bildes  $(g_i, g_r)$  von  $G$ .*

Es ist nämlich z. B. die Schnittlinie der ersten beiden Ebenen nach Satz IV linksparallel zu  $G$ , und da sie auf der Grundebene normal steht, so muß ihr Fußpunkt auf der Grundebene mit  $g_i$  zusammenfallen.

#### § 5. Die Transformationsgruppen der quasielliptischen Geometrie.

Die Figur, welche aus den Punkten  $c_i, c_r$  und den Ebenen  $\gamma_i, \gamma_r$  besteht, soll *das quasiabsolute Gebilde* genannt werden.

Es sei irgendeine reelle Kollineation oder Korrelation des Raumes vorgelegt, die das quasiabsolute Gebilde in sich selbst überführt. Wir wollen diese Transformation mit  $G \rightarrow G^*$  bezeichnen, da wir sie auf die Geraden des Raumes angewendet denken. Vermöge der Zuordnung  $G \rightarrow (g_i, g_r)$  entspricht der Abbildung  $G \rightarrow G^*$  eine Vertauschung der geordneten Punktepaare  $(g_i, g_r) \rightarrow (g_i^*, g_r^*)$  in der Grundebene. Nach der im vorigen Paragraphen gegebenen imaginär-geometrischen Deutung des „Parallelismus“ müssen durch die Transformation  $G \rightarrow G^*$  linksparallele (rechtsparallele) Geraden wieder entweder in links- oder in rechtsparallele Geraden übergeführt werden, d. h. bei der entsprechenden Abbildung  $(g_i, g_r) \rightarrow (g_i^*, g_r^*)$  werden Punktepaare mit gemeinsamem Anfangs-(End-)Punkt wieder in Punktepaare übergeführt, die Anfangs- oder Endpunkt gemein haben.

Die Transformation  $(g_i, g_r) \rightarrow (g_i^*, g_r^*)$  der Punktepaare zerfällt demnach in zwei Punkttransformationen, die wir entweder durch die Symbole  $g_i \rightarrow g_i^*, g_r \rightarrow g_r^*$  oder durch die Symbole  $g_i \rightarrow g_r^*, g_r \rightarrow g_i^*$  zu bezeichnen haben werden. Näheres darüber kann man erst aussagen, wenn man weiß, wie durch die Abbildung  $G \rightarrow G^*$  die Punkte und Ebenen des quasiabsoluten Gebildes unter sich vertauscht werden.

Von den Punkttransformationen  $g_i \rightarrow g_i^*, g_r \rightarrow g_r^*$  (oder  $g_i \rightarrow g_r^*, g_r \rightarrow g_i^*$ )

bemerken wir zunächst, daß sie ausnahmslos eineindeutig und stetig die eigentlichen Punkte der Ebene untereinander vertauschen. Da die Abbildung  $G \rightarrow G^*$  sich schneidende Geraden  $G$  und  $H$  wieder in sich schneidende Geraden  $G^*$ ,  $H^*$  überführt, so müssen nach unserem Satz I in § 1 die beiden Punkttransformationen in der Grundebene folgende Eigenschaft haben: Wenn zwei Paare reeller, eigentlicher Punkte  $g_i, h_i; g_r, h_r$  derart gegeben werden, daß die Strecken  $g_i h_i$  und  $g_r h_r$  einander absolut gleich sind, so müssen die Strecken  $g_i^* h_i^*$ ,  $g_r^* h_r^*$  zwischen den zugeordneten Punkten stets wieder einander gleich ausfallen.

Hieraus folgt aber, daß diese Punkttransformationen *Ähnlichkeiten* sein müssen mit demselben *Vergrößerungsverhältnis*.

Nehmen wir umgekehrt zwei reelle Ähnlichkeiten  $g_i \rightarrow g_i^*$ ,  $g_r \rightarrow g_r^*$  (oder  $g_i \rightarrow g_r^*$ ,  $g_r \rightarrow g_i^*$ ) mit demselben Vergrößerungsverhältnis, doch im übrigen völlig beliebig an, so entspricht ihnen durch unsere Abbildung  $(g_i, g_r) \rightarrow G$  eine Transformation  $G \rightarrow G^*$  der Geraden des Raumes, die zunächst nur für diejenigen Geraden erklärt ist, welche die Verbindungslinie  $C$  von  $c_i$  und  $c_r$  nicht schneiden. Für diese Geraden ist die Transformation umkehrbar eindeutig und führt sich schneidende Geraden wieder in sich schneidende über.  $G \rightarrow G^*$  ist daher ein Ausschnitt aus einer Kollineation oder Korrelation des Raumes. Mittels unserer imaginär-geometrischen Deutung der beiden Arten des Parallelismus beweist man ferner, daß die Abbildung  $G \rightarrow G^*$  das quasiabsolute Gebilde in sich transformiert.

Wir haben also gefunden:

**Satz VI.** *Durch die Zuordnung  $G \leftrightarrow (g_i, g_r)$  werden die Kollineationen und Korrelationen  $G \rightarrow G^*$  des Raumes, welche das quasiabsolute Gebilde in sich transformieren, abgebildet auf Paare von reellen Ähnlichkeitstransformationen  $g_i \rightarrow g_i^*$ ,  $g_r \rightarrow g_r^*$  und  $g_i \rightarrow g_r^*$ ,  $g_r \rightarrow g_i^*$  mit demselben Vergrößerungsverhältnis.*

Die siebengliedrige Gruppe der Kollineationen und Korrelationen des quasiabsoluten Gebildes zerfällt in acht kontinuierliche Scharen. Wir wollen, um eine einfache Schreibweise zu ermöglichen, z. B. mit  $\alpha_{rr}^+$  eine eigentliche (d. h. gleichsinnige) Ähnlichkeit  $g_i \rightarrow g_r^*$  bezeichnen und z. B. mit  $\alpha_{rr}^-$  eine uneigentliche (gegensinnige) Ähnlichkeit  $g_i \rightarrow g_i^*$ . Die acht Scharen  $\mathfrak{G}_7$ ,  $\mathfrak{S}_7^I$ ,  $\mathfrak{S}_7^{II}$ ,  $\mathfrak{S}_7^{III}$ ,  $X_7$ ,  $X_7^I$ ,  $X_7^{II}$ ,  $X_7^{III}$  der automorphen Gruppe des quasiabsoluten Gebildes bilden sich in folgender Weise auf die Grundebene ab:

$$(42) \quad \begin{aligned} \mathfrak{G}_7 &\leftrightarrow \{\alpha_{rr}^+, \alpha_{rr}^+\}, & X_7 &\leftrightarrow \{\alpha_{rr}^+, \alpha_{rr}^-\}, \\ \mathfrak{S}_7^I &\leftrightarrow \{\alpha_{rr}^-, \alpha_{rr}^-\}, & X_7^I &\leftrightarrow \{\alpha_{rr}^-, \alpha_{rr}^+\}, \\ \mathfrak{S}_7^{II} &\leftrightarrow \{\alpha_{ri}^+, \alpha_{ri}^+\}, & X_7^{II} &\leftrightarrow \{\alpha_{ri}^+, \alpha_{ri}^-\}, \\ \mathfrak{S}_7^{III} &\leftrightarrow \{\alpha_{ri}^-, \alpha_{ri}^-\}, & X_7^{III} &\leftrightarrow \{\alpha_{ri}^-, \alpha_{ri}^+\}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\mathfrak{G}_7, \mathfrak{G}_7^I, \mathfrak{G}_7^{II}, \mathfrak{G}_7^{III}$  die gemischte Gruppe der Kollineationen und  $X_7, X_7^I, X_7^{II}, X_7^{III}$  sind die Scharen der Korrelationen des quasiabsoluten Gebildes.

Mit Hilfe des Satzes V (§ 4) kann man entscheiden, wie die Punkte und Ebenen des quasiabsoluten Gebildes vertauscht werden. Das Ergebnis wird durch folgende Tabelle verdeutlicht:

$$(43) \quad \begin{array}{ll} \mathfrak{G}_7 \left\{ \begin{array}{l} c_i \rightarrow c_i, \quad c_r \rightarrow c_r \\ \gamma_i \rightarrow \gamma_i, \quad \gamma_r \rightarrow \gamma_r \end{array} \right\}, & X_7 \left\{ \begin{array}{l} c_i \rightarrow \gamma_i, \quad c_r \rightarrow \gamma_r \\ \gamma_i \rightarrow c_i, \quad \gamma_r \rightarrow c_r \end{array} \right\}, \\ \mathfrak{G}_7^I \left\{ \begin{array}{l} c_i \rightarrow c_r, \quad c_r \rightarrow c_i \\ \gamma_i \rightarrow \gamma_r, \quad \gamma_r \rightarrow \gamma_i \end{array} \right\}, & X_7^I \left\{ \begin{array}{l} c_i \rightarrow \gamma_r, \quad c_r \rightarrow \gamma_i \\ \gamma_i \rightarrow c_r, \quad \gamma_r \rightarrow c_i \end{array} \right\}, \\ \mathfrak{G}_7^{II} \left\{ \begin{array}{l} c_i \rightarrow c_i, \quad c_r \rightarrow c_r \\ \gamma_i \rightarrow \gamma_r, \quad \gamma_r \rightarrow \gamma_i \end{array} \right\}, & X_7^{II} \left\{ \begin{array}{l} c_i \rightarrow \gamma_i, \quad c_r \rightarrow \gamma_r \\ \gamma_i \rightarrow c_r, \quad \gamma_r \rightarrow c_i \end{array} \right\}, \\ \mathfrak{G}_7^{III} \left\{ \begin{array}{l} c_i \rightarrow c_r, \quad c_r \rightarrow c_i \\ \gamma_i \rightarrow \gamma_i, \quad \gamma_r \rightarrow \gamma_r \end{array} \right\}, & X_7^{III} \left\{ \begin{array}{l} c_i \rightarrow \gamma_r, \quad c_r \rightarrow \gamma_i \\ \gamma_i \rightarrow c_i, \quad \gamma_r \rightarrow c_r \end{array} \right\}. \end{array}$$

Setzt man in dem Schema (42) anstelle der eigentlichen und uneigentlichen Ähnlichkeiten  $a^+, a^-$  überall Bewegungen und Umlegungen  $b^+, b^-$  ein, so erhält man anstelle der siebengliedrigen Gruppe eine sechsgliedrige, deren acht kontinuierliche Scharen wir entsprechend, den acht Scharen der siebengliedrigen Gruppe mit  $\mathfrak{G}_6, \mathfrak{G}_6^I, \mathfrak{G}_6^{II}, \mathfrak{G}_6^{III}, X_6, X_6^I, X_6^{II}, X_6^{III}$  bezeichnen. Diese sechsgliedrige Gruppe ist in der siebengliedrigen invariant enthalten.

Im Sinne von Felix Klein gehört zu jeder Gruppe von geometrischen Transformationen eine „Geometrie“. Die zur kontinuierlichen Gruppe  $\mathfrak{G}_6$  gehörige Geometrie soll die quasielliptische Geometrie genannt werden.

Die Gruppe  $\mathfrak{G}_6$  setzt sich aus zwei vertauschbaren Untergruppen  $\mathfrak{G}_3^i, \mathfrak{G}_3^r$  zusammen, den sogenannten Parametergruppen der ebenen Bewegungen, deren jede zur Gruppe der Bewegungen in der Ebene holocdrisch isomorph ist. Die Gruppen  $\mathfrak{G}_3^i, \mathfrak{G}_3^r$  bilden sich so auf die Ebene ab:

$$(44) \quad \mathfrak{G}_3^i \leftrightarrow \{b_{ii}^+, i_{rr}\}, \quad \mathfrak{G}_3^r \leftrightarrow \{i_{ii}, b_{rr}^+\}.$$

Durch das Zeichen  $i$  ist hierin die Identität angedeutet.

$\mathfrak{G}_6$  heißt die Gruppe der Quasibewegungen;  $\mathfrak{G}_3^i, \mathfrak{G}_3^r$  die Gruppen der linksseitigen und rechtsseitigen Quasischiebungen.

Jede Transformation von  $\mathfrak{G}_6$  ist das Produkt zweier bestimmter Transformationen von  $\mathfrak{G}_3^i$  und  $\mathfrak{G}_3^r$ , die miteinander vertauschbar sind. Schreiben wir anstatt zweier Indices  $l$  und  $r$  nur je einen, so sind die drei Transformationen die folgenden:

$$(45) \quad \begin{array}{l} \{b_l, b_r\} \\ \{b_l, i_r\}, \quad \{i_l, b_r\}. \end{array}$$

## § 6. Transformationsformeln.

Mittels der in § 3 eingeführten komplexen Verbindungen kann man die Transformationen des quasielliptischen Raumes in einfacher Weise darstellen.

Denken wir uns eine Quasibewegung auf die Punkte des Raumes angewendet  $p \rightarrow p^*$ . Ihr Bild in der Grundebene sei  $\{\check{b}_i, \check{b}_r\}$ .  $\check{b}_i$  ist eine Bewegung  $g_i \rightarrow g_i^*$  und  $\check{b}_r$  eine Bewegung  $g_r \rightarrow g_r^*$ . Ein Punkt  $p$ , der nicht auf  $C$  liegt, vertritt eine Bewegung  $p = g_i \rightarrow g_r$ . Der entsprechende Punkt  $p^*$  gehört daher zu der Bewegung  $p^* = g_i^* \rightarrow g_r^* = \check{b}_i^{-1} p \check{b}_r$ .

Führen wir die komplexen Verbindungen ein (vgl. § 3):

$$\begin{aligned}
 \dot{p} &= p_0 e_0 + p_1 e_1 + p_2 \varepsilon e_2 + p_3 \varepsilon e_3, \\
 \dot{p}^* &= p_0^* e_0 + p_1^* e_1 + p_2^* \varepsilon e_2 + p_3^* \varepsilon e_3; \\
 g_i &= e_1 + x \varepsilon e_2 + y \varepsilon e_3, \\
 g_i^* &= e_1 + x^* \varepsilon e_2 + y^* \varepsilon e_3; \\
 g_r &= e_1 + \xi \varepsilon e_2 + \eta \varepsilon e_3, \\
 g_r^* &= e_1 + \xi^* \varepsilon e_2 + \eta^* \varepsilon e_3; \\
 \check{b}_i &= b_0^{(i)} e_0 + b_1^{(i)} e_1 + b_2^{(i)} \varepsilon e_2 + b_3^{(i)} \varepsilon e_3, \\
 \check{b}_r &= b_0^{(r)} e_0 + b_1^{(r)} e_1 + b_2^{(r)} \varepsilon e_2 + b_3^{(r)} \varepsilon e_3,
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

so wird nach (23\*) § 3

$$N(\dot{p})\dot{g}_r = \dot{p}\dot{g}_i\dot{p}, \quad N(\dot{p}^*)\dot{g}_r^* = \dot{p}^*\dot{g}_i^*\dot{p}^*;$$

$$N(\check{b}_i)\check{g}_i^* = \check{b}_i\check{g}_i\check{b}_i, \quad N(\check{b}_r)\check{g}_r^* = \check{b}_r\check{g}_r\check{b}_r$$

und daher (vgl. die Rechenregeln in § 3).

$$\dot{p}^* = \check{b}_i \dot{p} \check{b}_r.$$

Dies ist die Transformationsformel für die Quasibewegung  $p \rightarrow p^*$ .

Ebenso findet man in Ebenenkoordinaten  $\pi_k$ , wenn man setzt

$$\begin{aligned}
 \pi &= \pi_0 \varepsilon e_0 + \pi_1 \varepsilon e_1 + \pi_2 e_2 + \pi_3 e_3, \\
 \pi^* &= \pi_0^* \varepsilon e_0 + \pi_1^* \varepsilon e_1 + \pi_2^* e_2 + \pi_3^* e_3,
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

die Transformationsformel

$$\pi^* = \check{b}_i \pi \check{b}_r.$$

In ähnlicher Art kann man auch die übrigen sieben Scharen der sechsgliedrigen Gruppe  $\mathfrak{G}_6$ ,  $\mathfrak{S}_6^I$ ,  $\mathfrak{S}_6^{II}$ ,  $\mathfrak{S}_6^{III}$ ,  $X_6$ ,  $X_6^I$ ,  $X_6^{II}$ ,  $X_6^{III}$  in Formeln fassen. Wir wollen uns damit begnügen eine diskrete Abelsche Gruppe von acht involutorischen Transformationen  $t, t_1, t_2, t_3, \tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3$  anzugeben, die entsprechend in den acht Scharen der gemischten Gruppe enthalten sind und durch deren Adjunktion die kontinuierliche Gruppe

$\mathcal{G}_6$  zur gemischten Gruppe erweitert wird. Wir machen die Koordinaten hierbei einzeln sichtbar.

t ist die Identität.

$$(52) \quad \begin{aligned} & t_1 \begin{cases} x^* = x, & y^* = -y; & \xi^* = \xi, & \eta^* = -\eta. \\ p_0^* = -p_0, & p_1^* = p_1, & p_2^* = p_2, & p_3^* = -p_3; \\ \pi_0^* = -\pi_0, & \pi_1^* = \pi_1, & \pi_2^* = \pi_2, & \pi_3^* = -\pi_3. \end{cases} \\ & t_2 \begin{cases} x^* = \xi, & y^* = \eta; & \xi^* = x, & \eta^* = y. \\ p_0^* = -p_0, & p_1^* = p_1, & p_2^* = p_2, & p_3^* = p_3; \\ \pi_0^* = -\pi_0, & \pi_1^* = \pi_1, & \pi_2^* = \pi_2, & \pi_3^* = \pi_3. \end{cases} \\ & t_3 \begin{cases} x^* = \xi, & y^* = -\eta; & \xi^* = x, & \eta^* = -y. \\ p_0^* = p_0, & p_1^* = p_1, & p_2^* = p_2, & p_3^* = -p_3; \\ \pi_0^* = \pi_0, & \pi_1^* = \pi_1, & \pi_2^* = \pi_2, & \pi_3^* = -\pi_3. \end{cases} \\ & \tau \begin{cases} x^* = x, & y^* = y; & \xi^* = \xi, & \eta^* = -\eta. \\ p_0^* = -\pi_3, & p_1^* = \pi_2, & p_2^* = -\pi_1, & p_3^* = \pi_0; \\ \pi_0^* = -p_3, & \pi_1^* = p_2, & \pi_2^* = -p_1, & \pi_3^* = p_0. \end{cases} \\ & \tau_1 \begin{cases} x^* = x, & y^* = -y; & \xi^* = \xi, & \eta^* = \eta. \\ p_0^* = \pi_3, & p_1^* = \pi_2, & p_2^* = -\pi_1, & p_3^* = -\pi_0; \\ \pi_0^* = p_3, & \pi_1^* = p_2, & \pi_2^* = -p_1, & \pi_3^* = -p_0. \end{cases} \\ & \tau_2 \begin{cases} x^* = \xi, & y^* = \eta; & \xi^* = x, & \eta^* = -y. \\ p_0^* = -\pi_3, & p_1^* = \pi_2, & p_2^* = -\pi_1, & p_3^* = -\pi_0; \\ \pi_0^* = -p_3, & \pi_1^* = p_2, & \pi_2^* = -p_1, & \pi_3^* = -p_0. \end{cases} \\ & \tau_3 \begin{cases} x^* = \xi, & y^* = -\eta; & \xi^* = x, & \eta^* = y. \\ p_0^* = \pi_3, & p_1^* = \pi_2, & p_2^* = -\pi_1, & p_3^* = \pi_0; \\ \pi_0^* = p_3, & \pi_1^* = p_2, & \pi_2^* = -p_1, & \pi_3^* = p_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Man kann mittels dieser Formeln die im vorigen Paragraphen angeführten Beziehungen (42) und (43) bestätigen.

§ 7. Grenzübergang von der elliptischen zur quasielliptischen Geometrie.

Die im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln ermöglichen es, diesen Grenzübergang in einfacher Weise zu verwirklichen.

Gehen wir von den Formeln (46) aus und schreiben wir für die darin vorkommende imaginäre Einheit  $\varepsilon$  nicht mehr die Rechenregel  $\varepsilon^2 = 0$  vor, sondern die neue Regel  $\varepsilon^2 = \rho$   $\{\rho > 0\}$ . Dann wird durch

die Formel (49) die kontinuierliche Gruppe der automorphen Kollineationen der regulären Fläche zweiter Ordnung

$$(53) \quad p_0^2 + p_1^2 + \varrho p_2^2 + \varrho p_3^2 = 0$$

dargestellt oder, was dasselbe ist, die Gruppe der elliptischen Bewegungen für den nichteuklidischen Raum, der diese Fläche zum absoluten Gebilde hat.

Führt man nun den Grenzübergang  $\lim \varrho = 0$  aus, so durchläuft die Fläche zweiter Ordnung ein Büschel und artet schließlich aus in das Ebenenpaar  $\gamma_i, \gamma_r$ . Aus den beiden Scharen von Erzeugenden der Fläche werden die vier Geradenbüschel, die in  $\gamma_i$  und  $\gamma_r$  liegen und ihre Scheitel in  $c_i$  und  $c_r$  haben. Aus dem von Clifford eingeführten Parallelismus, den Study mit dem Namen *Parataxie* belegt hat, wird in der Grenze der in § 4 angegebene Parallelismus.

Herr Study hat im Anschluß an Arbeiten italienischer Geometer eine Zuordnung angegeben zwischen den Paaren gerader Linien im elliptischen Raume, welche durch die absolute Polarität einander entsprechen, und den Punktepaaren, deren Punkte auf zwei Ebenen mit elliptischer Maßbestimmung verteilt sind. Diese Zuordnung, welche im reellen Gebiet umkehrbar eindeutig ist, ordnet den Bewegungen des elliptischen Raumes die Paare von Bewegungen in den beiden elliptischen Ebenen zu.<sup>1)</sup> Man kann nun auch hier einen Grenzübergang ausführen, bei dem diese Zuordnung in unsere Abbildung  $G \leftrightarrow (g_i, g_r)$  übergeführt wird.

Bedeutet nämlich die  $G_{ik}$  Plücker'sche Linienkoordinaten in dem elliptischen Raume, dessen absolute Fläche durch die Gleichung (53) dargestellt wird, so können wir die Zuordnung Studys folgendermaßen in Formeln fassen. Wir setzen

$$(54) \quad \begin{aligned} s_1 : s_2 : s_3 &= G_{01} + \varrho G_{23} : G_{02} + G_{31} : G_{03} + G_{12}, \\ \bar{s}_1 : \bar{s}_2 : \bar{s}_3 &= G_{01} - \varrho G_{23} : G_{02} - G_{31} : G_{03} - G_{12}. \end{aligned}$$

Die  $s_k$  und ebenso die  $\bar{s}_k$  deuten wir als homogene Punktkoordinaten einer Ebene. In der Ebene der  $s_k$  haben wir den Kegelschnitt

$$(55) \quad s_1^2 + \varrho s_2^2 + \varrho s_3^2 = 0$$

und in der Ebene der  $\bar{s}_k$

$$(55) \quad \bar{s}_1^2 + \varrho \bar{s}_2^2 + \varrho \bar{s}_3^2 = 0$$

als absolutes Gebilde zu nehmen.

Führt man nun in den beiden Ebenen unhomogene Koordinaten ein

$$(56) \quad \frac{s_2}{s_1} = x, \quad \frac{s_3}{s_1} = y; \quad \frac{\bar{s}_2}{\bar{s}_1} = \bar{x}, \quad \frac{\bar{s}_3}{\bar{s}_1} = \bar{y}$$

1) Man vgl. etwa E. Study: Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie II Am. Journ. of Math., Bd. XXIX (1906) Seite 116 u. ff.



und geht zur Grenze  $\lim \varrho = 0$  über, so wird der elliptische Raum zum quasielliptischen; die beiden nichteuklidischen Ebenen werden zu euklidischen und die Formeln (54) verwandeln sich in die Formeln (6) § 2.<sup>1)</sup>

§ 8. Invarianten gegenüber Quasibewegungen.

Zwei (reelle) Punkte  $p, p'$ , deren Verbindungslinie die Gerade  $C$  des quasiabsoluten Gebildes nicht trifft, haben gegenüber  $\mathfrak{G}_7$  eine absolute Invariante, nämlich ihr Doppelverhältnis mit den konjugiert-imaginären Ebenen  $\gamma_i, \gamma_r$ . Wir nennen die reelle Größe

$$(57) \quad \varphi = + \frac{i}{2} \lg Dv(pp' \gamma_i \gamma_r)$$

die *Quasientfernung* von  $p$  und  $p'$ . Durch die homogenen Koordinaten  $p_i, p'_i$  von  $p, p'$  drückt sich  $\varphi$  so aus

$$(58) \quad tg \varphi = - \frac{p_0 p'_1 - p_1 p'_0}{p_0 p'_0 - p_1 p'_1}$$

Die Invariante  $\varphi$  ist (auch ihrem Vorzeichen nach) bis auf Vielfache von  $\pi$  erklärt.

Schneidet die Verbindungslinie  $pp'$  die Gerade  $C$  ( $\{p_0 p'_1 - p_1 p'_0 = 0, p_0 p'_0 + p_1 p'_1 \neq 0\}$ ), so tritt an Stelle der verschwindenden Quasientfernung eine neue Invariante gegenüber  $\mathfrak{G}_6$ , die nur abgesehen vom Vorzeichen erklärt ist, nämlich

$$(59) \quad \chi = \frac{1}{p_0 p'_0 + p_1 p'_1} \sqrt{\frac{(p_0 p'_2 - p_2 p'_0)^2 + (p_0 p'_3 - p_3 p'_0)^2}{(p_3 p'_1 - p_1 p'_3)^2 + (p_1 p'_2 - p_2 p'_1)^2}}$$

Wir erklären als *Quasiwinkel* zweier Ebenen  $\pi, \pi'$ , deren Schnittlinie  $C$  nicht schneidet, die Größe

$$(57)^* \quad \psi = - \frac{i}{2} \lg Dv(\pi \pi' c_i c_r)$$

Es ist

$$(58)^* \quad tg \psi = + \frac{\pi_2 \pi'_3 - \pi_3 \pi'_2}{\pi_2 \pi'_2 + \pi_3 \pi'_3}$$

$\psi$  ist gegenüber  $\mathfrak{G}_7$  invariant. In dem ausgeschlossenen Sonderfall finden wir wieder eine Invariante gegenüber  $\mathfrak{G}_6$

$$(59)^* \quad \omega = \frac{1}{\pi_2 \pi'_2 + \pi_3 \pi'_3} \sqrt{\frac{(\pi_0 \pi'_2 - \pi_2 \pi'_0)^2 + (\pi_0 \pi'_3 - \pi_3 \pi'_0)^2}{(\pi_3 \pi'_1 - \pi_1 \pi'_3)^2 + (\pi_1 \pi'_2 - \pi_2 \pi'_1)^2}}$$

Ein Punkt  $p$  und eine Ebene  $\pi$  bestimmen den gegenüber  $\mathfrak{G}_6$  invarianten *Quasiabstand* ( $p$  liege nicht auf  $C$  und  $\pi$  gehe nicht durch  $C$ )

$$(60) \quad \vartheta = \frac{p_0 \pi_0 + p_1 \pi_1 + p_2 \pi_2 + p_3 \pi_3}{\sqrt{p_0^2 + p_1^2} \sqrt{\pi_2^2 + \pi_3^2}}$$

$\vartheta$  ist nur abgesehen vom Vorzeichen erklärt.

1) Ein ähnlicher Grenzübergang findet sich in der Dissertation von H. Beck, Bonn 1905.

Nehmen wir einen Punkt  $p$ , der nicht auf  $C$  liegt, und eine Gerade  $G$ , die  $C$  nicht trifft. Beide bestimmen eine Invariante  $\rho$  gegenüber  $G_6$ , die wir ebenfalls *Quasiabstand* nennen wollen. Sie stimmt überein mit dem (eben erklärten) Quasiabstand des Punktes  $p$  von derjenigen Ebene durch  $G$ , die auf der Verbindungsebene von  $G$  mit  $p$  senkrecht steht ( $\psi = \frac{\pi}{2}$ ). Man findet

$$(61) \quad \rho = \frac{\sqrt{\{p_0 G_{12} - p_1 G_{02} + p_2 G_{01}\}^2 + \{p_0 G_{31} + p_1 G_{03} - p_3 G_{01}\}^2}}{G_{01} \sqrt{p_0^2 + p_1^2}}$$

(Man vgl. hierzu die Formeln (10) in § 2). Führt man die Koordinaten  $x, y$  und  $\xi, \eta$  der Bildpunkte  $g_i, g_r$  von  $G$  ein, so wird

$$(62) \quad \rho = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\{p_0(y - \eta) - p_1(x + \xi) + 2p_2\}^2 + \{p_0(x - \xi) + p_1(y + \eta) - 2p_3\}^2}}{\sqrt{p_0^2 + p_1^2}}$$

Dual hierzu erklären wir den *Quasiwinkel* einer Geraden  $G$  mit einer Ebene  $\pi$

$$(61)^* \quad \tau = \frac{\sqrt{\{\pi_0 G_{01} - \pi_2 G_{12} + \pi_3 G_{31}\}^2 + \{\pi_1 G_{01} + \pi_2 G_{03} + \pi_3 G_{03}\}^2}}{G_{01} \sqrt{\pi_2^2 + \pi_3^2}}$$

oder

$$(62)^* \quad \tau = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\{2\pi_0 - \pi_2(y - \eta) + \pi_3(x - \xi)\}^2 + \{2\pi_1 + \pi_2(x + \xi) + \pi_3(y + \eta)\}^2}}{\sqrt{\pi_2^2 + \pi_3^2}}$$

Auch eine Gerade, die  $C$  trifft ( $G_{01} = 0$ ), bestimmt mit einem Punkt und ebenso mit einer Ebene eine Invariante gegenüber  $G_6$ , doch wollen wir diese Größen nicht anführen, da später davon kein Gebrauch gemacht werden soll.

Durch die Transformationen der Schar  $X_6^I$  (vgl. § 5) werden die Invarianten  $\varphi, \chi, \psi, \omega, \vartheta, \rho, \tau$  der Reihe nach vertauscht mit den Invarianten  $\psi, \omega, \varphi, \chi, \vartheta, \tau, \rho$ . *Unsere Maßbestimmung steht sich selbst dual gegenüber.*

### § 9. Die Regelflächen zweiter Ordnung.

Wir betrachten hier nur reelle Flächen zweiter Ordnung mit reellen geradlinigen Erzeugenden. Zunächst geben wir eine Einteilung dieser Flächen, die gegenüber der Gruppe  $\mathcal{G}_7 \mathcal{G}_7^I \mathcal{G}_7^{II} \mathcal{G}_7^{III}$  (vgl. § 5) invariant ist.

Reguläre Flächen.

1. Die Fläche berührt weder  $C$  noch  $\gamma_i, \gamma_r$ . Sie geht nicht durch  $c_i, c_r$ .
2. Die Fläche berührt  $C$ , aber nicht  $\gamma_i, \gamma_r$ . Sie geht daher auch nicht durch  $c_i, c_r$ .
3. Die Fläche berührt  $\gamma_i, \gamma_r$  und geht nicht durch  $c_i, c_r$ .
- 3.\* Die Fläche geht durch  $c_i, c_r$  und berührt nicht  $\gamma_i, \gamma_r$ .

4. Die Fläche berührt  $\gamma_i, \gamma_r$  und geht durch  $c_i, c_r$ , aber nicht durch  $C$ .
  5. Die Fläche geht durch  $C$  und hat in  $c_i, c_r$  Tangentialebenen, die von  $\gamma_i, \gamma_r$  verschieden sind.
  6. Die Fläche geht durch  $C$  und berührt in  $c_i, c_r$  die Ebenen  $\gamma_i, \gamma_r$ .
- Von singulären Flächen betrachten wir nur
7. Irreduzible Kegel, die ihren Doppelpunkt auf  $C$  haben und die  $\gamma_i, \gamma_r$  nach Erzeugenden berühren.

In den Fällen 1. bis 4. soll die reziproke Polare von  $C$  bezüglich der Fläche ihre *Quasiachse* genannt werden.

Alle Punkte einer der Flächen der 4. Familie haben von ihrer Quasiachse gleichen Quasiabstand und alle Tangentialebenen der Fläche schließen mit der Quasiachse gleiche Quasiwinkel ein. Auch die Umkehrung ist richtig, wie aus unseren Formeln (61) und (61)\* hervorgeht: Alle Punkte, die von einer Geraden  $G$ , welche  $C$  nicht trifft, gleichen Quasiabstand  $\rho \neq 0$  haben, erfüllen eine Fläche der vierten Familie und alle Ebenen, welche mit dieser Geraden den Quasiwinkel  $\tau = \rho$  einschließen, berühren *dieselbe* Fläche.

Eine Fläche der 7. Familie besteht aus allen Punkten, die von einer Ebene, der „Mittlebene“ der Fläche, denselben Quasiabstand  $\delta \neq 0$  haben. Wir nennen jede derartige Fläche eine *Quasikugel*. Die Mittlebene ist der Geraden  $C$  durch die Polarität bezüglich der Quasikugel zugeordnet.

Obwohl wir davon später keinen Gebrauch machen werden, soll doch hier kurz angegeben werden, was durch die Abbildung  $G \rightarrow (g_i, g_r)$  den beiden Regelscharen einer Fläche zweiter Ordnung in der Grundebene zugeordnet wird.

Beginnen wir mit einer *Fläche der Familie 1*. Eine Schar von Erzeugenden  $G^I$  bildet sich folgendermaßen auf die Ebene ab.  $g_i^I$  und  $g_r^I$  wandern beide auf Kegelschnitten  $K_i^I, K_r^I$ , wenn  $G^I$  die Schar durchläuft.  $K_i^I, K_r^I$  sind entweder beide Ellipsen (wie in unserer Figur 4) oder beide Hyperbeln mit der gleichen Exzentrizität; Ellipsen sind sie dann, wenn die Fläche die Gerade  $C$  in imaginären Punkten trifft, Hyperbeln, wenn die Schnittpunkte reell ausfallen. Die Beziehung  $g_i^I \rightarrow g_r^I$  zwischen  $K_i^I, K_r^I$  ist (gleich oder gegensinnig) affin, und zwar derart, daß die Endpunkte der Hauptachsen und auch die Endpunkte der Nebenachsen sich entsprechen. In der Figur sind zugeordnete Punkte durch gleiche arabische Ziffern gekennzeichnet.

Analog bildet sich die zweite Schar von Erzeugenden  $G^{II}$  derselben Fläche ab.  $g_i^{II}$  wandert auf dem Kegelschnitt  $K_i^{II}$ , der zu  $K_i^I$  konfokal und zu  $K_r^I$  kongruent ist, ebenso  $g_r^{II}$  auf dem Kegelschnitt

$K_r^{II}$ , der zu  $K_r^I$  konfokal und zu  $K_i^I$  kongruent ist. Die Beziehung  $g_i^{II} \rightarrow g_r^{II}$  der beiden Kurven  $K_i^{II}, K_r^{II}$  ist wieder affin und gleichartig wie die zwischen  $K_i^I, K_r^I$  (vgl. die Figur).

Der gemeinsame Mittelpunkt von  $K_i^I, K_i^{II}$  sei  $m_i$ , der von  $K_r^I, K_r^{II}$  sei  $m_r$ . ( $m_i, m_r$ ) ist das Bild der Quasiachse unserer Fläche.

Da jede Erzeugende der ersten Schar jede Erzeugende der zweiten schneidet, so besteht zwischen entsprechenden Punkten  $g_i^I, g_r^I, g_i^{II}, g_r^{II}$  stets die Beziehung

$$g_i^I g_i^{II} = g_r^I g_r^{II},$$

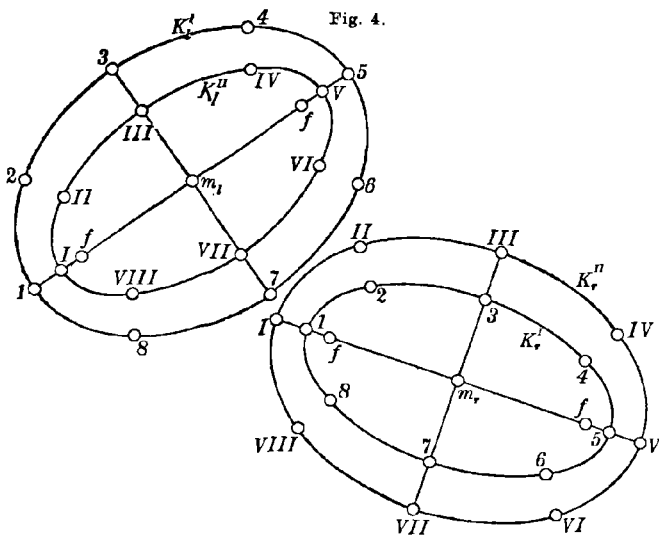
was durch eine bekannte Eigenschaft konfokaler Kegelschnitte bestätigt wird. In der Figur sind z. B. die beiden mit 2 III bezeichneten Strecken gleich lang.

Machen wir noch einige Angaben über die Flächen der übrigen Familien.

Im Falle 2. sind die Kegelschnitte  $K_i^I, K_r^I, K_i^{II}, K_r^{II}$  Parabeln. Im Falle 3. sind  $K_i^I, K_r^I$  und ebenso auch  $K_i^{II}, K_r^{II}$  Kreise, die gleichsinnig ähnlich, und im Fall 3.\* Kreise, die gegensinnig ähnlich aufeinander bezogen sind.

Eine Fläche der 4. Familie enthält eine Schar linksparalleler Erzeugender  $G^I$ .  $g_i^I$  bleibt daher fest, während  $g_r^I$  auf einem Kreis  $K_r^I$  wandert. Die Erzeugenden  $G^{II}$  der anderen Schar sind rechtsparallel. Der zugehörige Punkt  $g_r^{II}$  bleibt fest im Mittelpunkt von  $K_r^I$ .  $g_i^{II}$  durchläuft den Kreis  $K_i^{II}$  mit dem Mittelpunkt  $g_i^I$ , der mit  $K_r^I$  gleichen Radius hat.

In den Fällen 5. und 6. schneidet die eine Schar von Erzeugenden die Gerade  $C$ , entzieht sich also unserer Abbildung  $G \rightarrow (g_i, g_r)$ . Die andere Schar bildet sich im Falle 5. ab auf zwei gerade Linien, die durch die Zuordnung  $g_i \rightarrow g_r$  aufeinander ähnlich (aber nicht kongruent) bezogen sind. Im letzten Fall endlich, sind die darstellbaren Erzeugenden entweder links- oder rechtsparallel, entweder bleibt  $g_i$  fest, während  $g_r$  auf einer Geraden wandert, oder es bleibt umgekehrt  $g_r$  fest und  $g_i$  wandert auf einer Geraden.



Die Flächen der Familien 3. und 3.\* gestatten eingliedrige Gruppen aus  $\mathcal{G}_6$ , bei welchen die Quasiachsen der Flächen in Ruhe bleiben. Bei den Flächen 3. bleibt hierbei die Quasiachse punktweise in Ruhe, während bei der zum Falle 3.\* gehörigen Gruppe automorpher Quasibewegungen die Ebenen durch die Quasiachse einzeln in Ruhe bleiben.

Jede Fläche der 4. Familie kann sowohl als Grenzfall von Flächen aus 3., wie auch von Flächen aus 3.\* angesehen werden. Sie gestattet eine zweigliedrige Gruppe von Quasibewegungen, nämlich die Gruppe aller Transformationen aus  $\mathcal{G}_6$ , welche die Quasiachse der Fläche in sich selbst überführen. Die reellen Punkte der Fläche werden durch die Transformationen der Gruppe transitiv untereinander vertauscht. Eine solche Fläche verhält sich ähnlich wie ein Drehzylinder in der Euklidischen Geometrie.

Eine Quasikugel gestattet die dreigliedrige Gruppe aller Quasibewegungen, die die Mittelebene der Kugel in sich überführen.

## II.

### Gruppentheoretische Grundlegung der Kinematik in der Euklidischen Ebene.

#### § 10. Positive und negative Somen.

Die in § 1 und § 2 behandelte Zuordnung zwischen Punkten und Ebenen des Raumes einerseits und Bewegungen und Umlegungen in der Ebene andererseits soll hier ein wenig anders gedeutet werden.

Wir hatten in der Grundebene ein rechtwinkliges Achsenkreuz angenommen für die Zählung der unhomogenen Koordinaten  $x = \frac{p_2}{p_1}$ ,  $y = \frac{p_3}{p_1}$ . Nennen wir dieses Achsenkreuz  $\sigma_0$ . Üben wir darauf eine Bewegung in der Grundebene aus, so erhalten wir ein neues Achsenkreuz  $\sigma$ , das mit  $\sigma_0$  gleichsinnig orientiert ist. Durch Angabe des Achsenkreuzes  $\sigma$ , das aus einem in bestimmter Weise *geordneten* Paar aufeinander senkrechter *orientierter* Geraden besteht, ist umgekehrt die Bewegung eindeutig bestimmt, die  $\sigma_0$  in  $\sigma$  überführt.<sup>1)</sup>

*Ein mit  $\sigma_0$  gleichsinnig orientiertes Achsenkreuz der Grundebene soll, insofern es als Stellvertreter eines starren ebenen Feldes angesehen werden kann, ein positives Soma heißen.*

Wie bemerkt, gehört zu jedem positiven Soma  $\sigma$  eine bestimmte Bewegung, nämlich diejenige, welche das „Ursoma“  $\sigma_0$  nach  $\sigma$  bringt. Früher (§ 1) hatten wir den Bewegungen in der Grundebene die Punkte

1) Unter einer Bewegung ist hier stets eine einzige Punkttransformation und nicht etwa eine kontinuierliche Schar solcher Transformationen verstanden.

des Raumes zugeordnet, nunmehr können wir die positiven Somen umkehrbar eindeutig den Punkten des Raumes zuordnen. Nur den Punkten der Geraden  $C$  des quasiabsoluten Gebildes sind vorläufig noch keine Somen zugeordnet.

Dem Ursoma  $\sigma_0$  entspricht der (im Euklidischen Sinne „uneigentliche“) Punkt  $p^0$  mit den Koordinaten

$$p_0 : p_1 : p_2 : p_3 = 1 : 0 : 0 : 0.$$

Nehmen wir zu  $\sigma_0$  gegensinnig orientierte Achsenkreuze  $\xi$  an, die also aus  $\sigma_0$  durch eine Umlegung hervorgehen, so finden wir analog eine eindeutige Beziehung zwischen diesen gegensinnig orientierten Achsenkreuzen, die wir *negative Somen* nennen wollen, und den Ebenen des Raumes, die nicht durch  $C$  hindurchgehen.

Es seien zwei gleichartige Somen gegeben, also entweder zwei positive  $\sigma, \sigma'$  oder zwei negative  $\xi, \xi'$ . Der halbe Winkel der Drehung, welche das erste Soma mit dem zweiten zur Deckung bringt, soll der *Winkel der beiden Somen* heißen. Man findet (vgl. die Formeln des § 3 und die Formeln (58), (58)\* in § 8):

*Der Winkel zweier positiver [negativer] Somen  $\sigma, \sigma'$  [ $\xi, \xi'$ ] ist gleich der Quasientfernung [dem Quasiwinkel] der zugehörigen Punkte  $p, p'$  [Ebenen  $\pi, \pi'$ ].*

Tritt an Stelle der Drehung eine Schiebung, so setzen wir den Drehwinkel gleich Null. Die halbe Schiebungsgröße ist durch die Formel (59) oder (59)\* bestimmt.

Es sei ein positives Soma  $\sigma$  und ein negatives  $\xi$  gegeben. Die halbe Schiebungsgröße der Umlegung (vgl. die Bemerkung zu Satz IIIb in § 1), welche  $\sigma$  nach  $\xi$  bringt, soll *der Abstand der beiden Somen* genannt werden. Man findet wieder [vgl. (60) § 8]:

*Der Abstand eines positiven Somas  $\sigma$  von einem negativen  $\xi$  ist gleich dem Quasiabstand  $\vartheta$  des zugehörigen Punktes  $p$  von der zugehörigen Ebene  $\pi$ .*

Wenn  $\vartheta = 0$  ist, so befinden sich  $p$  und  $\pi$  in *vereinigter Lage*, und wir wollen auch von  $\sigma$  und  $\xi$ , die durch die Spiegelung an einer Geraden miteinander vertauscht werden, sagen, sie seien in *vereinigter Lage*.

## § 11. Elementare Äquivalenzbegriffe der Kinematik.<sup>1)</sup>

Es sei eine Gesamtheit von positiven und negativen Somen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  vorgelegt. Die entsprechende Figur des Raumes besteht aus Punkten und Ebenen  $p_1, p_2, p_3, \dots; \pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$

1) Vgl. hierzu Study, Geometrie der Dynamen, S. 589 u. ff.

Die Gesamtheit kann auch kontinuierliche Mannigfaltigkeiten enthalten. Es liegt nahe, einen Äquivalenzbegriff einzuführen, indem man zwei verschiedene Arten von Transformationen zuläßt, welche auf unsere Gesamtheit angewendet neue Gesamtheiten ergeben, die als äquivalent zur ursprünglichen angesehen werden. Die beiden Arten von Transformationen sind die folgenden:

I. Man unterwirft die Gesamtheit  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots; \xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots$  ein und derselben Bewegung.

II. Man nehme ein beliebiges positives Soma  $\sigma_0^*$  an. Die Bewegung [Umlegung], welche das Ursoma  $\sigma_0$  nach  $\sigma_k[\xi_k]$  bringt, führt  $\sigma_0^*$  in ein Soma  $\sigma_k^*[\xi_k^*]$  über. Wir ersetzen die Gesamtheit  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots; \xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots$  durch die neue  $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^* \dots; \xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^* \dots$ .

Die entsprechenden Transformationen des Raumes sind:

I. Die Figur  $p_1, p_2, p_3 \dots; \pi_1, \pi_2, \pi_3 \dots$  wird einer *rechtsseitigen* und II. einer *linksseitigen Schiebung* unterworfen (vgl. das Ende des § 5). Die beiden Schiebungsgruppen erzeugen die Gruppe  $\mathfrak{G}_3$  der quasielliptischen Bewegungen. Wir finden also das Ergebnis:

**Satz VII.** *Der natürlichen Äquivalenz der ebenen Kinematik entspricht im Raume die Äquivalenz gegenüber der Gruppe  $\mathfrak{G}_3$  der Quasibewegungen.*

Es liegt nahe, nun auch die Geometrie anderer Gruppen, welche die  $\mathfrak{G}_6$  umfassen, auf die Kinematik zu übertragen.

Man erhält einen von dem „natürlichen“ Äquivalenzbegriff nicht sehr verschiedenen, wenn man folgende Transformationen zuläßt: I. Man unterwirft die Gesamtheit der vorgelegten Somen einer eigentlichen oder uneigentlichen (d. h. gleich- oder gegensinnigen) *Ähnlichkeitstransformation*. II. Man nehme ein beliebiges positives oder negatives Soma  $\sigma_0^*$  oder  $\xi_0^*$  und konstruiere mit seiner Hilfe in analoger Weise wie früher die neuen Somen  $\sigma_k^*, \xi_k^*$ . Die zugehörige Transformationsgruppe des Raumes ist die gemischte Gruppe  $(\mathfrak{G}_7, \mathfrak{G}_7^I, X_7, X_7^I)$ .

Um auch noch die kinematische Bedeutung der übrigen vier Scharen der Gruppe  $\mathfrak{G}_7, \mathfrak{G}_7^I, \mathfrak{G}_7^{II}, \mathfrak{G}_7^{III}, X_7, X_7^I, X_7^{II}, X_7^{III}$  klarzulegen, hat man eine Transformation der Somen einzuführen, die man als den *Umkehrungsprozeß* bezeichnet.

Es sei  $\sigma[\xi]$  ein positives [negatives] Soma, das aus dem Ursoma  $\sigma_0$  durch eine bestimmte Bewegung [Umlegung] hervorgeht. Durch die inverse Transformation geht aus  $\sigma_0$  ein Soma  $\sigma^*[\xi^*]$  hervor. Die Vertauschung der Somen, welche jedes Soma  $\sigma[\xi]$  durch das auf diese Art dazu konstruierte Soma  $\sigma^*[\xi^*]$  ersetzt, nennt man den *Umkehrungsprozeß*. Die entsprechende Transformation des Raumes ist, wie aus Satz III § 1 hervorgeht, die Spiegelung an der Grundebene.

Durch Adjunktion dieser Transformation aus der Schar  $\mathfrak{S}_7^{\text{II}}$  wird die Gruppe  $(\mathfrak{G}_7, \mathfrak{S}_7^{\text{I}}, X_7, X_7^{\text{I}})$  zur Gruppe  $(\mathfrak{G}_7, \mathfrak{S}_7^{\text{I}}, \mathfrak{S}_7^{\text{II}}, \mathfrak{S}_7^{\text{III}}, X_7, X_7^{\text{I}}, X_7^{\text{II}}, X_7^{\text{III}})$  erweitert.

### § 12. Projektive Geometrie der Somen.

Um den Äquivalenzbegriff der projektiven Geometrie des Raumes für die ebene Kinematik nutzbar machen zu können, müssen wir zuerst die Ausnahmen beseitigen, die bei der Abbildung der Punkte und Ebenen auf die positiven und negativen Somen aufgetreten sind. Dies ist *formal* dadurch erreichbar, daß man „*uneigentliche Somen*“ einführt, ein Kontinuum von  $\infty^1$  positiven und ein zweites Kontinuum von  $\infty^1$  negativen uneigentlichen Somen. Diese bildet man in eindeutiger Weise auf die Punkte und Ebenen des Raumes ab, die mit der Geraden  $C$  des quasiabsoluten Gebildes in vereinigter Lage sind.

Wir hatten für jedes eigentliche Soma als geometrischen Stellvertreter ein Achsenkreuz<sup>1)</sup> gewählt. Man kann nun auch für die uneigentlichen Somen geometrische Repräsentanten einführen, etwa die Punkte der doppelt überdeckten uneigentlichen Geraden. Man hat dann den (am Schluß von § 10 eingeführten) Begriff der vereinigten Lage auch auf uneigentliche Somen auszudehnen, und zwar derart, daß zwei ungleichartigen Somen in vereinigter Lage im Raume stets Punkt und Ebene in vereinigter Lage entsprechen.<sup>2)</sup>

Jetzt ist es (wenigstens theoretisch) möglich, die ganze projektive Geometrie des Raumes in unserer Grundebene zu deuten. Betrachten wir wenigstens die Gebilde aus Somen, welche den *Grundgebilden* der projektiven Geometrie, der Punktreihe, dem Ebenenbüschel, dem ebenen Punktfeld und dem Ebenenbündel zugeordnet sind, und klassifizieren wir diese Gebilde gegenüber  $\mathfrak{G}_6$ .

Überlegen wir also zunächst, was der geraden Linie zugeordnet ist, wenn man sie als Ort von Punkten [Ebenen] ansieht. Es gibt gegenüber der Gruppe der Quasibewegungen drei Klassen gerader Linien (wenn man sich, wie wir dies immer tun, aufs reelle Gebiet beschränkt): 1. Geraden  $G$ , die  $C$  nicht schneiden, 2. Geraden, die  $C$  schneiden und 3. die Gerade  $C$  selbst.

Entsprechend erhalten wir in der Grundebene: 1. Die „gerade  $M_1$ “ positiver [negativer] Somen, die kein eigentliches Soma enthält. *Alle*

1) Man könnte dazu ebensogut z. B. ein orientiertes Linienelement einführen.

2) Man kann auch die in § 1, 2 behandelte Zuordnung  $G \leftrightarrow (g_1, g_r)$  ausnahmslos eindeutig machen durch Einführung eines Kontinuums von  $\infty^3$  uneigentlichen Punktepaaren. Die Durchführung dieses Gedankens ist aber recht umständlich.



Somen der  $M_1$  gehen aus einem beliebigen unter ihnen dadurch hervor, daß man es allen Drehungen um den Punkt  $g_r$  unterwirft, der der Geraden  $G$  in der Abbildung  $G \rightarrow (g_1, g_r)$  entspricht. 2. Die gerade  $M_1$  positiver [negativer] Somen mit einem uneigentlichen Soma. Alle eigentlichen Somen dieser  $M_1$  gehen aus einem beliebigen unter ihnen dadurch hervor, daß man es allen Schiebungen einer bestimmten Richtung unterwirft. 3. Die gerade  $M_1$  der positiven [negativen] uneigentlichen Somen.

Es gibt gegenüber der Gruppe der Quasibewegungen nur zwei verschiedene Klassen von Punkten [Ebenen], nämlich solche die mit  $C$  nicht in vereinigter Lage sind und solche, die mit  $C$  in vereinigter Lage sind.

Demgemäß hat man zu unterscheiden: 1) die „ebene  $M_2$ “ positiver [negativer] Somen mit einem einzigen uneigentlichen Soma. Sie besteht aus allen Somen, die mit dem eigentlichen negativen [positiven] Soma vereinigt liegen, das der Ebene [dem Punkt] des Raumes entspricht, der als Träger des ebenen Punktfeldes [des Ebenenbüschels] auftritt. Man erhält also alle eigentlichen Somen einer solchen ebenen  $M_2$ , wenn man ein festes eigentliches Soma an allen eigentlichen Geraden der Grundebene spiegelt. 2) die ebene  $M_2$  mit  $\infty^1$  uneigentlichen Somen. Alle eigentlichen Somen dieser  $M_2$  gehen aus einer beliebigen unter ihnen dadurch hervor, daß man sie allen Schiebungen unterwirft.

Es soll hier die projektive Geometrie der Somen nicht weiter ausgebaut werden, zumal dieses Unternehmen auch schon von anderer Seite in Angriff genommen worden ist<sup>1)</sup>, machen wir nur noch eine naheliegende Bemerkung über die Geometrie in einer ebenen  $M_2$  aus der ersten Klasse. Nehmen wir z. B. eine solche ebene  $M_2$  aus positiven Somen  $\sigma$ , die den Punkten  $p$  einer Ebene  $\pi$  entsprechen. Man kann die Somen  $\sigma$  der  $M_2$  andererseits auf die Achsen  $S$  der Spiegelungen abbilden, durch die sie in das feste Soma  $\mathfrak{s}$  übergeführt werden, welches der Ebene  $\pi$  entspricht. Dem uneigentlichen Soma der  $M_2$  kann man noch die uneigentliche Gerade der Grundebene zuweisen. Dadurch ist aber weiter das Feld der Geraden  $S$  der Grundebene auf das Feld der Punkte  $p$  von  $\pi$  bezogen und diese Beziehung ist projektiv. Den absoluten Punkten der Grundebene entsprechen in dieser Kollineation die Schnittlinien von  $\pi$  mit den Ebenen  $\alpha_1, \alpha_r$  des quasiabsoluten Gebildes. Daraus schließt man weiter, daß die dreigliedrige Gruppe von Transformationen, welche die  $\mathfrak{G}_6$  unter den Somen  $\sigma$  der  $M_2$  hervorruft, sich auf die Gruppe der Bewegungen unter den Geraden  $S$  abbildet.

1) De Saussure, Exposé resumé de la geometrie des feuilletts. Genf 1910 und Bricard, Nouv. ann. (4) X. 1910; vgl. dazu auch die Kritik von Study, Jahresbericht der d. math. Ver., XIX 1910. S. 255—263.

### § 13. Die Inversionsgeometrie der Somen.

Im vorigen Paragraphen hatten wir die Kollineationsgruppe des Raumes betrachtet, jetzt wollen wir noch eine andere Gruppe von Punkttransformationen des Raumes heranziehen, die ebenfalls die  $\mathcal{G}_3$  umfaßt und die man die *Inversionsgruppe des quasielliptischen Raumes* nennen kann, da sie ein Analogon bildet zur Inversionsgeometrie (oder Kugelgeometrie von Möbius) im Euklidischen Raume.

Es ist in § 9 erklärt worden, was unter einer Quasikugel zu verstehen ist. Wir wollen nun alle Punkttransformationen aufstellen, die im allgemeinen Quasikugeln wieder Quasikugeln zuordnen. Es stellt sich heraus, daß diese Abbildungen in der Regel (2, 2)-deutig ausfallen, daß man sie aber durch einen gewissen *Orientierungsprozeß* zu (1, 1)-deutigen Transformationen machen kann.

Man hat die Gesamtheit der Punkte des projektiven Raumes doppelt zu überdecken mit der Mannigfaltigkeit der „orientierten“ Punkte, und zwar derart, daß (im reellen Gebiet) nur die Gerade  $C$  Verzweigungsmannigfaltigkeit wird. Analytisch geschieht das so, daß man einen der beiden Werte der Quadratwurzel

$$p_4 = \sqrt{p_0^2 + p_1^2}$$

herausgreift und die Verhältnißgrößen  $p_0 : p_1 : p_2 : p_3 : p_4$  als Koordinaten eines der beiden orientierten Punkte nimmt, die den Punkt  $p_0 : p_1 : p_2 : p_3$  überdecken. Die fünf homogenen Koordinaten der orientierten Punkte befriedigen also eine quadratische Bedingung

$$(63) \quad p_0^2 + p_1^2 - p_4^2 = 0,$$

deren Koeffizientenmatrix den Rang 3 hat.

Dual hierzu führt man die *orientierten Ebenen* ein, deren fünf Koordinaten  $\pi_i$  in der Beziehung stehen

$$(63)^* \quad \pi_2^2 + \pi_3^2 - \pi_4^2 = 0.$$

Den *Quasiabstand* (vgl. (60) in § 8) eines orientierten Punktes von einer Ebene kann man nun auch seinem Vorzeichen nach durch die Formel erklären

$$(64) \quad \vartheta = \frac{p_0 \pi_0 + p_1 \pi_1 + p_2 \pi_2 + p_3 \pi_3}{p_4 \pi_4}.$$

Die Gesamtheit aller orientierten Punkte, die von einer festen Ebene, die nicht durch  $C$  geht, gleichen Quasiabstand ( $\vartheta \geq 0$ ) haben, soll eine *orientierte Quasikugel* genannt werden.

Die gesuchte Inversionsgruppe besteht aus eindeutigen Transformationen der orientierten Punkte, welche die orientierten Quasikugeln

untereinander vertauschen. Um diese Gruppe einfach in Formeln fassen zu können, führt man zweckmäßig noch andere Koordinaten  $t$  ein, die sich durch die  $p$  so ausdrücken:

$$(65) \quad \begin{aligned} p_4 + p_1 &= t_1^2, & p_4 - p_1 &= t_2^2 \\ p_0 &= t_1 t_2, & p_2 &= t_{11}, & p_3 &= t_{22}. \end{aligned}$$

Faßt man die  $t$  in dem Sinne als homogen auf, daß man die beiden Wertesysteme  $t_1, t_2, t_{11}, t_{22}$  und  $\varrho t_1, \varrho t_2, \varrho^2 t_{11}, \varrho^2 t_{22}$  für  $\varrho \neq 0$  als äquivalent ansieht, dann entspricht jedem Wertesystem der  $t$ , mit Ausnahme des einzigen, das nur Nullen enthält, ein und nur ein orientierter Punkt und auch umgekehrt jedem orientierten Punkt ein und im wesentlichen auch nur ein System der  $t$ .

In diesen neuen Koordinaten drückt sich die Inversionsgruppe so aus:

$$(66) \quad \begin{aligned} t_1^* &= a_{11} t_1 + a_{12} t_2, & d &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0, \\ t_2^* &= a_{21} t_1 + a_{22} t_2, & \delta &= \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21} \neq 0, \\ t_{11}^* &= d \{ \alpha_{11} t_{11} + \alpha_{12} t_{22} \} + b_{11} t_1^2 + 2b_{12} t_1 t_2 + b_{22} t_2^2, \\ t_{22}^* &= d \{ \alpha_{21} t_{11} + \alpha_{22} t_{22} \} + c_{11} t_1^2 + 2c_{12} t_1 t_2 + c_{22} t_2^2. \end{aligned}$$

Dabei kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $d = \pm 1$  setzen. Die Gruppe enthält 13 wesentliche Parameter und zerfällt im reellen Gebiet in vier getrennte kontinuierliche Scharen, die durch die verschiedenen Kombinationen der Bedingungen  $d = \pm 1, \delta \geq 0$  gekennzeichnet werden.

Wie kann man nun dies alles auf die ebene Kinematik übertragen? Zunächst hat man *das orientierte Soma* zu definieren. Nehmen wir an erster Stelle ein *positives* eigentliches Soma  $\sigma$ . Für den Winkel  $\varphi_0$  (§ 10) des Ursomas  $\sigma_0$  mit  $\sigma$  gilt nach Formel (58) in § 8 die Beziehung

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = - \frac{p_1}{p_0}.$$

Daraus folgt nach willkürlicher Entscheidung über ein Vorzeichen

$$\sin \varphi_0 = - \frac{p_1}{p_4}, \quad \cos \varphi_0 = + \frac{p_0}{p_4}, \quad p_4 = \sqrt{p_0^2 + p_1^2}.$$

Geben wir also den Winkel  $\varphi$  auch seinem Vorzeichen nach bis auf Vielfache von  $2\pi$  an, so ist nach diesen Formeln  $p_4$  eindeutig bestimmt und dadurch unser Soma  $\sigma$  orientiert. Man kann also ein eigentliches positives Soma  $\sigma$  dadurch orientieren, daß man den Winkel  $2\varphi_0$  der Drehung, die  $\sigma_0$  nach  $\sigma$  bringt, bis auf Vielfache von  $4\pi$  angibt (und nicht bloß bis auf Vielfache von  $2\pi$ ).

Nehmen wir an zweiter Stelle ein *negatives* eigentliches Soma  $\xi$ . Dieses kann man dadurch orientieren, daß man die halbe Schiebungsgröße [vgl. (64)]

$$\vartheta_0 = \frac{\pi_0}{\pi_4}, \quad \pi_4 = \sqrt{\pi_2^2 + \pi_3^2}$$

der Umlegung, die  $\sigma_0$  nach  $\xi$  bringt, auch ihrem Vorzeichen nach angibt. Dadurch ist dann auch die Mittelgerade dieser Umlegung in bestimmter Weise orientiert. Für ihren Winkel  $\psi_0$  mit der  $\frac{x_2}{x_1}$ -Achse, der mod  $2\pi$  erklärt ist, gelten nämlich die Formeln

$$\sin \psi_0 = -\frac{\pi_2}{\pi_4}, \quad \cos \psi_0 = +\frac{\pi_3}{\pi_4}.$$

Die Mittelgerade der beiden entgegengesetzten Umlegungen, die zwei eigentliche orientierte Somen  $\sigma$  und  $\xi$  miteinander vertauschen, kann man nunmehr auch orientieren, indem man festsetzt, daß sie mit der  $\frac{x_2}{x_1}$ -Achse die (mod  $2\pi$  erklärten) Winkel  $\varphi_0 + \psi_0$  einschließen soll. Der Abstand zweier derartiger Somen (§ 11) ist durch die Orientierung der Mittelgeraden auch seinem Vorzeichen nach definiert. Eine „orientierte Somenkugel“ enthält alle orientierten positiven Somen, die von einem orientierten negativen eigentlichen Soma den gleichen Abstand  $\vartheta \gtrless$  haben.

Diese Vorbereitungen genügen, um die Übertragung der räumlichen Inversionsgeometrie auf die Kinematik vornehmen zu können.

Merken wir dazu noch folgendes an. Beschränkt man seine Betrachtungen ausschließlich auf die orientierten Somen  $\sigma$  einer orientierten Quasikugel, so kann man diese eindeutig abbilden auf die orientierten Mittelgeraden der Umlegungen, welche das orientierte „Mittelsoma“  $\xi$  der Kugel mit dem zugehörigen Soma  $\sigma$  zur Deckung bringen. Die orientierten Somen  $\sigma$  der Kugel werden bei der 13-gliedrigen und ebenso auch bei der 12-gliedrigen Gruppe (66) siebengliedrig untereinander vertauscht. Die Gruppe dieser Vertauschungen bildet sich ab auf eine Gruppe von Transformationen der orientierten Geraden und diese ist identisch mit der sogenannten erweiterten Laguerreschen Gruppe in der Ebene.<sup>1)</sup>

Ich will mich hier mit diesen wenigen Angaben über die Inversionsgeometrie der Somen begnügen, obwohl es keine Schwierigkeiten bieten würde, diese kleine Theorie in ähnlicher Weise auszugestalten wie die Geometrie orientierter Geraden in der Ebene.

1) Man vgl. hierüber die Abhandlung des Verfassers: Zur Geometrie der Speere in der Euklidischen Ebene, Monatshefte f. Math. XXI, 1910.

Es ist trivial, daß dieser Inversionsgeometrie eine andere dual gegenübersteht, bei der als Element im Raum die orientierte Ebene und in der Kinematik der Grundebene das orientierte negative Soma auftritt.

In einer Fortsetzung dieser Abhandlung soll die Anwendung unserer Abbildung  $G \leftrightarrow (g_l, g_r)$  auf Fragen der Differentialgeometrie behandelt werden. Als Beispiel für die Ergebnisse, zu denen man hierbei kommt, sei folgendes angeführt.

Bildet man die Tangenten  $G$  einer krummen Linie  $M_1$  des quasi-elliptischen Raumes, die nicht in einer Ebene durch  $C$  liegt, ab, so durchlaufen  $g_l$  und  $g_r$  zwei isometrisch aufeinander bezogene Kurven, die als „Polbahn“ und „Polkurve“ der „Bewegung“ auftreten, die der  $M_1$  zugeordnet ist. — Der „Bewegung“, welche die Koppel eines Gelenkviereckes ausführt, entspricht im Raume eine gewundene Kurve vierter Ordnung, der Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung aus der Familie 4 (vgl. § 9).

Bei der Behandlung zweidimensionaler Somenscharen  $M_2$  ist vielleicht folgendes Ergebnis zu erwähnen. Denjenigen  $M_2$ , bei welchen eine mit dem in  $M_2$  beweglichen Soma (Achsenkreuz) starr verbundene Kurve stets eine feste Kurve der Ebene berührt, entspricht im Raum eine Familie von Flächen, die durch den Grenzübergang des § 7 aus der Familie der Flächen mit dem Krümmungsmaß Null im elliptischen Raume hervorgeht, die Herr L. Bianchi untersucht hat. — Die allgemeinen  $M_2$  stehen in einem bemerkenswerten Zusammenhang mit den Transformationen orientierter Geraden in der Ebene.

Etwas einfacher als für die Kinematik in der Ebene liegen die Verhältnisse für die Kinematik auf der Kugel, die man unter Verwendung eines von Herrn C. Stephanos angegebenen Verfahrens auf die Geometrie des elliptischen Raumes abbilden kann. Von hier aus kommt man dann weiter mittels eines Übertragungsprinzips von Study zur Kinematik im euklidischen Raume.

Graz, Ostern 1911.

## Drei Gipsmodelle von Flächen konstanter Breite.<sup>1)</sup>

Unter Mitwirkung von Professor Dr. Fr. Schilling in Danzig  
herausgegeben von Prof. Dr. ERNST MEISSNER in Zürich.

*Flächen konstanter Breite  $b$*  sind konvexe, geschlossene Flächen von der Art, daß je zwei parallele Stützebenen den Abstand  $b$  besitzen. Sie können daher zwischen zwei festen, parallelen Ebenen noch (mit fünf Freiheitsgeraden) so bewegt werden, daß sie dieselben stets berühren.

Der von einer Fläche konstanter Breite umschlossene Raum heiße *Körper konstanter Breite*. Für ihn ergibt sich folgende einfache Definition<sup>2)</sup>:

- a) Eine Punktmenge  $\Pi$  habe die Distanzschranke  $b$ , d. h. für irgend zwei Punkte  $P$  und  $Q$  von  $\Pi$  sei Distanz  $(P, Q) \leq b$ .
- $\beta$ ) Die Punktmenge  $\Pi$  sei vollständig, d. h. es sei unmöglich  $\Pi$  durch neue Punkte so zu ergänzen, daß die Eigenschaft ( $\alpha$ ) erhalten bleibt.

Die Punktmenge  $\Pi$  erfüllt dann einen Körper konstanter Breite  $b$ , und umgekehrt repräsentiert jeder solche eine Punktmenge  $\Pi$ .

Die Definition von  $\Pi$  kann für Räume beliebiger Dimensionszahl beibehalten werden. Auch kann an Stelle der gewöhnlichen euklidischen Geometrie die Minkowskische Geometrie treten<sup>3)</sup>, in der die Maßbestimmung durch eine konvexe Eichfläche vermittelt wird.<sup>3)</sup> (Strahldistanzen.)

Liegt z. B.  $\Pi$  in der zweidimensionalen, euklidischen Ebene, so bilden die Randpunkte von  $\Pi$  eine *Kurve konstanter Breite*. Ihre Eigenschaften sind von A. Hurwitz<sup>4)</sup> untersucht und von E. Meißner<sup>5)</sup> verallgemeinert worden.

1) Diese Modelle sind inzwischen im Verlage des Herrn Martin Schilling in Leipzig erschienen.

2) E. Meißner, Punktmenngen konstanter Breite. Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges. Zürich 1911.

3) H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896. S. 1.

4) A. Hurwitz, Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. de l'école norm. 1902 T. XIX.

5) E. Meißner, Über die Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik. Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges. Zürich 1909.

Flächen konstanter Breite im gewöhnlichen Raum, wie die herausgegebenen Modelle sie darstellen, können die Singularitäten eigentlich konvexer Flächen besitzen, nämlich

1. Kantenpunkte mit einem Büschel von Stützebenen.
2. Eckpunkte mit einem Bündel von Stützebenen.

Für die Größe der Kanten und Ecken existieren obere Grenzen, die bei der Rotationsfläche des Reuleauxschen Kreisbogendreiecks erreicht werden. (Modell 2).

Außer der Kugel gibt es keine von lauter Kugelflächen begrenzte Fläche konstanter Breite.<sup>1)</sup>

Normale in einem Punkte  $P$  einer konvexen Fläche soll jede Gerade heißen, die normal zu einer Stützebene der Fläche in  $P$  steht. Es gilt dann der Satz:

Jede Normale einer Fläche konstanter Breite ist Binormale, d. h. tritt eine Gerade auf der einen Seite der Fläche normal in sie ein, so tritt sie auf der entgegengesetzten Seite auch normal aus.

Unter dem Profil einer Fläche aus gegebener Richtung soll die Umrißkurve der Orthogonalprojektion der Fläche aus dieser Richtung verstanden werden.

Minkowski<sup>2)</sup> hat folgenden schönen Satz entdeckt: Jede Fläche konstanter Profillänge ist auch konstanter Breite und umgekehrt.

Man kann also aus vollkommen biegsamem Material einen Zylinder herstellen, der sich in jeder Richtung so über die Fläche stülpen läßt, daß er sich längs seines ganzen Umfangs an die Fläche anschließt.

Das Modell No. 1 ist eine algebraische Rotationsfläche konstanter Breite und entsteht durch Rotation einer symmetrischen Kurve konstanter Breite um ihre Symmetrieachse.

Ist

$$x \cos u + y \sin u - p(u) = 0$$

die auf rechtwinklige Koordinaten bezogene Gleichung der Tangente des Meridians, so ist für das Modell

$$p(u) = \frac{b}{2} \left( 1 + \frac{1}{8} \cos(3u) \right)$$

gesetzt worden. Der Krümmungsradius  $\varrho(u)$  im Berührungspunkte ist:

$$\varrho(u) = \frac{b}{2} (1 - \cos(3u)).$$

1) E. Meißner, Punktmengen konstanter Breite. Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges. Zürich 1911.

2) H. Minkowski, Über die Körper konstanter Breite. In russischer Sprache erschienen in: *Mathematičesky Sbornik* Moskau, Bd. 25; deutsch in den „Gesammelten Abhandlungen“ Minkowskis, Bd. II, S. 277—279.

Er wird in den drei Scheiteln  $A, B, C$  der Kurve gleich Null. Rotiert man um  $AD$ , so wird in  $A$  und längs des Breitenkreises  $BC$  die Gaußsche Krümmung der Rotationsfläche unendlich. Die Gleichungen des Meridians in Parameterform lauten:

$$\begin{aligned} x &= p(u) \cos u - p'(u) \sin u, \\ y &= p(u) \cdot \sin u + p'(u) \cos u, \end{aligned}$$

wo  $p'(u) = \frac{dp(u)}{du} = -\frac{3b}{16} \sin(3u)$  ist.

Das Modell 2 ist die Rotationsfläche des Reuleauxschen Kreisbogendreiecks.

Man beschreibe um jeden Eckpunkt eines gleichseitigen Dreiecks  $ABC$  als Mittelpunkt den die zwei andern Ecken verbindenden Kreisbogen. Das so entstehende Kreisbogendreieck hat konstante Breite.<sup>1)</sup> Läßt man es um die von  $A$  ausgehende Dreieckshöhe rotieren, so entsteht die im Modell 2 dargestellte Fläche konstanter Breite. Sie hat in  $A$  eine Ecke, längs des Parallelkreises  $BC$  eine Kante maximaler Größe, und besteht aus einer Torus- und einer Kugelfläche.

Das Modell 3 gibt ein Beispiel einer Fläche konstanter Breite, die nicht Rotationsfläche ist. Sie ist von vier Kugel- und drei Torusflächen begrenzt und entsteht folgenderweise:

Um jeden Eckpunkt eines regulären Tetraeders  $ABCD$  als Zentrum lege man die Kugel durch die drei übrigen Ecken. Der den vier Kugeln gemeinsame Raum kann zu einem Körper konstanter Breite gemacht werden, indem man drei seiner sechs Kanten durch Ringflächen abstutzt, etwa die drei Kanten  $AB, AC, AD$ . Dabei entsteht die Ringfläche, die z. B. die Kante  $AB$  abrundet, wenn man den Kreis durch  $A$  und  $B$  und vom Zentrum  $C$  um  $AB$  als Achse dreht.

Bei allen drei Modellen ist die Breite  $b$  gleich 12 cm gewählt. Beigegeben wird ihnen ein Meßapparat für diese Breite, der aus einem mit Tuch überzogenen Holzuntersatz mit zwei vertikalen Stützen in der Entfernung 12 cm besteht; ferner sechs biegsame Zylinder aus Pausleinen, die der konstanten Profillänge entsprechend, beliebig um die Modelle herumgelegt werden können.

1) Reuleaux, Theoretische Kinematik. Bd. I. Braunschweig 1875, Seite 130ff.



## Kleinere Mitteilungen.

---

### Aufruf.

Die wissenschaftliche Forschung hat auf dem Gebiete der Astronomie- und kosmischen Physik ein immer dringenderes aber auch für das gesamte Kulturleben immer bedeutsameres Bedürfnis nach Helfern aus allen Lebenskreisen, da es eine Reihe von sehr wichtigen und interessanten Erscheinungen in den fernen Himmelsräumen, wie auch in den oberen atmosphärischen Regionen gibt, für welche von der geringen Zahl der astronomischen Fachmänner und der Sternwarten nur Vereinzelt oder Unvollständiges geleistet werden kann. Verlaufen doch diese Erscheinungen vielfach so, daß sie nur bei gleichzeitiger und über weite Räume verteilter Ausschau möglichst vieler Beobachter tiefer erforscht werden können.

Die Vereinigung von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik wendet sich deshalb mit der Bitte um Mitarbeit an alle, welche sich in den verschiedensten Tages- und Nachtzeiten im Freien aufzuhalten pflegen und sich dabei des Ausblickes auf den Himmel mit Interesse und einigem Verständnis für die dortigen Vorgänge erfreuen, insbesondere an die Lehrer aller Unterrichtsstufen, die Geistlichen aller Bekenntnisse, an alle mathematisch oder naturwissenschaftlich speziell Vorgebildeten, wie Ärzte, Tierärzte und Apotheker, Uhrmacher, Bau-, Eisenbahn- und Bergbeamte und Techniker aller Art, Militärs, Land- und Forstwirte, sowie Geschäftsleute verschiedenster Art, Natur- und Sportsfreunde aus allen Berufskreisen, wesentlich auch an die Luftfahrer, sowie in besonderer Weise an die gebildeten Deutschen in den Kolonien, überhaupt in den andern Erdteilen und auf Seereisen und bittet sie, ihre Adressen zwecks näherer Information und Verständigung an F. Dümmler, Berlin W. 30, Rosenheimerstr. 12, zu senden.

Eingehende mathematische Kenntnisse werden bei solcher Mitarbeit nicht vorausgesetzt; doch soll das Verständnis der Erscheinungen und die daraus hervorgehende tiefere Freude an denselben durch das Zusammenwirken in besonderer Weise gepflegt werden.

---

## Bücherschau.

---

**E. Sommerfeld.** Die Kristallgruppen nebst ihren Beziehungen zu den Raumgittern. Dresden 1911, Theodor Steinkopff. *M* 3.—

Die rein mathematische Aufgabe, alle möglichen Strukturarten zu ermitteln, ist von Sohncke in Angriff genommen, in voller Allgemeinheit aber erst von Fedorow, Schönflies und Barlow gelöst worden. Hier soll gezeigt werden, wie der Begriff der Raumgitter dazu dienen kann, die physikalischen Eigenschaften der Kristalle ebensogut zu erklären, wie die von den genannten Forschern aufgestellten teilweise recht komplizierten (230) Punktsysteme. Man braucht lediglich, entgegen Bravais, die Parallelität der Bausteine fallen zu lassen (Wieners Prinzip). Die Systeme des Buches sind spezielle Fälle der allgemeinen, doch konnten die Bezeichnungen nach den aus der allgemeinen Theorie entnommenen Namen erfolgen.

Im ersten Teil werden die holoëdrischen Kristallgruppen mit den 14 Bravais'schen Raumgittern in Beziehung gesetzt, von denen durch stereoskopische Abbildungen eine gute Anschauung vermittelt wird. Die teilflächigen Gruppen des zweiten Teiles entsprechen den aus den Bravais'schen Gittern abgeleiteten Systemen. Wenn hier die Gitterecken durch Stäbchen ersetzt sind, so soll durch dieses neue Hilfsmittel die Orientierung der Formelemente veranschaulicht werden.

Stuttgart.

F. HAAG.

---

**Dr. Guido Hauck,** weil. Geh. Regierungsrat, Professor der darstellenden Geometrie und der graphischen Statik an der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin, **Lehrbuch der malerischen Perspektive mit Einschluß der Schattenkonstruktionen.** Zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbststudium. Nach hinterlassenen Aufzeichnungen bearbeitet von Hedwig Hauck, Malerin, Lehrerin der Projektion, Perspektive und Schattenlehre. Mit 500 Textfiguren und 6 Tafeln. XIII u. 337 S. Berlin 1910, Julius Springer. Broschiert *M* 9.—, in Leinwand geb. *M* 10.—

Das Buch ist hervorgegangen aus den Vorträgen, die Hauck lange Jahre hindurch am Seminar für das Zeichenlehrerinnenexamen des Vereins der Künstlerinnen und Kunstfreundinnen zu Berlin gehalten hat. Den von Hauck hinterlassenen Entwurf hat die Tochter, seine Nachfolgerin in diesem Amte, fast ungeändert veröffentlicht und damit einen Wunsch des Vaters erfüllt, der freilich die Absicht hatte, das Buch zu einem abgeschlossenen Ganzen auszubauen, das die vollständige Lehre der Perspektive hätte enthalten sollen. Das Buch behandelt die malerische Perspektive, aber die abzubildenden Objekte

werden nicht streng durch Grund- und Aufbau festgelegt, sondern durch Skizzen und Abmessungen und durch zum Teil willkürliche Annahmen. Es wird schon von vornherein interessant sein, sich durch Hauck durch dies Gebiet führen zu lassen. Beherrschte er doch einerseits souverain das ganze Gebiet der Geometrie und stand auch zur Kunst in einem engeren Verhältnis, während er andererseits über eine ungewöhnliche Lehr- und Darstellungsgabe verfügte. Auch fällt sofort die Reichhaltigkeit des elementar gehaltenen Buches auf, und man kann — selbst wenn die Vorträge etwas weniger enthielten als das Manuskript — den Damen des Berliner Seminars jedenfalls die Anerkennung nicht versagen, wenn sie die Perspektive in diesem Umfange sich wirklich aneignen. Finden wir doch in dem Buche Abschnitte wie „Über Gehrungsprofile“ (in Front und in Schrägansicht), „Über Rundformen“, „Über die schiefe Ebene“, „Über den in einem Spiegel sichtbaren Raum“.

Vorausgeschickt werden die wichtigsten Grundbegriffe der ebenen Geometrie, wobei auf solche Sätze Rücksicht genommen wird, welche später Verwendung finden; daran schließen sich zwei Teile, der erste behandelt die Perspektive, der zweite die Schattenkonstruktionen. Im ersten werden wieder Frontansicht und Schrägansicht (Übereckstellung) unterschieden, woran sich noch die Einzeichnung von Figuren in beliebige Ebenen reiht. Die Schattenkonstruktionen werden für künstliche (zentrale) Beleuchtung und Sonnenbeleuchtung (paralleles Licht) durchgeführt. Eine kurze Betrachtung des Regenbogens bildet den Schluß.

Zahlreiche Figuren sind dem Texte beigegeben, sowie außerdem noch 6 Tafeln mit der Darstellung größerer, komplizierterer Objekte. Um dem Leser die Herstellung dieser Tafeln zu ermöglichen, verfährt der Verfasser wie folgt: die einzelnen, in den Tafeln vorkommenden Objekte werden in der Form eigener Aufgaben im Texte ausführlich der Reihe nach erörtert. Wer sich der allerdings nicht kleinen Mühe unterzieht, alle diese Einzelheiten durchzuarbeiten, wird dann auch die betreffende Tafel herstellen können. Ausführlichkeit und Gründlichkeit zeichnen das Buch überhaupt aus: wir verweisen z. B. auf den § 31, der das Verfahren beim Hinausfallen eines Fluchtpunktes und Apparate zur mechanischen Lösung der dadurch entstehenden Aufgaben erörtert. Deswegen fällt es auch auf, daß bei der Darstellung des Kreises der praktisch durchaus mögliche Fall ganz übergangen ist, wo das Bild des Kreises keine Ellipse, sondern eine Parabel oder eine Hyperbel wird, und daß weiter bei der Schattenbildung, etwa einer vertikalen Geraden auf einer horizontalen Ebene (§ 277, 279, 311, 315), die verschiedenen Möglichkeiten nicht besprochen werden. Denn die unendlich großen oder durch das Unendliche hindurchgehenden Schatten stellen für den Anfänger eine so große Schwierigkeit vor, daß sie prinzipiell zu behandeln sind.

Au bei Berchtesgaden, 14. August 1911.

KARL DOEHLEMANN.

## Neue Bücher.

### Astronomie, Geodäsie.

1. ARRHENIUS, SVANTE, Das Schicksal der Planeten. Leipzig 1911, Akad. Verlagsgesellschaft. *M* 1.50; geb. *M* 2.—
2. HERMES, O., Elemente der Astronomie und mathematischen Geographie. Zum Gebrauch beim Unterricht auf höheren Lehranstalten u. zum Selbststudium. 6. Aufl., unter Mitwirkung v. P. Spieß neu bearb. von K. Graf. Berlin 1911, Winckelmann & Söhne.
3. PULFRICH, CARL, Stereoskopisches Sehen und Messen. Jena 1911, Fischer. *M* 1.—
4. RIGHI, AUGUSTO, Kometen u. Elektronen. Deutsch v. Max Iklé. Leipzig 1911, Akad. Verlagsges. *M* 1.50.
5. TAFLA, THEODOR, Grundzüge der niederen Geodäsie. IV. Verwertung v. geodätischen Aufnahmen. Leipzig u. Wien 1911, Deuticke. *M* 3.—  
S. auch 7, 53.

### Darstellende Geometrie.

6. KÖRBER, Strahlendiagramm zur vereinfachten Herstellung perspektivischer Zeichnungen. 3. Aufl. Berlin, Ernst & Sohn. In Rolle *M* 2.—
7. OTTI, HANS, Hauptfragen u. Hauptmethoden der Kartenentwurflehre unter besond. Rücksichtnahme auf die Abbildung der Schweiz. Aarau 1911, Sauerländer & Co. *M* 3.20.
8. SCHLOTKE, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. I. Tl. Spezielle darstellende Geometrie. 7. durchgesehene und ergänzte Aufl. hrsg. v. Carl Rodenberg. Leipzig (1911), Degener. *M* 3.60; geb. *M* 3.80.
9. SCHMID, THEODOR, Maschinenbauliche Beispiele für Konstruktionsübungen zur darstellenden Geometrie. Leipzig 1911, Göschen. 20 Blätter u. Doppelblätter in Mappe. *M* 4.—
10. VOLK, CARL, Das Skizzieren von Maschinenteilen in Perspektive. 3., erweiterte Aufl. Berlin 1911, Springer. Geb. in Leinw. *M* 1.80.
11. ZÜLKE, PAUL, Der Unterricht im Linearzeichnen u. in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten. (Abh. über den mathem. Unterricht in Deutschland, Bd. III, Heft 3.) Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 2.60.

### Mechanik.

12. BACH, C., Elastizität und Festigkeit. 6., verm. Aufl. Unter Mitwirkung von R. Baumann. Berlin 1911, Springer. Geb. in Leinw. *M* 20.—
13. DUREM, PIERRE, Traité d'Énergétique ou thermodynamique générale. Tome I. Conservation de l'énergie. Mécanique rationnelle. Statique générale. Déplacement de l'équilibre. Paris 1911, Gauthier-Villars. Fr. 18.—
14. DURLEY, R. J., Kinematics of machines. London 1911, Chapman & Hall. 17 s.
15. FÖPPL, AUG., Vorlesungen über technische Mechanik. In 6 Bänden. I. Band. Einführung in die Mechanik. 4. Aufl. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 10.—

16. FREYTAG, LUDWIG, Gesetzmäßigkeiten in der Statik des Vierendeel-Trägers, nebst Verfahren zur unmittelbaren Gewinnung der Einflußlinien durch Reihenbildung. München u. Berlin 1911, Oldenbourg. *M* 1.60.
17. LANCHESTER, F. W., Aerodynamik. Ein Gesamtwerk über das Fliegen. Aus dem Englischen übersetzt v. C. und A. Runge. II. Band. Aerodonetik. Mit Anhängen über die Anwendung des Gyroskops, über den Flug der Geschosse usw. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 12.—.
18. REICH, EML, Vierendeelträger m. parallelen Gurtungen. Graphische Ermittlung der Einflußlinien m. Hilfe eines einzigen Seilpolygons. Wien 1911, v. Waldheim. *M* 1.30.

S. auch 23, 29, 33, 50, 60, 62.

### Versicherungsmathematik.

19. MANES, ALFRED, Grundzüge des Versicherungswesens. 2., veränd. Aufl. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 106. Bändchen). Leipzig 1911, Teubner. *M* 1.—; geb. in Leinw. *M* 1.25.

S. auch 58.

### Physik und Geophysik.

20. ADAMI, FRANZ, Die Elektrizität. I. Teil. (Bücher der Naturwissenschaft, hrsg. v. Siegmund Günther, 9. Band.) Leipzig 1911, Reclam jun. *M* —.40.
21. CURIE, P., Radioaktivität. 2. u. 3. Lfg. Leipzig 1911, Akad. Verlagsges. Je *M* 3.—.
22. DAVIS, W. M., u. BRAUN, G., Grundzüge der Physiogeographie. Auf Grund v. William Morris Davis' „Physical Geography“ neu bearb. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. In Leinwand geb. *M* 6.60.
23. FORTSCHRITTE, Die, der Physik im J. 1910. Dargestellt v. der deutschen physikal. Gesellschaft. 66. Jahrg., 1. Abtlg. Allgemeine Physik. Akustik, physikalische Chemie. Braunschweig 1911, Vieweg & Sohn. *M* 26.—.
24. FROMMEL, WILHELM, Radioaktivität. (Sammlung Göschen Nr. 317.) 2. Aufl. Leipzig 1911, Göschen. Geb. *M* 0.80.
25. GRAETZ, L., L'électricité et ses applications. Traduit sur la 15<sup>e</sup> édition allemande par G. Tardy. Paris 1911, Masson. Fr. 12.—.
26. LE HEUX, J. W. N., Lissajous'sche Stimmgabelkurven in stereoskopischer Darstellung. 18 Tafeln mit Text. Leipzig 1911, Barth. In Halbleinw.-Mappe *M* 6.—.
27. HOESSLIN, HERM. VON, Die Schallgeschwindigkeit als Funktion der molekularen Geschwindigkeiten. München 1911, Lukaschik. *M* 2.80.
28. KRAUSE, ARTHUR, Die Sonne. („Aus Natur und Geisteswelt“ 357. Bändchen). Leipzig 1911, Teubner. *M* 1.—; geb. in Leinw. *M* 1.25.
29. LAUE, M., Das Relativitätsprinzip. („Die Wissenschaft“, Heft 38.) Braunschweig 1911, Vieweg & Sohn. *M* 6.50; geb. in Leinw. *M* 7.20.
30. LEHMANN, O., Die neue Welt der flüssigen Kristalle und deren Bedeutung für Physik, Chemie, Technik u. Biologie. Leipzig 1911, Akad. Verlagsges. *M* 12.—.
31. LENARD, P., Über Äther u. Materie. Vortrag. 2., ausführlichere u. m. Zusätzen versch. Aufl. Heidelberg 1911, Winter. *M* 1.—.
32. MACH, Grundriß der Physik. Für die höheren Schulen des Deutschen Reiches bearb. v. Ferd. Harbordt u. Max Fischer. I. Tl. Vorbereitender Lehrgang. 4., verb. Aufl. Leipzig 1910, Freytag. Geb. *M* 2.—.
33. MACH, E., History and the root of the principles of conservation of energy. Translation by P. E. B. Jourdain. Chicago 1911, Open court Publ. Co. \$ 1.25.
34. MIE, GUSTAV, Moleküle, Atome, Weltäther. 3. Aufl. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 58. Bändchen.) Leipzig 1911, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 1.25.

35. MÜNCH, PETER, Lehrbuch der Physik. In 2 Teilen neu bearb. v. Heinrich Lüdtke. 1. Tl. Vorbereitender Lehrgang. 12., verb. Aufl. Freiburg i. B. 1911, Herder. *M* 2.—; geb. in Leinw. *M* 2.50.
36. OSTWALD, WILHELM, Über Katalyse. Rede, gehalten am 12. Dez. 1909 bei Empfang des Nobelpreises für Chemie. 2. Aufl. Leipzig 1911, Akad. Verlagsges. *M* 1.50.
37. RUTHERFORD, E., Radiumnormalmaße und deren Verwendung bei radioaktiven Messungen. Deutsch v. B. Finkelstein. Leipzig 1911, Akad. Verlagsges. *M* 1.50.
38. SCHUSTER, ARTHUR, The progress of physics during thirty three years (1875—1909). Four lectures delivered to the University of Calcutta. Cambridge 1911, University Press. 3s. 6d.
39. VAN DER WAALS, J. D., Die Zustandsgleichung. Rede, gehalten am 12. Dez. 1910 in Stockholm bei Empfang des Nobelpreises f. Physik. Leipzig 1911, Akad. Verlagsges. *M* 1.50.
40. WERTHEIMER, ALFR., Über Strom- und Spannungsverlauf (Charakteristik) an Röntgenröhren. Diss. Leipzig 1911. Hirzel. *M* 2.—.  
S. auch 3, 4, 13, 17, 50, 51, 52, 60, 62, 64.

## Tafeln.

41. BAUSCHINGER, J., u. PETERS, J., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln m. 8 Dezimalstellen, enth. die Logarithmen aller Zahlen von 1—200 000 u. die Logarithmen der trigonometr. Funktionen f. jede Sexagesimalsekunde des Quadranten. Neu berechnet u. hrsg. II. Bd. Tafel der 8-stell. Logarithmen der trigonometr. Funktionen f. jede Sexagesimalsekunde des Quadranten. Ster.-Ausg. Leipzig 1911, Engelmann. *M* 35.—; geb. in Leinw. *M* 37.—.
42. ERLANG, A. K., Fircifrede Logaritmetavler og andre regnetavler til brug ved undervisning og i praksis. Udgave C. København 1911, Gads Forlag.
43. GREVE, WALTHER, Vierstellige logarithmische u. trigonometrische Tafeln, nebst zahlreichen Hilfstabellen f. das numerische Rechnen. Ausgabe A, ohne Tabellen aus den Gebieten der Naturwissenschaft. Bielefeld u. Leipzig 1911, Velhagen & Klasing. Geb. *M* 1.80.
44. — Dasselbe, Ausg. B, mit Tabellen aus den Gebieten der Naturwissenschaft. Ebenda. Geb. *M* 2.25.
45. HINCKLEY, F. C., and RAMSAY, W. W., The slide rule. Boston 1911, Hinckley. \$ 1.75.
46. KÜHTMANNS Rechentafeln. Ein handl. Zahlenwerk m. 2 Millionen Lösngn., die alles Multiplizieren u. Dividieren ersparen u. selbst die größten Rechnungen dieser Art in wenigen Additions- und Subtraktionszahlen auflösen. Nebst Taf. der Quadrat- u. Kubikzahlen v. 1—1000. Dresden 1911, Kühtmann. Geb. in Leinw. *M* 18.—.
47. MORAWETZ, JOHANN, Vierstellige logarithmische u. trigonometrische Tafeln, nebst vielen Hilfstafeln. Zum Schulgebrauch hrsg. Wien, Tempsky. K. 1.—.
48. PETERS, J., Einundzwanzigstellige Werte der Funktionen Sinus u. Cosinus zur genauen Berechnung von zwanzigstelligen Werten sämtlicher trigonometrischen Funktionen e. beliebigen Arguments sowie ihrer Logarithmen. (Aus: „Abhandlgn. d. preuß. Akad. d. Wiss.“ Berlin 1911, Reimer. *M* 3.—.
49. PETERS, J., Siebenstellige Logarithmentafel der trigonometrischen Funktionen f. jede Bogensekunde des Quadranten. Ster.-Ausg. Leipzig 1911, Engelmann. *M* 28.—; geb. in Leinw. *M* 30.—.

## Verschiedenes.

50. BENDEMANN, F., Luftschrauben-Untersuchungen der Geschäftsstelle f. Flugtechnik des Sonderausschusses der Jubiläumstiftung der deutschen Industrie. München 1911, Oldenbourg. *M* 3.50.

51. COPEIN, J. G., Vector analysis. An introduction to vector-methods and their various applications to physics and mathematics. New York 1911, Wiley.  
Cloth. \$ 2.50.
52. DARWIN, SIR GEORGE HOWARD, Ebbe und Flut sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem. Autorisierte deutsche Ausgabe, nach der dritten englischen Auflage von Agnes Pockels. Mit einem Einführungswort v. † Georg von Neumayer. (Wissensch. u. Hypothese, V.) 2. Aufl. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner.  
Geb. in Leinw. *M* 8.—.
53. DARWIN, SIR GEORGE HOWARD, Scientific papers. Vol. IV. Periodic orbits and miscellaneous papers. Cambridge 1911, University Press. 15 s.
54. DINGLER, HUGO, Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Eine Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in den exakten Wissenschaften. Leipzig 1911, Akademische Verlagsges. *M* 5.—.
55. GÖRRINGER, ADALBERT, Der goldene Schnitt (göttliche Proportion) u. seine Beziehung zum menschlichen Körper u. anderen Dingen, m. Zugrundelegung des goldenen Zirkels. 2. Aufl., besorgt v. Adolf Hoelzel. München 1911, Lindauer. *M* 5.—.
56. GRASSMANN, HERMANN, Gesammelte mathematische u. physikalische Werke. III. Bd. 2. Tl. Grassmanns Leben, geschildert v. Friedrich Engel, nebst einem Verzeichnisse der von Grassmann veröffentlichten Schriften u. einer Übersicht des handschriftlichen Nachlasses. Leipzig 1911, Teubner. *M* 18.—.
57. Jahrbuch der Mathematik. 39. Bd. J. 1907. 3. (Schl.-) Heft. Berlin, Reimer. *M* 14.—.
58. LESEINE, L., et SURET, L., Introduction mathématique à l'étude de l'économie politique. Paris 1911, Alcan. Fr. 3.—
59. LIETZMANN, W., Bericht über die Tätigkeit des deutschen Ausschusses f. den mathematischen Unterricht im J. 1910. (Schriften des deutschen Ausschusses f. den mathem. u. naturw. Unterricht, Heft 9). Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* —.50.
60. LIPPMANN, ALF., Einführung in die Äronautik. 1. Tl. Theoretische Grundlagen. Elementare Vorträge. Leipzig 1911, Veit & Co. *M* 7.—; geb. in Leinw. *M* 8.—.
61. LOREY, WILHELM, Staatsprüfung u. praktische Ausbildung der Mathematiker an den höheren Schulen in Preußen u. einigen norddeutschen Staaten. (Abh. üb. den mathem. Unterricht in Deutschland, Bd. I Hft. 3). Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 3.20.
62. SCHÄFFER, C., Natur-Paradoxe. Ein Buch f. die Jugend zur Erklärung v. Erscheinungen, die m. der täglichen Erfahrung im Widerspruch zu stehen scheinen. Nach Dr. W. Hampsons „Paradoxes of nature and science“ bearb. 2., stark umgearb. Aufl. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 3.—.
63. SCHEFFERS, GEORG, Lehrbuch der Mathematik f. Studierende der Naturwissenschaften u. der Technik. Einführung in die Differential- u. Integralrechnung u. in die analytische Geometrie. 2., verb. Aufl. Leipzig 1911, Veit & Co. *M* 18.—; geb. *M* 19.50.
64. Taschenbuch f. Mathematiker u. Physiker. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen hrsg. v. Felix Auerbach u. Rudolf Rothe. Mit einem Bildnis Hermann Minkowskis. 2. Jahrgang 1911. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 7.—.
65. WEILL, A., Sammlung graphischer Aufgaben f. den Gebrauch an höheren Schulen. Mathematik u. Physik. 2., verm. u. verb. Aufl. Gebweiler 1911. Boltze. *M* 2.70.

## Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- ADAMI, FR., Die Elektrizität, s. N. B. („Neue Bücher“) Nr. 20.
- ARCHIV für aktuelle Reformbewegung auf jeglichem Gebiete des prakt. Lebens.  
Heft II. Was den Akademikern nottut: a) Gründung eines akadem. Bundes.  
b) Zweck u. Ziele des Bundes. Leipzig, Demme. *M* —.20.
- AUS NATURE u. Geisteswelt. Illustrierter Katalog. Leipzig 1911, Teubner.
- ARRHENIUS, SV., Das Schicksal der Planeten, s. N. B. 1.
- BARDEY, E., Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik. Für höhere Mädchenschulen, Lyzeen u. Studienanstalten bearb. v. R. Tiemann. I. Tl.: Für höhere Mädchenschulen. Leipzig und Berlin 1911, Teubner. Geb. *M* 2.20.  
—, Dasselbe, II. Tl.: Für Lyzeen und Studienanstalten. Ebenda. Geb. *M* 2.—.
- BEHRENDSEN, O., u. GÖTTING, E., Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. Unterstufe. Ausg. A f. Gymnasien. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1911, Teubner. Geb. *M* 2.80.  
—, Dasselbe, Ausg. B f. sechsklassige Realschulen sowie f. die Mittelklassen der Oberrealschulen u. Realgymnasien. 2. Aufl. Ebenda. Geb. *M* 2.80.
- BENDEMANN, F., Luftschrauben-Untersuchungen, s. N. B. 50.
- BERICHTE und Mitteilungen, veranlaßt durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. IV. Leipzig und Berlin 1910, Teubner. *M* —.50.
- BEUTEL, EUGEN, Algebraische Kurven. II. Teil. Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung. (Sammlung Göschen Nr. 436.) Leipzig 1911, Göschen.  
Geb. in Leinw. *M* —.80.
- BRÜCHER, KARL, Anschauung in der Arithmetik. Bamberg 1911, Buchner.
- DAHMS, P., An der See. Geologisch-geographische Betrachtungen f. mittlere und reife Schüler. (Dr. Bastian Schmidts naturwissenschaftl. Schülerbibliothek, 3.) Leipzig u. Berlin, Teubner. Geb. *M* 3.—.
- DARWIN, SIR G. H., Ebbe u. Flut, s. N. B. 52.  
—, Scientific papers, IV, s. N. B. 53.
- DAVIS, W. M., u. BRAUN, G., Grundzüge der Physiogeographie, s. N. B. 22.
- DINGLEB, H., Die Grundlagen der angewandten Geometrie, s. N. B. 54.
- DUHEM, P., Énergétique, s. N. B. 13.
- ERLANG, A. K., Fircifrede Logarithmetavler, s. N. B. 42.
- ERLER, W., Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Prima höherer Lehranstalten bearb. 7. Aufl., besorgt von M. Zacharias. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. Geb. *M* 1.50.
- FINZEL, ANTON, Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie. Leipzig 1911, Hoffmann.
- FÖPPL, A., Vorlesungen über techn. Mechanik, I, s. N. B. 15.
- FREYTAG, L., Gesetzmäßigkeiten in der Statik des Vierendeck-Trägers, s. N. B. 16.
- FROMMEL, W., Radioaktivität, s. N. B. 24.
- GIRNDT, M., Raumlehre. I. („Der Unterricht an Baugewerkschulen“ 20.) 4., neu bearb. Aufl. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 1.80.
- GOEBINGER, A., Der goldene Schnitt, s. N. B. 55.
- GREVE, W., Vierstellige logarithmische u. trigonometrische Tafeln, s. N. B. 43, 44.
- GRASSMANN, HERMANN, Gesammelte Werke III 2, s. N. B. 56.
- HAHN, HANS, Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen. I. Teil. Sonderabdruck aus dem 20. Bande des Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner.



- HECKER, O., Beobachtungen an Horizontalpendeln über die Deformation des Erdkörpers unter dem Einfluß v. Sonne u. Mond. II. Heft, unter Mitwirkung und mit Beiträgen v. O. Meißner. (Veröffentlichung des Kgl. preuß. geodät. Instituts, neue Folge Nr. 49.) Berlin 1911.
- HERMES, O., Elemente der Astronomie u. mathem. Geographie, s. N. B. 2.
- HOČEVAR, FRANZ, Lehr- u. Übungsbuch der Geometrie f. Realschulen. Mittelstufe (IV. und V. Klasse). 3. Aufl. Wien 1911, Tempsky. Geb. K. 2.60.
- HOESSLIN, HERM. v., Die Schallgeschwindigkeit, s. N. B. 27.
- HOLBA, STEFAN, Fermats letzter Satz als Minimumaufgabe. Mathematische Studie. Eigentum des Verfassers. Budapest 1911, Kilians Nachf. *M* 1.—.
- KOWALEWSKI, GERHARD, Die komplexen Veränderlichen u. ihre Funktionen. Fortsetzung der Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, zugleich eine Einführung in die Funktionentheorie. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 12.—; geb. in Leinw. *M* 13.—.
- KÖNIG, BERTHOLD, u. MATUSCHEK, JOHANN, Organische Chemie f. die Oberstufe der Realschulen. Wien 1910, Pichlers Witwe & Sohn. Geb. K. 2.—.
- KRAUSE, A., Die Sonne, s. N. B. 28.
- LAUE, M., Das Relativitätsprinzip, s. N. B. 29.
- LEHMANN, O., Flüssige Kristalle, s. N. B. 30.
- LESSER, OSKAR, Die Infinitesimalrechnung im Unterricht der Prima. 2., verb. Aufl. Berlin 1911, Salle. *M* 1.80.
- LIETZMANN, W., Bericht über die Tätigkeit des deutschen Unterrichts-Ausschusses, s. N. B. 69.
- LENNICH, MAX, Lehr- und Übungsbuch f. den Unterricht in der Geometrie, Trigonometrie u. Stereometrie Für die höheren Lehrerinnenseminare. Leipzig 1912, Freytag. Geb. *M* 3.—.
- LOREY, W., Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker usw., s. N. B. 61.
- LUSSAN, ÉLOI, Essai de démonstration générale du théorème de Fermat. Paris 1911, Gauthier-Villars.
- MEISSNER, OTTO, Seismometrische Beobachtungen in Potsdam in der Zeit vom 1. Januar bis 31. Dezember 1910. (Veröffentlichung des Kgl. preuß. geodät. Instituts, neue Folge Nr. 50.) Berlin 1911.
- MIE, G., Moleküle, Atome, Weltäther, s. N. B. 34.
- MOHR, RICHARD, Die Bertrand'schen Kurven in der Theorie der Normalensysteme. Diss. Straßburg 1911.
- MORAWETZ, J., Vierstellige logarithmische u. trigonometrische Tafeln, s. N. B. 47.
- MACH, Grundriß der Physik, s. N. B. 32.
- MEHL, ADOLF, Der Freiballon in Theorie u. Praxis, unter Mitarbeit von v. Abercron, Hans Adam, Dr. Bamler, Dr. Berson, Dr. v. d. Borne, Dr. Bröckelmann, Dr. Flemming, Margarete Große, Henke, v. Kleist, Lohmüller, Alex. Meyer, Mickel, Dr. Niemeyer, Joh. Böschel, R. Riedinger hrsg. I. Bd. Stuttgart 1911, Franckh. Geb. *M* 4.80.
- MÜLLER, ALOYS, Das Problem des absoluten Raumes und seine Beziehung zum allgemeinen Raumproblem. („Die Wissenschaft“, Heft 39.) Braunschweig 1911, Vieweg & Sohn. *M* 4.—; geb. in Leinw. *M* 4.80.
- MÜNCH, P., Lehrbuch der Physik, I, s. N. B. 35.
- NIELSEN, NIELS, Théorie des fonctions métriques. Cours professé à l'Université de Copenhague. Paris 1911, Gauthier-Villars. Fr. 12.
- OCHTOWITSCH, ALEXANDER, Beweis des großen Fermatschen Satzes. Autorisierte Übersetzung aus dem Russischen. Kasan 1910, Typo-Lithographie der Kaiserlichen Universität. *M* 1.—.
- OSTWALD, W., über Katalyse, s. N. B. 36.

- PLANCK, MAX, Vorlesungen über Thermodynamik. 3., erweiterte Aufl. Leipzig 1911, Veit & Co. Geb. *M* 7.50.
- PETERS, J., Einundzwanzigstellige Werte der Funktionen Sinus und Kosinus, s. N. B. 48.
- , Siebenstellige Logarithmentafel, s. N. B. 49.
- RIGHI, A., Kometen u. Elektronen, s. N. B. 4.
- ROSSMANNITH-SCHOBER, Grundriß der Geometrie. Lehr- und Übungsbuch f. die II. und III. Klasse der Mittelschulen. Ausgabe f. Gymnasien u. Realgymnasien. Nach den neuen Lehrplänen bearb. v. Franz Bergmann. Wien 1911, Pichlers Wwe. u. Sohn. Geb. K. 1.60.
- RUTHERFORD, E., Radiumnormalmaße, s. N. B. 37.
- SCHÄFFER, C., Natur-Paradoxe, s. N. B. 62.
- SCHEFFERS, G., Lehrbuch der Mathematik, s. N. B. 63.
- SCHLOTKE-RODENBERG, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, s. N. B. 8.
- SCHMIDT, TH., Maschinenbauliche Beispiele f. Konstruktionsübungen zur darstellenden Geometrie, s. N. B. 9.
- SCHMEHL, CHR., Lehrbuch der ebenen Geometrie f. höhere Lehranstalten. Gießen 1911, Roth. *M* 2.50; geb. *M* 3.—.
- SCHNAUDER, M., Polhöhenbestimmungen in den Jahren 1902, 1903, 1908 u. 1909. (Veröffentlichungen des Kgl. preuß. geodät. Instituts, neue Folge Nr. 48.) Berlin 1910.
- Schriften des deutschen Ausschusses f. den mathematischen u. naturwissenschaftl. Unterricht.
1. GUTZMER, A., Bericht über die Tätigkeit des deutschen Ausschusses f. den mathem. u. naturw. Unterricht im Jahre 1908. (Sonderabdruck aus dem XXXIX. Jahrg. der Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterr.) Leipzig u. Berlin 1909, Teubner. *M* —.30.
  2. Mathematik u. Naturwissenschaft an den neugeordneten höheren Mädchenschulen Preußens. Wie erhalten wir die erforderlichen Lehrkräfte? Denkschrift, verfaßt vom deutschen Ausschuß f. den mathematischen u. naturwissenschaftl. Unterricht. (Sonderabdruck aus dem XL. Jahrg. der Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterr.) Ebenda, 1909. *M* —.20.
  3. Zusatz zu der Denkschrift: Mathematik u. Naturwissenschaft usw. Ebenda, 1909. *M* —.10.
- SCHWAB, K., Lehr- u. Übungsbuch der Geometrie. 1. Tl. Ausg. B: Für die Unterstufe der Gymnasien. Besorgt v. Carl Heinr. Müller. Leipzig 1910, Freytag. Geb. *M* 2.50.
- , Dasselbe, 3. Tl. Ausg. A: Für die oberen Klassen der Realanstalten. Leipzig 1911, Freytag. Geb. *M* 2.—.
- SCHWAB, KARL, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie. II. Teil. Ausg. B: Für die Oberstufe der Gymnasien. Besorgt v. C. H. Müller. Leipzig 1911, Freytag. Geb. *M* 3.—.
- SERRET, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach Axel Harnacks Übersetzung. 4. u. 5. Aufl. bearb. v. Georg Scheffers. II. Integralrechnung. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 13.—.
- SMOLIK-HELLER, Raumlehre u. darstellende Geometrie f. die IV. bis VII. Klasse der Realschulen, bearb. v. Karl Hahndel. 4. Aufl. Wien 1911, Tempsky. Geb. K. 3.60.
- STERZINGER, OTTMAR, Zur Logik u. Naturphilosophie der Wahrscheinlichkeitslehre. Ein umfassender Lösungsversuch. Leipzig, Xenienverlag. *M* 4.—.
- STROELE, HERM., Théorie de la compensation à mercure dans les pendules d'horloges astronomiques. Thèse Université Genève. (Bull. Soc. Neuchâteloise Sc. naturelles, année 1909—1910, XXXVII.) Neuchâtel 1910, Wolfrath & Sperlé.
- TASCHENBUCH f. Mathematiker u. Physiker, s. N. B. 64.

- TAPLA, TH., Grundzüge der niederen Geodäsie, s. N. B. 5.
- TIERSCH, WALTER, Ein elementarer Beweis des Fermatschen Satzes. Buttstädt i. Th. Selbstverlag.
- VAN DER WAALS, J. D., Die Zustandsgleichung, s. N. B. 39.
- VERLAGSKATALOG v. Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig 1786—1911. Hrsg. aus Anlaß des hundertfünfundzwanzigjährigen Bestehens der Firma, gegründet April 1786. Braunschweig 1911.
- WALLENBERG, GEORG, Theorie der linearen Differenzgleichungen. Unter Mitwirkung v. Alf. Guldberg. (Teubners Sammlung Band XXXV.) Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 10.—; geb. *M* 11.—.
- WEILL, A., Graphische Aufgaben, s. N. B. 65.
- WIESSNER, V., Die mechanische Energie, das Prinzip der Mechanik. Dresden 1908, Lincke. *M* 4.—.
- , Wie schreitet das Licht im isotropen Medium vor? Dresden u. Leipzig 1909, Lincke. *M* 2.—.
- ZÜHLKE, P., Der Unterricht im Linearzeichnen u. in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realschulen. s. N. B. 11.
- ZORETTI, LUDOVIC, Leçons sur le prolongement analytique. Professées au Collège de France. Paris 1911, Gauthier-Villars. Fr. 3.75.

## Abhandlungsregister 1909—1910.

Von ERNST WÖLFFING in Stuttgart.

## Abkürzungen.

- A. Avia 1910.  
 A. A. A. S. Australasian Assoc. for the Advancement of Science, Hobart 9; 11—12.  
 A. A. E. I. Atti dell' Acc. Associazione elettrica italiana 12.  
 A. A. P. Atti dell. Acc. di Scienze, Lettere ed Arti Padova 4.  
 A. A. P. L. Archiv für Anatomie und Physiologie, Leipzig 1907.  
 A. A. P. M. Atti dell' Accad. Peloritana, Messina 20—21.  
 A. A. T. Atti della R. Accad. di Scienze Torino 37; 43—45.  
 A. A. V. M. Atti e Memorie della R. Accad. Virgiliana, Mantova (2) 1; 3.  
 A. A. V. T. I. Atti dell' Accademia Veneto-trentino-istriana, Padova (2) 5.  
 A. A. W. Anzeiger der K. K. Akad. der Wiss., Wien 1910.  
 A. A. Z. Allgemeine Automobilzeitung Berlin 1909—1910.  
 A. B. B. Armierter Beton, Berlin 1909 bis 1910.  
 A. B. D. Annales de la Brasserie et de la Distillerie, Paris 1909.  
 A. C. J. American Chemical Journal, Baltimore 40; 43.  
 A. C. L. The Autocar, London 23.  
 A. C. P. Annales de Chemie et de Physique, Paris (8) 14; 16—18.  
 A. D. M. Annali di Matematica pura ed applicata, Milano (3) 16.  
 A. E. N. Annales de l'École Normale Supérieure, Paris (3) 24—27.  
 Ä. P. B. Ärztliche Polytechnik, Berlin 1908.  
 A. F. Association française pour l'Avancement des Sciences 1907—1909.  
 A. F. C. Z. Anales de la Facultad de Ciencias, Zaragoza 2.  
 A. F. G. T. Archiv f. d. gesamte Physiologie, Bonn 1909.  
 A. G. C. Atti dell' Accad. Gioenia di Scienze Naturali (4) 20; (5) 3.  
 A. G. L. Abhandl. d. K. Sächs. Gesellsch. der Wissensch., Leipzig 31.  
 A. G. I. J. The American Gas Light Journal, New York.  
 A. Gr. Archiv d. Math. u. Phys., Leipzig (3) 12—16.  
 A. H. Annalen der Hydrographie u. maritimen Meteorologie, Hamburg 36—37; 1909—1910.  
 A. H. M. Archiv f. Hygiene München 63.  
 A. I. P. P. Annales de l'Institution polytechnique, Petersburg 4; 1906; 1907; 1910.  
 A. I. P. W. Annales de l'Institution polytechnique, Warschau 1900—1902.  
 A. I. V. Atti dell' Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Venezia 65; 67—69.  
 A. I. Z. Allg. Ingenieurzeitung, Wien 1910.  
 A. J. B. The Astronomical Journal, Boston 26.  
 A. J. C. The Astrophysical Journal, Chicago 22; 29; 31.  
 A. J. M. The American Journal of Mathematics, Baltimore 30—32.  
 A. J. P. Artilleriejournal Petersburg 1906.  
 A. J. S. The American Journal of Science, New Haven (4) 26.  
 A. J. S. O. Astronomiske Jaktagelser och Undersökningar på Stockholms Observatorium Stockholm 8.  
 A. L. Aeronautics London 2—3; 1909.  
 A. M. Acta mathematica, Stockholm 31 bis 33.  
 A. M. A. F. Arkiv för Math., Astr. och Fysik, Stockholm 4—6.  
 A. M. H. Artilleristische Monatshefte, Berlin 1908—1910.  
 A. M. J. The Automotor Journal, London 14—15.  
 A. M. M. L'Aéromécanique, Mons 1909.  
 A. M. T. Archives du Musée Teyler, Harlem (2) 2; 11.  
 A. N. Archives Néerlandaises, Harlem (2) 14.  
 A. N. G. N. Abh. d. naturforsch. Gesellsch. Nürnberg 17.

- A.N.J. *Aeronautical Journal*, London 14.  
 A.N.K. *Astronomische Nachrichten*, Kiel 172; 174; 178; 182; 185.  
 A.N.L. *Annales der Naturphilosophie*, Leipzig 4—6; 1910.  
 A.N.P. *L'Aéronaute*, Paris 43; 1910.  
 A.N.Y. *Aeronautics*, New York 3; 5—7; 1909—1910.  
 A. of M. *Annals of Mathematics*, Cambridge Mass. (2) 9—11.  
 A.O.L. *Archiv f. Optik*, Leipzig 1.  
 A.P.B. *Bulletin der K. K. Akademie*, Petersburg 1908; 1911.  
 A.P.L. *Annalen der Physik*, Leipzig (4) 26—32.  
 A.P.T. *Archiv f. Post u. Telegraphen*, Berlin 1909.  
 A.S.A. *Anales de la Sociedad Científica Argentina* 65; 68—70.  
 A.S.A.P. *Annaes scientificos da Academia Polytechnica*, Porto 4—5.  
 A.S.B. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, Louvain 32—34.  
 A.S.F. *Acta Societatis fennicae*, Helsingfors 33; 35.  
 A.S.G. *Archives des Sciences physiques et naturelles*, Genève (4) 22; 24; 26 bis 27; 29.  
 A.S.I. *Atti della Soc. Italiana per il progresso delle Scienze* 3.  
 A.S.I.A. *Annali della Società degli Ingegneri e degli Architetti*, Roma 24.  
 A.S.L. *Annales de la Soc. d'Agriculture, Sciences et Industrie*, Lyon 1907—1909.  
 A.S.M.F. *Annales de la Soc. météorologique de France*, Paris 5—7.  
 A.S.U.J. *Annales scientifiques de l'Université*, Jassy 5—6.  
 A.T. *Annales de la Faculté*, Toulouse (2) 9—10.  
 A.T.P.B. *Annales des Travaux publics de Belgique*, Bruxelles 14. 65.  
 A.T.Z. *Augsburger Techniker Zeitung*, Augsburg 1909.  
 A.U.G. *Annales de l'Université*, Grenoble 20—22.  
 A.U.L. *Universitets Arskrift*, Lund (2) 3.  
 A.U.W. *Annales de l'Université impériale*, Warschau 1900—1901; 1904.  
 A.V.A. *Archief voor verzekeringswetenschap*, Amsterdam 9—10.  
 A.V.N. *Allg. Vermessungsnachrichten*, Liebenwerda 18.  
 A.W. *Automobilwelt* 1910.  
 A.Z.B.M. *Allg. Zeitschr. f. Bierbrauerei und Malzfabrikation* 1909.  
 A.Z.M. *Automobilzeitung*, München 9.  
 B.A.B. *Bulletin de l'Acad. Roy. des Sciences, des Lettres et des Beaux-arts*, Bruxelles 1908—1910.  
 B.A.Co. *Oversigt der Kongl. Dansk. Videnskabets Selskab*. 1908; 1910.  
 B.A.I.V.C. *Bulletin de l'Assemblée des Ingénieurs des Voies de Communication*, Petersburg 1906.  
 B.A.T.M. *Bull. de l'Association pour la Technique maritime*, Paris 18.  
 B.B.L. *Bolletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche*, Genova 9—11.  
 B.B.N.V. *Berichte der böhm. Naturforscher und Ärzteversamml.* Prag 4.  
 B.B.S.W. *Bulletin of the Bureau of Standards*, Washington 5—6.  
 B.C. *Bolletino di Matematiche e di Scienze fisiche e naturali*, Bologna 9.  
 B.C.M.S. *Bulletin of the Calcutta Math. Society*, Calcutta 1.  
 B.D. *Bulletin des Sciences Math.*, Paris (2) 34.  
 B.D.M. *Bolletino di Matematica*, Bologna 6; 8—9.  
 B.F.F. *Öfversigt af Finska Vetenskaps Societetets Förhandlingar*, Helsingfors 51—52.  
 B.G.L. *Berichte der K. Sächs. Gesellsch. der Wissensch.*, Leipzig 59—61.  
 B.G.W.Z. *Baugewerkezeitung*, Berlin 40; 1909.  
 B.H.J. *Berg- u. Hüttenmännisches Jahrbuch*, Wien 54.  
 B.I.C. *Bulletin international de l'Acad. des Sciences*, Krakau 1907—1909.  
 B.I.E.K.V. *Bulletin des internat. Eisenbahnkongreßverbandes*, Bruxelles 2.  
 B.I.G.B. *Bayrisches Industrie- und Gewerbeblatt*, München 42; 92; 1908 bis 1909.  
 B.I.P. *Bull. internat. de l'Acad. des Sciences*, Prag 11.  
 B.I.P.P. *Bulletin de l'Institut polytechnique*, Petersburg 1—4; 7—13.  
 B.I.R.A. *Bulletin of the International Railway Association* 1910.  
 B.I.T.Kh. *Bulletin de l'Institut technologique*, Kharkow 3.  
 B.I.T.P. *Bulletin de l'Institut de Technologie pratique*, Petersburg 17.  
 B.K.H. *Braunkohle*, Halle 8.  
 B.K.S. *Der Bau- und Kunstschlosser* 11.  
 B.L. *Der Bauzeichner*, Lübeck 1909 bis 1910.  
 B.M. *Bibliotheca mathematica* (3) 8—10.  
 B.M.A.M. *Bulletin mensuel de l'Acad. des Sciences et Lettres*, Montpellier 1909—1911.  
 B.M.B. *Der Baumeister*, Berlin 7.  
 B.M.E. *Bulletin des Sciences math. et phys. élémentaires*, Paris 14—15.  
 B.M.N. *Math. u. Nat. Berichte aus Ungarn*, Budapest 21; 24—25.

- B.M.P. Bolletino della „Matesis“, Padova 2.
- B.M.S.J. Berichte aus dem mat. Seminar, Jena 1906—1907.
- B.N. Building News 97—98.
- B.P.A. Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, Straßburg 3.
- B.P.T. Blätter f. Post- u. Telegraphenwesen 5.
- Br.C. Brick, Chicago 29.
- B.R.K. Bergmännische Rundschau, Kattowitz 3.
- B.S.A.F. Bulletin de la Société astronomique de France 21.
- B.S.A.I. Bolletino della Società Aeronautica Italiana, Roma 5; 1909.
- B.S.B. Bulletin de la Soc. Scientifique, Bucuresci 18.
- B.S.B.A. Bulletin de la Soc. belge d'Astronomie, Bruxelles 14.
- B.S.C.P. Bulletin de la Soc. chimique de France, Paris 4.
- B.S.F.P. Bulletin de la Société française de Physique, Paris 1908—1909.
- B.S.I.C. Bulletin de la Soc. des Ingénieurs Civils de France, Paris (4) 5; 63.
- B.S.I.E. Bulletin de la Soc. internationale des Électriciens, Paris 8; 1909.
- B.S.N. Bulletin de la Soc. des Sciences, Neuchâtel 34; 36.
- B.S.N.M. Bull. de la Soc. impér. des Amateurs des Sciences nat., Moskau 13.
- B.S.P. Blätter f. d. Schulpraxis, Spandau 1908.
- B.S.R.A. Bulletin de la Soc. Russe d'Astronomie, Petersburg 12.
- B.S.R.M. Bulletin de la Soc. Russe de Minéralogie, Petersburg 44.
- B.S.V. Bulletin de la Soc. Vaudoise des Sciences naturelles, Lausanne (5) 45.
- B.T.B. Der Bohrtechniker, Berlin 1910.
- B.U.K. Nachrichten d. Universität Kiew 1907—1910.
- B.U.V. Nachrichten d. Universität Warschau 1906.
- B.W.B. Bauwelt, Berlin 1.
- B.Z.B. Brennerzeitung, Bonn 25.
- B.Z.H. Betonzeitung, Halle 1909.
- C. Časopis, Prag 38—40.
- C.A. Compressed Air Magazin, New York 1909.
- C.A.A. Verslagen der K. Akad. van Wetenschappen, Amsterdam 16—19.
- C.A.C.E. Concrete and Construction Engineer, 4.
- C.A.N.Y. Compressed Air, New York 1909.
- C.C.E.L. Concrete Construction Engineer, London 5.
- C.I.S. Chauffage industriel sanitaire, Paris 3.
- C.M.G. Zentralblatt f. Mineralogie u. Geologie, Stuttgart 1909.
- C.M.N.W. Comptes Rendus et Mémoires de la Soc. des Naturalistes à l'Université Warschau 14; 1904; 1906.
- C.M.N.Y. Cassiers Magazine, New York 35—38; 1909.
- C.M.T.R. The Cycle and Motor Traders Review 36.
- C.N. The Chemical News, New York 98.
- Co. Cosmos, Paris 57—59.
- C.R. Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Acad. des Sciences, Paris 145—151.
- Cr. Journal für reine und angew. Math., Berlin 133—136; 138.
- C.R.N.P.L. Collected Researches of the National Physical Laboratory 3; 6.
- C.R.R. Korrespondenzblatt des Naturforschervereins, Riga 53.
- C.W.I. The Clay Worker, Indianapolis 50.
- C.Z. Chemikerzeitung, Coethen 32—33.
- D.B.H. Deutsche Bauhütte, Hannover 1909.
- D.B.T. Der Bautechniker, 1909—1910.
- D.F.T. Die Fördertechnik, Berlin 3; 1909.
- D.I.G. De Ingenieur, s'Gravenhage 1909.
- D.L. Die Lokomotive, Wien 1909.
- D.M.B. Das Motorboot, Berlin 7; 1909.
- D.M.S.H. Der Mühlen- u. Speicherbau, Heidelberg 2.
- D.M.Z.B. Deutsche Mühlenzeitung, Berlin 1910.
- D.P.B. Der Profanbau, Berlin 1905.
- D.R.M. Der Radmarkt u. Motorfahrzeuge, 25.
- D.T.B. Die Turbine, Berlin 12.
- D.T.Z. Deutsche Töpfer- u. Zieglerzeitg., Berlin 1909.
- D.T.Z.B. Deutsche Technikerzeitung, Berlin 25—26; 1909.
- D.V.M. Jahresbericht der Deutschen Mathematikerverein., Leipzig 17—19.
- D.W.B. Das Weltall, Berlin 10.
- D.W.Z. Deutsche Waffenzzeitung, Suhl 14.
- D.Z.R. De Zee, Rotterdam 30.
- E.A. Electrical Age 1909.
- E.B.B. Eisenbeton, Berlin 1909.
- E.B.B.M. Elektrische Kraftbetriebe und Bahnen, München 1909—1910.
- E.B.L. Eisenbau, Leipzig 1.
- E.B.R. Engineering and Building Record, New York 57—61; 1909.
- E.C. The Engineer, Chicago 45.
- E.C.I. Electrochemical Industry 6; 1909.
- E.C.Z. Elektrochemische Zeitschrift, Berlin 16.
- E.Eg.L. Electrical Engineering, London 6.
- E.E.L. The Electrical Engineer, London 41—42; 44—45; 1909.

- E.E.M. *Energia electrica*, Madrid 1909 bis 1910.
- E.E.P. *L'Étincelle électrique*, Paris 16.
- E.F. *Electric Field* 3.
- E.J. *Electrical Journal* 6; 1909—1910.
- E.K.I. *Eis- und Kälteindustrie*, Halle 9.
- E.L. *Electricity*, London 1909.
- E.M. *L'Enseignement math.*, Paris 10 bis 12.
- E.M.B. *Elektrische u. maschinelle Betriebe*, Berlin 1909.
- E.M.J. *The Engineering and Mining Journal*, New York 85; 88.
- E.M.L. *Electrical Magazine and Engineers Monthly*, London.
- E.M.N. *The Engineering Magazine*, New York 38—39.
- E.P.R. *Elektrotechnische und Polytechnische Rundschau*, Potsdam 25; 1909.
- E.R. *Electrical Review*, London 12; 1909.
- E.R.C. *Electrical Review and Western Engineer*, Chicago 55; 57; 62; 65; 67; 1909.
- E.R.J. *Electrical Railway Journal*, New York.
- E.R.L. *Engineering Review* London 18; 19; 21; 27; 1909.
- E.R.N.Y. *Electrical Review*, New York 52—53.
- E.T.A. *Elektrotechnischer Anzeiger*, Berlin 25; 1909—10.
- E.T.K. *Elektrisk Tidsskrift*, Kristiania 1910.
- E.Z.B. *Eisenzeitung*, Berlin 30.
- F. *Foundry*, Cleveland 35.
- F.B.L. *Frauenbildung*, Leipzig 1908.
- F.D.T. *Fachzeitung für Drechsler und Tischler* 26.
- F.G.E. *Forschungsergebnisse auf dem Gebiet des Eisenbetons*, Berlin 11.
- F.L. *Flight*, London 2; 1910.
- F.M. *Annales de la Faculté*, Marseille 13.
- F.S. *Flugsport*, Frankfurt 1909—1910.
- G.B. *Giornale di Matematiche*, Napoli 45—48.
- G.E. *Glückauf*, Essen 45.
- G.E.C. *Gas Engine Cincinnati* 11—12; 1909—1910.
- G.E.R. *General Electric Review* 1909.
- G.H. *Glashütte* 40.
- G.M.B. *Gaceta matematica*, Bucuresci 13 bis 15.
- G.M.T. *Gasmotorentchnik*, Berlin 7; 9 bis 10; 1909.
- G.O.P. *Gas and Oil Power* 5.
- G.R.G. *Gewerbl. Rundschau*, Graz 1909.
- G.Z.B. *Gießereizeitung*, Berlin 6.
- H.A. *The Horseless Age*, New York 21 bis 23; 25—26.
- H.B. *Helios*, Berlin 1909.
- H.B.M. *Hochbaukunde* 2.
- H.E.D. *Hemelen Dampkring*, Amsterdam 1910.
- H.H. *Hansa*, Hamburg 1909—1910.
- H.J. *Horological Journal* 52.
- H.L. *Hochland* 1909—1910.
- H.N.C. *Handelingen van Nederl. Natuur- en Geneeskund. Congres*, Leiden 12; 1907.
- H.T.R. *Haustechnische Rundschau*, Halle 12; 14.
- H.V.C. *Handelingen van Vlaamsch Natuur- en Geneeskund. Congres*, Bruxelles 1906—1909.
- H.V.M. *Heating and Ventilation Magazine*, New York 5; 7; 1909.
- H.Z.F. *Helios*, Zeitschrift f. Elektrotechnik 1909—1910.
- I.A. *The Iron Age*, New York 81—85; 89.
- I.A.M. *Illustrierte aeronautische Mitteilungen*, Straßburg 12—13; 1909—1910.
- I.C. *L'Industria chimica* 45.
- I.C.T.R. *Iron Coal Trades Review*, London 78—80.
- I.E.L. *Illumination Engineer*, London 3; 1909.
- I.E.N.Y. *Illumination Engineer*, New York 4.
- I.E.P. *L'Industrie électrique*, Paris 17; 19; 1909.
- I.I.T. *L'Ingeniere igienista*, Torino 1.
- I.K. *Ingeniøren*, Kjöbenhavn 18.
- I.L.Z. *Illustrierte landwirtschaftl. Zeitung* 29.
- I.M.E. *International Marine Engineering*, New York 15; 1909.
- I.M.E.L. *Internat. Marine Engineering*, London 14—15.
- I.T.C.F. *L'Industrie des Tramways et des Chemins de Fer* 4.
- I.V.A. *L'Industrie vélocipédique et automobile*, Paris 28—29.
- J.A.C.S. *Journal of the American Chemical Society*, Easton 30.
- J.A.E.S. *Journal of the Association of the Engineering Societies*, Boston 40; 44; 1909.
- J.A.P. *Journal de l'Agriculture pratique*, Paris 1910.
- J.A.S.M.E. *Journal of the American Soc. of Mechanical Engineers* 31—32.
- J.A.S.N.E. *Journal of the American Soc. of Naval Engineers*, Washington 20; 22; 31; 1909.
- J.B.A.A. *Journal of the British Astronomical Association*, London 18.
- J.C.P. *Journal de Chimie et de Physique*, Paris 6.
- J.C.P.G. *Journal de Chimie physique*, Genève 1.
- J.C.S. *Journal of the Chemical Society*, London 93; 95.

- J.D.A.M. Jahrbuch f. d. Deutsche Armee u. Marine, Berlin 1906—1907.
- J.D.T. Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie u. Telephonie, Göttingen 1—3.
- J.E.P. Journal de l'École polytechnique, Paris (2) 11.
- J.F.I. Journal of the Franklin Institution, Philadelphia 165—169; 1909.
- J.F.P.C. Journal f. prakt. Chemie, Leipzig (2) 79.
- J.G.L. Journal of Gas Lighting, London 109—110.
- J.H.U.C. John Hopkins' University Circulars, Baltimore 208; 1910.
- J.I.A. Journal of the Institute of Actuaries, London 41.
- J.I.E.E. Journal of the Institute of Electrical Engineers, London 40—42; 44.
- J.M. Journal de Math. pures et appliquées, Paris (6) 4—5.
- J.M.S.J. Journal of the Meteorological Society of Japan, Tokio 1909.
- J.M.V.C. Journal du Ministère des Voies de Communication, Petersburg 1906.
- J.M.Y. Journal de marine, le Yacht, Paris 32—33.
- J.N.G.H. Jahresbericht der naturhist. Gesellschaft, Hannover 58—59.
- J.N.K. Jahresbericht des naturwiss. Vereins Krefeld 1909—1930.
- J.N.S.W. Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales, Sydney 37—42.
- J.P. Journal de Physique, Paris (4) 7—9.
- J.P.R. Jahrbuch f. Photographie u. Reproduktionstechnik, Halle 21—23.
- J.Q.C. Journal of the Quekett microscopical Club, London 9.
- J.R.A. Journal of the Royal Artillery, Woolwich 34—37.
- J.R.A.C. Journal of the Royal Automobile Club 19.
- J.R.E. Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, Leipzig 3.
- J.R.I.A.B. Journal of the Royal Institute of British Architects, London 17.
- J.R.P.C.G. Journal d. Russ. Physiochem. Gesellsch., Petersburg 38.
- J.R.S.S. Journal of the Royal Statistical Society, London 70.
- J.S.A. Journal of the Society of Architects 3.
- J.S.A.L. Journal of the Society of Arts London 56.
- J.S.G. Jahresbericht der Schles. Gesellschaft f. vaterländ. Kultur, Breslau 86 bis 87.
- J.S.H. Journal Suisse d'Horlogerie, Genève 33.
- J.T. Mitteilungen der physikomath. Gesellsch., Tokio (2) 3—5.
- J.T.B. Journal télégraphique, Bern 1909.
- J.U. Jahreshefte des Vereins f. Math. u. Naturwiss., Ulm 14.
- J.U.S.A. Journal of the United States Artillery, Fort Munroe 32; 1909.
- J.U.T. Journal of the College of Science, Tokio 24.
- J.V.N.Z. Jahresb. des Vereins f. Naturkunde, Zwickau 41.
- J.W.P.V. Jahresber. des Westphäl. Provincial-Vereins f. Wissensch. u. Kunst, Münster 38.
- J.W.S.E. Journal of the Western Society of Engineers, Chicago 15.
- K.E.K. Kohle u. Erz, Kattowitz 1909.
- K.T. Der Kulturtechniker, Breslau 13.
- K.Z. Kriegstechnische Zeitschrift, Berlin 11; 13; 1909—1910.
- L.A.N. L'Aéronaute, Paris 43; 1910.
- L.A.P. L'Œrophile, Paris 10; 16; 1909 bis 1910.
- L.A.S. L'Aérostation, Paris 7; 1910.
- L.C.A. La Conquête de l'Air, Bruxelles 1909.
- L.E.P. L'Électricien, Paris 36; 1909 bis 1910.
- L.E.R. L'Elettricista, Roma 1909—1910.
- L.F.A. La France automobile et aërienne, Paris 10; 14—16; 1909—1910.
- L.H.B. La Houille blanche, Bruxelles 9.
- L.L.A. La Locomotion automobile, Paris 1909.
- L.N. La Nature, Paris 37; 1909.
- L.R.A. La Revue de l'Aviation, Paris 4.
- L.S.H. Luftschiffhalle 1910.
- L.T.A. La Technique Automobile 4.
- L.T.M. La Technique moderne 2.
- L.U.Z. Leipziger Uhrmacherzeitung, Leipzig 17.
- L.V. Luftverkehr 2.
- L.V.S. Landwirtschaftliche Versuchsstationen, Berlin 70.
- L.W.M.G. Landwirtsch. Maschinen u. Geräte 1909.
- M. Mathesis Gand (3) 8—9.
- M.A. Math. Annalen, Leipzig 65—68.
- M.A.G. Mitteil. über Gegenstände des Artillerie- u. Geniewesens, Wien 1908 bis 1909.
- M.A.G.S. Mitteil. aus d. Gebiete des Seewesens, Pola 36; 38; 1909.
- M.A.Ly. Mémoires de l'Ac. des Sciences, Lyon (3) 9.
- M.A.M.F. Mitteilungen aus dem Gebiete des Markscheiderwesens, Freiberg 8.
- M.A.S.M. Mémoires de l'Ac. des Sciences, Montpellier (2) 3—4.
- M.B. Mathem. naturw. Mitteil. Stuttgart (2) 13.
- M.C.K. Memoirs of the College of Science and Engineering, Kyoto 2.



- M. C. S. I. Miscellaneous Collections of the Smithsonian-Institution, Washington 55.  
 M. E. Mechanical Engineer, Manchester 24—25.  
 M. E. L. Marine Engineer, London 30—31.  
 M. G. B. Mitteilungen der naturforsch. Gesellsch. Bern 1907; 1909.  
 M. G. F. Mitteilungen der naturforsch. Gesellsch. Frauenfeld 18.  
 M. G. S. Mathematical Gazette, Stroud 3—5.  
 M. G. U. E. Monatsber. der Gesellsch. zur Förderung der Wissensch., des Ackerbaues und der Künste in Unterelsaß, Straßburg.  
 M. H. Monatshefte f. Math. u. Physik, Wien 19—20.  
 M. I. B. Memorie della R. Accad. delle Scienze dell' Instituto, Bologna (6) 4—6.  
 M. I. V. M. T. Mitteilungen des Internat. Verbandes für die Materialprüfung der Technik 7; 9—11.  
 M. J. E. The Municipal Journal and Engineer, New York 29.  
 M. L. Muzeum, Lemberg 1909.  
 M. L. A. O. Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium Lund 36.  
 M. L. T. H. W. Mitteil. aus dem mechanisch-technologischen Laboratorium der Techn. Hochsch., Wien 7; 1908.  
 M. M. Messenger of Mathematics, London 37—38.  
 M. M. C. Modern Machinery, Chicago 25.  
 M. M. F. American Math. Monthly, Springfield 13—18.  
 M. M. L. Mineralog. Magazine, London 14.  
 M. N. A. S. Monthly Notices of the Astronomical Society, London 69.  
 M. N. B. Math. Naturw. Blätter, Berlin 3—4.  
 M. N. E. Math. Notes, Edinburgh 1.  
 M. N. I. Meddelanden från k. Vetenskaps Akademien Nobel Institut, Stockholm 1.  
 M. N. Y. Machinery, New York 16.  
 M. O. The Motor 17.  
 M. P. I. C. I. Minutes of Proceed. of the Institute of Civil Engineers, London 172—173, 177.  
 M. P. L. Mathematikai és physikai Lapok, Budapest 15—18.  
 M. P. V. H. Mitteil. der physikal. Versuchstation Halle-Cröllwitz 14—15; 19.  
 M. R. B. Marinerundschau, Berlin 1910.  
 M. S. B. Mémoires de la Soc. des Sciences phys. et naturelles, Bordeaux (6) 4.  
 M. S. C. Kongl. Vetenskabernes Selskabet's Skrifter, Kristiania 1908.  
 M. S. G. K. Vetenskaps och Vitterhets Samhälles Handlingar, Göteborg 36.  
 M. S. P. Mining and Scientific Press 98 bis 100.  
 M. S. Q. Moniteur scientifique par Quesneville, Paris 1909.  
 M. S. S. I. Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani, Catania 36.  
 M. S. T. H. Mitteil. v. Studierenden des Technikums Hildburghausen 7.  
 M. S. T. R. Mém. de la Soc. Impér. Technique Russe, Petersburg 1906—1907.  
 M. T. L. Motor Traction, London 8; 11.  
 M. T. V. R. P. Mitteilungen aus der telegraph. Versuchsanstalt des Reichspostamts, Berlin 4.  
 Mü. Mühle 1909.  
 M. V. A. P. Mitteil. v. Freunden der Astron. u. kosm. Physik, Berlin 17.  
 M. V. F. L. S. Mitteil. des Vereins zur Förderung der Lokal- u. Straßenbahnen 1909.  
 M. W. B. Motorwagen, Berlin 13; 1909 bis 1910.  
 M. W. M. The Mechanical World, Manchester 45—47.  
 M. W. R. Monthly Weather Review, Washington 37.  
 M. y R. M. Memorias y Revista de la Sociedad científica „Antonio Alzate“ Mexico 25—26.  
 M. Z. Meteorologische Zeitschrift, Wien 25—27.  
 M. Z. B. Maschinenzeitung, Berlin 7—8.  
 N. Nature, London 75—84.  
 N. A. Nouvelles Annales de Math., Paris (4) 7—10.  
 N. A. H. Nova Acta der K. K. Leopoldo-Carolinischen Akademie, Halle 88; 90.  
 N. A. W. Nieuw Archief voor Wiskunde, Amsterdam (2) 8—9.  
 N. C. P. Il Nuovo Cimento, Pisa (5) 15 bis 18.  
 N. E. E. Neueste Erfindungen u. Erfahrungen, Wien 35—36.  
 N. G. G. Nachrichten v. d. Kön. Gesellschaft der Wissensch., Göttingen 1908 bis 1910.  
 N. J. M. Neues Jahrbuch f. Mineralogie, Geologie u. Paläontologie, Stuttgart 1908.  
 N. K. M. Natur u. Kultur, München 4.  
 N. L. A. Atti dell' Accad. Pontificia de' Nuovi Lincei, Roma 61.  
 N. L. M. Memorie dell' Accad. Pontificia de' Nuovi Lincei, Roma 26.  
 N. M. L. Nautical Magazine, London 1908.  
 N. S. S. W. Nachrichten der Siemens-Schuckert-Werke 1909.  
 N. T. N. I. Naturkundig Tijdschrift voor Geneeskunde, Amsterdam 89.  
 N. W. Naturw. Wochenschrift, Jena 22; (2) 7.  
 N. Z. Naturw. Zeitfragen, Hamburg.  
 O. B. Z. Ostdeutsche Bauzeitung, Breslau 7.

- Ö.P.Z. Österreich. Polytechnische Zeitschrift, Wien 1909.
- O.L. Optician, London 38—39.
- O.P.L.L. Onderzoekingen gedaan in het physiologisch laboratorium Leiden 6.
- P. Prometheus, Berlin 18; 20.
- P.A. Popular Astronomy, Northfield 13; 15; 16.
- P.A.B. Veröffentlichungen der K. Serb. Akad., Belgrad 73.
- P.A.Bo. Proceed. of the American Academy of Arts and Sciences, Boston 44 bis 46.
- P.A.G.L. Publikat. der Astron. Gesellsch. Leipzig 21.
- P.A.I.E.E. Proceedings of the American Institution of Electrical Engineers, New York 29; 1909.
- P.A.S.C.E. Proceed. of the American Society of Civil Engineers, New York 34; 1909.
- P.A.S.M.E. Proceed. of the American Society of Mechanical Engineers 31.
- P.B. Die Patentbörse 3.
- P.C.I.W. Proceedings of the Carnegie Institution, Washington 80.
- P.C.P.S. Proceed. of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge 15.
- P.E.L. The practical Engineer, London 39—41.
- P.E.M.S. Proceed. of the Edinburgh Math. Society 26—28.
- P.G.K. Schriften der physikal. ökonom. Gesellschaft, Königsberg 48.
- P.I. Photographische Industrie 1909.
- P.I.M.E. Proceed. of the Institution of Mechanical Engineers, London 1910.
- Pit. Il Pitagora, Palermo 14—16.
- P.L. Poids Lourd 5.
- P.L.M.S. Proceed. of the London Math. Soc., (2) 6—8.
- P.M. The Philosoph. Magazine, London (6) 14—20.
- P.M.B. Photographische Mitteilungen, Berlin 44—45.
- P.M.R. Periodico di Matematica, Roma (3) 5—7; 25—26. Suppl. 14.
- P.N.I. Proceed. of the United States Naval Institution 34—36.
- P.O.E.E.J. Postoffice electrical Engineers Journal, London 3.
- Pol. Il Politecnico, Milano 36; 56.
- P.P.S. Proceed. of the American Philosophical Society, Philadelphia 47.
- P.P.S.L. Proceed. of the Physical Soc. London 21—22; 24.
- P.R. The Physical Review, New York 22; 27—30.
- P.R.I.A. Proceed. of the Roy. Irish Acad., Dublin 27.
- P.R.P. Photo-Revue, Paris 1910.
- P.R.S.E. Proceed. of the Royal Society, Edimburgh 28—31.
- P.R.S.L. Proceed. of the Royal Society, London 79—80; 82—84.
- P.R.V. Photograph. Rundschau nebst Vereinsnachrichten, Halle 1909.
- P.S.B. Procès-Verbaux de la Société des Sciences, Bordeaux 1906—1908.
- P.S.D. Scientific Proceedings of the Royal Society, Dublin (2) 12.
- P.S.W.I.E. Proceed. of the South of Wales Institute of Engineers 26.
- P.T.E. Power and the Engineer, New York 28; 30—32.
- P.T.M. Summary of the Proceed. of the Tokio Math. Phys. Society, Tokio (2) 5.
- P.T.R.S.C. Proceed. and Transactions of the Royal Society of Canada, Montreal (3) 1.
- P.T.W. Przegląd Technicki, Warschau 44—46.
- P.W.L. Pages Weekly, London 6; 12—17.
- P.Z. Physikalische Zeitschrift, Göttingen 9—11.
- Q.J. Quarterly Journal of Mathematics, London 39—41.
- Q.J.M.S. Quarterly Journal of the Meteorological Society, London 34; 36.
- R.A. Revue d'Artillerie, Paris 68; 72 bis 75.
- R.A.B. Revue de l'Armée Belge, Liège 6; 34; 1909.
- R.Ae.P. Revue aérienne, Paris 1910.
- R.A.G. Rivista di Artiglieria e di Genio, Roma 25; 47; 1905—1906.
- R.A.G.N.Y. Railroad Age Gazette, New York 1909.
- R.A.L.R. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, Roma (5) 17—20.
- R.A.M. Revista de la Reale Acad. de Ciencias exactas físicas y naturales, Madrid 6—7.
- R.A.N. Rendiconti della Reale Accad. delle Scienze Napoli (3) 15—16.
- R.A.P. Revue de l'Aviation, Paris 3—5; 1909.
- R.A.R. Rivista d'Astronomia, Roma 1.
- R.B.A. Reports of the British Association for the Advancement of Science 77—79; 1908.
- R.C.L. Revista de Ciencias, Lima 9—13.

(Fortsetzung folgt.)

## Drehende Schwingungen eines Hohlzylinders in einer zähen Flüssigkeit.

Von KARL MENGES in Bremen.

### Einleitung.

Wenn ein mit einer Flüssigkeit gefüllter oder von ihr umgebener Rotationskörper um seine geometrische Achse schwingt, so überträgt sich seine Bewegung infolge der inneren Reibung auch auf die Flüssigkeit; seine Schwingungen werden daher gedämpft. Mit Scheiben<sup>1)</sup>, Hohl-scheiben<sup>1)</sup>, Kugeln<sup>1)</sup>, Hohlkugeln<sup>1)</sup> hat man solche Versuche vielfach angestellt, um aus der Dämpfung, der Schwingungsdauer und den Dimensionen des Apparats den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit zu berechnen. Dagegen sind Zylinder kaum benützt worden. Sie verdienen aber gerade eine besondere Beachtung, weil sich für sie die mathematische Theorie mit größter Strenge durchführen läßt, während für alle anderen Formen des Rotationskörpers schon in den Grundgleichungen die Glieder  $u \frac{\partial u}{\partial x} \dots$  vernachlässigt werden müssen, ohne daß man den Einfluß dieser Vernachlässigungen auf das Resultat beurteilen kann.<sup>2)</sup>

Klemencic<sup>3)</sup> hat theoretisch die Dämpfung bestimmt, die ein *unendlich langer* Zylinder erfährt, wenn er in einer unendlich ausgedehnten, in der Unendlichkeit ruhenden Flüssigkeit um seine Achse schwingt. Margules<sup>4)</sup> hat die Theorie kurz skizziert für den Fall, daß ein *unendlich langer* Hohlzylinder mit der Flüssigkeit gefüllt ist und drehende Schwingungen um seine Achse ausführt. Bei *endlichen* Zylindern aber, die doch praktisch allein angewandt werden können, gerät in der Umgebung der Grundflächen die Flüssigkeit in eine Bewegung, die mathematisch vollkommen zu beschreiben bis jetzt nicht gelungen ist. Darin mag der Grund liegen, daß schwingende Zylinder so wenig zur Bestimmung der inneren Reibung angewandt worden sind.

Dem störenden Einfluß der Zylinderenden kann man experimentell auf zwei verschiedene Arten begegnen. Man kann ihn, wie Margules<sup>4)</sup>

1) Literatur siehe Winkelmanns Handbuch d. Physik; R. Ladenburg, Ann. d. Physik 27 (1908), 157.

2) Vgl. K. Menges, Archiv der Mathematik und Physik 18 (1911).

3) Klemencic, Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss., Wien, Bd. 84 (2) (1882), S. 153.

4) Margules, Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss., Wien, Bd. 83 (2) (1881), S. 592.

vorgeschlagen hat, ganz eliminieren, indem man zwei Versuche kombiniert, bei denen Schwingungsdauer, Dekrement und Radien der Zylinder die gleichen Werte haben, während die Höhen der Zylinder verschieden sind. Der Einfluß der Enden ist dann in beiden Versuchen der gleiche, da die Form der Bewegung die gleiche sein muß, und kann durch geeignete Subtraktion fortgeschafft werden. Dieses Verfahren ist aber offenbar experimentell nicht sehr einfach und ist auch noch nicht angewandt worden. Die andere Art besteht darin, daß man einen dünnwandigen Hohlzylinder ohne Boden benützt, der mit dem offenen Ende bis zu einer gewissen Höhe in die Flüssigkeit eintaucht. Eine mathematisch nicht streng faßbare Bewegung tritt dabei nur noch an dem schmalen unteren Rand des Zylinders auf, und ihr Einfluß auf die Schwingungen des Zylinders kann daher nur gering sein. Die Versuche mit dieser Anordnung sind ebenso leicht ausführbar wie die einfachen Coulomb-Meyerschen mit der schwingenden Scheibe und gewähren dabei aber doch drei große Vorteile: 1. Für den wesentlichen Teil der Flüssigkeit kann die Theorie völlig streng entwickelt werden; 2. Der nicht streng faßbare Einfluß des Zylinderrandes auf die Schwingungen kann beliebig klein gemacht werden, dadurch daß man die Flüssigkeitshöhe hinreichend groß macht; 3. Über die Größe dieses Einflusses läßt sich experimentell unmittelbar ein Urteil gewinnen. Überdies kann man diesen Einfluß auch mathematisch mit guter Annäherung bestimmen. Es soll hier die Theorie der angegebenen Versuchsanordnung entwickelt werden.

### I. Theorie.

Für die Bewegung einer inkompressiblen, der Reibung unterworfenen Flüssigkeit gelten die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen:

$$\sigma \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + X,$$

$$\sigma \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + Y,$$

$$\sigma \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \eta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + Z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

hierin bedeuten  $x, y, z$  die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes innerhalb der Flüssigkeit;  $u, v, w$  die zur Zeit  $t$  in diesem Punkte vorhandenen Geschwindigkeitskomponenten nach den Koordinaten;  $X, Y, Z$

die Komponenten der äußeren Kraft;  $p$  den Druck;  $\sigma$  die Dichte und  $\eta$  den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit. Als äußere Kraft soll nur die Schwere wirken, und die  $z$ -Achse sei vertikal nach unten gerichtet. Dann ist  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = \sigma g$ .

Für unendlich lange Zylinder lassen sich die vorstehenden Gleichungen völlig streng integrieren unter der Annahme, daß alle Flüssigkeitsteilchen sich in Kreisbögen bewegen, deren Mittelpunkte auf der Zylinderachse liegen und deren Ebenen senkrecht auf der Zylinderachse stehen und daß die Winkelgeschwindigkeit  $\varphi$  allein abhängt von der Entfernung  $\varrho$  von der Zylinderachse und von der Zeit  $t$ . Wählt man die Zylinderachse zur  $z$ -Achse, so hat man nach der gemachten Annahme in die hydrodynamischen Gleichungen einzuführen:  $u = -y\varphi$ ,  $v = x\varphi$ ,  $w = 0$ . Man erhält für  $\varphi$  die Differentialgleichung:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + \frac{3}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} - \frac{\sigma}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0;$$

außerdem hat  $\varphi$  noch die Grenzbedingungen zu erfüllen.

Bei Anwendung endlicher Zylinder wird die Flüssigkeit unterhalb des Zylinders in anderer Weise bewegt als die in gleicher Höhe mit ihm befindliche. Der untere Teil der Flüssigkeit wird den oberen in seiner Bewegung beeinflussen und dadurch auch auf die Schwingungen des Zylinders einwirken. Wenn man einen dünnwandigen Hohlzylinder ohne Boden benützt und die von der Flüssigkeit (innen und außen) benetzte Höhe nicht zu klein nimmt, so wird der Einfluß des Zylinderandes gering sein, und es wird genügen, ihn in folgender Weise zu berücksichtigen.<sup>1)</sup>

Die durch den unteren, in der Flüssigkeit befindlichen Rand des Zylinders gehende Horizontalebene sei  $xy$ -Ebene, die Achse des Zylinders  $z$ -Achse und zwar positiv nach unten. Die ganze Flüssigkeit werde durch eine Schar von Zylinderflächen, deren Achsen in die  $z$ -Achse fallen, in unendlich dünne Schichten zerlegt; für  $z < 0$  soll die Winkelgeschwindigkeit  $\varphi$  auf jeder dieser Schichten konstant sein, dagegen soll sie sich ändern für  $z > 0$ . Eine jede solche Schicht, soweit sie sich in gleicher Höhe mit dem Zylinder befindet, schwingt also wie ein starrer Körper um seine Achse. Man erhält die Bewegungsgleichung dieser Schicht nach dem Satz: Trägheitsmoment  $\times$  Winkelbeschleunigung = Drehmoment. Das Drehmoment wird hervorgerufen durch die Reibungskräfte, die sich in den vier Grenzflächen der Schicht entwickeln. Auf der inneren zylindrischen Grenzfläche der Schicht übt

1) Vgl. Die Theorie der schwingenden Scheiben: O. E. Meyer, Ann. d. Physik 32 (1887) S. 642.

die Reibung das Moment  $-\eta \cdot 2\pi H \rho^3 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$  aus, auf der äußeren  
 $+ \eta 2\pi H \left[ \rho^3 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^3 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) d\rho \right]$ , auf beiden Flächen zusammen also

$$+ 2\pi \eta H \left[ \rho^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + 3\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right] d\rho;$$

dabei bedeutet  $H$  die Höhe der Schicht, d. i. auch die Höhe, bis zu welcher der schwingende Zylinder von seinem unteren Rand aus von der Flüssigkeit benetzt wird. Auf der unteren Randfläche der betrachteten Schicht wird das Reibungsmoment  $2\pi \eta \rho^3 d\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0}$  erzeugt. Die Reibung, die die Schicht mit ihrer oberen Randfläche an der Luft erfährt, vernachlässigen wir. Die Bewegungsgleichung der Schicht wird danach:

$$\sigma 2\pi \rho d\rho H \rho^3 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2\pi \eta H \left( \rho^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + 3\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) d\rho + 2\pi \eta \rho^3 d\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0}$$

oder:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{3}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{H} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} - \frac{\sigma}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von (1) nur durch die additive Größe  $\frac{1}{H} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0}$  und geht in (1) über, wenn  $H$  unendlich groß wird.

Während für  $z < 0$  angenommen wurde, daß eine Übertragung von Bewegungsenergie durch innere Reibung nur in horizontaler Richtung stattfindet, wollen wir für  $z \geq 0$  in erster Annäherung annehmen, daß dies nur in vertikaler Richtung geschieht. Danach liefern die allg. hydrodynamischen Gl. für  $z > 0$  folgende Differentialgleichung für die Winkelgeschwindigkeit  $\varphi$ :

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\sigma}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

wobei aber trotzdem hier  $\varphi$  auch noch gemäß (2) von  $\rho$  abhängen soll.

Die Gleichungen (2) und (3) können integriert werden in der Form:

$$(4) \quad \begin{aligned} \text{für } z > 0 \quad \varphi &= M_{(z)} \cdot N_{(\rho)} e^{-m^2 t} \\ \text{für } z < 0 \quad \varphi &= M_{(0)} \cdot N_{(\rho)} e^{-m^2 t}, \end{aligned}$$

wo  $m$  eine Konstante ist. Diese Integrale genügen ersichtlich der notwendigen Bedingung, daß die Bewegung für  $z = 0$  stetig bleibt. Für die Funktionen  $M_{(z)}$  und  $N_{(\rho)}$  liefern (3) und (2) die gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$(5) \quad \frac{d^2 M}{dz^2} + p^2 M = 0$$

$$(6) \quad \frac{d^2 N}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{dN}{d\rho} + q^2 N = 0,$$

wenn zur Abkürzung

$$(7) \quad p^2 = \frac{\sigma}{\eta} m^2, \quad q^2 = \frac{\sigma}{\eta} m^2 + \frac{1}{H} \left( \frac{1}{M} \frac{dM}{dz} \right)_{z=0}$$

gesetzt wird.

Gl. (5) hat das allgemeine Integral

$$(8) \quad M_{(z)} = A \cos pz + B \sin pz,$$

wo  $A$  und  $B$  willkürliche Konstanten sind. Nennt man die Entfernung zwischen dem Zylinderrand und dem Boden des Gefäßes, das die Versuchsflüssigkeit enthält,  $c$  und nimmt an, daß die Flüssigkeit an diesem Boden haftet, so muß, für  $z = c$ ,  $\varphi$  bei jedem Wert von  $\varrho$  und  $t$  verschwinden, d. h. es muß sein

$$(9) \quad A \cos pc + B \sin pc = 0.$$

Dadurch wird aus (8)

$$(10) \quad M_{(z)} = A \frac{\sin p(c-z)}{\sin pc}.$$

Mit Hilfe hiervon erhält man die zur Bestimmung der Konstanten  $q$  nötige Größe

$$(11) \quad \left( \frac{1}{M} \frac{dM}{dz} \right)_{z=0} = -p \cotg pc.$$

Um Gl. (6) zu integrieren, transformieren wir sie zunächst durch die Substitution:

$$(12) \quad N = \frac{L}{\varrho}, \quad q\varrho = r$$

auf:

$$(13) \quad \frac{d^2 L}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dL}{dr} + \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) L = 0,$$

d. i. eine Besselsche Differentialgleichung. Ihr allgemeines Integral ist

$$L = C J_{1(r)} + D Y_{1(r)}$$

wo  $J_1$  und  $Y_1$  die Besselschen Funktionen 1. Ordnung 1. und 2. Art sind,  $C$  und  $D$  Konstanten. Nach (12) erhält man also:

$$(14) \quad N_{(\varrho)} = \frac{C J_{1(q\varrho)} + D Y_{1(q\varrho)}}{\varrho}.$$

Für das Innere des schwingenden Zylinders muß  $D = 0$  gesetzt werden, weil sonst die Bewegung für  $\varrho = 0$  unstetig würde. Im übrigen können die Konstanten für das Innere und Äußere des Zylinders zunächst willkürlich gewählt werden. Bezeichnet man den inneren Radius des

Zylinders mit  $R_1$ , den äußeren mit  $R_2$ , so erhält man für die Größe  $\varphi$  aus (4), (10), (14) folgende Übersicht:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } z < 0 \\ \text{für } z > 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varrho < R_1 : \varphi = \varphi_1 = A \cdot C_1 \frac{J_1(\varrho \varrho)}{\varrho} e^{-m^2 z} \\ \varrho > R_2 : \varphi = \varphi_2 = A \cdot \frac{C_2 \cdot J_1(\varrho \varrho) + D_2 Y_1(\varrho \varrho)}{\varrho} e^{-m^2 z} \\ \varrho < R_1 : \varphi = \Phi_1 = \varphi_1 \cdot \frac{\sin p(c-z)}{\sin pc} \\ \varrho > R_2 : \varphi = \Phi_2 = \varphi_2 \cdot \frac{\sin p(c-z)}{\sin pc} \end{array} \right.$$

Zur Bestimmung der hier auftretenden Konstanten sind die Grenzbedingungen heranzuziehen. Nimmt man durchweg an, daß die Flüssigkeit an festen Körpern nicht gleitet, so muß sein:

$$(16) \quad (\varphi_1)_{\varrho=R_1} = (\varphi_2)_{\varrho=R_2} \quad \text{und} \quad (\varphi_2)_{\varrho=R} = 0,$$

wenn  $R$  der Radius des zylindrischen Gefäßes ist, in dem der Versuch stattfindet. Aus (16) folgt mit Rücksicht auf (15) sofort, daß auch

$$(17) \quad (\Phi_1)_{\varrho=R_1} = (\Phi_2)_{\varrho=R_2} \quad \text{und} \quad (\Phi_2)_{\varrho=R} = 0$$

ist. Nach der ersten dieser Gleichungen muß man wohl annehmen, daß für die Flüssigkeit unter dem Zylinderrand gilt:

$$(18) \quad z > 0, \quad R_1 < \varrho < R_2 : \varphi = \varphi_3 = (\Phi_1)_{\varrho=R_1} = (\Phi_2)_{\varrho=R_2}.$$

Dies wird dadurch gerechtfertigt, daß  $R_1$  und  $R_2$  sehr wenig von einander verschieden angenommen werden. Bezeichnet  $C_0$  eine neue Konstante, so gehen (15) und (18) infolge von (16) über in:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} z < 0 \\ z > 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varrho < R_1 : \varphi_1 = C_0 \frac{R_1}{\varrho} \cdot \frac{J_1(\varrho \varrho)}{J_1(\varrho R_1)} e^{-m^2 z} \\ \varrho > R_2 : \varphi_2 = C_0 \frac{R_2}{\varrho} \cdot \frac{Y_1(\varrho R) \cdot J_1(\varrho \varrho) - J_1(\varrho R) \cdot Y_1(\varrho \varrho)}{Y_1(\varrho R) \cdot J_1(\varrho R_2) - J_1(\varrho R) \cdot Y_1(\varrho R_2)} e^{-m^2 z} \\ \varrho < R_1 : \Phi_1 = \varphi_1 \frac{\sin p(c-z)}{\sin pc} \\ \varrho > R_2 : \Phi_2 = \varphi_2 \frac{\sin p(c-z)}{\sin pc} \\ R_1 < \varrho < R_2 : \varphi_3 = (\Phi_1)_{\varrho=R_1} = (\Phi_2)_{\varrho=R_2} \end{array} \right.$$

Es handelt sich jetzt noch um die Bestimmung der Konstanten  $C_0$  und  $m$ . Zu diesem Zweck muß die Bewegung der Flüssigkeit verknüpft werden mit der des schwingenden Zylinders. Bezeichnet man mit  $w$  den Winkel, um den der Zylinder zur Zeit  $t$  aus der Ruhelage abgelenkt ist, mit  $K$  das Trägheitsmoment des schwingenden Systems, mit  $\tau$  das während des Versuchs herrschende Torsionsmoment der Aufhängung, mit  $W_F$  das



Moment, das die Reibung der Flüssigkeit auf den Zylinder ausübt, mit  $W_L$  das Moment des Widerstandes der Luft und der Aufhängung, so wird die Bewegungsgleichung des Zylinders:

$$(20) \quad K \frac{d^2 w}{dt^2} = -\tau w + W_F + W_L.$$

Da die Flüssigkeit an dem Zylinder haften soll, so ist

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dt} = (\varphi_1)_{\varrho=R_1} = (\varphi_2)_{\varrho=R_2} = (\varphi_3)_{z=0} = C_0 e^{-m^2 t} \\ \text{und folglich} \\ w = -C_0 \frac{e^{-m^2 t}}{m^2}, \quad \frac{d^2 w}{dt^2} = -m^2 C_0 e^{-m^2 t}. \end{array} \right.$$

Da  $W_L$  gegenüber der viel größeren Flüssigkeitsreibung nur die Bedeutung einer Korrektur hat, und es sich außerdem nur um langsame Schwingungen handelt, so kann man  $W_L$  proportional der Winkelgeschwindigkeit des Zylinders setzen:

$$(22) \quad W_L = -k \frac{dw}{dt}.$$

Die Konstante  $k$  muß experimentell bestimmt werden. Die Größe  $W_F$  wird:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_F = 2\pi\eta \cdot \left\{ -\int_0^H \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho}\right)_{R_1} R_1^3 dh + \int_0^H \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho}\right)_{R_2} R_2^3 dh + \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right)_0 \varrho^3 d\varrho \right\} \\ = 2\pi\eta \left\{ -R_1^3 H \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho}\right)_{R_1} + R_2^3 H \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho}\right)_{R_2} + \frac{R_1^4}{4} - \frac{R_2^4}{4} \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right)_0 \right\}. \end{array} \right.$$

Bildet man nach (19) die Differentialquotienten  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho}$ ,  $\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho}$ ,  $\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}$  und benützt die Beziehungen<sup>1)</sup>:

$$\frac{dJ_{1(q\varrho)}}{d\varrho} = qJ_{0(q\varrho)} - \frac{1}{\varrho} J_{1(q\varrho)}$$

$$\frac{dY_{1(q\varrho)}}{d\varrho} = qY_{0(q\varrho)} - \frac{1}{\varrho} Y_{1(q\varrho)},$$

wobei  $J_0$  und  $Y_0$  die Besselschen Funktionen 1. und 2. Art von der Ordnung 0 sind, so folgt:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho}\right)_{R_1} = C_0 e^{-m^2 t} \cdot \left[ q \frac{J_{0(qR_1)}}{J_{1(qR_1)}} - \frac{2}{R_1} \right], \\ \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho}\right)_{R_2} = C_0 e^{-m^2 t} \left[ q \frac{Y_{1(qR)} \cdot J_{0(qR_2)} - J_{1(qR)} \cdot Y_{0(qR_2)}}{Y_{1(qR)} \cdot J_{1(qR_2)} - J_{1(qR)} \cdot Y_{1(qR_2)}} - \frac{2}{R_2} \right] \\ \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right)_0 = -C_0 e^{-m^2 t} \cdot p \cotg pc. \end{array} \right.$$

1) Siehe: Gray & Mathews, A treatise on Bessel functions, S. 13 ff. P. Schafheitlin, Die Theorie der Besselschen Fkt., Leipzig u. Berlin 1908, S. 16.

