

Ecole Polytechnique.

1^{ère} Division.

1882 - 83.

Cours de Physique

Rédigé par les Elèves.

M^{re} Cornu Professeur.

Seconde année.

1^{ère} Leçon.

Acoustique.

Nous avons vu dans le Cours de l'année dernière que les deux agents, autrefois appelés Chaleur et Électricité ne sont que des modes

de mouvement ; mais on n'a pas encore pu préciser la nature même de ce mouvement. Cette année nous allons étudier deux autres ordres de phénomènes dont la connaissance est beaucoup plus complète, et dont l'ensemble est tout près de constituer une science rationnelle : le son et la lumière. Ce sont encore des phénomènes de mouvement ; mais ici nous pouvons déterminer et la nature et la forme de ce mouvement.

Les impressions de l'ouïe nous ont donné la notion du son. On croyait autrefois que ces impressions étaient dues à un agent particulier qu'on appelait le son ; cette définition ne conduisait à rien ; c'était une conception purement métaphysique doublée d'un cercle vicieux.

En effet l'observation la plus simple montre que la production d'un son est toujours accompagnée d'un mouvement vibratoire, et que réciproquement un mouvement vibratoire produit dans certaines conditions est accompagné d'un son. Il est facile de le vérifier. Que l'on approche d'une cloche de verre la balle d'un pendule et qu'on fasse vibrer la cloche, la balle est immédiatement repoussée et sautille ; de même si on place cette balle dans un timbre métallique, et qu'on ébranle le timbre avec un archet ; le toucher suffit pour s'assurer qu'un corps rendant un son est en mouvement, et le plus souvent on le voit vibrer. On voit donc qu'il n'est pas besoin d'avoir recours à un agent spécial et on peut conclure que la cause des impressions de l'ouïe est un certain mode de mouvement des corps sonores.

L'ouïe est donc analogue au toucher ; c'est un sens impressionné par le mouvement ; mais dans le toucher l'organe impressionné doit être en contact avec le corps en mouvement ; il ne paraît pas au premier abord en être de même pour le son ; nous entendons un son produit à une grande distance ; mais il n'en est rien : entre l'oreille et le corps, il y a un intermédiaire, l'air. On montre la nécessité de cet intermédiaire en faisant sonner une petite clochette suspendue dans un ballon où on a fait le vide : on n'entend rien ; à mesure qu'on fait rentrer l'air le son revient de plus en plus perceptible ; on a essayé de remplacer la clochette par un petit pistolet que l'on fait tomber ; mais cette expérience n'est pas concluante : le bruit d'une arme à feu est produit autant par l'air qui rentre dans l'arme après le refroidissement des gaz de la poudre, que par la sortie de ces gaz ; quand on fait l'expérience dans le vide, l'air ne peut pas rentrer.

L'air sert d'intermédiaire en se mettant lui-même en vibration,

et cette vibration peut produire l'ébranlement d'un corps en repos; si on met à une certaine distance l'un de l'autre deux diapasons, sur des coussinets de caoutchouc, pour annuler les vibrations des supports, et qu'on ébranle le premier, le second rend aussitôt un son; on l'entend nettement en éteignant brusquement les vibrations du premier diapason. Un corps plus dense que l'air transmettra mieux le son; par exemple, si nous répétons l'expérience précédente en disposant les diapasons aux extrémités d'une longue barre de bois, le son du 2^e diapason est notablement plus fort.

À l'origine on observa ces phénomènes en les rattachant à l'organe qui les révélait; mais bientôt on s'aperçut qu'on pouvait les étudier indépendamment de cet organe; on le remplaça par des instruments, sortes d'organes artificiels plus impartiaux et plus délicats; on reconnut qu'à tout son correspondait les vibrations d'un corps élastique et que les phénomènes acoustiques rentrent dans le domaine de la théorie de l'élasticité; bientôt empruntant à l'expérience quelques axiomes, on parviendra à prévoir par le calcul les impressions produites sur l'oreille par les phénomènes vibratoires dans toutes leurs particularités.

On distingue les bruits et les sons musicaux; on ne peut pas définir ces expressions puisque ce sont des sensations; il n'y a pas entre ces deux classes d'impressions, de limite nette et tranchée, et on les confond souvent; ainsi un morceau de bois qui tombe produit un bruit; si on compare ce bruit à d'autres bruits de même nature, on peut y reconnaître un son musical; on a même construit avec des planchettes un instrument de musique, le *Xylophone*.

Principe général. — Quand on donne à un corps, de quelque manière qu'on s'y prenne, une succession périodique régulière de vibrations suffisamment rapprochées l'oreille perçoit un son musical.

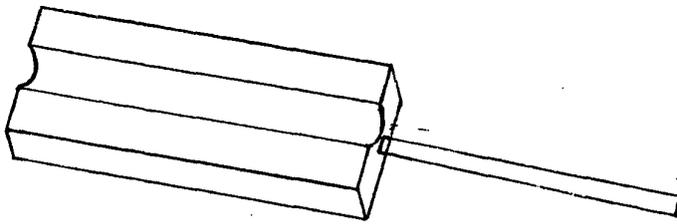
Différentes manières de produire des sons:

1^o Corps solides: La méthode la plus simple pour produire un son est de pincer dans un étau une tige métallique et de la faire vibrer. Pour éviter l'emploi de l'étau, on équilibre les forces élastiques en recourbant la lame, et on forme ainsi un diapason.

On emploie aussi des plaques, qu'on fait vibrer avec un archet, ou la Roue dentée de Savart; les dents d'une roue frappent une carte; si les chocs se produisent à longs intervalles on perçoit une succession de bruits; si ces intervalles diminuent le

son devient continu et musical.

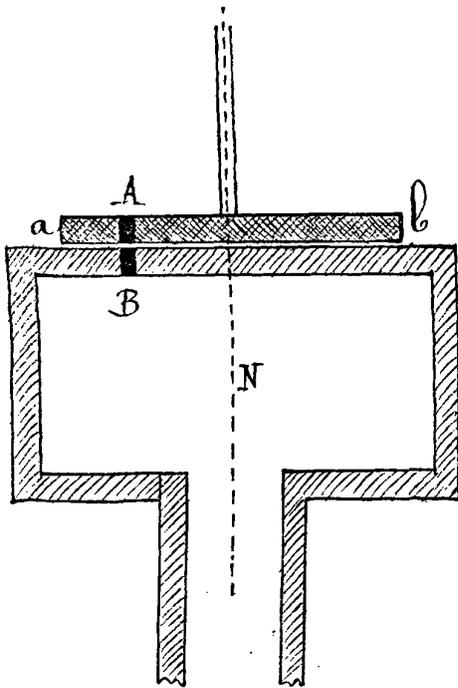
On peut répéter l'expérience d'un physicien anglais Crevelyan:



On prend une lame de bronze en forme de gouttière, on la chauffe en son milieu et la dépose sur un cylindre creux de plomb. Par un jeu assez difficile à analyser des dilatations inégales des deux métaux, il se

produit un son; cet exemple est destiné à montrer que les efforts mécaniques ne sont pas les seuls qui peuvent mettre les corps en vibration.

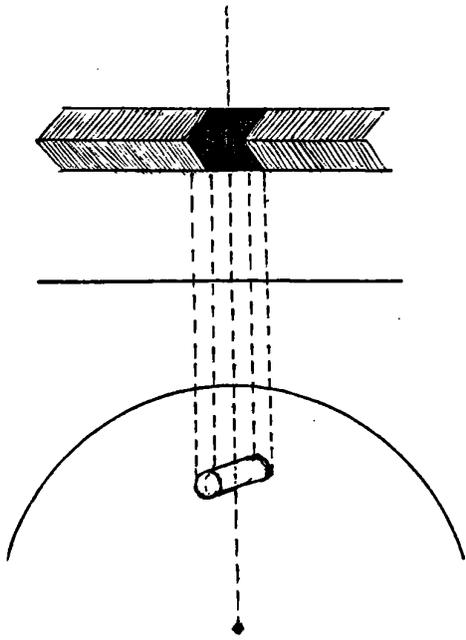
2^e Gaz et liquides: Cagniard de Latour pour produire des sons en mesurant le nombre de vibrations inventa la Sirène; le son est causé par la vibration non plus d'un corps solide, mais d'un gaz l'air.



Imaginons un plateau a b tournant d'un axe au-dessus d'une caisse remplie d'air comprimé. Le fond de la caisse et le plateau sont percés chacun d'un trou, et ces deux trous se correspondent (A , B).

Toutes les fois que pendant la rotation les deux trous viennent en regard, l'air du récipient sort et frappe l'air extérieure; pour augmenter le nombre des chocs il suffit de percer le plateau d'un grand nombre de trous disposés sur une même circonférence; si le plateau

tourne assez rapidement il se produit un son; afin de le rendre plus fort on perce la caisse d'autant de trous que le plateau et on les fait équidistants, de sorte que l'air sort par les n trous à la fois et produit un son n fois plus fort que s'il n'y en avait qu'un; on rend la rotation automatique du plateau en utilisant



le travail mécanique produit par la détente de l'air qui s'échappe ; à cet effet l'axe des trous est oblique par rapport au plateau et incliné dans le sens de la rotation, comme on le voit sur la figure ; l'air en s'échappant de la caisse frappe la paroi du plateau mobile et détermine son mouvement.

En réglant convenablement la soufflerie on peut rendre constante la vitesse du plateau ; un compteur permet de connaître le nombre de trous du plateau, et en multipliant par le nombre de trous, on détermine le nombre des vibrations ou son produit ; nous reviendrons plus

tard sur ce sujet.

La sirène peut aussi fonctionner dans l'eau, sous l'influence d'un courant d'eau et c'est ce qui lui a valu son nom.

Par toutes ces méthodes on arrive à faire produire à un corps quelconque un ou plusieurs sons musicaux ; le sens de l'oreille nous donne donc cette propriété générale : Tous les corps suffisamment homogènes peuvent se mettre en un ou plusieurs régimes vibratoires permanents.

Cette propriété découverte par l'expérience, est démontrée dans la théorie de l'élasticité comme une conséquence des lois mécaniques qui président aux déformations très petites des corps élastiques.

Propriété des sons. — Dans tous les sons soutenus l'oreille distingue 4 éléments : l'homogénéité, l'intensité, la hauteur, le timbre.

Ces quatre qualités tiennent à des propriétés vibratoires différentes. Pour les étudier nous allons substituer à l'oreille différents appareils.

La première méthode (la plus nouvelle dans l'ordre chronologique) est le tracé direct.

On fixe sur le corps vibrant un petit style, cire ou barbe de plume et on fait presser ce style sur une lame de verre enfumée ou sur un cylindre couvert d'une feuille de papier enfumée, animé d'un mouvement hélicoïdal : on obtient ainsi sur la lame de verre ou sur la feuille développée une courbe sinusoïdale qu'on peut étudier à loisir. Si la vitesse de translation de la lame ou celle de rotation

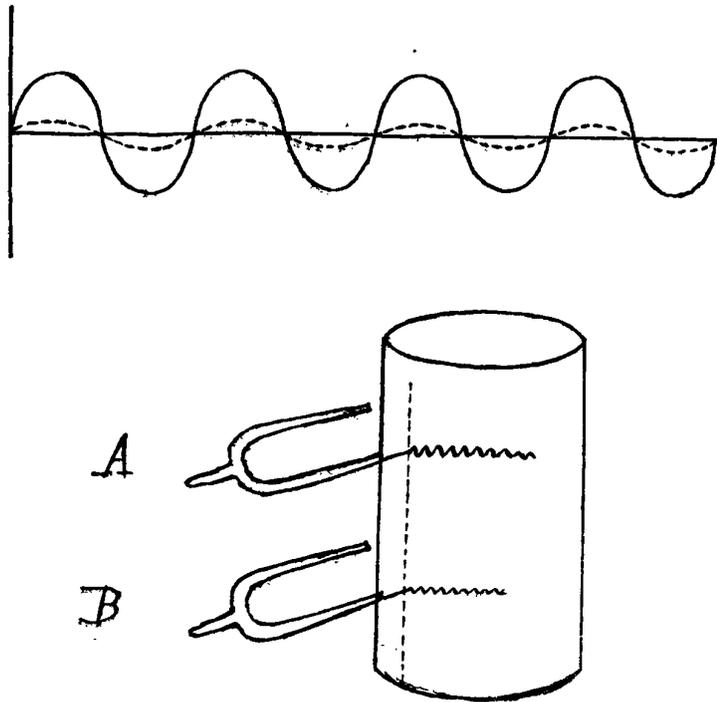
Qu'un cylindre est uniforme on obtient la loi complète du mouvement vibratoire ainsi que nous le verrons bientôt.

En étudiant aussi les corps sonores on reconnaît d'abord que toutes les vibrations sont isochrones, c'est-à-dire qu'il y en a toujours le même nombre dans l'unité de temps, c'est ce qui constitue l'homogénéité du son soutenu : l'amplitude des oscillations correspond à l'intensité ; le son est d'autant plus aigu que les vibrations sont plus rapides, la hauteur du son correspond donc à la durée de la période ; quant au timbre il doit dépendre de la forme de la vibration même et se traduit par des modifications périodiques de la forme de la sinusoïde.

L'élément le plus important dans un son musical soutenu ou homogène est évidemment la hauteur ; car la variation de l'intensité n'occasionne que des variations d'amplitude ; c'est du reste ce qu'on montre directement par la méthode du tracé direct.

Mesure du nombre de vibrations. Si on fait vibrer énergiquement un diapason il produira une sinusoïde très-allongée A.B.C., si on le fait vibrer doucement la courbe est aplatie ; dans le même temps il y a le même nombre de vibrations ; prenons deux diapasons A et B et plaçons leurs tracelets sur la même génératrice pour éviter aux irrégularités dans la vitesse de la rotation ; faisons vibrer A fortement, B faiblement, et comptons le nombre N' de vibrations de B pendant N de A ; puis faisons vibrer au contraire B très-fort et A doucement puis comptons encore le N'' de vibrations de B pendant N de A. S'il y a une différence dans la durée des oscillations grandes

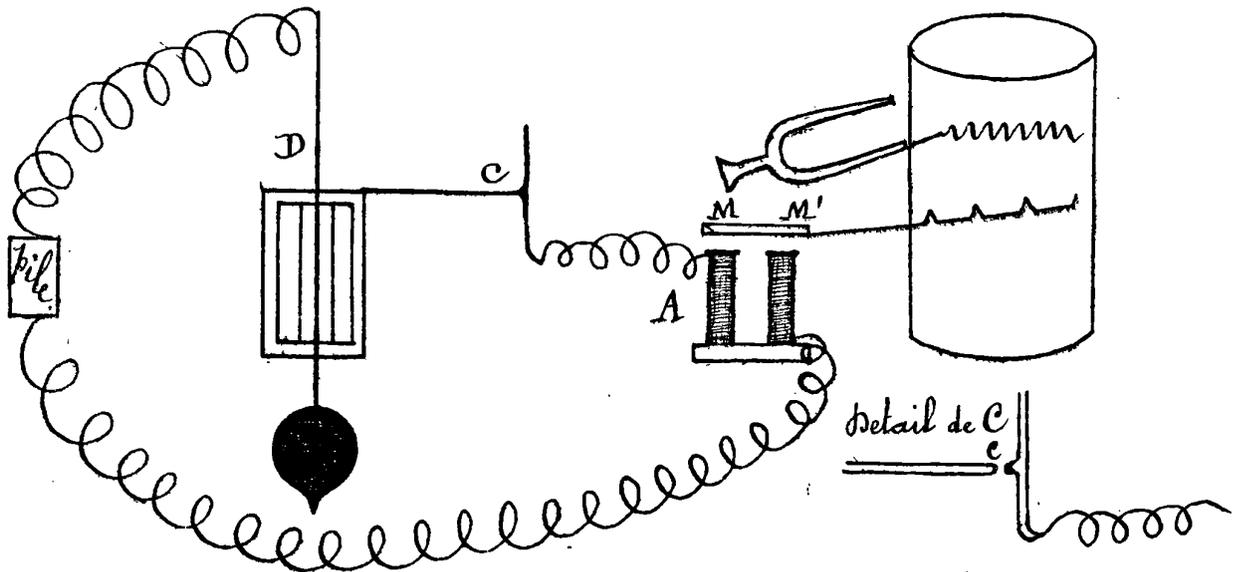
et petites, ce mode d'expérience doit la doubler ; mais on trouve $N' = N''$ on en conclut donc que les vibrations sont isochrones, c'est-à-dire indépendant de l'amplitude.



Aussi a-t-on utilisé les corps vibrants. Comme chronographes au moins pour des temps très-petits il est utile alors de connaître la durée d'une oscillation; on ne peut pas donner au cylindre une vitesse parfaitement uniforme, aussi ne peut-on pas le faire tourner pendant t'' et compter le nombre de vibrations produites N ; $\frac{t''}{N}$ serait en secondes la durée d'une oscillation. On préfère pour effectuer cette mesure qui est celle de la hauteur du diapason, comparer directement la durée d'oscillation à l'unité de temps, ou la seconde fournie par une bonne horloge astronomique.

La comparaison se fait à l'aide d'une transmission électrique très-simple.

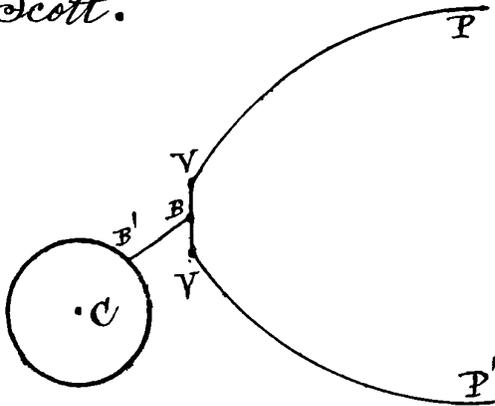
Le pendule de l'horloge P est traversé par le courant d'une pile. Il porte une tige PC qui vient toucher en C un ressort au



moment où le pendule passe par la verticale; ce ressort est l'extrémité d'un fil enroulé autour d'un électro-aimant A ; l'armature M, M' de l'électro-aimant est attirée au moment où le courant passe c'est-à-dire à chaque seconde, et le tracelet qu'elle porte vient à chaque seconde marquer sur le cylindre un crochet sur l'hélice qu'elle décrit au repos.

Il suffira de compter le nombre des vibrations N du corps élastique comprises entre deux crochets consécutifs; $\frac{1}{N}$ sera la durée d'une vibration. Il vaut mieux compter les vibrations pendant 2 secondes parce que le pendule ne se retrouve dans des positions

identiques que de deux secondes en deux secondes.
 Pour compter les vibrations de l'air on emploie le Phonautographe de Scott.



Un grand réflecteur parabolique PBP' est coupé par un plan VV' passant par le foyer B et perpendiculaire à l'axe; cette ouverture est fermée par une membrane en baudruche sur laquelle on colle avec de la cire une barbe de plume BB' servant de tracelet. Cette barbe de plume peut inscrire ses déplacements périodiques sur

un cylindre enroulé C . Tout mouvement vibratoire transmis par l'air se concentre au foyer B où se trouve la membrane qui alors se met aussi en mouvement et agite plus ou moins la barbe de plume: par un réglage convenable de la tension de la membrane on parvient à donner au tracé sur le papier enroulé une amplitude convenable; un diapason chronographe sur son tracé donne la vitesse du cylindre à chaque instant. On peut donc enregistrer ainsi les vibrations de tous les corps sonores, sinon comme forme au moins comme période vibratoire.

On vérifie que le phonautographe enregistre fidèlement les vibrations qui lui sont transmises en prenant pour corps sonore un corps élastique soit on enregistre le son soit par trait direct sur le cylindre, soit par l'intermédiaire de l'air et de la membrane; le même chronographe étant employé dans les deux cas.

2^e Leçon.

La méthode graphique exposée dans la dernière leçon pour l'enregistrement du nombre des vibrations est la plus parfaite et la plus rigoureuse; mais il existe d'autres méthodes imaginées avant l'invention du tracé graphique et qu'il est utile de connaître parce qu'elles sont souvent appliquées.

L'un des premiers physiciens qui ait mesuré le nombre des vibrations des corps sonores, est Savart, sa méthode est fondée sur la propriété de l'oreille de saisir avec une grande délicatesse le synchronisme du mouvement vibratoire de deux sons. Au moyen de sa roue dentée il cherchait à obtenir l'unisson d'un son donné; en maintenant constante la vitesse de rotation, il obtenait facilement le nombre de vibrations dans l'unité de temps:

Supposons que la roue porte n dents; et que pendant le temps t elle ait accompli N tours ou fractions de tours: le nombre de vibrations pendant l'unité de temps est évidemment $\frac{Nn}{t}$.

Pour enregistrer le nombre N on emploie un compteur ainsi disposé.

L'axe de la roue est terminé par une vis sans fin qui engrène avec une roue dentée portant 100 dents. A chaque tour de l'axe la roue avance d'une dent. Par suite à une révolution complète de la roue correspondent 100 tours du tableau mobile. Cette première roue porte à son tour une tige métallique qui à chaque tour fait tourner d'une dent une seconde roue armée de 100 dents. Ce système de roues est monté sur une coulisse mobile qui permet d'embrayer à un moment précis avec une vis sans fin.

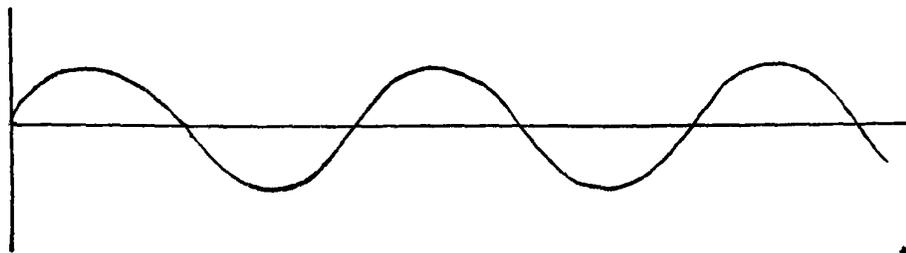
Pour effectuer une mesure, on commence par régler l'unisson du son de la roue et du son à mesurer; lorsque ce résultat est obtenu, le compteur étant débrayé et les aiguilles des roues ramenées aux zéros, on embraye pendant le temps voulu t ; les aiguilles tournent sur leur cadran jusqu'à ce qu'on débraye: on lit alors le nombre N dont il est parti plus haut.

La Sirène de Cagniard-Latour sert comme la roue dentée de Savart à mesurer le nombre de vibrations d'un son lorsqu'on adapte à l'axe ou tambour une vis sans fin pouvant embrayer un compteur: la sirène donnant un son plus musical est plus facile à employer.

Dans le cas où le timbre du son à étudier, et celui de la sirène se ressemblent, on est averti que l'on approche de l'unisson par la production de battements qui disparaissent dès qu'on y est arrivé.

Procédé mixte: On cherche l'unisson au moyen d'un diapason muni de curseurs qui permettent de modifier la hauteur du son, et l'on applique au diapason ainsi disposé le procédé graphique.