Mit Hilfe von (21), (22), (23), (24) läßt sich (20) überführen in:

$$(25) \left\{ \begin{aligned} & K \cdot m^4 - 2 \pi \eta \left\{ R_1^2 H \left[ q \frac{J_0(q R_1)}{J_1(q R_1)} - \frac{2}{R_1} \right] - R_2^2 H \left[ q \frac{Y_1(q R) J_0(q R_2) - J_1(q R) Y_0(q R_2)}{Y_1(q R) J_1(q R_2) - J_1(q R) Y_1(q R_2)} \right] \right. \\ & \left. + \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} p \cotg p c \right\} m^2 - k m^2 + \tau = 0. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung enthält die Konstante  $C_0$  nicht; zur Bestimmung von  $C_0$  müßte ein bestimmter Bewegungszustand für eine bestimmte Zeit gegeben sein. Darauf soll indessen verzichtet werden, weil die mathematische Durchführung erhebliche Schwierigkeiten bietet und andererseits keine praktische Bedeutung hat. Es sei also angenommen, daß zur Zeit der Beobachtung der Einfluß des ursprünglichen Bewegungszustandes auf die Schwingungen des Zylinders unmerklich geworden ist. Dies muß durch die Konstanz des Dekrements in die Erscheinung treten. Es kommt jetzt alles an auf die weitere Behandlung der Gleichung (25).

Gleichung (25) nach  $m$  allgemein aufzulösen ist unmöglich, da  $m$  nicht nur explizite und algebraisch, sondern auch implizite in  $p$  und  $q$  und damit in den Transzendenten  $J_0, J_1, Y_0, Y_1, \cotg$  auftritt. Welcher Art die Lösungen sind, läßt sich auch nicht einfach feststellen. Nun zeigt aber die Erfahrung, daß der Zylinder gedämpfte Schwingungen ausführt. Solche werden aber durch unseren Ansatz (21) nur dann dargestellt, wenn  $m^2$ , also auch  $m$  komplex ist. Wir setzen daher:

$$(26) \quad m = a + bi,$$

wo  $a$  und  $b$  reelle Konstanten sein sollen. Dann ergibt (21), daß  $a$  und  $b$  mit der Schwingungsdauer  $T$  und dem logarithmischen Dekrement  $\lambda$  der Schwingungen (Hin- und Hergang) des Zylinders durch die Gleichungen:

$$(27) \quad a^2 - b^2 = \frac{\lambda}{T}, \quad ab = \frac{\pi}{T}$$

verbunden sind. Löst man diese nach  $a$  und  $b$  auf, so folgt:

$$(28) \quad a = \sqrt{\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\pi^2}}{2T}}, \quad b = \frac{\pi}{T \cdot a}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel sei positiv gewählt. Wenn  $\lambda$  klein und  $T$  groß ist, wird in guter Annäherung

$$(29) \quad a = b = \sqrt{\frac{\pi}{T}}$$

Die Konstante  $p$  wird nach (7) und (26):

$$p = m \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} = (a + bi) \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}},$$

wo wieder der positive Wurzelwert gelten soll.

Ferner wird

$$\cotg pc = i \frac{e^{ipc} + e^{-ipc}}{e^{ipc} - e^{-ipc}} = -i \frac{1 + e^{2ipc}}{1 - e^{2ipc}} = -i \frac{1 + e^{-2bc\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} e^{2ac\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} i}}}{1 - e^{-2bc\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} e^{2ac\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} i}}.$$

Setzt man  $c$  so groß voraus, daß  $e^{-2bc\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}}$ , d. i. nahezu  $e^{-2c\sqrt{\frac{\pi\sigma}{T\eta}}}$ , gegen 1 vernachlässigt werden darf, so wird

$$(30) \quad \cotg pc = -i$$

und deshalb nach (7) und (11):

$$q^2 = p^2 + \frac{1}{H} pi.$$

Hieraus folgt weiter

$$(31) \quad q = p + \frac{i}{2H};$$

dabei wurden die Glieder von der Größenordnung  $\frac{1}{8p^2 H^2}$  gegen 1 vernachlässigt.

Die Besselschen Funktionen, von denen in (25) die 0<sup>ter</sup> und 1<sup>ter</sup> Ordnung vorkommen, sind in Form von Reihen darstellbar, die nach steigenden Potenzen des Arguments fortschreiten. Für die Werte des Arguments, die den beabsichtigten Versuchen entsprechen, konvergieren diese Reihen sehr langsam und sind deshalb für die Rechnung sehr unbequem. Wir benützen deshalb die für diesen Fall recht vorteilhaften halbkonvergenten Entwicklungen<sup>1)</sup>:

$$(32) \quad \begin{cases} J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left[ S_n(x) e^{ix - \frac{2n+1}{4}\pi i} + T_n(x) e^{-ix + \frac{2n+1}{4}\pi i} \right] \\ Y_n(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi x}} \left[ S_n(x) e^{ix - \frac{2n+1}{4}\pi i} - T_n(x) e^{-ix + \frac{2n+1}{4}\pi i} \right]. \end{cases}$$

Dabei sind  $J_n(x)$ ,  $Y_n(x)$  die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art von der Ordnung  $n$ , und es ist:

$$(33) \quad \begin{cases} S_n(x) = P_n(x) + i Q_n(x); & i = \sqrt{-1}; \\ T_n(x) = P_n(x) - i Q_n(x); \\ P_n(x) = 1 - \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{2!(8x)^2} + \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)(4n^2-49)}{4!(8x)^4} - \dots \\ Q_n(x) = \frac{4n^2-1}{8x} - \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)}{3!(8x)^3} + \dots \end{cases}$$

1) Siehe: Hankel, Die Zylinderfunktionen erster und zweiter Art. Math. Annalen 1 (1869), S. 494. — P. Schafheitlin, Die Theorie der Besselschen Funktionen, Leipzig und Berlin 1908, S. 48.

Die unendlichen Reihen  $P$  und  $Q$  sind tatsächlich divergent, aber „jede von diesen hat den Charakter, daß, wenn man die Reihe an irgend einer Stelle abbricht, ihr Wert von dem komplexen Werte, den sie darstellen soll, nur um eine Größe abweicht, deren Modul kleiner ist, als das nächstfolgende Glied.“<sup>1)</sup> — (32) setzt voraus, daß  $n$  und  $x$  reelle positive Teile haben. Dies trifft für unsere Anwendungen zu infolge der vorhin gemachten Festsetzung, daß für  $a$  und  $\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$  die positiven Werte gelten sollen.

Mit Benützung von (32) werden die in (25) auftretenden Größen:

$$(34) \left\{ \begin{aligned} B_1 &= \frac{J_{0(qR_1)}}{J_{1(qR_1)}} = -i \frac{T_{0(qR_1)}}{T_{1(qR_1)}} \cdot \frac{1 + \frac{S_{0(qR_1)}}{T_{0(qR_1)}} e^{2iqR_1 - \frac{\pi}{2}i}}{1 + \frac{S_{1(qR_1)}}{T_{1(qR_1)}} e^{2iqR_1 - \frac{3\pi}{2}i}} \\ B_2 &= \frac{Y_{1(qR)} J_{0(qR_2)} - J_{1(qR)} Y_{0(qR_2)}}{Y_{1(qR)} J_{1(qR_2)} - J_{1(qR)} Y_{1(qR_2)}} = i \frac{S_{0(qR_2)}}{S_{1(qR_2)}} \cdot \frac{1 - \frac{S_{1(qR)} \cdot T_{0(qR_2)}}{T_{1(qR)} \cdot S_{0(qR_2)}} e^{2iq(R-R_2) + \pi i}}{1 - \frac{S_{1(qR)} \cdot T_{1(qR_2)}}{T_{1(qR)} \cdot S_{1(qR_2)}} e^{2iq(R-R_2)}} \end{aligned} \right.$$

Es sei jetzt  $R_1$  und  $(R - R_2)$  so groß vorausgesetzt, daß man die absoluten Beträge von  $e^{2iqR_1}$  und  $e^{2iq(R-R_2)}$ , d. h. die Größen  $e^{-2\left(b\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} + \frac{1}{2H}\right)R_1}$  und  $e^{-2\left(b\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} + \frac{1}{2H}\right)(R-R_2)}$ , gegen 1 vernachlässigen kann. Dann folgt aus (34) angenähert:

$$B_1 = -i \frac{T_{0(qR_1)}}{T_{1(qR_1)}} = -i \frac{1 + \frac{i}{8qR_1} - \frac{9}{2!(8qR_1)^2} + \dots}{1 - \frac{3i}{8qR_1} + \frac{3 \cdot 5}{2!(8qR_1)^2} + \dots}$$

$$B_2 = i \frac{S_{0(qR_2)}}{S_{1(qR_2)}} = i \frac{1 - \frac{i}{8qR_2} - \frac{9}{2!(8qR_2)^2} + \dots}{1 + \frac{3i}{8qR_2} + \frac{3 \cdot 5}{2!(8qR_2)^2} + \dots}$$

Kann man weiterhin wieder  $\frac{3 \cdot 5}{2(8qR_1)^2}$  und  $\frac{3 \cdot 5}{2(8qR_2)^2}$  gegen 1 vernachlässigen, so wird angenähert

$$(35) \quad B_1 = -i + \frac{1}{2qR_1}, \quad B_2 = i + \frac{1}{2qR_2}.$$

Mit Benützung dieser Näherungswerte wird aus Gl. (25):

$$(36) \quad K \cdot m^4 + 2\pi\eta \left\{ H(R_2^3 + R_1^3)q \cdot i + \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} pi - \frac{3}{2} H(R_2^2 - R_1^2) \right\} m^3 - km^2 + \tau = 0.$$

1) H. Hankel, Math. Ann. 1 (1869), S. 495.

Führt man in diese Gleichung die Werte für  $m, p, q$  ein, indem man dabei Rücksicht auf (28) nimmt, zerlegt dann das Gleichungspolynom in seinen reellen und seinen imaginären Bestandteil, setzt jeden, wie es sein muß, für sich Null, so erhält man zwei Gleichungen, von denen die eine, welche  $\tau$  nicht enthält, lautet:

$$(37) \quad \pi(R_1^3 + R_2^3 + 3H(R_2^2 - R_1^2))\eta + HV\sigma\left(R_1^3 + R_2^3 + \frac{R_2^4 - R_1^4}{4H}\right)(2\pi b - \lambda a)\sqrt{\eta} - \frac{2K\lambda}{T} + k = 0,$$

d. i. eine quadratische Gleichung für  $\sqrt{\eta}$ , deren Koeffizienten aus Beobachtungen gewonnen werden können. Sie liefert für  $\sqrt{\eta}$  einen positiven und einen negativen Wert; gemäß der oben gemachten Festsetzung ist nur der positive zulässig.

Die Vernachlässigungen, die bei Herleitung von (37) gemacht wurden, seien nochmals zusammengestellt:

1) Der Einfluß des ursprünglichen Bewegungszustandes muß zur Zeit der Beobachtung unmerklich sein; dies kann an der Konstanz des Dekrements erkannt werden;

2) Es wurden die Größen:

$$e^{-2bc\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}}, \quad e^{-2\left(b\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} + \frac{1}{2H}\right)R_1}, \quad e^{-2\left(b\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} + \frac{1}{2H}\right)(R - R_2)},$$

$$\frac{1}{8p^2H^2}, \quad \frac{15}{2 \cdot (8qR_1)^2}, \quad \frac{15}{2 \cdot (8qR_2)^2}$$

gegen 1 vernachlässigt.

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß die rechnerischen Vernachlässigungen unter 2) der Gleichung (25) noch nicht anhaften. Auch kann Gl. (25) auf dem eingeschlagenen Weg mit größerer Genauigkeit behandelt werden; man braucht nur mehr Glieder der auftretenden Reihenentwicklungen zu berücksichtigen. Für die meisten Fälle aber wird Gl. (37) vollkommen ausreichen.

Zur Bestimmung der Größe  $k$ , die in (37) auftritt und den Einfluß der Luft- und Drahtreibung darstellt, beobachte man die Schwingungen des Apparats in Luft. Man kann auf diesen Fall die vorstehende Entwicklung anwenden, obgleich die Luft keine inkompressible Flüssigkeit ist (vgl. Ladenburg, Ann. d. Physik 27 (1908), S. 168). Bezeichnet man die auf die Luft bezüglichen Größen zur Unterscheidung von den entsprechenden auf die Versuchsflüssigkeit bezüglichen mit dem Index 0, so gilt für die Schwingungen in der Luft entsprechend der Gl. (37):

$$(37a) \quad \pi(R_1^3 + R_2^3 + 3H(R_2^2 - R_1^2))\eta_0 + HV\sigma_0\left(R_1^3 + R_2^3 + \frac{R_2^4 - R_1^4}{4H}\right)(2\pi b_0 - \lambda_0 a_0)\sqrt{\eta_0} - \frac{2K\lambda_0}{T_0} + k = 0.$$

Hieraus kann  $k$  berechnet werden, wenn man  $\sigma_0$  und  $\eta_0$  kennt.

Das eingangs erwähnte Verfahren zur Elimination des Einflusses der Zylinderenden läßt sich statt mit gefüllten Hohlzylindern, die Mar-gules im Auge hatte, auch mit dem hier betrachteten Hohlzylinder ohne Boden ausführen; man hat sogar dabei den kleinen Vorteil, daß sich der zu eliminierende Einfluß nicht so weit in der Flüssigkeit erstreckt. Es möge hier noch kurz die Theorie für diesen Fall angegeben werden. Der obere Teil der Flüssigkeit bis zu einem gewissen Abstand  $h$  vom unteren Zylinderrand bewegt sich nach der für unendlich lange Zylinder geltenden Gl. (1). Die Winkelgeschwindigkeit in diesem Gebiet wird also durch die beiden ersten Gl. (19) gegeben, wenn man dort überall  $p$  an die Stelle von  $q$  setzt. Die Bewegungsgleichung des Zylinders wird (vgl. (20)):

$$(38) \quad K \frac{d^2 w}{dt^2} = -\tau w + 2\pi\eta \left\{ -R_1^3 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho} \right)_{R_1} + R_2^3 \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho} \right)_{R_2} \right\} (H-h) + E + W_L,$$

wo  $E$  den nicht streng faßbaren Einfluß des Zylinderrandes darstellt. Ändert man jetzt  $K$  in  $K_1$ ,  $\tau$  in  $\tau_1$ ,  $H$  in  $H_1$  so, daß Schwingungsdauer und Dämpfung ungeändert bleiben, so ist der störende Einfluß des Randes auch unverändert und die Bewegungsgleichung für den neuen Versuch ist:

$$(39) \quad K_1 \frac{d^2 w}{dt^2} = -\tau_1 w + 2\pi\eta \left\{ -R_1^3 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho} \right)_{R_1} + R_2^3 \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho} \right)_{R_2} \right\} (H_1 - h) \\ + 2\pi\eta_0 \left\{ -R_1^3 \left( \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial \varrho} \right)_{R_1} + R_2^3 \left( \frac{\partial \varphi_2^0}{\partial \varrho} \right)_{R_2} \right\} (H - H_1) + E + W_L,$$

wo die mit dem Index 0 versehenen Größen sich wieder auf die Luft beziehen.

Durch Subtraktion folgt aus (38) und (39):

$$(K - K_1) \frac{d^2 w}{dt^2} = -(\tau - \tau_1)w + 2\pi\eta \left\{ -R_1^3 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho} \right)_{R_1} + R_2^3 \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho} \right)_{R_2} \right\} (H - H_1) \\ - 2\pi\eta_0 \left\{ -R_1^3 \left( \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial \varrho} \right)_{R_1} + R_2^3 \left( \frac{\partial \varphi_2^0}{\partial \varrho} \right)_{R_2} \right\} (H - H_1)$$

und hieraus wieder die der Gleichung (25) entsprechende:

$$(40) \quad (K - K_1)m^4 - 2\pi\eta \left\{ R_1^3 \left[ p \cdot \frac{J_0(pR_1)}{J_1(pR_1)} - \frac{2}{R_1} \right] - R_2^3 \left[ p \cdot \frac{Y_1(pR)}{Y_1(pR)} \frac{J_0(pR_2)}{J_1(pR_2)} - J_1(pR) \cdot \frac{Y_0(pR_2)}{Y_1(pR_2)} - \frac{2}{R_2} \right] \right\} (H - H_1) \\ + 2\pi\eta_0 \left\{ R_1^3 \left[ p_0 \cdot \frac{J_0(p_0R_1)}{J_1(p_0R_1)} - \frac{2}{R_1} \right] - R_2^3 \left[ p_0 \cdot \frac{Y_1(p_0R)}{Y_1(p_0R)} \frac{J_0(p_0R_2)}{J_1(p_0R_2)} - J_1(p_0R) \cdot \frac{Y_0(p_0R_2)}{Y_1(p_0R_2)} - \frac{2}{R_2} \right] \right\} (H - H_1) \\ + (\tau - \tau_1) = 0.$$

Behandelt man diese Gleichung in der gleichen Weise wie (25), so erhält man die (37) entsprechende:

$$(41) \quad 3\pi(R_2^3 - R_1^3)(\eta - \eta_0) + (R_2^3 + R_1^3)(2\pi b - \lambda a)(\sqrt{\sigma}\eta - \sqrt{\sigma_0}\eta_0) \\ - 2 \cdot \frac{K - K_1}{H - H_1} \cdot \frac{\lambda}{T} = 0.$$

## II. Experimenteller Teil.

## 1. Der Apparat.

Zur Prüfung der vorstehenden Theorie und Bestimmung von Reibungskoeffizienten wurden Versuche mit zwei verschiedenen Zylindern angestellt. Dazu wurden gezogene Messingröhren ohne Naht von etwa 25 cm Länge genommen. Ihre Wandstärke wurde mit einem Taster zu 0,15 cm bestimmt. Zur Ermittlung der äußeren Durchmesser wurden die Zylinder in horizontale Lage gebracht und je ein Kokonfaden mit angehängten Gewichten darübergerlegt, die man in Wasser tauchen ließ, um pendelnde Bewegungen zu verhindern. Der Abstand der zu beiden Seiten eines jeden Zylinders herabhängenden Teile des Fadens wurde dann mit einem Horizontalkathetometer gemessen (vgl. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Physik (9. Aufl.), S. 86). So ergab sich als Mittel aus Messungen an verschiedenen Stellen:

für den kleinen Zylinder:  $R_1 = 3,342$  cm,  $R_2 = 3,492$  cm

„ „ großen „  $R_1 = 3,845$  cm,  $R_2 = 3,995$  cm.

Jeder Zylinder wurde an seinem oberen Ende mit einer starken eingeschraubten Messingplatte verschlossen. Damit beim Eintauchen des Zylinders mit seinem unteren offenen Ende in die Versuchsflüssigkeit der abgeschlossene Raum mit der freien Luft in Verbindung blieb, war die Deckplatte mit drei gleichen und um den Mittelpunkt gleichmäßig verteilten Löchern versehen. In der Mitte der Deckplatte und senkrecht zu ihr war ein Messingstäbchen von 1 cm Dicke und 17 cm Länge eingeschraubt. Damit es fest aufsaß, trug es unmittelbar über dem Gewinde einen Wulst. Das obere Ende des Stäbchens war durch geeignete Einsägungen zu einem Doppelhaken ausgestaltet. Damit wurde der Zylinder in folgender Weise *bifilar* aufgehängt. Ich benutzte den Torsionskopf, den sich Herr Prof. W. König für seine Untersuchungen mit schwingenden Kugeln hatte anfertigen lassen.<sup>1)</sup> Er gestattet, durch Änderung des oberen Fadenabstandes die Direktionskraft der Bifilaraufhängung bequem und innerhalb gewisser Grenzen beliebig zu ändern. Er war an dem oberen Ende eines vertikal gerichteten weiten, starkwandigen Glasrohrs angekittet. Dieses Glasrohr war an zwei Stellen, von denen die eine unmittelbar unter der Platte des Torsionskopfes lag, mittels Filzfassung in einen Holzrahmen festgeklemmt, der seinerseits in einer Ecke des Zimmers durch zwei Trag-

1) W. König, Habilitationsschrift, Leipzig 1887. — Ann. d. Phys. 32 (1887), S. 193. Beschreibung und Abbildung findet sich in diesen Arbeiten.

eisen an den Wänden gut befestigt war. Zur Aufhängung wurde Stahldraht von 0,26 mm Durchmesser benutzt. Er wurde zuerst durch einen elektrischen Strom schwach geglüht und einige Wochen mit geeigneter Belastung unifilar aufgehängt. Dann wurden die Enden des Drahtes unter Vermeidung einer erneuten Drillung an dem Torsionskopf befestigt, sodaß eine frei herabhängende Drahtschlinge entstand, wie es Herr Prof. W. König beschreibt. Unten lief der Draht um ein Röllchen von etwa 7 mm Durchmesser, das an seinem Umfang eine für den Draht gerade passende Rinne hatte. Das Röllchen saß fest auf einer 1 cm langen und 2 mm dicken Stahlachse, die zapfenartig an den beiden Seiten des Röllchens gleichweit herausragte. An diese Zapfen wurde der oben erwähnte Doppelhaken eingehängt. Das Röllchen füllte den Zwischenraum zwischen den beiden Backen des Doppelhakens gerade aus, und außerdem war das schwingende System verhältnismäßig schwer, sodaß das Röllchen sich ohne seitliche Verschiebungen um seine Achse drehen und dabei seinen Zweck erfüllen konnte, die beiden Fäden der Bifilaraufhängung gleichmäßig zu spannen.

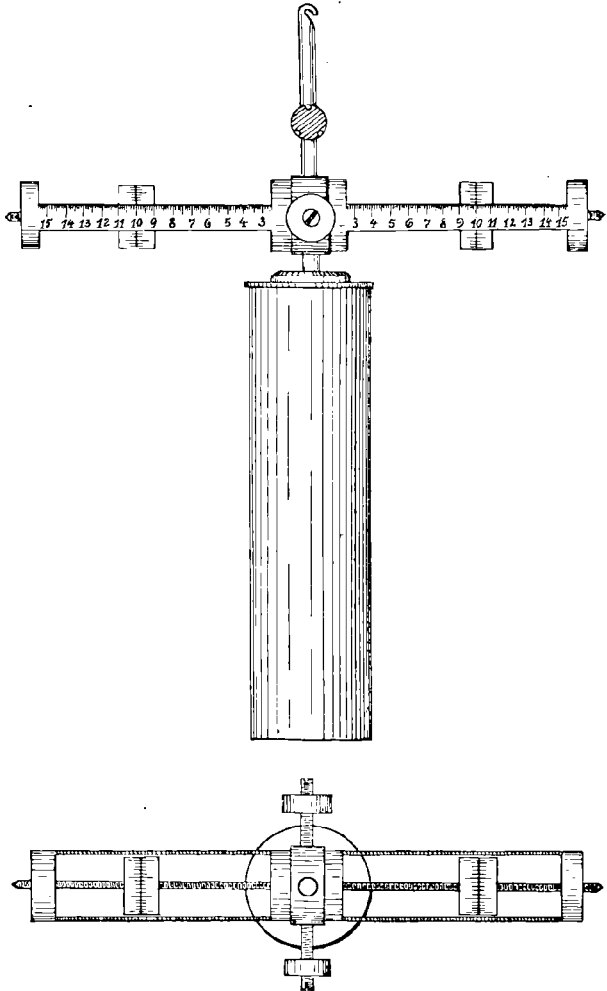
Um die Trägheit des schwingenden Systems zwischen gewissen Grenzen beliebig und meßbar regulieren zu können in ähnlich einfacher und bequemer Weise, wie dies der Königsche Torsionskopf für die Direktionskraft ermöglicht, wurde folgende Einrichtung getroffen. (Vgl. Fig.) Ein zylindrisches Messingstück von etwa 4 cm Durchmesser und 2,4 cm Höhe hatte in der Mitte senkrecht zu seiner Achse eine passende Bohrung, durch die das Aufhängestäbchen des Zylinders gerade hindurchging. In der Fortsetzung seiner Achse trug das Messingstück nach beiden Seiten je eine 17 cm lange starke Präzisionsschraubenspindel aus Stahl. Zum besseren Halt dieser Spindeln wurde an das mittlere Messingstück nach jeder Seite ein die Spindel konzentrisch umgebendes dünnwandiges Messingrohr von 17 cm Länge und 4 cm Weite angeschraubt und an dem freien Ende mit einer eingelöteten dünnen Messingplatte verschlossen, in die die Spindel mitten eingelassen wurde. Jede dieser Röhren war jedoch auf ihrer Ober- und Unterseite bis nahe an ihre Enden soweit ausgeschnitten, daß man an die Spindeln herankam. Auf jeder Spindel saß ein zylindrisches Messingstück von 2 cm Höhe und 4 cm Durchmesser, das längs seiner Achse ein passendes Muttergewinde zur Aufnahme der Spindel hatte. Durch Ein- und Ausschrauben dieser „Laufgewichte“ konnte das Trägheitsmoment geändert werden. Damit für jede Einstellung der Laufgewichte die Entfernung ihrer Mittelpunkte von der Drehachse des Systems leicht angegeben werden konnte, wurde zunächst auf dem vorderen stehengebliebenen



Streifen der stützenden Messingröhren ein Millimetermaßstab eingeritzt. Auf der zylindrischen Fläche der Laufgewichte waren möglichst in der Mitte eine rundumlaufende Markierungslinie und senkrecht zu dieser 100 Teilstriche leicht eingeritzt. Da die Ganghöhe der Leitspindeln 1 mm betrug, konnte sonach die Einstellung der Laufgewichte an dem Maßstab bis auf Hundertmillimeter

sofort abgelesen werden. Danach wurde die ganze Vorrichtung auf dem Schlitten einer Teilmaschine so befestigt, daß die Spindeln in der Verschiebungsrichtung des Schlittens standen und das für das Aufhängestäbchen bestimmte Loch des Mittelstücks senkrecht zum Schlitten. Dieses Loch wurde mit einem zylindrischen Eisenstäbchen gerade ausgefüllt, dessen obere Grundfläche auf der Drehbank abgedreht war und dadurch ihre Mittelecken ließ. Die Laufgewichte wurden auf bestimmte Teilstriche der Maßstäbe in möglichst gleicher (nicht zu kleiner) Ent-

fernung vom Mittelpunkt des Ganzen eingestellt. Darauf wurde der Schlitten der Teilmaschine verschoben und mittels Trommelablesung an der Mikrometerschraube nacheinander die Stellungen festgelegt, bei denen in einem an der Teilmaschine befestigten, senkrecht zum Schlitten und sonst geeignet eingestellten Mikroskop durch das Fadenkreuz gingen 1) die äußere, 2) die innere Randkante des einen Laufgewichts, 3) die auf dem



Eisenstäbchen erkennbare Mitte des Mittelstückes, 4) die innere, 5) die äußere Randkante des anderen Laufgewichts. Aus diesen Beobachtungen lassen sich die Entfernungen zwischen der Drehachse und den Mittelpunkten der Laufgewichte für jene bestimmte Einstellung ermitteln. Durch die gleichen Beobachtungen bei verschiedenen anderen Einstellungen der Laufgewichte ergab sich, daß die Ganghöhe der Leitspindeln von 1 mm nirgends merklich abwich. Danach ließ sich für jede Einstellung der Laufgewichte die Entfernung ihrer Mittelpunkte von der Drehachse leicht angeben. Es ist noch bemerkenswert, daß die eingeritzten Maßstäbe nicht exakt zu sein brauchten, weil sie nur zum Zählen der Umdrehungen der Laufgewichte dienten, und daß die Markierungslinien auf den Laufgewichten nicht gerade in der Mitte zu verlaufen brauchten. — Die Laufgewichte wurden auf ihre zylindrische Form dadurch geprüft, daß ihre Höhe an verschiedenen Stellen mit dem Sphärometer und verschiedene Durchmesser beider Grundflächen auf der Teilmaschine gemessen wurden. Die Abweichungen der verschiedenen Werte überschritten die Fehlergrenze nicht. Die Laufgewichte wurden als homogen angenommen, sodaß ihr Schwerpunkt in den Mittelpunkt fiel. Dann kam es, wie weiter unten ersichtlich wird, nur auf ihre Masse an; diese wurde auf der Wage zu  $231,670 \pm 5$  bzw.  $231,650 \pm 5$  g gefunden. Damit der Apparat nach außen stets die gleiche Form hatte und daher der Luftwiderstand in gleicher Weise wirkte, wurde nach jeder Einstellung der Laufgewichte über die stützenden Messingröhren je eine passende dünne Aluminiumhülse stets in die gleiche Lage geschoben.

Zur Befestigung der beschriebenen Vorrichtung zur Regulierung des Trägheitsmoments dienten zwei gleiche senkrecht zum Aufhängestäbchen und zu den Leitspindeln stehende Klemmschrauben. Diese ragten noch etwa 3 cm aus dem mittleren Trägerstück heraus und trugen kleine zylindrische Messingstücke, mit denen durch Ein- oder Ausschrauben etwaige geringe unsymmetrische Stoffverteilung nach dieser Richtung ausgeglichen werden konnte.

Für die Versuchsflüssigkeit war ein großes Becherglas von 27 cm Höhe und 17 cm Durchmesser bestimmt. Es stand koaxial mit dem Zylinder auf einer aus der Wand vorspringenden Steinplatte. Der untere Rand des Zylinders war 4 cm vom Boden des Gefäßes entfernt.

Um die Schwingungen des Zylinders vor Störungen durch Luftströmung zu schützen, schloß man den ganzen Apparat mit dem Gefäß, das die Versuchsflüssigkeit enthielt, in einen großen zylindrischen Kasten aus Pappe ein. In ein passendes Loch mitten im Deckel dieses Kastens war die den Torsionskopf tragende Glasröhre mit ihrem unteren Ende

eingesetzt. Eine große Türe an der Vorderseite des Kastens gestattete den Zugang zum Apparat.

Die Beobachtung der Schwingungen erfolgte mit Fernrohr, Skala und Spiegel. Letzterer war mittels zweier etwas federnder Messingblechgriffe auf das Aufhängestäbchen aufgesetzt. Der Pappkasten trug auf seiner Vorderseite in der Höhe des Spiegels ein kleines Glimmerfenster. Die Skala war 240 cm vom Spiegel entfernt. Da sie eben war, mußten die Ablesungen auf Bogen reduziert werden. Dabei wurde berücksichtigt, daß der Spiegel  $\frac{1}{2}$  cm von der Drehachse entfernt war.

## 2. Die Beobachtungen.

Vor den eigentlichen Beobachtungen wurde der Apparat sorgfältig zentriert. Zu diesem Zweck war an das untere Ende des Aufhängestäbchens, das für beide Zylinder benutzt wurde, noch unter dem Gewinde eine Spitze angebracht. Auf diese Spitze wurde, nachdem der Zylinder mit Deckplatte abgeschraubt war, ein Fernrohr eingestellt. Sie mußte ruhen während der Schwingungen des Apparats, wenn diese rein drehend waren. Der Zylinder mit Deckplatte konnte dann die Lage der Drehachse nicht beeinflussen. Die ursprünglichen Ablenkungen aus der Ruhelage wurden dadurch bewirkt, daß mit einem zu einer Spitze ausgezogenen Glasrohr auf die Vorrichtung zur Regulierung des Trägheitsmoments nahe an einem Ende im Sinne der Drehung geblasen wurde. Es genügte ein schwacher Luftstrom, da der Hebelarm groß war. Seitliche Pendelungen konnten dabei nicht merklich eintreten, da das schwingende System verhältnismäßig schwer war. Bei den Beobachtungen wurden die Umkehrpunkte abgelesen und mit Hilfe einer elektrisch getriebenen Sekundenuhr die Durchgangszeiten durch die Ruhelage bestimmt.

Zur Bestimmung von Schwingungsdauer und Dämpfung der in Luft ausgeführten Schwingungen wurden jedesmal mehrere Hundert Schwingungen benutzt, und zwar wurden bei jedem Versuch in nahe gleichen Zeitabständen 4 Beobachtungssätze mit je 6 Durchgangszeiten und Umkehrpunkten gemacht. Aus dem ersten und dritten, aus dem zweiten und vierten wurden Schwingungsdauer und Dekrement abgeleitet, dann die Mittel genommen (vgl. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Physik). Der Direktionskraft der Aufhängung wurden durch Änderung des oberen Fadenabstandes beim kleinen Zylinder drei, bei dem großen zwei verschiedene Werte gegeben. Jedesmal wurden bei unverändertem Fadenabstand zwei Versuche angestellt: der Schwerpunkt der Laufgewichte war das eine Mal 3 cm und das andere Mal 15 cm von der Drehachse entfernt. Je zwei so zusammengehörige Versuche, die einzeln auch zur Berechnung von  $k$  nach (37a) benutzt wurden, dienten in

folgender Weise zur Bestimmung des Trägheitsmoments.  $K_a$  sei das Trägheitsmoment des schwingenden Systems für den Fall, daß die Schwerpunkte der Laufgewichte von der Drehachse die Entfernung  $a$  haben. Dann ist nach einem bekannten Satz:

$$K_a = K_0 + m \cdot a^2,$$

wo  $m = 463,32$  g die Masse beider Laufgewichte zusammen ist und  $K_0$  das Trägheitsmoment für den gedachten Fall darstellt, daß die Schwerpunkte der Laufgewichte auf der Drehachse liegen. Für die beiden Fälle  $a = a_1$  und  $a = a_2$  ergeben sich die Schwingungsdauern:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{K_0 + ma_1^2}{\tau}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{K_0 + ma_2^2}{\tau}},$$

wenn  $\tau$  die in beiden Fällen gleiche Direktionskraft ist. Durch Elimination von  $\tau$  folgt:

$$K_0 = m \cdot \frac{T_1^2 \cdot a_2^2 - T_2^2 \cdot a_1^2}{T_2^2 - T_1^2}.$$

Ist hiernach  $K_0$  bestimmt, so kann man nach obiger Gleichung aus  $m$  und  $a$  das Trägheitsmoment für jede Einstellung der Laufgewichte berechnen.

Die Beobachtungen der Schwingungen in Luft mit den aus ihnen berechneten Werten von  $K_0$  seien hier zusammengestellt:

Tabelle I.

Nr.	Oberer Fadenabst. cm	$a$ cm	Temp.	Brigg. log. Dekr. der einfachen Schwingung sec	Dauer	$K_0$ cm <sup>2</sup> g
1. Kleiner Zylinder.						
1	0,5	3,0	12,8	0,0010667	18,801	739 29
2		15,0	12,5	0,0007451	28,398	
3	1,0	3,0	13,1	0,0009021	14,105	739 12
4		15,0	12,7	0,0005319	21,306	
5	1,5	3,0	13,4	0,0008522	12,112	739 05
6		15,0	13,2	0,0004712	18,296	
2. Großer Zylinder.						
7	0,5	3,0	12,9	0,0001104	18,895	787 79
8		15,0	13,1	0,0007714	28,067	
9	1,0	3,0	13,0	0,0009384	14,313	787 07
10		15,0	13,2	0,0005444	21,266	

Die Mittelwerte

$K_0 = 73915$  cm<sup>2</sup>g für den kleinen Zylinder

und

$K_0 = 78743$  cm<sup>2</sup>g „ „ großen „

wurden den weiteren Rechnungen zugrunde gelegt.

Die angegebene Temperatur ist die mittlere während des Versuchs in dem Pappkasten herrschende Temperatur der Luft. Das benützte Thermometer war in Fünftelgrade eingeteilt und mit einem von der Reichsanstalt geprüften verglichen. Bei späterer Wiederholung einzelner Versuche ergaben sich innerhalb der Fehlergrenzen die gleichen Werte für die Schwingungsdauer und das Dekrement.

Es wurden Versuche mit destilliertem Wasser angestellt. Das Wasser filtrierte ich vor den Versuchen, um es von Staubteilchen zu befreien; mit einer Wasserstrahlluftpumpe wurde die absorbierte Luft herausgesaugt. Dann wurde es mit einem Saugheber in das Becherglas eingefüllt und dabei besonders darauf geachtet, daß sich keine Luftbläschen an dem Zylinder bildeten. In den orientierenden Vorversuchen blieb einmal dasselbe Wasser mehrere Tage im Versuchsgefäß stehen; an jedem Tag wurde das Dekrement gemessen. Am 2. und 3. Tag stieg es merklich an und zwar mit wachsender Zeit rascher und erreichte am 4. Tag den 40fachen Betrag von dem am ersten. Der Grund für diese Erscheinung ist jedenfalls die Bildung einer besonders zähen Oberflächenschicht.<sup>1)</sup> Ob eine besondere Oberflächenzähigkeit sofort beim Entstehen der Oberfläche vorhanden ist, läßt sich so einfach nicht entscheiden. Aber ich habe mich durch wiederholte Versuche überzeugt, daß innerhalb der ersten drei Stunden nach Bildung der freien Oberfläche keine merkliche Änderung des Dekrements stattfindet. Damit man jedesmal unter denselben Bedingungen arbeitete, wurde das Wasser zu jedem Versuch in der angegebenen Weise behandelt und frisch eingefüllt; außerdem wurde spätestens eine halbe Stunde nach dem Einfüllen des Wassers mit den Ablesungen begonnen. Es wurde nämlich gewartet, bis die Temperatur sich ausgeglichen hatte und etwaige seitliche Bewegungen des Zylinders, die sich sehr viel rascher dämpfen als die drehenden, unmerklich geworden waren. Die Ablesungen wurden genau so vorgenommen wie bei den Versuchen in Luft. Es konnten etwa 40 Schwingungen beobachtet werden. Zur Ermittlung des log. Dekrements wurden zumeist der 1. und 21. Bogen, der 2. und 22. usw., kombiniert; aus den Ergebnissen wurde dann das Mittel genommen. Die Temperatur des Wassers wurde vor und nach jedem Versuch gemessen und stets gleich gefunden. Die Höhe  $H$ , bis zu der der Zylinder ins Wasser eintauchte, wurde mit einem Kathetometer gemessen. Dabei wurde das Gefäß mit einer Glühlampe kräftig beleuchtet. Diese Messung wurde stets *nach* den Versuchen vorgenommen. Die Beobachtungen seien hier wieder zusammengestellt:

1) K. Schütt, Ann. d. Physik (4) 13 (1909) S. 719.

Tabelle II.

Nr.	Oberer Fadenabst. cm	$a$ cm	Temp.	Brigg. log. Dekr. der einfachen Schwingung sec	Dauer	$H$ cm	$\eta$
				1. Kleiner Zylinder.		reduz. auf 12,0°	
1	0,5	3,0	12,0°	0,018080	19,219	19,87	0,01250
2	0,5	15,0	12,0	0,010488	28,879	20,83	1263
3	1,0	3,0	12,2	0,015659	14,714	19,58	1268
4	1,0	15,0	11,7	0,0086677	22,116	20,27	1258
5	1,5	3,0	11,7	0,014773	12,374	20,21	1247
6	1,5	15,0	11,8	0,0082473	18,606	20,75	1256
				2. Großer Zylinder.		reduz. auf 13,0°	
7	0,5	3,0	13,4	0,025847	19,343	20,89	0,01218
8	0,5	15,0	13,2	0,014370	28,648	20,48	0,01211
9	1,0	3,0	12,9	0,022472	14,787	20,58	1220
10	1,0	15,0	13,0	0,012256	21,811	20,01	1229.

Die in der letzten Spalte dieser Tabelle enthaltenen Reibungskoeffizienten wurden aus je zwei gleichnumerierte Versuchen der Tabellen I und II nach den Gleichungen (37) und (37a) berechnet. Dabei ist zu beachten, daß die in den Gleichungen auftretenden Größen  $T$  und  $\lambda$  bzw.  $T_0$  und  $\lambda_0$  die Dauer und das natürliche log. Dekrement der vollen Schwingung (Hin- und Hergang) darstellen. Diese Dekremente folgen aus den angeführten Briggsschen log. Dekrementen durch Multiplikation mit 4,605. Auf die Temperaturunterschiede der Luft wurde keine Rücksicht genommen; es wurde durchweg  $\sigma_0 = 0,0012$ ,  $\eta_0 = 0,00018$  gesetzt. Dies ist vollkommen unbedenklich, da die mit  $\sigma_0$  und  $\eta_0$  behafteten Glieder in (37a) nur einige Prozente des Wertes  $k$  ausmachen und überdies wieder die Größe  $k$  nur die Bedeutung einer Korrektur hat. Zur Reduktion auf die mittlere Temperatur 12° bzw. 13° wurde der Temperaturgang für  $\eta$  einer in Kohlrauschs prakt. Physik gegebenen Tabelle entnommen.

Die erhaltenen Reibungskoeffizienten stimmen untereinander recht gut überein. Da alle Bestimmungsstücke des Apparats geändert worden sind, so stellen die Versuche eine gute Bestätigung der Theorie, insbesondere der Gleichung (37) dar.

In der folgenden Tabelle mögen die mit den beiden Zylindern erhaltenen Mittelwerte für  $\eta$  verglichen werden mit den Ergebnissen anderer Methoden zur Bestimmung des Reibungskoeffizienten. Die Werte sind nötigenfalls auf die Temperatur 12° reduziert worden mit Hilfe der aus den

Poiseuilleschen Versuchen<sup>1)</sup> entnommenen Formel für den Temperaturgang:

$$\eta_t = \frac{\eta_0}{1 + 0,0336793t + 0,0002209936t^2}$$

Tabelle III.

Beobachter	Methode	Reibungskoeff. des Wassers bei 12°
Poiseuille <sup>1)</sup> (1846) . . .	Strömung durch Kapillaren	0,01239
Thorpe u. Rodger <sup>2)</sup> (1894)	Strömung durch Kapillaren	0,01228
W. König <sup>3)</sup> (1887) . . .	Schwingung einer Vollkugel	0,01265
R. Ladenburg <sup>4)</sup> (1908) .	Schwingung einer Hohlkugel	0,01242
K. Mützel <sup>5)</sup> (1891) . . .	Schwingung einer Hohl-scheibe	0,01244
K. Menges (1910) . . .	Schwingung eines Hohlzylinders	0,01257 0,01253

Die Übereinstimmung ist recht befriedigend, wenn auch hervorgehoben werden muß, daß alle durch Schwingungsbeobachtungen gefundenen Werte ein wenig höher liegen, als die durch Ausflußversuche gewonnenen.

Da man an dem Apparat Direktionskraft und Trägheitsmoment einzeln variieren konnte, so ließ sich mit ihm auch das Margulesse Verfahren zur Elimination der störenden Einflüsse durchführen. Es wurde zuerst bei der kleinen Wasserhöhe  $H_1$  und dem kleinen Trägheitsmoment  $K_1$  die Schwingungsdauer  $T$  und das Dekrement  $\lambda$  gemessen. Dann wurde Wasser aufgefüllt bis zur Höhe  $H$ . Damit nun, wie es in der Theorie vorausgesetzt wurde, Schwingungsdauer und Dekrement wieder die Werte  $T$  bzw.  $\lambda$  erhielten, mußte das Trägheitsmoment und gleichzeitig entsprechend die Direktionskraft bis zu einem bestimmten Betrag vergrößert werden. Der so zu ermittelnde Wert des Trägheitsmoments ist die in Gl. (41) auftretende, also für die Rechnung nötige Größe  $K$ . Da es zu langwierig gewesen wäre, die *genau* richtige Einstellung der Laufgewichte und des oberen Fadenabstands durch fortgesetztes Probieren ausfindig zu machen, wurde nacheinander bei 4 verschiedenen Einstellungen beobachtet, die von der genauen nur wenig abwichen.

1) Poiseuille, Mem. de l'Inst. 9 (1846); Compt. rend. 15 (1842).

2) Thorpe u. Rodger, Phil. Trans. 185 (1894).

3) W. König, Habilitationsschrift, Leipzig 1887; Ann. d. Physik 32 (1887).

4) R. Ladenburg, Ann. d. Physik 27 (1908).

5) K. Mützel, Ann. d. Physik 43 (1891).

$K_i, T_i, \lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) seien die zusammengehörigen Werte des Trägheitsmoments, der Schwingungsdauer und des Dekrements bei einem dieser 4 Versuche; es gruppieren sich also die Werte  $K_i$  eng um den gesuchten Wert  $K$  und die Werte  $T_i, \lambda_i$  um die bekannten Werte  $T$  bzw.  $\lambda$ . Vernachlässigt man nun in Gl. (37), deren Gültigkeit durch die obigen Versuche bewiesen ist, das erste Glied und das Glied  $k$ , welche beide nur eine untergeordnete Rolle spielen, und setzt ferner für  $a$  und  $b$  die Näherungswerte  $\sqrt{\frac{\pi}{T}}$ , so erkennt man, daß die Größe: Trägheitsmoment mal log. Dekrement dividiert durch die Wurzel aus der Schwingungsdauer bei unveränderter Wasserhöhe nahezu konstant bleiben muß. In unserem Falle muß also sein:  $\frac{K \cdot \lambda}{\sqrt{T}} = \frac{K_i \cdot \lambda_i}{\sqrt{T_i}}$ . Aus den 4 Versuchen erhält man 4 Werte  $\frac{K_i \lambda_i}{\sqrt{T_i}}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), die gleich sein müßten, aber infolge von Beobachtungsfehlern ein wenig verschieden sind. Man bilde den Mittelwert  $M$  und hat dann  $K = \frac{M \cdot \sqrt{T}}{\lambda}$ . Ein irgendwie erheblicher Fehler ist dabei nicht möglich, da die beobachteten Größen in den 4 Versuchen nur wenig voneinander abweichen und es sich nur um eine Interpolation handelt. —

Es wurde Sorge getragen, daß die Temperatur des Wassers stets dieselbe war. Die Flasche, die das Wasser enthielt, stand in dem Pappkasten. Die Wasserhöhen  $H$  und  $H_1$  wurden auch hier erst nach den entsprechenden Beobachtungen gemessen. Der Reibungskoeffizient wurde aus den Versuchsergebnissen nach Gleichung (41) berechnet. Die Zahlen mögen hier zusammengestellt werden:

Tabelle IV.

Wasserhöhe cm	$a$ cm	Temp.	Brigg. log. Dekr. der einfachen Schwingung	Dauer der einfachen Schwingung	$\eta$
1. Kleiner Zylinder.					
$H_1 = 8,78$	3,00	12,0	0,0088402	18,945	0,01254
$H = 18,82$	13,0		0,0088860	18,878	
	13,0		0,008913	19,001	
	13,2		0,008732	18,839	
	13,2	0,008766	18,985		
2. Großer Zylinder.					
$H_1 = 10,03$	3,0	12,9	0,013720	19,155	0,01224.
$H = 19,26$	12,3		0,013663	18,917	
	12,3		0,013983	19,731	
	12,6		0,013404	19,118	
	12,6		0,013717	19,951	



Von den so erhaltenen Werten für den Reibungskoeffizienten des Wassers stimmt der eine mit den auf andere Art berechneten Werten vollkommen überein; der zweite ist ein klein wenig niedriger ausgefallen.

### Schluß.

1. Es wurde die Theorie eines in einer zähen Flüssigkeit um seine Achse schwingenden dünnwandigen Hohlzylinders aus den hydrodynamischen Grundgleichungen entwickelt und dabei der Einfluß des Zylinderandes angenähert berücksichtigt.

2. Die Theorie wurde durch Versuche mit Wasser geprüft und bestätigt (Tabelle II).

3. Es wurden Versuche mit Wasser nach dem von Margules vorgeschlagenen Kombinationsverfahren angestellt (Tabelle IV).

4. Die aus den beiden Arten von Versuchen berechneten Reibungskoeffizienten des Wassers stimmen mit den nach anderen Methoden gefundenen Werten überein (Tabelle III).

Die Verwendung von Zylindern von der benutzten Form zu Schwingungsversuchen in zähen Flüssigkeiten gewährt den besonderen Vorteil, daß die mathematische Theorie für den weitaus wesentlichsten Teil der Flüssigkeit streng durchgeführt werden kann. Das Margules'sche Verfahren der Kombination zweier Versuche mit einem schwingenden Zylinder ist sogar theoretisch vollkommen streng und in dieser Hinsicht der Durchflußmethode an die Seite zu stellen. Die eingangs erwähnten Versuche mit schwingenden Scheiben, Hohl-scheiben, Kugeln, Hohlkugeln, die bisher allein vorlagen, leiden dagegen alle an dem Übelstand, daß kein einziger Teil der Flüssigkeitsbewegung mit den strengen Grundgleichungen in Beziehung gesetzt werden kann, da von vornherein die Glieder  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  usw. vernachlässigt werden müssen. Diese Vernachlässigung erscheint nur deshalb als gerechtfertigt, weil die Ergebnisse der Versuche untereinander und auch mit den Ergebnissen der Durchflußversuche übereinstimmen, die ihrerseits theoretisch streng behandelt werden können. Die vorliegenden Versuche mit schwingenden Zylindern schließen aber jetzt eine unmittelbarere Rechtfertigung für diese Vernachlässigung in sich, weil sie zu denselben Werten des Reibungskoeffizienten führen wie die Versuche mit den anders geformten schwingenden Rotationskörpern.

Als praktisches Verfahren zur Bestimmung der inneren Reibung können die Versuche mit schwingenden Zylindern sich ebenso wenig mit den Durchflußversuchen messen wie die anderen Schwingungsversuche: sie sind nicht so bequem und rasch auszuführen, bedeutend

136 Techn. Anwendungen eines allgemeinen Satzes über erzwungene Schwingungen.  
umständlicher zu berechnen und erfordern viel größere Flüssigkeitsmengen.

Die vorliegende Arbeit ist erwachsen aus einer andern, in der ich eine von der philosophischen Fakultät in Gießen gestellte Preisaufgabe behandelte und die von der Fakultät am 1. Juli 1909 mit dem akademischen Preis gekrönt wurde. Die Versuche wurden im physikalischen Institut der Universität Gießen ausgeführt unter der Leitung von Herrn Professor Dr. W. König, dem ich für vielfache Förderung und Unterstützung auch hier meinen besten Dank ausspreche.

## Technische Anwendungen eines allgemeinen Satzes über erzwungene Schwingungen.

Von R. MALMSTRÖM in Helsingfors, Finnland.

Es sei gegeben ein System, welches um eine Gleichgewichtslage ungedämpfte Schwingungen beschreiben kann. Wenn auf eine Koordinate dieses Systems eine harmonische äußere Kraft wirkt, deren Periode gleich ist einer der Eigenschwingungsperioden des Systems bei Konstanthaltung derselben Koordinate, so wird die erzwungene Schwingung dieser Koordinate = 0.<sup>1)</sup>

Die Richtigkeit des Satzes kann man sich ohne Beweis folgendermaßen klar machen. Wenn bei Festhaltung einer Koordinate das System in Schwingungen versetzt wird, so ist zur Festhaltung dieser Koordinate eine Kraft nötig, welche die durch die Schwingungen hervorgerufenen inneren Kräfte aufhebt. Wenn umgekehrt auf dieselbe Koordinate eine äußere harmonische Kraft wirkt, deren Frequenz mit einer dieser Eigenschwingungen übereinstimmt, so wird die Kraft durch die inneren Kräfte des Systems aufgehoben, und die erzwungene Schwingung der Koordinate wird = 0.

Zu diesem Satze sollen jetzt einige Beispiele, betreffend Torsionsschwingungen in Maschinenwellen, gegeben werden.

*Erstes Beispiel.* Ein elektrischer Generator werde von einer Dampfmaschine oder einem Gasmotor getrieben. Zur Untersuchung der Schwingungen können wir ganz von der gleichförmigen Rotationsbewegung absehen. Die auf die Kurbel wirkende Kraft nehmen wir als rein harmonisch an, vernachlässigen also die höheren Harmonischen. Schließlich

1) Dieser Satz ist ein Spezialfall eines noch allgemeineren Satzes, der bei Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper, Bd. II § 347, bewiesen ist.

sei noch in diesem Beispiel angenommen, daß der Generator sich so nahe der Kurbel befindet, daß beide zusammen als ein starres System betrachtet werden können. Um noch die Rechnungen zu vereinfachen und die Resultate deutlicher hervortreten zu lassen, vernachlässigen wir die Masse der Wellen. Es bezeichnen dann

- $K_1$  das Trägheitsmoment von Kurbel und Dynamoanker,
- $K_2$  „ „ „ des Schwungrades,
- $D_{12}$  das Torsionsmoment der Welle für den Winkel 1,
- $M \sin \nu t$  das Moment der äußeren Kraft, wo  $\nu$  ein Vielfaches der Winkelgeschwindigkeit ist,
- $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  die Winkelabweichungen von Kurbel (bzw. Generator) und Schwungrad.

Die Differentialgleichungen der Bewegung lauten

$$K_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + D_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) = M \sin \nu t,$$

$$K_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + D_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0.$$

Zur Ermittlung der erzwungenen Schwingungen schreiben wir

$$\varphi_1 = a_1 \sin \nu t, \quad \varphi_2 = a_2 \sin \nu t$$

und erhalten

$$a_1(D_{12} - K_1 \nu^2) + a_2 D_{12} = m$$

$$- a_1 D_{12} + a_2(D_{12} - K_2 \nu^2) = 0.$$

Die Amplituden der erzwungenen Schwingungen von  $K_1$  und  $K_2$  werden

$$a_1 = M \frac{D_{12} - K_2 \nu^2}{(D_{12} - K_1 \nu^2)(D_{12} - K_2 \nu^2) - D_{12}^2} = \frac{M}{K_1} \frac{\frac{D_{12}}{K_2} - \nu^2}{\nu^2 \left[ \nu^2 - D_{12} \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) \right]},$$

$$a_2 = M \frac{D_{12}}{(D_{12} - K_1 \nu^2)(D_{12} - K_2 \nu^2) - D_{12}^2} = \frac{M}{K_1} \frac{\frac{D_{12}}{K_2}}{\nu^2 \left[ \nu^2 - D_{12} \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) \right]}.$$

Schreiben wir jetzt

$$\frac{D_{12}}{K_1} = \nu_1^2 \quad \frac{D_{12}}{K_2} = \nu_2^2,$$

so sind  $\nu_1$  und  $\nu_2$  die Frequenzen der Eigenschwingungen des Systems bei Konstanthaltung von  $\varphi_2$  bzw.  $\varphi_1$ ;  $\sqrt{D_{12} \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)}$  ist wieder die Frequenz der Eigenschwingung, wenn  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  veränderlich sind. Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir

$$a_1 = \frac{M}{K_1} \frac{\nu_2^2 - \nu^2}{\nu^2 [\nu^2 - (\nu_1^2 + \nu_2^2)]} \quad a_2 = \frac{M}{K_1} \frac{\nu_2^2}{\nu^2 [\nu^2 - (\nu_1^2 + \nu_2^2)]}.$$

Wird nun die Welle und das Schwungrad so konstruiert, daß

$$\nu_2^2 = \nu^2$$

ist, so erhalten die Schwingungsamplituden folgende Werte:

$$a_1 = 0 \quad a_2 = -\frac{M}{K_1 \nu_1^2} = -\frac{M}{D_{12}}.$$

Um also den Ungleichförmigkeitsgrad = 0 zu machen, hat man bei Berechnung von Welle und Schwungrad folgendermaßen zu verfahren.  $a_2$  ist der Torsionswinkel der Welle. Macht man die Berechnung auf Deformation, so darf diese nicht größer sein als ein festgestellter Winkel. Die Welle wird dann berechnet nach der Formel

$$D_{12} = \frac{M}{a_2}.$$

[Auf das Minuszeichen kommt es nicht an. Es bedeutet nur, daß die Phase der Schwingung von  $K_2$  derjenigen der Kraft entgegengesetzt ist.]

Die Welle wird also nach der gewöhnlichen statischen Methode bestimmt, als ob an Stelle des Schwungrades eine Riemenscheibe sich befände. Selbstverständlich darf aber  $D_{12} > \frac{M}{a_2}$  gemacht werden.

Jetzt wird das Trägheitsmoment des Schwungrades so berechnet, daß

$$\frac{D_{12}}{K_2} = \nu^2, \quad K_2 = \frac{D_{12}}{\nu^2}$$

ist. Bei dieser Berechnung des Schwungrades wird die von der Periodizität der äußeren Kraft herrührende kinetische Energie ganz auf das Schwungrad übergeführt, während Kurbel und Dynamoanker sich gleichförmig drehen.

Hier sei aber gleich eine Bemerkung gemacht. Es hat den Anschein, als ob die Stärke der Welle und die Größe des Schwungrades keine Rolle spielen würde, wenn nur das Verhältnis  $\frac{D_{12}}{K_2} = \nu^2$  ist. Daß dies nicht der Fall ist, sieht man, wenn man den vollständigen Ausdruck für  $a_1$  betrachtet. Dieser kann geschrieben werden

$$a_1 = -\frac{m}{K_1 \nu^2} \frac{\frac{D_{12}}{K_2} - \nu^2}{\frac{D_{12}}{K_2} - \nu^2 + \frac{D_{12}}{K_1}} = -\frac{m}{K_1 \nu^2} \frac{1}{1 + \frac{\frac{D_{12}}{K_1}}{\frac{D_{12}}{K_2} - \nu^2}}.$$

Damit  $a_1 = 0$  oder jedenfalls sehr klein werden kann, muß  $\frac{D_{12}}{K_1}$  groß sein im Verhältnis zu  $\frac{D_{12}}{K_2} - \nu^2$ . Man darf also nicht  $D_{12}$  beliebig klein machen.

Es sei noch betont, daß hier kein Fall von Resonanz vorliegt. Resonanz entsteht, wenn  $\nu$  = der Frequenz der Eigenschwingung des ganzen Systems ist. Also

$$\nu^2 = D_{12} \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right).$$

In diesem Falle werden in der Tat sowohl  $a_1$  wie  $a_2$  unendlich. Hieraus geht auch hervor, daß  $\frac{D_{12}}{K_1}$  nicht klein sein darf im Verhältnis zu  $\frac{D_{12}}{K_2}$ . Denn sonst liegen die beiden Frequenzquadrate  $\frac{D_{12}}{K_1}$  und  $\frac{D_{12}}{K_2} + \frac{D_{12}}{K_1}$  so nahe aneinander, daß bei einer kleinen Abweichung der Tourenzahl von ihrer normalen Größe Resonanz entstehen kann. Es muß also überhaupt, damit der Ungleichförmigkeitsgrad = 0 gemacht werden kann,  $K_2$  groß sein im Verhältnis zu  $K_1$ .

Schließlich sei noch erwähnt, daß man durch Anbringen eines zweiten Schwungrades auf der anderen Seite eine Schwingung von anderer Periode beseitigen kann.

*Zweites Beispiel.* Als zweites Beispiel nehmen wir denselben Fall wie vorhin, mit dem Unterschied, daß der zwischen Kurbel und Dynamoanker befindliche Teil der Welle nicht mehr als starr betrachtet wird. Die drei schwingenden Körper seien in folgender Reihenfolge

Dynamo		Kurbel		Schwungrad
$K_1$	$D_{12}$	$K_2$	$D_{23}$	$K_3$

Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$K_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + D_{12} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0;$$

$$K_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + D_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) + D_{23} (\varphi_2 - \varphi_3) = M \sin \nu t;$$

$$K_3 \frac{d^2 \varphi_3}{dt^2} + D_{23} (\varphi_3 - \varphi_2) = 0.$$

Durch den Ansatz

$$\varphi_1 = a_1 \sin \nu t \quad \varphi_2 = a_2 \sin \nu t \quad \varphi_3 = a_3 \sin \nu t$$

erhalten wir für die Bestimmung der erzwungenen Schwingungen folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 (D_{12} - K_1 \nu^2) - a_2 D_{12} &= 0, \\ -a_1 \cdot D_{12} + a_2 (D_{12} + D_{23} - K_2 \nu^2) - a_3 D_{23} &= m, \\ -a_2 \cdot D_{23} + a_3 (D_{23} - K_3 \nu^2) &= 0. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen sieht man, daß  $a_2 = 0$  wird, wenn  $D_{23} - K_3 \nu^2 = 0$

oder  $D_{12} - K_1 v^2 = 0$  ist. Im ersten Falle wird auch  $a_1 = 0$ , sobald  $D_{12} - K_1 v^2$  nicht  $= 0$  wird. Die Werte der Amplituden sind

$$a_1 = M \frac{D_{12}(D_{23} - K_3 v^2)}{(D_{12} - K_1 v^2)(D_{23} - K_3 v^2)(D_{12} + D_{23} - K_2 v^2) - D_{12}^2(D_{23} - K_3 v^2) - D_{23}^2(D_{12} - K_1 v^2)}$$

$$a_2 = M \frac{(D_{12} - K_1 v^2)(D_{23} - K_3 v^2)}{(D_{12} - K_1 v^2)(D_{23} - K_3 v^2)(D_{12} + D_{23} - K_2 v^2) - D_{12}^2(D_{23} - K_3 v^2) - D_{23}^2(D_{12} - K_1 v^2)}$$

$$a_3 = M \frac{D_{23}(D_{12} - K_1 v^2)}{(D_{12} - K_1 v^2)(D_{23} - K_3 v^2)(D_{12} + D_{23} - K_2 v^2) - D_{12}^2(D_{23} - K_3 v^2) - D_{23}^2(D_{12} - K_1 v^2)}$$

Macht man hier zunächst sowohl

$$D_{12} - K_2 v^2 = 0 \quad \text{wie} \quad D_{23} - K_3 v^2 = 0,$$

so wird

$$a_2 = 0.$$

Der vollständige Ausdruck kann aber geschrieben werden

$$a_2 = \frac{M}{D_{12} + D_{23} - K_2 v^2 - \frac{D_{12}^2}{D_{12} - K_1 v^2} - \frac{D_{23}^2}{D_{23} - K_3 v^2}}$$

Damit  $a_2 = 0$  wird, müssen die zwei letzten Glieder im Nenner unendlich groß werden.  $D_{12}$  und  $D_{23}$  dürfen also nicht beliebig klein gemacht werden.

$a_1$  und  $a_3$  werden jetzt unbestimmt. Wenn aber  $\frac{D_{12}}{K_1} = \frac{D_{23}}{K_3}$  ist, so

wird das Verhältnis  $\frac{\frac{D_{12}}{K_1} - v^2}{\frac{D_{23}}{K_3} - v^2}$  für  $v^2 = \frac{D_{12}}{K_1} = \frac{D_{23}}{K_3}$  gleich 1 und man bekommt für  $a_1$  und  $a_3$

$$a_1 = -M \frac{D_{12}}{D_{12}^2 + D_{23}^2},$$

$$a_2 = -M \frac{D_{23}}{D_{12}^2 + D_{23}^2}.$$

Ist aber  $K_1$  ein Dynamoanker, so muß vor allen Dingen  $a_1 = 0$  gemacht werden. Es darf also nicht  $D_{12} - K_1 v^2 = 0$  sein. Unter dieser Annahme erhalten wir für die Amplituden

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -\frac{m}{D_{23}}.$$

Der vollständige Ausdruck für  $a_1$  lautet aber

$$a_1 = m \frac{D_{12}}{(D_{12} - K_1 v^2)(D_{12} + D_{23} - K_2 v^2) - D_{12}^2 - D_{23}^2 \frac{D_{12} - K_1 v^2}{D_{12} - K_1 v^2}}$$

Es müssen also sowohl  $D_{23}$  wie  $D_{12}$  groß gemacht werden und zwar  $D_{12}$  groß im Verhältnis zu  $K_1 v^2$  oder die Frequenz der Schwingung von  $K_1$  bei Festhalten der Kurbel groß.

In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß man auch den Generator zwischen Kurbel und Schwungrad anbringen kann. Die Anordnung wird dann folgende:

Kurbel	Generator	Schwungrad
$K_1$	$K_2$	$K_3$ .

Dieser Fall bietet aber kein Beispiel des allgemeinen Satzes dar. Die Bewegungsgleichungen sind dieselben wie in dem oben betrachteten Falle, nur kommt das Glied  $M$  nicht in die erste Gleichung. Die Amplituden werden

$$a_1 = M \frac{(D_{23} - K_3 v^2)(D_{12} + D_{23} - K_2 v^2) - D_{23}^2}{(D_{12} - K_1 v^2)(D_{23} - K_3 v^2)(D_{12} + D_{23} - K_2 v^2) - D_{12}^2(D_{23} - K_3 v^2) - D_{23}^2(D_{12} - K_1 v^2)},$$

$$a_2 = M \frac{D_{12}(D_{23} - K_3 v^2)}{(D_{12} - K_1 v^2)(D_{23} - K_3 v^2)(D_{12} + D_{23} - K_2 v^2) - D_{12}^2(D_{23} - K_3 v^2) - D_{23}^2(D_{12} - K_1 v^2)},$$

$$a_3 = M \frac{D_{12} \cdot D_{23}}{(D_{12} - K_1 v^2)(D_{23} - K_3 v^2)(D_{12} + D_{23} - K_2 v^2) - D_{12}^2(D_{23} - K_3 v^2) - D_{23}^2(D_{12} - K_1 v^2)}.$$

Der Ausdruck  $a_2$  ist derselbe wie für  $a_1$  in dem eben betrachteten Falle. Für  $D_{23} - K_3 v^2 = 0$  wird also der Ungleichförmigkeitsgrad  $= 0$  unter eben erwähnten Bedingungen. Die Amplituden werden in diesem Falle

$$a_1 = \frac{M}{(D_{12} - K_1 v^2)} \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -\frac{D_{12}}{D_{23}} \frac{M}{D_{12} - K_1 v^2}.$$

*Drittes Beispiel.* Parallelschaltung von Wechselstromgeneratoren.

Wenn beide Generatoren dieselbe Polzahl haben, so kann man das zwischen ihnen wirkende Drehmoment (die synchronisierende Kraft) proportional der Winkelabweichung setzen. Wir bezeichnen dieses Moment für die Winkelabweichung 1 mit  $D$ . Außerdem soll wie im ersten Beispiel in jedem Aggregat Kurbel und Dynamoanker als ein starrer Körper betrachtet werden. Die Anordnung wird dann folgende:

Schwungrad	Kurbel + Anker	Kurbel + Anker	Schwungrad
$K_2$	$D_{12}$	$K_1$	$D$
		$K'_1$	$D'_{12}$
			$K'_2$

Die Bewegungsgleichungen lauten jetzt

$$K_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + D_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + D(\varphi_1 - \varphi'_1) = M \sin vt,$$

$$K_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + D_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$$

$$K'_1 \frac{d^2 \varphi'_1}{dt^2} + D'_{12}(\varphi'_1 - \varphi'_2) + D(\varphi'_1 - \varphi_1) = M' \sin vt,$$

$$K'_2 \frac{d^2 \varphi'_2}{dt^2} + D'_{12}(\varphi'_2 - \varphi'_1) = 0$$

und die Gleichungen zur Bestimmung der Amplituden

$$\begin{aligned}
 a_1(D_{12} + D - K_1 v^2) - a_2 \cdot D_{12} - a'_1 \cdot D &= M \\
 - a_1 \cdot D_{12} &+ a_2(D_{12} - K_2 v^2) &= 0 \\
 - a_1 \cdot D &+ a'_1(D'_{12} + D - K'_1 v^2) - a'_2 \cdot D'_{12} &= M' \\
 &- a'_1 \cdot D'_{12} &+ a'_2(D'_{12} - K'_2 v^2) = 0.
 \end{aligned}$$

Die Schwingungsamplituden werden

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{M[(D'_{12} - K'_2 v^2)(D'_{12} + D - K'_1 v^2) - D'_{12}{}^2] + M' D(D_{12} - K_2 v^2)}{[(D_{12} - K_2 v^2)(D_{12} + D - K_1 v^2) - D_{12}{}^2][(D'_{12} - K'_2 v^2)(D'_{12} + D - K'_1 v^2) - D'_{12}{}^2] - D^2(D_{12} - K_1 v^2)(D'_{12} - K'_2 v^2)} \\
 a'_1 &= (D'_{12} - K'_2 v^2) \frac{M'[(D_{12} - K_2 v^2)(D_{12} + D - K_1 v^2) - D_{12}{}^2] + M D(D_{12} - K_2 v^2)}{N} \\
 a_2 &= D_{12} \frac{M[(D'_{12} - K'_2 v^2)(D'_{12} + D - K'_1 v^2) - D'_{12}{}^2] + M' D(D'_{12} - K'_2 v^2)}{N} \\
 a'_2 &= D'_{12} \frac{M'[(D_{12} - K_2 v^2)(D_{12} + D - K_1 v^2) - D_{12}{}^2] + M D(D_{12} - K_2 v^2)}{N}.
 \end{aligned}$$

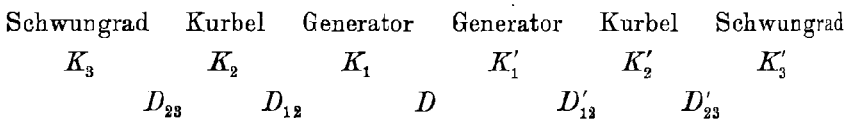
Macht man jetzt

$$D_{12} - K_2 v^2 = 0 \quad D'_{12} - K'_2 v^2 = 0,$$

so erhält man

$$a_1 = 0 \quad a'_1 = 0 \quad a_2 = -\frac{M}{D_{12}} \quad a'_2 = \frac{M'}{D'_{12}}.$$

*Viertes Beispiel.* Hier wird die starre Verbindung zwischen Kurbel und Generator durch eine elastische ersetzt. Die Anordnung wird also:



Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
 K_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + D_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + D(\varphi_1 - \varphi'_1) &= 0, \\
 K_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + D_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + D_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) &= m \sin vt, \\
 K_3 \frac{d^2 \varphi_3}{dt^2} + D_{23}(\varphi_3 - \varphi_2) &= 0, \\
 K'_1 \frac{d^2 \varphi'_1}{dt^2} + D'_{12}(\varphi'_1 - \varphi'_2) + D(\varphi'_1 - \varphi_1) &= 0, \\
 K'_2 \frac{d^2 \varphi'_2}{dt^2} + D'_{12}(\varphi'_1 - \varphi'_1) + D'_{23}(\varphi'_2 - \varphi'_3) &= m' \sin vt, \\
 K'_3 \frac{d^2 \varphi'_3}{dt^2} + D'_{23}(\varphi'_3 - \varphi'_2) &= 0
 \end{aligned}$$

und die Gleichungen zur Bestimmung der Amplituden:



$$\begin{aligned}
 & a_1(D_{12} + D - K_1 v^2) - a_2 \cdot D_{12} && - a'_1 \cdot D && = 0 \\
 & - a_1 \cdot D_{12} && + a_2(D_{12} + D_{23} - K_2 v^2) - a_3 \cdot D_{23} && = M \\
 & && - a_2 \cdot D_{23} && + a_3(D_{23} - K_3 v^2) && = 0 \\
 & - a_1 \cdot D && && + a'_1(D'_{12} + D - K_1 v^2) - a'_2 \cdot D'_{12} && = 0 \\
 & && && - a'_1 \cdot D'_{12} && + a'_2(D'_{12} + D'_{23} - K'_2 v^2) - a'_3 \cdot D'_{23} && = M \\
 & && && && - a'_2 \cdot D'_{23} && + a'_3(D'_{23} - K'_3 v^2) && = 0 \\
 & && && && && + a_3(D'_{23} - K'_3 v^2) && = 0
 \end{aligned}$$

Die Amplituden sind:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{M D_{12} (D_{23} - K_3 v^2) \{ (D'_{12} + D - K_1 v^2) (D'_{12} + D'_{23} - K'_2 v^2) (D'_{23} - K'_3 v^2) - D'_{23}^2 \} - D'_{23}^2 (D'_{12} - K'_2 v^2)}{N} \\
 &+ \frac{M' D D'_{12} (D'_{23} - K'_3 v^2) [(D_{12} + D_{23} - K_2 v^2) (D_{23} - K_3 v^2) - D_{23}^2]}{N}, \\
 a_2 &= \frac{M (D_{23} - K_3 v^2) (D_{12} + D - K_1 v^2) \{ (D'_{12} + D - K_1 v^2) (D'_{12} + D'_{23} - K'_2 v^2) (D'_{23} - K'_3 v^2) - D'_{23}^2 \} - D'_{23}^2 (D'_{12} + D'_{23} - K'_2 v^2) - D'_{23}^2 (D'_{12} - K'_2 v^2)}{N} \\
 &+ \frac{M' D D_{12} D'_{12} (D_{23} - K_3 v^2) (D'_{23} - K'_3 v^2)}{N}, \\
 a_3 &= \frac{M D_{23} (D_{12} + D - K_1 v^2) \{ (D'_{12} + D - K_1 v^2) (D'_{12} + D'_{23} - K'_2 v^2) (D'_{23} - K'_3 v^2) - D'_{23}^2 \} - D'_{23}^2 (D'_{12} + D'_{23} - K'_2 v^2) - D'_{23}^2 (D'_{12} - K'_2 v^2)}{N} \\
 &+ \frac{M' D D_{12} D'_{12} D_{23} (D'_{23} - K'_3 v^2)}{N}.
 \end{aligned}$$

Die entsprechenden Werte für  $a'_1, a'_2, a'_3$  erhält man durch Vertauschung der ungestrichenen mit gestrichenen Buchstaben und umgekehrt, mit Ausnahme für  $D$ . Der gemeinsame Nenner ist:

$$\begin{aligned}
 N &= \{ (D_{12} + D - K_1 v^2) [(D_{12} + D_{23} - K_2 v^2) (D_{23} - K_3 v^2) - D_{23}^2] - D_{12}^2 (D_{23} - K_3 v^2) \} \\
 &\quad \{ (D'_{12} + D - K'_1 v^2) [(D'_{12} + D'_{23} - K'_2 v^2) (D'_{23} - K'_3 v^2) - D'_{23}^2] - D'_{12}^2 (D'_{23} - K'_3 v^2) \} \\
 &- D^2 [(D_{12} + D_{23} - K_2 v^2) (D_{23} - K_3 v^2) - D_{23}^2] [(D'_{12} + D'_{23} - K'_2 v^2) (D'_{23} - K'_3 v^2) - D'_{23}^2].
 \end{aligned}$$

Für 
$$D_{23} - K_3 v^2 = D'_{23} - K'_3 v^2 = 0$$

erhalten die Amplituden folgende einfache Werte:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 & a_2 &= 0 & a_3 &= -\frac{m}{D_{23}}, \\ a'_1 &= 0 & a'_2 &= 0 & a'_3 &= -\frac{m'}{D'_{23}} \cdot 1) \end{aligned}$$

Zum Schluß sei noch mit einigen Worten des Falles gedacht, daß die Eigenschwingungen des Systems durch Reibung gedämpft sind. In diesem Falle muß die auf eine Koordinate wirkende äußere Kraft dieselbe Form haben wie eine der gedämpften Schwingungen beim Festhalten der Koordinate, damit die erzwungene Schwingung derselben = 0 wird. Wenn aber die äußere Kraft harmonisch ist, so ist dies nicht mehr der Fall. Bei Annahme einer der Winkelgeschwindigkeit proportionalen Reibung erhält man in dem ersten Beispiele einen Ausdruck für  $a_1$ , welcher im Zähler das Quadrat der Amplitude der Reibungskraft enthält. Wenn also die Reibung klein ist, so bleibt auch die erzwungene Schwingung klein, und dies wird auch in mehr komplizierten Systemen der Fall sein.

## Über die zwangsläufige Bewegung materieller Systeme in der Ebene. I.

VON THEODOR PÖSCHL in Graz.

### Inhalt.

	Seite
Einleitung . . . . .	144
I. Kinematische Grundlagen . . . . .	146
II. Allgemeine Entwicklung der Beziehungen zwischen Kräften und den von ihnen erzeugten Beschleunigungszuständen . . . . .	148
III. Anwendungen auf das einzelne zwangsläufige System . . . . .	168

### Einleitung.

In der Theorie der Bewegung der ebenen Systeme nimmt der Zwangslauf eine besondere Stellung ein, wie auch für die Anwendungen gerade dieser Fall eine besondere Bedeutung besitzt. Es ist eine charakteristische Eigenschaft fast aller in den Anwendungen vorkommen-

1) Ein weiteres Beispiel hat der Verf. früher ohne Kenntnis des allgemeinen Satzes gegeben. Siehe R. Malmström, Die Theorie des Schlick'schen Schiffskreisels, Acta Societatis scientiarum fennicae. Tom. XXXV 1907. Ähnliche Anwendungen, wie hier auf die Torsionsschwingungen, ließen sich auf die Biegeschwingungen von Maschinenwellen machen.

den zwangläufigen Bewegungen, daß sie in geometrischer Hinsicht periodisch sind — womit aber keineswegs die mechanische Periodizität notwendig verbunden zu sein braucht: man denke z. B. an den Vorgang des „Angehens“ eines Maschinengetriebes. Das gleichzeitige Bestehen von geometrischer und mechanischer Periodizität bezeichnet man als Beharrungszustand.

Wenn nun auch die rein geometrische Seite der hiebei auftretenden Fragen der Gegenstand einer überaus großen Anzahl von Untersuchungen gewesen ist, so hat man doch aus allen den erhaltenen Resultaten für die sich anschließenden dynamischen Probleme keinen großen Nutzen gezogen, es wurde vielmehr an eine Verwertung der Ergebnisse der Kinematik für die Dynamik kaum gedacht. Und doch ist die Frage des Zusammenhanges der auf ein System einwirkenden Kräfte mit den von ihnen erzeugten Beschleunigungszuständen eine so wichtige, daß eine eingehende Untersuchung wohl versucht zu werden verdient. Erst durch die in den letzten Jahren erschienenen Arbeiten von F. Wittenbauer ist dieses Gebiet erfolgreich in Angriff genommen und durch eine eigenartige, rein dynamische Methode bereichert worden. Den daraus erwachsenen Anregungen verdankt auch die vorliegende Arbeit ihre Entstehung, wenn auch bei ihr Methode und Ziel von denen in den genannten Arbeiten verschieden sind.

Im Anschlusse an zwei frühere Publikationen des Verfassers<sup>1)</sup> soll in der vorliegenden eine Untersuchung der zwangläufigen Systeme („geleiteten Systeme“ nach H. Hertz) versucht werden, als weiterer Beitrag zu einer dynamischen Getriebelehre auf geometrischer — und konstruktiver — Grundlage. Sie beschäftigt sich zunächst mit der Aufgabe, den Zusammenhang aufzudecken, der zwischen den Elementen, welche die Bewegung eines Systems kennzeichnen, d. h. den charakteristischen Polen einerseits, und den diese Elemente „erzeugenden“ Kräften, bzw. den Mannigfaltigkeiten von solchen andererseits, besteht. Eine schwierige, bisher i. a. unerledigte Frage betrifft die Ermittlung der Größe und Richtung der Gelenkdrücke für alle Lagen eines Getriebes. Die vorliegende Arbeit setzt es mit zu ihren Zielen, nach dieser Richtung einen Schritt vorwärts zu tun.

Nachdem in I. die kinematischen Grundlagen kurz zusammengefaßt worden sind, entwickeln wir in II. die allgemeinen Beziehungen, welche bei dem ebenen System zwischen den Kräften und den von ihnen erzeugten Beschleunigungssystemen bestehen. Das geometrische Element, zu dessen Einführung hier die Untersuchung führt, ist der *geradlinig*

1) Diese Zeitschrift für Math. u. Physik, Bd. 58, 1910, und Berichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, Bd. CXVIII, 1909, Abt. IIa.

*begrenzte Streckenbüschel*, d. i. der Inbegriff der  $\infty^1$  Strecken, die durch einen Punkt gehen und deren Endpunkte in einer Geraden liegen, wenn die Strecken von dem Punkte aus aufgetragen werden. Es tritt hier auf als geradlinig begrenzter Kraftbüschel oder kurz *Kraftbüschel* und als *reduzierter Kraftbüschel* — nach der später zu gebenden Erklärung. Analytisch ist er definiert durch zwei lineare, nichthomogene Gleichungen zwischen den gewöhnlichen Kräftekoordinaten der Ebene:  $X, Y, N$ . Der Kraftbüschel ist geometrisch als die Figur eines Punktes: des „Mittelpunktes“ und einer Geraden: der „Begrenzungslinie“ in der Ebene aufzufassen, (also etwa ein „Quirl“ in der von E. Study eingeführten Bezeichnungsweise, für die Ebene gebildet.<sup>1)</sup>) Die Definition des Kraftbüschels durch zwei lineare Gleichungen führt dann unmittelbar zur Einführung seiner Koordinaten, die durch die zweireihigen Determinanten der durch die Koeffizienten jener zwei Gleichungen gebildeten Matrix definiert sind. Sie sind ganz analog den Linienkoordinaten des  $R_3$  gebildet; die  $\infty^4$  Kraftbüschel der Ebene können in der Tat ein-eindeutig auf die  $\infty^4$  Geraden des  $R_3$  abgebildet werden. — In III. folgen dann einige Anwendungen der Ergebnisse auf die Bewegung des einzelnen geführten Systems. — In IV. werden endlich einige Bemerkungen über mehrere verbundene zwangläufige Systeme angeschlossen und die Reduktion des dynamischen Problems auf ein statisches durchgeführt. Dabei werden als spezielle Beispiele das Kurbelviereck und das Schubkurbelgetriebe behandelt.

Die rein geometrischen Fragen, die sich an die Einführung des Kraftbüschels als Element in der Ebene knüpfen, sind hier nur zum kleinsten Teil behandelt worden, ihre Untersuchung bleibt einer späteren Arbeit vorbehalten.

## I. Kinematische Grundlagen.

Bevor wir auf den eigentlichen Gegenstand eingehen, wollen wir die verwendeten kinematischen Hilfsmittel kurz zusammenfassen.

1. *Drehpol und Wendepol*. Der Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand einer Systembewegung wird durch Angabe des Drehpoles, des Beschleunigungspoles, Wendepoles und Tangentialpoles gekennzeichnet. Die momentane Bewegung eines ebenen Systems besteht (i. a.) aus einer Drehung um einen Punkt durch *ein Zeitelement* hindurch: der Drehpol ist demnach ein Äquivalent für zwei unendlich benachbarte Lagen I und II.

1) E. Study, Geometrie der Dynamen. Die Bezeichnungen der vorliegenden Abhandlung sind sämtlich, soweit sie geometrische Dinge betreffen (wovon übrigens nur die elementarsten hier vorkommen) diesem grundlegenden Werke entnommen

Die Hinzunahme einer weiteren unendlich benachbarten Lage III legt auch den (ersten) Wendepol  $J$  fest. Wenn die Bewegung eines ebenen Systems dadurch beschrieben wird, daß zwei seiner Punkte  $A$  und  $B$  sich auf Kurven  $\alpha$  und  $\beta$  der festen Ebene bewegen, so ist der momentane Drehpol  $D$  der Schnitt der Normalen in  $A$  und  $B$  zu  $\alpha$  und  $\beta$ . Der Ort der Punkte des bewegten Systems, die momentan Wendepunkte ihrer Bahnen beschreiben, ist ein Kreis, der die Tangente an die Polbahn  $\vec{O}t$  in  $D$  berührt und auf jener Seite dieser Tangente  $\vec{O}t$  liegt, die dem Sinn der momentanen Winkelgeschwindigkeit entgegengesetzt ist. Der  $O$  gegenüberliegende Punkt ist der *Wendepol*  $J$ , der Schnitt der sämtlichen Wendetangenten. Durch Angabe zweier Systempunkte und der Krümmungsmittelpunkte ihrer Bahnen, also für ein zwangsläufiges System insbesondere, ist der Wendepol definiert (bez. der Konstruktion siehe z. B. Z. f. Math. u. Physik, Bd. 58, 1910, S. 167). Der Wendekreis ist Träger des *Beschleunigungspoles*  $G$ , d. i. jenes Punktes, der im betrachteten Zeitelemente die Beschleunigung Null hat. Der *Tangententialpol*  $H$  ist der Schnitt von  $\vec{O}t$  mit  $\vec{J}G$  und ist der (i. a. einzige) Punkt, dessen Winkelbeschleunigung den Wert Null hat. Durch Angabe von  $G$  und der Beschleunigung irgend eines Systempunktes ist der Beschleunigungszustand des ganzen Systems gegeben.

Wenn wir  $\vec{O}t$  und  $\vec{O}n$  als  $x$ - und  $y$ -Achse eines Koordinatensystems wählen, so sind die Koordinaten von  $J$  gegeben durch:

$$(1) \quad x_i = 0, \quad y_i = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{U}{\omega} = D_1,$$

wenn  $OO' = ds$ ,  $\frac{ds}{dt} = U$  die *Wechselgeschwindigkeit* des Momentanzentrums,  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$  der momentane Wert der Winkelgeschwindigkeit des Systems ist. Die Kenntnis der Lage des Beschleunigungspols macht die Angabe der Winkelbeschleunigung  $\omega' = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  des Systems zur Voraussetzung; seine Koordinaten in bezug auf das gewählte Achsen-system sind:

$$(2) \quad x_g = \frac{\omega \omega' U}{\omega^4 + \omega'^2}, \quad y_g = \frac{\omega^3 U}{\omega^4 + \omega'^2}.$$

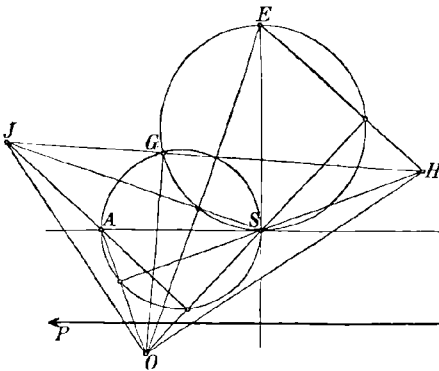
Dabei rechnen wir  $\vec{O}t$  als positive  $x$ -Achse in Richtung des vorschreitenden Drehpols,  $\vec{O}n$  als positive  $y$ -Achse jenen Teil der Polbahnnormalen, der nach einer Drehung von  $90^\circ$  im Sinne der Drehung des Systems mit  $\vec{O}t$  zusammenfällt.

2. *Mehrere gelenkig verbundene Systeme.* Ein Drehpol zweier Systeme wird durch zwei Bedingungen als Gelenk charakterisiert: Sind  $O_{12}, O_{23}, O_{31}$  die Drehpole der Systeme 2 und 3 gegen das (feste) System 1, und sei  $i$  die in  $O_{23}$  auf der Verbindungslinie der drei Punkte  $O$  errichtete Normale, so ist  $O_{23}$  dann ein Gelenk, wenn sowohl der relative Wendepol wie auch der relative Tangentialpol der Systeme in die Gerade  $i$  hineinfallen. Durch die Festlegung der Wendepole für zwangläufige Systeme ist die erste Bedingung befriedigt. Die Erfüllung der zweiten geschieht mit Hilfe des *Teilungspunktes*<sup>1)</sup>: Sind  $H_2$  und  $H_3$  die Tangentialpole der Beschleunigungssysteme von 2 und 3, so erhält man den Teilungspunkt  $T$ , indem man die Strecke zwischen zwei entsprechenden Tangentialpolen im Verhältnis der zugehörigen Winkelbeschleunigungen teilt. Der Tangentialpol der relativen Bewegung der beiden Systeme liegt in der Parallelen zu  $i$  durch  $T$ . Wenn  $J_{23}$  und  $H_{23}$  beide auf  $i$  liegen, so ist  $O_{23}$  notwendig ein Gelenk (i. a. ein Drehpol für zwei aufeinanderfolgende Zeitelemente). Wir bezeichnen diese Bedingungen als die *erste* und *zweite* Gelenkbedingung.

II. Allgemeine Entwicklung der Beziehungen zwischen den Kräften und den von ihnen erzeugten Beschleunigungssystemen.

3. *Der Beschleunigungspol.* (Fig. 1.) Der Geschwindigkeitszustand eines ebenen Systems sei durch die Angabe des Drehpoles und der Winkelgeschwindigkeit gegeben. Wenn die Bewegung des Systems in dem betrachteten Augenblicke auf ein orthogonales Achsensystem  $OXY$  bezogen wird, das im bewegten System gelegen und dort fest ist und dessen Ursprung im Massenmittelpunkte  $S$  liegt, so ist die momentane Bewegung durch die Komponenten der Geschwindigkeit von  $S$  nach den beweglichen Achsen  $u, v$  und durch die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gegeben. Ein beliebiger Punkt  $(xy)$  hat dann als Komponenten seiner Geschwindigkeit in bezug auf die (beweglichen) Achsen:

Fig. 1.



Wenn die Bewegung des Systems in dem betrachteten Augenblicke auf ein orthogonales Achsensystem  $OXY$  bezogen wird, das im bewegten System gelegen und dort fest ist und dessen Ursprung im Massenmittelpunkte  $S$  liegt, so ist die momentane Bewegung durch die Komponenten der Geschwindigkeit von  $S$  nach den beweglichen Achsen  $u, v$  und durch die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gegeben. Ein beliebiger Punkt  $(xy)$  hat dann als Komponenten seiner Geschwindigkeit in bezug auf die (beweglichen) Achsen:

$$(1) \quad \begin{cases} v_x = u - \omega y \\ v_y = v + \omega x. \end{cases}$$

1) F. Wittenbauer, Über den Beschleunigungspol der zusammengesetzten Bewegung. Z. f. Math. u. Physik, 40 (1895), S. 151 ff.

Den Punkt  $O(x_0, y_0)$ , für welchen  $v_x = 0, v_y = 0$  ist, bezeichnet man als *Drehpol*; für ihn ist

$$(2) \quad x_0 = -\frac{v}{\omega}, \quad y_0 = \frac{u}{\omega}$$

oder

$$(2') \quad 1 : x_0 : y_0 = \omega : -v : u.$$

Bezeichnet man die Größen  $\frac{v_x}{\omega} = v_x, \frac{v_y}{\omega} = v_y$ , welche die Dimension von Strecken haben als die *reduzierten Geschwindigkeitskomponenten*, so ist

$$(3) \quad \begin{cases} v_x = y_0 - y \\ v_y = -(x_0 - x). \end{cases}$$

Die Beschleunigung  $g$  des Punktes  $(xy)$  in bezug auf dieselben Achsen ist gegeben durch die Komponenten:

$$(3') \quad \begin{cases} g_x = \frac{du}{dt} - y \frac{d\omega}{dt} - \omega v - \omega^2 x \\ g_y = \frac{dv}{dt} + x \frac{d\omega}{dt} + \omega u - \omega^2 y. \end{cases}$$

Der Punkt  $G(x_g, y_g)$ , der sich durch  $g_x = 0, g_y = 0$  ergibt, heißt der *Beschleunigungspol*; für ihn ergibt sich durch Auflösung der Gleichungen (3):

$$(4) \quad x_g = \frac{\omega^2 \left( \frac{du}{dt} - \omega v \right) - \frac{d\omega}{dt} \left( \frac{dv}{dt} + \omega u \right)}{\omega^4 + \left( \frac{d\omega}{dt} \right)^2}, \quad y_g = \frac{\omega^2 \left( \frac{dv}{dt} + \omega u \right) + \frac{d\omega}{dt} \left( \frac{du}{dt} - \omega v \right)}{\omega^4 + \left( \frac{d\omega}{dt} \right)^2}.$$

Das gegebene materielle System sei durch die Masse  $m$  und den Trägheitsradius  $k$  in bezug auf den Schwerpunkt charakterisiert. Es wirke in dem gegebenen Augenblicke ein System von Kräften ein, dessen Komponenten in bezug auf die vorhin benützten Achsen  $X, Y, N$  seien, dann lauten die Bewegungsgleichungen in bezug auf diese Achsen

$$(5) \quad \begin{cases} X = m \left( \frac{du}{dt} - \omega v \right), \\ Y = m \left( \frac{dv}{dt} + \omega u \right); \\ N = C \frac{d\omega}{dt} = m k^2 \frac{d\omega}{dt}. \end{cases}$$

Setzen wir die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werte von  $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{d\omega}{dt}$  in (3) ein, so erhalten wir die Beschleunigung eines Systempunktes  $(xy)$  ausgedrückt durch die Koordinaten des einwirkenden Kraftsystems:

$$g_x = \frac{X}{m} - y \frac{N}{m k^2} - \omega^2 x,$$

was wir so schreiben, indem wir auch die ähnliche für  $g_y$  hinzufügen:

$$(6) \quad \begin{cases} g_x = \frac{X}{m\omega^2} - y \frac{N}{mk^2\omega^2} - x \\ g_y = \frac{Y}{m\omega^2} + x \frac{N}{mk^2\omega^2} - y. \end{cases}$$

Wir führen nun neue Bezeichnungen ein und nennen

$$(7) \quad \begin{cases} g_x = \frac{g_x}{\omega^2}, \quad g_y = \frac{g_y}{\omega^2} \text{ die } \textit{reduzierten} \text{ Beschleunigungskomponenten,} \\ \mathfrak{X} = \frac{X}{m\omega^2}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{Y}{m\omega^2}, \quad \mathfrak{N} = \frac{N}{mk^2\omega^2} \text{ die } \textit{reduzierten} \text{ Kräftekomponenten.} \end{cases}$$

( $g_x, g_y, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  sind zufolge dieser Normierung reine Strecken,  $\mathfrak{N}$  hat die Bedeutung einer reinen Zahl.) Dadurch schreiben sich die Gleichungen (6) einfacher

$$(8) \quad \begin{cases} g_x = \mathfrak{X} - y\mathfrak{N} - x, \\ g_y = \mathfrak{Y} + x\mathfrak{N} - y. \end{cases}$$

Die Koordinaten des Beschleunigungspoles sind dann gegeben durch

$$(9) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} - y_g\mathfrak{N} - x_g = 0, \\ \mathfrak{Y} + x_g\mathfrak{N} - y_g = 0, \end{cases}$$

d. h.

$$(10) \quad x_g = \frac{\mathfrak{X} - y_g\mathfrak{N}}{1 + \mathfrak{N}^2}, \quad y_g = \frac{\mathfrak{Y} + x_g\mathfrak{N}}{1 + \mathfrak{N}^2},$$

wie auch unmittelbar aus (4) hervorgeht. Die Gleichungen (9) zeigen, daß zwischen den reduzierten Kräften und den Koordinaten des von ihnen erzeugten Beschleunigungspoles die Beziehungen bestehen

$$(9') \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = x_g + y_g\mathfrak{N}, \\ \mathfrak{Y} = y_g - x_g\mathfrak{N}, \end{cases}$$

die wir noch besonders brauchen werden. — Für besondere Fälle ist aus (10) die Lage des Beschleunigungspoles leicht zu ersehen; z. B. für  $\mathfrak{N} = 0$  ist  $x_g = \mathfrak{X}$ ,  $y_g = \mathfrak{Y}$ , usw.

Bemerkung. Man könnte statt der gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinaten eine homogene Schreibweise verwenden, indem man statt  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{N}$  die Verhältnisse von vier Größen  $\mathfrak{X}_0 : \mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3$  einführt (von denen nicht alle vier gleichzeitig Null sein dürfen), so daß man

$$(11) \quad \mathfrak{X} = \frac{\mathfrak{X}_1}{\mathfrak{X}_0}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{\mathfrak{X}_2}{\mathfrak{X}_0}, \quad \mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{X}_3}{\mathfrak{X}_0},$$

und außerdem

$$(12) \quad 1 : x_g : y_g = \mathfrak{X}_0 : \mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2$$

setzt. Dann ist

$$(13) \quad \mathfrak{X}_0 : \mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_0^2 + \mathfrak{X}_3^2 : \mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 : \mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_3.$$



Schreibt man die Gleichungen (9) homogen:

$$(14) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1 \mathfrak{r}_0 - \mathfrak{X}_0 \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{X}_2 \mathfrak{r}_2 = 0 \\ \mathfrak{X}_2 \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{X}_3 \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{X}_0 \mathfrak{r}_2 = 0, \end{cases}$$

so erhält man  $\mathfrak{r}_0 : \mathfrak{r}_1 : \mathfrak{r}_2$  durch die zweireihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_0 - \mathfrak{X}_3 & \\ \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_0 & \end{vmatrix} \dots$$

Diese Darstellung hat den Vorteil, daß sie alle Werte von  $\mathfrak{X}YN$  umfaßt, ohne, daß man es nötig hätte, unendliche Größen einzuführen; dadurch werden auch Impulse und Drehimpulse in die Betrachtung einbezogen.

Für die besonderen Fälle ergibt sich folgende Tabelle:

- a) Für Impulse:  $\mathfrak{X}_0 = 0, \mathfrak{r}_0 : \mathfrak{r}_1 : \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{X}_3 : -\mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_1$ 
  - α) Zugstoß durch  $S$ :  $\mathfrak{X}_0 = 0, \mathfrak{X}_3 = 0, \mathfrak{r}_0 : \mathfrak{r}_1 : \mathfrak{r}_2 = 0 : -\mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_1$
  - β) Drehstoß:  $\mathfrak{X}_0 = 0, \mathfrak{X}_1 = 0, \mathfrak{X}_2 = 0, \mathfrak{X}_3 \neq 0, \mathfrak{r}_0 : \mathfrak{r}_1 : \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{X}_3 : 0 : 0.$
- b) Für kontinuierlich wirkende Kräfte:  $\mathfrak{X}_0 \neq 0$ 
  - α) Kraft durch  $S$ :  $\mathfrak{X}_3 = 0, \mathfrak{r}_0 : \mathfrak{r}_1 : \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{X}_0 : \mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2$
  - β) Drehmoment:  $\mathfrak{X}_1 = 0, \mathfrak{X}_2 = 0, \mathfrak{r}_0 : \mathfrak{r}_1 : \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{X}_0^2 + \mathfrak{X}_3^2 : 0 : 0.$

Auch für ruhende Systeme sind die allgemeinen Formeln (10) für Impulse anwendbar, es wird dann der Beschleunigungspol zum Drehpol. Die Gleichungen (10) ergeben nämlich

$$x_g = \frac{\frac{X}{m\omega^2} - \frac{Y}{m\omega^2} \cdot \frac{N}{mk^2\omega^2}}{1 - \frac{N^2}{m^2k^2\omega^2}} = \frac{\frac{X}{m} \omega^2 - \frac{Y}{m} \cdot \frac{N}{mk^2}}{\omega^4 + \frac{N^2}{m^2k^4}}$$

und für  $\omega = 0$ :

$$(15) \quad x_g = -\frac{Y}{k^2}, \quad y_g = \frac{X}{k^2},$$

d. h.

$$\mathfrak{r}_0 : \mathfrak{r}_1 : \mathfrak{r}_2 = \frac{N}{k^2} : -Y : X.$$

Halten wir jetzt  $\mathfrak{r}_0 : \mathfrak{r}_1 : \mathfrak{r}_2$  fest, so haben wir 2 homogene lineare Gleichungen zwischen  $XYN$ , es ergibt daher  $\infty^1$  Impulse, welche dasselbe  $O(x_g, y_g)$  erzeugen. Schreiben wir (15) in der Form

$$\begin{cases} X - y_g \frac{N}{k^2} = 0. \\ Y + x_g \frac{N}{k^2} = 0, \end{cases}$$

so werden wir sehen, daß dies die Formeln für den Wendepol sind für den Fall, daß er in den Schwerpunkt fällt. Für einen Impuls geht daher der Beschleunigungspol in den Drehpol über und der Wendepol rückt in den Schwerpunkt.

Trotz der allgemeinen Auffassung, welche die homogene Schreibweise ermöglicht, werden wir aus Gründen der Einfachheit in der Folge oft die gewöhnliche beibehalten.

4. *Wendepol und Tangentialpol.* Mit den verwendeten Bezeichnungen ergeben sich mit Benützung von Figur 1 ähnlich einfache Formeln für den Wendepol  $J$  und den Tangentialpol  $H$ , deren geometrische Bedeutung unmittelbar ersichtlich ist. Und zwar ist:

$$(16) \quad \begin{cases} x_i = \mathfrak{X} - y_0 \mathfrak{N} = x_g + (y_g - y_0) \mathfrak{N}, \\ y_i = \mathfrak{Y} + x_0 \mathfrak{N} = y_g - (x_g - x_0) \mathfrak{N}, \end{cases}$$

d. h. der Wendepol  $J$  liegt auf der durch  $A(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  senkrecht zu  $S\bar{O}$  gezogenen Geraden in einer Entfernung

$$(16') \quad \overline{AJ} = \overline{SO} \cdot \mathfrak{N}.$$

(Der Sinn des positiven  $\mathfrak{N}$  ist übereinstimmend mit dem Sinne der Drehung zu nehmen, welche die positive X-Achse in die positive Y-Achse überführt.)

Die Koordinaten des Tangentialpoles  $H$  ergeben sich zu

$$(17) \quad \begin{cases} x_h = -\frac{\mathfrak{Y} - y_0}{\mathfrak{N}} = -\frac{(y_g - y_0) + x_g \mathfrak{N}}{\mathfrak{N}}, \\ y_h = \frac{\mathfrak{X} - x_0}{\mathfrak{N}} = \frac{(x_g - x_0) + y_g \mathfrak{N}}{\mathfrak{N}}, \end{cases}$$

d. h.:

$$(17') \quad SH \perp OA, \quad \overline{SH} = \frac{OA}{\mathfrak{N}}.$$

Aus (16) und (17) ergeben sich durch Auflösung die Gleichungen

$$(18) \quad \begin{cases} x_0 = -\frac{\mathfrak{Y} - y_i}{\mathfrak{N}} = \mathfrak{X} - y_h \mathfrak{N}, \\ y_0 = \frac{\mathfrak{X} - x_i}{\mathfrak{N}} = \mathfrak{Y} + x_h \mathfrak{N}, \end{cases}$$

die eine merkwürdige Analogie mit den ursprünglichen (16) aufweisen.

Die Formeln (16) und (17) lauten in homogener Schreibweise, (wenn  $1 : x_0 : y_0 = \xi_0 : \xi_1 : \xi_2$ ):

$$(19) \quad \mathfrak{r}_0^{(i)} : \mathfrak{r}_1^{(i)} : \mathfrak{r}_2^{(i)} = \xi_0 \mathfrak{X}_0 : \xi_0 \mathfrak{X}_1 - \xi_2 \mathfrak{X}_3 : \xi_0 \mathfrak{X}_2 + \xi_1 \mathfrak{X}_3$$

und

$$(20) \quad \mathfrak{r}_0^{(h)} : \mathfrak{r}_1^{(h)} : \mathfrak{r}_2^{(h)} = \xi_0 \mathfrak{X}_3 : -\xi_0 \mathfrak{X}_2 + \xi_2 \mathfrak{X}_0 : \xi_0 \mathfrak{X}_1 - \xi_1 \mathfrak{X}_0.$$

In der Form der Gleichung (16) ist das Gesetz der Addition der Wendepole für zusammengesetzte Bewegungen enthalten: Sind  $J_1$  und  $J_2$  die von 2 Kräften  $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{N}_1)$  und  $(\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{N}_2)$  bzw. erzeugten Wendepole, so liegt der Wendepol der Resultierenden im Endpunkte  $J$  des über  $\overrightarrow{SJ_1}$  und  $\overrightarrow{SJ_2}$  errichteten Parallelogrammes.

Die Ausdrücke für die Koordinaten des Wendepoles und damit für den Durchmesser des Wendekreises können wir auch mit Hilfe der Wechselgeschwindigkeit  $U$  des Drehpols  $O$  bilden, und benützen dazu, daß der Durchmesser des Wendekreises  $\frac{U}{\omega}$  ist. Denn es ist

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= \frac{1}{\omega^2} \left( v \frac{d\omega}{dt} - \omega \frac{dv}{dt} \right) = \frac{1}{\omega^2} \left\{ v \frac{N}{mk^2} - \omega \left( \frac{Y}{m} - \omega u \right) \right\} \\ &= v \frac{N}{mk^2 \omega^2} - \frac{1}{\omega} \frac{Y}{m} + u = u + v\mathfrak{N} - \mathfrak{Y}\omega, \end{aligned}$$

und daher ist die *reduzierte Wechselgeschwindigkeit*

$$(21) \quad \begin{cases} x_i - x_0 = \frac{1}{\omega} \frac{dy_0}{dt} = \mathfrak{X} - y_0\mathfrak{N} - x_0 \\ y_i - y_0 = -\frac{1}{\omega} \frac{dx_0}{dt} = \mathfrak{Y} + x_0\mathfrak{N} - y_0. \end{cases}$$

Man vergleiche hierzu die Formeln (9): Setzt man in diesen  $x_0, y_0$  für  $x, y$ , so erhält man das Resultat, daß die „reduzierte“ Wechselgeschwindigkeit des Drehpols  $O$  nichts anderes als der Durchmesser des Wendekreises ist. Die Koordinaten des Wendepoles  $J$  ergeben sich daraus wie oben

$$(16') \quad \begin{cases} x_i = x_0 + \frac{1}{\omega} \frac{dy_0}{dt} = \mathfrak{X} - y_0\mathfrak{N} \\ y_i = y_0 - \frac{1}{\omega} \frac{dx_0}{dt} = \mathfrak{Y} + x_0\mathfrak{N}. \end{cases}$$

In analoger Weise ergeben sich die Koordinaten des Tangentialpols  $H$ , wenn man die bekannte Beziehung benützt, daß der Abstand

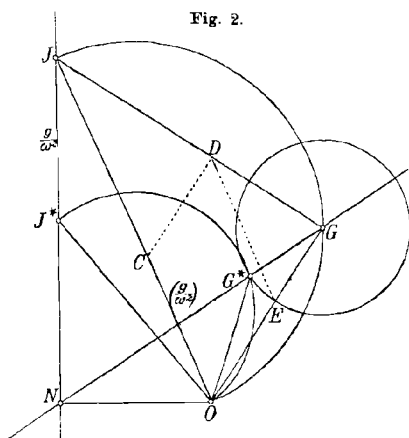
$$\overrightarrow{OH} = \frac{U\omega}{\frac{d\omega}{dt}} \text{ ist; es ist dann}$$

$$x_h - x_0 = \frac{\omega \frac{dx_0}{dt}}{\frac{d\omega}{dt}} = \frac{\omega^2 (y_0 - x_0\mathfrak{N} - \mathfrak{Y})}{\frac{N}{mk^2}} = \frac{y_0 - x_0\mathfrak{N} - \mathfrak{Y}}{\mathfrak{N}} = -\frac{\mathfrak{Y} - y_0}{\mathfrak{N}} - x_0$$

in Übereinstimmung mit (18).

Eine besondere Bemerkung ist für den Fall notwendig, in dem zu einem vorliegenden Beschleunigungssystem ( $OGJH$ ), ein zweites hinzutritt, das allen Punkten gleiche und gleichgerichtete Beschleunigungen  $g$  erteilt, wie z. B. das Beschleunigungssystem der Schwere. Da  $OJ$  (Fig. 2) die reduzierte Beschleunigung von  $O$  bedeutet, so erhält man den Wendepol  $J^*$ , der für das gleichzeitige Bestehen der beiden Beschleunigungssysteme resultiert, indem man in  $J$  die reduzierte Beschleunigung  $\frac{g}{\omega^2}$  ansetzt. Den neuen Beschleunigungspol  $G^*$  findet man

dann dadurch, daß man jenen Kreis um  $G$  bestimmt, auf welchem die Beschleunigungen die Größe  $\frac{g}{\omega^2}$  haben und diesen Kreis mit dem neuen



Wendekreis  $\overline{OJ^*}$  zum Schnitt bringt.

5. *Kräfte, die einen Punkt als Beschleunigungspol erzeugen.* Wird der Bewegungszustand  $(u, v, \omega)$  und der Beschleunigungspol festgehalten,  $x_j = a, y_j = b$ , so wird dieser von den  $\infty^1$  Kräften erzeugt, deren Koordinaten  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{N}$  die beiden Gleichungen (9) erfüllen:

$$(22) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} - b\mathfrak{N} = a \\ \mathfrak{Y} + a\mathfrak{N} = b. \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, daß die dadurch definierten  $\infty^1$  Kräfte durch einen Punkt  $(\xi, \eta)$  hindurchgehen, dessen Koordinaten sind:

$$(23) \quad \xi = \frac{-k^2 a}{a^2 + b^2}, \quad \eta = \frac{k^2 b}{a^2 + b^2},$$

(er liegt daher invers zu  $(ab)$  mit Bezug auf den Kreis mit dem Radius  $k$  um  $S$ ), und daß ihre Endpunkte eine Gerade erfüllen, deren Gleichung ist

$$(24) \quad ax + by + (k^2 - a^2 - b^2) = 0.$$

Wir nennen ein solches Gebilde einen *geradlinig begrenzten Kraftbüschel* oder kurz *Kraftbüschel*, den Punkt  $\xi, \eta$  seinen *Mittelpunkt* und die Gerade (24) seine *Begrenzungslinie*. Die Parallele zu letzterer durch den Mittelpunkt nennen wir die *Grundlinie* und die Verbindungslinie der Endpunkte der in  $S$  angesetzten Kräfte *die nach  $S$  reduzierte Begrenzungslinie*. Es ist die Gleichung der Grundlinie:

$$(25) \quad ax + by + k^2 = 0$$

und die der reduzierten Begrenzungslinie:

$$(26) \quad ax + by - (a^2 + b^2) = 0.$$

Die Koordinaten der genannten „charakteristischen Elemente“ des Kraftbüschels, nämlich des Mittelpunkts, der Grundlinie, Begrenzungslinie und reduzierten Begrenzungslinie sind also

$$(27) \quad \begin{cases} 1 : \xi : \eta = -(a^2 + b^2) : k^2 a : k^2 b, \\ 1 : u_1 : v_1 = k^2 : a : b, \\ 1 : u_2 : v_2 = k^2 - (a^2 + b^2) : a : b, \\ 1 : u_3 : v_3 = -(a^2 + b^2) : a : b. \end{cases}$$

Wir erhalten daher das Resultat, daß jeder Punkt der Ebene als Beschleunigungspol wie auch als Wendepol und Tangentialpol von den

$\infty^1$  Kräfte eines Kraftbüschels erzeugt werden kann. Die Gleichungen, die jene Punkte definieren, sind ganz analog gebaut: (9) (16) (17) bzw. (14) und zwei analogen. Es liegt daher nahe, im allgemeinen das System von zwei linearen, nicht homogenen Gleichungen zwischen den Koordinaten  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{N}$ , bzw. homogenen zwischen den Größen  $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$  als geometrische Definition des Kraftbüschels anzusehen. Dadurch gelangen wir auch zu einer allgemeineren Auffassung der in diesem Absatz ermittelten charakteristischen Elemente eines Kraftbüschels.

6. *Der geradlinig begrenzte Kraftbüschel.* Wir wollen hier aus der Geometrie des durch 2 homogene lineare Gleichungen zwischen den vier homogenen Variablen  $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$  definierten Gebildes jene Eigenschaften entwickeln, die wir im Folgenden verwenden werden. — Gegeben seien die Gleichungen

$$(28) \quad \begin{cases} a_0 \mathfrak{X}_0 + a_1 \mathfrak{X}_1 + a_2 \mathfrak{X}_2 + a_3 \mathfrak{X}_3 = 0, \\ b_0 \mathfrak{X}_0 + b_1 \mathfrak{X}_1 + b_2 \mathfrak{X}_2 + b_3 \mathfrak{X}_3 = 0. \end{cases}$$

Es liegt nun nahe, diese Größen  $\mathfrak{X}_0 \dots$  als homogene Koordinaten im  $R_3$  zu denken, so daß durch diese beiden Gleichungen eine (eigentliche oder uneigentliche) Gerade definiert wird als die Schnittlinie der beiden Ebenen (28). Auf diese Weise entspricht jedem der  $\infty^4$  Kraftbüschel der Ebene eine Gerade des  $R_3$  ein-eindeutig. Daraus ergibt sich, daß man für den Kraftbüschel in der Ebene „Linienkoordinaten“ einführen kann:

$$\mathfrak{P}_{01} : \mathfrak{P}_{02} : \mathfrak{P}_{03} : \mathfrak{P}_{23} : \mathfrak{P}_{31} : \mathfrak{P}_{12},$$

welche durch die zweireihigen Unterdeterminanten der Matrix der Koeffizienten definiert sind:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

nämlich:

$$(29) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_{01} = a_0 b_1 - a_1 b_0, & \mathfrak{P}_{23} = a_2 b_3 - a_3 b_2, \\ \mathfrak{P}_{02} = a_0 b_2 - a_2 b_0, & \mathfrak{P}_{31} = a_3 b_1 - a_1 b_3, \\ \mathfrak{P}_{03} = a_0 b_3 - a_3 b_0, & \mathfrak{P}_{12} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{cases}$$

Die Linienkoordinaten sind nur durch ihre Verhältnisse bestimmt und an die quadratische Identität gebunden;

$$(30) \quad \frac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}) \equiv \mathfrak{P}_{01}\mathfrak{P}_{23} + \mathfrak{P}_{02}\mathfrak{P}_{31} + \mathfrak{P}_{03}\mathfrak{P}_{12} = 0.$$

Die Schnittlinie wird dann uneigentlich, d. h. sie fällt ins Unendliche, wenn

$$a_1 : a_2 : a_3 = b_1, b_2 : b_3,$$

und wird dann unbestimmt, wenn die Ebenen zusammenfallen, d. h. wenn

$$a_0 : a_1 : a_2 : a_3 = b_0 : b_1 : b_2 : b_3,$$

also die beiden gegebenen Gleichungen nicht voneinander unabhängig sind.

Unter Verwendung der Linienkoordinaten  $\mathfrak{P}$  erhält man für die homogenen Koordinaten des Mittelpunktes des durch die Gleichungen (28) definierten Kraftbüschels:

$$(31) \quad \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 = \mathfrak{P}_{03} : - \mathfrak{P}_{02} : \mathfrak{P}_{01}.$$

(Dabei ist hier  $x\mathfrak{Y} - y\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$  angenommen worden, also  $k = 1$  gesetzt oder das  $\frac{1}{k^2}$  in die Koeffizienten von  $\mathfrak{N}$  einbezogen gedacht.) Ferner für die Koordinaten der Grundlinie

$$(32) \quad u_0 : u_1 : u_2 = \mathfrak{P}_{12} : - \mathfrak{P}_{31} : \mathfrak{P}_{23},$$

für die Begrenzungslinie

$$(33) \quad v_0 : v_1 : v_2 = \mathfrak{P}_{12} + \mathfrak{P}_{03} : - \mathfrak{P}_{31} : \mathfrak{P}_{23}.$$

Denkt man sich alle Kräfte parallel zu sich selbst verschoben, bis sie durch den Ursprung des Koordinatensystems  $S$  gehen, so erfüllen ihre Endpunkte die *Begrenzungslinie des nach  $S$  reduzierten Kraftbüschels*, oder kurz die *reduzierte Begrenzungslinie*; ihre homogenen Koordinaten sind

$$(34) \quad w_0 : w_1 : w_2 = \mathfrak{P}_{03} : - \mathfrak{P}_{31} : \mathfrak{P}_{23}.$$

Das Ineinanderliegen von Mittelpunkt und Grundlinie ist ausgedrückt durch

$$(35) \quad (\xi u) \equiv \xi_0 u_0 + \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}) \equiv 0.$$

Die Länge der Senkrechten vom Mittelpunkt auf die Begrenzungslinie ist gegeben durch

$$(36) \quad \text{dist}(v, \xi) = \frac{(v\xi)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 \cdot \xi_0}} = \frac{\mathfrak{P}_{03}}{\sqrt{\mathfrak{P}_{31}^2 + \mathfrak{P}_{23}^2}}, \quad (\text{wenn } \mathfrak{P}_{03} \neq 0).$$

(Durch Festlegung der Wurzelgröße kann der Kraftbüschel „orientiert“ werden.) Wir können daher sagen:

I. *Durch ein System von zwei homogenen linearen Gleichungen zwischen den homogenen Kraftkoordinaten  $\mathfrak{X}_0 : \mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3$  ist ein Kraftbüschel definiert; nach Einführung der homogenen Koordinaten  $\mathfrak{P}$  sind die charakteristischen Elemente durch die Gleichungen (31) bis (34) gegeben.*

Eliminieren wir  $\mathfrak{N}$  aus den 2 Gleichungen (28), so erhalten wir

$$\frac{\mathfrak{X}_1 \mathfrak{P}_{12} + \mathfrak{X}_0 \mathfrak{P}_{02}}{\mathfrak{P}_{23}} = \frac{\mathfrak{X}_2 \mathfrak{P}_{12} - \mathfrak{X}_0 \mathfrak{P}_{01}}{\mathfrak{P}_{31}}$$

d. h.

$$\mathfrak{X}_0 \mathfrak{P}_{03} - \mathfrak{X}_1 \mathfrak{P}_{31} + \mathfrak{X}_2 \mathfrak{P}_{23} = 0,$$

oder

$$(37) \quad (\mathfrak{X}w) \equiv \mathfrak{X}_0 w_0 + \mathfrak{X}_1 w_1 + \mathfrak{X}_2 w_2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung der reduzierten Begrenzungslinie. Ganz analog erhalten wir durch Elimination von  $\mathfrak{X}_0$ :

$$\mathfrak{X}_1 \mathfrak{P}_{01} + \mathfrak{X}_2 \mathfrak{P}_{02} + \mathfrak{X}_3 \mathfrak{P}_{03} = 0$$

oder

$$(38) \quad \mathfrak{X}_1 \xi_2 - \mathfrak{X}_2 \xi_1 + \mathfrak{X}_3 \xi_0 = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die Kraft durch den Mittelpunkt hindurchgeht. Die beiden Gleichungen (37) und (38) werden von allen Kräften des Kraftbüschels erfüllt und können als Bestimmungsgleichungen für den Kraftbüschel gelten. Sie geben auch das Kriterium dafür ob eine gegebene Kraft ( $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ ) dem Kraftbüschel  $\mathfrak{P}$  angehört oder nicht.

Wenn der Mittelpunkt auf die Begrenzungslinie fällt, so möge das so entsprechende Gebilde als ein *Kraftstrahl* bezeichnet werden. Die einzige Bedingung dafür, daß ein Kraftbüschel in einen Kraftstrahl degeneriert, ist, daß

$$(39) \quad \mathfrak{P}_{03} \equiv a_0 b_3 - a_3 b_0 = 0$$

ist, denn dann sind Grundlinie und Begrenzungslinie identisch. Der Mittelpunkt  $\xi$  fällt für diesen Fall auf dieser Geraden unbestimmt aus. Die Bedingung  $\mathfrak{P}_{03} = 0$  besagt, daß die beiden Gleichungen (28) bezüglich  $\mathfrak{X}_0$  und  $\mathfrak{X}_3$  nicht voneinander unabhängig sind. Die Gleichungen (37) und (38) lauten dann

$$\mathfrak{X}_1 \mathfrak{P}_{31} = \mathfrak{X}_2 \mathfrak{P}_{23}, \quad \mathfrak{X}_1 \mathfrak{P}_{01} = -\mathfrak{X}_2 \mathfrak{P}_{02},$$

sind also wegen  $\frac{1}{3}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}) \equiv 0$  identisch. Die reduzierte Begrenzungslinie geht durch den Koordinatenanfangspunkt  $S$ , wie (34) zeigt.

7. *Beziehung zwischen den Kraftbüscheln der Ebene und den Geraden des  $R_3$ .*

Jedem getrennten Systeme eines Punktes ( $\xi$ ) und einer Geraden ( $v$ ) als Mittelpunkt und Begrenzungslinie ist ein-eindeutig eine Gerade des  $R_3$  zugeordnet, die in folgender Weise erhalten werden kann. Nach (31) und (33) setzen wir

$$(31') \quad \begin{cases} \xi_0 = \varrho \mathfrak{P}_{03} \\ \xi_1 = -\varrho \mathfrak{P}_{02} \\ \xi_2 = \varrho \mathfrak{P}_{01} \end{cases} \quad (33') \quad \begin{cases} v_0 = \sigma(\mathfrak{P}_{12} + \mathfrak{P}_{03}) \\ v_1 = -\sigma \mathfrak{P}_{31} \\ v_2 = \sigma \mathfrak{P}_{23}, \end{cases}$$

somit ist

$$(40) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_{01} = \frac{\xi_2}{\varrho}, & \mathfrak{P}_{02} = -\frac{\xi_1}{\varrho}, & \mathfrak{P}_{03} = \frac{\xi_0}{\varrho}, \\ \mathfrak{P}_{23} = \frac{v_2}{\sigma}, & \mathfrak{P}_{31} = -\frac{v_1}{\sigma}, & \mathfrak{P}_{12} = \frac{v_0}{\sigma} - \frac{\xi_0}{\varrho}. \end{cases}$$

Die zwischen diesen Größen bestehende quadratische Identität (31) liefert mithin, wenn  $\xi_0 v_0 + \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 = (\xi v)$  gesetzt wird:

$$\frac{(\xi v)}{\sigma} = \frac{\xi_0^2}{\varrho}.$$

Daher werden die Gleichungen (mit  $\sigma = (\xi v)$ ,  $\varrho = \xi_0^2$ ):

$$(40') \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_{01} = \frac{\xi_2}{\xi_0^2}, & \mathfrak{P}_{02} = -\frac{\xi_1}{\xi_0^2}, & \mathfrak{P}_{03} = \frac{\xi_0}{\xi_0^2} \\ \mathfrak{P}_{23} = \frac{v_2}{(\xi v)}, & \mathfrak{P}_{31} = -\frac{v_1}{(\xi v)}, & \mathfrak{P}_{12} = \frac{v_0}{(\xi v)} - \frac{\xi_0}{\xi_0^2} \end{cases}$$

$$(41) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_{01} = \xi_2(\xi v), & \mathfrak{P}_{02} = -\xi_1(\xi v), & \mathfrak{P}_{03} = \xi_0(\xi v) \\ \mathfrak{P}_{23} = v_2 \xi_0^2, & \mathfrak{P}_{31} = -v_1 \xi_0^2, & \mathfrak{P}_{12} = v_0 \xi_0^2 - \xi_0(\xi v) \\ & & = \xi_0(\xi_0 v_0 - (\xi v)). \end{cases}$$

Von diesem gegenseitigen Entsprechen sind nur jene Paare von Punkten und Geraden ausgeschlossen, die ineinanderliegen. Ist  $(\xi v) = 0$ , so folgt (wenn  $\xi_0 \neq 0$ )

$$\mathfrak{P}_{01} = \mathfrak{P}_{02} = \mathfrak{P}_{03} = 0, \quad \mathfrak{P}_{23} = v_2, \quad \mathfrak{P}_{31} = -v_1, \quad \mathfrak{P}_{12} = v_0.$$

Der zu  $v$  gehörige Punkt von  $v$  selbst wird daher unbestimmt; dies stimmt übrigens mit der Eigenschaft des Kraftstrahles überein, keinen bestimmten Mittelpunkt zu haben.

8. *Über die Geometrie der Kraftbüschel in der Ebene.* Ohne an dieser Stelle auf die Geometrie der Kraftbüschel in der Ebene genauer einzugehen, wollen wir nur einige Punkte anfügen, die sich unmittelbar an die bisherigen Bestimmungen anschließen.

Durch die Einführung der Koordinaten  $\mathfrak{P}$  ist die Geometrie der Kraftbüschel in der Ebene identisch gemacht mit der Geometrie der Geraden des  $R_3$ . Die Gruppe von Transformationen, welche die Kraftbüschel miteinander vertauschen, ist daher ähnlich mit der Gruppe  $G_{15}$  der  $\infty^{15}$  Kollineationen des  $R_3$ . Die  $\infty^2$  Geraden der unendlich fernen Ebene des  $R_3$  werden dabei abgebildet auf die  $\infty^2$  Geraden der Ebene (d. h. auf die Kraftstrahlen: spezielle Kraftbüschel mit unbestimmtem Mittelpunkt).

a) Den  $\infty^3$  Geraden, welche eine gegebene Gerade ( $\mathfrak{P}$ ) des  $R_3$  schneiden (spezieller Komplex), entsprechen in der Ebene folgende Verhältnisse: Die Bedingung für das Schneiden zweier Geraden  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$  ist gegeben durch

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) = \mathfrak{P}_{01}\mathfrak{Q}_{23} + \mathfrak{P}_{02}\mathfrak{Q}_{31} + \mathfrak{P}_{03}\mathfrak{Q}_{12} + \mathfrak{P}_{23}\mathfrak{Q}_{01} + \mathfrak{P}_{31}\mathfrak{Q}_{02} + \mathfrak{P}_{12}\mathfrak{Q}_{03} = 0.$$

In der Geometrie der Kraftbüschel lautet die Bedingung, wenn wir die Koordinaten der bezüglichen Mittelpunkte und Begrenzungslinien mit  $\xi, v$  und  $\xi', v'$  bezeichnen:

$$(42) \quad \begin{cases} \xi_2(\xi v)\xi_0^2 v_2' + \xi_1(\xi v)\xi_0^2 v_1' + \xi_0(\xi v)\xi_0 \{ \xi_0 v_0' - (\xi' v') \} \\ + \xi_2'(\xi' v')\xi_0^2 v_2 + \xi_1'(\xi' v')\xi_0^2 v_1 + \xi_0'(\xi' v')\xi_0 \{ \xi_0 v_0 - (\xi v) \} = 0 \end{cases}$$



oder, wenn wir (nach Study) mit  $(lx)$  die in Punktkoordinaten lineare Form bezeichnen, deren Koeffizienten die Zahlenwerte  $l_0 = 1, l_1 = 0, l_2 = 0$  haben, so daß identisch  $(xl) = x_0$  ist und  $(xl) = 0$  die Gleichung der unendlich fernen Geraden bedeutet, so erhalten wir

$$(43) \quad \frac{(\xi v)}{(\xi l)} \left\{ \frac{(\xi v')}{(\xi l)} - \frac{(\xi' v')}{(\xi' l)} \right\} = \frac{(\xi' v')}{(\xi' l)} \left\{ \frac{(\xi v)}{(\xi l)} - \frac{(\xi' v)}{(\xi' l)} \right\}.$$

Wenn wir beachten, daß der Abstand eines Punktes  $x$  von einer Geraden  $u$  gegeben ist durch

$$(44) \quad \text{dist}(u, x) = \frac{(xu)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot (xl)},$$

und wenn wir noch die zu  $v$  und  $v'$  gehörigen Grundlinien  $u$  und  $u'$  der beiden Kraftbüschel einführen, so lautet die Bedingung

$$(45) \quad \frac{\text{dist}(\xi v)}{\text{dist}(\xi' u)} = - \frac{\text{dist}(\xi' v')}{\text{dist}(\xi u')},$$

oder

$$(45) \cdot \quad \frac{\text{dist}(\xi v)}{\text{dist}(\xi' u)} : \frac{\text{dist}(\xi' v')}{\text{dist}(\xi u')} = - 1;$$

dies ist die Beziehung, die man als „Schneiden“ zweier Kraftbüschel bezeichnen muß. (Fig. 3.)

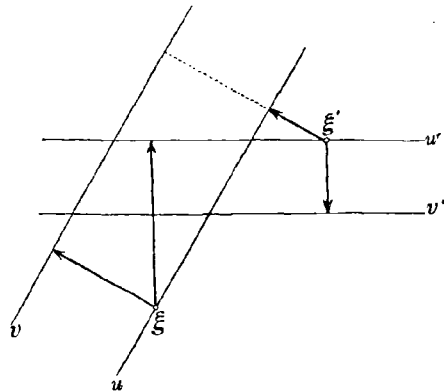
Zu jedem Punkte  $\xi'$  der Ebene gibt es  $\infty^1$  Kraftbüschel  $(\xi', v')$ , die einen gegebenen Kraftbüschel  $(\xi, v)$  „schneiden“; ebenso gibt es zu jeder Geraden  $v'$   $\infty^1$  Mittelpunkte  $\xi'$ , so daß die entstehenden Kraftbüschel  $(\xi', v')$  einen gegebenen Kraftbüschel „schneiden“. Und zwar gehen die  $\infty^1$  Begrenzungslinien  $v'$ , die zu dem festen Punkte  $\xi'$  gehören, durch einen Punkt und die  $\infty^1$  Mittelpunkte  $\xi'$ , die zu der festen Geraden  $v'$  gehören, liegen in einer Geraden (wie sich leicht aus (43) ergibt).

b) Die Gleichung  $(\mathfrak{B}\mathfrak{B}) = 0$  bedeutet, wenn  $\mathfrak{B}$  einen veränderlichen Kraftbüschel bedeutet, die Gleichung des Kraftbüschels  $\mathfrak{B}$ .

c) Die Bedingung des Parallelismus zweier Kraftbüschel drückt sich (auf ähnliche Weise übertragen) dadurch aus, daß sie denselben Mittelpunkt haben. Konzentrische Kraftbüschel sind „parallel“.

d) Auf diesen Grundlagen könnte man eine vollständige Geometrie der Kraftbüschel der Ebene entwickeln, welche durch die  $G_{15}$  charak-

Fig. 3.



terisiert ist. Unter einem „linearen Komplex“ oder „Gewinde“ von Kraftbüscheln würde man das Gebilde zu verstehen haben, das durch eine homogene lineare Gleichung

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) = 0$$

definiert ist, worin die  $\mathfrak{P}$  sechs Verhältnisgrößen sind, welche die Identität (30) nicht befriedigen; man erhält ein System von  $\infty^3$  Kraftbüscheln der Ebene, welche so angeordnet sind, das jedem Punkte der Ebene  $\xi$  als Mittelpunkt  $\infty^1$  Gerade  $v$  als Begrenzungslinien entsprechen, welche durch einen Punkt hindurchgehen, während jeder Geraden  $v$  als Begrenzungslinie i. a.  $\infty^1$  Punkte als Mittelpunkte entsprechen, die einen Kegelschnitt erfüllen. — Zwei Gleichungen  $(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) = 0$ ,  $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X}) = 0$  definieren eine lineare Kongruenz usw. In dieser Weise würde man für jede Aussage der Liniengeometrie des  $R_3$  eine analoge der Geometrie der Kraftbüschel in der Ebene erhalten; man wird alle Begriffe der Liniengeometrie, Komplex, Zentralachse, Regelschar, Parameter, involutorische Lage usw. übertragen können.

e) Eine Parameterdarstellung der einzelnen Strecken eines Kraftbüschels erhält man aus (28), indem man sie nach  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$  auflöst. Man erhält bei inhomogener Schreibweise:

$$\mathfrak{X} = \frac{\mathfrak{N}\mathfrak{P}_{23} - \mathfrak{P}_{01}}{\mathfrak{P}_{12}}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{\mathfrak{N}\mathfrak{P}_{31} - \mathfrak{P}_{01}}{\mathfrak{P}_{13}},$$

worin  $\mathfrak{N}$  direkt als Parameter gelten kann.

Mit Benützung dieser Gleichungen können wir noch eine andere Auffassung der Verwandtschaft der Kraftbüschel der Ebene mit den Geraden des  $R_3$  verbinden, durch die Relationen

$$(46) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_{12}\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{P}_{31}\mathfrak{X}_3 = \mathfrak{P}_{01} \\ \mathfrak{P}_{23}\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{P}_{12}\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{P}_{02} \\ \mathfrak{P}_{31}\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{P}_{23}\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{P}_{03} \end{cases}$$

Erklärt man nun 3 Vektoren im  $R_3$  durch

$$\mathfrak{R} = (\mathfrak{P}_{23}, \mathfrak{P}_{31}, \mathfrak{P}_{12}), \quad \mathfrak{S} = (\mathfrak{P}_{01}, \mathfrak{P}_{02}, \mathfrak{P}_{03}), \quad \mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3)$$

so bedeuten die Gleichungen (46)  $(\mathfrak{R} \perp \mathfrak{S})$

$$(47) \quad [\mathfrak{R}, \mathfrak{X}] = \mathfrak{S},$$

wenn durch  $[\ ]$  das vektorielle Produkt gegeben ist. Diese Gleichung ist als symbolische Gleichung jener Geraden  $\mathfrak{X}$  im  $R_3$  aufzufassen, welcher in der Ebene der durch die Größen  $\mathfrak{P}$  definierte Kraftbüschel entspricht.

9. *Koordinaten der Kraftbüschel, die  $G(x_g, y_g)$ ,  $J(x_i, y_i)$ ,  $H(x_h, y_h)$  erzeugen.* Unter Verwendung nichthomogener Koordinaten erhält man,

wenn jetzt  $\frac{N}{m\omega^2} = \mathfrak{N}$  gesetzt und die erzeugenden Kraftbüschel mit  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{H}$  bezeichnet werden:

a) Beschleunigungspol  $G(x_g, y_g)$ . Der erzeugende Kraftbüschel ist nach (9) gegeben durch die Gleichungen:

$$(9) \quad \begin{cases} x_g - \mathfrak{X} & + \frac{y_g}{k^2} \mathfrak{N} = 0 \\ y_g & - \mathfrak{Y} - \frac{x_g}{k^2} \mathfrak{N} = 0, \end{cases}$$

daher

$$(48) \quad \begin{cases} \mathfrak{G}_{01} = y_g, & \mathfrak{G}_{23} = \frac{y_g}{k^2} \\ \mathfrak{G}_{02} = -x_g, & \mathfrak{G}_{31} = -\frac{x_g}{k^2} \\ \mathfrak{G}_{03} = -\frac{x_g^2 + y_g^2}{k^2}, & \mathfrak{G}_{12} = 1. \end{cases}$$

b) Wendepol  $J(x_i, y_i)$ . Der Kraftbüschel ist gegeben durch (16)

$$(16) \quad \begin{cases} x_i - \mathfrak{X} & + \frac{y_i}{k^2} \mathfrak{N} = 0, \\ y_i & - \mathfrak{Y} - \frac{x_i}{k^2} \mathfrak{N} = 0, \end{cases}$$

daher

$$(49) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_{01} = y_i, & \mathfrak{S}_{23} = \frac{y_i}{k^2} \\ \mathfrak{S}_{02} = -x_i, & \mathfrak{S}_{31} = -\frac{x_i}{k^2} \\ \mathfrak{S}_{03} = -\frac{x_i x_i + y_i y_i}{k^2}, & \mathfrak{S}_{12} = 1. \end{cases}$$

c) Tangentialpol  $H(x_h, y_h)$ . Der Kraftbüschel ist definiert durch (17)

$$(17) \quad \begin{cases} y_0 & - \mathfrak{Y} - \frac{x_h}{k^2} \mathfrak{N} = 0, \\ -x_0 + \mathfrak{X} & - \frac{y_h}{k^2} \mathfrak{N} = 0, \end{cases}$$

daher

$$(50) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_{01} = y_0, & \mathfrak{H}_{23} = \frac{y_h}{k^2} \\ \mathfrak{H}_{02} = -x_0, & \mathfrak{H}_{31} = -\frac{x_h}{k^2} \\ \mathfrak{H}_{03} = -\frac{x_0 x_h + y_0 y_h}{k^2}, & \mathfrak{H}_{12} = 1. \end{cases}$$

Damit erhalten wir für die charakteristischen Elemente der Kraftbüschel nach (31) bis (34) folgende Koordinaten:

a) Beschleunigungspol:

$$(51) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Mittelpunkt} & 1 : \xi : \eta = -(x_g^2 + y_g^2) : k^2 x_g : k^2 y_g, \\ \text{Grundlinie} & 1 : u_1 : v_1 = k^2 : x_g : y_g, \\ \text{Begrenzungslinie} & 1 : u_2 : v_2 = k^2 - (x_g^2 + y_g^2) : x_g : y_g, \\ \text{reduzierte „} & 1 : u_3 : v_3 = -(x_g^2 + y_g^2) : x_g : y_g, \end{array} \right.$$

(übereinstimmend mit (27))

b) Wendepol:

$$(52) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Mittelpunkt} & 1 : \xi : \eta = -(x_0 y_i + y_0 y_i) : k^2 x_i : k^2 y_i, \\ \text{Grundlinie} & 1 : u_1 : v_1 = k^2 : x_0 : y_0, \\ \text{Begrenzungslinie} & 1 : u_2 : v_2 = k^2 - (x_0 x_i + y_0 y_i) : x_0 : y_0, \\ \text{reduzierte „} & 1 : u_3 : v_3 = -(x_0 x_i + y_0 y_i) : x_0 : y_0. \end{array} \right.$$

c) Tangentialpol:

$$(53) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Mittelpunkt} & 1 : \xi : \eta = -(x_0 x_h + y_0 y_h) : k^2 x_0 : k^2 y_0, \\ \text{Grundlinie} & 1 : u_1 : v_1 = k^2 : x_h : y_h, \\ \text{Begrenzungslinie} & 1 : u_2 : v_2 = k^2 - (x_0 x_h + y_0 y_h) : x_h : y_h, \\ \text{reduzierte „} & 1 : u_3 : v_3 = -(x_0 x_h + y_0 y_h) : x_h : y_h. \end{array} \right.$$

In allen drei Fällen gilt identisch  $1 + \xi u_1 + \eta v_1 = 0$ , ferner sind Grundlinie, Begrenzungslinie, reduzierte Begrenzungslinie einander parallel. In der Bildung dieser Koordinaten herrscht eine weitgehende Symmetrie, die quadratischen Glieder in a) tauchen in b) und c) „polarisiert“ auf.

10. *Kraftbüschel allgemeiner Lage und seine Erzeugnisse.* Damit ein Kraftbüschel einen gegebenen Punkt als Beschleunigungspol, Wendepol oder Tangentialpol erzeuge, ist notwendig und hinreichend, daß seine Koordinaten die Form von (48) (49) (50) bzw. haben. Ist ein beliebiger Kraftbüschel vorgelegt, so trifft dies i. a. *nicht* zu, und wir stellen uns die Aufgabe, die Polörter zu bestimmen, die von einem Kraftbüschel allgemeiner Lage erzeugt werden. Es gilt der Satz:

II. *Ein Kraftbüschel allgemeiner Lage erzeugt als Ort der Beschleunigungspole einen Kreis (Beschleunigungspolkreis) und als Ort der Wendepole und Tangentialpole je eine Gerade (Wendepolgerade und Tangentialpolgerade).*

Um die bezüglichen homogenen Koordinaten der erzeugten Gebilde zu erhalten, verfahren wir so: Gegeben sei ein Kraftbüschel durch zwei Gleichungen (28)

$$(28) \quad \begin{cases} a_0 + a_1 \mathfrak{X} + a_2 \mathfrak{Y} + a_3 \mathfrak{N} = 0, \\ b_0 + b_1 \mathfrak{X} + b_2 \mathfrak{Y} + b_3 \mathfrak{N} = 0, \end{cases}$$

dessen Linienkoordinaten  $\mathfrak{P}_{ik}$  seien:  $\frac{1}{2}(\mathfrak{P} \mathfrak{P}) \equiv 0$ .

a) *Beschleunigungspolkreis*. Bezeichnen  $\mathfrak{G}_{ik}$  die durch (48) definierten Größen, so ist

$$(54) \quad (\mathfrak{P} \mathfrak{G}) = 0$$

d. i.

$$(54) \quad \mathfrak{P}_{12}(x_g^2 + y_g^2) + (\mathfrak{P}_{02} + k^2 \mathfrak{P}_{31})x_g - (\mathfrak{P}_{01} + k^2 \mathfrak{P}_{23})y_g - k^2 \mathfrak{P}_{03} = 0$$

die Gleichung des durch  $\mathfrak{P}$  erzeugten Beschleunigungspolkreises. Man gelangt zu diesem Resultat, indem man aus (28) und (9) die Größen  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{N}$  eliminiert. Man erhält als Eliminationsresultat:

$$(55) \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ x_g & -1 & 0 & \frac{y_g}{k^2} \\ y_g & 0 & -1 & -\frac{x_g}{k^2} \end{vmatrix} = 0,$$

woraus mit Benützung des Laplaceschen Determinantensatzes die Gleichung (54) folgt. (54) kann als lineare Gleichung zwischen den tetracyklischen Koordinaten  $x_g^2 + y_g^2, x_g, y_g, 1$  angesehen werden und ist daher die Gleichung eines Kreises. Der Radius des Kreises ergibt sich allgemein zu

$$\frac{\sqrt{(\mathfrak{P}_{02} - k^2 \mathfrak{P}_{31})^2 + (\mathfrak{P}_{01} - k^2 \mathfrak{P}_{23})^2}}{2 \mathfrak{P}_{12}},$$

und die Koordinaten seines Mittelpunktes zu

$$-\frac{\mathfrak{P}_{02} + k^2 \mathfrak{P}_{31}}{2 \mathfrak{P}_{12}}, \quad \frac{\mathfrak{P}_{01} + k^2 \mathfrak{P}_{23}}{2 \mathfrak{P}_{12}}.$$

b) *Wendepolgerade*. Die Gleichung der durch den Kraftbüschel (28) erzeugten Wendepolgeraden ergibt sich zu

$$(56) \quad (\mathfrak{P} \mathfrak{Z}) = 0,$$

wenn  $\mathfrak{Z}_{ik}$  die durch (48) definierten Größen bedeuten, d. i.

$$(56') \quad (-\mathfrak{P}_{03} k^2 + \mathfrak{P}_{02} x_0 - \mathfrak{P}_{01} y_0) + (\mathfrak{P}_{31} k^2 + \mathfrak{P}_{12} x_0) x_i + (-\mathfrak{P}_{23} k^2 + \mathfrak{P}_{12} y_0) y_i = 0.$$

c) *Tangentialpolgerade*. Ihre Gleichung ist

$$(57) \quad (\mathfrak{P} \mathfrak{H}) = 0$$

wenn  $\mathfrak{H}_{ik}$  die Größen (50) sind, oder

$$(57') \quad k^2(-\mathfrak{P}_{03} + \mathfrak{P}_{31} x_0 - \mathfrak{P}_{23} y_0) + (\mathfrak{P}_{02} + \mathfrak{P}_{12} x_0) x_h + (-\mathfrak{P}_{01} + \mathfrak{P}_{12} y_0) y_h = 0.$$

Der Beweis der Gleichungen (56) und (57) ist analog wie der für (54).

Dadurch sind die Beziehungen vollständig auf geometrische zurückgeführt. Sind  $\mathfrak{P}_{ik}, \mathfrak{Q}_{ik}$  Koordinaten von zwei Kraftbüscheln in der Ebene, so sagt das Bestehen der Relation  $(\mathfrak{P} \mathfrak{Q}) = 0$  aus, daß sie sich schneiden. In Art. 9 haben wir u. a. gesehen, daß jeder der  $\infty^2$  Punkte

der Ebene für sich als Beschleunigungspol durch einen Kraftbüschel erzeugt wird (48); von diesem werden durch (54) jene  $\infty^1$  herausgehoben, welche den gegebenen Kraftbüschel „schneiden“ (Art. 8a); die zugehörigen Punkte  $x_y, y_y$  erfüllen dann den Beschleunigungspolkreis. Ebenso sind die Gleichungen (56) und (57) zu deuten.

10. *Umkehrung: Beschleunigungspolkreis, Wendepolgerade, Tangentialgerade gegeben, die erzeugenden  $\mathfrak{P}$  gesucht.*

a) Gegeben der Beschleunigungspolkreis, gesucht die Koordinaten  $\mathfrak{P}$  des erzeugenden Kraftbüschels.

Da in der Ebene  $\infty^3$  Kreise, aber  $\infty^4$  Kraftbüschel vorhanden sind, so gibt es eine Schar von  $\infty^1$  Kraftbüscheln, die einen gegebenen Kreis als Beschleunigungspolkreis erzeugen. Sei die Gleichung des gegebenen Kreises

$$(58) \quad a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0,$$

so erhalten wir durch Vergleich mit (54'):

$$(59) \quad a : b : c : d = \mathfrak{P}_{12} : \mathfrak{P}_{03} + k^2 \mathfrak{P}_{31} : - (\mathfrak{P}_{01} + k^2 \mathfrak{P}_{23}) : - k^2 \mathfrak{P}_{03},$$

was drei in  $\mathfrak{P}$  lineare Gleichungen darstellt; es gibt daher in der Tat  $\infty^1$  Kraftbüschel, die zu dem gegebenen Kreis (58) gehören. (Ihnen entspricht eine Regelschar des  $R_3$ .)

Die Mittelpunkte dieser  $\infty^1$  Kraftbüschel erfüllen einen Kreis, die  $\infty^1$  Begrenzungslinien und Grundlinien umhüllen ebenfalls Kreise; und zwar ergibt sich als Ort der Mittelpunkte:

$$(60) \quad -\frac{d}{k^2}(\xi^2 + \eta^2) + b\xi + c\eta - ak^2 = 0,$$

und es ist leicht zu sehen, daß dieser Kreis die Inversion des gegebenen am Kreise  $k$  um  $S$  ist. Als Gleichung des Umhüllungsgebildes der Grundlinien ergibt sich:

$$(61) \quad ak^2(u_1^2 + v_1^2) + bu_1 + cv_1 + \frac{d}{k^2} = 0$$

ferner bei den Begrenzungslinien:

$$(62) \quad (ak^2 - d)(u_2^2 + v_2^2) + bu_2 + cv_2 + \frac{ad}{ak^2 - d} = 0$$

und den Begrenzungslinien der nach  $S$  reduzierten Kraftbüschel

$$(63) \quad -d(u_3^2 + v_3^2) + bu_3 + cv_3 - a = 0.$$

Zwischen den Koordinaten  $\mathfrak{P}_{i,k}$  der Kraftbüschel bestehen in diesem Falle die Bedingungsbeziehungen (59), d. h.:

$$(64) \quad \begin{cases} d\mathfrak{P}_{23} = c\mathfrak{P}_{03} - \frac{d}{k^2}\mathfrak{P}_{01} \\ d\mathfrak{P}_{31} = -b\mathfrak{P}_{03} - \frac{d}{k^2}\mathfrak{P}_{02} \\ d\mathfrak{P}_{12} = -ak^2\mathfrak{P}_{03}, \end{cases}$$

wonach sich mit Benützung der Identität  $(\mathfrak{P}\mathfrak{P}) = 0$  und der Gleichungen (31) bis (34) die Gleichungen (60) bis (63) ergeben.

b) Die Wechsellagerade ist gegeben, man suche die Koordinaten  $\mathfrak{P}$  der erzeugenden Kraftbüschel.

Jede Gerade der Ebene wird durch  $\infty^2$  Kraftbüschel erzeugt, da es  $\infty^2$  Gerade, aber  $\infty^4$  Kraftbüschel gibt. Gegeben sei die Gleichung der Geraden

$$(65) \quad ax + by + c = 0.$$

Durch Vergleich mit (56') folgt

$$(66) \quad a : b : c = \mathfrak{P}_{31}k^2 + \mathfrak{P}_{12}x_0 : \mathfrak{P}_{23}k^2 + \mathfrak{P}_{12}y_0 : -\mathfrak{P}_{03}k^2 + \mathfrak{P}_{02}x_0 - \mathfrak{P}_{01}y_0.$$

Dies sind zwei Bedingungsgleichungen, denen die Größen  $\mathfrak{P}$  zu genügen haben; sie würden im Raume eine lineare Kongruenz darstellen, so daß wir das durch sie definierte Gebilde eine *lineare Kongruenz von Kraftbüscheln* nennen können.

Zu jedem angenommenen Punkte

$$(67) \quad 1 : \xi : \eta = \mathfrak{P}_{03} : -\mathfrak{P}_{02} : \mathfrak{P}_{01}$$

als Mittelpunkt gehört eine bestimmte Begrenzungslinie, die bestimmt ist durch

$$(68) \quad 1 : u_2 : v_2 = \mathfrak{P}_{12} + \mathfrak{P}_{03} : -\mathfrak{P}_{31} : \mathfrak{P}_{23},$$

wobei, wenn  $f = \frac{bx_0 - ay_0}{k^2}$  gesetzt wird, und  $-\mathfrak{P}_{03}k^2 + \mathfrak{P}_{02}x_0 - \mathfrak{P}_{01}y_0 \neq 0$ :

$$(69) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_{23} = -\frac{f}{c}\mathfrak{P}_{01} + \frac{b}{c}\mathfrak{P}_{03}, \\ \mathfrak{P}_{31} = \frac{f}{c}\mathfrak{P}_{01} - \frac{a}{c}\mathfrak{P}_{03}, \\ \mathfrak{P}_{12} = -\frac{b}{c}\mathfrak{P}_{01} + \frac{a}{c}\mathfrak{P}_{02}. \end{cases}$$

Zu dem Punkt (67) gehört daher die Begrenzungslinie:

$$1 : u_2 : v_2 = c - a\xi - b\eta : a - f\eta : b + f\xi.$$

Die dadurch festgelegten Beziehungen zwischen den Punkten und der Ebene können wir noch in etwas allgemeinerer Weise ausdrücken. Die Gleichungen (66) lauten nämlich:

$$(70) \quad \begin{cases} -ay_0\mathfrak{P}_{01} + ax_0\mathfrak{P}_{02} - ak^2\mathfrak{P}_{03} & \cdot & -ck^2\mathfrak{P}_{31} - cx_0\mathfrak{P}_{12} = 0 \\ -by_0\mathfrak{P}_{01} + bx_0\mathfrak{P}_{02} - bk^2\mathfrak{P}_{03} + ck^2\mathfrak{P}_{23} & \cdot & -cy_0\mathfrak{P}_{12} = 0. \end{cases}$$

Die Koeffizienten dieser Gleichungen erfüllen die identische Bedingung  $\frac{1}{2}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) \equiv 0$  und können daher als Koordinaten je eines neuen Kraftbüschels angesehen werden. Sucht man alle Kraftbüschel, welche diese beiden Gleichungen erfüllen, so heißt dies, alle Kraftbüschel auf-

suchen, die zwei gegebene schneiden. Die Koordinaten der beiden in (70) gegebenen Kraftbüschel  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  lauten:

$$(71) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_{01} = 0, & \mathfrak{A}_{23} = -ay_0, \\ \mathfrak{A}_{02} = -ck^2, & \mathfrak{A}_{31} = ax_0, \\ \mathfrak{A}_{03} = -cx_0, & \mathfrak{A}_{12} = -ak^2, \end{cases}$$

und

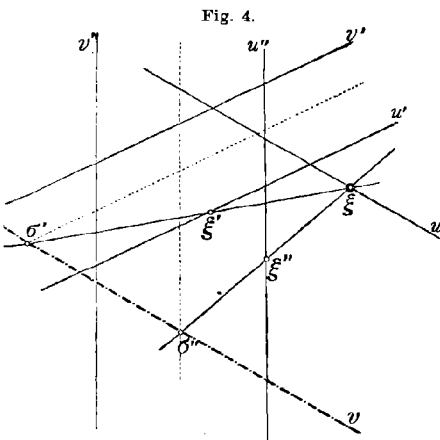
$$(72) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}_{01} = ck^2, & \mathfrak{B}_{23} = -by_0, \\ \mathfrak{B}_{02} = 0, & \mathfrak{B}_{31} = bx_0, \\ \mathfrak{B}_{03} = -cy_0, & \mathfrak{B}_{12} = -bk^2. \end{cases}$$

Daraus ergeben sich die Koordinaten der Mittelpunkte, Grundlinien und Begrenzungslinien von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  ( $c \neq 0$ ) zu:

$$(73) \quad (\mathfrak{A}) \begin{cases} 1 : \xi : \eta = -x_0 : k^2 : 0, \\ 1 : u_1 : v_1 = k^2 : x_0 : y_0, \\ 1 : u_2 : v_2 = cx_0 + ak^2 : ax_0 : ay_0, \end{cases} \quad (\mathfrak{B}) \begin{cases} = -y_0 : 0 : k^2, \\ = k^2 : x_0 : y_0, \\ = cy_0 + bk^2 : bx_0 : by_0. \end{cases}$$

Die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte ist die gemeinsame Grundlinie der beiden festen Kraftbüschel  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , die von allen zu suchenden Kraftbüscheln geschnitten werden müssen;  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  schneiden sich auch ihrerseits:  $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = 0$ , und können leicht konstruiert werden.

Die  $\infty^2$  Kraftbüschel, die eine gegebene Gerade  $i$  als Wendepolgerade erzeugen, erfüllen daher eine lineare Kongruenz.



**Zusatz:** Um zu einem gegebenen Punkt  $M$  eine Gerade so zu ziehen, daß der entsprechende Kraftbüschel zwei gegebene  $\mathfrak{A}(\xi'v')$  und  $\mathfrak{B}(\xi''v'')$  schneidet, verfahren wir in folgender Weise. Wir haben in Art. 8.a) gesehen, daß die Begrenzungslinien  $v$  der Kraftbüschel mit gemeinsamem Mittelpunkt  $\xi$ , die einen gegebenen Kraftbüschel  $\mathfrak{A}(\xi'v')$  schneiden, durch einen Punkt  $\sigma'$  der Geraden  $\xi\xi'$  hindurchgehen

(Fig. 4); auf ähnliche Weise erhält man für den Kraftbüschel  $\mathfrak{B}$  einen Punkt  $\sigma''$ . Die Verbindungslinie der Punkte  $\sigma'$  und  $\sigma''$  ist dann die zu  $\xi$  gehörige Begrenzungslinie  $v$ , so daß der Kraftbüschel  $(\xi v)$  sowohl  $\mathfrak{A}$  wie  $\mathfrak{B}$  schneidet.

Ebenso liegen die Mittelpunkte  $\xi$  der Kraftbüschel, die zu einer gegebenen Begrenzungslinie  $v$  gehören, wenn die Kraftbüschel  $(\xi v)$  einen



Kraftbüschel  $\mathfrak{A}(\xi'v')$  schneiden, auf einer Geraden  $\tau'$  durch den Schnitt von  $vv'$  (Fig. 5), und wenn sie den Kraftbündel  $\mathfrak{B}$  schneiden, auf einer Geraden  $\tau''$ . Der Schnitt von  $\tau'$  und  $\tau''$  ist der zu  $v$  gehörige Mittelpunkt  $\xi$ , so daß der Kraftbüschel  $(\xi v)$  sowohl  $\mathfrak{A}$  wie  $\mathfrak{B}$  schneidet.

c) Der Fall der gegebenen Tangentialpolgeraden erledigt sich vollkommen analog dem Falle b), es ergibt sich gleichfalls eine lineare Kongruenz von Kraftbüscheln.

Wir können sonach die Gleichungen (54) (56) und (57) in doppelter Weise auffassen und erhalten einmal die von einem vorgelegten Kraftbüschel  $\mathfrak{B}$  erzeugten Polörter  $\mathfrak{G}, \mathfrak{S}, \mathfrak{H}$ , und das anderemal, wenn die Größen

$\mathfrak{G}_{ik}, \mathfrak{S}_{ik}, \mathfrak{H}_{ik}$  bekannt angenommen werden, erhalten wir die Systeme aller Mannigfaltigkeiten von Kraftbüscheln für einen gegebenen Polort. Im ersten Falle finden wir insbesondere für den Ort der Beschleunigungspole eine lineare Gleichung zwischen den Größen  $\mathfrak{G}$ , die sich zu 4 tetrazyklischen Koordinaten zusammenschließen, und im letzteren für eine gegebene Wendepol- und Tangentialpolgerade je eine lineare Kongruenz von Kraftbüscheln; die Beziehung  $(\mathfrak{B}\mathfrak{G}) = 0$  läßt den engen Zusammenhang von Liniengeometrie und Kreisgeometrie der Ebene erkennen.

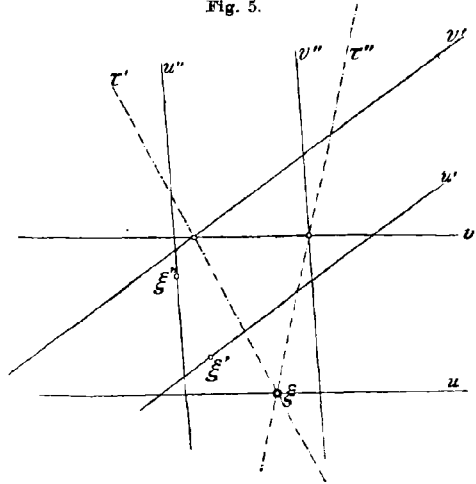
11. *Andere Deutung des J erzeugenden Kraftbüschels.* Das Resultat, daß die reduzierte Begrenzungslinie des Kraftbüschels, der einen Punkt  $J$  der Ebene als Wendepol erzeugt, durch  $J \perp OS$  hindurchgeht, gestattet noch eine andere Deutung, auf die wir noch hinweisen wollen. Wenn man den Krümmungsradius  $R_s$  der Bahn des Schwerpunktes  $S$  bestimmt, so findet man nach leichter Rechnung

$$(74) \quad \frac{1}{R_s} = \left( \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right)_{x=0, y=0} = \frac{\mathfrak{X}x_0 + \mathfrak{Y}y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x_0 x_i + y_0 y_i}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und dies ist der Ausdruck für die bekannte Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes für die Bahn eines Systempunktes mit Benützung des Wendepols (s. z. B. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte I, S. 462):

$$R_s = \frac{OS^2}{SJ_1},$$

Fig. 5.



wenn  $J_1$  die Projektion des Punktes  $J$  auf den Strahl  $OS$  bedeutet. Die Bedingung für die Lage der Begrenzungslinie des nach  $S$  reduzierten Kraftbüschels ( $\perp OS$  durch  $J$ ) deckt sich mithin vollkommen mit der Bedingung, daß die Krümmung der Schwerpunktsbahn bzw. der Normalbeschleunigung des Schwerpunktes vorgeschrieben ist.

12. Analoge Überlegungen, wie die am Ausgangspunkte der vorstehenden Darstellung, können auch auf den Raum angewendet werden. In jedem bewegten räumlichen System gibt es stets einen und i. a. nur einen Punkt, der keine Beschleunigung erfährt — den *Beschleunigungspol*. Den  $\infty^3$  Punkten des Raumes stehen so die  $\infty^3$  Dynamen gegenüber; Jedem Punkte entsprechen  $\infty^3$  Dynamen, die ihn als Beschleunigungspol erzeugen, ihre Achsen bilden i. a. einen quadratischen Komplex. Die Untersuchung der hier auftretenden Verhältnisse, insbesondere der dynamischen Verhältnisse bei den möglichen Freiheitsgraden als eine weitere Anwendung der Schraubentheorie, soll in einer späteren Arbeit durchgeführt werden.

### III. Anwendungen auf das einzelne zwangläufige System.

13. *Ermittlung der Reaktionen und des Beschleunigungszustandes mit Hilfe des Satzes des vorigen Abschnittes.*

a) Ein ebenes System bewege sich so, daß zwei seiner Punkte

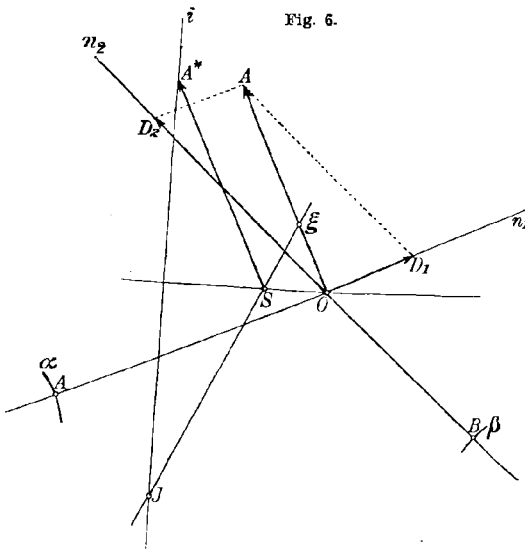


Fig. 6.  
 feste Kurven beschreiben, deren Krümmungshalbmesser gegeben seien, so daß in jedem Augenblicke der Drehpol  $O$ , Wendepol  $J$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gegeben sind, man ermittle die Reaktionen der Kurven (Fig. 6).

Wenn keine anderen Kräfte auf das System einwirken, so suche man den Kraftbüschel ( $\xi v$ ), welcher den Punkt  $J$  als Wendepol erzeugen kann. Der Mittelpunkt  $\xi$  liegt invers zu  $J$  in bezug auf den Kreis mit  $k$  um  $S$ ,  $\overline{JS} \cdot \overline{S\xi} = k^2$ , die reduzierte Begrenzungslinie  $i$  geht durch

$J \perp OS$ . Da auf das System nur die Reaktionen der festen Kurven einwirken, die offenbar in den Normalenrichtungen  $n_1$  und  $n_2$  liegen, so muß die Resultierende dieser Kräfte durch deren Schnittpunkt  $O$

hindurchgehen. Verbindet man daher  $O\xi$  und zieht durch  $S$  dazu eine Parallele, so ist  $\overrightarrow{SA^*}$  die reduzierte resultierende Kraft. Zieht man daher  $OA \neq OA^*$  und zerlegt  $OA$  nach den Richtungen  $n_1$  und  $n_2$  in zwei Komponenten, so sind diese die gesuchten Reaktionen  $D_1$  und  $D_2$ .

Die Methode versagt nur in dem Falle, wo der Mittelpunkt  $\xi$  nach  $O$  fällt, in diesem Falle tritt die früher vom Verfasser angegebene, weniger einfache Methode an ihre Stelle.

b) Wenn aber noch äußere Kräfte auf das System einwirken, so fassen wir diese zu einer Resultierenden  $P$  zusammen und ermitteln den von ihr allein erzeugten Wendepol  $J_p$ . Nun bildet man

$$\overrightarrow{SJ^*} = \overrightarrow{SJ} - \overrightarrow{SJ_p}$$

und verfährt mit  $J^*$  gerade so wie früher mit  $J$ .

14. *Drehung um einen festen Punkt  $O \equiv J$ .* Wirken keine äußeren Kräfte ein, so ist  $\overrightarrow{SJ}$  die gesuchte reduzierte Reaktion.

a) Handelt es sich z. B. um die Bestimmung der Reaktion eines festen Punktes für ein *schweres* System, das sich mit bekannter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  bewegt, so trage man in  $O$  entgegen der Richtung der Schwerebeschleunigung die Strecke  $\frac{g}{\omega^2}$  ab, so ist der Endpunkt  $J^*$  (Fig. 7) der Punkt, der als Wendepol der durch  $O$  gehenden Reaktion allein erzeugt wird. Man ziehe daher  $i$  durch  $J^* \perp SO$ , ermittle den Mittelpunkt  $\xi$  durch die Bedingung  $\xi S \cdot \overrightarrow{SJ^*} = k^2$ , verbinde ferner  $\xi$  mit  $O$  und mache  $SA^* \parallel \xi O$ .  $OA \neq SA^*$  ist dann die gesuchte reduzierte Reaktion des Punktes  $O$ .

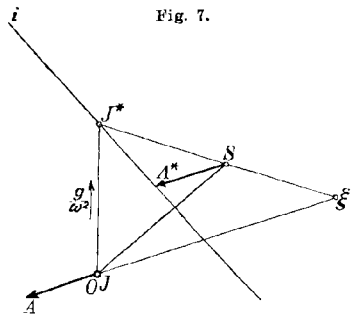


Fig. 7.

b) Wenn außerdem noch eine äußere Kraft  $P$  auf das System wirkt, so verfähre man ganz ebenso wie in 13b); man ermittle zunächst den von ihr allein erzeugten Wendepol  $J_p$ , mache  $\overrightarrow{SJ^*} = \overrightarrow{SJ} - \overrightarrow{SJ_p}$  usw. Auch hier tritt die früher erwähnte Unbestimmtheit dann und nur dann auf, wenn  $\xi$  mit  $O$  zusammenfällt.

(Fortsetzung folgt.)

## Filtergeometrie.

Von Dr. L. DARAPSKY in Hamburg.

Das gebräuchlichste Verfahren, Wasser zu reinigen, bedient sich dazu eines Bettes von Sand oder Kies in wechselnder Dicke und Feinheit. Auch die Natur verfährt nicht anders, wenn sie Trümmergesteine von Wasser durchströmen läßt, freilich nicht zu dem Zweck, solches zu verbessern, wohl aber mit der Wirkung, es in seiner chemischen Zusammensetzung teils durch Lösung, teils durch Abscheidung sehr wesentlich zu beeinflussen. So ist der Geologe nicht weniger als der Wasserfachmann an diesem Prozesse interessiert.