Remarque: La roue de Savart et la Sirène donnent le nombre de périodes pendant l'unité de temps; supposons qu'on étudie des vibrations symétriques, c'est-à-dire telles que les déplacements sont représentés par une sinusoïde régulière: on appelle vibration simple,



l'intervalle qui sépare les abscisses de deux sommets consécutifs (inférieur et supérieur), et vibration double la différence des abscisses

de deux sommets identiques (par exemple deux sommets supérieurs).

Afin d'éviter la confusion qui pourrait résulter de l'emploi du mot vibration; nous emploierons le mot période: c'est l'intervalle entre deux points consécutifs ayant même ordonnée et même direction de tangente, c'est-à-dire deux positions où le déplacement et la vitesse sont les mêmes.

Résultats: 1^o, la hauteur d'un son musical ne dépend que du nombre de périodes vibratoires pendant l'unité de temps.

Elle est indépendante des autres éléments (amplitude, forme) qui ne sont pour ainsi dire que des accidents.

2^o, Les consonances musicales qu'une oreille exercée reconnaît intuitivement correspondent à des rapports simples dans les nombres de vibrations des deux sons.

Leurs nombres de vibrations sont dans les rapports suivants:

unisson $\frac{1}{1}$, octave $\frac{1}{2}$, quinte $\frac{2}{3}$, quarte $\frac{3}{4}$, tierce $\frac{4}{5}$ majeure, $\frac{5}{6}$ mineure.

La quinte est utilisée pour accorder les instruments à cordes.

Faisons maintenant abstraction du côté physiologique, et recherchons ce qu'il y a de purement mécanique dans ces phénomènes.

Étudions en particulier la forme des oscillations et la loi qui régit les déplacements avec le temps.

Tous les corps sont élastiques et toute déformation fait naître des forces proportionnelles à l'écart qui entraînent un mouvement vibratoire à vibrations isochrones.

Cherchons à le déterminer par l'expérience et le calcul:

Dans tout mouvement vibratoire il y a deux éléments à distinguer

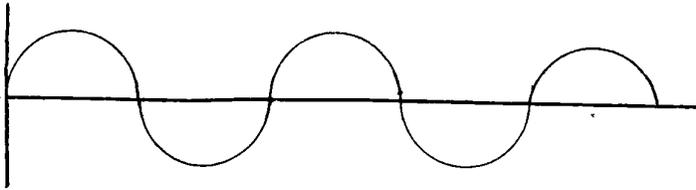
1^o, la forme du déplacement, c'est-à-dire la ligne que décrit un point quelconque du corps.

2^o, la loi qui relie le déplacement au temps.

Plaçons-nous dans le cas le plus simple: la plupart des corps sonores symétriques donnent lieu à des mouvements vibratoires rectilignes, ainsi lorsqu'une tige pincée dans un état oscille, chaque point décrit un petit arc qui peut se confondre avec une droite.

Mouvement vibratoire rectiligne.

Mode du tracé graphique. Étudions la courbe décrite par un style fixé à un corps sonore, sur une lame de verre couverte de noir de fumée, qui se meut d'un mouvement rectiligne uniforme :



Soit v la vitesse de la lame, et u le déplacement par rapport à la position d'équilibre ot .

libre ot .

L'examen de cette courbe montre qu'il y a des chances pour que les ordonnées et les abscisses soient reliées par une relation de la forme $y = \sin x$ (avec des paramètres convenables).

Posons donc : $u = A \sin B(x - x_0)$ l'origine des abscisses est arbitraire.

La vitesse de la lame étant uniforme on a : $x - x_0 = v(t - t_0)$. (t_0 est l'époque ou l'ordonnée $x = x_0$ a été tracée).

Il vient :

$$u = A \sin Bv(t - t_0)$$

On en conclut la vitesse en chaque point :

$$\frac{du}{dt} = ABv \cos Bv(t - t_0)$$

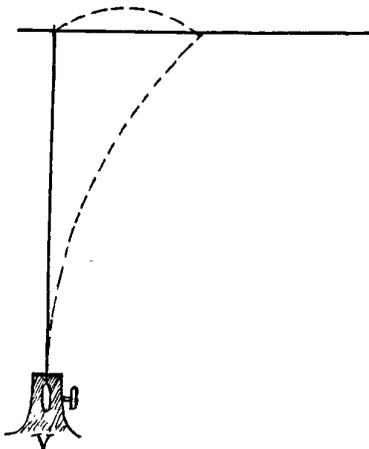
$$\frac{d^2u}{dt^2} = AB^2v^2 \sin Bv(t - t_0)$$

$$\text{ou } \frac{d^2u}{dt^2} = B^2v^2 u.$$

Comme l'accélération est proportionnelle à la force, on prévoit que la propriété fondamentale des mouvements vibratoires, pourrait bien être que le mouvement est produit par des forces proportionnelles à l'écart.

Dans la théorie de l'élasticité cette notion est admise pour des déformations infiniment petites dans un corps symétrique.

Preons le cas où le corps élastique est un système de points matériels de masse m que l'on déplace de O en A



12

la force agissant dans le sens de A vers O l'équation différentielle du mouvement sera :

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -\gamma u$$

(u étant l'écart O.A et γ un facteur constant).

multipliant les deux membres par $\frac{du}{dt} dt$

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} \frac{du}{dt} dt = -\gamma u du$$

ou en intégrant $\frac{1}{2} m \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = -\gamma \frac{u^2}{2} + C$.

Déterminons la constante par la condition que lorsque la vitesse est nulle, le déplacement soit u . On aura :

$$0 = -\gamma \frac{u^2}{2} + C$$

Retranchons membre à membre

$$m \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \gamma (u^2 - u^2)$$

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \sqrt{u^2 - u^2}$$

$$dt = \sqrt{\frac{m}{\gamma}} \frac{du}{\sqrt{u^2 - u^2}} = \sqrt{\frac{m}{\gamma}} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{u^2}}}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{\gamma}} \arcsin \frac{u}{u} + C$$

Déterminons C par la condition qu'à l'instant t_0 le mobile passe par sa position d'équilibre $u = 0$

$$t_0 = \sqrt{\frac{m}{\gamma}} \arcsin 0 + C = C$$

Retranchons membre à membre ces deux dernières équations

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{\gamma}} \arcsin \frac{u}{u}$$

ou en prenant les sinus des deux membres

$$u = u \sin \left[\sqrt{\frac{\gamma}{m}} (t - t_0) \right]$$

Ainsi il était exact de supposer comme propriété fondamentale que le déplacement est proportionnel à la force puisqu'on retrouve analytiquement la formule qu'on avait déduite de l'inspection de la courbe.

Voyons quelle est la signification des constantes u , $\frac{g}{m}$, t_0 .
 u est le plus grand écart, car u d'après la formule ci-dessus oscille entre $\pm u$ on l'appelle la semi-amplitude.

Le mouvement est périodique, en effet: la fonction reprend la même valeur quand l'argument du sinus augmente d'un multiple 2π .
 Soit T cette période, on doit avoir:

$$\sqrt{\frac{g}{m}} T = 2\pi \quad \text{d'où } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{g}}.$$

On n'a pas intérêt à connaître m et g . Substituons en effet à $\frac{g}{m}$ sa valeur en fonction de T , il vient:

$$u = u \sin \frac{2\pi}{T} (t - t_0)$$

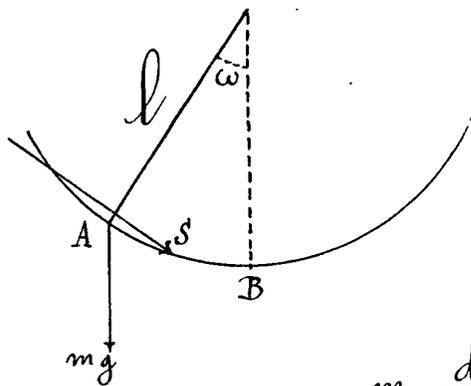
$$\text{ou } u = u \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{t_0}{T} \right)$$

$\frac{t_0}{T}$ est un coefficient purement numérique, on le désigne par la lettre φ et on l'appelle phase initiale, c'est-à-dire la fraction de période qui s'est écoulée depuis l'origine du temps jusqu'au moment où le déplacement est nul la vitesse étant positive.

En effet le déplacement $u=0$, le temps était $t=t_0$.

Ce mouvement s'appelle mouvement pendulaire, car la loi est la même pour un pendule simple écarté légèrement de sa position d'équilibre.

En effet: soit S l'arc AB et ω l'angle d'écart on a $l\omega = S$ la loi du déplacement est représentée par:



$$\begin{aligned} m \frac{d^2 S}{dt^2} &= -mg \sin \omega \\ &= -mg \omega \text{ sensiblement} \\ &= -mg \frac{S}{l} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = -\frac{g}{l} S$$

C'est précisément l'équation que nous avons trouvée ci-dessus où l'on remplace γ par g et m par l .

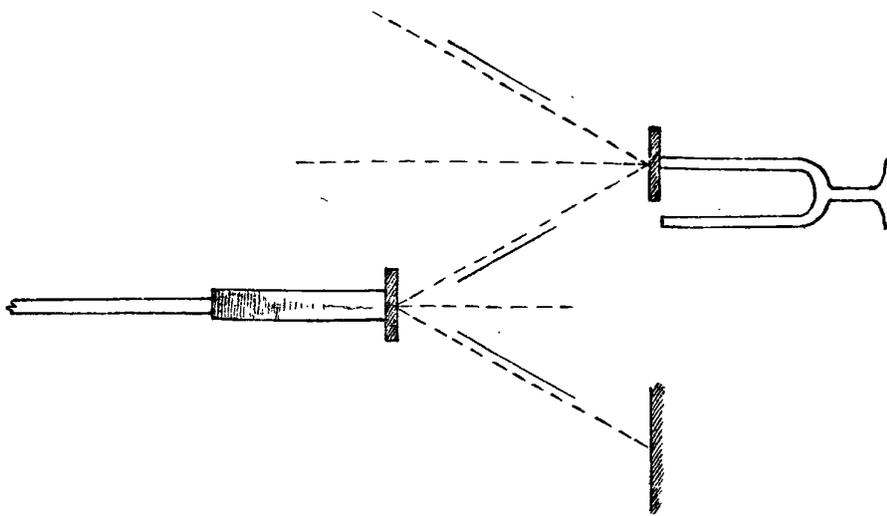
Passons maintenant à une détermination plus précise que la vue du simple tracé.

Méthode optique de Lissajous. - C'est la méthode de la composition optique de deux mouvements vibratoires.

Soit un corps quelconque vibrant, par exemple un diapason, et arrondissons l'extrémité d'une de ses branches d'un miroir MM' en acier. Si l'on fait vibrer le diapason la normale au miroir oscille, l'extrémité du diapason décrivant sensiblement un arc de cercle très-petit autour d'un certain point de la tige.

Si la normale décrit un angle α le rayon réfléchi se déplacera de l'angle 2α en restant dans le plan normal au miroir contenant le rayon incident. Si l'on reçoit le rayon réfléchi sur un écran, l'œil reçoit l'impression d'une ligne continue à cause de la rapidité des vibrations.

Imaginons que le plan de vibrations soit le tableau la ligne verticale.



Si maintenant le premier diapason étant au repos, on fait tomber le rayon réfléchi sur un miroir situé à l'extrémité d'un second diapason que l'on fait vibrer dans un plan horizontal, on obtient le même phénomène que ci-dessus, mais la droite lu-

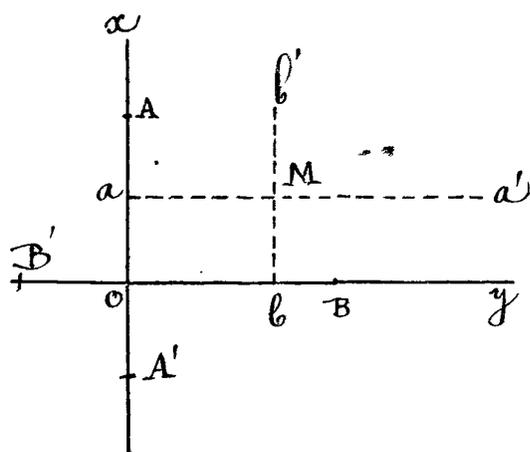
mineuse produite sur un écran se trouve horizontale.

En faisant vibrer ensemble les deux diapasons on a la composition des deux mouvements, qui donne différentes figures selon le rapport entre les nombres de vibrations des deux instruments.

Le mouvement vibratoire du premier diapason est représenté par l'équation

$$\alpha = A \sin \frac{2\pi}{T} (t - t_0)$$

celui du second sera: $\beta = B \sin \frac{2\pi}{T'} (t - t'_0)$.



Je représente par la ^{horizontale} BB' le mouvement donné par le second diapason seul et par AA' le mouvement provenant du premier.

Si les deux sont en mouvement, à un instant donné l'image aura subi de la part du premier miroir un déplacement Oa et par suite sera sur $b'b'$. Elle sera donc en M , intersection de ces deux droites.

On obtient facilement l'équation du lieu du point M .
En effet soit D la distance du miroir N à l'écran E on aura :

$$\begin{cases} Oa = \alpha D \\ Ob = \beta D \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} x = \alpha D = AD \sin \frac{2\pi}{T} (t - t_0) \\ y = \beta D = BD \sin \frac{2\pi}{T} (t - t'_0) \end{cases}$$

Il suffira d'éliminer le temps entre ces deux équations. Posons pour simplifier $\begin{cases} AD = a \\ BD = b \end{cases}$

$$\text{on aura } \begin{cases} x = a \sin \frac{2\pi}{T} (t - t_0) \\ y = b \sin \frac{2\pi}{T} (t - t'_0) \end{cases}$$

La seconde peut s'écrire

$$\begin{aligned} y &= b \sin \frac{2\pi}{T} (t - t_0 - t'_0 + t_0) \\ &= b \sin \frac{2\pi}{T} \left(\frac{t - t_0}{T} - \frac{t'_0 - t_0}{T} \right) \end{aligned}$$

Le second terme de la parenthèse est la différence des phases initiales.

Si l'on change l'origine du temps, on pourra écrire des équations sous la forme

$$\begin{cases} x = a \sin 2\pi \frac{t}{T} \\ y = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - q \right) \end{cases}$$

Eliminant t entre ces deux équations, on arrive au résultat suivant :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos 2\pi\varphi = \sin^2 2\pi\varphi.$$

Cette équation représente toujours une ellipse : formons en effet la fonction $B^2 - 4AC$:

$$\text{C'est ici } \frac{4}{a^2 b^2} \cos^2 2\pi\varphi - \frac{4}{a^2 b^2} = -\frac{4 \sin^2 2\pi\varphi}{a^2 b^2} \text{ toujours négatif}$$

Cette ellipse varie de forme suivant la valeur de φ

$$\text{Pour } \varphi = 0 \text{ on a } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} = 0.$$

ou $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$ droite double passant par l'origine, (Diagonale du rectangle ayant pour côtés $2a, 2b$).

Dans ce cas φ étant nul, les vibrations sont concomitantes ; les mouvements vibratoires sont nuls et atteignent leur maximum en même temps.

Si $\varphi = \frac{1}{4}$ (c'est-à-dire s'il y a une différence de $\frac{1}{4}$ de période entre les passages au zéro).

on a $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alors l'ellipse est rapportée à ses axes.

Si $\varphi = \frac{1}{2}$ on a $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$ on obtient la seconde diagonale du rectangle.

L'ellipse en prenant successivement les diverses formes que nous venons de voir demeure constamment inscrite dans le rectangle.

Il est facile de voir par la discussion de ces formules que pour des valeurs de φ différant de $\frac{1}{2}$ le sens de la description de l'ellipse est inverse. On le démontre expérimentalement pour le même dispositif, en employant des lames élastiques vibrant assez lentement pour que l'impression du point lumineux sur la rétine ne persiste pas pendant toute la durée d'une période.

Dans tout ce qui précède nous avons supposé que la période T est la même pour les deux diapasons, mais cette condition est très difficile à obtenir : dans le cas général on a :

$$\begin{cases} x = a \sin 2\pi \frac{t}{T} \\ y = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} - \varphi\right) \end{cases}$$

Mais on peut faire passer la différence de période sur le compte de la phase, posons en effet :

$$T' = \frac{T}{1+\epsilon}$$

il vient :

$$y = b \sin 2\pi \left(\frac{t(1+\epsilon)}{T} - \varphi \right)$$

$$= b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{\epsilon t}{T} - \varphi \right)$$

On peut grouper le terme $\frac{\epsilon t}{T}$ avec φ , alors la différence de phase varie proportionnellement au temps d'une manière continue, on voit l'ellipse par toutes les formes précédentes et les formes intermédiaires. C'est ce que vérifie l'expérience.

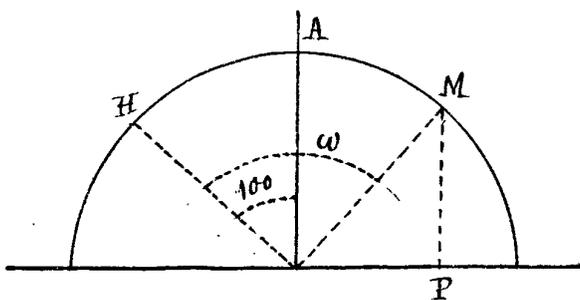
Une disposition électrique très ingénieuse permet de mettre le diapason en mouvement vibratoire, au moyen d'un électro-aimant situé entre les deux branches du diapason qui lui-même fait partie du conducteur.

Essajons a composé des mouvements vibratoires de périodes différentes en prenant successivement : $T' = 2T, 3T, \dots, \frac{m}{n} T$.

On obtient dans tous les cas une courbe inscrite dans le rectangle, et si l'on combine des diapasons dans le rapport : $T' = \frac{m}{n} T$, la courbe a m constante sur un des cotés du rectangle, et n sur l'autre.

(Voir la représentation des différentes figures dans le cours de M. Jamis - Tome II pages 609 et suivantes.)

Le mouvement pendulaire simple peut être considéré comme la projection d'un mouvement circulaire uniforme sur un diamètre du cercle



descrit. Soit a le rayon du cercle, M la position du mobile au bout du temps t , H sa position initiale; nous avons, puisque le mouvement circulaire est uniforme :

$$a(\omega - \omega_0) = v(t - t_0) \quad v \text{ étant une constante.}$$

Le mouvement de P sera représenté par l'équation

$$u = a \sin(\omega - \omega_0) = a \sin \frac{v}{a}(t - t_0)$$

La période est le temps employé à parcourir le cercle.

$$T = \frac{2\pi a}{v}$$

Pour $\omega = \omega_0$, on a $t = t_0$; il s'est donc écoulé un temps t_0 depuis l'origine du temps jusqu'au moment où le mobile passe en A. La phase initiale est donc représentée par l'arc HA.

3^e Leçon.

Importance du mouvement vibratoire rectiligne suivant la loi pendulaire. — Nous avons insisté sur le mouvement vibratoire rectiligne et pendulaire. On peut en effet ramener l'étude d'un mouvement vibratoire quelconque à celle de mouvement rectiligne. On démontre d'abord en mécanique que tout mouvement d'un point sur une courbe plane ou gauche peut être décomposé en trois mouvements rectilignes parallèles à trois axes de coordonnées.

De plus, on voit, en analyse, que toute fonction périodique du temps $f\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, T étant la valeur de la période, est toujours développable en série de la manière suivante.

$$f\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = A + A_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + A_2 \sin 4 \frac{\pi t}{T} + \dots + A_n \sin 2n \pi \frac{t}{T} + \dots \\ + B_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} + B_2 \cos 4 \frac{\pi t}{T} + \dots + B_n \cos 2n \pi \frac{t}{T} + \dots$$

ou les coefficients sont des constantes. La série peut être déterminée quand la fonction est donnée graphiquement ou numériquement (*).

On voit donc qu'un mouvement périodique peut être considéré comme la superposition d'une série de mouvements pendulaires simples.

(*) Pour déterminer les coefficients A, A_1, A_2 , etc lorsque la fonction f est donnée explicitement on multiplie les deux membres de l'égalité précédente par $\sin m 2\pi \frac{t}{T}$ et l'on intègre entre les limites t et $t+T$; on a dans le premier membre: $T \int_t^{t+T} f\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sin m 2\pi \frac{t}{T} dt$; dans le second tous les termes s'annulent sauf celui dont le coefficient est A_m . En effet un terme de la forme $\int_t^{t+T} \sin 2\pi m \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{nt}{T} dt$ s'annule; car en le décomposant en somme et intégrant on a un résultat nul excepté si $n = m$: il reste alors: $\int_t^{t+T} f\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sin m 2\pi \frac{t}{T} dt = \frac{T}{2} A_m$

de périodes $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \dots, \frac{T}{n}$ et ne peut être ainsi constituée que d'une seule manière.

Le timbre paraît résulter précisément de la superposition de ces mouvements pendulaires de périodes différentes.

Étude des lois que présentent les mouvements vibratoires de quelques corps sonores.

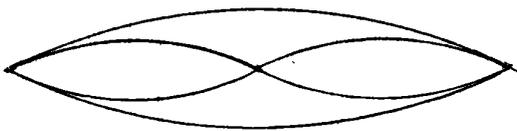
Nous choisirons quelques formes types spécialement parmi les corps sonores employés pour produire les sons musicaux les plus purs; l'étude complète de ces cas particuliers conduit souvent à la découverte de lois plus générales.

Vibrations transversales des cordes. - Pour étudier les vibrations transversales des cordes, on se sert du sonomètre. C'est une caisse vide en bois de sapin, percée d'un certain nombre de trous, destinée à la fois à supporter les cordes et à renforcer leur son. On accroche une de leurs extrémités à une broche de fer, et pour leur donner une tension convenable, on les enroule par l'autre bout sur une vis implantée dans la table, ou bien on les fait passer sur la gorge d'une poulie, et on les charge de poids. Elles s'appuient sur deux chevalets à arête vive, qui ne changent pas la tension longitudinale, mais qui les fixent transversalement et limitent la longueur de la partie vibrante à la distance de leurs deux points d'appui.

Tout effort dérangeant la corde de sa position d'équilibre la met en vibration, l'action de l'archet est assez complexe à analyser. On emploie généralement dans les expériences les cordes métalliques, plus homogènes et d'un diamètre plus régulier que les cordes en boyau.

Une corde donne des sons différents suivant la manière dont on la fait vibrer. On appelle fondamental, le son le plus grave qu'elle puisse rendre. D'autres sons plus aigus se produisent quelquefois; on les appelle sons harmoniques. Ils résultent d'une subdivision spontanée de la corde en parties aliquotes. Si l'on regarde attentivement une corde vibrant, on aperçoit une apparence de fuseau

C'est l'enveloppe des positions successives de la corde; on voit quelquefois même un double fuseau on peut en voir jusqu'à trois ou quatre. On produit à coup sûr cette apparence en touchant la corde en un point correspondant à une partie



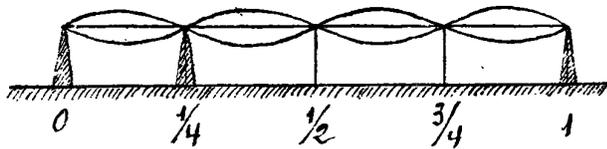
aliquote de la corde, qui lachée continue à vibrer toute entière en faisant entendre un son harmonique.

Voici les résultats obtenus :

1^o Une corde tendue vibrant transversalement, est susceptible de rendre successivement ou simultanément une série de sons dans lesquels une oreille exercée reconnaît la série des sons désignés en musique sous les noms de : $ut_1, ut_2, sol_2, ut_3, sol_3, si_b_3, ut_4, ré_4, mi_4$ etc.

2^o Les sons harmoniques correspondent à une subdivision spontanée de la corde en parties aliquotes, de manière que certains points restent fixes tandis que d'autres ont le maximum de vibration : les premiers s'appellent des nœuds ; les seconds des ventres.

3^o On peut à volonté faire naître tel ou tel mode de vibration en rendant fixe un point convenable de la corde. — Pour qu'elle se subdivise en deux il suffit de toucher son milieu avec le doigt et la faire vibrer.



Pour démontrer que le reste de la corde se met en vibration, on a recours à l'expérience d'un physicien français SAUVEUR. On place un chevalet au $\frac{1}{4}$, par exemple, de la corde : on place des cavaliers en papier blanc aux divisions $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$; puis des cavaliers

rouges à égale distance des points $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. Dès qu'on fait vibrer la corde les cavaliers rouges sautent en l'air, tandis que les blancs ne bougent pas ; si on met le chevalet au $\frac{1}{3}$ les autres tombent à leur tour.

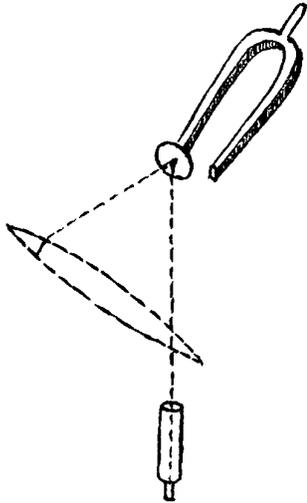
4^o Loi numérique. La série des sons harmoniques que rend une corde correspond comme nombre de vibrations au son fondamental ut_1 ; l'harmonique ut_2 en a 2, la 3^e sol_2 en a 3, etc... On voit que l'intervalle de ut_2, sol_2 est $\frac{2}{3}$ correspondant à la quinte : les harmoniques suivantes forment la quarte, la tierce majeure et la tierce mineure. Cela vérifie la loi des consonances perçues par une oreille musicale, et l'on voit que les périodes des harmoniques sont des sous-multiples de la période du son fondamental.

On peut vérifier cette loi :

- 1^o par l'oreille.
- 2^o par le tracé direct des vibrations au moyen d'une barbe de plume fixée à l'extrémité d'une corde vibrante.
- 3^o par l'accord avec une sirène, avec la roue dentée de Savart ;
- 4^o par la méthode optique de M. Lissajous. — On pourrait accorder des diapasons avec les harmoniques et vérifier la loi des

consommances, par la méthode exposée dans la leçon précédente.

Il est plus simple de fixer à la corde vibrante un point brillant, (feuille d'or ou d'antimoine) que l'on regarde par réflexion dans un miroir fixé à l'extrémité d'un diapason vibrant. Si l'on peut régler la corde au diapason de manière à voir une ellipse, c'est que les deux corps sonores vibrent à l'unisson; on peut aussi chercher à obtenir les courbes correspondant à la quinte, à la quarte, etc. -



On peut encore reproduire les courbes de M. Lissajous en faisant vibrer deux cordes perpendiculaires entre elles, devant un fond lumineux. Leurs ombres se superposent et leur

intersection, qui n'est autre que la composition de leurs mouvements vibratoires, forme une courbe continue apparaissant en clair. Cette courbe sera une ellipse, si les cordes vibrent à l'unisson.

On peut encore se servir d'une corde et d'une tige fine fixée à l'extrémité d'un diapason vibrant.

11^e Leçon.

Lois des vibrations transversales. — Le nombre de vibrations transversales d'une corde dans l'unité de temps est, toutes choses égales d'ailleurs,

- 1^o, en raison inverse de la longueur de la corde l ;
- 2^o, proportionnelle à la racine carrée du poids tenseur p ;
- 3^o, en raison inverse de la racine carrée de la section s ;
- 4^o, en raison inverse de la racine carrée de la densité d ;

$$N = \frac{A}{l} \sqrt{\frac{p}{sd}}$$

La valeur numérique de la constante A se rapproche beaucoup

De $A = \frac{1}{2} \sqrt{g}$ g étant l'accélération de la pesanteur : mais il faut prendre pour unité le mètre et la seconde.

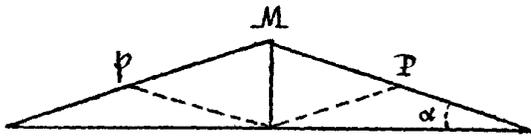
La formule peut être transformée : Soit ω le poids de la corde vibrante on a :

$$\omega = l \rho \quad \text{et l'on a} \quad N \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gP}{\omega l}}$$

Dans notre formule N représente le nombre de périodes ou de vibrations doubles.

On vérifie la loi de la longueur pour les harmoniques par exemple en subdivisant la corde en 2, 3, etc., parties égales.

Pour le poids tendue, les frottements sur les chevalets empêchent l'exactitude de la vérification ; pourtant un poids quadruple donne sensiblement l'octave ou son fondamental ; avec un sonomètre vertical la vérification est plus facile. On vérifie les autres lois d'une manière analogue avec les cordes de différentes natures.



Il est facile de voir pourquoi le coefficient d'élasticité n'entre pas dans la formule. Éloignant le point M de sa position d'équilibre ; la force que au poids p qui tend à l'y ramener est :

$2 p \sin \alpha$. La réaction élastique est proportionnelle à l'allongement de la corde $\frac{l}{\cos \alpha} - l$ et comme α est très-petit on peut écrire :

$$\frac{l}{\cos \alpha} - l = l \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) = l \frac{1 - 1 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}}{1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{l \alpha^2}{2}$$

On voit donc que cette force est du second ordre par rapport à $2 p \sin \alpha$, et par suite négligeable.

Cela explique pourquoi les corps même peu élastiques, tels que des cordes en chaux, résonnent comme un fil métallique quand ils sont fortement tendus.

Vibrations longitudinales des cordes. — On appelle ainsi les vibrations d'une corde frottée dans le sens de la longueur avec un archet ou avec les doigts enduits de résine. On entend un son beaucoup plus aigu que le son ^{fondamental} de la corde vibrant transversalement.

Dans ce mode de vibrations, les forces élastiques de la corde jouent un rôle exclusif ; c'est l'allongement d'un côté, le raccourcissement de l'autre, qui produisent les vibrations.

La loi des harmoniques est la même que pour les vibrations transversales. Lorsque la corde vibre certaines tranches sont immobiles (nœuds), d'autres en vibration au maximum d'amplitude (ventres).

Le nombre des périodes des vibrations longitudinales d'une corde est :

1°. indépendant de la tension et du diamètre.

2°. inversement proportionnel à la longueur

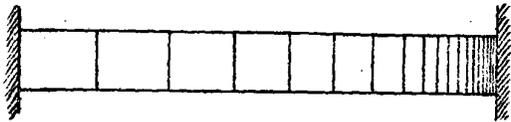
3°. proportionnel à la racine carrée du quotient du coefficient d'élasticité par la densité

$$\text{on a : } B = \frac{1}{2} \sqrt{g}$$

$$\text{d'où } N' = \frac{B}{l} \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

$$N = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{gK}{\rho}}$$

On vérifie ces lois en faisant varier le poids tenseur, le diamètre et constatant que le son reste le même. La loi des longueurs est vérifiée par les harmoniques dont le nombre de périodes varie comme 1. 2. ... n.



subdivisée en tranches normales dont les unes se dilatent, les autres se contractent; il en résulte un déplacement de molécules qui se transmet au support puis à l'air, et produit le son. Quand on détermine un nœud en un point, on compense sur ce point les actions élastiques, de sorte qu'en ce point il y a alternance de compression et de dilatation sans déplacement.



On reproduit grossièrement l'apparence d'un nœud, en faisant tourner autour de son axe un cylindre peint en noir et portant une série d'ellipses, inclinées de plus en plus sur les génératrices, à partir d'un cercle; toutes ces courbes étant plus épaissies d'un côté du cylindre que sur la partie opposée.

Si l'on divise membre à membre les formules donnant le nombre de vibrations longitudinales et transversales, on a :

$$\frac{N'}{N} = \sqrt{\frac{KS}{P}}$$

Or le coefficient K se réduit d'une formule :

$$\Delta l = \frac{1}{k} \frac{l p}{s} \text{ donc}$$

$\frac{N}{N} = \sqrt{\frac{l}{\Delta l}}$ Si $l=1$, Δl est l'allongement de l'unité de longueur sous le poids p . Appelons-le ε , qui est une quantité très-petite

$$\frac{N}{N} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$\frac{1}{\varepsilon}$ est très-grand et l'on voit que le nombre de vibrations longitudinales est très-grand par rapport à celui des vibrations transversales de la même corde.

Vibrations longitudinales des tiges. - Les lois précédentes étant indépendantes du diamètre, leurs formules s'appliquent aux tiges rigides. On peut les faire vibrer de différentes manières:

1^o, en fixant leurs extrémités dans des étaux très-solides en en frottant avec une peau enduite de colophane.

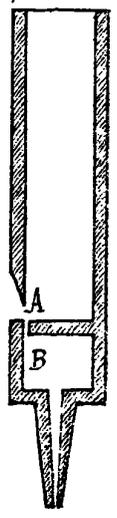
Ce mode d'encastrement est à peu près réalisé dans les fils télégraphiques: les sons que ces fils font entendre lorsque les poteaux sont agités par le vent sont des harmoniques à vibration longitudinale.

2^o, Au lieu d'encastrement des tiges on peut les tenir par le milieu ou certains points intermédiaires, qui seront dès lors le siège d'un nœud. Les extrémités libres forment des ventres. Une tige donne le même son, qu'elle soit pleine ou creuse pourvu que sa longueur soit la même. Une tige de longueur moitié moindre donne l'octave.

On peut produire dans les tiges les mêmes subdivisions que dans les cordes: en les tenant au n° de leur longueur et frottant près de la main, on forme des nœuds et des ventres équidistants: toutefois il y a une différence essentielle: les deux subdivisions extrêmes sont toujours moitié moindre que les autres parce que les extrémités libres des tiges sont le siège des ventres et non pas de nœuds comme les extrémités fixes des cordes.

Le mode de vibrations que nous avons étudié à la fin de la dernière leçon doit s'étendre à toute matière élastique en colonne susceptible de vibrer dans le sens de la longueur et les lois doivent rester les mêmes. L'expérience a justifié ces prévisions dans le cas des gaz et des liquides. C'est ainsi que le nombre des vibrations d'une semblable colonne est indépendant de la section, en raison inverse de la longueur et en raison inverse de la racine carrée des densités. Pour mettre en vibration une colonne gazeuse on emploie différentes dispositions que nous allons étudier successivement.

Tuyaux sonores. - La disposition adoptée pour faire vibrer une colonne d'air ou autrement dit un tuyau sonore est très-anciennement elle a été trouvée empiriquement et n'est pas symétrique; on ne peut donc pas attendre une aussi grande netteté dans ces phénomènes que dans ceux qui accompagnent le mouvement vibratoire des cordes.



Un tuyau sonore se compose généralement d'une caisse rectangulaire en bois de sapin, dont une extrémité est ouverte, ou fermée, et dont l'autre porte l'embouchure destinée à produire le mouvement vibratoire: une des parois de la caisse est percée d'une fente transversale dont la lame supérieure est taillée en biseau. D'après un mécanisme qui il serait difficile d'analyser complètement, l'air arrivant par une étroite ouverture B, vient se briser contre la lame A, il en résulte une série d'impulsions imprimées à la masse élastique du gaz qui entre en vibrations longitudinales en produisant un son.

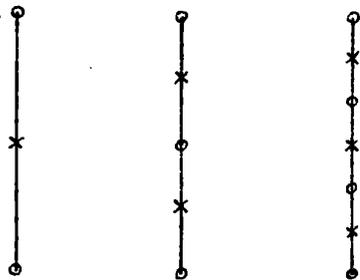
On a essayé de rendre plus symétrique cette disposition en adoptant des tuyaux cylindriques avec embouchure circulaire, on a obtenu de bons résultats.

Les liquides peuvent aussi vibrer dans de semblables tuyaux, mais l'expérience est plus difficile à réussir.

Des tuyaux ouverts. - Nous allons voir que l'état vibratoire est identique à celui d'une tige maintenue par son milieu; on observe en effet qu'au milieu de la longueur, il y a une tranche immobile: pour cela on descend dans le tuyau une membrane portée par 3 fils et portant quelques grains de sable, si la membrane est au sein d'une masse d'air en mouvement elle se déplace rapidement, et le sable fait entendre un crépitement spécial. Si au contraire elle se trouve dans une tranche immobile, (simplement comprimée et dilatée dans son épaisseur), on n'entend que le son du tuyau. On donne à la tranche immobile le nom de nœud et celui de ventre à la tranche ayant le mouvement maximum par analogie avec les cordes.

On a vu que les tiges et les cordes produisent des harmoniques, il en est de même pour les tuyaux ouverts;

(Son fondamental) (octave) (3^e harmon.)



(Comme le montrent les figures ci-contre).

Un nœud est une tranche en repos qui reçoit alternativement des compressions et des dilatations.

Un ventre est une tranche qui oscille constamment sans changer de densité.

Tout déplacement de la dernière tranche ne modifie en rien la pression de l'atmosphère, d'où il suit que cette dernière tranche correspond toujours à un ventre dans les tuyaux ouverts. Les tranches intérieures au contraire étant maintenues par les parois, peuvent être comprimées ou dilatées par le mouvement vibratoire.



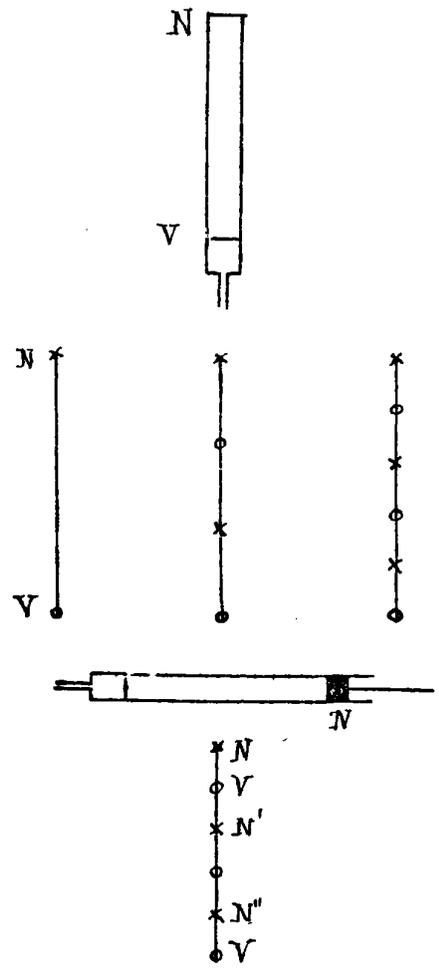
Pour montrer l'état de l'air aux différents points de la colonne, on emploie un tuyau portant de distances en distances des ouvertures susceptibles d'être ouvertes ou fermées à volonté. Si l'on ouvre un orifice correspondant à un ventre le son n'est pas modifié, car aux ventres

l'air est à la pression même de l'atmosphère; si au contraire on ouvre un orifice correspondant à un nœud le son est altéré.

Des tuyaux fermés. — On voit par ce qui précède que le fond du tuyau doit correspondre à un nœud car l'air ne peut plus se déplacer, mais subit seulement des compressions ou des dilatations. L'expérience montre qu'un tuyau fermé donne le même son qu'un tuyau ouvert de longueur double pour cela on prend un tuyau ouvert qui porte au milieu de sa longueur un registre que l'on peut enfoncer ou retirer à volonté pour fermer ou ouvrir le tuyau sans que le son en subisse aucune altération.

Les tuyaux fermés ne donnent que les harmoniques de rang impair: 1, 3, 5, 7, --- et les nœuds présentent les disposi-

(les tuyaux métalliques les donnent plus faiblement que ceux en bois) on les obtient en augmentant successivement la pression du gaz: on reconnaît alors qu'à chaque état vibratoire correspond une répartition différente des nœuds: leur nombre qui représente les différents harmoniques, le son fondamental étant représenté par l'unité



tiend ci-contre:

Pour montrer l'équidistance des nœuds dans les tuyaux; on prend un tuyau fermé dont le fond mobile est formé d'un piston; Supposons que lorsque le piston est au haut de sa course le son rende un certain harmonique; si l'on enfonce le piston, le son redevient le même chaque fois que le piston se trouve en coïncidence avec un nœud.

Remarque: Il semble résulter de cette expérience que le son est indépendant de la longueur du tuyau résultat contraire à ce que nous avons annoncé plus haut.

Il est facile de résoudre cette difficulté: Supposons que le piston étant au haut de sa course N, l'air en vibrant produise un son S qui soit un certain harmonique, par exemple le cinquième; enfouons le piston jusqu'en N par exemple, nous obtenons en réalité un nouveau tuyau fermé, et le son S ci-dessus que l'on obtient encore est

un certain harmonique d'ordre inférieur à cinq de ce nouveau tuyau (dans le cas que nous étudions ce sera le 3^e) et la disposition des nœuds et des ventres n'est pas modifiée. Il n'y a donc en réalité aucune contradiction.

Dans les tuyaux comme dans les cordes le nombre des vibrations ou son fondamental est en raison inverse de la longueur.

La loi même des harmoniques sert de vérification: il suffit de compter le nombre de concavités correspondantes aux différents harmoniques d'un même tuyau.

Si l'on fait parler successivement un même tuyau avec deux gaz de densités différentes par exemple: Oxygène et Hydrogène (densités dans le rapport de 16 à 1) les nombres de vibrations des sons obtenus sont à l'intervalle musical d'une double octave c'est-à-dire dans le rapport de 1 à 4 donc il sont bien comme on la prévient en raison inverse des racines carrées des densités.

On pourrait employer cette méthode pour mesurer la densité des gaz. - Étudions le mécanisme du mouvement vibratoire permanent.

Relation entre le mouvement vibratoire permanent et la vitesse de propagation d'un ébranlement.

Revenons au mouvement vibratoire transversal d'une corde.

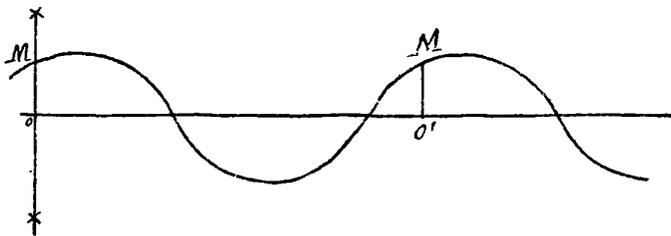
Si l'on prend une corde très-lâche, elle ne rend pas de son mais en lui donnant une légère impulsion en un point seulement, il y a une suite d'ondulations qui vont et reviennent par une sorte de réflexion au point d'attache; si au lieu d'une impulsion isolée on donne une série d'impulsions rythmées de plus en plus rapides la corde prend un régime oscillatoire où l'on reconnaît à vue des nœuds et des ventres.

Le même phénomène doit se produire dans le mouvement vibratoire très-rapide des cordes, il doit donc y avoir une relation continue entre la vitesse de transmission et la durée de la période. C'est ce que nous allons chercher à éclaircir.

Au lieu de considérer un mouvement quelconque se propageant dans la corde, prenons un cas vibratoire. Ce mouvement peut être représenté par l'équation :

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right)$$

Le déplacement se propage et on verra un mouvement vibratoire permanent ayant la forme d'une sinusoïde.



Soit a la vitesse de propagation, de telle sorte que si on a un déplacement OM , il se trouve au bout du temps t transporté en $O'M'$ à une distance x telle que $x = at$.

Inversement si l'on observe un point à une distance x de l'origine, quand on verra en ce point un déplacement $O'M$ on peut affirmer qu'il a été produit à l'origine à une époque t antérieure représentée par $t = \frac{x}{a}$.

Le mouvement d'un point situé à une distance x de l'origine sera donc représentée par l'équation :

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t - \frac{x}{a}}{T} + \varphi \right)$$

Celle est l'équation de l'onde directe.

Remarque: On peut poser

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{aT} + \varphi \right)$$

Sous cette forme on voit que y est périodique par rapport au temps et par rapport à l'espace :

1^o Par rapport au temps, car, y reprend les mêmes valeurs toutes les fois qu'on augmente t d'un multiple de T . Car alors l'argument du sinus est augmenté d'un multiple de 2π . La période est donc T .

2^o Par rapport à l'espace, car y redevient le même lorsque x s'accroît d'une quantité λ telle que

$$2\pi \frac{\lambda}{aT} = 2\pi$$

$$\lambda = aT \text{ la période est donc } aT.$$

Cette longueur $\lambda = aT$ est ce que l'on appelle la longueur d'onde. C'est aussi la longueur dont la courbe se déplace pendant une période de mouvement oscillatoire.

Remarquons en outre qu'en chaque point l'amplitude est A car il est évident que les valeurs de y oscillent constamment entre les deux limites: $+A$. $-A$.

Revenons à l'expérience. De la corde fixée par une de ses extrémités; nous avons vu que les ondes se réfléchissent, et tout se passe comme si le phénomène que l'on produit à l'extrémité libre se reproduisait à l'autre extrémité.

Nous avons donc l'équation du mouvement, en remplaçant dans la formule vue plus haut; a par $-a$ (car le sens de la vitesse a changé) et en remplaçant φ par φ' , car il est évident que la phase initiale n'est plus la même.

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{aT} + \varphi' \right)$$

Le résultat de ces deux mouvements produit dans la corde un mouvement particulier qu'il est intéressant d'étudier.

Ce mouvement sera obtenu en posant $Y = y + y'$; nous avons vu en effet en mécanique (théorie de Bernoulli); que si un système matériel est soumis à plusieurs forces capables de produire individuellement sur ce système des déplacements infiniment petits; ces forces en agissant simultanément produisent un déplacement qui est la somme des précédents.

Donc en un point dont l'abscisse est x , on aura:

$$Y = A \left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{aT} + \varphi \right) + \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{aT} + \varphi' \right) \right]$$

$$Y = 2A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{\varphi + \varphi'}{2} \right) \cos 2\pi \left(\frac{x}{aT} + \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right)$$

C'est encore un mouvement périodique par rapport au temps et par rapport à l'espace dont les périodes sont: T pour le temps, et aT pour l'espace.

Ici l'amplitude n'est plus la même pour tous les points: elle est représentée par:

$$2A \cos 2\pi \left(\frac{x}{aT} + \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right)$$

En certains points cette amplitude est nulle: ces points sont déterminés par la relation:

$$2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right) = (2i+1) \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{\varphi' - \varphi}{2} + \frac{2i+1}{4}$$

$$x = \frac{i\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\varphi' - \varphi}{2} \lambda$$

Ces points sont équidistants et leur intervalle commun est $\frac{\lambda}{2}$ (Demi-longueur d'onde) ce sont les nœuds.