Die Bestandteile der natürlichen Filter sind begreiflicher Weise äußerst mannigfacher Natur. Aber auch die Kunst, die durch Sieben und Waschen ein möglichst gleichmäßiges Korn sich aussucht, bleibt auf das ihr in den Alluvionen gebotene Rohmaterial angewiesen und kann darum nichts liefern, was eine streng mathematische Behandlung rechtfertigte. Die zahlreich vorliegenden Versuche, über Druck und Filtriergeschwindigkeit ins Reine zu kommen, wie sie F'r. H. King<sup>1)</sup> und Ph. Forchheimer<sup>2)</sup> zusammengetragen haben, begnügen sich denn auch damit, dem praktischen Ingenieur die erwünschten Daten in Form von Koeffizienten und Exponenten an die Hand zu geben, oft ohne die den Beobachtungen zugrunde gelegten Gesteinsfragmente auch nur näher zu charakterisieren, oder unter Annahme eines „Gleichmäßigkeitskoeffizienten“ der Filterbestandteile, nach Hazen<sup>3)</sup>, den Forchheimer<sup>4)</sup> als „Ungleichförmigkeitsgrad“ kennzeichnet.

Das Problem liegt für eine allgemeine Lösung offenbar zu unbestimmt und zu kompliziert. Der erste, der es zunächst auf einfache Bedingungen beschränkte und in sehr dankenswerter Weise streng formulierte, scheint Charles S. Slichter<sup>5)</sup> gewesen zu sein. Da er aber seine Entwicklung über Strömungsrichtung und Strömungsbewegungen auf räumliche Anschauungen gründete, die nicht in allen Teilen

1) Principles and conditions of the movements of ground water (19<sup>th</sup> Annual Report of the United States Geological Survey 1897—98, part II, S. 59).

2) Wasserbewegung durch Boden (Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1901, S. 1736; ds. Journ. 1902, S. 118).

3) 34<sup>th</sup> Annual Report of the State Board of Health of Massachusetts for 1892.

4) L. c. S. 1738.

5) Theoretical Investigation of the motion of ground water (19<sup>th</sup> Ann. Rep. of the U. S. Geological Survey 1897—98, part II, S. 295).

zutreffen, soll hier der *rein geometrische Teil des Filterbaus in seiner abstrakt vollkommenen Form als ein Haufwerk gleichgroßer Kugeln* den Gegenstand erneuter Untersuchung bilden. Jede physikalische Annahme, wie sie zur Erklärung von Bewegungsvorgängen unentbehrlich ist, scheidet dabei aus. Rein elementare Ableitungen werden hinreichen, Gestalt und Zusammenhang des Filtergerüstes und seiner Porenräume eingehend kennen zu lernen und damit eine zuverlässige Unterlage für weitere Entwicklung zu schaffen.

Ein bekanntes Beispiel für eine solche Anordnung bilden die früher in Zeughäusern zu Pyramiden aufgestapelten Vollkanonenkugeln. Die Frage nach der Zahl der Kugeln in jeder Schicht, nach ihren Berührungspunkten und Abständen hat die Mathematiker vielfach beschäftigt. Ebenso die Frage, in welcher Polyederform sich größere und kleinere Kugeln überhaupt gruppieren lassen. Es wäre müßig, diese Möglichkeiten zu entwickeln, ohne unmittelbaren Gewinn für die Technik daraus ziehen zu können. Nur der Grenzfall eines streng regelmäßig gelagerten Haufwerkes von Kugeln gleicher Dimension kann einige Klarheit schaffen. So faßte Slichter den Fall und richtete seine volle Aufmerksamkeit dabei auf die Porenräume als die einzigen, die für die Filtration Bedeutung haben. Zur Unterstützung des Vorstellungsvermögens nahm er Gipsabgüsse von diesem Inneren. Es entging seiner Beobachtung auch nicht, daß über einer Lage in der Ebene dicht zusammengelagerter Kugeln sich eine zweite in doppelter Weise schichten läßt<sup>1)</sup>, ohne daß die gegenseitige Lage der Kugeln dadurch sich ändert.

Fig. 1.

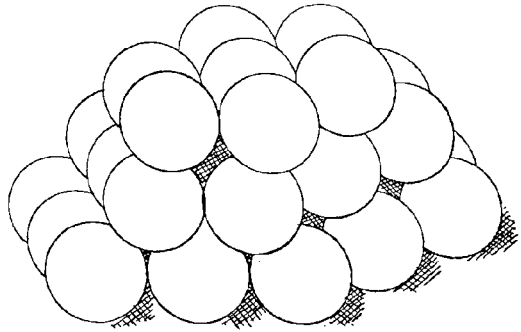
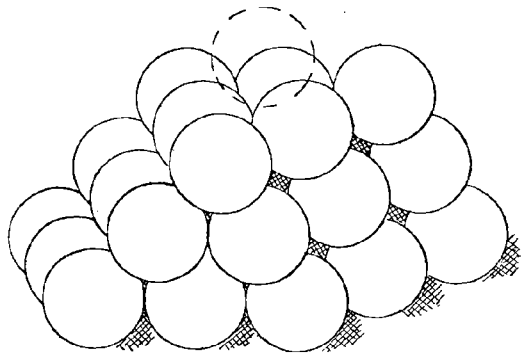


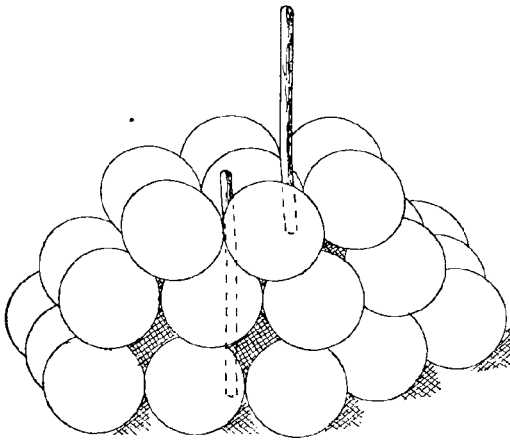
Fig. 2.



1) „Fig. 55 is essentially the same as Fig. 54, as the arrangement in Fig. 55, can be made from the arrangement of Fig. 54 by displacing the upper spheres one place, leaving the lower spheres unchanged“ l. c. S. 308.

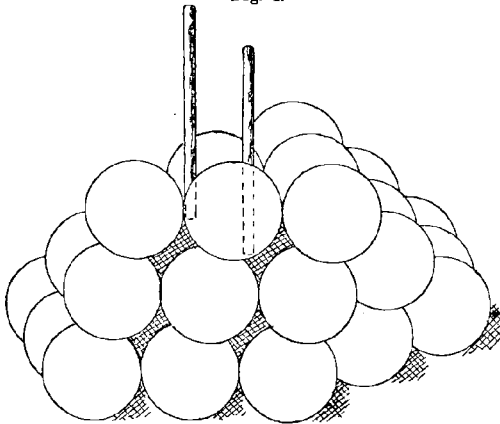
Er übersah dabei, daß die Poren dabei mitwandern, deren es in der gedachten Anordnung zwei Arten von verschiedenen Größen gibt. Er rechnet nur mit einer und gelangt dadurch zu irrigen Schlüssen.

Fig. 3.



Dieser Ausgangspunkt ist zu wichtig, um ihn nicht anschaulich festzuhalten. Fig. 1 gibt eine dreifache Kugelschicht wieder, wovon man sich für den Augenblick die unterste wegdenken mag, weil sie für den Vorgang der ersten Vertauschung aus dem Spiel bleibt. Die Ansicht ist wegen der Geschlossenheit des Objekts, ebenso wie die folgenden, in Parallelperspektive genommen, also ohne Fluchtpunkt, mit Ansatz der hinteren Achse unter 45 Grad und gleichzeitiger Verkürzung der Maße auf die Hälfte. Der geometrische Vergleich ist so für jeden Teil leicht. Die zwölf Kugeln des mittleren Stockwerks tragen nach

Fig. 4.



oben sieben weitere im Sechseck gelagert. Entfernt man die letzteren und läßt sie einzeln statt in die früher von jeder eingenommene Ausparung zwischen je drei Kugeln in die benachbarte rollen, so wird aus Fig. 1 Fig. 2. Die ebene Kugelreihe bildet diesmal ein Dreieck; es finden aber nur noch sechs Kugeln Platz, so daß man die siebente, um sie nicht in der Hand zu behalten, mitten darüber gesetzt hat. An diesem Verhältnis ändert sich nichts, wenn man die gleiche Vertauschung zwischen der unteren und mittleren Lage vornimmt (Fig. 3 und 4) und dann erst die oberste aufsetzt, nur daß das Dreieck, das diese oberste Schicht darstellt, jetzt mit seinen Spitzen anders orientiert ist. Weitere Verschiebungen sind aber nicht möglich. Dabei hat das äußere Ansehen

oben sieben weitere im Sechseck gelagert. Entfernt man die letzteren und läßt sie einzeln statt in die früher von jeder eingenommene Ausparung zwischen je drei Kugeln in die benachbarte rollen, so wird aus Fig. 1 Fig. 2.

Die ebene Kugelreihe bildet diesmal ein Dreieck; es finden aber nur noch sechs Kugeln Platz, so daß man die siebente, um sie nicht in

insofern eine kleine Veränderung erfahren, als die in Fig. 1 und 2 dem Beschauer zugewandte geschlossene Front in Fig. 3 und besonders 4 nach der Seite gewendet ist, wie man an den sich zwischen den vorderen Kugeln auftuenden größeren Lücken bemerkt. Das deutet auf eine Änderung der gegenseitigen Lage. Untersucht man das Innere mit einem Glasstab, der zwischen je drei Kugeln sich ungehindert von oben einführen läßt, so findet man, daß die Sonde sich in Fig. 3 abwechselnd bis zum Grund und bis zur oberen Reihe, in Fig. 4 aber nur bis zur oberen und unteren Kugelreihe, nie frei bis zum Grund durchstecken läßt; wie ebenda zeichnerisch mit einem Stab von gleicher Höhe angedeutet ist. In Fig. 1 und 2 reicht die Wegsamkeit in gerader

Fig. 5.

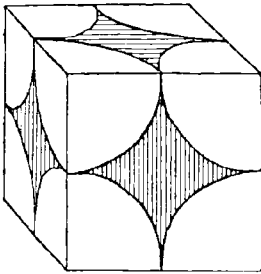
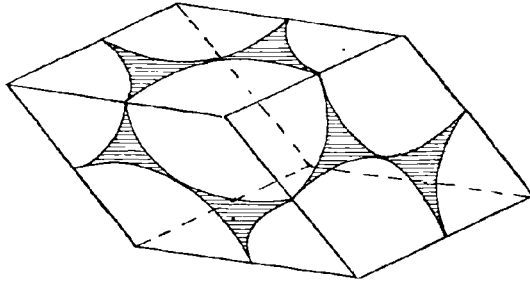


Fig. 6.



Richtung immer nur bis zur Mittelreihe. Die Verbindung der Porenräume hat sich sonach verschoben.

Wie verändern sich diese Poren selbst bei einer Verschiebung der Kugeln? Slichter gibt dafür eine Ableitung, in die übersichtlich alle theoretisch möglichen Fälle sich einordnen. Ausgehend von der denkbar einfachsten Verteilung der Kugeln, wobei diese die Ecken eines Würfels einnehmen, jede einzelne somit sechs andere berührt, läßt er durch Neigen der aufrecht stehenden Kanten den Würfel schließlich in einen Rhomboeder übergehen. Der erste Fall (Fig. 5) bedeutet die möglichst lose Packung der Filterkörner, der entgegengesetzte Grenzfall (Fig. 6), wobei jede Kugel sich mit zwölf anderen berührt, die dichteste Packung.

Der nicht von den Kugeln eingenommene Raum ergibt sich durch Verminderung des vollen Würfels um eine ganze Kugel von halb so großem Radius. Dieser Radius sei allen folgenden Berechnungen als Einheit zugrunde gelegt. Für jeden beliebigen Winkel (in der Fläche genommen) folgt aus Fig. 7:

$$h = 2 \sin \alpha.$$

Die Grundfläche ist somit:  $4 \sin \alpha$ .

$$b = 2 \cos \alpha$$

$$c = \frac{b}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

Folglich

$$d^2 = 4 - c^2 = 4 - \frac{4 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$d = 2 \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

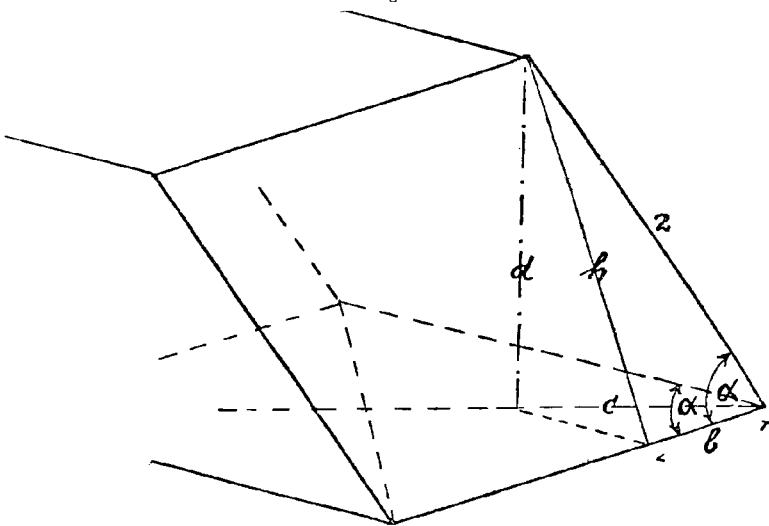
Der Inhalt wird alsdann:

$$4 \sin \alpha \cdot d = 8 \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

und durch entsprechende Umformung, unter Elimination des halben Winkels,

$$= 8(1 - \cos \alpha) \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}$$

Fig. 7.



Hieraus läßt sich der Porenraum für jeden Winkel zwischen den gegebenen Grenzen von  $60^\circ$  und  $90^\circ$  berechnen, da der entsprechende Kugelraum offenbar stets eine ganze Kugel ausmacht. In Prozenten des Gesamtraumes erhält man für die beiden extremen Fälle 25,95<sup>1)</sup> und 47,64. Dazwischen liegen alle Werte für die Stellungen, bei denen die Kugeln zwar aus dem rechtwinkligen Verband gelöst, aber noch

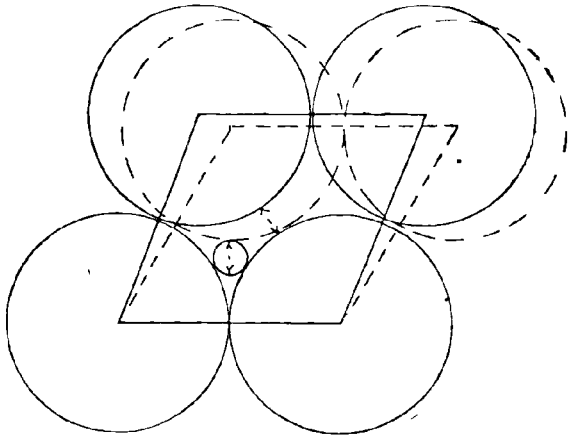
1) Bei Otto Lueger, Die Wasserversorgung der Städte, steht versehentlich S. 123 und 421 0,27 statt 0,26 (0,2595).



nicht zur Berührung mit neuen Kugeln gelangt sind. In dem Maße, als die Neigung zunimmt, verdrückt sich die eingekerbte Raute in der Seitenwand der gewählten Einheit (Fig. 5), die den Durchlaß an dieser Stelle begrenzt, mehr und mehr, indem sie sich in der Mitte einschnürt. Aber erst mit dem Anstoßen jeder Kugel an die ihr diagonal ursprünglich gegenüberliegende verdoppelt sich die Zahl der Berührungen von sechs auf zwölf, und die ausgezogene Raute zerreißt in zwei Dreispitze (Fig. 6).

Für den Winkel  $67^\circ$ , der einem Porenraum von  $35\%$  entspricht, wie er auch bei ausgewählten runden Körnern faktisch kaum je unterschritten wird, nähern sich die Kugeln bis auf  $2 \times 0,1038$ . Bei  $70\frac{1}{2}^\circ$  wird diese Lücke zu  $2 \times 0,154$ , d. i. gleich dem Durchmesser des in den engsten Durchlaß (bei  $60^\circ$ ) einbeschreibbaren Kreises, wie später zu zeigen ist. Vgl. Fig. 8. Von einer Spaltung der Raute in zwei Teile kann also hier noch keine Rede sein.

Fig. 8.



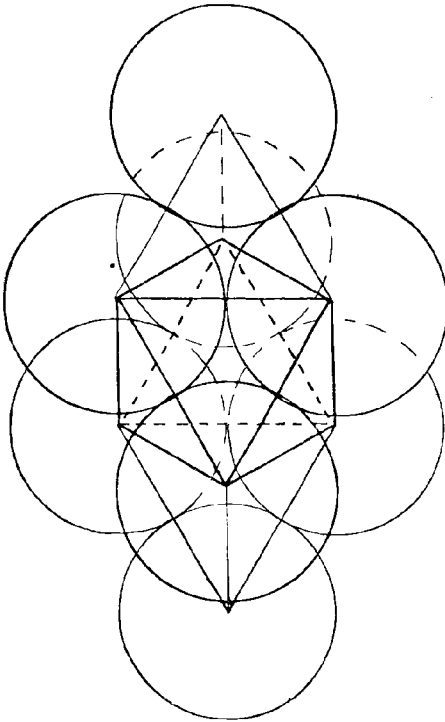
Ebenso einschneidend wie die Änderung an der Oberfläche ist begreiflicherweise die des Inneren, über welche die rein rechnerische Inhaltsziffer keinen Aufschluß gibt. Slichter hat sich begnügt, vier Kugeln in ihrer gegenseitigen Stellung in der Form der dichtesten Packung zu betrachten und ein dazu symmetrisches Bild aller übrigen angenommen. Diese Unterstellung trifft nicht zu und führt deshalb zu falschen Schlüssen. Bei der engsten Lagerung, die im folgenden allein behandelt werden soll, weil nur sie eine einfache Abbildung liefert, treten im Gegensatz zu der Würfelstellung, die bloß eine Art Porenraum kennt, der in den drei Hauptrichtungen gleiche Querschnitte liefert, zwei solche nebeneinander auf. Auf ihr Zusammenvorkommen deutet schon die Erfahrung hin, daß beim Einrollen der Kugeln in die Vertiefungen einer bereits vorhandenen Schicht (Fig. 1—4) diese nur abwechselnd besetzt werden können, d. h. bald größere, bald kleinere Zwischenräume lassen.

Um deren Eigenschaften im einzelnen kennen zu lernen, mögen zwei Kugellagen, diesmal in geometrischer Aufsicht (Fig. 9), dienen.

Verbindet man die **Mittelpunkte** der acht benachbarten Kugeln, so zeigt sich, daß sechs davon in die Ecken eines Oktaeders fallen, an welches die beiden übrigen sich in zwei Tetraedern anlegen, deren Flächen mit denen des Oktaeders identisch sind und gleichseitige Dreiecke bilden. Die Seitenlänge liefert den Abstand vom Mittelpunkte; er ist stets gleich zwei Radien.

Während also vier Kugeln sich immer so ordnen lassen, daß ihre Zentren Eckpunkte eines Tetraeders bilden, ist dies bei mehr Kugeln

Fig. 9.



nicht der Fall. Es wechseln alsdann Oktaeder mit Tetraedern in der Weise ab, daß sich jene längs einer Kante nur noch berühren, und zwar enthalten die Oktaeder diejenigen Durchlässe, in denen sich, im Grundriß gesehen, sechs Kugeln schneiden (Fig. 10). Es wird gut sein, alle ebenen Durchlässe als Porenluken oder Luken schlechthin von den Poren als Raumerfüllungen zu unterscheiden. Nur die Luken heben sich natürlich im Grundriß davon ab. Es sind das die jeweilig engsten Querschnittsstellen, die nur in einer Art und Größe vorliegen, wie schon daraus erhellt, daß sie ja bei den betrachteten zwei Kugellagen stets aus einem Tetraederraum in einen Oktaederraum führen und umgekehrt.

Fig. 11 gibt sie der Klarheit zu Liebe getrennt für ein und das

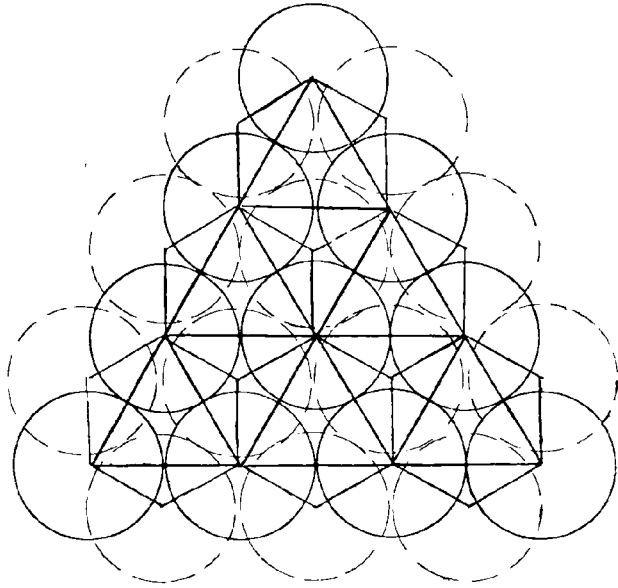
andere Gebilde wieder, samt den sie begrenzenden Hauptkreisen. Beim Oktaeder liegen ja zwei solcher Luken einander gegenüber, alle anderen (beim Tetraeder bis auf eine) erscheinen in der gewählten Stellung unter einem Winkel von  $70^{\circ}32'$ . Die Größe einer solchen Porenluke läßt sich aus der Tetraederseite nach Abzug der drei Kreisausschnitte, die zusammen einen Halbkreis ausmachen, bestimmen. Bei der Seitenlänge 2 mißt die Höhe des Dreiecks  $\sqrt{3}$ , sein Inhalt ebenfalls  $\sqrt{3}$ .

$$(1) \quad \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} = 1,7320 - 1,5708 = 0,1612$$

(wobei immer der Radius 1 zu ergänzen ist).

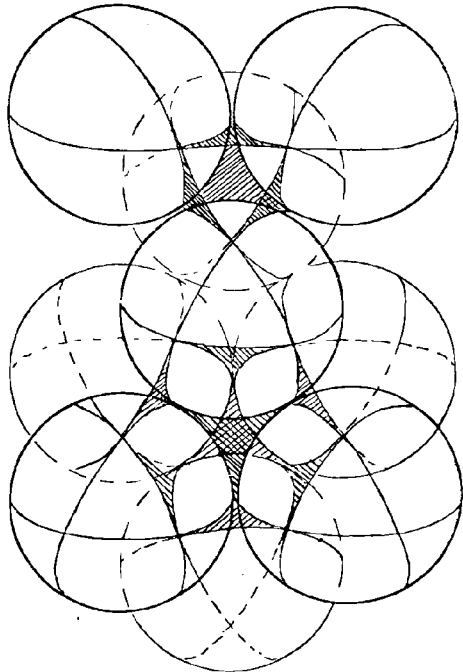
Dertetraedrische, bzw. oktaedrische Porenraum ist nicht ganz so einfach auszumessen, indem dazu die Kenntnis der daran teilnehmenden Kugel-segmente Voraussetzung bildet. An Hand der Fig. 10 verhilft dazu folgende Überlegung. Für zwei Kugellagen steht nur die nach innen gekehrte Halbkugel in Betracht. Da hier Oktaeder- und Tetraeder-segmente regelmäßig miteinander

Fig. 10.



abwechslern, kommt eine Aufteilung der Halbkugel zustande, wie sie Fig. 12 deutlich macht. Die einzelnen Stücke sind in Fig. 13 gesondert wiedergegeben. Der größte Kreis, der auf der linken Seite von Fig. 12 ein Oktaeder samt zwei Tetraedersegmenten abschneürt, bildet mit dem Grundkreis denselben Winkel, wie jede Tetraederfläche mit der benachbarten. Der Sinus dieses Winkels  $\beta$  ist aber bestimmt durch die Tetraederhöhe  $b$  und die Seitenhöhe  $h$  zu:

Fig. 11.



$$\sin \beta = \frac{\sqrt{\frac{3}{8}}}{\sqrt{3}} = 0,9428$$

$$\beta = 70^{\circ} 32'$$

$$\arcsin \beta = 1,2308.$$

Man erhält somit den doppelten Ansatz, daß die Halbkugel vier

Tetra- und drei Oktaedersegmente, zugleich aber zwei Tetra- und ein Oktaedersegment zusammen  $\frac{1,2308}{\pi}$  der Halbkugel ausmachen. Das führt auf

$$0,088 \cdot \frac{2}{3}\pi = 0,1839$$

für jedes Tetraedersegment.

Somit erhält man den tetraedrischen Porenraum:

$$(2) \quad \frac{1}{3}\sqrt{8} - 4 \cdot 0,1839 = 0,9428 - 0,7356 = 0,2072.$$

Fig. 12.

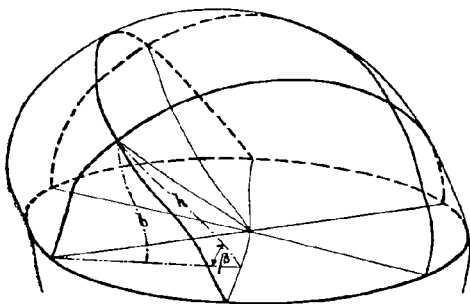
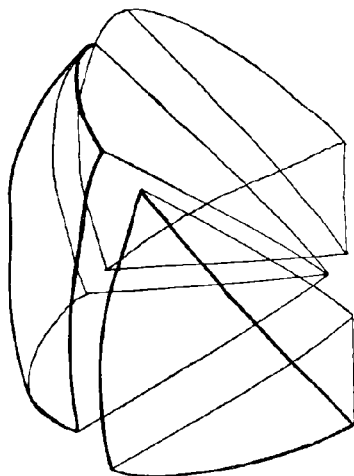


Fig. 13.



Der Berechnung des Oktaederporenraums muß die Bestimmung des Oktaederkugelsegments vorausgehen.

Man hat dafür:

$$\frac{1,2308}{\pi} \cdot \frac{2}{3}\pi - 2 \cdot 0,088 \cdot \frac{2}{3}\pi = 0,4529.$$

Das Oktaeder selbst setzt sich aus zwei Pyramiden, nach Fig. 14, zusammen. Da hier

$$2\left(\frac{f}{2}\right)^2 = 2^2$$

$$f = \sqrt{8}$$

$$k^2 = 4 - \left(\frac{f}{2}\right)^2 = 2$$

$$k = \sqrt{2},$$

so ist der Inhalt der Pyramide:

$$\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

und derjenige des Oktaeders  $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ .

Durch Subtraktion von sechs Kugelsegmenten entsteht daraus der Oktaederporenraum:

$$(3) \quad \frac{8}{3}\sqrt{2} - 6 \cdot 0,4529 = 1,0538,$$

d. i. ein wenig mehr als das fünffache des Tetraederporenraums.

Die Zerlegung der Kugel in Segmente, wie sie den anstoßenden Poren entsprechen, gibt zugleich die Möglichkeit, den Anteil zu bestimmen, welcher jeder Kugel am Gesamtporenraum zukommt. Das ist offenbar  $\frac{1}{6}$  von jeder Oktaederpore und  $\frac{1}{4}$  von jeder Tetraederpore, oder mit Rücksicht darauf, daß jede Kugel sechs Okta- und acht Tetraedersegmente zählt,

$$\frac{5}{6} \cdot 1,0538 + \frac{8}{4} \cdot 0,2072 = 1,4682.$$

von den 25,95% Porenraum des Gesamtvolumens  $\frac{4}{3}\pi + 1,4658 = 5,6546$  entfallen somit 1,0538 oder 18,60% auf die großen, und 0,4144 oder 7,35% auf die kleinen Poren, wie man sie einfach nennen kann.

Der Anzahl nach verhalten sich die beiden wie 1:2, der Raumerfüllung nach wie 5:2. Diese Werte sind unveränderlich; nicht aber ihre relative Lage.

Beim Übergang von zwei Kugelschichten auf drei wird sofort deutlich, daß die Vervollständigung von Fig. 12 zur Vollkugel ebensowohl in der Weise geschehen kann, daß an ein Oktaedersegment sich wieder ein solches oder aber ein Tetraedersegment anschließt. Mit dieser Alternative ist freilich die Wahl auch erschöpft (Fig. 3 und 4 geben anscheinend nur die um 60° verdrehte Ansicht desselben Kugelhauens wie Fig. 1

und 2 wieder). Aber die Wegsamkeit fällt, wie an eben diesen Figuren zu zeigen ist, vielfach verschieden aus, je nachdem fortlaufend in einer bestimmten Richtung, sei es in der Senkrechten oder einer der acht

Fig. 14.

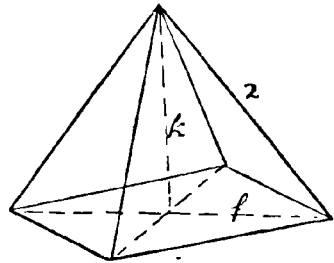
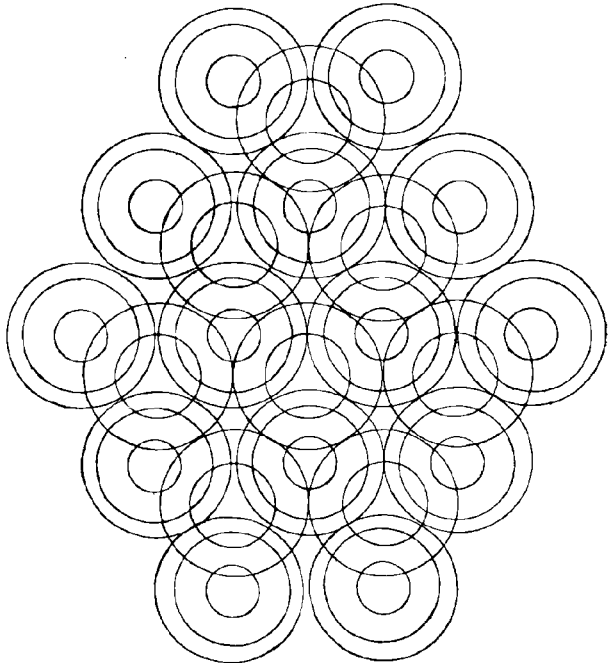
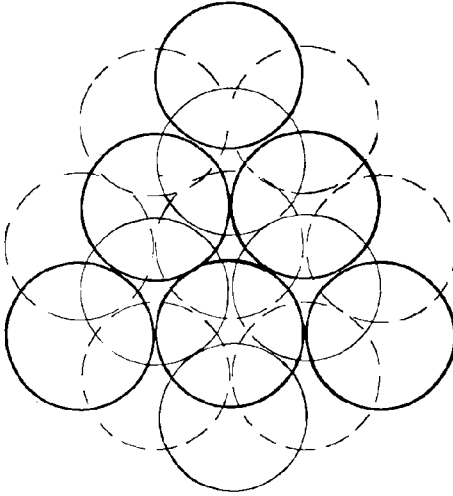


Fig. 15.



übrigen, wie sie der Sechseckplan mit sich bringt, nur große Poren zusammentreten oder nicht. Mit anderen Worten, es ist für die Durchströmung nicht gleichgültig, ob man den Glasstab als Sonde durch die ganze, beliebig viel Kugeln dicke Filtermasse bis zum Grund, schief oder

Fig. 16.



gerade einführen kann, oder ob die Durchbohrung sich auf gewisse kürzere oder längere Strecken beschränkt. Die so gekennzeichneten Schlote können wieder in der mannigfachsten Weise aufeinander treffen, oder nach Zickzacklauf blind, d. h. in einem Tetraeder endigen. Äußerlich wird davon in der Regelmäßigkeit des Aufbaues nichts bemerkbar. Gerüst und Porenverband sind keineswegs identisch.

Das Vorhandensein aufrechter Schlote tritt auch im Grundriß in der Weise hervor, daß die durchgehenden Luken alle aufeinander fallen. Jede Kugelschicht muß dann, der Lage nach, genau der zweitvorhergehenden gleich sein. Es gibt deren nur zwei. Sobald eine dritte hinzutritt, bricht der senkrechte Kanal ab. In Fig. 15 sind die jeweils übereinander folgenden Lagen durch abnehmende Kreise angedeutet, gleichsam

Fig. 17.

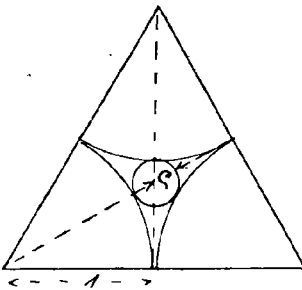
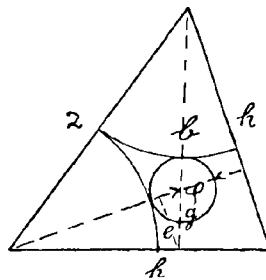


Fig. 18.



perspektivisch verkürzt, obwohl die Kugeln natürlich alle gleich sind. Die Schlote ziehen in den sechsstrahligen Sternpunkten durch. Nur die streng systematische Anordnung, wie in Fig. 16, wo-

nach jedes Oktaeder ebenso oben und unten wie seitlich an ein Tetraeder grenzt, vermag die Ausbildung von Schlotten zu hindern. Sie soll die alternante heißen.

Bei allen Gebilden mit mehreren Symmetrierichtungen liefert der einbeschreibbare Kreis eine gute Charakteristik für die Wegsamkeit.

Für die Luke fällt der Mittelpunkt dieses Kreises nach Fig. 17 mit dem Schnittpunkt der Dreieckshöhen zusammen. Der Radius  $\varrho$  ergibt sich demnach zu

$$(4) \quad \varrho = \frac{2}{3}\sqrt{3} - 1 = 0,1547.$$

Im Innern des Tetraeders läßt sich die Kugel finden, welche die vier Eckkugeln berührt. Man richte zu diesem Zweck einen Schnitt so durch eine Kante, daß er die Mittè der gegenüberliegenden Kante trifft. Dieser Schnitt (Fig. 18) enthält den Mittelpunkt des Tetraeders und hat zwei Seitenhöhen  $h$  zu Seiten. Die Tetraederhöhen  $b$  begegnen sich im Mittelpunkt der gesuchten, einbeschreibbaren Kugel.

$$b^2 = h^2 - \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}h^2 = \frac{8}{9} \cdot 3$$

$$b = \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Der Radius  $\varphi$  folgt aus der Hilfskonstruktion  $e$  und  $g$ :

$$e : \frac{2h}{3} = \frac{h}{3} : h$$

$$e = \frac{2h}{9}$$

$$g : e = h : b$$

$$g = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9}}{\sqrt{\frac{8}{3}}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{8}}$$

$$(5) \quad \varphi = b - 1 - g = \sqrt{\frac{8}{3}} - 1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{8}} = 0,2248.$$

Die Kugel vom Radius  $\varphi$  selbst wird zu:

$$\frac{4}{3}\pi\varphi^3 = 0,0477.$$

Beim Oktaeder führt sowohl ein Schnitt durch vier einer Ebene angehörige Kanten wie durch eine Spitze und die Mitte der gegenüberliegenden Kanten das Zentrum der Kugel, die alle sechs Eckkugeln berührt. In ersterer Darstellung (Fig. 19) erscheint auf einen Blick:

$$(6) \quad \psi = \sqrt{2} - 1 = 0,4142.$$

Die Kugel selbst:

$$\frac{4}{3}\pi\psi^3 = 0,2977. ^1)$$

Der Kreis  $\varrho$  mißt nahezu die Hälfte der Luke, die Kugel  $\varphi$  fast  $\frac{1}{4}$  des kleinen und die Kugel  $\psi$  fast  $\frac{1}{3}$  des großen Porenraums.

1) Die Werte für  $\varrho$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  sind bereits mitgeteilt in meiner Abhandlung: Die Enteisung von Grundwasser, aber in unvollkommener Form.

Aus diesen Vergleichen gewinnt man zwar eine angenäherte Vorstellung über die für das Wasser verfügbare Bahn. Noch steht aber das Wichtigste aus: *Die Bestimmung des Querschnittes an jedem Punkt*

Fig. 19.

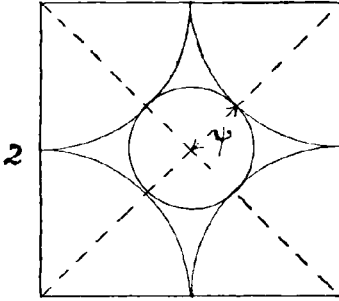
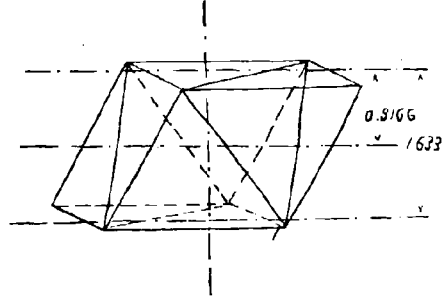


Fig. 20.

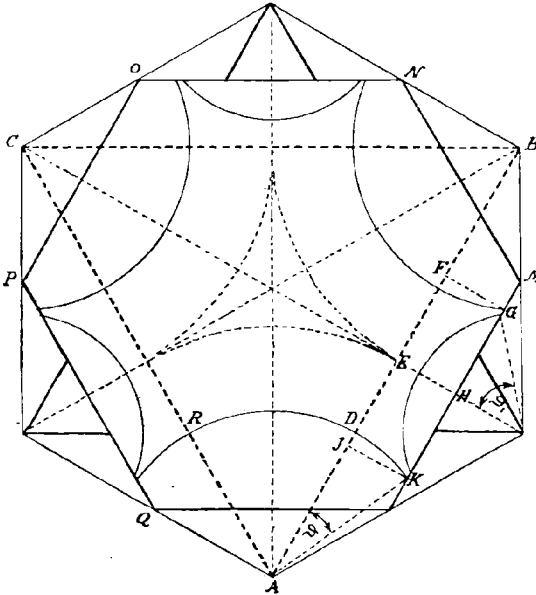


Sie kann nach großen und kleinen Porenräumen getrennt erfolgen. Die gegebene Stellung ist die von Fig. 9, wonach die Schnitte parallel zu einer Oktaederfläche fallen. Das Oktaeder soll darum als liegend, das zugehörige Tetraeder als auf der Basis (oder Spitze) stehend bezeichnet werden. Die Höhe des Oktaeders ist gleich der des Tetraeders (vgl. Fig. 18):

$$b = \sqrt{\frac{8}{3}} = 1,6332.$$

Die untere Hälfte des Oktaeders ist aber offenbar der oberen völlig gleich (Fig. 20), bei der Tetraeder Spitze vom Kugelsegment völlig ausgefüllt. Es genügt sonach, die wichtigsten Punkte auf der Strecke  $\sqrt{\frac{8}{3}} = 0,8166$  zu betrachten. Für einen beliebigen Vertikalabstand  $x$  von der Basis findet man

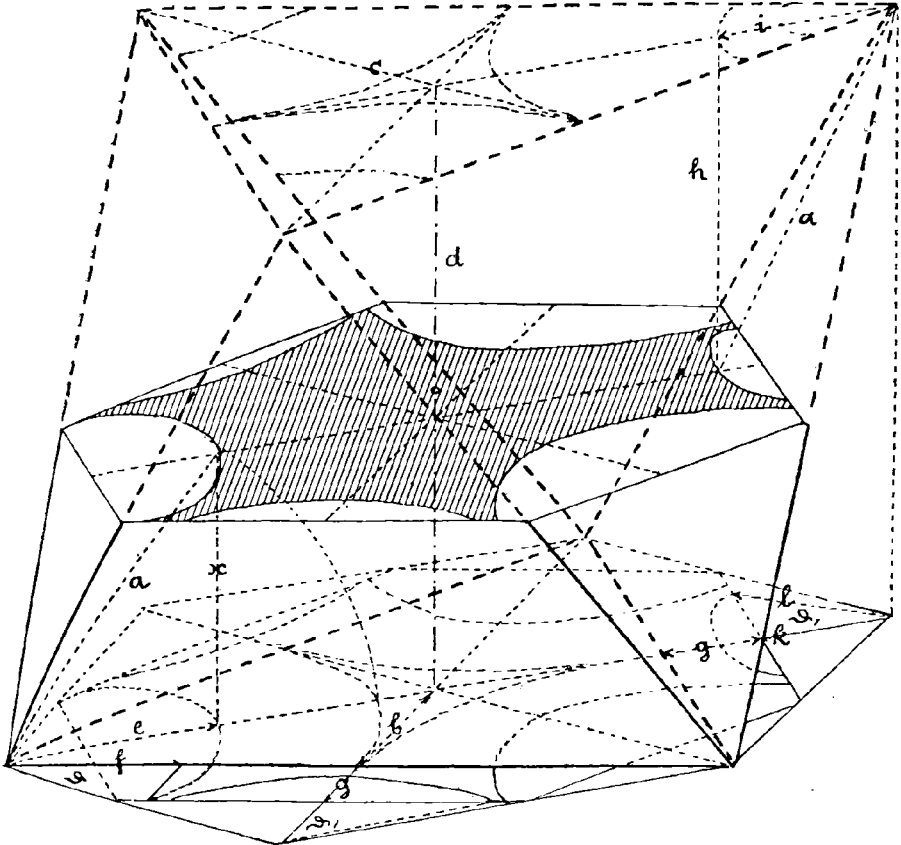
Fig. 21.



den zugehörigen Querschnitt  $y$  durch Gegeneinanderhalten des Grundrisses Fig. 21 und der perspektivischen Zerlegung, Fig. 22 (in der  $x$  von unten statt von oben zu nehmen ist) zusammengesetzt aus:

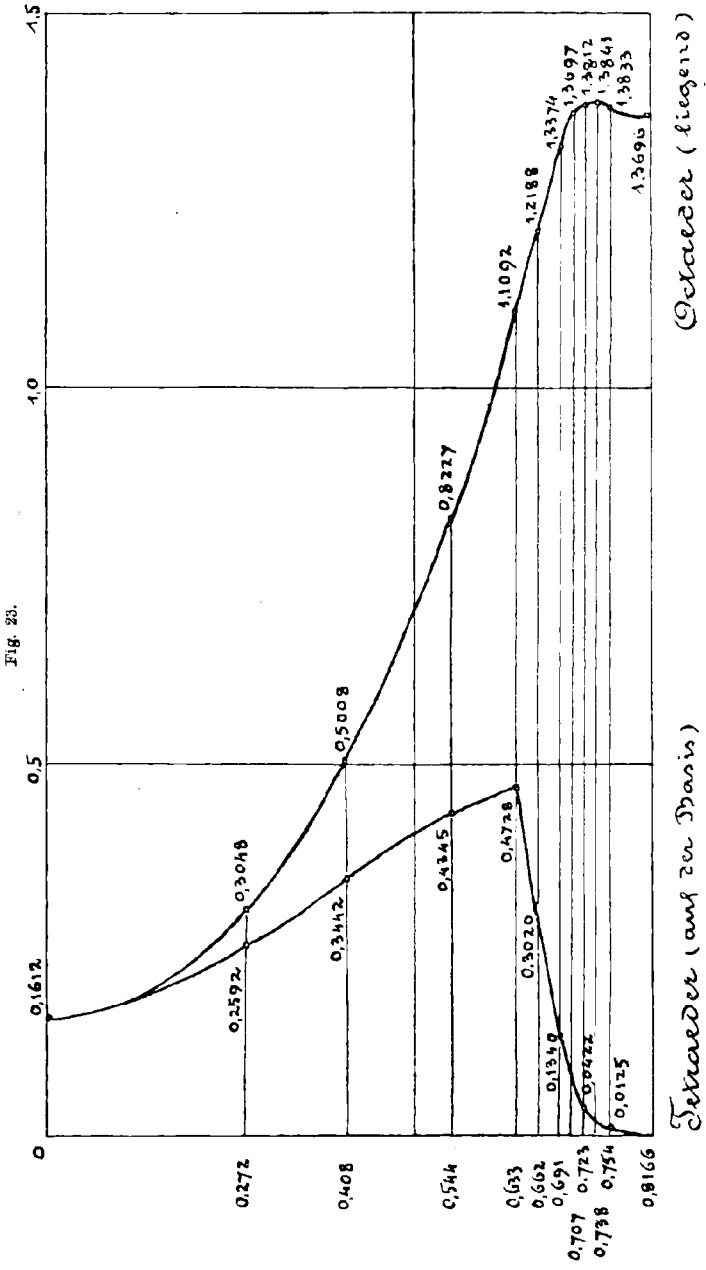


Fig. 22.



$$\begin{aligned}
 a &= 1. & b &= \sqrt{\frac{1}{3}}. & c &= \sqrt{3}. & d &= 2\sqrt{\frac{2}{3}}. & e &= \sqrt{1-x^2}. & f &= \sqrt{1-x^2 - \left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2}. \\
 g &= \frac{x}{2\sqrt{2}}. & h &= 2\sqrt{\frac{2}{3}} - x. & i &= \sqrt{1 - \left(2\sqrt{\frac{2}{3}} - x\right)^2}. & k &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(2\sqrt{\frac{2}{3}} - x\right). \\
 & & & & l &= \sqrt{1 - \left(2\sqrt{\frac{2}{3}} - x\right)^2}.
 \end{aligned}$$

1. der Oktaederfläche, abzüglich
  2. der Kugelkreissegmente  $ADR$
- für den betreffenden Querschnitt, zuzüglich
3. der Rechtecke  $EFGH$ , um die sich das Oktaeder  $LMNOPQ$  in der Schnittebene von  $x$  von der Grundfläche unterscheidet; abzüglich
  4. der in dieses Rechteck zu unrecht eingeschlossenen Kreisabschnitte  $DJK$ , abzüglich
  5. der eventuell durch die obere Kugellage in der Schnittebene gebildeten Kreisabschnitte.



Die Berechnungsformel stellt sich sonach dar als:

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt[3]{3} \\
 &- (1 - x^2) \frac{\pi}{2} \\
 &+ 6 \frac{x}{2\sqrt{2}} \left( 1 - \sqrt{1 - x^2} - \left( \frac{x}{2\sqrt{2}} \right)^2 \right) \\
 &- \frac{3}{2} (1 - x^2) (2 \arcsin \vartheta - \sin 2\vartheta) \\
 &- \frac{3}{2} (1 - (2\sqrt{\frac{2}{3}} - x)^2) (2 \arccos \vartheta_1 - \sin 2\vartheta_1),
 \end{aligned}$$

worin

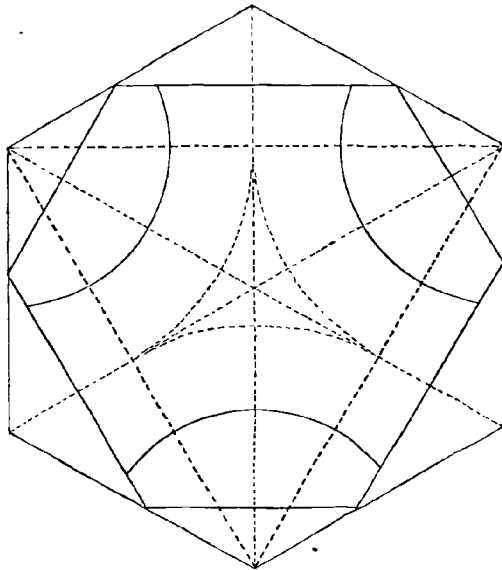
$$\begin{aligned}
 \sin \vartheta &= \frac{x}{2\sqrt{2}} \\
 \cos \vartheta_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( 2\sqrt{\frac{2}{3}} - x \right) \\
 &\quad \sqrt{1 - \left( 2\sqrt{\frac{2}{3}} - x \right)^2}.
 \end{aligned}$$

Die Resultate für einige Hauptpunkte zeigt das Diagramm Fig. 23. Dazu ist zu bemerken: Die Knickung in  $x = 0,691$  entspricht der Berührung mit dem Rand der entgegenkommenden Kugeln.

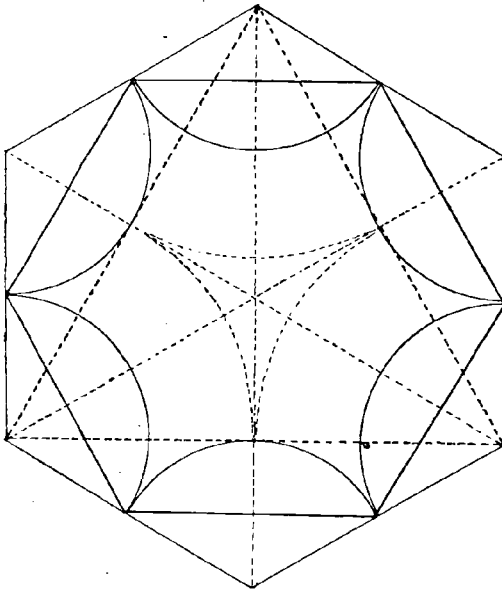
Die Form des Schnittes an dieser Stelle läßt Fig. 24 erkennen, während Fig. 25 den Schnitt durch die Mitte des Oktaeders darstellt. Das absolute Maximum mit  $y = 1,3841$  liegt auf  $\frac{1}{3}$  des Weges zwischen beiden. Der Unterschied mit dem Auftreffen auf den Kugelrand ( $y = 1,3374$ ) und der Oktaedermitte ( $y = 1,3696$ ) ist indessen gering. Vergleiches halber ist auch die Oberluke, die sich unverkürzt projiziert, immer mit abgebildet.

Die Mitte des Oktaeder-raums ergibt sonach mit seinen sechs Zipfeln zwar den regelmäÙigsten, aber nicht den größten Querschnitt. Nach abwärts wiederholt sich von da ab das gleiche Verhältnis, nur daß die Richtung der drei Flügel um  $60^\circ$  wechselt.

Fig. 24.



Für das auf die Spitze gestellte Tetraeder liegt alles ähnlich. Das entsprechende Diagramm ist mit Fig. 23 vereinigt. Wiederum nimmt man die Berechnung (vgl. Fig. 26) zu Hilfe:



1. das Grunddreieck, abzüglich
2. der Kreisabschnitte der Ecken, ferner
3. der Rechtecke, die im Grunddreieck über das Schnittdreieck hinausfallen, zuzüglich
4. der mit diesen Rechtecken doppelt abgetrennten Kreisabschnitte, abzüglich eventuell
5. des von der oberen Kugel ausgeschnittenen Kreises, zuzüglich
6. der mit diesem Kreis zu viel abgetrennten Kreisabschnitte.

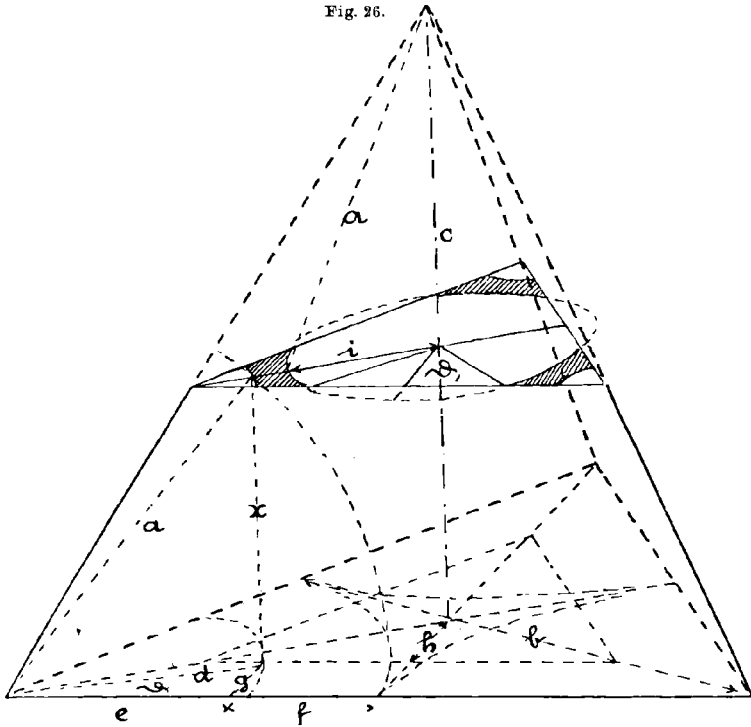
Die Formel lautet sonach übereinstimmend mit der für das liegende Oktaeder, nur daß die Rechtecke hier ab- statt zugerechnet und die Kreisabschnitte zu- statt abgerechnet werden, und die von der Spitze herabhängende Kugel von der Mitte her einen Kreis abschnürt:

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt{3} \\
 &- (1 - x^2) \frac{\pi}{2} \\
 &- 6 \frac{x}{2\sqrt{2}} \left( 1 - \sqrt{1 - x^2} - \left( \frac{x}{2\sqrt{2}} \right)^2 \right) \\
 &+ \frac{3}{2} (1 - x^2) (2 \arcsin \vartheta - \sin 2\vartheta) \\
 &- (1 - (2\sqrt{\frac{2}{3}} - x)^2) \pi \\
 &+ \frac{3}{2} (1 - (2\sqrt{\frac{2}{3}} - x)^2) (2 \arccos \vartheta_1 - \sin 2\vartheta_1),
 \end{aligned}$$

worin  $\vartheta$  und  $\vartheta_1$  dieselbe Bedeutung haben wie oben.

Die Querschnittsformen veranschaulichen die Fig. 27—29. Das Maximum ( $y = 0,4728$ ) trifft hier tangent zur entgegenkommenden Kugel bereits auf  $x = 0,633$ . Von da ab verkleinert sich der Querschnitt sehr rasch (Fig. 28 auf  $\frac{1}{4}$  des Weges zwischen Kugelrand und Kantenmitte,  $x = 0,679$ ,  $y = 0,2000$ ) und besteht bald nur noch aus drei einzelnen

Fig. 26.



$$a=1. \quad b=\sqrt{3}. \quad c=2\sqrt{\frac{2}{3}}-x. \quad d=\sqrt{1-x^2}. \quad e=\sqrt{1-x^2-\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2}.$$

$$f=1-\sqrt{1-x^2-\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2}. \quad g=\frac{x}{2\sqrt{2}}. \quad h=\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{x}{2\sqrt{2}}. \quad i=\sqrt{1-(2\sqrt{\frac{2}{3}}-x)^2}.$$

Bändern (Fig. 29 halbwegs der genannten Strecke,  $x = 0,723$ ,  $y = 0,0433$ ). Die Maxima fallen also für Okta- und Tetraederporenraum nicht zusammen; auch verschwindet der letztere in halber Höhe ( $x = 0,8166$ ) gänzlich, während hier die Erweiterung der konjugierten großen Pore einen kaum merklichen Rückgang erleidet.

Die Aufreihung der Kugeln zu Schichten nach ihrer natürlichen Ausbreitung brachte es mit sich, nach Fig. 9–11, 15, 16, das Oktaeder auf eine seiner Flächen zu legen. Es sind aber auch Kugellagen denkbar, wie etwa eine parallel den schräg verlaufenden Pyramidenseiten in Fig. 1 und 2, bzw. den nach vorn abfallenden in Fig. 3 und 4, die zwar zu keiner Luke senkrecht zu stehen kommt, aber eben darum gewisse Vereinfachungen vor der in Diagramm Fig. 23 festgelegten voraussetzt, so daß es angebracht erscheint, auch ihre Querprofile näher ins Auge zu fassen. Das Oktaeder kommt dann als Doppelpyramide (Fig. 30)

Fig. 27.

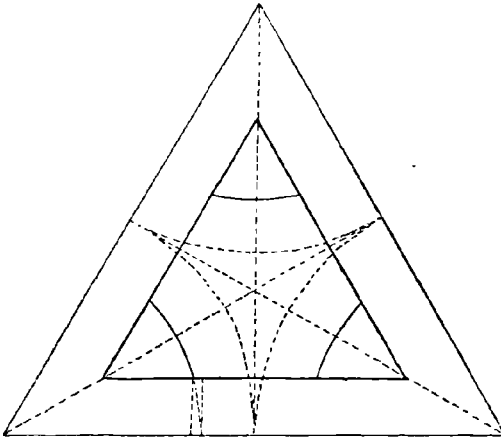


Fig. 28.

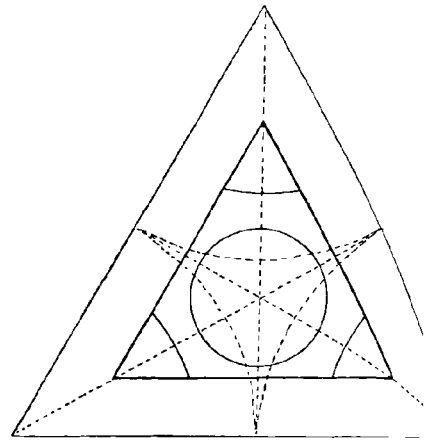
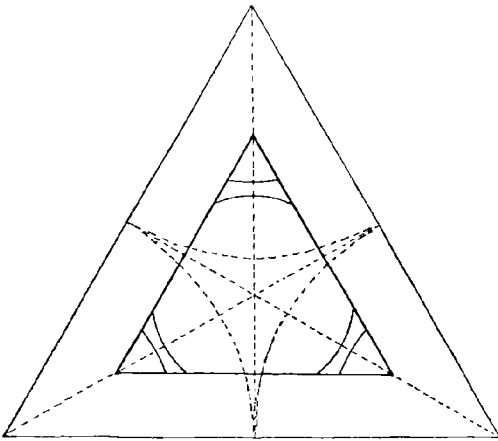


Fig. 29.



aufrecht zu stehen, (oder um  $54^{\circ}44'$  gegen die liegende Stellung verdreht) und die anschließenden Tetraeder balanzieren alle auf einer Kante. Auch hier genügt die Untersuchung der einen Hälfte, da die andere völlig gleich damit verläuft. Es empfiehlt sich aber, statt von der Spitze von der Mitte als Basis auszugehen. Das obere Viertel kann ganz beiseite bleiben, weil es beim Oktaeder taub ausfällt, für das Tetraeder aber nur die Ordnung des darunter liegenden Viertels mit einer Schwenkung um  $90^{\circ}$  wiederholt.

Über die Schnittserie des Großporenraums orientieren der Grundriß Fig. 31 und die Aufrisse Fig. 32 und 33 quer und diagonal zu jenem. Die Formel zur Berechnung der Schnitte umfaßt sechs Glieder:

$$\begin{aligned}
 y &= 2^2 \\
 &\quad - (1 - x^2)\pi \\
 &\quad - 8 \frac{x}{\sqrt{2}} \left( 1 - \sqrt{1 - x^2} - \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) \\
 &\quad + 2(1 - x^2)(2 \arcsin \vartheta - \sin 2\vartheta) \\
 &\quad - (1 - (\sqrt{2} - x)^2)\pi \\
 &\quad + 2(1 - (\sqrt{2} - x)^2)(2 \arccos \vartheta_1 - \sin 2\vartheta_1),
 \end{aligned}$$

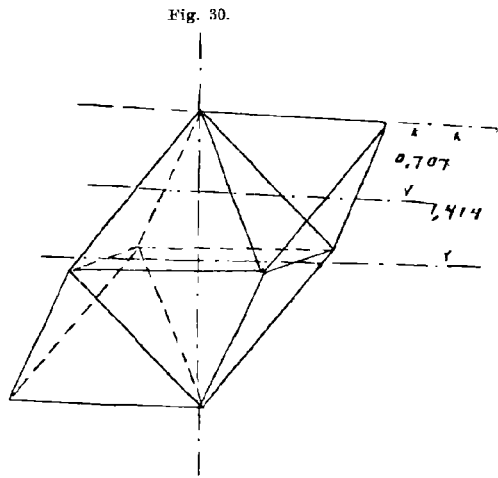
worin

$$\sin \vartheta = \frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1 - (\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}$$

Ein absolutes Maximum fällt laut Diagramm Fig. 34 wiederum an das Auftreffen auf die obere Kugel ( $x = 0,414$ ). Dieser Schnitt ist dargestellt in Fig. 35. Das Zentrum der Luken liegt aber diesmal an einer Stelle, wo die Mitte bereits verbaut ist (Fig. 36). Höher hinauf zerfällt der rasch verschmälerte Ring schließlich, wie beim Tetraeder auf der Spitze, Fig. 37 ( $x = 0,597$ ). Der absteigende Ast zeigt ein kleineres Maximum bei  $x = 0,640$ .

Ähneln so der Verlauf der Querschnitte für das stehende Oktaeder demjenigen für das Tetraeder auf der Spitze, so bietet das Tetraeder auf der Kante in seinen Schnitten völlige Analogie mit dem liegenden Oktaeder. Der Grundriß (Fig. 38) zeigt die Luken je zwei kreuz-



weise zueinander. Die perspektivische Ansicht (Fig. 39) liefert die Elemente zur Berechnung, die vier Glieder umfaßt; ausgehend von dem Rechteck  $RSTU$  (Fig. 40), von dessen Fläche die Streifen  $RSVW$  und die Kreisabschnitte der vier Kugeln abgehen:

$$y = 4 \frac{x}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$- 4 \frac{x}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{1 - x^2} - \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$- (1 - x^2) (2 \arcsin \vartheta - \sin 2\vartheta)$$

$$- (1 - (\sqrt{2} - x)^2) (2 \arccos \vartheta_1 - \sin 2\vartheta_1),$$

worin  $\vartheta$  und  $\vartheta_1$  dieselbe Bedeutung haben wie beim stehenden Oktaeder. Die Lukenmitte (Fig. 41) fällt auf  $x = 0,471$ , der Rand der oberen Kugeln wird erreicht bei  $x = 0,597$ . Der Querschnitt wächst indessen bis  $x = 0,640$  und sinkt zu einem Minimum bei  $x = 0,680$ . Fig. 42 gibt

Fig. 31.

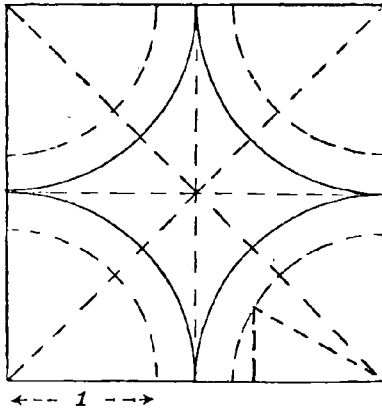
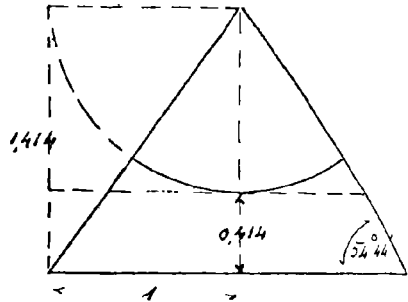


Fig. 32.

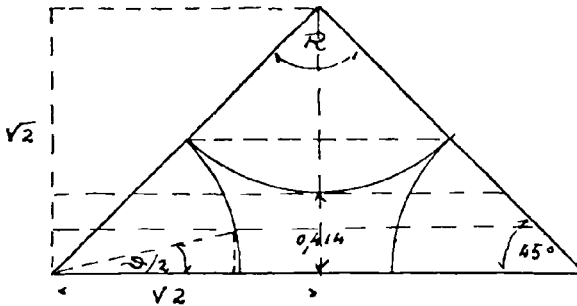


das symmetrische Bild für die halbe Höhe,  $x = 0,7071$ . Weiterhin wiederholt sich alles in umgekehrter Folge.

Für die Flüssigkeitsbewegung ergeben sich die Wege in der zuerst behandelten Anordnung (liegendes Oktaeder, Tetraeder auf der Spitze) wesentlich günstiger. Das wird noch deutlicher durch Ein-

führung des mittleren Querschnitts, auf den ohnehin eine Theorie der Durchströmung angewiesen wäre. Der sukzessive Verlauf der Profiländerung trägt offenbar paraboloides Gepräge, das nur durch die geradlinige Abgrenzung des zugrunde liegenden Polyeders verdeckt wird. Stellenweise

Fig. 33.



zieht sich die Kurve fast zur Geraden aus. Durch stückweises Integrieren der gekrümmten Teile nach dem Parabelgesetz läßt sich ein Mittelwert mit großer Annäherung finden.

Man erhält so:

für das liegende Oktaeder (Fig. 20)	$y_m = 0,680$
und das zugehörige Tetraeder auf der Spitze	$= 0,257,$
für das stehende Oktaeder (Fig. 30)	$= 0,755$
und das zugehörige Tetraeder auf der Kante	$= 0,179.$

Der Unterschied macht für die Tetraederräume „auf der Spitze“ fast die Hälfte mehr aus, als „auf der Kante“. Leider ist mit dieser Erkenntnis für die Einsicht in den eigentlichen Verlauf der Strömung wenig getan. Denn die Einschnürung der Wasserfäden beim Passieren der Porenluken und die Ungewißheit der Richtung, welche ihnen da-



bei anzuweisen wäre, gibt keinen Raum für eine allgemeingültige, von willkürlichen Annahmen unabhängige Lösung. Gerade das Fernhalten jeder fremden Voraussetzung ist aber unerlässlich, um die wirklichen, geometrischen Verhältnisse sicher zu stellen. Hat doch die Nichtbeachtung der Einzelheiten Slichter verleitet, die Unterschiedlichkeit der Porenräume zu übersehen, so daß er in seiner „Einheit“ (Fig. 6) nur zwei gleiche, statt eines großen mit zwei kleinen vor sich zu haben glaubte. Infolgedessen rechnet er einen mittleren Porenquerschnitt von 0,2118 heraus, ein Wert, der, verglichen mit der Lukenöffnung von 0,1612 (1), für die er 0,1475 einsetzt, als wahrscheinlichen Stromquerschnitt, unter Ausschluß der Hörnerspitzen, ihm eine abwechselnde Erweiterung der Bahn um 42% ergibt.<sup>1)</sup>

Wie wenig das der Wirklichkeit entspricht, lehrt eine einfache Überlegung. Von der Fläche des gleichseitigen Dreiecks, dessen Ecken mit drei Kugelmittelpunkten zusammenfallen (Fig. 17), mit 1,7320

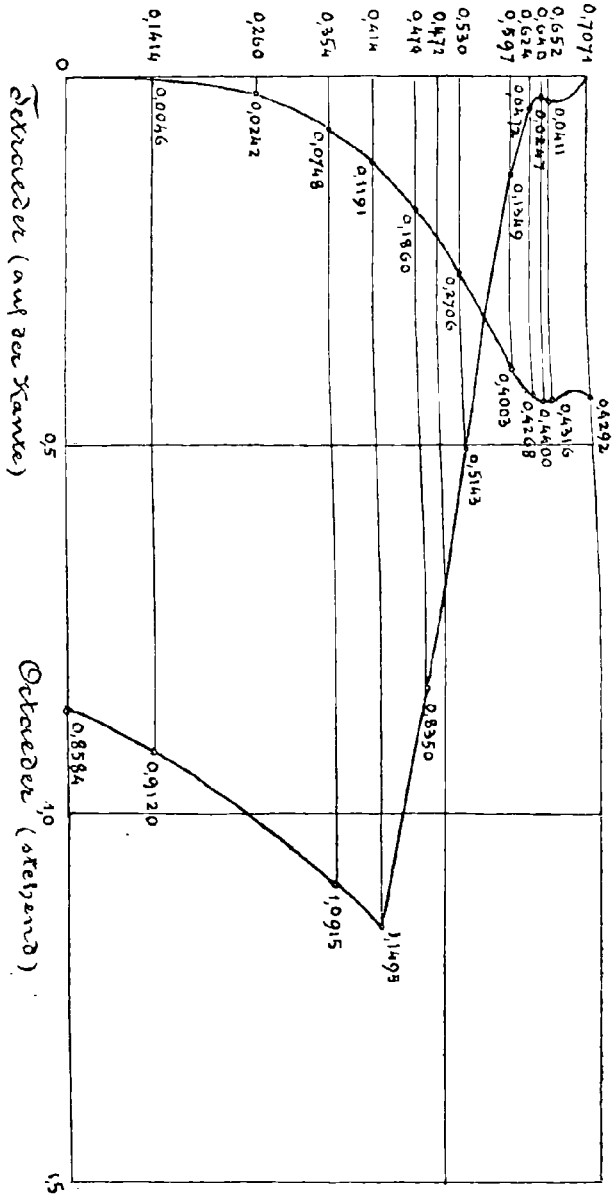
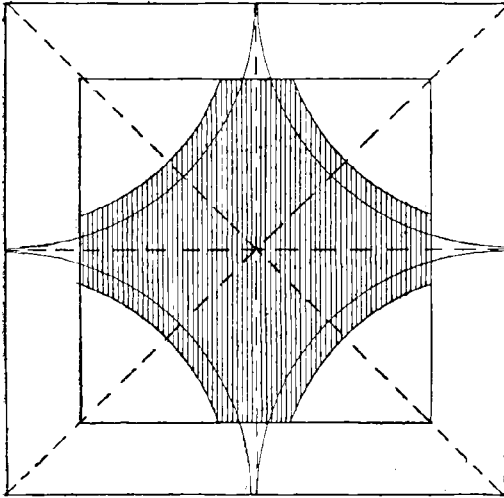


Fig. 34.

1) l. c. S. 317.

beansprucht die Luke 0,1612, d. i. 9,34 %. Vom Gesamtraum nehmen die Poren dagegen 25,95 % ein. Das bedeutet eine Vergrößerung des Querschnittes auf das 2,78fache, oder um 178 % in Mittel.

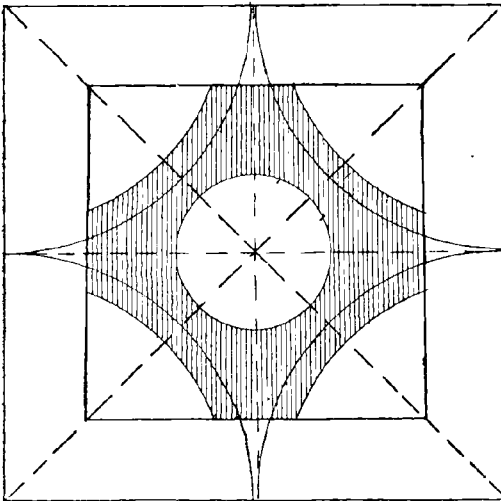
Fig. 35.



Auch ein Großporenraum mit den zugeordneten zwei Kleinporenräumen ergibt einen Querschnitt von 0,937; das macht  $\frac{0,937}{2 \cdot 0,1612} = 2,9$  oder das 2,9fache des Eintrittsquerschnittes. Also praktisch dasselbe wie 2,78, soweit in solchen Dingen ein Mittel überhaupt gilt

Das Strömen selbst stellt sich Sichter so vor, daß dafür in Fig. 43 die Richtung der Pfeile gilt. Es liegt aber kein Grund vor, warum gerade dieser Durchgang den Vorzug verdienen sollte, während der kürzere und in gerader Linie offene Weg von *C* nach *A'* weist, für *C'* dagegen die drei Luken *B'*, *B''*, *B'''* gleichmäßig nahe liegen. Man braucht seine Fig. 62 nur ein wenig sorgfältiger auszuführen, um dieses auf einen Blick zu überschauen.

Fig. 36.

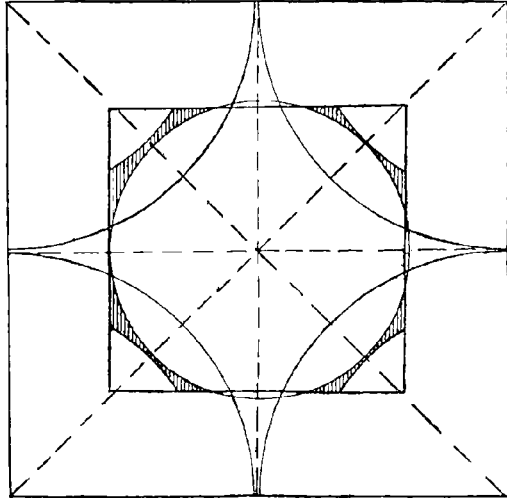


Wenn der Zulauf also sich gleichmäßig verteilt, so muß das Bild der in Fig. 44 versuchten Darstellung entsprechen. Das liegende Oktaeder in Parallelperspektive mit in 45° angesetzter Tiefenachse und Verkürzung auf die Hälfte trägt in leisen

Konturen auf jeder Seite das begleitende Tetraeder aufgesetzt. Dieses dient für die Kopffläche und die an deren Kanten sich anschließenden drei Seitenflächen offenbar als Zubringer, während die unteren drei

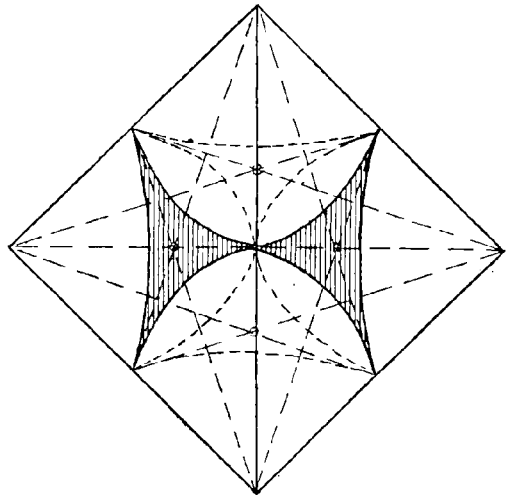
Seitenflächen und das Bodenstück in gleicher Weise entwässert werden. Das geschieht (die Luken sind nur durch ihre Zentren angedeutet), so daß der Mittelstrom unter bzw. über der Kugel in der Tetraederspitze sich aus drei Strängen vereinigt, bzw. in diese auflöst, die ihrerseits seitlich im Oktaeder ein- bzw. austretend sich (vgl. Fig. 36) nochmals spalten bzw. zusammenfließen. Derselbe Vorgang wiederholt sich regelrecht in der Nachbarschaft, so lange alternante Anordnung besteht. In den Schloten geht in der Mitte ein zentraler, vertikaler, sechsdrähtiger Strahl ununterbrochen durch.

Fig. 37.



Die Kleinporenräume dienen sonach wesentlich als Verteiler und Ausgleicher, die großen als Misch- und Staubecken. Zumal die fortgesetzte Mischung kann nicht vollkommener gedacht werden. Dafür sorgt der Ab- und Zulauf mit seiner starken Wirbelung und Hemmung, während der mittlere Teil der Bahn nahezu gleichen (engsten) Querschnitt bewahrt.

Fig. 38.



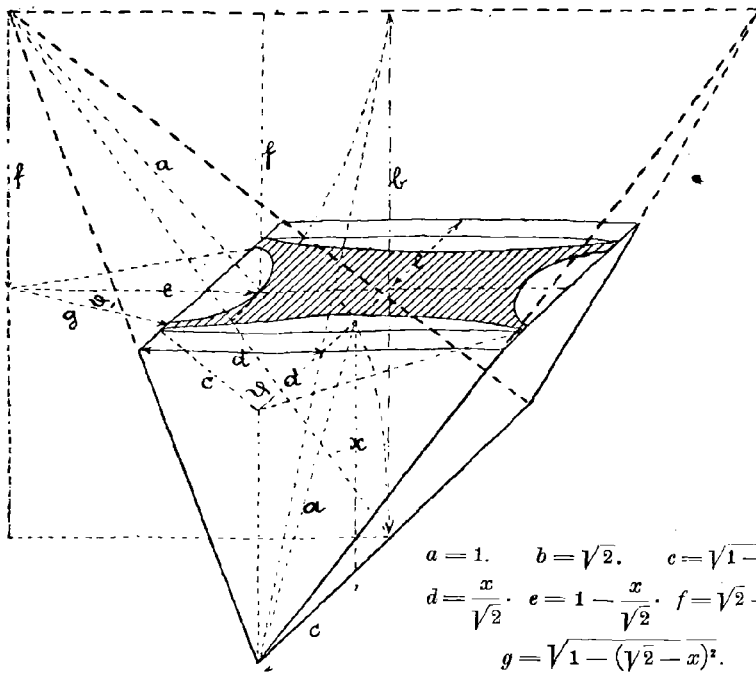
Besteht über die Richtung des Stromes sonach kein Zweifel, so fällt die Antwort auf die Frage nach dem Arbeitsaufwand umso verlegener aus. Mag sie einstweilen lieber ganz zurückstehen, damit nicht Tatsächliches mit Hypothetischem vermengt werde.

Das stehende Oktaeder zeigt einen weit einfacheren Verlauf der Stromfäden (Fig. 45). Da hier alle Luken unter dem gleichen Winkel einfallen, kann man von jeder ebenen zur nächst unteren in der Kerbe

zwischen zwei Kugeln den Bogen spannen. Aus den vier dachfensterartig überhängenden Tetraedern erhält so die Pyramide wie durch ebensoviele Fensteröffnungen Nahrung. Es ist gleichgültig, ob man diese durch eine oder beide Giebelseiten reichen läßt. Groß- und Kleinporenräume erfüllen hier nahezu dieselbe Aufgabe.

Aber auch dieses Schema ist eine reine Abstraktion. Die Luken liegen ja nicht als feine runde Löcher vor, sondern als breite Spalten mit drei scharfen Spitzen und tief eingebogenen Rändern. Slichter

Fig. 89.



hat versucht, eine Form dafür zu substituieren, die wenigstens angenähert auf einen runden Querschnitt zu beziehen wäre, und das Dreieck herausgeschnitten, das zustande kommt durch Tangenten an die Kugelkreise im Schnittpunkte mit den Höhenlinien der Tetraederseiten. Nun bringen die dann übrigbleibenden Spitzen ohne Frage eine starke Dämpfung für die Wasserbewegung mit sich. Ihr Wirkungsbereich schwankt aber sowohl mit dem Druck, unter dem das Ganze steht, als mit der Größe der Kugeln.

Das Maß dafür stellt die Oberflächenspannung dar, die für Wasser in  $\frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$  rund mit 73 angesetzt werden mag.<sup>1)</sup> Vermöge dieser Kraft,

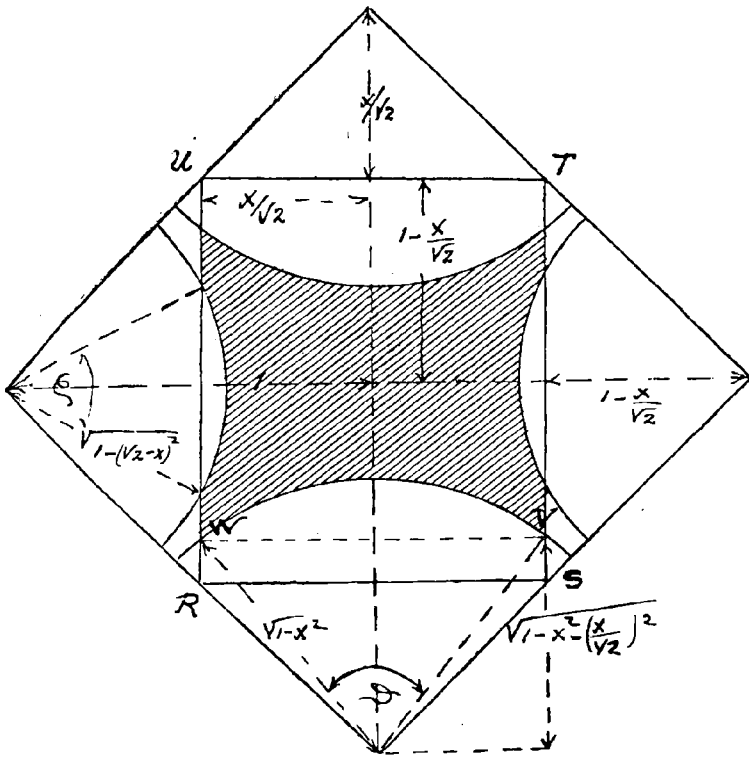
1) Wie gut ist die Oberflächenspannung definiert? bei H. Freundlich, Kapillarchemie S. 26.

die am richtigsten wohl nach der van der Waalsschen Entwicklung als zugleich mit der Dichte von der Flüssigkeitsgrenze her abnehmend gedacht wird, gemäß der Gleichung

$$\sigma = c \int \left(\frac{d\rho}{dh}\right)^2 dh,$$

worin  $\sigma$  die gesuchte Kapillaritätskonstante,  $\rho$  das spezifische Gewicht und  $h$  die Dichte des umgebenden Mediums,  $\frac{d\rho}{dh}$  sonach das Dichte-

Fig. 40.



gefälle an der Grenze bedeuten, gilt für die Erhebung  $p$  über den Wasserspiegel zwischen einem auf kleine Entfernung genäherten Plattenpaar

$$\sigma = \xi pg,$$

wenn  $\xi$  den halben Abstand der Platten und  $g$  die Beschleunigung der Schwere darstellen, das spezifische Gewicht aber zu 1 gesetzt wird. Dieselbe Anziehung tritt offenbar in Wirkung, wo immer zwei Kugeln sich berühren. Es haftet an diesem Punkt ein Tropfen in Form eines Ringwulstes, dessen Durchmesser um so größer ausfällt, je größer der

Kugeldurchmesser selbst ist. Fig. 46 veranschaulicht das Verhältnis für ein Anwachsen des letzteren auf das Doppelte.

Im allgemeinen ist für das gleiche  $\xi$ :

$$\eta_1 = \sqrt{r_1^2 - (r_1 - \xi)^2} = \sqrt{2r_1\xi - \xi^2}$$

$$\eta_2 = \sqrt{2r_2\xi - \xi^2}.$$

Unter Zugrundelegung von

$$r_1 = 1 \text{ mm}$$

$$r_2 = 2r_1$$

$$\xi = 0,1 \text{ mm}$$

wird dann

$$\eta_1 = \sqrt{1 - 0,81} = 0,436 \text{ mm}$$

$$\eta_2 = \sqrt{0,39} = 0,625 \text{ „ .}$$

Ein kapillarer Ring von 0,1 mm halber Randhöhe setzt aber nach Gleichung (7) voraus  $p = 7,43 \text{ cm}$ . Selbst für  $p = 1 \text{ cm}$  stellt sich  $\xi$

noch auf 0,0743 mm. Das

entsprechende  $\eta$  geht von den

Hörnerspitzen der Porenluke

ab, da der Inhalt dieser Rand-

zone erst in Bewegung kommen

kann, wenn der äußere Filter-

druck das entsprechende  $p$

überschreitet. Es ergibt sich

hieraus, daß mit zunehmendem

Druck die Porenluke sich er-

weitert. Auch nach seinem

Durchtritt durch die Luken-

ebene behält der Stromfaden

keineswegs seinen Umfang

bei; er haftet an der Kugel-

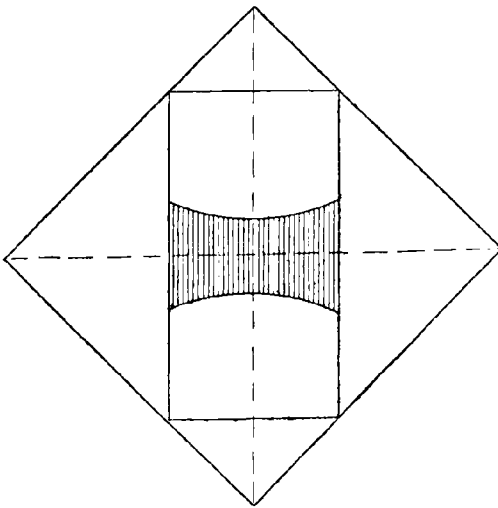
fläche und sucht an ihr ent-

lang zu gleiten. Und zwar

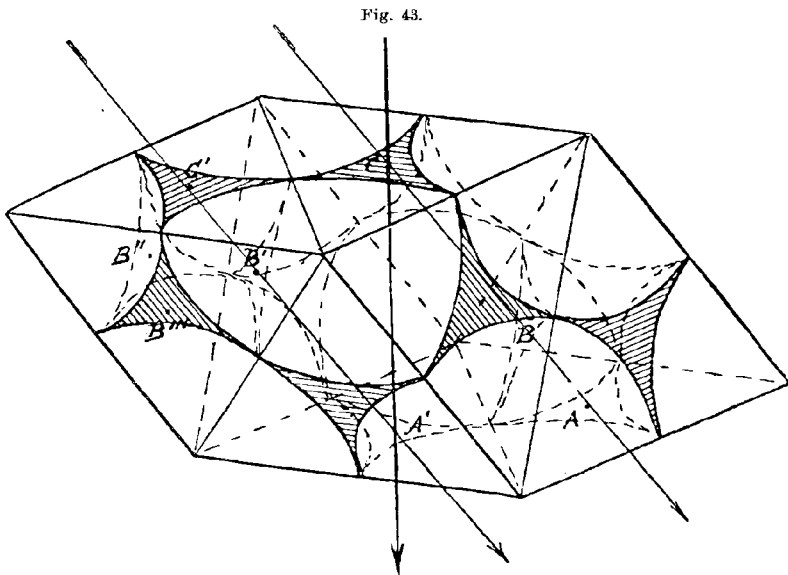
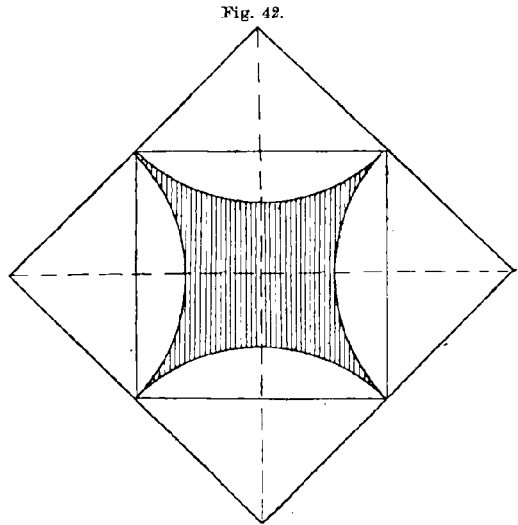
gilt diese Abhängigkeit nicht allein für die eingezogenen Winkel, sondern für die ganze benetzte Kugel. Die gebräuchlichen Strömungsformeln tragen dem allen keine Rechnung, ebensowenig der kapillar am Filtergrund festgehaltenen Wassersäule, die mindestens den gleichen Gegen-  
druck absorbiert.

Ein weiterer wunder Punkt ist die Ausdeutung der Luke als Eintrittsöffnung, da wo sie nicht senkrecht auf dem gedachten Hauptfilterstrom steht, sondern schräg dazu. Es sind das zwei Richtungen

Fig. 41.



nach den obigen Ausführungen. Einmal unter  $70^{\circ} 32'$  zur Horizontalen, wie beim liegenden Oktaeder (Fig. 20) und dem Tetraeder auf der Spitze, und das andere Mal unter  $54^{\circ} 44'$  beim stehenden Oktaeder und Tetraeder auf der Kante (Fig. 38). Wie die Verästelungsbilder Fig. 44 und 45 dartun, handelt es sich im ersten Fall um eine Dreiteilung des Vertikalstroms, im zweiten um dessen Zweiteilung. Hier tritt also bereits mit Rücksicht auf den Druck die Kapillarwirkung in ihr Recht. Aber eine solche Porenverbindung verbietet auch von vornherein die Auffassung, als ob hier noch mit einem bestimmten Querschnitt und einem normal dazu gerichteten Stromlauf gerechnet werden dürfte. Denn diese schiefen Tore beginnen von oben her

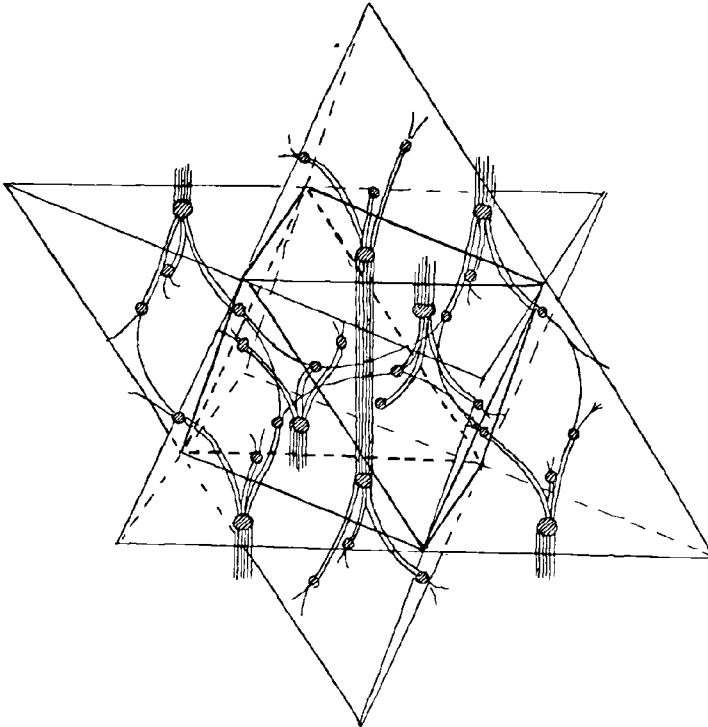


mit einem unmerklich feinen Einlaß (Fig. 41) und verrinnen in getrennten Ritzen (Fig. 29, 37). Immer aber beginnt jenseits der Abfluß bereits, bevor diesseits noch der Zufluß beendet ist. Es liegt nahe, sie deshalb wie

Schleusentore oder Stauwehre zu behandeln. Ein langsames Durchtreten oder Durchsickern bildet ohnehin die Regel.

Dann wäre anstelle der Luke deren Projektion einzuführen. Für das liegende Oktaeder und das zugehörige Tetraeder ergibt sich die jetzt von drei Ellipsenstücken statt Kreisbogen eingeschlossene Dreispitzfläche nach Fig. 47, die auf die Darstellung Fig. 20—25 zurückgeht, wie folgt. Parallel zu  $ABC$  bleiben alle Maße ungeändert, parallel zu  $BD$  sind sie auf  $\frac{1}{3}$  verkürzt. Die große Ellipsenhalbachse  $AB$  wird so gleich 1, die kleine  $AE$  gleich  $\frac{1}{3}$ . Da nun  $EG = GH$ , so ist

Fig. 44.



die gesuchte Fläche leicht aus dem Ellipsenquadranten  $BGE$  abzuleiten. Durch Einführung der bekannten Hilfskonstruktion mit dem Kreis  $AF = AB$  über der großen Halbachse erhält man:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \chi \\ y &= b \sin \chi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \int y dx &= \int b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \int -b \sqrt{1 - \frac{a^2 \cos^2 \chi}{a^2}} \cdot a \sin \chi d\chi \\ &= -\frac{ab}{2} \int (1 - \cos 2\chi) d\chi = -\frac{ab}{2} \chi + \frac{ab}{4} \sin 2\chi. \end{aligned}$$



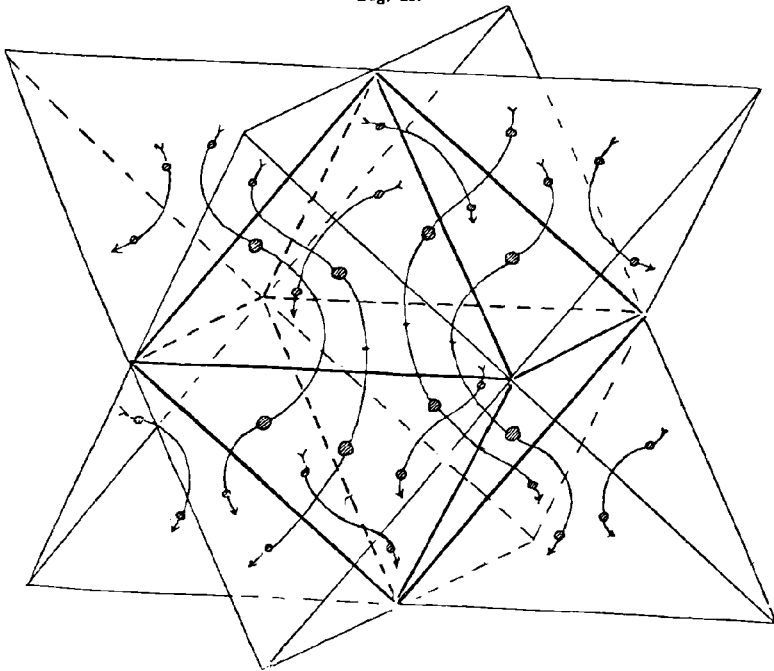
oder in bestimmter Form für jeden Punkt der Ellipse:

$$= \frac{ab}{2} (\chi_1 - \chi_2) - \frac{ab}{4} (\sin 2\chi_1 - \sin 2\chi_2).$$

Die Projektion der Luke stellt sich danach auf 0,0584, d. i. etwas mehr als  $\frac{1}{3}$  der Grundfläche. Von der Spitze beginnend hat man zu rechnen

bis auf $\frac{1}{6}$ der Höhe	$y = 0,0029$
"      " $\frac{1}{4}$ "      "	0,0090
in $\frac{1}{3}$ (Höhenschnittpunkt)	0,0222
bis zum entgegenstehenden Kugelrand	0,0484.

Fig. 45.



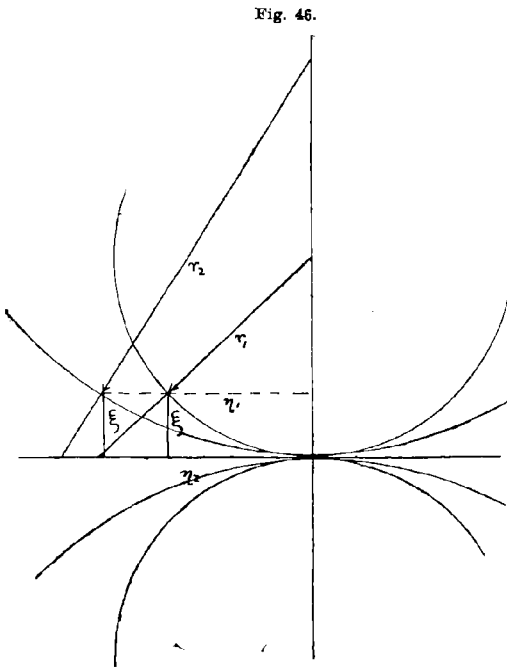
In gleicher Weise erhält man die Projektion für die Luke beim stehenden Oktaeder (Fig. 48). Hier ist  $b = a \cos 54^\circ 44'$ . Die Gesamtfläche ergibt sich zu 0,092,

bis auf $\frac{1}{6}$ der Höhe	0,008
"      " $\frac{1}{4}$ "      "	0,022
bis zu $\frac{1}{3}$ der Höhe (Höhenschnittpunkt)	0,040
bis zum entgegenstehenden Kugelrand	0,082.

Für diese Stellung gibt es nur Luken von gleicher Neigung, und zwar vier für jede „Einheit“ (Oktaeder mit zwei Tetraedern). Wollte man annehmen, daß der Strom normal dazu streicht, so beginge man

einen Fehler im einen Sinne; wollte man ihn normal zur Projektion richten, einen anderen im entgegengesetzten Sinne. Der wahre Verlauf liegt dazwischen. Es ist aber nicht möglich, ihn zu kennzeichnen, ohne eine nähere Bewertung der Einflüsse von Viskosität, Wirbelung und Oberflächenanziehung.

Hierauf eintreten, hieße den Boden der einfachen Feststellung verlassen. Geboten erscheint dagegen, sich darüber Rechenschaft zu geben, ob der Zustand der dichten Packung, auf dem die ganze gegebene



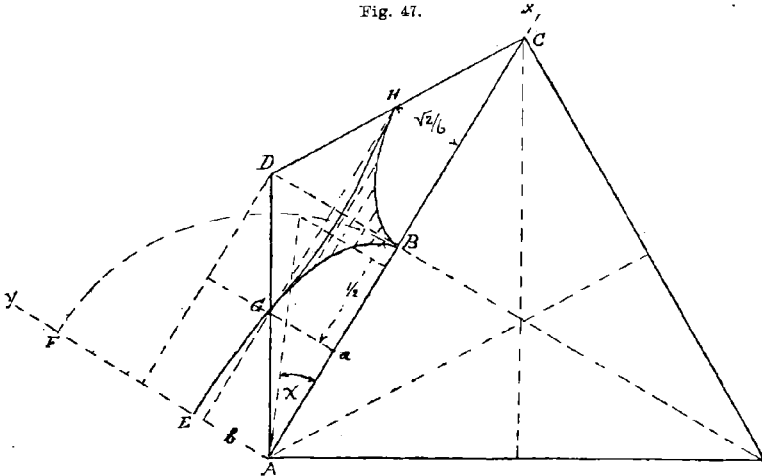
Darstellung fußt, überhaupt der Wirklichkeit entspricht. Bei Kanonenkugeln ja, bei Filterkörnern gewiß nicht, wie schon die Beobachtung lehrt, daß dabei das Minimum von 25,95 % Porenraum nie auch nur annähernd erreicht wird. Die Zahlen sind stets höher, für Glasperlen z. B. von  $\frac{1}{2}$  bis 2 mm Durchmesser nicht unter 35. Nun hat Slichter zwar die theoretische Abhängigkeit der Porenräume von der Art der Packung nachgewiesen. Aber die umgekehrte Folgerung, daß einem beliebigen Porenraum immer ein bestimmter Schüttungswinkel zugrundeliegen müsse, worauf

Slichter seine Konstante aufbaut, läßt sich nicht aufrecht erhalten, nicht einmal für Körner von idealer Rundheit. Andererseits kann auch die loseste Packung, bei der die Kugelmittelpunkte zu Würfeln angeordnet sind, noch loser werden, ohne daß dies äußerlich sich kenntlich macht.

Bei Würfelstellung wird die Luke vierspitzig und dem Hauptschnitt des Oktaeders (Fig. 5) gleich oder:  $4 - \pi \approx 0,858$ . Die Querschnitte wachsen nach Diagramm Fig. 49, bis sie da, wo die Kugeln in den Vertikalen sich berühren, den ganzen Filterraum = 4 einnehmen. Der mittlere Querschnitt wird 1,905. Die Strömung bedingt hier keine Ausbreitung nach den Seiten, und bedient sich der vertikalen Luken höchstens zum Druckausgleich.

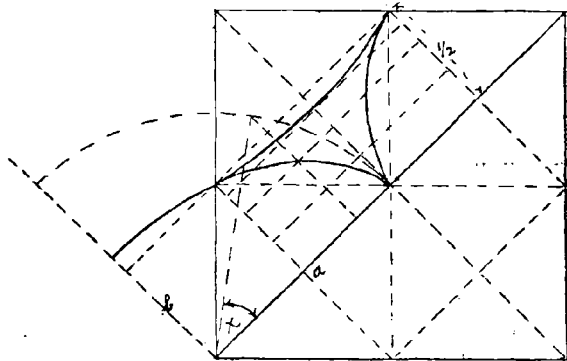
Dabei ist jede Kugel gegen sechs andere abgestützt. Nach dem Gesetz der Schwere genügen aber zwei Stützpunkte, um labiles, drei, um stabiles Gleichgewicht herbeizuführen. Es sind infolgedessen unendlich viele Verteilungen denkbar, bei welchen trotz vollkommener

Fig. 47.

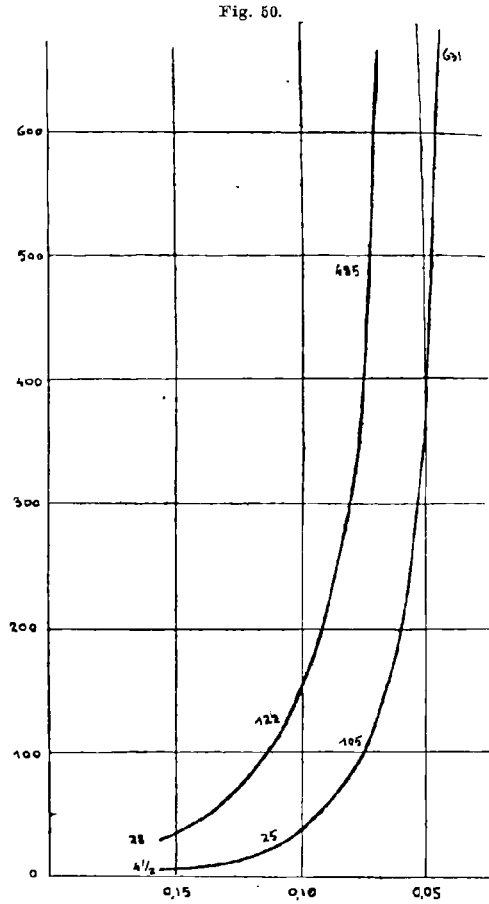
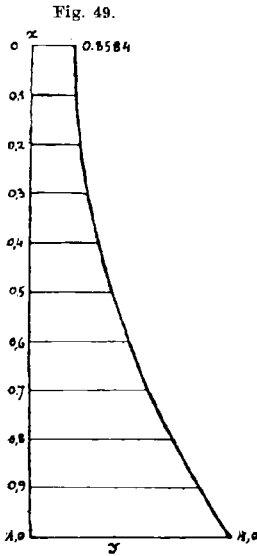


Rundheit der Kugeln und starkem Rütteln sich größere, als die berechenbaren Porenräume erhalten. Eine streng regelmäßige Verteilung wäre nur durchführbar, wenn einzeln ein Element an das andere gelegt würde. Je kleiner deren Durchmesser, um so leichter haften sie aneinander zu Gewölben und Aussparungen, die sich jeder Berechnung entziehen.

Fig. 48.



Durch das Hinzutreten von Feuchtigkeit aber werden Adhäsionskräfte geweckt, die bei weitem den Einfluß der Schwere überwiegen, für so kleine Dimensionen, wie sie allein beim Filtrieren in Betracht kommen. Aus diesem Grunde läßt sich für einen nassen Sand überhaupt theoretisch ein bestimmtes Volumen nicht mehr angeben. In keinem Fall reicht die Feststellung des Porenvolumens hin, um die Lagerung der Filterkörner nach Slichters Tabelle I daraus zu erkennen. Vielleicht ist aber eine genaue Kenntnis der Bahn für die



immer doch nur näherungsweise bestimmbare Bewegung des Wassers nicht einmal so wichtig als die Verteilung desselben über die verschiedenen Porenräume unter dem Zwang der Oberflächenanziehung. Diese letztere auszuschalten, unter Erhaltung der übrigen Bedingungen, gelingt leicht durch die Wahl entsprechend großer Dimensionen. Erst wenn über diesen Teil der Aufgabe ausreichende Erfahrungsdaten vorliegen, steht zu hoffen, sie auch in weiterem Umfang mit Erfolg rechnerisch in Angriff nehmen zu können.

Das Hinzukommen von Rauigkeiten und anderen Unvollkommenheiten der Kugelgestalt, wie sie bei natürlichen Sanden nicht fehlen, im Verein mit dem Vermengen verschiedener Größen macht jede Aussicht auf eine brauchbare Beschreibung oder Ableitung des Effektes zu nichts. Um so mehr, wenn man bedenkt, daß eine einzige kleinere Kugel nicht nur die „Einheit“ stört, an der sie direkt Teil nimmt, sondern auch den Bau der Nachbarschaft auf weite Strecken hin durchbricht. Nur in einem Fall lassen sich zwei Kugelgrößen im Filter rechnerisch zueinander in Beziehung setzen, wenn nämlich die eine in die Porenräume der anderen paßt.

Voraussetzung dazu ist, daß der Radius der kleineren Kugel nicht über 0,4142 desjenigen der größeren messe. Dann paßt sie nämlich in den Oktaederraum (6). Handelt es sich um ein nachträgliches Einfüllen, so kommt nur 0,1547 als Höchstmaß in Betracht, d. i. dasjenige des in die Luke einbeschreibbaren Kreises (4). In dieser Form gewinnt das Problem Interesse, wenn man sich die Filtrierflüssigkeit mit Luft oder Gasen durchsetzt denkt, deren Gestalt der Kugel sich annähern muß. Dient doch ein Sandfilter, wie weiter oben hervorgehoben, in vorzüglicher Weise zur Verteilung. Es kann deshalb kein ausgezeichneteres Mittel gedacht werden zur Erzielung intensiver Oberflächenwirkungen.

Die Kurvenbilder Fig. 50 geben die Zahl der Kugeln wieder, die je in einem Oktaeder- (obere Kurve) und Tetraederraum (untere Kurve) Platz finden, wobei die Abszissen die Radien in Teilen des Radius der Gerüstkugeln bedeuten, die Ordinaten die Anzahl der eingelagerten kleinen Kugeln direkt bezeichnen. Für die größeren darunter läßt sich das Resultat zur Not zeichnerisch finden. Das ist nur für den Ausgangspunkt von 0,1547 geschehen. Im übrigen sind die Poren einzölliger Stahlkugeln mit Glasperlen ausgefüllt und diese gezählt bzw. gewogen worden.

## Berichtigung zu der Abhandlung „Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie I. II.“<sup>1)</sup>

Von WILHELM BLASCHKE in Greifswald.

Die große Anzahl von Unrichtigkeiten und Druckfehlern, die in meinem Aufsatz enthalten sind, möge man damit entschuldigen, daß nur eine Korrektur in meine Hände gekommen ist.

Ich habe nachträglich folgende Versehen bemerkt:

Seite	an Stelle von	ist zu setzen:
63, Z. 9 v. u.	$(1 + z) : (1 - z)$	$(z + 1) : (z - 1)$
69, Formel (21) (22)	$q$	$\pi$
70, Formel (28)*	$\bar{\pi}$	$\bar{\pi}''$
71, Z. 13 v. o.	$\bar{p}$	$\bar{p}$
73, Z. 9 v. o.	$\gamma_i'$	$g_i'$
78, Z. 15, 16, wo von Studys Untersuchungen die Rede ist, sind die Worte „im Anschluß an Arbeiten italienischer Geometer“ zu		

1) S. 61—91 des 60. Bandes (1911) dieser Zeitschrift.

streichen. Die Dissertation von G. Fubini (Il parallelismo di Clifford negli spazii ellittici, Pisa 1900), in der dieser Gegenstand auch behandelt wird, ist gleichzeitig mit Studys Untersuchung (Über nichteuklidische und Liniengeometrie, Greifswald 1900) erschienen.

Seite	an Stelle von	ist zu setzen:
82, Z. 4 v. u.	im letzten Fall	im sechsten Fall
87, Z. 5 v. u.	Kollineation	Korrelation
87, Z. 4 v. u.	$\alpha_i, \alpha_r$	$\gamma_i, \gamma_r$

Schließlich sei darauf hingewiesen, daß gleichzeitig mit meinem Aufsatz, den ich vor Ostern 1911 der Redaktion dieser Zeitschrift eingeschickt habe, eine umfangreiche Abhandlung über denselben Gegenstand erschienen ist, die den kürzlich verstorbenen J. Grünwald zum Verfasser hat. (Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft. Vorgelegt der Wiener Akademie in der Sitzung am 4. Mai 1911).

Greifswald, im November 1911.

## Bücherschau.

**O. H. P. Silber**, Architekt (A. T. H.), Lehrer an der Städtischen Kunstgewerbe- und Handwerkerschule Charlottenburg und Dozent an der Gewerbe-Akademie Berlin, **Leitfaden der Projektionslehre und darstellenden Geometrie für Techn. Hochschulen, Akademien, Kunstgewerbe-, Baugewerk-, Handwerker-, Fortbildungsschulen usw.** 12 Blätter mit kurzem Text. O. H. P. Silber, Architekt (A. T. H.) Steglitz I. 1910.

Die 12 Blätter enthalten planimetrische Konstruktionen, die Projektionen von Punkten, Geraden und Körpern, Körperschnitte, Abwicklungen, Durchdringungen und einige praktische Anwendungen (Dächer, Treppenkrümmung, Gewölbe). Die Figuren sollen möglichst anschaulich sein, sodaß nur ein kurzer Text genügt. Der Verfasser denkt sich den Gebrauch so, daß die Studierenden die Figuren der Tafeln sehr bald in doppeltem Maßstab nachkonstruieren können und daß der Dozent nur noch in komplizierteren Fällen Figuren an der Tafel zu zeichnen braucht. Daß der Verfasser meint, seine Methoden seien neu, ist allerdings ein Irrtum. Er verwendet zur Unterstützung der Anschauung auch Parallelperspektiven (sog. schiefe Projektion), die er „Isometrie“ oder „isometrische“ Darstellungen nennt. Gegen diese ganz sinnlose Bezeichnung, die nur Verwirrung stiften kann, muß Verwahrung eingelegt werden.

Au bei Berchtesgaden, 14. August 1911.

KARL DOEHLEMANN.

## Neue Bücher.

### Arithmetik und Analysis.

1. MONTÉSSUS, R. DE, et D'ADHÉMAR, R., Calcul numérique. 1<sup>re</sup> partie: Opérations arithmétiques et algébriques. 2<sup>e</sup> partie: Intégration. (Encyclopédie scientifique.) Paris 1911, Doin. Fr. 5.—.

### Astronomie, Geodäsie, mathematische Geographie.

2. KLAUSER u. LAHN, Lehrbuch der Vermessungskunde f. den Gebrauch an Gewerbeschulen, zugleich als Hilfsbuch f. Bau- u. Maschinentechniker usw. bearb. v. Alfons Cappilleri. 4. Aufl. Wien 1912, Deuticke. Geb. K. 4.—.
3. KLEIN, HERM. J., Allgemeinverständliche Astronomie. Ausführliche Belehrungen über den gestirnten Himmel, die Erde und den Kalender. 10., vielfach verb. Aufl. Leipzig 1911, Weber. M 3.50.
4. —, Mathematische Geographie. 3., verb. Aufl. Leipzig 1911, Weber. Geb. M 2.50.
5. KRÖHNKE, G. H. A., Taschenbuch zum Abstecken v. Kurven auf Eisenbahn- u. Wegelinien. 15. Aufl. bearb. v. R. Seifert. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. Geb. in Leinw. M 2.—.
6. OPPENHEIM, S., Probleme der modernen Astronomie. (Aus Natur und Geisteswelt, 355. Bändchen.) Leipzig 1911, Teubner. M 1.—; geb. in Leinw. M 1.25.
7. PES, G., Nuova navigazione astronomica. Le rette di posizione, teoria, applicazioni. Genova 1911. L. 8.25.
8. POINCARÉ, H., Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, professées à la Sorbonne, rédigées par Henri Vergue. Paris 1911, Hermann et Fils. Fr. 12.—.
9. SELIGER, PAUL, Die stereoskopische Meßmethode in der Praxis. I. Teil. Einführung in die Topographie, Einführung in die Bildmessung, Normal-Stereogramm. Berlin 1911, Springer. M 7.—; geb. M 8.—.

### Geschichte, Biographien.

10. LEBON, ERNEST Gabriel Lippmann. Biographie, bibliographie analytique des écrits. (Savants du jour.) Paris 1911, Gauthier-Villars. Fr. 7.—.

### Mechanik.

11. APPELL, P., Traité de mécanique rationnelle. 3<sup>e</sup> édition, entièrement refondue. T. 2: Dynamique des systèmes. Mécanique analytique. Paris 1911, Gauthier-Villars. Fr. 20.—.
12. BLAUERT, MARTIN, Über einige Anwendungen der elliptischen Funktionen auf die Theorie des ebenen Gelenkvierecks. Diss. Rostock 1911.
13. CARL, ALEXANDER, Über höhere Rückkehr- und Wendepole. Diss. Jena 1911.
14. FÖPPL, AUG., Vorlesungen über technische Mechanik. In sechs Bänden. II. Band. Graphische Statik. 3. Aufl. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. geb. in Leinw. M 8.—.
15. HAGER, KARL, Berechnung ebener, rechteckiger Platten mittels trigonometrischer Reihen. München u. Berlin 1911, Oldenbourg. M 7 20.

16. HUGHES, HECTOR J., and SAFFORD, ARTHUR T., A treatise on Hydraulics. London 1911, Macmillan. 16 s.
17. KÖLSCH, O., Gleichgang u. Massenkräfte bei Fahr- u. Flugzeugmaschinen. Berlin 1911, Springer. *M* 5 —.
18. LORENZ, HANS, Neue Theorie u. Berechnung der Kreisräder, Wasser- u. Dampfturbinen, Schleuderpumpen u. -Gebläse, Turbokompressoren, Schraubengebläse u. Schiffspropeller. 2., neubearb. u. verm. Aufl. München u. Berlin 1911, Oldenbourg. *M* 11 —.
19. MASSAL, J., Leçons de mécanique rationnelle. T. 1: Géométrie vectorielle. Statique. Gand 1911, Van Goethem. Fr. 10 —.
20. SCHÖNHÖFER, ROB., Statische Untersuchung v. Bogen- u. Wölbttragwerken nach den Grundsätzen der Elastizitätstheorie unter Anwendung des Verfahrens m. konstanten Bogengrößen. 2. neubearb. u. erweit. Aufl. Berlin 1911, Ernst & Sohn. *M* 2.60.

### Physik, mathematische Chemie.

21. BIERI, HERMANN, Lehrbuch der Physik für Sekundarschulen, Bezirksschulen u. Progymnasien. Bern 1911, Francke. Geb. *M* 2.80.
22. EBERT, H., Lehrbuch der Physik. Nach Vorlesungen an der techn. Hochschule zu München. I. Bd. Mechanik. Wärmelehre. („Naturwissenschaft u. Technik in Lehre u. Forschung“, hrsg. v. F. Doflein u. K. T. Fischer.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 14.—.
23. EDSEER, EDWIN, General Physics for Students. A text-book on the fundamental properties of matter. London, Macmillan & Co. 7 s. 6 d.
24. EULERI, LEONHARDI, Opera omnia. Series III. Opera physica, miscellanea, epistolae. Vol. III. Pars 1. Dioptrica. Ed. Emil Cherbulez. Vol. 1. Continens librum primum, libri secundi sectionem primam et secundam. Leipzig 1911, Teubner. Geb. *M* 24.—.
25. FORTSCHRITTE, Die, der Physik im J. 1910. Dargestellt v. der deutschen physikal. Gesellschaft. 66. Jahrg. 2. Abtlg., enth. Elektrizität u. Magnetismus, Optik des gesamten Spektrums, Wärme. Braunschweig 1911, Vieweg & Sohn. *M* 38.—.
26. ——. Dasselbe. 3. Abtlg., enth. kosmische Physik. Ebenda. *M* 36.—.
27. GEIGEL, ROB., Die Wärme. (Bücher der Naturwissensch., 10. Bd.) Leipzig (1911), Reclam jun. Geb. *M* 1.—.
28. HINRICHS, W., Einführung in die geometrische Optik. (Sammlung Göschen Nr. 532.) Leipzig 1911, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.80.
29. JÜTTNER, FERENCZ, Über die allgemeinen Integrale der gewöhnlichen chemischen Kinetik. (Aus: Festschrift zur Jahrhundertfeier der Universität Breslau.) Breslau 1911, Trewendt & Granier. *M* —.60.
30. KLEIBER, JOH., u. SCHINNERL, MARTIN, Physik u. Chemie f. höhere Mädchenschulen. Ausg. A f. d. Allgemeine Abteilung. Unter besonderer Berücksichtigung der Kgl. bayer. Lehrpläne vom 8. April 1911. München 1911, Oldenbourg.
31. KORN, ARTH., u. GLATZEL, BRUNO, Handbuch der Phototelegraphie u. Telautographie. Leipzig 1911, Nernich. Geb. in Halbfrz. *M* 28.—.
32. MASCHE, WALTHER, Physikalische Übungen. Ein Leitfaden f. die Hand des Schülers. In 4 Heften. I. Teil. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* —.60.
33. ——. Dasselbe. II. Teil. Ebenda. *M* —.80.
34. ORLICH, ERNST, Die Theorie der Wechselströme. (Mathem.-physikal. Schriften f. Ingen. u. Studierende, Nr. 12.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 2.40; geb. in Leinw. *M* 2.80.
35. PLANCK, MAX, Vorlesungen über Thermodynamik. 3., erw. Aufl. Leipzig 1911. Veit & Co. Geb. *M* 7.50.



36. RITZ, WALTHER, Gesammelte Werke. Oeuvres. Publiées par la Société suisse de Physique. Paris 1911, Gauthier-Villars.
37. SCHEFFER, W., Wirkungsweise u. Gebrauch des Mikroskops u. seiner Hilfsapparate. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 2 40; geb. in Leinw. *M* 3.—.
38. WEGENER, ALFRED, Thermodynamik der Atmosphäre. Leipzig 1911, Barth.  
*M* 11.—; geb. in Leinw. *M* 12 —
39. WOOD, ROBERT W., Physical Optics. 2<sup>d</sup> and revised edition. London 1911, Macmillan & Co. 22 s.

### Statistik, Versicherungsmathematik.

40. BERLINER, S., Versicherungsrechnung für Nicht-Mathematiker. Leipzig 1911, Pöschel. *M* 4.80.
41. BROGGI, HUGO, Versicherungsmathematik. Deutsche Ausgabe. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 7 —; geb. in Leinw. *M* 8.—.
42. YULE, G. U., An introduction to the theory of statistics. London 1911, Griffin. 10 s. 6 d.

### Tafeln, Rechenapparate.

43. ANDOYER, H., Nouvelles tables trigonométriques fondamentales (Logarithmes). Ouvrage publié à l'aide d'une subvention accordée par l'Université de Paris (Fondation Commercy). Paris 1911, Hermann et Fils. Fr. 30.—.
44. GRENDT, M., u. LIEHMANN, A., Logarithmen- u. Kurven-Tabellen f. den Gebrauch an Tiefbauschulen. Leipzig 1911, Teubner. Geb. *M* 1.20.
45. HOUBL, J., Tables de logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques. Nouv. éd., revue et augmentée. Paris 1911, Gauthier-Villars. Fr. 2.75.
46. JACOB, L., Le calcul mécanique. Appareils arithmétiques et algébriques. Intégrateurs. (Encyclopédie scientifique.) Paris 1911, Doin. Fr. 5.—.
47. VIDAL, P. C., Balance algébrique pour obtenir les racines réelles des équations algébriques ou transcendentes avec une inconnue. Barcelone 1911, Guinart.

### Verschiedenes.

- ABHANDLUNGEN ÜB. DEN MATH. UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND, veranlaßt durch die internationale mathem. Unterrichtskommission, hrsg. v. F. Klein. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner.
48. I 4: A. Thaer, N. Geuther, A. Böttger, Der mathematische Unterricht in den Gymnasien u. Realanstalten der Hansestädte, Mecklenburgs u. Oldenburgs.
49. II 7: Wirz, J., Der mathematische Unterricht an den höheren Knabenschulen sowie die Ausbildung der Lehramtskandidaten in Elsaß-Lothringen. *M* 1.80.
50. III 5: Timmerding, H. E., Die kaufmännischen Aufgaben im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. *M* 1.60.
51. III 1: Schimmack, Rud., Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland. Mit einem Einführungswort in Band III von F. Klein, Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 3.60.
52. IV 7: Jahnke, E., Die Mathematik an Hochschulen f. besondere Fachgebiete. *M* 1.80.
53. ABHANDLUNGEN U. BERICHTE ÜB. TECHNISCHES SCHULWESEN, veranlaßt u. hrsg. vom deutschen Ausschuß f. technisches Schulwesen. Bd. II. Arbeiten auf dem Gebiete des technischen Mittelschulwesens. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 6 —.
54. BARTH, CURT, Die Grundlagen der Zahnradbearbeitung unter Berücksicht. der modernen Verfahren u. Maschinen. Berlin 1911, Springer. *M* 3.60.

55. „Hütte“, des Ingenieurs Taschenbuch. Hrsg. v. akadem. Verein Hütte. 21. Aufl. 3 Bde. Berlin 1911, Ernst & Sohn. Geb. in Leinw. *M* 18.—; in Ldr. *M* 21.—.
56. — des Bauingenieurs. Sonderausg. des 3. Bds. der „Hütte“, des Ingenieurs Taschenbuch. 21. Aufl. Berlin 1911, Ernst & Sohn.  
Geb. in Leinw. *M* 9.—; in Ldr. *M* 10.—.
57. LEHMANN, H., Die Kinematographie, ihre Grundlagen und ihre Anwendungen. (Aus Natur und Geisteswelt, 358. Bändchen.) Leipzig 1911, Teubner.  
Geb. *M* 1.—, geb. in Leinw. *M* 1.25.
58. MEHL, AD., Der Freiballon in Theorie u. Praxis, unter Mitarbeit von v. Abereron, Hans Adam u. a. hrsg. 2. Bd. Stuttgart 1911, Franckh. Geb. *M* 4.80.
59. NIMFÜHR, RAIMUND, Die Luftschiffahrt. Für reife Schüler. (Dr. Bastian Schmidts naturwissensch. Schülerbibliothek, 10.) Leipzig u. Berlin 1911, Teubner.  
Geb. *M* 3.—.
60. VOGT, HEINRICH, Geometrie u. Ökonomie der Bienenzelle. Breslau 1911, Trendt & Granier. *M* 3.—.

### Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- ANDOYER, H., Tables trigonométriques, s. N. B. („Neue Bücher“) Nr. 43.
- ARNOUX, GABRIEL, Essai de géométrie analytique modulaire à deux dimensions. Paris 1911, Gauthier-Villars. Fr. 6.—.
- BERLINER, S., Versicherungsrechnung, s. N. B. 40.
- BIERI, H., Physik, s. N. B. 21.
- BROGGI, H., Versicherungsmathematik, s. N. B. 41.
- BUGGE, GÜNTHER, Chemie u. Technik. (Bücher der Naturwissenschaft, 11. Bd.) Leipzig 1911, Reclam. Geb. *M* 1.—
- CONTRIBUTIONS from the Jefferson Physical Laboratory and from colleagues and former students dedicated to Professor John Trowbridge. Vol. VIII, for the year 1910. Cambridge, Mass., U. S. A.
- CRANTZ, P., Arithmetik u. Algebra zum Selbstunterricht. II. (Aus Natur u. Geisteswelt, 205. Bändchen.) 2. Aufl. Leipzig 1911, Teubner.  
*M* 1 —; geb. in Leinw. *M* 1.25.
- EBERT, H., Lehrbuch der Physik, s. N. B. 22.
- FÖPPL, A., Technische Mechanik, s. N. B. 14.
- GEIGEL, R., Die Wärme, s. N. B. 27.
- HAGER, K., Berechnung ebener, rechteckiger Platten, s. N. B. 15.
- HAUPT, OTTO, Untersuchungen über Oszillationstheoreme. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 2.—.
- HEIMSOETH, HEINZ, Die Methode der Erkenntnis bei Descartes u. Leibniz. 1. Hälfte: Historische Einleitung. Descartes' Methode der klaren u. deutlichen Erkenntnis. (Philosophische Arbeiten, hrsg. v. Herm. Cohen u. Paul Natorp, VI. Bd., 1. Heft.) Gießen 1912, Töpelmann. *M* 5.50.
- HENDERSON, ARCHIBALD, The twenty-seven lines upon the cubic surface. (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics No. 13.) Cambridge 1911, University Press. 4 s. 6 d.
- HINRICHS, W., Geometrische Optik, s. N. B. 27.
- HOČEVAR, FRANZ, Lehr- u. Übungsbuch der Geometrie f. Gymnasien u. Realgymnasien, Oberstufe (VI., VII. u. VIII. Klasse). 7. Aufl. Wien 1912, Tempsky. Geb. K. 2.80.

- HOCHHEIM, AD., Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft 1. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. A. Aufgaben. 4., verm. Aufl., bearb. v. Oswald Jahn u. Franz Hochheim. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner.  
Geb. in Leinw. *M* 2.80.
- , Dasselbe. B. Auflösungen. Ebenda. Geb. in Leinw. *M* 2.40.
- , Dasselbe. Heft III. Die Kegelschnitte. Abteilung II. A. Aufgaben. 2., verm. Aufl. bearb. v. Franz Hochheim. Ebenda. Geb. in Leinw. *M* 1.80.
- , Dasselbe. B. Auflösungen. Ebenda. Geb. in Leinw. *M* 2.40.
- JAHNKE, E., Die Mathematik an Hochschulen f. besondere Fachgebiete, s. N. B. 50.
- KLAUSER-LAHN, Vermessungskunde, s. N. B. 2.
- KLEIBER-SCHINNERL, Physik u. Chemie, s. N. B. 30.
- KLEIN, H. J., Astronomie, s. N. B. 3.
- , Mathem. Geographie, s. N. B. 4.
- KOMMERELL, V., u. KOMMERELL, K., Analytische Geometrie. Für den Schulgebrauch bearb. I. Teil. Tübingen, Laupp. Geb. *M* 2.40.
- KRÖHNKE, G. H. A., Taschenbuch zum Abstecken v. Kurven, s. N. B. 5.
- LEBON, E., Gabriel Lippmann, s. N. B. 10.
- LEHMANN, H., Die Kinematographie, s. N. B. 57.
- LINDT, RICH., Mißstände im Unterricht u. im Prüfungswesen der Hochschulen u. ihre Beseitigung. Charlottenburg 1911, Heydenreich.
- LOBENZ, H., Neue Theorie u. Berechnung der Kreiselräder, s. N. B. 18.
- MEIR, THOMAS, The theory of determinants in the historical order of development. Vol. II. The period 1841 to 1860. London 1911, Macmillan & Co. 17 s.
- MANGOLDT, HANS VON, Einführung in die höhere Mathematik f. Studierende u. zum Selbststudium. I. Bd. Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung u. der analytischen Geometrie. Leipzig 1911, Hirzel. *M* 12.—.
- MASCHE, W., Physikalische Übungen, s. N. B. 32.
- MEHL, AD., Der Freiballon, 2. Bd., s. N. B. 58.
- MEYER, W. FRANZ, Über die Theorie benachbarter Geraden u. einen verallgemeinerten Krümmungsbegriff. Eine Ergänzung zu den Lehrbüchern über Differentialgeometrie. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 8.—.
- NIELSEN, NIELS, Elemente der Funktionentheorie. Vorlesungen, gehalten an der Universität Kopenhagen. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner.  
Geb. in Leinw. *M* 15.—.
- NIMMÜHR, R., Die Luftschiffahrt, s. N. B. 59.
- OPPENHEIM, S., Probleme der modernen Astronomie, s. N. B. 6.
- ORLICH, E., Theorie der Wechselströme, s. N. B. 34.
- POINCARÉ, H., Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, s. N. B. 8.
- PRÜSMANN, R., Neue Auflösungen der Gleichung fünften Grades auf Grund linearer Gravitationen. Berlin 1911, Weidmann. *M* 2.40.
- RITZ, W., Gesammelte Werke, s. N. B. 36.
- SCHAEFFER, W., Mikroskop, s. N. B. 37.
- SCHLAF, JOH., Religion u. Kosmos. Berlin 1911, Hofmann & Comp. *M* 2.—.
- SELIGER, P., Die stereoskopische Meßmethode, s. N. B. 9.
- SMON, MAX, Analytische Geometrie der Ebene. (Sammlung Göschen, Nr. 65.) 3., verb. Aufl. Leipzig 1911, Göschen. Geb. *M* —.80.
- STAHL, HERM., Abriß einer Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen in neuer Fassung. Nachgelassene Schrift, in Verbindung m. E. Löffler hrsg. v. M. Nöther. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 5.—.
- STOLZ, OTTO, u. GMEINER, J. A., Theoretische Arithmetik. I. Abtlg. Allgemeines. Die Lehre v. den rationalen Zahlen. 2. Aufl., umgearb. v. J. Anton Gmeiner. (3. Aufl. der Abschnitte I—IV des I. Teiles der Vorlesungen üb. allgemeine Arithmetik v. O. Stolz.) (Teubners Sammlung Bd. IV,<sup>1</sup>) Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 5.20
- Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 60. Band. 1911. Heft 2. 14

- STUDY, E., Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. 1. Heft. Ebene analytische Kurven u. zu ihnen gehörige Abbildungen. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M.* 4.80.
- SUPPANTSCHITSCH, RICH., Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra f. die VI. bis VIII. Klasse der Gymnasien u. Realgymnasien. Wien 1912, Tempsky. Geb. K. 4.50.
- TIMERDING, H. E., Die Infinitesimalrechnung auf der Schule. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M.* 1.20.
- , Die kaufmännischen Aufgaben im mathem. Unterricht, s. N. B. 50.
- VOGT, H., Geometrie u. Ökonomie der Bienenzelle, s. N. B. 60.
- WIELEITNER, H., Der Begriff der Zahl in seiner logischen u. historischen Entwicklung. (Mathematische Bibliothek, hrsg. v. W. Lietzmann u. A. Witting, 2.) Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. Kart. *M.* —.80.
- WIRZ, J., Der mathematische Unterricht in Elsaß-Lothringen, s. N. B. 49.
-

## Abhandlungsregister 1909—1910.

Von ERNST WÖLFFING in Stuttgart.

(Fortsetzung von S. 112.)

## Abkürzungen.

- R.C.M.P. Rendiconti del Circolo Mat., Palermo 26—31.  
 R.D.S. Rivista di Scienze, Bologna 2.  
 R.E. The Railway Engineer, London 1909.  
 R.F.H. Revista de la Facultad de Letras y Ciencias, Habana 3.  
 R.F.M. Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali, Pavia 9.  
 R.G.C.F. Revue générale des Chemins de Fer et des Tramways, Paris 32; 1909.  
 R.G.M. Revue du Génie militaire, Paris 24; 1910.  
 R.G.O. Revue générale des Sciences, Paris 19—21.  
 R.I. Revue de l'Ingénieur et Index technique, Bruxelles 40.  
 R.I.B. Rendiconti delle Sessioni dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto Bologna (2) 10; 13.  
 R.I.L. Rendiconti del R. Istituto Lombardo delle Scienze e Lettere Milano (2) 41—43.  
 R.I.P. Revue industrielle Paris 40—41; 1909.  
 R.I.S. Rivista di Ingegneria sanitaria, Torino 1.  
 R.I.Z. Rigasche Industriezeitung, Riga 34, 1909—1910.  
 R.L.G. Rivista ligure di Scienze, Lettere ed Arti, Genova 1907.  
 R.M.B. Revista Maritima Brasileira, Rio de Janeiro 27; 29.  
 R.M.C. Revue des Matières colorantes, Paris 13.  
 R.M.M. Revue de Métaphysique et de Morale, Paris 18.  
 R.M.M.P. Revue maritime, Paris 182 bis 183; 185.  
 R.M.P. Sammelchr. der Math. Gesellschaft Prag 12.  
 R.M.R. Rivista marittima, Roma 41; 43; 1908.  
 R.M.S. Revue de Math. spéciales, Paris 18—19.  
 R.M.U. Revue de Metallurgie, Paris 7.  
 R.N. Revue néphologique, Bruxelles 32; 1909.  
 R.N.L. Railway News, London 93.  
 R.P.E. Revue pratique d'Electricité 19.  
 R.Q.S. Revue de Questions Scientifiques, Bruxelles 1909.  
 R.Q.S.I.C. Résumé quinzaine de la Soc. des Ingénieurs Civils de France 1910.  
 R.S. Revue Scientifique, Paris (5) 7; 9 bis 14.  
 R.S.A.A. Reports of the South African Association for the Advancement of Science, Capetown 1.  
 R.T.W. Rundschau für Technik u. Wirtschaft, Prag 1909—1910.  
 R.U.M. Revue universelle des Mines, Liège 25—27.  
 S. Science, New York (2) 24; 28; 30 bis 31.  
 S.A.B. Sitzungsber. der K. Preuß. Akad. der Wiss., Berlin 1907—1910.  
 S.A.M. Sitzungsber. der Math. Phys. Klasse der K. Bayr. Akad. der Wiss., München 39; 1910.  
 S.Am. Scientific American, New York 99—100; Suppl. 65—67.  
 S.A.W. Sitzungsber. der Math. Nat. Kl. der K. K. Akad. der Wissensch., Wien 116—119.  
 S.B.H. Der Steinbildhauer 25; 1909.  
 S.C. System, Chicago 1909.  
 S.D.B.H. Süddeutsche Bauhütte, München 1910.  
 S.E.D. Stahl und Eisen, Düsseldorf 27; 29—30.  
 S.E.Z. Schweizerische Elektrotechnische Zeitschrift, Zürich 5; 1909—1910.  
 S.F.P. Société française de Physique, Paris 282; 290; 298.  
 S.G.B. Sitzungsber. der Böhm. Gesellsch. der Wissensch, Prag 1907—1908.  
 S.G.M. Sitzungsber. der Gesellsch. zur Beförderung der gesamten Naturw., 1908—1909.

- S.I. Annual Report of the Smithsonian Institution, Washington 1908.
- S.I.B. Der Schiffingenieur, Berlin 18.
- S.I.D. Sitzungsber. der naturwiss. Gesellsch. Isis, Dresden 1908—1909.
- S.M. Bulletin de la Soc. math. de France, Paris 35—38.
- S.M.Am. Bulletin of the American Math. Soc., (2) 14—16.
- S.M.B. Sitzungsber. der Berliner Math. Gesellsch. 1909—19010.
- S.M.C.E. The Surveyer and Municipal County Engineer, London 35; 1909.
- S.M.Ka. Bulletin der physiko-math. Gesellsch., Kasan (2) 16.
- S.M.Kh. Mitteilungen der math. Gesellsch., Kharkow (2) 11—12.
- S.M.M. Sammelchr. d. math. Gesellsch., Moskau 26—27.
- S.M.M.L. Symon's Meteorological Magazine, London 42.
- S.M.Q. School of Mines Quarterly, New York 28—29; 31.
- S.M.R. Schreibmaschinenrevue 1909 bis 1910.
- S.N.D. Sitzungsber. der naturforsch. Gesellsch., Danzig (2) 12.
- S.N.J. Sitzungsber. der Naturforschergesellsch., Jurjev 17—18.
- S.P. Bulletin de la Soc. philomatique, Paris (9) 10.
- S.P.M. Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society, Manchester 52—54.
- S.P.M.E. Sitzungsberichte der physikal. medicin. Gesellsch., Erlangen 40—41.
- S.R.A. Stahlrad u. Automobil 25.
- S.S.L. Steamship, London 21.
- S.S.M. School Science and Mathematics 9.
- S.U.W. Schuss u. Waffe 2—3.
- S.V.K. Sitzungsber. des naturw. Vereins f. Schleswig, Kiel 14.
- S.V.N.W. Schriften des Vereins zur Verbreitung naturw. Kenntnisse, Wien 48—60.
- S.W. Shipping World, London 52.
- S.W.M. Sprengstoffe, Waffen u. Munition, Charlottenburg 5.
- S.Z.A. Schweiz. Zeitschr. f. Artillerie u. Genie, Frauenfeld 44.
- T.A. The Aero 1; 2.
- T.A.A. Arbeiten der Südslav. Akad. Agram 175; 177.
- T.A.I.E.E. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, New York 19.
- T.A.I.M.E. Transaction of the American Institution of Mining Engineers, New York 29; 38.
- T.A.J. The Automotor Journal, London 14.
- T.A.N.Y. The Automobile, New York 20—21.
- T.A.P. Technique aérienne, Paris 1910.
- T.A.S.C.E. Transactions of the American Society of Civil Engineers, New York 65.
- T.B.L. The Builder, London 94; 96.
- T.C.A. Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, New Haven 14.
- T.C.I. Transactions of the Canadian Institute, Toronto 8.
- T.C.P.S. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge 20 bis 21.
- T.C.W. The Clay Worker, Indianapolis 52.
- T.E.L. Telephone Engineer, London 4.
- T.F.Z. Textil- u. Färberzeitung 5.
- T.I.M.E. Transactions of the Institution of Marine Engineers 22; 1910.
- T.I.Z. Tonindustriezeitung, Berlin 26; 32—33.
- T.K.L. Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, Utrecht 24.
- T.M. Nyt Tidskrift for Mathematik 19 bis 21.
- T.M.P. La Technique moderne, Paris 2 bis 3.
- T.N.Z.I. Transactions and Proceedings of the New Zealand Institute, Wellington 41—42.
- T.Q. Technological Quarterly, Boston 31.
- T.R. The Rudder, New York 24; 1909.
- T.R.B. Techn. Rundschau, Berlin 1909.
- T.R.S.E. Transactions of the Roy. Soc. Edinburgh 47.
- T.R.S.I. Philos. Trans. of the Roy. Soc. London 208—210.
- T.R.W. The Tramway and Railway World, London 27—28.
- T.S. The Steamship, London 21.
- T.S.A.P.S. Trans. of the South African Philosoph. Soc., Capetown 16.
- T.S.L. Trans. of the Acad. of Science, St. Louis 16; 18.
- T.S.M.Am. Trans. of the Amer. Math. Soc., New York 9—11.
- T.S.U.R. Travaux scientifiques de l'Université, Rennes 3; 6.
- T.T.S. Teknisk Tidskrift, Stockholm 36.
- T.W. Travaux physico-math., Warschau, 17—20.
- Ü.B. Überall, Berlin 11.
- U.M.N. Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturw., Berlin 13—17.
- U.S.M. United Service Magazine 1909.
- V. Vulkan, Frankfurt a. M. 8—10.
- V.A. La Vie automobile, Paris 10; 1910.
- V.A.S. Handlingar af K. Svenska Akad. Stockholm 46.
- V.C.P. Vie à Camp, Paris 1910.

- V.D.P.G. Verh. der deutschen Physik. Gesellsch., Berlin 10; 12.
- V.D.V.S. Verh. des deutschen wiss. Vereins Santiago 4—5.
- V.D.V.V. Veröff. des Deutschen Vereins für Versicherungswissensch., Berlin 7.
- V.G.H. Verhandl. des Naturhist. mediz. Vereins, Heidelberg (2) 8.
- V.G.W. Verh. der phys. mediz. Gesellsch. Würzburg (2) 40.
- V.I.M.C. Verh. des Intern. Math. Kongresses, Roma 4.
- V.N.B. Verh. der naturforsch. Gesellsch., Basel 21; 93.
- V.N.K. Verh. des naturwiss. Vereins, Karlsruhe 22.
- V.N.V.H. Verh. des naturwiss. Vereins, Hamburg-Altona (3) 15—16.
- V.N.Z. Vierteljahrshr. der naturforsch. Gesellsch., Zürich 52—55.
- V.S.N.G. Verh. der Schweiz. naturforsch. Gesellsch., Bern 90; 92.
- V.T.W. Verkehrstechn. Woche, Berlin 7; 1909.
- V.W.A. De Vriend der Wiskunde, Arnhem 22.
- W.B. Das Wetter, Berlin 25.
- W.E. Western Electrician, Chicago 42.
- W.K. Weiße Kohle, München 2.
- W.L.Z. Wiener Luftschifferzeitung, Wien 7; 9; 1909.
- W.S.D.B. Wochenschrift deutscher Bahnmeister, Berlin 26—27; 1909.
- W.T. Wiskundig Tijdschrift 4—6.
- W.T.B. Die Welt der Technik, Berlin 1906; 1907; 1909.
- W.W.E. Water and Water Engineering, London 12.
- Y.B. Yacht, Berlin 1909.
- Z.A.K. Zeitschr. f. chem. Apparatenkunde, Berlin 3.
- Z.B.G.V. Zeitschr. des Bayr. Geometervereins, München 6; 9.
- Z.B.I. Ziegel- und Bauindustrie 1909.
- Z.B.W.B. Zeitschr. f. Beleuchtungswesen 14; 1909—1910.
- Z.E. Zeitschr. f. Elektrochemie, Halle 15.
- Z.E.M. Zeitschr. f. Elektrotechnik u. Maschinenbau, Potsdam 1910.
- Z.F.T.B. Zeitschr. f. Flugtechnik 1.
- Z.G.H.W. Zeitschr. f. Gewerbehygiene, Wien 15.
- Z.G.T. Zeitschr. f. das gesamte Turbinenwesen, München 1909.
- Z.G.U. Zeitschr. f. gewerbl. Unterricht, Leipzig 22.
- Z.G.W.W. Zeitschr. f. die gesamte Wasserwirtschaft 6.
- Z.H. Zeitschr. f. math.-naturw. Unterr., Leipzig 38—42.
- Z.K.M. Zeitschr. f. Kristallogr. u. Mineralogie, Leipzig 45; 47.
- Z.L.L. Zeitschr. f. Lehrmittelwesen u. pädagog. Literatur, Wien 4.
- Z.M.E. Zeitschr. f. mediz. Elektrologie 1910.
- Z.M.M. Zeitschr. des mitteleurop. Motorwagenvereins, Berlin 1009.
- Z.N.U. Zeitschr. f. naturw. Unterricht 1908.
- Z.P. Zeitschr. f. phys.-chem. Unterricht, Berlin 21—23.
- Z.P.C. Zeitschr. f. physikal. Chemie, Leipzig 59; 63; 65—66; 69; 71—73.
- Z.P.M. Zeitschr. f. prakt. Maschinenbau 1.
- Z.P.R. Zeitschr. f. pädagogische Reform, Berlin 1907.
- Z.S. Zeitschr. f. Math. u. Phys., Leipzig 55—59.
- Z.S.I. Zeitschr. f. Sauerstoffindustrie 2.
- Z.S.S. Zeitschr. f. das gesamte Schieß- und Sprengstoffwesen, München 3—5.
- Z.S.T. Zeitschr. f. Schwachstromtechnik 1908—1910.
- Z.T.B. Zeitschr. f. Tiefbau, Berlin 1910.
- Z.T.S. Zeitschr. f. Transport u. Straßenbau, Berlin 25—27; 1909.
- Z.V.B. Zeitschr. f. Versicherungswiss., Berlin 6.
- Z.V.D.E.V. Zeitschr. des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen, Berlin 50; 1909.
- Z.W.M. Zeitschr. f. wiss. Mikroskopie, 1909—1910.
- Z.W.W.B. Zentralblatt f. Wasserbau u. Wasserwirtschaft, Berlin 1; 5; 1910.
- Das Abhandlungsregister erstreckt sich nicht mehr, wie seither, auf die Gebiete der Physik, Astronomie, Geodäsie, Geophysik, Chemie und Naturwissenschaft.

### Logikkalkül.

1. *L. A. Hoskins.* General algebraic solutions in the logic of classes. S.M. Am. (2) 15; 82.

2. *L. A. Hoskins.* A general diagrammatic method of representing propositions and inference in the logic of classes. S.M. Am. (2) 15. 84.

3. *P. S. Porezkij.* Théorie conjointe des égalités et des non-égalités. S.M. Ka. (2) 16. 41.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung.

4. *F. d'Arçais.* Sopra 2 problemi di calcolo di probabilità. A.I.V. 69. 269.

5. *L. Bachelier.* Étude sur la probabilité des causes. J.M. (6) 4. 395.

6. *L. Bachelier*. Le problème général des probabilités dans les épreuves répétées C.R. 146. 1085.
7. *S. Bogyó*. Beitrag zum Bernoullischen Satze (ung) M. P. L. 15. 203.
8. *E. Borel*. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. R. C. M. P. 27. 247.
9. *U. Broggi*. Il teorema della probabilità composta e la definizione descrittiva di probabilità R. C. M. P. 28. 245.
10. *S. H. Burbury*. On the law of probability for a system of correlated variables. P. M. (6) 17. 1.
11. *S. H. Burbury*. On the law of equipartition of energy between correlated variables. R. B. A. 78. 598.
12. *S. H. Burbury*. Boltzmann's law of probability.  $e^{-lx}$  P. M. (6) 19. 712.
13. *C. V. L. Charlier*. Die strenge Form des Bernoullischen Theorems. A. M. A. F. 5. Nr. 15.
14. *Ehrenfest P. u. T.* Über eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die mit der kinetischen Deutung der Entropievermehrung zusammenhängt. M. N. B. 3. 197; 214.
15. *A. K. Erlang*. Sandsynlighedsregning og teleforsamtaler. T. M. 20. B. 33.
16. *F. Gilman*. Evaluation of a probability integral. A. of M. (2) 9. 157.
17. *C. Gini*. Sulla regolarità dei fenomeni rari. V. I. M. C. 4. C. 303.
18. *G. Guerritore*. Sopra un teorema di probabilità. B. C. 9. 301.
19. *K. Kroman*. Den aposterioriske sandsynlighed. B. A. Co. 1908. Nr. 3. 133.
20. *P. Mansion*. Sur la loi des grands nombres de Poisson. B. A. B. 1910. 158.
21. *A. A. Markov*. Über einen Fall von in mehrfacher Kette verbundenen Versuchen (russ) A. P. B. (6) 1911. 171.
22. *A. Markoff*. Recherches sur un cas remarquable d'épreuves dépendantes A. M. 33. 87.
23. *P. Medolaghi*. Intorno al calcolo formale delle probabilità. G. B. 45. 192.
24. *O. Meissner*. Zur Anwendung der Zufallskriterien. Z. S. 56. 269.
25. *M. Morale*. Sopra un problema nel calcolo delle probabilità. P. M. R. (3) 6. 89.
26. *D. Mordukhay-Boltovskoy*. Sur la doctrine de la fortune morale et espérance morale de D. Bernoulli. C. M. N. W. 1904. 8.
27. *K. Pearson*. On the improbability of a random distribution of stars in space. P. R. S. L. 84. 47.
28. *P. Pizzetti*. Sulla dimostrazione di un teorema fondamentale nel calcolo delle probabilità. A. A. T. 43. 698.
29. *O. Postma*. Over de grondslagen der waarschijnlijkheidsrekening N. A. W. (2) 8. 214.
30. *H. Rohne*. Einige Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Schießlehre. A. U. H. 1909. 129.
31. *E. Rutherford and H. Geiger*. The probability variations in the distribution of  $\alpha$  particles. P. M. (6) 20. 698.
32. *U. Scarpis*. Intorno ad un principio relativo alla probabilità composta. P. M. R. (3) 6. 279.
33. *U. Scarpis*. Un'osservazione intorno ad un problema di probabilità. B. D. M. 9. 34.
34. *H. Schwitema*. Eenige vraagstukken uit de waarschijnlijkheidsrekening. W. T. 4. 71.
35. *E. Traynard*. Lois du hasard. A. F. 1909. 156.
36. *J. K. Whittemore*. A problem in chance A. of M. (2) 9. 82.
37. *N. N.* Erreichung der Wahrscheinlichkeit eines Tiefschusses für das 7,5 cm Feldgeschütz. S. Z. A. 44. 196.
- Siehe auch 95; 110; 118; 965.

#### Methode der kleinsten Quadrate.

38. *A. Briks*. Über den Gebrauch der Quadrattafeln in der Methode der kleinsten Quadrate (russ.). B. S. R. A. 12. 32.
39. *A. Leontovič*. Das Gesetz von Weber-Fechner angewandt auf die Hautreize des Menschen durch Induktionsströme (russ.). B. U. K. 1907. Nr. 123.
40. *A. Sainte-Laguë*. La représentation proportionnelle et la méthode des moindres carrés. C. R. 151. 377.
41. *J. Weeder*. Het onderzoek der gewichten in vereffingen naar het beginsel der kleinste vierkanten. C. A. A. 17. 152.

#### Fehler.

42. *G. Abate Dago*. Sulla compensazione di un punto trigonometrico mediante la figura d'errore. A. A. T. 44. 725.
43. *Bischoff*. Ausgleichung von Polygonzügen. Z. B. G. V. 6. 102.
44. *J. Boccardi*. Sur une nouvelle équation dans les observations des passages. V. I. M. C. 4 C. 138.
45. *L. V. L. Charlier*. Weiteres über das Fehlergesetz. A. M. A. F. 4. Nr. 12.
46. *W. P. Elderton*. A comparison of some curves used for graduating chance-distributions V. I. M. C. 4. C. 233.
47. *L. Gosievski*. Sur la moyenne arithmétique et sur la loi de Gauss de la probabilité d'une erreur. B. I. C. 1908. 1053.



48. *R. Greiner*. Über das Fehlersystem der Kollektivmaßlehre. Z.S. 57—121; 225; 337.

49. *O. Gruber*. Experimentelles zum Gaußschen Fehlergesetz. Z.S. 56. 322.

50. *P. Hart*. Compensation d'une chaîne fermée de triangulation. C.R. 147. 887.

51. *E. Hellebrand*. Die günstigste Gewichtsverteilung bei Dreieckswinkelmessungen mit Rücksicht auf den mittleren Punktfehler. S.A.W. 118. 133.

52. *A. Hnatek*. Über den Einfluß von Gewichtsfehlern auf die Werte der Unbekannten bei Ausgleichsrechnungen. A.N.K. 182. 273.

53. *Hohenner*. Ausgleichung zweier Punkte. Z.B.G.V. 9. 91; 197.

54. *R. Kischke*. Über Fehlerabschätzung bei unendlichen Produkten. Z.S. 56. 354.

55. *A. Klingatsch*. Die Fehlerflächen topographischer Aufnahmen. S.A.W. 116. 937.

56. *W. A. Lindsay*. The possible error in a quotient. M.N.E. 1. 48.

57. *P. Mansion*. Raisons en faveur de la formule définitive de Gauss pour mesure de la précision d'un système d'observations. A.S.B. 34. A. 174.

58. *B. Meidell*. Zum Fehlergesetz. Z.S. 56. 77.

59. *W. Meißner*. Ausgleichsformel für Beobachtungen in gleichen Intervallen. P.Z. 11. 587.

60. *Näbauer*. Ausgleichung von Polygonzügen bei einseitigem Richtungsanschluß. Z.B.G.V. 9. 12.

61. *Näbauer*. Das Minimum oder Maximum einer Funktion durch fortgesetzte Verbesserung der Veränderlichen zu finden. Z.B.G.V. 9. 208.

62. *A. Pio*. Perfectionnement de la théorie des erreurs. R.S. (5) 7. 433.

63. *P. Pizzetti*. Le misurazioni fisiche e la teoria degli errori d'osservazione. R.D.S. 2. 1.

64. *J. C. Schoute*. Die Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie für die Praxis der Versuchsstationen. L.V.S. 70. 161.

65. *M. Westergaard*. Statisk fejltjaevning. T.M. 21. B. 1.

Siehe auch 181; 461.

#### Politische Arithmetik.

66. *T. W. Balch*. The law of Oresme, Copernicus and Graham. P.P.S. 47. 18.

67. *G. Dumas*. Sur le problème du scrutin. N.A. (4) 7. 546.

68. *F. Galton*. One vote, one value N. 75. 414; 450.

69. *W. Lorey*. Die math. Grundlagen des Systems der Verhältnismahl. Z.H. 39. 487.

70. *P. A. Mac Mahon*. Memoir on the theory of the partition of numbers. T.R. S.L. 209. A. 153.

71. *L. G. Du Pasquier*. Eine deutsche Abhandlung L. Eulers über Witwenkassen. V.N.Z. 56. 14.

72. *H. Picquet*. Sur la détermination mathématique des droits de succession des enfants naturels. N.A. (4) 10. 164.

73. *D. M. Y. Somerville*. A problem in voting. P.E.M.S. 28. 23.

74. *G. Toja*. Alcune considerazioni sui rapporti fra la matematica e la scienza attuariale. V.I.M.C.4.C. 211.

Siehe auch 40.

#### Kaufmännische Arithmetik.

75. *G. Guerritore*. Utilità delle considerazioni geometriche nella discussione dei problemi di matematica finanziaria. Pit. 16. 81.

76. *A. Natucci*. Dimostrazione teorica del metodo indiretto per l'appuramento dei conticorrenti. B.C. 9. 225.

77. *E. Rasch*. Über die Mechanik wirtschaftlicher Geschehnisse. E.P.R. 1909. 143; 165; 174.

78. *R. Viti*. Di una integrazione dei conti individuali nelle casse di previdenza. B.D.M. 6. 155.

Siehe auch 111.

#### Zinseszinsrechnung.

79. *J. M. Allen*. On the relation between the theories of compound interest and life contingencies. J. I. A. 41. 305.

80. *C. Ciamberlini*. Sull'interesse composto. P.M.R. Suppl. 14. 1.

81. *R. Gerhardt*. Zur Anwendung der Zinseszinsrechnung im math. Unterricht. U.M.N. 15. 4.

82. *C. Teofilato*. Del tasso continuo e variabile. G.B. 46. 144.

Siehe auch 84.

#### Rentenrechnung.

83. *E. Barbette*. Sur la détermination du taux dans le problème des annuités. E.M. 11. 284.

84. *F. P. Cantelli*. On the determination of the rate of interest in annuities-certain. J.I.A. 41. 100.

85. *G. J. Lidstone*. A new demonstration of the formula for the value of an apportionable annuity payable by instalments  $m$  times a year. J.I.A. 41. 97.

86. *C. Thiry*. Démonstration simple de la formule des annuités. M. (3) 9. 266.

87. *F. Villareal*. Tasaccion del dominio útil y directo de un fundo. R.C.L. 10. 85; 115; 121.

Siehe auch 71; 78; 79; 116.

### Statistik.

88. *E. Borel*. Sur l'étude des variations des quantités statistiques. C.R. 148. 1585.

89. *F. Y. Edgeworth*. On the representation of statistical frequency by a series. J.R.S.S. 70. 102.

90. *F. de Helguero*. Sulla rappresentazione analitica delle statistiche abnormali. V.I.M.C. 4.C. 288.

91. *A. R. Hincks and K. Pearson*. On correlation and the methods of modern statistics. N. 76. 566; 613; 638; 662.

92. *G. H. Knibbs*. The problems of statistics. A.A.A.S. 12. 505.

93. *L. March*. Une nouvelle statistique internationale de la population. Observations sur la comparaison et sur la terminologie des statistiques. V.I.M.C. 4.C. 279.

94. *H. I. Rietsz*. On a mean difference problem that occurs in statistics. M.M. F. 17. 235.

95. *K. V. Tovstichij*. Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Impfstatistik (russ.) S.M.M. 26. 545.

96. *E. Traynard*. Polygones et courbes de fréquence. A.E.N. (3) 26. 163.

Siehe auch 17; 100; 964; 1434.

### Biometrie.

97. *C. de Bruyker*. Bemerkingen aangaande de Galton'sche Curve. H.V.C. 1906. 17.

98. *A. Gallardo*. Recientes contribuciones matemáticas al estudio de las leyes de la herencia biológica. A.S.A. 68. 185.

99. *R. Laemmel*. Mathematik u. Biologie. V.N.B. 93. 351.

100. *G. Loria*. Metodo matematico e metodo statistico. A.A.V.M. (2) 3. 84.

101. *F. Ludwig*. Neue Literatur aus dem Grenzgebiet der Biometrie. Z.S. 58. 198.

102. *A. W. C. Menzies*. The mathematical theory of random migration and epidemic distribution. P.R.S.E. 31. 262.

103. *J. P. van de Stok*. De analyse van frequentiekrommen volger eene algemeene methode. C.A.A. 16. 825.

104. *F. J. M. Stratton and R. H. Compton*. On accident in heredity. P.C. P.S. 15. 507.

105. *G. U. Yale*. On the theory of correlation for any number of variables treated by a new system of notation. P.R.S.L. 79. 182.

Siehe auch 831.

### Sterblichkeit.

106. *F. Arbuti*. Vida probable. R.C. L. 12. 74.

107. *G. King*. On the error introduced into mortality tables by summation formulas of graduation. J.I.A. 41. 54.

108. *A. Loewy*. Die Gaußsche Sterbformel. Z.V.B. 6. 517.

109. *G. J. D. Mounier*. Iets over sterftekanssen. A.V.A. 9. 359.

Siehe auch 114.

### Versicherungsmathematik.

110. *G. Bohlmann*. Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung. V.I.M.C. 4.C. 244.

111. *G. Castelli*. L'insegnamento della matematica finanziaria e attuariale nelle scuole professionali italiane. V.I.M.C. 4.C. 327.

112. *Chini*. Matematica attuariale. R.L.G. 1907. No. 5.

113. *M. M. Dawson*. Necessary cautions for the guidance of mathematicians in dealing with actuarial problems. V.I.M.C. 4.C. 310.

114. *G. Engelbrecht*. Der Einfluß der Versicherungsdauer auf die Sterblichkeit in der Lebensversicherung. Z.V.B. 6. 108.

115. *G. Engelbrecht*. Die Behandlung nicht völlig normaler Risiken in der Lebensversicherung. Z.V.B. 6. 272.

116. *F. van der Keen*. Benadering van de koopsom eener verbindingsrente. A.V.A. 9. 286.

117. *G. King*. Notes on summation formulas of graduation with certain new formulas for consideration. J.I.A. 41. 530.

118. *W. Küttner*. Zur Theorie des Risikos und der Dispersion. Z.V.B. 6. 519.

119. *W. Küttner*. Das Risiko der Lebensversicherungsanstalten und Unterstützungskassen. V.D.V.V. 7. 1.

120. *H. F. Landré*. Math. duur eener verzekering. A.V.A. 9. 373.

121. *D. C. Lefebvre*. La science de l'actuaire, sa méthode, son histoire. R.S. (5) 10. 11; 271.

122. *C. Lembourg*. L'actuaire, sa fonction, les 2 aspects de celle-ci. V.I.M.C. 4. C. 300.

123. *G. J. Lidstone*. On the rationale of formulae for graduation by somation. J.I.A. 41. 348; 42. 106.

124. *D. P. Moll*. Analytische behandeling der verzekeringen op een leven. A.V.A. 9. 409.

125. *D. P. Moll*. Analytische behandeling van verzekeringen of twee of meer levens. A.V.A. 10. 22.

126. *G. J. D. Mounier*. Bepaling van termijnpremie voor een uitkeering bij leven met restitutie van de betaalde premien bij eerder overlijden. A.V.A. 9. 271.

127. *G. J. D. Mounier*. Een toepassing van de wiskunde op de gezondheidsleer. A.V.A. 9. 428.

128. *G. J. D. Mounier*. Winst uit afsterving. A.V.A. 10. 1.

129. *L. G. du Pasquier*. Leonhard Eulers Verdienste um das Versicherungswesen. V.N.Z. 54. 217.

130. *R. Poussin*. Sur l'application du graphicisme aux calculs d'assurances. V.I.M.C. 4. C. 228.

131. *A. Quiquet*. Sur une nouvelle application des jacobiens aux probabilités viagères. V.I.M.C. 4. C. 219.

Siehe auch 74.

### Spiele.

132. *E. N. Barisien*. Curiosités arithmétiques. M. (3) 9 37.

133. *M. Cashmore*. Chess magic squares. R.S.A.A. 1. 83.

134. *J. L. Coolidge*. The gambler's ruin. A.ofM. (2) 10. 181.

135. *Hâton de la Goupillière*. Théorie algébrique d'un jeu de société. N.A. (4) 10. 177.

136. *Mansion*. Sur le baccara. A.S. B. 33. A. 188.

137. *E. H. Moore*. A generalization of the game called nim. A.ofM. (2) 11. 93.

138. *G. Schouten*. De beweeging van een biljardbal over een horizontal vlak. N.A.W. (2) 8. 337.

139. *Willaert*. Sur le nombre moyen de séries de  $r$  rouges consécutives dans une suite de  $n$  épreuves à la roulette; correction de la formule de Grünbaum. A.S.B. 33. A. 115.

140. *Willaert*. Sur la probabilité d'amener  $p$  séries de  $k$  rouges consécutives dans une suite de  $n$  épreuves à la roulette. A.S.B. 34. A. 179.

141. *F. Zernike*. Théorie mathématique du jeu de cloche et de marteau. N.A.W. (2) 9 239.

### Numerisches Rechnen.

142. *A. Bemporad*. Saggio di applicazione dei metodi di calcolo dell' astronomia teorica ai problemi di fisica matematica. M.S.S.J. 36. 79.

143. *J. Bojko*. Beitrag zum Ausziehen höherer Wurzeln. Z.S. 57. 373.

144. *G. H. Bryan*. A proposal for the unknown digit. M.G.S. 5. 89.

145. *B. Buchanan*. The art of computing. P.A. 15. 287.

146. *E. B. Escott*. The calculation of Logarithms. Q.J. 41. 157.

147. *A. S. Grant*. On the multiplication and division of decimals. M.G.S. 4. 321. — *W. G. Borchardt*. 384.

148. *S. Lupton*. Furor arithmeticus. M.G.S. 5. 273.

149. *C. Runge*. Über eine Methode,  $\Delta u = \text{const.}$  numerisch zu integrieren. Z.S. 56. 225.

150. *Saalschütz*. Kubikwurzelanziehung aus Binomen nach Albert Girard. P.G.K. 48. 63.

151. *S. A. Saunder*. Contracted multiplication and division. M.G.S. 4. 81. — *F. Clarke*. 99.

152. *F. H. Seares*. The art of numerical calculation. P.A. 16. 349.

153. *F. Stasi*. Sulle semplificazioni di alcune regole di aritmetica pratica. B.D.M. 9. 27.

154. *G. Vacca*. Metodo elementare per il calcolo di  $\pi$ . B.M.P. 2. 7.

155. *E. E. White*. A method of computing logarithms. M.M.F. 16. 67.

Siehe auch 56; 285.

### Numerische Gleichungen.

156. *F. Cajori*. Historical note on the Newton-Raphson method of approximation. M.M.F. 18. 29.

157. *E. Esclangon*. Sur une méthode d'approximation dans la résolution numérique des équations. P.S.B. 1907 bis 1908. 129.

158. *G. Faber*. Über die Newtonsche Näherungsformel. Cr. 138. 1.

159. *F. Giudice*. Sulla risoluzione asintotica delle equazioni numeriche col metodo di Lagrangia. P.M.R. (3) 5 42.

160. *R. E. Gleason*. A simple method for graphically obtaining the complex roots of a cubic solution. A.ofM. (2) 11. 95.

161. *Große*. Eulers Methode der Lösung höherer Gleichungen. Z.H. 41. 196.

162. *E. Hübl*. Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. G.P.M.E. 40. 84.

163. *A. Kempe*. Sur l'approximation des racines des équations de degré supérieur. G.B. 48. 236.

164. *R. de Montessus de Ballore*. La recherche des racines de certaines équations numériques transcscendentes. C.R. 148. 468.

165. *R. de Montessus*. Sur le calcul des racines des équations numériques. C.R. 148. 1749. — *E. M. Lémeray*. 49. 434.

166. *de Montessus*. Méthode générale de détermination des racines des équations. A.S.B. 34. A. 94.

167. *M. Näbauer*. Vorrichtung zur Auflösung eines linearen Gleichungssystems. Z.S. 58. 241.

168. *R. Ross*. A method of solving algebraic equations. N. 78. 663.

169. *A. Russell* and *J. N. Alty*. An electromagnetic method of studying the theory of and solving algebraical equations of any degree. P.M. (6) 18. 802. P.P.S.L. 21. 911.

170. *A. Russell* and *A. Wright*. The Arthur Wright electrical device for evaluating formulae and solving equations. P.M. (6) 18. 291; P.P.S.L. 21. 802.

171. *C. Schmidt*. Über die obere Grenze für die Anzahl der positiven und negativen Wurzeln einer algebraischen Gleichung. A.Gr. (3) 15. 161.

172. *B. Seal*. The equation of digits. B.C.M.S. 1. 99.

173. *A. Thue*. Ein Fundamentaltheorem zur Bestimmung von Annäherungswerten aller Wurzeln gewisser ganzer Funktionen. Cr. 138. 96.

174. *de la Vallée Poussin*. Sur l'approximation minimum d'un système d'équations. A.S.B. 33. A. 173.

175. *G. N. Watson*. The solution of a certain transcendental equation. P.L. M.S. (2) 8. 162.

176. *F. J. W. Whipple*. On Lagrange's and other theorems and on the solution of equations by logarithmic series. Q.J. 40. 368.

177. *G. Witt*. Zusatz zu der numerischen Auflösung 2er Gleichungen in der Planetentheorie. A.N.K. 172. 239.

178. *A. Witting*. Über angenäherte Lösung numerischer Gleichungen. S.I.D. 1908. A. 9.

179. *A. Wright*. Résolution des équations par le pont de Wheatstone. R.S. (5) 13. 593.

180. *L. Zoretti*. Sur la résolution des équations numériques. N.A. (4) 9. 354. Siehe auch 253; 258; 262; 268; 270; 282; 283; 291; 295; 394; 397; 405.

#### Analytische Näherungsmethoden.

181. *H. Wönke*. Die Bestimmung der Fehlergrenzen der durch fortgesetztes Radizieren erhaltenen Näherungswerte von  $\pi$ . U.M.N. 17. 35.

182. *R. Bonola*. Intorno alla rettificazione degli archi di circonferenza. B. D. M. 8. 167.

183. *A. Brown*. Examination of the validity of an approximate solution of a certain velocity equation. T.S.A.P.S. 16. 459.

184. *M. Cashmore*. On some new formulae for calculating  $\pi$ . R.S.A.A. 1. 84.

185. *E. Cotton*. Sur l'intégration approchée des équations différentielles. C.R. 146. 274.

186. *P. Dolgašin*. Theorie der Näherungsrechnungen (russ.). B.U.K. 1909. c. 1. 207.

187. *H. Dressler*. Anschauliche Schätzung der Größe von  $\pi$ . U.M.N. 16. 62.

188. *G. Hilleret*. Étude sur le calcul de  $\pi$  par des formules dérivées de la théorie des périmètres et des rayons. N.A. (4) 7. 481.

189. *M. Krause*. Näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen. S.I.D. 1909. A. 12.

190. *T. Salescu*. Ein Beispiel von sukzessiver Annäherung (rumän.). G.M.B. 13. 97.

191. *T. A. Lambert*. On the solution of algebraic equations in infinite series. S.M. Am. (2) 14. 467; P.P.S. 47. 111.

192. *E. Lampe*. Neuere Versuche zur Abkürzung des Exhaustionsverfahrens bei der elementaren Berechnung der Zahl  $\pi$ . S.M.B. 1910. 30.

193. *J. E. Littlewood*. On the asymptotic approximation to functions defined by high convergent product-forms. T. C.P.S. 20. 323.

194. *A. Lohnstein*. Einige Reihenentwicklungen für  $\pi$ . A.Gr. (3) 13. 325.

195. *P. Mansion*. Sur le calcul de  $\pi$ . M. (3) 8. 236; 9. 14.

196. *Milarch*. Elementare Entwicklung der Leibnizschen Reihe  $\pi = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$ . Z.H. 40. 148.

197. *R. E. Muirhead*. A method of calculating approximately high powers and roots of numbers without the aid of tables. M.G.S. 4. 302.

198. *J. W. Nicholson*. The asymptotic expansions of Bessel functions. P. M. (6) 19. 228.

199. *N. Quint*. Varia over  $\pi$ . W. T. 4. 7; 68.

200. *L. F. Richardson*. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in a masonry dam. P. R. S. L. 83. 335; T. R. S. L. 210. 307.

201. *F. Sibirani*. Su la rappresentazione approssimata delle funzioni di più variabili reali e delle loro derivate per polinomi trigonometrici. A. A. T. 44. 659.

202. *F. Sibirani*. Su l'integrazione approssimata di un tipo iperbolico-parabolico di equazioni alle derivate parziali. R. I. L. (2) 42. 375.

203. *F. G. Teixeira*. Sobre o methodo de Gauß para o calculo approximado dos integraes definidos. A. S. A. P. 5. 220.

204. *A. Thue*. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. Cr. 135. 284.

205. *A. Thue*. Bemerkungen über gewisse Näherungsbrüche algebraischer Zahlen. M. S. C. 1908. No. 3.

206. *C. J. de la Vallée-Poussin*. Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée d'un angle. B. A. B. 1910. 808.

207. *T. Vannini*. Sulle approssimazioni numeriche. B. D. M. 6. 1.

208. *G. B. M. Zerr*. Note on an approximation in trigonometry. M. M. F. 15. 200.

Siehe auch 16; 910.

### Mittelwerte.

209. *P. Angelitti*. De principio medii arithmetici. A. N. K. 185. 113.

210. *L. David*. Theorie des Gaußschen verallgemeinerten speziellen arithmetisch-geometrischen Mittels. B. M. N. 25. 153.

211. *W. Schnee*. Über Mittelwertsformeln in der Theorie der Dirichlet'schen Reihen. S. A. W. 118. 1439.

212. *G. U. Yule*. Mean oder median. N. 75. 534.

Siehe auch 47; 1337.

### Interpolation.

213. *G. Faber*. Über stets konvergente Interpolationsformeln. D. V. M. 19. 142.

214. *C. S. Jackson*. A formula in interpolation. M. M. 38. 187.

215. *P. Martinotti*. Su le serie d'interpolazione. R. I. L. (2) 43. 391; 556.

216. *N. E. Nörlund*. Sur les fractions continues d'interpolation. B. A. Co. 1910. 57.

217. *C. E. van Orstrand*. Inverse interpolation by means of reversed series. P. M. (6) 15. 628.

218. *C. J. de la Vallée Poussin*. Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes. B. A. B. 1908. 319.

219. *G. Witt*. Über Interpolation durch Addition. A. N. K. 178. 225.

Siehe auch 298.

### Harmonische Analyse.

220. *H. Abraham*. Analyse harmonique et résonance. I. E. P. 1909. 429.

221. *S. Hirayama*. On the harmonic analysis of sun-spot number. J. T. (2) 3. 159.

222. *F. Hopfner*. Über die praktische Verwendbarkeit einer neuen Methode zur Auffindung der Periode einer periodischen Erscheinung. S. A. W. 119. 351.

223. *F. Kühnen*. Methode zur Aufsuchung periodischer Erscheinungen in Reihen äquidistanter Beobachtungen. A. N. K. 182. 1.

224. *L. V. B.* Nouvel analyseur harmonique. T. M. P. 3. 177.

225. *S. Oppenheim*. Über die Bestimmung der Periode einer periodischen Erscheinung nebst Anwendung auf die Theorie des Erdmagnetismus. S. A. W. 118. 823.

226. *C. Schmidt*. Die Nebenschwingungen einer deformierten Sinuskurve zu ermitteln. E. P. R. 25. 233.

227. *A. Schreiber*. Der harmonische Analysator von O. Mader. P. Z. 11. 354.

228. *A. Schreiber*. Der neue harmonische Analysator von Mader. S. I. D. 1909. A. 27.

229. *P. J. Smits*. De harmonische formule. D. Z. K. 30. 639.

230. *H. H. Turner*. The facility of harmonic analysis. J. B. A. A. 18. 250.

Siehe auch 386; 1587.

### Empirische Formeln.

231. *V. Laska*. Über die Bildung empirischer Formeln (tschech.). C. 40. 9; 142.

### Mathematische Tafeln.

232. *O. Bergmann*. Einige Berichtigungen zu Knliks Quadratzahlentafeln. Z. S. 56. 313.

233. *C. Børgen*. Log-trig. Tafel auf 11 Stellen. P.A.G.L. 21.

234. *K. Bohlín*. Sur une équation algébrique remarquable se trouvant en rapport à la mécanique céleste. A.J.S.O. 8. Nr. 7.

235. *J. Bojko*. Eine neue Tafel der Viertelquadrate. Z.S. 57. 194.

236. *J. Deschamps*. Application de la méthode d'Ératosthène: tables numériques et graphiques. S.P. (9) 10. 10.

237. *A. K. Erlang*. Om indretningen og beregningen af 4-cifrede logaritmetabeller. T.M. 21. B. 55.

238. *J. Frischauf*. Zur Verlässlichkeit der 21stelligen Tafeln von Steinhäuser. A.N.K. 174. 173.

239. *J. W. L. Glaisher*. List of tables of  $\int_0^x e^{-t^2} dt$  and connected integrals and functions. M.M. 38. 117.

240. *P. Gruner*. Tabelle für  $y = e^{-x}$  J.R.E. 3. 120; 290.

241. *F. Lebon*. Recherche rapide des facteurs premiers des nombres à l'aide de 2 tables de restes. S.P. (9) 10. 4.

242. *K. Lüdemann*. Die Scherersche log.-graph. Rechentafel. A.V.N. 18 154.

243. *G. Pesci*. Una piccola tavola di valori naturali. P.M.R. 25. 241.

244. *H. G. Savidge*. Tables of the Ber and Bei and Ker and Kei functions. P.M. (6) 19. 49.

245. *D. E. Smith*. A Greek multiplication table. B.M. (3) 9. 193.

246. *H. Tallqvist*. Tafeln der abgeleiteten und zusammengesetzten Kugelfunktionen 1. Art. A.S.F. 33. Nr. 9.

247. *H. Tallqvist*. Tafeln der Kugelfunktionen  $P_n(\cos \vartheta)$ . A.S.F. 33 Nr. 4.

248. *G. Tarry*. Théorie des tables à triple entrée pour la recherche des facteurs premiers des nombres. A.F. 1907. 32.

249. *N. N. Williams*. Multiplikationstabelle. S.M.R. 1910. 83.

250. *N. N.* Modernes Rechenmittel. D.M.Z.B. 1910. 136.

Siehe auch 38; 381.

### Nomographie.

251. *R. de Aquino*. Nomogrammas para achar alturas e azimuths facilitando o emprego do methodo de Mareq Saint Hilaire no mar. R.M.B. 29.

252. *de Aquino*. Nomograms for deducing altitude and azimuth and for star identification and finding course and distance in great circle sailing. P.N.J. 34. 633.

253. *F. Boulad*. Sur la disjonction des variables des équations nomographique-ment rationnelles d'ordre supérieur. C.R. 150. 379.

254. *N. Bubnov*. L'ouvrage math. de Herbert sur l'abaque B.U.K. 1909. Nr. 2.

255. *H. Chrétien*. Nouvel abaque du problème de Kepler. A.F. 1907. 83.

256. *H. A. Gehring*. Logarithmic diagrams based on isopleth points. F.B.R. 61. 77.

257. *Köppen*. Graphische Psychometertafel. A.H. 36. 175.

258. *M. d'Ocagne*. Sur la représentation nomographique des équations à 4 variables. C.R. 148. 1244.

259. *M. d'Ocagne*. La technique du calcul considérée principalement au point de vue de la science de l'ingénieur V.I.M.C. 4. C. 346.

260. *G. Pesci*. Las tablas gráficas de Luyando A.F.C.Z. 2. 153; 233.

261. *G. Pesci*. Resolução nomographica do triangulo de posição. R.M.B. 27. 614.

262. *A. Schreiber*. Über Logarithmenpapiere und deren Anwendung; ein Abakus zur Auflösung dreigliedriger kubischer Gleichungen. S.I.D. 1909. A. 28.

263. *P. Werkmeister*. Über graphische Tafeln für Funktionen einer Veränderlichen, insbesondere über graphische Logarithmentafeln. Z.S. 59. 151.

264. *N. N.* Tavole di tiro grafiche in proiezione orizzontale. R.A.G. 25. 216.  
Siehe auch 236; 242; 350; 360.

### Graphischer Kalkül.

265. *H. S. Allen*. A graphic method of dealing with combinations of coaxial refracting surfaces. P.P.S.L. 21. 480.

266. *F. Boulad*. Un procédé de calcul graphique des déterminants. A.F. 1909. 95.

267. *A. G. Burgess*. A method of graphing freedom equations. M.N.E. 1. 18.

268. *N. J. Clugnell*. On the graphical solution of equations. M.G.S. 4. 232.

269. *J. Dougall*. Graphical treatment of geometrical progression. M.N.E. 1. 1.

270. *J. Dougall*. Graphical solution of equations of the form  $a \cos \vartheta + b \sin \vartheta = c$  without the aid of tables. M.N.E. 1. 45.

271. *Göldel*. Graph, Bestimmung der Lage der neutralen Achse in Platten aus Eisenbeton. B.G.W.Z. 90. 764.

272. *K. Goldziher*. Über die Anwendung des graphischen Verfahrens im math. Schulunterricht. U.M.N. 15. 49.

273. *H. P. Goodwin*. Graphic methods of reduction to meridian and prime vertical. N.M.L. 1908. Dez.

274. *F. W. Harris*. Determination of resistance by graphics. E.J. 1909. 627.

275. *L. Isely*. Le myosotis et les logarithmes. B.S.N. 36. 104.

276. *A. Jatho*. Apuntes de cosmografía gráfica. A.S.A. 69. 237.

277. *Kennelly*. Graph. Verfahren zur Bestimmung der mittleren sphär. Intensität einer Lampe bei gegebener Polar- kurve. Z.B.W.B. 14. 175.

278. *Kneles*. Graph. Berechnung von Kurbelwellen. E.P.R. 25. 454.

279. *M. Kroll*. Détermination graphique de la résistance résultante des résistances élémentaires en dérivation. I.E.P. 1909. 267.

280. *Masnata*. Calcolo grafico degli elementi necessari nella navigazione ortodromica nel caso in cui si stabilisce di non oltrepassare un parallelo di latitudine nota. R.U.R. 41. 79.

281. *M. Milankowitsch*. Eine graphische Darstellung der geom. Progressionen. Z.H. 40. 329.

282. *R. P. Muirhead*. A graphical method of solving  $n$  simultaneous linear equation involving  $n$  unknowns. P. E. M.S. 26. 30.

283. *E. J. Nanson*. Graphical solution of a biquadratic. M.G.S. 4. 285.

284. *Noodt*. Graphische Darstellung im Rechenunterricht an höheren Mädchenschulen. F. B. L. 1908. 289.

285. *M. d'Ocagne*. Sur l'application de la méthode graphique à l'art du calcul. R.S. (5) 7. 449.

286. *F. P. Paternò*. Di alcune perfezionamenti nella risoluzione grafica dell'angolo triedro. P.M.R. (3) 5. 62.

287. *L. Pierre*. Calcul graphique des conduites forcées à diamètre variable. L.H.B. 9. 187.

288. *L. F. Richardson*. A freehand graphic way of determining stream lines and equipotentials. P.M. (6) 15. 237.

289. *Rottok*. Lösung von nautischen und taktischen Aufgaben durch Zeichnung. A.H. 1910. 49.

290. *K. Rudolf*. Graphisches Differenzieren u. Integrieren, Ermittlungen von statischen Momenten und Trägheitsmomenten nach dem Prinzip der direkten Proportionalität. E.P.R. 1909. 154; 197.

291. *W. Schlags*. Graphische Lösung der Gleichung  $x^2 + ax \pm b = 0$ . U.M.N. 16. 53.

292. *Seidl*. Über die Darstellung der Arbeitsweise von Grubenventilatoren auf graphischem Wege. B.R.K. 3. 75.

293. *J. H. Shaxby*. On the graphical determination of Fresnel's integrals. P.R. S.L. 82. 331.

294. *P. Sibirani*. Transformation graphique de certaines aires en secteurs circulaires. G.M.B. 13. 65.

295. *A. Ulescu*. Graphische Auflösung eines linearen Systemes von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten (rumän.). G.M.B. 15. 132.

296. *C. E. Wasteels*. Over graphische integratie van gewone differentialvergelijkingen. H.V.C. 1907. 56.

297. *P. Werkmeister*. Beitrag zur graphischen Darstellung von Gleichungen der Form  $ab - c = 0$ . Z.S. 57. 279.

298. *F. J. W. Whipple*. Graphical interpolation. N. 77. 103.

299. *S. Wígert*. Sur le problème des tractrices. A.M.A.F. 6. Nr. 22.

300. *N. N.* Graphische Ermittlung des Stromverlaufs in Stromkreisen mit Selbstinduktion. B.P.T. 6. 84.

Siehe auch 130; 160; 485; 522; 573; 1174; 1465; 1563; 1704; 1871; 1889; 1891; 1955; 2042; 2065; 2277.

### Geometrische Näherungsmethoden.

301. *A. Auric*. Sur la rectification approchée d'un arc de cercle. N.A. (4) 10. 122.

302. *J. Belankin*. Rektifikation von Kreisbögen (russ.). B.U.K. 1910. 16. 32.

303. *A. Bilimowitsch*. Genäherte Rektifikation von Kreisbögen (russ.). B.U.K. 1910. 2c. 101.

304. *J. Bojko*. Eine neue Näherungskonstruktion für  $\pi$ . Z.S. 57. 196.

305. *J. M. Child*. Geometrical construction for a radian. M.G.S. 5. 142.

306. *C. Herbst*. Die ästhetische Kreisbogenkurve. Z.S. 58. 72.

307. *Lenfestey*. 2 approximate geometrical constructions for inscribing a nonagone in a circle. M.G.S. 4. 330.

308. *C. Michel*. Construction approchée des polygones réguliers. B.M.E. 14. 251.

309. *Y. Mikami*. The circle squaring of the Chinese. B.M. (3) 10. 193.

310. *G. Nicolosi*. Rettificazione approssimate degli archi e della circonferenza. Pit. 18. 128.

311. *M. d'Ocagne*. Sur la rectification approchée des arcs de cercle. V.I.M.C. 4. C. 351.

312. *L. A. Paillard*. Sur la longueur de la circonférence. N.A. (4) 9. 451.

**313.** *Ramisch.* Angenäherte Darstellung einer Ellipse. B.G.W.Z. 1909. 640.

**314.** *G. Vacca.* Sulla quadratura del circolo secondo l'egiziano Ahmes. B.B.L. 11. 65.

**315.** *H. Vrijman.* En benaderingsconstructie voor den cirkelomtrek, als de straal gegeven is. V.W.A. 22. 86.

**316.** *Weill.* Über die graphische Bestimmung der Kreisfläche. Z.H. 41. 193.

**317.** *A. Wendler.* Beiträge zur Berechnung der Zahl  $\pi$ . U.M.N. 17. 15.

**318.** *C. Wicke.* Über ein neues Verfahren, die Länge des Kreisumfangs geradlinig darzustellen. V.D.V.S. 4. 255.

**319.** *N. N.* Rectification approchée de la circonférence. M. (3) 9. 153.

**320.** *N. N.* Una notevole risoluzione approssimata della quadratura del circolo. B.D.M. 6. 118.

### Winkelteilung.

**321.** *A. Aubry.* How to trisect an angle. S.Am. 67. Suppl. 189.

**322.** *J. S. Brown.* The trisection problem. M.M.F. 14. 98.

**323.** *J. S. Brown.* Division of an angle into equal parts by means of a transcendental curve. M.M.F. 15. 105.

**324.** *G. Carboni.* Una nuova soluzione del problema della trisezione dell'angolo. Pit. 15. 88; 125.

**325.** *R. D. Carmichael.* On dividing an angle into parts having the ratios of any given straight lines. M.M.F. 14. 115.

**326.** *V. G. Cavallaro.* Sulla divisione della circonferenza in parti uguali. Pit. 16. 72.

**327.** *L. Crocchi.* Sull'asteroide regolare e altre trisecatrici. Pit. 16. 1.

**328.** *E. B. Escott.* Remark on the trisection problem. M.M.F. 15. 33.

**329.** *J. Habermann.* Apparat zur Drei-, Fünf- und Siebenteilung eines Winkels. N.W. 22. 73.

**330.** *E. Haentzschel.* Luczakscher Winkeldreiteilungszirkel. D.V.M. 17. 275.

**331.** *S. N. Johnson.* Elementaer fremstilling af konstruktionen of  $k_{34}$ . T.M. 21. A. 8.

**332.** *E. Lampe.* Über eine Gattung von Kurven, die der Teilung eines Winkels in  $n$  gleiche Teile dienen können. S.M.B. 1909. 149.

**333.** *E. Linsel.* Bogenstreckung, Streckenbiegung und Winkeldreiteilung. N.K.M. 4. 524; 637.

**334.** *C. Manzitti.* The division of the circle. M.G.S. 4. 377; 5. 74.

**335.** *E. Meyer.* Zur Dreiteilung des Winkels. Z.H. 39. 493.

**336.** *O. Rühler.* Zur Winkeldreiteilung. Z.H. 40. 158.

**337.** *L. Roelants.* Het verdelen van een hoek in een willekeurig aantal gelijke deelen. W.T. 4. 81.

**338.** *J. Samsonoff.* 3 theorems on the trisection of an acute angle. M.M.F. 14. 196.

**339.** *J. Samsonoff.* The division of angles into  $n$  equal parts. M.M.F. 13. 205.

**340.** *E. Tedaldi.* Sulla divisione di un angolo in un numero qualunque di parti eguali. P.M.R. (3) 7. 218.

**341.** *H. W. Segur.* On the trisection of an angle. T.N.Z.I. 41. 218.

**342.** *F. Venafra.* Trisezione approssimata dell'angolo. Pit. 14. 102.

**343.** *T. J. W. Whipple.* Division of angles and arcs. M.G.S. 4. 98.

**344.** *E. E. White.* On the trisection of the angle. M.M.F. 14. 151.

Siehe auch 206; 307; 308; 500.

### Korbbogenkurven.

**345.** *G. Feurer.* Berechnung u. Absteckung von Korbbogen. Z.T.B. 6. 85.

**346.** *C. Herbst.* Die ästhetische Kreisbogenkurve. Z.S. 58. 72.

Siehe auch 306.

### Inhalte.

**341.** *Barbarin.* Sur la formule du prisme. P.S.B. 1907—1908. 109.

**348.** *O. Biermann.* Zur näherungsweise Quadratur. M.H. 20. 321.

**349.** *W. Burnside.* An approximate quadrature formula. M.M. 37. 166.

**350.** *L. Chanteux.* Abaque du jaugeage des tonneaux. A.B.D. 1909. 59.

**351.** *Filloux.* L'intégration mécanique de l'hodographe. R.A. 72. 345.

**352.** *J. Finsterbusch.* Geometrische Integrationen, zwei Abhandlungen über neue Methoden der Inhaltsbestimmung in der elementaren Geometrie. J.V.N.Z. 41. 1.

**353.** *G. Fontené.* Sur l'expression de certains volumes. N.A. (4) 8. 385.

**354.** *G. Fontené.* Sur certaines quadratures. N.A. (4) 9. 289.

**355.** *Frochol.* Estimez vos arbres abattus ou sur pieds. V.C.P. 1910. 55.

**356.** *W. W. Johnson.* On the approximate formulae for areas and volumes and their comparative accuracy. P.N. I. 35. 760.

**357.** *O. v. Lichtenfels.* Über eine Kubaturformel. S.A.W. 116. 1199.



358. *G. Milhaud.* Le traité de la méthode d'Archimède. R. S. (5) 10. 417.

359. *R. E. Moritz.* On the generalization of a theorem in solid geometry. M. M. F. 15. 95.

360. *B. Morley.* A calculating chart for the contents of cylindrical tanks. A. G. L. J. 1909. 718.

361. *H. P. Nielsen.* Über die Restglieder einiger Formeln für mechanische Quadratur. A. M. A. F. 4. No. 21; M. L. A. O. 36.

362. *H. Prytz.* En modifikation af Simpsons formel. T. M. 20. B. 4.

363. *C. Pulfrich.* Über ein neues Verfahren der Körpervermessung. A. O. L. 1. 42.

364. *G. Sforza.* Formula fondamentali pel calcolo dei volumi poliedrici non euclidei. P. M. R. (3) 6. 145.

365. *N. N.* Die Inhalte und Werts-ermittlung von Baumstämmen. J. L. Z. 29. 937.

Siehe auch 294; 1897; 2636.

#### Planimeter.

366. *A. R. Crathorne.* The Prytz planimeter. M. M. F. 15. 55.

367. *E. Doležal.* Planimeterstudien. B. H. J. 54. 293; 328; 55. 81.

368. *E. Doležal.* Das Stampfersche Scheibenpolarplanimeter. S. A. W. 118. 1548.

369. *C. Dubiuga.* Die Integratoren des Laboratoriums des polytechn. Instituts von St. Petersburg (russ.). B. I. P. P. 3. 297.

370. *H. R. Edgcomb.* Theory and use of hatched planimeter. P. T. E. 32. 389.

371. *H. R. Edgcomb.* Das Stangenplanimeter. Z. P. M. 1. 255.

372. *J. Méndez.* Notas acerca del empleo del planimetro. M. y R. M. 25. 253.

373. *G. J. Murdock.* An electric surface gauge. M. N. Y. 16. 302.

374. *Schwyder.* Das Linear-Planimeter Weber-Kern. B. I. E. K. V. 2. 823.

375. *A. Schreiber.* Über die Theorie des Prytzschen Stangenplanimeters. S. I. D. 1908. A. 10.

376. *G. Torelli.* Sulla teoria del planimetro polare. R. A. N. (3) 15. 212.

377. *M. R. Wells.* Principle of planimeter operation. P. T. E. 31. 392.

378. *F. A. Willers.* Zum Integrator von E. Pascal. Z. S. 59. 36.

379. *N. N.* Planimeter „Weber-Kern“. M. V. F. L. S. 1909. 108.

380. *N. N.* Planimeter zur Bestimmung des Mittels bei Kreisdiagrammen. Z. P. M. 1. 1419.

Siehe auch 390.

#### Rechenapparate.

381. *C. E. Adams.* Tables of geodetic factors for use on the Brunsviga calculating machine. A. A. A. S. 9. 93.

382. *S. Blok.* Het Gebruik van rekenmachines ten behoeve van platsbepalingen N. T. N. I. 69. 56.

383. *H. Bourquin.* Rechenmaschinen. S. M. R. 1909. 256.

384. *C. V. Boys.* A new analytical engine. N. 81. 14.

385. *Burd.* Development of the accounting machine. J. F. I. 166. 177.

386. *W. G. Cady.* A machine for compounding sine curves. P. R. 22. 249.

387. *A. Christiani.* Instrumentale Rechnen. A. V. N. 18. 105; 137; 161.

388. *M. Diskowsky.* Schieberrechenmaschine mit arithmetischen Naturtypen. B. S. P. 1908 No. 15.

389. *R. Faerber.* Die Bedeutung u. die Konstruktion der modernen Rechenmaschine. W. S. T. 1909. 27; 73.

390. *Jakob.* Nouvel Intégromètre. C. R. 147. 33.

391. *T. M. Jones.* Mechanical accounting. J. F. I. 166. 183.

392. *E. Lentz.* Rechenmaschinen u. ihre Leistungen. S. C. 1909. 8; 59.

393. *E. Pascal.* L'intégratore meccanico per le equazioni differenziali lineari di I. ordine e per altre equazioni differenziali. G. B. 48. 16; A. S. I. 3. 476.

394. *A. Russell* and *A. Wright.* The Arthur Wright electrical device for evaluating formulae and solving equations. P. M. (6) 18. 291.

395. *A. Sainte Lagüe.* Note sur les usages du papier quadrillé. E. M. 12. 5.

396. *Schmalenbach.* Neuer Tisch zur Rechenmaschine „Millionär“. M. A. M. F. 8. 66.

397. *L. v. Schrutka.* Eine Methode zur Auflösung quadratischer und kubischer Gleichungen mit der Rechenmaschine. Z. S. 59. 56.

398. *Spitz.* Rechnende Maschinen. W. D. T. 1909. 9.

399. *S. Timoschenko.* Beschreibung des Apparates des Herrn Krylow zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen (russ.). B. I. P. P. 3. 397.

400. *Trio.* Rechenmaschine „Pebalia“. B. I. G. B. 1908. 399.

401. *W. Twelvetrees*. Simplified methods of calculating reinforced concrete beams. S.M.C.E. 1909. 128.

402. *N. N.* Die Rechenmaschine „Rerolina“ u. „Duplicator“. W.T.B. 1909. 350.

403. *N. N.* Keselscher Universal-Rechenapparat. E.L. 1909. 85.

404. *N. N.* Eine elektrische Rechenmaschine. B.P.T. 5. 174.

405. *N. N.* Eine elektrische Vorrichtung zum Lösen von Gleichungen. E.T. A. 1909. 931.

406. *N. N.* Mechanical arithmetic and time saving devices. T.A.J. 14. 986.

407. *N. N.* Mechanical arithmetic and time saving devices I. The Taylor fractional calculator. A.M.J. 14. 71; 421.

408. *N. N.* Rechenmaschinen, ein Verzweigungsschrei. Z.P.R. 1907 No. 19.

409. *N. N.* Rechenscheibe zur Ermittlung der genauen Ablesungen an Mikrometerschraubenlehren. Z.P.M. 1. 34. Siehe auch 167; 169; 170; 179; 224; 227; 228; 329; 373; 843; 1587.

#### Rechenschieber.

410. *Ambromn*. Der nautisch-astronomische Rechenstab von R. Nelting. A. H. 1909. 369.

411. *G. H. Bryan*. „The slide rate for tubes and sucklings“. M.G.S. 5. 165.

412. *F. Cajori*. A note on the history of the slide rule. B.M. (3) 10. 161.

413. *F. Cajori*. Notes on the history of the slide rule. M.M.F. 15. 1.

414. *F. Cajory*. On the invention of the slide rule. R.B.A. 79. 391.

415. *Dietze jun.* Rechenschieber. D.T. Z.B. 25. 405.

416. *O. Huß*. Die Benutzung der Sudhaus- und Gärkellerausbeute mit Benutzung des Rechenschiebers der O-L-B Berlin. Modell 1908. A.Z.B.M. 1909. 57; 74.

417. *A. U. Iurle*. Ein Präzisionsrechenschieber. Z.P.M. 1. 73.

418. *K. H. Müller*. Der logarithmische Rechenstab und die Schule. Z.H. 38. 526.

419. *C. Runge*. Über die Ortsbestimmung im Ballon. N.G.G. 1909. 289.

420. *E. N. Tandy*. ABC' slide rule. J.R.A. 36. 284.

421. *Tisza*. Rechenschieber zum Gebrauch in chem. Laboratorien. C.Z. 32. 392.

422. *Weinbeer* Bestimmung d. sphär. Intensität einer Lichtquelle. Z.B.W.B. 14. 344; E.T.A. 25. 692.

423. *N. N.* On the invention of the slide rule. N. 82. 267. — A. Russell 307.

424. *N. N.* New slide rules. N. 77. 500.

425. *N. N.* The new polyphase slide rule. E.B.R. 59. Suppl. 36.

426. *N. N.* The coordinate spiral slide rule. W.W.E. 12. 19.

#### Vektoranalysis.

427. *R. Ball*. Linear vector functions. R.B.A. 78. 611.

428. *J. A. Barrau*. Sur les configurations combinatoires et sur la multiplication de configurations. A.M.T. (2) 11. 219.

429. *T. Boggio*. Sul gradiente di una omografia vettoriale. R.A.L.R. (5) 19. B. 383.

430. *L. E. J. Brouwer*. Over continue vectordistributies op oppervlakken. C.A.A. 17. 896; 18. 702; 19. 38.

431. *C. Burali-Forti*. L'importance des transformations linéaires des vecteurs dans le calcul vectoriel général. E.M. 10. 411.

432. *C. Burali-Forti*. Sull' operatore di Laplace per le omografie vettoriali. R.A.L.R. 20 A. 10.

433. *C. Burali-Forti*. Funzioni vettoriali. A.A.T. 43. 13.

434. *C. Burali-Forti*. Gradiente, rotazione e divergenza in una superficie. A. A.T. 45. 388.

435. *C. Burali-Forti e R. Marcolongo*. Per l'unificazione delle notazioni vettoriali. R.C.M.P. 26. 369.

436. *S. A. Corey*. On a set of 4 linear associative algebraic units. M.M.F. 14. 19.

437. *J. I. Craig*. Orthogonal trajectories in vectorial coordinates. P.E.M.S. 28. 42.

438. *Cramp and C. F. Smith*. Vector algebra for alternate current problems. E.E.L. 41. 399.

439. *L. Deckhery*. Sur l'axe central d'un système de vecteurs. B.M.E. 15. 162; 178.

440. *L. Donati*. Sui vettori elettromagnetici. M.I.B. (6) 5. 311.

441. *G. Fontené*. Accélération et déviation. R.M.S. 18. 435.

(Fortsetzung folgt.)

## Über den Einfluß der elastischen Kupplung auf den Ungleichförmigkeitsgrad.

Von C. RÖHRICH in St. Petersburg.

Das veränderliche Drehmoment der Kolbenkraftmaschinen wird durch die schwere rotierende Masse eines Schwungrades ausgeglichen; doch bestehen noch immer mehr oder weniger beträchtliche Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit, welche bei dem Antrieb der Wechselstromgeneratoren besonders schädlich wirken. Es ist schon längst versucht worden, diese Schwankungen durch eine nachgiebige, elastische Verbindung des Generators mit der Kraftmaschine zu vermindern. Diese Verbindung kann man sich verschiedenartig ausgeführt denken; eine gewöhnliche, mehr oder weniger lange Welle oder eine für diesen Zweck bestimmte elastische Kupplung kommt jetzt am häufigsten vor. Auch den Riementrieb müssen wir wegen seiner Nachgiebigkeit als eine elastische Verbindung betrachten.<sup>1)</sup>

1. Es bedeuete im folgenden:

$J_1$  — das Trägheitsmoment des Schwungrades und anderer mit der Kraftmaschine steif verbundener rotierender Massen auf die Drehachse bezogen.

$K$  — das veränderliche Moment der Drehkraft unter angenäherter Berücksichtigung der Massendrucke des Kurbelgetriebes, welches als Funktion des Drehwinkels der Kraftmaschine  $\varphi_1$  graphisch gegeben ist (Drehkraftdiagramm).

$J_2$  — das Trägheitsmoment der Masse des Generators oder überhaupt der Arbeitsmaschine.

$W$  — das Moment der Widerstandskraft in der Funktion des Drehwinkels  $\varphi_2$  der Arbeitsmaschine.

1) Vgl. Friese, Anforderungen der Elektrotechnik an die Kraftmaschinen. Zeitschr. des Ver. deutsch. Ing. 1899. Nr. 39. S. 1184. „Ich habe durch Versuche gefunden, daß ein Riementrieb, wenn er nach richtigen Gesichtspunkten ausgeführt ist, ein außerordentlich elastisches Glied abgibt und daß hierdurch der Ungleichförmigkeitsgrad der Kraftmaschine, bezogen auf den Anker der Dynamomaschine, auf die Hälfte verringert werden kann.“ Ausführlichere Angaben sind uns unbekannt.

Veranschaulichen wir diese zwei schweren Massen in dem Schema (Fig. 1) als zwei Schwungräder *A* und *B*, die elastische Verbindung als ein Wellenstück vom Durchmesser *d* und Länge *l*, so wirkt auf das Schwungrad *A* das Drehmoment *K* und auf das Schwungrad *B* das Widerstandsmoment *W*.

Sind die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  so gewählt, daß im Ruhezustande  $\varphi_1$  gleich  $\varphi_2$  ist, so wird der Verdrehungswinkel der Welle gleich  $\varphi_1 - \varphi_2$  sein, woraus sich die Größe  $M_e$  des Momentes der Elastizitätskräfte bestimmen läßt zu

$$M_e = \frac{\pi d^4}{32} \frac{G}{l} (\varphi_1 - \varphi_2) = p(\varphi_1 - \varphi_2),$$

worin *G* das Gleitmaß des Wellenmaterials bedeutet. Den

Proportionalitätsfaktor *p* wollen wir den Steifheitsgrad der Kupplung nennen. Eine mehr oder weniger ange-

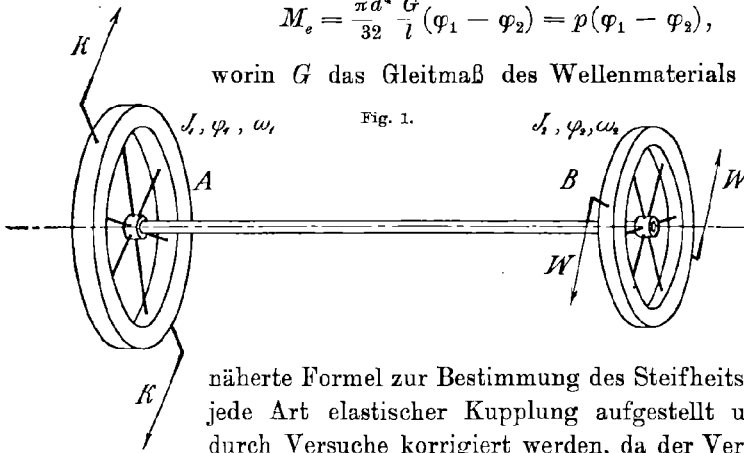
näherte Formel zur Bestimmung des Steifheitsgrades kann für jede Art elastischer Kupplung aufgestellt und nötigenfalls durch Versuche korrigiert werden, da der Verdrehungswinkel  $\varphi_1 - \varphi_2$  sich nur in sehr engen Grenzen ändern muß.

Vernachlässigen wir das geringe Trägheitsmoment der Welle selbst gegenüber den Trägheitsmomenten der Schwungräder, so erhalten wir die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$J_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = K - p(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$J_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = p(\varphi_1 - \varphi_2) - W.$$

In diesen Differentialgleichungen sind *K* und *W* periodische, graphisch gegebene Funktionen der Winkel  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$ , ein Umstand, der eine allgemeine Untersuchung der Integrale unmöglich macht. Um nun in der Lösung fortfahren zu können, müssen wir notwendigerweise einige Näherungsannahmen aufstellen. Es ist vor allem zu beachten, daß die Abweichungen der Drehgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  vom Mittelwerte  $\omega_0$  sehr klein sein müssen, wenn das Maschinenaggregat praktisch verwendbar sein soll (0,25 — 1%). Außerdem sind die Funktionen *K* und *W* selbst nur angenähert gegeben unter verschiedenen Vernachlässigungen (z. B. der Reibung in den Gelenken u. a.), so daß auch eine ge-



naue Integrationsmethode nur angenäherte Resultate liefern würde. All dieses berechtigt uns,  $K$  und  $W$  statt als Funktionen von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  als Funktionen von  $\omega_0 t$  anzunehmen; durch eine graphische Umbildung der Diagramme ist es leicht zu zeigen, daß der Einfluß dieser Annahme auf  $K$  und  $W$  bei den brauchbaren Ungleichförmigkeitsgraden ganz unbedeutend ist.

Nach der Trennung der Veränderlichen erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \varphi_1}{dt^4} + p \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= \frac{p}{J_1 J_2} (K - W) + \frac{1}{J_1} \frac{d^2 K}{dt^2}, \\ \frac{d^4 \varphi_2}{dt^4} + p \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} &= \frac{p}{J_1 J_2} (K - W) - \frac{1}{J_2} \frac{d^2 W}{dt^2}. \end{aligned}$$

Oder, wenn wir mit

$$\omega_1 = \frac{d \varphi_1}{dt} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \frac{d \varphi_2}{dt}$$

die momentanen Winkelgeschwindigkeiten der Kraftmaschine bzw. des Generators bezeichnen,

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{d^3 \omega_1}{dt^3} + p \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) \frac{d \omega_1}{dt} &= \frac{p}{J_1 J_2} (K - W) + \frac{1}{J_1} \frac{d^2 K}{dt^2}, \\ \frac{d^3 \omega_2}{dt^3} + p \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) \frac{d \omega_2}{dt} &= \frac{p}{J_1 J_2} (K - W) - \frac{1}{J_2} \frac{d^2 W}{dt^2}. \end{aligned}$$

2. Die beiden Differentialgleichungen sind einander ähnlich; beide sind linear, von der dritten Ordnung, mit konstanten Koeffizienten und mit Störungsfunktionen. Da uns die Gleichförmigkeit der Geschwindigkeit  $\omega_2$  der Arbeitsmaschine allein interessiert, so wollen wir uns nur mit der Untersuchung der zweiten Differentialgleichung (1) beschäftigen, indem wir die Störungsfunktionen  $K$  und  $W$  in Fouriersche Reihen entwickeln. Wenn  $T_1$  die Periodendauer des Drehkraftdiagrammes  $K$  bedeutet, (d. h. diejenige Zeitdauer, nach deren Verlaufe die Drehkraft immer wieder dieselbe nach Größe und Richtung ist), so kann für  $K$  gesetzt werden:

$$\begin{aligned} K &= K_0 + K_1 \cos \left( 2 \pi \frac{t}{T_1} + \alpha_1 \right) + K_2 \cos \left( 4 \pi \frac{t}{T_1} + \alpha_2 \right) \\ &+ K_3 \cos \left( 6 \pi \frac{t}{T_1} + \alpha_3 \right) + \dots = \sum K_i \cos \left( 2 \pi i \frac{t}{T_1} + \alpha_i \right). \end{aligned}$$

Die Gliederzahl dieser Reihe ist mit einer für die Praxis genügenden Genauigkeit als endliche anzunehmen. Für die in der Praxis vorkommenden Diagramme genügen 6 bis 18 Glieder, um die Kurve hinreichend genau darzustellen. Die Bestimmung der Amplituden  $K_i$  kann auf verschiedene Weise ausgeführt werden. Mit Hilfe geeigneter Instrumente<sup>1)</sup> — harmonischen Analysatoren — kann die Entwicklung

1) Beschreibung und kurzgefaßte Theorie solcher findet man bei Orlich, Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven, Braunschweig 1906.

rein mechanisch ausgeführt werden. Außerdem gibt es auch mehrere graphische und rechnerische Methoden.<sup>1)</sup>

Ebenso setzen wir auch

$$W = \sum W_i \cos \left( 2\pi i \frac{t}{T_2} + \beta_i \right),$$

wobei  $T_2$  die Periodendauer des  $W$ -Diagrammes bezeichnet. Die ersten Glieder  $K_0$  und  $W_0$  der beiden Reihen müssen einander gleich sein, weil wir unsere Betrachtungen auf den stationären Bewegungszustand beschränken.

Jetzt fehlt noch eine analytische Darstellung von  $\frac{d^2 W}{dt^2}$ . Man könnte die Differentiation der  $W$ -Kurve entweder graphisch ausführen und die auf diesem Wege gewonnene Kurve in harmonische Reihen entwickeln, oder man könnte ohne weiteres die  $W$ -Reihe zweimal differenzieren. Wir wollen die beiden Verfahren miteinander vergleichen. Funktion  $W$  sei periodisch und differenzierbar. Denken wir uns nun zu allen Punkten der  $W$ -Kurve Tangenten gezogen, so ist für jede Abszisse  $t + T_2$  die Tangente ebenso geneigt wie für  $t$ , folglich ist die  $\frac{dW}{dt}$ -Kurve auch eine periodische, und zwar hat sie dieselbe Periodendauer  $T_2$ . Auf dieselbe Art beweisen wir, daß die Periodendauer der  $\frac{d^2 W}{dt^2}$ -Kurve gleichfalls  $T_2$  ist; diese Kurve ist folglich auch periodisch und stetig. Man kann sie in eine harmonische Reihe entwickelt denken

$$\frac{d^2 W}{dt^2} = \sum w_i \cos \left( 2\pi i \frac{t}{T_2} + \beta'_i \right),$$

deren Gliederzahl wir als endlich annehmen. Durch zweimalige Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned} W &= C' + C''t + \frac{w_0 t^2}{2} - \sum \frac{w_i \left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2}{i^2} \cos \left( 2\pi i \frac{t}{T_2} + \beta'_i \right) \\ &= \sum W_i \cos \left( 2\pi i \frac{t}{T_2} + \beta_i \right). \end{aligned}$$

Der Vergleich dieser beiden Ausdrücke für  $W$  ergibt:

$$C' = W_0; \quad C'' = 0; \quad w_0 = 0; \quad w_i = -W_i \left(\frac{2\pi i}{T_2}\right)^2,$$

so daß

$$\frac{d^2 W}{dt^2} = - \sum W_i \left(\frac{2\pi i}{T_2}\right)^2 \cos \left( 2\pi i \frac{t}{T_2} + \beta_i \right),$$

1) Von den letztgenannten ist besonders die von Prof. C. Runge zu empfehlen. Vergl. C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen. Sammlung Schubert Bd. 32, Leipzig 1904, wo die ganze Rechnung für 6 Glieder beispielsweise durchgeführt ist. Für 18 Glieder s. Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 48, S. 449, oder Dinglers Polytechnisches Journal, 1905, Nr. 51.

was sich auch durch direkte Differentiation der  $W$ -Reihe ergeben würde. Es hat also keinen Sinn, von der graphischen Differentiation Gebrauch zu machen.

3. Das vollständige Integral der Differentialgleichung (1) lautet:

$$\begin{aligned} \omega_2 = & \omega_0 + a \sin t \sqrt{\frac{p}{J_1} + \frac{p}{J_2}} + b \cos t \sqrt{\frac{p}{J_1} + \frac{p}{J_2}} \\ (2) \quad & + \sum C_i \sin \left( 2\pi i \frac{t}{T_1} + \gamma_i \right) + \sum D_i \sin \left( 2\pi i \frac{t}{T_2} + \varepsilon_i \right). \end{aligned}$$

Die freien Schwingungen mit den Amplituden  $a$  und  $b$ , welche von den Zustandsstörungen abhängen, werden immer im Laufe der Zeit von den Bewegungswiderständen rasch gedämpft. Dagegen werden die erzwungenen Schwingungen, welche durch die letzten zwei Summenglieder dargestellt sind, von den Widerständen nur um ein wenig vermindert. Sie sind also für den Ungleichförmigkeitsgrad der stationären Bewegung einzeln maßgebend, daher wollen wir sie herausgreifen und eingehend untersuchen.

Bezeichnen wir die Hauptfrequenzen mit

$$n_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad \text{bzw.} \quad n_2 = \frac{2\pi}{T_2},$$

so werden die Größen  $\gamma_i$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $C_i$  und  $D_i$  für alle Indizes  $i$  durch die Gleichung bestimmt:

$$\begin{aligned} \gamma_i = & \alpha_i; \quad \varepsilon_i = \beta_i; \\ (3) \quad C_i = & \frac{K_i}{n_1^2 i} \frac{1}{(J_1 + J_2) - \frac{J_1 J_2}{p} n_1^2 i^2}; \end{aligned}$$

$$(4) \quad D_i = - \frac{W_i}{n_2^2 i} \frac{1 - \frac{J_1}{p} n_2^2 i^2}{(J_1 + J_2) - \frac{J_1 J_2}{p} n_2^2 i^2}.$$

Das aufgestellte Integral gilt aber nicht im Falle der Resonanz, wenn für irgend ein  $i$  eine der Gleichungen

$$J_1 + J_2 = \frac{J_1 J_2}{p} n_1^2 i^2,$$

$$J_1 + J_2 = \frac{J_1 J_2}{p} n_2^2 i^2$$

identisch erfüllt wird. Bezeichnen wir diejenigen Steifheitsgrade, bei denen die Resonanz auftritt, als kritische

$$p'_{i,r} = \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} n_1^2 i^2; \quad p''_{i,r} = \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} n_2^2 i^2,$$

so muß der Steifheitsgrad  $p$  keinem dieser kritischen Werte gleich oder nahe sein, weil ja bekanntlich während der Resonanz von der Gleichförmigkeit der Bewegung nicht die Rede sein kann.

Jetzt vergleichen wir die erhaltene Bewegung der elastisch verbundenen Maschinen mit derjenigen der vollständig steif verbundenen. Ohne Berücksichtigung der Kupplungselastizität würden wir für die Drehung derselben Schwungräder  $A$  und  $B$  auf Grund der Differentialgleichung

$$(5) \quad (J_1 + J_2) \frac{d\omega}{dt} = K - W$$

den Ausdruck erhalten:

$$\omega = \omega_0 + \sum C'_i \sin(n_1 i t + \gamma'_i) + \sum D'_i \sin(n_2 i t + \varepsilon'_i),$$

wobei

$$\gamma'_i = \alpha_i; \quad \varepsilon'_i = \beta_i;$$

$$C'_i = \frac{K_i}{n_1 i} \frac{1}{J_1 + J_2};$$

$$D'_i = - \frac{W_i}{n_2 i} \frac{1}{J_1 + J_2}.$$

Da die Phasenwinkel in den beiden miteinander verglichenen Bewegungen dieselben sind ( $\gamma'_i = \gamma_i$ ;  $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$ ), so wird die elastische Verbindung sicher einen Vorteil ergeben, wenn die sämtlichen Amplituden  $C_i$  und  $D_i$  kleiner als  $C'_i$  bzw.  $D'_i$  sind

$$(6) \quad |C_i| < |C'_i| \quad \text{und} \quad |D_i| < |D'_i|.$$

Beim Aufsuchen der notwendigen Bedingungen für diese Ungleichungen<sup>1)</sup> müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Ist die Kupplung sehr steif ( $p$  groß), so daß

$$J_1 + J_2 > \frac{J_1 J_2}{p} n_1^2 i^2 \quad \text{und} \quad J_1 + J_2 > \frac{J_1 J_2}{p} n_2^2 i^2,$$

so führen die Ungleichungen (6) zu den Bedingungen

$$0 > \frac{J_1 J_2}{p} n_1^2 i^2 \quad \text{und} \quad 0 > \frac{J_1 J_2}{p} n_2^2 i^2,$$

welche unmöglich sind, weil alle rechtsstehenden Größen nur positiv sein können. Eine steife, ungenügend nachgiebige Kupplung wirkt also immer nachteilig.

1) Die Klammern bedeuten, daß nur die absoluten Werte der Amplituden in Betracht gezogen werden.



2. Ist dagegen die Kupplung so nachgiebig ( $p$  klein), daß

$$J_1 + J_2 < \frac{J_1 J_2}{p} n_1^2 i^2 \quad \text{und} \quad J_1 + J_2 < \frac{J_1 J_2}{p} n_2^2 i^2,$$

so können die Ungleichungen (6) bestehen, wenn

$$(7) \quad p < \frac{J_1 J_2}{2(J_1 + J_2)} n_1^2 i^2 \quad \text{und} \quad p < \frac{J_1^2 + 2J_1 J_2}{2(J_1 + J_2)} n_2^2 i^2.$$

Unter Benützung der Werte für die kritischen Steifheitsgrade läßt sich auch schreiben:

$$(7') \quad p < \frac{p'_{ir}}{2} \quad \text{und} \quad p < p''_{ir} + \frac{J_1^2}{2(J_1 + J_2)} n_2^2 i^2.$$

Den allerkleinsten Wert von  $p$  erhält man für  $i = 1$ , und wenn z. B.  $p < \frac{p'_{1r}}{2}$  ist, so sind sicher alle Amplituden  $C_i$  kleiner als  $C'_i$ .

In dem praktisch wichtigsten Falle des Generatorantriebs ist  $W = W_0 = \text{konstant}$  und dafür erhalten wir einen Satz:

*Elastische Kupplungen bieten einen Vorteil, wenn ihr Steifheitsgrad mindestens zweimal kleiner ist als der erste kritische für  $i = 1$ .*

Es ist aber nicht außer Acht zu lassen, daß während des Anlaufens der Maschinen, zu welcher Zeit die Frequenzen  $n$  von Null ab bis zum Normalwerte anwachsen, die Resonanz für alle  $i$  auftreten muß. Die kritischen Umlaufzahlen werden aus den Resonanzfrequenzen

$$n_{ir} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{p}{J_1} + \frac{p}{J_2}}$$

bestimmt. Während der Resonanz wird die Kupplung stark beansprucht, so daß sogar ein Bruch der Kupplung zu befürchten ist, wenn keine Schutzvorrichtungen vorhanden sind.

Zu der Gleichung (4) ist noch zu bemerken, daß durch passende Wahl von  $p$  ein Glied der Reihe  $D_i = D_k$  zum Werte Null gebracht werden kann und zwar, wenn

$$\frac{J_1}{p} n_2^2 k^2 = 1, \quad \text{oder} \quad p = J_1 n_2^2 k^2$$

gewählt wird. Bei Kolbenarbeitsmaschinen (Pumpe, Kompressor u. dgl.) kann dadurch die Wirkung der größten harmonischen Komponente der  $W$ -Reihe gänzlich vernichtet werden. Für Dynamomaschinen läßt sich diese Eigenschaft leider nicht verwerten.

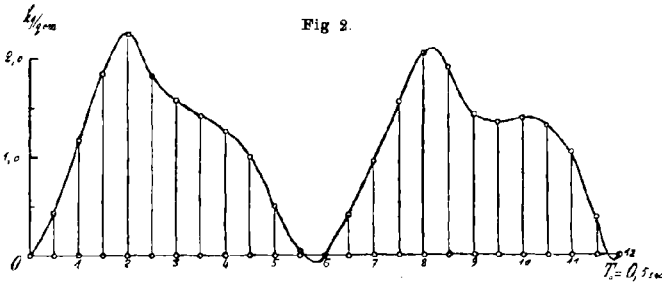
Um die Theorie an einem Beispiele zu erläutern, wollen wir den Einfluß der Riemenelastizität auf den Ungleichförmigkeitsgrad einer Dynamomaschine untersuchen.

4. Eine Einzylinder-Dampfmaschine treibt mittels Riemen eine Dynamomaschine.

Gegeben sind:

Kolbenhub	0,5 m	Kolbenquerschnitt	380 qcm
Umdrehungszahl:		Riemenscheibendurchmesser:	
der Dampfmaschine	120 $\frac{\text{Uml}}{\text{min}}$	an d. Dampfmaschine	$2R = 1,5\text{m}$
der Dynamomaschine	900 $\frac{\text{Uml}}{\text{min}}$	an d. Dynamomaschine	$2r = 0,2\text{m}$
Trägheitsmoment der mit der Dampfmaschine steif verbundenen Massen	$J_1 = 50 \text{ mkgsec}^2$	Trägheitsmoment des Dynamoaankers und der Riemenscheibe auf deren Drehachse bezogen	$J_2 = 0,356 \text{ mkgsec}^2$

Riemenquerschnitt  $f = 15 \cdot 0,4 = 6 \text{ qcm}$ .



Die Drehkraftkurve mit Berücksichtigung der Massendrücke des Kurbelgetriebes ist in Fig. 2 dargestellt und läßt sich mit für unsere Zwecke ausreichender Genauigkeit durch die Reihe ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 P = & 1,140 + 0,020 \sin \omega_0 t + 0,303 \sin 2 \omega_0 t - 0,097 \sin 3 \omega_0 t \\
 & - 0,159 \sin 4 \omega_0 t - 0,026 \sin 5 \omega_0 t \\
 & + 0,146 \cos \omega_0 t - 0,778 \cos 2 \omega_0 t - 0,060 \cos 3 \omega_0 t - 0,388 \cos 4 \omega_0 t \\
 & - 0,086 \cos 5 \omega_0 t + 0,047 \cos 6 \omega_0 t \text{ kg} \\
 & \text{qcm},
 \end{aligned}$$

wobei  $\omega_0 = n_1 = 4\pi \text{ sec}^{-1}$  ist. Daraus berechnet sich das Drehmoment der Kraftmaschine mit dem Faktor  $380 \cdot 0,25 = 95$  zu:

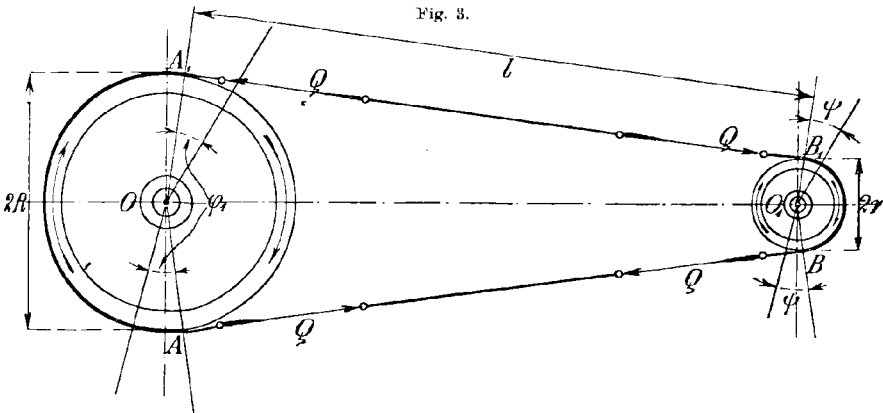
$$\begin{aligned}
 K = & 108,2 + 1,90 \sin \omega_0 t + 28,80 \sin 2 \omega_0 t - 9,21 \sin 3 \omega_0 t \\
 & - 15,10 \sin 4 \omega_0 t - 2,47 \sin 5 \omega_0 t \\
 & + 13,87 \cos \omega_0 t - 73,9 \cos 2 \omega_0 t - 5,7 \cos 3 \omega_0 t - 36,9 \cos 4 \omega_0 t \\
 & - 8,17 \cos 5 \omega_0 t + 4,46 \cos 6 \omega_0 t \text{ mkg};
 \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned}
 K = & 108,2 + 14,0 \cos (\omega_0 t - 7^\circ 50') - 79,3 \cos (2 \omega_0 t + 21^\circ 20') \\
 & - 10,9 \cos (3 \omega_0 t - 58^\circ 10') - 39,9 \cos (4 \omega_0 t - 22^\circ 10') \\
 & - 8,54 \cos (5 \omega_0 t - 16^\circ 50') + 4,46 \cos 6 \omega_0 t \text{ mkg}.
 \end{aligned}$$

Das Moment der Widerstandskraft der Dynamomaschine ist angenommen zu  $108,2 \frac{r}{R}$  mkg.

Um den Steifheitsgrad der Riemenverbindung zu berechnen, denken wir uns (Fig. 3) die große und die kleine Scheibe um beliebige kleine Winkel  $\varphi_1$  bzw.  $\psi$  gedreht, so wird dadurch das ziehende Riemenstück  $AB$  um die Länge  $R\varphi_1 - r\psi$  mehr gedehnt als vorher; dagegen wird die Dehnung des gezogenen Riemenstückes  $A_1B_1$  um ebensoviel vermindert. Daraus ergibt sich die Elastizitätskraft  $Q$ , um welche sich



die ursprüngliche Spannung von  $AB$  vergrößert, jedoch die von  $A_1B_1$  verringert hat, zu:

$$Q = \frac{f}{l} E (R\varphi_1 - r\psi),$$

wobei  $l = AB = A_1B_1$  und  $E$  das Elastizitätsmaß des Riemens bezeichnet.

Die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$J_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = K - 2 \frac{R}{l} f E (R\varphi_1 - r\psi),$$

$$J_2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} = 2 \frac{r}{l} f E (R\varphi_1 - r\psi) - W$$

können sofort in die schon untersuchte Form umgewandelt werden mittels der Beziehungen:

$$\frac{R}{r} = \nu; \quad \nu \varphi_2 = \psi; \quad p = 2 \frac{R^2}{l} f E; \quad J_2 = \nu^2 J_2'.$$

Vom dynamischen Standpunkte aus ist diese Umwandlung der Reduktion der Massen und der Kräfte von der Welle  $O_1$  auf die Welle  $O$  gleichwertig. Nach der Reduktion lauten die Gleichungen:

$$J_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = K - p(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$J_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = p(\varphi_1 - \varphi_2) - W \cdot \nu.$$

In unserem Beispiele ist  $\nu = 7,5$  und das reduzierte Trägheitsmoment  $J_2 = 20 \text{ mkgsec}^2$ . Für die stationäre Bewegung der Dynamomaschine erhalten wir daraus die folgende Formel für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_2 = \frac{1}{\nu} \frac{d\psi}{dt}$ :

$$\omega_2 = \omega_0 \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i=6} \frac{K_i}{\omega_0^2 i} \frac{1}{(J_1 + J_2) - \frac{J_1 J_2}{p} \omega_0^2 i^2} \sin(\omega_0 i t + \alpha_i) \right].$$

Da der Steifigkeitsgrad  $p$  der Länge  $l$  umgekehrt proportional ist, so ist es klar, daß der Achsenabstand  $OO_1$  einen sehr bedeutenden Einfluß auf den Ungleichförmigkeitsgrad ausübt.

Nehmen wir  $l = 7 \text{ m}$  und  $E = 2250 \text{ kg/qcm}$  an, so berechnet sich  $p = 2169 \text{ mkg}$ . Nach der Substitution aller Werte lautet die Reihe:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_0 + \omega_0 [-0,0326 \sin \omega_0 t + 0,00106 \sin 2\omega_0 t + 0,000021 \sin 3\omega_0 t \\ &\quad + 0,000053 \sin 4\omega_0 t + 0,000006 \sin 5\omega_0 t \\ &\quad + 0,00446 \cos \omega_0 t + 0,000413 \cos 2\omega_0 t - 0,000033 \cos 3\omega_0 t \\ &\quad - 0,000022 \cos 4\omega_0 t - 0,000002 \cos 5\omega_0 t] \\ &= \omega_0 + \omega_0 [-0,0329 \sin(\omega_0 t - 7^\circ 50') + 0,001136 \sin(2\omega_0 t + 21^\circ 20') \\ &\quad + 0,000039 \sin(3\omega_0 t - 58^\circ 10') + 0,000058 \sin(4\omega_0 t - 22^\circ 10') \\ &\quad + 0,000007 \sin(5\omega_0 t - 16^\circ 50')]. \end{aligned}$$

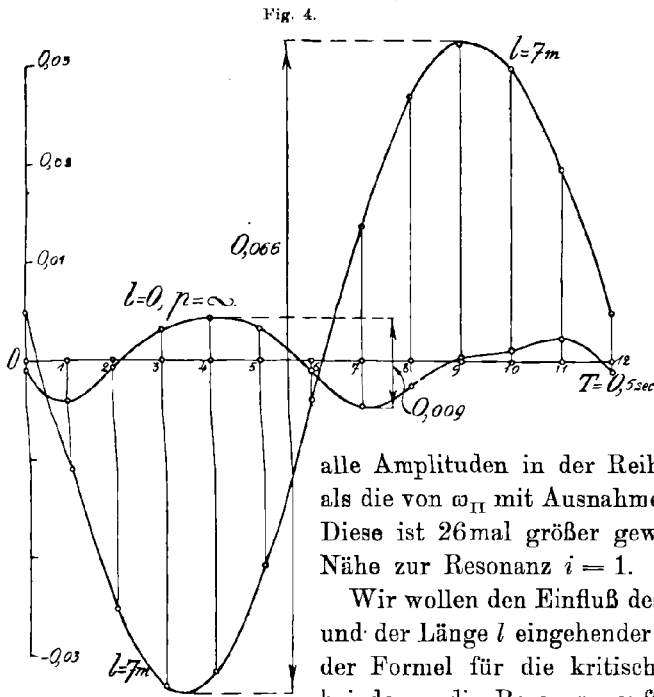
Würden wir dagegen die Riemenelastizität unberücksichtigt lassen, so erhielten wir unter denselben Umständen eine Reihe:

$$\begin{aligned} \omega_{II} &= \omega_0 + \omega_0 [0,00125 \sin \omega_0 t - 0,00334 \sin 2\omega_0 t - 0,000172 \sin 3\omega_0 t \\ &\quad - 0,000834 \sin 4\omega_0 t - 0,000148 \sin 5\omega_0 t \\ &\quad - 0,000172 \cos \omega_0 t - 0,00130 \cos 2\omega_0 t + 0,000278 \cos 3\omega_0 t \\ &\quad + 0,000341 \cos 4\omega_0 t + 0,000045 \cos 5\omega_0 t] \\ &= \omega_0 + \omega_0 [0,001265 \sin(\omega_0 t - 7^\circ 50') - 0,003580 \sin(2\omega_0 t + 21^\circ 20') \\ &\quad - 0,000328 \sin(3\omega_0 t - 58^\circ 10') - 0,000898 \sin(4\omega_0 t - 22^\circ 10') \\ &\quad - 0,000154 (\sin 5\omega_0 t - 16^\circ 50')]. \end{aligned}$$

Um den Ungleichförmigkeitsgrad  $\delta$  aus den beiden Reihen  $\omega_2$  und  $\omega_{II}$  zu bestimmen, zeichnen wir die in den eckigen Klammern stehenden Funktionen  $E(\omega_0 t)$  nach der Berechnung in die Fig. 4 ein und finden daraus die maximale und die minimale Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{2\max} = \omega_0(1 + E_{\max})$ ;  $\omega_{2\min} = \omega_0[1 + E_{\min}]$ . Es ist leicht einzusehen, daß hierin  $\delta$  der größten Ordinatendifferenz gleich ist.

Unter Berücksichtigung der Riemenelastizität ergibt sich aus der Fig. 4 ein Ungleichförmigkeitsgrad der Dynamomaschine:

$$\delta = \frac{v \omega_2 \max - v \omega_2 \min}{v \omega_0} = 0,0323 + 0,0337 = 0,066 = \frac{1}{15,2}$$



Für den steif gedachten Riementrieb ( $l = 0$ ) wäre:

$$\delta = 0,009.$$

Der tatsächliche Ungleichförmigkeitsgrad ist folglich in unserem Falle 7,22 mal größer, als zu erwarten war. Die Ursache ist klar—

alle Amplituden in der Reihe  $\omega_2$  sind kleiner als die von  $\omega_{II}$  mit Ausnahme der ersten ( $i=1$ ). Diese ist 26mal größer geworden infolge der Nähe zur Resonanz  $i = 1$ .

Wir wollen den Einfluß des Achsenabstandes und der Länge  $l$  eingehender untersuchen. Aus der Formel für die kritischen Riemenlängen, bei denen die Resonanz auftritt,

$$l_{i,r} = 2 \frac{f R^2 E}{n^2 i^2} \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right),$$

berechnet sich für unser Beispiel:

$i = 1$	2	3	4	5
$l_{i,r} = 6,73$	1,68	0,748	0,420	0,269 m

Für diese Riemenlängen wird der Ungleichförmigkeitsgrad viel größer<sup>1)</sup>, als man nach der elementaren Theorie ohne Berücksichtigung der Riemenelastizität erwartet. Aus der Ungleichung (7) ergibt sich weiter die Bedingung, unter welcher der Ungleichförmigkeitsgrad durch den Riementrieb sicher verbessert wird

$$l > \frac{4 f R^2 E}{\omega_0^2} \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) = 2 l_{1,r}.$$

1) Wenn man die Schwingungswiderstände außer Acht läßt, so strebt der Ungleichförmigkeitsgrad dabei unendlich groß zu werden. Durch die Widerstände wird seine Größe zwar wieder endlich, aber doch groß genug, um unsere angenäherten Integrale überhaupt unbrauchbar zu machen.

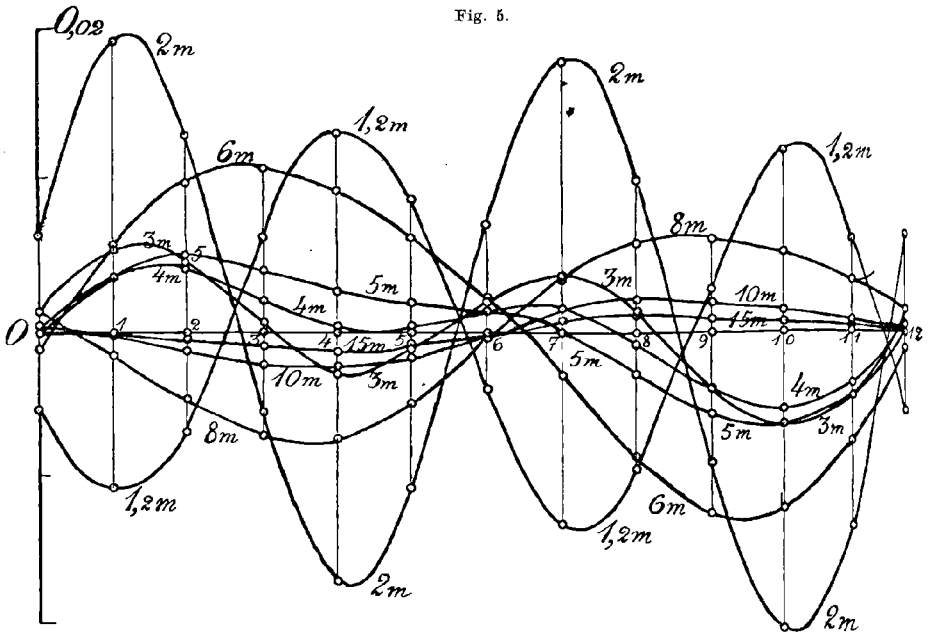


Fig. 5.

Für unser Beispiel ergibt sich  $l > 13,46\text{ m}$ , da aber die zweite Harmonische der  $K$ -Reihe die größte ist, darf man erwarten, daß auch bei  $l < 13,46\text{ m}$  sich ein gutes  $\delta$  ergibt.

Um die Abhängigkeit des Ungleichförmigkeitsgrades  $\delta$  von der Riemenlänge  $l$  kennen zu lernen, gibt es keinen andern Weg, als die vorerwähnten Rechnungen fortzusetzen. Zur Berechnung der Winkelgeschwindigkeitsreihen wurden folgende Werte von  $l$  gewählt:

- $l = 1,2 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 15\text{ m}$   
 $p = 12650 \quad 7590 \quad 5060 \quad 3795 \quad 3036 \quad 2530 \quad 1898 \quad 1518 \quad 1012\text{ mkg.}$

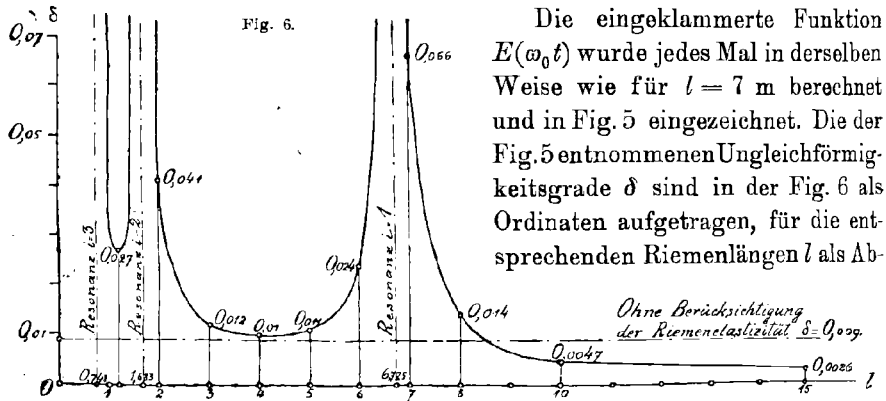


Fig. 6.

Die eingeklammerte Funktion  $E(\omega_0 t)$  wurde jedes Mal in derselben Weise wie für  $l = 7\text{ m}$  berechnet und in Fig. 5 eingezeichnet. Die der Fig. 5 entnommenen Ungleichförmigkeitsgrade  $\delta$  sind in der Fig. 6 als Ordinaten aufgetragen, für die entsprechenden Riemenlängen  $l$  als Ab-

szissen. Die Figur 6 läßt erkennen, daß, beginnend mit  $l \cong 8,5$  m ( $p \cong \frac{3}{4} p_{1r}$ ), der Ungleichförmigkeitsgrad schon kleiner als 0,009 ist. Bei  $l = 2l_{kr} = 13,45$  m ist  $\delta = \text{ca. } 0,0033$ ; ungefähr dreimal kleiner, als ohne Berücksichtigung der Riemenelastizität. Der ungenügend nachgiebige Riementrieb verschlechtert den Ungleichförmigkeitsgrad.

Auf Grund der Ergebnisse dieses Beispiels kann man eine allgemeine Regel für die vorteilhafte Konstruktion des Riementriebes aufstellen:

*Man bestimme die erste kritische Riemenlänge*

$$l_1 = 2 \frac{f R^2}{n^2} E \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{v^2 J_2} \right)$$

und wähle den Achsenabstand so groß, daß  $l = 2l_1$  ist. Wenn die erste harmonische Komponente der  $K$ -Reihe verhältnismäßig klein ist (in unserem Beispiele ist  $K_1 \cong \frac{1}{5} K_2$ ), so können auch etwas kleinere  $l$  einen guten Ungleichförmigkeitsgrad liefern.

Wenn ein fester Achsenabstand gegeben ist, so darf der Riemenscheibenhalmesser zweckmäßig verändert werden. Man bestimme

$$p_{1r} = \frac{J_1 v^2 J_2'}{J_1 + v^2 J_2'}$$

und wähle den Halbmesser  $R$  so, daß

$$p = 2 \frac{R^2}{l} f E \lesssim \frac{p_{1r}}{2}$$

ist. In unserem Beispiele könnte man mit  $l = 7$  m einen ebenso günstigen Ungleichförmigkeitsgrad wie bei  $l = 10$  m ( $\delta = 0,0047$ ) erhalten, wenn die Riemenscheiben von den Halbmessern

$$R' = R \sqrt{\frac{1518}{2169}} = 0,75 \sqrt{\frac{7}{10}} = 0,628 \text{ m}$$

bzw.  $r' = 0,0837$  m wären.

5. Eine genaue Berechnung des Ungleichförmigkeitsgrades braucht im allgemeinen für jeden einzelnen Fall nicht durchgeführt zu werden; es genügt oft nur zu wissen, daß der tatsächliche Ungleichförmigkeitsgrad nicht größer ist als der, den man elementar ohne Berücksichtigung der Riemenelastizität berechnet hat. Doch wollen wir noch eine rein graphische Methode vorschlagen, welche zur Bestimmung des Ungleichförmigkeitsgrades dienen kann, oder überhaupt zur Aufzeichnung des partikulären Integrals einiger simultaner linearer Differentialgleichungen mit graphisch gegebenen Störungsfunktionen.

Nach der Trennung der Veränderlichen lautete die Differentialgleichung (1) wie folgt:

$$\frac{d^3 \omega_2}{dt^3} + p \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) \frac{d \omega_2}{dt} = \frac{p}{J_1 J_2} (K - W) - \frac{1}{J_2} \frac{d^2 W}{dt^2}.$$

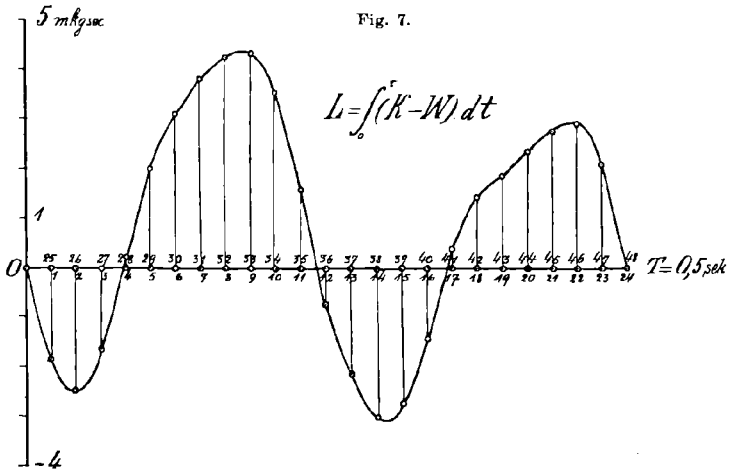
Multiplizieren wir diese mit  $dt$  und integrieren sie einmal, wobei wir

$$p\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right) = k^2$$

zur Abkürzung setzen, so ergibt sich:

$$\frac{d^2\omega_2}{dt^2} + k^2\omega_2 = \frac{p}{J_1 J_2} \int (K - W) dt - \frac{1}{J_2} \frac{dW}{dt} + C.$$

Es ist leicht, die Integralkurve  $\int_0^\tau (K - W) dt = L(\tau)$  mittels Integraphen oder durch mehrmaliges teilweises Planimetrieren der  $(K - W)$ -Kurve aufzuzeichnen. Für unser Beispiel ist die  $L(\tau)$ -Kurve in der Fig. 7 dargestellt.



Bekanntlich kann das vollständige Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\omega_2}{dt^2} + k^2\omega_2 = S(t)$$

in der Form geschrieben werden:

$$\omega_2 = \omega_0 + a' \sin kt + b' \cos kt + \frac{1}{k} \int_0^t S(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau.$$

Substituieren wir den Ausdruck für die Störungsfunktion

$$S(\tau) = \frac{p}{J_1 J_2} L(\tau) - \frac{1}{J_2} \frac{dW}{dt} + C,$$

so erhalten wir durch teilweise Integration:

$$\begin{aligned} \omega_2 = \omega_0 + a'' \sin kt + b'' \cos kt + \frac{p}{J_1 J_2 k} \int_0^t L(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau \\ - \frac{1}{J_2 k} \int_0^t W(\tau) \cos k(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$



Dieser Ausdruck vereinfacht sich beträchtlich, wenn, wie in unserem Beispiele,  $W = \text{Const} = W_0$  ist. Dann ergibt sich

$$(8) \quad \omega_2 = \omega_0 + a_1 \sin kt + b_1 \cos kt + \frac{p}{J_1 J_2 k \omega_0} \int_0^t L(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau.$$

Unsere erste Aufgabe wird es sein, die Integralkurve

$$F(t) = \int_0^t L \sin k(t - \tau) d\tau = \sin kt \int_0^t L \cos k\tau d\tau - \cos kt \int_0^t L \sin k\tau d\tau$$

aufzuzeichnen. Bevor wir aber damit beginnen, wollen wir uns den weiteren Gedankengang klar machen und die  $F$ -Kurve bereits als gegeben denken. Es ist leicht einzusehen, daß diese Kurve nicht die gesuchte erzwungene Schwingung darstellt; sie ist entweder gar nicht periodisch, oder besitzt nur eine zufällige Periode, während die erzwungene Schwingung von der gleichen Periode wie die Störungsfunktion sein muß. Bezeichnen wir wieder die Funktion, welche die erzwungene Schwingung darstellt, mit  $\omega_0 E(\omega_0 t)$ , so kann man das vollständige Integral in der früheren Form (§ 3, Gl. 2) schreiben:

$$\omega_2 = \omega_0 [1 + a_2 \sin kt + b_2 \cos kt + E(\omega_0 t)].$$

Aus dem Vergleich der beiden Lösungen ergibt sich sofort

$$(9) \quad E(\omega_0 t) = \frac{p}{J_1 J_2 k \omega_0} [F(t) + a \sin kt + b \cos kt].$$

Die erzwungene Schwingung läßt sich mit Hilfe der Funktion  $F$  bestimmen durch Hinzufügung einer harmonischen Schwingung. Zur Bestimmung dieser Schwingung betrachten wir drei Zeitpunkte:  $t = 0$ ;  $t = T$  und  $t = 2T$ , wobei  $T$  die Periode der erzwungenen Schwingung bezeichnet. In allen diesen Zeitpunkten hat die Funktion  $E(\omega_0 t)$  eine und dieselbe unbekannte Größe, welche wir mit  $E_0$  bezeichnen. Die Größen der Funktion  $F(t)$  zu denselben Zeitpunkten wollen wir mit  $F_0$ , bzw.  $F_1$  und  $F_2$  bezeichnen. Außerdem sei

$$\frac{p}{J_1 J_2 k \omega_0} = c.$$

Für die vorerwähnten Zeitpunkte erhalten wir aus der Gleichung (9):

$$E_0 = c(F_0 + b)$$

$$E_0 = c(F_1 + a \sin kT + b \cos kT)$$

$$E_0 = c(F_2 + a \sin 2kT + b \cos 2kT);$$

aus diesen Gleichungen lassen sich die Größen  $a$  und  $b$  leicht bestimmen

$$(10) \quad \begin{cases} a = \frac{0,5(F_2 - F_0) - (1 + \cos kT)(F_1 - F_0)}{\sin kT} \\ b = \frac{0,5(F_2 - F_0) - \cos kT(F_1 - F_0)}{1 - \cos kT}; \end{cases}$$

oder, da immer  $F_0 = 0$  ist,

$$(10') \quad \begin{cases} a = \frac{0,5 F_2 - (1 + \cos kT) \cdot F_1}{\sin kT} \\ b = \frac{0,5 F_2 - \cos kT \cdot F_1}{1 - \cos kT} \end{cases}$$

Es genügt also für die Zeitdauer  $2T$ , den Verlauf der  $F$ -Kurve aufzuzeichnen, um die erzwungene Schwingung mit Hilfe der Gleichung (9) bestimmen zu können.

Zur Aufzeichnung der  $F$ -Kurve werden folgende Operationen empfohlen:

1. Eintragen der  $L$ -Kurve in ein polares Diagramm und Konstruktion der Kurven  $L' = L \cos k\tau$  und  $L'' = L \sin k\tau$  in rechtwinkligen Koordinatensystemen.

2. Integration der  $L'$ - und  $L''$ -Kurven und Aufzeichnen der Integralkurven

$$L_1 = \int_0^t L' d\tau \quad \text{und}$$

$$L_2 = \int_0^t L'' d\tau \quad \text{in po-}$$

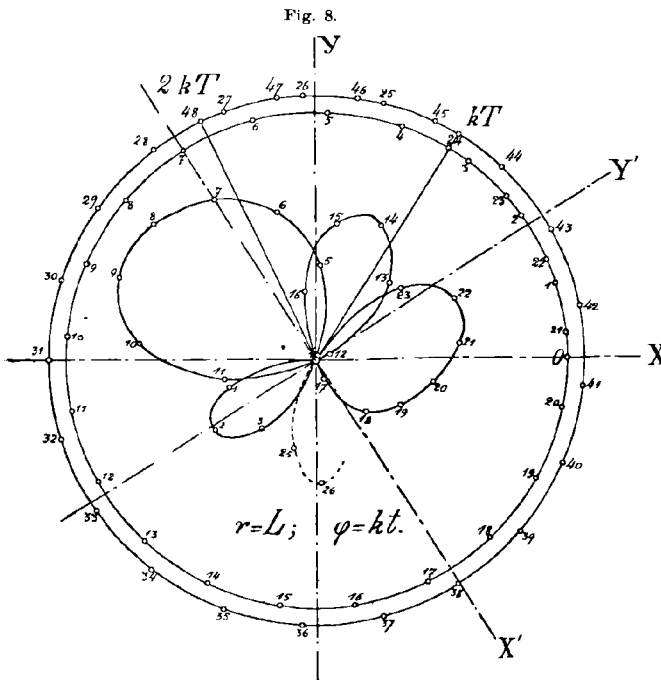
laren Diagrammen.

3. Konstruktion der Kurven  $L_1 \sin kt$

und  $L_2 \cos kt$  und deren Subtraktion  $F = L_1 \sin kt - L_2 \cos kt$ .

4. Durch Hinzufügung der harmonischen Schwingung wird endlich die erzwungene Schwingung bestimmt.

Wir wollen jetzt alle diese Operationen an einem Beispiele erläutern und zwar für  $k = 14,578$ . Das polare  $L$ -Diagramm muß die Winkelkoordinate  $kt$  haben. Einer vollen Umdrehung der Maschine von der Zeitdauer  $T = 0,5$  sec entspricht ein Winkel  $kT = 7,29 = 417^\circ 96'$ . Wir teilen diesen Winkel (Fig. 8) in 24 Teile sowie auch die Abszissenlänge  $T$  der  $L$ -Kurve (Fig. 7) und tragen die  $L$ -Werte an den entsprechenden Radien-Vektoren in der positiven oder negativen Richtung vom Zentrum aus ein. Projizieren wir jeden Punkt des Polardiagrammes



auf die horizontale X-Achse und auf die senkrechte Y-Achse, so sind die Projektionen gleich  $L'_1 = L \cos k\tau$  bzw.  $L''_1 = L \sin k\tau$ . Da die  $L$ -Kurve periodisch ist, brauchen wir nicht für die zweite Periodendauer das Polar diagramm zu konstruieren, sondern können die  $XY$ -Achsen zweckentsprechend verdrehen, so daß die Projektion z. B. des Punktes (25) auf die X-Achse gleich der Projektion des Punktes (1) auf die  $X'$ -Achse wäre.

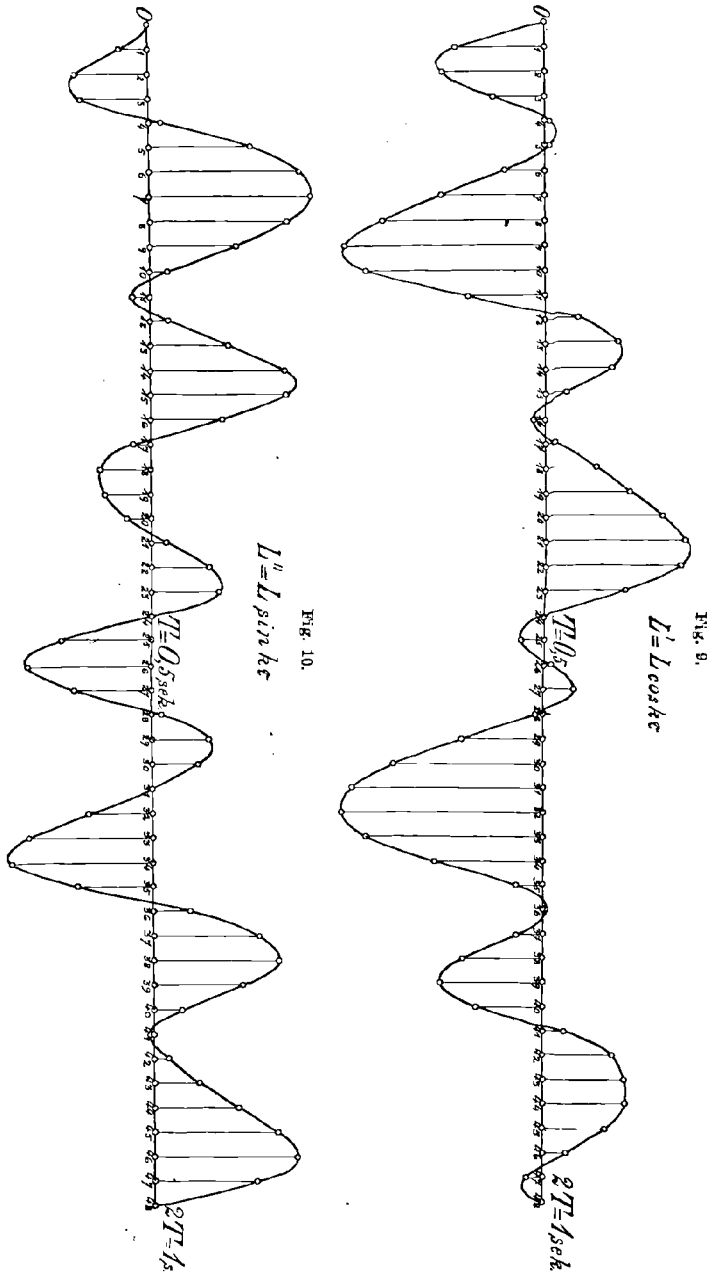
Die beiden Kurven  $L'$  und  $L''$  werden in ein rechtwinkliges Diagramm (Fig. 9 und Fig. 10) eingezeichnet. Jetzt folgt die Integration

$$L_1 = \int_0^t L' d\tau \quad \text{bzw.}$$

$$L_2 = \int_0^t L'' d\tau,$$

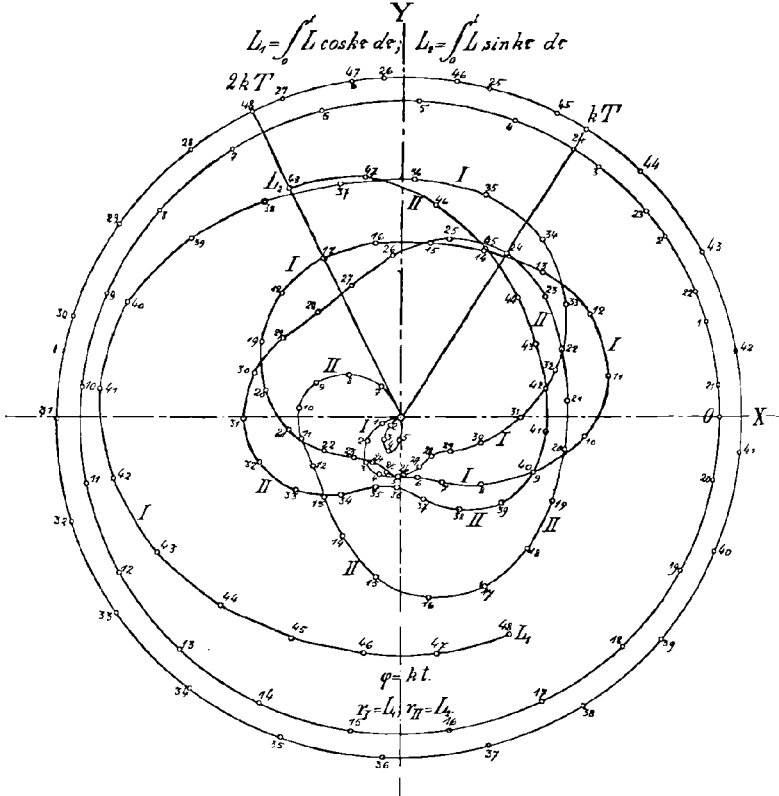
welche entweder rechnerisch oder

mechanisch mit Hilfe eines Integraphen ausgeführt werden kann. In Fig. 11 sind die beiden Integralkurven in ein Polardiagramm eingezeichnet,



nachdem die Flächeninhalte mittels der verbesserten Trapezmethode ausgerechnet wurden. Aus dem Polardiagramm lassen sich durch Projektion die Werte  $N_1 = L_1 \sin kt = \sin kt \int_0^t L \cos k\tau d\tau$  und  $N_2 = L_2 \cos kt = \cos kt \int_0^t L \sin k\tau d\tau$  leicht bestimmen. Subtrahieren wir den zweiten von dem ersten, so erhalten wir schließlich die Funktion  $F(t)$ , welche

Fig. 11.



in Fig. 12 dargestellt ist. Dieser Kurve entnehmen wir die Werte  $F_0 = 0$ ;  $F_1 = -0,316$ ;  $F_2 = -0,23 \text{ mkgsec}^2$ , woraus sich  $a = +0,435$  und  $b = +0,113 \text{ mkgsec}^2$  ergibt. Addieren wir die Werte  $a \sin kt$  und  $b \cos kt$  zu der  $F$ -Kurve, so erhalten wir die gesuchte  $E$ -Kurve im Maßstab

$$c = \frac{p}{J_1 J_2 k \omega} \cdot 1 \text{ mkgsec}^2 = 0,01657 = 10 \text{ cm}.$$

Die größte Ordinatendifferenz ergibt den Ungleichförmigkeitsgrad

$\delta = 0,63$   $c = 0,0104$ ; die Rechnung mittels der harmonischen Reihen ergab für  $\delta$  den Wert 0,011. Der Fehler ca. 6% ist durch sehr angenäherte Rechnungsarten entstanden; die Anwendung der schon vorhandenen mathematischen Instrumente — eines harmonischen Analysators für die erste Methode und eines Integraphen oder wenigstens eines Planimeters für die zweite — würde wohl zur besseren Übereinstimmung führen.

Der Verlauf der  $E$ -Kurve in der zweiten Periode ist fast demjenigen in der ersten gleich, was auch zur Beurteilung des Genauigkeitsgrades aller graphischen Operationen dienen kann.

Ein rechnerisches Verfahren für den im letzten Abschnitt durchgeführten Integrationsweg würde m. E. keinen wesentlichen Vorteil bieten. Dagegen verspricht ein graphisch-mechanisches Verfahren zur Ausführung aller erwähnten Operationen einige Vorteile gegenüber der harmonisch-analytischen Methode der Berechnung von erzwungenen Schwingungen. Hoffentlich wird sich uns noch eine Gelegenheit bieten, auf diese Frage näher einzugehen.

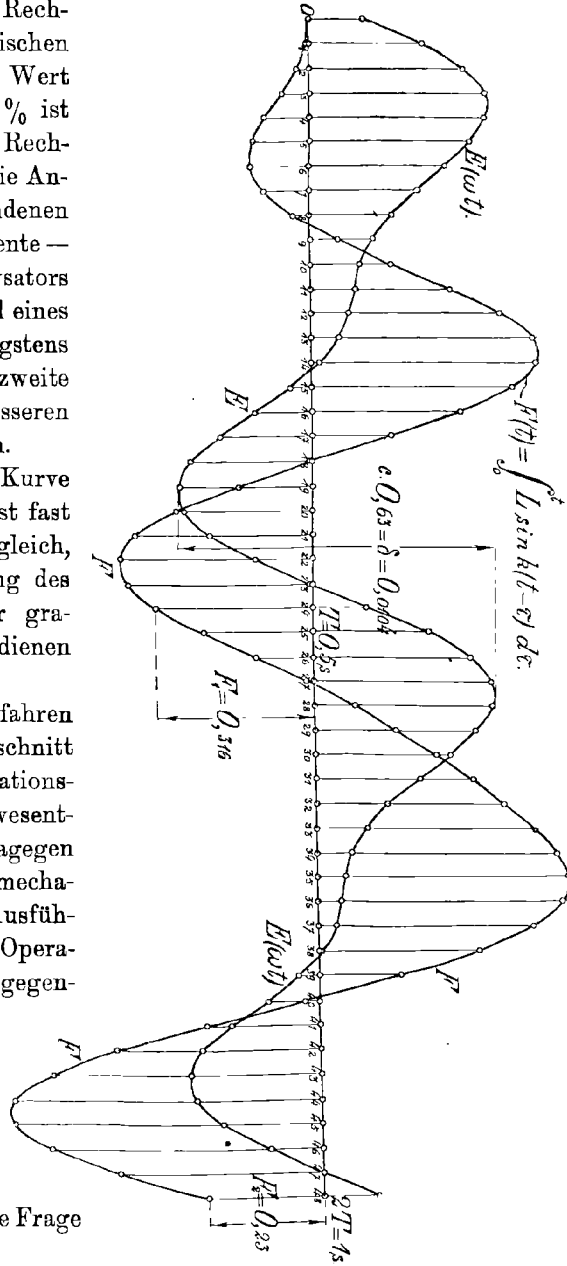


Fig. 18.

## Geometrische Probleme bei der Verwendung von Schraubenflächen in der Technik.

Von E. STÜBLER in Stuttgart.

In dieser Zeitschrift, Bd. 57 (1909), S. 271, habe ich in der Abhandlung „Das Fräsen von Schraubengewinden“ die Aufgabe behandelt, die Form einer Drehungsfläche (des Fräasers) zu bestimmen, welche eine Schraubenfläche (Gewindflanke einer Schraube, eines Schraubensrads, eines Bohrers) von bekannter Form und bekannter Stellung gegen die Achse der Drehungsfläche längs einer Kurve berührt. Diese Linie konnte dadurch bestimmt werden, daß man diejenigen Normalen der Schraubenfläche aussuchte, welche die Drehachse treffen.

Auf einen analytischen Ansatz ist in jener Arbeit vollkommen verzichtet, doch ist ein solcher schon zur Kontrolle der Zeichnung wünschenswert und bei einem andern hier ebenfalls behandelten Problem dieses Gebiets, bei den Eingriffverhältnissen des Schneckengetriebes, erweist sich eine eingehende analytische Behandlung als unumgänglich notwendig, da keine noch so feine Zeichnung gewisse wichtige Eigenschaften der Flanken des Zahnrads erkennen läßt. Es sei hier zunächst eine Übersicht der in dieser Arbeit behandelten Probleme, die sämtlich mit der Herstellung von Zahnradern in Beziehung stehen, sowie der wichtigsten Resultate zusammengestellt.

Zunächst ist allgemein die Aufgabe gelöst, den Ort der Punkte auf einer Schraubenfläche zu finden, deren Normalen eine gegebene Gerade treffen, weil diese Aufgabe für alles andere eine grundlegende Bedeutung hat. Ganz von selbst stößt man auf den Begriff der konjugierten Geraden beim Nullsystem; doch sind von letzterem keine näheren Kenntnisse vorausgesetzt.

In 2. ist der Fall durchgeführt, wo die Schraubenfläche durch gerade Linien erzeugt wird, wie bei der Arbeitsflanke des Bohrers, ferner die umgekehrte Frage beantwortet, welche Schraubenfläche entsteht, wenn die Drehungsfläche bekannt ist; so liegt der Fall bei der gewöhnlichen Herstellung der Schraubenräder durch einen Rotationsfräser.

In 3. bis 6. kommt das Schneckengetriebe zur Behandlung. Dabei ist, wie bei A. Ernst, *Schneckengetriebe*, vorausgesetzt, daß die Radzahnflanken so beschaffen sind, daß sie die Schneckengewindflanken nicht nur in einem Punkt, sondern längs ganzer Kurvenbögen, der Linie

gleichzeitigen Eingriffs, berühren, Schnecken- und Radachse sind senkrecht gegen einander angenommen. Der Teilzylinder des Rades wird von einer zur Schneckenachse parallelen Ebene, welche als Teilrißebene der Schnecke bezeichnet werden kann, längs einer Mantelgeraden berührt, und durch diese Gerade müssen — so ergibt sich — die gemeinsamen Normalen in den Berührungspunkten der Flanken hindurchgehen. Die bei der Arbeit des Getriebes aufeinander folgenden Linien gleichzeitigen Eingriffs bilden die Eingriffsfläche. Sie ist bei der Evolventen- und Zykloidenschnecke algebraisch und von der 6. bzw. 14. Ordnung. Der einem Punkt der Schneckengewindflanke entsprechende Eingriffspunkt ist nach dem angegebenen Satz von der Normalen leicht durch Parallelverschiebung der letzteren zu finden. Sind von der Eingriffsfläche so die Schnittkurven mit einigen zur Schnecke koachsialen Zylinderflächen, die stets einfache Kurven 4. Ordnung sind, in einer zur Achse senkrechten Projektion konstruiert und sind die Schneckengewindflanken durch die auf den gleichen Zylinderflächen verlaufenden Schraubenlinien in derselben Projektion auf durchsichtiges Papier aufgezeichnet, dann kann man leicht durch Verschieben des Pauspapiers längs der Schneckenachse in jedem Moment die Linie gleichzeitigen Eingriffs als Schnittgebilde der beiden Kurvenscharen festlegen. Einen Moment soll Fig. 1 für die Evolventenschnecke darstellen. Die Untersuchung der Radzahnflanken gab Anlaß zur Behandlung von Fragen über den geometrischen Zusammenhang der Eingriffslinie und des Radprofils in der Verzahnungslehre für Stirnräder. Vor allem kann das mathematische Profil Rückkehrpunkte aufweisen, wenn nämlich die Normale der Eingriffslinie durch die Radachse (aber nicht zugleich durch den Berührungspunkt der Teilkreise) geht. Dieser Satz findet Anwendung bei der Untersuchung der Eingriffsverhältnisse der Zykloidenschnecke. Diese Verhältnisse konnten von Ernst nicht erklärt werden (S. 68—81), da er in erster Linie das Auftreten von Spitzen bei den Gegenprofilen nicht erkannte. (S. 79 ist ausdrücklich von einer solchen Stelle die Rede.) Die Lösung der Schwierigkeiten besteht in allen Fällen darin, daß die Gegenprofile sich selbst durchschneiden können, so daß Teile des mathematischen Profils, nämlich vor allem diejenigen, welche Spitzen enthalten, beim wirklichen Profil ganz fehlen. Das Ergebnis ist, daß die Eingriffverhältnisse bei der Zykloidenschnecke gar nicht so ungünstig sind, wie Ernst fand.

In den Abschnitten 7. bis 10. endlich ist ein Verfahren untersucht, nach welchem seit längerer Zeit Stirn- und Schraubenräder hergestellt werden. Man benützt einen Schneckenfräser von der Form der Evolventenschnecke. Man stellt ihn so gegen den Radkörper ein, daß

die auf den Teilzylindern verlaufenden Schraubenlinien sich berühren. (Beim Stirnrad tritt an Stelle der Schraubenlinie eine Gerade.) Zwischen den Neigungswinkeln, Teilzylinderradien und Zähnezahl (bei der Schnecke Zahl der Gänge) muß eine Beziehung bestehen: Vgl. etwa Reuleaux, Der Konstrukteur, Gl. 201. Außer der drehenden Bewegung, welche wie bei zwei Schraubenrädern erfolgt, gibt man dem Fräser noch eine langsame Vorschubbewegung in der Richtung der gemeinsamen Tangenten jener Schraubenlinien, also beim Stirnrad in der Radachsenrichtung. Projiziert man Schnecke und Rad in eben jener Richtung, dann haben ihre Bilder eine Umrißlinie gemeinsam, oder die Flanken werden von gemeinschaftlichen Zylinderflächen dieser Richtung berührt. Diese kann man als die Zahnflanken einer Zahnstange auffassen und zwar mit geraden oder schiefen Zähnen, je nachdem man die Längsrichtung wählt. Man wird sie senkrecht zur Schneckenachse (Radachse) wählen, wenn man deren Normalschnitt (bzw. den des Rades) finden will. Dies geschieht, indem man aus dem als bekannt vorausgesetzten Stangenprofil das dem betreffenden Teilkreis entsprechende Gegenprofil konstruiert. Die dabei zu verwendende Eingriffslinie ist einfach die Projektion derjenigen, welche der Zahnstange mit geraden Zähnen zugehört, in der Richtung der Schnecken-(Rad-)achse, und der projizierende Zylinder enthält die Linie gleichzeitigen Eingriffs zwischen Zahnstange und Schnecke (Rad). Die gemeinschaftlichen Flankennormalen längs dieser Linie müssen wieder durch eine Gerade gehen, welche diesmal parallel zur Schnecken-(Rad-)achse gerichtet ist. In dem Fall, wo das Profil der Stange mit geraden Zähnen durch Abrollen der Eingriffslinie auf einer Geraden entsteht, ist auch noch theoretisch sehr interessant, daß man eine Kurve der Schnecken-(Rad-)flanke erhält, wenn man die Eingriffslinie auf einer bestimmten Schraubenlinie des Teilzylinders in deren Schmiegungeebene rollen läßt.

Für die Theorie der Schraubflächen enthalten die Untersuchungen dieser geometrischen Verhältnisse vieles Neue; für die Technik ergibt sich, daß die seither verwendeten Fräser, deren Gewindflanken geschlossene Regelschraubflächen sind, d. h. solche, deren geradlinige Erzeugende die Achse treffen, unmöglich Stirnräder erzeugen können, deren Zahnprofile genau Kreisevolventen sind<sup>1)</sup>; vielmehr müßten die Fräsergewindflanken in ihrer Form sich der abwickelbaren Schraubfläche anschließen, da das Zahnstangenprofil offenbar aus geradlinigen Strecken sich zusammensetzt und daher der Normalschnitt der Schnecke

1) Was für Stirnräder mittels solcher Fräser erzeugt werden, hat Herr A. Schneider in seiner Dissertation: Erzeugung der Stirnräderevolventen nach dem Wälzverfahren, Heilbronn 1911, untersucht.



aus Kreisevolventen besteht. Eingehend untersucht ist die Form eines Fräasers, der Zykloidenräder erzeugen soll.

1. Alle in der Einleitung angegebenen Probleme führen auf besondere Fälle der Aufgabe, diejenigen Normalen einer Schraubenfläche zu finden, welche eine gegebene Gerade treffen.

Wir geben daher zunächst eine analytische Lösung des allgemeinen Problems. Durch die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= \varrho \cos(\vartheta + \varphi) = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi \\ y &= \varrho \sin(\vartheta + \varphi) = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \\ z &= \zeta + h \varphi \end{aligned}$$

ist eine Schraubenfläche dargestellt, wenn  $\varrho$  und  $\xi$  Funktionen von  $\vartheta$  sind und  $\xi = \varrho \cos \vartheta$ ,  $\eta = \varrho \sin \vartheta$  ist. Für  $\varphi = 0$  erhält man die Gleichungen der Erzeugenden in der Anfangslage. Die Ganghöhe  $2\pi h$  ist negativ für rechtsgängige Schrauben. In einem Punkt der Fläche mit den Parametern  $\vartheta$  und  $\varphi$  wird die Normale ausgedrückt durch die Gleichungen (die Ableitungen von  $\varrho$  und  $\xi$  nach  $\vartheta$  sind durch Striche angedeutet):

$$\frac{x - \varrho \cos(\vartheta + \varphi)}{h\varrho' \sin(\vartheta + \varphi) + h\varrho \cos(\vartheta + \varphi) - \varrho\xi' \cos(\vartheta + \varphi)} = -\frac{y - \varrho \sin(\vartheta + \varphi)}{h\varrho' \cos(\vartheta + \varphi) + \varrho(\xi' - h) \sin(\vartheta + \varphi)} = \frac{z - \zeta - h\varphi}{\varrho \varrho'}$$

Soll diese Normale die Gerade  $G$  mit den Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{aligned} y &= b \\ z &= mx \end{aligned}$$

schneiden, dann muß die Bedingung gelten:

$$(3) \quad m \{ b[\varrho(h - \xi') \cos(\vartheta + \varphi) + h\varrho' \sin(\vartheta + \varphi)] - h\varrho \varrho' \} \\ = (\xi + h\varphi)[\varrho(h - \xi') \sin(\vartheta + \varphi) - h\varrho' \cos(\vartheta + \varphi)] + \varrho \varrho' [b - \varrho \sin(\vartheta + \varphi)].$$

Setzt man in dieser Gleichung  $hm$  statt  $b$  und zugleich  $\frac{b}{h}$  statt  $m$ , dann ändert sich dieselbe nicht, d. h. alle Normalen, welche die Gerade  $G$  treffen, schneiden auch die Gerade  $G'$  mit den Gleichungen:

$$(4) \quad \begin{aligned} y &= hm \\ z &= \frac{b}{h} x. \end{aligned}$$

Von diesem Satz über die „konjugierten“ Geraden  $G$  und  $G'$  aus der Lehre vom Nullsystem machen wir unten wichtige Anwendungen. Ist der Achsenschnitt der Schraubenfläche gegeben, also durch die Gleichungen:

$$(1') \quad \begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi \\ z &= \zeta + h \varphi, \end{aligned}$$

dann findet man statt (3) (man hat  $\vartheta$  und  $d\vartheta$  gleich Null zu setzen:)

$$(3') \quad m\{b[-\rho \cos \varphi d\xi + h \sin \varphi d\rho] - h\rho d\rho\} \\ = (\xi + h\varphi)(-\rho \sin \varphi d\xi - h \cos \varphi d\rho) + \rho d\rho(b - \rho \sin \varphi).$$

2. Als erste Anwendung möge das in der Einleitung erwähnte Problem analytisch durchgeführt werden: *Eine Schraube, deren Gewinde durch eine Schraubenregelfläche begrenzt ist, soll durch einen Fräser hergestellt werden, dessen Drehachse der Lage nach bekannt ist; die Schneiden des Fräasers liegen dann auf einer Drehungsfläche, deren Meridiankurve zu bestimmen ist.*

Sei die Erzeugende der Schraubenfläche eine zur Schraubenachse windschiefe Gerade, wie dies beim amerikanischen Spiralbohrer (vgl. meine eingangs angegebene Arbeit S. 274f.) der Fall ist. Sie sei gegeben durch die Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{aligned} y + d &= 0 \\ z - nx - c &= 0. \end{aligned}$$

Nach (1) ist aber die Erzeugende bestimmt durch

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta, \quad z = \xi;$$

also hat man:

$$\begin{aligned} \rho \sin \vartheta + d &= 0 \\ \xi - n\rho \cos \vartheta - c &= 0. \end{aligned}$$

Drückt man  $\xi$  und  $\vartheta$  in Funktion von  $\rho$  aus, so wird:

$$\sin \vartheta = -\frac{d}{\rho}, \quad \cos \vartheta = \frac{\sqrt{\rho^2 - d^2}}{\rho}, \quad \xi = n\sqrt{\rho^2 - d^2} + c$$

und nach den Gleichungen (1) erhält man demnach, wenn noch für  $\sqrt{\rho^2 - d^2}$  der neue Parameter  $\delta$  eingeführt wird:

$$(1'') \quad \begin{aligned} x &= \delta \cos \varphi + d \sin \varphi \\ y &= \delta \sin \varphi - d \cos \varphi \\ z &= h\varphi + n\delta + c. \end{aligned}$$

Die Gleichungen der Normale sind

$$(6) \quad \frac{x - \delta \cos \varphi - d \sin \varphi}{(h - n\delta) \sin \varphi - n\delta \cos \varphi} = -\frac{y - \delta \sin \varphi + d \cos \varphi}{(h - n\delta) \cos \varphi + n\delta \sin \varphi} = \frac{z - c - h\varphi - n\delta}{\delta}.$$

Diese Gleichungen bedeuten für einen bestimmten Wert von  $\varphi$  ein hyperbolisches Paraboloid, und für die beiden Schnittpunkte mit der Geraden

$$(2) \quad \begin{aligned} y &= b \\ z &= mx \end{aligned}$$

erhält man die zugehörigen Werte von  $\delta$  aus der quadratischen Gleichung:

$$(7) \quad (n^2 + 1) \sin \varphi \delta^2 - [(h - n d)(m - n \cos \varphi) + m n(d + b \cos \varphi) + b + d \cos \varphi - n \sin \varphi(c + h \varphi)] \delta + (h - n d)[m b \sin \varphi + (c + h \varphi) \cos \varphi] = 0.$$

Um nun vollends die Drehungsfläche, welche die Fräserform bestimmt, zu finden, führen wir ein neues Koordinatensystem  $O'X'Y'Z'$  ein, dessen Anfangspunkt  $O'$  der Schnittpunkt der Drehachse ( $Z'$ -Achse) mit der  $Y$ -Achse ist, welche letztere mit der  $Y'$ -Achse zusammenfällt. Die Formeln für die Transformation sind:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon \\ z' &= -x \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon \\ y' &= y - b. \end{aligned}$$

Dabei ist  $-\operatorname{ctg} \varepsilon = m$ . Mit den Gleichungen (1'') erhält man:

$$(8) \quad \begin{aligned} \sqrt{1 + m^2} x' &= m(\delta \cos \varphi + d \sin \varphi) - (h \varphi + n \delta + c) \\ \sqrt{1 + m^2} z' &= (\delta \cos \varphi + d \sin \varphi) + m(h \varphi + n \delta + c) \\ y' &= \delta \sin \varphi - d \cos \varphi - b. \end{aligned}$$

Bestimmt man für irgendeinen Wert von  $\varphi$  nach (7) die zwei zugehörigen Werte von  $\delta$  und setzt diese in die Gleichungen (8) ein, dann erhält man zwei Punkte der Linie gleichzeitigen Eingriffs. Bei der zahlenmäßigen Berechnung sind nur solche Werte von  $\delta$  zu berücksichtigen, welche Punkten der Erzeugenden entsprechen, die auf der verwendeten Strecke liegen. Sind also in der Anfangslage ( $\varphi = 0$ ) die Endpunkte der Erzeugenden durch die  $x$ -Koordinaten  $x_0$  und  $x_1$  bestimmt, so muß  $\delta = \sqrt{\varrho^2 - d^2}$  zwischen  $x_0$  und  $x_1$  liegen.

Ist  $x'y'z'$  berechnet, dann sind  $\sqrt{x'^2 + y'^2}$  und  $z'$  die Koordinaten des entsprechenden Punktes der Meridiankurve der Drehungsfläche.

Praktisch dürfte die von mir angegebene geometrische Lösung des Problems vorzuziehen sein, doch können die Formeln (7) und (8) zur Kontrolle der Zeichnung gute Dienste leisten.

Anschließend behandeln wir noch die Aufgabe, die Schraubenfläche zu finden, wenn die Form des Fräasers bekannt ist. Diese Aufgabe findet z. B. Anwendung bei der gewöhnlichen Herstellung von Schraubenrädern. Geometrisch wird diese Aufgabe dadurch gelöst, daß man diejenigen Normalen der gegebenen Drehungsfläche aufsucht, welche die Gerade  $G'$  treffen, die zur Drehachse  $G$  konjugiert ist und zwar, indem man den jedem Parallelkreis zugehörigen Normalenkegel mit  $G'$  zum Schnitt bringt. Die gefundenen Normalen gehören derjenigen Kurve der Drehungsfläche an, längs deren sie die Schraubenfläche berührt,

d. h. der Charakteristik der Schraubenfläche, wenn wir dieselbe als Einhüllende der verschraubten Drehungsfläche auffassen.

Analytisch gehen wir denselben Weg. Ein Punkt der Drehungsfläche sei im  $x'y'z'$ -System bestimmt durch die Gleichungen:

$$x' = \rho' \cos u, \quad y' = \rho' \sin u, \quad z' = \xi',$$

wo  $\xi'$  eine Funktion von  $\rho'$  ist. Die Gleichungen der Normale sind dann:

$$x = \left( \rho' - t \frac{d\xi'}{d\rho'} \right) \cos u, \quad y = \left( \rho' - t \frac{d\xi'}{d\rho'} \right) \sin u, \quad z = \xi' + t.$$

Aus den Transformationsgleichungen:

$$x = x' \cos \varepsilon - z' \sin \varepsilon, \quad y = y' + b, \quad z = x' \sin \varepsilon + z' \cos \varepsilon$$

und den Gleichungen von  $G'$ , wenn  $m = -\operatorname{ctg} \varepsilon$ :

$$y = hm, \quad z = \frac{b}{h} x$$

ergeben sich dann die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \left( \rho' - t \frac{d\xi'}{d\rho'} \right) \sin u &= hm - b \\ (bm + h) \left( \rho' - t \frac{d\xi'}{d\rho'} \right) \cos u &= (hm - b)(\xi' + t), \end{aligned}$$

oder wenn man  $t$  eliminiert:

$$\left( \rho' + \xi' \frac{d\xi'}{d\rho'} \right) \sin u - (h + bm) \frac{d\xi'}{d\rho'} \cos u = hm - b.$$

Diese Gleichung bestimmt auf der gegebenen Drehungsfläche die Berührungskurve mit der Schraubenfläche und zwar direkt die  $x'y'z'$ -Projektion in Polarkoordinaten  $\rho'$  und  $u$ .

Beim Fräsen von Schraubenrädern richtet man es so ein, daß die auf dem Teilzylinder verlaufenden Schraubenlinien den Neigungswinkel  $\varepsilon$  haben. Der Halbmesser dieses Zylinders ist also  $-h \operatorname{ctg} \varepsilon$  oder  $hm$ . Der Schnittpunkt des Zylinders mit der Drehungsfläche hat im  $x'y'z'$ -System die Koordinaten  $0, hm - b, 0$  oder für dieses ist, wenn die Drehungsfläche durch ihn hindurchgeht,  $u = 90^\circ$ ,  $\rho' = hm - b$ ,  $\xi' = 0$ . Da nun die Bedingungsgleichung für die Berührungskurve durch diese Werte erfüllt wird, so gehört der betreffende Punkt der Berührungskurve an. Da bei Schraubenrädern nur die Punkte des Teilzylinders zum Eingriff gelangen, so kommt es auf den letzteren Punkt hauptsächlich an, sowie auf die Lage der Berührungsebene in demselben.

### Das Schneckengetriebe.

3. Als zweite Anwendung soll die *Linie gleichzeitigen Eingriffs beim Schneckengetriebe* bestimmt werden, sowie *das Eingriffsfeld*, das

heißt, die Fläche, welche sich aus den aufeinander folgenden Kurven gleichzeitigen Eingriffs zusammensetzt.

Die Schnecke ist eine Schraube, deren Mittel- oder Achsenschnitt trapezförmig (Evolventenschnecke) oder aus Zykloidenbögen zusammengesetzt ist (Zykloidenschnecke). Das Schneckenrad ist ein Zahnrad, dessen Zähne eine der Gestalt des Schneckenengewindes entsprechende sehr komplizierte Form haben. Diese Form ist durch die Bedingung bestimmt, daß sich die Flanken von Schnecke und Rad, während diese sich um ihre senkrecht gegen einander eingestellten Achsen drehen, stets längs einer Kurve, der Linie gleichzeitigen Eingriffs, berühren müssen.

Technisch werden diese Schneckenräder hergestellt durch Fräser, welche in der Form der Schnecke entsprechen.

Sollen die Eingriffsverhältnisse des Schnecken- oder Wurmgetriebes studiert werden, dann ersetzt man kinematisch die Rotationsbewegung der Schnecke um ihre Achse durch eine Translationsbewegung; die Schnecke bewegt sich dann am Schneckenrad hin, wie eine Zahnstange am Zahnrad, und man kann die Begriffe und Sätze der gewöhnlichen Verzahnungstheorie auf unseren Fall übertragen. Man kann ebene Schnitte senkrecht zur Radachse legen, wie dies A. Ernst in seinem Werke: „Eingriffsverhältnisse der Schneckengetriebe“ getan hat, und den Schnitt mit dem Schneckenrad als Zahnradprofil, denjenigen mit der Schnecke als Zahnstangenprofil auffassen. Beide Schnitte müssen sich stets in mindestens einem Punkt berühren, der freilich nicht immer praktisch zum Eingriff kommt, und die gemeinsame Normale im Berührungspunkt geht nach einem bekannten Satz durch den Berührungspunkt des Radteilkreises mit dem Stangenteilriß. Wir nennen diesen Punkt das Momentanzentrum entsprechend der Auffassung, daß die Bewegung des Rades relativ zur Zahnstange, die man sich dann ruhend vorstellen muß, durch Abrollen des Teilkreises auf dem Schneckenteilriß bestimmt ist.

Die Momentanzentren aller zur Radachse senkrechten Schnitte setzen sich zusammen zu einer Momentanachse, der Berührungslinie der Teilrißflächen des Zahngetriebes, nämlich eines Zylinders und einer Ebene.

Indem wir nun wieder von den durch A. Ernst eingeführten Hilfsebenen abgehen, leiten wir aus dem angegebenen Satz, daß die Normale im Berührungspunkt der Profile von Zahnrad und Zahnstange durch das Momentanzentrum gehen muß, den folgenden für das Schneckengetriebe ab:

Die Flanken des Schneckenengewindes und des Radzahnes müssen sich längs einer Kurve berühren, und die gemeinsamen Normalen längs

dieser Kurve müssen durch die Momentanachse gehen, welche zur Radachse parallel und in einer durch die letztere senkrecht zur Schneckenachse gelegten Ebene verläuft.

In der Tat wird dann und nur dann, wenn dieser Satz gilt, ein zur Radachse senkrechter Schnitt, der die Kurve gleichzeitigen Eingriffs in einem Punkt  $P$  mit der zugehörigen Normale  $PN$  ( $N$  auf der Momentanachse) und die Momentanachse in  $N'$  schneiden möge, aus der gemeinschaftlichen Berührungsebene eine den Schnittprofilen gemeinsame Tangente  $t$  ausschneiden, welche senkrecht zu  $PN'$  steht. (Denn da  $t$  senkrecht zu  $PN$  sowie zu  $NN'$  gerichtet ist, steht es auch senkrecht zu  $PN'$ .)

Unser analytischer Ansatz läßt sich also auf diesen Fall übertragen.

Die Arbeitsflanke des Schneckenengewindes sei gegeben durch Achsenschnitt und Ganghöhe, also durch die Gleichungen (1'). Die Momentanachse  $G$  habe die Gleichungen:  $y = b$ ,  $z = 0$ , dann ergibt sich der Zusammenhang zwischen  $\varrho$  und  $\varphi$  für die Linie gleichzeitigen Eingriffs nach (3'), da  $m = 0$  ist,

$$(9) \quad \xi + h\varphi = \frac{\varrho(b - \varrho \sin \varphi)}{\varrho \frac{d\xi}{d\varrho} \sin \varphi + h \cos \varphi};$$

$\xi$  ist dabei eine Funktion von  $\varrho$ , durch welche der Achsenschnitt der Schneckenwindflanke bestimmt ist.

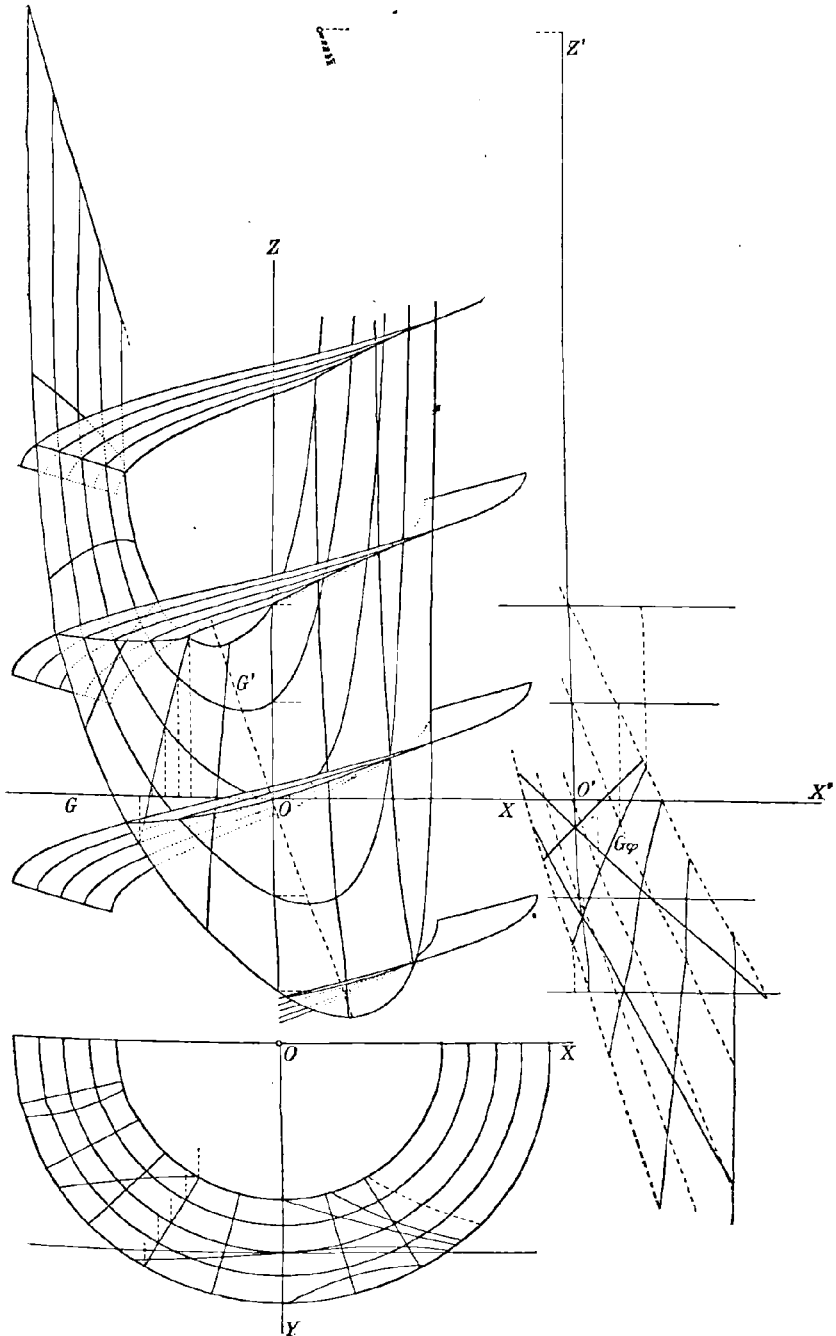
Verschiebt man nun die Schnecke längs ihrer Achse, dann ändert sich  $\xi$  (aber nicht  $\frac{d\xi}{d\varrho}$ ) und mit  $\xi$  die Linie gleichzeitigen Eingriffs, und man erhält den Ort aller dieser Raumkurven, die Eingriffsfläche, durch Elimination von  $\xi$  aus (1') und (9), also:

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi \\ z &= \frac{\varrho(b - \varrho \sin \varphi)}{\varrho \frac{d\xi}{d\varrho} \sin \varphi + h \cos \varphi} \end{aligned}$$

Zu einem Punkt  $P$  der Schneckenwindflanke, dessen  $xy$ -Projektion durch die Polarkoordinaten  $\varrho$  und  $\varphi$  gegeben ist, erhält man den zugehörigen Punkt  $Q$  der Eingriffsfläche, dessen Koordinaten in (10) angegeben sind, nach dem Früheren dadurch, daß man die Normale der Schraubenfläche in  $P$  parallel zur Schraubenfläche verschiebt, bis sie die Momentanachse  $G$  schneidet.  $P$  kommt dadurch nach  $Q$ . (Fig. 1.)

Zu irgendeiner Gleichung zwischen  $\varrho$  und  $\varphi$ :  $f(\varrho, \varphi) = 0$  gehört eine bestimmte Kurve auf der Schneckenflanke (1') wie auf der Eingriffsfläche (10); die  $xy$ -Projektionen beider Kurven sind identisch. Die

Fig. 1.



Gleichung dieser Projektion ist eben  $f(\varrho, \varphi) = 0$ . Wir betrachten verschiedene besondere Fälle und zwar zuerst  $\varrho = \text{const.}$ ; d. h. wir untersuchen die Kurven auf der Eingriffsfläche, welche den Schraubenlinien der Gewindeflanken entsprechen, kurz die Eingriffslinien dieser Schraubenlinien. Sie liegen auf einem Kreiszyylinder vom Radius  $\varrho$ , dessen Gleichung ist:  $x^2 + y^2 - \varrho^2 = 0$ , und, da  $\frac{d\xi}{d\varrho}$  für einen konstanten Wert von  $\varrho$  ebenfalls konstant wird, nach (10) auf einer Fläche zweiter Ordnung, einem hyperbolischen Paraboloid, mit der Gleichung:

$$(11) \quad \left( hx + \varrho \frac{d\xi}{d\varrho} y \right) z = \varrho^2 (b - y).$$

Die Eingriffslinie  $\varrho = \text{const.}$  ist also eine Raumkurve 4. Ordnung, und zu ihrer Bestimmung braucht man von der Erzeugenden der Schneckenflanke nur die Tangente für den betreffenden Wert von  $\varrho$  zu kennen.

Eine solche Kurve 4. Ordnung ist insbesondere diejenige, welche auf dem das Schraubengewinde nach außen begrenzenden Zylinder  $\varrho = a$  gelegen ist. Sie bildet in erster Linie die Begrenzung des Eingriffsfelds.

Von den Eigenschaften der Kurve 4. Ordnung seien noch die folgenden bemerkt:

Die Kurve hat die beiden in der Ebene  $hx + cy = 0$  liegenden Zylindererzeugenden zu Asymptoten; dabei bedeutet

$$c = \varrho \frac{d\xi}{d\varrho}$$

die Subtangente der Zahnflankenerzeugenden bezüglich der  $z$ -Achse.

Setzt man  $\frac{dz}{d\varphi} = 0$ , so findet man für die Maximal- und Minimalwerte von  $z$

$$b\varrho \frac{d\xi}{d\varrho} \cos \varphi + h(\varrho - b \sin \varphi) = 0$$

und dann nach (10):

$$bx + hz = 0.$$

Die Maximal- und Minimalpunkte der Kurven  $\varrho = \text{const.}$  liegen daher in der durch  $G'$  senkrecht zur  $xz$ -Achse gelegten Ebene (vgl. Fig. 1). Auch findet man leicht, daß die Gerade

$$hx + cy = 0, \quad (c^2 + h^2)z + c\varrho^2 = 0$$

Symmetrielinie der Kurve ist.

Komplizierter, aber für eine algebraische Eingriffsfläche auch algebraisch sind die Kurven, welche außer der soeben untersuchten Kurve 4. Ordnung das Eingriffsfeld der Schnecke abgrenzen und die von der Form des Schneckenrades abhängen. Die Schneckenradzähne sind, ab-



gesehen von den Flanken, begrenzt durch Drehungsflächen mit der Radachse als Achse. Die Meridianfigur besteht aus einem Kreisbogen, dessen Radius  $a'$  etwas größer ist als der des Schneckenkernzylinders und in der Regel noch aus zwei geradlinigen Strecken, die senkrecht zu diesem Kreisbogen gerichtet sind. Ist  $l$  der Abstand von Schnecken- und Radachse, dann kann man die Gleichungen dieser Drehungsflächen angeben:

$$(12) \quad \begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2 - 2ly + 2l^2 - a'^2)^2 &= 4l^2[(y - l)^2 + z^2] \\ y^2 + z^2 - m^2x^2 - 2l(y \mp mx) &= 0, \end{aligned}$$

wo  $\pm m$  die Tangente des Neigungswinkels der beiden geradlinigen Strecken gegen die  $x$ -Achse bildet. (Bei Ernst, Schneckengetriebe, Bl. II, Fig. 10—12, sind die Punkte der Schnittkurven dieser Flächen mit der Eingriffsfläche (10) durch  $H$  und  $L$  bezeichnet.) Die erstere der Flächen (12) kann man aber, wenn  $l$  groß genug ist, angenähert ersetzen durch die Zylinderfläche  $x^2 + y^2 = a'^2$ , die zweite durch die Ebene  $y \mp mx = 0$  (vgl. Ernst, Fig. 12,  $H_1 H_2 \dots H_6$ ; bei  $L_{III}$  wird durch diese Annäherung das Eingriffsfeld etwas vergrößert, was nicht wesentlich ins Gewicht fällt, da  $L_{III}$  ganz am Ende der Schnecke liegt). Die gesamte Feldgrenze setzt sich dann zusammen aus zwei Raumkurven 4. Ordnung und kleinen Bögen ebener Kurven. Von dem so umgrenzten Eingriffsfeld können allerdings, wie sich bei der Behandlung der Zykloidenschnecke zeigen wird, noch im Innern Teile ausscheiden.

Wir betrachten ferner die Eingriffslinien der in den Achsenschnittebenen der Schnecke liegenden Erzeugenden, d. h. wir nehmen  $\varphi$  konstant an. Die letzte Gleichung von (10) gibt unmittelbar ihre Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten  $\varphi$  und  $z$ . Zu ihrer Konstruktion kann man wie folgt verfahren. Man suche zuerst die in der  $yz$ -Ebene liegende Eingriffslinie  $E_0(\varphi = \frac{\pi}{2})$ . Sie ist bekanntlich bei der Evolventenschnecke eine Gerade, bei der Zykloidenschnecke ein Kreis. Die parallel verschobenen Schraubenflächennormalen gehen dann durch diese Eingriffslinie, sowie durch  $G$  und  $G'$  und sind demnach immer leicht konstruierbar. Diese Normalen kann man nun um die  $z$ -Achse drehen und dann von neuem parallel verschieben, bis sie  $G$  wiederum treffen, dann erhält man die Eingriffslinie für einen beliebigen Wert von  $\varphi$ ; oder man hält jene durch  $E_0$  gehenden Normalen fest und dreht dafür  $G$  um die  $z$ -Achse im entgegengesetzten Sinne. Nimmt man eben diese entgegengesetzte Drehung (um den Winkel  $-(\varphi - \frac{\pi}{2})$ ) mit der Ebene  $y = b$  vor, dann gilt: Das Stück der Normale zwischen dieser Ebene und der Eingriffslinie  $E_0$  projiziert sich auf die  $z$ -Achse als die in der letzten der Gleichungen (10) angegebene  $z$ -Koordinate.

4. Um die Form der *Flanke des Radzahnes* zu erhalten, hat man mit jedem Punkt  $Q$  der Eingriffsfläche eine Drehung um die Radachse vorzunehmen. Der Drehungswinkel  $\psi$  ist so zu bemessen, daß der entsprechende Bogen des Teilkreises  $(l - b)\psi$  gleich wird mit der Strecke  $PQ$ . Dabei bedeutet  $l$  wieder den Abstand der Schnecken- und der Radachse, also  $l - b$  den Radius des Radteilkreises.

Zur Bestimmung von  $\psi$  hat man also nach (1') und (10):

$$(13) \quad (l - b)\psi = \frac{\rho(b - \rho \sin \varphi)}{\rho \frac{d\xi}{d\varphi} \sin \varphi + h \cos \varphi} - (\xi + h\varphi).$$

Durch Drehung von  $Q$  um den Winkel  $\psi$  kommt  $Q$  in die Lage  $P_1$  auf der Radzahnflanke. Die Koordinaten dieses Punktes sind:

$$(14) \quad \begin{aligned} x_1 &= x \\ y_1 &= -z \sin \psi + (y - l) \cos \psi + l \\ z_1 &= z \cos \psi + (y - l) \sin \psi, \end{aligned}$$

wo für  $xyz$  ihre Werte aus (10) zu entnehmen sind. Wie Ernst untersuchen wir die Radzahnflanke in ihrer Beziehung zur Eingriffsfläche durch Normalschnitte zur Radachse:  $x_1 = \rho \cos \varphi = \lambda$ . Für diese Schnitte ist also:

$$(15) \quad \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi = 0.$$

Ersetzt man in  $dy = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi$  und in der letzten Gleichung von (10)  $d\rho$  durch den aus (15) sich ergebenden Wert  $\rho \operatorname{tg} \varphi d\varphi$ , dann wird:

$$dy = \frac{\rho d\varphi}{\cos \varphi}, \quad d\xi + h d\varphi = \frac{b - y}{z} \frac{\rho d\varphi}{\cos \varphi}$$

oder 
$$d\xi + h d\varphi = \frac{b - y}{z} dy,$$

wo  $xyz$  wieder die Koordinaten von  $Q$  sind. Daher ist nach (13):

$$d\psi = \frac{-(b - y)dy - z dz}{(l - b)z}.$$

Damit werden aber nach (14) die vollständigen Differentiale von  $y_1$  und  $z_1$ :

$$(16) \quad \begin{aligned} dy_1 &= \frac{(l - y)dy - z dz}{(l - b)z} [z \cos \psi - (b - y) \sin \psi] \\ dz_1 &= \frac{(l - y)dy - z dz}{(l - b)z} [z \sin \psi + (b - y) \cos \psi]. \end{aligned}$$

Wir knüpfen hieran einige Bemerkungen, die nicht bloß für unseren Fall, sondern für beliebige Zahnprofile gelten.

Nach den Gleichungen (16) verschwinden  $dy_1$  und  $dz_1$ , wenn

$$(y - l)dy + z dz = 0$$

ist, allerdings nur, falls nicht zugleich  $z = 0$  ist. Dies ist der Fall für diejenigen Punkte der Eingriffslinie  $x = \lambda$ , deren Abstand von der Radachse ein Maximum oder Minimum ist und die nicht in der  $xy$ -Ebene liegen. Die Schnittkurve  $x_1 = \lambda$  der Radzahnflanke hat dann an der entsprechenden Stelle i. a. eine Spitze; oder man hat:

Dem Ort der Punkte auf der Eingriffsfläche, deren Flächennormalen durch die Radachse gehen, entspricht auf der Flanke des Radzahnes eine Rückkehrkante.

Und für die allgemeine Lehre von der Stirnräderverzahnung gilt der

Satz I: *Den Punkten der Eingriffslinie, deren Normalen durch die Radachse, aber nicht zugleich durch den Teilkreisberührungspunkt gehen, entspricht beim Radzahnprofil ein Rückkehrpunkt.*

Praktisch verwendbar sind solche Radzahnprofile höchstens bis zur Spitze hin. Vgl. Fig. 2.

Die Schneckenflanke (1') wird von der Ebene  $x = \lambda$  nach einer Kurve geschnitten, deren Normale mit der  $z$ -Achse den Winkel  $-\beta$  bilden möge (Tangente und  $y$ -Achse schließen dann den Winkel  $+\beta$  ein). Man hat dann, wenn  $y$  und  $z$  die Koordinaten des Eingriffpunktes sind:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b - y}{z}.$$

Die Tangentenneigung des Radzahnprofils ist um den Winkel  $\psi$  größer, also muß:

$$\frac{dz_1}{dy_1} = \operatorname{tg}(\beta + \psi)$$

sein. Dies stimmt zusammen mit den Formeln (16). Aus diesen erhält man dann aber weiter für das Bogenelement der betrachteten Schnittkurve der Radzahnflanke:

$$ds_1 = \frac{(l - y) dy - z dz}{(l - b) \cos \beta}.$$

Ferner ist das Bogenelement, welches diesem auf der Schnecke entspricht:

$$ds = \frac{dy}{\cos \beta}.$$

Setzt man den Abstand des Eingriffspunktes  $Q$  von der Radachse gleich  $p$ , von der Momentanachse gleich  $q$ , dann erhält man die Formeln:

$$(17) \quad \frac{ds_1}{ds} = \frac{-p dp}{(l - b) dy}$$

$$\frac{ds}{ds_1} - 1 = \frac{q dq}{p dp},$$

welche über das Gleiten und Rollen der sich berührenden Flächen Aufschluß geben können. Insbesondere bemerken wir den für die allgemeine Verzahnungstheorie wichtigen

Satz II: *An den Stellen der Eingrifflinie, deren Normale durch den Berührungspunkt der Teilkreise geht, findet ein reines Rollen der Zahnflanken aufeinander statt.*

Denn dort ist  $q$  ein Maximum oder Minimum und daher  $\frac{ds_1}{ds} = 1$ . In der Tat rücken dort i. a. zwei Berührungspunkte der Zahnprofile zusammen. Sie berühren sich also vierpunktig. (Vgl. Fig. 2 bei  $D_2$ .) Von dieser Stelle ab werden aber die beiden Berührungspunkte der Profile imaginär. Eine Ausnahme bildet der Fall, wo  $q = 0$  ist, der Eingriffspunkt also mit dem Berührungspunkt der Teilkreise zusammenfällt. Hier rollen zwar die Zahnprofile auch momentan aufeinander, berühren sich aber nur zweipunktig, und ihre Tangente fällt nicht mit der der Eingrifflinie zusammen.

5. Zur weiteren Diskussion der Eingriffsfläche des Schneckengetriebes ist es nötig, die Erzeugenden der Schneckenflanke einzuführen, welche durch eine Beziehung zwischen  $\xi$  und  $\rho$  bestimmt sind. In Betracht kommt hier die Gerade und die Zykloide entsprechend der Evolventen- und der Zykloidenverzahnung. Im ersten Fall, dem der „Evolventenschnecke“ ist:

$$\xi = n\rho + \text{const.}$$

und die Eingriffsfläche wird dargestellt durch die Gleichungen

$$(10') \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = \frac{\rho(b - \rho \sin \varphi)}{n\rho \sin \varphi + h \cos \varphi},$$

oder wenn  $\rho$  und  $\varphi$  eliminiert wird, durch

$$(18) \quad [(x^2 + y^2)(y - b) + h x z]^2 = n^2(x^2 + y^2)y^2 z^2.$$

Diese Fläche 6. Ordnung hat außer der  $z$ -Achse die Geraden  $G$  und  $G'$  als Doppelgerade und im Koordinatenanfang einen Knotenpunkt.

Die Linien  $\varphi = \text{const.}$ , d. h. die Eingrifflinien der Erzeugenden haben nach der 3. Gleichung von (10') in einem in der Ebene  $\varphi = \text{const.}$  liegenden  $\rho, z$ -Koordinatensystem die Gleichung:

$$(\rho + nz)\rho \sin \varphi - b\rho + h z \cos \varphi = 0.$$

Diese Eingrifflinien sind also Hyperbeln, deren eine Asymptote parallel zur  $z$ -Achse liegt, während die andere senkrecht auf der Erzeugenden der Schraubenfläche steht. Die Hyperbeln gehen durch  $O$  und die Gerade  $G$ . Um eine solche Hyperbel zu konstruieren, muß man nach unserer allgemeinen Konstruktion die Normalen der betreffenden Schraubenerzeugenden, welche ein hyperbolisches Paraboloid bilden, parallel zur  $z$ -Achse verschieben, bis sie  $G$  schneiden.

Wir gehen aus von der in der Ebene  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  liegenden Eingriffslinie  $E_0$ . Sie ist eine auf der Erzeugenden senkrecht stehende Gerade und schneidet auf der  $y$ -Achse das Stück  $b$ , auf der  $z$ -Achse  $\frac{b}{n}$  ab. Eine durch  $E_0$  und  $G$  gelegte Ebene trifft  $G'$  ( $y = 0, bx = hz$ ) im Punkt  $(\frac{h}{n}, 0, \frac{b}{n})$ . Das Strahlbüschel von diesem Punkte nach den einzelnen Punkten von  $E_0$  hat man nach der oben angegebenen Konstruktion zum Schnitt zu bringen mit der Ebene  $-x \cos \varphi + y \sin \varphi = b$ , welche aus  $y = 0$  durch Drehung um den Winkel  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  hervorgeht. Das Stück der Strahlen zwischen dieser Ebene und  $E_0$  ist auf die  $z$ -Achse zu projizieren, dann entsteht die  $z$ -Koordinate des Punktes von (10), welche dem betreffenden Wert von  $\varphi$  entspricht. Die Schnittgerade  $G_\varphi$  von Strahlbüschel und Ebene ist offenbar eine Tangente des Zylinders  $\varrho = b$ .

In Fig. 1 ist dieselbe doppelgängige rechtsgewundene Schraube gewählt wie in Ernst, Schneckengetriebe: Blatt II, Fig. 10, 11, 12. Die Werte der Konstanten sind  $a = 35$  mm,  $b = 28$  mm;  $h = -b \operatorname{tg} 18^\circ = -9,1$  mm,  $n = \operatorname{tg} 15^\circ = 0,2679$ . Während dort die Kurven 6. Ordnung  $x = \text{const.}$  der Eingriffsfläche zunächst auf Bl. I getrennt, dann auf Bl. II vereinigt dargestellt sind, zeigt unsere Figur die Kurven  $\varrho = \text{const.}$  und  $\varphi = \text{const.}$  Die Konstruktion der  $z$ -Koordinaten ist der Übersichtlichkeit halber seitwärts gerückt (Koordinatensystem  $O'X'Y'$ ). Die Geraden  $G_\varphi$ , welche mit dem genannten Strahlbüschel zu schneiden sind, sind Tangenten an eine Ellipse mit den Halbachsen  $\frac{b}{n}$  und  $b$ . Da es aber nur auf die  $z$ -Koordinaten ankommt, könnte man statt der Ellipse auch einen Kreis vom Radius  $\frac{b}{n}$  verwenden; nur müßte dann auch als  $y$ -Koordinate des Strahlbüschelzentrums  $\frac{h}{n^2}$  statt  $\frac{h}{n}$  gewählt werden. Für  $\varphi = 120^\circ$  sind die  $z$ -Koordinaten sowohl im  $O'X'Y'$ - wie im  $OXY$ -System angedeutet. Die Fig. 1 soll zeigen, wie man rasch Punkte der Eingriffsfläche bestimmen und insbesondere mittels der Kurven  $\varrho = \text{const.}$  die Linie gleichzeitigen Eingriffs als Schnittkurve der Schneckenflanke mit der Eingriffsfläche finden kann. Von der Schnecke ist nur der vordere Teil der nach unten gekehrten Gewindflanke dargestellt. In der  $xy$ -Projektion ist die Linie gleichzeitigen Eingriffs eingezeichnet. Da  $\xi = n\varrho + \gamma$ , so ist ihre Polargleichung nach (9):

$$(n\varrho + \gamma + h\varphi)(n\varrho \sin \varphi + h \cos \varphi) = \varrho(b - \varrho \sin \varphi).$$

Für die Konstante  $\gamma$  ist hier  $-nb \pm \frac{1}{2}\pi h$  gewählt, also zwei verschiedene Werte, weil die Schraube eine doppelgängige ist. Endlich enthält die  $xy$ -Projektion ein gestrichelt eingezeichnetes Kurvenstück; dasselbe gehört zu einer einfachen Kurve 4. Ordnung:  $n\rho \sin \varphi + h \cos \varphi = 0$  (in Loria, Ebene Kurven, heißt sie  $\alpha$ -Kurve); die  $z$ -Koordinate der entsprechenden Eingriffsflächenpunkte wird unendlich groß.

Schließlich seien noch kurz diejenigen auf der Eingriffsfläche verlaufenden Kurven erwähnt, deren zugehörige Schraubenflächennormalen nach der Verschiebung sich in einem Punkt schneiden.

Da alle diese Normalen  $G$  und  $G'$  schneiden, so kann es sich nur um Punkte auf einer dieser beiden Geraden handeln. Sollen die Normalen z. B. durch einen Punkt von  $G$  gehen, dann liegt die gesuchte Kurve nach der Lehre vom Nullsystem in einer Ebene durch  $G'$  und ist daher eine Kurve 4. Ordnung, da ja  $G'$  eine Doppelgerade der Eingriffsfläche ist. Die Gleichung dieser Ebene sei  $bx - hz - \lambda y = 0$ , dann wird nach (10') die Gleichung der  $xy$ -Projektion der Schnittkurve mit der Eingriffsfläche in Polarkoordinaten:

$$\rho = \frac{h}{n} \frac{b \sin \varphi + \lambda \cos \varphi}{\frac{h}{n} + b \cos \varphi - \lambda \sin \varphi}.$$

Andererseits entspricht der durch die Momentanachse  $G$  gehenden Ebene  $\mu(y - b) + hz = 0$  die  $xy$ -Projektion:

$$\rho = \frac{h}{n} \frac{\mu \cos \varphi}{\frac{h}{n} - \mu \sin \varphi}.$$

In beiden Fällen hat man Kurven 4. Ordnung mit Selbstberührungs- und Doppelpunkt, die identisch sind mit den bekannten Projektionen der Schattenlinien (Eigenschattengrenzen) der geschlossenen Regelschraubenfläche. Vgl. etwa Rohn-Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie 622—626 (2. Aufl. 472—480). In der Tat treffen die Normalen einer solchen Schattenlinie eine unendlich ferne Gerade und daher auch die zu ihr konjugierte Gerade, welche zur  $z$ -Achse parallel ist und in unserem Fall durch  $G$  oder  $G'$  gehen muß. Die parallel verschobenen Normalen treffen sich daher im Schnittpunkt dieser Geraden mit  $G$  bzw.  $G'$ .

6. Als zweiten Fall untersuchen wir die Eingriffsverhältnisse bei einem Schneckengetriebe, dessen Schneckengewindflanken durch Schraubenflächen gebildet werden, welche als Achsenschnitt eine *Zykloide* haben. Die Gleichungen der letzteren seien:

$$(19) \quad \rho = b \pm r(1 - \cos t), \quad \xi = \pm r(t - \sin t),$$

wo das  $\pm$ -Zeichen dem Fuß bzw. Kopf des Radzahnes entspricht, für  $r$  übrigens verschiedene Werte gewählt werden können (für den Fuß des Radzahnes ein kleinerer als für den Kopf). Setzt man zur Abkürzung  $b \pm 2r = c$ , dann werden die Gleichungen der Eingriffsfläche nach (10)

$$(10'') \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = \frac{\rho(b - \rho \sin \varphi)}{\rho \sqrt{\frac{\rho - b}{c - \rho} \sin \varphi + h \cos \varphi}}$$

oder, wenn  $\rho$  und  $\varphi$  eliminiert wird:

$$(20) \quad (x^2 + y^2) \{ (x^2 + y^2)y^2z^2 + [(x^2 + y^2)(b - y) - hxz]^2 \}^2 \\ = \{ b(x^2 + y^2)y^2z^2 + c[(x^2 + y^2)(b - y) - hxz]^2 \}^2.$$

Diese Fläche 14. Ordnung hat wieder  $G$  und  $G'$  sowie die  $z$ -Achse zu Doppelgeraden und in  $O$  einen Knotenpunkt. Der reelle Teil der Fläche muß aber offenbar wie die entsprechende Schraubenfläche zwischen den Zylinderflächen  $\rho = b$  und  $\rho = c$  eingeschlossen sein. Wir untersuchen auch hier die Eingriffslinien der erzeugenden Zykloiden. Die letzte der Gleichungen (10'') kann man schreiben:

$$(\rho - b)\rho^2z^2 \sin^2 \varphi = (c - \rho)(\rho^2 \sin \varphi - b\rho + hz \cos \varphi)^2.$$

Nimmt man also  $\varphi$  konstant und  $\rho$  und  $z$  als Koordinaten in der Ebene  $\varphi = \text{const.}$ , so bedeutet die Gleichung eine Kurve 5. Ordnung. Für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  muß nach der Lehre von der Zykloidenverzahnung ein Kreis entstehen. Von ihm ausgehend kann man dann die Eingriffslinien für andere Werte von  $\varphi$  bestimmen. Diese Kurven haben auf  $G$  einen Doppelpunkt und berühren den Zylinder  $\rho = c$  in einem Punkt der  $xy$ -Ebene, die Zylinderfläche  $\rho = b$  in einem Punkt, für welchen  $z = \frac{b^2}{h} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$  ist. Die Kurve hat eine reelle, zur Schneckenachse parallele Asymptote. Von den beiden durch die Momentanachse  $G$  gehenden Flächenmänteln der Eingriffsfläche kommt, wie leicht zu erkennen, für jede Zahnflanke nur einer in Betracht. Die beiden Eingriffsflächen, welche dem Kopf und Fuß des Radzahns entsprechen, berühren sich auf der Zylinderfläche  $\rho = b$ . Die gemeinschaftliche Berührungslinie ist nach der oben angegebenen  $z$ -Koordinate ein kubischer Kreis.

Beschreibt man nun Kreise um die Achse des Zahnrads in zu ihr senkrechten Ebenen, so ist es möglich, daß ein solcher die Eingriffsfläche, welche dem Fuß des Radzahnes, sowie die, welche dem Kopf entspricht, innerhalb der früher angegebenen Feldgrenzen schneidet, letztere sogar zweimal. Fig. 2 gibt ein typisches Beispiel; die drei Schnittpunkte des eingezeichneten Kreises sind  $D_1ED_2$ . Hieraus er-

geben sich nun (vgl. Ernst, S. 73) eigenartige Schwierigkeiten, welche durch die von Ernst gegebenen Erklärungen keineswegs erledigt sind. Vor allem ist dort nicht erkannt, daß die in einer Schnittebene  $x = \text{const.}$  liegenden Gegenprofile des Radzahnkopfes und des Radzahnfußes sich schneiden, so daß die Flanken von Kopf und Fuß des Radzahnes durch eine allerdings kaum bemerkbare Kante getrennt sind.

Zur Klarstellung dieser Verhältnisse möge ein ganz einfaches Beispiel aus der Theorie der Zykloidenverzahnung, welches für unseren Fall typisch ist, dienen. Wir suchen das Gegenprofil einer Zahnstange mit Zykloidenverzahnung, für welche die geradlinige Zykloidenbasis (der Ort der Spitzen) nicht, wie dies sonst angenommen wird, mit dem Teilriß der Zahnstange zusammenfällt.

Der Anfangspunkt eines  $yz$ -Koordinatensystems sei für dieses Beispiel der Berührungspunkt des Zahnstangenteilrisses mit dem Teilkreis, dessen Radius  $R$  sei. Die Gleichungen des Zahnstangenprofils seien

$$y = -b + r(1 - \cos t), \quad z = -c + r(t - \sin t).$$

Dieselben gelten für den Kopf der Stangenzähne, für den Fuß hat man nur  $r$  mit  $-r$  zu vertauschen.  $b$  und  $c$  sind positive Konstanten. Für den Punkt  $Q$  der Eingrifflinie gilt dann, da  $\beta$  hier gleich  $\frac{1}{2}t$  wird:

$$y = -b + r(1 - \cos t), \quad z = -y \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Die Eingrifflinie ist somit eine zirkuläre Kurve 3. Ordnung mit einem Doppelpunkt (wenn  $r$  negativ ist, isolierten Punkt) in  $O$ . Aus der Eingrifflinie entsteht das Gegenprofil des Radzahnes, wenn man  $Q$  um die Radachse dreht. Für den Drehungswinkel  $\psi$  gilt:

$$R\psi = -c + rt - b \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Die Gleichungen des Gegenprofils sind dann:

$$y_1 = -y \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin \psi + (y - R) \cos \psi + R$$

$$z_1 = y \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cos \psi + (y - R) \sin \psi,$$

wo für  $y$  und  $\psi$  ihre Werte einzusetzen sind. Für den Krümmungsradius der Kurve erhält man:

$$\frac{ds_1}{d\beta + d\psi} = \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \frac{b^2 + 4r(R-r) \sin^4 \frac{t}{2}}{b - (R-2r) \sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Die Kurve hat also eine Spitze für

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{b}{2\sqrt{-r(R-r)}}$$



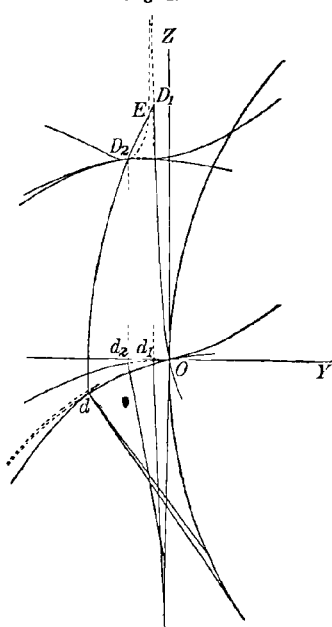
und einen Wendepunkt für

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{b}{R - 2r},$$

während für  $t = 0$   $y_1, z_1$  und der Krümmungsradius unendlich werden. Ist  $r$  negativ, dann ist die Spitze reell. In Fig. 2 sind die Spitze und der Wendepunkt so nahe zusammengerückt, daß die Spitze das Aussehen einer Schnabelspitze erhalten hat.

Läßt man die Größe  $b$  der Null sich annähern, dann geht das Gegenprofil nicht bloß in eine Epizykloide (für negatives  $r$  Hypozykloide) über, sondern außerdem noch in eine Kreisevolvente, deren Spitze mit der der Epizykloide zusammenfällt. Mathematisch gehören dem Gegenprofil sogar so viele Kreisevolventen zu, als die Epizykloide Spitzen hat. Die Eingrifflinie dieser Kreisevolventen fällt zusammen mit dem Teilriß der Zahnstange, der  $z$ -Achse. Ist  $b$  von Null verschieden, dann nähert sich das mathematische Gegenprofil einer gestreckten Kreisevolvente asymptotisch an, deren Gleichung aus der des Gegenprofils entsteht, wenn man  $r = 0$  setzt. Dies gilt also sowohl für das Kopf- wie für das Fußgegenprofil; die beiden evolventenähnlichen Zweige werden sich daher um so näher kommen, je weiter sie sich vom Radmittelpunkt entfernen. Betrachtet man jetzt die Stellung der Profile gegeneinander in einer Lage, wo sie von der  $y$ -Achse nach oben genügend entfernt sind, dann müssen sie sich dreimal berühren, nämlich in den drei Schnittpunkten mit der Eingrifflinie. Fig. 3a zeigt, wie das mit einer Spitze versehene Radzahnkopfprofil das Stangenzahnprofil in  $A$  und  $B$  berührt. Das Radzahnfußprofil muß außerdem im Punkt  $C$  berühren. Wird die Zahnstange nach abwärts geschoben, das Rad also im positiven Sinne gedreht, dann entsteht die in Fig. 3b dargestellte Lage, welche deutlich zeigt, daß das Kopf- und Fußprofil des Radzahnes sich schneiden müssen. Die Figuren 3a und b sind stark vergrößert und schematisch gezeichnet, da eine genaue Figur die Verhältnisse bei noch so starker Vergrößerung nur undeutlich zeigt.

Fig. 2.



Die wirkliche Radzahnflanke besteht nur aus Teilen des mathematischen Profils. Kopf- und Fußprofil können nur je bis zu ihrem Schnittpunkt  $d$  praktisch verwendet werden, während die in den Fi-

guren gestrichelt ausgeführten Teile wegfallen müssen. Dem Punkt  $\bar{d}$  entsprechen zwei Punkte  $\bar{d}_1$  und  $\bar{d}_2$  des Stangenzahnprofils. Der Bogen  $\bar{d}_1\bar{d}_2$  kommt daher mit dem Zahnrad gar nicht in Berührung. Wird die Zahnstange nach abwärts bewegt, so berühren sich die Profile tats

Fig. 3 a.

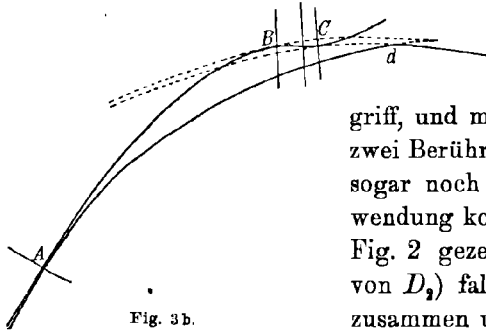
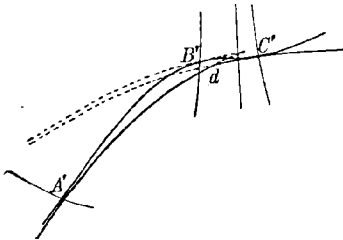


Fig. 3 b.



sächlich zunächst nur in einem Punkt  $A$ , wie Fig. 3 a zeigt. Zwischen  $C$  und  $C'$  kommt  $\bar{d}$  in  $D_1$  (Fig. 2) mit  $\bar{d}_1$  zum Eingriff, und man hat von da ab wie in Fig. 3 b

zwei Berührungspunkte, so lange bis bei  $D_2$  sogar noch der dritte zur praktischen Verwendung kommt. Gleich darauf aber (in dem Fig. 2 gezeichneten Fall in nächster Nähe von  $D_2$ ) fallen zwei der Berührungspunkte zusammen und werden von da ab imaginär; nur noch der Fuß des Radzahnes kommt zum Eingriff und zwar unter starkem Gleiten.

Wir gehen jetzt wieder über zu dem Schneckengetriebe. Der Achsenschnitt der Schnecke hat die Form der Zahnstange mit Zykloidenverzahnung. Kopf- und Fußzykloide stoßen mit ihren Spitzen zusammen

auf dem Zylinder  $\rho = b$  und bilden dort einen Punkt, der das Aussehen eines Wendepunktes mit dem Krümmungsradius Null hat. Dasselbe gilt von den Parallelschnitten senkrecht zur Radachse (Ernst, Bl. XV), nur daß die Tangente in dem Wendepunkt, der wieder auf  $\rho = b$  liegt, nicht mehr senkrecht zur Schneckenachse gerichtet ist. Die Eingriffslinien für Kopf und Fuß des Zahnrades berühren sich auf der Zylinderfläche  $\rho = b$ , und es entsteht dort, da die Kurven nur bis zu diesem Berührungspunkt gelten, das Bild eines Rückkehrpunktes, in dem der Krümmungshalbmesser aber von Null verschieden ist. (Bei Ernst ist dieser Punkt  $H$  stets mit Rückkehrpunkt bezeichnet.) Im übrigen haben diese Eingriffslinien durchaus die Eigenschaften der für unser Beispiel gültigen Eingriffslinie. Die mathematischen Profile, die dem Radzahnkopf zugehören, weisen Spitzen auf<sup>1)</sup> und werden in der Nähe dieser Spitzen von den Radzahnfußprofilen geschnitten. Man braucht nur die in unserm Beispiel angestellten Betrachtungen zu wiederholen. Auch der Eingriffsverlauf ist derselbe wie in dem Beispiel und zwar zu beiden Seiten der  $yz$ -Ebene. Nach Ernst müßte, wenigstens beim

1) Manchmal auch das Radzahnfußprofil, die Spitzen müssen dann aber paarweise auftreten. Ernst, Schneckengetriebe, S. 79, dort aber unrichtig dargestellt.

ersten Beispiel S. 70, der Radzahnkopf gar nicht mit der Schnecke in Berührung kommen mit Ausnahme des Mittelschnitts  $x = 0$ , und der Radzahnfuß zuerst in  $H$  eingreifen. Nach unserer Erklärung greift in der Nähe von  $x = 0$  zuerst der Radzahnkopf, dann Kopf und Fuß zusammen und schließlich der Fuß ein.  $H$  fällt immer außerhalb des zur Anwendung kommenden Teiles der Eingriffslinie. Die Radzahnflanke zeigt eine flache Kante, welche Kopf und Fuß trennt, und zwischen Radzahn- und Schneckengewindflanke befinden sich rechts und links des Mittelschnittes ( $x = 0$ ) Hohlräume, in welche jene Kante zum Teil eindringt und wo sie frei sich bewegen kann.

Die Zykloidschnecke mag den Nachteil haben, daß sie schwerer herzustellen ist als die Evolventenschnecke, die Eingriffsverhältnisse können wir aber im Gegensatz zu den Ernstschen Ergebnissen nicht als ungünstig bezeichnen.

#### Herstellung von Stirnrädern mittels Schneckenfräasers.

7. Eine eigenartige Anwendung der Schraubenflächen bietet sich in der Herstellung von Zahnrädern (Stirn- und Schraubenrädern) durch schraubenförmige Fräser.

Wir gehen aus von der etwas einfacheren Herstellung der Zahnräder bei Schneckengetrieben. Der Fräser entspricht in der Form der Schnecke, und der Radkörper wird mit dem Fräser zwangläufig verkoppelt, derart daß sich beide mit Winkelgeschwindigkeiten drehen, welche denen von der Schnecke und dem Zahnrad des fertigen Getriebes proportional sind; diese verhalten sich wie der Halbmesser des Radteilkreises zur reduzierten (d. h. durch  $2\pi$  dividierten) Schnecken-ganghöhe  $h$ . Mit einem solchen Fräser wird man einen ganzen Satz von Zahnrädern herstellen können, und zu einem solchen Satz gehört eine Zahnstange, die nichts anderes ist als ein Ausschnitt aus einer Schraubenmutter.

Wird nun dem Fräser außer der drehenden noch eine Translationsbewegung in der Richtung der Radachse erteilt, die aber sehr langsam sein muß, so muß ein Zahnrad entstehen, dessen Zähne durch zylindrische Flanken begrenzt sind. Dabei kann offenbar die fräsende Schnecke auch etwas schief gestellt sein, wenn nur ihre Achse parallel zur Teilrißebene bleibt. Da auf diese Weise mit einem Fräser wieder ein ganzer Rädersatz erzeugt werden kann, so genügt es, die Form der zu dem Satz gehörigen Zahnstange zu untersuchen, wenn auch diese praktisch auf diesem Wege nicht mehr herstellbar ist. Diese Zahnstange ist offenbar begrenzt durch die Zylinderfläche, welche durch die in der Radachsenrichtung verschobene Schraube umhüllt wird, oder das

Zahnstangenprofil ist die Umrißlinie der in der Translationsrichtung auf eine zu ihr senkrechte Ebene projizierten Schraube. (Vgl. Fig. 4.)

Die Schraube wird die Zahnstange jeden Moment längs einer Kurve ( $P$ ) berühren, die als Schattenkurve (Eigenschattengrenze) für parallel einfallende Strahlen gedeutet werden kann. Weil nun die Zylinderfläche, welche die Zahnstange begrenzt, als Grenzfall einer Drehungsfläche angesehen werden kann, deren zur Längsrichtung der Zahnstange parallele Achse  $G$  ins Unendliche gerückt ist, so haben wir wieder einen besonderen Fall des in 1. gelösten Problems. Sei der Winkel, unter dem die Fräserachse und die Radachse gegeneinander eingestellt sind,  $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ , wo  $\varepsilon$  immer ziemlich klein gewählt wird, dann hätte man in den Gleichungen (2) der Geraden  $G$ , die senkrecht zur Radachse steht,  $y = b$ ,  $z = mx$   $b$  unendlich groß und  $m = -\operatorname{ctg} \varepsilon$  zu nehmen. Die Normalen längs ( $P$ ) gehen außer durch  $G$  auch durch die konjugierte Gerade  $G'$ , deren Gleichungen nach (4) sind:

$$x = 0, \quad y = hm = -h \operatorname{ctg} \varepsilon$$

und die daher zur Schneckenachse parallel ist. Die Verwendung von  $G'$  erweist sich für die geometrische Konstruktion als sehr vorteilhaft.

Für die Linie ( $P$ ) gleichzeitigen Eingriffs der Zahnstange mit der Schraubenfläche:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = \xi + h\varphi$$

gilt dann nach (3')

$$(21) \quad \rho + \operatorname{ctg} \varepsilon \left( -\rho \frac{d\xi}{d\rho} \cos \varphi + h \sin \varphi \right) = 0.$$

Da es auf die Form des Querschnitts ( $P_0$ ) der Zylinderfläche ankommt, welche die Schraubenfläche längs ( $P$ ) berührt, hat man ein neues Koordinatensystem  $O' X' Y' Z'$  einzuführen. Dasselbe entsteht aus dem ersten durch Drehung um die  $y$ -Achse und Parallelverschiebung längs derselben. Der Drehwinkel ist  $\varepsilon$ , die Strecke, um welche parallel verschoben wird, wählen wir zweckmäßig gleich  $-h \operatorname{ctg} \varepsilon$ , so daß  $O'$  auf  $G'$  zu liegen kommt und die  $X'$ -Achse die Richtung der Zylindererzeugenden (oder der Radachse) hat (Fig. 4). Mittels der Formeln:

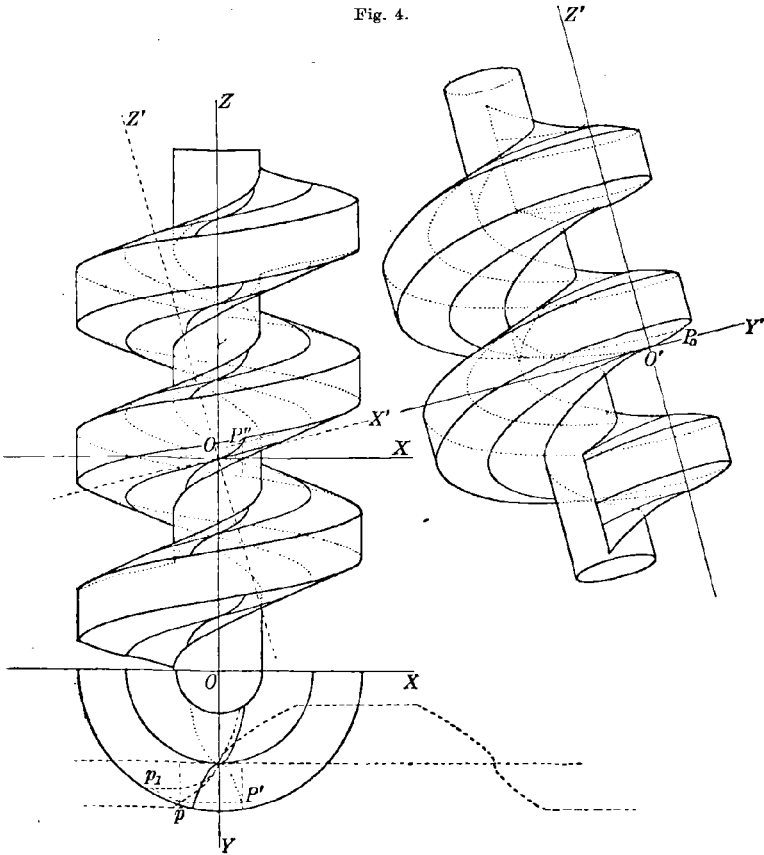
$$(22) \quad x' = x \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon, \quad y' = y + h \operatorname{ctg} \varepsilon, \quad z' = -x \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon$$

erhält man dann die Gleichungen der Schraubenfläche im neuen Koordinatensystem:

$$(23) \quad \begin{aligned} x' &= \rho \cos \varphi \cos \varepsilon + (\xi + h\varphi) \sin \varepsilon \\ y' &= \rho \sin \varphi + h \operatorname{ctg} \varepsilon \\ z' &= -\rho \cos \varphi \sin \varepsilon + (\xi + h\varphi) \cos \varepsilon, \end{aligned}$$

und diese Gleichungen bedeuten wieder die Berührungslinie (8) von Schrauben- und Zylinderfläche, wenn  $\xi, \rho$  und  $\varphi$  an die Bedingung (21) gebunden sind; die zwei letzten Gleichungen zusammen mit (21) geben die Projektion ( $P_0$ ) von ( $P$ ) auf die  $y'z'$ -Ebene, also den Zylinderquerschnitt.

Fig. 4.



8. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Form des Schneckenfräasers zu bestimmen, wenn ein Zahnrad von gegebener Form entstehen soll. Das Profil ( $P_0$ ) der zugehörigen Zahnstange sei in der Weise bestimmt, daß  $z'$  als Funktion von  $y'$  oder auch  $y'$  und  $z'$  als Funktion eines Parameters  $t$  gegeben ist. Setzt man die aus den beiden letzten der Gleichungen (23) sich ergebenden Ausdrücke für  $\rho$  und  $\xi$ :

$$(24) \quad \rho = \frac{y' - h \operatorname{ctg} \varepsilon}{\sin \varphi}, \quad \xi = \frac{z'}{\cos \varphi} + y' \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{ctg} \varphi - h(\varphi + \operatorname{ctg} \varphi)$$

in die Differentialgleichung (21) ein, so zeigt sich, daß der Koeffizient

von  $d\varphi$  verschwindet, so daß keine Integration nötig wird, vielmehr  $\varphi$  sich in endlicher Form in  $y'$  und  $z'$  ausdrücken läßt. Man findet nämlich:

$$(25) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y' - h \operatorname{ctg} \varepsilon}{y' \sin \varepsilon} \frac{dz'}{dy'}$$

In der Tat darf keine Integrationskonstante auftreten, da die Schraubenfläche als Hüllfläche einer verschraubten Zylinderfläche sich eindeutig bestimmen lassen. Jetzt kann man in (24)  $\varphi$  durch eine Funktion in  $y'$  bzw.  $t$  ersetzen und erhält für den Achsenschnitt der gesuchten Schraubenfläche die Gleichungen:

$$(26) \quad \rho^2 = (y' - h \operatorname{ctg} \varepsilon)^2 + y'^2 \left( \frac{dy'}{dz'} \right)^2 \sin^2 \varepsilon$$

$$\xi = \frac{z'}{\cos \varepsilon} + \frac{y' \sin^2 \varepsilon}{\cos \varepsilon} \frac{dy'}{dz'} - h \operatorname{arctg} \left( \frac{y' - h \operatorname{ctg} \varepsilon}{y' \sin \varepsilon} \frac{dz'}{dy'} \right);$$

insbesondere wird:

$$\rho \cos \varphi = y' \frac{dy'}{dz'} \sin \varepsilon,$$

und da  $\rho \cos \varphi = x' \cos \varepsilon + z' \sin \varepsilon$  ist (nach (22)), so hat man für die Kurve ( $P$ ):

$$(27) \quad x' = \left( z' + y' \frac{dy'}{dz'} \right) \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Da  $z' + y' \frac{dy'}{dz'}$  die Strecke bedeutet, welche die Normale der Kurve ( $P_0$ ) auf der  $z'$ -Achse abschneidet, so läßt sich die Koordinate  $x'$  leicht konstruieren. Man hat die Normale von ( $P_0$ ) in der  $x'$ -Richtung zu verschieben, bis sie die Gerade  $G'$  schneidet. Die Strecke, um welche dabei verschoben wird, ist  $x'$  und  $P_0$  geht durch diese Verschiebung in  $P$  über. Dies war zu erwarten, da die der Zylinder- und der Schraubenfläche gemeinsamen Normalen längs ( $P$ ) ja durch  $G'$  gehen sollen. Diese Eigenschaft ist auch in Fig. 4 zur Konstruktion der Raumkurve ( $P$ ) aus der ebenen Kurve ( $P_0$ ) benützt worden.

Im  $xyz$ -System sind die Gleichungen der Kurve ( $P$ ) nach (22):

$$(28) \quad x = y' \frac{dy'}{dz'} \sin \varepsilon$$

$$y = y' - h \operatorname{ctg} \varepsilon$$

$$z = \frac{z'}{\cos \varepsilon} + y' \frac{dy'}{dz'} \frac{\sin^2 \varepsilon}{\cos \varepsilon},$$

( $P$ ) ist eine algebraische Kurve, wenn das gegebene Zahnstangenprofil ( $P_0$ ) algebraisch ist.

Damit wird nach (1) die Schraubenfläche:

$$(29) \quad \begin{aligned} x &= y' \frac{dy'}{dz'} \sin \varepsilon \cos \varphi - (y' - h \operatorname{ctg} \varepsilon) \sin \varphi \\ y &= y' \frac{dy'}{dz'} \sin \varepsilon \sin \varphi + (y' - h \operatorname{ctg} \varepsilon) \cos \varphi \\ z &= \frac{z'}{\cos \varepsilon} + y' \frac{dy'}{dz'} \frac{\sin^2 \varepsilon}{\cos \varepsilon} + h \varphi. \end{aligned}$$

Deutet man die Schnecke als Schraubenrad mit einem Zahn oder bei der doppelgängigen Schraube zwei Zähnen, dann kann man zu ihrer Konstruktion auch vorteilhaft die Regeln der Verzahnungstheorie verwenden. Man erhält dann direkt einen Normalschnitt zur Schneckenachse. Die  $x'z'$ -Ebene fassen wir dabei als die Teilrißebene einer Zahnstange auf, deren Längsrichtung zur  $x$ -Achse parallel ist, deren Zähne aber schief zu dieser stehen, nämlich in der Richtung der  $x'$ -Achse. Rollt diese Teilrißebene auf dem Teilzylinder der sich um ihre feste Achse drehenden Schnecke, dann bilden ihre Gewindflanken die Gegenflanken zu den Stangenzähnen. Bei der beschriebenen Bewegung verschiebt sich die Linie gleichzeitigen Eingriffs ( $P$ ) parallel zur Schneckenachse. Sucht man also den Schnitt ( $p_1$ ) des Schneckengewindes mit der  $xy$ -Ebene als Gegenprofil des entsprechenden Schnittes ( $p$ ) der Zahnstange, dann wird die Projektion ( $P'$ ) von ( $P$ ) auf die  $xy$ -Ebene die Eingriffslinie sein. Die Gleichungen von  $p$  sind:

$$x = -\frac{z'}{\sin \varepsilon}, \quad y = y' - h \operatorname{ctg} \varepsilon;$$

denn man hat nur das in der  $y'z'$ -Ebene liegende Zahnstangenprofil ( $P_0$ ) in der Richtung der  $x'$ -Achse auf die  $xy$ -Ebene zu projizieren. Sucht man die Normale von ( $p$ ) und verschiebt sie parallel zur  $x$ -Achse, bis sie durch den Berührungspunkt des Teilrisses geht, dann geht  $p$  in den Punkt  $P'$  der Eingriffslinie über. Man findet:

$$x = y' \frac{dy'}{dz'} \sin \varepsilon, \quad y = y' - h \operatorname{ctg} \varepsilon,$$

also die beiden ersten Gleichungen von (28). Um das Gegenprofil ( $p_1$ ) zu finden, hat man den Eingriffspunkt  $P'$  um die  $z$ -Achse zu drehen. Dabei muß der Bogen auf dem Teilkreis, der zu dem Drehungswinkel  $\varphi$  gehört, nämlich  $-h \operatorname{ctg} \varepsilon \varphi$  gleich werden mit der Strecke  $pP'$ . Dies gibt für  $\varphi$  die Gleichung:

$$-h \operatorname{ctg} \varepsilon \varphi = \frac{z'}{\sin \varepsilon} + y' \frac{dy'}{dz'} \sin \varepsilon,$$

also dieselbe, die man erhält, wenn man in der letzten Gleichung von (29)  $z = 0$  setzt; die beiden ersten geben offenbar die Koordinaten von  $p_1$ . (Vgl. Fig. 4.)

9. Wir führen die beiden wichtigsten Anwendungen, nämlich auf Evolventen- und Zykloidenverzahnung im einzelnen durch.

a) *Evolventenverzahnung*. ( $P_0$ ) ist eine Gerade  $z' = \pm y' \operatorname{tg} \delta + \gamma$ , wo  $\delta$  gewöhnlich gleich  $15^\circ$  genommen wird. Die Kurve ( $P$ ) wird dann ebenfalls eine Gerade:

$$x = \pm \operatorname{ctg} \delta (y \sin \varepsilon + h \cos \varepsilon)$$

$$z = \frac{\pm y \operatorname{tg} \delta + \gamma}{\cos \varepsilon} \pm \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \delta} (y \sin \varepsilon + h \cos \varepsilon) \pm \frac{h \operatorname{tg} \delta}{\sin \varepsilon}.$$

Diese Gerade hat von der  $z$ -Achse den Abstand  $d = \frac{h \cos \varepsilon}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta + \cos^2 \varepsilon}}$  und bildet mit ihr einen Neigungswinkel, dessen Tangente gleich  $\frac{\cos \varepsilon}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta + \cos^2 \varepsilon}}$  ist; bei der Verschraubung der Geraden bleibt sie daher Tangente an eine Schraubenlinie vom Grundkreisradius  $d$ ; d. h. es entsteht eine *abwickelbare Schraubenfläche*. In der Tat haben die abwickelbaren Flächen und nur diese für jede Projektionsrichtung als Umrißlinien Gerade.

Wählt man also für den Schneckenfräser eine Form, die einer scharfgängigen Schraube entspricht, deren Erzeugende die Schraubenachse schneiden, so wird man Zahnräder erhalten, die keineswegs in der Form mit Evolventenzahnrädern übereinstimmen, ihnen aber um so näher kommen, je kleiner  $h \cos \varepsilon$  ist. Es ist daher nicht zu verwundern, wenn solche Räder, die an Stelle von Evolventenzahnrädern verwendet werden, einen ruhigen Gang vermissen lassen.<sup>1)</sup>

b) *Zykloidenverzahnung* (Fig. 4). Das Zahnstangenprofil ( $P_0$ ) besteht aus zwei Zykloiden, die mit ihren Spitzen zusammenstoßen. Diese Spitzen mögen zunächst nicht in der  $x'z'$ -Ebene angenommen werden. Man hat also:

$$(30) \quad y' = b + a(1 - \cos t), \quad z' = a(t - \sin t)$$

als Gleichungen des Profils, welches dem Fuß der Radzähne entspricht, während für den Kopf  $a$  mit  $-a$  zu vertauschen ist.

Die Kurve ( $P$ ) gleichzeitigen Eingriffs, längs deren sich die

---

1) Außer Herrn A. Schneider (a. a. O.) hat auch Herr C. Barth in: *Die Grundlagen der Zahnradbearbeitung*, Berlin 1911, erschienen während der Drucklegung dieser Arbeit, die Mängel der seither nach dem Wälzverfahren hergestellten Zahnräder geometrisch untersucht und ihre Abweichung von genauer Evolventenverzahnung festgestellt. Die Kurve ( $P$ ), längs deren sich die fingierte Zahnstange und die Schraube in jedem Moment berühren, nennt Herr Barth Flankeneingriffslinie. Das (fertige) Zahnrad wird von der Schnecke momentan nur in einzelnen Punkten berührt (im Gegensatz zu der Zahnstange); den Ort der Punkte, in denen dieser Eingriff stattfindet, heißt Herr Barth Getriebeeingriffslinie.



Schraube und der Zahnstangenzyylinder (30) berühren, hat nach (28) die Gleichungen:

$$(28') \quad \begin{aligned} x &= \left( b \operatorname{ctg} \frac{t}{2} + a \sin t \right) \sin \varepsilon \\ y &= b + a(1 - \cos t) - h \operatorname{ctg} \varepsilon \\ z &= -\frac{a}{\cos \varepsilon} t + b \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \frac{\sin^2 \varepsilon}{\cos \varepsilon} - a \cos \varepsilon \sin t \end{aligned}$$

oder im  $x'y'z'$ -System neben (30):

$$x' = \left( b \operatorname{ctg} \frac{t}{2} + at \right) \operatorname{tg} \varepsilon.$$

In der Technik wird nun für notwendig erachtet (siehe z. B. D. R. P. Nr. 112082), daß die Achse des Fräasers ( $z$ -Achse) zur Achse des Stirnradkörpers ( $x'$ -Achse) um den „Steigungswinkel seiner Gewindgänge“ geneigt gestellt werde. Dies kann nur so verstanden werden, daß die Schraubenlinien um die  $z$ -Achse, deren Zylinderfläche den Teilzylinder des zu erzeugenden Zahnrades berühren, den Steigungswinkel  $\varepsilon$  haben sollen. Dies ist hier nur der Fall, wenn  $b = 0$  ist. Man hat die genannte Forderung offenbar gestellt, weil ein Überschneiden vermieden werden muß, d. h. der Fräser darf nicht notwendige Teile des Zahnrades fortnehmen, was für jeden einzelnen Fall zu untersuchen wäre. Hier ergibt sich die Bedingung  $b = 0$  auch aus anderen Gründen; es ist nämlich für  $t = 0$  nach den Gleichungen (28') sowohl  $x$  wie  $z$  unendlich groß, wenn  $b$  von Null verschieden ist; der Punkt der Kurve ( $P$ ), welcher sich als Rückkehrpunkt der Zykloide ( $P_0$ ) projiziert, liegt dann im Unendlichen. Offenbar ist die praktische Ausführung des entsprechenden Schneckenfräasers unmöglich; denn gerade die Teile, welche die Zykloidenspitzen erzeugen, dürfen nicht fehlen. Man hat also notwendig:

$$b = 0$$

zu setzen und erhält statt (28'):

$$(28'') \quad x = a \sin \varepsilon \sin t, \quad y = -h \operatorname{ctg} \varepsilon + a(1 - \cos t), \quad z = \frac{at}{\cos \varepsilon} - a \cos \varepsilon \sin t.$$

Die Diskussion der Kurve (28'') wird einfach, wenn man zunächst die Gleichungen:

$$(31) \quad x = a \sin \varepsilon \sin t, \quad y = -h \operatorname{ctg} \varepsilon + a(1 - \cos t), \quad z = -a \cos \varepsilon \sin t$$

untersucht, also das erste Glied von  $z$  in (28'') wegläßt.

Faßt man  $t$  als Zeitkoordinate auf, so bedeuten die Gleichungen (31) eine Rotationsbewegung auf einem Kreis vom Radius  $a$ , der in der  $y'z'$ -Ebene liegt und die  $z'$ -Achse berührt. Dazu kommt nach dem zunächst vernachlässigten Glied von (28'') eine Translationsbewegung in der Richtung der  $z$ -Achse. Die Geschwindigkeiten beider Bewegungen

verhalten sich wie  $\cos \varepsilon$  zu 1. Offenbar liegt sonach die Kurve ( $P$ ) auf einer Zylinderfläche 2. Ordnung, als deren Gleichung man findet:

$$\frac{x^2}{\sin^2 \varepsilon} + (y + h \operatorname{ctg} \varepsilon + a)^2 = a^2.$$

Erteilt man jetzt der Kurve ( $P$ ) eine Schraubenbewegung der Ganghöhe  $2\pi h$ , dann erhält man als die Gleichungen der Schraubenfläche, welche die Form des Fräsers bestimmt, nach (29):

$$(32) \quad \begin{aligned} x &= a \sin \varepsilon \sin t \cos \varphi - [-h \operatorname{ctg} \varepsilon + a(1 - \cos t)] \sin \varphi \\ y &= a \sin \varepsilon \sin t \sin \varphi + [-h \operatorname{ctg} \varepsilon + a(1 - \cos t)] \cos \varphi \\ z &= -a \cos \varepsilon \sin t + \frac{at}{\cos \varepsilon} + h\varphi. \end{aligned}$$

Man wird untersuchen, ob außer der Kurve ( $P$ ) noch andere auf der Fläche verlaufende Kurven irgendwelches Interesse bieten. Wir bemerken erstens, daß die Kurve, für welche zwischen  $t$  und  $\varphi$  die Beziehung  $\varphi = -\frac{at}{h \cos \varepsilon}$  besteht, algebraisch ist, wenn  $\frac{a}{h \cos \varepsilon}$  und daher das Verhältnis der Spannweite  $2\pi a$  des Zykloidenbogens zur Projektion  $2\pi h \cos \varepsilon$  der Schraubenganghöhe auf die  $y'z'$ -Ebene rational ist.

Zweitens läßt sich die Kurve, für die gilt:  $\varphi = -\frac{at \sin^2 \varepsilon}{h \cos \varepsilon}$ , wofür abgekürzt  $\chi t$  geschrieben werden soll, eine sehr einfache kinematische Deutung zu. Durch die Gleichungen:

$$(33) \quad \begin{aligned} x &= a \sin \varepsilon \sin t \cos \chi t - [-h \operatorname{ctg} \varepsilon + a(1 - \cos t)] \sin \chi t \\ y &= a \sin \varepsilon \sin t \sin \chi t + [-h \operatorname{ctg} \varepsilon + a(1 - \cos t)] \cos \chi t \\ z &= a \cos \varepsilon (t - \sin t) \end{aligned}$$

wird nämlich die Bahn eines Punktes eines Kreises vom Radius  $a$  dargestellt, welcher auf der Schraubenlinie:

$$(34) \quad x = h \operatorname{ctg} \varepsilon \sin \chi t, \quad y = -h \operatorname{ctg} \varepsilon \cos \chi t, \quad z = a \cos \varepsilon \cdot t$$

derart abrollt, daß der durch den Berührungspunkt gehende Durchmesser stets parallel zur  $xy$ -Ebene ist, also durch die  $z$ -Achse geht. Der Kreis liegt somit immer in der Schmiegungeebene der Schraubenlinie; die letztere hat den Steigungswinkel  $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$  und die Ganghöhe  $-2\pi h \operatorname{ctg}^2 \varepsilon$ . Läßt man nämlich einen Punkt  $P_1$  einen Kreis durchlaufen, der in der  $y'z'$ -Ebene liegt und die  $z'$ -Achse berührt, so sind die Koordinaten von  $P_1$  wie in (31):

$$(31) \quad x_1 = a \sin \varepsilon \sin t, \quad y_1 = -h \operatorname{ctg} \varepsilon + a(1 - \cos t), \quad z_1 = -a \cos \varepsilon \sin t.$$

Erteilt man diesem veränderlichen Punkt  $P_1$  außerdem eine Schraubenbewegung der Ganghöhe  $-2\pi h \operatorname{ctg}^2 \varepsilon$ , so entstehen Gleichungen der Form (33), und man erhält genau die Gleichungen (33), wenn man die

Geschwindigkeiten beider Bewegungen so wählt, daß die resultierende Geschwindigkeit von  $P_1$  für  $t=0$  verschwindet. In der Tat sind die Differentialquotienten von  $x, y, z$  in (34) entgegengesetzt gleich denen von  $x_1, y_1, z_1$  in (31), wenn  $t=0$  oder gleich einem Vielfachen von  $2\pi$  gesetzt wird.

Wir fassen die Ergebnisse zusammen in dem Satz:

*Die Form eines Fräasers, mittels dessen Stirnräder mit Zykloidenverzahnung hergestellt werden sollen, ist bestimmt durch eine Schraubenfläche, welche wie folgt konstruiert werden kann. Einen Kreis vom Radius  $a$  lasse man auf einer Schraubenlinie von außen oder innen entsprechend dem Fuß bzw. Kopf des Radzahnes so abrollen, daß er stets in der Schmiegungeebene der Schraubenlinie bleibt. Die Bahn, welche dabei ein Punkt der Kreisperipherie beschreibt, ist dann so zu verschrauben, daß sich ihre Rückkehrpunkte senkrecht zu jener Schraubenlinie bewegen; der Winkel, welchen diese Bewegungsrichtung mit der Schraubenachse bildet, ist auch für die Einstellung der Achse des Zahnradkörpers gegen die Fräserachse zugrunde zu legen.<sup>1)</sup>*

Es dürfte nahe liegen, die Schneiden des Fräasers so anzuordnen, das sie eben mit den Kurven übereinstimmen, welche durch die Punkte des rollenden Kreises beschrieben werden; ob dies aber praktisch zu verwirklichen ist, wird nur die Technik entscheiden können. Ähnlich verhält es sich bei der Frage nach der Möglichkeit einer Hinterdrehung des Fräasers; bei Zykloidenverzahnung ist eine solche wohl ganz ausgeschlossen.

In Fig. 4 ist die Teilung des zu erzeugenden Zahnrades, welche gleich  $-2\pi h \cos \varepsilon$  oder  $2\pi b \sin \varepsilon$  sein muß, gleich 30 mm gewählt.  $\varepsilon$  ist gleich  $15^\circ$  und daher  $b = 18,45$  mm.

Die Schnecke ist dargestellt in der  $xy$ -,  $xz$ - sowie  $y'z'$ -Projektion. Die entsprechenden Projektionen des Punktes  $P$  der Kurve ( $P$ ) sind  $P', P'', P_0$ . Die Schnitte ( $p$ ) und ( $p'$ ) sind gestrichelt eingezeichnet.

10. Mit Schneckenfräsern werden nicht bloß Stirnräder, sondern auch Schraubenräder hergestellt. Die Achsen des Radkörpers und des Fräasers sind dann nicht mehr unter dem Winkel  $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$  einzustellen, vielmehr beträgt dieser Winkel  $\varepsilon_1 - \varepsilon$ , wo  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_1$  die Steigungswinkel der auf den Teilzylindern verlaufenden Schraubenlinien bedeuten.

1) An Stelle des rollenden Kreises kann sogar, wie ohne Beweis angegeben werden soll, eine beliebige Kurve treten. Läßt man die Kurve auf einer Schraubenlinie rollen, so ist durch die Bahn eines in ihrer Ebene liegenden Punktes die Schraubenfläche, läßt man sie auf einer Geraden rollen, so ist die zugehörige Umrißlinie ( $P_0$ ) bestimmt.

Bei der Herstellung eines Schraubenrades müssen diese Schraubenlinien sich berühren. Projiziert man die Ganghöhe  $2\pi b \operatorname{tg} \varepsilon$  der Schnecke in der Richtung der gemeinsamen Tangente dieser Schraubenlinien auf eine zur Radachse senkrechte Ebene, so erhält man offenbar die Teilung des Rades  $\frac{2\pi R}{Z}$ , wenn  $R$  der Teilkreisradius,  $Z$  die Zähnezahl ist. Dies führt zu der Gleichung:

$$b \sin \varepsilon = \frac{R}{Z} \sin \varepsilon_1.$$

Bei einer doppelgängigen Schnecke ist nur die linke Seite dieser Gleichung mit 2 zu dividieren.  $\varepsilon_1$  ist also durch die Schneckenform und die Radteilung bestimmt.

Während sich der Radkörper ein- bzw. zweimal dreht, muß die Schnecke  $Z$  Umdrehungen machen. Außerdem wird aber der Schnecke eine Vorschubbewegung in der Richtung jener gemeinsamen Tangente der Teilzylinderschrauben erteilt. Ihre Geschwindigkeit ist unabhängig von der der drehenden Bewegung, muß aber sehr klein sein. Wegen dieser Vorschubbewegung kann man die Schneckenflanken wieder ersetzen durch zylindrische Flächen, welche sie umhüllen würden, wenn die Translationsbewegung allein vorgenommen würde. Diese Zylinderflächen bilden die Zahnflanken einer Stange, deren Längsrichtung senkrecht zur Zahnradachse gewählt werden kann, deren Zähne aber dann unter dem Winkel  $\varepsilon_1$  gegen diese Längsrichtung gedreht sind. Diese Zahnstange schiebt sich an dem sich drehenden Rad weiter derart, daß die Teilrißebene auf dem Teilzylinder des Rades abrollt. Die Flanken des Rades werden dann von Schraubenflächen gebildet, deren Ganghöhe  $2\pi R \operatorname{tg} \varepsilon_1$  beträgt. Von diesen Schraubenflächen suchen wir den zur Radachse senkrechten Schnitt, indem wir zum Längsschnitt der Zahnstange das Gegenprofil bestimmen, d. h. wir verfahren genau so, wie wir bei der Schnecke, die als Schraubenrad sich auffassen läßt, den Normalschnitt ( $p_1$ ) aus ( $p$ ) ableiteten. Die Gleichungen (29) bestimmen direkt die Form der Radzahnflanken, wenn man die Radachse als  $z$ -Achse wählt und  $\varepsilon$  durch  $\varepsilon_1$  ersetzt.

Ein Zahnrad genau derselben Form ließe sich auch mit einem Rotationsfräser herstellen, dessen Achsenschnitt mit dem Querschnitt jener Zylinderfläche übereinstimmt und dem man, wie dem Schraubenfräser, eine Vorschubbewegung längs der Zylinderfläche gibt. Offenbar wird dabei von den Radzähnen mehr fortgenommen, als wenn die Fräserachse (wie in 2.) festgehalten wird; aber in nächster Nähe des Teilzylinders stimmen die auf beide Arten erzeugten Zahnflanken überein.

Stuttgart, Mai 1911.

## Drei wichtige ebene Spannungszustände des keilförmigen Körpers.

Von Dr. PAUL FILLUNGER in Wien.

In neuerer Zeit scheint sich im Talsperrenbau das Bedürfnis geltend gemacht zu haben, die im Mauerwerk auftretenden Spannungen eingehender kennen zu lernen, als es die ältere Theorie gestattet, wonach die Reduktions-Resultante aus dem Gewichte des Mauerkörpers und dem Wasserdruck stets im mittleren Drittel jedes horizontalen Querschnittes sich befinden soll. Eine Reihe von Veröffentlichungen befassen sich mit dieser Frage, von denen insbesondere zu nennen sind diejenigen von L. W. Atcherley und Prof. Karl Pearson<sup>1)</sup>, Geheimrat Dr. Schäffer<sup>2)</sup>, Prof. Mohr<sup>3)</sup>, Prof. A. Cappilleri<sup>4)</sup> und Prof. Ramisch<sup>5)</sup>.

L. W. Atcherley und Prof. Karl Pearson versuchten es nämlich als Erste, die Form des Mauerprofiles und die Art der Belastung durch den Wasserdruck bei der Berechnung der im Mauerwerke auftretenden Spannungen zu berücksichtigen, weil diese für die Spannungsverteilung maßgebenden Umstände wesentlich von jenen Voraussetzungen abweichen, welche der heute noch gebräuchlichen Rechnungsmethode in letzter Linie zugrunde liegen. Sie gelangen jedoch durch die Annahme einer linearen Spannungsverteilung der Normalspannungen und einer parabolischen der Schubspannungen auf horizontalen Schnitten zu einem Verteilungsgesetz, welches statisch unmöglich ist.

Geheimrat Dr. Schäffer und Prof. Ramisch sehen von der einen dieser willkürlichen Annahmen, nämlich von jener über die Schubspannungen ab. Die von ihnen aufgestellten Gesetze sind daher als *statisch unmöglich* zu bezeichnen. Hingegen ist der Nachweis der Zulässigkeit der anderen Annahme, und zwar der linearen Verteilung der Normalspannungen nicht zu erbringen.

Prof. Mohr schließt aus der Unvereinbarkeit beider Annahmen, daß diejenige den Vorzug verdiene, welche die gleichmäßigere Ver-

1) L. W. Atcherley und Prof. Karl Pearson: „On some disregarded points in the stability of masonry dams.“ Abstract in Min. of proc. Inst. C. E. vol. CLXII pag. 456.

2) Dr. Th. Schäffer: Zentralblatt der Bauverwaltung 1906, Seite 432.

3) Prof. Mohr: Zeitschr. d. Österr. Ing. u. Arch. Vereines 1908, Nr. 40 u. 41.

4) Prof. Cappilleri: Z. d. Ö. I. u. A. V. 1909, Nr. 10.

5) Prof. Ramisch: Zeitschr. „Zement und Beton“ 1909, Nr. 28 u. 29; Z. d. Ö. I. u. A. V. 1909, Nr. 43; Z. d. Ö. I. u. A. V. 1911, Nr. 6.

teilung der Spannungen aufweist, und Prof. Cappilleri gelangt in Verfolgung dieses Gedankens zu der Hypothese, daß diejenige Spannungsverteilung die tatsächlich auftretende sein müsse, welche unter Einhaltung der Gleichgewichtsbedingungen und Grenzzustände die potentielle Energie des Mauerkörpers zu einem Minimum macht. Die Bestimmung der Spannungen nach dieser viel Wahrscheinlichkeit besitzenden Theorie scheidet jedoch an der Schwierigkeit der mathematischen Aufgabe.

Es dürfte daher wünschenswert erscheinen, das Problem der Spannungsverteilung in Staumauern auch noch von einem anderen Standpunkte aus zu beleuchten. Zu diesem Zwecke sollen hier drei ebene Spannungszustände eines keilförmigen Körpers untersucht werden, welche im Vereine mit der vom Verfasser gefundenen ebenen Spannungsverteilung in keilförmigen Körpern bei Einwirkung von Einzelkräften<sup>1)</sup> eine weitgehende Annäherung an die Verhältnisse gestatten, die bei Talsperren vorliegen.

Zur Vermeidung von Weitschweifigkeiten verweise ich auf die Definition eines „keilförmigen Körpers“, wie sie Verfasser in der erwähnten Abhandlung gegeben hat. Desgleichen sind alle Bezeichnungen und die Wahl der positiven Richtungen übereinstimmend gewählt.

**I. Gleichförmige Belastung des keilförmigen Körpers auf einer Rückenfläche.** Trägt ein keilförmiger Körper eine auf einer Rücken-

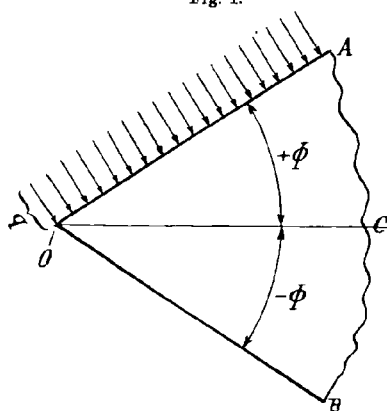


Fig. 1.

fläche gleichförmig verteilte Belastung, in Fig. 1 dargestellt durch den auf die Fläche  $OA$  einwirkenden Normaldruck  $q$ , so kann die resultierende Spannung  $s$  auf einem im Innern des Körpers befindlichen Flächenelemente, welches durch seinen mittleren Abstand  $r$  von  $O$  und außerdem durch Richtungswinkel definiert ist, dargestellt werden als

$$s = f(r, q, \dots),$$

wobei die Punkte *nur mehr Winkelgrößen* bedeuten. Die Breite  $b$  des Keiles braucht hier, im Gegensatz zu dem früher be-

handelten Problem, nicht in Rechnung gezogen zu werden.

Das Differential dieser Spannung ist

$$ds = \frac{\partial s}{\partial r} dr + \frac{\partial s}{\partial q} dq + \dots$$

Ein zusammengehöriges System von Differentialen findet man, wenn man die Maßzahl aller Längengrößen im Verhältnisse  $1: \frac{r+dr}{r}$  ändert,

1) Diese Zeitschrift f. Math. u. Phys. 59. Bd., 1 Heft (1910), S. 44.

und zwar findet man aus der Dimensionsformel einer Spannung, da  $q$  ebenfalls eine Spannung vorstellt, das System

$$dr, dq = -q \frac{dr}{r}, ds = -s \frac{dr}{r}.$$

Die Differentiale der nachfolgenden Winkelgrößen sind sämtlich gleich Null, da ihre Dimension Null ist.

Setzt man diese Differentiale in die obige Gleichung ein, so ergibt sich

$$-s \frac{dr}{r} = \frac{\partial s}{\partial r} dr - \frac{\partial s}{\partial q} q \frac{dr}{r}.$$

Nun ist aber die Spannung  $s$  jedenfalls direkt proportional der Spannung  $q$  (wie am einfachsten aus dem Überlagerungs-Gesetze gefolgert werden kann), also in bezug auf  $q$  *allein* eine homogene Funktion vom Grade 1. Daher ist

$$\frac{\partial s}{\partial q} \cdot q = s$$

oder

$$-s = r \frac{\partial s}{\partial r} - s$$

und

$$\frac{\partial s}{\partial r} = 0$$

oder auch

$$(1) \quad s = C,$$

wobei  $C$  eine von  $r$  unabhängige Funktion von  $\varphi$ , dem Winkel des Leitstrahles von  $O$  nach dem Angriffspunkt der Spannung  $s$  gegen die Polarachse, vorstellt.

Mit  $s$  sind auch die Komponenten  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$  und  $\tau$ , in welche  $s$  zerlegt werden kann, vom Radius-Vektor unabhängig, und da über die Lage des Flächenelementes und die Richtung von  $s$  nichts vorausgesetzt wurde, gilt dasselbe von allen Spannungen.

Unter den sog. „Trägern von überall gleicher Biegefestigkeit“ wird auch ein derartig belasteter keilförmiger Körper angeführt. *Er ist der einzige, der diesen Namen in aller Strenge verdient.*

Gleichung (1) spricht die Bedingung für die *geometrische Möglichkeit* einer Spannungsverteilung in diesem Falle aus. Die *statische* und *elastische Möglichkeit* kann gleichzeitig erfüllt werden durch Verwendung der Airyschen Spannungsfunktion, welche fordert, daß

$$(2) \quad \begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (\sigma_t + \sigma_r) = 0 \\ \sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \\ \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \tau = - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \end{cases}$$

für alle Werte von  $r$  und  $\varphi$ .

Setzt man

$$F = r^2 f,$$

wobei  $f$  eine Funktion von  $\varphi$  allein bedeutet, so entsteht aus Gleichung (2)

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^4 f}{d\varphi^4} + 4 \frac{d^2 f}{d\varphi^2} = 0 \\ \sigma_r = \frac{d^2 f}{d\varphi^2} + 2f \\ \sigma_t = 2f \\ \tau = -\frac{df}{d\varphi}. \end{cases}$$

Gleichung (1) ist somit durch diese Annahme erfüllt. Aus der ersten Gleichung (3) folgt aber durch Integration

$$f = C_1 + C_2 \varphi + C_3 \cos 2\varphi + C_4 \sin 2\varphi.$$

Daher ist

$$\sigma_t = 2C_1 + 2C_2 \varphi + 2C_3 \cos 2\varphi + 2C_4 \sin 2\varphi$$

und

$$\tau = -C_2 + 2C_3 \sin 2\varphi - 2C_4 \cos 2\varphi.$$

Die Werte von  $\sigma_t$  und  $\tau$  an den Begrenzungsflächen  $OA$  und  $OB$  in Fig. 1, nämlich für  $\varphi = +\Phi$  und  $\varphi = -\Phi$  sind bekannt, und zwar ist

$$\begin{aligned} \sigma_{t\varphi=+\Phi} &= q, & \tau_{\varphi=+\Phi} &= 0 \\ \sigma_{t\varphi=-\Phi} &= 0, & \tau_{\varphi=-\Phi} &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Bedingungen lassen sich die vier willkürlichen Integrationskonstanten bestimmen wie folgt:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{q}{4} & C_3 &= 0 \\ C_2 &= \frac{-q \cos 2\Phi}{2(\sin 2\Phi - 2\Phi \cos 2\Phi)} & C_4 &= \frac{q}{4(\sin 2\Phi - 2\Phi \cos 2\Phi)}. \end{aligned}$$

Da die vier Konstanten sich eindeutig bestimmen lassen und von Null verschieden sind, ist hiermit die Aufgabe gelöst. In einfachster Schreibweise lautet die vollständige Lösung

$$(4) \quad \begin{cases} \sigma_r = q(a + 2b\varphi - c \sin 2\varphi) \\ \sigma_t = q(a + 2b\varphi + c \sin 2\varphi) \\ \tau = -q(b + c \cos 2\varphi), \end{cases} \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{-\cos 2\Phi}{2(\sin 2\Phi - 2\Phi \cos 2\Phi)} \\ c = \frac{1}{2(\sin 2\Phi - 2\Phi \cos 2\Phi)}. \end{cases}$$

Es fällt auf, daß auch hier, ebenso wie in oberwähnter Abhandlung für Kräftepaare gezeigt wurde, ein keilförmiger Körper, dessen Winkel

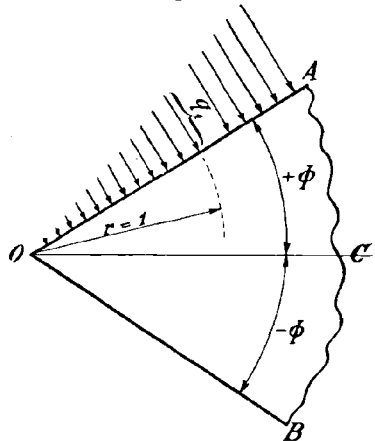
$$2\Phi = \operatorname{tg} 2\Phi$$



ist, eine besonders geringe Widerstandskraft, theoretisch sogar eine unendlich kleine, aufweist. Denn für solche Fälle wird  $h = -\infty$ ,  $e = +\infty$ , daher  $\sigma_r = -\infty$  und  $\sigma_t$  und  $\tau$  werden unbestimmt von der Form  $(\infty - \infty)$ , ohne daß  $q$  endliche Werte überschreiten müßte.

Gleichung (1) gilt auch dann noch, wie sich leicht zeigen läßt, wenn auch die Fläche  $OB$  in Fig. 1 eine gleichförmige Belastung  $q'$  trägt. Sie könnte endlich unter gewissen Bedingungen auch für *kegelförmige* Körper nachgewiesen werden, wodurch man mit entsprechendem Grenzübergange den Zusammenhang mit einem bekannten Hertz'schen Probleme herstellen könnte, welches die Spannungsverteilung in Kreiszyllindern zum Gegenstande hat.

Fig. 2.



**II. Gleichförmig ansteigende Belastung des keilförmigen Körpers auf einer Rückenfläche.** Trägt ein keilförmiger Körper eine gleichförmig ansteigende Belastung wie Fig. 2 andeutet, so ist das Verhältnis  $V$  des Normaldruckes  $q$  zum zugeordneten Radius  $r$ , also  $V = \frac{q}{r}$ , überall dasselbe.

Eine beliebige, durch die Angabe von Richtungswinkeln und Entfernung  $r$  des Angriffspunktes von der Keilschneide  $O$  definierte Spannung  $s$  kann daher ausreichend dargestellt werden durch eine Funktion von  $r$ ,  $V$  und mehreren Winkelgrößen, die wieder im Ansätze nur durch Punkte angedeutet werden sollen:

$$s = f(r, V, \dots)$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial r} dr + \frac{\partial s}{\partial V} dV + \dots$$

Die zur Auffindung eines Systemes von Differentialen, welches die Differentiale der Winkelgrößen verschwinden läßt, nötige Änderung der Maßeinheit aller Längengrößen im Verhältnisse  $1 : \frac{r + dr}{r}$  liefert  $dr = dr$ ,

$$ds = -s \frac{dr}{r} \text{ und, da } V = \frac{q}{r} \text{ ist, } \frac{\partial s}{\partial r} \frac{q}{r} = \frac{q}{r^2} = \frac{V}{r}, \text{ } dV = -V \frac{dr}{r}.$$

Setzt man diese Differentiale in die voranstehende Gleichung ein, so entsteht

$$-s \frac{dr}{r} = \frac{\partial s}{\partial r} dr - \frac{\partial s}{\partial V} V \frac{dr}{r},$$

und da  $s$  direkt proportional mit  $V$  sein muß (ebenfalls aus dem Überlagerungsgesetz leicht einzusehen), ist

$$\frac{\partial s}{\partial V} \cdot V = s,$$

somit

$$s = r \frac{\partial s}{\partial r}$$

oder

$$(5) \quad s = rC.$$

Es sind daher alle nur durch Richtungswinkel definierten Spannungen vom Radius-Vektor in der ersten Potenz desselben abhängig.

Mit Rücksicht darauf hat man hier zu wählen

$$F = r^3 f,$$

wenn  $F$  die hier geltende Spannungsfunktion und  $f$  eine Funktion von  $\varphi$  allein vorstellt. Einsetzung in Gleichung (2) liefert

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d^4 f}{d\varphi^4} + 10 \frac{d^2 f}{d\varphi^2} + 9f = 0 \\ \sigma_r = r \left( \frac{d^2 f}{d\varphi^2} + 3f \right) \\ \sigma_t = 6rf \\ \tau = -2r \frac{df}{d\varphi} \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung (6) findet man

$$f = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + C_3 \cos 3\varphi + C_4 \sin 3\varphi,$$

daher

$$\sigma_t = 6r (C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + C_3 \cos 3\varphi + C_4 \sin 3\varphi)$$

$$\tau = -2r (-C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi - 3C_3 \sin 3\varphi + 3C_4 \cos 3\varphi).$$

Bedeutet  $q_1$  die Größe des Normaldruckes  $q$  bei  $r = 1$ , so findet man aus den bekannten Grenzzuständen für  $\sigma_t$  und  $\tau$  die Werte der vier willkürlichen Konstanten wie folgt:

$$\begin{aligned} C_1 &= q_1 \frac{\sin 3\Phi}{32 \sin \Phi \cos^3 \Phi} & C_3 &= -q_1 \frac{1}{96 \cos^3 \Phi} \\ C_2 &= -q_1 \frac{\cos 3\Phi}{32 \cos \Phi \sin^3 \Phi} & C_4 &= q \frac{1}{96 \sin^3 \Phi}. \end{aligned}$$

Die radiale Normalspannung ist zufolge der zweiten Gleichung (6)

$$\sigma_r = 2r (C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi - 3C_3 \cos 3\varphi - 3C_4 \sin 3\varphi).$$

Setzt man

$$\frac{2C_1}{q_1} = a, \quad \frac{2C_2}{q_1} = b, \quad \frac{6C_3}{q_1} = c, \quad \frac{6C_4}{q_1} = d,$$

so lauten

$$(7) \begin{cases} \sigma_r = r q_1 (a \cos \varphi + b \sin \varphi - c \cos 3\varphi - d \sin 3\varphi) \\ \sigma_t = r q_1 (3a \cos \varphi + 3b \sin \varphi + c \cos 3\varphi + d \sin 3\varphi) \\ \tau = r q_1 (a \sin \varphi - b \cos \varphi + c \sin 3\varphi - d \cos 3\varphi), \end{cases}$$

wobei

$$a = \frac{\sin 3\Phi}{16 \sin \Phi \cos^3 \Phi}, \quad b = \frac{-\cos 3\Phi}{16 \cos \Phi \sin^3 \Phi}, \quad c = \frac{-1}{16 \cos^3 \Phi}, \quad d = \frac{1}{16 \sin^3 \Phi}.$$

Wenn die äußere Belastung nicht wie im I. oder II. Falle verlief, sondern proportional mit der zweiten oder einer anderen Potenz von  $r$  ansteige, so wäre die Auffindung des Spannungszustandes ebenfalls von der Lösung einer homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten abhängig, daher leicht durchzuführen. Vereintigt man mehrere solcher Spannungszustände, so ist der Weg zu zahlreichen Belastungsfällen offen, besonders wenn man bedenkt, daß man nur das die betreffende Teilbelastung darstellende  $q$  negativ einzusetzen hat, wenn dieselbe keinen Normaldruck, sondern einen Normalzug vorstellen soll.

**III. Belastung durch Eigengewicht.** Bedeutet  $\gamma$  das *spezifische Gewicht des Materials* in kg pro  $\text{cm}^3$  (wenn auch alle Längen in cm und alle Spannungen in kg pro  $\text{cm}^2$  gemessen werden), so kann die wiederholt betrachtete Spannung  $s$  aufgefaßt werden als Funktion von  $r, \gamma$  und mehreren Winkelgrößen:

$$s = f(r, \gamma, \dots).$$

Da aber die Dimension des spezifischen Gewichtes  $\gamma$  dieselbe ist wie diejenige des im II. Falle verwendeten Verhältnisses  $V$ , und da ferner auch hier die Spannung  $s$  direkt proportional dem spezifischen Gewicht sein muß (auf gleiche Weise zu erkennen wie im vorigen Falle), so führt die im übrigen hier genau gleich verlaufende Rechnung auch zum selben Ergebnis:

$$s = rC.$$

Jede durch Richtungswinkel definierte Spannung ist somit direkt proportional dem Radiusvektor ihres Angriffspunktes. Bedeuten  $M, N, L$  Funktionen von  $\varphi$  allein, so kann man auch die Bedingungen der geometrischen Möglichkeit anschreiben

$$(8) \quad \begin{cases} \sigma_r = rM \\ \sigma_t = rN \\ \tau = rL. \end{cases}$$

Die Bedingungen der statischen Möglichkeit lauten bei Berücksichtigung

von Massenkräften und wenn  $\gamma$  wieder das spezifische Gewicht,  $\psi$  aber den Winkel bedeutet, welchen die positive Richtung der Schwerkraft mit der Polarachse einschließt unter Beschränkung auf ebene Probleme:

$$(9) \quad \begin{cases} \sigma_r + r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \sigma_t + \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} - r\gamma \cos(\psi - \varphi) = 0, \\ 2\tau + r \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} - r\gamma \sin(\psi - \varphi) = 0. \end{cases}$$

Aus der Vereinigung der geometrischen und der statischen Bedingungen folgen zwei gewöhnliche Differentialgleichungen mit der unabhängigen Variablen  $\varphi$  und den abhängigen  $M$ ,  $N$ , und  $L$

$$(10) \quad \begin{cases} 2M - N + \frac{dL}{d\varphi} - \gamma \cos(\psi - \varphi) = 0, \\ 3L + \frac{dN}{d\varphi} - \gamma \sin(\psi - \varphi) = 0. \end{cases}$$

Die Gl. (8), (9), (10) gelten streng nur für vollkommen starre Körper, und wenn die Deformationsgrößen als unendlich klein angesehen werden können, unter Vernachlässigung von Gliedern höheren Kleinheitsgrades auch für nichtstarre.

Die Bestimmung des Spannungszustandes erfolgt durch Einführung der *Bedingungen für die elastische Möglichkeit* desselben.

Sind bei einem ebenen Probleme  $u$  und  $v$  die als unendlich klein angesehenen Zuwächse der Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  eines Massenpunktes und bedeuten  $\lambda_r$ ,  $\lambda_t$  die linearen Dilatationen in radialer, bzw. in tangentialer Richtung,  $\varepsilon_z$  den Schubwinkel in der betrachteten Ebene, so ist

$$(11) \quad \begin{cases} \lambda_r = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \lambda_t = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v}{\partial r}. \end{cases}$$

Bedeutend  $K$  und  $\Theta$  die Kirchhoffschen Elastizitätskonstanten und  $\nu$  die kubische Dilatation, so ist für ebene Probleme weiter

$$(12) \quad \begin{cases} \nu = \frac{1}{1 + \Theta} (\lambda_r + \lambda_t). \\ \begin{cases} \sigma_r = -2K(\lambda_r + \Theta\nu) = \frac{-2K}{1 + \Theta} [\lambda_r(1 + 2\Theta) + \lambda_t\Theta], \\ \sigma_t = -2K(\lambda_t + \Theta\nu) = \frac{-2K}{1 + \Theta} [\lambda_r\Theta + \lambda_t(1 + 2\Theta)], \\ \tau = -K\varepsilon_z. \end{cases} \end{cases}$$

Setzt man  $u = r^2 u'$  und  $v = r v'$ , wobei  $u'$  und  $v'$  nur mehr *Funktionen von  $\varphi$  allein* bedeuten, in die Gl. (11) ein und die so erhaltenen Werte für  $\lambda_r, \lambda_t$  und  $\varepsilon_z$  in die Gl. (12), so ergibt sich

$$(13) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{-2Kr}{1 + \Theta} \left[ u'(2 + 5\Theta) + \frac{dv'}{d\varphi} \Theta \right], \\ \sigma_t = \frac{-2Kr}{1 + \Theta} \left[ u'(1 + 4\Theta) + \frac{dv'}{d\varphi} (1 + 2\Theta) \right], \\ \tau = -Kr \left( \frac{du'}{d\varphi} + v' \right). \end{cases}$$

Die Gleichungen (8) werden somit durch diese Wahl befriedigt und es lassen sich durch Vergleich der Gleichungen (8) und (13) die Werte von  $M, N$  und  $L$ , ausgedrückt durch  $u', v'$  und die Elastizitätskonstanten unmittelbar ablesen. Wir setzen die so gefundenen Ausdrücke für  $M, N$  und  $L$  in die Gl. (10) ein, deren Integration nun möglich wird, weil sie nur mehr zwei abhängige Variable  $u'$  und  $v'$  enthalten. Man erhält zunächst

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{dv'}{d\varphi} (\Theta - 1) + 6u'(1 + 2\Theta) + \frac{d^2 u'}{d\varphi^2} (1 + \Theta) + \frac{\gamma(1 + \Theta)}{K} \cos(\psi - \varphi) = 0, \\ \frac{du'}{d\varphi} (5 + 11\Theta) + 3v'(1 + \Theta) + 2 \frac{d^2 v'}{d\varphi^2} (1 + 2\Theta) + \frac{\gamma(1 + \Theta)}{K} \sin(\psi - \varphi) = 0. \end{cases}$$

Nach dreimaliger Differentiation jeder dieser beiden Gleichungen kann man zwei Differentialgleichungen bilden, von welchen jede nur eine abhängige Variable enthält und welche bemerkenswerterweise vollkommen gleich gebaut und homogen sind. Sie lauten

$$\begin{aligned} \frac{d^4 u'}{d\varphi^4} + 10 \frac{d^2 u'}{d\varphi^2} + 9u' &= 0, \\ \frac{d^4 v'}{d\varphi^4} + 10 \frac{d^2 v'}{d\varphi^2} + 9v' &= 0. \end{aligned}$$

Wir schreiben das allgemeine Integral dieser Differentialgleichungen

$$(15) \quad \begin{cases} u' = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + C_3 \cos 3\varphi + C_4 \sin 3\varphi \\ v' = C_5 \sin \varphi + C_6 \cos \varphi + C_7 \sin 3\varphi + C_8 \cos 3\varphi. \end{cases}$$

Setzt man diese Ausdrücke in Gl. (14) ein, so gelangt man zu folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} [C_1(5 + 11\Theta) - C_5(1 - \Theta)] \cos \varphi + [C_2(5 + 11\Theta) + C_6(1 - \Theta)] \sin \varphi \\ - 3(1 - \Theta)(C_3 + C_7) \cos 3\varphi - 3(1 - \Theta)(C_4 - C_8) \sin 3\varphi \\ + \frac{\gamma}{K} (1 + \Theta) \cos(\psi - \varphi) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [C_1(5 + 11\Theta) - C_5(1 - \Theta)] \sin \varphi - [C_2(5 + 11\Theta) + C_6(1 - \Theta)] \cos \varphi \\ + 3(5 + 11\Theta)(C_3 + C_7) \sin 3\varphi - 3(5 + 11\Theta)(C_4 - C_8) \cos 3\varphi \\ - \frac{\gamma}{K} (1 + \Theta) \sin(\psi - \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Gleichungen für beliebige Werte von  $\varphi$  nur bestehen können, wenn

$$(16) \quad \begin{cases} C_5 = C_1 \frac{5+11\Theta}{1-\Theta} + \frac{\gamma}{K} \frac{1+\Theta}{1-\Theta} \cos \psi, & C_7 = -C_3, \\ C_6 = -C_2 \frac{5+11\Theta}{1-\Theta} - \frac{\gamma}{K} \frac{1+\Theta}{1-\Theta} \sin \psi, & C_8 = C_4. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der verbleibenden willkürlichen Konstanten  $C_1$  bis  $C_4$  gelangt man am raschesten, indem man mit Hilfe von Gl. (13), (15) und (16) die Spannungen  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$  und  $\tau$  bestimmt und folgendermaßen anschreibt:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= r\gamma \left[ \left( -4 \frac{KC_1}{\gamma} \cdot \frac{1+3\Theta}{1-\Theta} - \frac{1+\Theta}{1-\Theta} \cos \psi + \cos \psi \right) \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + \left( -4 \frac{KC_2}{\gamma} \cdot \frac{1+3\Theta}{1-\Theta} - \frac{1+\Theta}{1-\Theta} \sin \psi + \sin \psi \right) \sin \varphi - 4 \frac{KC_3}{\gamma} \cos 3\varphi - 4 \frac{KC_4}{\gamma} \sin 3\varphi \right], \\ \sigma_t &= r\gamma \left[ \left( -12 \frac{KC_1}{\gamma} \cdot \frac{1+3\Theta}{1-\Theta} - \frac{3(1+\Theta)}{1-\Theta} \cos \psi + \cos \psi \right) \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + \left( -12 \frac{KC_2}{\gamma} \cdot \frac{1+3\Theta}{1-\Theta} - \frac{3(1+\Theta)}{1-\Theta} \sin \psi + \sin \psi \right) \sin \varphi + 4 \frac{KC_3}{\gamma} \cos 3\varphi + 4 \frac{KC_4}{\gamma} \sin 3\varphi \right], \\ \tau &= r\gamma \left[ \left( -4 \frac{KC_1}{\gamma} \cdot \frac{1+3\Theta}{1-\Theta} - \frac{1+\Theta}{1-\Theta} \cos \psi \right) \sin \varphi \right. \\ &\quad \left. - \left( -4 \frac{KC_2}{\gamma} \cdot \frac{1+3\Theta}{1-\Theta} - \frac{1+\Theta}{1-\Theta} \sin \psi \right) \cos \varphi + 4 \frac{KC_3}{\gamma} \sin 3\varphi - 4 \frac{KC_4}{\gamma} \cos 3\varphi \right]. \end{aligned} \right.$$

Setzt man in den Gleichungen (17)

$$\begin{aligned} -4 \frac{KC_1}{\gamma} \cdot \frac{1+3\Theta}{1-\Theta} - \frac{1+\Theta}{1-\Theta} \cos \psi &= a, & 4 \frac{KC_3}{\gamma} &= c, \\ -4 \frac{KC_2}{\gamma} \cdot \frac{1+3\Theta}{1-\Theta} - \frac{1+\Theta}{1-\Theta} \sin \psi &= b, & 4 \frac{KC_4}{\gamma} &= d, \end{aligned}$$

so lauten sie

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= r\gamma [(a + \cos \psi) \cos \varphi + (b + \sin \psi) \sin \varphi - c \cos 3\varphi - d \sin 3\varphi], \\ \sigma_t &= r\gamma [(3a + \cos \psi) \cos \varphi + (3b + \sin \psi) \sin \varphi + c \cos 3\varphi + d \sin 3\varphi], \\ \tau &= r\gamma (a \sin \varphi - b \cos \varphi + c \sin 3\varphi - d \cos 3\varphi). \end{aligned} \right.$$

Aus der Bedingung, daß die Begrenzungsflächen ( $\varphi = \pm \Phi$ ) hier spannungslos sein müssen, ergeben sich die hierzu notwendigen Werte von  $a, b, c, d$ :

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{-\cos \psi \sin 3\Phi}{2(\sin \Phi + \sin 3\Phi)} = \frac{\cos \psi (4 \sin^2 \Phi - 3)}{8 \cos^2 \Phi}, \\ b &= \frac{\sin^2 \psi \cos 3\Phi}{2(\cos \Phi - \cos 3\Phi)} = \frac{\sin \psi (4 \cos^2 \Phi - 3)}{8 \sin^2 \Phi}, \\ c &= \frac{\cos \psi \cos \Phi}{2(3 \cos \Phi + \cos 3\Phi)} = \frac{\cos \psi}{8 \cos^2 \Phi}, \\ d &= \frac{-\sin \psi \sin \Phi}{2(3 \sin \Phi - \sin 3\Phi)} = \frac{-\sin \psi}{8 \sin^2 \Phi}. \end{aligned} \right.$$

Durch die Gleichungen (18) und (19) ist auch dieser Spannungszustand vollständig beschrieben.

Fall II und III geben zusammen die streng richtige Lösung des Spannungsproblems in einer Talsperre mit dreieckigem Profile, sofern man den Mauerkörper als einen elastisch isotropen und homogenen mit unendlich kleinen Deformationen ansehen darf und sofern die am Mauerfuß vorhandenen Spannungen diesem Verteilungsgesetze entsprechen, was allerdings niemals vorausgesetzt werden kann. Aber auch wenn man diesen Umstand berücksichtigt, wird man annehmen können, daß die Gl. (18) wenigstens für die vom Mauerfuß weiter entfernten Partien volle Gültigkeit haben, und daß sie selbst für den Mauerfuß in Betracht der kleinen Werte für  $\Phi$ , welche bei Staumauern auftreten, eine befriedigende Genauigkeit besitzen.

Die kleinsten Werte für  $\Phi$ , bei welchen einzelne der Konstanten  $a, b, c, d$  nach Gl. (7) und (19) unendlich groß werden, liegen bei  $\Phi = \frac{\pi}{2}$ .

Hat die Talsperre aber, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, nicht ein dreieckiges Profil, so kann man sich doch jede Stelle durch einen keilförmigen Körper ersetzt denken und kommt zu einem Resultate, welchem man viel Vertrauen wird entgegenbringen können, wenn man auf diesen keilförmigen Teil der Mauer die Formeln aus I, II und III anwendet und überdies die noch fehlenden Gewichte und Wasserdrücke als Einzelkräfte ansieht und nach den in der mehrfach erwähnten Abhandlung erörterten Grundsätzen in die Rechnung einführt. Eine genauere Besprechung dieses Vorganges überschreitet den Rahmen dieser Zeilen, deren Zweck es ist, auf die Fruchtbarkeit der Untersuchungen *perspektivischer Spannungszustände* neuerdings hinzuweisen.

## Die Ermittlung des Einflusses von Temperaturänderungen bei einem elastischen, an den Enden eingespannten Bogen-träger.

Von Dr.-Techn. KARL FEDERHOFER in Graz.

Der allgemein üblichen Berechnungsweise von elastischen Bogen-trägern liegen das Hookesche Gesetz und die Annahme geringer Formänderung zugrunde. Die damit gewonnenen Ergebnisse sind um so genauere Näherungswerte, je geringer die entstehende Formänderung, d. h. je steifer der betrachtete Bogen-träger ausgebildet ist.

Bei Entwicklung einer strengen Theorie der elastischen Bogenträger muß naturgemäß auf obige, die Untersuchungen erheblich vereinfachende Annahme verzichtet werden und es ist für die Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen eines Bogenelementes und für die Beurteilung des Kräftebildes der Bogenträger im deformierten Zustande zu betrachten.

Von dieser Anschauung ausgehend, hat man bis nun lediglich den an seinen frei beweglichen Enden durch Einzelkräfte oder Biegemomente belasteten Kreisbogen, sowie den gleichmäßig radial belasteten Kreisring behandelt.<sup>1)</sup> Außerdem hat der Verfasser in der unten angeführten Arbeit<sup>2)</sup> die strenge Theorie für den beliebig in seiner Ebene belasteten Kreisbogen entwickelt und gezeigt, daß deren Anwendung für die am häufigsten zu betrachtende Belastung — Einzellasten und gleichmäßig über die Bogensehne verteilte Belastung — recht umständlich werden würde; gleichzeitig wurden dortselbst schärfere Näherungsverfahren angegeben.

In der vorliegenden Arbeit soll nun der an den Enden undrehbar eingespannte Kreisbogenträger, der eine gleichmäßige Temperaturänderung erfährt, nach der genauen Theorie untersucht werden.

### 1. Gleichmäßige Temperaturerhöhung des Bogenmaterials.

Es bezeichne (s. die Fig.):

$r$  den Halbmesser des Kreisbogens,

$2l$  dessen Spannweite,

$f'$  die Pfeilhöhe,

$2\alpha$  den Mittelpunktswinkel,

$F$  den konstant gedachten Querschnitt des Bogens, lotrecht zur Achse genommen,

$I$  das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die zur Bogenebene senkrechte Schwerpunktsachse,

$E$  den Elastizitätsmodul des Bogenmaterials, endlich

$B = EI$  die Biegesteifigkeit des Querschnittes für die genannte Schwerpunktsachse.

Die Krümmung  $K$  der elastischen Linie eines lediglich an den Enden belasteten Kreisbogens ist an der Stelle  $\vartheta$  (s. die Fig.) gegeben durch:

$$(1) \quad K^2 = K_0^2 + \frac{2Q_0}{B} \sin \vartheta + \frac{2P_0}{B} (\cos \vartheta - 1),$$

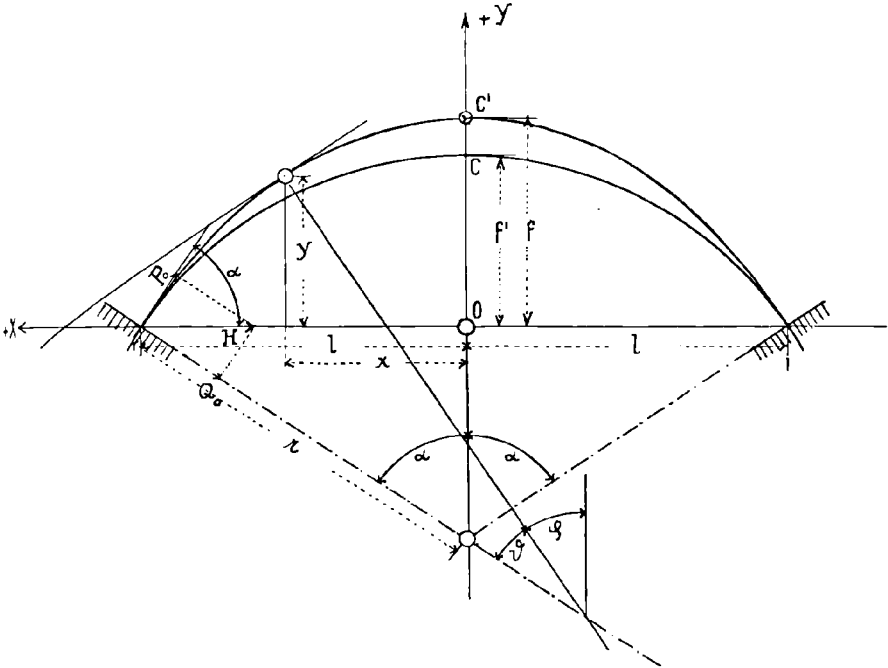
1) J. Larmor, London Math. Soc. Proc., vol. 15 (1884); ferner M. Lévy, Journ. de Math. (Liouville), Sér. 3. t. 10. (1884).

2) Federhofer, „Zur strengen Theorie der Bogenträger“. Wochenschrift f. den öffentl. Baudienst, 1911.



worin mit  $K_0$  die Krümmung der elastischen Linie für  $\vartheta = 0$ , im vorliegenden Falle für die linke Einspannstelle, bezeichnet ist, während  $Q_0$  und  $P_0$  die dort entstehende Quer- und Längskraft (radial und tangential wirkend) bedeuten.

Da die Resultierende der Kräfte  $Q_0$  und  $P_0$  wegen des Fehlens jeder äußeren Kraft die in der Kämpferverbindungsline wirkende Kraft



$H$  liefern und ferner die Tangenten an die elastische Linie in den Kämpfern mit der Richtung von  $H$  wegen der dort vorausgesetzten Einspannung den Winkel  $\alpha$  bilden muß, so gilt:

$$Q_0 = H \sin \alpha$$

$$P_0 = H \cos \alpha,$$

und demnach für die Krümmung:

$$K^2 = K_0^2 + \frac{2H}{B} [\cos(\alpha - \vartheta) - \cos \alpha],$$

oder, wenn  $\alpha - \vartheta = \varphi$  gesetzt wird:

$$(2) \quad K^2 = K_0^2 + \frac{2H}{B} (\cos \varphi - \cos \alpha).$$

Der Größtwert der Krümmung ergibt sich hiernach für  $\varphi = 0$  und beträgt:

$$(3) \quad K_\alpha^2 = K_0^2 + \frac{2H}{B} (1 - \cos \alpha) = K_0^2 + \frac{4H}{B} \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Damit geht nun Gleichung (2) über in:

$$K^2 = K_\alpha^2 - \frac{4H}{B} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

oder endlich:

$$(4) \quad K^2 = K_\alpha^2 \left[ 1 - \frac{K_\alpha^2 - K_0^2}{K_\alpha^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right].$$

Es wird bemerkt, daß gemäß (3) die Krümmung in Bogenmitte stets größer als an den Kämpfern ist und daß daher die Konstante:

$$c^2 = \frac{K_\alpha^2 - K_0^2}{K_\alpha^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

unter der Voraussetzung:  $-K_0 > K_\alpha \cos \frac{\alpha}{2}$  — stets kleiner als die Einheit ist; letztere Voraussetzung ist für die im Brückenbaue in Betracht kommenden, genügend steif konstruierten und nicht allzu flachen Bogenträger stets erfüllt.

Wird die Bogenlänge der elastischen Linie von  $C'$  (s. die Fig.) aus gemessen, so haben wir:

$$\frac{d\varphi}{ds} = K,$$

und daher in Verbindung mit (4) die Differentialgleichung:

$$\left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = K_\alpha^2 \left[ 1 - c^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right],$$

welche sich bekanntlich durch elliptische Funktionen befriedigen läßt. Führen wir nun Jacobische elliptische Funktionen vom Modul  $c$  ein, deren Argument  $u$  durch:

$$u = \frac{s K_\alpha}{2}$$

bestimmt ist, so haben wir:

$$(5) \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \operatorname{sn} u, \quad \frac{d\varphi}{du} = 2 \operatorname{dn} u.$$

Die elastische Linie werde auf ein rechtwinkliges Achsensystem bezogen, dessen Ursprung 0 in Spannweitemitte liege und dessen  $x$ -Achse in die Kämpfersehne falle; hiefür ist dann:

$$dx = ds \cos \varphi, \quad dy = - ds \sin \varphi$$

oder nach (5):

$$(6) \quad \begin{cases} dx = + \frac{2}{K_\alpha} (1 - 2 \operatorname{sn}^2 u) du \\ dy = - \frac{4}{K_\alpha} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u du. \end{cases}$$

Unter Bedachtnahme darauf, daß für  $s = 0$  die Abszisse  $x$  verschwindet und daß an den Kämpfern, wo  $s = \sigma$  ( $\sigma =$  halbe Bogenlänge der elastischen Linie) die Ordinate ( $y$ ) gleich Null sein muß, erhält man durch Integration von (6) die Gleichung der elastischen Linie in Parameterform:

$$(7) \quad \begin{cases} x = \frac{2}{K_\alpha} \left[ \left(1 - \frac{2}{c^2}\right) u + \frac{2}{c^2} \mathfrak{E} \operatorname{am} u \right] \\ y = \frac{4}{K_\alpha c^2} \operatorname{dn} u \Big|_{u=u_\alpha}^{u=u} \end{cases}$$

worin 
$$\mathfrak{E} \operatorname{am} u = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u \, du$$

das elliptische Normalintegral zweiter Gattung vom Modul  $c$  darstellt.

Nach (7) ist die Formänderung dann vollkommen festgelegt, wenn die noch unbekanntenen Werte  $K_\alpha$  und  $c$  ermittelt sind; die zwei hiefür erforderlichen Gleichungen erhält man in folgender Weise:

1. Da die Kämpfer Punkte der elastischen Linie sind, so muß für  $u = u_\alpha$ , wenn  $u_\alpha = \frac{\sigma K_\alpha}{2}$ , die Abszisse  $x = l$  sein, woraus die Bedingungsgleichung:

$$(8) \quad l = \frac{2}{K_\alpha} \left[ \left(1 - \frac{2}{c^2}\right) u_\alpha + \frac{2}{c^2} \mathfrak{E} \operatorname{am} u \right]$$

folgt.

2. Beträgt die Temperaturerhöhung  $t^0$  und der Ausdehnungskoeffizient des Bogenmaterials  $\omega$ , so ist die entstehende Dehnung  $\epsilon_0$  der Bogenachse bekanntlich durch:

$$\epsilon_0 = \omega t - \frac{P}{EF}$$

ausgedrückt, worin  $P$  die an dem betrachteten Querschnitt hervorgerufene Längskraft ( $H \cos \varphi$ ) darstellt. Dann muß offenbar, wenn noch  $\epsilon_0$  die halbe Länge des Kreisbogens bezeichnet, folgende Beziehung bestehen:

$$\int_{s=0}^{s=\sigma} \epsilon_0 \, ds = \sigma - \sigma_0,$$

welche bei Berücksichtigung des für  $\epsilon_0$  angegebenen Wertes und nach Ausführung der Integration übergeht in:

$$(9) \quad \sigma(1 - \omega t) - \sigma_0 = - \frac{H}{EF} \frac{2}{K_\alpha} \left[ \left(1 - \frac{2}{c^2}\right) u_\alpha + \frac{2}{c^2} \mathfrak{E} \operatorname{am} u \right].$$

Die Verbindung von Gleichung (8) und (9) liefert das einfache Ergebnis:

$$(10) \quad \sigma = \frac{\sigma_0 - \frac{Hl}{EF}}{1 - \omega t},$$

wonach die Bogenlänge der elastischen Linie leicht zu ermitteln ist. Aus den eben aufgestellten Bedingungsgleichungen ergeben sich die beiden Unbekannten  $k_\alpha$  und  $c^2$  zu:

$$k_\alpha = \frac{2u_\alpha}{\sigma} \cdot \frac{\xi \operatorname{am} u}{\frac{l}{\sigma} - 1} - 1$$

(11)

$$c^2 = 2 - \frac{u_\alpha}{\frac{l}{\sigma} - 1}$$

Da zur Ermittlung von  $u_\alpha$  und  $\xi \operatorname{am} u$  ausführliche Tabellen<sup>1)</sup> zur Verfügung stehen, so gestaltet sich die Auswertung der Gleichungen (11) nicht sonderlich mühsam; allerdings läßt sich die Berechnung der Werte  $k_\alpha$ ,  $k_0$  und  $H$  nach der üblichen Näherungstheorie nicht umgehen, da diese Werte zur vorläufigen Ermittlung des Moduls  $c^2$  herangezogen werden müssen.

Sind  $K_\alpha$  und  $c^2$  ermittelt, so bestimmt sich aus den Beziehungen:

$$c^2 = \frac{K_\alpha^2 - K_0^2}{K_\alpha^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{4H}{K_\alpha^2 B}$$

sowohl die Krümmung  $K_0$  als auch die Horizontalkraft  $H$ . Damit sind auch die Biegemomente, die nach der bekannten Formel:

$$M = -B \left( K - \frac{1}{r} \right)$$

zu rechnen sind, bestimmt. Es ist:

das Scheitelmoment:  $M_\alpha = -B \left( K_\alpha - \frac{1}{r} \right)$ ,

das Kämpfermoment:  $M_0 = -B \left( K_0 - \frac{1}{r} \right)$ .

Schließlich liefert die Gleichung (7) für  $\varphi = 0$  die Scheitelordinate  $f$  (s. die Fig.) der elastischen Linie:

$$(12) \quad f = \frac{4}{c^2 K_\alpha} \operatorname{dn} u \Big|_{u_\alpha}^0 = \frac{4}{c^2 K_\alpha} \left[ 1 - \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right],$$

so daß aus der Differenz  $f - f'$  die lotrechte Verschiebung des Bogen-scheitels berechnet werden kann.

## 2. Gleichmäßige Temperaturerniedrigung des Bogenmaterials.

Erfährt das Bogenmaterial eine gleichmäßige Temperaturerniedrigung, d. h. wird der Wert  $t^0$  negativ, so ist der Richtungssinn der

1) „Funktionentafeln mit Formeln und Kurven“ von Dr. E. Jahnke und Ing. Fritz Emde, Leipzig u. Berlin 1909.

Horizontalkraft  $H$  dem früher gewählten entgegengesetzt. Die Krümmung ist daher gemäß Gleichung (2) ausgedrückt durch:

$$(13) \quad K^2 = K_0^2 - \frac{2H}{B}(\cos \varphi - \cos \alpha).$$

Wird die Krümmung im Bogenscheitel wieder mit  $k_\alpha$  bezeichnet, d. h. wird:

$$(14) \quad K_\alpha^2 = K_0^2 - \frac{2H}{B}(1 - \cos \alpha) = K_0^2 - \frac{4H}{B} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

gesetzt, so läßt sich Gleichung (13) zunächst überführen in:

$$K^2 = K_\alpha^2 \left[ 1 + \frac{K_0^2 - K_\alpha^2}{K_\alpha^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right].$$

Zwecks weiterer Umformung werde nun der gemäß (14) stets positive Ausdruck:

$$\frac{K_0^2 - K_\alpha^2}{K_\alpha^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = d^2$$

gesetzt und sodann die Substitution  $\pi - \varphi = \psi$ ,  $-d\varphi = d\psi$  angewendet, so daß entsteht:

$$(16) \quad \left( \frac{d\psi}{ds} \right)^2 = K_\alpha^2 (1 + d^2) \left[ 1 - \frac{d^2}{1 + d^2} \sin^2 \frac{\psi}{2} \right].$$

Zur Integration dieser Differentialgleichung führen wir Jacobische elliptische Funktionen vom Modul  $c_1$  und Argument  $u$  ein, welche durch:

$$c_1^2 = \frac{d^2}{1 + d^2}, \quad u = F\left(c_1 \frac{\pi}{2}\right) - k_\alpha \frac{d}{2c_1} s$$

gegeben sind, worin  $F\left(c_1 \frac{\pi}{2}\right) = K$  das vollständige elliptische Normalintegral erster Gattung bedeutet. Dann haben wir zunächst:

$$\sin \frac{\psi}{2} = \operatorname{sn} u, \quad \frac{d\psi}{du} = 2 \operatorname{dn} u$$

und des weiteren für die Gleichung der elastischen Linie bezüglich eines wie früher gewählten Achsensystems:

$$(17) \quad \begin{cases} x = \frac{2c_1}{K_\alpha d} \left[ \left(1 - \frac{2}{c_1^2}\right) (u - F) + \frac{2}{c_1^2} \xi_{u=F}^{\operatorname{am} u} \right] \\ y = - \frac{4}{K_\alpha d c_1} \operatorname{dn} u \Big|_{u_\alpha}^u. \end{cases}$$

Zur vollständigen Bestimmung der Formänderung ist also die Kenntnis der Krümmung im Scheitel  $K_\alpha$  und des Moduls  $c_1$  erforderlich. Die

bezüglichen Bedingungsgleichungen ergeben sich unter Zugrundelegung der im Abschnitt 1 hiezu angestellten Überlegung, und lauten:

$$(18) \quad \begin{cases} l = \frac{2c_1}{K_\alpha d} \left[ \left(1 - \frac{2}{c_1^2}\right) (u_\alpha - F) + \frac{2}{c_1^2} \int_{u=F}^u \xi \operatorname{am} u \right] \\ \sigma(1 + \omega t) - \sigma_0 = \frac{2c_1}{K_\alpha d} \frac{H}{EF} \left[ \left(1 - \frac{2}{c_1^2}\right) (u_\alpha - F) + \frac{2}{c_1^2} \int_{u=F}^u \xi \operatorname{am} u \right]. \end{cases}$$

Hieraus folgt zunächst für die halbe Bogenlänge der elastischen Linie der Wert:

$$(19) \quad \sigma = \frac{\sigma_0 + \frac{Hl}{EF}}{1 + \omega t}.$$

Es wird bemerkt, daß sowohl  $H$  als auch  $\int$  mit dem absoluten Werte einzuführen sind. Die Gleichungen (18) ergeben nun die Unbekannten  $K_\alpha$  und  $c_1^2$ , und zwar ist:

$$(20) \quad \begin{aligned} c_1^2 &= 2 \frac{1 + \frac{F}{F - u_\alpha}}{1 + \frac{l}{\sigma}} \\ K_\alpha &= 2 \frac{F - u_\alpha}{\sigma} \frac{c_1}{d} \end{aligned}$$

Aus den Beziehungen:

$$d^3 = \frac{K_0^3 - K_\alpha^3}{K_\alpha^3 \sin^3 \frac{\alpha}{2}} = \frac{4H}{B K_\alpha^2}$$

können weiter die Werte  $K_0$  und  $H$  bestimmt werden. Die Berechnung des Scheitel- und Kämpfermoments geschieht wieder wie vorhin.

Schließlich ergibt Gleichung (17) die Scheitelordinate  $f$  der elastischen Linie:

$$(21) \quad f' = - \frac{4}{K_\alpha d c_1} \operatorname{dn} u \Big|_{u=u_\alpha}^{u=F} = \frac{4}{K_\alpha d c_1} \left( \sqrt{1 - c_1^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \sqrt{1 - c_1^2} \right).$$

### 3. Vergleich mit der Näherungstheorie.

Nach den entwickelten Formeln können für jede Temperaturänderung die zur Dimensionierung des Bogens und zur Bestimmung seiner Formänderung erforderlichen Werte bestimmt werden. Die eingangs erwähnte Näherungstheorie liefert hierfür bekanntlich:

$$\begin{aligned} f' - f &= \frac{r \omega t}{N} \alpha (1 - \cos \alpha) (\alpha - \sin \alpha), \\ M_0 &= \frac{B \omega t}{r N} \alpha (\sin \alpha \cos \alpha - \alpha), \\ M_\alpha &= \frac{B \omega t}{r N} \alpha (2 \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - \alpha), \\ H &= - \frac{2 B \omega t}{r^2 N} \alpha \sin \alpha, \end{aligned}$$

worin abkürzungsweise der Nenner:

$$2 \sin^2 \alpha - \alpha \varepsilon \sin \alpha \cos \alpha - \alpha^2 \varepsilon = N$$

gesetzt ist;  $\varepsilon$  ist genau genug gleich 1, der genaue Wert beträgt:  $1 + (I : F r^2)$ .

Um nun den Unterschied in den Resultaten einer nach beiden Methoden hinsichtlich des Temperatureinflusses berechneten *Bogenbrücke* zu erkennen und hiernach die Zulässigkeit der eingangs hervorgehobenen Annahme geringer Formänderung bei Berechnung von Brücken beurteilen zu können, wurde nachstehendes Zahlenbeispiel gerechnet, dem ein an den Enden eingespannter kreisförmiger Blechbogenträger konstanten Querschnitts zugrunde gelegt ist, der eine maximale Temperaturänderung von  $t = \pm 30^\circ \text{C}$  erfährt und folgende Ausmaße besitzt:

$$2l = 60,0 \text{ m}; f' = 10,0 \text{ m}; \left(\frac{f'}{2l} = \frac{1}{6}, \text{ der Bogen ist also flach},\right.$$

$$F = 0,1428 \text{ m}^2; I : F = \frac{h^2}{9}, \text{ worin die Querschnittshöhe } h = 1,7 \text{ m};$$

$$E = 2 \times 10^7 \text{ t/m}^2; \omega = 0,0000124.$$

Die bezüglichen Ergebnisse sind in nachstehender Zusammenstellung vereinigt.

	Horizontalkraft	Einspannmoment	Scheitelmoment	Ver-schiebung d. Bogenmitte	Maximale Inanspruchnahme	
	$H$ i. Tonn.	$M_0$ in t.m	$M_a$ in t.m	$f' - f$ i. m	im Kämpfer	im Scheitel
					kg p. cm <sup>2</sup>	kg p. cm <sup>2</sup> *
Näherungstheorie.	$\pm 41,979$	$\pm 285,433$	$\mp 134,358$	$\mp 0,041^2$	552,62	278,46
Genauere Theorie (Temp.-Erhöhung)	42,418	+ 280,584	- 145,176	- 0,037 <sup>3</sup>	543,88	298,50
Genauere Theorie (Temp. - Erniedrigung) . . . . .	41,977	- 296,660	+ 121,102	+ 0,048 <sup>2</sup>	573,43	253,88

Diese Zusammenstellung lehrt also, daß die Unterschiede gegenüber den Werten der Näherungstheorie sowohl hinsichtlich der Horizontalkraft als auch der Biegemomente nur wenige Hundertteile betragen; das Gleiche gilt auch für die größten Inanspruchnahmen, die in den Kämpfern entstehen.

Es ist also für Bogen, die zu Brückenträgern<sup>1)</sup> verwendet werden, ohne weiteres die Annahme geringer Formänderung und sonach die Be-

1) Der gewählte Bogen vermag bei einer zugelassenen Inanspruchnahme von 900 kg pro cm<sup>2</sup> außer seinem Eigengewichte noch eine gleichmäßig über die Bogensehne verteilte Last von rund 0,93 t/m zu tragen, wobei auf den Einfluß der Temperaturänderung von 30° C. Rücksicht genommen ist.

rechnung derselben nach den Formeln der hierauf aufgebauten Näherungstheorie zulässig.

Für sehr weit gespannte Bogenträger (etwa über 100 m) empfehle ich jedoch die Berechnung der durch Temperaturänderungen hervorgerufenen Spannungen, die, wie wir eben gesehen haben, sehr beträchtliche Werte erreichen, nach den genauen Formeln; die hierdurch verursachte, nicht sehr bedeutende Rechenarbeit wird durch die gebotene Möglichkeit einer vollständig sicheren Beurteilung der entworfenen Konstruktion aufgewogen.

## Ein Mittel zur Vermeidung wiederholter Divisionen bei der Newtonschen Näherungsmethode.

Von Dr. LOTHAR VON SCHRUTKA in Wien.

1. Einleitung. Eine Näherungsmethode Cauchys. Um die bei der Anwendung der Newtonschen Methode auf die Berechnung von  $\sqrt[n]{N}$  notwendigen wiederholten Divisionen zu vermeiden, hat A. Cauchy (Comptes rendus, Paris, 11 (1840) S. 857; Oeuvres I 5, Paris 1885, S. 454) eine Modifikation dieses Verfahrens angegeben. Statt der Formel

$$x_1 = x_0 + \frac{N - x_0^n}{n x_0^{n-1}},$$

die aus einem Näherungswert  $x_0$  einen besseren  $x_1$  finden lehrt, setzt er nämlich

$$x'_1 = x_0 + \frac{1}{nN} x_0 (N - x_0^n),$$

indem er sich darauf stützt, daß

$$\frac{1}{x_0^{n-1}} \doteq \frac{x_0}{N}$$

ist. Bei der Anwendung dieser zweiten Formel kann  $\frac{1}{nN}$  ein für allemal berechnet werden und die weiteren Schritte erfordern keine Divisionen mehr.

Es soll im folgenden gezeigt werden, daß sich durch eine entsprechende Modifikation bei beliebigen Gleichungen, die nur algebraisch und von Doppelwurzeln befreit sein müssen, dasselbe erreichen läßt. Allerdings ist das Verfahren im allgemeinen Fall weit verwickelter, wodurch sein praktischer Wert einigermaßen eingeschränkt wird. Ferner soll hier auch mit einigen Worten auf die Güte der Konvergenz des modifizierten Verfahrens im Vergleich zu dem gewöhnlichen Newtonschen Verfahren eingegangen werden.



Dieses (wie auch andere) Hilfsmittel zur Vermeidung von Divisionen sind von besonderem Wert beim Rechnen mit der Rechenmaschine. In der Tat erscheint ja der Vorteil, den die Maschine dem Rechnen mit Papier und Schreibstift gegenüber bietet, auf ein Minimum reduziert, sobald es sich um Divisionen handelt, bei denen der Divisor wegen zu großer Stellenzahl nicht mehr im Schaltwerk eingestellt werden kann.

2. Beschränkung der Divisionen bei der Newtonschen Näherungsmethode. Die algebraische Gleichung, um deren Auflösung es sich handelt, sei

$$f(x) = 0.$$

Ihr Grad werde mit  $n$  bezeichnet. Ist  $x_0$  ein Näherungswert einer Wurzel, so liefert (unter gewissen Voraussetzungen, auf die hier nicht näher eingegangen werden möge) die Newtonsche Näherungsmethode in

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

einen besseren.

Nun wird in der Algebra der Satz bewiesen (s. z. B. Netto, Algebra, I. Band, S. 181), daß die Diskriminante der Funktion  $f(x)$

$$(*) \quad \Delta = f(x) \varphi(x) + f'(x) \psi(x)$$

gesetzt werden kann, wo  $\varphi(x)$  eine ganze Funktion  $(n - 2)$ -ten,  $\psi(x)$  eine ganze Funktion  $(n - 1)$ -ten Grades bedeutet. Für  $x = x_0$  erhält man

$$\Delta = f(x_0) \varphi(x_0) + f'(x_0) \psi(x_0),$$

und da  $f(x_0)$  nach Voraussetzung eine kleine Größe ist,

$$\frac{1}{f'(x_0)} \doteq \frac{\psi(x_0)}{\Delta}.$$

Somit kann statt  $x_1$ , das ohnedies nur eine Näherung darstellt, die Größe

$$x'_1 = x_0 - \frac{1}{\Delta} \cdot \psi(x_0) \cdot f(x_0)$$

genommen werden.

Hat man nun die Größe  $\frac{1}{\Delta}$  einmal berechnet, so erfordern die weiteren Schritte

$$x'_2 = x'_1 - \frac{1}{\Delta} f(x'_1) \psi(x'_1)$$

.....

keine Divisionen mehr.

3. Anwendung auf einige spezielle Fälle. Das größte Hindernis für die Anwendung der angegebenen Formel ist die Schwierigkeit der Berechnung von  $\psi(x)$ . Man hat zwar die Wahl zwischen verschiedenen

Methoden: Euklidischer Algorithmus (oder Kettenbruchentwicklung), Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten, Verwendung der dialytischen Methode der Diskriminantendarstellung oder, allerdings am allerumständlichsten, Rationalmachen des Nenners in  $\frac{1}{f'(x)}$ , wird aber zumeist auf diese Rechnung die meiste Mühe verwenden müssen.

Einige einfache Fälle können allgemein durchgeführt werden. Der Fall der reinen Gleichung

$$f(x) \equiv x^n - N = 0$$

führt auf Cauchys Formel zurück. In der Tat ist

$$\Delta \equiv n^n N^{n-1} = -n^n N^{n-2} f(x) - n^{n-1} N^{n-2} x f'(x),$$

somit

$$\psi(x) = -n^{n-1} N^{n-2} x$$

und

$$\frac{1}{f'(x_0)} \doteq \frac{\psi(x_0)}{\Delta} = -\frac{x_0}{nN},$$

also

$$x'_1 = x_0 + \frac{x_0}{nN} \cdot (N - x_0^n),$$

wie vorhin.

Für die quadratische Gleichung

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c = 0$$

hat man:

$$\Delta \equiv 4ac - b^2 = 4a \cdot f(x) - (2ax + b)f'(x),$$

somit

$$\psi(x) = -(2ax + b),$$

$$\frac{1}{f'(x_0)} \doteq \frac{\psi(x_0)}{\Delta} = -\frac{2ax_0 + b}{4ac - b^2},$$

$$x'_1 = x_0 - \frac{2ax_0 + b}{4ac - b^2} \cdot f(x_0).$$

Für die kubische Gleichung

$$f(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

hat man

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv 27a^2d^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2 \\ &= [(-18a^2c + 6ab^2)x + (27a^2d - 15abc + 4b^3)]f(x) \\ &\quad + [(6a^2c - 2ab^2)x^2 + (7abc - 9a^2d - 2b^3)x + (4ac - 3abd - b^2c)]f'(x), \end{aligned}$$

somit  $\psi(x)$  gleich dem zweiten Ausdruck in [ ]; die Formel für  $x'_1$  wäre jetzt leicht zu bilden.

Im speziellen Fall der reduzierten kubischen Gleichung,

$$f(x) \equiv x^3 + px + q = 0,$$

wird erheblich einfacher

$$\Delta \equiv 27q^2 + 4p^3 = [-18px + 27q]f(x) + [6px^2 - 9qx + 4p^2]f'(x),$$

somit

$$\psi(x) = 6px^2 - 9qx + 4p^2,$$

$$x'_1 = x_0 - \frac{6px_0^2 - 9qx_0 + 4p^2}{27q^2 + 4p^3} \cdot f(x_0).$$

Für die reduzierte biquadratische Gleichung

$$f(x) \equiv x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

hat man

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144pq^2r - 27q^4 + 256r^3 \\ &= [(8p^3 - 32pr + 36q^2)x^2 + (-4p^3q - 36qr)x \\ &\quad + (16p^4 - 128p^2r + 96pq^2 + 256r^2)]f(x) \\ &\quad + [(-8p^3 + 32pr - 36q^2)x^3 + (4p^2q + 36qr)x^2 \\ &\quad + (-8p^4 - 48p^2r - 42pq^2 - 64r^2)x + (-4p^3q + 48pqr - 27q^3)]f'(x); \end{aligned}$$

die Formel für  $x'_1$  ist wieder sofort zu bilden.

**4. Konvergenzgeschwindigkeit der auseinandergesetzten Näherungsmethode.** Um sich über die Konvergenzgeschwindigkeit der Näherungsformeln ein Urteil bilden zu können, benütze man die Taylorsche Entwicklung. Sie lautet, wenn die (nach Voraussetzung kleine) Größe  $f(x_0)$  mit  $\varepsilon$  bezeichnet wird,

$$f(x_0 + h) = \varepsilon + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \dots$$

Wird nun für  $h$  einmal

$$-\frac{\varepsilon}{f'(x_0)},$$

dann wieder

$$-\frac{\varepsilon\psi(x_0)}{\Delta}$$

eingeführt, so ergibt sich

$$f(x_1) = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{f'(x_0)} f'(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2f'^2(x_0)} f''(x_0) + \dots = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{f''(x_0)}{f'^2(x_0)} + ( )_3,$$

wo  $( )_k$  allgemein Ausdrücke bezeichnet, die  $\varepsilon$  mindestens in der  $k$ -ten Potenz enthalten, und

$$\begin{aligned} f(x'_1) &= \varepsilon - \frac{\varepsilon\psi(x_0)}{\Delta} f'(x_0) + \frac{\varepsilon^2\psi^2(x_0)}{2\Delta^2} f''(x_0) + \dots \\ &= \varepsilon \left( 1 - \frac{\psi(x_0)f'(x_0)}{\Delta} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\psi^2(x_0)f''(x_0)}{\Delta^2} + ( )_3. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \Delta &= \varepsilon\varphi(x_0) + f'(x_0)\psi(x_0), \\ 1 - \frac{\psi(x_0)f'(x_0)}{\Delta} &= \frac{\varepsilon\varphi(x_0)}{\Delta}, \end{aligned}$$

also

$$f(x'_1) = \varepsilon^2 \left( \frac{\varphi(x_0)}{\Delta} + \frac{1}{2} \frac{\psi^2(x_0)f''(x_0)}{\Delta^2} \right) + ( )_3.$$

Die Koeffizienten bei  $\varepsilon^2$  in den beiden Formeln können noch umgeformt werden. Wird die Identität (\*) differenziert, so entsteht

$$0 = f(x)\varphi'(x) + f'(x)[\varphi(x) + \psi'(x)] + f''(x)\psi(x)$$

und für  $x = x_0$

$$(**) \quad f''(x_0)\psi(x_0) = -f'(x_0)[\varphi(x_0) + \psi'(x_0)] + ( )_1.$$

Multipliziert man mit  $f'(x_0)$  und ersetzt  $f'(x_0)\psi(x_0)$  durch seinen Wert  $\mathcal{A} + ( )_1$ , so wird daraus

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f''(x_0) &= -f'^2(x_0)[\varphi(x_0) + \psi'(x_0)] + ( )_1, \\ \frac{f''(x_0)}{f'^2(x_0)} &= -\frac{1}{\mathcal{A}}[\varphi(x_0) + \psi'(x_0)] + ( )_1, \end{aligned}$$

also ist

$$f(x_1) = \frac{1}{2\mathcal{A}}[-\varphi(x_0) - \psi'(x_0)] \cdot \varepsilon^2 + ( )_3.$$

Multipliziert man (\*\*\*) andererseits mit  $\psi(x_0)$  und macht dieselbe Ersetzung nun auf der rechten Seite, so ergibt sich

$$\begin{aligned} f''(x_0)\psi^2(x_0) &= -\mathcal{A}[\varphi(x_0) + \psi'(x_0)] + ( )_1, \\ \frac{\varphi(x_0)}{\mathcal{A}} + \frac{1}{2} \frac{f''(x_0)\psi^2(x_0)}{\mathcal{A}^2} &= \frac{1}{2\mathcal{A}}[\varphi(x_0) - \psi'(x_0)] + ( )_1, \end{aligned}$$

somit

$$f(x_1) = \frac{1}{2\mathcal{A}}[\varphi(x_0) - \psi'(x_0)]\varepsilon^2 + ( )_5.$$

Diese beiden Formeln liefern folgendes Resultat. Sobald  $\varepsilon$  genügend klein geworden ist, die Annäherung also einen gewissen Grad erreicht hat, geben die Glieder mit  $\varepsilon^2$  den Ausschlag.

Je nachdem daher  $\varphi(x_0)$  und  $\psi'(x_0)$  ungleich- oder gleichbezeichnet sind, ist  $x_1$  oder  $x'_1$  der bessere Näherungswert.

Daß dieser zweite Fall wirklich eintreten kann, möge durch ein Beispiel belegt werden. Die Gleichung

$$f(x) \equiv x^3 - 3x + 6 = 0$$

hat eine Wurzel nahe bei  $x_0 = -2.4$ . Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3, \quad \mathcal{A} = 864, \\ \varphi(x) &= 54x + 162; \quad \psi(x) = -18x^2 - 54x + 36, \\ \psi'(x) &= -36x - 54, \end{aligned}$$

also

$$\varphi(x_0) = 32.4, \quad \psi'(x_0) = 32.4,$$

ferner

$$\begin{aligned} x_1 &= -2.35630, & x'_1 &= -2.35528; \\ f(x_1) &= -0.01363, & f(x'_1) &= 0.00030. \end{aligned}$$

Der genaue Wert der Wurzel ist 2.3553014...

5. Anwendung der Resultate in Nr. 4 auf Cauchys Formel. Bei der Cauchyschen Methode für die Gleichung  $x^n - N = 0$  ist

$$\varphi(x) = -n^n N^{n-2}, \quad \psi'(x) = n^{n-1} N^{n-2};$$

beide Funktionen sind also in diesem Falle Konstante und zwar ungleichbezeichnet. Die Newtonsche Formel ist also bei dieser Gleichung stets die genauere, allerdings zeigen die Formeln

$$f(x_1) = \frac{1}{2n^n N^{n-1}} [n^n N^{n-2} - n^{n-1} N^{n-2}] \varepsilon^2 + ( )_3 = \frac{n-1}{2nN} \varepsilon^2 + ( )_3,$$

$$f(x'_1) = \frac{1}{2n^n N^{n-1}} [-n^n N^{n-2} - n^{n-1} N^{n-2}] \varepsilon^2 + ( )_3 = -\frac{n+1}{2nN} \varepsilon^2 + ( )_3,$$

daß der Unterschied in der Annäherung um so geringer wird, je höher der Wurzelexponent  $n$  ist.

Wien, am 17. April 1911.

## Zur Darstellung des Drehungsellipsoids in Parallelperspektive.

VON G. MAJČEN in Agram.

Zur Bestimmung des scheinbaren Umrisses eines Drehungsellipsoids kann die Affinität mit der Kugel auch in der Parallelperspektive vorteilhaft benützt werden. Behandelt man die Bestimmung des scheinbaren Umrisses für eine gegebene Sehstrahlenrichtung als eine Schattenkonstruktion, so bieten die betreffenden Operationen Vereinfachungen, welche eine einfache Anwendung für die Lösung der verlangten Umrißbestimmung im Sinne der Parallelperspektive mit einer geringen Anzahl von Linien gestatten.<sup>1)</sup>

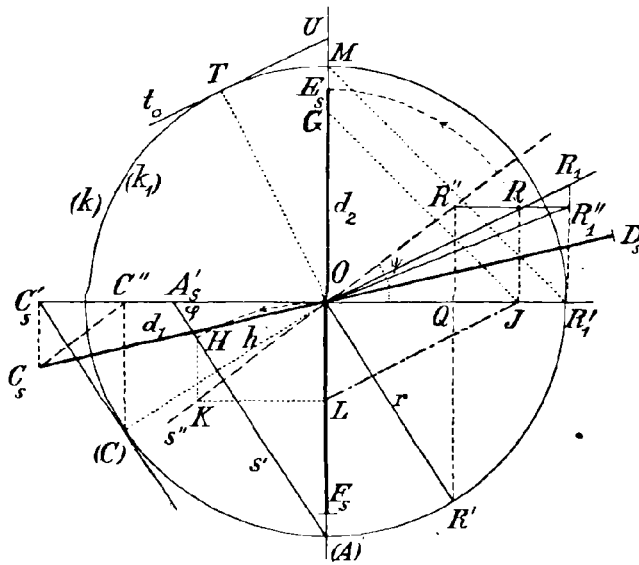
Dieses abgekürzte Verfahren soll im Folgenden für drei Lagen des Drehungsellipsoids durchgeführt werden. Für alle diese Lagen ist der Mittelpunkt  $O$  der Fläche in der Bildebene angenommen. Als Äquatorebene ist in der ersten Lage die Horizontalebene, in der zweiten Lage die Bildebene, in der dritten die auf der  $x$ -Achse senkrecht stehende Ebene gewählt. Es zeigt sich hierbei, daß mit Rücksicht auf die zu benützende Affinität diejenigen zur Bestimmung des scheinbaren Um-

1) Im Aufsätze: *Ein Beitrag zur Zentralprojektion des Ellipsoids*, „Rad“ der südl. Akademie der Wissensch., Agram 1909, Bd. 177, habe ich die Affinität mit der Kugel zur Umrißbestimmung eines dreiaxigen Ellipsoids in ähnlicher Weise benützt. Man sehe dortselbst die „Inhaltsangabe“ auf S. 169.

risses dienenden konjugierten Durchmesserpaare besondere Vorteile bieten, bei welchen der eine oder der andere Durchmesser vertikal bzw. horizontal erscheint.

1. In Fig. 1 ist die Konstruktion des scheinbaren Umrisses für ein Sphäroid bei gegebener Sehstrahlenrichtung im Sinne der Schattenbestimmung durchgeführt. In der Horizontalebene durch  $x$  ist der Äquator  $k'$  mit dem Halbmesser  $r$  angenommen;  $A$  sei der am weitesten von der Bildebene ( $\pi_2$ ) entfernte Punkt der vorderen Äquatorhälfte.

Fig. 1.



Die Länge der Sphäroidachse ist durch  $OG$  gegeben. Der Sehstrahl  $s$  sei durch seine Orthogonalprojektionen  $s', s''$  bestimmt.

In der Ebene des Äquators, d. i. in der ersten Projektionsebene, erhält man die Grenzerzeugenden für die Projektion des Sehstrahlensylinders als Tangenten an den Äquator  $k'$  parallel zur Projektion  $s'$  des Sehstrahls. Der Berührungspunkt der einen von diesen Tangenten sei  $C$ . Da die Tangentialebene in diesem Punkte eine vertikale Ebene ist, sowohl mit Bezug auf das Sphäroid als auch auf die zu diesem affine Kugel, so wird die Tangente im Bilde  $C_s$  des Berührungspunktes  $C$  (auf die Bildebene  $\pi_2$ ) als Spur der vorhin genannten vertikalen Berührungsebene selbst vertikal sein. Es ist demnach die Richtung des zu  $OC_s$  konjugierten Durchmessers für den scheinbaren Umriß (Schatten) eine vertikale. Man hat nur noch die Länge  $d_2$  des konjugierten Durchmessers zu  $OC_s$  zu ermitteln.

Wir ziehen durch den Mittelpunkt  $O$  der Fläche den Sehstrahl  $OR', OR''$  und wählen auf diesem denjenigen Punkt  $R', R''$ , dessen erste Projektion  $R'$  auf den Äquator zu liegen kommt. Die durch diesen Strahl vertikal gelegte Ebene trifft das Sphäroid in einer Ellipse, die affine Kugel in einem größten Kreise  $k_1$ . Von den Durchmessern

der Ellipse wird derjenige zu suchen sein, welcher in der gegebenen Sehstrahlenrichtung in den zu  $OC$ , konjugierten Durchmesser des scheinbaren Umrisses projiziert wird. Statt diesen Ellipsendurchmesser zu bestimmen, suchen wir den affinen Kugeldurchmesser und drehen zu diesem Zwecke den größten Kugelkreis  $k_1$  um die Drehungsachse des Sphäroids in die Bildebene  $\pi_3$ ; nach der Drehung kommt der Kugelkreis  $k_1$  mit dem Äquator ( $k$ ) zur Deckung; der Strahl  $OR$  erscheint in der Bildebene, und zwar in  $OR_1''$ .

Wir haben nun zu dem für die Umrißbestimmung des Sphäroids gegebenen Sehstrahl  $OR_1''$  den affinen Strahl zu suchen, welcher auf den größten Kugelkreis  $k_1$  bezogen wird. Der genannte affine Strahl zu  $OR_1''$  liegt wieder in der Bildebene; er ist in der Figur durch  $OR_1$  bezeichnet, und man erhält  $R_1$  aus der Proportion  $R_1 R_1' : R_1'' R_1' = OM : OG$ . Eine an den größten Kugelkreis ( $k_1$ )  $\equiv$  ( $k$ ) parallel zu  $OR_1$  gezogene Tangente  $t_0$  (mit dem Berührungspunkt  $T$ ) gibt in  $OT$  den zu dem gesuchten Ellipsendurchmesser affinen Kugelhalbmesser, dessen Endpunkt  $T$  in der affinen Sehstrahlenrichtung nach  $U$  in die Drehungsachse projiziert wird. Da die Dreiecke  $OTU$  und  $OR_1' R_1$  kongruent sind, so folgt

$$OU = OR_1.$$

Man hat schließlich noch den auf die Kugel bezogenen Punkt  $U$  in den zum Sphäroide gehörigen affinen Punkt  $E_s$  zurückzutransformieren. Es sei  $R$  der Punkt, in welchem der Strahl  $OR_1$  von der Parallelen  $R'' R_1'$  zur  $x$ -Achse getroffen wird. Der Punkt  $E_s$  ist so zu bestimmen, daß der Proportion

$$UO : E_s O = MO : GO$$

Genüge geleistet wird. Da wir aber schreiben können:

$$\begin{aligned} MO : GO &= R_1 R_1' : R_1'' R_1' \\ &= R_1 O : RO, \end{aligned}$$

so wird wegen  $UO = R_1 O$  auch

$$OE_s = OR$$

sein. Diese Beziehung gestattet, daß die verlangte Länge  $OE_s$ , ohne die in der Fig. 1 rechts oben durchgeführten Konstruktion viel einfacher bestimmt werden kann.

Bezeichnen wir die spitzen Winkel, welche die Projektionen  $s'$  und  $s''$  des Sehstrahles mit der  $x$ -Achse einschließen, durch  $\varphi$  bzw.  $\psi$ , so folgt aus der Konstruktion

$$\begin{aligned} OQ &= r \cos \varphi \\ QR'' &= OQ \cdot \tan \psi = r \cos \varphi \cdot \tan \psi. \end{aligned}$$

Wegen  $QR' = RJ$  folgt mit Rücksicht auf  $OR_1 : OJ = OR_1 : OR$  wieder  $OJ = OG$ , also

$$OE_s = OR = \sqrt{OG^2 + r^2 \cos^2 \varphi \cdot \tan^2 \psi}.$$

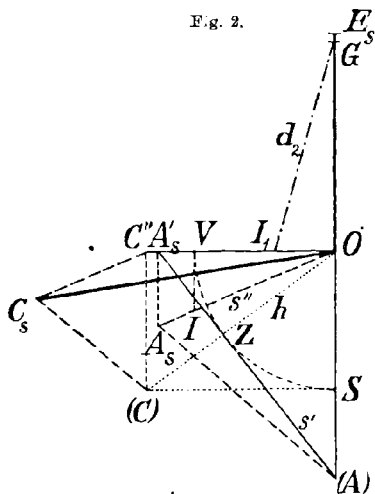
Es handelt sich also darum, die Kathete  $r \cos \varphi \cdot \tan \psi$  zu bestimmen. Machen wir  $(A)H = (A)O = r$ , ziehen durch  $H$  eine Senkrechte zur  $x$ -Achse bis zum Durchschnitte  $K$  mit  $s''$ , so ist  $KL = r \cos \varphi$ . Es ist weiter  $OL = KL \tan \psi$ , d. h. gleich der verlangten Kathete. Im rechtwinkligen Dreiecke  $LOJ$  ist also  $OL$  die oben konstruierte Kathete,  $OJ = OG$  die zweite Kathete, folglich die Hypotenuse  $LJ = OE_s$ .

In Fig. 2 ist dieselbe Konstruktion abgekürzt und mit Weglassung aller unnötigen Linien mehr im Sinne der Parallelperspektive durchgeführt. Es sind hier noch einige Vereinfachungen in Betracht gezogen, welche aus der Fig. 1 direkt hervorgehen.

Die Dreiecke  $OA'_s(A)$  und  $OC'_s(C)$  (Fig. 1) sind kongruent. Die Höhen  $h$  und  $(C)C''$  dieser Dreiecke sind also einander gleich. Nachdem im Dreieck  $OA'_s(A)$  die Beziehung  $h = r \cos \varphi$  stattfindet, und da, wie oben gezeigt worden,  $KL = r \cos \varphi$  ist, so haben wir zur Vereinfachung die Gleichheit  $KL = h$ .

Die Konstruktion in Fig. 2 hat also den folgenden Verlauf. Das Projektionsdreieck  $(A)OA_s$  ist für den vorderen Punkt  $A$  des Äquators gegeben. Zieht man  $(A)A'_s$  und fällt aus  $O$  eine Senkrechte darauf, so ist aus  $O$  mit  $h = OZ$  als Halbmesser der Kreis-

Fig. 2.



bogen  $VZS$  zu beschreiben. Im Punkte  $S$  errichte man eine Senkrechte zur Drehungsachse; man erhält im Schnittpunkte jener Senkrechten mit der Geraden  $OZ$  den Punkt  $(C)$  und für diesen mit Anwendung des Projektionsdreiecks den Punkt  $C_s$ , also in  $OC_s$  die Parallelperspektive des einen Halbmessers für den scheinbaren Umriß des Sphäroids. Errichtet man im Endpunkte  $V$  des vorhin genannten Kreisbogens eine Senkrechte zur  $x$ -Achse bis zum Durchschnitte  $I$  mit  $s''$ , und trägt  $VI$  auf die  $x$ -Achse von  $O$  bis  $I_1$ , so ist  $I_1G$  gleich der oben bestimmten Länge  $OE_s$ . Es ist nämlich wegen  $KL = h$  in Fig. 1 wieder  $VO = h$  in Fig. 2, und wie  $OL$  in Fig. 1 ist in Fig. 2  $VI = OI_1$  gewonnen. Der zu  $OC_s$  konjugierte Halbmesser des scheinbaren Umrisses ist also  $OE_s$ .

2. In Fig. 3 ist der scheinbare Umriß eines überhöhten Ellipsoids konstruiert. Der Äquator  $k''$  ist in der Bildebene  $(\pi_2)$  ange-

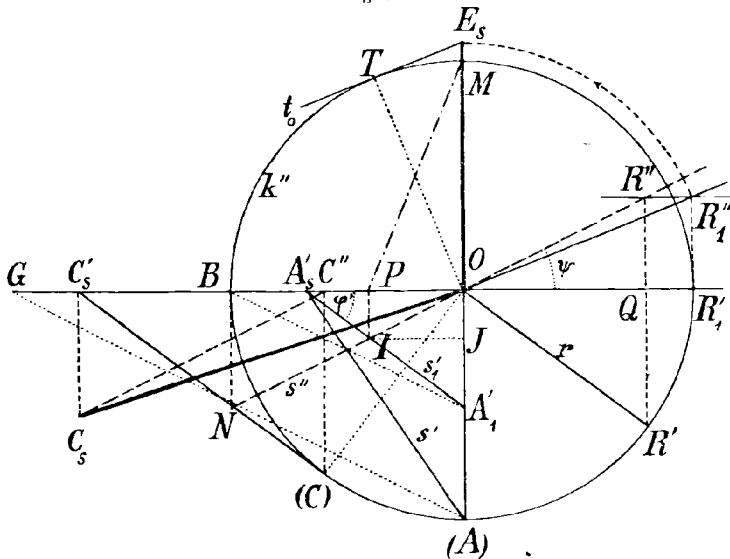


nommen, die Länge der Drehungsachse des Ellipsoids durch  $OG$  gegeben. Die orthogonalen Projektionen des Sehstrahls (Lichtstrahls)  $s$  sind in  $s'$  und  $s''$  gewählt.

Falls man es nicht vorzieht, für diese Lage der Fläche die Achsen des scheinbaren Umrisses zu bestimmen, so kann man diesen wieder durch das besondere Paar konjugierter Durchmesser festlegen, für welches der eine Durchmesser vertikal sein wird.

Man findet die erste Projektion  $s'_1$  des affin transformierten Sehstrahls  $s$  (welcher durch  $A$  gezogen ist), indem man den Punkt  $A'_1$  sucht, welcher mit Bezug auf die über den Äquator beschriebene Kugel

Fig. 3.



affin dem Punkt  $A$  (d. i. dem auf der Kugel am weitesten von  $\pi_2$  abstehenden Punkte) entspricht. Man findet  $A'_1$  mittels

$$GO : BO = (A)O : A'_1O.$$

Die an den Kugeläquator  $k'_1 \equiv k''$  parallel zu  $s'_1$  gelegte Tangente mit dem Berührungspunkt  $(C)$  liefert das Bild  $OC_s$  desjenigen Halbmessers des scheinbaren Umrisses, für welchen die konjugierte Richtung eine vertikale sein wird.

Um die Länge des zu  $OC_s$  konjugierten Durchmessers zu bestimmen, ziehen wir durch  $O$  den affin transformierten (also zur Kugel gehörigen) Sehstrahl, und wählen auf diesem denjenigen Punkt  $R$ , dessen Projektion  $R'$  auf  $k'_1 \equiv k''$  zu liegen kommt. Die durch den Strahl  $OR$  gelegte Vertikalebene schneidet die Kugel in einem größten Kreise  $k_2$ .

und es ist an diesen Kreis eine zu  $OR$  parallele Tangente zu führen. Wir drehen  $k_2$  sowie  $OR$  um die vertikale Achse des Äquators in die Bildebene, so daß nach der Drehung jener größte Kreis  $k_2$  mit  $k''$  zusammenfällt und  $OR$  nach  $OR'_1$  kommt. Es ist also in  $\pi_2$  an  $k''$  eine zu  $OR'_1$  parallele Tangente  $t_0$  zu legen. Die Tangente  $t_0$  trifft die vertikale Achse des Äquators in  $E_s$ . Durch denselben Punkt geht auch die zu  $t_0$  affine Tangente des Ellipsoids. Es ist demnach  $OE_s$  der zu  $OC_s$  konjugierte Halbmesser des scheinbaren Umrisses. Die Dreiecke  $OR'_1R'_1$  und  $OTE_s$  sind kongruent, es ist demnach  $OR'_1 = OE_s$ .

Die Konstruktion der Länge  $\overline{OE_s}$  kann vereinfacht werden. Es seien  $\varphi'$  und  $\psi$  die spitzen Winkel, welche die Sehstrahlprojektionen  $s'_1$  und  $s''$  mit der  $x$ -Achse bilden. Dann folgt aus der Figur:

$$OQ = r \cos \varphi',$$

$$R'Q = R'_1R'_1 = r \cos \varphi' \cdot \tan \psi,$$

also

$$OR'_1 = OE_s = \sqrt{r^2 + r^2 \cos^2 \varphi' \cdot \tan^2 \psi}.$$

Zieht man in  $B$  die Tangente an  $k''$  bis zum Durchschnitte  $N$  mit  $s''$ , so ist

$$BN = r \cdot \tan \psi.$$

Trägt man  $\overline{BN}$  auf  $s'_1$  von  $A'_1$  bis  $I$  auf, und zieht  $IJ$  parallel zur  $x$ -Achse, so ist

$$IJ = BN \cos \varphi' = r \tan \psi \cdot \cos \varphi',$$

d. i. gleich der Kathete  $PO = IJ$  eines rechtwinkligen Dreiecks  $POM$ , dessen Hypotenuse  $PM = OE_s$ , und dessen zweite Kathete gleich  $OM = r$  ist.

In Fig. 4 ist diese Konstruktion abgekürzt dargestellt; der affine Strahl  $s'_1, s''$  ist gleich beliebig angenommen worden, da die Bestimmung des Halbmessers  $OE_s$  nicht von der ursprünglichen Richtung des Sehstrahls  $s$  direkt beeinflusst wird. Der Endpunkt  $C_s$  ist mittels des Projektionsdreiecks  $OA'_1A_s$  bestimmt, und der Endpunkt  $E_s$  von  $OE_s = d_2$  auf Grund letzterer Bemerkungen einfach direkt gewonnen.

3. Die Fig. 5 stellt die Konstruktion des scheinbaren Umrisses eines überhöhten Ellipsoids dar, dessen Äquator  $k$  in einer zur  $x$ -Achse senkrecht stehenden Ebene  $\alpha$  liegt. Die Länge der Drehungsachse ist durch  $OG$  gegeben, der Sehstrahl  $s$  durch seine orthogonalen Projektionen  $s'$  und  $s''$  festgelegt.

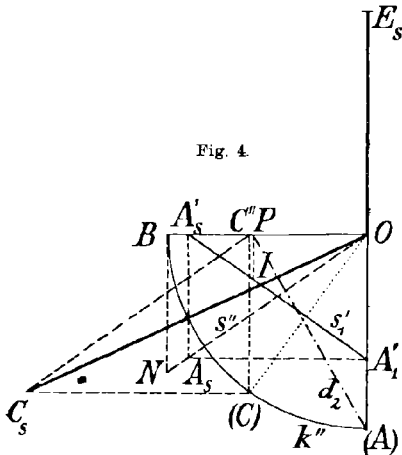
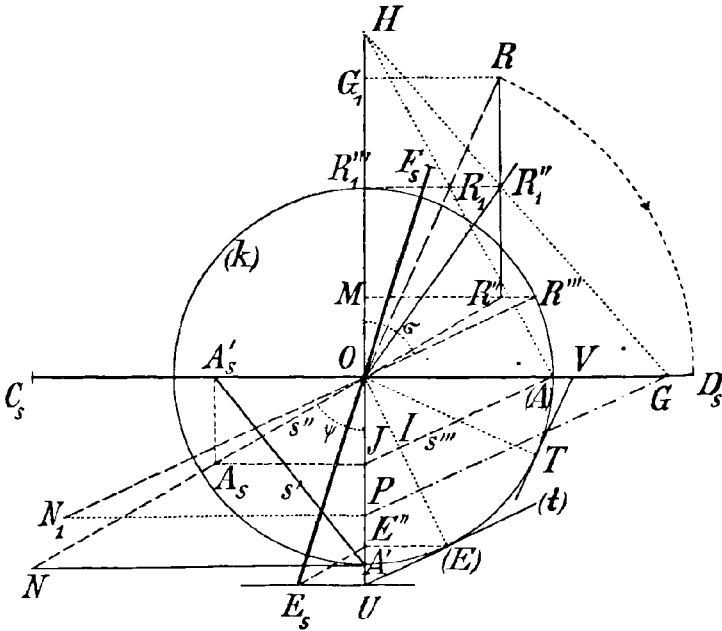


Fig. 4

Wir wollen für diese Lage des Drehungsellipsoids den scheinbaren Umriss mittels desjenigen Paares konjugierter Durchmesser bestimmen, für welches der eine Durchmesser horizontal ist.

Die orthogonale Projektion des Sehstrahls  $s$  auf die Ebene  $\alpha$  sei  $s''$ ; es ist hierbei der Strahl  $s$  durch den vorderen, von der Bildebene am weitesten abstehenden Äquatorpunkt  $A$  gelegt. Die an den Äquator  $k$  parallel zu  $s''$  gelegte Tangente  $t$  (mit Berührungspunkt  $E$ ) bestimmt mit dem Sehstrahl  $s$  durch  $E$  eine Tangentialebene des Ellipsoids im Äquatorpunkte  $E$ , und es wird die Spur dieser Ebene auf  $\pi_2$  eine

Fig. 5.



horizontale Gerade sein. Man gewinnt in der Umlegung um die Vertikale zur  $x$ -Achse aus  $(k)$  und  $(t)$  den Berührungspunkt  $(E)$ , seine zweite Projektion  $E'$  und den Schnittpunkt  $U$  von  $(t)$  mit der (vertikalen) Spur der Ebene  $\alpha$ . Zieht man durch  $E'$  (parallel zur zweiten Projektion des Sehstrahls)  $E'E_s$ , und durch  $U$  die horizontale Spur der vorher genannten Tangentialebene, so ist im Schnitte dieser beiden Geraden das Bild  $E_s$  des Berührungspunktes  $E$  gewonnen. Es ist also  $OE_s$  ein Halbmesser des scheinbaren Umrisses, und weil die Tangente in  $E_s$  an diesen eine horizontale ist, so wird der zu  $OE_s$  konjugierte Halbmesser in die  $x$ -Achse fallen.

Wir setzen an Stelle des Ellipsoids die affine, über  $k$  beschriebene

Kugel, ziehen durch den Mittelpunkt  $O$  den Sehstrahl, und wählen auf diesem denjenigen Punkt  $R$ , dessen orthogonale Projektion  $R'''$  auf die Ebene  $\alpha$  ein Punkt des Äquators  $k$  ist.

Durch den Sehstrahl  $OR$  und durch die  $x$ -Achse legen wir eine Ebene  $\delta$ , welche die Kugel in einem größten Kreise  $k_1$  schneidet. An den Kreis  $k_1$  ist nun eine Tangente zu legen, welche parallel ist mit dem zum Sehstrahl  $s$  affinen (d. i. zur Kugel gehörigen) Strahl. In der Fig. 5 ist dies in der Umlegung der Ebene  $\delta$  um  $x$  in  $\pi_2$  ausgeführt. Der Kreis  $k_1$  ist nach der Umlegung mit  $(k)$  identisch. Der Strahl  $OR$  kommt nach der Drehung in die Bildebene  $\pi_2$  nach  $OR_1'$ . Zu dieser ursprünglichen Strahlenrichtung ist noch die ebenfalls in  $\pi_2$  liegende affine Richtung zu suchen. Man erhält diese, indem man auf  $R_1''R_1'$  den Punkt  $R_1$  so bestimmt, daß der Proportion

$$R_1''R_1' : R_1R_1' = GO : (A)O$$

genügt wird. Der affine Strahl  $OR_1$  ist also dadurch gewonnen, und es ist parallel zu diesem an den Kreis  $(k)$  eine Tangente (mit Berührungspunkt  $T$ ) gelegt, welche die  $x$ -Achse in  $V$  trifft. Die Dreiecke  $OTV$  und  $OR_1''R_1'$  sind kongruent, woraus  $OV = OR_1'$  folgt. Die Strecke  $OV$  ist das Bild des zu  $OE$  gehörigen konjugierten Halbmessers für den scheinbaren Umriß der affinen Kugel; man hat nur noch den Punkt  $V$  nach  $D_1$  affin zurückzutransformieren.

Bezeichnen wir den Punkt, in welchem  $OR_1$  die Senkrechte  $R'R_1''$  zur  $x$ -Achse trifft, mit  $R$ , so ist wegen der obigen Proportion auch

$$OR_1 : OR = (A)O : GO,$$

und wegen  $OR_1 = OV$  schließlich

$$OV : OR = (A)O : GO,$$

woraus wir wegen

$$OV : OD_1 = (A)O : GO$$

die Gleichheit haben:

$$OR = OD_1.$$

Die Konstruktion von  $OR$  kann einfacher durchgeführt werden, wenn wir die folgenden Relationen in Betracht ziehen. Es sei  $\sigma$  der Winkel, welchen  $s'''$  (oder die zu  $s'''$  parallele Gerade  $OR'''$ ) mit  $OH$  einschließt, ferner  $\psi$  der Winkel, welcher von  $s''$  und  $OH$  gebildet wird.

Aus der Figur folgt dann, wenn  $r$  den Halbmesser des Äquators bedeutet:

$$\begin{aligned} OM &= r \cos \sigma, \\ MR'' &= r \cos \sigma \cdot \text{tang } \psi. \end{aligned}$$

Wegen  $MR'' = GR$  und  $OG_1 = OG = h$ , welche letztere Gleichheit aus

$$\begin{aligned} OR_1 : OR &= O(A) : OG \\ OR_1''' : OG_1 &= OR_1 : OR, \quad (OR_1''' = O(A)) \end{aligned}$$

folgt, haben wir:

$$OR = OD_s = \sqrt{h^2 + r^2 \cos^2 \sigma \cdot \tan^2 \psi}.$$

Ziehen wir also die Tangente in  $A'$  an  $(k)$  bis zum Durchschnitte  $N$  mit  $s''$ , so ist

$$A'N = r \tan \psi.$$

Trägt man auf  $OR''$  (parallel zu  $s'''$ ) von  $O$  aus die Strecke  $A'N$  bis  $N_1$ , so haben wir

$$OP = ON_1 \cdot \cos \sigma = r \cos \sigma \cdot \tan \psi.$$

Es ist also  $OP$  die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks  $OPG$ , dessen andere Kathete  $OG = h$  ist, und es ist folglich die Hypotenuse  $PG$  gleich der gesuchten Länge  $OD_s$ .

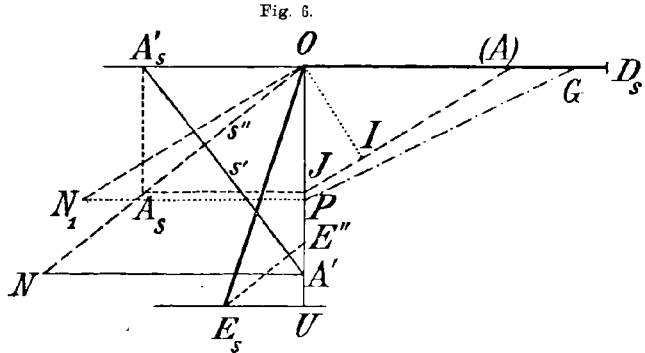
Die Bestimmung des Endpunktes  $E_s$  kann auch vereinfacht werden, wenn man bemerkt, daß die Dreiecke  $O(E)U$  und  $(A)OJ$  kongruent sind. Die Fig. 6 stellt

die Bestimmung der Längen  $OE_s$  und  $OD_s$  mit Berücksichtigung der mitgeteilten Vereinfachungen dar.

Es ist

$$OA' = O(A) = r$$

aufgetragen und  $A_s$  bestimmt; findet man die Richtung  $s'''$ , d. i.  $(A)J$ ,



und zieht aus  $O$  auf  $(A)J$  eine Senkrechte bis  $I$ , so ist  $OE'' = (A)I$  und  $(A)J = OU$ . Die durch  $E''$  gezogene Parallele zu  $s''$  liefert im Schnitte mit der Horizontalen durch  $U$  den Punkt  $E_s$ .

Die Länge  $OD_s$  wird auf die oben dargelegte Weise erhalten. Der scheinbare Umriß wird demnach durch die beiden konjugierten Halbmesser  $OE_s$  und  $OD_s$  bestimmt.

Es sei noch bemerkt, daß eine zu irgendwelcher von den drei hier behandelten Lagen des Drehungsellipsoids parallele Verschiebung keine wesentlichen Änderungen in den Konstruktionen hervorruft. Für die übliche Annahme in der Parallelperspektive, d. i. für  $(s''x) = 30^\circ$ ,  $A_sO = \frac{1}{2} AO$ , erhält man noch einige Vereinfachungen, deren Durchführung wir dem Leser überlassen wollen.

Agram, den 16. Juni 1911.

## Neue Bücher.

### Analysis.

1. CORRAL, JOSÉ ISAAC DELL, Nuevos métodos para resolver ecuaciones numéricas. Madrid 1912, Adrian Romo.  
S. auch 9, 27, 35, 40.

### Astronomie, Geodäsie.

2. FLOTOW, A. v., Einleitung in die Astronomie. (Sammlung Schubert XV.) Leipzig 1911, Göschen. Geb. *M* 7.—.
3. SOLDNER, JOH., Theorie der Landesvermessung. (1810.) Hrsg. v. J. Frischauf. (Ostwalds Klassiker Nr. 184.) Leipzig 1911, Engelmann. Geb. *M* 1.60.  
S. auch 45, 48.

### Darstellende Geometrie.

4. JAMESON, A. P., Isometric drawing; a treatise on mechanical illustrating, etc. London 1911, Hill. 4 s. 6 d.
5. LORIA, GINO, Poliedri, curve e superficie secondo i metodi della geometria descrittiva. Milano 1912, Hoepli. (Manuali Hoepli, 148/149.)
6. MÜLLER, E., Der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den technischen Hochschulen. (Berichte über den mathematischen Unterricht in Österreich, veranlaßt durch die internationale mathematische Unterrichtskommission.) Wien 1911.
7. MÜLLER, EMIL, Technische Übungsaufgaben für darstellende Geometrie. IV. Heft. Leipzig u. Wien 1911, Deuticke. Geb. *M* 1.25.

### Geschichte.

8. BJÖRNBO, AXEL ANTHON, und VOGEL, SEB., Alkindi, Tideus und Pseudo-Euklid, drei optische Werke, hrsg. und erklärt. Mit einem Gedächtniswort auf A. A. Björnbo von G. H. Zeuthen, einem Verzeichnis seiner Schriften und seinem Bildnis. (Abh. zur Gesch. der mathem. Wiss. m. Einschluß ihrer Anwendungen, Heft. XXVI. 3.) Leipzig 1911, Teubner.
9. WIELEITNER, HEINRICH, Geschichte der Mathematik, II. Teil. Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. I. Hälfte. Arithmetik, Algebra, Analysis. Bearbeitet unter Benutzung des Nachlasses von Anton von Braunmühl. (Sammlung Schubert LXIII.) Leipzig 1911, Göschen. Geb. *M* 6.50.

### Mechanik.

10. BACH, C., Elastizität und Festigkeit. 6., verm. Aufl. Unter Mitwirkung von R. BAUMANN. Berlin 1911, Springer. Geb. in Leinw. *M* 20.—.
11. BARTON, EDWIN H., Analytical Mechanics, comprising Kinetics and Statics of solids and fluids. London 1911, Longmans. 10 s. 6 d.
12. BOTHEZAT, G. DE, Étude de la stabilité de l'aéroplane. (Thèse.) Avec une préface de P. Painlevé. Paris 1911, Gauthier-Villars. Fr. 10.—.

18. EULER, L., Vollständigere Theorie der Maschinen, die durch Reaktion des Wassers in Bewegung versetzt werden. (1754 u. 1756.) Hrg. von Ernst A. Brauer und M. Winkelmann. (Ostwalds Klassiker Nr. 182.) Leipzig 1911, Engelmann. Geb. *M* 1.60.
14. GALKA, MAX, Technische Mechanik. 1. Tl. („Kollegienhefte“ Bd. 9.) Leipzig 1911, Hirzel. Geb. in Leinw. u. durchsch. *M* 6.—.
15. HAGER, KARL, Berechnung ebener rechteckiger Platten mittels trigonometrischer Reihen. München 1911, Oldenbourg. *M* 7.20.
16. IHRING, ALBRECHT VON, Die Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper. II. Teil. Die Mechanik der flüssigen Körper. (Aus Natur u. Geisteswelt, 304. Bändchen.) Leipzig 1912, Teubner. geb. in Leinw. *M* 1.25.
17. KOENEN, M., Grundzüge für die statische Berechnung der Beton- und Eisenbetonbauten. 4., neubearb. u. erwei. Aufl. Berlin 1912, Ernst & Sohn. *M* 2.—.
18. KRIEMLER, CARL, Einführung in die energetische Baustatik. Einiges über die physikalischen Grundlagen der energetischen Festigkeitslehre. Berlin 1911, Springer. *M* 2.40.
19. PFARR, A., Die Turbinen für Wasserkraftbetrieb. Ihre Theorie u. Konstruktion. 2., teilweise umgearb. u. verm. Aufl. 2 Bde. Berlin 1912, Springer. Geb. in Leinw. *M* 40.—.

### Physik.

20. BERLINER, ARNOLD, Lehrbuch der Experimentalphysik in elementarer Darstellung. 2. Aufl. Jena 1911, Fischer. *M* 18.—; geb. *M* 19.50.
21. BERNDT, GEO., Kompendium der Experimentalphysik. („Kollegienhefte“ Bd. 2.) Leipzig 1911, Hirzel. Geb. in Leinw. u. durchsch. *M* 6.—.
22. DITTMANN, EENST, Berechnung elektrischer Leitungsnetze. Strelitz 1911, Hiltenskofer. *M* 5.—.
23. EXNER, FRANZ, und HASCHEK, EDUARD, Die Spektren der Elemente bei normalem Druck. Zugleich 2., wesentlich vermehrte Aufl. der Wellenlängentabellen für spektralanalytische Untersuchungen. Bd. I. Hauptlinien der Elemente und Codex der starken Linien im Bogen und Funken. Leipzig u. Wien 1911, Deuticke. *M* 18.—.
24. — Dasselbe, Bd. II. Bogenspektren. Ebenda. *M* 28.—.
25. — Dasselbe, Bd. III. Die Funkenspektren. Leipzig u. Wien 1912, Deuticke, *M* 28.—.
26. GRIMMEL, E., Lehrbuch der Physik zum Gebrauche beim Unterrichte, bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium. 2., vermehrte u. verb. Aufl. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 15.—; geb. in Leinw. *M* 16.—.
27. HEYWOOD, H. B., et FRÉCHET, M., L'équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique. Avec une préface et une note de M. Jacques Hadamard. Paris 1912, Hermann & fils. Fr. 5.—.
28. HIMMEL, P., Bautechnische Physik. Leitfaden für den Unterricht an Baugewerkschulen und verwandten technischen Lehranstalten. 2. Aufl. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 3.80.
29. JEANS, J. H., The mathematical theory of electricity and magnetism. 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge 1911, University Press. 15 s.
30. LOVE, A. E. H., Some problems of Geodynamics. Cambridge 1912, University Press. 12 s.
31. MAGIE, W. F., Principles of Physics. London 1911, Bell. 7 s 6 d.
32. MAYER, ROB., Die Mechanik der Wärme. 2 Abhandlg. Hrg. v. A. v. Oettingen. (Ostwalds Klassiker Nr. 180.) Leipzig 1911, Engelmann. Geb. *M* 1.60.
33. NEUMANN, FRANZ, Gesammelte Werke, hrsg. v. seinen Schülern. 3. Bd. Leipzig 1912, Teubner.
34. PATTERSON, G. W., Revolving vectors with special application to alternating current phenomena. New York 1911, Macmillan. \$ 1.—.

35. FLEBELJ, JOSEF, Potentialtheoretische Untersuchungen. (Preisschriften, gekrönt u. hrsg. v. der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig, XL, Nr. XVI der mathem.-naturw. Sektion.) Leipzig 1911, Teubner. *M* 6.—.
36. ROBB, A. A., Optical geometry of motion. A new view of the theory of relativity. London 1911, Heffer. 1 s.
37. ROTH, HERM., Grundzüge der Experimentalphysik. Stuttgart u. Berlin 1912, Grub. Geb. *M* 1.60.
38. SCHULZE, PAUL, Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten. I. Teil. Unterstufe. Bielefeld u. Leipzig 1912, Velhagen & Klasing. Geb. *M* 1.80.
39. SMITH, E. F., Electro-Analysis. 5<sup>th</sup> ed. London 1912, Paul. 10 s. 6 d.
40. WEBER, HEINR., Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemanns Vorlesungen in 5. Aufl. bearb. II. Bd. Braunschweig 1912, Vieweg & Sohn. *M* 15.—; geb. in Halbfrz. *M* 16.80.  
S. auch 8, 18, 42, 48.

#### Tafeln, Modelle.

41. GAUSS, F. G., Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Zum Gebrauche f. Schule u. Praxis bearb. Ster.-Dr. 116—125. Aufl. Stuttgart 1912, Wittwer. *M* 2.—; geb. *M* 2.50.
42. JELINEK'S Psychrometer-Tafeln. Anhang: Hygrometer-Tafeln v. I. M. Pernter. Hrsg. v. W. Trabert. 6., erw. Aufl. Leipzig 1911, Engelmann. *M* 7.—.
43. KATALOG mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht. 7. Aufl. Leipzig 1911, Schilling. *M* 1.20.
44. HUNTINGTON, E. V., Four place table of logarithms and trigonometric functions. Unabridged ed. London 1912, Spon. 3 s.

#### Verschiedenes.

45. ANNUAIRE pour l'an 1912, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 1.50.
46. BALL, W. W. ROUSE, Mathematical recreations and essays. 5<sup>th</sup> ed. London 1912, Macmillan. 8 s. 6 d.
47. BATES, E. L., and CHARLESWORTH, F., Practical Mathematics and Geometry. Part III. Advanced course. London 1911, Badsford. 3 s.
48. MÉCHAIN und DELAMBRE, Grundlagen des dezimalen metrischen Systems oder Messung des Meridianbogens zwischen den Breiten von Dünkirchen und Barcelona, ausgeführt im Jahre 1792 und in den folgenden. In Auswahl übersetzt u. hrsg. v. Walt. Block. — Borda und Cassini, Versuche über die Länge des Sekundenpendels in Paris. (Ostwalds Klassiker Nr. 181.) Leipzig 1911, Engelmann. Geb. *M* 3.40.
49. REGISTER op de wiskundige opgaven, uitgegeven door het Wiskundig Genootschap „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven“, gedurende het tijdsverloop van 1875—1910. Amsterdam 1911, Delsman.
50. SCHILLING, C., und MELDAU, H., Der mathematische Unterricht an den deutschen Navigationsschulen. (Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die internationale mathem. Unterrichtskommission, Bd. IV Heft 4.) Leipzig u. Berlin, 1911, Teubner.
51. SCHÜLKE, A., Aufgaben-Sammlung aus der reinen und angewandten Mathematik. I. Teil für die mittleren Klassen höherer Schulen. 2. Aufl. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 2.40.



## Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- ALBRECHT, Th., und WANACH, B., Resultate des internationalen Breitendienstes, Bd. IV. (Zentralbureau der internationalen Erdmessung, neue Folge der Veröffentlichungen Nr. 22.) Berlin 1911, Reimer.
- ANNUAIRE pour l'an 1912, s. N. B. („Neue Bücher“) Nr. 45.
- BJÖRNBO, A. A., und VOGL, SEB., Alkindi, Tideus und Pseudo-Euklid, s. N. B. 8.
- CORRAL, I. I. BELL, Nuevos métodos para resolver ecuaciones numéricas, s. N. B. 1.
- DIETRICHKEIT, O., Zur Angestellten-Versicherung. Ein versicherungstechnisches Gutachten. Hamburg 1911, Buchhandlung des Deutschenationalen Handlungsgehilfen-Verbands.
- EJRMANN, P. H., L'Internationalisme scientifique (sciences pures et lettres). Publication du Bureau préliminaire de la Fondation pour l'Internationalisme. La Haye 1911, Van Stockum et fils.
- EXNER, FR., und HASCHEK, E., Die Spektren der Elemente bei normalem Druck, I, II, III, s. N. B. 23, 24, 25.
- FLOTOW, A. v., Einleitung in die Astronomie, s. N. B. 2.
- GAUSS, F. G., Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln, s. N. B. 41.
- GIENDT, M., Leitfaden der bautechnischen Algebra, für den Unterricht in der allgemeinen Zahlenlehre und der Lehre von den Gleichungen an bautechnischen Fachschulen. 4. Aufl. („Der Unterricht an Baugewerkschulen“, 25.) Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. Kart. *M* 1.60.
- GLÖSER, MORITZ, Lehrbuch der Arithmetik für die erste Klasse der Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen. 7., neu bearb. Aufl. Wien 1910, Pichlers Witwe & Sohn. Geb. K. 1.20.
- Dasselbe für die zweite Klasse der Gymnasien, Realgymnasien u. Realschulen, 7., neu bearb. Aufl. Ebenda 1911. Geb. K. 1.—.
- GRIMSEHL, E., Lehrbuch der Physik, s. N. B. 26.
- GRÜNBAUM, HEINR., Funktionenlehre und Elemente der Differential- und Integralrechnung. Lehrbuch und Aufgabensammlung für höhere Lehranstalten, besonders für technische Fachschulen, sowie zum Selbstunterricht. 3., umgearb. u. verm. Aufl. des Lehr- u. Übungsbuches der Differentialrechnung. Stuttgart u. Berlin 1912, Grub. *M* 3.20; geb. *M* 4.—.
- HEYWOOD, H. B., et FRÉCHET, M., L'équation de Fredholm, s. N. B. 27.
- HIMMEL, P., Bautechnische Physik, s. N. B. 28.
- JELINEKS Psychrometer-Tafeln, s. N. B. 42.
- JUBILÄUMSKATALOG, 1811—1911, der Verlagsbuchhandlung Wilhelm Engelmann in Leipzig. Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig, 1911.
- IHERING, A. v., Die Mechanik der flüssigen Körper, s. N. B. 16.
- KITT, MORITZ, Lehrbuch der Chemie für Handelsakademien. I. Teil. Wien 1911, Pichlers Witwe & Sohn. Geb. K. 2.40.
- KOMMERELL, V., und KOMMERELL, K., Analytische Geometrie, für den Schulgebrauch bearb. Tübingen 1912, Laupp. *M* 1.80; geb. in Leinw. *M* 2.40.
- KRAUSE, MARTIN, Theorie der elliptischen Funktionen. Unter Mitwirkung v. Emil Naetsch. (Math.-physikal. Schriften f. Ingenieure u. Studierende, 13.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 3.60; geb. *M* 4.—.
- LALESKO, TRAJAN, Introduction à la théorie des équations intégrales. Avec une préface de Émile Picard. Paris 1912, Hermann & fils. Fr. 4.—.
- LEITZMANN, W., Der Pythagoreische Lehrsatz. Mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. (Mathem. Bibliothek, 3.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* —.80.

- LÖFFLER, EUGEN, Ziffern und Ziffernsysteme der Kulturvölker in alter und neuer Zeit. (Mathem. Bibliothek, 1.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* — .80.
- LORIA, G., Poliedri, curve e superficie, s. N. B. 5.
- LUDWIG, RICHARD, Wie entsteht Ebbe und Flut? Eine Untersuchung. Leipzig 1911, Wittich. *M* — 50.
- MERBACH, PAUL ALFRED, Studien über die Mechanik der magnetischen Erscheinungen. Hamburg 1911, Hephästos-Verlag. *M* — 60.
- MÜLLER, E., Der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den technischen Hochschulen, s. N. B. 6.
- MÜLLER, E., Technische Übungsaufgaben für darstellende Geometrie, s. N. B. 7.
- NEUMANN, FRANZ, Gesammelte Werke, III, s. N. B. 33.
- PLEMELJ, J., Potentialtheoretische Untersuchungen, s. N. B. 35.
- RADUNZ, KARL, Vom Einbaum zum Linienschiff. Streifzüge auf dem Gebiete der Schifffahrt u. des Seewesens. Für mittlere u. reife Schüler. (Bastian Schmidts naturwissenschaftl. Schülerbibliothek 11.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner, Geb. in Leinw. *M* 3.—.
- REGISTER op de wiskundige opgaven, s. N. B. 49.
- ROTH, H., Grundzüge der Experimentalphysik, s. N. B. 37.
- SCHAU, A., Der Eisenbahnbau. I. Teil Allgemeine Grundlagen. Bahngestaltung. Grundzüge für die Anlage der Bahnen. 2., verb. Aufl. („Der Unterricht an Baugewerkschulen“, 15.) Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* 3.60.
- — Dasselbe. II. Teil. Stationsanlagen und Sicherungswesen. 2., verb. Aufl. („Der Unterricht an Baugewerkschulen“, 16.) Ebenda. *M* 2.80.
- SCHILLING, C., und MELDAU, H., Der mathematische Unterricht an den deutschen Navigationsschulen, s. N. B. 50.
- SCHMEEL, CHR., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie f. höhere Lehranstalten. Gießen 1911, Roth. *M* 2.—; geb. *M* 2.50.
- Lehrbuch der Stereometrie für höhere Lehranstalten. Gießen 1912, Roth. *M* 2.—; geb. *M* 2.50.
- SCHRIFTEN des Verbands zur Klärung der Wünschelrutenfrage. Stuttgart 1912, Wittwer.
- Heft 1. Des Landrats von Uslar Arbeiten mit der Wünschelrute in Südwestafrika. *M* — .80.
- Heft 2. Die Versuche mit Rutengängern im Kalibergwerk Riedel bei Hainigsen (Hannover) am 29. September 1911. *M* 1.50.
- SCHUBERT, HERMANN, Niedere Analysis. (Sammlung Schubert XLV.) 2. Teil. Funktionen, Reihen, Gleichungen. 2., durchgesehene Aufl. Leipzig 1911, Göschen. Geb. *M* 3.80.
- SCHÜLKE, A., Aufgaben-Sammlung aus der reinen und angewandten Mathematik, s. N. B. 51.
- SCHULZE, PAUL, Lehrbuch der Physik, s. N. B. 38.
- SUPPANTSCHITSCH, RICHARD, Lehrbuch der Geometrie. Trigonometrie u. analytische Geometrie. Für die VI. bis VIII. Klasse der Gymnasien und Realgymnasien. Wien 1912, Tempsky. Geb. K. 4.40.
- WEBER, H., Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, s. N. B. 40.
- WIELEITNER, H., Geschichte der Mathematik, II, s. N. B. 9.

## Abhandlungsregister 1909—1910.

Von ERNST WÖLFFING in Stuttgart.

(Fortsetzung von S. 224.)

442. *F. L. Hitchcock*. The double nature of nabla. P.M. (6) 17. 113.
443. *C. de Jans*. Over gewisse integralen mit de vectoranalysis. H.V.C. 1909. 131.
444. *F. Jung*. Einige vektoranalytische Bezeichnungs- und Benennungsfragen. D.V.M. 17. 383.
445. *F. Jung*. Zur vektoranalytischen Darstellung des Tensors. D.V.M. 18. 386.
446. *F. Jung*. Der Verzerrungstensor in vektoranalytischer Darstellung. S.A.W. 118. 1153.
447. *F. Jung*. Ableitungsbildung im räumlichen Größenfelde. Z.S. 56. 337.
448. *A. E. Kennelly*. Vector power in alternating-current circuits. P.A.I.E.E. 29. 1023.
449. *G. N. Lewis*. On 4-dimensional vector analysis and its application in electrical theory. P.A.Bo. 46. 163.
450. *A. Libický*. Einführung in die Vektoranalysis (tschech.) C. 39. 134; 258; 460.
451. *H. Liebmann*. Über die Darstellung eines quellenfreien Vektorfeldes. B.G.L. 60. 176.
452. *A. C. Lunn*. Some notes on vector analysis. M.M.F. 16. 21.
453. *R. Marcolongo*. Per l'unificazione delle notazioni vettoriali. V.I.M.C. 4. C. 191.
454. *F. Mertens*. Zur komplexen Multiplikation. S.A.W. 119. 631.
455. *R. F. Muirhead*. A proof of the theorem that the vector-sum of the axes of 2 couples is the axis of their resultant. M.G.S. 4. 129.
456. *L. G. Du Pasquier*. Über holoïde Systeme von Dütettarionen. V.N.Z. 45. 116.
457. *O. Peirce*. The conception of the derivative of a scalar point function with respect to another similar function. P.A.Bo. 45. 339.
458. *E. Rebuffel*. Une application de la théorie des vecteurs et des moments linéaires. B.M.E. 14. 81.
459. *K. Rychlík*. Geometrische Veranschaulichung von Ketten (tschech.). C. 40. 225.
460. *R. Schimmack*. Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition. N. A.H. 90. 5.
461. *A. Schreiber*. Bedingungsgleichungen für Rückwärtsschnitte. S.I.D. 1909. A. 11.
462. *L. Silberstein*. Grundriß der vektoriiellen Mechanik (poln.) P.T.W. 44. 77; 111; 127; 152; 177; 201; 226; 253; 281; 299; 322; 346.
463. *G. Silván*. Lecciones elementales de geometria analítica vectorial. A.F.C. Z. 2. 87.
464. *A. Sommerfeld*. Vierdimensionale Vektoralgebra. A.P.L. (4) 32. 749.
465. *G. Souslov*. Die Integrale und Ableitungen besonderer Art in einem Vektorfeld (russ.) B.U.K. 1907 c. Nr. 11.
466. *E. Waelsch*. Sur les invariants différentiels vectoriels et la théorie des formes binaires. C.R. 145. 1396.
467. *E. B. Wilson*. The unification of vectorial notations. S.M.Am. (2) 16. 415.
468. *E. B. Wilson*. On the theory of double products and strain in hyperspace. T.C.A. 14. 1.

Siehe auch 478; 1001; 1106.

## Äquipollenzen.

469. *L. Galvani*. Sulla risoluzione dei problemi geometrici col metodo delle equipollenze. B.D.M. 6. 27; 41.

## Ausdehnungslehre.

470. *E. Jahnke*. Hermann Graßmanns Ausdehnungslehre. S.M.B. 1909. 89.
471. *E. Jahnke*. La science extensive de Graßmann. E.M. 11. 417.

472. *F. Jung*. Die Polarableitungen verschiedener Stufe und ihr Zusammenhang. S.A.W. 119. 377.

473. *E. Müller*. Beiträge zur Graßmannschen Ausdehnungslehre I. S.A.W. 118. 1047.

474. *A. del Re*. Sopra una formola generale nel calcolo delle estensioni. R. A.L.R. (5) 18. B. 451.

475. *H. Rothe*. Über die lineare Abhängigkeit der gemischten Produkte von 3 Faktoren. S.A.W. 119. 455.

476. *A. R. Schweitzer*. A theory of geometrical relations. A.J.M. 31. 365.

477. *A. R. Schweitzer*. On the logical basis of Graßmann's extensive algebra. S.M.Am. (2) 15. 79.

Siehe auch 786.

### Quaternionen.

478. *C. Burali-Forti*. I quaternioni di Hamilton e il calcolo vettoriale. A. A.T. 43. 1146.

479. *E. Campbell*. On the application of quaternions to the problem of the infinitesimal deformation of a surface. P. L.M.S. (2) 6. 178.

480. *F. Jung*. Die Polarableitung in rechtwinkligen krummlinigen Koordinaten. S.A.W. 117. 1001.

481. *A. Macfarlane*. On the square of Hamilton's delta. V.I.M.C. 4. C. 153.

482. *A. M'Aulay*. Algebra after Hamilton or Multenions. P.R.S.E. 28. 503.

483. *W. F. Meyer*. Zur Theorie der Drehungen und Quaternionen. S.A.W. 116. 135.

484. *J. H. Peck*. La formule

$$e = re^{i(\varphi + i\psi)}$$

interprétée géométriquement dans l'espace de manière de prendre la forme d'un quaternion. W.T. 5. 142.

485. *J. B. Shaw*. A new graphical method for quaternions. S.M.Am. (2) 14. 430.

486. *R. H. Weber*. Über asymmetrische und symmetrische Tensoren. N.G.G. 1909. 370.

Siehe auch 776.

### Zeichnen.

487. *H. Tafner*. Das Zeichnen auf einer durchsichtigen Zeichenfläche. Z. W.M. 1910. 384.

488. *H. Tietze*. Über die Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal. S.A.W. 118. 735.

489. *W. E. Wilkinson*. Some economies in making drawings. M.N.Y. 16. 396.

### Kurvenzeichnen.

490. *A. Emch*. Réalisation des  $C_4$  algébriques par un système articulé. A.S.G. (4) 24. 368.

491. *A. Emch*. Kinematische Erzeugung von Raumkurven 4. Ordnung durch Gelenkmechanismen. V.S.N.G. 90. 81.

492. *P. Ernst*. Mechanische Erzeugung der Zissoïden 4. Ordnung. M.H. 19. 304.

493. *T. J. Nanson*. Graphic construction of the curves  $y = x^n$ . M.G.S. 5. 141.

494. *H. v. Sanden*. Zur Konstruktion der Ellipse aus den Achsen. Z.S. 59. 10.

### Zeichenwerkzeuge.

495. *J. Derôme*. Un nouvel ellipso-graphic. R.S. (5) 7. 499.

496. *V. Ehrenfeucht*. Sur une application de l'ellipsographe du prof. Kougoucheff. C.M.N.W. 1906. 6.

497. *A. Favaro*. Per la storia del compasso di proporzione. A.I.V. 67. 723.

498. *W. Georgi*. Über einen Neigungsmesser zum großen Abbeschen Zeichenapparat. Z.W.M. 1910. 92.

499. *F. J. Jervis-Smith*. Experimental mathematics. P.M. (6) 14. 676.

500. *A. Kampe*. Hoekverdeelers. W. T. 5. 113.

501. *R. Mehmke*. Bemerkungen zu dem Aufsätze des Herrn F. Schilling „Über die Anwendung der Fluchtpunktschiene in der Perspektive“. Z.S. 56. 326.

502. *E. F. Peabody*. Rotagons. S.Am. 100. 300.

503. *J. Plassmann*. Ein reiner Ellipsenzirkel. M.V.A.P. 17. 54.

504. *J. Rouet de Journal*. L'invention du pantographe. Co. 58. 215.

505. *F. Schilling*. Über die Anwendung der Fluchtpunktschiene in der Perspektive. Z.S. 56. 189.

506. *S. Smeaton*. Parabolagraph. A. A.A.S. 11. 650.

507. *A. Witting*. Vorrichtung zum Zeichnen von Ellipsen. S.I.D. 1909. A. 12.

508. *N. N.* Verstellbares Kreisbogenlineal. S.B.H. 25. 383; W.S.D.B. 26. 905.

509. *N. N.* Ein neues einfaches Linien-Schraffierinstrument. F.D.T. 26. 22.

510. *N. N.* Abschiebe-Dreiecke zum Auftragen kurzer Abszissen u. Ordinaten. D.B.T. 1909. 815.

Siehe auch 330; 775; 2802.

### Darstellende Geometrie.

511. *C. Cappello*. Su di un sistema di geometria descrittiva. G.B. 46. 197.

512. *V. Hübner*. Bemerkung über die Durchdringung zweier Drehungszyylinder (tschech.) C. 39. 330.

513. *G. Loria*. Intorno ad alcuni problemi metrici che s'incontrano in geometria descrittiva. P. M. R. (3) 5. 273.

514. *F. P. Paternò*. Alcuni teoremi nell'angolo triedro e de loro applicazioni in geometria descrittiva. P. M. (3) 6. 30.

515. *K. Privorszky*. Theorie der Darstellung auf zwei Bildflächen (ung.). M. P. L. 18. 29; 101.

516. *A. del Re*. Il più generale metodo di rappresentazione che serve di base alla geometria descrittiva. R. A. L. R. (5) 17. B. 639.

517. *N. A. Rynin*. Konstruktion der Schnittpunkte einer Geraden mit der Fläche eines geraden Kreiskegels mittels der Orthogonalprojektion (russ.). B. I. P. P. 3. 33.

518. *J. Schmoekel*. Lösungen einer geometrischen Aufgabe in Bezug auf kotierte Pläne. Z. S. 56. 317.

519. *P. H. Schoute*. Une leçon de géométrie descriptive sur l'emploi des quantités imaginaires. E. M. 11. 369.

520. *L. Tuschel*. Über eine krummlinige Projektion und deren Verwendung in der darstellenden Geometrie. M. H. 20. 358.

521. *L. Tuschel*. Zur Verwertung der sphärischen Abbildung in der darstellenden Geometrie. S. A. W. 117. 1261.

522. *J. P. Weinmeister*. Graphische Bestimmung der Achsen des schiefen elliptischen Kegels. S. I. D. 1909. B. 103.

### Projektion.

523. *E. Kruppa*. Über Affinität und Parallelprojektion im 4-dimensionalen Raume. S. A. W. 118. 15.

524. *J. Majcen*. Beitrag zur Zentralprojektion des Ellipsoids (kroat.). T. A. A. 177. 155.

525. *F. A. Pannekoek*. Schuive projectie van regelmatige lichamen. W. T. 6. 25.

526. *O. Richter*. Die senkrechte Projektion eines beliebigen Körpers mit Hilfe einer einzigen Projektionstafel. Z. H. 39. 571.

527. *A. Schultze*. Über trimetrische Liniennetze. Z. S. 59. 70.

Siehe auch 520; 563.

### Stereographische Projektion.

528. *E. Estanave*. Projection stéréoscopique. Écran stéréoscope. B. S. F. P. 1908. 57\*.

529. *A. Gradenwitz*. La projection stéréographique. R. G. O. 19. 683.

530. *P. Haß*. Die Behandlung der stereographischen Polarprojektion mit elementaren Sätzen der Geometrie und Stereometrie. U. M. N. 15. 56.

531. *T. L. Kwishtout*. Stereographische projectie. T. K. L. 24. 9.

532. *L. U. H. C. Wernldy*. Stereoscopische projectie. W. T. 6. 227.

### Perspektive.

533. *L. Botti*. Di alcuni fenomeni di grandezza apparante, di distanza e di prospettiva. A. A. T. 45. 670.

534. *A. Claeys*. Sur le rabattement des plans dans la perspective. M. (3) 8. 145.

535. *A. Demoulin*. Principes de géométrie perspective intrinsèque. C. R. 148. 460.

536. *A. Durand*. Transformation des relations métriques par la perspective. B. M. E. 14. 17.

537. *F. Schilling*. Über die Anwendung der Fluchpunktschiene in der Perspektive. Z. S. 56. 189.

538. *W. Schmidt*. Perspektive. P. M. B. 45. 97.

Siehe auch 501; 505; 2678.

### Axonometrie.

539. *A. Denizot*. Beitrag zur Theorie der axonometrischen Perspektive (poln.). T. W. 18. 61.

540. *A. Denizot*. Über die axonometrischen Verkürzungsverhältnisse. S. A. W. 117. 231.

541. *E. Kruppa*. Über den Pohlkeschen Satz. S. A. W. 116. 431.

542. *E. Kruppa*. Zur axonometrischen Methode der darstellenden Geometrie. S. A. W. 119. 487.

543. *N. A. Rynin*. Anwendung der Methode der axonometrischen Projektionen auf die Lösung einiger mechanischer Aufgaben (russ.). B. I. P. P. 3. 27.

544. *N. A. Rynin*. Anwendung der Methode der axonometrischen Projektion auf die Lösung einiger Aufgaben der Mechanik (russ.). A. I. P. P. 1905. 27.

545. *W. Weber*. Der Gauß-Weisbachsche Satz der Axonometrie. Z. H. 40. 156.

### Schattenkonstruktionen.

546. *E. Janisch*. Zur Schattenkonstruktion für das Plücker'sche Konoid. A. Gr. (3) 12. 317.

**Beleuchtungskunde.**

547. *H. Burmester.* Untersuchung der wahren Hellegleichen auf der Kugel nach dem Lummer-Seeligerschen Gesetz. Z.S. 58. 129.

548. *F. Naetsch.* Über Lichtgrenzkurven und geodätische Linien. S.I.D. 1909. B. 58.

**Photogrammetrie.**

549. *E. Doležal.* Das Rückwärtseinschneiden auf der Sphäre, gelöst auf photogrammetrischem Wege. S. A. W. 119. 1223.

550. *M. Großmann.* Ein geometrisches Problem der Photogrammetrie V. N. B. 93. 338.

551. *G. Hauck.* Über das Problem der 4 Punkte und das Problem der 6 Punkte der Photogrammetrie. S. M. B. 1909. 11.

552. *A. Klingatsch.* Zur photographischen Ortsbestimmung. S. A. W. 118. 455.

553. *A. Klingatsch.* Ein Zweihöhenproblem in der Photogrammetrie. S. A. W. 118. 1523.

554. *S. Nakamura.* An application of photogrammetry to the goniometry of crystals. J. T. (2) 4. 56.

555. *B. Reismann.* Ortsbestimmung auf photographischem Wege aus Aufnahmen mit Zenitmarke. Z. S. 59. 1.

556. *H. v. Sanden.* Photogrammetrie von Küstenaufnahmen. Z. S. 58. 110.

557. *H. v. Sanden.* Gegenseitige Orientierung von nahezu parallelen Aufnahmen in der Photogrammetrie. Z. S. 59. 12.

558. *W. Scheufele.* Die Aufgabe der 6 Punkte in der Photogrammetrie. Z. S. 55. 337.

559. *J. M. Torroja.* Fundamento teórico de la fototopografía. R. A. M. 6. 273; 380; 468; 565.

560. *J. M. Torroja.* Aplicación de las coordenadas proyectivas al problema general de la fototopografía. A. F. C. Z. 2. 1.

561. *N. N.* Fotogrammetria per uso balistico. R. M. R. 41. 373; R. A. G. 25. 274.

**Kristallographie.**

562. *H. Baumhauer.* Das Gesetz der Komplikation und die Entwicklung der Kristallformen. V. N. B. 93. 203.

563. *E. Billows.* Costruzione generale dei cristalli geminati in proiezione parallela. A. A. V. T. I. (2) 5. 6.

564. *E. S. Fedorov.* Eine äußerste Vereinfachung der zonalen Berechnungen und der kristallographischen Berechnungen überhaupt. B. S. R. M. 44. 199.

565. *E. S. Fedorov.* Der Sphaerotrigonometer (russ.). B. S. R. M. 44. 257.

566. *F. Haag.* Bemerkungen zum Komplikationsgesetze. Z. K. M. 45. 63.

567. *H. Hilton.* Note on the 32 classes of crystals. M. M. L. 14. 261.

568. *A. F. Rogers.* Stöber's method of making crystal drawings. S. M. Q. 28. 222.

569. *J. V. Samojlov.* Beitrag zum Studium der Wachstumspolyeder der Körper gleicher Struktur (russ.). A. P. B. (6) 1908. 1311.

570. *A. Schwantke.* Elementare Beweise des Zonengesetzes. C. M. G. 1909. 27.

571. *G. Smolar.* Base mathématique par le calcul cristallographique des macles B. I. P. 11. 170.

572. *E. Sommerfeldt.* Über die Beziehungen der Kristallpolyeder zu den regelmäßigen Körpern. N. J. M. 1908. 1; 113.

573. *C. Travis.* Eine graphische Anwendung des Doppelverhältnisses auf kristallographische Aufgaben. Z. K. M. 47. 586.

574. *G. Wulff.* Zur Theorie des Kristallhabitus. Z. K. M. 45. 433.

Siehe auch 554; 590.

**Modelle.**

575. *W. Baily.* On model of space filling solids. M. G. S. 4. 297.

576. *J. Beckenkamp.* Demonstration einiger neuer Strukturmodelle. V. G. W. (2) 40. 1.

577. *R. Bonola.* Il modello di Beltrami di superficie a curvatura costante negativa. B. B. L. 9. 33.

578. *A. Boole Stott.* On models of 3-dimensional sections of regular hypersolids in space of 4 dimensions. R. B. A. 77. 460.

579. *H. Dressler.* Über bewegliche Modelle für den mathematischen und naturgeschichtlichen Unterricht. U. M. N. 14. 3.

580. *C. Elliott.* Models of functions. M. G. S. 4. 323.

581. *A. Garbasso.* Modelli per la superficie d'onda del miraggio. N. C. P. (5) 18. 25.

582. *Gradenwitz.* Models for illustrating the strain on structures. S. Am. 99. 469.

583. *G. Haffner*. Anschauungsmittel zum propädeutischen Geometrieunterricht. U.M.N. 16. 59.

584. *J. J. D., G. H. B.* Models of spherical waves. N. 78. 570.

585. *F. Klein*. Modelle zur Darstellung affiner Transformationen von Punktsystemen in der Ebene und im Raum. Z.S. 58. 311.

586. *O. Lehmann*. Demonstrationen u. Modelle zur Lehre von den flüssigen Kristallen. P.Z. 10. 553.

587. *A. Lynch*. Une question de représentation géométrique. A.F. 1909. 63.

588. *P. H. Schoute*. Models of 3 developable surfaces. R.B.A. 77. 461.

589. *J. J. Taudin Chabot*. Über das elastische Moment der mechanischen Modelle von Vorgängen im Äther. P.Z. 9. 805.

590. *W. G. Woolnough*. Note on some simple models for use in the teaching of elementary crystallography. J.N.S.W. 39. A. 70.

#### Mechanik.

591. *P. Duhem*. La mécanique expérimentale. R.G.O. 21. 462.

592. *F. Pfeiffer*. Über elementare Mechanik. Z.P. 23. 214.

593. *H. Poincaré*. La mécanique nouvelle. R.S. (5) 12. 170.

594. *P. N. Sepelev*. Elemente der analytischen Mechanik I (russ.). B.I.T.Kh. 3.

595. *P. Stückel*. Math. Methoden zur Untersuchung mechanischer Probleme. D.V.M. 17. 363.

596. *C. Strouhal*. Mechanik (tschech.). R.M.P. 12.

Siehe auch 462; 543; 544; 599; 606; 1434.

#### Prinzipien der Mechanik.

597. *P. Appell*. Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement. Cr. 133. 93.

598. *H. Bateman*. The physical aspect of time. S.P.M. 54. N. 14.

599. *L. Bloch*. La mécanique de Newton et la mécanique moderne. R.S. (5) 9. 705.

600. *J. Boussinesq*. Sur les principes de la mécanique et sur leur applicabilité à des phénomènes qui semblent mettre en défaut certains d'entre eux. C.R. 150. 1639.

601. *J. Boussinesq*. Sur la conservation des masses vraies, dans divers phénomènes, principalement lumineux où apparaissent des masses fictives variables. C.R. 150. 721.

602. *Bulliot*. Note sur l'espace et le mouvement. A.S.B. 32. A. 197.

603. *N. Campbell*. The principles of dynamics. P.M. (6) 19. 168.

604. *D. F. Comstock*. The principle of relativity. S. (2) 31. 767.

605. *D. F. Comstock*. The relation of mass to energy. P.M. (6) 15. 1.

606. *E. et F. Cosserat*. Sur la mécanique générale. C.R. 145. 1139.

607. *E. Cotton*. Sur la notion de puissance en mécanique. E.M. 12. 222.

608. *F. Enriques*. Sui principii della meccanica. R.I.B. (2) 10. 48.

609. *E. Fontaneau*. Le principe de d'Alembert et ses applications aux corps élastiques et fluides. A.F. 1907. 1.

610. *E. Fontaneau*. Le principe de d'Alembert et ses applications à l'hydrodynamique. A.F. 1909. 168.

611. *P. Frank*. Die Stellung des Relativitätsprinzips im System der Mechanik und der Elektrodynamik. S.A.W. 118. 373.

612. *P. Frank*. Berichtigung zu „Ein Satz von Routh“. M.A. 66. 416.

613. *P. Frank*. Unstetige Lösungen beim Prinzip der kleinsten Wirkung. M.H. 20. 189.

614. *P. Frank u. H. Rothe*. Über eine Verallgemeinerung des Relativitätsprinzips und die dazu gehörige Mechanik. S.A.W. 119. 615.

615. *G. Hamel*. Über Raum, Zeit u. Kraft als apriorische Formen der Mechanik. D.V.M. 18. 357.

616. *G. Hamel*. Über die Grundlagen der Mechanik. M.A. 66. 350.

617. *R. Hargreaves*. Ignorance problem. P.M. (6) 19. 486.

618. *P. E. B. Jourdain*. Note on an analogue of Gauss' principle of least constraint. Q.J. 40. 153.

619. *P. E. B. Jourdain*. On those principles of mechanics which depend upon processes of variation. M.A. 65. 513.

620. *W. Kent*. The definition of force. S. (2) 31. 820 — F.E. Nipher 950.

621. *J. Lachelier*. Note sur les 2 derniers arguments de Zenon d'Elée contre l'existence du mouvement. R.M.M. 18. 345.

622. *W. Larden*. The principles of dynamics. M.G.S. 3. 385; 4. 1.

623. *J. Lavauz*. Étude sur les unités mécaniques. J.P. (4) 8. 849.

624. *R. Leitinger*. Über die Ableitung des Gaußschen Prinzips des kleinsten Zwanges aus den allgemeinsten Lagrangeschen Gleichungen 2. Art. S.A.W. 116. 1321.

625. *G. N. Lewis*. The fundamental laws of matter and energy. S. (2) 30. 84.
626. *G. N. Lewis* and *R. C. Tolman*. The principle of relativity and non-newtonian mechanics. P.A.Bo. 44. 711; P.M. (6) 18. 510.
627. *A. Liapounoff*. Problème général de la stabilité du mouvement. A.T. (2) 9. 203.
628. *O. Lodge*. Lord Kelvin's philosophy. N. 78. 198 — W. Peddie 246.
629. *P. Ludwik*. Über Grundlage der technol. Mechanik. M.I.V.M.T. 7. 1.
630. *R. Marcolongo*. Un trattato inedito di meccanica di Vincenzo de Filippis anteriore alla „Mécanique analytique“ de Lagrange. V.I.M.C. 4. C. 488.
631. *J. Mc Dowell*. The wave theory of motion. C.N. 98. 213. — *H. F. Redgrove*. 232.
632. *H. Minkowski*. Raum und Zeit. P.Z. 10. 104; D.V.M. 18. 75.
633. *H. Minkowski*. Espace et temps. A.E.N. (3) 26. 499.
634. *H. Minkowski*. Space and time. B.C.M.S. 1. 135.
635. *H. Minkowski*. Spazio e tempo. N.C.P. (5) 18. 333.
636. *R. de Montessus*. Sur les relations de récurrence à 3 termes. A.S.B. 32. A. 193.
637. *G. Nordström*. Rum och tid enligt Einstein och Minkowski. B. F. F. 52 Nr. 4.
638. *Pasquier*. Sur certaines notions fondamentales de mécanique. A.S.B. 34. A. 73.
639. *M. Planck*. Gleichförmige Rotation und Lorentz-Kontraktion. P.Z. 11. 294.
640. *J. Radakovits*. Einige Grundzüge der Mechanik. P.Z. 10. 99.
641. *Lord Rayleigh*. Hamilton's principle and the 5 aberrations of von Seidel. P.M. (6) 15. 677.
642. *F. Slate*. The essential meaning of d'Alembert's principle. S. (2) 28. 154.
643. *C. M. Sparrow*. On the fundamental ideas of the theory of relativity. J.H.U.C. 1910. 2. 45.
644. *L. Tallqvist*. Über Arbeitsgrößen in der math. Physik. A.S.F. 33. Nr. 5.
645. *J. J. Thomson*. La matière, l'énergie et l'éther. R.S. 14. 33.
646. *H. E. Timerding*. Die historische Entwicklung des Kraftbegriffes. D.V.M. 17. 390.
647. *V. v. Türin*. Über die Grundsätze und Hauptbegriffe der Mechanik. A.N.L. 5. 378.
648. *G. Vailati*. Per la preistoria del principio dei momenti virtuali. B.M. (3) 8. 225.
649. *V. Varidéak*. Anwendung der Lobatschewskijschen Geometrie in der Relativitätstheorie. P.Z. 11. 93; 287.
650. *F. W. Very*. The conservation of mass and the passing of matter. S. (2) 30. 491.
651. *L. E. M. Vicker*. On the kinetic measure of a force. M.G.S. 4. 331.
652. *V. Volterra*. Espacio, tiempo i masa segun las ideas modernas. A.S.A. 70. 223.
653. *L. Walrus*. Économique et mécanique. B.S.V. (5) 45. 313.
654. *M. Winkelmann*. Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik. A.Gr. (3) 15. 1.
655. *J. E. Wright*. Corresponding dynamical systems. A.D.M. (3) 16. 1.
- Siehe auch 670; 801; 862; 926; 927; 938; 975; 989; 1546.