Cherchons les points pour lesquels l'amplitude est maximums:

$$2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right) = i\pi$$

$$\text{D'où} \quad x = \frac{i\lambda}{2} + \frac{\varphi' - \varphi}{2} \lambda.$$

Ces points équidistants, leur intervalle commun est $\frac{\lambda}{2}$ Comme pour les nœuds mais ces deux systèmes de valeurs de x diffèrent par le terme $\frac{\lambda}{4}$ donc l'origine des ventres est déplacée de: la quantité $\frac{\lambda}{4}$ et par suite se trouve entre deux nœuds et à égale distance de chacun.

Les nœuds sont donc les points où les amplitudes des deux mouvements oscillatoires se retranchent et s'annulent, les ventres sont ceux pour lesquels les amplitudes s'ajoutent.

Il en résulte que si dans un régime vibratoire permanent, une corde se partage en n concavités avec des points fixes; l'intervalle entre deux nœuds consécutifs doit être égal à une demi-longueur d'onde, et alors: $\frac{\lambda}{2} = \frac{l}{n}$ l étant la longueur de la corde.

ou $\frac{aT_n}{2} = \frac{l}{n}$ (a reste constant avec une même corde).

On déduit la loi des harmoniques en posant

$$T_n = \frac{2l}{an}$$

où T_n représentant la durée d'une période, et N_n le nombre de périodes

Dans l'unité de temps, on a

$$T_n N_n = 1$$

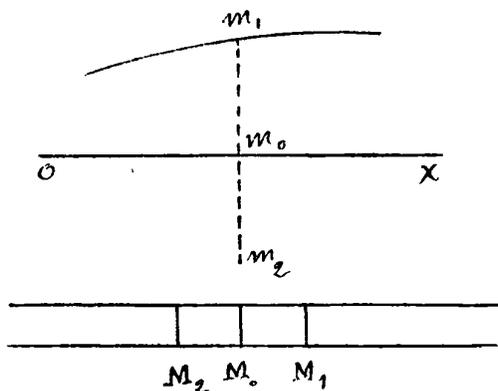
Donc
$$N_n = \frac{a}{2l} \cdot n$$

On retrouve ainsi deux des lois que nous avons trouvées expérimentalement pour le nombre des vibrations d'une corde : 1° le nombre qui représente le rang de l'harmonique, est proportionnel au nombre de vibrations correspondant ; 2° la loi de $\frac{a}{2l}$ des longueurs.

Il y a donc lieu de considérer le principe expérimental de la superposition de deux ondes directes et rétrogrades comme vérifié.

5^e Leçon.

Nous sommes arrivés par des considérations simples à établir l'une des lois régissant les vibrations transversales des cordes ; les mêmes considérations s'appliquent aux vibrations longitudinales, si nous faisons la convention suivante :



En chaque point d'une corde vibrant longitudinalement ox , nous élevons des perpendiculaires à cette corde, et nous nous portons sur ces perpendiculaires des ordonnées proportionnelles aux déplacements de leurs pieds ; ainsi je suppose qu'à un instant donné la branche primitivement en M_0 soit venue en M_1 ; je prendrai $M_0 M_1 = m_0 m_1$, en opérant de même pour chaque branche et joignant les points ainsi obtenus on a une courbe qui représente

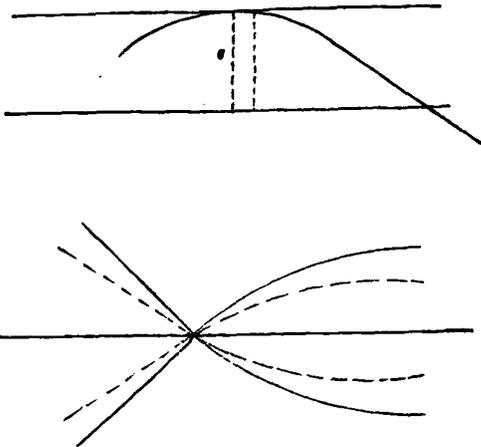
la loi des déplacements à un moment donné.

On y voit d'abord si le déplacement des branches a eu lieu à droite (si l'ordonnée est positive) et à gauche (si elle est négative)

On voit aussi à la seule inspection de la courbe représentative si une branche s'est dilatée ou comprimée ; il est évident que quand les

ordonnées croissent les branches sont dilatées et inversement lorsque les ordonnées décroissent les branches sont comprimées.

La compression ou la dilatation seront d'autant plus grandes que les ordonnées varieront plus rapidement, c'est-à-dire que la tangente à la courbe sera plus inclinée sur l'axe.



Elles seront nulles, et par suite la densité n'aura pas varié aux points où cette tangente sera parallèle à ox ; il y a maximum de déplacement puisque c'est en ces points que l'ordonnée est la plus grande.

Aux points où la courbe coupe l'axe des x le déplacement est nul; si ce point reste fixe quelque soit le temps la branche restera immobile mais sera alternativement comprimée ou dilatée, puisque la tangente sera alternativement positive ou négative; nous reconnaitrons que dans

un régime vibratoire permanent, il existe de ces points que nous appellerons des nœuds.

Cette courbe construite à chaque instant, variera avec le temps; si la variation est telle que la courbe reste identique à elle-même mais semble se déplacer suivant ox , nous aurons la représentation de la transmission d'une onde élastique; la vibration semblera se transporter le long de ox ; nous verrons plus tard que ce déplacement est possible; nous admettrons donc qu'il se produit, et de plus avec une vitesse constante a ; dès lors nous pourrions répéter exactement les calculs que nous avons fait dans le cas des vibrations transversales.

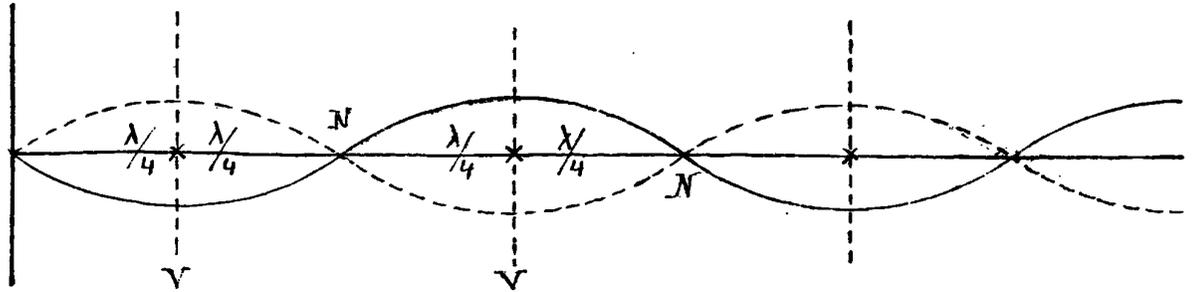
Nous nous bornerons à en adopter les conclusions, ce qui sera d'autant plus facile que la ligne représentative des vibrations longitudinales a exactement la même forme que la ligne réelle des vibrations transversales d'une corde.

Ainsi la courbe est périodique dans l'espace, que la période correspond à un accroissement de x .

$$\lambda = aT$$

qu'on appelle longueur d'onde; ce que chaque onde est divisée par un nœud en deux concavités, et qu'au milieu de chaque

Concavité (ou ventre) est le point dont le déplacement est maximum et dont la vitesse ne varie pas.



Applications:

1^o Tuyaux fermés. — A l'embouchure du tuyau qui est en communication avec l'atmosphère il y aura un ventre, et au fond il se produira un nœud; en effet la couche du fond d'abord comprimée par l'onde réagira en vertu de son élasticité et se poussera les branches voisines; le fond agira donc comme un piston qui produirait une compression sur la branche; l'onde semblera se réfléchir; il y aura superposition des ondes, comme dans le cas des vibrations transversales des ondes. On conclura de la même manière que l'intervalle entre deux nœuds consécutifs est égal à $\frac{\lambda}{2}$ et l'intervalle entre un nœud et le ventre contigu égal à $\frac{\lambda}{4}$.

Si le tuyau rend le son fondamental il n'aura qu'un ventre à l'ouverture et un nœud au fond; la longueur du tuyau est

$$l_1 = \frac{\lambda}{4} = \frac{aT}{4}$$

Soit N le nombre de vibrations par seconde.

$$N = \frac{1}{T} = \frac{a}{4l_1}$$

Le second harmonique sera caractérisé par la formation d'un nœud.

$$l_1 = \frac{3\lambda_1}{4} = \frac{3aT_1}{4}$$

$$N_1 = \frac{3a}{4l_1}$$

Pour chaque harmonique produit il faudra faire dans la longueur du tuyau deux divisions de plus, puisqu'il se produit un nouveau nœud et un nouveau ventre; donc en général:

1^{ère} Division - 1882-83

Physique - 9^{ème} Feuille.

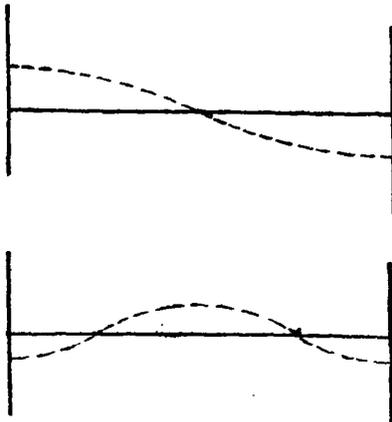
$$L = \frac{(2n+1) \lambda_n}{4} = \frac{(2n+1) a T_n}{4}$$

$$N_n = \frac{(2n+1) a}{4 L}$$

Quand n variera suivant les nombres entiers consécutifs; N_n variera comme les nombres impairs; le tuyau ne pourra donc pas produire les harmoniques d'ordre pair.

2.° Tuyaux ouverts. - Il se produit un ventre à chaque extrémité du tuyau; on a essayé par des théories superficielles d'expliquer la formation de l'onde réfléchie; la couche d'air comprimée à l'embouchure du tuyau presse les couches voisines, et comme les parois sont relativement incompressibles, l'onde se rammet jusqu'au bout du tuyau; mais alors la couche comprimée se trouve en contact avec l'atmosphère elle se dilate librement, dépasse la limite d'élasticité, et il se forme une tranche dilatée qui devient l'origine d'une nouvelle onde inverse de la première; la superposition de ces deux ondes donne un mouvement permanent; mais comme on le voit la question est trop complexe pour être résolue rigoureusement sans calcul: les considérations ne servent qu'à montrer la possibilité de la réflexion de l'onde dans des conditions différentes de celles du tuyau fermé et la nécessité d'un ventre de vibration c'est-à-dire d'une tranche sans changement de densité à l'extrémité du tuyau ouvert.

Pour le son fondamental (ou 1^{er} harmonique).



$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{aT}{2} \quad N = \frac{a}{2L}$$

Pour le 2^e harmonique

$$L = 2 \frac{\lambda_2}{2} = 2 \frac{aT_2}{2} \quad N = 2 \frac{a}{2L}$$

En général pour le n^{e} harmonique

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} = n \frac{aT_n}{2} \quad N_n = n \frac{a}{2L}$$

Le tuyau pourra produire tous les

harmoniques, 1, 2, 3, ..., n

On retrouve bien aussi sur ces formules qu'un tuyau ouvert donne l'octave du tuyau fermé de même longueur.

(Etude math.)

Etude mathématique du mouvement le plus général d'une corde, en supposant des déplacements transversaux très petits.

Nous allons chercher le mouvement transversal le plus général d'une corde rectiligne, se déplaçant dans un plan; cette dernière hypothèse a pour but de simplifier le calcul; pour plus de simplicité encore nous admettrons, ce qui est démontré par l'expérience, que les mouvements sont très-petits et rectilignes.

Ces hypothèses ont pour conséquence les 3 propositions suivantes.

1^o, l'allongement d'une portion finie de la corde est négligeable;

2^o, l'élasticité longitudinale n'est pas en jeu;

3^o, la tension est la même partout;

4^o, les déplacements initiaux sont perpendiculaires à la corde;

Considérons à un instant quelconque un élément de la corde ($AB = d\sigma$).

Soit ρ le rayon de courbure, ε l'angle de contingence.

$$d\sigma = \rho \varepsilon$$

La force qui sollicite l'élément a pour valeur (en appelant p la tension) $2p \sin \frac{\varepsilon}{2}$, ou comme ε est très-petit $\varepsilon p \frac{\varepsilon}{2} = p \varepsilon$

Je projette cette force sur l'axe des y ; elle fait avec cet axe un angle infiniment petit; elle est donc égale à sa projection au 2^o ordre près.

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -p \varepsilon$$

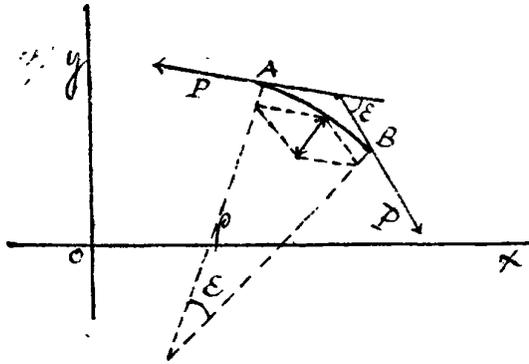
La composante parallèle à l'axe des x est du 2^o ordre et par suite négligeable.

$d\sigma$ est positif ainsi que ρ ; ε est négatif sur la figure

$$\rho = -\frac{d\sigma}{\varepsilon} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = p \frac{d\sigma}{\rho} = p d\sigma \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Car d'après une remarque précédente on peut négliger $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ dans !!



$$m = d\sigma \frac{sd}{g}$$

en appelant s la section, σ la densité de la corde et g la gravité.

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = d\sigma \frac{sd}{g} \frac{d^2y}{dt^2} = p d\sigma \frac{d^2y}{dx^2}$$

Posant pour simplifier

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{pg}{sd} \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{pg}{sd} = a^2$$

Il vient

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1)$$

(1) Pour effectuer l'intégration, x et t entrant d'une manière symétrique on est conduit à essayer le changement de variable suivant:

$$\alpha = mt + nx$$

$$\beta = m't + n'x$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{dy}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = \frac{dy}{d\alpha} m + \frac{dy}{d\beta} m'$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2y}{d\alpha^2} \frac{d\alpha}{dt} m + \frac{d^2y}{d\alpha d\beta} \frac{d\alpha}{dt} m + \frac{d^2y}{d\alpha d\beta} \frac{d\alpha}{dt} m' + \frac{d^2y}{d\beta^2} \frac{d\beta}{dt} m' \\ &= \frac{d^2y}{d\alpha^2} m^2 + 2 \frac{d^2y}{d\alpha d\beta} m m' + \frac{d^2y}{d\beta^2} m'^2 \end{aligned}$$

De même

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{d\alpha^2} n^2 + 2 \frac{d^2y}{d\alpha d\beta} n n' + \frac{d^2y}{d\beta^2} n'^2$$

D'où

$$\frac{d^2y}{dt^2} - a^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{d\alpha^2} (m^2 - n^2 a^2) + 2 \frac{d^2y}{d\alpha d\beta} (m m' - a^2 n n') + \frac{d^2y}{d\beta^2} (m'^2 - a^2 n'^2) = 0$$

Je puis disposer des coefficients $m m' n n'$ pour annuler ceux des coefficients.

Je pose $m = an$

$m' = a n'$

Il en résulte que: $m^2 - a^2 n^2 = 0$

$m'^2 - a^2 n'^2 = 0$

$m m' - a^2 n n' = 0$

$\alpha = n(at + x)$

$\beta = -n(at - x)$

et l'équation se réduit à

$$0 = \frac{d^2y}{d\alpha d\beta} = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{dy}{d\beta} \right)$$

ce qui veut dire $\frac{dy}{d\beta}$ est indépendant de α ; c'est-à-dire fonction de β seul

$$\frac{dy}{d\beta} = f(\beta)$$

L'intégrale de cette équation est la suivante :

$$y = F(at+x) + \phi(at-x)$$

F et ϕ étant deux fonctions arbitraires.

Posons $y_1 = F(at+x)$ $y_2 = \phi(at-x)$

La première fonction F aura une valeur déterminée tant que $at+x$ sera constant; par conséquent une ordonnée déterminée semblera se déplacer sur l'axe des x avec une vitesse constante ($-\alpha$) le même raisonnement s'applique à la 2^e fonction; une ordonnée y_2 semblera se déplacer sur la corde avec la même vitesse que y_1 mais en sens contraire.

Ainsi le mouvement le plus général d'une corde s'obtiendra par la superposition de deux systèmes d'ondes se déplaçant sur la corde avec la même vitesse, mais en sens contraire.

Pour que le son produit soit musical, il faut que les mouvements soient périodiques; supposons le plus simple possible; c'est-à-dire, considérons deux ondes identiques et formées par un mouvement pé-

riodique: $y = A \sin(m(at-x) - \varphi) + A \sin(m(at+x) + \varphi')$

$$y = 2A \sin\left(m at + \frac{\varphi' + \varphi}{2}\right) \cos\left(mx + \frac{\varphi' - \varphi}{2}\right)$$

Nous retrouvons sur cette formule toutes les lois de vibrations transversales des cordes.

Supposons en effet la corde fixée à ses extrémités; pour $x=0$ et $x=l$, y doit être nul quel que soit le temps; il faut donc que: $\cos\left(mx + \frac{\varphi' - \varphi}{2}\right)$ soit nul pour $x=0$ et $x=l$ ce qui donne

$$x=0 \quad \frac{\varphi' - \varphi}{2} = K\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$x=l \quad ml + \frac{\varphi' - \varphi}{2} = K'\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$ml = (K' - K)\pi = n\pi$$

J'intègre

$$y = \int \varphi(\beta) d\beta + C$$

Cette intégrale est une fonction de β , et C qui ne dépend pas de β est fonction de α

$$y = F(\beta) + \phi(\alpha)$$

$$y = F(at+x) + \phi(at-x)$$

D'où
$$m = \frac{n\pi}{l}$$

$$y = 2A \sin\left(\frac{n\pi}{l} at + \frac{\varphi + \varphi'}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l} x + \frac{\varphi' - \varphi}{2}\right)$$

Le mouvement sera périodique dans le temps, et la période T sera donnée par l'équation.

$$\frac{n\pi}{l} a T = 2\pi$$

$$T = \frac{2l}{na}$$

Il est de même périodique dans l'espace et la période ou longueur d'onde est :

$$\frac{n\pi}{l} \lambda = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

Le cosinus sera constamment nul en des points divisant la corde en parties égales à $\frac{\lambda}{2}$; il y a donc des nœuds, et aux points équidistants de ces nœuds seront des maximum de vibration ou ventres.

Soit d'autre part N le nombre de vibrations produites dans l'unité de temps.

$$NT = 1$$

$$N = \frac{na}{2l}$$

Quand on fera varier n comme les nombres entiers consécutifs (n est toujours entier) N variera dans le même rapport ; nous retrouvons la production des sons différents que nous avons appelés harmoniques.

D'ailleurs

$$a = \sqrt{\frac{pg}{sd}}$$

$$N = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{pg}{sd}}$$

C'est la formule que nous avait déjà donnée l'expérience.

6^e Leçon - - -

6^e Leçon.

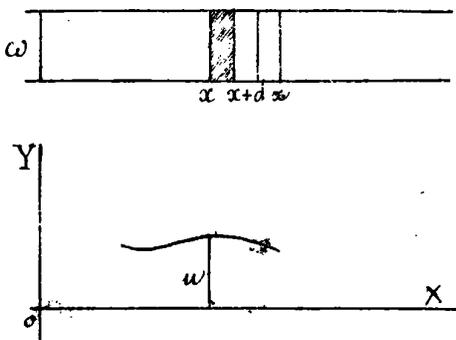
Vibrations longitudinales dans les corps élastiques de forme cylindrique quelconque.

Nous allons appliquer aux vibrations longitudinales l'analyse mécanique analogue à celle que nous avons employée pour l'étude des vibrations transversales des cordes.

Recherchons théoriquement la loi la plus générale du déplacement longitudinal d'une tranche.

Soit u le déplacement, cherchons à déterminer la fonction ;
 $u = F(x, t)$.

Convenons de représenter comme dans la leçon précédente, les déplacements longitudinaux par des ordonnées égales élevées en chaque point de l'axe Ox .



Nous supposons que : quelle que soit l'amplitude du déplacement, il ne se produit que de très-petites variations de densité : c'est-à-dire que les tangentes à la courbe représentative sont peu inclinées sur Ox ($\frac{du}{dx}$ est très-petit par rapport à l'unité).

Imaginons qu'au repos, on décompose la colonne cylindrique en tranches infiniment minces dx . À l'état de mouvement chacune de ces tranches est déplacée ; celle qui était à la distance x viendra à la distance $x+dx$ de l'origine ; sera à la distance $x+dx+u+\frac{du}{dx}dx$. ($\frac{du}{dx}dx$ est l'accroissement de la fonction : u lorsque x s'accroît de dx , t restant constant.

Isolons par la pensée une de ces tranches et suivons-la dans son mouvement :
 On peut remplacer les tranches voisines par les pressions qu'elles exercent.

Au repos chaque tranche est à la pression de l'atmosphère

Calculons la pression p après le déplacement:

Dans le 1^{er} cas: le volume était $\omega dx d_0$, et le poids $\omega dx d_0$.

Dans le second cas, il est $\omega d'x$ $d'x$ étant la nouvelle épaisseur de la tranche.

On posera donc $\omega dx d_0 = \omega d'x$

mais: $d'x = (x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - (x + u) = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx = dx (1 + \frac{\partial u}{\partial x})$

Par conséquent, on posera:

$$\omega d_0 dx = \omega d'x (1 + \frac{\partial u}{\partial x})$$

$$d_0 = d'x (1 + \frac{\partial u}{\partial x})$$

$$d = \frac{d_0}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} = d_0 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 + \dots \right)$$

$$d = d_0 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

en négligeant les puissances supérieures de $\frac{\partial u}{\partial x}$ qui par hypothèse est très-petit.

On aura donc $d - d_0 = -d_0 \frac{\partial u}{\partial x}$

Celle est la variation de densité moyenne d'une tranche.

Déduisons-en la variation de pression:

Il existe une relation nécessaire entre la pression spécifique et la densité ou poids spécifique.

$$p = \varphi(d)$$

que l'on peut écrire au moyen du développement de Maclaurin

$$p = \varphi(d - d_0 + d_0) = \varphi(d_0) + (d - d_0) \varphi'(d_0) + \frac{(d - d_0)^2}{1.2} \varphi''(d_0) + \dots$$

$$\text{Or: } p_0 = \varphi(d_0)$$

On aura donc

$p - p_0 = (d - d_0) \varphi'(d_0)$ sensiblement car $d - d_0$ est très-faible
Remplaçons $d - d_0$ par sa valeur trouvée plus haut, il vient:

$$p - p_0 = -d_0 \frac{\partial u}{\partial x} \varphi'(d_0)$$

Imaginons que dx décroisse de plus en plus, alors $\frac{\partial u}{\partial x}$ tendra vers la dérivée de u par rapport à x : donc nous aurons à la limite la variation de pression dans une tranche infiniment mince.

Remarquons que dans la fonction $p = \varphi(d)$; on convient de représenter

par p la pression sur l'unité de surface, ou pression spécifique δ est le poids spécifique.

Appliquons alors le théorème général du centre de gravité : c'est-à-dire que l'accélération du mouvement de la tranche est proportionnelle à la résultante des forces qui y sont appliquées.