#### Kinematik.

656. *L. Assur*. Analytische Untersuchungen über die Grundeigenschaften der Analogien der Beschleunigungen (russ.). B.I.P.P. 11. 317.
657. *L. Assur*. Die Analogien der Beschleunigungen und ihre Anwendung zur Berechnung der ebenen Stabsysteme. (russ.). B.I.P.P. 9. 735; 10. 43.
658. *J. Cardinaal*. De constructieve bepaling der smheden van een ruimtestelsel. C.A.A. 17. 945.
659. *R. Chassériau*. Essai d'une théorie cinématique de la musique. R.G.O. 19. 355.
660. *A. Durand*. Question de cinématique. R.M.S. 19. 89.
661. *G. Fontené*. Sur les composantes de l'accélération. R.M.S. 19. 289.
662. *A. Grünwald*. Die kubische Kreisbewegung eines starren Körpers. Z.S. 55. 264.
663. *F. E. Hackett*. A numerical solution of the triangular problem of pursuit. J.H.U.C. 208. 135.
664. *L. Hanni*. Kinematische Interpretation der Maxwell'schen Gleichungen mit Rücksicht auf das Reziprozitätsprinzip der Geometrie. S.A.W. 116. 1451; 117. 1317.
665. *L. Kleritsch*. Kinematische Auswertung der ellipt. Integrale. (serb.). P. A.B. 73. 178.
666. *J. Lauterbacher*. Die Verfolgungskurven einer Geraden. M.G.B. 1905. 165.



667. *J. Le Roux*. Sur certains mouvements des plans d'un système invariable et les mouvements à trajectoires sphériques. T.S.U.R. 3. 189.

668. *E. Meissner*. Über die Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik. V.N.Z. 54. 309.

669. *R. Müller*. Erzeugung der Koppelkurve durch ähnlich veränderliche Systeme. Z.S. 58. 247. — *R. Skutsch* 252. — *R. Mehmke*. 257.

670. *C. Neumann*. Einige Äußerungen Jacobis über die Prinzipien der analytischen Mechanik. B.G.L. 60. 80.

671. *F. Noether*. Zur Kinematik des starren Körpers in der Relativtheorie. A.P.L. (4) 31. 919.

672. *A. Pellet*. Remarques sur le mouvement d'une figure plane dans son plan. S.M. 35. 252.

673. *R. de Saussure*. Exposé résumé de la géométrie des feuilletts. M.S.G. 36. 211.

674. *R. de Saussure*. La géométrie des feuilletts. A.S.G. (4) 28. 425.

675. *C. Spelta*. Alcune formole di geometria e di cinematica. P.M.R. 26. 30.

676. *C. Spelta*. Sulla determinazione della velocità, angolare e della accelerazione angolare nel moto più generale di un corpo rigido. P.M.R. (3) 7. 128.

677. *L. Stjepanek*. Beweis für das Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten. (tschech.). C. 38. 449.

678. *E. Study*. Die Kinematik der Herren de Saussure und Bricard. D.V.M. 19. 255.

679. *Valentin-Smith*. Étude sur le nouveau mode „Koch“ de transformation d'un mouvement circulaire uniforme. A.S.L. 1907. 322.

680. *P. V. Voronec*. Der Begriff der geometr. Ableitung in der Kinematik. B.U.K. 1908. e. Nr. 8.

Siehe auch 351; 441; 978; 991.

### Kinematische Geometrie.

681. *E. Barré*. Étude sur le déplacement d'une hélice de forme variable. S.M. 37. 61.

682. *L. Bieberbach*. Über die Bewegungsgruppe des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes mit einem endlichen Fundamentalbereich. N.G.G. 1910. 75.

683. *J. Boulad*. Construction des centres de courbure des lignes décrites pendant le déplacement d'une figure plane sur un plan. N.A. (4) 8. 128.

684. *R. Bricard*. Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques. J. E.P. (2) 11. 1.

685. *L. F. J. Brouwer*. Karakterisering der euclidische en niet-euclidische bewegingsgroepen in  $R_n$ . H.N.C. 12. 189.

686. *J. Cardinaal*. Enige constructien afgeleid uit de beweging van een vlak stelsel. C.A.A. 16. 566.

687. *J. Cardinaal*. Sur une courbe plane du 8<sup>e</sup> degré. A.M.T. (2) 12. 49.

688. *G. Darboux*. Sur les familles de Lamé engendrées par le déplacement d'une surface qui demeure invariable de forme. C.R. 148. 65.

689. *J. Haag*. Sur les applications géométriques de certains mouvements remarquables. C.R. 147. 963.

690. *M. Krause*. Zur Theorie der ebenen unveränderlichen Systeme. A.Gr. (3) 16. 2.

691. *R. Mehmke*. Beiträge zur Kinematik starrer und affin-veränderlicher Systeme, insbesondere über die Windung der Bahnen der Systempunkte. Z.S. 59. 90; 204.

692. *R. Müller*. Über die Momentanbewegung eines ebenen ähnlich veränderlichen Systems bei unendlich fernem Pol. D.V.M. 19. 147.

693. *R. Müller*. Erzeugung der Koppelkurve durch ähnliche veränderliche Systeme. Z.S. 58. 247. — *R. Skutsch* 352. — *R. Mehmke*. 257.

694. *T. Rousseau*. La géométrie élémentaire basée sur le groupe des déplacements. E.M. 11. 81.

695. *G. B. Santangelo*. Su di una estensione del teorema di Habich. A.A.T. 45. 400.

696. *A. Schoenflies*. Einfache Ableitung der Parameterformeln für Bewegungen und Umlegungen. R.C.M.P. 29. 329.

697. *O. Spieß*. Über eine Klasse von Kurven. V.N.B. 21. 102.

698. *E. C. Valentiner*. Om overføring af et system af punkter i et dermed kongruent. T.M. 19. A. 85.

Siehe auch 760.

### Relative Bewegung.

699. *W. M. Frankl*. Absolute u. relative Bewegung. A.N.L. 6. 150.

700. *G. Wernick*. Absolute u. relative Bewegung. A.N.L. 4. 317.

Siehe auch 911.

### Mechanismen.

701. *Angelus*. The design of planetary gears. H.A. 22. 735.

702. *E. W. Baxter*. Determining dimensions of gears from samples. M.N. Y. 16. 898.
703. *D. Brown*. Weitere Aufklärungen über das „Hindley“-Schneckengetriebe. Z.P.M. 1. 1185.
704. *Buffoline*. Noiseless gears. E.M. L. 9. 88.
705. *C. Burali-Forti*. Ingranaggi piani. A.A.T. 37. 393.
706. *A. L. Clough*. Change speed gears at the show. H.A. 1909. 138.
707. *C. Crone*. Om nogle ledede stangsystemer. T.M. 19. B. 7.
708. *C. V.* Changement de vitesse hydraulique. R.I.P. 40. 306.
709. *Day*. Gear driving as applied to the electric transmission of heavy powers. E.M.L. 9. 280.
710. *M. Disteli*. Das Hooke'sche Gelenk. S.I.D. 1908. A. 26.
711. *J. Dornacher*. Belastung von Kugellagern in Automobilgetrieben. M.W. B. 13. 507; 532.
712. *A. Emch*. Kinematische Erzeugung von Raumkurven 4. Ordnung durch Gelenkmechanismen. V.S.N.G. 90. 81.
713. *L. Feigl*. Die Ermittlung der Bewegungsverhältnisse von Kurbelgetrieben in einfacher zeichnerischer Behandlungsweise. Z.S. 58. 173.
714. *O. Fischer*. Zur Kinematik des Listing'schen Gesetzes. A.G.L. 31. 3.
715. *Gauthier*. Les changements de vitesse. L.L.A. 1909. 252; 262.
716. *F. Giudice*. Sull' inscrivibilità circolare dei poligoni articolati. A.A.T. 44. 905.
717. *A. Gradewitz*. The Foettinger Hydraulic gear. P.T.E. 32. 663.
718. *F. M. Green*. Worm gearing in practice and theory. C.M.T.R. 36. 318; 344.
719. *G. Heun*. Die Grundgleichungen der Kinetostatik der Körperketten mit Anwendung auf die Mechanik der Maschinen. Z.S. 56. 38.
720. *M. Krause*. Zur Theorie der Gelenkssysteme. B.G.L. 59. 313; 60. 132.
721. *M. Krause*. Zur Theorie der Gelenkmechanismen. S.I.D. 1908. A. 9.
722. *L. Lacoïn*. Which is better: three or four speeds? T.A.N.Y. 20. 615.
723. *L. Legros*. Transmission. A.M. J. 14. 997; 1025.
724. *W. Lodge* and *R. K. Le Blond*. Cone drive versus gear drive. M.M.C. 25. 51.
725. *C. H. Logue*. Speed of spur gears. M.W.M. 46. 208.
726. *J. S. Myers*. Solution of epicyclic gearing by the method of levers. M.N.Y. 16. 524.
727. *J. J. Quinn*. A new linkage for describing a straight line by continuous motion. M.M.F. 16. 1.
728. *P. M. L. Revillon*. A study of steel for gears. P.W.L. 14. 1139.
729. *R. D. Robertson*. How to shift gears noiselessly. H.A. 1909. 175.
730. *N. A. Rynin*. Berechnung der Ringscharniere mit festen Elementen (russ.). B.I.P.P. 9. 533; 10. 1.
731. *P. Somow*. Über einige Anwendungen der Kinematik der Körper von veränderlicher Gestalt auf Gelenkmechanismen (russ.). A.I.P.W. 1900—1901.
732. *P. Somow*. Sur quelques applications de la cinématique des corps de forme variable aux mécanismes articulés. A.U.W. 1900.
733. *P. Somow*. Über die Gelenkssysteme mit veränderlichen Elementen (russ.). A.I.P.W. 1902.
734. *P. Somow*. Sur les systèmes articulés avec des éléments variables. A.U.W. 1901; C.M.N.W. 14.
735. *F. Strickland*. The construction of differential gears. M.T.L. 11. 75.
736. *E. Walford*. Noiseless and frictionless gearing. A.C.L. 23. 717.
737. *F. E. Watts*. Special level gear. H.A. 26. 153.
738. *F. E. Watts*. A friction speed changing device. H.A. 1909. 158.
739. *Zimin*. Kinematik des Gelenkrhombus in der Ebene (russ.). B.U.V. 1906. 137.
740. *M. Zimin*. Cinématique du losange articulé plan. A.U.W. 1904.
741. *N. N.* The differential gear. Mo. 17. 131.
742. *N. N.* Das „Lenix“ Spannrollengetriebe. Z.A.K. 3. 406.
743. *N. N.* Cardwell friction gear. B.A.G.N.Y. 1909. 1057.
744. *N. N.* The Dennis worm drive. A.M.J. 15. 40.
745. *N. N.* A new reducing gear. P.E.L. 39. 13.
746. *N. N.* The evolution and methods of manufacture of spurgearing. E.R.L. 19. 199.
747. *N. N.* A serviceable mechanism. M.T.L. 8. 480.
748. *N. N.* Nouveau changement de vitesse. I.V.A. 28. 506.
749. *N. N.* Lancheater system of gear change. Mo. 17. 139.
750. *N. N.* Appareil à réglage variable et automatique pour le changement de vitesse et de marche des automobiles. L.F.A. 1909. 542.

751. *N. N.* Casting spiral gears. *M.W.M.* 46. 62.

752. *N. N.* An ingenious form of change speed gate. *C.M.T.R.* 36. 949.

753. *N. N.* Changement de vitesse progressif. *L.F.A.* 1909. 457; 585.

754. *N. N.* The gearing of modern spinning mills. *M.W.M.* 46. 161.

Siehe auch 490; 491; 679; 857.

### Zahnräder.

755. *E. J. Bartlett.* Pitch and ratio of level driving gears. *H.A.* 1909. 432.

756. *A. Bauschlicher.* Zur Frage der Kugelzahnräder. *Z.M.M.* 1909. 465; 498.

757. *E. Becker.* Pfeilräder mit gefrästen Zähnen. *Z.P.M.* 1. 545.

758. *G. Braun.* Über Zahnformen. *V.T.W.* 1. 233; 299; 492; 549; 577; 653; 1385; 1423

759. *Charve.* Frottement dans les engrenages. *F.M.* 13. 1.

760. *M. Disteli.* Über einige Sätze der kinematischen Geometrie, welche der Verzahnungslehre zylindrischer und konischer Räder zugrunde liegen. *Z.S.* 56. 233.

761. *H. Dolnar.* Der Einbau von konischen Zahnrädern für den Antrieb der Hinterradachse an Automobilen. *Z.P.M.* 1. 557.

762. *J. Horner.* Recent practice in gear cutting. *E.M.L.* 1909. A. 337; B. 5.

763. *E. Person.* Some interesting cam contractions. *M.N.Y.* 16. 391.

764. *H. G. Taylor.* Epicyclic trains of wheels. *P.E.L.* 40. 491.

765. *V. Thalmeyer.* Einfache Bestimmungen von Übersetzungszahlen. *L.W.M.G.* 1909. 9.

766. *N. N.* Tafel zur Berechnung von Zahnrädern. *Mü.* 1909. 165.

767. *N. N.* The design of worm gearing. *P.E.L.* 39. 746.

768. *N. N.* The Nuttall removable rim gear. *I.A.* 81. 1941.

769. *N. N.* A new gear wheel. *E.R.L.* 1909. 827.

770. *N. N.* The production of large gear wheels. *P.W.L.* 13. 409.

771. *N. N.* Double helical gear wheels. *I.C.T.R.* 77. 1705.

772. *N. N.* The stub tooth gear. *H.A.* 21. 438.

773. *N. N.* Herstellung von Stirnrädern mittels Façon- oder Schneckenfräsern. *E.P.R.* 25. 286.

774. *N. N.* The long arm automatic tooth chamfering attachment. *H.A.* 23. 704.

775. *N. N.* Nouveau compas aux engrenages. *J.S.H.* 33. 221.

### Schraubenrechnung.

776. *R. Ball.* On the quaternion expression for the coordinates of a screw reciprocal to 5 given screws. *A.A.A.S.* 12. 52.

777. *J. Haag.* Sur la viriation de 2 surfaces réglées. *C.R.* 147. 418.

778. *J. Thuet.* Sur le déplacement hélicoïdal. *B.M.E.* 14. 257; 275.

Siehe auch 834.

### Statik.

779. *W. E. Bryan.* On some early propositions of statics. *M.G.S.* 4. 386.

780. *E. et F. Cosserat.* Sur la statique de la ligne déformable. *B.R.* 145. 1409.

781. *E. et F. Cosserat.* Sur la statique de la surface déformable et la dynamique de la ligne déformable. *C.R.* 146. 68.

782. *C.S.J.; G. H. B.* Snow sliding down a roof. *M.G.S.* 5. 166.

783. *A. del Re.* Sulla astatica nello spazio a 4 dimensioni. *R.A.L.R.* (5) 17. B. 691.

784. *A. del Re.* Sull' equilibrio dei corpi solidi soggetti a forze costanti in grandezza e direzione nel spazio a 4 dimensioni. *R.A.N.* (3) 16. 288.

785. *A. del Re.* Principii di una teoria che abbraccia la astatica in uno spazio ellittico ad  $n$  dimensioni. *R.A.N.* (3) 16. 302.

786. *R. W. Genese.* Application of the method of reciprocal polars to forces in space. *V.I.M.C.* 4. C. 146.

787. *M. Grübler.* Über den Gewichtsbegriff. *U.M.N.* 13. 127; 14. 26.

788. *Hünecke.* Statische Berechnung einer Kassettendecke aus Eisenbeton. *Z.T.B.* 6. 153.

789. *A. Jatho.* Estudios sobre la astatica del poligono de barras relacionados principalmente con la determinacion de su forma. *A.S.A.* 69. 109.

790. *A. Jatho.* Untersuchungen zur Statik des Stabpolygons insbesondere die Gestaltbestimmung betreffend. *Z.S.* 56. 138.

791. *A. G. Kerkhoven-Wijthoff.* On the equilibrium of a system of particles of equal mass placed on the inner surface of a sphere and mutually repelling each other according of the  $m^{\text{th}}$  power of the distance. *N.A.W.* (2) 9. 305.

792. *A. Kos.* Statische Berechnung einer Mittelstütze in Eisenbeton. Z.T. B. 1910. 27.

793. *A. Kos.* Die statische Berechnung der Eisenbeton-Treppenstufen. Z. T. B. 190. 35.

794. *F. Kucharzewski.* Eine neue Geschichte der Statik. (poln.). P. T. W. 45. 545; 577; 601.

795. *G. Lery.* Sur l'équilibre du corps solide. N. A. (4) 8. 348.

796. *M. Milankowitsch.* Zur Statik der massiven Widerlager. Z. S. 58. 120.

797. *M. Pilgram.* Die statische Berechnung eines Rades. A. M. H. 1909. 135.

798. *K. Schreiber.* Masse und Gewicht. U. M. N. 13. 128. — *H. Erdmann.* 14. 14; *F. Pietzker.* 14. 15.

799. *G. Stephany.* Statische Berechnung des Tragwerkes für die Oberleitung elektrischer Bahnen. Z. T. S. 27. 412.

800. *H. Tallqvist.* Über die Stabilität des Gleichgewichts eines nicht freien materiellen Punktes. A. S. F. 35. Nr. 3.

801. *G. Vailati.* Il posto da assegnare al principio dei lavori virtuali in una esposizione elementare della statica. N. C. P. (5) 15. 505.

802. *G. Vailati.* La scoperta della condizione d'equilibrio d'un grave scorrevole lungo un piano inclinato. B. B. L. 10. 65.

803. *R. Wagner.* Berechnung statisch unbestimmter Rahmendächer auf elementarem Wege. A. B. B. 1909. 460.

804. *E. B. Wilson.* The equilibrium of a heavy homogeneous chair in a uniformly rotating plane. A. of M. (2) 9. 99.

Siehe auch 65; 829.

### Graphische Statik.

805. *G. Colonnetti.* Contributo alla trattazione grafica della trave continua. A. A. T. 44. 350.

806. *E. Haimovici.* Graphische Darstellung der Formeln zur Dimensionierung und Spannungsermittlung bei auf zentrischen Druck beanspruchten Eisenbetonsäulen. B. Z. H. 1909. 209.

807. *A. Jatho.* Untersuchungen zur Statik des Stabpolygons, insbesondere die Gestaltbestimmung betreffend. Z. S. 56. 138.

808. *Ramisch.* Graphische Untersuchung eines Schornsteins in Bezug auf seine Standsicherheit. E. P. R. 25. 13.

809. *J. Thieme.* Beitrag zur graphischen Behandlung der statisch unbestimmten Systeme. Z. S. 57. 174.

810. *K. T. Vahlen.* Über graphische Zusammensetzung von Kräften im Raume. Z. S. 56. 315.

Siehe auch 1754; 1773; 1796; 1815; 1867; 2406.

### Zusammensetzung von Kräften.

811. *A. Axer.* Über Systeme innerer Kräfte mit einem Mittelpunkt. (poln.). T. W. 19. 99.

812. *R. Bonola.* Osservazione sopra una nota di G. Battaglini relativa alla composizione di forze concorrenti. P. M. R. (3) 6. 171.

813. *G. Casazza.* Nuove deduzioni dalla teoria della composizione dei moti. V. I. M. C. 4. C. 201.

814. *K. Oerling.* Die Bestimmung der Mittelkraft. Z. G. U. 22. 16.

815. *D. Pompeiu.* Sur la règle du parallélogramme. A. S. U. J. 6. 71.

816. *E. Schulze.* Ein Kräfteparallelogrammversuch. Z. P. 23. 94.

817. *K. T. Vahlen.* Über graphische Zusammensetzung von Kräften im Raume. Z. S. 56. 315; 429.

Siehe auch 810.

### Schwerpunkte.

818. *J. Binder.* Bemerkungen zur Lage des Schwerpunktes im Dreieck. Z. H. 38. 331.

819. *M. Demeczky.* Ein geometrischer Satz über den Massenmittelpunkt. (ung.). M. P. L. 16. 509.

820. *M. Einhorn.* Eine Konstruktion für den Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks. Z. S. 57. 197.

821. *D. Georgescu.* Bogen- und Kreis- des Kreises. (rumän.). G. M. B. 15. 171.

822. *R. Haussner.* Betreff. Schwerpunkte von Punktsystemen. B. M. S. J. 1906—07. 8.

823. *V. Rehořovský.* Neue Konstruktion des Schwerpunktes eines Vierecks. (tschech.). S. G. B. 1907. Nr. 6.

824. *G. Sannia.* Sui baricentri di una curva storta omogenea. G. B. 45. 275.

825. *G. Sforzo.* Corpi rotondi e baricentro nella metrica proiettiva. A. A. T. 44. 957.

826. *J. F. Weser.* Schwerpunkte der Spiralen und ihrer Endkurven. L. U. Z. 17. 6.

Siehe auch 1542.

### Momente.

827. *J. A. Brown.* Moment of inertia of built-up sections. M. N. Y. 16. 566.

828. *W. R. Cassie*. An accurate method of measuring moments of inertia. P.P.S.L. 24. 497.

829. *M. Genel*. Einfluß der Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes bei der Bestimmung von statisch unbestimmten Größen. A.B.B. 1910. 125.

830. *J. N. Héton de la Goupillière*. Note sur les axes principaux du temps de parcours. J.M. (6) 4. 107.

831. *R. Henderson*. Frequency curves and moments. J.I.A. 41. 429.

832. *I. Ionescu*. Absolute statische Momente. (rumän.). G.M.B. 14. 161; 193. 225.

833. *H. W. E. Jung*. Über die Lage der Hauptträgheitsachsen von Punktsystemen in der Ebene. A.Gr. (3) 13. 231.

834. *Kirner und Cillat*. Das Drehmoment des Zweischraubenantriebs. M.W.B. 1909. 299.

835. *R. Marcolongo*. Momenti d'inerzia ed impulso nella dinamica dei sistemi rigidi. R.A.N. (3) 16. 193.

836. *S. Mirea*. Über Trägheitsmomente. (rumän.). G.M.B. 15. 165.

837. *K. Noack*. Masse und Trägheitsmoment. Z.P. 23. 168.

838. *H. S. Rowell*. On the least moments of inertia of an angle-bar section. P.P.S.L. 21. 653.

839. *W. F. Sheppard*. Quadratic formulae in relation to moments. M.G.S. 4. 325.

840. *G. K. Suslov*. Das Gesetz des Trägheitszentrums und das Gesetz der Momente. B.U.K. 1908 c. Nr. 8.

841. *F. J. Vaes*. Over traagheidsmomenten. D.I.G. 1909. 628.

Siehe auch 290; 458; 589; 648; 983; 1146; 1771; 1789; 2403; 2632.

### Kettenlinien.

842. *M. Freyberg*. Über die Größe des Durchhanges der Tragselle bei Drahtseilbahnen. B.K.H. 8. 680.

843. *L. Hünert*. Eine Darstellung der Gleichgewichtsform von Fäden, deren Dichte eine Funktion der Fadenlänge ist und ein mechanisches Integrationsverfahren gewisser Differentialgleichungen. Z.S. 58. 233.

844. *E. B. Wilson*. On the differential equations of the equilibrium of an inextensible string. T.S.M.Am. 9. 425.

Siehe auch 804; 1826.

### Dynamik.

845. *W. Anderson*. Dynamics as a school subject. M.N.E. 1. 8.

846. *F. T. Jones*. The teaching of elementary dynamics in the high school. S. (2) 31. 220.

847. *W. Kent*. The teaching of elementary dynamics in the high school. S. (2) 30. 918.

848. *F. Villareal*. Dinamica. R.C.L. 13. 92; 133; 150; 178; 246; 272; 14. 8; 21.

### Differentialgleichungen der Dynamik.

849. *S. Bernstein*. Sur les équations de la mécanique et du calcul des variations. C.R. 151. 48.

850. *P. Burgatti*. Sulle equazioni generali della dinamica. R.A.L.R. (5) 18. B. 135.

851. *P. Burgatti*. Sulla forma più generale delle equazioni della dinamica. R.A.L.R. (5) 18. B. 340.

852. *P. Burgatti*. Sulla trasformazione e sulla riduzione dei sistemi Hamiltoniani. R.A.L.R. 19. B. 566.

853. *P. Burgatti*. Determinazione dell'equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili. R.A.L.R. 20. A. 108.

854. *P. E. B. Jourdain*. Addition to papers on the equations of mechanics. Q.J. 39. 241.

855. *L. Koenigsberger*. Über die Elimination von Variablen zwischen den Lagrangeschen Gleichungen der Dynamik. Cr. 133. 179.

### Graphische Dynamik.

856. *T. Pöschl*. Beitrag zur graphischen Dynamik des starren ebenen Systems. Z.S. 58. 156.

857. *T. Pöschl*. Beitrag zur graphischen Dynamik zweier gelenkig verbundenen ebenen Systeme. S.A.W. 118. 527.

858. *C. Störmer*. On the graphic solution of dynamical problems. M.S.C. 1908. Nr. 1.

### Dynamik des Punktes.

859. *F. Caldarera*. Dei moti di punti materiali aventi accelerazioni tangenziali in ragione costante con gli spazi percorsi. A.I.V. 68. 883.

860. *A. W. Duff*. A simple method of illustrating uniform acceleration. S. (2) 24. 538.

861. *Duhem*. Sur la découverte de la loi de la chute des graves. C.R. 146. 908; V.I.M.C. 4. C. 432.

862. *P. Frank*. Ein Kriterium für die Stabilität der Bewegung eines materiellen Punktes der Ebene u. dessen Zusammenhang mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung. M.H. 20. 171.

863. *Grosse*. Der schiefe Wurf. Z.H. 41. 198.

864. *G. W. Hartwell*. Plane fields of force whose trajectories are invariant under a projective group. T.S.M.A. 10. 220.

865. *E. Kasner*. Natural families of trajectories: conservative fields of force. T.S.M.A. 10. 201.

866. *E. Meschtschersky*. Über die Bewegungsgleichungen eines Punktes von veränderlicher Masse im allgemeinen Fall. (russ.). B.I.P.P. 1. 77.

867. *O. Olson*. En tillämpning af de hyperelliptiska funktionerna inom der materiella punktens dynamik. A.M.A.F. 5. Nr. 5.

868. *O. Olson*. Tillämpning af de hyperelliptiska funktionerna inom den materiella punktens dynamik. A.M.A.F. 6 Nr. 8.

869. *L. Orlando*. Sulla velocità minima nella traiettoria d'un grave. A.A. P.M. 20. A. 178.

870. *G. Pennacchietti*. Sulle forme più semplici degl' integrali delle equazioni differenziali del moto d'un punto materiale. A.I.V. 69. 725.

871. *M. Réthy*. Stabilität und Labilität des materiellen Punktes im widerstehenden Medium. (ung.). M.P.L. 16. 261; 365.

872. *M. Réthy*. Über Stabilität und Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel. Cr. 133. 284; 134. 299.

873. *A. Sartori*. Moti piani conservativi a traictorie circolari. A. I. V. 65. 399.

874. *C. E. Wasteels*. Eenige bijzondere eigenschappen uit de dynamika van het stoffelijk punt. H.V.C. 1908. 127.

875. *C. E. Wasteels*. Sur le mouvement d'un point pesant à la surface de la terre. M. (3) 8. 5.

876. *M. Zeisberg*. Gute Darstellung der Wurfparabel. Z.P. 23. 232.

Siehe auch 960.

### Zwangene Bewegung.

877. *J. Bjelankin*. Über die Bewegung eines materiellen Punktes auf einem Kegelschnitt. (russ.). S.M.M. 26. 625; B.U.K. 1909. C. 1. 320.

878. *U. Cisotti*. Sul moto di un solido in un canale. R.C.M.P. 28. 307.

879. *E. O. Lovett*. Conservative systems of prescribed trajectories. R.B.A. 78. 614.

880. *H. Tallqvist*. Über die Stabilität der stationären Bewegung eines Punktes in einer Schraubenlinie. A.S.F. 35. Nr. 5. Siehe auch 800.

### Zentralbewegung.

881. *J. Beljankin*. Exemple d'une force centrale telle qu'un point matériel peut décrire une C. V.I.M.C. 4. C. 199.

882. *J. A. M'Bride*. Two illustrations of Newtons 3. law. M.N.E. 1. 16.

883. *A. Durand*. Question de mécanique. R.M.S. 18. 481.

884. *P. Frank*. Über die Bahnkurven der Mechanik. Cr. 134. 156.

885. *F. L. Griffin*. A simple example of a central orbit with more than 2 apsidal distances. M.M.F. 14. 199.

886. *F. L. Griffin*. Families of central orbits related to circular trajectories. M.M.F. 16. 57.

887. *F. L. Griffin*. Certain trajectories common to different laws of central force. A.J.B. 26. 3.

888. *A. Hall*. Elliptic motion. P.A. 13. 287.

889. *J. N. Hatzidakis*. Über die Kräfte, die Kegelschnitte als Bahnen hervorgerufen. Cr. 133. 68.

890. *W. D. Macmillan*. The motion of a particle attracted towards a fixed center by a force varying inversely as the 5. power of the distance. A.J.M. 30. 282.

891. *E. J. Moulton* and *F. H. Hodge*. On certain properties of the orbits of a particle subject to a central force varying as an integral power of the distance. M.M.F. 15. 119.

892. *G. Remondos*. Sur les trajectoires auxquelles donnent lieu les forces centrales. S.M. 35. 255.

893. *N. N. Saltykov*. Bemerkung über die Lösung einer Aufgabe über die Bewegung eines materiellen Punktes unter der Wirkung einer Zentralkraft (russ.). S.M.M. 27. 203.

894. *T. Schwartz*. Das Tangentenproblem und die Zentralbewegung. P.W.L. 6. 97.

895. *H. Teege*. Einfache Herleitung des Newtons Gravitationsgesetzes aus den Keplerschen Gesetzen und umgekehrt nur auf Grund des Energieprinzips. Z.P. 23. 207.

896. *M. Tolle*. Zur Keplerschen Bewegung. Z.S. 56. 113. — *H. Liebmann*. 57. 197.

897. *G. Zappe*. Sul valore di un particolare legge di forza centrale. R.A.L.R. 18. A. 280.

Siehe auch 791.

**Tautochronen und Isochronen.**

898. *E. Kasner*. Tautochrones and brachistochrones. *S.M.Am.* (2) 15. 476.

899. *G. J. D. Mounier*. Jets over isochronisme. *W.T.* 4. 10.

900. *G. J. D. Mounier*. Nog eens isochronisme. *W.T.* 4. 216.

901. *H. W. Reddick*. Systems of tautochrones in a general field of force. *A. J.M.* 32. 365.

902. *M. V. Válcovici*. Sur les courbes et surfaces synchrones. *B.S.B.* 18. 13.

Siehe auch 906.

**Brachistochronen.**

Siehe 898.

**Pendel.**

903. *G. Abetti* e *C. Cappello*. Metodi proposti per la determinazione diretta della flessione del supporto dei pendoli gravimetrici. *R. A. L. R.* (5) 19. A. 272.

904. *G. Abetti* e *C. Cappello*. La flessione del supporto dei pendoli nelle determinazioni di gravità relativa. *R. A. L. R.* (5) 19. B. 109.

905. *A. O. Allen*. Notes on the theory of the reversible pendulum. *M.G.S.* 3. 394.

906. *J. Andrade*. Synchronisation par le fer doux. *V.I.M.C.* 4. C. 142.

907. *K. Bielschowsky*. Ein seine Eigenbewegung registrierendes Pendel. *Z.N.* U. 1908. 547.

908. *H. A. Bumstead*. Applications of the Lorentz-Fitz Gerald hypothesis to dynamical and gravitational problems. *A.J.S.* (4) 26. 493.

909. *P. Charbonnier*. Sur la théorie des perturbations du pendule. *N.A.* (4) 8. 145; 220.

910. *E. Cotton*. Sur l'intégration approchée des équations du pendule de Foucault. *A.U.G.* 21. 99.

911. *A. Denizot*. Über die Anwendung der Theorie der relativen Bewegung auf das Foucaultsche Pendel. *B.B.N.V.* 4. 248.

912. *C. Féry*. Sur quelques modes électriques d'entretien du pendule. *J.P.* (4) 7. 520.

913. *G. Greenhill*. Pendulum motion and spherical trigonometry. *P.M.* (6) 20. 728.

914. *G. Greenhill*. Pendulum theory without approximation. *H.J.* 52. 174.

915. *A. G. Greenhill*. Une démonstration élémentaire de la formule du pendule. *E.M.* 11. 245.

916. *A. G. Greenhill*. The dygogram of axle reaction of a pendulum. *P.E. M.S.* 26. 21.

917. *W. H. Jackson*. The deflecting force of the Earth's rotation and Foucault's pendulum. *M.M.F.* 16. 82.

918. *L. de la Rive*. De l'influence d'une accélération extérieure sur les oscillations d'un pendule et d'une lame élastique. *V.N.B.* 93. 325.

919. *P. Pagnini*. Esperienze sul pendolo di torsione con apparecchio atto a determinare la gravità. *N.C.P.* (5) 16. 436.

920. *S. Petira*. Bemerkung über einen neuen Apparat zum Beweis der Unveränderlichkeit der Schwingungsebene (tschech.). *C.* 38. 49.

921. *M. Popowitsch*. Beitrag zur Theorie des physikalischen Doppelpendels (serb.). *P.A.B.* 73. 206.

922. *J. Rose-Innes*. On the motion of a pendulum swinging through an arc of finite magnitude. *P.M.* (6) 19. 851.

923. *P. C. Sánchez*. Estudio sobre el pendulo. *M. y R.M.* 25. 33.

924. *G. Siebert*. Zur Ableitung der Pendelformel. *Z.H.* 39. 496.

925. *C. E. Wastels*. Sur une nouvelle représentation des lois du mouvement pendulaire simple. *M.* (3) 9. 59.

**Dynamik des Körpers.**

926. *M. Born*. Die Kinematik des starren Körpers im System des Relativitätsprinzips. *N.G.G.* 1910. 27.

927. *G. Herglotz*. Bewegung starrer Körper und Relativitätstheorie. *P.Z.* 10. 997.

928. *E. Kasner*. The theorem of Thomson and Tait and natural families of trajectories. *T.S.M.Am.* 11. 121.

929. *O. Olsson*. Integration af ett inom fasta kroppars dynamik förekommande system differentialekvationer. *A.M.A.F.* 6. No. 14.

930. *R. de Saussure*. Les systèmes de corps solides. *A.S.G.* (4) 29. 310.

931. *G. Schouten*. De beweging van een biljardbal over een horizontaal vlak. *N.A.W.* (2) 8. 337.

932. *F. Schur*. Über die Bewegung eines starren Körpers durch Abschrotten. *Z.S.* 55. 408.

933. *P. Somov*. Über die Gebiete möglicher Geschwindigkeiten eines festen Körpers der auf mehreren Flächen ruht (russ.). *A.I.P.W.* 1900—1901.

934. *C. Spelta*. Sulla determinazione delle velocità e della accelerazione nel moto più generale di un corpo rigido. *G.B.* 48. 37.

935. *A. Stephenson*. On induced stability. P. M. (6) 17. 765.

936. *E. Stübler*. Das Beschleunigungssystem bei der Bewegung eines starren Körpers. D. V. M. 19. 177.

937. *E. Stübler*. Das Fräsen von Schraubengewinden. Z. S. 57. 271.

Siehe auch 835; 2196.

### Dynamik des Systems.

938. *M. Abraham*. Die Bewegungsgleichungen eines Massenpendels in der Relativtheorie. P. Z. 11. 527.

939. *P. Appell*. Quelques remarques sur les équations du mouvement d'une chaîne parfaitement flexible. A. A. P. 4. 113.

940. *P. Appell*. Quelques remarques sur les équations du mouvement d'une chaîne parfaitement flexible. A. S. A. P. 4. 9.

941. *J. Arnould*. Sur le mouvement d'un fil dans l'espace. C. R. 150. 1592.

942. *A. Acer*. Über Systeme innerer Kräfte mit Mittelpunkt (poln.). T. W. 19. 99.

943. *A. V. Bäcklund*. Die in der Mechanik angewandte Variation der Integrationskonstanten als Lie'sche Berührungstransformation betrachtet. V. A. S. 46. Nr. 1.

944. *P. Bohl*. Sur certaines équations différentielles d'un type général, utilisables en mécanique. S. M. 38. 5.

945. *C. V. L. Charlier*. Ein Transformationstheorem in der Mechanik. A. M. A. F. 4. Nr. 2.

946. *E. Cotton*. Recherche d'un trièdre invariable. A. U. G. 22. 103.

947. *E. Cotton*. A propos des équations de M. Appell. N. A. (4) 7. 529.

948. *H. Crabtree*. Euler's equations deduced from gyroscopic resistance. M. G. S. 5. 161.

949. *S. Dautheville*. Sur les systèmes non holonomes. S. M. 37. 120.

950. *F. Fröhlich*. Die dynamischen Vorgänge in zylindrischen Schraubensystemen mit besonderer Berücksichtigung der Massendruck-Kompensatoren. Z. S. 56. 379.

951. *R. Hargreaves*. Interaction of dynamical systems. P. M. (6) 16. 110.

952. *E. Kasner*. The infinitesimal contact transformations of the mechanics. S. M. Am. (2) 16. 408.

953. *Kneser*. Die dynamische Bedeutung der Integralgleichungen. J. S. G. 87. 68.

954. *O. Kragh*. Om en saerlig form af snorbevaegelse i en fast plan. T. M. 19. B. 75.

955. *H. Lamb*. Kinetic stability. P. R. S. L. 80. A. 168.

956. *H. Lamb*. On secular stability. R. B. A. 77. 439.

957. *T. Levi-Civita*. Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements. T. W. 17. 1.

958. *A. Liapounoff*. Problème général de la stabilité du mouvement. A. T. (2) 9. 204.

959. *A. Myller*. Sur le mouvement d'une chaîne pesante sur une courbe fixe. N. A. (4) 9. 317.

960. *G. Pennacchiotti*. Sulle forme più semplici degli integrali delle equazioni differenziali del moto d'un punto materiale. A. I. V. 69. 725.

961. *L. J. Rogers*. Note on a soluble dynamical problem. P. L. M. S. (2) 6. 321.

962. *R. de Saussure*. Les systèmes de corps solides. A. S. G. (4) 29. 484.

963. *A. Stephenson*. On a new type of dynamical stability. S. P. M. 52. No. 8.

964. *A. Wassmuth*. Über die Wahl der „kanonischen Verteilung“ von Systemen in der statistischen Mechanik. S. A. W. 117. 1253.

965. *E. B. Wilson*. Applications of probability to mechanics. A. of M. (2) 10. 129.

966. *E. B. Wilson*. Thermodynamic analogies for a simple dynamical system. A. of M. (2) 10. 149.

Siehe auch 781; 1072; 1078; 1079.

### Drehung.

967. *A. Basch* und *A. Leon*. Über rotierende Scheiben gleichen Fliehkraftwiderstandes. S. A. W. 116. 1353.

968. *F. de Brun*. Rotation kring fix punkt. A. M. A. F. 4. No. 5.

969. *F. de Brun*. Rotation kring fix punkt. A. M. A. F. 6. No. 5.

970. *F. de Brun*. Sur le mouvement d'un solide autour d'un point fixe. A. M. A. F. 6. No. 9.

971. *P. Burgatti*. Dimostrazione della non esistenza d'integrali algebrici (oltre i noti) nel problema del moto d'un corpo pesante intorno ad un punto fisso. R. C. M. P. 29. 363.

972. *C. V. L. Charlier*. Eine neue Methode zur Behandlung des Rotationsproblems. A. M. A. F. 4. No. 4.

973. *C. V. L. Charlier*. Partikuläre Integrale des Rotationsproblems. A. M. A. F. 4. No. 12.

974. *C. V. L. Charlier* und *E. Zinner*. Entwicklung des Potentials im Rotationsproblem. A. M. A. F. 6. No. 17.



975. *P. Ehrenfest*. Gleichförmige Rotation starrer Körper und Relativitätstheorie. *P.Z.* 10. 918.

976. *G. Greenhill*. The revolving chan. *P.E.M.S.* 27. 10.

977. *E. Husson*. Sur un théorème de M. Poincaré relativement au mouvement d'un solide pesant. *A.M.* 31. 71.

978. *D. Koenig*. Analytische Behandlung der Drehungen und der Drehungsgruppen im mehrdimensionalen Raume (ung.). *M.P.L.* 16. 313; 373.

979. *N. Kowalewski*. Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt. *M.A.* 65. 528.

980. *R. Marcolongo*. Sul moto di un corpo pesante intorno ad un punto fisso. *R.A.L.R.* (5) 17. B. 698.

981. *O. Olsson*. Om fasta kroppars rotationsörelse. *A.M.A.F.* 4. No. 1.

982. *O. Olsson*. Ett integrabelt enskildt fall af fasta kroppars rotation kring en fast punkt under tyngdkraftens inverkan. *A.M.A.F.* 4 No. 7.

983. *J. H. Poynting*. The wave motion of a revolving shaft and a suggestion as to angular momentum in a beam of circularly polarized light. *P.R.S.L.* 82. 560.

984. *M. G. Rehlinger*. Über eine Methode zur Auffindung des 4 algebr. Integrals der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt im Falle von Sophie Kowalewski (russ.). *S.N.J.* 18. 27.

985. *M. G. Rehlinger*. Zur Frage der Integrierung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt (russ.). *S.N.J.* 18. 33.

986. *A. Rogoff*. Théorème sur la rotation d'une plaque plane dans son plan. *N.A.* (4) 9. 266.

987. *R. de Saussure*. Sur les corps solides opposés. *C.R.* 150. 1586.

988. *G. Schouten*. Le mouvement d'un solide de révolution autour d'un point fixe pris sur son axe de figure. *N.A.W.* (2) 9. 261.

989. *G. Stead* and *H. Donaldson*. The problem of uniform rotation treated on the principle of relativity. *P.M.* (6) 20. 92.

990. *J. Tuma*. Eine Methode zur Messung des Momentanwertes einer Rotationsgeschwindigkeit. *P.Z.* 9. 565.

991. *C. Wasteels*. Quelques propriétés cinématiques de la polhodie et de la herpolhodie. *A.S.B.* 32. A. 189.

992. *J. Wellstein*. Darstellung der Rotation um einen Punkt durch komplexe Substitution. *D.V.M.* 19. 169

Siehe auch 1046; 1176; 1890.

### Kreisel.

993. *Anschnitt-Kaempfe*. Der Kreisel als Richtungsweiser auf der Erde. *I.A.M.* 12. 791.

994. *H. H. Appelroth*. Über die einfachsten Spezialfälle der Bewegung eines schweren asymmetrischen Kreisels der Frau Kowalewsky (russ.). *S.M.M.* 27. 262.

995. *T. Baranow*. Anwendung des Schlickschen Kreisels auf die Stabilisierung des Dampfers Silvana (russ.). *B.I.I.P.* 13. 167.

996. *A. S. Chessin*. On the so called gyrostatic effect. *S.M.Am.* (2) 16. 22.

997. *F. J. B. Cordeiro*. The gyroscope. *P.A.* 15. 81; 146.

998. *A. F. Dickinson*. The Brennan gyroscope. *C.M.N.Y.* 37. 314.

999. *F. Der Kreisel* als Ersatz des Magnetkompasses. *K.S.* 1909. 92.

1000. *A. R. Garnier*. Notes sur les effets gyroscopiques. *L.T.A.* 4. 105; 123.

1001. *H. Grassmann*. Über die Verwertung der Streckenrechnung in der Kreiseltheorie. *S.M.B.* 1909. 100.

1002. *A. G. Greenhill*. Geometry of the motion of a spinning top. *V.I.M.C.* 4. C. 106.

1003. *Kromer*. Der Kreisel im Dienste der Stabilitäts-erhaltung. *I.A.M.* 12. 721.

1004. *Lauffer*. Das Gyroskop. *M.A.G.* S. 36. 499.

1005. *F. Lauffer*. Das Gyroskop. *M.A.G.S.* 1909. 646.

1006. *R. Malmström*. Die Theorie des Schlickschen Schiffskreisels. *A.S.F.* 35. No. 2.

1007. *Meitner*. Kreiselwirkungen bei Motorfahrzeugen. *M.W.B.* 11. 323.

1008. *H. Noalhat*. Du gyroscope et de ses applications. *A.N.P.* 43. 178; 186; 193; 213; 220; 234; 244.

1009. *C. W. Oseen*. Über eine in der Theorie des Kreisels auftretende Familie von  $F_n$ . *A.M.A.F.* 6. No. 28.

1010. *J. Perry*. The use of gyrostats. *N.* 77. 447.

1011. *Pflaum*. Der Drehkreisel. *C.R.R.* 53. 113.

1012. *O. C. Roedder*. Bericht über Mitteilungen aus Theorie und Praxis über das Kreiselprinzip und seine Anwendungen. *H.E.Z.* 1910. 390.

1013. *Romeiser*. Der Kreisel in seiner Bedeutung für die Luftschiffahrt. *I.A.M.* 12. 680.

1014. *L. Silla*. Studio sul giroscopio e le sue applicazioni. A.S.I.A. 24. 445.

1015. *P. Stäckel*. Ausgezeichnete Bewegungen des schweren unsymmetrischen Kreisels. M.A. 65. 538.

1016. *P. Stäckel*. Ausgezeichnete Kreiselbewegungen. D.V.M. 18. 120.

1017. *P. Stäckel*. Die reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung des schweren unsymmetrischen Kreisels. M.A. 67. 399.

1018. *P. Stäckel*. Über die reduzierten Differentialgleichungen des schweren unsymmetrischen Kreisels. N.G.G. 1908. 272.

1019. *Wagner*. Zur Frage des Kreisels und seiner Bedeutung für die Flugmaschine. I.A.M. 12. 776.

1020. *C. E. Wolff*. How a gyroscope acts. M.E. 25. 312.

1021. *C. E. Wolff*. How a gyroscope acts. M.E.M. 25. 223.

1022. *N. N.* Recent development in gyroscope design. S.A.M. 66. Suppl 325.

1023. *N. N.* Le gyroscope et l'aviation. L.A.P. 1909. 75.

1024. *N. N.* Der Schiffskreisel. E.P. R. 25. 226.

Siehe auch 54; 948; 2022; 2328; 2384; 2418; 2440; 2444; 2809; 2810.

### Schwingungen.

1025. *H. J. E. Beth*. De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen. C.A.A. 18. 634; 722.

1026. *M. Bôcher*. On the small forced vibrations of system with one degree of freedom. A. of M. (2) 10. 1.

1027. *H. Bouasse* et *Z. Carrière*. Sur l'amortissement des oscillations. A.C.P. (8) 14. 190.

1028. *A. v. Bûky*. Planimetrische Methode zur Ausrechnung der Bewegung gedämpfter Instrumente und zur experimentellen Bestimmung des reduzierten Gewichts und der Dämpfungskraft der bewegenden Teile derselben. P.Z. 11. 339.

1029. *A. Garbasso*. Su la composizione delle vibrazioni armoniche. A.A. T. 44. 223.

1030. *H. Grauers*. Transversella stötär. A.M.A.F. 4. No. 10.

1031. *G. Green*. Flexural vibrations of thin rods. P.R.S.E. 29. 393; P.M. (6) 18. 722.

1032. *J. W. N. de Heuz*. Samenstelling van enkelvoudige trillingen. W.T. 6. 154; 208.

1033. *J. Morrow*. On the lateral deflexion and vibration of „clamped-directed“ bars. P.P.S.L. 21. 500.

1034. *J. Morrow*. On the lateral vibration of bars supported at 2 points with one end overhanging. P.M. (6) 15. 497.

1035. *J. Morrow*. On the lateral deflexion and vibration of „clamped-directed“ bars. P.M. (6) 18. 452.

1036. *A. Myller*. Über die Gleichung der Saitenschwingungen (rumän.). G.M. B. 14. 169.

1037. *J. M. Plans*. Pequeñas oscilaciones de sistemas no holónomos. R. A.M. 7. 798.

1038. *C. V. Raman*. The maintenance of forced oscillations of a new type. N. 82. 156.

1039. *Lord Rayleigh*. Note on the finite vibrations of a system about a configuration of equilibrium. P.M. (6) 20. 450.

1040. *W. Ritz*. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. A.P.L. (4) 28. 737.

1041. *Schaefer*. Bemerkungen zur Theorie der erzwungenen Schwingungen. J.S.G. 87. 59.

1042. *A. Schuller*. Über die Schnittpunkte der Knotenlinien schwingender Scheiben. B.M.N. 24. 24.

1043. *A. Stephenson*. On the frequency ranges of non-generating force exerting cumulative influence. P.M. (6) 17. 164.

1044. *T. Terada*. On transverse vibrations of wooden plates. J.T. (2) 4. 122.

1045. *T. Terada*. Note on vibrations of drum. J.T. (2) 4. 345.

1046. *A. Viterbi*. Sulle vibrazioni forzate di una sfera isotropa ruotante intorno al suo centro. N.C.P. (5) 16. 189.

1047. *W. H. Young*. On uniform oscillation. T.C.P.S. 21. 241.

1048. *H. Zimmermann*. Über große Schwingungen im widerstehenden Mittel und ihre Anwendung zur Bestimmung des Luftwiderstandes. S.A.B. 1907. 874.  
Siehe auch 1375; 1414; 1425; 1551.

### Rollbewegung.

1049. *E. Cotton*. Remarques géométriques sur les mouvements de roulement. A.U.G. 20. 1.

1050. *E. Masselon*. Les roulements à billes. I.V.A. 28. 169.

1051. *G. Pennacchietti*. Sul moto di rotolamento. II—III. A.G.C. (4) 20. Nr. 1; 15.

1052. *C. Rodenberg*. Über Raumkurven, welche sich vermöge der Rollbewegung zweier krummer Flächen oder Polyeder auf einander entsprechen. A. Gr. (3) 14. 223; 312.

1053. *E. Stübler*. Rollbewegung einer schweren homogenen Kugel auf einer Zylinderfläche. Z.S. 57. 260.

1054. *P. Woronec*. Über die rollende Bewegung einer Kreisscheibe auf einer beliebigen Fläche unter der Wirkung von gegebenen Kräften. M.A. 67. 268.

Siehe auch 138; 931.

### Stoß.

1055. *H. Block*. Sur les chocs dans le problème des 3 corps. A.M.A.F. 5. Nr. 9.

1056. *A. C. Bowley*. Change of kinetic energy due to mutual action of 2 particles and loss of kinetic energy by collision. M.G.S. 4. 327. — A. Codge. 390.

1057. *F. Carlès*. Relations entre les effets produits par les charges statiques et les chocs. T.A.P. 1910. 29.

1058. *A. N. Dinrik*. Die Formel von H. Hertz und ihre experimentale Bestätigung. (russ.). J.R.P.C.G. 38. 242.

1059. *A. P. Elloft*. Stresses produced by shock. M.N.Y. 16. 95.

1060. *E. Jouguet*. Sur la vitesse des ondes de choc et combustion. C.R. 149. 1361.

1061. *E. Jouguet*. Impossibilité de certaines ondes de choc et combustion. C.R. 150. 91.

1062. *A. Koepsel*. Ein neuer Apparat zur Demonstration des elastischen Stoßes. Z.P. 22. 405.

1063. *P. Koturnizky*. Bemerkung über den Hirnschen Versuch zur Bestimmung des Arbeitsäquivalents der Stoßwärme. B.I.T.P. 17. 221.

1064. *de Maupeou*. La théorie du choc. A.S.B. 32. B. 6.

1065. *C. Ramsauer*. Experimentelle u. theoretische Grundlagen des elastischen u. mechanischen Stoßes. A.P.L. (4) 30. 417.

1066. *H. D. Tiemann*. The theory of impact and its application to testing materials. J.F.I. 168. 235; 236.

1067. *G. Vacca*. Sopra un problema di Huygens. R.A.L.R. (5) 19. B. 269.

1068. *F. Villareal*. Choque de los cuerpos. R.C.L. 9. 201; 225.

1069. *W. Westphal*. Verbesserte Demonstration des elastischen Stoßes. V.D. P.G. 11. 273.

Siehe auch 1379; 1445; 2605.

### Reibung.

1070. *J. Andrade*. Sur une nouvelle méthode de mesure des frottements. V. I.M.C. 4.C. 79.

1071. *M. V. Ayres*. Bearing friction and power consumption. E.R.J. 34. 286.

1072. *E. Daniele*. Sulla tendenza dei sistemi materiali a sfuggire ai vincoli con attrito. N.C.P. (5) 15. 492.

1073. *C. H. Gulliver*. Innere Reibung der beanspruchten Materialien. M.I.V. M.T. 7. 1.

1074. *G. H. Gulliver*. On the friction at the extremities of a short bar subjected to a crushing load and its influence upon the apparent compressive strength of the material. P.R.S.E. 29. 432.

1075. *G. E. Guye et V. Fréedericksz*. Sur le frottement intérieur des solides aux basses températures. A.S.G. (4) 29. 49; 157; 261; R.M.U. 7. 85.

1076. *F. Klein*. Zu Painlevés Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze. Z.S. 58. 186. — *R. v. Mises* 191. — *G. Hamel* u. *L. Traudtl*. 195. — *F. Pfeiffer*. 273.

1077. *Nicholson*. Friction and lubrication. E.R.L. 18. 21.

1078. *G. Remoundos*. Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement. C.R. 147. 299.

1079. *G. Remoundos*. Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement. Cr. 136. 58.

1080. *N. Sawin*. Über die Beziehung zwischen den permanenten (verzögerten) Formänderungen und den äußeren Wirkungen nach Prof. Rejtő. (russ.). B.I.P.P. 7. 203.

1081. *W. C. Treeby*. Friction loss in surface condensers. P.T.E. 32. 1068.

Siehe auch 597; 759.

### Reibung fester Körper.

1082. *B. Wejinberg*. Über die innere Reibung des Eises. (russ.). J.R.P.C.G. 38. 186; 250; 289; 329.

Siehe auch 1073; 1075; 1155.

### Perpetuum mobile.

1083. *A. Witz*. Le mouvement perpétuel de 2<sup>e</sup> espèce. R.S. (5) 14. 1.

1084. *A. Witz*. Mouvement perpétuel de 2<sup>e</sup> espèce. A.F. 1909. 42.

### Elastizität.

1085. *E. Barré*. Sur une série de solutions des équations de P élasticité de Lamé dans un milieu homogène et isotrope. C.R. 50. 1509.

1086. *U. Cisotti*. Sopra la distribuzione locale di azioni tangenziali sulla superficie di un suolo elastico. R. A. L. R. (5) 17. B. 226.
1087. *O. M. Corbino*. Sulle forze quasi-elastiche dovute ai movimenti browniani. R. A. L. R. (5) 19. A. 817.
1088. *G. Ercolini*. Intorno alle recenti esperienze di elasticità. N. C. P. (5) 17. 85.
1089. *O. Faust* und *G. Tammann*. Über Verschiebungselastizität in ihrem Zusammenhang mit der inneren Reibung. Z. P. C. 71. 51.
1090. *T. Fризendorf*. Über die Härtebestimmung der festen elastischen Körper. (russ.). J. R. P. C. G. 38. 464.
1091. *N. Frolovsky*. Neue Untersuchungen über die elastische Ermüdung der Metalle. A. J. P. 1906. 1527.
1092. *K. E. Guthe* and *L. P. Sieg*. The elastic properties of platinum—iridium wires. P. R. 30. 610.
1093. *R. A. Henry*. La propagation des pressions dans les corps élastiques. R. U. M. 27. 136.
1094. *M. Hofmann*. Anwendungsbeispiele für die Konstruktion der elastischen Linie. D. T. Z. 1909. 567.
1095. *G. Kolossow*. Sur les problèmes d'élasticité à 2 dimensions. C. A. 146. 522; 148. 1242.
1096. *G. Kolossow*. Sur le problème plan dans la théorie de l'élasticité. V. I. M. C. 4. C. 187.
1097. *A. Korn*. Über die Lösung der Grundprobleme der Elastizitätstheorie. P. Z. 9. 736.
1098. *A. Korn*. Über die Cosseratschen Funktionentripel und ihre Anwendung in der Elastizitätstheorie. A. M. 32. 81.
1099. *A. Korn*. Über die Lösung der 1. Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie. R. C. M. P. 30. 138; 336.
1100. *A. Korn*. Sur le problème des effets dans la théorie de l'élasticité. C. R. 147. 1468.
1101. *A. Korn*. Sur un point critique particulier de la solution des équations de l'élasticité dans le cas où les efforts sur la frontière sont donnés. C. R. 148. 85.
1102. *A. Korn*. Sur le problème biharmonique et le problème fondamental dans la théorie de l'élasticité. C. R. 151. 299.
1103. *M. Laue*. Die Theorie der Energieströmung in der Elastizitätstheorie und Elektrodynamik. M. N. B. 4. 156.
1104. *L. Lauer* und *G. Tammann*. Über Verschiebungselastizität bei Flüssigkeiten. Z. P. C. 63. 141.
1105. *A. McAulay*. Elastic solid aether with 2 moduli satisfying MacCullagh's crystalline optical conditions. P. M. (6) 17. 553.
1106. *R. Marcolongo*. Applicazione delle omografie vettoriali alla teoria dell'elasticità. R. A. N. (3) 16. 77.
1107. *H. M. Martin*. A point in the mathematical theory of elasticity. N. 77. 198. — E. Brown 221.
1108. *G. van der Mensbrugghe*. Sur les nombreux effets de l'élasticité des liquides. B. A. B. 1909. 714; 1910. 147.
1109. *G. van der Mensbrugghe*. Sur quelques effets singuliers de l'élasticité des liquides. A. S. B. 33 A. 131.
1110. *G. van der Mensbrugghe*. Étude sur quelques effets remarquables de l'élasticité des liquides. R. Q. S. 1909. April.
1111. *A. S. P. Petersen*. Müller-Breslau's formel for laengdeændringen af en korde. I. K. 18. 184.
1112. *J. H. Poynting*. On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears and on the lengthening of loaded wires when twisted. P. R. S. L. 82. 546.
1113. *J. Prescott*. On the precise effect of radial forces in opposing the distortion of an elastic sphere. P. M. (6) 20. 437. — A. E. H. Love 443.
1114. *G. Ramisch*. Über Beanspruchung von Platten auf nachgiebiger Unterlage. E. P. R. 1909. 509.
1115. *A. A. Robb*. Discussion of a difference equation relating to the tension of overhead wires supported by equidistant poles. P. C. P. S. 15. 198.
1116. *Roussseau*. Application des théories de l'inversion à certaines recherches relatives à l'élasticité des corps solides. A. T. P. B. 65. 67.
1117. *K. F. Slotte*. Über die Elastizität der Metalle. III. A. S. F. 35. Nr. 8.
1118. *C. Somigliana*. Sopra un'estensione della teoria dell'elasticità. R. A. L. R. (5) 19. A. 43.
1119. *C. Spruit jr.* Uitbreiding van de stelling van Clapeyron. W. T. 6. 124.
1120. *L. Tieni*. Dispositivo per dimostrare il fenomeno dell'isteresi elastica. N. C. P. (5) 18. 430.
1121. *S. Timoschenko*. Über die Zusatzspannungen infolge der Starrheit der Knoten. (russ.). B. I. P. P. 7. 135.
1122. *S. Timoschenko*. Über die Längsfaltung in einem elastischen Mittel. (russ.). B. I. P. P. 7. 145.
1123. *V. Volterra*. Soluzione delle equazioni integro-differenziali dell'elasticità nel caso di una sfera isotropa. R. A. L. R. (5) 19. A. 107.

1124. *V. Volterra*. Sulle equazioni integro-differenziali della teoria d'elasticità. R.A.L.R. (5) 18. B. 295; 577.

1125. *A. M. Worthington*. Sur les nombreux effets de l'élasticité des liquides. B.A.B. 1908. 1001.

Siehe auch 271; 609; 1065; 1069; 1317; 1781.

#### Elastizitätsmodul.

1126. *A. G. Gagarin*. Neues Dynamometer. Die Elastizitätsgrenze als Maß der Wirkung. A.I.P.P. 4. 3.

1127. *A. M. Panetti*. Sul modulo di elasticità a trazione dei funi metalliche. A.A.T. 44. 911.

1128. *F. A. Schulze*. Über die Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls von der Spannung. S.G.M. 1908. 87.

1129. *F. A. Schulze*. Die Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls von Spannung und Torsion. S.G.M. 1909. 224.

1130. *F. A. Schulze*. Die Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls von Spannung, Torsion und Nachwirkung. A.P.L. (4) 31. 1.

Siehe auch 1243; 1251.

#### Elastisches Gleichgewicht.

1131. *P. Charbonnier*. De l'équilibre élastique sous l'action de forces variables. R.A. 74. 153.

1132. *U. Crudele*. Metodo diretto per risolvere, dati gli spostamenti in superficie, il problema dell'equilibrio dei corpi elastici omogenei ed isotropi. R.A.L.R. (5) 18. B. 459.

1133. *U. Crudele*. Sul problema dell'equilibrio elastico dei solidi omogenei ed isotropi, dati gli spostamenti in superficie. R.A.L.R. (5) 19. A. 197.

1134. *A. Korn*. Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie d'élasticité dans le cas où les efforts sont donnés à la surface. C.R. 146. 578. A.F. (2) 10. 165.

1135. *A. Korn*. Sur l'équilibre des plaques élastiques encastrées. A.E.N. (3) 25. 529.

1136. *G. Lauricella*. Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrés. A.M. 32. 201.

1137. *G. Lauricella*. Sull'equazione  $\Delta^2 \gamma = 0$  e su alcune estensioni delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi. V.I.M.C. 4. C. 33.

1138. *Marbeck*. Théorie de l'équilibre d'une lame élastique soumise à une pression uniforme. B.A.T.M. Nr. 18.

1139. *M. Smoluchowski*. Über ein gewisses Stabilitätsproblem der Elastizitätslehre und dessen Beziehung zur Entstehung von Faltengebirgen. B.I.C. 1909. B. 3.

1140. *S. Timoschenko*. Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Z.S. 58. 337.

1141. *V. Volterra*. Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. A.E.N. (3) 24. 401.

1142. *S. Zaremba*. Sur l'application d'un procédé alterné au problème biharmonique. C.R. 146. 620.

Siehe auch 589; 1774; 1782.

#### Elastische Spannung.

1143. *L. Bairdston*. The elastic limits of iron and steel under cyclical variations of stress. C.R.N.P.L. 6. 165.

1144. *V. Bjerknes*. Versuch einer mechanischen Deutung der Maxwell'schen Gleichungen. A.M.A.F. 4. Nr. 3.

1145. *T. Boggio*. Sulla funzione di Green per una lastra indefinita. R.I.L. (2) 42. 611.

1146. *C. V. Burton*. On the Faraday-Maxwell mechanical stress and on aetherial stress and momentum in general. P.M. (6) 17. 641.

1147. *W. Cain*. Stresses in masonry dams. P.A.S.C.E. 1909. 38.

1148. *R. W. Chapman*. The structure of metals and their behaviour under stress. A.A.A.S. 12. 613.

1149. *O. M. Corbino*. Le tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di Volterra e la conseguente doppia rifrazione accidentale. N.C.P. (5) 17. 361.

1150. *U. Crudele*. Contributo allo studio delle tensioni elastiche. R.A.L.R. (5) 20. A. 207.

1151. *P. Füllunger*. Die Spannungsverteilung in keilförmigen Körpern, auf welche eine Einzelkraft einwirkt unter Beschränkung auf das ebene Problem. Z.S. 59. 44.

1152. *G. H. G.* Stress lines and stream lines. N. 83. 203.

1153. *R. Girtler*. Über das Potential der Spannungskräfte in elastischen Körpern als Maß der Bruchgefahr. S.A.W. 116. 509.

1154. *G. H. Gulliver*. Stress lines and stream lines. N. 83. 203.

1155. *G. H. Gulliver*. On the effect of internal friction in cases of compound stress. P.R.S.E. 29. 427.

1156. *G. H. Culliver*. A new experimental method of investigating certain systems of stress. P.R.S.E. 30. 38.

1157. *A. Haar* and *T. v. Kármán*. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien. N.G.G. 1909. 204.

1158. *Hager*. Die Berechnung der Haftspannungen. A.B.B. 1909. 457.

1159. *E. L. Hancock*. The design of members subjected to combined stress. E.B.R. 60. 399.

1160. *F. Heym*. Bleibende Spannungen in Werkstücken infolge Abkühlung. S. E.D. 27. 1309; 1347.

1161. *F. Klein*. Über Selbstspannungen ebener Diagramme. M.A. 67. 433.

1162. *Landmann*. Notwendigkeit der Berechnung der Zugspannungen in Betonplatten nach den ministeriellen Vorschriften. B.G.W.Z. 40. 493.

1163. *Landmann*. Zur Berechnung von Zugspannungen in Eisenbetonplatten. B.G.W.Z. 40. 917.

1164. *G. Lanza* and *L. S. Smith*. Stresses in reinforced—concrete beams. J.S.A. M.E. 31. 1035.

1165. *A. Leon*. Über die Spannungstörungen beim Verbrauch verschiedener Materialien. M.I.V.M.T. 9. 1.

1166. *C. E. Morrison*. Some recent considerations of stresses in high masonry dams. S.M.Q. 31. 145.

1167. *Peters*. Spannungen im Schornsteinmauerwerk. T.I.Z. 32. 1343.

1168. *Ramisch*. Wann ist die Berücksichtigung der Betonzugspannungen bei Eisenbetonplatten den ministeriellen Vorschriften entsprechend? B.G.W.Z. 40. 348.

1169. *Rösler*. Berechnung von Betonzugspannungen. K.E.K. 1908. 1003.

1170. *A. Rösler*. Betonzugspannungen im rechteckförmigen Eisenbeton-Querschnitt. D.T.Z. 1909. 487.

1171. *W. A. Scoble*. Ductile materials under combined stress. P.P.S.L. 22. 130.

1172. *T. E. Staunton*. An alternating stress testing machine for experiments on reversals of stress. C.R.N.P.I. 3. 13.

1173. *K. Szily jr.* Über die Grundgleichungen des Spannungszustandes (ung.). M.P.L. 17. 246.

1174. *J. Thieme*. Die Bestimmung der Spannungen, der Tragfähigkeit und der Querschnittabmessungen von Eisenbetonbalken auf graphischem Wege. A.B.B. 1910. 16.

1175. *S. Timošenko*. Über die Nebenspannungen, die durch die Festigkeit der Knoten erzeugt werden. (russ.) A.I.P.P. 1907. 135.

1176. *C. Toome*. Centrifugal tension. E.R.L. 27. 13.

1177. *G. C. Trabacchi*. I fenomeni di doppia rifrazione accidentale prodotti dalle tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di Volterra. N.C.P. (5) 17. 371.

1178. *F. F. Turneaure*. The calculation of stresses in stiffening trusses. E.B.R. 60. 408.

1179. *L. B. Turner*. The stresses in a thick hollow cylinder subjected to internal pressure. T.C.P.S. 21. 377.

1180. *W. Viesser*. Vereinfachte Ermittlung der Spannungen bei einfach armierten Plattenbalken. A.B.B. 1909. 17.

1181. *K. Wieghardt*. Über Spannungsverteilungen in Balken aus Eisenbeton. Z.S. 56. 119.

1182. *Wilson*. Wind bracing with knee braces or gusset plates. E.B.R. 58. 272.

1183. *Worcester*. Safe stresses in steel columns. P.A.S.C.E. 34. 2. — *Seaman*. 257.

Siehe auch 200; 1059; 1115; 1121; 1128—30; 1242; 1247; 1252; 1378; 1756; 1766; 1778; 1780; 1799; 1823; 1840; 1847; 1849; 1857; 1868; 1903.

#### Elastische Deformation.

1184. *G. Albenga*. Contributo alla teoria dei solidi a grande curvatura. A.A.T. 44. 344.

1185. *C. Bach* u. *O. Graf*. Versuche über die Längenänderung des Betons bei Wasser- und bei Luftlagerung. A.B.B. 1909. 352.

1186. *C. W. Beers*. Rope strains in hoisting. E.M.J. 88. 362.

1187. *A. Boyd*. On the elastic radial deformations in the rims and arms of fly-wheels and their measurement by an optical method. J.N.S.W. 37 A. 258.

1188. *S. Canevazzi*. Sull' elisse degli spostamenti elastici. R.I.B. (2) 10. 19.

1189. *M. Dechoway*. Die Ortsveränderungen in einem festen Körper während der Deformation und die entsprechenden inneren Kräfte. (russ.). B.I.T.P. 17. 1.

1190. *S. Dolorzyński*. Allg. Formeln für die Deformationen in der Elastizitätstheorie. (poln.). P.T.W. 44. 31.

1191. *P. G. Galerkin*. Flexion et compression. A.I.P.P. 1910. Nr. 3. 734.

1192. *F. Giordano*. Circa la misura delle deformazioni periferiche dei tubi e dei recipienti cilindrici per gas compressi. R.I.L. (2) 43. 219.

1193. *L. M. Hoskins*. The strain of a gravitating compressible elastic sphere. T.S.M. Am. 11. 203.

1194. *M. Joachimson*. To calculate the deflection of a special steel section. M.N.Y. 16. 349.

1195. *J. Le Roux*. Sur la distribution des torsions dans la déformation infinitésimale d'un milieu continu. C. R. 150. 1415.

1196. *J. Le Roux*. Sur la flexion. C. R. 150. 1529.

1197. *P. Ludwik*. Über den Einfluß der Deformationsgeschwindigkeit bei bleibenden Deformationen mit besonderer Berücksichtigung der Deformationerscheinungen. P.Z. 10. 411.

1198. *W. Misángyi*. Der Zusammenhang zwischen den durch Zug und Druck verursachten bleibenden Formänderungen. M.I.V.M.T. 10. 1.

1199. *L. Orlando*. Sopra alcuni problemi di fisica matematica. A. A. P. M. 20. B. 1.

1200. *M. Panetti*. Sulla deformazione dei solidi elastici prismatici prodotta dallo sforzo di tagli. A. A. T. 43. 960.

1201. *C. Rabul*. Eisenbetonkonstruktionen. Größe der Formänderungen unter der Gebrauchslast. M.I.V.M.T. 10. 1.

1202. *W. Ritz*. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der math. Physik. Cr. 135. 1.

1203. *A. Schleusner*. Die Durchbiegung der Verbundkonstruktionen. E. B. B. 1909. 130; 141.

1204. *C. Somigliana*. Sulle deformazioni elastiche non regolari. V.I.M. C. 4. C. 60.

1205. *W. Spring*. Sur la diminution de densité qu'éprouvent certains corps à la suite d'une forte compression et sur la raison probable de ce phénomène. J.C.P.G. 1. 593.

1206. *J. H. Toupet*. Deformed bars versus round rods anchored for reinforced concrete. I. C. T. R. 80. 47.

1207. *F. Villareal*. Deformacion de las vigas horizontales que trabajan a la flexion. R. C. L. 12. 29.

1208. *V. Volterra*. Deformazione di una sfera elastica soggetta a date tensioni nel caso ereditorio. R. A. L. R. (5) 19. A. 259.

Siehe auch 582; 1080; 1111; 1236; 1247; 1248; 1426; 1427; 1748; 1753; 1765; 1775; 1867; 2250; 2640.

#### Elastische Schwingungen.

1209. *E. H. Barton*. The lateral vibration of bars treated simply. P. M. (6) 14. 578.

1210. *A. Korn*. Sur quelques égalités jouant un rôle dans la théorie des vibrations élastiques et des vibrations électriques. C. R. 149. 26.

1211. *A. Korn*. Über einige Ungleichungen, welche in der Theorie der elastischen und elektrischen Schwingungen eine Rolle spielen. B. I. C. 1909. B. 705.

1212. *A. Korn*. Über die Eigenschwingungen eines elastischen Körpers bei verschwindenden Druckkomponenten an der Oberfläche. R. C. M. P. 30. 153.

1213. *N. Kryloff*. Sur le problème des vibrations transversales des verges élastiques. R. A. L. R. (5) 18. B. 610.

1214. *G. Lauricella*. Sulle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate. R. A. L. R. (5) 17. B. 193.

1215. *E. Madelung*. Molekulare Eigenschwingungen. N. G. G. 1910. 43.

1216. *A. Stephenson*. On the stability of the steady state of forced oscillation. P. M. (6) 14. 707.

1217. *A. Stephenson*. On induced stability. P. M. (6) 15. 233.

1218. *S. Timoschenko*. Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe. Z. S. 59. 163.

Siehe auch 1233.

#### Elastische Nachwirkung.

Siehe 1130.

#### Biegeelastizität.

1219. *C. Almansi*. Intorno alle flessione dei solidi prismatici. R. I. L. (2) 41. 1007.

1220. *C. Dubiagio*. Biegung krummer dünnwandiger Röhren. (russ.). B. I. P. P. 11. 663.

1221. *B. Galerkin*. Theorie der Längsbiegung. (russ.). B. I. I. P. 12. 167; 383.

1222. *F. Villareal*. Deformacion de las vigas horizontales que trabajan a la flexion. R. C. L. 12. 29; 53; 89; 101; 147; 159; 255.

Siehe auch 1263; 1789; 2632.

#### Knickelastizität.

1223. *M. Born*. Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Knickformel. P. Z. 10. 383.

Siehe auch 1290; 1292; 1259; 1318; 1783.

#### Torsionselastizität.

1224. *G. Grobe*. Über die Torsionselastizität der Guttapercha. A. P. L. (4) 31. 971.

1225. *F. Kötter*. Über die Torsion des Winkelleisens. S.A.B. 1908. 935.

1226. *T. A. Willers*. Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse. Z.S. 55. 225.

Siehe auch 1129; 1130; 1244; 1249; 2632.

#### Elastische Kurven.

1227. *P. Frank*. Die Integralgleichungen in der Theorie der kleinen Schwingungen von Fäden und das Rayleighsche Prinzip. S.A.W. 117. 279.

1228. *P. Fröhlich*. Die dynamischen Vorgänge in cylindrischen Schraubenfedern mit besonderer Berücksichtigung der Massendruck-Kompensatoren. Z.S. 56. 379.

1229. *S. Sanielevici*. Sur les équations diff. des cordes et membranes vibrantes. A.E.N. (3) 26. 19.

1230. *W. Schulz*. Berechnung der Tragfähigkeit zusammengesetzter Biegefedern. E.P.R. 25. 17.

1231. *J. F. Sears*. On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends. T.C.P.S. 21. 49.

1232. *J. Tamarkin*. Anwendung der Methode der Fundamentalfunktionen auf die Untersuchung der Differentialgleichung der Schwingungen elastischer Saiten. (russ.) S.M.Kh. (2) 12. 19.

Siehe auch 918; 950; 1094; 1202; 1213.

#### Elastische Flächen.

1233. *A. Gruzincev*. Theorie der Schwingungen elastischer Membranen. (russ.) S.M.Kh. (2) 11. 165; 193.

1234. *R. Marcolongo*. Alcune osservazioni sull' equazione delle membrane vibranti. R.A.N. (3) 15. 24.

1235. *M. Milanković*. Über absolut biegsame Membranen. (Kroatisch). T.A.A. 175. 140.

1236. *G. F. Nicolai*. Die Gestalt einer deformierten Manometermembrane. A.A. P.L. 1907. 129.

1237. *E. Ovazza*. Contributo alla teoria delle molle pneumatiche. A.A. T. 37. 421.

1238. *M. Panetti*. Teoria e calcolo delle molle discoidali. A.A.T. 46. 254.

1239. *S. Sanielevici*. Sur l'équation aux dérivées partielles des membranes vibrantes. C.R. 146. 1249; 1387.

1240. *R. Wagner*. Zur Theorie der freien Schwingungen einer rechteckigen Membrane. M.H. 20. 133.

Siehe auch 1135; 1136; 1138; 1145; 1214; 1229.

#### Photoelastizität.

Siehe 1149; 1177.

#### Thermoelastizität.

1241. *A. Fliegner*. Die Kurven konstanter Erzeugungswärme für elastische Flüssigkeiten. V.N.Z. 55. 203.

1242. *E. Heyn*. Bleibende Spannungen in Werkstücken infolge Abkühlung. S. E.D. 27. 1309; 1347.

1243. *S. Kusakabe*. Effect of heat on the kinetic modulus of elasticity of rocks. J.T. (2) 3. 110.

1244. *F. Meißner*. Über die Abhängigkeit der Torsionselastizität von der Temperatur. S.A.W. 118. 1131.

1245. *L. Protz*. Abhängigkeit der kubischen Kompressibilität von der Temperatur für K u, Na. A.P.L. (4) 31. 127.

1246. *A. Rosenblatt*. Über das allgemeine thermoelastische Problem. R.C. M.P. 29. 324.

1247. *R. Wagner*. Über die Bestimmung des linearen Ausdehnungskoeffizienten und dessen Abhängigkeit von der Spannung aus den Temperaturänderungen bei der Dehnung von Hartgummistäben. S.A.W. 116. 905.

1248. *R. Wagner*. Über die Erwärmung beim Dehnen eines Jodsilberstabes. S.A.W. 116. 925.

1249. *A. Wassmuth*. Über die Bestimmung der thermischen Änderung des Torsionsmoduls aus den Temperaturänderungen bei der Torsion von Stäben. S.A.W. 116. 1245.

Siehe auch 1063; 1160; 1806.

#### Elektroelastizität.

1250. *C. Barus*. On the probability of an inherent relation of the electrical resistance and the hardness of steel. P. R. 30. 347.

1251. *H. Walker*. The variation of Young's modulus under an electric current. II. P.R.S.E. 28. 652; 31. 186.

#### Magnetoelastizität.

1252. *W. Brown*. Mechanical stress and magnetization of iron. II. P.S.D. (2) 12. 175; 480.

1253. *F. Richarz*. Über Versuche, den Zusammenhang zwischen unvollkommener Elastizität und unvollkommener Weichheit magnetisierbarer Materialien betreffend. S.G.M. 1908. 204.

1254. *H. Tobusch*. Über elastische und magnetische Nachwirkung. A.P.L. (4) 26. 439.



## Festigkeit.

1255. *A. C. Auden*. Reinforced concrete. E.R.L. 21. 193.
1256. *J. Bencke*. Neuere Versuche über die Wärmeleitung und Widerstandsfähigkeit des Betons. B.Z.H. 1909. 207.
1257. *H. C. Berry*. Tests of band of steel bars embedded in concrete. E.B.R. 60. 93.
1258. *Bock*. Die Bruchgefahr des Drahtseils. G.E. 45. 1545; 1591; 1634; 1675
1259. *A. Borischnikow*. Zur Frage über die Berechnung von Eisenbetonbauten. T.I.Z. 33. 9.
1260. *Boughton*. The strength of steam boilers. I.C. 45. 226.
1261. *A. Cappilleri*. Berechnung der Höhe einer einfach armierten Rippenplatte. R.T.W. 1910. 26.
1262. *R. G. Clark*. Ferro-concrete. P. S.W.I.E. 26. 1059.
1263. *P. Claussen*. Einleitung in die Theorie der Konstruktion biegunsfester Pflanzenteile. M.N.B. 4. 1; 21; 64.
1264. *H. Czopowski*. Welche Größe kann als Maß der Festigkeit von Stoffen dienen? (poln.). P.T.W. 46. 341.
1265. *Eberhardt*. Die Berechnung unstarrer Ballonkörper auf Biegung. M.W. B. 11. 502.
1266. *F. v. Emperger*. The prevention of failures in reinforced concrete structures. C.A.C.E. 4. 311.
1267. *E. F. Etchello*. Short methods of calculation for checking reinforced concrete work. B.N. 97. 363.
1268. *G. Ewerding*. Berechnung von dreifach gelagerten Kurbelwellen. M.W. B. 1909. 234.
1269. *K. Federhofer*. Zur Festigkeit radial belasteter Kreisbogen. S.A.W. 118. 1101.
1270. *Fölzer*. Berechnung und Konstruktion eines Lehrgerüsts. Z.T.B. 6. 117.
1271. *L. Gabelli*. Experimenteller Beitrag zur Kenntnis der Modalitäten des Bruches von Glasgegenständen. P.Z. 11. 117; 193.
1272. *Gabnozzi*. Resistenza delle lanciere ondulate. Pol. 56. 211.
1273. *G. Ghersina*. Über die Festigkeit von Baumwollfasern. T.F.Z. 5. 151.
1274. *H. Gravers*. Bidrag till teorien om stråfvors hållfasthet. A.M.A.F. 4. Nr. 11.
1275. *F. M. Gummow*. Notes on the theory and practice of concrete-iron constructions. J.N.S.W. 38. A. 105.
1276. *W. Hohmann*. Beitrag zur Dimensionierung von Eisenbetonquerschnitten. A.B.B. 1909. 416.
1277. *M. T. Huber*. Über den Widerstand der Säulen. (poln.). P.T.W. 45. 197; 225; 273; 301.
1278. *B. Kirsch*. Einfluß wiederholter Beanspruchung auf die Haftfestigkeit von Beton an Eisen mit reiner und verrosteter Oberfläche. M.I.V.M.T. 9. 1; M.L.P.V. W. 7.
1279. *A. Kleinlogel*. Der umschnürte Beton. A.B.B. 1910. 80; D.P.B. 1909. 431.
1280. *A. Kleinlogel*. Berechnung und Anwendung des umschnürten Betons. A.B.B. 1909. 212.
1281. *A. Kleinlogel*. Berechnung des umschnürten Betons. B.I.G.B. 42. 118.
1282. *F. Kögler*. Beitrag zur Berechnung der Masten von Freileitungen. E. B.L. 1. 209.
1283. *K. B. Lehmann*. Die Festigkeit vegetabilischer Nahrungsmittel und ihre Veränderung durch das Kochen. A.H.M. 63. 180.
1284. *H. Lieb*. Zur Berechnung fußeiserner Stützen. B.M.B. 7. 97.
1285. *T. Matsumura*. Strength of connecting rods. M.C.K. 2. 1.
1286. *T. Matsumura*. Strength of box-type connecting rod ends and similar machine parts. M.C.K. 2. 135.
1287. *Noske*. Statische Berechnung eines Schwungrades mit aufgeschrumptem Radkranze. G.M.T. 7. 151.
1288. *W. P. Nekrassow*. Einfluß schwachen Querverbundes auf die Festigkeit des Betons. M.I.V.M.T. 1.
1289. *E. Nicolai*. Die Aufgabe von Lagrange über die vorteilhafteste Gestalt der Säulen. (russ.). B.I.P.P. 8. 255.
1290. *T. Nußbaum*. Das Ausknicken von Trägern. Z.S. 55. 297.
1291. *W. Obrist*. Zur Berechnung von Fundamentplatten. A.B.B. 1909. 321.
1292. *D. C. Pawlow*. Zur Dimensionierung auf Knickung. D.B.T. 1910. 179.
1293. *S. de Perrot*. Les charges produites par la neige sur les toits. B.S. N. 34. 308.
1294. *L. E. Picolet*. Problems in the strength of materials solved by elementary mathematics. J.F.I. 167. 131.
1295. *C. Picot*. Béton armé. A.F. 1907. 99.
1296. *L. Pierre*. Calcul du diamètre économique des conduites forcées. L.H. B. 9. 163.

- 1297.** *Ramisch.* Beitrag zur Berechnung von Futtermauern mit Vorlagen aus Eisenbeton. B.Z.H. 1909. 226.
- 1298.** *Ramisch.* Beitrag zur Berechnung von besonderen Eisenbetondecken. B.Z.H. 1909. 332.
- 1299.** *Ramisch.* Über das Problem der Knickfestigkeit. B.G.W.Z. 1909. 879.
- 1300.** *G. Ramisch.* Versuch einer Theorie zur Erklärung dafür, daß sich bei Eisenbeton Risse nicht bilden. E.P.R. 1909. 433.
- 1301.** *G. Ramisch.* Über Beanspruchung von Platten auf nachgiebiger Unterlage. E.P.R. 1909. 509.
- 1302.** *Ramisch.* Beitrag zur Theorie des Eisenbetons. E.P.R. 25. 251.
- 1303.** *J. E. Roebuck.* On the bursting strength of glass tubing. P.R. 28. 264.
- 1304.** *A. Roessler.* Konstruktion und Berechnung von Eisenbetontreppen. D. T.Z.B. 26. 643.
- 1305.** *A. Sandoval.* Curso de resistencia in materiales. R.F.H. 3. 306.
- 1306.** *H. O. Schermerhorn.* Diagrams for reinforced concrete beams. E.B.R. 1909. 263.
- 1307.** *Y. Sekiguchi.* Strength of leather belts. M.E.M. 25. 48.
- 1308.** *C. A. Smith.* The strength of the crankshaft. E.R.L. 20. 243.
- 1309.** *J. F. Springer.* Berechnung des Rohdurchmessers für Walzgewinde. Z. P.M. 1. 1227.
- 1310.** *T. E. Stanton and L. Birstow.* The resistance of materials to impact. C.R.N.P.L. 6. 7.
- 1311.** *K. Stock.* Bestimmung der Eiseneinlagen bei doppelt armierten Balken und Kettenbalken. A.B.B. 1909. 253.
- 1312.** *Thieme.* Festigkeitsnachweis für die Eisenkonstruktion eines Fabrikhofviaduktes. Z.T.B. 6. 87.
- 1313.** *H. D. Tiemann.* The theory of impact and its application to testing materials. J.F.I. 168. 235; 336.
- 1314.** *S. Timošenko.* Formeln für die Festigkeit gegenüber zusammengesetzten Beanspruchungen in den verschiedenen Theorien der Elastizität (russ.). B.I.P.P. 3. 415.
- 1315.** *S. Timošenko.* Formeln für den Widerstand der Materialien gegen zusammengesetzte Wirkungen unter dem Gesichtspunkt verschiedener Theorien der Festigkeit (russ.). A.I.P.P. 1905. 415.
- 1316.** *F. Villareal.* Empleo del cemento armado. R.C.L. 10. 81; 117; 132; 171; 173; 11. 77; 121; 166; 186; 223; 237; 311; 12. 9.
- 1317.** *W. H. Warren.* Further experiments on the strength and elasticity of reinforced concrete. J.N.S.W. 38. A. 140.
- 1318.** *H. Zimmermann.* Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit mehreren Feldern. S.A.B. 1909. 180; 348.
- 1319.** *N. N. Binderberechnung.* S.D. B.H. 1910. 190.
- Siehe auch 274; 279; 1074; 1230; 1563; 1755; 1772; 1820.

### Potentialtheorie.

- 1320.** *L. Amoroso.* Dell'estensione del problema di Dirichlet per le funzioni di più variabili complesse. G.B. 47. 1.
- 1321.** *P. Burgatti.* Sui potenziali binari. R.I.B. (2) 13. 98.
- 1322.** *C. V. Burton.* On the kinetic criterion of potential energy. P.M. (6) 17. 692.
- 1323.** *H. S. Carslaw.* The Green's function for a wedge of any angle and other problems in the conduction of heat. P.L.M.S. (2) 8. 365.
- 1324.** *U. Cisotti.* Sul comportamento della funzione di Neumann in punti prossimi al contorno. R.C.M.P. 31. 201.
- 1325.** *C. W. Emmons.* On logarithmic potential and analytical functions. M.M. F. 17. 205.
- 1326.** *F. Esclangon.* Quelques problèmes sur le potentiel de masses attirantes. M.S.B. (6) 4. 389.
- 1327.** *J. Hadamard.* Quelques propriétés des fonctions de Green. C.R. 150. 1664.
- 1328.** *C. Halphen.* Note sur les champs de forces planes. N.A. (4) 10. 227; 256.
- 1329.** *Hâton de la Goupillière.* Potentiel du temps de parcours. A.S.B. 33. B. 108.
- 1330.** *D. Hilbert.* Zur Theorie der konformen Abbildung. N.G.G. 1909. 314.
- 1331.** *K. F. Hupka.* Über das Potential eines homogenen Ellipsoids. M. N.B. 3. 169.
- 1332.** *O. D. Kellogg.* Potential functions on the boundary of their regions of definition. T.S.M.Am. 9. 39.

(Fortsetzung folgt.)

## Experimente mit dem Prandtl'schen Kreiselapparat.

Nach Angaben von Prof. Prandtl zusammengestellt

von F. PFEIFFER in Danzig.

Herr Prof. Prandtl in Göttingen hat im Jahre 1906 einen Kreiselapparat konstruiert, der zuerst im dortigen Institut für angewandte Mechanik ausgeführt wurde, und der jetzt im Verlage von Martin Schilling in Leipzig herausgegeben ist. Über diesen Kreiselapparat und eine Reihe mit ihm ausführbarer Versuche soll im folgenden berichtet werden.

### I. Konstruktion und Aufhängung des Kreisels.

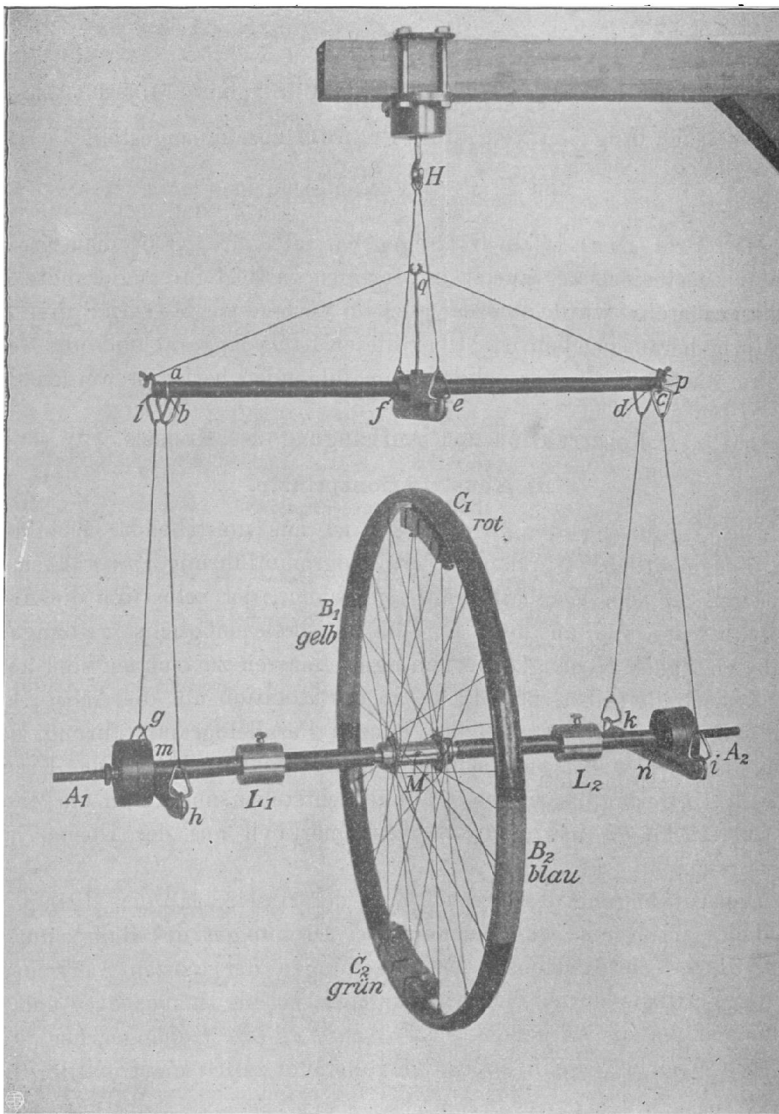
#### a) Konstruktionsprinzip.

Die Anordnung des Apparates<sup>1)</sup> ist aus umstehender Abbildung (Fig. 1) ersichtlich. Durch die Parallelogrammführung  $lmnp$ <sup>2)</sup> ist das Kreiselrad an dem Wagbalken  $lp$  aufgehängt, der selbst um die Achse  $ef$  drehbar ist und an dem um die Vertikale möglichst reibungsfrei drehbaren Haken  $H$  hängt. Zu den Kreiselmassen zu rechnen sind außer dem Kreiselrade selbst, obwohl sie an der Rotation um die Achse  $A_1 A_2$  nicht teilnehmen, die Massen der ganzen Parallelogrammführung, denn deren Punkte bewegen sich sehr angenähert so wie Punkte der Kreiselachse  $A_1 A_2$ ; geringfügige Abweichungen entstehen nur durch die Massen der Querstücke  $gh$  usw., soweit diese merklich aus der Ebene  $lmnp$  heraustreten.

Die Aufhängung des Kreisels muß derart sein, daß der Mittelpunkt des Rades im Raume ruhen bleibt bei Drehungen des Rades um die Achse  $A_1 A_2$  (die Radachse), bei Drehungen der ganzen Vorrichtung um die Vertikale durch den Aufhängepunkt (die Hakenachse) und bei Drehungen um die dazu senkrechte Achse  $ef$  (die Gehängeachse). Das läßt sich erreichen, wenn außer der vollständigen Symmetrie aller Teile

1) Alle Angaben den Apparat betreffend beziehen sich auf das mir zu den Versuchen zur Verfügung gestandene Modell, das mit geringen Abänderungen nach dem Göttinger Modell an der Technischen Hochschule Danzig angefertigt wurde und für die im Schillingschen Verlag erscheinenden Apparate als Muster dient.

2)  $l, m, n, p$  seien bezüglich die Durchstoßpunkte der ideellen Drehachsen (s. S. 338) der Haken  $b, h, i, c$  durch die Vertikalebene durch die Radachse  $A_1 A_2$ .



bei  $a, b, c, d, e$  und  $f$  in einer Ebene liegen, 2. die ideellen Drehachsen der 4 Haken bei  $g, h, i$  und  $k$  mit dem Radmittelpunkt in einer Ebene liegen. (Die Hängestäbe  $ag, bh, ci$  und  $dk$  sind genau gleich lang, die Ösen der Hängestäbe sind nach Kreisbogen geformt, wie die Figur 3

zeigt, sodaß eine Art „Antifrikionslager“ entsteht.) Dadurch läßt sich eine Parallelogrammführung  $lmnp$  erzielen, bei der auch bei Schwenkung des Wagbalkens um die Gehängeachse  $ef$  der Radmittelpunkt in Ruhe bleibt. Wir studieren bei den unter II. aufgeführten Experimenten die Bewegungen des Kreisels um diesen Punkt, den wir als den „ruhenden Punkt“ des Kreisels bezeichnen wollen, wenn wir von der Bewegung dieses Punktes bei Pendelungen des ganzen Apparates absehen, die beim Experimentieren möglichst zu vermeiden sind.

Weiter soll der Kreisels, solange wir nicht absichtlich Massen zur Erreichung der gegenteiligen Absicht anbringen, der Schwerkirkung entzogen sein. Dies ist erreicht, wenn der Kreisels bei beliebiger Stellung der Radachse im Gleichgewicht ist. Dazu muß einerseits bei vertikaler Stellung der Radebene der Schwerpunkt des ganzen Systems in die Vertikale durch den Aufhängehaken fallen, was durch die beiden Laufgewichte  $L_1$  und  $L_2$  nachreguliert werden kann, und es muß, wenn die Forderungen 1. und 2. erfüllt sind, der Schwerpunkt des ganzen Systems die richtige Höhenlage in dieser Vertikalen haben. Seien Schwerpunkt und Masse des Wagbalkens und der mit ihm fest verbundenen Teile mit  $S_1$  bzw.  $m_1$ , Schwerpunkt und Masse der beiden Querstücke  $gh$  und  $ik$  mit  $S_2$  bzw.  $m_2$  bezeichnet (und vernachlässigt man die sehr geringe Masse der Hängestäbe), so muß sein, wenn (Fig. 4)  $S_1 e = a$ ,  $S_2 M = b$  gesetzt wird:

$$a : b = m_2 : m_1.$$

Ist diese Forderung erfüllt, so bleibt auch bei Schwenkung des Kreisels um  $ef$  der Schwerpunkt des ganzen Systems in Ruhe, und das indifferente Gleichgewicht wird auch durch Anbringen gleich vieler Scheibengewichte bei  $A_1$  und  $A_2$  oder des roten und grünen Gewichtes bei  $C_1$  und  $C_2$  nicht gestört.

Am Apparat ist die Forderung  $a : b = m_2 : m_1$  nicht genau erfüllt, und die Ausbalancierung wird hier durch Nachstellen an den Flügelmuttern bei  $l$  und  $p$  erreicht. Dadurch bleiben allerdings die 3 Hakenachsen durch  $l$ ,  $e$  und  $p$  nicht mehr in einer Ebene und damit der Radmittelpunkt  $M$  nicht mehr streng in Ruhe bei Schwenkungen um die Achse  $ef$ ; aber die Verschiebungen von  $M$  sind bei den in Betracht kommenden Schwenkungen ganz unbedeutend. Die Überlegung ist,

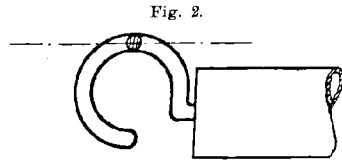


Fig. 2.

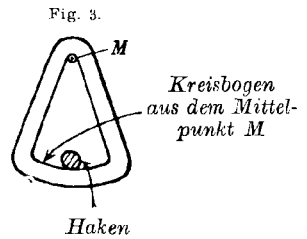


Fig. 3.

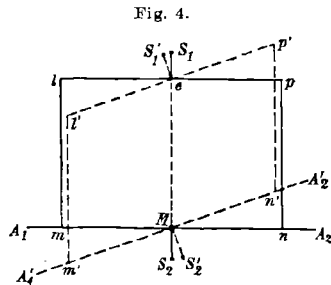
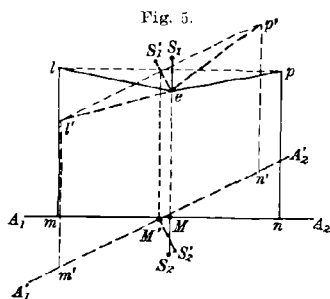


Fig. 4.

wenn man die Verkürzung der geraden Verbindungslinie  $lp$  beim Verstellen der Flügelmuttern bei  $l$  und  $p$  und die Massen der Hängestäbe vernachlässigen darf, diese: Es sei in Fig. 5 die Ruhelage und die gedrehte Lage des Apparates schematisch dargestellt.



Sei  $\varphi$  der Drehwinkel und  $m$  die im Radmittelpunkt  $M$  konzentriert gedachte Masse des Kreisrades samt Achse  $A_1A_2$  und  $c$  die senkrechte Entfernung der Achse  $ef$  von der Ebene der Hakenachsen durch  $l$  und  $p$ , so ist die Bedingung für das Gleichgewicht des Apparates nach der Schwenkung:

$$m_1 a \sin \varphi + m c \sin \varphi - m_2 (b - c) \sin \varphi = 0.$$

$a$  ist noch Funktion von  $c$ , aber unabhängig von  $\varphi$ , daher ist die Bedingung unabhängig von  $\varphi$ . Das Experiment zeigt, daß bei den in Betracht kommenden Werten der Konstanten die Gleichung eine Lösung  $c$  hat: Der Apparat läßt sich in der angegebenen Weise ausbalancieren.

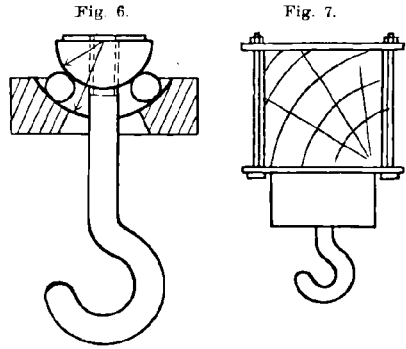
Dem Apparat beigegeben sind Scheibengewichte verschiedener Größe, die bei  $A_1$  und  $A_2$  auf die Radachse aufgesetzt werden können, ferner zwei Gewichte (rot und grün), die an den ebenso markierten Stellen  $C_1$  und  $C_2$  des Rades an der Innenseite des Radkranzes befestigt werden können, wie es die Figur 1 angibt. Ohne Anbringung des roten und des grünen Gewichtes (und ohne Scheibengewichte oder mit gleich vielen bei  $A_1$  und  $A_2$ ) hat man nun mit großer Annäherung einen der Wirkung der Schwere entzogenen, um den (nahezu) ruhenden Radmittelpunkt (in gewissen Grenzen) frei drehbaren Kreisel, dessen Trägheitsellipsoid in bezug auf den Radmittelpunkt ein Rotationsellipsoid mit der Radachse als Rotationsachse ist. Ohne die Scheibengewichte ist das Trägheitsellipsoid ein abgeplattetes Ellipsoid; mittels der Scheibengewichte kann es in ein verlängertes verwandelt werden. Durch Anbringen des roten und des grünen Eisengewichtes erhält man ein (im allgemeinen) dreiaxsiges Trägheitsellipsoid.

### b) Einige technische Details.

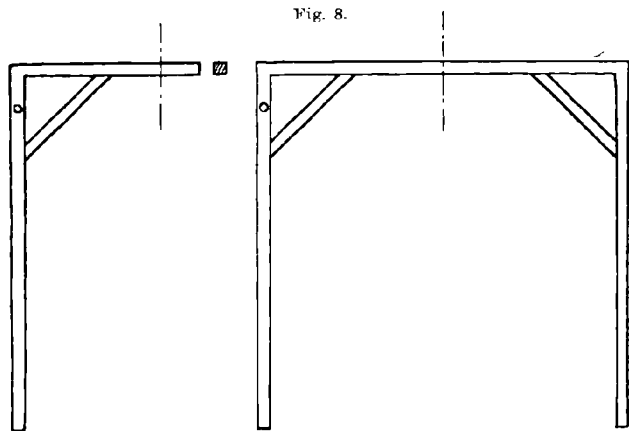
Als Kreiselrad dient das eine Rad eines Fahrrades, in dessen Felge ein starker Bleiring eingehämmert ist; das Gewicht des Rades beträgt etwa 7 kg. Als Lager bei  $M$  ist ein Fahrradkugellager verwendet, in das eine eigens angefertigte besonders starke Achse eingebracht ist, auf die die beiden Achsstücke  $MA_1$  und  $MA_2$  konisch aufgesetzt sind. Bei der Rotation des Rades um die Radachse dreht sich Rad mit Nabe um die ruhende Achse. Die Achsstücke  $MA_1$  und  $MA_2$ , die Querstücke

der Parallelogrammführung und der Wagbalken samt Querstück *ef* sind aus leichtem Stahlrohr gefertigt.

Die Laufflächen des Hängelagers für den Haken bestehen aus zwei konzentrischen Kugelschalen, um dem Haken drei Freiheitsgrade zu geben (Fig. 6). (Für die Kreiselversuche unter II. wird von diesen drei Freiheitsgraden nur der eine — Drehung um die Hakenachse — ausgenutzt; die drei Freiheitsgrade des Hakens kommen zur Anwendung bei Versuchen über räumliche Pendelbewegungen — vgl. auch unter III. —, für die man irgend einen passenden schweren Körper an dem Haken befestigen kann.) Das Hängelager wird von einem quadratischen Holzbalken getragen, an den es mittels vier Schrauben angeklemt wird (Fig. 7). Der Balken kann mit dem einen Ende in die Wand eingemauert sein oder einem ein- oder zweibeinigen Galgen angehören



(Fig. 8), der an den Hörsaaltisch, an die Wand usw. angeschraubt wird.



Die zu dem Apparat gehörenden Scheibengewichte sind in drei Größen ausgeführt; außerdem sind je zwei Scheibengewichte, deren Gewicht  $\frac{1}{2}$  bzw.  $\frac{1}{4}$  von dem der großen Scheiben beträgt, beigegeben. (Das einzelne ganz kleine Scheibengewicht ist für Experiment 8 bestimmt.)

## II. Experimente mit dem Kreisel.

Im folgenden soll nun eine Übersicht über eine Reihe mit diesem Kreisel ausführbarer Versuche gegeben werden. Die Bekanntschaft mit der Theorie ist dabei vorausgesetzt, es werden daher Begriffe wie Polhodie, Herpolhodie, Impulsvektor, Präzession usw. ohne eingehendere

Erklärung verwendet. Für das Studium der Theorie sei hier nur auf die betreffenden Kapitel des umfassenden Werkes von Klein und Sommerfeld „Über die Theorie des Kreisels“ hingewiesen.

### A. Kräftefreier symmetrischer Kreisel.

Wir experimentieren zunächst mit dem (der Schwerewirkung entzogenen) kräftefreien, symmetrischen Kreisel; also ohne das rote und das grüne Gewicht und ohne Scheibengewichte oder mit beiderseits gleich vielen.

Für  $0 - \frac{3}{4}$  Scheibengewichte ist das Trägheitsellipsoid ein abgeplattetes Ellipsoid, für  $1\frac{1}{4}$  und mehr Scheibengewichte ein verlängertes, bei 1 Scheibengewicht haben wir angenähert einen Kugelkreisel.

Die allgemeinste Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreisels ist eine reguläre Präzession um den im Raum festen Impulsvektor: Die Radachse beschreibt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit einen Kreiskegel um den im Raum festen Impulsvektor, das Rad dreht sich gleichzeitig mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um seine Achse.

#### a) Einwirkung von Drehstößen auf die einfache Raddrehung.

1. Experiment. Wir leiten die Bewegung in der Weise ein, daß wir zunächst dem Rad eine Rotation um seine horizontalgestellte Achse erteilen, dabei fällt der Impulsvektor in die Radachse. Dann üben wir einen Drehstoß aus, am besten mit horizontaler Ebene des Stoßpaares. (Wir geben dabei den Enden  $A_1$  und  $A_2$  der Radachse gleichzeitig horizontale entgegengesetzt gerichtete kräftige Stöße senkrecht zur Radachse.) Dadurch wird der Impulsvektor verlegt und der Kreisel beschreibt dann eine reguläre Präzession um den neuen Impulsvektor als Achse. Handelt es sich darum, eine größere Abweichung von der Rotation um die Radachse zu erzielen, so gelingt dies bequem durch ein im Takt der Präzession erfolgreiches Schütteln der Radachse.

Das Bild, das die Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreisels darbietet, ist ein wesentlich verschiedenes, je nachdem der aus der Zusammensetzung des ursprünglichen Impulsvektors und des Drehstoßes resultierende Vektor nahe mit der Radachse zusammenfällt, oder nahe senkrecht darauf steht. Wir wollen die beiden Fälle näher diskutieren.

#### b) Nachbarbewegungen zur einfachen Raddrehung.

Für die allgemeinste Bewegung unseres kräftefreien symmetrischen Kreisels gilt die Relation:

$$C\mu + (C - A)\nu \cos \vartheta = 0.$$



Dabei bedeutet — wie auch weiterhin —  $C$  das Trägheitsmoment des Kreisels um die Radachse,  $A$  das Trägheitsmoment der Kreiselmassen in bezug auf einen Durchmesser des Rades,  $\vartheta$  den Winkel zwischen Radachse und Impulsvektor,  $\nu$  die Winkelgeschwindigkeit der Präzession,  $\mu$  die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels relativ zu der durch die Achse der Präzession (d. i. hier der Impulsvektor) und die Radachse bestimmten Ebene. Im Experiment beobachten wir die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Rades relativ zu der jeweils durch die Radachse gelegten Vertikalebene. Ist  $\vartheta = 0$ , so ist  $\omega = \nu + \mu$  und aus der obigen Relation folgt dann:

$$\frac{\omega}{\nu} = \frac{A}{C}.$$

2. Experiment. Wir wählen die ursprüngliche Eigenrotation des Rades mäßig stark und fügen einen kräftigen Drehstoß — hier am besten durch ein Stoßpaar in vertikaler Ebene — zu. Wir betrachten den Fall kleiner Winkel  $\vartheta$ : für hinreichend kleine Werte von  $\vartheta$ , d. h. für Nachbarbewegungen zur einfachen Raddrehung, ist die obige Relation zwischen  $\omega$ ,  $\nu$ ,  $A$ ,  $C$  genügend genau erfüllt. Die Beobachtung der Umlaufzeiten der Radachse und eines bestimmten Punktes des Radkranzes (eines farbigen Flecks) gibt daher ein Mittel zu einer ziemlich genauen Bestimmung des Verhältnisses  $\frac{A}{C}$ . Am Apparat fand sich

bei 0	Scheibengewichten	$\frac{A}{C} = 0,82$
„ 1	Scheibengewicht	$\frac{A}{C} = 1$
„ $1\frac{1}{4}$	Scheibengewichten	$\frac{A}{C} = 1,11$
„ 2	„	$\frac{A}{C} = 1,27$
„ 3	„	$\frac{A}{C} = 1,58$
„ $3\frac{3}{4}$	„	$\frac{A}{C} = 1,77.$

c) Nachbarbewegungen zur einfachen Hakendrehung.

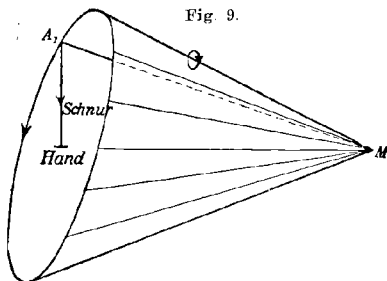
Wir besprechen hier ein Experiment, das einen Hauptvorteil des Apparates gegenüber den bisherigen Konstruktionen zeigt: die Möglichkeit, die Kreiselbewegung zu studieren bei ganz langsamer Eigenrotation des Rades (weniger als 1 Umdrehung pro Sekunde).

3. Experiment. Wir leiten die Bewegung dadurch ein, daß wir zunächst dem Rad eine ganz langsame Eigenrotation erteilen (etwa  $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2}$  Umdrehung pro Sekunde) und dann durch einen kräftigen Drehstoß in der Horizontalebene — mittels Anfassen bei  $A_1$  und  $A_2$  —

eine rasche Hakendrehung hinzufügen. Bei einigem Geschick ergibt sich eine deutlich erkennbare reguläre Präzession: die Radachse wandert mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreiskegel (mit dem Impulsvektor als Achse), das Rad selbst rotiert, wenn  $C \geq A$  ist, mit ebenfalls konstanter Winkelgeschwindigkeit um seine Achse, was sich durch Beobachten des Durchwanderns eines farbigen Fleckes des Radkranzes durch eine stets durch die Radachse gehende Vertikalebene konstatieren läßt. Ist  $C \geq A$ , so findet die Wanderung der Farbmarken um die Radachse  $\left\{ \begin{array}{l} \text{im entgegengesetzten} \\ \text{in demselben} \end{array} \right\}$  Sinne statt wie die Wanderung der Radachse um den Impulsvektor. (Als Radachse im engeren Sinn gilt hier diejenige Halbgerade der Achse, die mit dem Impulsvektor einen spitzen Winkel bildet.) Für  $C = A$  (Kugelmittel) findet keine Wanderung der Farbmarken statt.

### B. Symmetrischer Kreisel unter äußeren Kräften.

4. Experiment. Wir bringen eine äußere Kraft an dem symmetrischen Kreisel (ohne Scheibengewichte oder mit beiderseits gleich vielen Scheibengewichten) dadurch an, daß wir bei  $A_1$  mittels einer

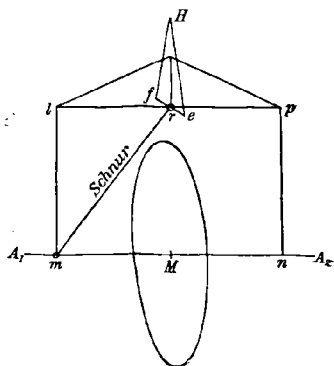


bei  $A_1$  befestigten Schnur einen vertikalen Zug nach oben oder unten an der zunächst feststehenden Achse des rotierenden Kreisels ausüben. Bei richtig gewählter Stärke des Zuges läßt sich dann der Endpunkt der Radachse auf einem horizontalen Kreise führen. Wir haben kinematisch eine reguläre Präzession um die Vertikale; kinetisch ver-

hält es sich so, daß durch das konstante Moment, das mit Hilfe der Schnur auf die Achse ausgeübt wird, der Endpunkt des Impulsvektors selbst in einem horizontalen Kreise herumgeführt wird. Für den Richtungssinn der eintretenden Präzession gilt hierbei folgende bequeme Merkregel: Man drehe den Vektor der durch die Schnur ausgeübten Zugkraft im Sinne der Radrotation um  $90^\circ$ , der gedrehte Vektor gibt dann die Fortschrittsrichtung für den Endpunkt der Radachse, an dem die Kraft wirkt. Man kann die Schnur auch in jeder anderen Richtung senkrecht zur Radachse wirken lassen und kann damit die Radachse beliebig lenken. Insbesondere kann man bei kurz angebundener Schnur durch passenden Zug die Radachse auf einem Kreiskegel herumführen mit der durch die ruhende Hand und den Radmittelpunkt  $M$  bestimmten Richtung als Achse (Fig. 9).

5. Experiment. Wird an dem Gehänge eine Schnur  $mr$  (Fig. 10) so befestigt, daß das Ausweichen der Kreiselachse in der Ebene  $lmnp$  nur in einem Sinne möglich ist, so läßt sich reguläre Präzession des umlaufenden Rades um die Vertikale nach der einen Seite hin mit beliebiger Geschwindigkeit erzielen; die Spannung der Schnur veranlaßt das zur Aufrechterhaltung dieser Präzession nötige Moment. Bei einem horizontalen Anstoß des Endpunktes  $A_1$  der Radachse im entgegengesetzten Sinn zu dieser Präzession jedoch, bewegt sich der Kreisel wie ein kräftefreier Kreisel um den aus der Zusammensetzung des ursprünglichen Eigenimpulses und des Zusatzimpulses resultierenden Impulsvektor.

Fig. 10.



Ersetzen wir den vertikal gerichteten Zug der Schnur (Experiment 4) durch Anbringung eines Scheibengewichtes (oder mehrerer) bei  $A_1$  (oder  $A_2$ ), so erhalten wir in den drei folgenden Experimenten die reguläre Präzession des schweren symmetrischen Kreisels als spezielle Bewegungsform desselben.

6. Experiment. Bei Erteilung einer raschen Eigenrotation um die Radachse nach Anbringung eines Scheibengewichtes (oder mehrerer) bei  $A_1$  erhält man durch Erteilen der passenden Präzessionsgeschwindigkeit (durch Führen des Endpunktes der Radachse mit der Hand) die langsame reguläre Präzession des schweren Kreisels ( $\mu$  groß gegen  $\nu$ ).

7. Experiment. Bei horizontaler Stellung der Radachse ist das Deviationsmoment  $C\mu\nu$  und zwar gleich dem Moment  $M$  des bei  $A_1$  aufgesetzten Scheibengewichtes in bezug auf den Radmittelpunkt, sodaß bei festgewähltem Scheibengewicht:

$$C\mu\nu = M = \text{const.}$$

ist. Verkleinert man  $\mu$  durch Bremsen der Radrotation, so wächst die Präzessionsgeschwindigkeit  $\nu$ . Berechnet man  $M$  aus dem Gewicht der aufgesetzten Scheibe und ihrem Abstand von  $M$  und beobachtet  $\mu$  und  $\nu$ , so kann man  $C$  mit Hilfe der letzten Gleichung bestimmen. ( $\mu$  stimmt hier überein mit der Winkelgeschwindigkeit des Rades relativ zu der jeweiligen Vertikalebene durch die Radachse; diese Winkelgeschwindigkeit wird durch Beobachten der Durchwanderung eines farbigen Fleckes des Radkranzes durch diese Vertikalebene ermittelt.)

8. Experiment. Um die schnelle reguläre Präzession des schweren symmetrischen Kreisels zu erhalten, bringt man bei  $A_1$  das kleinste Scheibengewicht an, erteilt dem Kreisel eine ganz langsame Eigenrotation

und eine möglichst rasche Präzession um die Vertikale. An der Wanderung der Farben läßt sich dann deutlich die neben der Präzession bestehende Eigenrotation erkennen ( $\mu$  nicht groß gegen  $\nu$ ). Das Experiment erfordert einige Übung.

Neben diesen speziellen Bewegungsformen des schweren Kreisels lassen sich auch die allgemeinen realisieren.

9. Experiment. Wir erteilen dazu dem bei  $A_1$  mit einem Scheibengewicht (oder mehreren) belasteten Rad eine mäßige Rotation um seine Achse, halten die Achse erst ruhig und lassen sie dann plötzlich los. Ihr Endpunkt beschreibt dann eine zyklidenartige Kurve mit Spitzen; man erkennt deutlich, daß das das Scheibengewicht tragende Ende der Radachse beim Fehlen eines seitlichen Stoßes im ersten Moment nach unten, also in Richtung der Schwerewirkung, ausweicht. Erteilen wir beim Loslassen dem Endpunkt der Radachse einen seitlichen Stoß, so erhalten wir etwas abgeänderte Bewegungsformen (Kurven ohne Spitzen); für einen horizontalen Anstoß von bestimmter Größe und bestimmtem Sinn ergibt sich die reguläre Präzession des schweren Kreisels.

10. Experiment. Bei sehr großer Eigenrotation des Kreisels ergibt sich die Zackenkurve der pseudoregulären Präzession als Bahnkurve des Endpunktes der Achse, eine Bewegungsform, die angenähert als Überlagerung einer regulären Präzession mit einer Nutation aufgefaßt werden kann.

### C. Kräftefreier unsymmetrischer Kreisel.

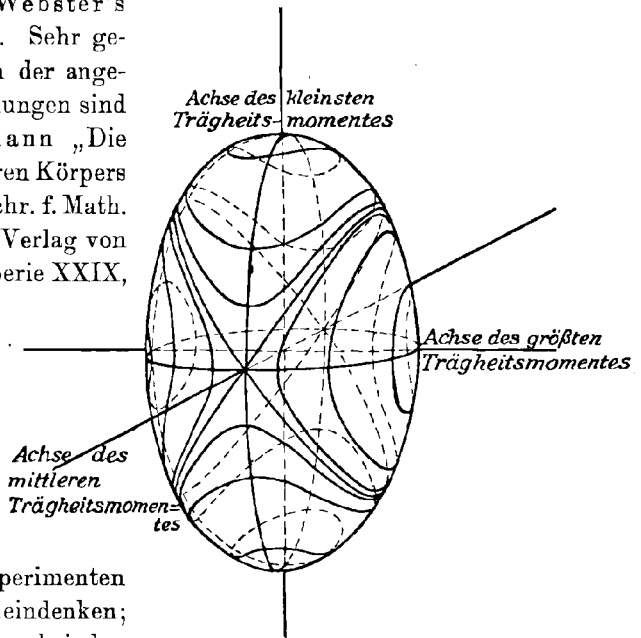
Die allgemeinste Bewegung des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels kann bekanntlich veranschaulicht werden durch das Abwälzen des Ellipsoids der lebendigen Kraft auf der invariablen Ebene. Das ist die senkrecht zu dem im Raum feststehenden Impulsvektor an das Ellipsoid der lebendigen Kraft gelegte Tangentialebene. Wir bezeichnen dabei als Trägheitsellipsoid des Kreisels (in bezug auf den ruhenden Punkt  $M$ ) das Ellipsoid, dessen Gleichung in laufenden Koordinaten  $x, y, z$  in bezug auf die durch  $M$  gehenden Hauptträgheitsachsen des Kreisels

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

ist, wo  $A, B, C$  die bezüglichen Trägheitsmomente für diese Achsen sind. Das Ellipsoid der lebendigen Kraft ist dann das mit dem Trägheitsellipsoid ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsoid mit im Verhältnis  $1:\sqrt{2T}$  vergrößerten Achsen, wenn  $T$  die lebendige Kraft des Kreisels ist. Die Polhodiekurve wird durch einen elliptischen Kegel mit der Spitze in  $M$  aus diesem Ellipsoid der lebendigen Kraft ausgeschnitten; sie kann auch aufgefaßt werden als der Schnitt zweier Ellipsoide, deren

Gleichungen die Konstanz der lebendigen Kraft und der Länge  $I$  des Impulsvektors bei der Bewegung des kräftefreien Kreisels ausdrücken. Verschiedene Typen der Polhodiekurve, die sich bei festem  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $T$  je nach der Größe von  $I$  ergeben, zeigt beistehende Figur 11, die Webster's Dynamics . . . entnommen ist. Sehr geeignet zum genauern Studium der ange deuteten geometrischen Beziehungen sind ein Aufsatz von H. Graßmann „Die Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt“ (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 48 [1903]) und die im Verlag von Martin Schilling in Halle, Serie XXIX, Nr. 1—3 erschienenen Apparate zur Kreiseltheorie, die das Kinematische dieser Vorgänge deutlich zu erfassen ermöglichen. Mit den in der genannten Schrift sehr übersichtlich zusammengefaßten Vorstellungen kann man sich gut in die bei den nachfolgenden Experimenten auftretenden Erscheinungen hineindenken; hier würde es zu weit führen, bei den einzelnen Experimenten jedesmal die ganze Überlegung durchzumachen.

Fig. 11.



Wir beschränken uns hier darauf, die Ausführung und den Verlauf der Experimente anzugeben, die sich auf die Stabilität und Labilität der Hauptträgheitsachsen des unsymmetrischen kräftefreien Kreisels beziehen. Diese sind permanente Drehachsen, aber nur die Achse des größten und kleinsten Trägheitsmomentes sind stabile Drehachsen, die Achse des mittleren Trägheitsmomentes ist labil. Diese Tatsachen und die im Zusammenhang damit auftretenden Bewegungen des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels lassen sich an unserm Kreisel deutlich realisieren.

Durch Anbringen des roten und des grünen Eisengewichtes an den rot bzw. grün bezeichneten Stellen  $C_1$  und  $C_2$  des Radkranzes erhält man einen unsymmetrischen Kreisel, der bei gleich vielen Scheibengewichten bei  $A_1$  und  $A_2$  kräftefrei ist. (Natürlich ist bei jedem Versuch durch Einstellen der Laufgewichte  $L_1$  und  $L_2$  auf der Kreisellachse, eventuell durch Nachregulieren an den Flügelmuttern der Kreisel so zu justieren, daß er bei jeder Lage der Radachse im Gleichgewicht ist.)

Das Trägheitsmoment um die Radachse  $A_1A_2$  ist fest, das um die gelb-blaue und die rot-grüne Achse,  $B_1B_2$  und  $C_1C_2$ , kann durch Anbringen gleichvieler Scheibengewichte bei  $A_1$  und  $A_2$  abgeändert werden. Um die Rotation um die gelb-blaue Achse  $B_1B_2$  zu erhalten, stellt man  $B_1B_2$  in die Vertikale, um die Rotation um die rot-grüne Achse  $C_1C_2$  zu bekommen, stellt man  $C_1C_2$  in die Vertikale und erteilt beidemale eine Rotation um die Hakenachse. Dadurch und unter Hinzunahme der Radrotation hat man die Möglichkeit, die Rotation um jede der drei Hauptträgheitsachsen einzuleiten, und durch richtige Auswahl der Scheibengewichte kann man dabei jede dieser Achsen zur Achse des mittleren Trägheitsmomentes machen. Das Trägheitsmoment um die rot-grüne Achse ist immer kleiner als das um die gelb-blaue wegen der Lage des roten und des grünen Gewichtes gegen diese Achsen. Wir stellen zunächst in einer Tabelle zusammen, wie bei verschiedenen Scheibengewichten die Achsen des größten, mittleren und kleinsten Trägheitsmomentes im Kreisel liegen.

Scheibengewichte	Achse des			
	größten	mittleren	kleinsten	
	Trägheitsmomentes.			
$0 - \frac{3}{4}$	Radachse	gelb-blaue A.	rot-grüne A.	} Gruppe I.
$\frac{3}{4}$	"	~ "	"	
$1 - 1\frac{1}{2}$	gelb-blaue A.	Radachse	rot-grüne A.	} Gruppe II.
$1\frac{3}{4}$	gelb-blaue A.	rot-grüne A.	Radachse	
$1\frac{3}{4} - 3\frac{3}{4}$	"	"	"	} Gruppe III.

Das Zeichen  $\sim$  bedeutet, daß die Trägheitsmomente für die durch  $\sim$  verbundenen Achsen bei  $\frac{3}{4}$  bzw.  $1\frac{3}{4}$  Scheibengewichten sehr nahe gleich sind (vgl. Experiment 14).

11. Experiment. Für die Gruppe I ist die Radachse die des größten, die rot-grüne Achse die des kleinsten Trägheitsmomentes. Eine kleine Störung der Bewegung um diese Achsen gibt nur eine geringe Abweichung der gestörten Bewegung von der ursprünglichen. Die gelb-blaue Achse ist die des mittleren Trägheitsmomentes; eine (an sich schon stets vorhandene) Störung der Rotation um diese Achse führt dazu, daß der Kreisel sich sehr bald umlegt (und dabei an den Hängestäben anschlägt).

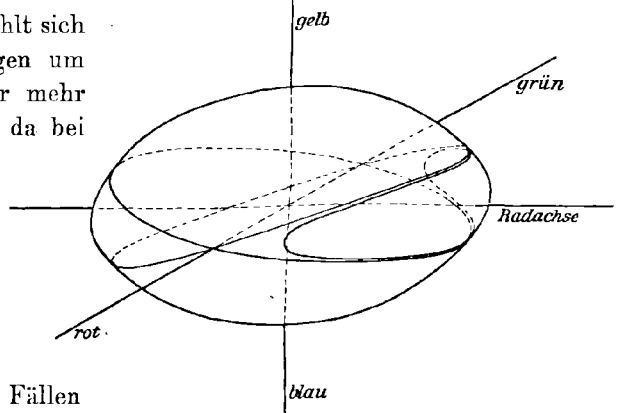
12. Experiment. Bei der Gruppe II wird die Radachse zur Achse des mittleren Trägheitsmomentes. Während sich die Bewegung um die beiden anderen Hauptachsen bei Störung stabil verhält, beginnt bei

Rotation um die jetzt labile Radachse der Endpunkt dieser Achse bald eine Bewegung auf einer sich spiralig erweiternden Bahn, und bevor wieder ein Engerwerden der Windungen eintritt, schlägt der Kreisel bereits an die Aufhängestäbe an. (Es empfiehlt sich, den Kreisel aufzuhalten, bevor das Anschlagen eintritt, da sonst leicht Beschädigungen des Apparates eintreten können.)

13. Experiment. Bei der Gruppe III erweisen sich die Radachse und die gelb-blaue Achse als stabile Drehachsen, die rot-grüne Achse ist labil. Hier ist die der Bewegung um die labile Achse benachbarte Bewegung sehr schön zu verfolgen; dabei ist der Fall besonders interessant, wo das Durchwandern der Farbflecke auf dem Radkranz im höchsten Punkte so vor sich geht, daß immer nur die Punkte der einen Hälfte des Radkranzes den höchsten Punkt passieren, sodaß ihn also die Farben etwa in der Reihenfolge rot—gelb—grün—gelb—rot—gelb—grün usw. durchlaufen. In diesem Fall findet das Abrollen des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel so statt, daß der von  $M$  nach dem gelben Fleck führende Halbstrahl der gelb-blauen Achse mit der nach oben gerichteten Vertikalen durch  $M$  Winkel einschließt, die niemals größer sind als  $90^\circ$ . Es empfiehlt sich bei Gruppe III bei Bewegungen um die rot-grüne Achse drei oder mehr Scheibengewichte aufzusetzen, da bei weniger als drei Scheibengewichten Anschlagen des Rades an die Hängestäbe eintritt.

14. Experiment. Interessant sind noch die Fälle mit je  $\frac{3}{4}$  bzw.  $1\frac{3}{4}$  Scheibengewichten bei  $A_1$  und  $A_2$ . Erörtern wir von den beiden ganz analogen Fällen etwa den für  $1\frac{3}{4}$  Scheibengewichte etwas näher. Hier ist noch die gelb-blaue Achse die Achse des größten, die rot-grüne Achse die des mittleren Trägheitsmomentes, aber man ist schon nahe dem Fall eines symmetrischen Kreisels, bei dem die Trägheitsmomente um die Radachse und die rot-grüne Achse gleich sind. Bei anfänglicher, in geeigneter Weise gestörter Rotation des Kreisels um die Radachse beschreibt ein Endpunkt der Radachse eine sich zunächst stark erweiternde, spiralenähnliche Kurve; die Windungen werden aber wieder enge, bevor der Kreisel an die Aufhängedrähte anschlägt, und man kann daher verfolgen, wie die Radachse in ihre ursprüngliche

Fig. 12.



Lage zurückgeht, wieder heraustritt, zurückkehrt usw. Dieser Fall entspricht einem sehr flachen Polhodiekegel (vgl. Figur 12); die Mantellinien dieses Kegels sind an Länge wenig verschieden, da sich die Polhodiekurve schon stark dem Halbäquator eines Rotationsellipsoids um die gelb-blaue Achse nähert. Daher wird der Herpolhodiekegel um den Impulsvektor sehr eng, und der Winkel, den die Radachse mit dem Impulsvektor beim Abrollen bildet, wird sich innerhalb weiter Grenzen ändern.

### III. Weitere Verwendungsarten des Apparates.

Wir geben noch eine kurze Übersicht über Verwendungsmöglichkeiten des entsprechend abgeänderten Apparates zu Demonstrationen am Doppelpendel, gyroskopischen und einfachen ebenen Pendel.

#### A. Schwingungen des Systems mit zwei Freiheitsgraden.

Das nur an einer der rot bzw. grün markierten Stellen, etwa bei  $C_2$ , belastete Rad läßt sich zur Demonstration von Schwingungen eines

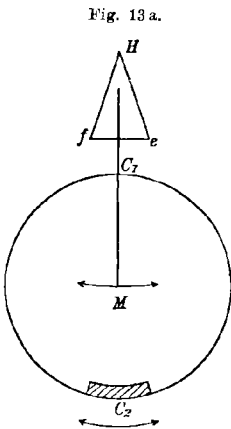


Fig. 13 a.

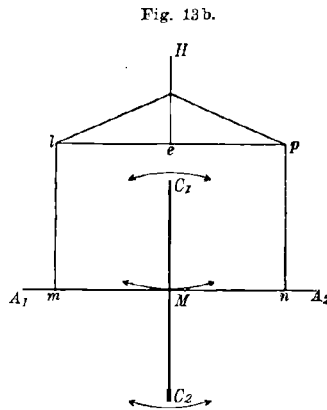


Fig. 13 b.

Systems mit zwei Freiheitsgraden in zwei verschiedenen Weisen benutzen (Fig. 13): a) für Schwingungen, die in der durch die Radebene bestimmten Vertikalebene stattfinden, b) für Schwingungen in der durch  $lmnp$  bestimmten Vertikalebene.

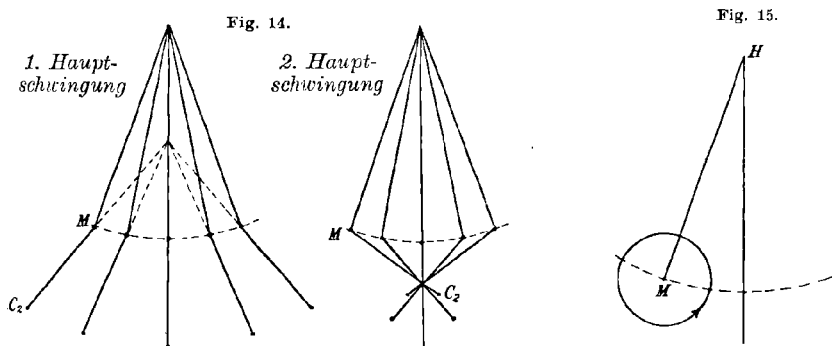
Die Versuche gelingen recht gut, wenn

man als Belastung bei  $C_2$  etwa das Dreifache des roten oder des grünen Gewichtes benutzt.

Man erhält in beiden Fällen außer den ohne weiteres sich ergebenden zusammengesetzten Schwingungen des Systems bei einigem Geschick die beiden Hauptschwingungen, die in jedem Fall durch die nebenstehenden Figuren 14 schematisch dargestellt werden, wo verschiedene Lagen des Systems, die sich periodisch wiederholen, gezeichnet sind. (Für die genauere Erörterung vgl. z. B. Routh, Die Dynamik starrer Körper, I, S. 406—420.) Man kann auch in beiden Fällen hübsche Schwebungserscheinungen bekommen.



15. Experiment. Man erhält bei a) die erste Hauptschwingung am bequemsten dadurch, daß man den Apparat in eine Lage bringt, wie sie der ersten Hauptschwingung entspricht und das System aus dieser Lage geeignet in Bewegung versetzt. Für die zweite Hauptschwingung empfiehlt es sich, die Radachse erst in geeignetem Tempo auf einem — in der nebenstehenden schematischen Figur 15 punktiert angedeuteten — Kreise zu führen und schließlich im Moment des Umkehrens dem Rad eine leichte Rotation im Sinne des Pfeiles zu erteilen und loszulassen. Es erfordert einige Geduld, die beiden Hauptschwingungen einzuleiten, doch bekommt man sie mitunter auch sehr rein.



Eine deutliche Schwebung bekommt man, wenn man den ganzen Apparat in der mit der Radebene zusammenfallenden Vertikalebene aus der Vertikalstellung herauszieht, die Linie  $MC_2$  vertikal hält und dann losläßt. Es empfiehlt sich, um störende Schwankungen zu vermeiden, bei allen diesen Versuchen nach dem Loslassen noch einige Zeit seitlich an den Querstücken  $gh$  und  $ik$  zu führen, natürlich ohne die Pendelung zu beeinflussen.

16. Experiment. Bei b) leitet man die Hauptschwingungen am besten dadurch ein, daß man den Apparat in eine Lage bringt, wie sie der äußersten Stellung der Hauptschwingung entspricht und von hier aus die Schwingung passend beginnen läßt. Eine sehr hübsche Schwebungserscheinung bekommt man, wenn man das Rad erst unter Belassung der vertikalen Stellung der Radebene seitlich aus der Ruhelage herauszieht und dann losläßt. Bei diesen Versuchen ist besonders ein Schwanken des ganzen Apparates zu vermeiden. (Durch Anbringen gleich vieler Scheibengewichte bei  $A_1$  und  $A_2$  lassen sich noch die Trägheitsmomente abändern.)

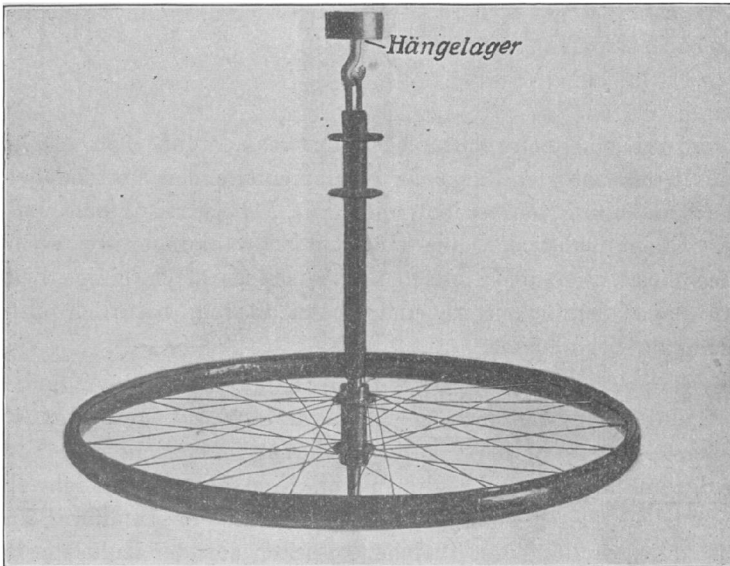
In die Kategorie der Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden gehört schließlich noch das folgende Experiment.

17. Experiment. Erteilt man dem mit dem roten oder dem grünen Übergewichte belasteten Rad eine sehr rasche Rotation um die Radachse, so beschreibt der Radmittelpunkt eine hin- und hergehende Bewegung, deren horizontaler Anteil entgegengesetzt ist dem horizontalen Anteil der Bewegung des Übergewichtes. Die Amplitude der ersten Bewegung verhält sich zu der der zweiten annähernd umgekehrt wie die Kreiselmasse zur Masse des Übergewichts. (Bei unendlich langer Aufhängung ergibt sich dies streng aus der Anwendung des Schwerpunktsatzes auf das schwingende System.) Bei langsamer Rotation kommen Resonanzerscheinungen zwischen den Umlaufbewegungen und Pendelbewegungen zustande.

### B. Gyroskopisches Pendel.

In der durch die Figur 16 dargestellten Abänderung ist der Apparat als gyroskopisches Pendel verwendbar. (Die beiden Achsstücke  $MA_1$  und  $MA_2$  sind abgeschraubt und ein mit einem Henkel versehenes Achsstück ist dafür eingesetzt.) Es erübrigt sich, hier auf die mit diesem

Fig. 16.

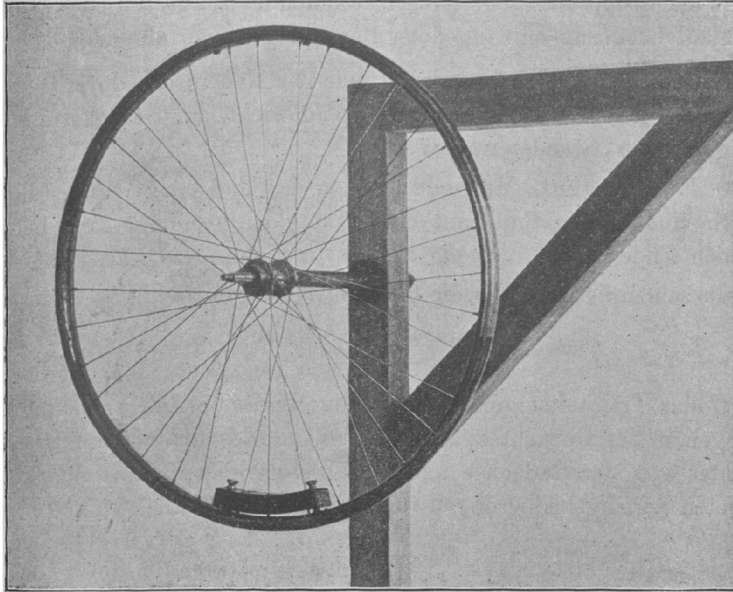


Apparat anstellbaren Versuche einzugehen, da dieselben bei Webster, *The Dynamics of particles and of Rigid, Elastic and Fluid Bodies*, S. 288—296 und (mit geringfügigen Modifikationen) bei Klein und Sommerfeld, *Die Theorie des Kreisels*, S. 197—216, ausführlich erörtert sind.

## C. Einfaches ebenes Pendel.

Das eben zum Aufhängen des Kreisels benutzte Achsstück ist so konstruiert, daß es auch in eine horizontale Bohrung des Galgens ein-

Fig. 17.



gesetzt werden kann, wie dies die Figur 17 zeigt. Das mit dem roten oder dem grünen Übergewichte belastete Rad kann dann als ebenes Pendel verwendet werden.

18. Experiment. Insbesondere kann aus der Schwingungsdauer  $\tau$  dieses Pendels das Trägheitsmoment  $C$  des Rades um die Radachse berechnet werden mit Hilfe der Gleichung:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{C + K}{mgh}}.$$

Dabei bedeutet  $K$  das Trägheitsmoment des Übergewichts in bezug auf die Radachse,  $m$  die Masse des Übergewichts,  $h$  die Entfernung seines Schwerpunktes von der Radachse,  $g$  die Schwerebeschleunigung.  $K$ ,  $m$  und  $h$  lassen sich nach Ausmessen der Dimensionen und der Lage des Übergewichts und Abwägen des Übergewichts berechnen. Man vergleiche das Resultat für  $C$  mit dem bei Experiment 7 gewonnenen Werte. Bei einem am Apparat ausgeführten Versuch ergab sich eine Abweichung von ca.  $-2\%$  bei einem Wert  $C = 0,719 \text{ kgm}^2$  nach Experiment 7.

19. Experiment. Befestigt man hinter dem Pendel einen feststehenden Teilkreis und am Rande einen Zeiger, der in der stabilen Gleich-

gewichtslage des Rades vertikal nach unten zeigt, so kann man die Anordnung auch dazu benutzen, die Gesetze der endlichen Pendelschwingungen nachzuprüfen. Man liest mit Hilfe des Zeigers auf der Kreisteilung die Amplituden der Schwingung ab und bestimmt die Schwingungszeit mit der Stoppuhr. Sehr hübsch ist auch der langsame Übergang von der umlaufenden zur schwingenden Bewegung zu verfolgen.

Schließlich sei noch erwähnt, wie das Rad in der durch Figur 17 gegebenen Anordnung, aber ohne Eisengewicht, zur Demonstration des Fallgesetzes verwendet werden kann.

20. Experiment. Man schlinge um das Rad eine Schnur, die man dabei in eine in den Radkranz eingedrehte Rille einlegt, und befestige am freien Ende der Schnur ein kleines Gewicht. Das Rad erfährt eine Winkelbeschleunigung  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ , die gegeben ist durch

$$C \frac{d^2\varphi}{dt^2} = mgR,$$

wenn  $C$  das Trägheitsmoment des Rades um seine Achse,  $m$  die Masse des angehängten Gewichtes,  $R$  der Abstand des Schwerpunktes dieses Gewichtes von der Radachse und  $g$  die Schwerebeschleunigung ist. Bei geeigneten Anfangsbedingungen folgt hieraus

$$R\varphi = \frac{mR^2}{C} \frac{gt^2}{2},$$

analog der Fallgleichung: Fallstrecke  $s = \frac{gt^2}{2}$ .

Das Bestehen dieser Gleichung läßt sich dann leicht demonstrieren, wenn man am Radkranz einen Zeiger und hinter dem Rade eine feststehende Scheibe anbringt, die mit einer den Quadratzahlen 0, 1, 4, 9, 16, ... entsprechenden Teilung für  $\varphi$  versehen ist. Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung folgen die Teilpunkte einander in äquidistanten Zeiten; durch eine geeignete Wahl des Gewichtes läßt es sich erreichen, daß diese Zeiträume halbe oder ganze Sekunden sind.

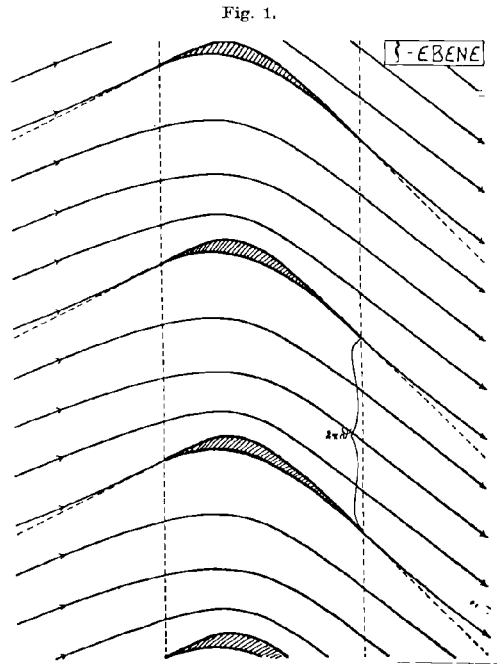
## Stromfunktionen für die Strömung durch Turbinenschaufeln.

Von H. BLASIUS in Hamburg.

1. Die Berechnung der Turbinenräder für stoßfreien Eintritt geschieht unter der Annahme, daß die Richtung des zu- und abfließenden Wasserstromes durch die Neigung der Turbinenschaufel, durch die Eintritts- und Austrittstangente, bestimmt ist. Dadurch sind dann die Geschwindigkeitsverhältnisse und die Druckunterschiede gegeben, und es

ist ferner die Reaktionskraft auf die Schaufel aus dem Impuls- bez. Momentensatz nach Euler zu berechnen. Die Übereinstimmung der Richtung der Wasserströmung mit der Tangente der Schaufelkante ist aber nur bei unendlich enger Schaufelstellung vorhanden. Für diesen Fall gibt es eine Reihe spezieller Untersuchungen über die Strömungen.<sup>1)</sup> — Bei endlichem Verhältnis von Abstand zu Schaufellänge ist die Richtung der Stromfäden in der Eintrittsebene nicht parallel (Fig. 1): sie ist in den Zwischenräumen flacher als an

der Schaufelkante. Erst in unendlicher Entfernung vor der Kante ist Parallelströmung von geringerer Neigung vorhanden, als die Eintrittstangente angibt. Um zu untersuchen, wie groß diese Unterschiede der Neigungen als Funktionen des Schaufelabstandes werden, müssen wir Ausdrücke für die Stromfunktionen herzustellen suchen. Die Hilfsmittel der Funktionentheorie, die hierzu zur Verfügung stehen, beschränken die Untersuchung vorläufig auf zweidimensionale Potentialströmung durch eine Reihe von parallelen oder sternförmig angeordneten Schaufeln, wobei von dem Einfluß der Reibung und Wirbelbildung abgesehen wird. Auch wollen wir nur den stoßfreien Eintritt darstellen, obwohl die Methode nicht darauf beschränkt ist. Die Kombination von Leitrad und Laufrad ist nicht in Betracht gezogen; es würde sich hierbei um die Untersuchung einer zeitlich periodisch veränderlichen Strömung handeln.



2. Eine wesentliche Eigenschaft der Stromverteilung von Fig. 1 ist die Existenz einer Zirkulation im Uhrzeigersinne um jede Schaufel herum, eine Bemerkung, die auch in der Theorie der Flugflächen<sup>2)</sup>

1) Präsil, Schweizerische Bauzeitung 41, 207, 1903. 48, 277, 1906; Lorenz, Neue Theorie und Berechnung der Kreisräder. München 1908; v. Mises, diese Zeitschrift 57, 1, 1909.

2) Kutta, Ill. aeronaut. Mitteilungen, 1912, Münchener Berichte 1910 und 1911. Joukowski, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1910. Blasius, diese Zeitschrift Bd. 59, Seite 43 und 225.

eine Rolle spielt. Durch die im nächsten Absatz 3 anzugebende Abbildung kann man aus der Strömung um eine einzelne gekrümmte Fläche die Strömung durch Turbinenschaufeln herstellen, und ich muß daher hier kurz das Ergebnis meiner Abhandlung<sup>1)</sup> über die Stromfunktionen für Flügel hinschreiben: Es wurden untersucht die Singularitäten, die das komplexe Potential  $\chi = \varphi + i\psi$  und die Geschwindigkeitsverteilung  $w = u - iv = \frac{dz}{dz}$  nebst ihren analytischen Fortsetzungen als Funktionen der Koordinaten  $x + iy = z$  haben müssen. Diese Untersuchung führte zur Aufstellung der Funktion:

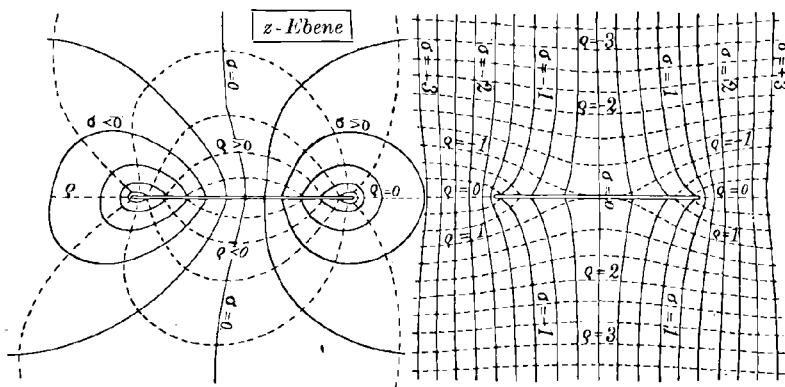
$$w = u - iv = a + 2c \cdot \tau$$

wobei:

$$\tau = \rho + i\sigma = i \cdot (z + \sqrt{z^2 - 1})$$

ist, als des einfachsten Ausdruckes, der eine solche Zirkulationsströmung darstellt.  $\tau$  ist eine auf der zweiblättrigen  $z$ -Ebene eindeutige Funktion,

Fig. 2.



die im Unendlichen des „physikalischen“ Blattes Null wird, so daß dort  $w = a$  ist. Die Verzweigungspunkte liegen bei  $z = -1$  und  $z = +1$ , zwischen ihnen erstreckt sich das Flügelprofil. Fig. 2 (= Fig. 4 der früheren Abhandlung S. 230) gibt ein Bild der Werteverteilung von  $\tau$  über der  $z$ -Ebene; Fig. 2a stellt das physikalische Blatt, Fig. 2b die analytische Fortsetzung dar. Fig. 3 (= Fig. 5 d. f. A. S. 230) zeigt den Zusammenhang der unteren Halbebene von 2a mit der oberen von 2b.

Das komplexe Potential ist:

$$\chi = \varphi + i\psi = \int w \cdot dz = az - ic \frac{\tau^2}{2} - ic \ln \tau$$

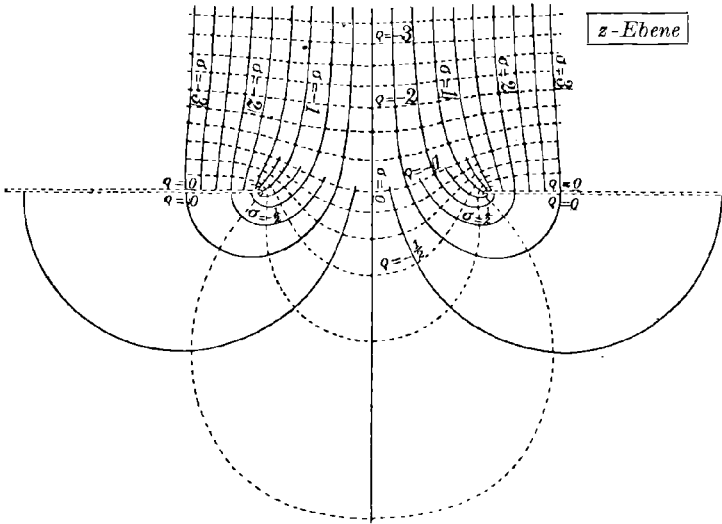
1) Blasius, diese Zeitschrift Bd. 59, Seite 43 und 225.

und die Tragkraft pro Einheit der Breite

$$K = 2\pi \frac{\gamma}{g} \alpha c$$

$2\pi c$  ist der Wert der Zirkulation, so daß  $c$  die Dimension Geschwindigkeit  $\times$  Länge hatte. Durch die spezielle Lage der Verzweigungspunkte ist jedoch die Längeneinheit in der  $z$ -Ebene festgelegt gleich der halben Tiefe des Flügels; und da im folgenden  $z$  nicht mehr die Rolle der Koordinatenebene spielen wird, sondern nur noch Hilfsebene ist, so nehmen wir die Dimension von  $z$  zu 1, und die Dimension von  $c$  als Geschwindigkeit an. — Im weiteren Verlauf der Arbeit wurden dann noch allgemeinere Ausdrücke für Zirkulationsströmungen um dicke

Fig. 3.



und unsymmetrische Flügel als gebrochen-lineare Funktionen von  $\tau$  aufgestellt:

$$w = a - ib + 2c\tau_0 \frac{\tau}{\tau_0 - \tau}$$

3. Die Funktion  $w(z)$  übertragen wir nun auf eine neue Koordinatenebene  $\zeta = \xi + i\eta$  durch die Transformation:

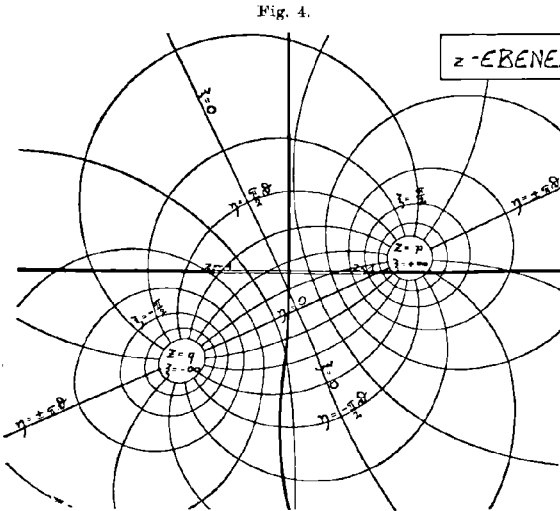
$$\xi + i\eta = \zeta = \vartheta \cdot \ln \left( \frac{z - q}{p - z} \right)$$

oder umgekehrt:

$$x + iy = z = \frac{\zeta}{e^{\zeta/\vartheta} + 1} + q$$

$\xi$  über der  $z$ -Ebene ist in Fig. 4 dargestellt. Man sieht, daß der ganze Inhalt der  $z$ -Ebene, die Werteverteilung von  $w$ , auf einen Streifen der  $\xi$ -Ebene abgebildet wird.  $z = q$  fällt nach  $\xi = -\infty$ ,  $z = p$  nach  $\xi = +\infty$ . Die Abbildung ist periodisch, wenn  $\xi$  sich um  $2i\pi\vartheta$  ändert, so daß also unendlich viele Paare von Verzweigungspunkten im senkrechten Abstand  $2\pi\vartheta$  in der  $\xi$ -Ebene auftreten. Die Verzweigungspunkte  $z = -1$  und  $z = +1$  fallen im allgemeinen in verschiedene Höhen  $\eta$ , wir erhalten also mit der Übertragung von  $w(z)$  auf die  $\xi$ -Ebene den allgemeinsten Fall der Abwicklung einer Axialturbine oder Pumpe.

$\vartheta$  ist hierbei reell und positiv angenommen, und wir verlieren dabei nichts an Allgemeinheit. Komplexes  $\vartheta$  würde nur eine Drehung des



Bildes in der  $\xi$ -Ebene bewirken; bei reellem  $\vartheta$  ist die Flucht der Schaufeln, der Radumfang, als Vertikale angenommen. Ebenso konnten wir uns den Ansatz einer Konstanten vor  $e^{\xi}$  ersparen, da dies nur eine Parallelverschiebung der  $\xi$ -Achsen bedeutet. Der absolute Wert von  $\vartheta$ , das die Dimension einer Länge hat, ist für den Maßstab der Figur, Schaufelabstand  $2\pi\vartheta$ , wesentlich. Mit der Lage von  $p$  und  $q$ , die be-

liebig komplexe Werte annehmen, also 4 Parameter liefern, beherrschen wir die Länge der Turbinenschaufel, ihre Neigung gegen den Radumfang, die Schaufeldicke und die Lage ihrer größten Wölbung. Die Neigung wird durch den Wert von  $c$  variiert, doch sind die Neigungen im beiderseits Unendlichen bei einmal bestimmten Werten von  $p$  und  $q$  nicht unabhängig voneinander, da stoßfreier Eintritt gefordert war.

4. Die Geschwindigkeitsverteilung entsteht, indem man sich die Hilfsveränderlichen  $\tau$  und  $z$  eliminiert denkt:

$$\begin{aligned}
 u \quad iv = w &= a - ib + 2c\tau \\
 \tau &= i(z + \sqrt{z^2 - 1}) \\
 z &= \frac{pe^{\frac{\xi}{\vartheta}} + q}{e^{\frac{\xi}{\vartheta}} + 1}
 \end{aligned}$$



Der Ansatz von  $b$  ist notwendig bei Unsymmetrie der Anordnung; durch Änderung von  $b$  muß die Strömung so gestaltet werden, daß durch beide Verzweigungspunkte dieselbe Stromlinie hindurchgeht. Durch Gleichsetzen der Stromfunktionen für jedes Paar von Verzweigungspunkten entsteht so eine Gleichung, welche die Strömungsrichtungen im Unendlichen, die stoßfreiem Eintritt entsprechen, verknüpft.

Die Strömung hat im Unendlichen der  $\xi$ -Ebene die Richtungen, die  $w$  für  $z = q$  bzw.  $z = p$  hat. Die Werte von  $\tau$  an diesen Stellen im physikalischen Blatt, deren Vorzeichen aus Fig. 2a abzulesen sind, bezeichnen wir mit:

$$\tau_p = i(p \pm \sqrt{p^2 - 1}) \quad \tau_q = i(q \pm \sqrt{q^2 - 1}),$$

so daß die Geschwindigkeiten im Unendlichen:

$$\begin{aligned} w_{-\infty} &= a - ib + 2c\tau_q \quad \text{an der Eintrittsseite,} \\ w_{+\infty} &= a - ib + 2c\tau_p \quad \text{an der Austrittsseite} \end{aligned}$$

sind. Sind die reellen Teile von  $\tau_p$  und  $\tau_q$  verschieden, so muß  $c$  solche komplexen Werte annehmen, daß die  $u$ -Komponente von  $w$  rechts und links gleiche Werte erhält. An den Verzweigungspunkten ist  $\tau = \mp i$ , also:

$$\begin{aligned} w_E &= a - ib - 2ic \quad \text{an der Eintrittskante,} \\ w_A &= a - ib + 2ic \quad \text{an der Austrittskante,} \end{aligned}$$

woraus man den Unterschied zwischen den Neigungen der Schaufeltangenten und der Strömung im Unendlichen ablesen kann.

### 5. Die Integration des komplexen Potentials $X(\xi)$ :

$$\Phi + i\Psi = X = \int w \cdot d\xi = (a - ib)\xi + 2c \cdot \int \tau \cdot d\xi$$

liefert nach Einführung von  $\tau$  als Integrationsveränderlicher:

$$\begin{aligned} X &= (a - ib)\xi + 2c\vartheta \cdot \left[ -\tau_p \cdot \ln(\tau - \tau_p) + \frac{1}{\tau_p} \cdot \ln\left(\tau + \frac{1}{\tau_p}\right) \right. \\ &\quad \left. + \tau_q \cdot \ln(\tau - \tau_q) - \frac{1}{\tau_q} \cdot \ln\left(\tau + \frac{1}{\tau_q}\right) \right]. \end{aligned}$$

Man bemerke, daß  $X$  neu integriert werden muß, daß wir also *nicht* das *Stromlinienbild* aus der  $z$ -Ebene in die  $\xi$ -Ebene abbilden, *sondern* die *Geschwindigkeitsverteilung*  $w(z)$ . Die Abbildung von  $z(z)$  ergäbe in der  $\xi$ -Ebene Singularitäten an den Punkten, die  $z = \infty$  entsprechen; im Unendlichen der  $\xi$ -Ebene würden die Geschwindigkeiten Null werden.

Aus  $X$  lassen sich die Werte der Stromfunktion  $\Psi$  an den Verzweigungspunkten ablesen und dadurch läßt sich die Gleichung für  $b$  aufstellen. Ebenso folgt aus  $X$  die Gleichung des Schaufelprofils. Die Berechnung der Kräfte bietet nichts Neues gegenüber der bekannten

Theorie. Man erhält als Kraftkomponenten auf die Breitereinheit einer Schaufel:

$$K_x - iK_y = \frac{i\gamma}{2g} \int w^2 \cdot d\xi = \frac{i\gamma}{2g} (w_{+\infty}^2 \cdot 2i\pi\vartheta - w_{-\infty}^2 \cdot 2i\pi\vartheta),$$

wobei  $2\pi\vartheta$  der Schaufelabstand ist; und nun mit  $u_{+\infty} = u_{-\infty}$ :

$$K_x = \gamma \cdot 2\pi\vartheta \cdot \left( \frac{v_{-\infty}^2}{2g} - \frac{v_{+\infty}^2}{2g} \right)$$

$$K_y = \frac{\gamma}{g} \cdot 2\pi\vartheta \cdot u_{\pm\infty} \cdot (v_{-\infty} - v_{+\infty}).$$

Interessant ist nur der Zusammenhang mit der Zirkulation um eine Schaufel herum, deren Wert wir nun ableiten wollen: Der Weg um eine Schaufel der  $\xi$ -Ebene im Uhrzeigersinn herum entspricht dem Weg um den Verzweigungsschnitt der  $z$ -Ebene im selben Sinne, und um den Einheitskreis der  $\tau$ -Ebene im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers, wie man aus Fig. 2 abliest. Auf diesem Wege nehmen die  $\ln(\tau - \tau_p)$  und  $\ln(\tau - \tau_q)$  im Ausdruck für  $X$  um  $2i\pi$  zu, da  $\tau_p$  und  $\tau_q$  als Werte im physikalischen Blatt ins Innere des Einheitskreises fallen. Als Zirkulation  $\int v ds$ , im Uhrzeigersinne um die Schaufel herum gemessen, erhalten wir also:

$$C = 2c\vartheta \cdot (\tau_q - \tau_p) \cdot 2i\pi.$$

Nun soll  $2c(\tau_q - \tau_p) = w_{-\infty} - w_{+\infty}$  nach Absatz 4 rein imaginär gemacht werden und stellt dann die Differenz der Vertikalkomponenten der Geschwindigkeit  $= i(v_{+\infty} - v_{-\infty})$  dar. Es ist also

$$C = 2\pi\vartheta \cdot (v_{-\infty} - v_{+\infty})$$

ein einfacher Wert für die Zirkulation; und hiernach ist:

$$K_y = \frac{\gamma}{g} \cdot u_{\pm\infty} \cdot C$$

in Übereinstimmung mit der bekannten Formel der Zirkulationstheorie.

6. Wir gewinnen übrigens keine neuen Strömungsbilder, wenn wir die allgemeineren in Absatz 2 genannten Geschwindigkeitsverteilungen übertragen. Diese Verallgemeinerungen unterscheiden sich von dem hier benutzten  $w$  nur durch die Lage des Poles im zweiten Blatt. Wir haben es aber bereits durch  $p$  und  $q$  in der Hand, an welche Stelle der  $\xi$ -Ebene wir den Pol abbilden wollen. Rechnerisch sieht man dies daraus, daß man die verschiedenen Funktionen  $w$  durch lineare Transformation ihrer  $z$ -Ebenen ineinander überführen kann; und diese Transformation kann mit  $\frac{z-q}{p-z}$  zusammengesetzt werden, wobei nur  $p$  und  $q$  andere Werte annehmen. Es steht aber natürlich frei, den komplexen Parameter  $\tau_0$

der allgemeineren  $w$  einzuführen, und dafür etwa  $q = \infty$  zu setzen. Wir erreichen dadurch auch den Spezialfall, daß der Pol in einen Verzweigungspunkt hineinrückt, ein Fall, der der oben angenommenen Transformation entgeht. Dieser Spezialfall ist übrigens auch durch das von Kutta angewandte Schwarz-Christoffelsche Verfahren erreichbar.<sup>1)</sup>

Durchführung der Rechnung für den symmetrischen Fall:  $q = -p$   
und reell  $> 1$ .