La valeur de $p - p_0$ est fonction de x , on peut donc appliquer la formule à une tranche quelconque :

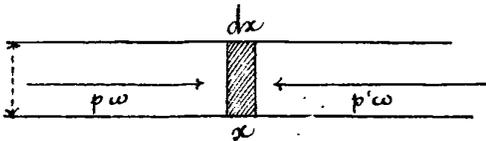
La pression dans la tranche x sera :

$$p = p_0 - \delta_0 \frac{\partial u}{\partial x} \varphi'(\delta_0)$$

Dans la tranche $x + dx$

$$p' = p_0 - \delta_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) \varphi'(\delta_0)$$

Laissons de côté les tranches voisines en les remplaçant par les pressions qu'elles exercent



À droite nous aurons la pression $p'w$
à gauche $p w$

Écrivons donc que la masse m se déplace sous l'influence de la force $(p - p') w$

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 u}{dt^2} &= (p - p') w \\ &= w \delta_0 dx \frac{d^2 u}{dx^2} \varphi'(\delta_0) \end{aligned}$$

Or $m = \frac{w \delta_0 dx}{g}$ donc l'équation précédente devient après avoir opéré les réductions :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = g \varphi'(\delta_0) \frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} \text{ en posant } a^2 = g \varphi'(\delta_0)$$

Ceci montre que si u satisfait à cette équation différentielle, le mouvement est possible : c'est la même équation que nous avons obtenue en étudiant les vibrations transversales dans les cordes.

On arrivera donc au même résultat que ci-dessus :

$$u = f(x + at) + \varphi(x - at)$$

Le mouvement le plus général peut donc être considéré comme la superposition de deux ondes l'une directe, l'autre rétrograde, se propageant avec la même vitesse $a = \sqrt{g \varphi'(\delta_0)}$.

Remarque. — La vitesse de propagation est indépendante de la forme de l'onde (ou de la loi d'ébranlement d'un des points de la colonne vibrante).

Ce résultat est important au point de vue des études acoustiques, la vitesse du son est donc la même, pour un même milieu, qu'il s'agisse d'un choc ou d'un mouvement vibratoire continu (son musical).

Dans le cas de l'étude des sons musicaux les fonctions arbitraires f et g seront remplacées par celle qui représente le mouvement périodique simple : et si l'on étudie seulement un mouvement vibratoire de période bien définie on sera conduit à poser

$$u = A \sin m(x + at + \varphi) + A \sin m(x - at + \varphi')$$

1^o Étude du mouvement vibratoire longitudinal d'une corde :
S'il s'agit d'une corde ou d'une tige pincée à ses deux extrémités, on aura :

$$u = 0 \text{ pour } \begin{cases} x=0 \\ x=l \end{cases} \text{ quel que soit } t$$

On peut écrire

$$u = 2A \cos m \left(at + \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right) \sin m \left(x + \frac{\varphi + \varphi'}{2} \right)$$

Nous poserons donc les deux conditions :

$$\begin{cases} m \frac{\varphi + \varphi'}{2} = K\pi \\ ml + m \frac{\varphi + \varphi'}{2} = K'\pi \end{cases}$$

Retranchons $ml = n\pi$ n étant un entier quelconque

D'autre part : si T représente la période du temps on aura

$$m a T = 2\pi$$

Divisant membre à membre, il vient :

$$\frac{aT}{l} = \frac{2}{n} \text{ ou } \frac{\lambda}{2} = \frac{l}{n}$$

C'est-à-dire que l'intervalle des deux nœuds = $\frac{1}{2}$ longueur d'onde.
Résultat trouvé plus haut.

2^o Tuyau ouvert : S'il s'agissait d'une tige libre aux 2 extrémités, ou d'un tuyau ouvert on ne devrait jamais avoir ni compression ni dilatation aux extrémités, par conséquent.

$$\frac{du}{dx} = 0 \text{ pour } \begin{cases} x=0 \\ x=l \end{cases} \text{ quel que soit } t.$$

$$\frac{du}{dx} = 2A m \cos m \left(at + \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right) \cos m \left(x + \frac{\varphi + \varphi'}{2} \right)$$

$$m \frac{\varphi + \varphi'}{2} = (2K+1) \frac{\pi}{2}$$

$$ml + m \frac{\varphi + \varphi'}{2} = (2K'+1) \frac{\pi}{2}$$

$$ml = 2n \frac{\pi}{2} = n\pi$$

On a aussi $maT = 2\pi$ d'où $\frac{aT}{l} = \frac{2}{n}$

Si l'on représente par N le nombre de périodes dans l'unité de temps, on aura $NT = 1$ et par suite $N = \frac{a}{4l} n$, donc les harmoniques sont représentées par les nombres entiers 1, 2, 3, ... n.

3° Tuyaux fermés - Dans le cas des tuyaux fermés, ou de tiges encastrées à une extrémité (vibrant longitudinalement),

on a $\left. \begin{array}{l} \frac{du}{dx} = 0 \text{ pour } x=0 \\ u=0 \text{ — } x=l \end{array} \right\} \text{quelque soit } t$

on en déduit $\left\{ \begin{array}{l} m \frac{\varphi + \varphi'}{2} = (2K+1) \frac{\pi}{2} \\ ml + \frac{\varphi + \varphi'}{2} = K' \pi = 2K' \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$

$$ml = (2n-1) \frac{\pi}{2}$$

$$maT = 2\pi$$

avec

d'où $\frac{l}{aT} = \frac{2n-1}{4}$ et par suite $N = \frac{a}{4l} (2n-1)$

Donc les harmoniques se succèdent comme la suite des nombres impairs, 1, 3, 5, ...

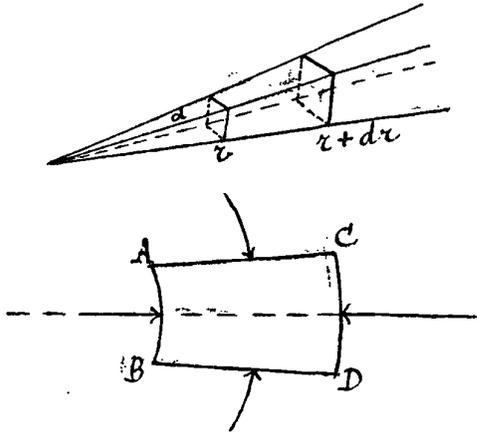
Remarquons que les calculs précédents sont à l'abri de toute considération superficielle telle que la réflexion des ondes dans les tuyaux ouverts : Nous sommes partis de l'étude de faits particuliers; puis nous avons remarqué une relation entre l'état vibratoire et la vitesse de propagation; enfin la recherche purement mathématique de ces relations nous a conduits à la vitesse absolue de la transmission d'une onde dans une colonne cylindrique.

Propagation des ondes sphériques.

Une marche analogue permet de traiter le cas des ondes sphériques : on y parvient en remarquant qu'une onde sphérique est assimilable à une série d'ondes se propageant dans une série de tuyaux pyramidaux ayant un sommet commun aux centres d'ébranlement. On peut donc considérer l'un de ces tuyaux

formé par des faces inclinées d'un très petit angle. (*) on se compose la

Note non exigée. - Soit α l'angle infiniment petit de la face plane de la pyramide à base carrée qu'on peut choisir ; αr et $\alpha(r+dr)$ seront les côtés des deux bases ; $\alpha^2 r^2$ $\alpha^2 (r+dr)^2$ les surfaces de ces bases. Il est bon de montrer d'abord qu'au repos cette pyramide est en équilibre sous l'influence des forces normales qui s'exercent sur ces six faces. La pression spécifique initiale étant p_0 on aura en projetant sur l'axe de la pyramide et remarquant que les faces latérales ont pour surface $\alpha r dr$



$$p_0 \alpha^2 r^2 = p_0 \alpha^2 (r+dr)^2 + 4 p_0 \alpha r dr \sin \frac{\alpha}{2}$$

Remplaçant $\sin \frac{\alpha}{2}$ par $\frac{\alpha}{2}$ et négligeant les infiniment petits du second ordre on trouve identiquement zéro.

Pendant le mouvement le poids spécifique δ_0 devient δ suivant la relation

$$\alpha^2 r dr \delta_0 = \alpha^2 (r+u)^2 dr \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \delta$$

D'où l'on tire en négligeant le carré de $\frac{u}{r}$ et de $\frac{\partial u}{\partial r}$ devant l'unité

$$\delta = \delta_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{u}{r}\right)^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)} = \delta_0 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r}\right)$$

D'où il résulte que la dilatation θ est donnée par l'expression

$$\theta = \frac{\delta_0 \delta'}{\delta_0} = \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{2u}{r}$$

D'après ce qu'on a vu ci-dessus la pression spécifique p est liée au poids spécifique par la relation

$$p = p_0 + \delta_0 \varphi'(\delta_0) (\delta - \delta_0) = p_0 - \delta_0 \varphi'(\delta_0) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right)$$

qu'on écrira pour abréger $p = p_0 + \omega$

Si l'on remarque, que par raison de symétrie les 6 forces doivent rester normales aux faces pendant le mouvement on aura pour la résultante suivant l'axe de la pyramide.

$$X = (p_0 + \omega) \alpha^2 (r+u)^2 - (p_0 + \omega + \frac{\partial \omega}{\partial r} dr) \alpha^2 (r+u+dr) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - 4 \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \left(p_0 + \omega + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial r} dr\right) (r+u) dr \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

pyramide en tranches sphériques qu'on assimile à des plans normaux de la pyramide. Isolant une de ces tranches qui a la forme d'un tronc de pyramide, on parvient aisément à l'expression de la variation du poids spécifique $\delta - \delta_0$ et des forces qui agissent sur les 6 faces et finalement à l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = g \varphi'(\delta_0) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} \right]$$

On la ramène en changeant la variable u par un calcul aisé à la forme:

il reste, tout calcul fait, en négligeant les quantités d'ordre supérieur

$$X = - \alpha^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} dx$$

D'où l'on conclut pour les quatre différentielles du mouvement du centre de gravité de l'élément en substituant à $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ sa valeur:

$$\frac{\alpha^2 r^2 dx \delta_0}{g} \frac{d^2 u}{dt^2} = + \alpha^2 dx \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right)$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \varphi'(\delta_0) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) = g \varphi'(\delta_0) \frac{\partial \theta}{\partial r}$ en rappelant la définition de la dilatation.

Posant: $g \varphi'(\delta_0) = \alpha^2$ et changeant de variable

en prenant $u = \frac{\partial A}{\partial r}$ A étant une fonction à déterminer

il vient $\frac{\partial^2 A}{\partial r \partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) = \alpha^2 \frac{\partial \theta}{\partial r}$

intégrant et substituant la valeur de u en fonction de A

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \alpha^2 \theta = \alpha^2 \left(\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) = \frac{\alpha^2}{r} \frac{\partial^2 (rA)}{\partial r^2}$$

et comme r est une constante dans la dérivée partielle $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$ il vient:

$$\frac{\partial^2 (rA)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 (rA)}{\partial r^2}$$

D'où l'on conclut que l'intégrale générale est:

$$F(r + \alpha t) + \phi(r - \alpha t)$$

Prenant la dérivée seconde des deux membres par rapport à r et divisant par r

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rA)}{\partial r^2} = \frac{1}{r} (F''(r + \alpha t) + \phi''(r - \alpha t))$$

Mais le premier membre n'est autre chose que la dilatation $\frac{\delta - \delta_0}{\delta_0}$ et les dérivées de fonctions arbitraires sont encore des fonctions arbitraires ce qu'il faut dire.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = g \varphi'(\delta) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

qui est précisément celle de l'onde plane dans les tuyaux cylindriques avec la même vitesse de propagation. Dans cette formule V ne représente pas le déplacement, mais le produit par α de la dilatation $\theta = \frac{\delta_0 - \delta}{\delta_0}$ de sorte qu'on a en définitive :

$$\theta = \frac{1}{2} \{ f(x+at) + \varphi(x-at) \}.$$

C'est-à-dire une propagation avec affaiblissement des compressions et dilatations en raison inverse de la distance au centre d'ébranlement : avec cette restriction on retrouve l'existence des ondes directe et rétrograde : mais la vitesse de propagation reste toujours la même.

$$a = \sqrt{g \varphi'(\delta)}$$

δ étant le poids spécifique du milieu à l'état de repos.

Propagation du son dans les gaz.

Tout repose sur la connaissance de la fonction $p = \varphi(\delta)$

On dans les gaz on a

$$\frac{pV}{1+\alpha t} = p_0 v_0 \text{ en prenant pour unité le mètre le Kilog et la seconde.}$$

D'autre part si l'on opère sur l'unité de poids du gaz on a :

$$1 = v_0 \delta_0 = v \delta \text{ d'où } \frac{v}{v_0} = \frac{\delta_0}{\delta}$$

On aura donc $p \delta_0 = p_0 \delta (1 + \alpha t)$

$$p = \frac{p_0}{\delta_0} (1 + \alpha t) \delta \text{ telle est la fonction } \varphi(\delta) \text{ (linéaire)}$$

si l'on considère δ comme constante on aura :

$$\varphi'(\delta) = \frac{p_0}{\delta_0} (1 + \alpha t)$$

Donc la vitesse du son sera dans cette hypothèse :

$$a = \sqrt{\frac{g p_0}{\delta_0} (1 + \alpha t)}$$

Newton est le premier qui ait établi cette formule, et il a trouvé :

$a = 270$ mètres par secondes, résultat contraire à l'expérience qui donne :

$a = 330^m6$.

Laplace a reconnu d'où provenait l'erreur : Dans le mouvement vibratoire l'air subit une suite de compressions et de dilatations qui modifient la température t , si donc on différencie l'équation :

$$p = \frac{p_0}{\delta_0} (1 + \alpha t)^\delta \text{ après avoir pris les logarithmes}$$

on aura :
$$\frac{dp}{p} = \frac{dp}{\delta} + \frac{\alpha dt}{1 + \alpha t}$$

Il s'agit d'exprimer dt . Or, l'échauffement d'une tranche gazeuse est très-petit et si le mouvement vibratoire est assez rapide il n'y aura pas transmission de chaleur d'une tranche à l'autre, à cause de la faible conductibilité des gaz.

On a vu en thermodynamique que la variation de chaleur dq d'un gaz est liée aux variations dt et dv par la formule :

$$dq = c dt + \frac{1}{E} p dv \quad c \text{ est la chaleur spécifique à volume constant}$$

On peut donc poser $c dt + \frac{1}{E} p dv = 0$

Mais la relation $v \delta = v_0 \delta_0$ donne $dv = v_0 \delta_0 \frac{d\delta}{\delta^2}$

d'où
$$c dt = \frac{1}{E} v_0 \delta_0 p \frac{d\delta}{\delta^2}$$

par suite on a
$$\frac{dp}{p} = \frac{d\delta}{\delta} \left(1 + \frac{\alpha}{1 + \alpha t} \frac{v_0 \delta_0 p}{E c \delta} \right)$$

ou en remarquant que l'on a $v_0 \delta_0 = 1$ et $\frac{p}{\delta(1 + \alpha t)} = \frac{p_0}{\delta_0}$

$$\frac{dp}{p} = \frac{p}{\delta} \left(1 + \frac{\alpha p_0}{E c \delta_0} \right)$$

par suite
$$a = \sqrt{\frac{g p}{\delta} \left(1 + \frac{\alpha p_0}{E c \delta_0} \right)}$$

On peut donner à cette formule une autre forme, en partant de la relation $C - c = p_0 v_0 \frac{1}{E} = \frac{\alpha p_0}{E \delta_0}$ ou c représente la chaleur spécifique à pression constante.

par suite
$$\frac{\alpha p_0}{E c \delta_0} = \frac{C}{c} - 1$$

$$\text{D'où } a = \sqrt{\frac{gp}{\delta} \frac{C}{c}} = \sqrt{\frac{gP_0}{\delta_0} (1 + \alpha t) \frac{C}{c}}$$

qui montre que l'erreur de Newton revenait à supposer $\frac{C}{c} = 1$ tandis que l'expérience a démontré que ce rapport est égal à 1,40.

Cette formule est très-importante car elle peut être employée pour déterminer la valeur de C , connaissant a et c .

Or C a été déterminé très-exactement par M. Regnault, tandis que c a été déterminé par Clément et Désormes, avec une précision beaucoup moins grande.

M. Regnault a entrepris une série d'expériences pour déterminer a . Il a trouvé dans l'air libre ou les tuyaux cylindriques $a = 330^m6$ par seconde à la température de 0° et la pression de 760^m .

Substituons les nombres dans la formule $p = 0^m76$ de mercure sur l'unité de surface.

$$\text{et par suite } p = 0^m760 \times 13596 \text{ Kilogrammes}$$

$$\delta_0 = 1^k296$$

pois du mètre cube d'air

$$g = 9,8096$$

mètres par seconde de temps moyen

$$C = 0,2377$$

(chaleur nécessaire pour élever de 1° ,

1 kilogramme d'air quelque soit la pression).

$$330,6 = \sqrt{9,8096 \frac{0,76 \times 13596}{1,296} \sqrt{\frac{C}{c}}}$$

$$\text{On obtient ainsi } \frac{C}{c} = 1,3945$$

De là, on peut déduire l'équivalent mécanique de la chaleur au moyen de la relation

$$C - c = \frac{\alpha P_0 V_0}{E}$$

$$E = \frac{\alpha P_0 V_0}{C - c} \text{ on trouve ainsi } E = 436,06 \text{ Kilogrammètres,}$$

résultat curieux et inattendu.

7^e Leçon.

Détermination expérimentale de la vitesse du son dans l'air.

Depuis longtemps on a reconnu que le son met un temps appréciable pour arriver à l'oreille ; et beaucoup d'expériences ont été entreprises pour en déterminer la vitesse.

En 1737, les Membres de l'Académie des sciences, sous la présidence de Cassini, s'établirent, les uns à l'observatoire de Paris, les autres à la Tour de Montlhéry. A chaque Station se trouvait un canon et un Chronomètre, et l'on évaluait avec soin le temps qui s'écoulait entre le moment où on apercevait la lueur du Canon, et celui où l'on entendait le son.

Ils ont ainsi trouvé une vitesse de 333^m par seconde à la température 0° .

Ils ont employé la méthode des Corps réciproques pour éliminer l'influence du vent.

D'autres expériences ont été faites sur le même sujet en divers pays.

En 1822, notamment, Laplace demanda des expériences plus précises : une Commission du Bureau des Longitudes fut déléguée à cet effet, et fit des expériences entre Sillejuif et Montlhéry. Entre ces deux Stations le son ne traversait pas de lieux très-habités où l'air chaud peut exercer une influence sur la vitesse du son comme le montre la formule :

$$a = \sqrt{g \frac{P_0}{P_0} (1 + \alpha t) \frac{C}{C}}$$

Ils trouvèrent ainsi $340^m.89$ à la température de $15^\circ.9$ ce qui fait à 0° $331^m.15$.

Expériences de Regnault.

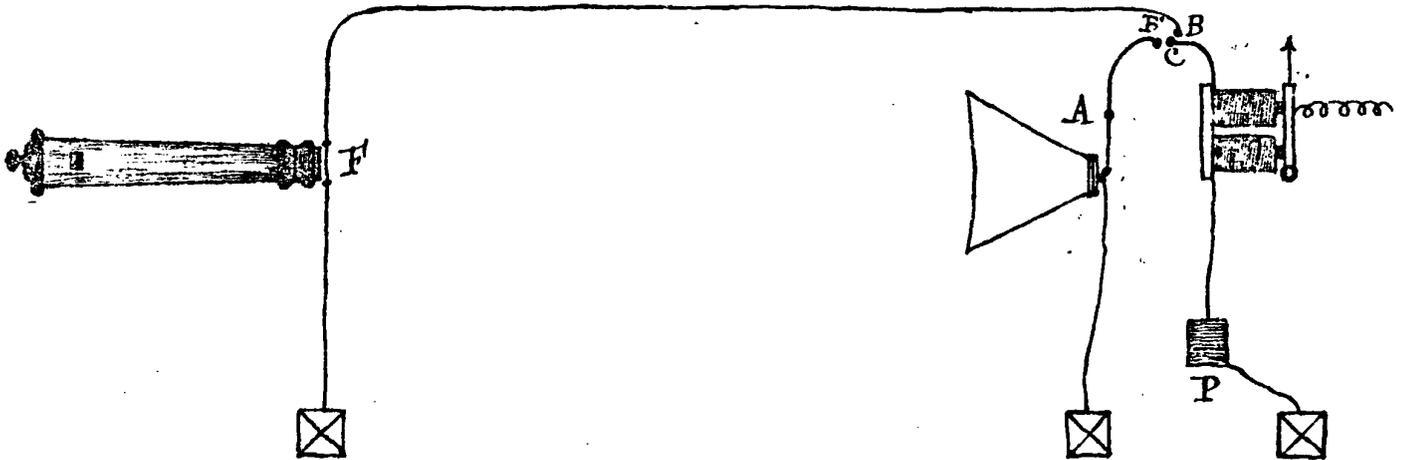
Les méthodes précédentes ont un inconvénient : l'habileté de l'observateur.

Il y entre pour beaucoup c'est la vue qui saisit le commencement. Au phénomène et l'ouïe la fin ; or il faut une grande habitude pour coordonner les observations dues à ces deux organes distincts. De plus l'œil ne peut percevoir un intervalle de moins de 0",1, il en est de même de l'oreille ; on est donc limité à une approximation de 0",1 ou 0",2.

M. Regnault a substitué aux deux sens de l'ouïe et de la vue un appareil électrique enregistreur.

À une des Stations se trouve un canon, et en face de la bouche un fil métallique conducteur du courant, qui est brisé par la détonation ;

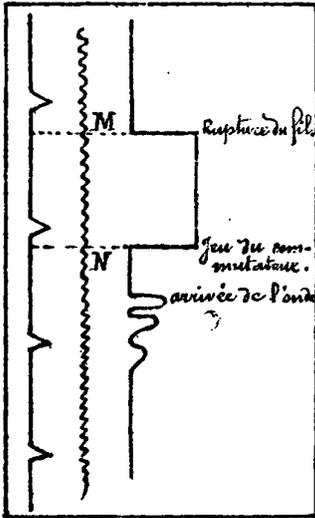
Au poste d'arrivée se trouve un électro-aimant en communication avec une pile P dont un des pôles communique avec le Sol. L'armature de l'électro-aimant porte un tracelet susceptible de laisser une empreinte sur un papier enroulé qui se meut d'un mouvement rectiligne uniforme.



Pour mesurer le temps, on utilise électro-aimant muni d'un tracelet enregistreur sur la même feuille de papier les oscillations d'un pendule à seconde : en outre pour avoir une précision plus grande encore on entretient électriquement le tracé vibratoire d'un diapason qui donne alors les fractions de seconde.

Pour noter le moment où le son arrive on dispose près de l'électro-aimant un grand cône qui sert de cornet acoustique et dont le fond est fermé par une membrane portant à son centre une petite plaque de platine en communication avec le sol. En face de cette plaque se trouve un pendule métallique qui au repos la touche. Ce pendule est relié par un fil métallique AB' que l'on peut laisser isolé ou mettre en communication avec le fil de l'électro-aimant, en ramenant au point B' l'extrémité C du levier d'un commutateur qui fait partie du circuit de la pile P .