7. Für  $q = -p$  und reelle Werte dieser Zahl größer als 1 wird  $b = 0$ ,  $c$  reell. Die Mitte der Schaufel liegt auf der  $\eta$ -Achse. Es wird:

$$z = p \frac{e^{\frac{\xi}{\vartheta}} - 1}{e^{\frac{\xi}{\vartheta}} + 1} = p \cdot \mathfrak{Tg} \left( \frac{\xi}{2\vartheta} \right)$$

$$\xi = \vartheta \cdot \ln \frac{p+z}{p-z} = 2\vartheta \cdot \mathfrak{A}rtg \frac{z}{p}.$$

Im Unendlichen des physikalischen Blattes ist nach Absatz 4:

$$\tau_p = i\sigma_p \quad \sigma_p = p - |\sqrt{p^2 - 1}| = -\sigma_q$$

$$\left. \begin{aligned} w_{-\infty} &= a - 2ic\sigma_p \\ w_{+\infty} &= a + 2ic\sigma_p \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Neigung im Unendlichen:} \\ \pm \frac{v}{u} = N_{\infty} = 2\sigma_p \frac{c}{a}, \end{array} \right.$$

während an den Verzweigungspunkten (Eintritt  $E$ , Austritt  $A$ ):

$$\left. \begin{aligned} w_E &= a - 2ic \\ w_A &= a + 2ic \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Neigung an der Schaufelkante:} \\ \pm \frac{v}{u} = N_K = 2 \frac{c}{a} \end{array} \right.$$

ist. Die Verzweigungspunkte liegen bei:

$$\xi_A = \vartheta \cdot \ln \frac{p+1}{p-1} = 2\vartheta \cdot \mathfrak{A}rtg \frac{1}{p} = -\xi_E.$$

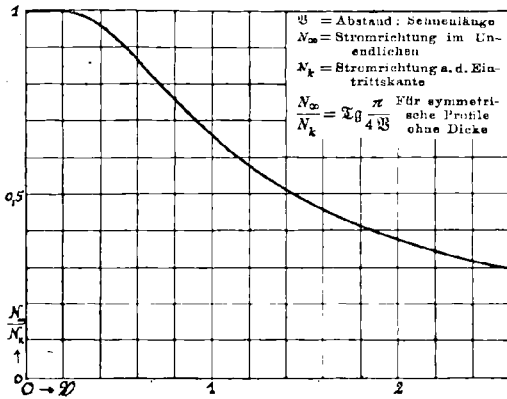
Das Verhältnis  $\mathfrak{B}$  von Abstand zu Schaufellänge ist hiernach:

$$\frac{2\pi\vartheta}{\xi_A - \xi_E} = \mathfrak{B} = \frac{\pi}{2 \mathfrak{A}rtg \frac{1}{p}} = \frac{\pi}{\ln \frac{p+1}{p-1}}.$$

Man sieht hieraus, daß man mit der Wahl von  $p$  das Abstandsverhältnis in der Hand hat. Läuft  $p$  von 1 bis  $\infty$ , so läuft  $\mathfrak{B}$  von 0 bis  $\infty$ . Bei unendlich dichter Lagerung,  $p = 1$  und  $\mathfrak{B} = 0$  wird  $\sigma_p = 1$  und dadurch  $N_{\infty} = N_K$ , also kein Unterschied dieser Neigungen. Die direkte Beziehung zwischen diesen Neigungen (trig. Tangens des Neigungs-

1) Kutta, Münchener Berichte 1911. Vgl. auch den Fall  $\sigma_0' = -1$  in Absatz 15 meiner oben erwähnten Abhandlung Seite 240.

Fig. 5.



winkels) und dem Abstandsverhältnis erhalten wir durch Elimination der Parameter  $\frac{c}{a}$  und  $p$ :

$$\frac{N_\infty}{N_K} = \sigma_p = p - \sqrt{p^2 - 1}$$

$$p = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2B}$$

also:

$$\frac{N_\infty}{N_K} = Xg \frac{\pi}{4B}$$

Diese in Fig. 5 aufgetragene Kurve ist ein typischer Fall für die in Absatz 1 verlangte Beziehung. Spezielle Werte sind:

$B = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$\frac{N_\infty}{N_K} = 0,9963$	0,9171	0,6558	0,3737.

8. Das Potential  $\Phi + i\Psi = X = \int wd\xi$  wird hier nach Absatz 5 mit  $\tau_p = -\tau_q = i\sigma_p$  berechnet:

$$\Phi + i\Psi = X = a\xi - 2ic\vartheta \cdot \left[ \sigma_p \cdot \ln(\tau^2 + \sigma_p^2) + \frac{1}{\sigma_p} \cdot \ln\left(\tau^2 + \frac{1}{\sigma_p^2}\right) \right]$$

und hieraus ist die Gleichung für die Wölbungshöhe  $F$  zu berechnen, indem man den Wert der Stromfunktion  $\Psi$  für  $\xi = iF$  gleich dem Wert von  $\Psi$  an den Verzweigungspunkten setzt. Dem Wert  $\xi = iF$  entspricht  $z = if$  mit:

$$f = p \cdot \operatorname{tg} \frac{F}{2\vartheta}$$

und  $\tau_F$  hat für die obere bzw. untere Begrenzung den Wert (s. Fig. 2a):

$$\tau_F = \pm \sqrt{f^2 + 1} - f.$$

Die Durchrechnung ergibt die Gleichung:

$$F = 2\vartheta \frac{c}{a} \left[ \sigma_p \cdot \ln \left| \frac{\tau_F^2 + \sigma_p^2}{1 - \sigma_p^2} \right| + \frac{1}{\sigma_p} \cdot \ln \left| \frac{\sigma_p^2 \tau_F^2 + 1}{1 - \sigma_p^2} \right| \right],$$

worin  $\tau_F$  selbst noch von  $F$  abhängt.

Für kleines  $\frac{c}{a}$ , also kleines  $\frac{F}{\vartheta}$  und  $f$  wird  $\tau_F = 1$  für die obere und untere Wölbung, und es bleibt:

$$\frac{F}{\vartheta} = 4p \frac{c}{a} \ln \left| \frac{1 + \sigma_p^2}{1 - \sigma_p^2} \right|$$

für beide Begrenzungen, so daß also die Dicke in erster Näherung, für kleine Neigungen, Null wird. Bei weiterer Näherung wird  $F_{\text{oben}}$  kleiner als  $F_{\text{unten}}$ , so daß diese spezielle Serie für größere Neigungen unbrauchbar ist.

In Fig. 6 sind für das Abstandsverhältnis  $\mathfrak{B} = 1$  und  $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}$  die Hauptmaße angegeben. Es ist in beiden Fällen die Schaufellänge = 20 mm gezeichnet und die Stromrichtung im Unendlichen = 1:4 angenommen. Die Parameterwerte sind dann: für  $\mathfrak{B} = 1$ :

$$p = 1,0903 = -q, \quad \sigma_p = 0,6558. \\ \vartheta = 3,183 \text{ mm}, \quad \frac{c}{a} = 0,191;$$

für  $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}$ :

$$p = 1,00374 = -q, \quad \sigma_p = 0,9171, \quad \vartheta = 1,592 \text{ mm}, \quad \frac{c}{a} = 0,136.$$

Die Angaben über die Wölbungshöhe sind nach Obigem nicht zuverlässig.

Durchrechnung weiterer Spezialfälle:  $q = \infty, p = 1$ .

9. Wenn zunächst einmal einer der Parameterwerte unendlich wird, z. B.

$$q = \infty \quad p \text{ reell} > 1,$$

so muß die Normierung der Konstanten in der Transformation von Absatz 3 geändert werden, da sonst das Bild der Schaufel ins Unendliche rückt. Wir schreiben hier:

$$p - z = (p + 1) \cdot e^{-\frac{z}{\vartheta}},$$

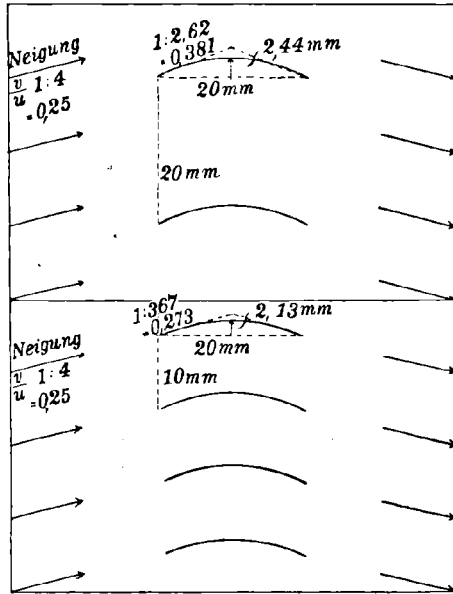
wodurch der linke Verzweigungspunkt  $z = -1$  nach  $\xi = 0$  sowie den weiteren in Abständen von  $2\pi\vartheta$  auf der  $\eta$ -Achse gelegenen Punkten abgebildet wird. Der andere Verzweigungspunkt  $z = +1$ , die Austrittskante, rückt nach:

$$\xi_A = \vartheta \cdot \ln \frac{p+1}{p-1},$$

so daß das Verhältnis:

$$\frac{\text{Abstand}}{\text{Sehnenlänge}} = \mathfrak{B} = \frac{2\pi}{\ln \frac{p+1}{p-1}} = \frac{\pi}{\text{Arctg} \frac{1}{p}}$$

Fig. 6.



wird. Die Sehne ist bei reellem  $p$  horizontal, senkrecht zur Flucht der Schaufeln.<sup>1)</sup> Trotzdem ist die Stromverteilung infolge der Lage von  $q$  und  $p$  unsymmetrisch, in  $w$  muß daher die Konstante  $b$  angesetzt werden (s. Absatz 4). Bei der Berechnung der Neigungen der Stromlinien ist der Wert von  $\tau$  für  $\xi = +\infty$ ,  $z = p$ :

$$\tau_p = i\sigma_p = i(p - |\sqrt{p^2 - 1}|)$$

zu setzen. Das komplexe Potential ergibt sich durch einen Grenzübergang aus Absatz 5, oder durch direkte Integration von  $\int w \cdot d\xi$  mit dem für diesen Absatz gültigen einfacheren Wert von  $\xi$ , zu:

$$X = (a - ib)\xi - 2c\vartheta \cdot \left[ i\sigma_p \cdot \ln(\tau - i\sigma_p) + \frac{i}{\sigma_p} \cdot \ln\left(\tau - \frac{i}{\sigma_p}\right) + \tau \right].$$

Durch Gleichsetzen der Werte der Stromfunktion  $\mathcal{W}$  an den Verzweigungspunkten ergibt sich die in Absatz 4 genannte Gleichung für  $b$ :

$$\frac{b}{c} = 2p - \frac{4}{\ln \frac{p+1}{p-1}}.$$

Wir wollen diese Serie, die für große Neigungen ebenfalls negative Dicken erreicht, allgemein nicht weiter verfolgen, sondern nur den interessanten *Spezialfall*  $p = 1$  daraus absondern, in dem wir beliebige Dicke werden darstellen können.

10. In diesem Falle:

$$q = \infty, \quad p = 1, \quad \tau_p = i, \quad \sigma_p = 1$$

fällt die Eintrittskante nach  $\xi = 0$ , die Austrittskante nach  $\xi = +\infty$ . Es liegt hier, wie Fig. 7 zeigt, der Fall vor, daß die von links heranstömende Flüssigkeit durch unendlich lange Führungen in eine andere Richtung gezwungen wird. Eine Bestimmung von  $b$ , wie im vorigen Absatz 9 für  $p \neq 1$  geschehen ist, findet hier nicht statt, wenn man die Richtungen im beiderseits Unendlichen verfügbar halten will. Den Fall endlicher Dicke der Leitbleche berücksichtigt man mit komplexem  $c$ , wofür wir  $c + ik$  schreiben:

$$u - iv = w = a - ib + 2(c + ik) \cdot \tau$$

$$\tau = i(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$e^{\frac{\tau}{\vartheta}} = \frac{2}{1 - z}.$$

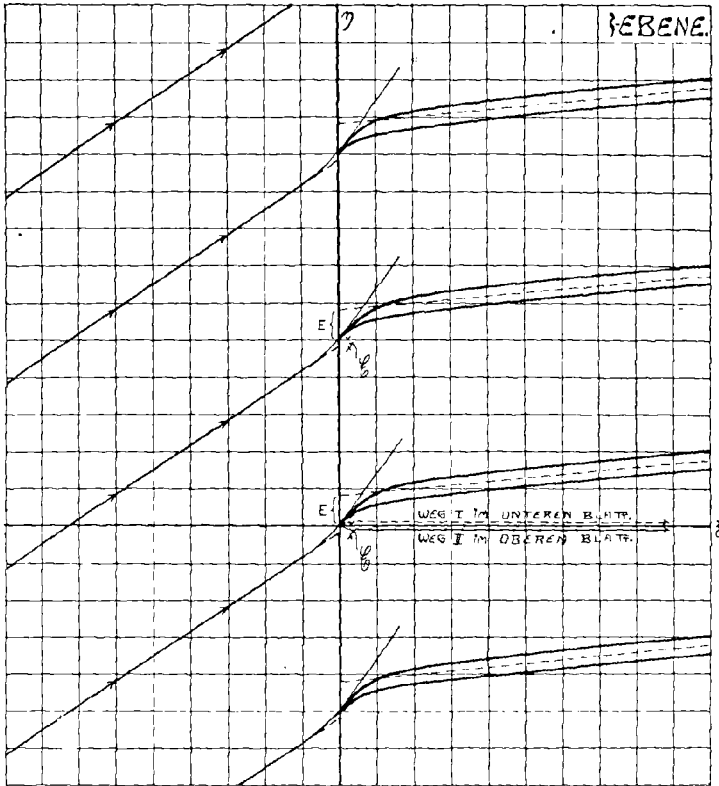
1) Komplexes  $p$  würde schräge Schaufelstellung darstellen.

Als Neigungen  $\frac{v}{u}$  (trig. Tangens des Winkels) im Zufluß von  $-\infty$ , an der Eintrittskante und am Austritt in  $+\infty$  lesen wir hieraus ab:

$$N_{-\infty} = \frac{b}{a} \quad N_E = \frac{b+2c}{a+2k} \quad N_A = N_{+\infty} = \frac{b-2c}{a-2k}$$

Wir müssen nun zunächst aus dem komplexen Potential Gleichungen für die Schaufelform, besonders für die Dicke, herstellen, ehe wir die

Fig. 7.



Elimination der Parameter vornehmen (Absatz 13). Für  $k = 0$  erhalten wir jetzt schon:

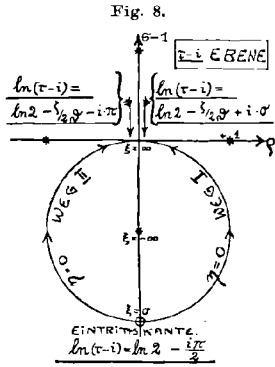
$$N_E = 2N_{-\infty} - N_{+\infty} \quad \text{für Dicke} = \text{Null.}$$

Bei horizontaler Ausströmung  $N_{+\infty} = 0$  ist also z. B. die Neigung der Eintrittstangente doppelt so groß als die Richtung des zuströmenden Wassers.

11. Aus dem komplexen Potential, welches wir aus Absatz 9 mit  $\sigma_p = 1$  erhalten:

$$\Phi + i\Psi = X = (a - ib)\xi - 2(c + ik)\vartheta [2i \ln(\tau - i) + \tau]$$

wollen wir nun die Lage der Asymptoten ableiten. Bei der Bestimmung der Werte von  $\ln(\tau - i)$  ist dabei zu beachten, ob wir vom Verzweigungspunkt  $\xi = 0$  aus auf dem Wege I im unteren Blatt, oder auf Weg II im sichtbaren Blatt längs der  $\xi$ -Achse ins Unendliche gehen, wir erhalten (s. Fig. 7) auf Weg II die Gleichung



der Asymptote für die von  $\xi = 0$  ausgehende obere Begrenzung. In der  $z$ -Ebene entspricht diesen Wegen die Strecke von  $z = -1$  bis  $z = +1$  am oberen unteren Rande des Verzweigungsschnittes von Fig. 2a. Die aus dieser Figur zu entnehmenden Werte von  $\tau - i$  und  $\ln(\tau - i)$

sind in Fig. 8 dargestellt. Für  $\xi = \infty$  ist dabei  $\tau - i$  angenähert durch:

$$\begin{aligned} \tau - i &\cong i\sqrt{2}\sqrt{z - 1} = + 2 \cdot e^{-\frac{\xi}{2\vartheta}} \quad \text{für Weg I} \\ &= - 2 \cdot e^{-\frac{\xi}{2\vartheta}} \quad \text{für Weg II.} \end{aligned}$$

Hiernach ist nun der imaginäre Teil von  $X$  an der Eintrittskante  $\xi = 0$ :

$$\Psi_{E_0} = - 2c\vartheta \cdot [2 \ln 2 - 1] - 2k\vartheta\pi$$

und das Verhalten von  $\Psi$  für  $\xi = + \infty$ :

$$\begin{aligned} \text{Weg I: } \Psi_{\infty I} &= (a - 2k)\eta - (b - 2c)\xi - 2c\vartheta \cdot [2 \ln 2 + 1] \\ \text{Weg II: } \Psi_{\infty II} &= (a - 2k)\eta - (b - 2c)\xi - 2c\vartheta \cdot [2 \ln 2 + 1] - 4k\vartheta\pi, \end{aligned}$$

und es ergeben sich nun die Asymptotengleichungen:

$$\begin{aligned} \text{I oberes Schaufelprofil } \Psi_{\infty I} &= \Psi_{E_0} \\ (a - 2k)\eta - (b - 2c)\xi &= 4c\vartheta - 2k\vartheta\pi \\ \text{II unteres Schaufelprofil } \Psi_{\infty II} &= \Psi_{E_0} \\ (a - 2k)\eta - (b - 2c)\xi &= 4c\vartheta + 2k\vartheta\pi. \end{aligned}$$

Die Höhen über dem Verzweigungspunkt, in denen diese Asymptoten die  $\eta$ -Achse schneiden, sind hiernach:

$$\begin{aligned} \text{obere Asymptote: } E_0 &= \frac{4c\vartheta - 2k\vartheta\pi}{a - 2k} \\ \text{untere Asymptote: } E_u &= \frac{4c\vartheta + 2k\vartheta\pi}{a - 2k} \\ \text{mittlere Höhe: } E &= \frac{E_0 + E_u}{2} = \frac{4c\vartheta}{a - 2k}, \end{aligned}$$

die Dicke der Schaufel, in der  $\eta$ -Richtung gemessen, ist:

$$\Delta = E_0 - E_u = \frac{-4k\vartheta\pi}{a - 2k},$$



ihr Verhältnis zum senkrechten Abstand:

$$\delta = \frac{\mathcal{A}}{2\pi\vartheta} = \frac{-2k}{a-2k}.$$

Für positive Dicke hat der Parameter  $k$  negative Werte. Die hier ausgerechnete Dicke  $\mathcal{A}$  ist natürlich in Übereinstimmung mit der wegen der Geschwindigkeitserhöhung eintretenden Verengung des Strahles.

12. Die Gleichung der Asymptote der Stromlinie, die von links her an die Eintrittskante herantritt, ist unter Benutzung der Werte:  $\xi = -\infty$ ,  $z = \infty$ ,  $\tau = 0$ ,  $\ln(\tau - i) = -i\frac{\pi}{2}$  (nach Fig. 8):

$$\Psi_{-\infty} = a\eta - b\xi - 2k\vartheta\pi = \Psi_{E0}$$

oder:

$$a\eta - b\xi = -2c\vartheta[2\ln 2 - 1]$$

und die Höhe  $\mathfrak{E}$ , in der sie die  $\eta$ -Achse schneidet:

$$\mathfrak{E} = -0,38629 \cdot \frac{2c}{a}\vartheta.$$

13. Wir sind nun in der Lage, durch Elimination der Parameter aus den Schlußformeln von Absatz 10, 11, 12 handliche Gleichungen zur Berechnung solcher Schaufeln zu gewinnen. Entsprechend den 3 Parametern  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{c}{a}$ ,  $\frac{k}{a}$  werden wir 3 Größen  $N_{-\infty}$ ,  $N_{+\infty}$ ,  $\delta$  als gegeben betrachten, und die Neigung der Eintrittstangente  $N_E$ , sowie die Asymptotenschnittpunkte  $E$  und  $\mathfrak{E}$  berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1-2\delta}{1-\delta} N_E &= 2N_{-\infty} - \frac{1}{1-\delta} N_{+\infty} \\ \frac{E}{\vartheta} &= 2[(1-\delta)N_{-\infty} - N_{+\infty}] \\ \frac{\mathfrak{E}}{\vartheta} &= -0,38629 \left[ N_{-\infty} - \frac{1}{1-\delta} N_{+\infty} \right]. \end{aligned}$$

Fig. 7 entspricht den Werten:

$$\delta = \frac{1}{10} \quad N_{+\infty} = \frac{1}{10} \quad N_{-\infty} = \frac{2}{3} \quad 2\pi\vartheta = 50 \text{ mm,}$$

woraus:

$$N_E = \frac{11}{8} \quad \frac{E}{\vartheta} = 1 \quad \frac{\mathfrak{E}}{\vartheta} = -0,2146$$

$$\vartheta = 7,96 \text{ mm} \quad E = 7,96 \text{ mm} \quad \mathfrak{E} = -1,71 \text{ mm}$$

folgt.

$N_E$  ist nach dieser Formel stets erheblich größer als  $N_{-\infty}$ , nur für  $N_{+\infty} = N_{-\infty}$  nimmt  $N_E$  denselben Wert an, und zwar für beliebiges  $\delta$ . — Die Unterschiede der Neigungen sind in diesem Falle nicht vom Schaufelabstand abhängig geworden, weil bei kleinerem Abstand auch die Asymptotenhöhe kleiner und damit die Krümmung an der Eintrittskante sehr scharf wird. — Der geringe Abstand  $\mathfrak{E}$ , in dem die Asymptote von links her an der Eintrittskante vorbeigeht, läßt erkennen, daß die Stromlinie erst kurz vorher zur Richtung  $N_E$  umbiegt.

## Radialturbinen.

14. Der Übergang von den Axial- zu den Radialturbinen oder Pumpen geschieht durch die Abbildung des komplexen Potentials  $X$  aus der  $\xi$ -Ebene auf eine neue Koordinatenebene  $Z = \xi + iH$  durch:

$$Z = \Theta \cdot e^{+\frac{\xi}{n\vartheta}}.$$

Die Achsenparallelen der  $\xi$ -Ebene:  $\eta = \text{const}$  gehen über in die Strahlen durch  $Z = 0$ , die Schar  $\xi = \text{const}$  in die Kreise um diesen Punkt. In den Punkt  $Z = 0$  wird  $\xi = \mp \infty$ , in  $Z = \infty$  wird  $\xi = \pm \infty$  abgebildet. Ein horizontaler Streifen der Breite  $2\pi\vartheta$  aus der  $\xi$ -Ebene wird zu einem Sektor der Winkelöffnung  $\frac{2\pi}{n}$ ; einen vollen Kreis vollendet man, wenn man in der  $\xi$ -Ebene um  $2n\pi\vartheta$  steigt. Es erscheinen also  $n$  Schaufeln in der  $Z$ -Ebene.  $\Theta$  bestimmt den Maßstab der Figur, es ist der Radius von  $\xi = 0$ , für den Fall von Absatz 9—13 ist es der Kreis, auf dem die Eintrittskanten liegen.  $\vartheta$  kann  $= 1$  gesetzt werden, da überall nur  $\frac{\xi}{\vartheta}$  auftritt, und  $\xi$  eliminiert wird. Übertragen wird diesmal *nicht* (vergl. Absatz 5) die *Geschwindigkeitsverteilung*  $w(\xi)$ , sondern das *Potential*  $X(\xi)$ . Würden wir nämlich die Transformation  $\xi(Z)$  in  $w(\xi)$  einsetzen, so erhielten wir in der  $Z$ -Ebene eine Strömung, die keine Symmetrie gegen Drehung um  $\frac{2\pi}{n}$  besitzt.

Da wir diesmal direkt die Stromlinienbilder, und zwar jedes beliebige der in Absatz 4 bis 13 behandelten, in die neue Koordinatenebene übertragen, so können wir davon absehen, die Formeln hinzuschreiben, die durch Elimination von  $\xi$  aus  $X(\xi)$  und  $\xi(Z)$  entstehen; wir zeichnen vielmehr die Kurven  $\xi = \text{const}$  und  $\eta = \text{const}$  als konforme Polarkoordinaten in der  $Z$  Ebene ein:

$$|Z| = \sqrt{\xi^2 + H^2} = \Theta \cdot e^{+\frac{\xi}{n\vartheta}} \quad \text{arc } Z = \arctg \frac{H}{\xi} = \pm \frac{\eta}{n\vartheta}$$

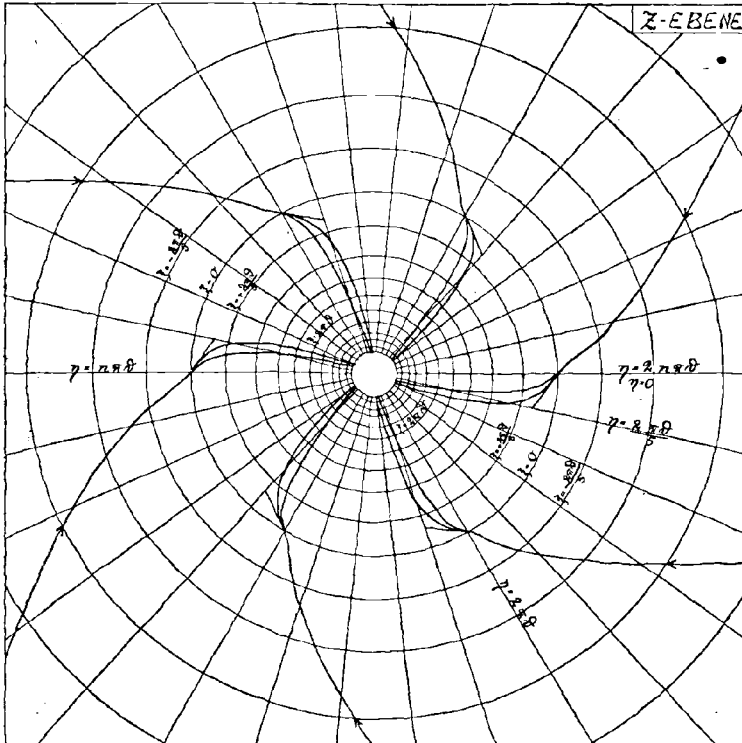
und können dann z. B. die Figuren 6 und 7, oder jede andere Axialturbine oder Pumpe, direkt abzeichnen. Fig. 9 zeigt für  $n = 6$  die Übertragung von Fig. 7. Es gilt das untere Vorzeichen im Exponenten der Transformationsformel, wenn die Leitschaufeln innen liegen sollen.

15. In der Umgebung der Punkte  $Z = 0$  bzw.  $Z = \infty$  ist die Strömung vom Typus der Quellströmung mit Zirkulation, als Asymptoten treten hier nicht gerade Linien, sondern logarithmische Spiralen auf. Die Strömung bildet mit dem Radius denselben Winkel, wie die Strömung in der  $\xi$ -Ebene mit der  $\xi$ -Achse, weil ja die Stromlinien konform abgebildet worden sind. Rechnerisch ersieht man dies aus der

Berechnung der neuen Geschwindigkeitsverteilung:  $W = U - iV$  in der  $Z$ -Ebene:

$$W = \frac{dX}{dZ} = \frac{dX}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dZ} = \pm \frac{n\vartheta}{Z} \cdot w.$$

Fig. 9.



War nun die Neigung in der  $\xi$ -Ebene  $N = \frac{v}{u} = \text{tg } \alpha$ , also

$$w = u - iv = |w| \cdot e^{-i\alpha},$$

und ist

$$Z = |Z| \cdot e^{i\beta},$$

so wird:

$$W = \pm \frac{n\vartheta \cdot |w|}{|Z|} \cdot e^{-i(\alpha+\beta)}.$$

$W$  bildet also mit der  $\xi$ -Achse den Winkel  $\alpha + \beta$ , mit dem Radius demnach den Winkel  $\alpha$ . Die im Absatz 4 bis 13 berechneten Neigungen  $N$  können also in dem Sinne, daß sie Neigungen gegen den Radius bedeuten, direkt übernommen werden. Der absolute Wert der Geschwindigkeit sowie die Längen ändern sich je nach der Entfernung vom Nullpunkt der  $Z$ -Ebene. Die neuen Schaufellängen und die Versetzung der Stromlinien:  $E$  bez.  $\mathcal{E}$  werden am besten zunächst im Bogen-

oder Winkelmaß  $\eta$  berechnet, im Polardiagramm eingetragen und dann direkt aus der Zeichnung abgegriffen.

16. In Fig. 9 besitzt die ankommende Strömung bereits eine Zirkulation. Wenn, wie z. B. beim Leitrad einer Francisturbine, das Wasser rein radial herankommt, so ist in den Formeln von Absatz 13:

$$N_{-\infty} = 0$$

zu setzen, und es wird dann:

$$N_E = -\frac{1}{1-2\delta} N_{+\infty}$$

$$E = -2 N_{+\infty}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{0,38629}{1-\delta} N_{+\infty}.$$

Die 4 größeren Schaufeln von Fig. 10 stellen die Hälfte eines solchen Leitrades dar für:

$$N_{-\infty} = 0 \quad N_{+\infty} = -2 \quad \delta = \frac{1}{10} \quad n = 8 \quad \Theta = 50 \text{ mm.}$$

Dabei ist, um das vollständige System der Parameter, die zu dieser Figur führten, einmal hinzuschreiben:

in der Transformation von  $z$  auf  $\xi$ :  $q = \infty$ ,  $p = 1$ ,  $\vartheta = 1$

in der Transformation von  $\xi$  auf  $Z$ :  $n = 8$ ,  $\Theta = 50 \text{ mm}$ ,  $\vartheta = 1$

im Ausdruck für  $w$  und  $X$ :  $\frac{b}{a} = 0$ ,  $\frac{2k}{a} = -\frac{1}{9}$ ,  $\frac{2c}{a} = \frac{20}{9}$ .

Aus den angegebenen Maßen berechnen wir:

$$N_E = -2,5 \quad E = 4 \quad \mathfrak{E} = -0,85842.$$

Die Größen  $E$  und  $\mathfrak{E}$  sind als Werte der Koordinate  $\eta$  im Polardiagramm einzutragen (Absatz 14):

$$\text{arc } Z = \frac{E}{n} = \frac{4}{8} \quad \text{bzw.} \quad = \frac{\mathfrak{E}}{n} = \frac{-0,85842}{8}$$

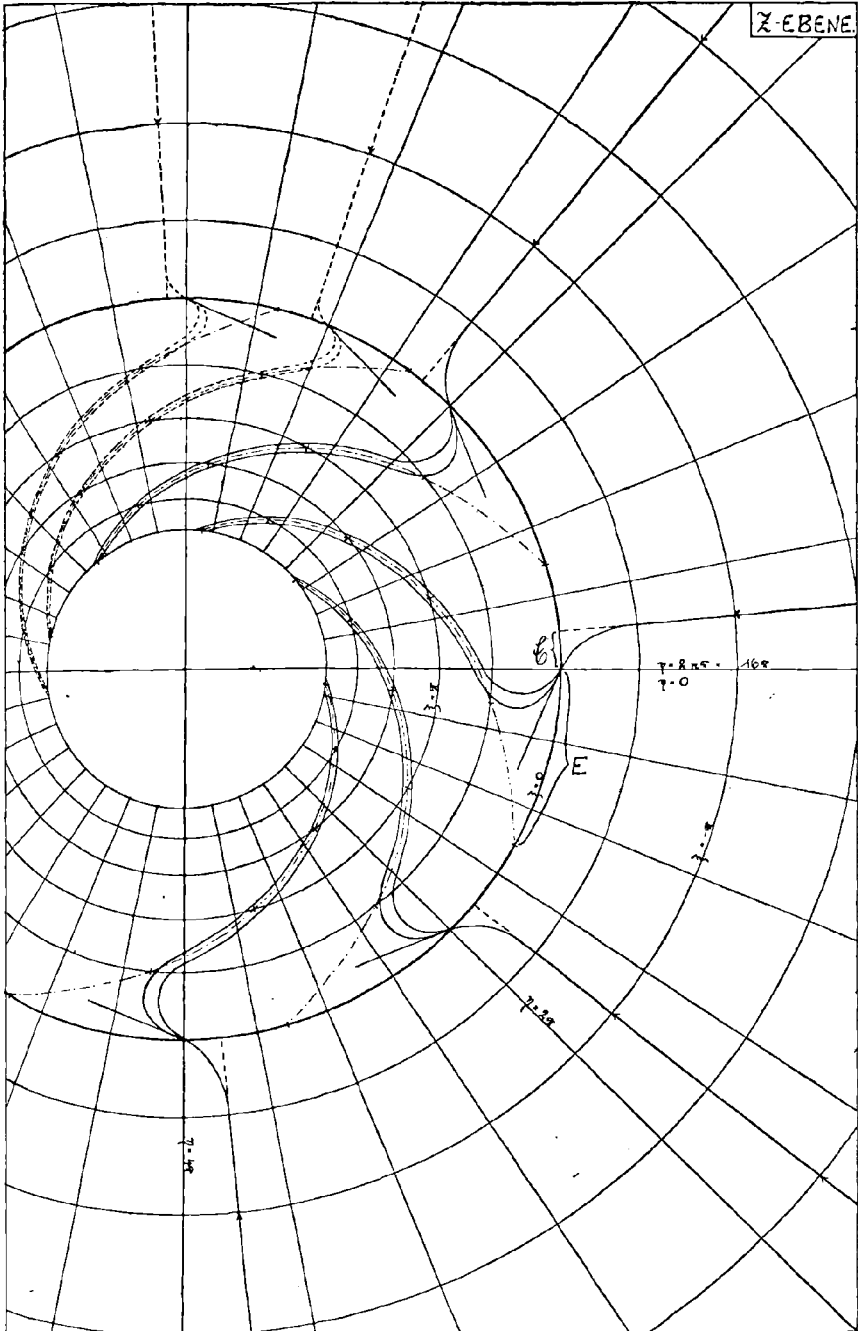
oder im Winkelmaß:

$$\frac{4}{8} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 28,65^\circ \quad \text{bzw.} \quad \frac{-0,85842}{8} \cdot \frac{180}{\pi} = -6,15^\circ.$$

Um diesen Winkel ist die asymptotische logarithmische Spirale (bei  $\mathfrak{E}$  Gerade) gegen die ähnliche, durch die Eintrittskante gehende Spirale versetzt.

17. Man sieht aus der Figur, daß die Eintrittstangente erheblich gegen den Strom geneigt ist, um die ankommende, scharf gekrümmte Stromlinie stoßfrei zu empfangen. Der berechnete Wert der Neigung wird wegen der durch Reibung verursachten Störungen für die Praxis kaum unmittelbar zu verwenden sein. Hier muß erst der Versuch entscheiden, wie weit man dieser Forderung der Potentialtheorie nachzugeben hat.

Fig. 10.



Bei der Durchrechnung endlicher Schaufellängen,  $p \neq 1$ , z. B. bei der Übertragung der Fig. 6, wird sich auch ein Einfluß des Abstandes der Schaufeln auf die Neigungsunterschiede ergeben, der in der vorliegenden Serie, wie in Absatz 13 bemerkt, nicht auftritt, weil mit geringerem Abstand auch die Krümmung schärfer wird. Wird nämlich  $n$  verdoppelt, so wird der Winkel, um den die Asymptote der Schaufel verschoben ist,  $\frac{E}{n}$ , nur halb so groß wie in der Figur. Zwei Schaufeln für diesen Fall ( $n = 16$ ) sind in Fig. 10 gestrichelt eingezeichnet.

Überhaupt ist die Krümmung der Schaufel sehr scharf, wie die kleinen Werte von  $E$  und  $\mathfrak{E}$  erkennen lassen. Die Schaufeln gehen sehr bald nahe an ihre asymptotischen Spiralen heran, und da sie hier kraftfrei weiterfließen, wird man die Leitbleche schon früher, als hier gezeichnet ist, abbrechen können. Will man sanftere Krümmung darstellen, so muß man den Fall  $q \neq \infty$  durchrechnen. In diesem Falle dürfte sich auch die Neigung der Eintrittstangente ermäßigen, und es wird sich ein Einfluß des Abstandes zeigen, wenn man mit wachsendem  $n$  die Krümmung durch entsprechende Änderung von  $q$  konstant hält.

18. Verallgemeinerungen zur Darstellung der Umströmung an der Vorderkante, abgerundeter Eintrittskanten u. dgl. wird man in ähnlicher Weise anbringen können, wie dies in Absatz 17 meiner früheren Abhandlung für Flügel angegeben ist. — Die vorstehenden Rechnungen betrafen die Relativbewegung zur Schaufel. Bei den Axialturbinen bietet es keine Schwierigkeit, von hier zu treibenden oder getriebenen Schaufeln überzugehen. Anders ist es bei den Radialturbinen oder Centrifugalpumpen: Die oben durchgeführten Rechnungen beherrschen nur den Fall des feststehenden Schaufelsystems. Zur Darstellung der Relativbewegung in bezug auf ein rotierendes Schaufelsystem muß man die Stromfunktion der gleichförmigen Rotation:  $\Psi_{\omega} = \frac{\omega}{2} (\mathfrak{E}^2 + H^2)$  zu den oben ausgerechneten Ausdrücken für  $\Psi$  addieren. Die Schaufelform wird dadurch natürlich beeinflußt. — Komplexes  $c$  stellt, wie schon in Absatz 4 und 10 ff. bemerkt, Verengung des Strahles dar, der den Raum dann nicht mehr voll ausfüllt. Dies könnte vielleicht zur Darstellung der Fälle von Strahlbildung dienen, wobei jedoch im allgemeinen keine Helmholtz'schen Grenzflächen entstehen.

## Zeichnungen zur Kuttaströmung.

Von W. DEIMLER in München.

Im Jahre 1902 hat Prof. Kutta das spezielle Problem gelöst<sup>1)</sup>: Die Strömung um eine lange schwach gewölbte zylindrische Schale zu finden, wenn die Sehne ihres Querschnitts parallel zur Strömung im Unendlichen liegt. In einer Abhandlung, die im Jahre 1910 der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt wurde<sup>2)</sup>, hat er auch die Lösung des allgemeinen Problems der Strömung schiefer zur Schale gefunden.

Wir wollen uns im folgenden mit der zweiten dieser Arbeiten beschäftigen; unsere hauptsächliche Absicht ist es, den Kuttaschen Ansätzen folgend, möglichst exakte Zeichnungen für die Strömung um eine Schale von kreisförmigem Querschnitt zu geben.<sup>3)</sup> Die bis jetzt existierenden Zeichnungen sind nur qualitativ nach dem Gefühl gezeichnet.

### Physikalische Grundlagen.

In seinen beiden Abhandlungen hat Kutta die Ausdehnung der Schale quer zur Stromrichtung so groß gewählt, daß die Wirbel, die an der Schmalseite entstehen, keinen Einfluß mehr auf den Gesamtcharakter der Strömung äußern können, d. h. in mathematischer Formulierung: die Schale wurde unendlich lang angenommen. Der rein mathematische Vorteil, der durch diese Abstraktion erreicht wird, ist bekanntlich sehr bedeutend: Das dreidimensionale Problem wird zu einem zweidimensionalen vereinfacht und so der Behandlung mit funktionentheoretischen Methoden zugänglich gemacht. Der Anschluß an die Praxis bleibt aber trotzdem sehr wohl erhalten, da ja gerade Flächen, die quer zur Flugrichtung eine vielfach größere Ausdehnung besitzen als in der Flugrichtung, wesentlich größeren Auftrieb ergeben und deshalb praktisch viel wichtiger sind als anders geformte.

Als Form des Querschnitts der Schale wurde in Kuttas Arbeit hauptsächlich der Kreisbogen behandelt, der in der Grenze auch in eine

---

1) Habilitationsschrift (auszugsweise in Ill. aëron. Mitt. 1902, S. 135).

2) „Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung“. Sitzber. der Kgl. B. Ak. d. Wiss. Math. phys. Klasse. 1910.

3) Die Zeichnungen entstanden auf Veranlassung und waren begleitet von dem gütigen Interesse der Herren Prof. Finsterwalder und Kutta.

Gerade übergehen kann; die Methode ist jedoch auch auf andere praktisch wichtige Formen anwendbar.<sup>1)</sup>

Die allgemeinste Strömung setzt Kutta zusammen aus drei Einzelströmungen: 1. einer Strömung parallel zur Sehne des Kreisbogens („Sehnenströmung“); 2. einer Strömung senkrecht dazu („Normalströmung“); 3. einer Zirkulation um das Hindernis herum. Aus Sehnen- und Normalströmung allein setzt sich die allgemeine Translationsströmung (die dem Hindernis auf einfachstem Wege ausweicht) zusammen, eine Strömung also, deren Richtung im Unendlichen unter beliebigem Winkel gegen die Sehne des Querschnitts geneigt sein kann. Diese Strömung ergibt aber, so lange sie stetig und wirbelfrei (und natürlich ohne Beschleunigung im Unendlichen) erfolgt, bekanntlich für jedes Hindernis den Widerstand Null, d. h. für eine Tragfläche den Auftrieb Null; als Geschwindigkeit der Strömung ergibt sich an allen scharfen Kanten (also in unserm Fall an der Vorder- und Hinterkante der Schale) die Geschwindigkeit  $\infty$ . Beide Resultate widersprechen den tatsächlichen Verhältnissen.

Besonders der erstere Punkt ist entscheidend: Eine Theorie, die den Auftrieb Null für eine unter beliebigem Winkel getroffene Tragfläche gäbe, wäre für den praktischen Flugtechniker nichts weiter als eine zwecklose Spielerei mit Formeln. Die Theorie muß also mindestens so weit erweitert werden, daß sie einen Auftrieb (resp. Widerstand) ergibt. Die Verhältnisse in der Natur müssen natürlich bei dieser Erweiterung möglichst beachtet und richtig verwendet werden. Umgekehrt gibt der Vergleich der rechnerisch und experimentell bestimmten Werte einen Maßstab dafür, inwieweit die Vorgänge in der Natur richtig erkannt und dargestellt wurden.

Helmholtz hat diese Erweiterung der Theorie durch die Einführung der Unstetigkeitsflächen (also unter Aufgabe der überall um das Hindernis stetigen Potentialbewegung) gegeben. Kutta behält die stetige Potentialströmung im Endlichen bei und muß dafür notwendigerweise die dritte Einzelströmung, die Zirkulation, hinzunehmen. Denn es gilt umkehrbar der Satz: „Eine zyklische Bewegung (Zirkulation), die einer Translation überlagert ist, gibt eine Querkraft“<sup>2)</sup> (d. h. eine Kraft mit einer Komponente senkrecht zur Strömungsrichtung).

1) Vgl. dazu die weitere Arbeit Kuttas: „Über ebene Zirkulationsströmungen nebst flugtechnischen Anwendungen“. Sitzber. der Kgl. B. Ak. d. Wiss. Math. phys. Klasse. 1911.

Ferner Blasius, „Stromfunktionen symmetrischer und unsymmetrischer Flügel in zweidimensionaler Strömung“. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1911, S. 226 ff.

2) Vgl. z. B. Lanchester, Aerial Flight I, § 90 oder schon früher: Joukowski, Bulletin de l'institut aérodynamique de Koutschino, Fascicule I, Petersburg 1906.



Es fragt sich nur noch, in welcher Stärke die Zirkulation der Translation überlagert werden soll. Diese Frage beantwortet Kutta aus der physikalischen Forderung, daß die auftretenden Geschwindigkeiten nicht so groß werden sollen, daß sie auf unzulässige negative Drucke führen, also auf ein Zerreißen der Flüssigkeit. Für die Potentialbewegung einer Flüssigkeit ohne Wirkung äußerer Kräfte gilt ja die Formel

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = p + \frac{1}{2} \rho v^2,$$

(wo  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit,  $p$  der Druck,  $v$  die Geschwindigkeit an beliebiger Stelle,  $p_0$ ,  $v_0$  Druck und Geschwindigkeit an vorgegebener Stelle, z. B. im Unendlichen) oder

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - v^2).$$

Man sieht also: der Druck wird negativ, sobald  $v$  einen bestimmten Wert übersteigt. Wir haben aber an zwei Stellen (Vorder- und Hinterkante) sogar unendlich große Geschwindigkeiten. Sie müssen möglichst vermieden werden. Da mit der Wahl der Stärke der Zirkulation nur eine Konstante beliebig zur Verfügung steht, so kann Kutta im allgemeinen (d. h. abgesehen z. B. von Symmetriefällen) nur eine dieser unendlich großen Geschwindigkeiten durch geeignete Wahl der Konstanten auf einen endlichen Wert herabdrücken. Es fragt sich nur, ob die Vorder- oder Hinterkante zu bevorzugen ist. Dem physikalischen Verhalten von Flüssigkeiten entspricht es nun offenbar viel mehr, an der Vorderkante irgendeine Unstetigkeit auszubilden und an der Hinterkante stetig abzufließen als umgekehrt. Daher verwendet Kutta die freie Konstante, eben die Stärke der Zirkulation, dazu, an der Hinterkante ein stetiges Abfließen mit endlicher Geschwindigkeit herbeizuführen; es erfolgt dann von selbst in der Richtung der Tangente. Die Lösung ist dadurch eindeutig geworden. Die noch bestehende unendlich große Geschwindigkeit (d. h. physikalisch richtiger: die Ausbildung einer Unstetigkeit) an der Vorderkante muß dann eben durch eine Verdickung, wie sie ein jeder Vogelflügel aufweist, vermieden werden.<sup>1)</sup>

Es ist nützlich, sich von Anfang an klar zu machen, in welchen Punkten die Theorie bereits eine gute Annäherung an die Praxis bietet und in welchen sie noch einer Ergänzung bedarf. Dazu wollen wir folgendes überlegen<sup>2)</sup>:

Die Einführung einer Zirkulationsströmung bringt, wie erwähnt, in die Umgebung der Flugfläche keine Unstetigkeit herein, die stetige

1) Über Betrag und Form dieser Verdickung s. Kutta, a. a. O. S. 31 ff. Kutta zeigt dort, daß bereits eine ganz geringfügige Verdickung zur Vermeidung der negativen Drucke ausreicht.

2) Diese Überlegungen stammen teilweise aus Gesprächen mit Prof. Kutta.

Potentialbewegung bleibt im Endlichen erhalten. Im Unendlichen dagegen tritt durch die Zirkulation eine logarithmische Unstetigkeit, ein Wirbel, auf [vgl. dazu die Formeln 5.), 6.) und 8.) im folgenden]. Man kann also sagen:

Die Kuttasche Theorie berücksichtigt den Einfluß all der Wirbel, die sich im Lauf der Zeit von der Flugfläche abgelöst und von ihr schon weit entfernt haben; denn sie können in ihrer Gesamtheit einem einzigen Wirbel im Unendlichen gleichgesetzt werden. Überall da jedoch, wo der Einfluß der sich an der Fläche neu bildenden Wirbel in Betracht kommt — also besonders z. B. bei Berechnung des Stirnwiderstands — ist die Kuttasche Theorie einer Ergänzung bedürftig.

So ist von vornherein zu erwarten, daß nur für kleine Luftstoßwinkel und schwach gewölbte Flächen die Resultate der Theorie mit denen der Praxis übereinstimmen werden. Denn für größere Luftstoßwinkel und stark gewölbte Flächen wird besonders an der Vorder-, aber auch an der Hinterkante ein starker Wirbel auftreten (die Geschwindigkeit an der Vorderkante ist unendlich groß, ebenso das Geschwindigkeitsgefälle an der Hinterkante), deren Einfluß nicht mehr vernachlässigt werden darf.

Kutta erhielt bis zu Luftstoßwinkeln von rund  $15^\circ$  eine Übereinstimmung des berechneten Auftriebs bis auf rund 20% mit dem Experiment, und zwar waren die Ergebnisse der Theorie um diesen Betrag größer als die des Experiments. Das ist sehr wesentlich für die Einschätzung der Richtigkeit der Theorie: Jede an sich richtige Theorie, die aber unwichtigere Nebenumstände noch vernachlässigt, muß größere Werte für den Auftrieb ergeben als das Experiment, denn alle diese Wirbel usw. schwächen ja den Auftrieb.

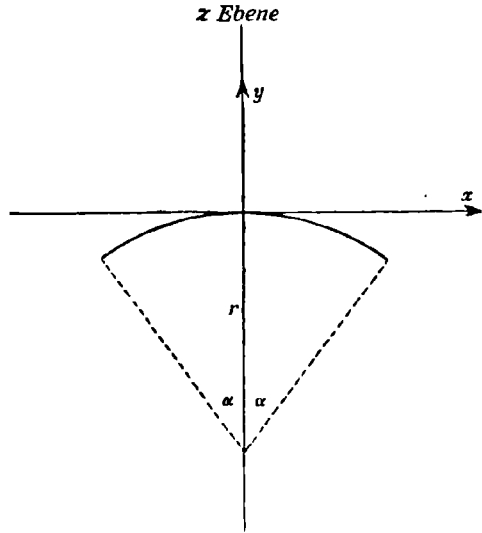
Bei Vernachlässigung der Wirbel in der Nähe der Fläche wird aber die Kuttasche Methode wohl die bestmöglichen Resultate geben, da sie 1. die allgemeinste Strömung gibt, die bei Nichtbeachtung dieser Wirbel möglich ist, und da sie 2. die wirklichen Verhältnisse in der Natur möglichst gut dargestellt hat.

### Mathematische Behandlung.

Zur mathematischen Behandlung der angedeuteten physikalischen Ideen geht Kutta aus von der bereits bekannten Strömung um einen unendlich langen Kreiszyylinder oder, was dasselbe ist, von der zweidimensionalen Strömung um einen Kreis herum. Diese zweidimensionale Strömung ist in der  $\xi$ -Ebene ( $\xi = \xi + i\eta$ ) dargestellt durch

$$\Phi + i\Psi = c_1 \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) - ic_2 \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) + ic_3 \lg \xi.$$

Mittels einer Hilfsvariablen  $t$ , die auf die positive Halbebene beschränkt ist, bildet er unter Einschaltung einer Zwischenebene  $z'$  diese  $\xi$ -Ebene konform ab auf eine  $z$ -Ebene ( $z = x + iy$ ) und zwar so, daß der Kreis der  $\xi$ -Ebene übergeht in den doppelt überstrichenen Kreisbogen (dafür kann auch — entsprechend einem anderen Querschnitt der Tragfläche — eine andere Kurve gewählt werden) vom Öffnungswinkel  $2\alpha$  in der  $z$ -Ebene, um den die Strömung gesucht ist. Sobald die Abbildungsfunktion gefunden, ist auch das vorgelegte Problem „Die zweidimensionale Strömung um einen Kreisbogen zu finden“ gelöst, denn bei der konformen Abbildung gehen Strom- und Niveaulinien wieder in Strom- und Niveaulinien über. Falls wir also Strom- und Niveaulinien der zweidimensionalen Strömung um einen Kreis kennen (und das tun wir), kennen wir infolge der Abbildungsfunktion sie und damit alle charakteristischen Stücke der zweidimensionalen Strömung auch um einen Kreisbogen.



Folgende Bezeichnungen und Abkürzungen werden gebraucht:

$2\alpha$  = Öffnungswinkel des Kreisbogens

$r$  = Radius " "

$\beta$  = Luftstoßwinkel

$v_0$  = Betrag der Geschwindigkeit im Unendlichen

$\delta = 45^\circ - \frac{\alpha}{4}$

$W_1 = U_1 + iV_1$  Strömungsfunktion<sup>1)</sup> der Sehnenströmung

$W_2 = U_2 + iV_2$  " " Normalströmung

$W_3 = U_3 + iV_3$  " " Zirkulation

$W = U + iV$  " " zusammenges. Strömung

Die Kurven  $U = \text{const.}$  bzw.  $V = \text{const.}$  sind die Niveau- bzw. Stromlinien.

1) Wir gebrauchen also mit Kutta den Ausdruck „Strömungsfunktion“ für die Summe aus reellem und imaginärem Bestandteil, während oft nur der imaginäre Bestandteil so bezeichnet wird.

Jeder Punkt der Zeichenebene  $z = x + iy$  wird mittels der komplexen Hilfsvariablen  $t$  gegeben durch<sup>1)</sup>:

$$(1) \quad z' = \frac{\operatorname{tg} 2\delta}{4r} \left[ t \operatorname{tg} \delta + \frac{1}{t \operatorname{tg} \delta} \right] + \frac{i}{2r}.$$

$$(2) \quad z = \frac{1}{z'}.$$

Der zu jedem einzelnen Punkte  $z$  gehörige Wert von  $W_1, W_2, W_3, W$  wird gefunden durch<sup>1)</sup>:

$$(3) \quad W_1 = \operatorname{const.} \cdot \frac{t}{1+t^2}.$$

$$(4) \quad W_2 = \operatorname{const.} \cdot \frac{1}{1+t^2}.$$

$$(5) \quad W_3 = \operatorname{const.} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} t.$$

$$(6) \quad W = 4rv_0 \sin \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{t}{1+t^2} \cos \beta + \frac{1}{1+t^2} \sin \beta + \operatorname{arctg} t \cdot \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \beta \right) \right].$$

Durch Differentiation der  $W$  nach  $z$  erhält man die Geschwindigkeiten im betreffenden Punkte  $z$  zerlegt in ihre Komponenten in Richtung der  $x$  und  $y$ -Achse z. B.

$$\frac{dW}{dz} = v_x - iv_y.$$

### Konstruktion der Strömungsbilder der drei Einzelströmungen.

Vorbemerkung: In allen Zeichnungen wurde der Pfeil des Kreisbogens, der umströmt werden soll, gleich  $\frac{1}{2}$  gewählt, daraus berechnet sich  $\alpha = 18^\circ 55' 28,7''$ .

Die Wölbung ist, was Anwendbarkeit der theoretischen Resultate auf die Praxis betrifft (vgl. die Bemerkungen über die physikalischen Grundlagen), fast schon etwas zu groß, jedoch ist mit Absicht hierbei bis an die Grenze gegangen, um die zu erwartenden Erscheinungen möglichst charakteristisch zu gestalten.

Bei der Kompliziertheit der Formeln ist ein Aufstellen der Gleichung jeder einzelnen Strom- oder Niveaulinie in brauchbarer Form (z. B.  $f(x, y) = 0$ ) nicht möglich, auch nicht eine analoge punktweise Konstruktion der Linien wie sie z. B. bei zweidimensionalen Quellen und Senken möglich ist<sup>2)</sup>, wenn sich der Strömung kein Hindernis entgegenstellt.

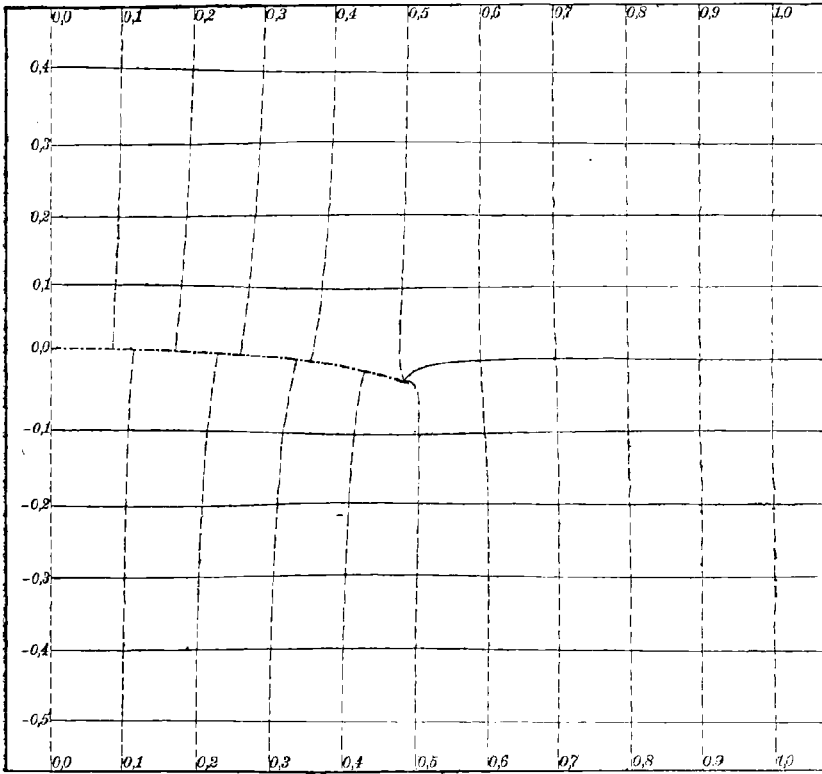
Der Weg, der bei der Konstruktion der Einzelströmungen eingeschlagen wurde, ist kurz folgender: 1. Berechnung einer Anzahl geeig-

1) Ableitung der Formeln s. Kutta a. a. O. S. 11 ff.

2) Vgl. z. B. Maxwell, Elektrizität und Magnetismus deutsch von Weinstein, Berlin 1883.

neter Punkte  $z$ . 2. Berechnung der zugehörigen Stromfunktionen  $W$ . Dadurch ist jedem der berechneten Punkte  $z = x + iy$  eine reelle und eine imaginäre Zahl zugeteilt entsprechend dem Wert von  $U$  und  $V$ . 3. Interpolation auf in gleichen Abständen aufeinanderfolgende (z. B. ganzzahlige) Werte von  $U$  und  $V$ . Die Verbindung von Punkten, denen gleiche Zahlen zugeteilt sind, gibt die Niveau- und Stromlinien.

Fig. 1.



Schnenströmung.

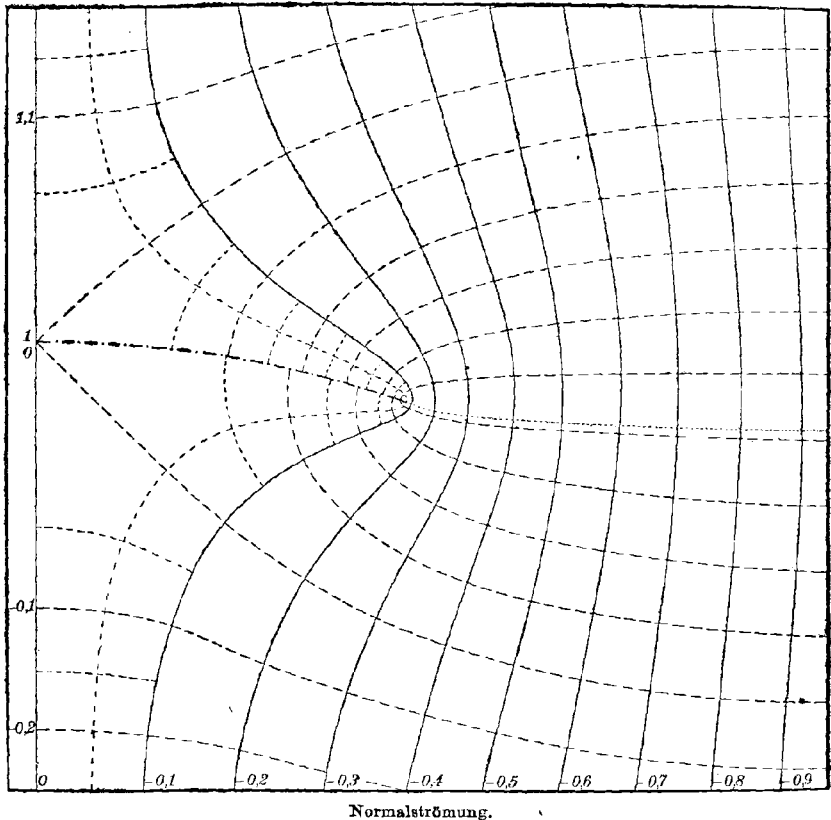
Auf diese kurzen Andeutungen wollen wir noch weiter eingehen:

1. Werte  $z$  müssen aus praktischen Gründen zuerst (vor den  $W$  usw.) gerechnet werden. Da man nämlich die  $z$  vor allem in der Nähe des Kreisbogens braucht, könnte sonst mancher Wert  $W$  und  $\frac{dW}{dz}$  unnütz gerechnet werden, so lange man sich in der Beziehung zwischen  $t$  und  $z$  noch nicht auskennt. Einen Anhalt für die richtige Auswahl der  $t$  gewähren 2 Tatsachen: Erstens entsprechen rein imaginären Werten von  $t$  auch rein imaginäre Werte von  $z$  (vgl. Formel 1 und 2) und zweitens

entspricht reellen Werten von  $t$  der Umfang des Kreisbogens. (Kutta hat eben den Kreis der  $\xi$ -Ebene einerseits auf die reelle  $t$ -Achse, andererseits auf den doppelt bestrichenen Kreisbogen abgebildet, a. a. O. S. 1 und 8.)

Eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung ist es, daß die 3 Einzelströmungen (also Sehnen-, Normal- und Zirkulationsströmung)

Fig. 2.

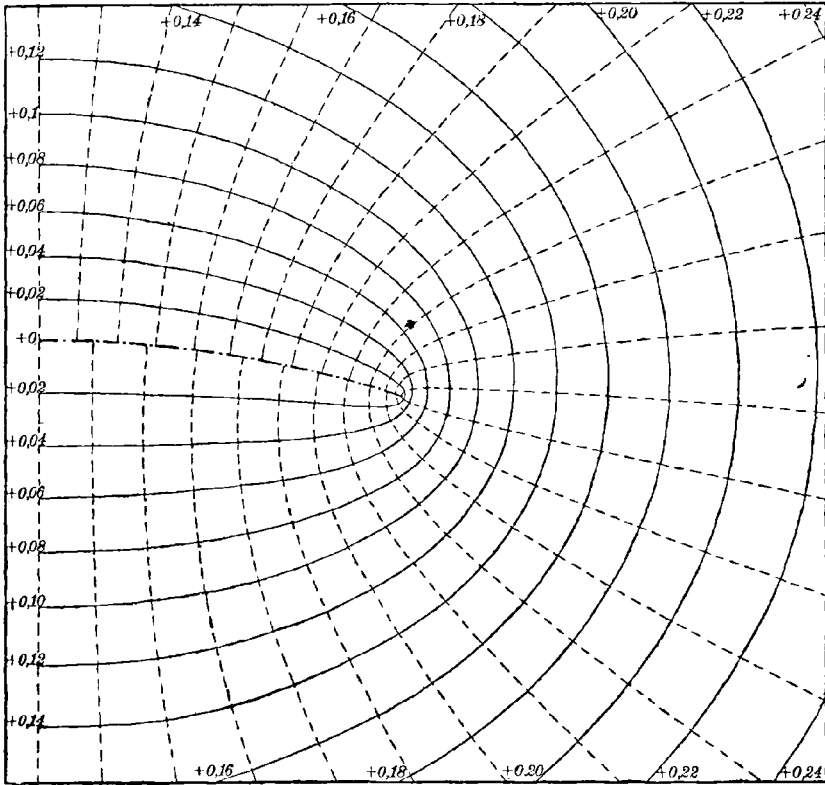


symmetrisch zur  $y$ -Achse verlaufen, sie werden deshalb auch nur für positive  $x$  gezeichnet (dafür ist reeller und imaginärer Teil von  $t$  positiv). So wurden innerhalb eines Rechtecks begrenzt von den Punkten  $x = 0 \quad y = 0,3r$ ;  $x = 0,7r \quad y = 0,3r$ ;  $x = 0,7r \quad y = -0,4r$ ;  $x = 0 \quad y = -0,4r$

rund 60 Punkte  $z$  gerechnet, die das Rechteck im allgemeinen gleichmäßig überdeckten, nur in der Nähe der Kante sich häuften, da etwa auftretende Unregelmäßigkeiten hier zu erwarten sind.

2. Für jeden dieser Punkte  $z$  wurden dann nach den Formeln (3) (4) (5) die zugehörigen  $U_i$  und  $V_i$  berechnet. Bei der Sehnen- und der Normalströmung bietet das gar keine Schwierigkeit. Die in den Formeln auftretende Konstante wurde  $= 1$  gesetzt. Bei der Berechnung der Strömungsfunktion  $W_3$  (Zirkulation) ist zu beachten, daß ihre Periode  $\pi$  beträgt. Wenn wir also nachher auf ganzzahlige oder sonst in

Fig. 8.



Zirkulationsströmung.

rationalen Intervallen fortschreitende Werte von  $U_3$  und  $V_3$  interpolieren wollen, so müssen wir zuerst durch diese Periode wegdividieren, sonst würde sich die Quadrateinteilung der  $z$ -Ebene nicht schließen. Die Konstante in Formel (5) wurde deshalb  $= \frac{1}{\pi}$  gesetzt. Die Trennung des reellen und imaginären Teils von  $\frac{\text{arc tg } t}{\pi}$  geschieht mittels folgender kleinen Umrechnung:

$$\text{arc tg } t = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+it}{1-it}$$

$t$  sei  $= \xi + i\eta$ , dann ist weiter:

$$(\alpha) \quad 1 + it = (1 - \eta) + i\xi = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$(\beta) \quad 1 - it = (1 + \eta) - i\xi = \rho_1(\cos \psi + i \sin \psi).$$

$$\text{Aus } (\alpha) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\xi}{1 - \eta} \quad \text{und} \quad \rho = \frac{\xi}{\sin \varphi}$$

$$\text{aus } (\beta) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{-\xi}{1 + \eta} \quad \rho_1 = \frac{-\xi}{\sin \psi}.$$

Aus den letzten 4 Gleichungen ist  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\rho$ ,  $\rho_1$  bekannt, dabei sind  $\varphi$  und  $\psi$  in solchen Quadranten zu wählen, daß  $\rho$  und  $\rho_1$  positiv werden. Man hat also

$$\begin{aligned} W_3 &= \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} t}{\pi} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \ln \left[ \frac{\rho}{\rho_1} \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \psi + i \sin \psi} \right] \\ &= \frac{1}{2i\pi} \ln \left[ \frac{\rho}{\rho_1} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) \right] \\ &= \frac{1}{2i\pi} \ln \left[ \frac{\rho}{\rho_1} e^{(\varphi - \psi)i} \right] \\ &= \frac{\varphi - \psi}{2\pi} + \frac{1}{2i\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_1} \\ &= \frac{\varphi - \psi}{2\pi} - i \cdot 0,36644 \cdot \log \frac{\rho}{\rho_1}. \end{aligned}$$

Folglich

$$(7) \quad U_3 = \frac{\varphi - \psi}{2\pi}$$

$$(8) \quad V_3 = -0,36644 \log \frac{\rho}{\rho_1}.$$

Wie ersichtlich, ist  $U_3$  und  $V_3$  unendlich vieldeutig. Wenn wir  $\varphi$  und  $\psi$  zwischen 0 und  $2\pi$  sowie den  $\log \frac{\rho}{\rho_1}$  reell wählen, so haben wir den Hauptwert des Logarithmus (bzw. des Arcus Tangens) herausgegriffen. Jeder andere Zweig tätete dieselben Dienste.

Für rein imaginäre ( $\xi = 0$ ) oder für reelle ( $\eta = 0$ ) Werte von  $t$  sind diese Formeln durch folgende einfacheren zu ersetzen:

a) falls  $\xi = 0$

$$W_3 = \frac{1}{2i\pi} \ln \frac{1 - \eta}{1 + \eta}$$

b) falls  $\eta = 0$

$$W_3 = \frac{1}{2i\pi} \ln \frac{1 + i\xi}{1 - i\xi}. \quad \text{Es ist } \psi = 2\pi - \varphi \\ \rho = \rho_1 \text{ also}$$

$$(7a) \quad U_3 = 0 \quad \text{wenn } 1 - \eta \text{ positiv} \quad (7b) \quad U_3 = \frac{\varphi}{\pi} - 1 \\ = -0,5 \quad \text{,,} \quad \text{negativ}$$

$$(8a) \quad V_3 = -0,36644 \log \left| \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \right| \quad (8b) \quad V_3 = 0.$$

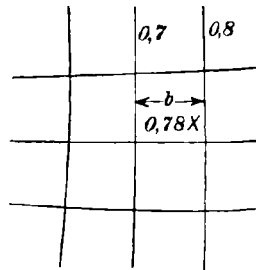


Eine Berechnung des  $\frac{dW_i}{dz}$  für die einzelnen Punkte  $P$  ist nützlich, da man durch die Richtung der Geschwindigkeit auch die Richtung der Strom- und der darauf senkrechten Niveaulinie an dem betreffenden Punkte hat. Wegen der gegenüber dem Nutzen unverhältnismäßig großen Rechenarbeit wurde  $\frac{dW_i}{dz}$  jedoch nur für einzelne besonders wichtige Punkte bestimmt.

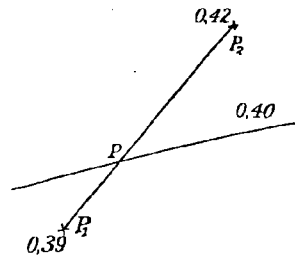
3. Wenn man die Konstanten der Niveaulinien  $U = \text{const.}$  und der Stromlinien  $V = \text{const.}$  in gleichen Intervallen fortschreiten läßt, erhält man eine Quadrateinteilung der Ebene. Dazu ist noch in unserem Fall eine Anzahl von Punkten  $P$  vorgegeben, die mit je einem Zahlwert für  $U$  und  $V$  versehen sind. Das Quadratnetz ist so lange in der Ebene zu verschieben, bis alle vorgegebenen Punkte hineinpassen.

Zwischen den Konstanten zweier aufeinanderfolgender Strom- resp. Niveaulinien wurde bei der Sehnen- und Normalströmung die Differenz 0,1, bei der Zirkulation 0,02 gewählt.

Am praktischsten ist es wohl, zuerst nur nach dem Augenmaß unter möglichster Berücksichtigung der Zahlwerte  $P$  sich ein ganz rohes Quadratnetz zu zeichnen und dieses Netz nachträglich auszukorrigieren. Diese Korrektur wurde hauptsächlich auf zweierlei Weise vorgenommen: Hatte ein Punkt ein  $U_i$  oder  $V_i$ , das nahe einem Vielfachen von 0,1 (resp. 0,02) war z. B.  $U_1 = 0,78$ , so wurde die Streifenbreite  $b$  des roh eingezeichneten Netzes als erste Näherung genommen und daraus eine Korrektur für die näher liegende Kurve  $U_1 = 0,8$  gerechnet: sie muß in unserem Beispiel um  $\frac{b \cdot 0,02}{0,1}$  von  $P$  entfernt sein.



Die zweite Art der Korrektur benutzte immer zwei möglichst benachbarte Punkte  $P$ : In erster Näherung wurde die Änderung der Konstanten von  $U_i$  und  $V_i$  proportional der Entfernung der Punkte  $P$  angenommen. Sind z. B. zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  um 6 cm voneinander entfernt und gehört zu  $P_1$  ein  $U_1 = 0,39$  zu  $P_2$  ein  $U_1 = 0,42$ , so schneidet die Kurve  $U_1 = 0,4$  die Strecke  $P_1 P_2$  in einem Punkt  $P$ , der 2 cm von  $P_1$  absteht. Es ist leicht ersichtlich, daß die Lage des Punktes  $P$  unter Mitbenutzung des näherungsweise gezeichneten Quadratnetzes noch etwas genauer bestimmt werden kann.



Es ist merkwürdig, wie wenige Punkte schon zu einer recht genauen Festlegung des Quadratnetzes genügen. Die mehrmalige Korrektur des Netzes macht jedoch so viel Mühe, daß es bequemer ist, gleich einige Punkte mehr zu berechnen. Die bei unseren Figuren erreichte Genauigkeit ist, wie Stichproben durch Berechnen einiger Kontrollpunkte zeigten, fast eben so groß wie bei direkt konstruierten Kurven.

#### Aufsatzpunkte der Niveau- und Stromlinien auf der Schale.

Die Aufsatzpunkte der Niveau- und Stromlinien auf der Schale können auch exakt bestimmt werden. Dazu dient die bereits angeführte Bemerkung, daß für die Schale selbst das  $t$  reell ist. Für reelles  $t$  ist aber  $W_1$ ,  $W_2$  und  $W_3$  ebenfalls reell d. h.  $V_1$ ,  $V_2$  und  $V_3 = 0$ . Die Schale ist also in allen drei Fällen Stromlinie und zwar entsprechend dem Wert  $V_i = 0$ . Für die Schale wird  $W_i = U_i + 0 \cdot i$ . Deshalb sind die Aufsatzpunkte der Niveaulinien auf der Schale bestimmt durch die Gleichungen

$$\text{a) Sehnenströmung: } 0,1n = \frac{t}{1+t^2},$$

$$\text{b) Normalströmung: } 0,1n = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\text{c) Zirkulationsströmung: } 0,02n = \frac{\text{arc tg } t}{\pi} \quad \text{d. h. } t = \text{tg}(0,02\pi n).$$

Dabei ist  $n$  eine positive oder negative ganze Zahl, also  $0,1 \cdot n$  bzw.  $0,02n$  ganzzahlige Vielfache von  $0,1$  bzw.  $0,02$ . (Diesen Werten entsprechend wurden eben die Niveau- und Stromlinien gezeichnet, vgl. S. 383.) Für eine gegebene Niveaulinie (also gegebenes  $n$ ) berechnet sich aus diesen Gleichungen das  $t$  und nach Formel (1) und (2) das zugehörige  $z$ .

Für den Fall, daß  $t$  komplex wird, gibt  $z$  die Schnittpunkte der gegebenen Niveaulinie mit der Stromlinie  $V_i = 0$ . (Also eine Möglichkeit, diese Stromlinie punktweise zu konstruieren!). Für die rechte Seite der Strömung, wie wir sie gezeichnet haben, kommen nur  $t$  mit positivem reellen und imaginären Bestandteil in Betracht.

Bei der Sehnen- und Normalströmung setzt auch eine Stromlinie auf der Schale auf. Ihren Aufsatzpunkt kann man auf zweierlei Weise exakt finden, 1. durch die physikalische Überlegung, daß dieser Punkt ein Staupunkt mit der Geschwindigkeit Null sein muß, 2. durch die geometrische Überlegung, daß entsprechend den zwei Zweigen der Stromlinie auch zwei Potentiallinien in ihn einmünden müssen.

1. Setzt man mit Kutta  $t = \text{tg} \frac{\psi}{2}$ , so wird

$$W_1 = \text{const.} \sin \psi,$$

$$W_2 = \text{const.} \cos^2 \frac{\psi}{2}.$$

Für den Staupunkt muß  $\frac{dW_1}{dz}$  resp.  $\frac{dW_2}{dz} = 0$  sein. Führt man statt der Differentiation nach  $z$  die nach  $\psi$  ein, so enthält

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{dz} & \text{ den Faktor } \cos \psi, \\ \frac{dW_2}{dz} & \text{ „ „ } - \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} = -\frac{1}{2} \sin \psi. \end{aligned}$$

Man erhält also den Aufsatzpunkt der Stromlinie  $V_i = 0$  für die

$$\text{Sehnenströmung bei } \psi = \frac{\pi}{2} \text{ oder } \frac{3\pi}{2}, \quad t = \frac{+}{(-)} 1,$$

$$\text{Normalströmung „ } \psi = 0 \quad \text{„ } \pi, \quad t = 0 \text{ oder } \infty.$$

2. Zwei sich schneidende Potentiallinien müssen die gleiche Konstante haben, d. h. die Gleichung a) bzw. b) für die Niveaulinien muß eine Doppelwurzel haben. Man erhält also für die

$$\text{Sehnenströmung: 1) } t^2 - \frac{10}{n}t + 1 = 0$$

und

$$2) \quad 2t - \frac{10}{n} = 0,$$

daraus

$$t = \frac{+}{(-)} 1, \quad n = \frac{+}{(-)} 5.$$

$$\text{Normalströmung: 1) } \frac{1}{1+t^2} = 0, 1n$$

und

$$2) \quad \frac{-2t}{(1+t^2)^2} = 0,$$

daraus

$$t = 0 \text{ oder } \infty \quad n = 10 \text{ oder } 0.$$

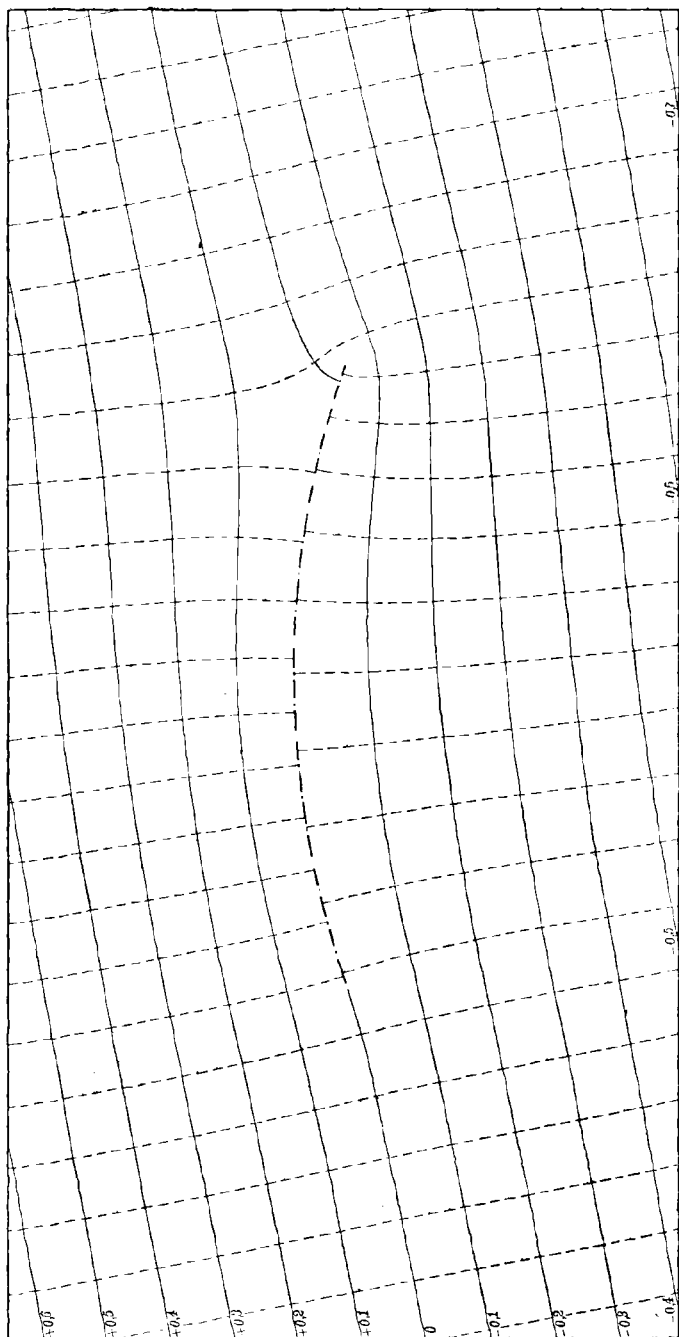
Schließlich sei noch bemerkt, daß sich Strom- und Niveaulinien in diesen Staupunkten unter je  $45^\circ$  schneiden.<sup>1)</sup>

### Konstruktion der Bilder der schiefen Strömung ohne und mit Zirkulation.

Die Figur 4 stellt die schiefe zweidimensionale Strömung um einen Kreisbogen dar, Figur 5 dieselbe Strömung, aber mit Zirkulation. Die Richtung der Geschwindigkeit im  $\infty$  ist unter  $10^\circ$  gegen die  $x$ -Achse geneigt; es ist also  $\beta = 10^\circ$  angenommen.

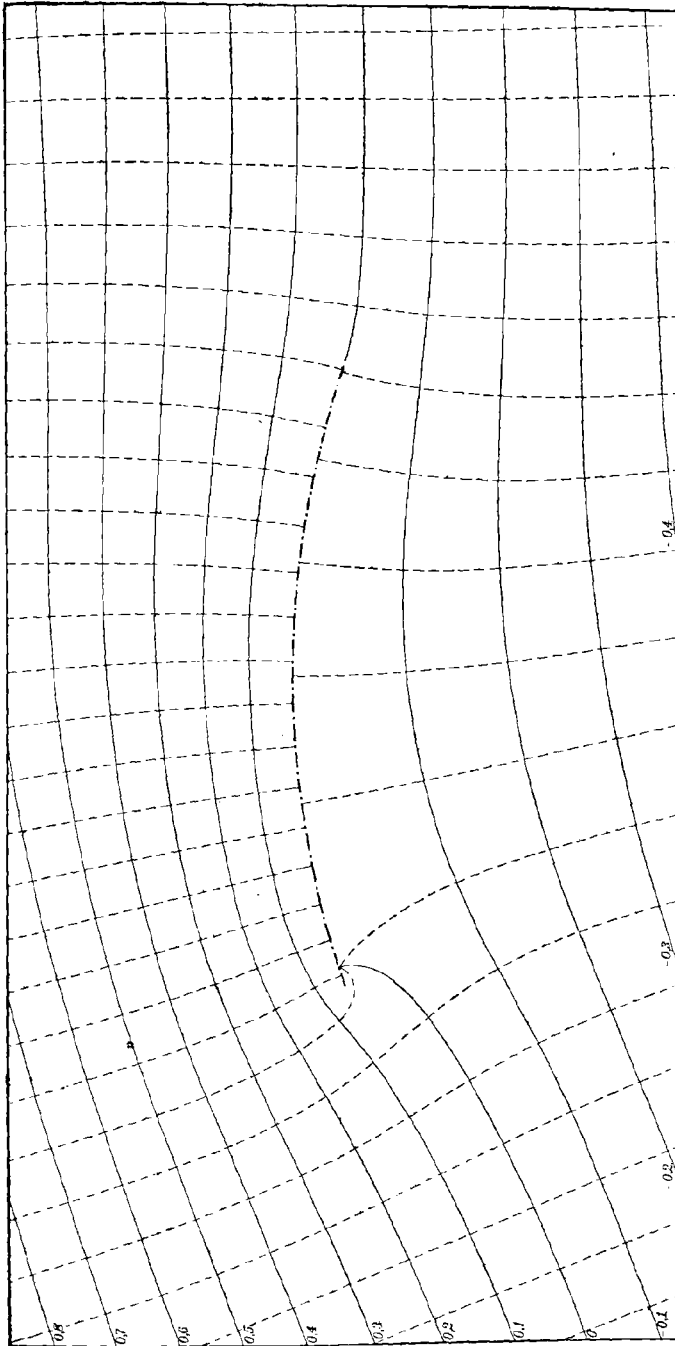
1) Die Niveau- und Stromlinien verhalten sich eben in diesen Punkten wie reeller und imaginärer Teil von  $k \cdot z^2$  (weil sich zwei Zweige schneiden, bei  $n$  Zweigen wie  $k \cdot z^n$ ). Zum Beweis vergleiche z. B. Maxwell, Elektrizität und Magnetismus, deutsch von Weinstein, Berlin 1883, S. 170 f. Dort findet sich allerdings nur der speziellere Satz: „ $n$  Schalen einer Niveaufläche  $\Phi = \Phi_0$  schneiden sich unter gleichen Winkeln  $\frac{\pi}{n}$ .“

Fig. 4.



Strom- und Normalströmung kombiniert

Fig. 5.



Strömung mit Zirkulation.

Die absoluten Geschwindigkeiten der Strömungen  $W_1 = \frac{t}{1+t^2}$  und  $W_2 = \frac{1}{1+t^2}$  sind im  $\infty$  gleich groß; die Richtung der ersten ist dagegen im  $\infty$  parallel der  $x$ -Achse, die der zweiten parallel der  $y$ -Achse. Wir erhalten also eine Geschwindigkeit, die im  $\infty$  unter  $10^\circ$  gegen die  $x$ -Achse geneigt ist, durch die Stromfunktion

$$\begin{aligned} W' &= U' + iV' = W_1 \cos 10^\circ + W_2 \sin 10^\circ \\ &= (U_1 \cos 10^\circ + U_2 \sin 10^\circ) + i(V_1 \cos 10^\circ + V_2 \sin 10^\circ). \end{aligned}$$

Zur Konstruktion der Figur 4 wurden zwei Pausen der Sehnenströmung  $W_1$  und der Normalströmung  $W_2$  aufeinandergelegt und auf einer dritten darübergelegten Pause die Schnittpunkte aller Niveau- bzw. Stromlinien der Strömung  $W_1$  mit denen von  $W_2$  markiert. Für diese Punkte läßt sich das  $U'$  bzw.  $V'$  nach obiger Gleichung sehr rasch berechnen. Zur Kontrolle (besonders für die ungünstigen Schnitte in der Umgebung der Schale) wurde noch für mehrere der Punkte  $P$ , für die schon das  $W_1$  und  $W_2$  exakt gerechnet war, auch das  $W'$  berechnet. So standen zur Interpolation, die wie früher gemacht wurde, rund 400 Punkte zur Verfügung.

Die Differenz der Konstanten zweier aufeinanderfolgender Niveau- bzw. Stromlinien ist wieder 0,1.

Da die Strömung nicht mehr symmetrisch zur  $y$ -Achse verläuft, mußte diesmal die Figur für positives und negatives  $x$  gezeichnet werden. Wie eine kleine Rechnung zeigt, können die Aufsatzpunkte der Stromlinie  $V' = 0$  auf der Schale in ähnlicher Weise wie früher gefunden werden, z. B. aus der Gleichung

$$\cos(\psi + 10^\circ) = 0.$$

Der Aufsatzpunkt links fällt fast genau mit dem Endpunkt der Schale zusammen. (Ganz genau würde dieses Zusammenfallen eintreten für  $\beta = \frac{\alpha}{2}$ ). Das ist ein praktisch recht interessanter Zufall: Wir können nämlich unser Strömungsbild auffassen als Bild einer Strömung mit Zirkulation, die von rechts oben die konvexe Seite der Schale trifft. Die Zirkulationskonstante ist, da ja schon die zirkulationslose Abströmung längs der Schalentangente erfolgt, zu Null geworden. Dadurch ist auch der Auftrieb zu Null geworden und das Druckzentrum ins Unendliche gerückt; es bleibt nur noch ein Drehmoment übrig. Wir haben also den praktisch wichtigen und für den Flieger gefährlichsten Fall einer Windströmung, die den Apparat nicht trägt, sondern nur dreht.

Die Aufsatzpunkte der Niveaulinien werden ähnlich wie früher gefunden.

Ganz analog wurde bei der endgültigen Strömung der Figur 5 verfahren: Über die Pausen der Strömung  $W'$  und  $W_3$  (Zirkulation) wurde eine dritte Pause gelegt usw. Zu beachten ist nur wieder, daß man — ähnlich wie früher bei der Zirkulation — die Formel für  $W$  (Formel 6) zuerst durch  $\pi \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$  dividieren muß, um rational interpolieren zu können und doch eine Schließung des Quadratnetzes zu erreichen.

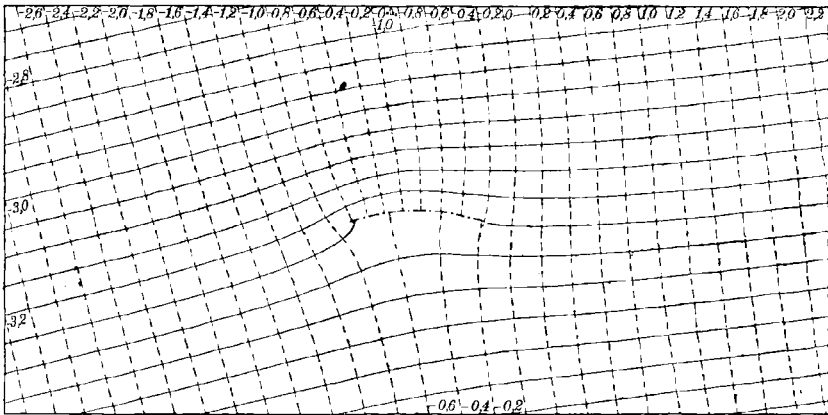
Der Aufsatzpunkt der Stromlinie  $V = 0$  auf der Schale ist bestimmt durch

$$\cos(\psi + \beta) + \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = 0.$$

Kutta, a. a. O. S. 17.

Man hat sich die Strömung von links unten her unter einem Winkel von  $10^\circ$  gegen die Schale kommend zu denken. Charakteristisch am Strömungsbild ist einmal das Abströmen an der Hinterkante in Richtung der Tangente, ferner die Tatsache, daß auf der Oberseite der Schale mehr Niveaulinien aufsitzen als auf der Unterseite.

Fig. 6.



Strömung mit Zirkulation.

Die Quadrate werden dadurch auf der Oberseite kleiner als auf der Unterseite, und da der Druck bis auf eine Konstante umgekehrt proportional mit dem Flächeninhalt der Quadrate wird, ergibt sich ein resultierender Druck nach oben, ein Auftrieb (nicht nur eine Drehung der Schale wie bei den zirkulationslosen Strömungen).

Die Figur 6 gibt die Strömung bis zu solcher Entfernung vom Hindernis, daß die Neigung der Stromlinien schon wieder nahezu gleich  $10^\circ$

geworden ist. Die Ecken des Rechtecks der Zeichnung haben die Koordinaten:

$$x = 2r, y = r; \quad x = 2r, y = -r; \quad x = -2r, y = -r; \quad x = -2r, y = r.$$

Auffällig ist es, wie stark noch selbst an den Grenzen dieser Zeichnung die Größe der Quadrate oberhalb der Schale abweicht von der Größe der Quadrate unterhalb. Es scheint also, daß die Störung durch das Hindernis in praktisch zu berücksichtigendem Maße doch weiter hinausreicht, als gewöhnlich angenommen wird.

### Verhalten der Strömung im Unendlichen.

Theoretisch läuft die Störung natürlich bis in das Unendliche. Trotzdem könnten aber die einzelnen Stromlinien Asymptoten besitzen, ja man möchte ihr Vorhandensein aus der Überlegung schließen, daß die einzelnen Luftteilchen durch den Einfluß der Schale wohl nur um endliche Strecken aus ihrer Bahn herausgebracht werden. Und doch wäre diese Überlegung falsch: Die Stromfunktion  $V$  besitzt ja, wie aus Formel (6) und (8) hervorgeht, als Summanden ein logarithmisches Glied. Da der Einfluß dieses logarithmischen Gliedes gegenüber den anderen erst im Unendlichen verschwindet und die Kurve des Logarithmus keine Asymptote besitzt, so haben auch die Stromlinien  $V = \text{constans}$  keine Asymptoten.<sup>1)</sup>

Das Verhalten der Stromlinien im Unendlichen läßt sich näher diskutieren durch Reihenentwicklung im Unendlichen oder durch Transformation des unendlich Fernen in den Nullpunkt.

Wenn wir den letzteren Weg einschlagen, so gibt uns Formel (2) gerade die beabsichtigte Transformation durch reziproke Radien  $z' = \frac{1}{z}$ .

Es entsprechen sich:  $z = \infty$ ,  $z' = 0$ , ferner  $t = i$ .<sup>2)</sup> Für die nächste Umgebung des Punktes  $z' = 0$  können wir deshalb setzen

$$t = i + \tau,$$

dabei ist  $\tau$  eine kleine (komplexe) Größe, von der höhere Potenzen zu vernachlässigen sind. Durch Einsetzen in Formel (1) erhält man nach einiger Rechnung

$$\tau = 2 \cdot \cos 2\delta \cdot z'.$$

Jetzt setzt man in der Formel für  $W$  (vgl. Formel 6) statt  $t = i + 2 \cos 2\delta \cdot z'$  ein, setzt  $z' = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , trennt reellen und imaginären Bestandteil  $U$  und  $iV$  und erhält so die Gleichung der transformierten Niveau-  
linien  $U = \text{const.}$  und Stromlinien  $V = \text{const.}$  in der Nähe des Punktes

1) S. auch Blasius, Zeitschrift für Math. u. Phys. 1911, S. 225 f.

2) Beweis entweder aus Formel (1) oder Kutta, a. a. O. S. 7.



$z' = 0$ . Die Einzelheiten der (elementaren) Rechnung übergehen wir, man erhält aus

$$W = \frac{1}{\pi \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)} \frac{t \cos \beta + \sin \beta}{1 + t^2} + \frac{1}{2i\pi} \ln \frac{1 + it}{1 - it}$$

die Gleichung der transformierten Stromlinien

$$2\pi V - \left( \frac{\cos \beta}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)} + \ln \cos 2\delta \right) = - \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \cos 2\delta} \frac{\sin(\varphi + \beta)}{r} - \ln r$$

oder

$$(9) \quad V + c_1 = \frac{c_2 \sin(\varphi + \beta)}{r} + c_3 \ln r,$$

wobei  $c_1, c_2, c_3$  Konstante  $\neq 0$ . Für  $r = 0$  (also den Punkt  $z' = 0$  resp.  $z = \infty$ ) entsteht rechts allerdings die unbestimmte Form  $\infty - \infty$ , aber bekanntlich wird  $\frac{1}{r}$  für  $r = 0$  stärker unendlich als  $\ln r$ , so daß die rechte Seite immer unendlich wird, so lange der Zähler von  $\frac{1}{r}$  verschieden von 0 ist.

Die Gleichung (9) kann also für endliche  $V$  (d. h. für alle Stromlinien, die längs ihres Verlaufs endlich nahe an die Schale hinkommen) nur dann erfüllt werden, wenn

$$(10) \quad \begin{aligned} \sin(\varphi + \beta) &= 0 \\ \varphi &= -\beta \text{ resp. } = 180 - \beta, \end{aligned}$$

das heißt aber: alle transformierten Stromlinien haben im Punkte  $z' = 0$  dieselbe Tangente, nämlich die unter dem Winkel  $\varphi = -10^\circ$  gegen die  $x$ -Achse geneigte Gerade.

Oder für unsere Zeichenebene  $z$  ausgesprochen (man beachte, daß sich durch die Transformation  $z = \frac{1}{z'}$  der Sinn des Winkels  $\varphi$  ändert!):

Alle Stromlinien haben im Unendlichen dieselbe Richtung, nämlich diejenige, die mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\varphi = \beta = 10^\circ$  einschließt.

Wir können also das Verhalten der Stromlinien im Unendlichen so charakterisieren: Die Neigung der Tangente an die Stromlinien wird im Unendlichen gleich  $\beta$ , der Abschnitt der Tangente auf der  $y$ -Achse jedoch nicht endlich, sondern logarithmisch unendlich.

Ganz Analoges gilt für die Niveaulinien.

### Kurven gleichen Drucks.

Falls Druck  $p_0$  und Geschwindigkeit  $v_0$  an einer beliebigen Stelle vorgegeben sind, so läßt sich aus der Geschwindigkeit  $v$  an einer be-

liebigen andern Stelle der dort herrschende Druck  $p$  berechnen nach der bereits angegebenen Formel

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - v^2).$$

Wir nehmen an, im Unendlichen sei

$$p_0 = 760 \text{ mm Quecksilber}$$

$$v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec.}}$$

Ferner sei  $\rho = 0,001293$  = Dichte der Luft bei  $0^\circ$ .

Wir bekommen also damit (nach dem Prinzip der relativen Bewegung) das praktisch wichtige Beispiel der Druckverteilung um einen Aëroplanflügel von kreisförmigem Querschnitt, der mit einer Geschwindigkeit von  $20 \frac{\text{m}}{\text{sec.}}$  durch eine ruhende Luftmasse vorwärts bewegt wird. Die Luftmasse ist als unendlich ausgedehnt angenommen, die Querausdehnung des Flügels sehr groß gegenüber seiner Ausdehnung in der Bewegungsrichtung (vgl. physikalische Grundlagen).

Infolge der kleinen auftretenden Überdrucke ist es besser, in mm Wasser zu rechnen. Der Druck von 1 mm Wasser entspricht dem Druck von  $1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ ; also erhält man den Überdruck  $p - p_0$  in mm Wasser gemessen:

$$\begin{aligned} p - p_0 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1,293}{9,81} \cdot 20^2 \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \right] \\ &= 26,36 \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Man ersieht aus dieser Formel sofort, daß der größte Überdruck dort auftritt, wo  $v = 0$  wird, also an dem Spaltungspunkt der Stromlinie  $V = 0$  auf der unteren Schalenseite. Der Überdruck beträgt dort 26,36 mm Wasser.

Der größte Überdruck tritt auf für  $v = \infty$ , also an der Vorderkante (der Unterdruck ist aber nur längs einer unendlich schmalen Schneide unendlich groß! S. Kutta, a. a. O. S. 21).

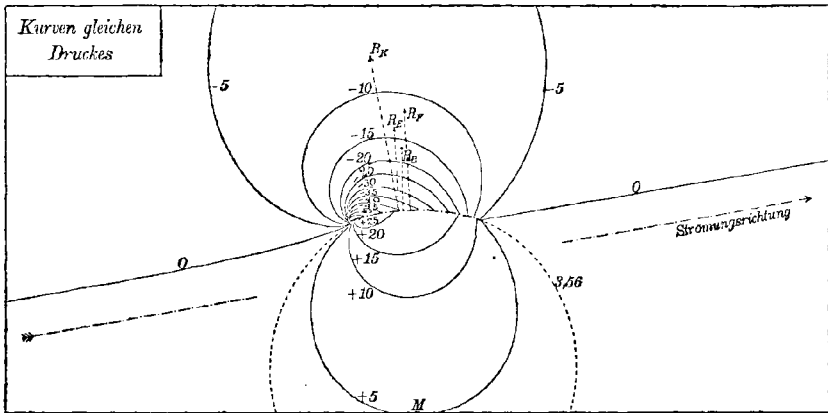
Außer an diesen beiden Stellen wurden die Geschwindigkeiten noch exakt berechnet (s. Formel auf S. 9) an 24 Punkten der Schale (darunter an der Hinterkante), so daß die Geschwindigkeiten längs der Schale mit guter Genauigkeit interpoliert werden konnten. Damit sind also auch die Aufsatzpunkte der Kurven gleichen Drucks auf der Schale recht genau bekannt.

An anderen Punkten der Ebene wurde allerdings die Geschwindigkeit wegen der großen Rechenarbeit nicht exakt gerechnet: sie wurde an der Länge der Quadratseiten abgemessen. Sie ist ja umgekehrt proportional mit der Länge der Quadratseite am betreffenden Ort, also  $v^2$

(bzw.  $v_0^2$ ) umgekehrt proportional mit dem Inhalt  $J$  (bzw.  $J_0$ ) des Quadrats. Also gilt die Formel

$$p - p_0 = 26,36 \left[ 1 - \frac{J_0}{J} \right].$$

An denjenigen Stellen (z. B. der Unterseite der Schale), an denen die durch Niveau- und Stromlinien gebildeten Figuren wesentlich von



$$v = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

Quadraten abweichen, wurde ihr Inhalt durch Ausmessen mit dem Planimeter bestimmt. Die als Größe des Inhalts erhaltene Zahl wurde immer dem Mittelpunkt des „Quadrats“ (bestimmt als Schnittpunkt der Diagonallinien) zugeteilt.

Zu unserer Figur ist zu bemerken: Die Kurven gleichen Drucks wurden von 5 zu 5 mm Wasser Über- bzw. Unterdruck gezeichnet, an der Hinterkante ergab sich noch ein Überdruck von 3,56 mm. Alle Kurven haben ihren einen Aufsatzpunkt innerhalb der kurzen Strecke zwischen Vorderkante und Spaltungspunkt (der Spaltungspunkt ist ganz in der Nähe — zeichnerisch nicht zu unterscheiden — des einen Aufsatzpunktes der Kurve für 25 mm Überdruck).

Außer den Kurven gleichen Drucks wurden in die Figur noch eingezeichnet: der Gesamtauftrieb  $R_K$  (strichpunktiert), der sich nach der Kuttaschen Theorie ergibt, sowie der resultierende Druck  $R_F$ ,  $R_E$  und  $R_B$  (gestrichelt), wie er aus experimentellen Untersuchungen von Föppl<sup>1)</sup>, Eiffel<sup>2)</sup> und Boltzmann<sup>3)</sup> gefunden wurde.

1) Mitteilungen aus der Göttinger Versuchsanstalt (in Zeitschr. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt. 1. Jahrg. S. 129 ff.).

2) Eiffel, Résistance de l'air. Paris 1910.

3) Boltzmann, „Über den Luftwiderstand gekrümmter Flächen“. Sitz.-Ber. der kais. Ak. d. Wiss. in Wien, Math.-naturw. Klasse 1910.

$R_K$  wurde berechnet nach den Formeln, die Kutta a. a. O. S. 18 ff, gibt; es ist dabei die Saugkraft, die an der mit unendlicher Geschwindigkeit umflossenen Vorderkante auftritt, mit einbegriffen. Die Richtung von  $R_K$  ist senkrecht zur Strömungsrichtung.

$R_F$  konnte der zitierten Arbeit Föppls ohne weiteres entnommen werden, da Föppl gerade eine kreisförmige Schale mit dem Pfeil  $\frac{1}{12}$  (genauer  $\frac{1}{12,1}$ ; in Föppls Bezeichnungsweise  $f = 1,65$ ) untersucht hat. Ihre Seiten hatten die Länge von  $20 \times 80$  cm.

$R_E$  ist der Zeichnung Eiffels a. a. O. S. 229, entnommen. Die Seiten der von Eiffel verwandten Fläche hatten die Länge  $15 \times 90$  cm, ihr Pfeil betrug  $\frac{1}{13,5}$ . Um auf unseren Pfeil  $\frac{1}{12}$  zu kommen, müßte das Eiffelsche Resultat vergrößert werden.<sup>1)</sup>

$R_B$  ist interpoliert aus den Resultaten, die Boltzmann a. a. O. mit zwei kreisförmig gewölbten Schalen vom Wölbungspfeil  $\frac{1}{21,4}$  bzw.  $\frac{1}{10,5}$  und den Seiten  $3 \times 12$  cm erhielt. Speziell die Interpolation des Angriffspunktes der Resultierenden kann größere Fehler ergeben haben.

Es ergaben sich für  $v = 20 \frac{\text{m}}{\text{sek.}}$  folgende Größen der  $R$ :

$$R_K = 55,9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

$$R_F = 36,1 \text{ ,,}$$

$$R_E = 29,4 \text{ ,,}$$

$$R_B = 22,8 \text{ ,,}$$

Eine besonders gute Übereinstimmung der Resultate Föppls, Eiffels und Boltzmanns mit denen Kuttas ist aus zwei Gründen gar nicht zu erwarten: 1. ist das Seitenverhältnis der Flächen in den Untersuchungen Föppls<sup>2)</sup> und Boltzmanns bloß 4 : 1, in den Eiffelschen 6 : 1 (bei manchen Kegeln ist es 10 : 1!), während es bei Kutta als unendlich angenommen ist; 2. ist die Krümmung  $\frac{1}{12}$  schon so groß

1) Mitteilungen aus der Göttinger Versuchsanstalt, Zeitschr. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt. Jahrg. I. S. 129 ff.

2) In seiner Dissertation „Windkräfte an ebenen und gewölbten Platten“, Aachen 1911, hat Föppl eine Fläche mit dem Seitenverhältnis 9 : 1 untersucht (S. 66 ff.). Wegen des verschiedenen Pfeils (Pfeil bei Föppl rund  $\frac{1}{22}$ ) können wir unsere Resultate nicht wohl damit vergleichen; man sieht jedoch aus Föppls Resultaten, daß die Annäherung an die Theorie bei wachsendem Seitenverhältnis tatsächlich immer besser wird.

und die absolute Größe der experimentell untersuchten Flächen (speziell bei Boltzmann!) so gering, daß die Wirbel, von denen Kutta absieht, bereits wesentlichen Einfluß auf den Gesamtcharakter der Strömung gewinnen müssen.

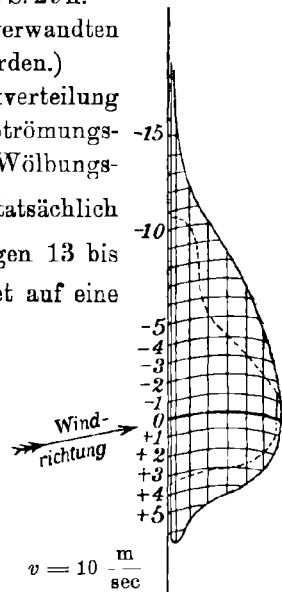
Wichtig — und für die Kuttasche Theorie günstig — ist der Sinn der Abweichungen zwischen Theorie und Experiment: Das Experiment liefert einen kleineren Wert und einen etwas weiter zurückliegenden Angriffspunkt des Gesamtwiderstands als die Theorie. Man beachte jetzt: An der Vorderkante muß (wie schon in den physikalischen Grundlagen erwähnt) ein Wirbel entstehen. Durch ihn geht 1. ein Teil des berechneten Auftriebs verloren; 2. rückt dessen Angriffspunkt etwas nach hinten. Wenn es also gelänge, diesen Wirbel an der Vorderkante noch mit in die Rechnung zu ziehen, so würde das besonders für kleine oder negative Anströmungswinkel eine weitere Annäherung der Theorie an die Praxis ergeben.

**Verteilung des Drucks längs der Ober- und Unterfläche der Schale.**

Zuletzt sei noch unsere Verteilung des Drucks auf der Ober- und Unterfläche der Schale verglichen mit den experimentellen Resultaten Eiffels.<sup>1)</sup> (Die Resultate Boltzmanns — a. a. O. S. 29 ff. — können wegen der Kleinheit der von ihm verwandten Flächen nicht zum Vergleich herangezogen werden.)

Eiffel bestimmte experimentell die Druckverteilung längs des Mittelschnitts (Schnitt parallel zur Strömungsrichtung) einer kreisförmig gewölbten Schale vom Wölbungspfeil  $\frac{1}{13,5}$  und den Seiten  $15 \times 90$  cm. Die tatsächlich verwandten Strömungsgeschwindigkeiten betragen 13 bis  $15 \frac{m}{sec.}$ , die Drucke wurden jedoch umgerechnet auf eine Geschwindigkeit von  $10 \frac{m}{sec.}$ .

Die Figur 7 ist im wesentlichen eine Kopie der Eiffelschen Figur (a. a. O. zwischen S. 238 und 239; Eiffels Resultate haben wir gestrichelt), zu der wir unsere Resultate hinzugefügt haben (ausgezogen; die Druckverteilung entspricht unserer Figur 6, ist jedoch auf  $10 \frac{m}{sec.}$  umgerechnet).



Der Luftstrom kommt von links unter einem Winkel von  $10^\circ$  gegen die Horizontale; die beigesetzten Zahlen geben die Über- bzw. Unter-

1) Eiffel, „Résistance de l'air“. Paris 1910.

drucke in mm Wasser gerechnet. Sie sind aufgetragen über dem Kreisbogen als Grundlinie.

Die an sich schon recht gute Übereinstimmung beider Resultate wurde noch verbessert durch Ausgleichung des Wölbungspfeils (wir haben ja den Pfeil  $\frac{1}{12}$ ; Eiffel  $\frac{1}{13,5}$  verwandt). Diese Ausgleichung könnte etwa mittels der experimentellen Daten von Föppl<sup>1)</sup> vorgenommen werden, der den Einfluß verschiedenen Wölbungspfeils auf den Antrieb untersucht hat — dadurch würden die Ordinaten der Eiffelschen Kurve nach oben und unten vergrößert, falls unsere Kurve unverändert bliebe.

Interessant ist es, daß sowohl nach unseren, aus der Kuttaschen Theorie folgenden, wie nach den Eiffelschen Resultaten der Hauptanteil des Auftriebs der Oberseite der Schale zufällt: Die Schale wird gleichsam in die Höhe gesaugt, weniger in die Höhe gedrückt.

---

1) Mitteilungen aus der Göttinger Modellversuchanstalt, Zeitschr. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt. Jahrg. I. S. 129 ff.

### Kleinere Mitteilungen.

---

#### Bemerkung zu dem Aufsatz von H. Blasius „Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung“.<sup>1)</sup>

H. Blasius berechnet<sup>2)</sup> eine hydrodynamische Konstante  $\alpha$  aus dem Integral der Differentialgleichung

$$\xi \cdot \frac{d^2 \xi}{d\xi^2} = - \frac{d^3 \xi}{d\xi^3}$$

für die Grenzbedingungen

$$\xi = 0, \quad \zeta = 0, \quad \frac{d\zeta}{d\xi} = 0,$$

$$\xi = \infty, \quad \frac{d\zeta}{d\xi} = 2,$$

indem er die um  $\xi = 0$  konvergente Potenzreihe

$$\zeta = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{c_n \alpha^{n+1}}{(3n+2)!} \xi^{3n+2}$$

(wo  $c_0 = 1$ ,  $c_1, c_2 \dots$  gewisse ganze Zahlen sind, die durch Rekursionsformeln gefunden werden) mit einer asymptotischen Näherung kombiniert, die  $\zeta$  für sehr große Werte von  $\xi$  darstellt.

Zum gleichen Werte  $\alpha$  kommt man, wenn man die Differentialgleichung für die Anfangsbedingungen

$$\xi = 0, \quad \zeta = 0, \quad \frac{d\zeta}{d\xi} = 0, \quad \frac{d^2 \zeta}{d\xi^2} = 1$$

integriert und den Wert berechnet, dem  $\frac{d\zeta}{d\xi}$  für  $\xi = +\infty$  zustrebt. Es ist dann

$$\alpha = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left( \frac{\frac{d^2 \zeta}{d\xi^2}}{\frac{d\zeta}{d\xi}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Die zweite Lösung geht nämlich aus der von Blasius hervor, wenn man  $\alpha = 1$  setzt. Bezeichnet man sie mit  $f(\xi)$ , so ist die von Blasius gesuchte Lösung  $\zeta = \alpha^{\frac{1}{3}} f(\alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \xi)$ , wie man aus der Reihenentwicklung erkennt. Folglich ist  $\frac{d\zeta}{d\xi} = \alpha^{\frac{2}{3}} f'(\alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \xi)$  und für  $\xi = +\infty$  daher  $2 = \alpha^{\frac{2}{3}} \lim f'(\xi)$ .

1) Aus einer von Herrn Prof. Runge gestellten Staatsexamensarbeit.

2) Diese Zeitschr. f. Math. u. Phys. 56 (1908), S. 1.

So habe ich die partikuläre Lösung nach dem Kuttaschen Verfahren<sup>1)</sup> bis  $\xi = 4,6$  berechnet, wobei ich die Intervalle  $\Delta\xi$  sämtlich gleich 0,1 wählte und mit doppelt so großen Schritten eine Kontrolle rechnete. Ich erhielt für  $\xi = 4,6$

$$\zeta = 6,048\,429, \quad \frac{d\zeta}{d\xi} = 1,655\,180, \quad \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = 0,000\,011.$$

Die fünfte Stelle kann um eine Einheit durch Fehlerhäufung getrübt sein. Die Differenz  $\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_{\xi=\infty} - \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_{\xi=4,6}$  beträgt weniger als 2 Einheiten der sechsten Dezimale. Das erhellt sofort aus

$$\zeta''_2 = \zeta''_1 e^{-\int_{\xi_1}^{\xi_2} \zeta' d\xi}, \quad \text{folglich} \quad \zeta''_2 < \zeta''_1 e^{-(\xi_2 - \xi_1)\zeta'_1}$$

und

$$\int_{\xi_1}^{\infty} \zeta'' d\xi = \zeta'_\infty - \zeta'_1 < \zeta''_1 \int_{\xi_1}^{\infty} e^{-\zeta'_1(\xi - \xi_1)} d\xi = \frac{\zeta''_1}{\zeta'_1}.$$

Es ergibt sich

$$\alpha = 1,328\,24$$

mit einem Fehler von nicht mehr als 2 Dezimalen der fünften Stelle, während Blasius  $\alpha$  zwischen 1,326 und 1,327 erhält.

Aachen.

KARL TOEPFFER.

---

1) W. Kutta, Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 46 (1901), S. 435.



## Bücherschau.

---

**H. Andoyer. Nouvelles Tables trigonométriques fondamentales.** (Logarithmes). Ouvrage publié à l'aide d'une subvention accordée par l'Université de Paris. Paris 1911. A. Hermann et Fils. Fr. 30.—.

Für die mehr als 10 stelligen Werte der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen standen bis jetzt zwei Werke zur Verfügung; es sind dies Briggs-Gellibrand, *Trigonometria britannica*, Goudae 1633 und die handschriftlichen, gegen das Ende des 18. Jahrhunderts berechneten *Tables du Cadastre*. Das erstere gibt für alte Teilung des Quadranten die 14 stelligen Werte von 36 zu 36 Sekunden, das letztere für neue Teilung die ebenfalls 14 stelligen Werte von 10 zu 10 Sekunden; bei beiden Werken hat die 14. Dézimale keinen Anspruch auf Genauigkeit.

Eine vollständige Neuberechnung von mehr als 10 stelligen Werten der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, die seit der Bearbeitung der beiden angeführten Werke nicht mehr ausgeführt worden war, liegt dem neuen Tafelwerk zugrunde. Dieses enthält insbesondere: für neue Teilung des Quadranten eine 17 stellige Tafel der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von Grad zu Grad für die Winkel von 0 bis 50 Grad; sodann für alte Teilung eine 15 stellige Tafel der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von 9 zu 9 Minuten für die Winkel von 0 bis 45 Grad; ferner — als Haupttafel — für alte Teilung eine 14 stellige Tafel der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von 10 zu 10 Sekunden für die Winkel von 0 bis 90 Grad; und endlich für die drei ersten Grade von 10 zu 10 Sekunden die bekannten Werte  $S$  und  $T$  mit 14 Dezimalen. Bei den beiden zuletzt genannten Tafeln, die sich auf 540 bzw. 18 Seiten erstrecken, sind durchweg die Differenzen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Tafelwerten angegeben. Bei den beiden zuerst angeführten auf 5 bzw. 20 Seiten untergebrachten Tafeln sind für  $\log \cos$  zur Berechnung von Zwischenwerten mit Hilfe der Taylorschen Reihe die erforderlichen Hilfsgrößen aufgenommen.

Die ganzen Berechnungen samt den Kontrollrechnungen wurden von dem Verfasser allein neben seiner gewöhnlichen Tätigkeit in nicht ganz zwei Jahren durchgeführt. Das Manuskript, auf dem die Originalrechnungen ausgeführt wurden, ist nach Aussage des Verfassers durchaus frei von Fehlern; es wird aufbewahrt in der Bibliothek de l'Université de Paris, à la Sorbonne. Das Lesen der Korrekturen wurde in der Hauptsache vom Verfasser allein besorgt.

Straßburg i/E.

P. WERKMEISTER.

---

## Neue Bücher.

### Analysis.

1. MARKOFF, A. A., Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nach der 2. Aufl. des russ. Werkes übers. v. Heinr. Liebmann. Leipzig 1912, Teubner.  
*M* 12.—; geb. in Leinw. *M* 13.—.
2. MEISSNER, OTTO, Wahrscheinlichkeits-Rechnung nebst Anwendungen. (Mathemat. Bibliothek, 4.) Leipzig und Berlin 1912, Teubner. *M* —.80.  
S. auch 36.

### Astronomie, Geodäsie.

3. HOFFMANN, BERNHARD, Mathematische Himmelskunde u. niedere Geodäsie an den höheren Schulen. (Abh. üb. den mathem. Unterr. in Deutschland, Bd. III, Heft 4.) Leipzig und Berlin 1912, Teubner.
4. KLINKERFUES, W., Theoretische Astronomie. Neubearbeitung v. H. Buchholz. 3. verb. u. verm. Ausg. Braunschweig 1912, Vieweg & Sohn. Geb. *M* 50.—.
5. SCHEINER, J., Populäre Astrophysik. 2., durch einige Nachträge ergänzte Aufl. Leipzig 1912, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 14.—.

### Darstellende Geometrie.

6. HAUCK, GUIDO, Vorlesungen über darstellende Geometrie, unter besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Technik, hrsg. v. Alfred Hauck. In 2 Bänden. I. Bd. Leipzig und Berlin 1912, Teubner.  
*M* 10.—; geb. in Leinwand *M* 12.—.  
S. auch 25, 27.

### Geschichte.

7. HEIBERG, J. L., Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum. (Aus Natur u. Geisteswelt, 370. Bändchen.) Leipzig 1912, Teubner.  
*M* 1.—; geb. in Leinw. *M* 1.25.
8. JORISSEN, W. P., und REICHER, L. TH., J. H. van't Hoff's Amsterdamer Periode 1877—1895. Helder 1912, de Boer jr. *M* 4.70; geb. *M* 5.50.
9. STURM, A., Geschichte der Mathematik bis zum Ausgange des 18. Jahrhunderts. (Sammlung Göschen Nr. 226.) 2., verb. Aufl. Leipzig 1911, Göschen.

### Mechanik.

10. HAMEL, GEORG, Elementare Mechanik. Ein Lehrbuch, enthaltend: eine Begründung der allgemeinen Mechanik; die Mechanik der Systeme starrer Körper; die synthetischen und die Elemente der analytischen Methoden, sowie eine Einführung in die Prinzipien der Mechanik deformierbarer Systeme. Leipzig und Berlin 1912, Teubner. *M* 16.—; geb. in Leinw. *M* 18.—.
11. MARCOLONGO, ROBERT, Theoretische Mechanik. Autorisierte deutsche Bearbeitung v. H. E. Timerding. II. Bd. Dynamik und Mechanik der deformierbaren Körper. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 10.—; geb. in Leinw. *M* 11.—.
12. MÜLLER, ALOYS, Über eine Verallgemeinerung des Begriffes der Zentrifugalkraft. Progr. Köln 1912.  
S. auch 20, 30, 31.

**Physik.**

13. ABRAHAM, M., Theorie der Elektrizität. I. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik, v. A. Föppl. 4., umgearb. Aufl., hrsg. v. M. Abraham. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 11.—.
14. AUERBACH, FELIX, Physik in graphischen Darstellungen. Leipzig und Berlin 1912, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 10.—.
15. BAKKER, GERRIT, Théorie de la couche capillaire plane des corps purs. („Scientia“ Nr. 31, 32.) Paris 1911, Gauthier-Villars. Fr. 2.—.
16. DUHEM, PIERRE, Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale. T. II. Dynamique générale. Conductibilité de la chaleur. Stabilité de l'équilibre. Paris 1911, Gauthier-Villars. Fr. 18.—.
17. GRAETZ, L., Die Elektrizität und ihre Anwendungen. 16. Aufl. Stuttgart 1912, Engelhorn Nachf. Geb. in Leinw. *M* 9.—.
18. KELVIN, LORD, Mathematical and physical papers. Vol. 6. Cambridge 1912, University Press. 10 s.
19. PLANCK, MAX, Über neuere thermodynamische Theorien (Nernstsches Wärmetheorem u. Quantenhypothese). Vortrag. Leipzig 1912, Allgemeine Verlagsges. *M* 1.60.
20. RIECKE, ED., Lehrbuch der Physik zu eigenem Studium und zum Gebrauch bei Vorlesungen. 1. Bd. Mechanik, Molekularerscheinungen und Akustik. Optik. 5., verb. u. verm. Aufl. Leipzig 1912, Veit & Co. *M* 12.—; geb. in Leinw. *M* 13.—.
21. WAETZMANN, Die Resonanztheorie des Hörens. Als Beitrag zur Lehre v. den Tonempfindungen. Braunschweig 1912, Vieweg & Sohn. *M* 5.—.
22. WARBURG, EMIL, Lehrbuch der Experimentalphysik f. Studierende. Tübingen 1912, Mohr. *M* 7.—; geb. *M* 8.20.
23. WEGNER v. DALLWITZ, Wärmelehre in Theorie und Anwendung. (In 3 Bdn.) 1. Bd. Wärmetheorie u. ihre Beziehungen zur Technik u. Physik. Berlin 1912, Volckmann Nachfolg. *M* 10.—; geb. *M* 11.25.
24. WIEN, W., Über die Gesetze der Wärmestrahlung. Nobel-Vortrag. Leipzig 1912, Barth. *M* 1.—.

S. auch 7, 8, 10, 11, 12, 26, 32, 34.

**Tafeln, Modelle.**

25. Abhandlungen zur Sammlung mathematischer Modelle, hrsg. v. Hermann Wiener. 2. Heft. Reihe 31—48 der Modellsammlung v. P. Treutlein. Leipzig u. Berlin 1911, Teubner. *M* —.80.
26. KÜSTER, F. W., Logarithmische Rechentafeln f. Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner u. Physiker. 12., neu berechnete Aufl. Leipzig 1912, Veit & Co. Geb. in Leinw. *M* 2.40.
27. Verzeichnis mathematischer Modelle. Sammlungen H. Wiener u. P. Treutlein. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner.

**Verschiedenes.**

28. Berichte über den mathem. Unterricht in Österreich, veranlaßt durch die internationale mathemat. Unterrichtskommission. 10. Heft. Simony, Osk., Kobald, Engelb., Mikuta, Alfr., Reich, Karl. Der mathem. Unterricht an der Hochschule f. Bodenkultur, den montanist. Hochschulen, den Militär-Erziehungs- und Bildungs-Anstalten und am technolog. Gewerbemuseum, Wien 1911, Hölder. *M* 1.20.
29. Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die internationale Unterrichtskommission. VII. W. Lietzmann, Der Kongreß in Mailand vom 18. bis 20. September 1911. R. Schimmack, Über die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathem. Unterrichts. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 1.60.

30. CURTI, PAUL, Über Seeretention, Hochfluten u. das Problem konstanter Wasserführung. Diss. Zürich 1912, Raustein. *M* 4.—.
31. EBERHARDT, C., Theorie und Berechnung v. Motor-Luftschiffen. Berlin 1912, Krayn. *M* 10.—; geb. *M* 11.50.
32. Festschrift, Heinrich Weber zu seinem siebzigsten Geburtstag am 5. März 1912 gewidmet von Freunden und Schülern. Mit einem Bildnis von H. Weber in Heliogravüre. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 24.—.
33. FRISCHEISEN-KÖHLER, MAX, Wissenschaft und Wirklichkeit. („Wissenschaft und Hypothese“ XV) Leipzig und Berlin 1912, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 8.—.
34. KENNELLY, A. E., The application of hyperbolic functions to electrical engineering problems. London 1912, Hodder & S. 6 s.
35. LIEBTZMANN, WALTHER, Stoff u. Methode des Rechenunterrichts in Deutschland. Ein Literaturbericht. (Abb. üb. den mathem. Unterricht in Deutschland, Bd. V Heft I.) Mit einem Einführungswort v. F. Klein. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 3.—.
36. VOIGT, ANDREAS, Mathematische Theorie des Tarifwesens. Grundlagen der Kritik der Abgaben- u. Preis-Tarife, m. besonderer Berücksichtigung des preußischen Einkommensteuertarifs. Jena 1912, Fischer. *M* 2 —.

### Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- Abhandlungen zur Sammlung mathematischer Modelle, s. N. B. („Neue Bücher“), Nr. 25.
- ABRAHAM-FÖPPL, Theorie der Elektrizität, I, s. N. B. 13.
- AUERBACH, F., Physik in graphischen Darstellungen, s. N. B. 14.
- BACHMANN, P., Über Gauß' zahlentheoretische Arbeiten. (Materialien f. eine wissenschaftliche Biographie von Gauß, gesammelt v. F. Klein u. M. Brendel, Heft I. Aus den Göttinger Nachrichten, mathem.-physikal. Kl., 1911.) Leipzig 1911, Teubner. *M* 1.—.
- BARKER, G., Théorie de la couche capillaire, s. N. B. 15.
- BENDT, FRANZ, Grundzüge der Trigonometrie. 4., erweiterte Aufl. Leipzig 1911, Weber. Geb. in Leinw. *M* 2.—.
- BERGHOLZ, OTTO ANDREAS, Die Lösung des Fermatschen Problems  $x^n + y^n = z^n$  und ihr Unicum, die hierbei in algebraischen Gleichungen in infinitum zulässige Vertauschung von Faktoren und in der Summandenreihe stehender Potenz-Grundzahlen. Dessau 1912, Art'l. *M* 1.—.
- Berichte u. Mitteilungen, veranlaßt durch die internationale mathem. Unterrichtskommission, s. N. B. 29.
- BÜCKLEN, O. TH., Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. (Sammlung Göschen, 256. Bändchen.) 2., verb. Aufl. Leipzig 1912, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.80.
- CZUBER, EMANUEL, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. I. Bd. 3., sorgfältig durchgesehene Aufl. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 12.—.
- DUHEM, P., Traité d'énergétique, s. N. B. 16.
- Festschrift Heinrich Weber, s. N. B. 32.
- FRISCHEISEN-KÖHLER, M., Wissenschaft u. Wirklichkeit, s. N. B. 33.

- GSCHIEDLEN, EM., An der Werkbank. Anleitung zur Handfertigkeit mit besonderer Berücksichtigung der Herstellung physikalischer Apparate. Für mittlere und reife Schüler. (Bastian Schmidts naturwissenschaftl. Schülerbibliothek 13.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 4.—.
- HAMEL, G., Elementare Mechanik, s. N. B. 10.
- HAUCK, G., Vorlesungen üb. darstellende Geometrie, I, s. N. B. 6.
- HÄUSSLER, A., Wegweiser für die Gravitationsforschung. Berlin 1912, Friedländer & Sohn. *M* 2.—.
- HEIBERG, J. L., Naturwissenschaften u. Mathematik im klassischen Altertum, s. N. B. 7.
- HOFFMANN, B., Mathematische Himmelskunde u. niedere Geodäsie an den höheren Schulen, s. N. B. 3.
- LIETZMANN, WALTER, Stoff u. Methode des Rechenunterrichts in Deutschland. s. N. B. 35.
- LINNICH, MAX, Lehr- u. Übungsbuch f. den Unterricht in der Geometrie. Für die Oberrealschul- u. Gymnasial-Kurse der Studienanstalten. II. Tl. Lehrbuch der Klasse III. Leipzig 1912, Freytag. Geb. *M* 2.50.
- LÖRCHER, OTTO, Methodisches Lehr- und Übungsbuch der Algebra. Stuttgart und Berlin 1912, Grub. Geb. *M* 2.—.
- Kurzgefaßter methodischer Lehrgang der ebenen Geometrie nebst Grundzügen der Raumgeometrie. Stuttgart u. Berlin 1912, Grub. Geb. *M* 1.30.
- LUDWIG, RICH., Ergänzungen zu meiner Broschüre Wie entsteht Ebbe und Flut? Leipzig 1912, Wittrin.
- MANGOLDT, HANS VON, Einführung in die höhere Mathematik für Studierende u. zum Selbststudium, II. Bd.: Differentialrechnung. Leipzig 1912, Hirzel. *M* 14.40; geb. *M* 15.40.
- MARCOLONGO-TIMERDING, Theoretische Mechanik, II, s. N. B. 11.
- MARKOFF-LIFEMANN, Wahrscheinlichkeitsrechnung, s. N. B. 1.
- MAYER, J. E., Feuerungsanlagen u. Dampfkessel. (Aus Natur u. Geisteswelt, 348. Bändchen.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 1.—; geb. in Leinw. *M* 1.25.
- MEISSNER, O., Wahrscheinlichkeitsrechnung, s. N. B. 2.
- MEYER, GUSTAV W., Maschinen u. Apparate der Starkstromtechnik, ihre Wirkungsweise u. Konstruktion. Ein Lehrbuch f. den Gebrauch an technischen Lehranstalten, zum Selbststudium u. für den in der Praxis stehenden Ingenieur. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 15.—.
- MÜLLER, A., Über eine Verallgemeinerung des Begriffes der Zentrifugalkraft, s. N. B. 12.
- ROSE, MAX, Einleitung in die Funktionentheorie (Theorie der komplexen Zahlenreihen). (Sammlung Göschen, 581. Bändchen.) Leipzig 1912, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.80.
- STURM, A., Geschichte der Mathematik bis zum Ausgang des 18. Jahrhunderts, s. N. B. 9.
- UMFAHRER, JOS., Beweis der Richtigkeit des „Großen Fermatschen Satzes“. München, Eher. *M* —.50.
- Verzeichnis mathematischer Modelle, s. N. B. 27.
- VOIGT, A., Mathematische Theorie des Tarifwesens, s. N. B. 36.
- WAETZMANN, Die Resonanztheorie des Hörens, s. N. B. 21.

## Abhandlungsregister 1909—1910.

Von ERNST WÖLFFING in Stuttgart.

(Fortsetzung von S. 336.)

- 1333.** *O. D. Kellogg.* Double distributions and the Dirichlet problem. T. S. M. Am. 9. 51.
- 1334.** *P. Koebe.* Fonction potentielle et fonction analytique ayant un domaine d'existence donné à un nombre quelconque de feuilletts. C. R. 148. 1446.
- 1335.** *L. Koenigsberger.* Der Greensche Satz für erweiterte Potentiale. S. A. B. 1907. 804.
- 1336.** *A. Korn.* Über die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie. S. M. B. 1910. 38.
- 1337.** *A. Korn.* Ein neuer allgemeiner Beweis für die Gültigkeit der Neumann-Robinschen Methoden des arithmetischen Mittels. N. A. H. 88. 149.
- 1338.** *W. Kozłowski.* Existiert die potentielle Energie? (poln.) Z. P. T. W. 45. 340; 359; 377; 435. — *S. Czopowski.* 399; 435.
- 1339.** *G. Lauricella.* Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna. R. A. L. R. 20. A. 99.
- 1340.** *T. Levi-Civita.* Sulla espressione asintotica dei potenziali ritardati. V. I. M. C. 4. C. 89.
- 1341.** *P. Lévy.* Sur les valeurs de la fonction de Green dans le voisinage du contour. B. D. (2) 34. 186.
- 1342.** *L. Lichtenstein.* Über einige Eigenschaften der Potentialfunktionen. S. M. B. 1909. 125.
- 1343.** *H. Liebmann.* Über die von C. Neumann betrachtete Ovalfläche, insbesondere über das log. Potential derselben auf äußere Punkte. B. G. L. 59. 378. — *C. Neumann.* 60. 53.
- 1344.** *J. McMahon.* On the use of the  $n$ -fold Riemann spaces in applied mathematics. S. M. Am. (2) 15. 486.
- 1345.** *D. N. Mallik.* A potential problem. P. M. (6) 15. 63.
- 1346.** *C. Neumann.* Zur Theorie des logarithmischen Potentials. B. G. L. 61. 156.
- 1347.** *C. Neumann.* Über das logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche. A. G. L. 31. 83; B. G. L. 59. 248; 60. 240.
- 1348.** *G. Nordström.* Über die Ableitung des Satzes vom retardierten Potential. B. F. F. 51. No. 6.
- 1349.** *G. Pavanini.* Sul potenziale newtoniano di una circonferenza omogenea. R. A. L. R. (5) 19. B. 394.
- 1350.** *H. Petrini.* Les dérivées premières et secondes du potentiel. A. M. 31. 127; 297.
- 1351.** *H. Petrini.* Les dérivées premières et secondes du potentiel logarithmique. J. M. (6) 5. 127.
- 1352.** *G. Prasad.* On a nonanalytical potential function B. C. M. S. 1. 39.
- 1353.** *L. F. Richardson.* On a fresh potential method. R. B. A. 77. 457.
- 1354.** *F. H. Sufford.* The potential equation and  $p$ -function curves. A. Gr. (3) 13. 223.
- 1355.** *E. Schmidt.* Bemerkung zur Potentialtheorie. M. A. 68. 107.
- 1356.** *F. Schottky.* Über diejenigen Potentialfunktionen, deren erste Ableitungen durch Gleichungen verbunden sind. S. A. B. 1909. 1152.
- 1357.** *K. F. Slotte.* Über die molekulare Anziehung und das innere Potential. B. F. F. 52. No. 5.
- 1358.** *W. D. A. Westfall.* Existence of the generalized Green's function. A. of M. (2) 10. 177.
- Siehe auch 288; 974; 1145; 1153; 1366; 1385.

## Attraktion.

- 1359.** *J. G. Leatham.* On Gauss' theorem concerning the surface integral of normal force in the theory of attractions. P. L. M. S. (2) 8. 200.
- 1360.** *T. Levi-Civita.* Sull' attrazione newtoniana di un tubo sottile. R. A. L. R. (5) 17. B. 413; 535.

1361. *T. Levi-Civita*. Sull'attrazione esercitata da una linea materiale in punti prossimi alla linea stessa. R.A.L.R. (5) 17. B. 3.

1362. *G. Meslin*. Sur l'orientation d'un ellipsoïde anisotrope dans un champ uniforme C.R. 146. 1305.

1363. *V. Nabile*. Sulla integrazione delle equazioni del movimento relativo di 2 corpi che si attraggono secondo una legge espressa da una certa particolare funzione della distanza. G.B. 46. 313.

1364. *H. Petrini*. La force exercée par une couche Newtonienne en un point de la couche. A.M.A.F. 5. No. 24.

1365. *P. Pizzetti*. Corpi equivalenti rispetto alla attrazione newtoniana esterna. R.A.L.R. 18. A. 211.

1366. *A. Viterbi*. Sui valori della funzione potenziale dell'attrazione di una linea materiale in punti prossimi alla linea stessa. R.I.L. (2) 42. 913.

1367. *N. R. Wilson*. A certain type of isoperimetric problem, in particular, the solid of maximum attraction. P.T.R.S.C. (3) 1. 39.

Siehe auch 1357; 1392.

### Gravitation.

1368. *C. V. Burton*. A modified theory of gravitation. P.M. (6) 17. 71. P.P.S.L. 21. 395.

1369. *C. V. Burton*. Note on a gravitational problem. P.M. (6) 19. 91; P.P.S.L. 22. 67.

1370. *F. J. B. Cordeiro*. Gravitation. P.A. 13. 8.

1371. *Dieterici*. Gravitationsversuch. S.V.K. 14. 404.

1372. *O. Ely*. Newton's law and the cause of gravitation J.F.I. 168. 121.

1373. *T. Erismann*. Zur Frage nach der Abhängigkeit der Gravitationskraft vom Zwischenmedium. V.N.Z. 53. 157.

1374. *F. L. Griffin*. On the law of gravitation in the binary systems. A.J.M. 31. 62.

1375. *A. Korn*. Über die Theorie der universellen Schwingungen mit Anwendungen auf die Theorie der Gravitation und der intramolekularen Kräfte. V.I.M.C. 4. C. 81.

1376. *Maurizot, Fouché, C. E. Guillaume*. Sur la gravitation universelle. B.S.A.F. 21. 310.

1377. *C. Morris*. Gravitation. J.F.I. 167. 219.

1378. *F. Purser*. On the ether stress of gravitation. R.B.A. 78. 613.

1379. *J. Sahulka*. Über die bisherigen Versuche, die Gravitation aus dem Stöße der Ätherteilchen zu erklären. S.V.N.W. 49. 331.

1380. *H. Seliger*. Über die Anwendung der Naturgesetze auf das Universum. S.A.M. 39. No. 4.

1381. *J. J. Thomson*. On the electric theory of gravitation. P.C.P.S. 15. 65.

1382. *V. Weiß*. Natürliche Molekularphysik und die Ursache der Gravitation. J.N.G.H. 58—59. 67.

1383. *H. Wilde*. On the moving force of terrestrial and celestial bodies in relation to the attraction of gravitation. S.P.M. 53. No. 13.

Siehe auch 895; 908.

### Hydrostatik.

1384. *H. Bateman*. Some geometrical theorems occurring in hydrostatics. M.M. 37. 119.

1385. *R. Hargreaves*. A pressure-integral as kinetic potential. P.M. (6) 16. 436.

1386. *G. Morera*. Sulla teoria dell'ellissoïde fluido in equilibrio di Jacobi. N.C.P. (5) 16. 122.

1387. *H. Teege*. Hydrostatischer Versuch. Z.P. 22. 176.

### Gleichgewicht von Körpern in Flüssigkeiten.

1388. *C. W. Adams*. Stability of cube floating in liquid. M.G.S. 4. 388.

1389. *W. Heymann*. 2 Aufgaben über schwimmende Kugelausschnitte. Z.H. 42. 16.

Siehe auch 2190; 2194; 2203; 2213; 2214.

### Hydrodynamik.

1390. *F. Ahlborn*. Hydrodynamische Experimentaluntersuchungen. P.Z. 11. 201.

1391. *P. Alibrandi*. Sulle equazioni idrodinamiche di Newton. N.L.M. 26. 229.

1392. *P. Alibrandi*. Sull'influenza delle attrazioni molecolari nei fatti idrodinamici. A.S.I.A. 24. 1.

1393. *E. Almansi*. Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo fisso. R.A.L.R. (5) 18. B. 587; 19. A. 56; 116.

1394. *H. Blasius*. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z.S. 56. 1.

1395. *H. Blasius*. Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik. Z.S. 58. 90.
1396. *T. Boggio*. Dimostrazione assoluta delle equazioni classiche dell'idrodinamica. A.A.T. 45. 241.
1397. *M. Brillouin*. Sur la résistance des fluides. L.A.P. 1909. 77.
1398. *U. Cisotti*. Sull'impiego delle funzioni ellittiche in una quistione idrodinamica. A.I.V. 67. 293.
1399. *U. Cisotti*. Sopra le correnti liquide spontanee R.A.L.R. (5) 19. A. 10; 81.
1400. *U. Cisotti*. Noti di un liquido che lasciano inalterata la distribuzione locale delle pressioni. R.A.L.R. (5) 19. A. 373.
1401. *U. Crudeli*. Nuovo limite superiore delle velocità angolari dei fluidi omogenei rotanti uniformemente limitati da figura di equilibrio. R.A.L.R. (5) 19. A. 666.
1402. *V.W. Ekman*. On the change from steady to turbulent motion in liquids. A.M.A.F. 6. No. 12.
1403. *W.M. Fadden Orr*. The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. P.R.I.A. 27. 69.
1404. *v. Fragstein*. Über Wasserbewegungen. Z.G.W.W. 6. 89.
1405. *J. Gehrke*. Nogle bemærkninger om bevaegelser i uhomogene vaedsker. T.M. 19. B. 49.
1406. *G. Gianfranceschi*. Sui campi idrodinamici del Bjerknæs. N.C.P. (5) 15. 429.
1407. *F. Gilman*. Theory of floating tubes. A. of M. (2) 11. 1.
1408. *A. B. van Hamel*. De rechte horizontale waterlijn als lijn van minimum weerstand. D.I.G. 1909. 439.
1409. *R. Hargreaves*. Integral form and their connexion with physical equations. T.C.P.S. 21. 107.
1410. *T. H. Havelock*. On the instantaneous propagation of disturbance in a dispersive medium. P.M. (6) 19. 160.
1411. *Hofmann*. Zur Berechnung der Geschwindigkeit des fließenden Wassers. W.K. 2. 246.
1412. *A. Jarolínek*. Über den Widerstand der Flüssigkeiten (tschech.). S.G. B. 1908. No. 11.
1413. *A. Korn*. Sur les mouvements stationnaires d'un liquide doué au frottement. C.R. 151. 50.
1414. *R. Ladenburg*. Über den Einfluß der Reibung auf die Schwingungen einer mit Flüssigkeit gefüllten Kugel. A.P.L. (4) 27. 157.
1415. *H. Lamb and G. Cook*. A hydrodynamical illustration of the theory of the transmission of aerial and electrical waves by a grating. P.M. (6) 20. 303.
1416. *R. Löwy*. Flüssigkeitsströmungen mit un stetigen Druckverhältnissen. S.A.W. 119. 799.
1417. *P. Milrandi*. Sull'influenza delle attrazioni molecolari nei fatti idrodinamici. A.S.I.A. 24. 1.
1418. *F. E. Nipher*. On pressure measurements in a fluid stream. T.S. L. 16. 17.
1419. *C. W. Oseen*. One några olikheter i hydrodynamiken. A.M.A.F. 4. No. 8.
1420. *C. W. Oseen*. Note über die Berechnung der durch eine Kugel hervorgerufenen stationären Bewegung einer reibenden Flüssigkeit. A.M.A.F. 6. No. 3.
1421. *C. W. Oseen*. Zur Hydrodynamik der Kugel. A.M.A.F. 6. No. 4.
1422. *F. P. Pidduck*. On the propagation of a disturbance in a fluid under gravity. P.R.S.L. 83. 347.
1423. *C. Popovici*. Sur les mouvements permanents d'un liquide. B.S.S.B. 19. 37.
1424. *C. Popovici*. Sur les points d'équilibre d'un fluide en mouvement. C.R. 147. 176.
1425. *H. J. Priestley*. On the oscillation of superposed fluids. P.C.P.S. 15. 297.
1426. *R. Reiger*. Über die Ausbreitung scherender Deformationen in Flüssigkeiten. S.T.M.E. 40. 160; A.P.L. (4) 31. 51.
1427. *R. Reiger und P. Lampe*. Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorption scherender Deformationen in Olivenöl und Glycerin. S.P.M.E. 40. 167.
1428. *J. W. Sandström*. Über die Bewegung der Flüssigkeiten. A.H. 37. 242.
1429. *H. S. I. Smal*. The measurement of the flow of streams and artesian pores. J.N.S.W. 37. B. 179.
1430. *A. Sommerfeld*. Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen. V.I.M. C. 4 C. 116.
1431. *W. Steklov*. Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale dont les parties s'attirent suivant la loi de Newton. A.E. N. (3) 25. 469; 26. 275.
1432. *H. Villat*. Sur le théorème de Lagrange en hydrodynamique. N.A. (4) 10. 282.



1433. *E. M. Wedderburn*. Dr. O. Peterssons observations on deep water oscillations. P.R.S.E. 29. 607.

1434. *F. B. Wilson*. Note on statistical mechanics. S.M.Am. (2) 15. 107.

1435. *H. C. Wolff*. The continuous plane motion of a liquid bounded by two right lines. A. of M. (2) 9. 69.

1436. *S. Zaremba*. Sur le calcul numérique des fonctions demandées dans le problème de Dirichlet et le problème hydrodynamique. B.I.C. 1909 A. 125.

Siehe auch 288; 609; 610; 1152; 1154.

### Wellen.

1437. *J. T. Barkelew*. The status of the wave motor. P.T.E. 30. 676.

1438. *H. Bateman*. The determination of solutions of the equation of wave motion involving an arbitrary function of 3 variables which satisfies a partial differential equation. T.C.P.S. 21. 757.

1439. *J. Boussinesq*. Sur une importante simplification de la théorie des ondes que produisent à la surface d'un liquide l'émergence d'un solide ou l'impulsion d'un coup de vent. A.E.N. (3) 27. 9.

1440. *J. Boussinesq*. Sur la manière dont le potentiel des vitesses dans le problème des ondes par émergence dépend de l'état initial. C.R. 150. 491.

1441. *J. Boussinesq*. Intégration des ondes d'émergence. C.R. 150. 577.

1442. *J. Boussinesq*. Propagation verticale aux grandes profondeurs du mouvement des ondes par émergence dans les cas d'un canal ou d'un bassin horizontalement indéfinis. C.R. 150. 655.

1443. *G. H. Bryan*. Wave motion and Bessel's functions. N. 80. 309.

1444. *H. S. Carslaw*. The scattering of waves by a cone. P.M. (6) 20. 690.

1445. *P. Duhem*. Sur la propagation des ondes de choc au sein des fluides. Z.P.C. 69. 169.

1446. *G. Green*. On group-velocity and on the propagation of waves in a dispersive medium. P.A.S.E. 29. 445.

1447. *J. Hadamard*. Sur les ondes liquides. C.R. 150. 609; 772.

1448. *W. J. Harrison*. The decay of waves in a canal. P.M. (6) 18. 483.

1449. *W. J. Harrison*. The decay of surface waves produced by a superposed layer of viscous fluid. P.R.S.L. 82. 477.

1450. *W. J. Harrison*. The influence of viscosity and capillarity on waves of finite amplitude. P.L.M.S. (2) 7. 107.

1451. *T. H. Havelock*. The propagation of groups of waves in dispersive media with application to waves on water produced by a travelling disturbance. P.R.S.L. 80. 398.

1452. *K. Honda, T. Terada, Y. Yoshida et D. Isitani*. Les ondulations secondaires des marées océaniques. A.S.G. (4) 27. 151.

1453. *R. A. Houstoun*. On the damping of long waves in a rectangular trough. P.M. (6) 17. 154; 19. 205

1454. *P. Meutznier*. Demonstrationen zur Wellenlehre. Z.P. 23. 174.

1455. *Lord Rayleigh*. On the instantaneous propagation of disturbance in a dispersive medium, exemplified by waves on water deep and shallow. P.M. (6) 18. 1.

1456. *Lord Rayleigh*. On the resistance due to obliquely moving waves and its dependence upon the particular form of the forepart of a ship. P.M. (6) 18. 414.

1457. *R. Reiger*. Über Scherungswellen in koagulierten Gelatinelösungen. S.P.M.E. 41. 117.

1458. *E. Vessiot*. Essai sur la propagation par ondes. A.E.N. (3) 26. 405. Siehe auch 584; 631; 983; 1060; 1061; 1415; 1535; 1577; 1587; 2204; 2205; 2506.

### Bewegung von Flüssigkeiten in Kanälen.

1459. *A. Bendiczen*. Undersögelse af paa virkningerne af bunden i cirkulaere beholdere. I.K. 18. 333.

1460. *H. Blasius*. Laminare Strömung in Kanälen wechselnder Breite. Z.S. 58. 225.

1461. *U. Cisotti*. Sopra la derivazione dei canali. Z.S. 59. 137.

1462. *K. A. Esipov*. Bewegung einer erwärmten Flüssigkeit in Röhren. (russ.). B.S.N.M. 13. Nr. 2.

1463. *A. H. Gibson*. On the steady flow of an incompressible viscous fluid through a circular tube with uniformly converging boundaries. P.M. (6) 18. 35.

1464. *L. J. Hewes and J. W. Roe*. Solution of Kutter's formula. M.S.P. 99. 429.

1465. *L. J. Hewes and J. W. Roe*. A graphic solution of Kutters formula. T. A.I.M.E. 29. 453.

1466. *L. Hopf*. Turbulenz bei einem Flusse. A.P.L. (4) 32. 777.

1467. *R. A. Houstoun*. The transverse oscillations of a canal of circular section. P.M. (6) 17. 325.

1468. *H. Merczyng.* Sur le mouvement des liquides à grande vitesse par des conduites très-larges. B.I.C. 1907. 431.

1469. *R. E. Neale.* Flow of water in flumes or launders. P.E.L. 39. 555.

1470. *Schoder.* Curve resistance in water pipes. P.A.C.E. 34. 416; 1036.

1471. *W. Schulz.* Berechnung der Ausflußgeschwindigkeit und der Ausflußmenge gerader und gekrümmter zylindrischer Rohrleitungen. Z.W.W.B. 1910. 97; 129.

1472. *B. Weinberg.* Die wirbellose Strömung von Flüssen und Kanälen. P.Z. 11. 346.

Siehe auch 1448.

#### Ausfluß von Flüssigkeiten.

1473. *P. Alibrandi.* Sull' efflusso a battente di un liquido viscoso. A.S.I.A. 24. 25.

1474. *J. Boussinesq.* Théorie de l'écoulement sur un déversoir vertical en mince paroi et sans construction latérale. Cas de la nappe ondulée et son raccordement au cas de la nappe plongeante. C.R. 146. 607; 667.

1475. *U. Cissotti.* Esempio di efflusso da un recipiente a sezione non rettilinea. R.C.M.P. 26. 378.

1476. *U. Cissotti.* Sull' impiego di funzioni ellittiche in una quistione idrodinamica. A.I.V. 67. 293.

1477. *C. Cloarec.* Variations de la durée d'écoulement d'un liquide à travers d'un tube capillaire dans le voisinage de la surface d'un bain du même liquide. T.S.U.R. 6. 32.

1478. *Pfarr.* Die sogenannte Reaktion der ausströmenden Flüssigkeiten. Z.S. 56. 272.

1479. *E. B. Wilson.* A curious mechanical paradox. M.M.F. 17. 132.

Siehe auch 1471.

#### Gleichgewicht rotierender Flüssigkeiten.

1480. *P. Appell.* Équation fonctionnelle pour l'équilibre d'une masse liquide en rotation sous l'attraction newtonienne. R.C.M.P. 30. 82.

1481. *U. Crudeleli.* Ultime ricerche nella teoria delle figure di equilibrio di un corpo fluido omogeneo ed incompressibile dotato da un moto rotatorio. G.B. 47. 109.

1482. *U. Crudeleli.* Velocità angolare di un fluido omogeneo ed incompressibile rotante limitato da figura di equilibrio. G.B. 47. 374.

1483. *U. Crudeleli.* Sulle figure d'equilibrio derivate dalle elissoidiche di un corpo fluido omogeneo ed incompressibile dotato di moto rotatorio uniforme. N.C.P. (5) 16. 271.

1484. *U. Crudeleli.* Contributo alla teoria delle figure d'equilibrio di un corpo fluido incompressibile dotato di moto rotatorio. N.C.P. (5) 17. 168.

1485. *G. H. Darwin.* Further consideration of the stability of the pear-shaped figure of a rotating mass of liquid. P.R.S.L. 80. A. 166; T.R.S.L. 208. A. 1.

1486. *G. H. Darwin.* Further note on Maclaurin's spheroid. T.S.M. Am. 9. 34.

1487. *R. Kaibara.* On the Jacobian ellipsoid. J.T. (2) 4. 98.

1488. *E. Lampe.* Über die Gleichgewichtsgestalt der Oberfläche einer Flüssigkeit in einer Hohlkugel, die gleichmäßig um ihre vertikalen Durchmesser rotiert. V.D.P.G. 12. 405.

1489. *A. Liapounoff.* Sur une classe de figures d'équilibre d'un liquide en rotation. A.E.N. (3) 26. 473.

Siehe auch 1401.

#### Wirbel.

1490. *E. Belot.* Essai de cosmogonie tourbillonnaire. A.F. 1908. 55.

1491. *F. Belot.* Les tourbillons et le dualisme en cosmogonie. R.G.O. 21. 642.

1492. *A. Gray.* Notes on hydrodynamics, chiefly on vortex motion. T.R.S. E. 47. 1.

1493. *F. Klein.* Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten. Z.S. 58. 259.

1494. *E. Laura.* Sul moto parallelo ad uno piano di un fluido in cui vi sono  $n$  vortici elementari. A.A.T. 37. 469.

1495. *Lord Rayleigh.* Vortices in oscillating liquid. P.R.S.L. 80. 259.

1496. *L. S. da Rios.* Sul moto dei fili vorticosi di forma qualunque. R.C.M.P. 29. 354.

1497. *V. L. Rosenberg.* Einfache Versuche über Luftwirbel. Z.P. 22. 169.

1498. *W. Stekloff.* Sur la théorie des tourbillons. A.T. (2) 10. 271.

1499. *N. E. Zukovsky.* Über die adjungierten Wirbel. (russ.). B.S.N.M. 13. 212.

#### Reibung der Flüssigkeiten.

1500. *E. Bose* u. *D. Rauert.* Experimentalbeitrag zur Kenntnis der turbulenten Flüssigkeitsreibung. P.Z. 10. 406.

1501. *M. Brillouin*. Sur la résistance des fluides. C.R. 147. 918.

1502. *O. Faust* und *G. Tammann*. Über Verschiebungselastizität und ihren Zusammenhang mit der inneren Reibung. Z.P.C. 71. 51.

1503. *C. Hagemann*. Reibungskoeffizienten für Wasser. E.P.R. 1909. 123.

1504. *R. Ladenburg*. Über die Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. J.S.G. 86. 56.

1505. *R. Lorenz* u. *H. T. Kalmus*. Die Bestimmung der inneren Reibung einiger geschmolzener Salze. Z.P.C. 59. 244.

1506. *R. M. Neilson*. Friction in water pipes. M.W.M. 47. 116.

1507. *C. W. Oseen*. Zur Theorie der Bewegung einer reibenden Flüssigkeit. A.M.A.F. 4. Nr. 9.

1508. *C. W. Oseen*. Ein Satz über die Singularitäten, welche in der Bewegung einer reibenden und unzusammendrückbaren Flüssigkeit auftreten. A.M.A.F. 6. Nr. 16.

1509. *C. W. Oseen*. Über die Bedeutung der Integralgleichungen in der Theorie der Bewegung einer reibenden unzusammendrückbaren Flüssigkeit. A.M.A.F. 6. Nr. 23.

1510. *L. Pissarjevsky* u. *E. Karp*. Die Beziehung zwischen der Diffusions-Konstante, der inneren Reibung und dem elektrischen Leitvermögen. Z.P.C. 63. 257.

1511. *H. W. Woudstra*. Über die innere Reibung kolloidaler Silberlösungen. Z.P.C. 63. 619.

#### Viskosität.

1512. *E. N. da C. Andrade*. Über das zähe Fließen in Metallen und verwandte Erscheinungen. P.Z. 11. 709.

1513. *E. C. Bingham*. Viscosity and fluidity. A.C.J. 40. 277; 43. 287.

1514. *E. C. Bingham*. Viskosität und Fluidität; algebraische Analyse der Viskositätsdaten. Z.P.C. 66. 238.

1515. *E. C. Bingham* und *J. P. Harrison*. Viskosität und Fluidität. Z.P.C. 66. 1.

1516. *T. Boggio*. Sul moto stazionario lento di un liquido viscoso. R.A.L.R. (5) 19. A. 75.

1517. *E. Bose*. Über die Viskositätsanomalien anisotroper Flüssigkeiten im hydraulischen Strömungszustande. P.Z. 10. 32.

1518. *M. Brillouin*. La viscosité des liquides en fonction de la température. A.C.P. (8) 18. 197.

1519. *E. Clerici*. Sulla viscosità dei liquidi per la separazione meccanica dei minerali. R.A.L.R. 20. A. 45.

1520. *A. E. Dunstan* und *F. B. Thole*. The relation between viscosity and chemical constitution. J.C.S. 95. 1556.

1521. *P. Dutoit* et *H. Duperthuis*. Viscosités et conductibilités limites. J.C.P. 6. 726.

1522. *C. F. Fawsitt*. The viscosity of solutions. J.C.S. 93. 1004.

1523. *C. E. Fawsitt*. Viscosity determinations at high temperatures. J.C.S. 93. 1299.

1524. *F. H. Getmann*. Viscosité et volume ionique. J.C.P. 6. 577

1525. *C. E. Guye* et *S. Mintz*. Étude sur la viscosité de quelques métaux en fonction de la température. A.S.G. (4) 26. 136.

1526. *W. J. Harrison*. On the stability of superposed streams of viscous liquids. P.M. (6) 20. 493.

1527. *W. J. Harrison*. The influence of viscosity on the oscillations of superposed fluids. P.L.M.S. (2) 6. 896.

1528. *R. Hosking*. The viscosity of water. J.N.S.W. 42. 34; 43. 34.

1529. *H. C. Jones* usw. Conductivity and viscosity in mixed solvents. P.C.I. W. 80.

1530. *Mabery* und *Mathews*. Viscosity and lubrication. J.A.C.S. 30. 992.

1531. *W. W. Taylor* ad *T. W. Moore*. On the negative viscosity of aqueous solutions. P.R.S.E. 28. 461.

1532. *Tsakalotos*. Viscosité des mélanges binaires des composés organiques. B.S.C.P. 4. 234.

1533. *F. A. Willers*. Über die Viskositätsanomalien von Emulsionen im turbulenten Strömungszustande. P.Z. 10. 244.

1534. *L. Zoretti*. Sur un problème de viscosité. A.U.G. 22. 205.

Siehe auch 1403; 1449; 1450; 1463; 1473; 1537; 1567; 1568; 2454.

#### Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten.

1535. *F. Ahlborn*. Über die photographische Analyse des Wasserwiderstandes an Platten und Schiffskörpern und über die Vorgänge in den Wellen. V.N.V.H. (3) 16 A. 84.

1536. *E. Almansi*. Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo rigido. R.A.L.R. (5) 19. A. 244; 437.

1537. *A. B. Basset*. On the descent of a sphere in a viscous liquid. Q.J. 41. 369.

1538. *T. Boggio*. Sul moto stazionario lento di una sfera in un liquido viscoso. R.C.M.P. 80. 65.

1539. *P. Brandsen*. Over de stabile evenwichtastanden van drijvende parallellepipeda. C.A.A. 18. 307.

1540. *U. Cisotti*. Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito. A. L.V. 69. 427.

1541. *E. Cunningham*. On the velocity of steady fall of a spherical particle through fluid medium. P.R.S.L. 83. 357.

1542. *M. W. J. Fry*. The centre of gravity and the principal axes of any surface of equal pressure in a heterogeneous liquid covering a heterogeneous solid composed of nearly spherical shells of equal density, when the whole mass is rotating with a small angular velocity in rotative equilibrium under its own attraction. P.R.I.A. 27. 139.

1543. *J. Gehrke*. Nogle Bemaerkninger om bevaegelser i uhomogene vaedsker. T.M. 19. B. 49.

1544. *R. Hargreaves*. The dynamical system of 2 spheres moving in an infinite liquid. Q.J. 41. 308.

1545. *D. J. Korteweg*. De evenwichtastanden van balken die met hunne lengte-as evenwijdig aan de vloeistofoppervlakte drijven. H.N.C. 1907 247.

1546. *L. Labouette*. Il principio della conservazione dell'energia applicato allo studio del movimento verticale dei corpi immersi nei fluidi con particolare riguardo agli aerostati ed ai battelli sottomarini. B.S.A.I. 1909. 1; 45; 85; 129.

1547. *O. Olsson*. Om rörelse i vätskor hos en grupp fasta kroppar med 3 symmetriplan. A.M.A.F. 5. No. 4.

1548. *C. W. Oseen*. Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik. A.M.A.F. 6. No. 29.

1549. *F. Purser*. The theory of solids moving in an incompressible fluid. R.B.A. 78. 629.

1550. *T. E. Staunton*. On the resistance of thin plates and models in a current of water. C.R.N.P.L. 6. 49.

1551. *T. Terada*. On the vibration of a bar floating on a liquid surface. J.T. (2) 3. 103.

Siehe auch 1393; 1420; 1439; 1444.

#### Aerostatik.

1552. *M. Knudsen*. Eine Revision der Gleichgewichtsbedingung der Gase. A.P.L. (4) 31. 205.

1553. *J. Lecornu*. Sur l'équilibre d'un système de plans soumis à l'action du vent. S.M. 37. 11.

#### Aerodynamik.

1554. *E. Bourguet*. Valeur de la force portante d'une surface plane soumise à l'action de l'air en mouvement. L.T.A. 4. 107.

1555. *Castagneris*. L'aérodynamique et l'aviation. B.S.A. I. 5. 61.

1556. *D. Chandler*. The flow of gas through pipes. J.G.L. 109. 357.

1557. *M. Colliez*. Calcul d'une hélice. R.A.P. 4. 48.

1558. *F. S. Cripps*. The flow of gas through pipes. J.G.L. 109. 495.

1559. *R. Desmons*. Les hélices à axes orthogonaux. A.N.P. 43. 261.

1560. *A. Dosch*. Messung von Gasgeschwindigkeiten und Gasmengen. S. E.D. 30. 117.

1561. *S. Drzewiecki*. Application pratique des formules déduites pour le calcul des hélices aériennes. L.A.P. 1909. 465; 513.

1562. *C. Eberhardt*. Die Abnahme der Zugkraft der Luftschrauben mit wachsender Marschgeschwindigkeit. M. W.B. 1909. 748.

1563. *C. Eberhardt*. Methode für die graphische Berechnung einer Luftschraube und ihre spezielle Verwendung für die Festigkeitsberechnung der Schraube. M.W.B. 1910. 273; 324; 401.

1564. *V. Fedotov*. Der Mittelpunkt der Luft auf eine geneigte Ebene (russ.). M.S.T.R. 1907. 237.

1565. *S. Finsterwalder*. Die Aerodynamik als Grundlage der Luftschiffahrt. Z.F.T.B. 1. 6; 30; V.S.N.G. 92. 69.

1566. *A. Fischer*. Der Windgroßbetrieb im Zeitalter der Luftbeherrschung. D.M.S.H. 2. 222.

1567. *W. J. Fisher*. The coefficients of gas viscosity. II.P.R. 28. 73.

1568. *W. J. Fisher*. The temperature coefficients of gas viscosity. P.R. 29. 147.

1569. *de Fonvielle W.* Ein aerodynamisches Institut. W.L.Z. 1909. 282.

1570. *A. Freund*. Zur Frage der Gestaltung von Flügelflächen. F.S. 1909. 324.

1571. *A. H. Gibson*. An investigation of the resistance to the flow of air through a pipe. P.M. (6) 17. 689.

1572. *A. H. Gibson*. On the local intensification of draught produced in a horizontal air current by the presence of an inclined rod. S.P.M. 53. No. 5.

1573. *Jarkowski*. L'incidence optimale dans les hélices aériennes. L.A.P. 1909. 491.

1574. *L. Karville*. Hélices métalliques et hélices en bois. L.A.P. 43. 270.

1575. *M. Knudsen*. Die Molekularströmung der Gase durch Öffnungen und die Effusion. A.P.L. (4) 28. 999.

1576. *A. Koepsel*. Über eine neue Methode zur fortlaufenden Analyse von Gasgemischen auf elektrischem Wege mit Anwendung auf die Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit von Gasen. V.D.P.G. 10. 814.

1577. *H. Lamb*. On the theory of waves propagated vertically in the atmosphere. P.L.M.S. (2) 7. 122.

1578. *L. Levent*. Geschwindigkeit und Antrieb. I.A.M. 1909. 1135.

1579. *E. Mathias*. La physique des courants d'air d'après M. Shaw. J.P. (4) 7. 463.

1580. *R. Nimführ*. Um welchen Punkt dreht sich ein Flugkörper? I.A.M. 1909. 420.

1581. *C. Playhoust*. Une hélice couple. Co. 58. 683.

1582. *A. Radzig*. Note sur la détermination de la pression critique d'écoulement de vapeur surchauffée. A.I.P.P. 1910. No. 3. 453.

1583. *A. Rateau*. Méthode d'expériences pour recherches aérodynamiques. L.A.P. 1909. 266.

1584. *A. Rateau*. Recherches aérodynamiques. L.A.P. 1909. 338.

1585. *C. Rerich*. Über die möglichen Vervollkommnungen an der regulierenden Wirkung des Windmühlenflügels (russ.). B.I.P.P. 7. 479.

1586. *D. Riabouchinski*. Spectres aérodynamiques. B.S.A.I. 1909. 373.

1587. *W. Schmidt*. Ein Apparat zur Aufsuchung regelmäßiger Wellen im Luftdruck. A.P.L. (4) 27. 346.

1588. *R. Schwenke*. Ein Beitrag zur praktischen Berechnung von Luftschrauben. M.W.B. 1909. 681.

1589. *A. Séé*. L'hélice à axe incliné. L.A.P. 1909. 442.

1590. *F. R. Sharpe*. The general circulation of the atmosphere. A.J.M. 32. 52.

1591. *R. Soreau*. Nouvelle formule de la pression sur le plan mince carrée. L.A.P. 1909. 315.

1592. *N. Teclu*. Über das Strömen von Gasen durch Gefäße. J.F.P.C. (2) 79. 171.

1593. *W. R. Turnbull*. The efficiency of aerial propellers. S. Am. 67. Suppl. 215.

1594. *F. A. Willers*. Über die Steighöhe von Drachen. Z.S. 57. 158.

1595. *J. Zeleny* and *L. W. Mc Keehan*. The terminal velocity of fall of small spheres in air. P.R. 30. 535.

1596. *J. Zeleny* and *L. W. Mc Keehan*. The terminal velocity of fall of small spheres in air. N. 82. 158. — *E. A. Stoney* 279.

1597. *J. Zeleny* u. *L. W. Mc Keehan*. Die Endgeschwindigkeit des Falles kleiner Kugeln in Luft. P.Z. 11. 78.

Siehe auch 1497; 1876.

#### Ausfluß von Gasen.

1598. *C. Rerich*. Die theoretische Grundlage der Hypothese von St. Venant und Wantzel (russ.). B.I.P.P. 2. 353.

Siehe auch 1575; 1582.

#### Flugbewegung.

1599. *H. André*. Les moteurs d'aviation. L.F.A. 14. 5; 26; 41; 52.

1600. *A. Aubert*. Le secret de l'oiseau. R.A.P. 4. 69. — *E. Rauber*. 67.

1601. *A. Berget*. Sur une formule de vitesse applicable à la propulsion dans l'air. L.R.A. 4. 14.

1602. *Boyer*. The soaring flight of birds attained mechanically. S.Am. 99. 63.

1603. *L. Breguet*. Note sur la qualité du planement des oiseaux. L.A.P. 1909. 538.

1604. *H. Challey*. Mechanical flight. N. 79. 413.

1605. *C. Constant*. Les battements de l'aile suivant une courbe en forme de huit. A.N.P. 43. 102.

1606. *J. Cousin*. Vol à voile. A. 1910. 22.

1607. *Deprez*. Le vol plané des oiseaux réalisé mécaniquement. Co. 57. B. 6.

1608. *Deprez*. Soaring flight. S.Am. 66. Suppl. 165.

1609. *R. Desmons*. Du vol plane. A. N.P. 1910. 4.

1610. *R. Desmons*. Comment volent les oiseaux. L.L.A. 1909. 4.

1611. *F. Ernauld*. Du rôle de la flexibilité des ailes dans le sens latéral. L.F.A. 1910. 11.

1612. *A. Ferretti*. Nuova teoria del volo degli uccelli. A.A.V.M. (2) 1. 101.

1613. *Gondillot*. Le vol à voile. L.A.P. 16. 445; 509.

1614. *Heine*. Grundlagen zur Segelfluglehre. W.L.Z. 7. 244.