Cela posé ; on commence par mettre le fil F en communication avec l'électro-aimant et le fil en faisant toucher le commutateur C en B : au moment où la déformation se produit, le courant est subitement rompu, et le bracelet s'écarte de l'électro-aimant sous l'action



d'un ressort antagoniste. Aussitôt l'observateur établit la communication entre B et B' ; lorsque l'onde sonore arrive à la membrane, celle-ci vibre et le pendule est brusquement rejeté à ce moment le courant est fermé et l'électro-aimant cesse d'attirer le bracelet mobile en donnant le tracé ci-contre : le temps que le son a mis pour aller d'une station à l'autre est représenté par la longueur MN.

Mo. Regnault a opéré à Satory près de Versailles par un temps très-calme ; et pour éliminer la moindre influence du vent il a

employé un appareil double (méthode des Corps réciproques) ; le même électro-aimant donnait les deux indications.

Toute l'expérience pouvait être exécutée en 2 secondes. La distance entre les deux stations était 2.500 mètres. Il a ainsi obtenu une vitesse de $330 \frac{m}{s}$ à la température de 0 :

Ce nombre est plus faible que les précédents d'environ $\frac{1}{500}$; or c'est là précisément la limite de l'erreur que peuvent commettre l'œil et l'oreille.

Tout bon porte à croire que ce résultat est exact.

Mo. Regnault avait vérifié que l'électro-aimant n'exige pour enregistrer les indications qu'une durée moindre que $\frac{1}{100}$ de seconde ; d'ailleurs les temps perdus s'éliminent par différence.

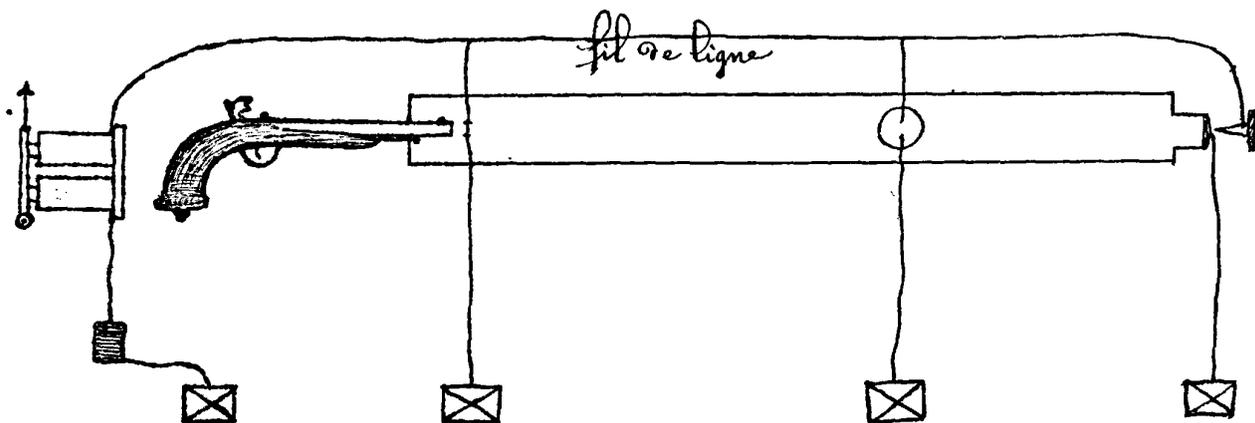
Vitesse du son dans les tuyaux cylindriques.

Mo. Regnault a fait des expériences sur les conduites de fonte destinées à la distribution d'eau au boulevard St. Michel, et sur des tuyaux à gaz de différents diamètres de la manière suivante :

Une des extrémités du tuyau est fermée par une membrane,

§2

portant une petite lame de platine en communication avec le sol, en face de laquelle se trouve une pointe métallique que l'on peut approcher jusqu'à quelques dixièmes de millimètre. Cette pointe est en communication avec un électro-aimant qui enregistre les opérations comme dans l'expérience précédente.



À l'autre extrémité se trouve un pistolet devant lequel est tendu un fil métallique qui est brisé par la poudre. Le courant est alors interrompu jusqu'au moment où l'onde sonore arrive à la membrane, à ce moment celle-ci se met à vibrer et le courant est rétabli. Les indications sont fournies de la même manière que ci-dessus.

Ces tuyaux de conduite portant différents embranchements sur la longueur, on pourrait placer en ces points autant de membranes que l'on voulait, on obtenait ainsi une indication chaque fois que l'onde arrivait à une de ces membranes.

Dès que l'onde arrive au bout du tuyau, elle se réfléchit et revient jusqu'à 15 fois sans que l'onde cesse d'être perceptible. Le tuyau ayant plus de mille mètres on a donc pu obtenir un parcours de plus de 19 kilomètres.

Résultats obtenus dans des tuyaux de 1^m10 de diamètre :

| | |
|--|--------------------------|
| Pour : 749 mètres de longueur on trouve : -- | 334 ^m 16 à 0° |
| 920 ----- | 333, 20 ----- |
| 1417 ----- | 332, 50 ----- |
| 14179.5 ----- | 330. 56 ----- |
| 17000.65 ----- | 330. 50 ----- |
| 19000. ----- | 330. 52 ----- |

Résultats : 1°, Les ondes les plus intenses se propagent plus vite;
2°, la vitesse converge vers une limite fixe lorsque l'intensité des ondes s'affaiblit.

On ne doit évidemment tenir compte que des ondes faibles dans l'étude de la vitesse du son, car au voisinage de la bouche du pistolet on n'est plus dans les conditions théoriques; il se produit une perturbation dans l'air, et au début l'onde est sphérique; à mesure que la distance augmente, l'onde se régularise; les premières valeurs sont peu intéressantes car elles proviennent d'ondes très-intenses ou irrégulières. On remarquera l'identité de la vitesse de propagation à l'air libre et dans un tuyau cylindrique.

Avec des tuyaux de diamètres différents on a obtenu les résultats suivants:

| | | |
|--------|--|--------|
| pour : | 0 ^m , 108 de diamètre | 326.70 |
| | 0, 30 | 328.96 |
| | 1, 10 | 330.60 |

Dans les tuyaux minces la vitesse du son est plus faible, ce résultat concorde avec ce que nous avons vu: nous avons supposé que dans la transmission du son dans l'air, la cession de chaleur d'une tranche à la voisine est nulle $dq = 0$.

Mais si l'on a un tuyau très-petit la conductibilité de la paroi cause une perte de chaleur, et l'on ne peut plus poser $dq = 0$, dt tend vers zéro: si dt était rigoureusement nul on retomberait ainsi sur le résultat de Newton: 276 mètres. Il ne faut donc pas s'étonner si la vitesse du son va en diminuant dans les tuyaux de faible diamètre.

La chaleur se perd par la surface, or le rapport de la surface au volume est représenté par:

$$\frac{2\pi R h}{\pi R^2 l} = \frac{2}{R}$$

Donc ce rapport augmente lorsque R diminue: et par suite la dissipation relative de chaleur devient de plus en plus considérable à mesure que le temps devient plus petit.

Vitesse du son dans différents gaz. - Les difficultés d'opération sont considérables, à cause de la grande tendance des gaz à passer par les fissures les plus étroites des appareils. M. Regnault a cependant opéré sur plusieurs gaz au Collège de France dans des tuyaux de 70 mètres de long.

La vitesse du son est donnée par la formule:

$$a = \sqrt{g \frac{p}{\rho} (1 + \alpha t) \frac{C}{c}}$$

§4

Or pour tous les gaz $\frac{C}{\rho}$ est sensiblement le même ainsi que α ; g est une constante et si l'on suppose que p_0 et t restent les mêmes, on aura pour un second gaz:

$$a = \sqrt{g \frac{p_0}{\rho_0} (1 + \alpha t) \frac{C}{\rho}}$$

et par suite

$$\frac{a}{a'} = \sqrt{\frac{\rho_0'}{\rho_0}}$$

Comparons cette formule aux résultats des expériences de M. Regnault: Si a' représente la vitesse du son dans l'air, on a:

| | $\frac{a}{a'}$ (Donné par l'expérience) | $\sqrt{\frac{\rho_0'}{\rho_0}}$ |
|-------------------|---|---------------------------------|
| Hydrogène | 3.801 | 3.682 |
| Acide carbonique | 0.8019 | 0.8087 |
| Protoxyde d'azote | 0.8007 | 0.8100 |
| Gaz ammoniaque | 1.2879 | 1.3028 |

Nous voyons que ces nombres se rapprochent beaucoup mais la concordance ne peut être complète, puisqu'on a supposé dans la formule que les gaz sont parfaits, ce qui n'est pas.

Vitesse du son dans les liquides. On peut la déterminer théoriquement par la même formule que dans les gaz:

$$a = \sqrt{g \varphi'(\rho)}$$

car en établissant cette formule nous n'avons rien supposé sur la constitution des corps.

Dans les cas des liquides et des solides, les variations de volume sont accompagnées de variations de température extrêmement faibles que nous considérons ici comme négligeables.

Il en résulte que l'on a $dt = 0$ par suite de la relation $\Psi(p, \rho, t) = 0$, on supposera t constant et l'on calculera:

$$\varphi'(\rho) = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

Pour les liquides on a la formule empirique

$$\varphi = \varphi_0 (1 - \mu p')$$

μ est le coefficient de compressibilité; p' est la pression exprimée en atmosphères, on en déduit:

$$\delta_0 = \delta (1 - \mu p')$$

$$\delta = \delta_0 (1 + \mu p') \text{ car } \mu p' \text{ est très-petit}$$

$$\delta - \delta_0 = \delta_0 \mu p'$$

$$p' = \frac{\delta - \delta_0}{\delta_0 \mu}$$

Pour avoir la pression spécifique p il suffit de poser :

$$p' = \frac{p}{H} = \frac{p}{0,76 \times 13595} = \frac{p}{10333} \quad (13595 \text{ est le poids en Kilog du mètre cube de mercure, donc la fonction } p \text{ de } (\delta) \text{ sera :}$$

$$p = \frac{\delta - \delta_0}{\mu \delta_0} 10333$$

$$\text{Donc } \varphi'(\delta) = \frac{10333}{\mu \delta_0}$$

$$a = \sqrt{\frac{9,8096 \times 10333}{\mu \delta_0}} = \frac{318^m 88}{\sqrt{\mu \delta_0}}$$

Pour l'eau on a d'après des expériences très-précises $\mu = 0,000047$
 $\delta = 1000 \text{ Kil.}$

D'où l'on tire : $a = 1470$

Des expériences ont été entreprises pour mesurer la vitesse du son dans l'eau, notamment par Colladon et Sturm sur le Lac de Genève en 1827. Les deux stations étaient distantes de 7 Kilomètres. Le son était produit à une des stations par le choc d'un battant sur une cloche plongée dans l'eau du lac. Le battant était mis en mouvement par un levier auquel on avait attaché une mèche enflammée, de sorte qu'au moment où le son se produisait, la mèche mettait le feu à un petit tas de poudre. On recevait le son dans une sorte de Cornet acoustique dont le pavillon recouvert d'une membrane était plongé dans l'eau.



Ces expériences ne furent pas très-précises car on n'opérait pas par coups réciproques et la température n'était pas exactement déterminée.

On a un autre procédé qui consiste à faire parler un tuyau d'orgue avec le liquide : l'intervalle entre deux nœuds consécutifs est $l = \frac{aT}{2} = \frac{1}{2}$ longueur d'onde d'où

$$a = 2l \frac{1}{T} = 2lN$$

N étant le nombre de vibrations par seconde du son produit.

Wertheim a trouvé pour l'eau 1137^m , nombre très différent de celui trouvé ci-dessus : 1470^m .

Wertheim a cru expliquer cette différence en disant que la vitesse du son n'est pas la même dans un tuyau ou dans un milieu indéfini. La véritable cause d'erreur provient de ce que les parois du tuyau, qui dans le cas des gaz pouvaient être considérées comme parfaitement fixes et rigides, à cause de la grande compressibilité des gaz; doivent au contraire dans le cas des liquides être considérées comme vibrant aussi bien que le liquide lui-même, le phénomène est donc très complexe et il n'est pas étonnant que le résultat soit différent.

Vitesse du son dans les solides. — Ici l'influence des parois n'est plus à craindre aussi les résultats sont-ils plus concordants.

On a la loi mécanique : $\Delta l = \frac{1}{K} \frac{p''l}{S}$,

K est le coefficient d'élasticité; S la section, et p'' la pression sur la tige. La pression sur l'unité de surface sera $p = \frac{p''}{S}$.

et par suite : $p = \frac{K}{\delta_0} (\delta - \delta_0)$

$$p'(\delta) = \frac{K}{\delta_0}$$

$$a = \sqrt{g \frac{K}{\delta_0}}$$

On a fait l'expérience sur les fils télégraphiques, et les résultats ont été entièrement conformes à la théorie.

On peut encore obtenir la vitesse du son dans les solides, en faisant vibrer longitudinalement une tige serrée par son milieu dans un étau. On aura encore comme ci-dessus.

$$l = \frac{aT}{2}$$

$$a = 2l \frac{1}{T} = 2lN.$$

La vitesse du son dans les solides est considérable : Si l'on prend pour unité la vitesse du son dans l'air on aura :

| | | |
|---------------|-------|--------|
| pour l'argent | ----- | 8.057 |
| le cuivre | ----- | 11.167 |
| le fer | ----- | 15.108 |

Remarque sur l'homogénéité dans les formules de Physique.
 L'homogénéité dans ces formules est absolument nécessaire ; car elles doivent être indépendantes des unités de : longueur, de temps et de force adoptées ; de même que toutes les formules de mécanique.
 On peut le vérifier par la formule :

$$a = \sqrt{g \frac{dp}{ds}}$$

a est une vitesse, c'est-à-dire le rapport d'une longueur à un temps.
 g est une accélération c'est-à-dire le rapport d'une longueur au carré d'un temps.
 dp est une pression spécifique, c'est-à-dire le rapport d'un poids (ou force) à une surface (ou carré de longueur).
 ds est un poids spécifique, c'est-à-dire le rapport d'un poids à un volume (cube d'une longueur).
 On a donc le tableau suivant :

| | Longueur | Temps | Force |
|------------------------|---------------|-------|-------|
| a | 1 | -1 | 0 |
| \sqrt{g} | $\frac{1}{2}$ | -1 | 0 |
| $\sqrt{\frac{dp}{ds}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 |

Où l'on voit que les deux membres de l'équation sont du même degré par rapport à chaque unité.

La seule condition d'homogénéité suffit pour déterminer a à un facteur constant près ; prenons le cas des solides qui est le plus simple : il est évident que a ne doit être fonction que du coefficient d'élasticité et de la masse spécifique des branches, car le déplacement ne dépend que de ces deux éléments.

On a donc : $a = \varphi(k, m)$ ou en développant en série.

$$a = \sum A K^\alpha m^\beta$$

Or: K est défini par la relation: $\Delta l = \frac{FL}{KS} = \frac{FL}{KL^2}$ donc $K = \frac{FL}{L^3} = \frac{F}{L^2}$
 $m = \frac{d}{g} = \frac{\frac{F}{L^3}}{\frac{L}{T^2}} = \frac{F T^2}{L^4}$

On a donc le tableau

| | Longueur | Temps | Force |
|-----|----------|-------|-------|
| a | 1 | -1 | 0 |
| K | -2 | 0 | 1 |
| m | -4 | 2 | 1 |

Homogénéité par rapport à la force; si l'unité de force devient n fois plus petite il vient

$$a = \sum A K^\alpha m^\beta n^\beta$$

Le premier membre est resté le même, donc il faut $n^{\alpha+\beta} = 1$ et par suite $\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha$

Donc il vient: $a = \sum A \left(\frac{K}{m}\right)^\alpha$

Homogénéité par rapport au temps: si l'unité devient n fois plus petite on aura: $a n^{-1} = \sum A \left(\frac{K}{m}\right)^\alpha n^{-2\alpha}$

Il faut donc pour que la formule reste la même que l'on ait:

$$n^{-1} = n^{-2\alpha} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

Donc le développement se réduit à un seul terme:

$$a = A \sqrt{\frac{K}{m}} = A \sqrt{g \frac{K}{d}}$$

8^e Leçon.

Nous allons étudier un certain nombre de phénomènes physiologiques produits sur l'oreille par la superposition des sons. Quand on fait entendre deux sons à la fois, l'oreille reçoit une impression particulière différente de celle d'un son unique. Cette impression est caractéristique du rapport du nombre de leurs vibrations, elle

est agréable ou pénible suivant que ce rapport est simple ou compliqué ; de plus, à chaque groupe binaire différent correspond une sensation spéciale.

Voici les principales consonances ou accords agréables qu'une oreille exercée est susceptible de distinguer : si le rapport du nombre des vibrations des deux sons est égal à $\frac{1}{1}$; on a l'unisson ; $\frac{1}{2}$ l'octave ; $\frac{2}{3}$ la quinte ; $\frac{3}{4}$ la quarte ; $\frac{4}{5}$ la tierce majeure ; $\frac{5}{6}$ la tierce mineure ; $\frac{9}{8}$ le ton majeur.

L'exactitude de ces rapports a été vérifiée par la méthode optique, ou par le kati direct ; elle l'est aussi par certains effets dont nous dirons un mot plus loin à propos des battements et des sons résultants.

C'est en se fondant sur l'impression agréable que ces rapports produisent sur l'oreille, que certains physiiciens ont cherché à définir numériquement la série des sons employés en musique qui forme la gamme musicale.

La hauteur absolue des sons de cette gamme n'intervient pas dans l'impression produite sur l'oreille : à partir d'un son quelconque, on peut faire suivre une série de notes produisant toujours l'impression de la gamme.

Nous appellerons ut_1 la note que nous prendrons pour son fondamentale, et nous représenterons par 1 le nombre de ses vibrations. La série des notes de la gamme et le nombre de leurs vibrations, sont :

| | | | | | | | |
|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|--------|
| ut_1 | $ré_1$ | mi_1 | fa_1 | sol_1 | la_1 | si_1 | ut_2 |
| 1 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{15}{8}$ | 2 |

Cette série numérique est connue depuis l'antiquité ; les philosophes grecs l'avaient découverte par expérience et l'exprimaient en longueur de corde, dont les fractions sont inverses de celles qui représentent le nombre de vibrations.

À partir de ut_2 qui est l'octave de ut_1 , la série des sons reproduit à l'oreille la même apparence.

Ces rapports se réduisent de la loi des consonances, le sol est la quinte de ut_1 ; le fa la quinte grave de ut_2 ; le mi, le la et le si, la tierce majeure de l'ut, du fa, du sol :

$$\text{On a donc } \text{sol} = \frac{3}{2} ; \text{fa} = 2 \times \frac{2}{3} ; \text{mi} = \frac{5}{4} ; \text{la} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} ; \text{si} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} .$$

Le sol est la quarte du ré, qui par suite a pour valeur :

$$\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$$

Enfin l' ut_2 octave de ut_1 est représenté par 2

Mais ces expressions numériques offrent des contradictions dans la comparaison des intervalles ; ainsi, si nous voulons avoir la quinte grave de la, nous devons multiplier $\frac{5}{3}$ par $\frac{2}{3}$, nous obtenons le son $\frac{10}{9}$ qui ne se trouve pas dans la gamme ; il diffère très-peu de ré $\frac{9}{8}$ leur intervalle est en effet $\frac{\frac{10}{9}}{\frac{9}{8}} = \frac{80}{81}$; mais l'oreille est assez susceptible pour saisir cet intervalle.

D'autre part, l'accord des instruments à corde reconnus les plus parfaits en musique se fait à la quinte, parceque c'est l'intervalle que l'oreille saisit le mieux.

On fait donner au violoncelle les notes suivantes :

ut_1 sol₁ ré₂ la₂ ; à l'alto :

ut_2 sol₂ ré₃ la₃ ; au violon :

sol₂ ré₃ la₃ mi₄ ;

En général on prend un la conventionnel dit la normal (1) comme note fondamentale. mi₄ doit être la double octave aiguë du mi₂ compris entre ut_2 et sol₂ ; si nous appelons 1 le nombre de vibrations de ut_2 , mi₄ qui est la quadruple quinte sera représenté par $(\frac{3}{2})^4$; mi₂ sera :

Donc : $(\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{16}$

Or le mi de la gamme naturelle est $\frac{5}{4} = \frac{80}{64}$ qui diffère de $\frac{1}{64}$ du précédent, et pourtant l'on doit admettre que c'est le mi $\frac{81}{64}$ qui est le mi normal puisque c'est celui qu'on obtient directement par l'accord à la quinte. On voit que leur intervalle est $\frac{81}{80}$, intervalle que l'oreille perçoit. Nous allons tâcher d'expliquer cette anomalie.

Les Grecs nous ont laissé un autre mode de génération de la gamme la gamme pythagoricienne, fournie par une série de quintes.

fa ut_1 sol₁ ré₂ la₂ mi₃ si₃.

Le nombre de leurs vibrations se réduit facilement, sachant que $\frac{3}{2}$ est l'intervalle de deux notes consécutives ; on obtient :

| | | | | | | | |
|--------|-----------------------------|-----------------------------|---------------|---------------|-----------------------------|-----------------------------|--------|
| ut_1 | $ré_1$ | mi_1 | fa_1 | sol_1 | la_1 | si_1 | ut_2 |
| 1. | $\frac{(\frac{3}{2})^2}{2}$ | $\frac{(\frac{3}{2})^2}{4}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{(\frac{3}{2})^3}{2}$ | $\frac{(\frac{3}{2})^5}{4}$ | 2 |

Il n'y a que fa, sol et ut_2 qui coïncident avec les notes correspondant de la gamme précédente appelée souvent à tort gamme naturelle.

Voici l'explication de ces divergences.

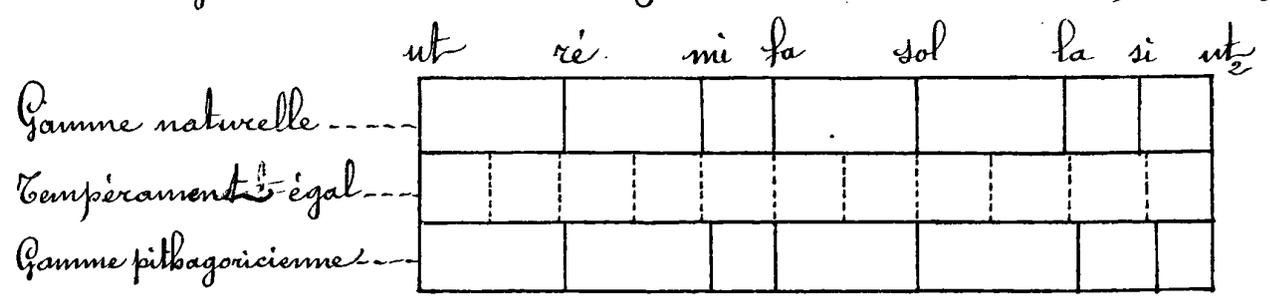
Les deux systèmes sont vrais, mais correspondent à des perceptions

(1) Les musiciens se sont mis récemment d'accord pour adopter le la normal faisant 870 demi-périodes par seconde.

différentes de l'oreille. Quand l'oreille entend plusieurs sons à la fois, pour que l'accord soit dans sa plénitude, il faut des rapports simples entre les nombres de leurs vibrations, sans quoi elle perçoit des battements périodiques désagréables. C'est le principe de l'harmonie. Les notes dont les vibrations croissent comme la série des nombres entiers, c'est-à-dire $ut_1, ut_2, sol_2, ut_3, mi_3, sol_3$ etc - - - - qui sont en effet représentées par 1.2.3.4.5.6, formant des accords agréables; le plus agréable, l'accord parfait, est donné par ut_3, mi_3, sol_3 , c'est-à-dire 4,5,6; on peut aller dans cette série jusqu'à 10 ou 11, pour former des accords agréables.