1615. *Hildebrandt*. Technik der Gleitflüge. A.Z.M. 9. 45.
1616. *A. Kapteyn*. Over vogelvlucht en vliegmaschinen zwaarder dan de lucht. D.I.G. 1909. 392.
1617. *R. Kennedy*. The problems of mechanical flight. A.L. 1909. 2.
1618. *R. Kennedy*. Mechanical flight. A.L. 1909. 63.
1619. *V. Köppen*. Drachen- u. Fliegerflug. I.A.M. 1909. 1080.
1620. *C. Krcssmann*. Quelques mots sur le vol à voile. L.A.P. 1909. 5.
1621. *W. M. Kutta*. Über eine mit der Grundlage des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung. S.A.M. 1910. No. 2.
1622. *F. W. Lanchester*. Laws of flight. A.N.Y. 1909. 131.
1623. *F. W. Lanchester*. Aerial flight. M.E. 24. 619.
1624. *F. W. Lanchester*. The flight of birds. S. Am. 67. Suppl. 300; 316.
1625. *F. W. Lanchester*. Der Schwebeflug der Vögel. F.S. 1909. 103.
1626. *Le Bon*. Explication rationelle du vol ramé. L.A.P. 16. 411.
1627. *v. Liliénbach*. Ist menschlicher Segelflug möglich? I.A.M. 12. 539.
1628. *Nodoc*. La propulsion aérienne au moyen d'ailes. Co. 57. B. 620.
1629. *Odier*. Principe élémentaire du vol ramé. L.A.P. 16. 446.
1630. *P. Poirier*. L'influence des courants tangentiels. L.R.A. 4. 9.
1631. *L. Prandtl*. Einige für die Flugtechnik wichtige Beziehungen aus der Mechanik. Z.F.T.B. 1. 3; 25; 61; 73.
1632. *I. A. Ramos*. La Aviacion. R.C. L. 11. 3; 35; 72; 82; 127.
1633. *E. Raubert*. Le secret de l'oiseau. R.A.P. 4. 67.
1634. *Rémy*. Gewicht u. Tragfläche von Vögeln u. Flugmaschinen. M.W.B. 13. 104.
1635. *P. Renard*. L'aviation. R.G.O. 21. 231.
1636. *C. Richet*. Observations sur le vol des oiseaux. L.A.P. 1909. 534.
1637. *Sebald*. Stetigkeit der Flieger. A.W. 1910. 5.
1638. *H. Sellnick*. Das menschenmögliche Fliegen. L.V. 2. 179.
1639. *L. Thoweny*. Le vol ramé et les formes de l'aile. R.A. 74. 241.
1640. *Thoweny*. Principes du vol à voile. L.A.P. 1909. 123.
1641. *Thoweny*. Poids et surface alaire de l'oiseau. L.A.P. 1910. 36.
1642. *Thoweny*. Énergie et vol à voiles. L.A.N. 43. 94; 123.

1643. *L. Toft*. Effect of the wind on flight speeds. F.L. 2. 108.

1644. *H. La V. Twining*. Can a man fly with wings. A.N.N.Y. 7. 2.

1645. *Weisz*. Le vol à voile. L.A.P. 16. 494.

1646. *E. Westman* en *H. Block*. Några anmärkningar rörande fåglarnas flykt. T.T.S. 36. 20.

Siehe auch 1570; 1580; 1660; 2335; 2345; 2355; 2401; 2409; 2410; 2431; 2441.

### Luftwiderstand.

1647. *Amans*. Sur la résistance aérienne des tiges, cordages et haubans. B.M.A.M. 1911. 94.

1648. *de Béthune*. L'étude de la résistance de l'air au point de vue particulier de l'aviation. A.S.B. 33. A. 248.

1649. *A. Boltzmann*. Über den Luftwiderstand gekrümmter Flächen. A.A.W. 1910. 237; S.A.W. 119. 977.

1650. *C. Bowlet*. Sur la résistance de l'air. C.R. 150. 382.

1651. *P. Burgatti*. Sulla resistenza che provano le superficie piane mobili nell'aria. R.A.L.R. (5) 19. A. 367.

1652. *C. Constantin*. Peut-on récupérer avec une hélice le travail de pénétration d'une automobile dans l'air. V. A. 1910. 150.

1653. *C. Eberhardt*. Theorie der Luftschrauben auf Grund des v. Loessischen Luftwiderstandsgesetzes. M.W.B. 1909. 222; 245; 274; 296; 381; 417; 652.

1654. *G. Eiffel*. La résistance de l'air. A.N.P. 43. 251; 259.

1655. *V. Fedotov*. Über den Luftwiderstand gegenüber der Bewegung ebener Flächen (russ.). M.S.T.R. 1907. 43.

1656. *Goldberg*. Ermittlung des Luft- und Gesamtwiderstandes schnelllaufender Fahrzeuge. V.T.W. 1. 1000.

1657. *Hasdicke*. Die Zulässigkeit der zurzeit üblichen 2. Hauptformel für den Luftwiderstand. I.A.M. 1909. 847.

1658. *E. H. Hall*. Air resistance to falling inch spheres. P.A.Bo. 45. 379.

1659. *R. Kennedy*. Some notes on flying machines. P.E.L. 41. 391.

1660. *Macaluso*. Les oiseaux, les aeroplanes et le coefficient de la résistance de l'air. L.A.P. 16. 102. — *Tatin* 104. — *Lefort* 297. — *Rodet* 312; 366. — *Goupil* 484.

1661. *P. Meitner*. Luftwiderstandsprobleme. M.W.B. 13. 426.

1662. *B. O. Pence*. The damping of the oscillations of swinging bodies by the resistance of the air. P. A. Bo. 44. 63.

1663. *L. Prandtl*. Bemerkungen über Dimensionen und Luftwiderstandsformel. Z. F. T. B. 1. 157.

1664. *P. Renard*. La resistance de l'air et les récentes expériences de M. G. Eiffel. R. G. O. 20. 78.

1665. *T. E. Stanton*. Experiments on air resistance. N. 84. 13.

1666. *F. G. Stone*. Aeroplanes. The resistance of the air. J. R. A. 36. 129.

1667. *A. P. Thurston*. The flow of air about aeroplanes, cars and like bodies. A. N. L. 1910. 52.

1668. *H. Zickendraht*. Ein Apparat zum Studium der Luftwiderstandsgesetze. V. N. B. 93. 336.

Siehe auch 1048; 1571; 1697; 1758; 2276; 2336.

### Reibung von Gasen.

1669. *G. E. Allan*. Ein quantitativer Demonstrationsversuch über Gasreibung. P. Z. 10. 961.

1670. *Baden-Powell*. Friction of the air. S. Am. 65. Suppl. 387.

1671. *W. J. Fisher*. The molecular and the frictional flow of gases in tubes. P. R. 29. 325.

1672. *W. Gaede*. Die äußere Reibung der Gase. B. G. F. 18. 133.

1673. *J. L. Hogg*. Friction in gases at low temperatures. P. A. Bo. 45. 3.

1674. *M. Knudsen*. Das Gesetz der Molekularströmung und der inneren Reibungsströmung der Gase. A. P. L. (4) 28. 75.

1675. *K. Rappenecker*. Über die Reibungskoeffizienten von Dämpfen und ihre Abhängigkeit von der Temperatur. Z. P. C. 72. 695.

1676. *K. Schmitt*. Über die innere Reibung einiger Gase und Gasgemische bei verschiedenen Temperaturen. A. P. L. (4) 30. 393.

1677. *G. Zemplén*. Untersuchungen über die äußere Reibung der Gase. A. P. L. (4) 29. 869.

Siehe auch 2366

### Äußere Ballistik.

1678. *Affolter*. Anregung zu einer neuen Behandlungsart der äußeren Ballistik. S. Z. A. 44. 227.

1679. *K. Aichi*. Remarks on Terada and Okôchi's paper: on the motion of projectile after penetration. P. T. M. (2) 5. 197.

1680. *Bahn*. Zur Frage der Schrapnells mit Langgeschoßfüllung. A. M. M. 1909. 127.

1681. *H. Batailler*. Zone dangereuse maximum. R. A. 73. 392.

1682. *H. Bernay*. La question des projectiles. J. M. Y. 32. 241.

1683. *Bravetta*. Angaben über die Messung von Geschößgeschwindigkeiten vermittels der Impulsometer. Z. S. S. 3. 107.

1684. *v. Burgsdorff*. Wie ermittelt man die höchste Steighöhe eines Geschosses. S. U. W. 2. 179.

1685. *Charbonnier*. Balistique extérieure rationnelle. R. A. 72. 302.

1686. *C. Cranz*. Versuche über den vertikalen Schuß. S. U. W. 2. 413.

1687. *C. Cranz*. Ballistische Bemerkungen. A. M. H. 1909. 241.

1688. *C. Cranz*. Über die Berechnung steiler Flugbahnen. A. M. H. 1909. 401.

1689. *Cranz*. Relative und absolute Genauigkeit verschiedener Flugzeitmesser. Z. S. S. 3. 7.

1690. *A. Dähne*. Ein angebliches ballistisches Kuriosum. K. Z. 1909. 58.

1691. *J. B. Dillard*. Some notes on the math. principles of the Erdman compensator as applied to the Lewis depression position finder. J. U. S. A. 32. 116.

1692. *A. Ecclesius*. Über die Hauptursachen der Flintenfehlschüsse und das Zielen beim Schrotschuß. S. U. W. 3. 208.

1693. *R. G. Fernandez*. Die ballistische Kurve. J. D. A. M. 1907. 206.

1694. *Fischer*. Schießen und Treffen. K. Z. 1909. 49; 123; 164; 209.

1695. *Forbes*. Exterior ballistics. P. R. S. L. 80. 140.

1696. *G. v. Gleich*. Beitrag zur Theorie der sog. konischen Pendelung der Geschosse. Z. S. 55. 363.

1697. *G. Greenhill*. Measurement of the velocity of a projectile and the resistance on the air by means of a table of range and elevation. J. R. A. 35. 473.

1698. *L. v. Grosschmid*. Über die Substitution der Flugbahnparabel durch eine Kreislinie. M. A. G. 1909. 375.

1699. *A. Hamilton*. Bestimmung des Formwerts aus der Gestalt der Geschößspitze. A. M. H. 1909. 133.

1700. *R. K. Hejlet*. An improvised range table. J. U. S. A. 1909. 132.

1701. *J. B. Henderson*. The flight of a rifled projectile in air. P. R. S. L. 82. 314.

1702. *Heydenreich*. Neue Form der Standvorrichtung zum Messen der Gasdrücke am geschäfteten Gewehr. Z.S.S. 3. 1.

1703. *R. K. Hezlet*. Scale for the graphic calculation of deflection and angle of sight problems. J.R.A. 36. 190.

1704. *R. K. Hezlet*. The graphic representation of formulae. J.R.A. 36. 457.

1705. *J. M. Ingalls*. The minimum velocity of a projectile. J.R.A. 39. 52.

1706. *Kallock*. Effect of a cross wind on rifled projectiles. P.R.S.L. 80. 595.

1707. *M. Kralupper*. Über die obere Winkelgruppe bei Haubitzen und Mörsern. A.U.H. 1910. 476.

1708. *M. Kralupper*. Einfluß der Auftreffgeschwindigkeit auf die Wirkung der bekappten Panzergeschosse. M.A.G. 1909. 109.

1709. *F. Lauffer*. Die Tagesrelation. M.A.G.S. 1909. 271.

1710. *Madock*. Trajectories of rifled projectiles with various shapes of head. P.R.S.L. 80. 519.

1711. *O. Maretsch*. Über ballist. Untersuchungen und Apparate. S.U.W. 2. 149; 269.

1712. *F. Neesen*. Die Pendelung der Geschosse. V.D.P.G. 11. 724.

1713. *F. Neesen*. Neue photographische Wiedergaben der Geschoßbahn. V.D.P.G. 11. 441; 12. 48; P.Z. 10. 968.

1714. *F. Neesen*. Bestimmung der charakteristischen Größe der Flugbahn auf photographischem Wege. J.D.A.M. 1906. 207.

1715. *Nonn*. Bestimmung der Geschoßgeschwindigkeit und des Luftwiderstandes aus einer Tabelle für Entfernung und Erhöhung. A.M.H. 1909. 47.

1716. *A. v. Obermayer*. Aus den Vorlesungen Josef Petzvals über Ballistik. Z.S. 56. 282.

1717. *E. Oekinghaus*. Die Rotation der Langgeschosse während des Fluges. M.H. 20. 55.

1718. *E. Ouvet*. Sur l'équation différentielle du mouvement d'un projectile sphérique pesant dans l'air. C.R. 150. 1229.

1719. *J. Paugher*. Wechselbeziehung zwischen der lebendigen Kraft der Geschosse und den Verwundungen. M.A.G. 1909. 615.

1720. *P. Pizzetti*. La massima deviazione accidentale e le osservazioni del tenente Mazzuoli sui risultati dei tiri. R.A.L.R. (5) 17 B. 633.

1721. *F. Riedinger*. Über die Wirkungen moderner Projektile. V.G.W. (2) 40. 75.

1722. *Röggla*. Bestimmung der Flugbahnelemente für Haubitzen und Mörser mit Benutzung der Schießtafeln eines bekannten Geschützes. M.A.G. 1908. 224.

1723. *H. Rohne*. Schießversuche mit Krupp'schen Feldhaubitzen. A.M.H. 1910. 85.

1724. *H. Rohne*. Einige Bemerkungen über Schießen unter großer Erhöhung. A.M.H. 1909. 41.

1725. *H. Rohne*. Die Steighöhe der Schrote beim Flintenschuß. S.U.W. 2. 152.

1726. *H. Rohne*. Zur Seitenabweichung der Geschosse gezogener Geschütze. S.U.W. 2. 294.

1727. *Subudski*. Untersuchungen über die Bewegung der Langgeschosse. A.M.H. 1908. 284.

1728. *J. Schatte*. Die Verwendung des parabolischen Scheinwerfers bei der elektrischen Momentphotographie. K.Z. 1910. 103.

1729. *Schatte*. Präzisionsmessungen von Geschoßgeschwindigkeiten mit Hilfe der elektrischen Momentphotographie. K.Z. 13. 109.

1730. *J. Stauer*. Berechnung der Flugbahn mittels einer modifizierten Hyperbelgleichung. M.A.G. 1909. 575.

1731. *T. Terada* and *M. Okochi*. Some photographs of projectiles in flight. J.T. (2) 4. 398.

1732. *T. Terada* and *M. Okochi*. On the motion of projectiles after penetration. J.T. (2) 4. 404.

1733. *T. Terada* and *M. Okochi*. Über Geschoßbewegung nach Durchschlagen von Hindernissen. A.M.H. 1909. 301.

1734. *M. Wernicke*. Die Methode der Steilfeuerberechnung von A.v. Burgsdorff. A.M.H. 1910. 467.

1735. *M. Wernicke*. Versuche über Beziehungen von Auftreffgeschwindigkeit und Eindringungstiefe moderner Infanteriegeschosse. Z.S.S. 5. 201.

1736. *Wolff*. A proposed new method of measuring the resistance of projectiles. J.R.A. 35. 37.

1737. *N. N.* Kalibergröße und Treffwahrscheinlichkeit. K.Z. 11. 288.

Siehe auch 30; 37; 264; 561; 1916; 2635.

#### Innere Ballistik.

1738. *Bahn*. Beeinflußt die Größe des Kalibers die innerballistische Leistung und die Verwertung der Handfeuerwaffe. D.W.Z. 14. 129.



1739. *E. Bollé*. Über die Fortschritte der Theorie in der inneren Ballistik, insbesondere in den Arbeiten franz. Ballistiker. Z.S.S. 4. 101; 128; 269; 310.

1740. *Charbonnier*. Balistique intérieure. R.A. 72. 156.

1741. *C. Cranz* und *R. Rothe*. Temperatur- und Wärmemessungen am Infanteriegewehr M. Z. S.S. 3.

1742. *P. A. Helwich*. Mechanische Zeitzündler. A.M.H. 1909. 94.

1743. *G. Loiseau*. Sur la théorie des explosifs et leurs propriétés générales. M.S.B. (6) 4. 19.

1744. *O. Maretsch*. Bodengasdruckmesser. S.U.W. 2. 558.

1745. *O. Maretsch*. Gasdruckmessungen bei Handfeuerwaffen. T.R.B. 1909. 449.

1746. *U. Müller*. Über den gegenwärtigen Stand einiger ballistischer Fragen. V.N.K. 22. A. 1.

1747. *E. Neumann*. Explosionstemperatur und Explosionsflamme. S.W.M. 5. 51.

1748. *Preuß*. Zur Formänderung der Bleigeschosse beim Schuß. S.U.W. 3. 185.

1749. *N. N.* Progressi nella balistica interna. R.M.R. 41. 610.

1750. *N. N.* Das Explosionsvolumen. S.W.M. 5. 99.

Siehe auch 1702.

#### Physiologische Mechanik.

1751. *E. Müller*. Über den Bau der Knochen. N.Z. 4.

#### Technik.

1752. *J. Luiggi*. Rapports entre les mathématiques et l'art de l'ingénieur. V.I.M.C. 4. C. 334.

Siehe auch 259.

#### Balken.

1753. *G. E. Barrett*. Deflection of beam uniformly loaded for part of its length. M.N.Y. 16. 446.

1754. *G. Colonnetti*. Sulla trattazione grafica della trave continua. A.A.T. 45. 183.

1755. *W. J. Doak*. Reinforced concrete — the strength of beams. A.A.A. S. 12. 645.

1756. *F. Engesser*. Über die Kraftspannungen von Eisenbetonbalken. A.B. B. 1910. 67.

1757. *Ernst*. Reinforcement for shear in reinforced concrete beams. E.B.R. 58. 224.

1758. *Fabre*. Poutres armées à faible résistance à l'air. L.A.P. 16. 22.

1759. *L. Friedländer*. Die wirtschaftlichste Querschnittsabmessung von Eisenbetonplatten und Plattenbalken. A.B.B. 1910. 25.

1760. *G. Funke*. Versuche am Plattenbalken. A.B.B. 1909. 487.

1761. *J. C. Gammon*. Design of rectangular beams in reinforced concrete. C.C.E.L. 5. 502.

1762. *G. Higgins*. Trussed beams and similarly imperfectly braced structures. A.A.A.S. 12. 627.

1763. *Jacob*. Calculation of reinforced concrete beams. E.B.R. 57. 280.

1764. *Jensen*. Diagrams for the use in designing reinforced concrete T-beams. E.B.R. 58. 318.

1765. *H. Lamb*. On the flexure of a narrow beam. V.I.M.C. 4. C. 12.

1766. *N. Mitinsky*. Berechnung der Spannungen und Widerstandsbedingungen von Doppel-T-brückenbalken. (russ.). B.A.I.V.C. 1906. 110.

1767. *R. Müller*. Neue Versuche an Eisenbetonbalken über die Lage und das Wandern der Nulllinie sowie das Verhalten der Querschnitte. T.I.Z. 32. 1492.

1768. *C. Parvopasser*. Delle esperienze del prof. Bach sopra le travi infesse in cemento armato. A.S.I.A. 24. 53.

1769. *Ramisch*. Beitrag zur Berechnung von Plattenbalken aus Eisenbeton. B.Z.H. 1909. 267.

1770. *Ramisch*. Angenäherte Querschnittsbestimmung von Plattenbalken. B.G.W.Z. 40. 901.

1771. *M. Ritter*. Über den eingespannten Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment. A.B.B. 1909. 171.

1772. *Robinson*. Formulae for the strength of reinforced-concrete beams. M.P.C.E. 173. 222.

1773. *F. Smeraldi*. Alcune costruzioni grafiche relative alle travi rettilinee perfettamente incastrate agli estremi. A.I.V. 69. 637.

1774. *S. Timoschenko*. Über die Stabilität der flachen Form der Biegungsebene eines Doppel-T-balkens unter dem Einfluß von Kräften in der Ebene der größten Festigkeit. (russ.). B.I.P.P. 4. 151; 5. 3; 263.

1775. *T. Villarcal*. Deformación de las vigas horizontales que trabajan á la flexión. R.C.L. 12. 53; 89; 101; 147; 159; 251; 13; 9.

1776. *A. van der Vliet*. Biegung gepreßter und gespannter Balken mit eingeklemmten Enden. (russ.). B.I.P.P. 1. 3; 257.

1777. *Vondas*. Étude rationnelle des poutres en béton armé à grande portée. A.T.P.B. 65. 261.

1778. *K. Wieghardt*. Über Spannungsverteilungen in Balken aus Eisenbeton. Z. S. 56. 119.

1779. *N. N. Winkelförmiges Balkenelement* aus Eisenbeton. S.B.H. 1909. 326

Siehe auch 401; 805; 1164; 1174; 1180; 1181; 1207; 1222; 1306; 1311; 1858; 2223.

### Stäbe.

1780. *J. v. Gerstenbrandt*. Zur Bestimmung der Stabspannungen für den zusammengesetzten Polonceaubinder. R. T. W. 1910. 89.

1781. *H. Keefer*. Eine Aufgabe aus der Elastizitätslehre. M. B. (2) 13. 10.

1782. *F. Kötter*. Über die Spannungen in einem ursprünglich geraden, durch Einzelkräfte in stark gekrümmter Gleichgewichtslage gehaltenen Stabe. S.A.B. 1910. 895.

1783. *M. Lieb*. Beitrag zur Knicksicherheit gegliederter Stäbe. D.T.Z. 1909. 506.

1784. *Müller-Breslau*. Über exzentrisch gedrückte gegliederte Stäbe. S.A. B. 1910. 166.

1785. *E. L. Nikolaj*. Die Aufgabe von Lagrange über die Gestalt der Säule. (russ.). A.I.P.P. 1907. 255.

1786. *S. Timošenko*. Über die Längsfaltung in einem elastischen Mittel (russ.). A.I.P.P. 1907. 145.

1787. *Wodziński*. Zur Frage der Berechnung von Vergitterungen an gedrückten zusammengesetzten Stäben. R. L.Z. 1909. 1.

Siehe auch 657; 790; 807; 1030; 1033—35; 1206; 1209; 1218; 1318; 1551; 1816.

### Träger.

1788. *W. L. André*. Beitrag zur Berechnung genieteter Träger. D.F.T. 1909. 197.

1789. *A. L. Crathorne*. An expression for the bending moment at any support of a continuous girder for any number of equal spans. S. (2) 31. 675.

1790. *Foale*. Heavy reinforced concrete girder. E.B.R. 58. 708.

1791. *A. Francke*. Der Kreisscheibenträger. Z.S. 56. 258.

1792. *A. Francke*. Der hyperbolische Kreisbogenträger. Z.S. 59. 113.

1793. *A. Herndl*. Studien über einen Eisenbetonträger. H.B.M. 2. 303.

1794. *Hněčkoroký*. Über den Dobnerschen Fischbauchträger. M.A.G. 1908. 470.

1795. *M. Joachimson*. Design of a plate girder. M.N.Y. 16. 607.

1796. *A. Kherndl*. Beiträge zur graphischen Theorie der Gelenkträger mit statisch unbestimmten Auflagerdrücken. B.M.N. 21. 60.

1797. *H. Marcus*. Beitrag zur Theorie der Vierendeelschen Träger. A.B.B. 1910. 208; 240.

1798. *C. H. Lander*. Stiffeners for plate girders. E.R.L. 1909. 388.

1799. *L. F. Nikolaj*. Zur Frage der Bestimmung der Spannungen in horizontalen Verbindungen der Brückenträger. (russ.). J.M.V.C. 1906. Nr 3. 3.

1800. *Ohnesorge*. Gespernte Holzträger. O.B.Z. 7. 37.

1801. *Pratley*. Plate girder design. E.B.R. 58. 308.

1802. *Ramisch*. Bestimmung der totalen Längeveränderung einer Faser bei einem auf Biegung beanspruchten Träger. E.P.R. 25. 61.

1803. *F. Schrader*. Berechnung der Träger und der Säule zur Einrichtung eines Ladens für ein vorhandenes Gebäude. H.B.M. 2. 261.

1804. *W. L.* Beitrag zur Berechnung genieteter Träger. D.F.T. 1909. 169.

1805. *N. N.* The calculation of continuous bowstring girders and its application to a reinforced concrete viaduct. C.C.E.L. 5. 248.

Siehe auch 792; 1284; 1290; 1815.

### Bogenträger.

1806. *F. Brandler*. Temperaturspannungen des durch eine elastische Mittelstütze armierten Bogenträgers bei fester Einspannung. R.T.W. 1910. 43.

1807. *M. Ritter*. Beiträge zur Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogenträger ohne Scheitelgelenk. F.G.E. 11.

1808. *Woller*. Weiteres über die Anwendung des Bogengitterträgers. B.L. 1909. 557.

Siehe auch 1792.

### Platten.

Siehe 1162; 1163; 1168; 1261; 1291; 1301; 1535; 1550; 1759.

### Säulen.

1809. *M. O. Withey*. Tests of plain and reinforced concrete columns. E.B.R. 60. 41.

Siehe auch 806; 1183; 1277; 1289; 1785; 1803.

**Fachwerk.**

1810. *Z. Bažant*. Neue Formen statisch bestimmter durchgehender Fachwerke. B.J.P. 11. 270.

1811. *S. Belsezky*. Theorie der Hängewerke. (russ.). B.J.I.P. 11. 693; 12. 513.

1812. *A. Diem*. Die Berechnung statisch unbestimmter Konstruktionen. M. S.T.H. 7. 4; 45; 70; 77.

1813. *F. Pfeiffer*. Zur Statik ebener Fachwerke. Z.S. 58. 262.

1814. *H. Reißner*. Über Fachwerke mit zyklischer Symmetrie. A.Gr. (3) 13. 317.

1815. *P. Voznesenskij*. Graphische Methode zur Bestimmung der Spannungen in den Teilen der Fachwerks-träger mit diagonalen und krummlinigen Gürteln. (russ.). J.M.V.C. 1906. 135.

1816. *Wodzinski*. Berechnung von Vergitterungen angedrückten zusammengesetzten Stäben. R.I.Z. 34. 1.

Siehe auch 1230.

**Bogen.**

1817. *H. Adams*. The stability of arches. S.M.C.E. 35. 238.

1818. *G. Albenga*. Sul calcolo analitico degli archi elastici. A.A.T. 44. 584.

1819. *Ball*. Lines of thrust in masonry arches. T.B.L. 94. 686.

1820. *K. Federhofer*. Zur Festigkeit radial belasteter Kreisbogen. S.A.W. 118. 1101.

1821. *C. Guidi*. Contributo alla teoria degli archi elastici. A.A.T. 43. 809.

1822. *M. A. Howe*. Experimental verification of arch formulas. R.A.G.N. Y. 1909. 695.

1823. *C. W. Hudson*. Computation of stresses in open-webbed arches without hinges. T.A.S.C.E. 65. 145.

1824. *Lindau*. The semicircular masonry arch. P.A.S.C.E. 34. 327.

1825. *Lyle*. Working method for masonry arch design. E.B.R. 57. 588.

1826. *B. A. Smith*. Arches. Chains. A.A.A.S. 9. 621.

Siehe auch 1269.

**Gewölbe.**

1827. *G. Fano*. A proposito dell'apparecchio elicoidale per volte oblique. R.I.L. (2) 43. 177.

1828. *Ferrario*. Esame critico delle formole in uso per il calcolo delle spalle o piedritti alle volte circolari. Pol. M. 36. 17.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 60. Band.

1829. *Fölzel*. Berechnung des Scheingewölbes über dem Kirchenschiffe und dem quadratischen Raum. Z.T.B. 1910. 29.

1830. *K. W. Mautner*. Eisenbeton-, Kuppel- und Wölbkonstruktionen. A.B. B. 1909. 257.

1831. *Palen*. Beziehungen zwischen den Pollagen von Gewölbstützlinien. Z.T.B. 1909. 110.

1832. *K. Ströder*. Statische Berechnung einer Stindecke ohne Eiseneinlage. O.B.Z. 7. 57.

Siehe auch 1298.

**Dächer.**

1833. *Daude*. Neuerungen im Dachbau. D.B.H. 1909. 345.

1834. *M. Milanović*. Über Membranen gleichen Widerstands. (kroat.). T.A.A. 175. 140.

1835. *E. Wagner*. Berechnung statisch unbestimmter Rahmendächer auf elementarem Wege. A.B.B. 1909. 460; 495.

1836. *N. N.* Die Berechnung einer Dachkonstruktion. Z.B.I. 1909. 279. Siehe auch 782; 788; 803; 1235; 1293.

**Erddruck.**

1837. *S. Cunevazzi*. Considerazioni sulla spinta delle terre. M.I.B. (6) 4. 87; 6. 81.

1838. *Klasmer*. Theorie des Erddrucks. J.S.G. 87. 1.

1839. *F. Kötter*. Über den Druck von Sand gegen Öffnungsverschluß im horizontalen Boden kastenförmiger Gefäße. S.A.B. 1909. 493.

1840. *H. M. Martin, O. Lodge, K. Pearson*. The stresses in masonry dams. N. 77. 269; 303; 320; 366; 392.

1841. *Müller* usw. Formula for calculating flashboards for dams. E.B.R. 58. 208.

1842. *A. Rösler*. Zur Frage des Erddrucks auf Widerlager. Z.T.B. 1910. 47.

1843. *M. Tricaud*. Étude sur la poussée des terres. R.G.M. 24. 93; 201.

1844. *N. N.* Der Erddruck auf geneigte Flächen. S.D.B.H. 1910. 26.

**Erdbau.**

1845. *Brodie*. Masonry dam formulas. S.M.Q. 29. 241.

1846. *Davis*. Comparative costs of earthwork. E.B.R. 57. 628.

1847. *Hill*. Stresses in masonry dams. M.P.I.C.E. 172. 134; 143.

1848. *F. M. Hoadley*. The construction of concrete dams. C.M.N. Y. 36. 553.

1912. Heft 4.

27

1849. *F. H. Hummel*. The principal stresses and planes in a masonry dam. M. P. I. C. E. 177. 294.

1850. *Wilson and Gore*. Stresses in dams. M. P. I. C. E. 172. 107; 143.

1851. *N. N.* Masonry dams. T. B. L. 94. 85.

#### Tunnelbau.

1852. *W. H. Booth*. Tunnel construction. R. E. 1909. 120.

1853. *F. Sartiaux*. Submarine tunnels. R. N. L. 93. 1118.

#### Straßenbau.

1854. *Wernecke*. Straßen der Zukunft. Z. T. S. 25. 741; 760.

#### Brückenbau.

1855. *E. P. Bailey*. Reinforced concrete bridges. M. J. E. 29. 52.

1856. *C. Gayler*. Bridge designing. J. A. E. S. 1909. 107.

1857. *C. Gribble*. Live loads and working stresses in railway bridges. C. M. N. Y. 1909. 525.

1858. *Kupfer*. Eisenbetonbalkenbrücke. Z. T. B. 6. 56.

1859. *D. B. Luten*. Permanent way on bridges. E. R. J. 1909. 549.

1860. *H. Ryon*. A reinforced concrete sewer bridge. E. B. R. 61. 355.

1861. *Schiller*. Über einige neuere Arten von Brückenbanten. Z. T. S. 1909. 13; 34.

1862. *W. Schulz*. Konstruktion und Berechnung einer eisernen Schiffsladefähre für Fußgänger. E. P. R. 1909. 343.

1863. *W. Schulz*. Beitrag zur Berechnung der Fahrbahn und Fußwege eiserner Landstraßenbrücken. Z. E. M. 1910. 13.

1864. *M. Sieger*. Ponts en poutrelles enrobées. R. G. C. F. 1909. 3.

1865. *W. Skinner*. The erection of girder bridges. E. B. R. 59. 494; 517; 585.

1866. *E. Thérel*. Vérification d'un tablier en béton de ciment armé. A. F. 1907. 87.

1867. *H. Ziesemer*. Graphische Ermittlung der Durchbiegung einer Blechträgerbrücke im Eisenbahnverkehr. Z. T. B. 6. 65.

1868. *N. N.* Calculation of stresses in suspension bridges. E. B. R. 61. 50.

Siehe auch 1312; 1799; 1805.

#### Baustatik.

1869. *H. Adams*. The stability of walls. S. M. C. E. 1909. 56; T. B. L. 96. 82.

1870. *S. Bylander*. Constructional steelwork. J. S. A. 3. 248.

1871. *S. Cancvazzi*. La matematica e l'arte del costruttore in Italia. V. I. M. C. 4. C. 339.

1872. *F. Claxton-Fidler*. On the application of mathematics to the theory of construction. V. I. M. 4. C. 356.

1873. *Day*. Economic section for retaining walls. E. B. R. 58. 56.

1874. *A. Dieter*. Die Bestimmung der Abmessungen eines Fabrikschornsteins. D. B. H. 1909. 127.

1875. *Dubini*. Calcolo statico del camino di una caldaia a vapore. Pol. M. 56. 395.

1876. *Francesio*. Studio sui muri soggetti alla pressione del vento. R. A. G. 25. 368.

1877. *Galley*. Über Gaskamine. Z. V. G. W. 27. 15.

1878. *A. Leon*. Baugesetze in Natur und Technik. S. V. N. W. 49. 423.

1879. *R. Mallén*. Nuova teoria statica de las construcciones. M. y R. M. 26. 195.

1880. *A. Morley*. Laterally loaded struts and tie-rods. P. M. (6) 15. 711.

1881. *N. Peters*. Statik der Schornsteine. T. I. Z. 33. 209.

1882. *Ramisch*. Beitrag zur Berechnung von Futtermauern. B. G. W. Z. 40. 643.

Siehe auch 200; 808; 1147; 1166; 1167; 1259; 1275; 1297.

#### Baumaterialien.

1883. *H. Burchartz*. The testing of building materials on abrasion by the sand blast apparatus. J. N. S. W. 40. A. 45.

1884. *W. H. Warren*. Reinforced concrete. III. J. N. S. W. 39. A. 39.

#### Geometrische Architektur.

1885. *G. S. Aitken*. Geometry as applied to greek architecture. J. R. I. B. A. 17. 593.

#### Fahrzeuge.

1886. *L. Hargrave*. The onewheeled car. J. N. S. W. 41. A. 88.

1887. *C. Lallemand*. Les rumpes critiques en automobile. A. F. 1907. 63.

Siehe auch 1656; 1667.

#### Automobile.

1888. *A. Petot*. Relations dynamiques entre la voiture et la route. L. T. M. 2. 327.

Siehe auch 711; 750; 761; 1007; 1652; 1887; 2036; 2046; 2494.

**Eisenbahnwesen.**

1889. *M. de Boulogne*. Tableaux et graphiques pour le calcul de résistance des tabliers métalliques sous rails à une seule travée. R. G. C. F. 32. B. 333.

1890. *E. Burok*. Die Zentrifugal- und Fliehkraft. W. S. D. B. 1909. 442.

1891. *S. C. Carpenter*. Graphic presentation of train resistance formulas. R. A. G. N. Y. 1909. 944.

1892. *Diez*. Die Länge der nach der kubischen Parabel gestalteten Übergangsbögen. Z. V. D. E. V. 1909. 1159.

1893. *Diets*. Überhöhung und Übergangsbögen. Z. V. D. E. V. 50. 745.

1894. *H. T. Eddy*. The mechanical principles of Brennan's mono-rail car. J. F. I. 169. 467.

1895. *Frank*. Neues Meßverfahren für Gleiskrümmungen. Z. V. D. E. V. 1909. 707.

1896. *F. Frintorp*. Über Absteckung von Gleiskurven. W. S. D. B. 1909. 497.

1897. *A. P. Gest*. The adjustal tonnage formula for determining train loads. R. A. G. 47. 756.

1898. *Holm*. Beseitigung des unruhigen Laufes der Fahrzeuge in Gleiskrümmungen. W. S. D. B. 1909. 179.

1899. *R. B. Holt*. The design of tramway rails and rail wear. T. R. W. 27. 9.

1900. *J. Kristensen*. Om beregning af sporskifter. I. K. 18. 301.

1901. *Parodi*. Les méthodes de calcul des projets de traction. B. S. I. E. 1909. 151.

1902. *Petersen*. Berechnung und Absteckung von Gegenkrümmungen. W. S. D. B. 1909. 441.

1903. *N. P. Petrov*. Spannungen in den Schienen, welche von Biegung in der Vertikalebene herrühren und Wahrscheinlichkeit der experimentellen Bestimmung dieser Spannung. (russ.) M. S. T. R. 1906. Nr. 7—8. 525.

1904. *H. Raschka*. Theoretische Untersuchung und Vergleich einiger Gleisformen. R. T. W. 1909. 455.

1905. *E. C. Schmidt*. Freight train resistance, its relations to average car weight. J. A. S. M. E. 32. 679.

1906. *R. Schrader*. Rechnerische Behandlung einzulegender Graden an Gradienten-Knickpunkten. W. S. D. B. 27. 23.

1907. *G. Stephany* u. *H. Hof*. Gleisberechnung für Straßenbahnen mit zahlreichen aus der Praxis entnommenen Beispielen. Z. T. S. 26. 404; 528.

1908. *G. Stephany*. Gleichungen zur Berechnung der Vergrößerung des Gleisabstandes in der Zwischengeraden einer S-kurve. Z. T. S. 1909. 56.

1909. *A. Stucki*. Train resistance. R. A. G. N. Y. 1909. 982.

1910. *J. de Traz*. Sur certaines conditions du problème de la traction. B. S. I. E. 1909. 299.

Siehe auch 842.

**Lokomotiven.**

1911. *G. Greenough*. Development of the Mallet locomotive. J. F. I. 169. 202.

1912. *M. Panetti*. Ciclo teorico a ciclo pratico delle locomotive compound. A. A. T. 37. 677.

1913. *A. Petot*. Sur le mode d'action des roues motrices. L. T. M. 2. 368.

1914. *R. Sanzin*. Abgekürztes Verfahren zur Berechnung von Lokomotivleistungen. D. L. 1909. 121.

1915. *R. Sanzin*. Der Wirkungsgrad der Dampflokomotive. V. T. W. 1909. 743.

**Bremsen.**

1916. *F. Röggl*. Grundzüge der Theorie und Berechnung pneumatischer Geschützbremsen. M. A. G. 1909. 89.

1917. *N. N.* A fan brake. H. A. 23. 331.

Siehe auch 1182; 2486.

**Verbindungskurven.**

1918. *M. Collot*. Note sur le raccordement des courbes et des alignements dans les voies de chemins de fer. R. G. C. F. 1909. 307.

Siehe auch 1892; 1893.

**Maschinenlehre.**

1919. *A. Bach* u. *A. Leon*. Über rotierende Scheiben gleichen Fliehkraftwiderstands. S. A. W. 116. 1353.

1920. *J. H. Beattie*. The Hopper Jacket engine. G. E. C. 1910. 104.

1921. *F. Carlès*. La puissance des moteurs et leur longévité. V. A. 10. 189.

1922. *D. W. Gawn*. A new two-cycle engine Mo. 17. 861.

1923. *H. Kudo*. Theory of spring rock drill. M. C. K. 2. 285.

1924. *J. de Lareinty Tholozan*. Moteur à deux temps. L. F. A. 15. 407.

1925. *L. Lecornu*. Sur le volant des moteurs d'aviation. C. R. 149. 1359.

1926. *T. Lehmbek*. Die Beeinflussung der Motorenkonstruktionen durch die Steuerformel. D. R. M. 25. 594; 995.

1927. *F. Pietsch*. Über Explosionsmotoren. (tschech.). C. 38. 93; 215. 338.

1928. *H. Pudor*. Die Schönheit der Maschine. B. K. S. 11. 229.

27\*

1929. *Ravigneaux*. Généralisation de la formule de Willis sur les trains épicycloïdaux. C.R. 149. 1060.

1930. *C. Reignier*. Sur le calcul des volants des laminoirs. C.R. 149. 1357.

1931. *P. de la Roche*. L'utilisation de la force motrice des marées. E.E.P. 16. 258.

1932. *J. M. Spitzglaf*. Curves for engineering calculations. P.T.E. 31. 220.

1933. *Valentin*. Die Reversierung von Verbrennungskraftmaschinen. G.M.T. 10. 61; 81.

1934. *S. H. Weaver*. Critical speed calculation. J.A.S.M.E. 32. 1059.

Siehe auch 719; 1473; 1599; 2247—49; 2254; 2256; 2267; 2274; 2291; 2299; 2305; 2330; 2331; 2347; 2354; 2359; 2371; 2391; 2411; 2422.

### Maschinenelemente.

1935. *D. O. Barrett*. The calculation of cranks shafts for internal combustion engines. M.N.Y. 16. 610.

1936. *C. Bertrand*. Nouveau système de graissage automatique des mouvements extérieurs. R.M.M.P. 183. 245.

1937. *H. S. Brown*. The Proper fitting of engine cranks. P.T.E. 32. 1072.

1938. *R. Krall*. Kraftübertragung durch Riemen. Z.P.M. 1. 1224.

1939. *H. Legros*. Calculs des volants à voile et des disques animés d'une grande vitesse de rotation. R.U.M. 26. 13.

1940. *W. Rautenstrauch*. The design of curved machine members and eccentric load. J.S.A.M.E. 31. 1071.

1941. *W. Schwerdtfeger*. Die theoretische Bestimmung der Desaxialität. M.W.B. 13. 7.

1942. *K. F. Steinmetz*. Die Anordnung und Berechnung von Riemtriebriegen in Mühlen. M.L. 1909. 336; 577.

1943. *H. Vetter*. Praktische Arbeitstabellen zur Bestimmung der Dimensionen bei Riemenscheiben und Seilscheiben. G.Z.B. 6. 525.

1944. *N. N.* The design of curved machine members under eccentric load. M.W.M. 47. 39.

Siehe auch 278; 983; 1187; 1268; 1285; 1286; 1308; 2026.

### Wärmemaschinen.

1945. *Bochet*. Le moteur Diesel à combustion interne. B.S.F.P. 1909. 16.

1946. *R. Cozza*. Ein merkwürdiger Motor. P. 20. 496.

1947. *H. B. Dixon*. Some theories of combustion in gases. J.G.L. 110. 99.

Siehe auch 2293.

### Dampfkessel.

1948. *A. H. Barker*. The rating and testing of boilers for heating installation. T.A. 82. 222.

1949. *A. Bement*. Testing and performance of steam generating apparatus. H.V.M. 1909. 25.

1950. *F. W. Dean*. The best form of longitudinal joint boilers. P.A.S.M.E. 31. 573.

1951. *M. Desjumeur*. Chaudières à foyers intérieurs et chaudières semitubulaires: essais comparatifs de vaporisation. A.S.L. 1909. 259.

1952. *R. C. H. Heck*. Some properties of steam. P.T.E. 30. 876.

1953. *Hempel*. Über Störungen bei Dampfkesselbetrieben. T.I.Z. 24. 2; G.H. 40. 258; 278.

1954. *O. Hildebrand*. Über Wärmeverlust durch Kesselstein. N.E.E. 36. 198.

1955. *S. F. Jeter*. Graphical determination of boiler bracing. P.T.E. 31. 448.

1956. *Kingsley*. Law of heat transfer through steam boiler heating surface. E.B.R. 58. 246.

1957. *A. Knelles*. Entwurf einer Dampfkesselanlage. E.P.R. 1909. 253; 263.

1958. *C. E. Lucke*. Steam boilers and combustion. P.T.E. 32. 417.

1959. *D. Myles*. Notes on marine boiler design, construction and economy. T.S. 21. 209.

1960. *Nehbel*. Berechnung der Heizfläche, des Wasser- und Dampftraumes bei einem Flammrohrkessel. H.Z.B. 25. 4627.

1961. *J. T. Nicolson*. The laws of heat transmission in steam boilers as deduced from experiment. P.E.L. 1909. 114.

1962. *J. T. Nicolson*. The laws of heat-transmission in steam boilers. P.W.L. 14. 167; 226; 273; 331.

1963. *J. C. Parker*. The development of the downflow boiler. E.R.L. 21. 161.

1964. *F. Walther*. Ist bei Berechnung der Heizfläche eines Dampfkessels die exakte oder die summarische Methode anzuwenden? Z.E.M. 1910. 87.

1965. *N. N.* Are we on the right lines in boiler design. P.E.L. 1909. 113.

1966. *N. N.* The basis of engine and boiler calculations. M.E. 24. 472.

Siehe auch 1260; 1875; 2229.

**Dampfmaschinen.**

1967. *F. H. Ball*. Counterbalancing problems in stationary steam-engine design. *M.W.M.* 45. 302.

1968. *F. H. Ball*. A solution of the counterbalancing problem in stationary steam engine design. *E.R.C.* 1909. 766.

1969. *E. M. Bragg*. The design of reversing engines. *I.M.E.L.* 15. 169.

1970. *S. Bock*. Der Kondensator. *S. I.B.* 18. 181.

1971. *M. de Córdova*. La condensacion en las máquinas de vapor. *E.E.M.* 1909. 417; 461.

1972. *J. Davidsohn*. Modern british high-speed steam engines. *P.T.E.* 30. 276; 325; 369.

1973. *G. Fenno*. Design of engine to produce uniform torque. *M.W.M.* 47. 28.

1974. *R. J. Grimshaw*. The balancing of reciprocating engines. *C.M.N.Y.* 38. 348.

1975. *F. W. Hollmann*. Analysis of steam and inertia forces. *P.T.E.* 1909. 623.

1976. *O. E. Jørgensen*. Jaevnstroms dampmaskinen. *I.K.* 18. 249.

1977. *F. L. Johnson*. Piston controlled exhaust ports. *P.T.E.* 32. 111.

1978. *J. E. Lea*. Continuous testing of steam plants. *M.W.M.* 45. 152; 158.

1979. *M. Leblanc*. De la compensation dans les machines à vapeur. *B. S.F.P.* 1908. 23\*.

1980. *C. E. Lucke*. Economy in generating steam power. *P.T.E.* 32. 462.

1981. *T. C. Mc Bride*. The theory of steam condensers. *P.W.L.* 15. 491.

1982. *A. L. Mellanby*. Some disputed points in the theory of the steam engine. *E.R.L.* 20. 265

1983. *H. Nehbel*. Die überschlägige Berechnung der Leistung einer Dampfmaschine ohne Indikatorgramme. *M. Z.B.* 7. 229.

1984. *R. M. Neilson*. Design of surface condensers. *E.E.L.* 45. 129.

1985. *R. J. S. Pigott*. The revival of the reciprocating engine. *E.M.N.* 39. 554.

1986. *T. H. Robinson*. Miniature steam engines. *T.C.I.* 8. 273.

1987. *W. M. Sanderson*. The recovery of power from exhaust steam. *T.A.I.M.E.* 38. 282.

1988. *W. H. Wakeman*. Expensive versus inexpensive back pressure. *P.T.E.* 30. 590.

1989. *N. N.* On heat losses. *M.E.L.* 31. 106.

Siehe auch 1966; 2093.

**Regulatoren.**

1990. *F. Carlès*. Réglage des moteurs. *V.A.* 1910. 88.

1991. *B. v. Lengerke*. Ventil- oder Schiebersteuerung. *A.A.Z.* 1910. 31. — *A. Kienle*. 41.

1992. *R. de Temple*. Neue Regulatoren. *Z.P.M.* 1. 1081.

Siehe auch: 1926.

**Schiffsmaschinen.**

1993. *N. W. Akimoff*. Jet propulsion. *I.M.E.* 1909. 81.

1994. *A. T. Barber*. Development of the marine steam engine. *E.E.L.* 44. 606.

1995. *D. Bellet*. Un moteur tonnant réversible pour la navigation maritime. *V.A.* 10. 444.

1996. *Bragg*. Marine engine design. *M.E.L.* 31. 7; *I.M.E.* 1909. 89.

1997. *Cockrill*. Die Schraube als Treibapparat der Schiffe. *M.A.G.S.* 36. 180.

1998. *C. B. Dicksee*. Steam turbines as applied to marine propulsion. *B.E.L.* 44. 712.

1999. *W. G. Diman*. The turbine and reciprocating engine for naval purposes. *T.S.* 21. 337; *J.A.S.N.E.* 1909. 19.

2000. *W. P. Durnall*. The electric motor for marine propulsion. *E.E.L.* 45. 363.

2001. *W. P. Durnall*. The substitution of the electric motor for marine propulsion. *S.S.L.* 21. 366.

2002. *W. P. Durnall*. The electric propulsion of ships. *E.R.* 12. 236.

2003. *Föttinger*. Das Problem der Schiffsturbine. *V.* 10. 1.

2004. *D. Gibson*. The reciprocating engine in marine practice and its probable future. *P.W.L.* 14. 14.

2005. *P. Jacoby*. Sulzer Diesel marine engine. *I.M.E.L.* 15. 41.

2006. *A. H. Larsen*. Skibsmotoren og dens anvendelse. *I.K.* 18. 253; 257.

2007. *C. S. Linch*. Propeller compensations. *I.M.E.* 1909. 260.

2008. *C. S. Linch*. Simple method of propeller design. *I.M.E.* 1909. 254.

2009. *H. A. Mavor*. Marine propulsion electric motors. *I.M.E.* 15. 53.

2010. *R. M. Neilson*. Turbine propulsion. *I.M.E.* 15. 56.

2011. *R. M. Neilson*. Turboelectric propulsion for vessels. *C.M.N.Y.* 36. 420.

2012. *H. J. Oram*. Propelling machinery of warships. *J.A.S.N.E.* 22. 57.

**2013.** *Parsons and Walker.* The combination system of reciprocating engines and steam turbines. M. E. L. 30. 392; J. A. S. N. E. 20. 455.

**2014.** *H. J. Perkins.* Speed propeller wheels. T. R. 24. 29.

**2015.** *G. Rabbeno.* Teoria sintetica dell' elica propulsatrice. R. M. R. 43. 43.

**2016.** *Reed.* The development of modern marine engine. C. M. N. Y. 35. 120.

**2017.** *L. Robida.* Avantages et inconvenients de la multiplicité des cylindres dans les moteurs marins. J. M. Y. 32. 795.

**2018.** *C. S. Root.* The marine steam engine. I. M. E. 1909. 305.

**2019.** *C. S. Root.* Cylinder ratios of marine engines. M. W. M. 46. 142.

**2020.** *G. Rota.* The propulsion of ships by means of contrary turning screws on a common axis. P. W. L. 14. 1021; I. M. E. 1909. 277.

**2021.** *F. J. Rowan.* Superheated steam in marine work. I. M. E. 1909. 249.

**2022.** *O. Schlick.* Der gyroskopische Einfluß rotierender Schwungräder an Bord von Schiffen. B. I. G. B. 92. 478.

**2023.** *E. Valentin.* Bootsmotoren-Konstruktionen. D. M. B. 7. 17.

**2024.** *A. H. Ziegler.* Marine engine cams. T. R. 1909. 470.

Siehe auch 1959; 2034; 2050; 2098; 2123; 2148; 2151; 2158; 2173; 2174.

### Gasmaschinen.

**2025.** *P. R. Allen.* Recent developments in large gas-engine design. C. M. N. Y. 36. 195; 308; 445.

**2026.** *H. Allen.* Crank shafts for gas engines. C. M. N. Y. 1909. 444.

**2027.** *H. André.* Les moteurs d'aviation. L. F. A. 1909. 733.

**2028.** *H. C. Anstey.* Some considerations on the application of internal combustion engines for marine propulsion. G. E. C. 11. 333.

**2029.** *R. Bechtel.* Large gas engines in steel works. I. A. 85. 1453.

**2030.** *F. W. Burstall.* Indicating of gas engines. G. E. C. 1909. 479.

**2031.** *T. E. Butterfield.* A method of improving the efficiency of gas engines. G. E. C. 1909. 285.

**2032.** *G. Castagneris.* Motori leggeri e motori per aeronautica. B. S. A. I. 1909. 278.

**2033.** *C. F. Clarkson.* Concerning the offsetting gas engine cylinders. T. A. N. Y. 20. 990.

**2034.** *Diederichs.* Gasmotoren für den Schiffsbetrieb. M. A. G. S. 36. 195.

**2035.** *R. Draue.* Konstruktive Einzelheiten an doppeltwirkenden Viertaktgasmaschinen. S. E. D. 30. 246; 290.

**2036.** *F. Ernestes.* Zur Frage der Luftkühlung bei Automobil- und Flugmotoren. Z. M. M. 1909. 389; 411.

**2037.** *J. T. Faig.* Utilizing waste heat from gas engine plants. G. E. C. 1910. 342.

**2038.** *Faucher.* Propulsionne mediante motori a gas. R. M. R. 41. 674.

**2039.** *T. J. Fay.* Functions and frailties of motor cylinders. T. A. N. Y. 21. 11; 53; 97; 137; 181.

**2040.** *A. J. Frith.* The approach of the theory and practice in modern gas engines. G. E. C. 12. 18.

**2041.** *A. J. Frith.* A regenerator cycle for gas engines using subadiabatic expansion. J. A. S. M. E. 32. 1247.

**2042.** *Hollingworth.* A graphical method of calculating gas-engine efficiencies. M. P. I. C. E. 173. 259.

**2043.** *B. Hopkinson.* On heat-flow and temperature distribution in the gas engine. E. R. L. 1909. 397.

**2044.** *M. B. Lamb.* Gas engines M. S. P. 99. 459.

**2045.** *T. Lehbeck.* Eine einfache Methode zur Messung der Leistungen schnellaufender Explosionsmotoren. D. R. M. 25. 5.

**2046.** *de Leyma.* L'allumage des moteurs d'automobiles. I. V. A. 28. 483; 503; 525; 546; 565; 586.

**2047.** *J. D. Lyon.* Large gas engines. G. E. C. 1910. 352.

**2048.** *K. Metz.* Die Großgasmaschine. M. A. G. 1909. 679.

**2049.** *Seer.* The probable future of explosion engines. C. M. T. R. 36. 945.

**2050.** *F. Shackleton.* The gas engine and producer plant and its adaptability for marine work. P. W. L. 14. 21.

**2051.** *F. B. Shield.* Formulas of computing the results of gas analysis. P. T. E. 30. 1121.

**2052.** *H. F. Smith.* Gas engines for use with producer gas. M. W. M. 46. 122.

**2053.** *H. F. Smith.* Gas engine construction for producer gas use. G. E. C. 11. 354; 374.

**2054.** *Valentin.* Die Reversierung von Verbrennungskraftmaschinen. G. M. T. 10. 45.

**2055.** *Varlet.* Calcul de la puissance des moteurs. L. F. A. 1909. 520.

**2056.** *J. G. G. Walther.* Gas engine design. G. O. P. 5. 245.



2057. *W. Watson*. Thermal and combu-  
stive efficiency of a motor. T.A.N.Y.  
20. 939.

### Hydraulik.

2058. *W. Burns*. Notes on hydraulic  
work. P.T.E. 31. 788.

2059. *J. Divigneaud*. Note sur les  
axes hydrauliques. A.T.P.B. 14. 1143.

2060. *A. Eicchells*. Hydraulic machi-  
nery and appliances. P.W.L. 16. 733.

2061. *W. Heym*. Die Benutzung von  
Ebbe und Flut für den Betrieb einer  
Luftkompressoranlage. W.K. 2. 212.

2062. *G. H. Knibbs*. The hydraulic  
aspect of the artesian problem. J.N.S.  
W. 37. B. 24.

2063. *S. R. Lowcock*. Evaporation  
from water surfaces. J.G.L. 109. 35.

2064. *R. v. Mises*. Über die Pro-  
bleme der technischen Hydromechanik.  
D.V.M. 17. 319.

2065. *F. Präsil*. Graphische Meth-  
oden zur Behandlung hydrotechnischer  
Probleme. V.N.B. 93. 340.

2066. *W. T. Ryan*. To determine the  
value of a water power. P.T.E. 31. 604.

2067. *F. van Winkle*. Methods of  
measuring the flow of water. P.T.E. 31.  
414.

2068. *R. Wolffenden*. The design of  
hydraulic cylinders. E.R.L. 21. 290.

2069. *N. N.* The flow of water over  
oblique weir plates. E.B.K. 60. 10.

Siehe auch 708; 717; 1517.

### Hydraulischer Widder.

2070. *H. Lorenz*. Theorie des hy-  
draulischen Widders. P.Z. 11. 234.

2071. *B. Küllauer*. Der hydraulische  
Widder oder Stoßheber als rationelles  
Wasserbeförderungsmittel für die Land-  
wirtschaft. M.Z.B. 8. 137.

2072. *de Sparre*. Note au sujet des  
coups de bélier. M.A.Ly. (3) 9. 413.

### Wasserleitung.

2073. *Flick*. Tafeln zur Berechnung  
von unter Druck liegenden vollaufen-  
den Durchlässen und Leitungen. K.T.  
13. 67.

2074. *A. Vogt*. Tafel zur Berechnung  
von Wasserleitungen. G.E. 45. 1878.

Siehe auch 287; 1296.

### Wasserbau.

2075. *H. J. F. Gourley*. Reinforced  
concrete in waterworks engineering.  
W.W.E. 12. 37.

2076. *J. E. Jackson*. Stability of  
dams. M.S.P. 100. 324.

2077. *E. Maillet*. Sur les équations  
diff. et les systèmes de réservoirs. C.R.  
147. 966.

2078. *Ramisch*. Beiträge zur sta-  
tischen Berechnung von Talsperren. Z.  
W.W.B. 5. 229.

2079. *Ramisch*. Über neue Gesichts-  
punkte für die Beurteilung der Stand-  
sicherheit von Talsperremauern. Z.G.  
W.W. 6. 105.

2080. *D. Waterman*. Ditches. M.S.P.  
98. 352.

### Wehre.

2081. *S. Hauser*. Wehr mit selbst-  
tätiger Umlegung. T.R.B. 1909. 566.

2082. *F. Rabitz*. Entwurf einer be-  
weglichen Wehranlage. Z.T.B. 1909.  
102; 111.

### Wasserräder.

2083. *C. M. Allen*. The testing of  
water wheels after installation. J.A.S.  
M.E. 32. 481; 1172.

2084. *J. Bergmann*. Berechnung  
eines oberflächigen Wasserrades. E.  
P.R. 1909. 501.

2085. *W. R. Eckart*. The application  
of the Pitot tube to the testing of im-  
pulse water wheels. P.A.I.M.E. 1910. 1.

2086. *O. Fischer*. Die Lorenzsche  
Theorie der Kreisräder. P.Z. 10. 103.

2087. *Jackson*. Reducing the effect  
of back water on water wheels. E.B.  
R. 57. 196.

2088. *R. v. Mises*. Theorie der Wasser-  
räder. Z.S. 57. 1.

2089. *R. v. Mises*. Zur Theorie der  
Kreisräder. P.Z. 10. 140.

### Turbinen.

2090. *B. Bachmetjevo*. Über die Arbeit  
der hydraulischen Turbinen bei ver-  
änderlicher Anordnung (russ.). B.I.P.P.  
9. 145.

2091. *J. Bartl*. Das Verhalten der  
Turbinen bei verschiedener Belastung.  
D.T.B. 5. 197; 221.

2092. *J. R. Bibbins*. Typical low-  
pressure steam turbine plant. P.T.E.  
30. 485.

2093. *J. R. Bibbins*. Low pressure  
turbines and steam engines. P.T.E. 30. 72.

2094. *E. Brauer*. Eulers Turbinen-  
theorie. D.V.M. 17. 39.

2095. *Bubendy*. Ausnutzung der Flut-  
bewegung. V.F. 8. 23.

2096. *W. Burns*. Building pelton  
wheels. P.T.E. 31. 21.

2097. *E. F. Côte*. Essai des turbines hydrauliques. A.S.L. 1908. 3.

2098. *Denny*. Der heutige Stand der Schiffsturbinenfrage. D.T.B. 1909. 169.

2099. *F. Eickhoff*. Über den Austrittsverlust bei Wasserturbinen. D.M.S.B. 2. 33.

2100. *J. Esman*. Regulierung der hydraulischen Turbinen (russ.). B.I.P.P. 4. 221; 5. 45.

2101. *S. M. Gorodischtsch*. Wasserdynamoturbinen und deren Anwendung in der Elektrotherapie der Harnneurose. Z.M.E. 1910. 2.

2102. *H. Y. Haden*. Mixed pressure turbine and engine plants. P.T.E. 32. 207.

2103. *A. E. Hunt*. Balancing of high-speed turbine shafts. P.E.L. 41. 137; 165.

2104. *J. Izart*. Essai des turbines hydrauliques. L.E.P. 1909. 370.

2105. *C. Kahle*. Die Turbine, ihre Entstehung und Entwicklung bis zur Gegenwart. Z.W.W.B. 1. 419; 2. 6; 21; 33; 63; 69.

2106. *Knelles*. Die Francis-turbine. E.P.R. 25. 281.

2107. *I. Lecornu*. Sur les turbines à axe flexible. J.E.P. (2) 11. 95.

2108. *F. M. Lege*. Low pressure turbines. E.R.J. 1909. 1036.

2109. *Malavasi*. Teoria e la calcolazione delle turbine idrauliche. Pol.M. 56. 65.

2110. *W. H. Miller*. A recent comparison of turbines and engines. E.B.R. 61. 216.

2111. *Pierce*. Turbine fans in mine ventilation. E.M.J. 85. 768.

2112. *F. Ray*. Characteristics of the turbine pump. P.T.E. 30. 535.

2113. *H. B. Taylor*. Hydraulic turbines for 670-f. of head. P.T.E. 32. 1192.

2114. *H. B. Taylor*. The development of the hydraulic reaction turbine in America. E.M.N. 38. 841.

2115. *H. B. Taylor*. Most powerful turbines ever built. P.T.E. 32. 386.

2116. *H. B. Taylor*. Die stärkste je gebaute Turbinenanlage. Z.P.M. 1. 547.

2117. *A. W. Willits*. Some notes on Parson's turbine construction. P.N.I. 35. 730.

2118. *F. van Winkle*. The sea wave motor and its possibilities. P.T.E. 30. 395.

2119. *A. Witz*. Théorie générale et expérimentale des turbines à vapeur et à gaz. R.G.O. 19. 47.

Siehe auch 1999; 2003; 2010; 2218; 2219.

## Dampfturbinen.

2120. *J. N. Bailey*. The exhaust steam turbine. M.E.M. 24. 668; 702.

2121. *A. S. Blackman*. Steam turbines. E.E.L. 1909. 604; I.C.T.R. 79. 7. P.W.L. 15. 69; E.R.L. 1909. 43.

2122. *A. S. Blackman*. Steam turbines from the user's point of view. E.E.L. 44. 5.

2123. *F. Bock*. The steam turbine in the German navy. C.M.N.Y. 38. 333.

2124. *E. M. Bragg*. The design of turning engines. I.M.E.L. 14. 426.

2125. *C. B. Burleigh*. The low-pressure steam turbine and its economical utilisation. S.A. 67. Suppl. 45.

2126. *C. B. Burleigh* and *J. R. Bibbins*. Domestic steam turbine development. P.T.E. 30. 765.

2127. *W. Butler*. Hydraulically operated valves for Curtis steam turbines. P.E.L. 39. 394.

2128. *J. G. Callan*. Small steam turbines. J.A.E.S. 44. 329.

2129. *A. Ceytre*. Les turbines à vapeur. I.E.P. 1909. 389.

2130. *Ceytre*. Turbines à vapeur et machines à piston. I.E.P. 17. 269.

2131. *A. P. Chalkley*. Modern tendencies in steam turbine design. E.R.L. 65. 683.

2132. *A. Dahme*. Die Dampfturbine im Betriebe mit gemischtem Energiebedarf. Z.G.T. 1909. 49.

2133. *Dall'Armi*. Sul calcolo delle turbine a vapore. R.M.R. 41. 49.

2134. *F. E. Drake*. The first American steam turbine. S.A. 67. Suppl. 324.

2135. *E. Dreyfus*. The low pressure turbine. E.J. 1909. 597.

2136. *C. W. Dyson*. Test of Terry steam turbine. J.A.S.N.E. 31. 884.

2137. *C. A. Edmonds*. Dimensions of steam turbines. P.T.E. 32. 1412.

2138. *Emmtt*. Steam turbines. E.C. 45. 262.

2139. *E. Fichel*. General Electric-Curtiss-Dampfturbine. E.B.B.M. 1909. 335.

2140. *R. C. Flanders*. The Melville and Macalpine reduction gear for marine steam turbines. M.N.Y. 16. 431.

2141. *W. H. Heaton*. The mass balancing of steam turbine rotors. C.M.N.Y. 36. 442.

2142. *G. P. Herrick*. The Herrick balanced rotary engine. M.M.C. 25. 59.

2143. *W. Heym*. Verwendung der Abdampfturbine für Kompressorantriebe. Z.S.I. 2. 164.

2144. *C. F. Holmboe*. Dampfturbinen. E. T. K. 1910 159.
2145. *R. Huetz*. Die Darpfturbine. D. T. Z. B. 1909. 346; 366; 386; 406; 425.
2146. *E. Josse*. Surface condensation for steam turbines. P. T. E. 30. 234.
2147. *F. Krämer*. Kaldampfturbinen. E. K. I. 9. 209
2148. *A. Marnier*. La turbine à vapeur dans la marine. R. I. P. 40. 257.
2149. *M. R. Meilson*. The low-pressure steam turbine. P. T. E. 31. 1.
2150. *W. E. Müller*. Curtis steam turbines for large power stations. E. A. 1909.
2151. *E. Mysz*. Die Dampfturbine als Betriebsmaschine für Kriegsschiffe. M. A. G. S. 38. 305.
2152. *Neilson*. The steam turbine. P. W. L. 12. 563.
2153. *F. A. Newington*. Exhaust steam turbines and condensing plant at Edinburgh. P. W. L. 17. 98.
2154. *F. A. Newington*. Exhaust steam turbines and condensing plant at Mc Donald road station Edinburgh. E. R. C. 57. 79.
2155. *G. A. Orroll*. Small steam turbines. I. C. T. R. 78. 815; P. T. E. 30. 850; J. A. S. A. E. 31. 810.
2156. *G. R. Parker*. The steam turbine in modern practice. P. T. E. 32. 441.
2157. *G. H. Parker*. The relation of the steam turbine to modern central station practice. M. E. 25. 335.
2158. *C. A. Parsons*. The applications of the marine steam turbine and mechanical gearing to merchant ships. S. S. L. 21. 373; P. W. L. 16. 574; T. I. M. E. 1910. 75.
2159. *Pearce*. Steam turbine engineering. E. R. L. 18. 236; P. W. L. 12. 564.
2160. *W. O. Rogers*. Modern rotary steam engines. P. T. E. 32. 1219.
2161. *R. Schumann*. Genauigkeitsuntersuchung über Messungen an einer Dampfturbine. Z. S. 56. 413.
2162. *F. H. Sibley* and *T. G. Kemble*. Efficiency tests of steam turbine nozzles. M. E. 25. 3; 73.
2163. *C. H. Smoot*. Low pressure steam turbines. E. A. 1909. 104; P. T. E. 30. 1100.
2164. *W. E. Snow*. Elementary theory of the steam turbine. P. T. E. 32. 338.
2165. *W. E. Snow*. Elementary principles of steam turbine. P. T. E. 32. 430.
2166. *W. E. Snow*. Elementartheorie der Dampfturbinen. Z. F. M. 1. 591.
2167. *G. Stoney*. Steam turbines. E. R. L. 65. 610; M. E. M. 24. 482.

2168. *Turner*. Exhaust steam power generation. E. M. L. 9. 229.
2169. *W. S. Twining* and *W. C. Kerr*. An exhaust steam turbine installation. P. T. E. 30. 785.
2170. *Vallauri*. Teoria e calcolo delle turbine a vapore. Pol. M. 56. 193.
2171. *J. Vinsonneau*. Les petites turbines à vapeur. R. I. P. 40. 141.
2172. *H. Wagner*. Dampfturbine mit hohem Gegendruck. Z. G. T. 1909. 1.
2173. *Walker*. Recent developments in the marine steam turbine. C. M. N. Y. 35. 197.
2174. *N. N.* A marine steam turbine reducing gear. I. M. E. L. 14. 399.
2175. *N. N.* Die Dampfturbine in ihrer verschiedenen Verwendung. V. 9. 27; 33.
- Siehe auch 1998; 2013; 2092; 2119.

#### Gasturbinen.

2176. *A. Barbezat*. Praktische Versuche an Gasturbinen. G. M. T. 9. 125.
2177. *W. v. Dallwitz*. Die Gasturbinen. T. R. B. 1909. 367; 382.
2178. *A. W. H. Griepe*. The gas turbine. P. E. L. 41. 358.
2179. *C. L. Lucas* and *J. J. Roß*. New rotary gas engine for aerial navigation. M. N. Y. 16. 615.
2180. *Scott, E. Kilburn*. Gas turbine research. E. R. L. 65. 679.
2181. *H. H. Suplee*. The explosion gas turbine. C. M. N. Y. 37. 79.
2182. *Wagner*. Some possibilities of the gas turbine. E. R. L. 19. 412.
- Siehe auch 2119; 2242.

#### Kanalbau.

2183. *Cumpofregoso*. Condotture idrauliche di navigazione. Pol. 56. 459.
2184. *Fölzel*. Berechnung eines Kanals zur Aufnahme von Rohrleitungen. Z. T. B. 1910. 31.
2185. *T. Paoletti*. Studio sul calcolo dei canali regolati. A. I. V. 65. 249.

#### Schiffsbau.

2186. *F. Ahlborn*. Über die Schiffschraube und eine neue Versuchseinrichtung zur Ermittlung der Wirkungsweise und des Wirkungsgrades von Schraubenmodellen. V. N. V. H. (3) 16. A. 61.
2187. *J. Bruhn*. The influence of form and balkheads on the strength of ships. P. W. L. 14. 1037; 1058.
2188. *Cremieu*. Apparat us for extinguishing the rolling of ships. P. W. L. 12. 21.

2189. *L. Denny*. Modern ship design. P. W. L. 14. 627.
2190. *J. Düring*. Schiffbautechnische Stabilitätsberechnung. H. H. 1910. 109; 135.
2191. *C. Engel*. Die Hydroplane oder Gleitboote. D. M. B. 1909. 20.
2192. *G. Hart*. L'évolution dans les systèmes de constructions navales. B. S. I. C. F. 63. 417.
2193. *Schütte*. Abriß über die Einführung in den Schiffbau. S. N. D. (2) 12. A. 15.
2194. *E. Tate*. The stability of ships. T. I. M. E. 22. 93.
2195. *H. E. Tündering*. Eulers Theorie des Schiffes und die Bewegungsgleichungen des starren Körpers. D. V. M. 17. 84.
2196. *D. W. Tyler*. A new method for determining the final diameter of ship. P. N. I. 36. 501.
2197. *W. H. White*. Is there a limit of size for ships. S. W. 42. 298.
2198. *N. E. Žukovsky*. Theorie der Ruderschraube mit einer großen Anzahl von Schaufeln. (russ.) B. S. N. M. 13. 2. 60.

#### Schiffsbewegung.

2199. *Bauch*. Theorie des Segelns. E. T. R. 25. 344.
2200. *P. E. Brunelli*. Sull' influenza del fondo sulla velocità delle navi. A. S. I. A. 24. 515.
2201. *Campofregoso*. Reonautica fluviale. Pol. M. 56. 627.
2202. *L. Denny*. Modern ship design. S. Am. 67. Suppl. 242.
2203. *J. Friedel*. Die Stabilität der Schiffe. W. T. B. 1906. 462.
2204. *J. Friedel*. Die Wellenbewegung der Schiffe. W. T. B. 1907. 295.
2205. *T. H. Havelock*. The wave-making resistance of ships. P. R. S. L. 82. 276.
2206. *J. B. Seeuntüchtigkeit und Stabilität*. H. H. 1909. 585.
2207. *C. Lavaud*. Matériel de la batterie et essais de résistance à la traction. R. Q. S. I. C. 1910. 369.
2208. *R. M. Neilson*. The propulsion of cargo boats. C. M. N. Y. 38. 215.
2209. *F. Rehfeld*. Die Meßformel der Wettfahrt Vereinigung Berliner Gigsegler. Y. B. 1909. 120.
2210. *H. C. Sadler*. The effect of bossing upon resistance. I. M. E. 1909. 137.
2211. *H. C. Sadler*. Influence of the position of the Midship-section upon resistance. S. W. 42. 105.

2212. *E. Steegmann*. Beitrag zur Meßformelfrage. D. M. B. 1909. 12.

2213. *A. van der Vliet*. Die Stabilität eines rechteckigen Transportschiffs für die schiefen Neigungen von 0° bis 90°. (russ.). B. I. P. P. 10. 281.

2214. *A. van der Vliet*. Anfängliche Stabilität eines rechteckigen Transportschiffs. (russ.). B. I. P. P. 10. 397.

2215. *A. van der Vliet*. Die sekundäre Wirkung der Wasserreibung auf ein fahrendes Schiff. (russ.). B. I. P. P. 10. 379.

2216. *H. Wittmaack*. Vom Bootswiderstand. D. M. B. 1909. 10.

Siehe auch 995; 1003; 1006; 1024; 1456; 1535; 1546; 2188.

#### Pumpen.

2217. *A. Barbezat*. Calcul des pompes centrifuges. R. P. E. 19. 145.

2218. *A. Barbezat*. Berechnungstabelle für Zentrifugalpumpe und Reaktionsturbinen. D. F. T. 3. 64.

2219. *J. Benetti*. Considerazioni sintetiche sul funzionamento e sull' effetto utile delle pompe centrifughe e corrispondenti raffronti colle turbini-motrici. M. I. B. (6) 6. 157.

2220. *J. Bente*. Über die Saugfähigkeit der Kreiselpumpen. D. F. T. 1909. 281.

2221. *A. Berthier*. Nouvelles pompes rotatives. K. I. P. 41. 53.

2222. *A. I. Blackstead*. Loss of efficiency of centrifugal pumps through vibration. M. W. M. 46. 195.

2223. *E. M. Bragg*. Calculations for the size of a pump beam. I. M. E. 16. 144.

2224. *F. Busse*. Zur Theorie der Zentrifugalpumpen. Z. G. T. 1909. 5.

2225. *H. F. Collins*. Cornish pumps and pumping engines. M. S. P. 98. 289; 317.

2226. *O. Feeg*. Wirkungsgrad von Kreiselpumpen. D. F. T. 1909. 97.

2227. *W. P. Gaurain*. Compound Cornish pumping engines. M. S. P. 99. 62.

2228. *O. Gottschling*. Über Entlastungsvorrichtungen bei Zentrifugalpumpen. D. F. T. 1909. 113.

2229. *H. G. Haden*. Large centrifugal boiler feed pump. P. T. E. 32. 483.

2230. *C. Hanocq*. Les pompes centrifuges. R. U. M. 25. 214; 26. 276.

2231. *D. C. Johnson*. Steel plate and disc fans. M. W. M. 47. 278.

2232. *F. W. Kerns*. Efficiency of centrifugal pumps. M. S. P. 100. 862.

2233. *V. V. Messer*. Centrifugal pump efficiency. M.S.P. 98. 696.

2234. *J. A. Pollock*. A simple forme of Sprengel vacuum pump. J.N.S.W. 41. A. 140.

2235. *F. zur Nedden*. The design, construction and operation of high lift centrifugal pumps. E.M.N. 38. 546; 692; 883.

2236. *J. B. Sperry*. Methods of priming centrifugal pumps. M.W.M. 46. 116; 134.

2237. *M. R. Tison*. Bemerkungen über den Arbeitsvorgang in Kreiselpumpen. D.F.T. 3. 39.

2238. *A. Towler*. Steam-driver pumping plant for deep wells and boreholes. M.W.M. 47. 8; 55.

2239. *N. V. Eine neue Pumpmaschine*. A.T.Z. 1909. 315.

Siehe auch 1978; 2102; 2112; 2153; 2154.

#### Ventilation.

2240. *Grellert*. Schraubenventilatoren. H.T.R. 12. 157.

2241. *Snow*. The performance of fan blower. P.T.E. 28. 776.

Siehe auch 292; 2111; 2471; 2483.

#### Windmaschinen.

2242. *A. Marnier*. Les turbines à vent. R.I.P. 41. 67.

Siehe auch 1585.

#### Luftschiffe.

2243. *Amans*. Sur l'emploi de la balance en aéronautique. B.M.A.M. 1909. 5—6. 30.

2244. *Amans*. Sur 2 théorèmes de Renard. B.M.A.M. 1909. 12.

2245. *Amans*. Sur la recherche du centre vélique en aéronautique. B.M.A.M. 1910. 95.

2246. *Amans*. Études anémométriques et dynamométriques des hélices aériennes. M.A.S.M. (2) 4. 39.

2247. *H. André*. Moteur d'aviation. L.F.A. 1910. 58.

2248. *H. André*. Les moteurs d'aviation. L.F.A. 1909. 614; 632; 653; 670; 679; 696; 711.

2249. *H. André*. Les nouveaux moteurs d'aviation Rossel-Peugeot. L.F.A. 15. 469.

2250. *H. André*. Les déformations des carènes aériennes. L.F.A. 1909. 262; 283.

2251. *W. G. Aston*. An elementary consideration on screw propellers. T.A. 2. 291.

2252. *H. S. Baker*. Propeller efficiency. A.N.Y. 1910. 117.

2253. *K. Bamler*. Entwicklungsgeschichte und -Aussichten der Flugschiffahrt. J.N.K. 1909—10. 32.

2254. *C. Barutell*. Los motores de la aviacion. E.E.M. 1910. 163.

2255. *K. v. Bassus*. Seitennavigation für Luftschiffe. B.I.G.M. 42. 21; I.A.M. 1909. 368.

2256. *E. P. Batzel*. Points in the design of aeronautic motors. H.A. 25. 253; 293.

2257. *G. Beckenhaupt*. Über die theoretischen Grundlagen und einige Hauptprobleme der Luftschiffahrt und ihrer Beziehungen zur Meteorologie. M.G.U. E. (2) 27. 32.

2258. *A. Berget*. Une formule de vitesse applicable à la propulsion dans l'air. L.A.P. 1909. 89.

2259. *de Béthune*. Sur l'aviation. A.S.B. 33. A. 247.

2260. *de Béthune*. Sur le point en ballon pendant la nuit. A.S.B. 34. A. 90.

2261. *R. v. Bieberstein*. Zum heutigen Stand der Luftschiffahrt. H.L. 1909—10. 323.

2262. *P. Brockett*. Bibliography of aeronautics. M.C.S.I. 55.

2263. *G. H. Bryan*. Aviation, mathematical and otherwise. N. 80. 221.

2264. *Carbonnier et Grimoux*. Hélice aérienne. L.F.A. 15. 507.

2265. *F. Carls*. Les hélices aériennes. V.A. 1910. 40.

2266. *G. Castagneris*. Le coefficient d'utilisation des dirigeables. L.F.A. 1909. 493.

2267. *J. Charmeuse*. Un nouveau moteur d'aviation. R.A.P. 5. 62.

2268. *H. Chatley, G. H. Bryan*. The progress of aviation. N. 79. 67.

2269. *L. Chauvière*. Quelques chiffres sur les hélices aériennes. L.A.P. 1909. 318.

2270. *L. Chauvière*. Die stationäre Schubkraft der Luftschrauben für Flugapparate. L.V. 2. 212.

2271. *M. Clémentel*. Aérostation et aviation. R.A. 75. 109.

2272. *G. A. Crocco*. Di un importante coefficiente di stabilità negli aeroplani. R.A.C.R. (5) 18. A. 571.

2273. *L. L. Custer*. A new principle in the construction of statoscopes. A.N.Y. 6. 40.

2274. *H. F. Dey*. Suggestions in the design of aeronautic motors. G.E.C. 1910. 232; M.N.Y. 16. 648.

2275. *Do*. Sur un deuxième paradoxe aérostatique. T.A.P. 1910. 57.
2276. *C. Eberhardt*. Teoria delle eliche aeree sul principio della resistenza dell'aria determinato da Loessl-Paragone colla realtà e sua applicazione pratica. B.S.A.I. 1909. 355.
2277. *C. Eberhardt*. Methode für die graphische Berechnung einer Luftschraube und ihre spezielle Verwendung für die Festigkeitsberechnung der Schraube. M.W.B. 13. 490.
2278. *C. Eberhardt*. Die Navigation im Luftschiff. M.W.B. 11. 725.
2279. *Eckener*. Stabilität und Steuerbarkeit in der Vertikalebene bei Motorluftschiffen. I.A.M. 12. 409.
2280. *G. Fuhrmann*. Verhalten von Ballonkörpern bei Schrägstellung. Z.F. T.B. 1. 161.
2281. *A. Galy*. L'Essor de la locomotion aérienne. A.S.L. 1909. 29.
2282. *R. Goliesco*. Dynamisme dans les milieux différents. L.F.A. 10. 76.
2283. *A. Guéret*. Hélices aériennes. T.A.P. 1910. 9.
2284. *C. Guido*. Sur une formule de M. A. Berget pour le coefficient d'utilisation des dirigeables. B.S.A.I. 1909. 53.
2285. *H. A.* La vitesse des hélices. S.F.A. 1909. 636.
2286. *H. S. Hele-Shaw*. Aerial automobilism. J.R.A.C. 19. 157.
2287. *G. Hermite*. Stabilisateur automatique pour aérostats. L.A.P. 1909. 61.
2288. *Hoffory*. Der Ballon im Gleichgewichte. W.L.Z. 7. 46.
2289. *H. Horst*. Über die statische Höhensteuerung der Freiballons. Vorteile der dynamischen Höhensteuerung eines Lenkballons. I.A.M. 1910. 12.
2290. *F. Huth*. Konstruktionsgrundlagen von Flugfahrzeugen. M.W.B. 1909. 1; 48; 72.
2291. *F. Huth*. Über die an einen Flugmotor zu stellenden Anforderungen. I.A.M. 1909. 529.
2292. *E. Jacobi*. Das Motorluftschiff System Zorn. P.B. 3. 20. II. 1910.
2293. *M. Joliot*. Thermic motors for aviation. T.A.Z. 123.
2294. *P. R. Jourdain*. L'aviation en 1908. R.S. (5) 11. 193.
2295. *C. Krüger*. Die Entwicklung des Motorluftschiffes. L.S.H. 1910. 173.
2296. *L. Labocetta*. Considerazioni intorno al modo da tenere per giudicare della bontà relativa di aeronavi di tipi diversi. B.S.A.I. 1909. 367; 425.
2297. *G. Lavergne*. Aviation. R.I.P. 40. 158.
2298. *Legrand*. Sur la résistance opposée par l'hélice aux évolutions sur la droite ou sur la gauche suivant son sens de rotation et sa position à l'avant ou à l'arrière. L.A.N. 1910. 67.
2299. *L. Lecornu*. Sur le volant des moteurs d'aviation. A. 1910. 7.
2300. *R. Lorin*. La propulsion à grande vitesse des véhicules aériens. L.A.P. 1:09. 463.
2301. *L. Malevé*. Détermination de l'altitude en aviation. L.A.S. 1910. 9.
2302. *A. Marcuse*. Navigation in der Luft. M.R.B. 1910. 37.
2303. *A. Meydenbauer*. Die Hubschraube in der Luftschiffart. M.W.B. 13. 579.
2304. *M. de Nansouty*. L'hélice aérienne. I.V.A. 29. 96.
2305. *U. Narille*. Moteur rotatif d'aviation, système Burlat. R.A.P. 3. 365.
2306. *Neuffer*. Wie läßt sich der Antrieb und die senkrechte Geschwindigkeit eines Luftschiffes messen. J.U. 14. 205.
2307. *L. Orlando*. Modo d'intensificare gli effetti dell' attacco elastico in un aeroplano. R.A.L.R. (5) 18. A. 668.
2308. *A. v. Parseval*. Der Parseval-Ballon. Z.P.M. 1. 1287.
2309. *Pasquier*. A propos de la navigation aérienne. A.S.B. 34. A. 88.
2310. *E. Pfuhl*. Die Entwicklung der Motorluftschiffahrt. R.I.Z. 1910. 24.
2311. *M. Piard*. Efficiency of screw propellers. T.A. 2. 36.
2312. *H. Pouleur*. Fonctionnement au point fixe des hélices aériennes. L.A.P. 10. 32.
2313. *Rabhene*. Théorie synthétique de l'hélice propulsive. T.A.P. 1910. 29.
2314. *I. A. Ramos*. La aviacion. R.C.L. 11. 35; 72; 82; 155.
2315. *H. Reissner*. Wissenschaftliche Fragen aus der Flugtechnik. D.V.M. 18. 25.
2316. *P. Renard*. Les aérostats dirigeables contemporains. L.T.M. 2. 331.
2317. *P. Renard*. Les cloisonnements des dirigeables. R.A.P. 3. 387; 440.
2318. *J. Richard*. Probleme der Luftschiffahrt. Z.P.M. 1. 16.
2319. *Rudel*. Beiträge zur Navigation des Kraftluftschiffes. B.I.G.B. 42. 111.
2320. *T. Saconney*. Mesures dynamométriques des hélices de grand diamètre. A. 1910. 9.
2321. *Sazerac de Forge*. La locomotion aérienne; ballon dirigeable Co. 57. A. 491; 595; 705. B. 105.

**2322.** *K. Schreiber.* Reisegeschwindigkeit und Eigengeschwindigkeit der Luftschiffe. Z.F.T.B. 1. 163.

**2323.** *K. Schreiber.* Die Geschwindigkeit der großen Zeppelin-Luftschiffe. M. W. B. 13. 558.

**2324.** *P. Schreiber.* Beiträge zur Theorie der Pilotaufstiege. I. A. M. 1909. 635.

**2325.** *A. Sée.* Sur la formule du colonel Duchemin. A. 1910. 13.

**2326.** *J. F. Springer.* The conquest of the air. I. A. 83. A. 46.

**2327.** *O. Squier.* The present state of military aeronautics. S. I. 1908. 117.

**2328.** *R. Thayer.* The dirigible balloon with gyroscope control. J. F. I. 168. 19.

**2329.** *J. Urban.* The pierced propeller A. N. L. 1910. 55.

**2330.** *A. Vorreiter.* Konstruktionsprinzipien der Motoren für Flugapparate. Z. F. T. B. 1. 11. 34.

**2331.** *A. Vorreiter.* Neue Flugmotoren. Z. F. T. B. 1. 41.

**2332.** *C. M. Woodward.* Air ship propeller problems. T. S. L. 18. 1

Siehe auch 419; 1013; 1265; 1546; 1565; 2608; 2798; 2799.

### Aéroplane.

**2333.** *Amans.* Surfaces portantes. L. A. V. 43. 72; 122.

**2334.** *Amans.* Sur les flexions et courbures des ailes. M. A. S. M. (2) 4. 15.

**2335.** *Amans.* Sur une nouvelle manoeuvre de gauchissement en vol plané. B. M. A. M. 1910. 121.

**2336.** *Amans.* Résistance aérienne sur des zooptères à différentes vitesses et incidences. B. M. A. M. 1911. 65.

**2337.** *R. Arnoux.* Force et puissance de propulsion des hélices aériennes. L. A. P. 1909. 201; R. A. P. 4. 41.

**2338.** *E. H. Arrault.* Sur la stabilité générale. R. A. P. 4. 45.

**2339.** *R. Bablon.* A propos des surfaces portantes. R. A. P. 1910. 117.

**2340.** *A. Babonneau.* Contribution à l'étude des aéroplanes. L. A. P. 1909. 78; 127.

**2341.** *Babonneau.* Contributo sullo studio degli aeroplani. B. S. A. I. 1909. 348.

**2342.** *G. Banti.* La conquista dello spazio col „più pesante dell'aria“. L. E. R. 1909. 257.

**2343.** *O. Baumgärtel.* Schraubenflieger? M. W. B. 1910. 399.

**2344.** *G. G. Bayoli.* A propos d'altitude. L. A. P. 1909. 223.

**2345.** *A. Bazin.* La question du vol à voile. L. A. P. 1909. 342.

**2346.** *Bazin.* Équilibre et virage des aéroplanes. L. A. P. 16. 187.

**2347.** *A. Berthier.* Les moteurs d'aviation. Co. 58. 243.

**2348.** *E. L. Bertin.* Sur la giration des aéroplanes. L. R. A. 4. 5.

**2349.** *Bertin.* Stabilité des aéroplanes pendant leur giration. B. S. F. P. 1909. 35.

**2350.** *Bertin.* Stabilité transversale d'une aéroplane au cours de ses girations. B. S. F. P. 1909. 18.

**2351.** *H. Blank.* Vorrichtung zur Erhaltung der seitlichen Stabilität. F. S. 1910. 125.

**2352.** *Blériot.* Résistance des hélices aériennes aux grandes vitesses. L. A. P. 16. 118.

**2353.** *E. Bolle.* Present and proposed methods of measuring the efficiency of aéroplane propellers. S. A. 67. Suppl. 147.

**2354.** *J. Bousin.* Le moteur d'aéroplane. L. C. A. 1909. No. 5 n. 6.

**2355.** *A. Boyer-Güillon.* Les vol de hauteur. L. A. P. 1909. 492.

**2356.** *C. Brandt.* Stabilisierung der Flugmaschine durch Tourenveränderung der gegenläufigen Schrauben. F. S. 1909. 390.

**2357.** *Bryan.* Aeronautic principles. S. Am. 66. Suppl. 405.

**2358.** *F. Carlès.* La stabilité des aéroplanes. V. A. 1910. 56.

**2359.** *F. Carlès.* L'aéroplane et son moteur. R. A. P. 1909. 167.

**2360.** *G. Castagneris.* Nuovi ornitopteri. B. S. A. I. 1909. 398.

**2361.** *O. Chanute.* Recent progress in aviation. J. W. S. E. 15. 111.

**2362.** *H. Chatley.* On the speed of flying machines. T. A. 2. 15.

**2363.** *H. Chatley.* Aéroplane problems. S. Am. 67. Suppl. 326; 346.

**2364.** *H. Chatley.* The centre of pressure on aéroplanes. A. L. 1909. 120.

**2365.** *H. Chatley, G. H. Bryan.* Stability of aéroplans. N. 81. 366.

**2366.** *R. Chevreau.* Influence du frottement et de l'épaisseur sur le rendement des ailes d'hélices. A. 1910. 17.

**2367.** *J. P. Chittenden and L. H. Robinson.* Design and construction of aéroplanes. F. L. 2. 58; 73.

**2368.** *B. G. Cooper.* Some principles of propulsion and their application to flying machines. A. N. J. 14. 96.

**2369.** *P. Cornu.* The future of the helicopter. A. N. Y. 3. 18.

**2370.** *Cornu.* Note sur les hélices sustentrices. L. A. P. 16. 262.

2371. *R. W. v. Dallwitz*. Die Tragkraft der Tragdecken von Gleitfliegern, die notwendige Motorstärke und der Wirkungsgrad von ausgeführten Gleitfliegern. F.S. 1909. 95.

2372. *W. Deimler*. Stabilitätsuntersuchungen übersymmetrische Gleitflieger. Z. F. T. B. 1. 49; 64; 91; 106.

2373. *Delage*. L'aviation. R. M. M. P. 182. 209.

2374. *P. Delaporte*. Communication de Mr. Legrand. A. N. P. 1910. 21.

2375. *Demaïson, Bernard et André*. Aéroplane. L. F. A. 15. 444.

2376. *H. Deslandres*. Force et puissance de propulsion des hélices aériennes. R. A. P. 4. 51.

2377. *R. Desmons*. La stabilité automatique des aéroplanes par l'emploi de planes fixes verticaux. A. N. P. 43. 228.

2378. *S. Drzewiecki*. Équations fondamentales pour l'étude expérimentale des aéroplanes. L. A. P. 1909. 155.

2379. *S. Drzewiecki*. La question des hélicoptères. L. A. P. 1909. 315.

2380. *C. Faroux*. Les travaux de M. Brillouin sur la stabilité des aéroplanes. T. A. P. 1910. 17; 33.

2381. *Ferber*. Aeroplane design. S. Am. 65. Suppl. 328.

2382. *Ferber*. Au sujet de la formule de vitesse de Dupuy de Lôme. L. A. P. 1909. 126.

2383. *O. Föppl*. Mitteilungen aus der Göttinger Modellversuchsanstalt. Z. F. T. B. 1. 193.

2384. *L. Fournier*. Gyroscopic balancing of aeroplanes. S. Am. 67. Suppl. 309.

2385. *C. J. D. Fullerton*. The centre of pressure. A. N. J. 14. 30.

2386. *C. J. D. Fullerton*. Position of the centre of gravity; effect of the „disturbing forces“. A. N. J. 14. 32.

2387. *C. J. D. Fullerton*. On the longitudinal equilibrium of a flying machine. A. N. J. 14. 34.

2388. *R. de Gaston*. Effectionements aux hélices aéropropulsives. R. A. P. 4. 19.

2389. *L. Giraud*. Embrayages Hele-Shaw pour aéroplanes et dirigeables. L. F. A. 15. 452.

2390. *A. Goupil*. Gyroplanes. L. A. P. 1909. 220.

2391. *A. Haenig*. Luftschiff- u. Flugmotoren. G. M. T. 1909. 53; 69.

2392. *L. Hargrave*. Rigid stable aeroplanes. A. L. 3. 18.

2393. *F. J. Hargreaves*. An automatic balancer for aeroplanes. A. N. L. 1910. 90.

2394. *C. J. Hendrickson*. The stability of aeroplanes. A. N. Y. 3. 22.

2395. *J. Hoffmann*. Über den Vortrieb von Drachenfliegern mittels Doppelschrauben. A. A. Z. 1909. 47; W. T. B. 1909. 334.

2396. *Hofmann*. Über die Geschwindigkeiten der Flugmaschine. M. W. B. 1909. 910.

2397. *F. Huth*. Der Kraftbedarf eines Fliegers. M. W. B. 1909. 793.

2398. *H. Jansen*. Stabilität der Flugmaschinen. U. M. N. 16. 104.

2399. *K. Jennisch*. Stabilisierungsautomat für Flugmaschinen. A. I. Z. 1910. 6.

2400. *P. R. Jourdain*. Aviation in France in 1908. S. I. 1908. 145.

2401. *R. Kennedy*. Problems of mechanical flight. A. L. 2. 78.

2402. *G. Killat*. Beitrag zur Konstruktion der Drachenflieger und Luftschrauben. M. W. B. 1909. 96.

2403. *G. Killat*. Das Drehmoment des Zweischraubenantriebes. M. W. B. 1909. 166.

2404. *M. A. Lauret*. La stabilité transversale des aéroplanes. V. A. 10. 472; 488.

2405. *G. M. Lavergne*. Aviation. R. I. 40. 158; 163; 175; 182; 196; 206; 213; 222; 235; 245.

2406. *L. Lecornu*. Sur la statique graphique de l'aéroplane. C. R. 148. 470.

2407. *H. Lefort*. Aéroplane mixte. A. N. P. 1910. 43.

2408. *J. Legrand*. Surfaces sustentatrices. A. N. P. 1910. 28.

2409. *G. Lilienthal*. Über Flugtechnik. M. W. B. 1909. 727; 747.

2410. *G. Lilienthal*. Die Weiterentwicklung der Flugtechnik. Z. F. T. B. 1. 66.

2411. *R. Lindsay*. Some recent light aeroplane engines. H. A. 26. 41.

2412. *G. C. Loening*. Comparison of the successful types of aeroplanes. A. N. Y. 6. 43.

2413. *L. Lorin*. L'air et la vitesse. L. A. P. 1909. 222.

2414. *R. F. Macfie*. Head resistance. F. L. 1910. 523.

2415. *de Masfrand*. Théorie math. de l'aéroplane. L. A. P. 16. 303.

2416. *L. J. Massieu*. Disposition de direction instinctive des aéroplanes. L. F. A. 15. 219.

2417. *J. Means*. Grist for the math. mill. A. N. Y. 1909. 101. — *W. R. Turnbull*. 103.



- 2418.** *G. Mees.* Flugmaschine mit Kreiselstabilisierung und Hubschraubensteuerung. Z. M. W. V. 9 333.
- 2419.** *H. Mercier.* Qu'est ce que l'aviation? I. V. A. 28. 949; 1030.
- 2420.** *W. H. Miller.* Der „Gnome-Aeroplanmotor“. Z. P. M. 1. 1440.
- 2421.** *L. Narchis.* L'aéroplane Antoinette. L. T. M. 2. 335.
- 2422.** *A. C. Nesfield.* The design of engines for aeroplanes. A. L. 1909 22; 38; 49; 60.
- 2423.** *Nimführ.* Genetische Darstellung der Zustandsgleichungen der aerodynamischen Flieger. I. A. M. 12. 553.
- 2424.** *E. Pagezy.* En marche de la théorie de aéropplanes. R. A. 74. 345.
- 2425.** *P. Painlevé.* Le triomphe du plus lourd que l'air. L. C. A. 1909. 3.
- 2426.** *F. R. Petit.* Les courbures des surfaces dans les aéropplanes. R. Ae. P. 1910. 14.
- 2427.** *H. Philipps.* Flying machine sustainers and the dipping ront edge. T. A. 1. 529.
- 2428.** *A. Post.* Der neueste Typ der Curtiss-Flugmaschine. Z. P. M. 1. 1163.
- 2429.** *A. Post.* Der Curtiss-Aeroplan. Z. P. M. 1. 1386.
- 2430.** *A. Rateau.* Theorie der Schrauben und Tragflächen der Flugmaschinen. M. W. B. 1910. 448.
- 2431.** *H. Reissner.* Wissenschaftliche Fragen aus der Flugtechnik. M. W. B. 1909. 293; 321; 350; F. S. 1909. 194; 220; I. A. M. 1909. 445.
- 2432.** *H. Reissner.* Betrachtungen über die Lage der Druckresultierenden bei ebenen u. gewölbten dünnen Platten im Luftstrom. F. S. 1910. 158.
- 2433.** *H. Reissner.* Die Schwerpunktlage der Drachenflieger. F. S. 1910. 355.
- 2434.** *H. Reissner.* Die Seitensteuerung der Flugmaschinen. Z. F. T. B. 1. 101; 117.
- 2435.** *O. Rentzsch.* Über die Wahl zur Erhaltung des aerodynamischen Gleichgewichts der Drachenflieger. L. V. 2. 183.
- 2436.** *Rodet.* Equilibre automatique des aéropplanes. Co. 57. B. 326.
- 2437.** *A. V. Roe.* Monoplane and multiplanes. F. L. 2. 39.
- 2438.** *W. Romeier, M. N. Schmidt.* Nochmals die Berechnung der Triebkraft an Flugmaschinen. M. W. B. 1909. 386.
- 2439.** *P. M. N. Schmidt.* Die Berechnung der Triebkraft an Flugmaschinen. M. W. B. 1909. 248.
- 2440.** *Scholler.* Die Kreiselwirkung der Propeller am Aeroplan. N. E. E. 35. 577.
- 2441.** *A. Sée.* Le vol à voile et la théorie du vent luvoyant. L. C. A. 1909. 4; 533; L. A. P. 1909. 242.
- 2442.** *R. Soreau.* La poussée sur la surface portante des aéropplanes. A. N. P. 43. 257.
- 2443.** *N. Stern.* Die konstruktive Entwicklung der Flugmaschinen. Z. F. T. B. 1. 87.
- 2444.** *G. Stewart.* The gnosopic control of aeroplanes. T. A. 1. 473; 501.
- 2445.** *F. G. Stone.* Acroplanes. J. R. A. 36. 325.
- 2446.** *F. G. Stone.* The Maxim aeroplane. J. R. A. 37. 165.
- 2447.** *Strong.* Longitudinal stability of aeroplanes. S. A. 66 Suppl. 292.
- 2448.** *E. Taris.* Les vitesses prochaines en aviation. R. Ae. P. 1910. 1.
- 2449.** *A. P. Thurston.* Calculations relating to the design of a flying machine. A. N. J. 14. 22.
- 2450.** *A. P. Thurston.* Calculs relatifs à l'établissement d'une machine volante. L. A. N. 43. 97.
- 2451.** *J. Urban.* Die durchbrochene Schraube. W. L. Z. 1909. 239.
- 2452.** *O. Ursinus.* Moderner Fliegerbau. F. S. 1910. 325.
- 2453.** *M. Varille.* Le problème de l'ornithoptère. L. A. S. 7. 1.
- 2454.** *Very.* Role of viscosity in air support of moving aeroplane. T. Q. 21. 490.
- 2455.** *H. W. Walden.* Lateral stability devices. A. N. Y. 5. 128.
- 2456.** *Walger.* Erhaltung des Gleichgewichts bei Flugmaschinen. I. A. M. 12. 686.
- 2457.** *G. Wellner.* Die Stabilität und Steuerung der Drachenflieger. I. A. M. 13. 15.
- 2458.** *G. Wellner.* Die Grundbedingungen für den Schwebeflug der Drachenflieger. I. A. M. 1909. 725.
- 2459.** *C. M. Woodward.* Airship propeller problems. A. N. Y. 5. 99.
- 2460.** *W. et O. Wright.* Comment nous avons conquis l'air! R. A. 73. 201.
- 2461.** *Zwick.* Stabilität von Flugapparaten. I. A. M. 12. 1.
- 2462.** *N. N.* The multiple air propeller. S. Am. 99. 244.

### Beleuchtung.

- 2463.** *R. Bernoulli.* Beleuchtungskunst. Z. B. W. B. 1909. 356.
- 2464.** *P. Blagg.* Notes on illumination and illuminating engineering. E. F. 3. 131.

**2465.** *H. Lux.* Die Messung des Glanzes. Z.B.W.B. 1910. 109.

**2466.** *W. E. Sumpner.* The direct measurement of the total light emitted from a lamp. I.E.L. 3. 323.

**2467.** *N. N.* Über indirekte Beleuchtung. Z.G.H.W. 15. 491.

Siehe auch 2494.

#### Photographie.

**2468.** *A. Byk.* Über G. Lippmanns Reliefphotographie. P.Z. 10. 326.

Siehe auch 2666; 2669; 2708; 2865; 2885.

#### Heizung.

**2469.** *D. R. Bacon.* Calculations for heating a concrete house. H.V.M. 7. 16.

**2470.** *Berlowitz.* Berechnung von Heiz- und Kühlapparaten. Z.A.K. 3. 185.

**2471.** *Casmey.* Warming and ventilation. H.V.M. 5. No. 3. 16.

**2472.** *F. K. Davis.* Example of high efficiency of heating plant with reduced air leakage. H.V.M. 7. 25.

**2473.** *J. M. Esmarch.* Nogle bemærkninger om beregningen af de varmemængder som er nødvendige til opvarmning af bygninger. I.K. 18. 181.

**2474.** *L. Fabre.* Le détermination automatique et l'enregistrement du pouvoir calorifique des gaz. M.S.Q. 1909. 649.

**2475.** *W. M. Grosvenor.* Calculation for heat loss from pipes. H.V.M. 1909. 1.

**2476.** *J. D. Hoffmann.* Design of furnace heating system. H.V.M. 1909. 18.

**2477.** *J. Kelling.* Bestimmung der Rohrweiten für Warmwasserheizungen. H.T.R. 14. 17; 205; 219.

**2478.** *W. Kent.* Performance of heating guarantees. H.V.M. 7. 6.

**2479.** *F. Kleinschmidt* and *J. C. Atchinson.* Heat insulation and efficiency of electric heating apparatus. M.W.M. 46. 179.

**2480.** *J. P. Lisk.* Steam heating system in commun use. P.T.E. 32. 480.

**2481.** *Montel.* Teoria di un termosifone a rapida circolazione. Pol. 56. 129.

**2482.** *H. Roose.* Le chauffage par la vapeur d'échappement. C.I.S. 3. 82.

**2483.** *Whitten.* The effect of wind on heating and ventilation. H.V.M. 5. No. 11. 4.

Siehe auch 1948.

#### Elektrische Leitung.

**2484.** *G. Mattausch.* Die Methode von Frick zur Berechnung elektrischer Leitungsnetze. S.E.Z. 1910. 29; 48; 62.

#### Elektrische Kraftübertragung.

**2485.** *P. Pietsch.* Über die Übertragung der Energie in die Ferne (tschech.) C. 40. 264.

Siehe auch 907; 1282.

#### Elektrische Eisenbahnen.

**2486.** *M. Abraham.* Zur Theorie der Wirbelstrombremsen. V.I.M.C. 4. C. 73.

**2487.** *Gleichmann.* On the question of electric traction. B.I.R.A. 1910. 1071.

Siehe auch 799; 2511; 2548.

#### Elektrische Schalteinrichtungen.

**2488.** *A. R. Cheyney.* The modern oil switch with special reference to systems of moderate voltage and large Ampère capacity. P.A.I.E.E. 29. 959.

**2489.** *M. B. Field.* High-tension switch gear. P.S.W.I.E. 26. 1283.

#### Dynamomaschinen.

**2490.** *J. Schmidt.* Die Parallelschaltung von Gleich- u. Wechselstromgeneratoren unter besonderer Berücksichtigung der Ein- und Dreiphasen-Wechselstrommaschinen. H.E.Z. 1909. 458; 465; 475.

**2491.** *E. Schulz.* Schwierigkeiten bei Wendepolmaschinen. E.T.A. 1910. 687.

Siehe auch 2538; 2787.

#### Gleichstrommaschinen.

**2492.** *A. Brückmann.* Turbogeneratoren. H.E.Z. 1910. 79; 91.

**2493.** *J. W. Burleigh.* A new field-magnet system. E.R.L. 65. 876.

**2494.** *A. L. Clough.* Self regulating dynamos for auto lighting and ignition. H.A. 24. 284.

**2495.** *F. P. M. Dermott.* Reversing direct-current machines. P.T.E. 30. 679.

**2496.** *J. N. Dodd.* Auxiliary poles for direct current machines, their electrical design and methods of testing. P.A.I.E.E. 1909. 467.

**2497.** *B. FischeL.* Berechnung der Vorschaltwiderstände für einen Gleichstrom-Hauptstrommotor. Ö.P.Z. 1909. 1.

**2498.** *P. Girault.* Sur les propriétés autorégulatrices des génératrices à courant continu série et shunt actionnées à couple constant. I.E.P. 1909. 225.

**2499.** *J. W. Himmelsbach.* Efficiency test of 3-wire balancing dynamos. P.T.E. 30. 1000.

**2500.** *N. Iwanow.* Gegenwärtiger Stand der Frage nach der Kommutation in Gleichstromdynamos. (russ.). B. I.P.P. 11. 713; 12. 97.

2501. *A. Meynier.* Dynamo à circuit ouvert pour grandes intensités et grandes vitesses. I.E.P. 1909. 275.

2502. *Pohl.* Development of turbo-generators. J.I.E.E. 40. 239.

2503. *Swyngedauw.* La réaction d'induit dans les dynamos à courant continu. B.S.I.E. 8. 361.

2504. *W. A. Toiv.* Electric current generators. E.E.L. 44. 362.

2505. *Voisin.* Théorie de la commutation des machines à courant continu sans décalage. L.E.P. 36. 52.

### Wechselstrommaschinen.

2506. *A. Adams.* Electromotive force wave-shape in alternators. P.A.I.E.E. 1909. 791.

2507. *P. Boucherot.* Appareils et machines à courant et mouvement alternatifs. J.E.P. 1909. 373.

2508. *R. Caro.* Reóstatos para máquina serie. E.E.M. 1909. 210; 228; 249; 273; 304

2509. *Dalemont et Herolt.* Réaction d'induit et compoundage des alternateurs. B.S.I.E. 1909. 691.

2510. *J. F. Foote.* „Phasing“ alternate current generators. P.T.E. 30. 1048.

2511. *Henry.* Les alternateurs monophasés de traction. L.E.P. 1909. 390; 1910. 6; 42; 71.

2512. *de Leyma.* Magnétos Nilmélior. I.V.A. 28. 823.

2513. *T. R. Lyle.* Theory of the alternating current generator. A.A.A.S. 12. 66.

2514. *J. H. Montpellier.* Alternateur compound Système Marius Latour. L.E.P. 1910. 49.

2515. *Rogers.* Testing of alternate-current generators. E.M.L. 10. 178.

2516. *W. Rosenberg.* Parallel operation of alternators. P.E.L. 1909. 164.

2517. *M. Sainturat.* La magnéto à haute tension Mea. V.A. 10. 201.

2518. *P. S. Tice.* How a magneto makes electricity. A.C.L. 23. 325; 357; 404.

2519. *S. G. Winn.* Synchronizing alternators. C.M.N.Y. 38. 153.

2520. *W. Wolf.* Neuere Anordnungen zur Bekämpfung der Funkenbildung bei Wechselstrom-Kommutatormaschinen. H.B. 1909. 365; 379.

### Drehstrommaschinen.

2521. *G. Kapp.* Experimental analysis of armature reaction. J.I.E.E. 42. 703.

### Elektromotoren.

2522. *E. F. W. Alexanderson.* Repulsion motor with variable speed shunt characteristics. P.A.I.E.E. 1909. 643.

2523. *P. Bary.* The electric motor with variable speed on the „B. V. D.“ system. T.R.W. 28. 111.

2524. *F. Boudaud.* Moteurs monophasés à collecteurs et leurs applications industriels. L.T.M. 2. 10.

2525. *F. Boudaud.* Moteurs monophasés à collecteurs et leur applications industrielles. T.M.P. 2. 10.

2526. *A. O. Buckingham.* The single phase motor. E.R.L. 1909. 446.

2527. *S. B. Charters and W. A. Hillebrand.* Reduction incapacity of poly-phase motors due to unbalancing in voltage. P.A.I.E.E. 1909. 565.

2528. *Creedy.* The circle diagram of the synchronous motor. E.E.L. 42. 157.

2529. *F. B. Crocker and M. Arendt.* Direct-current series motors. G.E.R. 1909. Nr. 8.

2530. *F. B. Crocker and M. Arendt.* Direct-current motors. G.E.R. 1909. Nr. 9.

2531. *H. C. Guntan.* Run curves and the economical control of intermittently operated electric motors. P.O.E.E.J. 3. 149.

2532. *R. H. Fenkhausen.* The installation of direct-current motors. P.T.E. 30. 282.

2533. *R. H. Fenkhausen.* Location and repair in direct current motors. P.T.E. 30. 832.

2534. *A. Fins'er.* Beispiel für die Untersuchung eines Drehstrommotors unter spezieller Berücksichtigung des Diagrammes von Heyland. S.E.Z. 1909. 285; 297.

2535. *Fischer-Hinnen.* Über Vertikal-motoren mit besonderer Berücksichtigung der Lagerkonstruktionen. H.Z. E. 1910. 343.

2536. *Fynn.* Torque conditions in alternate current motors. J.I.E.E. 40. 181.

2537. *Hartnell.* Heating of ventilated and enclosed motors. J.I.E.E. 91. 490.

2538. *W. B. Hird.* Interpole generators and motors. E.E.L. 44. 455.

2539. *Lehrmann.* Les moteurs à pôles de commutation. I.T.C.F. 4. 47.

2540. *A. S. Mc Allister.* Improvement of power-factor and commutation conditions in single-phase series motors. J.F.I. 168. 40.

2541. *H. M. Nichols*. Date on direct-current motors. E.R.C. 55. 210.

2542. *E. Perdu*. Étude des moteurs alternatifs monophasés et polyphasés à collecteur. T.M.P. 2. 129.

2543. *C. Rey*. Étude sur le rôle des harmoniques dans le démarrage des moteurs asynchrones à cage d'écuréuil. I.E.P. 1909. 461.

2544. *C. Robbins*. Economical features of electric motor applications. J.A.S.M. E. 32. 587.

2545. *Russel*. Single-phase motor versus multiphase motors. W.E. 42. 216.

2546. *Spackeler*. Neuere Einphasenwechselstrommotoren und ihre Anwendbarkeit im Bergbau. G.E. 45. 1037; 1077; 1110.

2547. *W. Stranklin* and *S. S. Seyfert*. On the space economy of the single phase series motor. P.A.I.E.E. 29. 1.

2548. *A. Wulff*. Bestimmung der Erwärmung eines zum Zug bestimmten Elektromotors. (russ.). B.I.L.P. 12. 503.

2549. *N. N.* Elektromotor für hochgespannten Gleichstrom. H.E.Z. 1909. 426.

Siehe auch 2000—02; 2009; 2497.

### Induktionsmotoren.

2550. *F. Creedy*. A sketch of the theory of the adjustable-speed, single-phase, shunt induction motor. P.A.I.E.E. E. 1909. 831.

2551. *R. H. Fenkhausen*. The single phase induction motor. P.T.E. 31. 229.

2552. *G. H. Fletcher*. The Hopkinson test applied to induction motors. E.R. L. 67. 206.

2553. *A. M. Gay*. The heating of induction motors. P.A.I.E.E. 1909. 605.

2554. *Hellmund*. Design of induction motors. E.R.N.Y. 52. 172.

2555. *Henry*. Moteurs d'induction. L.E.P. 1909. 355.

2556. *Henry*. Les moteurs d'induction à plusieurs vitesses. I.E.P. 19. 12.

2557. *A. S. Langsdorf*. The current locus of the single-phase induction motor. P.A.I.E.E. 1909. 731.

2558. *J. W. Rogers*. Characteristics of induction electric motors. C.M.N.Y. 36. 257.

2559. *C. F. Smith*. Relation between the stator and rotor circuits of the single phase induction motor. E.E.L. 45. 91.

2560. *H. C. Specht*. Multi-speed drive by induction motors. E.J. 6. 731.

2561. *Stevenson*. Polyphase induction motors. J.I.E.E. 41. 676.

### Elektrische Beleuchtung.

2562. *J. Newbery*. Estudio sobre la fabricación de la lampara eléctrica incandescente llamada Zirconium. A.S.A. 65. 218.

### Telephon.

2563. *L. Cohen*. The influence of terminal apparatus on telephonic transmission. B.B.S.W. 5. 231.

2564. *A. E. Kennelly* and *W. L. Upson*. The Humming telephone. P.P.S. 47. 329.

2565. *Q. Majorana*. Ricerche ed esperimenti di telefonia elettrica senza filo. R.A.L.R. (6) 18. A. 15.

2566. *J. W. Nicholson*. Inductance and resistance in telephone and other circuits. P.M. (6) 18. 937.

2567. *J. Perry*. Telephone circuits. N. 83. 118; P.M. (6) 19. 673.

2568. *H. J. Reiff*. The Majorana system of wireless telephony. E.E.L. 44. 494.

2569. *H. T. Simon*. Über ein neues elektrodynamisches Telephon. P.Z. 10. 310.

Siehe auch 15; 2578; 2685; 2593; 2600; 2601; 2610; 2622; 2841.

### Radiotelegraphie.

2570. *D. Aman*. Wireless telegraphy and strategy. U.S.M. 1909. 169.

2571. *J. Anizan*. La cryptographie et la télégraphie sans fil. J.T.P. 1909. 25.

2572. *L. W. Austin*. On the advantages of a high spark frequency in radiotelegraphy. B.B.S.W. 5. 153.

2573. *K. Bangert*. Eigenschaften der wichtigsten Detektoren der drahtlosen Telegraphie. P.Z. 11. 123.

2574. *Bardeloni*. Radiotelegrafia sistemi Poulsen. R.A.G. 25. 36.

2575. *P. Barreca*. Alcune osservazioni a proposito del sistema Bellini-Tosi e di altri analoghi per la telegrafia senza fili dirigibile. A.A.E.I. 12. 571.

2576. *E. Bellini*. Sistema di telegrafia senza fili dirigibile Bellini-Tosi. A.A.E.I. 312. 687.

2577. *E. Bellini*. Das Fundamentalprinzip des Systems für gerichtete drahtlose Telegraphie und Telephonie Bellini-Tosi. J.D.T. 2. 608.

2578. *Bellini-Tosi*. Télégraphie et téléphonie sans fil dirigeables. B.S.I.E. 8. 707.

2579. *E. Bellini* and *A. Tosi*. A directive system of wireless telegraphy. P.P.S.L. 21. 305.

2580. *J. Bethenod*. Über den Empfang elektromagnetischer Wellen in der Radiotelegraphie. J.D.T. 2. 603; 3. 302.
2581. *F. Brand*. Gerichtete drahtlose Telegraphie nach Bellini u. Tosi. T.R. B. 1909. 709.
2582. *F. Braun*. Gerichtete drahtlose Telegraphie. J. T. T. 1. 1. — *L. Mandelstam* 291.
2583. *Charmoille*. Quelques mots sur la télégraphie sans fil. J. M. Y. 33. 189; 204.
2584. *M. Childs*. Wireless telegraphy on board ship. E.M.L. 1909. 197.
2585. *T. E. Chark*. Wireless telegraph and telephone. J.A.E.S. 40. 329.
2586. *A. E. R. Colette*. Radiotelegrafia. D.I.G. 1909. 609.
2587. *A. de Courcy*. The Bellini and Tosi directional wireless system. E.R.C. 55. 838.
2588. *A. Dercis*. La télégraphie sans fil. L.L.A. 1909. 161.
2589. *W. Dubilier*. A transmitter for wireless telephony. T.E.L. 4. 53.
2590. *E. Ducretet*. Transmetteurs et récepteurs pour la télégraphie sans fil. B.S.F.P. 1908. 16\*.
2591. *Erskine-Murray*. Wireless communications over sea. E.R.N.Y. 52. 4.
2592. *R. A. Fessenden*. A brief history of wireless telegraphy. S.Am. 67. Suppl. 18; 44; 60.
2593. *R. A. Fessenden*. Télégraphie et téléphonie sans fil. I.E.P. 17. 321.
2594. *J. A. Fleming*. Some qualitative measurements in connection with radiotelegraphy. J.I.E.E. 44. 344.
2595. *J. A. Fleming*. Über einige quantitative Messungen in der Radiotelegraphie. J.D.T. 3. 356.
2596. *J. A. Fleming*. Neue Beiträge zur Entwicklung der Telegraphie mittels el. Wellen. J.T.T. 1. 68.
2597. *A. Gradewitz*. Ein neuer Radiator für drahtlose Telegraphie. S.E.Z. 1909. 444.
2598. *F. Hack*. Die Ausbreitung ebener elektromagnetischer Wellen längs eines geschichteten Leiters, besonders in den Fällen der drahtlosen Telegraphie. J.D.T. 2. 165.
2599. *W. Hahnemann*. Die Meßmethode, Größe und Bedeutung der Dämpfung in der drahtlosen Telegraphie. J.D.T. 2. 293; 477.
2600. *Henry*. Méthodes actuelles de radiotélégraphie et de radiotéléphonie. I.E.P. 19. 317.
2601. *O. Jentsch*. Drahtlose Telegraphie u. Telephonie mittels ungedämpfter Wellen. A.P.T. 1909. 281; 309.
2602. *F. Kiebitz*. Gerichtete drahtlose Telegraphie. V.D.P.G. 10. 934.
2603. *F. Kiebitz*. Versuche über drahtlose Telegraphie mit verschiedenen Antennenformen. A.P.L. (4) 32. 941.
2604. *Köhler*. Drahtlose Telegraphie und Telephonie mit ultraviolettem Licht. E.T.A. 25. 481.
2605. *R. Lindemann*. Über die Erzeugung schwach gedämpfter elektrischer Schwingungen durch Stoßerregung und ihre Verwendung in der drahtlosen Telegraphie. H.Z.E. 1910. 10.
2606. *O. Lodge*. Selective wireless telegraphy. N. 80. 381.
2607. *O. Lodge*. Über die allgemeinen Prinzipien der abgestimmten drahtlosen Telegraphie. J.D.T. 3. 1.
2608. *T. Meyenburg*. Die drahtlose Telegraphie im Dienste der Luftschiffahrt. L.S.H. 1910. 111; 123.
2609. *C. C. F. Monckton*. Compressed air spark-gubs of wireless telegraphy. E.Eg.L. 6. 216.
2610. *E. Nesper*. Drahtlose Telegraphie und Telephonie. E.T.A. 1909. 677; 699; 711; 738; 760; 770.
2611. *E. Nesper*. Die Entwicklung der Apparatur in der drahtlosen Telegraphie. J.D.T. 2. 319; 3. 376.
2612. *E. Nesper*. Über Detektoren der drahtlosen Telegraphie. V.T.W. 1909. 505; 592; 611.
2613. *P. O. Pedersen*. Über den Empfang kontinuierlicher elektromagnetischer Wellen in der Radiotelegraphie. J.D.T. 3. 283.
2614. *G. W. Pickard*. Determination of wireless wave fronts. E.R.N.Y. 53. 494.
2615. *G. Quinke*. Drahtlose Telegraphie. V.G.H. (2) 8. 506.
2616. *M. Reithoffer*. Neuerungen in der drahtlosen Telegraphie. S.V.N.W. 50. 181.
2617. *A. G. Rossi*. Der Konvektor. P.Z. 10. 549.
2618. *J. E. Taylor*. The early history of wireless telegraphy. P.O.E.E.J. 3. 124.
2619. *J. Würschmidt*. Über die Anregbarkeit von Entladungsröhren mit Glühkathode und ihre Verwendbarkeit für die drahtlose Telegraphie. V.D.P.G. 12. 361.
2620. *J. Zenneck*. Über die Wirkungsweise der Sender für gerichtete drahtlose Telegraphie. P.Z. 9. 553.
2621. *R. Zieme*. Elektrische Wellen und drahtlose Telegraphie. W.S.D.B. 26. 931.

Siehe auch 2565; 2568.

**Kabel.**

2622. *A. Zeleny* and *A. P. Andrews*. The capacity of paper condensers and telephone cables. P.R. 27. 65.

2623. *N. N.* Some notes on cables. E.F. 3. 109.

Siehe auch 2835.

**Mechanische Technologie.**

2624. *E. Stübler*. Das Fräsen von Schraubengewinden. Z.S. 57. 271.

Siehe auch 629; 754.

**Instrumentenkunde.**

2625. *Amans*. Hélice propulsive zoop-tère. M.A.S.M. (2) 3. 469.

2626. *G. v. Bezold*. Wissenschaftliche Instrumente im Germanischen Museum. A.N.G.N. 17. 21.

2627. *E. Ia dau*. Dioptrograph und Diagraph in der anthropologischen Technik. (russ.). S.N.J. 17. 1.

2628. *E. Oddone*. Sugli accelerometri a liquido. R.A.L.R. (5) 19. 277.

2629. *P. Schreiber*. Allgemeine Theorie der Wagemanometer. S.I.D. 1908. B. 7.

2630. *E. M. Wedderburn* and *W. Watson*. Observations with a current meter in Loch Ness. P.R.S.E. 29. 619.

**Mechanische Instrumente.**

2631. *L. E. Akeley*. An acceleration apparatus. S.S.M. 9. Nr. 5.

2632. *E. G. Coker*. A laboratory machine for applying bending and twisting moments simultaneously. P.P.S.L. 21. 615.

2633. *J. Doyen*. Ergomètre d'inertie R.I.P. 1909. 95.

2634. *E. Maey*. Schulapparate für Mechanik. Z.P. 21. 153.

2635. *Wangemann*. Schießapparate. J.W.P.V. 38. 128.

2636. *A. Wendler*. Ein Umkehr-Volumeter zur Raumbestimmung kleiner Körper. Z.P. 22. 237.

2637. *J. Zeleny* and *L. W. Mc Khan*. An improved form of volumenometer. P.R. 30. 189.

Siehe auch 1062; 1126; 1668; 1683; 2628.

**Physikalische Instrumente.**

2638. *J. Aitken*. On a simple radioscope and a radiometer for showing and measuring radioactivity. P.R.S.E. 29. 471.

2639. *H. W. Fischer*. Differentialtensimeter mit Differenzmanometer. J.S.G. 87. 105.

2640. *B. Krisch*. Über einen Spiegelapparat zur Messung elastischer Längenänderungen. M.L.T.H.W. 1908.

**Wagen.**

2641. *J. Boyer*. Une nouvelle balance de précision à pesées rapides. Co. 59. 41.

2642. *J. C. Cuff*. The cam-lever balance. T.N.Z.I. 42. 192.

2643. *Mansion*. Sur le procédé de la quadruple pesée. A.S.B. 33 A. 178 — *Goedseels* 34. A. 103.

2644. *J. H. Poynting* and *G. W. Todd*. On a method of determining the sensibility of a balance. P.P.S.L. 21. 926.

Siehe auch 2243; 2938.

**Wellenmaschine.**

2645. *R. Bernoulli*. Eine Wellenmaschine für stehende Wellen. V.N.B. 93. 321.

2646. *L. Kann*. Zur Priorität eines Wellenapparates zur Zusammensetzung beliebig vieler Wellen während ihres Verlaufes. P.Z. 9. 468.

**Luftpumpe.**

2647. *H. Bauer*. Über eine einfache Hg.-luftpumpe ohne Hähne, Schiffe und Barometerröhren nach dem Steigerrohrprinzip. Z.P. 23. 91.

2648. *A. Beutell*. Automatische Quecksilberpumpe für hohes Vakuum. V.D.V. S. 5. 227.

2649. *A. Co tini*. Una nuova macchina di rarefazione a mercurio. A.A.P.M. 21. A. 157.

2650. *Dominik*. Eine neue Motorpumpe. M.W.B. 1909. 726.

2651. *F. Florio*. Nuove macchine pneumatiche rotative a mercurio. N.C. P. (5) 16. 82.

2652. *A. Gawalowski*. Die Absorptionsluftpumpe. B.P.B. 1910. 178.

2653. *G. Gehlhoff*. Die neueren Luftpumpen. H.B. 1909. 345; 357.

2654. *Klein*. Nouvelle pompe à mercure automatique. B.S.F.P. 1909. 73; S.F.P. 298. 2.

2655. *P. Klein*. Pompe à mercure automatique. B.S.F.P. 1909. 285; J.P. (4) 9. 104.

2656. *U. v. Reden*. Über eine neue Hg.-luftpumpe und ein neues Vakuummeter. P.Z. 10. 316.

2657. *U. v. Reden*. Hg.-luftpumpe u. Vakuummeter. E.C.Z. 16. 98.

2658. *Schmidt-Leybold*. Sur la nouvelle machine pneumatique à mercure du Dr. Gaede. A.S.B. 33. A. 120.

**Optische Instrumente.**

2659. *J. Barnes*. A simple Fabry and Perot interferometer. N. 80. 187; S. (2) 30. 29.

2660. *W. F. Barrett*. The new form of polarimeter for the measurement of the refractive index of opaque bodies. P.S.D. (2) 12. 198.

2661. *C. D. P. Davies*. On the testing of parabolic mirrors. M.N.A.S. 69. 355.

2662. *C. Fény*. La mesure précise du grossissement vrai des instruments d'optique. B.S.F.P. 1909. 79.

2663. *E. Gehrcke*. Über ein planparalleles Interferenzprisma. V.D.P.G. 11. 141.

2664. *J. Königsberger*. Geradsichtiges Prisma zur Projektion von Spektren. P.Z. 9. 727; Z.P. 22. 111.

2665. *P. Krüss*. Das Krüss-epidiaskop. J.P.R. 23. 115.

2666. *J. R. Milne*. A special form of photographic camera for recording the readings of the scales of scientific instruments. P.R.S.E. 29. 176.

2667. *A. H. Pfund*. A simple interferometer for showing the Zeeman effect. P.R. 28. 446.

2668. *Rayleigh*. The theory of Crooke radiometer. N. 81. 69.

2669. *G. Sacco*. Aberrazioni e riflessioni nocive prodotte dai filtri di luce negli apparecchi fotografici. A.A.T. 43. 767; 856.

2670. *P. Weinmeister*. Die Achse des sphärischen Hohlspiegels. Z.P. 22. 370.

2671. *L. Zehnder*. Über ein neues Halbschattenpolarimeter. A.P.L. (4) 26. 985.

Siehe auch 2767.

**Linsen.**

2672. *J. W. Gordon*. On the focus of a lens. O.L. 38. 103.

2673. *I. G. Priest*. A new method of determining the focal length of a converging lens. B.B.S.W. 5. 483.

**Stereoskop.**

2674. *F. G. Daily*. A stereoscopic illusion. P.R.S.E. 30. 551.

2675. *D. P. Boatman* and *R. J. Lucking*. On some measurements of stereoscopic power. O.L. 39. 217.

2676. *Czémier*. Appareils stéréoscopiques. Stéréogrammes. Stéréoscopes. P.R. P. 1910. 37.

2677. *T. Dokulil*. Fortschritte und Neuerungen auf dem Gebiet der Stereoskopie. J.P.R. 22. 233; 23. 499.

2678. *E. M. Langley*. Perspective through the stereoscope. M.G.S. 4. 115; 159.

2679. *M. v. Rohr*. Stereoskopie. P.I. 1909. 946.

2680. *W. Scheffer*. Eine allgemein gültige stereoskopische Korrektionsformel. J.P.R. 21. 71.

2681. *W. Schmidt*. Über binokulares Sehen und Stereoskopie. P.R.V. 1909. 237.

Siehe auch 2659.

**Mikroskop.**

2682. *C. Beck*. Theory of the microscope. J.S.A.L. 56. 105.

2683. *E. Clerici*. Disposizione semplificata per determinare l'indice di rifrazione al microscopio. R.A.L.R. 18. A. 351.

2684. *N. Jadanza*. Il cannocchiale di Galilei adoperato come microscopio. A. A.T. 43. 685.

2685. *S. Landau*. Zur experimentellen Prüfung der Abbeschen Lehre von der mikroskopischen Bilderzeugung. P.Z. 10. 351.

2686. *H. Lebrun*. La méthode rotative en microscopie. Z.W.M. 1909. 223.

2687. *C. Leins*. Mikroskop mit gemeinsamer Nikoldrehung in vereinfachter Form. Z.K.M. 47. 377.

2688. *W. Nikitin*. Drehbarer Kompensator für Mikroskope. Z.K.M. 47. 378.

2689. *J. Rheinberg*. Stereoscopiceffect and a suggested improvement in binocular microscopes. J.Q.C. 9. 371.

2690. *Teal*. Improved microscope. J. F.I. 166. 197.

2691. *C. Viola*. Sulla determinazione dell' indice di rifrazione al microscopio. R.A.L.R. (5) 19. A. 192.

**Spektroskop.**

2692. *C. M. Clark*. A substitute for cross wires in the spectroscope. S. (2) 31. 344.

2693. *H. E. J. G. du Bois*, *G. J. Elias* et *F. Löwe*. Un appareil spectral autocollimateur de grande clarté, en même temps monochromateur. A.N. (2) 14. 81.

2694. *P. Joye*. La technique du réglage d'un spectrographe. J.P. (4) 9. 491.

2695. *F. Löwe*. Gitterspektroskop mit nach Wellenlänge bezifferter Mikrometerschraube. V.D.P.G. 10. 671; P.Z. 9. 752.

2696. *F. Löwe*. Spectroscope à réseau muni d' une vis micrométrique dont le tambour est divisé en longueurs d' onde. R.M.C. 13. 98.

2697. *O. Lummer*. Demonstration des Zeemanschen Phänomens am Perolfabryschen Interferenzspektroskop. J.S.G. 86. 4.

2698. *Schumm*. Spektroskop. A.P.B. 1908. 13.

2699. *H. Stansfield*. The Echelon spectroscope, its secondary action and the structure of the green Hg line. P.P.S.L. 21. 822.

Siehe auch 2664; 2715; 2872.

### Photometer.

2700. *B. Bloch*. The simple explanation and calculation of fundamental photometrical terms. I.E.L. 1909. 682.

2701. *Blondel*. Photometer. E.T.A. 25. 802.

2702. *v. Czudnochowski*. Photomètre par l'étude des sources lumineuses de coloration variée. I.E.P. 17. 297.

2703. *E. Féry*. Photomètre à lecture directe. J.P. (4) 7. 632; B.S.F.P. 1908. 40.

2704. *H. Krüss*. An integrating photometer. I.E.L. 1909. 710.

2705. *J. D. Maddrell*. Calibration of a wedge photometer. A.J.C. 22. 138.

2706. *C. P. Matthews*. An integrating photometer for glow lamps and sources of like intensity. T.A.J.E.E. 19. 1465.

2707. *S. Nowacki*. Die Betriebsphotometer. E.T.A. 1909. 737.

2708. *J. A. Parkhurst*. Precautions necessary in photographic photometry. A.J.C. 31. 15.

2709. *S. Plivelic*. Ein Vorschlag zur Konstruktion eines absoluten Photometers. E.M.B. 1909. 129.

2710. *V. Quittner*. Lichtmessung. P. 18. 353; 373.

2711. *S. Růžicka*. Die relative Photometric. A.H.M. 63. 37.

2712. *C. G. Shaad*. A portable photometer for measuring the intensity of street lighting sources. I.E.N.Y. 4. 432.

2713. *H. Strache*. Modern photometry. I.E.L. 1909. 695.

2714. *J. Suiłkowski*. Aus dem Gebiete der Photometrie. P.M.B. 44. 457.

2715. *J. Thovert*. Spectrophotomètres et photométrie des sources colorées. J.P. (4) 8. 835.

2716. *P. J. Waldram*. The measurement of illumination. B.N. 98. 59.

2717. *W. Wild*. Das Photometrieren verschiedenfarbigen Lichtes. Z.B.W.B. 1910. 1.

2718. *N. N. Portable photometer for filament lamps*. E.E.L. 45. 122.

Siehe auch 277; 422.

### Thermische Instrumente.

2719. *W. Louguinine*. Description d'un nouvel appareil pour la détermination des chaleurs spécifiques à diverses températures. A.S.G. (4) 29. 29.

### Thermometer.

2720. *A. L.* Changing one thermometer reading to another. P.T.E. 30. 926.

2721. *F. Allihn*. Über des Ansteigen des Eispunktes bei Thermometern aus Jenaer Normalglas. C.Z. 33. 301.

2722. *H. Alt*. Grundlagen und Hilfsmittel der technischen Temperaturmessung. B.I.G.B. 1906. 409; 417.

2723. *L. C. W. Bonacina*. Use of freely-exposed thermometers. Q.J.M.S. 36. 235.

2724. *Brentini*. Dispositivo per la misurazione delle temperature superiori a 2000°. R.I.S. 1. 343.

2725. *H. L. Callendar*. Electrical recording thermometers for clinical work. P.P.S.L. 22. 220.

2726. *A. L. Day* and *J. K. Clement*. Some new measurements with the gas thermometer. A.J.S. (4) 26. 405.

2727. *J. Duclaux* et *A. Hamelin*. Une modification du thermomètre à mercure. J.P. (4) 9. 600.

2728. *A. Espinosa de los Monteros*. Über Verbesserungen an Hitzdrahtluftthermometern. J.D.T. 1. 323.

2729. *P. Eydam*. Temperaturmessung. G.Z.B. 6. 201.

2730. *W. Gorczyński*. Über den Einfluß der Glasumhüllung auf die Angaben der Strahlungsthermometer und über die Modifikation der Grundformel für das Aktinometer System Angström-Chwolson. (poln.). T.W. 20. 199.

2731. *J. H. Hart*. Technical thermometry. M.W.M. 45. 15; E.C.I. 6. 453.

2732. *J. H. Hart*. Modern methods of temperature measurements. C.M.N.Y. 36. 99.

2733. *Hartmann* und *Braun*. Elektrisches Widerstandsthermometer. S.E.Z. 5. 133.

2734. *L. Holborn* und *F. Henning*. Über das Pt-thermometer und den Sättigungsdruck des Wasserdampfes zwischen 50° und 200°. A.P.L. (4) 26. 833.

2735. *E. Koenig*. Prüfungsergebnisse betreffend ein elektrisches Widerstandsthermometer. M.G.B. 1907. 217.

2736. *F. Lecont*. Thermomètres spéciaux. A.S.G. (4) 26. 167.

2737. *K. Meyer-Bjerrum*. De quelques manuscrits d'Ole Roemer. B.D. (2) 34. 73.



2738. *L. Pyle*. A continuous calorimeter. S. (2) 28. 121. — *H. T. Barnes*. 176.

2739. *J. Rust*. Ein einfaches Doppelthermoskop. Z.L.L. 4. 74.

2740. *Schlamp*. Ein Luftthermometer für Schulzwecke. Z.P. 22. 171.

2741. *J. G. L. Stern*. Eine neue Form des Platinwiderstandsthermometers und Molekulargewichtsbestimmungen in verdünnten Kaliumnitratschmelzen. Z. P. C. 65. 667.

2742. *S. Valentiner*. Vergleichung der Temperaturmessung nach dem Stefan Boltzmannschen Gesetz mit der Skala des N-thermometers bis 1600°. A.P.L. (4) 31. 275.

2743. *C. W. Waidner* and *G. K. Burgess*. Pt resistance thermometry at high temperatures. B.B.S.W. 6. 149.

2744. *N. V. Der Thermograph*. S.E. Z. 1909. 277.

Siehe auch 2869; 2944.

### Pyrometer.

2745. *L. W. Bahney*. Adjustable pyrometer stand. M.S.P. 98. 629.

2746. *Drawn*. Verbesserungen an elektrischen Pyrometern. T.I.Z. 32. 102.

2747. *E. Brown*. A new electric pyrometer. C.W.I. 50. 272; Br. C. 29. 443; I.A. 82. 846.

2748. *G. K. Burgess*. The estimation of the temperature of Cu by means of optical pyrometers. B.B.S.W. 6. 111.

2749. *C. Conam*. Auswahl und Anwendung des Pyrometers. Z.P.M. 1. 560.

2750. *C. R. Darling*. Workshop pyrometry. M.W.M. 45. 293; 46. 6; 31; 53.

2751. *F. H. Davies*. The electrical pyrometer. E.E.L. 44. 369.

2752. *C. E. Foster*. The radiation pyrometer. P.E.L. 40. 489.

2753. *R. Grimshaw*. Neues Pyrometer. E.Z.B. 30. 757.

2754. *Harris*. Electric pyrometers for manufacturing processes. E.M.L. 9. 275.

2755. *P. Longmuir* and *T. Swinden*. The Bristol recording pyrometer. E.R. L. 1909. 292.

2756. *F. F. Northrup*. Pyrometers. E.C.I. 1909. 62.

2757. *S. H. Stupakoff*. Pyrometry in the annealing room. F. 35. 58.

2758. *C. B. Thwing*. A new radiation pyrometer. J.F.I. 165. 363.

2759. *N. N.* The Brow electric recording pyrometer. I.A. 84. 176.

2760. *N. N.* Pirometri termoelctrici. L.E.R. 1909. 221.

2761. *N. N.* The new Brown pyrometer. T.C.W. 52. 169.

2762. *N. N.* A new form of Féry radiation pyrometer. P.W.L. 14. 1081.

2763. *N. N.* The Bristol quick-reading electric pyrometer. I.A. 89. 625.

Siehe auch 2724.

### Bolometer.

2764. *R. Bernoulli*. Ein neues Bolometer. V.N.B. 93. 321.

2765. *M. Seddig*. Ein neues Bolometer. Z.E. 15. 753; S.E.D. 29. 1084.

### Elektrische Instrumente.

2766. *C. V. Drysdale*. The use of shunts and transformers with alternating current measuring instruments. P. P.S.L. 21. 235.

2767. *H. du Bois*. Demonstration einiger neuer Apparate. V.D.P.G. 11. 707.

2768. *B. Gätli*. Zur Kenntnis des Barretters. P.Z. 10. 322.

2769. *B. Gätli*. Die Empfindlichkeit des Barretters. P.Z. 10. 897. — *H. Zölllich*. 899.

2770. *W. Kempe*. Studien zum Barretter. M.P.V.H. 19.

2771. *J. Köhler*. Eine Leydener Flasche mit veränderlicher Kapazität. Z.B. 21. 393.

2772. *T. H. Laby*. A string electrometer. P.C.P.S. 15. 106.

2773. *T. Neuhaus*. Über Empfindlichkeit der Barretter und die Zuverlässigkeit der mit ihnen ausgeführten Messungen. M.P.V.H. 14.

2774. *F. Piola*. L'interruttore di Wehnelt con corrente alternata. R.A.L.R. (5) 17. B. 316.

2775. *T. W. Richards*. Note concerning the silver coulometer. P.A.Bo. 44. 91.

2776. *L. Tveri* e *U. Cialdea*. Su un rivelatore di onde elettriche. R.A.L.R. (5) 17. B. 274.

Siehe auch 2638.

### Elektrisierungsmaschine.

2777. *Köhler*. Influenzmaschine. Z.S. T. 1908. 490.

2778. *N. Russeltveldt*. Eine neue Influenzmaschine. P.Z. 9. 443.

### Kondensatoren.

2779. *W. Eickhoff*. Über das Sprühen von Kondensatoren. P.Z. 9. 404.

Siehe auch 1081; 2835.

**Galvanische Elemente.**

2780. *K. Krüse*. Der innere Widerstand eines galvanischen Elements. Z.P. 22. 112.

2781. *J. M. Schmierer*. Ein neues Verfahren zur Ermittlung der Spannung und des innern Widerstandes bei galvanischen Elementen. E.C.Z. 16. 67.

**Thermoelemente.**

2782. *E. Altenkirch*. Über den Nutzeffekt der Thermosäule. P.Z. 10. 560.

2783. *O. Knopp*. Untersuchungen über Thermoelemente. M.P.V.H. 15.  
Siehe auch 2862.

**Konverter.**

2784. *H. Brick*. Der Quecksilberdampfgleichrichter. Z.S.S. 1910. 340.

**Transformatoren.**

2785. *A. Shaw*. Determination of transformer regulation under load conditions and some resulting investigations. P.A.I.E.E. 29. 1089.

2786. *E. C. Stone*. Operation of Delta and V-connected transformers in parallel. E.J. 1910. 304.

2787. *N. N.* Talende transformatorer og dynamoer. E.T.K. 1910. 137.

**Akkumulatoren.**

7888. *A. Berthier*. Nouveaux accumulateurs électriques. Co. 59. 706.

**Magnetische Instrumente.**

2789. *J. G. Gray* and *A. D. Ross*. On an improved form of magnetometer. P.R.S.E. 29. 182

2790. *E. Haupt*. Störungsfreies Magnetometer für Eisenuntersuchung. M.T.V.R.P. 4. 94.

2791. *F. W. Jordan*. An instrument for measuring the strength of an intense horizontal confined magnetic field. P.P.S.L. 21. 922.

**Kompaß.**

2792. *de Bellegarde*. Compensazione empirica delle bussole. R.M.R. 61. A. 32.

2793. *F. Bidlingmaier*. Der Doppelkompaß. M.Z. 25. 238.

2794. *Chandler*. Change in deviation of the compass due to change in drim. P.N.J. 34. 1269.

2795. *L. H. Chandler*. Compensation of the compass and determination of the use of observed azimuths. P.N.J. 35. 1223.

2796. *L. Dunoyer*. Étude sur les compas de marine et leurs méthodes de compensation. A.C.P. (8) 16. 433.

2797. *L. Dunoyer*. Sur la compensation des compas de grand moment magnétique. I.E.P. 1909. 68.

2798. *H. Eckener*. Die Navigation von Luftschiffen. I.A.M. 1909. 454.

2799. *de Fayolle*. Boussole spéciale pour aéronautes. L.A.P. 1909. 229.

2800. *G. Hechelmann*. Etwas über Kompass. H.H. 1909. 1298.

2801. *G. Hechelmann*. Das Unruhigwerden der Kompaßrose durch den Krängungsfehler. H.H. 1909. 1148. 1272.

2802. *Heit*. Sur un compas enregistré. I.E.P. 1909. 309.

2803. *Lauffer*. Der Doppelkompaß nach Bidlingmaier. M.A.G.S. 36. 173.

2804. *H. Maurer*. Kompensation der Krängungsdeviation mit der Vertikal-kraftwage bei Kompaßrosen von hohem Moment. A.H. 1910. 36.

2805. *M. Meldau*. Zur Frage der Untersuchung der Nadelsysteme von Kompaßrosen. A.H. 36. 263.

2806. *C. Morel*. Compensation des compas liquides. R.M.M.P. 185. 499.

2807. *Radler de Aquino*. Compensation of the compass and determination of the deviation without the use of observed azimuths. P.N.I. 35. 1223.

2808. *Tonta*. Sulla teoria generale della compensazione quadrantale del Corbara. R.M.R. 41. C. 35.

2809. *N. N.* Der Kreiselkompaß. A.H. 1909. 366.

2810. *N. N.* Der Kreiselkompaß in der Marine. Z.S.T. 1909. 214.

Siehe auch 993; 999.

**Elektrische Meßinstrumente.**

2811. *G. Brion*. Die technischen Strom- und Spannungsmesser. H.Z.E. 1909. No. 1; 6.

2812. *Carpentier*. Instrument de mesure électrique dénommé logomètre. C.R. 150. 826.

2813. *C. V. Drysdale*. Notes on the Plug permeameter. P.P.S.L. 21. 229.

2814. *C. V. Drysdale*. The use of the potentiometer on alternate current circuits. P.P.S.L. 21. 561.

2815. *C. V. Drysdale*. The use of shunts and transformers with alternate current measuring instruments. P.M. (6) 16. 136.

2816. *A. Espinosa de los Monteros*. Über Meßinstrumente für Hochfrequenzströme. J.D.T. 1. 327.

2817. *O. Martiensen*. Die elektrischen Frequenzmesser. E. B. B. M. 1910. 372.

2818. *E. F. Northrup*. Standardization apparatus for measuring volts, amperes and watts. J. F. I. 166. 101.

2819. *G. Pagano*. Il contatore d'energia elettrica „Sangamo“. L. E. R. 1910. 178.

2820. *R. Pitoni*. Un voltmetro da lezione. N. C. P. (5) 15. 426.

2821. *J. del Pulgar* u. *T. Wulf*. Allgemeine Theorie elektrostatischer Meßinstrumente mit besonderer Berücksichtigung des Quadrantelektrometers. A. P. L. (4) 30. 697.

2822. *M. E. Rice* and *B. Mc Collum*. The ballistic electro-dynamometer as an instrument for testing iron. P. R. 29. 132.

2823. *A. Wendler*. Ein Wagevoltmeter. P. Z. 9. 806.

### Elektroskop.

2824. *E. Hochheim*. Über eine Änderung an der Bernsteinisolation des Elektroskops nach Elster u. Geitel. P. Z. 10. 51.

2825. *K. Stuechley*. Eine Verbesserung am Aluminiumblattelektroskop nach Elster und Geitel von Ernst Hochheim. S. G. M. 908. 124.

Siehe auch 2827; 2831.

### Elektrometer.

2826. *K. Bergwitz*. Das Elektrometer für statische Ladungen nach Wulf. Z. P. 21. 164.

2827. *A. H. Borgesius*. Ein empfindliches Goldblattelektroskop. Z. P. 23. 100.

2828. *F. Dolezalek*. Über Binanten-elektrometer für Zeiger- und Spiegelablesung. A. P. L. (4) 26. 312.

2829. *A. Dybowski*. Electromètre absolu à torsion de M. E. Salmon. S. F. P. 282. 4.

2830. *J. Elster* und *H. Geitel*. Ein Elektrometer mit freischwebendem Faden. P. Z. 10. 664.

2831. *Hurmuzescu*. Électromètres et électroscopes à compensation. A. S. U. J. 5. 155.

2832. *D. Isitani*. A method of slowly charging leaf-electrometer with Zamboni's pile. J. T. (2) 5. 247.

2833. *C. W. Lutz*. Verbesserung am Saitenlektrometer. P. Z. 9. 642.

2834. *E. Salmon*. Electromètre absolu à torsion. B. S. F. P. 1908. 254; 63\*.

2835. *A. Tobler*. Über die Verwendung des aperiodischen Elektrometers von Carpentier zur Messung von Kabeln u. Kondensatoren. Z. S. T. 1909. 229.

2836. *T. Wulf*. Ein neues Elektrometer für statische Ladungen. P. Z. 10. 251.

2837. *T. Wulf*. Über die Bestimmung kleiner Kapazitäten mittels des Faden-elektrometers. P. Z. 10. 253.

2838. *T. Wulf*. L'électromètre bifilaire et ses applications. A. S. B. 34. B. 1.

Siehe auch 2772; 2821.

### Galvanometer.

2839. *H. Abraham*. Emploi du galvanomètre à cadre mobile comme instrument universel dans les mesures sur les courants alternatifs. B. S. F. P. 1908. 13\*.

2840. *H. Armagnat*. Galvanomètres pour courants alternatifs. I. E. P. 16. 103.

2841. *R. Arnd*. Galvanometro telefonico a campo Ferraris. R. I. L. (2) 43. 161.

2842. *S. J. Barnett*. A simple and efficient lecture galvanometer arrangement. S. (2) 31. 232.

2843. *A. H. Borgesius*. Schalttafel für Demonstrationsgalvanometer. Z. P. 23. 101.

2844. *W. Duddell*. On a bifilar vibration galvanometer. P. P. S. L. 21. 774.

2845. *W. Einthoven*. Konstruktion des Saitengalvanometers. A. F. G. P. 1909.

2846. *W. Einthoven*. Einige Anwendungen des Saitengalvanometers. O. P. L. L. 6. 118; 140; 155.

2847. *W. Feussner*. Über astatische Spiegelgalvanometer und Bestimmung verschiedener Konstanten derselben. S. G. M. 1908. 97.

2848. *Gans* und *Goldschmidt*. Präzisionsdemonstrationsgalvanometer. Z. P. 21. 278.

2849. *Gans* und *Goldschmidt*. Faden-galvanometer für Messungen mit hoher Empfindlichkeit. Z. P. 22. 206.

2850. *Guinchant*. Galvanomètre pour courants alternatifs. I. E. P. 1909. 357.

2851. *Guinchant*. Galvanometro per correnti alternate. E. R. 1909. 254.

2852. *D. v. Gulik*. Ein billiger Panzer-galvanometer in erschütterungsfreier Aufhängung. Z. P. 23. 38.

2853. *F. H. Hartmann* and *A. Ball*. Calibration of a ballistic galvanometer for closed circuit work. E. R. C. 1909. 828.

2854. *H. Hausrath*. Die Galvanometer. H. Z. E. 1909. No. 15; 19; 29.

2855. *P. Hertz*. Zur Theorie des Saiten-galvanometers. Z. S. 58. 1.

2856. *K. Kommerell*. Ein neuer Galvanometer-Nebenschluß. Z. P. 22. 13.

2857. *H. Lüdtke*. Ein Farbengalvanoskop. Z. P. 21. 353.

2858. *M. Mohs*. Ein neues Drehspulzeigergalvanometer. P.Z. 11. 55.

2859. *F. C. G. Müller*. Lichtzeiger-nadel nebst Zubehör für Galvanometrie und Magnetometrie. Z. P. 22. 1.

2860. *E. F. Nichols* and *S. R. Williams*. A convenient form of galvanometer with magnetic shielding. P.R. 27. 250.

2861. *B. O. Peirce*. The theory of ballistic galvanometers of long period. P. A. Bo. 44. 283.

2862. *H. Rebenstorff*. Handhabung des Spiegelgalvanoskops nebst Thermoelement für niedere Temperaturen. Z. P. 23. 42.

2863. *H. J. Reiff*. Ein neues Radiomikrometer. E. T. A. 1909. 1160.

2864. *M. Reinganum*. Magnetische Astasierung von Drehspulgalvanometern. P.Z. 10. 91.

2865. *E. Rengade*. Sur un nouveau modèle de galvanomètre à enregistrement photographique. B.S.C. (4) 6. 945.

2866. *Rymer-Jones*. Direct reading galvanometer scales. E. R. L. 62. 44.

2867. *C. Schürer*. Ein Drehspulreflexgalvanometer für Vorlesungszwecke. Z. P. 22. 138.

2868. *F. Wenner*. A theoretical and experimental study of the vibration galvanometer. B. B. S. W. 6. 347.

2869. *A. Zeleny*. A galvanometer scale for the direct reading of temperatures with thermoelectric couples. P. R. 27. 141.

2870. *A. Zeleny* and *O. Hovda*. The temperature coefficients of the moving coil galvanometer. P. R. 28. 277.

#### Magnetische Meßinstrumente.

2871. *H. Jordan*. Über die Verwendung des astatischen Magnetometers nach Haupt zu Materialuntersuchungen. V. D. P. G. 11. 216.

Siehe auch 2869.

#### Astronomische Instrumente.

2872. *A. Riccò*. Lo spettroliografo del R. Osservatorio di Catania. R. A. L. R. (5) 17. B. 529.

2873. *Wetherill*. Aids for navigation. J. F. I. 166. 227.

#### Fernrohre.

2874. *A. Colzi*. Il cannocchiale del dilettante d'astronomia. R. A. R. 1. 51; 106; 141; 194.

2875. *B. A. Fiske*. The invention and development of the naval telescope sight. P. N. I. 35. 405.

2876. *F. Gatti*. Ricerca intorno ad un particolare sistema telescopico. A. A. T. 44. 648.

2877. *J. de Graaff Hunter*. An apparatus for measurements of the defining power of objectives. C. R. N. P. L. 6. 57.

2878. *H. Grubb*. A new form of divided object-glass telescope. R. B. A. 1908. 60 3

2879. *H. Grubb*. The reflecting telescope and its suitability for physical research. R. B. A. 1908. 605.

2880. *Heydenreich*. Eine neue Prismenform für Visierfernrohre. A. M. H. 1909. 139

2881. *N. Jadanza*. Determinazione delle costanti in un cannocchiale distanziometro. A. A. T. 45. 503.

2882. *G. Jais*. Focalità dell'equatoriale fotografico Vaticano. N. L. A. 61. 107.

2883. *K. Martin*. Einige Bemerkungen über Doppelfernrohre für den Handgebrauch. Ü. B. 11. 868.

2884. *P. G. Nutting*. The resolving power of objectives. B. B. S. W. 6. 121.

2885. *E. v. Oppolzer*. Über die photographische Lichtstärke von Fernrohren. S. A. W. 116. 1151.

2886. *H. C. Ryland*. The evolution of the telescope. O. L. 38. 290.

2887. *K. Strehl*. Prüfung des Fernrohres. D. W. B. 10. 15; 36.

2888. *R. W. Wood*. The mercury paraboloid as a reflecting telescope. A. J. C. 29. 164.

2889. *R. W. Wood*. The Hg telescope. S. Am. 100. 240.

Siehe auch 2684; 2890.

#### Uhrmacherkunst.

2890. *A. Alessio*. Determinazione dell'andamento dell'orologio col telescopio zenitale. R. A. L. R. (6) 18. A. 275.

#### Geodätische Instrumente.

2891. *C. Aimonetti*. Une nuova maniera di costruire i livelli a cannocchiali. A. A. T. 45. 718.

2892. *V. Baggi*. Sul modo di eliminare l'errore dovuta alla disuguaglianza dei diametri dei collari nei livelli a cannocchiale mobile. A. A. T. 37. 545.

2893. *J. Helfiker*. Ein neues Präzisionsnivellierinstrument auf dem Großen St. Bernhard. V. N. Z. 52. 364.

2894. *E. König*. Mitteilung über Längenänderung bei einer Präzisionsmire. M.G.B. 1907. 226.

2895. *N. Jadanza e V. Baggi*. Un livello che dà sicuramente la visuale orizzontale. A.A.T. 43. 3.

### Tachymeter.

2896. *L. Gouffite*. Un nouveau tachéomètre. J.A.P. 1910. 246.

### Theodolit.

2897. *E. Goedseels*. Sur le réglage des lunettes des niveaux des théodolites et des instruments astronomiques. A.S. B. 34. A. 152.

### Distanzmesser.

2898. *A. Agostini*. Sull' approssimazione del telemetro Erle. R.A.G. 1905. 149.

2899. *Bisman*. Le télémètre Strobants. R.A.B. 1909. 62.

2900. *Bisman*. Le télémètre Strobants. R.S.B. 34. B. 101; 129.

2901. *A. Caprilli*. Collimatore a riflessione per telemetri. R. A. G. 1906. 116.

2902. *M. Netto*. Télémètre de dépression. R.A. 68. 267.

2903. *Niesiolowski-Gavin*. Zur Frage der Kriegsdistanzmesser. M.A.G. 1908. 297.

2904. *Rohne*. Kriegsbrauchbare Entfernungsmesser. A.M.H. 1908. 338.

2905. *H. Rohne*. Messung der Entfernung durch Richtmittel. A. M. H. 1910. 1.

2906. *F. E. Wright*. A telemeter with micrometer screw adjustment. A.J.S. (4) 26. 531.

### Geophysikalische Instrumente.

2907. *G. H. Halligan*. Notes on tide-gauges. J.N.S.W. 37. A. 75.

2908. *T. Shida*. A baro-variometer. P.T.M. (2) 5. 76.

### Seismometer.

2909. *A. Angot*. Les sismographes modernes. S.F.P. 290. 4.

2910. *L. Fontaine*. Sur un microsismographe à multiplication optique. A. C.P. (8) 17. 418.

2911. *Lippmann*. Sur un sismographe enregistreur l'accélération absolue des tremblements de terre. S.F.P. 289. 3.

2912. *E. M. S. Navarro-Neumann*. Aperçu des instruments les plus usités en sismologie. B.S.B.A. 14. 295.

2913. *F. Polster*. Seismometrie. P. 20. 679.

2914. *H. S. Riggs*. A home-made seismograph. S.Am. 99. 263.

### Meteorologische Instrumente.

2915. *L. Besson*. Sur un actinomètre enregistreur et totalisateur. A.S.M.F. 57. 217.

2916. *P. Cotte*. Un nouvel actinomètre. L.N. 37. 257.

2917. *E. O. Flamme*. Meteorologische Instrumente. N.E.E. 36. 600.

2918. *W. M. Marriott*. The brontometer. Q.J.M.S. 34. 207.

2919. *A. Meckel*. Ein Beitrag zur Frage der Balloninstrumente. I.A.M. 1909. Heft 26.

2920. *W. A. Michelson*. Ein neues Aktinometer. P.Z. 9. 18; M.Z. 25. 246.

2921. *H. Mohn*. Neue Studien über das Hypsometer. M.Z. 25. 193; 567.

2922. *G. Raffo*. Intorno all' attinometro Arago. A.G.C. (5) 3. No. 14.

2923. *W. Schmidt*. Ein Apparat zur Aufsuchung regelmäßiger Wellen im Luftdruck. A.P.L. (4) 27. 356.

2924. *W. Schmidt*. Der Variograph, ein Instrument zur Registrierung der Änderungsgeschwindigkeit des Luftdrucks. S.A.W. 118. 885.

2925. *D. Smirnow*. Über das Aktinometer Violle-Savelief. M.Z. 25. 299.

2926. *O. Steffens*. Neue meteorologische Apparate und Vorrichtungen. M.Z. 26. 30.

### Barometer.

2927. *G. Alfani*. Il grande barometro dell' esposizione di Faenza. R.F.M. 9. B. 258.

2928. *W. F. Barrett*. A simple form of open-scale isothermal air barometer. P.S.D. (2) 12. 444.

2929. *C. E. Brazier*. Étude d'un barographe métallique à poids tenseur. A.S.M.F. 57. 109.

2930. *C. D. Cheney*. Scale for barometers. S.Am. 67. Suppl. 219.

2931. *Chrystal*. On the theory of the leaking microbarograph. P.R.S.E. 28. 437.

2932. *P. Fischli*. Über die Korrektion der Angaben der Aneroidbarometer, besonders bei niedrigem Drucke. B.P.A. 3. 214.

2933. *K. Fuchs*. Das Wasserbarometer. Z.P. 23. 173.

2934. *R. B. Goldschmidt*. Ein elektrisches Barometer. P. 20. 669.

2935. *Green*. Sensitive temperature compensated barometer. C.N. 98. 50.

2936. *C. Kassner*. Das chemische Wetterglas oder Baroskop. N.W. (2) 7 42.

2937. *C. E. Marvin*. A mercurial barograph of high pression. M.W.R. 36. 307.

2938. *G. W. Todd*. The balance as a sensitive barometer. P.P.S.L. 21. 929.

2939. *A. Troller*. Un baromètre isothermique. L.N. 1909. 30. X.

2940. *N. N.* A monumental barometer. C.A. 1901. 5139.

2941. *N. N.* Ein elektrisches Barometer. E.M.B. 1909. 169.

2942. *N. N.* An electric barometer. C.A. 1909. 5455.

Siehe auch 2908; 2924; 2957.

#### Hygrometer.

2943. *J. Aitken*. Hygrosopes. S.M. M.L. 42. 187.

2944. *R. M. Barrington*. Reading of the wet-bulb mercurial thermometer. N. 83. 165.

2945. *Bini*. Perfezionamento dell'igrometro ad appannamento. I.I.T. 1. 214.

2946. *N. Ekholm*. Über das Psychrometer. A.M.A.F. 4. No. 15.

2947. *J. H. Hart*. Practical hygrometry. C.A.L. 1909. 5167.

2948. *P. L. Mercanton*. L'hygromètre à rameau de sapin. A.S.G. (4) 22. 93.

2949. *P. J. O'Garra*. A portable rotation psychrometer. M.W.R. 37. 22.

2950. *H. Richardson*. Anomalous reading of hygrometer. N. 83. 249. — J.A. 278.

2951. *N. Russelweldt*. Ein neues Haarhygrometer. M.Z. 25. 396.

Siehe auch 257.

#### Anemometer.

2952. *H. Broichsitter*. Über Windmeßapparate. W.L.Z. 9. 43.

2953. *A. v. Büky*. Mathemat. Untersuchungen und Verbesserung der Winddruckregistrierapparate, System „Dines“. P.Z. 10. 1008.

2954. *Jurgenson*. Anemometer and wind direction indicator. E.B.R. 57. 488.

2955. *M. Leal*. A propos d'un nouvel anémomètre enregistreur. R.N. 32. 249.

2956. *O. Masereel*. Le télanémographe Masereel. R.N. 1909. 371; 376; 389.

2957. *J. T. Morrison*. Proposals for an anemometer and a portable barometer. P.R.S.E. 30. 386.

2958. *O. Steffens*. Ein neuer Windrichtungs-Autograph. A.H. 36. 208.

2959. *O. Steffens*. Über einen neuen Apparat für die Registrierung der Windgeschwindigkeit. A.H. 36. 513.

2960. *N. N.* Un anémomètre électrique. L.E.P. 1909. 39.

2961. *N. N.* An electric anemometer. S.Am. 67. Suppl. 411.

Siehe auch 2246.

#### Ombrometer.

2962. *R. Billwiller jun.* Ein neues Modell eines geschützten Regenmessers. M.Z. 27. 194.

2963. *K. Knoch*. Die Entwicklung unserer Kenntnis des Windschutzes bei der Aufstellung der Regenmesser. W.B. 25. 97; 129; 151.

2964. *W. Oishi*. Über den Pluviograph der direkt die Stärke des Regensfalls registrieren soll (Japan.). J.M.S.J. 1909. No. 5.

#### Blitzableiter.

2965. *v. Fleischbein, F. C.* Sachgemäße Blitzableiteranlage. B.W.B. 1. 9.

2966. *Garnier*. Progrès récents réalisés dans l'étude des décharges atmosphériques et des parafoudres. L.E.P. 36. 328.

2967. *A. Garnier*. Sur les parafoudres à intervalles d'air multiples. I.E.P. 1909. 345.

2968. *E. Gollmer*. Über Blitzableiter-Erdleitungen und ihre elektrischen Messungen. W.S.D.B. 1909. 793.

2969. *O. Kayser*. Blitzableiteranlagen. D.T.Z.B. 1909. 204.

2970. *Kos*. Sicherheitsmaßregel gegen Blitzschlag. B.L. 1910. 232.

2971. *J. Mayer*. Über Blitzschäden und Blitzableiter. G.R.G. 1909. 13; 29; 49.

2972. *J. A. Pollack and S. H. Barraclough*. Note on a hollow lightning conductor crushed by the discharge. J. N.S.W. 39. A. 131.

2973. *P. H. Thomas*. Lightning protectors. P.A.I.E.E. 29. 581.

2974. *N. N.* Blitzableiter. N.S.S.W. 1909.

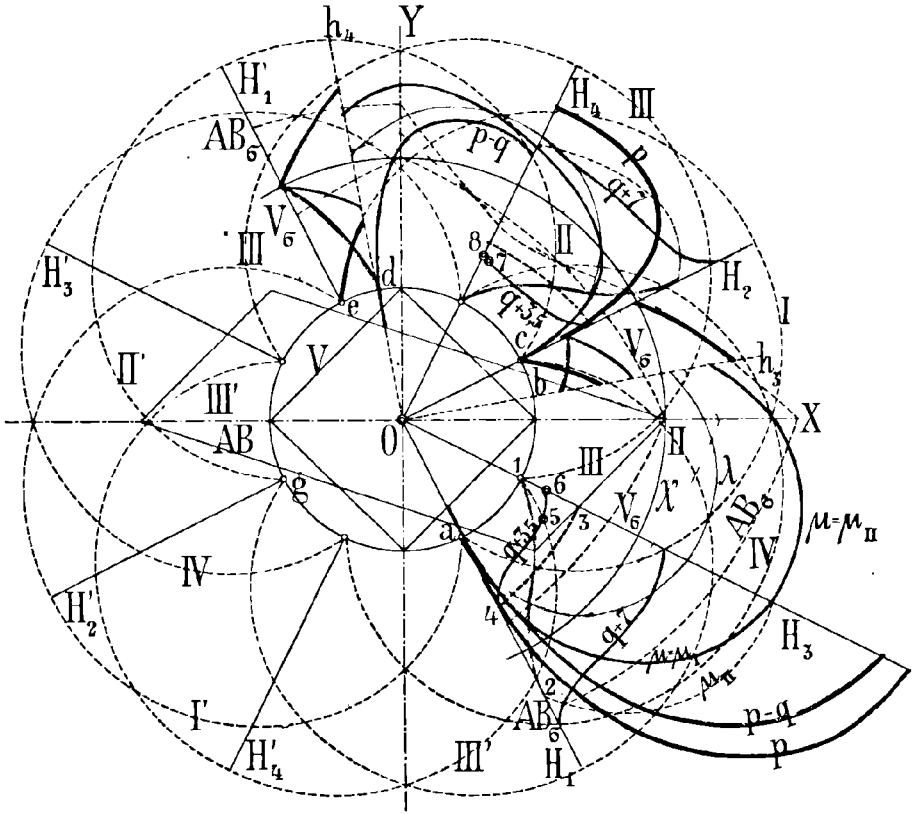


Fig. 18.