Au contraire, quand l'oreille entend des sons successifs, et c'est le cas de l'accord par quintes justes des instruments à corde, elle préfère la série des intervalles de la gamme pythagoricienne, qui est la plus propre à faire ce que l'on appelle de la Mélogie. Les violonistes jouent toujours suivant cette gamme: en enregistrant des mélodies par les procédés graphiques, on retrouve avec perfection les intervalles provenant de la série des quintes: il y a donc en réalité deux systèmes musicaux différents n'ayant de commun que les intervalles d'octave, de quinte et de quarte.

On peut représenter graphiquement ces deux gammes en posant sur une règle les logarithmes des nombres de vibrations des notes successives. La distance de deux divisions est précisément le logarithme ou quotient des deux notes correspondantes, c'est-à-dire représente leur intervalle. En plaçant entre la règle de la gamme naturelle pythagoricienne, une règle mobile portant les divisions de la gamme naturelle on peut voir quels sont les intervalles égaux dans les deux systèmes. On voit aussi par exemple



qu'il y a entre le ré et le la de la gamme pythagoricienne, le même intervalle qu'entre l'ut et le sol de la gamme naturelle, c'est-à-dire une quinte exacte. On constate ainsi que les notes

ré fa sol coïncident dans les deux systèmes.

Comment peut-on faire à la fois de l'harmonie et de la mélodie ? on a introduit pour y arriver un moyen terme, et l'on a formé la gamme appelée *Tempérament égal*. Divisons l'intervalle de ut_1 à ut_2 en douze parties égales; chacune de ces divisions correspond à $\log \sqrt[12]{2}$, n variant de 1 à 12. Il se trouve que ces divisions coïncident à très-peu près avec les notes communes des gammes, naturelle et pythagoricienne et qu'elles tombent au milieu des intervalles divergents. Si l'on convient de prendre ces logarithmes pour ceux des nombres de vibrations des notes d'une gamme, on voit que cette gamme répond très bien aux exigences de l'harmonie et de la mélodie; ainsi le mi de cette gamme est situé entre le mi naturel et le mi pythagoricien. Les divisions intermédiaires correspondent aux demi-tons.

Au moyen de cette gamme on peut faire avec des instruments à sons fixes, de l'harmonie et de la mélodie.

Battelements. - Si l'on fait vibrer simultanément deux diapasons dont l'accord est dérangé légèrement par une masse additionnelle, ou qu'on fait résonner deux tuyaux dont on modifie l'émision au moyen d'un clapet fixé à l'un d'eux, l'oreille saisit dans le son résultant des alternances de diminution et de renforcement, appelés battements. C'est le procédé qu'on emploie pour produire le trémolo.

En voici l'explication mathématique.

Supposons qu'en un même point de l'espace concourent deux sons provenant de mouvements vibratoires sensiblement parallèles et de périodes T, T' . En vertu du théorème de Bernoulli le mouvement résultant au milieu élastique sera la somme algébrique des mouvements composants. Si les équations de ces derniers sont

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right)$$

$$y' = a' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \varphi' \right)$$

On aura en supposant d'abord $T = T'$

$$Y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right) + a' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi' \right)$$

$$= a \left(\sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \varphi + a \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \varphi \right) + a' \left(\sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \varphi' + \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \varphi' \right)$$

$$= \sin 2\pi \frac{t}{T} A \cos 2\pi \Phi + \cos 2\pi \frac{t}{T} A \sin 2\pi \Phi$$

$$= A \sin 2\pi \frac{t}{T} + \Phi \quad \text{en posant :}$$

$$A \cos 2\pi \Phi = a \cos 2\pi \varphi + a' \cos 2\pi \varphi'$$

$$A \sin 2\pi \Phi = a \sin 2\pi \varphi + a' \sin 2\pi \varphi'$$

On voit que le mouvement résultant est encore un mouvement oscillatoire périodique. Calculons son amplitude A . On a en élevant au carré les équations précédentes et les ajoutant membre à membre,

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa'(\cos 2\pi \varphi' + \sin 2\pi \varphi \sin 2\pi \varphi')$$

$$\text{d'où } A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos 2\pi(\varphi - \varphi')$$

Si nous supposons que l'on puisse faire varier φ d'une manière continue φ et φ' , les phases initiales étant comprises entre $-1+1$, on voit que si $\varphi - \varphi' = 0$, on a :

$$A^2 = (a+a')^2 \text{ et si } \varphi - \varphi' = \frac{1}{2}, A^2 = (a-a')^2$$

et par suite on aura des augmentations et des diminutions alternatives d'intensité avec des maxima et des minima correspondant aux valeurs précédentes de A , en admettant, ce qu'on démontre d'ailleurs, que l'intensité ou force vive du son est proportionnelle au carré de l'amplitude A de la vibration.

Supposons maintenant que les périodes soient un peu différentes et que l'on ait par exemple.

$$\frac{1}{T} = \frac{1+\varepsilon}{T'}$$

L'équation du second mouvement est alors :

$$y = a' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi' + \frac{\varepsilon t}{T'} \right)$$

et par suite on a pour le mouvement résultant :

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos 2\pi \left(\varphi - \varphi' - \frac{\varepsilon t}{T'} \right)$$

On voit que l'argument du cosinus varie proportionnellement au temps ; l'amplitude varie donc avec le temps et revient à sa valeur primitive au bout d'un temps θ tel que :

$$\frac{2\pi\varepsilon\theta}{T} = 2\pi \text{ ou } \frac{\varepsilon\theta}{T} = 1$$

$$\text{Or on a : } \varepsilon = \frac{T}{T'} - 1 = \frac{T - T'}{T'}$$

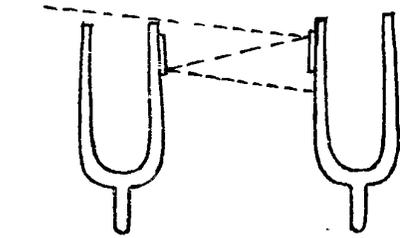
$$\text{d'où : } \frac{1}{\theta} = \frac{\varepsilon}{T} = \frac{T - T'}{T T'}$$

$$\text{et : } \frac{1}{\theta} = \frac{1}{T'} - \frac{1}{T}$$

D'où en désignant par N' et N les nombres de vibrations par seconde des deux mouvements vibratoires considérés, par V le nombre des battements en une seconde :

$$V = N' - N$$

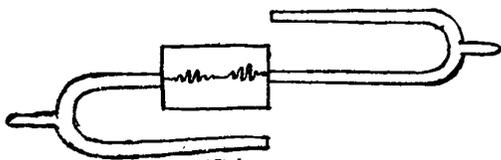
On peut vérifier ces résultats en faisant vibrer deux diapasons parallèles portant sur leurs branches intérieures chacun un miroir, en sorte que l'on peut faire réfléchir deux fois sur eux un rayon de lumière, qui participe à la fois des deux mouvements oscillatoires. Si l'on reçoit ce rayon sur un écran, on obtient une ligne lumineuse qui s'allonge et se raccourcit alternativement, tandis que l'oy entend le son résultant se renforcer et s'affaiblir tour à tour. On peut même réduire cette ligne à un point en modifiant convenablement l'état vibratoire de l'un des diapasons.



En inscrivant avec le phonautographe les vibrations des deux sons produisant des battements, on obtient une ligne sinuuse dont l'amplitude est variable mais périodique.

On obtient les mêmes apparences en projetant les faisceaux sur un tableau blanc par l'intermédiaire d'un miroir mobile.

On obtient encore la même sinusoïde en faisant vibrer deux diapasons parallèles, dont l'un fixe porte une plaque de verre enflammée tandis que l'autre, mobile sur un charriot, porte un style qui trace sur la plaque une courbe qui est la combinaison des mouvements des deux diapasons.



Les battements se produisent encore quand deux sons sont près de produire une consonnance quelconque. On pourrait le vérifier par un calcul analogue au précédent.

Sons résultants - Un musicien italien, Tartini a constaté que lorsque les battements sont très-rapprochés, l'oreille ne les distingue plus, mais entend un son résultant beaucoup plus grave que les deux sons produisant les battements.

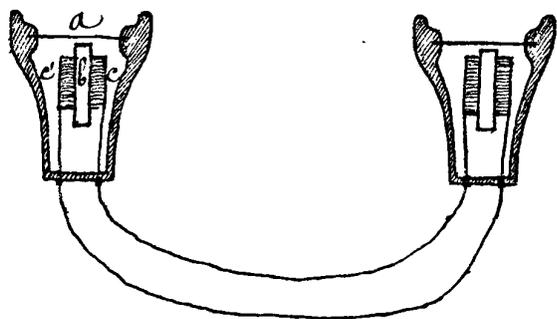
63

D'après la formule $V = N' - N$ on voit que les deux harmoniques successives $n, n + 1$ d'un son fondamental quelconque, forment entre ce son fondamental,

Téléphone - Phonographe.

Téléphone. - C'est un instrument destiné à reproduire à distance les sons articulés. C'est à Graham Bell que l'on doit le premier appareil de ce genre, fonctionnant d'une manière satisfaisante.

Il se compose d'une mince plaque de tôle en fer doux a , encastrée dans un disque en bois sur toute sa circonférence. Tout près de cette plaque se trouve un électro-aimant composé d'une tige en acier fortement aimantée, entourée d'une bobine de fils fins $c c'$. Quand on fait entendre un son devant la plaque a , celle-ci se met à vibrer; quand elle se rapproche de l'aimant b , elle s'aimante par influence, modifie à son tour l'aimantation de la tige b , qui augmente; il en résulte un courant induit dans la bobine $c c'$. Quand la plaque a s'éloigne de l'aimant, l'aimantation de celle-ci diminue, et par suite il se produit dans la bobine $c c'$



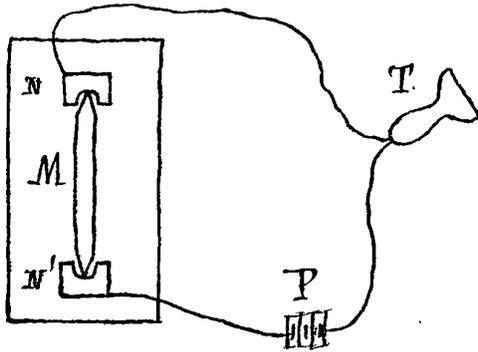
un courant de sens inverse au précédent. Revenons les fils de cette bobine d'un autre téléphone, chaque fois qu'un courant se manifeste dans la bobine $c c'$, l'aimantation de l'aimant du second téléphone se trouve modifiée lorsqu'elle augmente, la plaque de tôle est attirée quand elle diminue, elle se retire et l'on voit que la plaque du second téléphone va exécuter identiquement les mêmes mouvements vibratoires que la plaque du premier téléphone.

Elle reproduira donc les sons qui ont mis celle-ci en vibration. Malheureusement les courants induits qui se développent sont très-faibles, et le son qu'on obtient est extrêmement affaibli.

On a imaginé des postes doubles de téléphone; chaque employé à un téléphone à la bouche, l'autre à l'oreille, et l'on peut causer

sans interruption d'un poste à l'autre. On ajoute quelquefois une sonnerie électrique permettant à l'employé d'une station d'avertir l'employé de l'autre.

Le téléphone de Bell a l'inconvénient de donner des sons assez faibles: on augmente beaucoup l'intensité des sons reçus à l'aide du microphone de Hughes: Cet appareil est fondé sur la variation d'intensité que prend un courant lorsqu'il traverse le point de contact de deux charbons de cornue à gaz plus ou moins pressés.

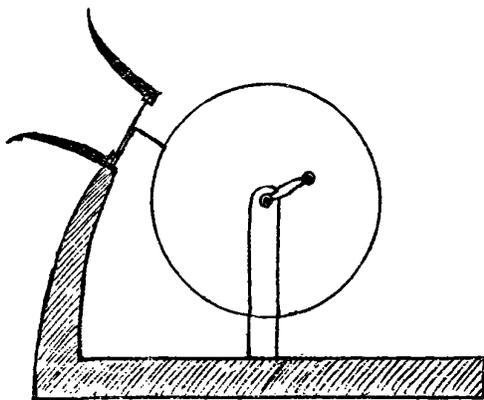


À cet effet on dispose un morceau de charbon M entre deux morceaux NN' percés d'une cavité: le tout est fixé à une planchette de sapin une pile P et un téléphone T sont placés dans le même circuit. Les vibrations de la voix font osciller la

planchette et varient la pression des contacts de charbon: le téléphone traduit les variations d'intensité du courant par des sonorités qui imitent parfaitement les inflexions de la voix.

On a encore augmenté l'intensité en mettant le téléphone non pas dans le circuit de la pile mais dans le circuit induit d'une bobine d'induction actionnée par le courant au microphone.

Phonographe d'Edison. - Il se compose d'une membrane fixée dans un anneau de caoutchouc sur lequel s'appuie un léger ressort portant un petit style d'acier.



D'autre part; on a un cylindre portant une rainure hélicoïdale à pas très serré et ce cylindre porte un axe fileté qu'on peut faire tourner au moyen d'une manette dans un écrou. L'appareil est réglé de manière que le style soit en regard de la rainure et y pénètre légèrement.

On enroule sur le cylindre une mince feuille d'étain; si l'on vient à faire vibrer la membrane, le style va imprimer un petit trou

dans la feuille d'étain et si l'on met le cylindre en mouvement,

le style tracera tout le long de la rainure une série de points, de traits, dont la forme dépend du son émis.

Si l'on ramène le cylindre dans sa position primitive et si on le fait retourner dans le même sens que tout d'abord, le style va suivre le sillon qu'il avait tracé en s'enfonçant dans chaque trou; il va donc mettre en vibration la membrane, et si l'on ajoute à l'entonnoir métallique un cône de papier pour renforcer le son, comme la membrane exécute identiquement la même série de vibrations que primitivement, on entend de nouveau les sons que l'on avait émis.

Il est toutefois nécessaire de faire remarquer que l'on ne perçoit bien les paroles répétées par l'appareil que si on les connaît d'avance; sinon les sonorités rendues sont la plupart du temps inintelligibles.

9^e Leçon.

Optique.

L'Optique comprend l'étude des impressions de l'organe de la vue; ces impressions sont produites par la lumière.

Nous ne reviendrons pas sur les études qui ont déjà été faites, sur les théories des miroirs et des lentilles; nous n'insisterons que sur la loi de Descartes, ou la loi des sinus. La théorie des lentilles faite comme une application de cette loi, ne la vérifie pas parcequ'on ne considère que des angles d'incidence et de réfraction très-petits; les vérifications seraient les mêmes si l'angle de réfraction était une fonction quelconque mais impaire de l'angle d'incidence.

$$r = f(i)$$

En Effet développons par la série de Mac-Laurin:

68

$$r = f(\theta) + i f'(\theta) + \frac{i^2}{1.2.} f''(\theta) + \frac{i^3}{1.2.3.} f'''(\theta) + \dots$$

Quand i est nul, r doit l'être aussi

$$f(\theta) = 0$$

D'autre part r doit changer de signe en même temps que i , de sorte que tous les coefficients des puissances paires de i sont nuls

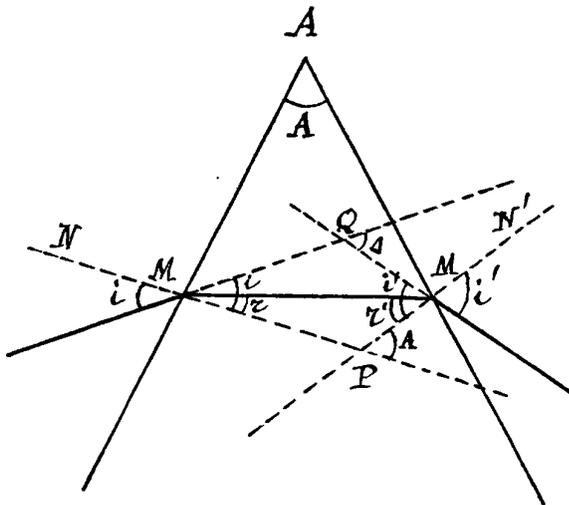
$$r = i f'(\theta) + \frac{i^3}{1.2.3.} f'''(\theta) + \frac{i^5}{1.2.3.4.5.} f^{(5)}(\theta) + \dots$$

Si alors on peut supposer r et i très petits on pourra les remplacer par leurs sinus et négliger i^3 .

$$\frac{i}{r} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{f'(\theta)}$$

Il faut donc pour vérifier la loi chercher un système réfringent qui permette d'employer des angles assez grands; le système le plus simple est un corps réfringent terminé par deux surfaces planes (prisme). Le phénomène est encore fort compliqué; pour le simplifier davantage, nous supposons que le prisme est rencontré par des rayons parallèles entre eux et perpendiculaires à l'arête du prisme.

Il résulte de ces restrictions que si la loi est exacte les rayons seront encore après leur réfraction parallèles entre eux et perpendiculaires à l'arête chacun d'eux sera resté dans un plan de section principale.



Nous sommes donc ramenés à étudier la marche d'un seul d'entre eux, par conséquent, au problème de géométrie plane.

Soit A l'angle des deux faces et i l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

n étant l'indice de réfraction; sur l'autre face on aura de même en vertu du principe de retour des rayons:

$$\frac{\sin i'}{\sin r'} = n$$

Dans le triangle MPM'

$$A = r + r'$$

Appelons Δ l'angle de déviation du rayon; on aura encore dans le triangle MQM'

$$\Delta = (i - r) + (i' - r') = i + i' - (r + r')$$

$$\Delta = i + i' - A$$

On ne peut pas observer r et r' ; il faut donc les éliminer des relations.

On y parvient en partant de l'identité

$$\cos(r + r') = \cos A$$

$$\cos r \cos r' - \sin r \sin r' = \cos A$$

$$\sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 i'}{n^2}\right)} = \cos A + \frac{\sin i \sin i'}{n^2}$$

$$\sin^2 A - \frac{1}{n^2} (\sin^2 i + \sin^2 i' - 2 \sin i \sin i' \cos A) = 0$$

$$n^2 = \frac{\sin^2 i + \sin^2 i' + 2 \sin i \cos A}{\sin^2 A}$$

Nous sommes arrivés à une relation entre n, i, i' et A ; connaissant n, i et A nous pourrions déterminer i' et si il satisfait à la relation précédente la loi des sinus sera bien démontrée.

La déviation Δ varie avec i et i' ; cherchons son maximum ou son minimum.

$$d\Delta = di + di' = 0$$

Pour obtenir di' je différencie l'expression qui donne n^2 ; i et i' seuls sont variables.

$$di (2 \sin i \cos i + 2 \sin i' \cos i \cos A) + di' (2 \sin i' \cos i' + 2 \sin i \cos i \cos A) = 0$$

$$di [\sin 2i - \sin 2i' + 2 \cos A \sin(i' - i)] = 0$$

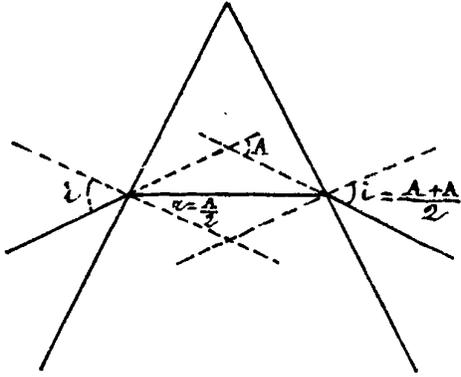
$$\sin(i - i') [\cos(i - i') - \cos A] = 0$$

Il y a deux solutions $i = i'$

$$\cos(i - i') = \cos A$$

La première solution est générale; il y a maximum ou minimum de déviation quels que soient l'angle du prisme et l'indice

de réfraction quand l'angle d'incidence est égal à l'angle d'émergence; les deux angles de réfraction sont aussi égaux et le rayon qui traverse le prisme est perpendiculaire au plan bissecteur. En substituant



dans la dérivée seconde on verrait qu'il y a un minimum si n est plus grand que l'unité (par exemple pour un prisme de verre placé dans l'air). - Si n est plus petit que 1 il y aurait un maximum *

La seconde solution n'est pas acceptable et doit être rejetée car si on la porte dans la valeur de n^2 , on trouve $n = 1$

Substituons dans cette même expression la solution $i = i'$, $\Delta = +2i - A$.

$$n^2 = \frac{2 \sin^2 i (1 + \cos A)}{\sin^2 A} = \frac{2 \sin^2 \frac{A+A}{2} (2 \cos^2 \frac{A}{2})}{4 \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2}}$$

$$n = \frac{\sin \frac{A+A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

Cette expression de n est évidente sur la figure; en effet $r = \frac{A}{2}$, $i = \frac{A+\Delta}{2}$

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \frac{A+\Delta}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

Cette formule est très-employée pour déterminer les indices de réfraction.

* Un autre mode de calcul permet de retrouver cette solution et de démontrer en même temps qu'elle correspond à un minimum de Δ : de la formule générale on tire aisément:

$$n^2 \sin^2 A = (\sin i + \sin i')^2 - 2 \sin i \sin i' (1 + \cos A) = 4 \sin^2 \frac{(i+i')}{2} \cos^2 \frac{(i-i')}{2}$$

$$4 \left(\sin^2 \frac{i+i'}{2} - \sin^2 \frac{i-i'}{2} \right) \sin^2 \frac{A}{2} = 4 n^2 \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2}$$

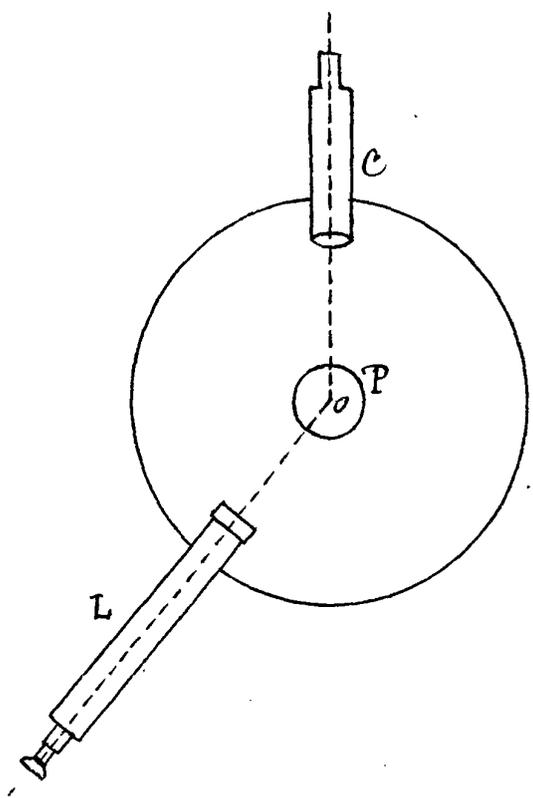
Comme $i+i'$ est égal à $A+\Delta$ il vient

$$\frac{\sin^2 \frac{A+\Delta}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{n^2 \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{i-i'}{2}}{\cos^2 \frac{i-i'}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}}$$

les angles A et Δ étant moindre que 90° le minimum de $\sin^2 \frac{A-\Delta}{2}$ correspond au minimum de Δ : il a donc lieu pour: $\sin \frac{(i-i')}{2} = 0$ et $\cos^2 \frac{(i-i')}{2} = 1$ d'où $i = i'$.

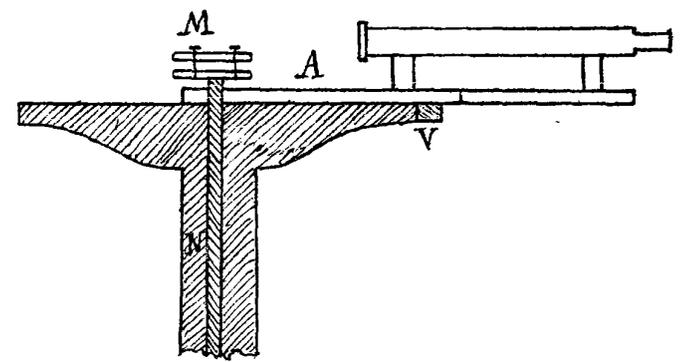
Goniomètre de Babinet. - L'instrument employé pour vérifier les lois de la réflexion et de la réfraction est un goniomètre.

Il se compose essentiellement d'un limbe gradué, portant un collimateur C fixe, une lunette L mobile autour de l'axe O du limbe et à son centre une plate-forme P, mobile sur trois vis calantes; cette plate-forme peut en outre recevoir un mouvement de rotation parallèle au limbe.

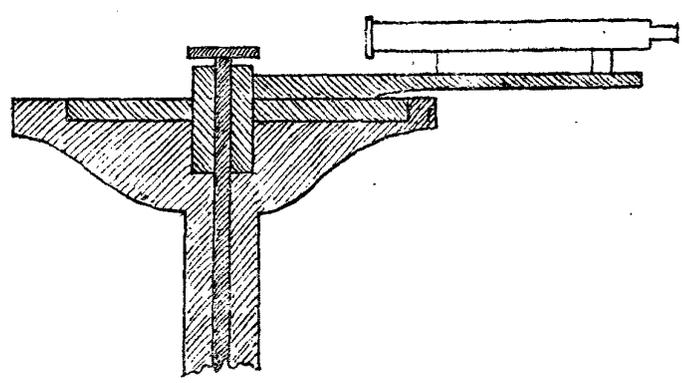


Le Collimateur est destiné à donner des rayons parallèles: il se compose d'un tube portant à son extrémité une lentille à l'autre bout il est percé d'un tout petit trou qui doit coïncider avec le foyer principal de la lentille; on voit que si l'on éclaire fortement ce foyer, la lentille émettra un faisceau de rayons parallèles.

Pour placer la lunette qui doit la recevoir on emploie deux dispositions: l'alidade A qui porte la lunette tourne autour de l'axe fixe MN et s'appuie sur le limbe même; elle porte un vernier extérieur.



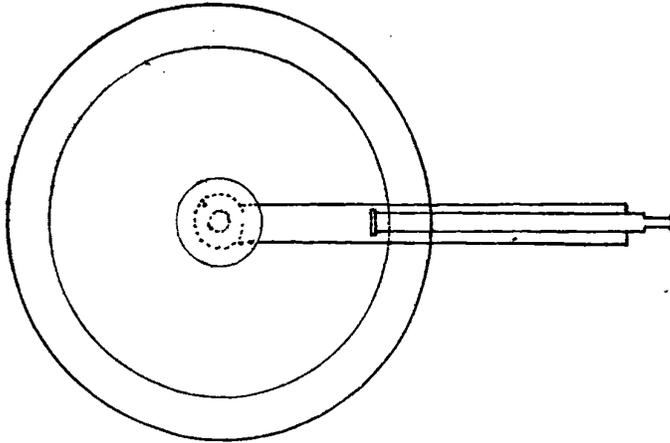
La seconde disposition mécanique est plus précieuse: l'alidade précédente est remplacée par un cercle alidade formant manchon autour de l'axe fixe et supportant la lunette au moyen d'appareils convertables; il en résulte que la tige qui porte la lunette ne frotte plus sur le limbe.



72

La lunette est la même que dans tous les instruments de ce genre; un objectif, un réticule dans un tirage à crémaillère et un oculaire porté par un rentrant.

Avant d'employer l'appareil il faut le régler.



1.° Les rayons doivent être parallèles entre eux.

2.° Parallèles au limbe

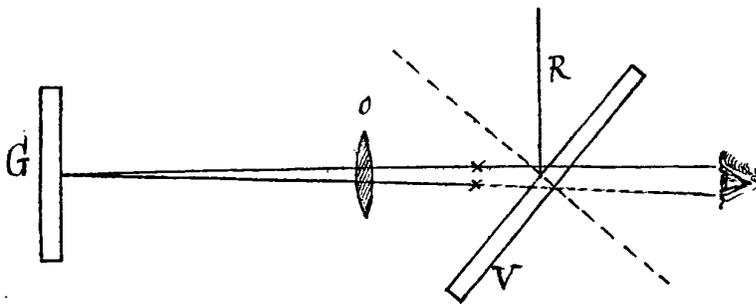
3.° Et la section doit

être perpendiculaire.

On commencera par régler la lunette de telle sorte que le réticule soit au foyer principal de l'objectif: on déplace l'oculaire avec le rentrant jusqu'à ce qu'on

voie bien nettement les fils alors visant un point situé au moins à 2 ou 3 mille fois la longueur de la lunette, on déplace avec la crémaillère le réticule et l'objectif ensemble. On s'assure que l'image est bien dans le plan du réticule, si elle reste immobile par rapport à la croisée des fils quand on déplace l'œil devant l'oculaire.

Il faut maintenant amener l'axe optique de la lunette à être parallèle au limbe: pour cela on dispose sur la plate forme une glace argentée à deux faces planes et parallèles G, on la place per-



pendiculaire à cet axe les rayons vont rebrousser chemin et l'image du réticule se formera sur le réticule même, sinon elle se formera à côté; on déplacera la glace G jusqu'à ce qu'on ait obtenu la coïncidence; quand on

l'a obtenue on fait tourner la lunette de 180° sur le limbe; les 2 faces étant parallèles, la face réfléchissante sera encore perpendiculaire à l'axe optique, si cet axe est parallèle au limbe sinon on verra encore une image du réticule à côté de lui; on corrigera moitié en déplaçant le réticule et par suite l'axe optique, et moitié en relevant de la glace argentée. On fait encore tourner la lunette de 180° pour

S'assurer que l'axe est bien parallèle au limbe, et s'il ne l'est pas, on l'amène à l'être par quelques opérations identiques.

On place alors le collimateur et la lunette en regard; on déplace le collimateur jusqu'à ce qu'il envoie des rayons dans la lunette; puis on fait glisser le petit trou (qui est porté par un reculant) jusqu'à ce qu'on le voie bien distinctement dans la lunette, dans le plan des fils du réticule.

Il n'y a donc plus qu'à placer le prisme; le même réglage peut s'employer; mais il est à craindre que la première face étant placée on ne la règle en ajustant la seconde. On évite à cet inconvénient en plaçant le prisme sur un trépied à vis en mettant chaque face perpendiculairement à la ligne de deux vis; en réglant la 2^e face, on ne touchera que la 3^e vis; la plate-forme tournera autour de la ligne des deux vis, c'est-à-dire autour d'une normale à la face déjà réglée.

L'appareil étant ainsi réglé, il est facile de vérifier la loi de la réflexion. Il faut d'abord déterminer l'angle du prisme.

On fait tomber le faisceau sortant du collimateur sur l'arête du prisme; il se divise en deux faisceaux dont on mesure l'angle; cet angle est $2A$; en effet:

$$LBM = p$$

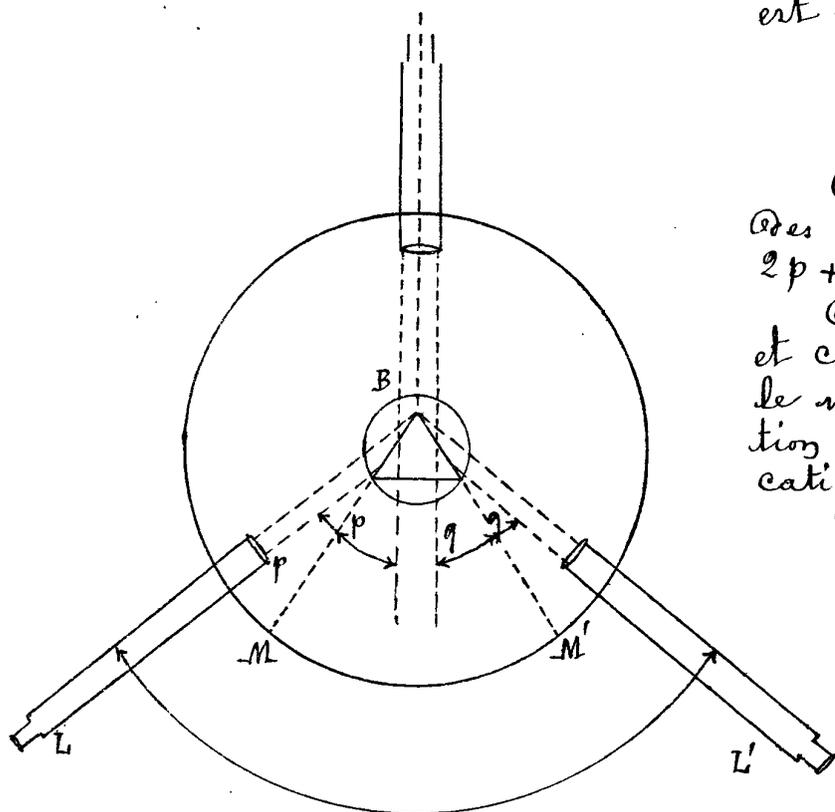
$$L'BM' = q$$

Or, $p + q = A$. Or, l'angle des deux faisceaux réfléchis est $2p + 2q = CNL'$ c'est-à-dire:

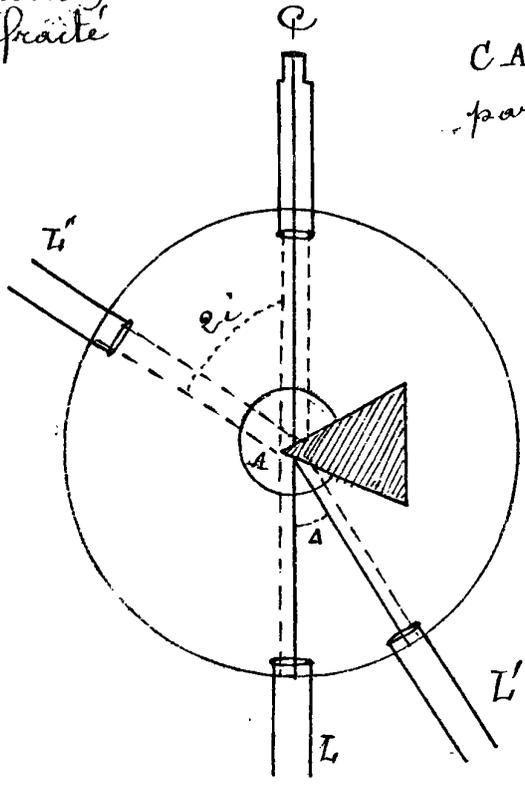
On mesure l'angle $2p + 2q$ et comme on le trouve toujours le même quelle que soit la position du prisme, on a une vérification des lois de la réflexion.

Pour vérifier les lois de la réfraction on tourne le prisme de manière que le faisceau ne rencontre plus que l'une des faces du prisme; soit L la position de la lunette visant le collimateur

avant qu'on ait placé le cristal, ou bien après qu'on l'a placé, si on a eu soin de mettre l'arête au milieu du faisceau L' la



position de la lunette recevant le faisceau réfléchi. L'' le faisceau réfracté



$$CAL'' = 2i$$

$$\text{par suite } L''AL = \pi - 2i$$

$$LAL' = \Delta = i + i - A$$

une observation préliminaire ayant fait connaître A , on tire i et i' des deux équations précédentes; en portant ces quantités dans l'expression de n^2 , on peut calculer l'indice de réfraction. La loi des sinus est vérifiée parce qu'on trouve, quel que soit i toujours la même valeur de n .

On ne peut pas faire ces expériences avec une lumière ordinaire; si l'on veut viser nettement par réfraction le trou du collimateur il faut employer une flamme monochromatique; on les obtient en mettant dans un brûleur de Bunsen

de la soude (flamme jaune), du chlorure de lithium (rouge) ou de césium (vert) --- etc --- ou bien en mettant dans une lampe à alcool la dissolution d'un sel de ces substances. Dans ce cas on obtient toujours des rayons jaunes, parce que l'alcool impur que l'on emploie contient de la soude; on éteint ces rayons en leur faisant traverser un verre coloré convenable présentant la couleur qu'on veut donner à la flamme

10^e Leçon

Quand on veut étudier les lois de la réfraction, on ne peut étudier la lumière blanche, car les rayons parallèles avant la réfraction sont ensuite divergents et donnent une image diversement colorée. On est obligé d'employer des flammes monochromatiques que l'on produit en

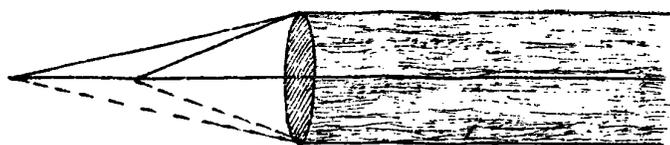
plaçant des sels métalliques dans la flamme d'un brûleur de Bunsen.

La lumière a donc un indice de réfraction variable suivant la couleur des rayons : l'indice croît en général du rouge au violet, il y a cependant certaines substances dans lesquelles il augmente du violet au rouge.

On obtient donc dans les lentilles une série de foyers tous compris entre les foyers R et V du rouge et du violet.

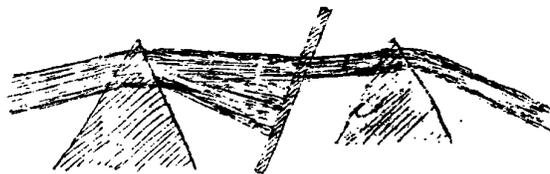
C'est ce qui explique les aberrations des images formées par les lentilles simples.

Ces aberrations s'appellent aberrations de réfrangibilité.



Newton le premier observa qu'un faisceau parallèle tombant sur un prisme donne à sa sortie un faisceau divergent que l'on peut considérer comme la juxtaposition de faisceaux parallèles dont les couleurs sont rouge, orange, jaune, vert, bleu, indigo violet. Certaines personnes aperçoivent au delà du violet une coloration faible de couleur lavande. Ce phénomène porte le nom de dispersion des couleurs.

Quel que soit l'angle du prisme, on ne peut pas avoir de déviation sans dispersion. Newton a expliqué ce phénomène en remarquant que la lumière blanche doit être considérée comme la superposition des rayons colorés.



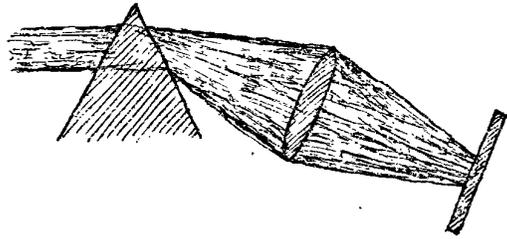
Si on coupe un faisceau dispersé (ou spectre lumineux) par un écran qui laisse passer une seule couleur, par exemple le rouge, et si l'on dévie ce faisceau rouge par un prisme, on n'observe aucune décomposition de couleurs et le faisceau réfracté reste parallèle; d'où l'on conclut que chacune des couleurs qui compose la lumière blanche, est une couleur simple.

Newton a fait plusieurs expériences pour prouver la composition de la lumière blanche.

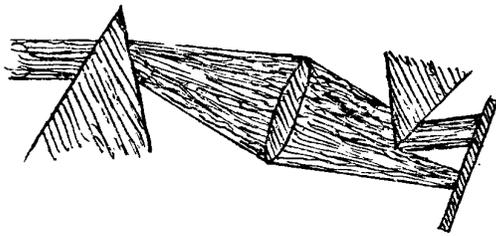
Sur un disque en carton on juxtapose une série de secteurs possédant les contours du spectre suivant l'ordre de réfrangibilité.

Si l'on fait tourner ce disque avec une vitesse suffisante, l'œil ne perçoit plus individuellement les impressions de chacune de ces couleurs, mais seulement la superposition, qui donne une teinte plus ou moins pure.

Autre expérience: On disperse un faisceau de lumière blanche au moyen d'un prisme, puis dans le faisceau divergent qui en résulte on interpose une lentille qui réunit les rayons de différentes couleurs dans un même espace et recompose la lumière blanche.



Si dans cette expérience on intercepte une couleur (rouge par exemple) au moyen d'un écran, la superposition des autres couleurs on ne trouve plus la lumière blanche mais la couleur complémentaire de celle qu'on a interceptée (ici c'est le vert).



On peut encore intercepter une partie du faisceau, pour un prisme dont l'angle est très-petit, cette portion du faisceau est alors légèrement déviée, et donne une couleur complémentaire de celle du faisceau restant.

Newton avait pensé que ce phénomène était inconciliable avec la possibilité d'obtenir des lentilles achromatiques; parcequ'il avait cru remarquer que la dispersion est proportionnelle à la réfraction; en d'autres termes, il croyait que si un prisme nous donne une déviation β pour les rayons rouges, et γ pour les rayons violets le rapport $\frac{\beta}{\gamma}$ est indépendant de la nature des substances réfringentes.

Il n'en est rien, aussi peut-on corriger les aberrations de réfrangibilité en combinant des substances ayant un pouvoir dispersif différent.

Prismes achromatiques. - On peut au moyen de deux prismes produire une déviation sans dispersion.

Nous nous bornerons à de très-petites déviations, de manière à réduire la formule $\frac{\sin i}{\sin r} = n$, à la formule $\frac{i}{r} = n$;

Or en général
$$\begin{cases} A = r + r' \\ \Delta = i + i' - A \end{cases}$$

Remplaçant i et i' par $n r$, $n r'$, il vient:

$$\begin{aligned} \Delta &= n(r + r') - A \\ &= A(n - 1) \end{aligned}$$

i et i' ont disparu, c'est-à-dire que quel que soit l'angle d'incidence (pourvu qu'il soit petit), la déviation est la même et avec sa valeur minimum.

Si l'on fait tomber le faisceau émergent sur un second prisme, d'angle A' et d'indice n' on aura pour la déviation totale:

$$\Delta = \Delta(n-1) + A'(n'-1)$$

et ainsi de suite, en considérant autant de prismes que l'on voudra.

Représentons par n_i , n'_i les indices de chacun de ces prismes correspondant à une autre couleur i .

Combinons deux prismes tels que pour chacune de ces deux couleurs la déviation soit la même.

Pour la première couleur on aura

$$\delta_i = A(n_i - 1) - A'(n'_i - 1)$$

On met le signe - devant A' , car on place les deux prismes en sens inverse.

Pour la seconde on aura:

$$\delta_j = A(n_j - 1) - A'(n'_j - 1)$$

Écrivons que $\delta_i = \delta_j$ on aura la condition $A(n_i - n_j) - A'(n'_i - n'_j) = 0$

Pour que cette condition soit remplie il suffit que l'on ait

$$\frac{A}{A'} = \frac{n_i - n'_i}{n_j - n'_j}$$

Si nous prenons par exemple un prisme de crown-glass et un de flint-glass, nous déterminerons expérimentalement les valeurs n_i, n'_i, n_j, n'_j , on aura le rapport $\frac{A}{A'}$ qu'il faut donner aux angles des deux prismes.

On pourra donc ainsi achromatiser un prisme de crown pour un prisme de flint.

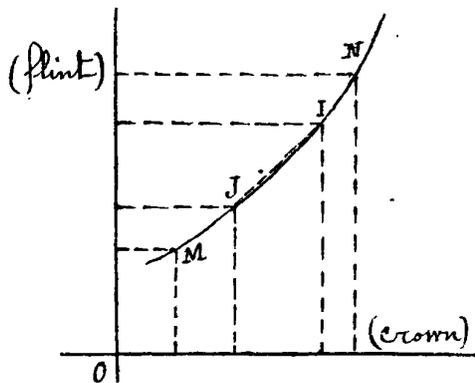
Est-il suffisant, comme nous venons de le supposer, que

Deux couleurs aient la même déviation ?

Rigoureusement, non, mais pratiquement la compensation est suffisante comme nous allons le voir :

Imaginons deux substances ; par exemple le flint et crown, dont on détermine les indices pour toutes les couleurs et portons $(x = n-1)$
 $(y = n-1)$

parallèlement à deux axes rectangulaires et cela successivement pour les diverses couleurs : En joignant les points ainsi obtenus on forme une courbe MN qui tourne sa convexité du côté de l'axe repré-
sentant le corps le moins réfringent : (c'est ici le crown).



Or le rapport $\frac{n_i - n_j}{n_i - n_j}$ est le coefficient angulaire de la corde IJ.

Pour que l'on pût achromatiser toutes les couleurs à la fois ; il faudrait donc que le coefficient angulaire de toutes les cordes telles que IJ fut le même, c'est-à-dire que la courbe MN se réduisit à une droite. Or ce n'est pas ce qui arrive. *

Mais pratiquement la corde

diffère si peu de l'arc que l'on peut considérer tous les points comme satisfaisant sensiblement à cette relation.

Il y a en outre une circonstance qui favorise l'achromatisme : les couleurs rouge et violette sont faibles, on peut alors ne pas s'inquiéter de ces couleurs, ce qu'il importe de réunir ; ce sont les couleurs brillantes, orange, jaune, vert, bleu.

On cherche en général à faire coïncider l'orange et le bleu. (ce sont les points situés au tiers et aux deux-tiers de la courbe MN).

Reste à voir comment on emploie pratiquement ces formules ;

* L'hypothèse erronée de Newton revient à supposer que la courbe précédente est une droite qui passe par l'origine : dans ce cas en effet :

$$\delta = A(n_i - 1) - A'(n_i - 1) = A(n_j - 1) - A'(n_j - 1) \text{ devient égal}$$

à zéro puisqu'on aurait à la fois $\frac{n_i - 1}{n_i - 1} = \frac{n_j - 1}{n_j - 1} = \frac{n_i - n_j}{n_i - n_j} = \frac{A'}{A}$

D'où $A(n_i - 1) = (n_i - 1) A'$ la déviation calculée serait donc nulle.

on se dispense de la mesure des indices par un procédé très-simple on a deux prismes d'angles α et α' pris au hasard, il s'agit de déterminer le rapport $\frac{\alpha}{\alpha'}$ des angles suivant lesquels on doit tailler des prismes formés des mêmes substances, pour que l'achromatisme soit réalisé : si l'on peut se procurer un prisme d'angle β variable d'une substance quelconque, la comparaison de ce prisme avec les deux précédents permet d'en déduire le rapport cherché.

Soit n_i, n_j les indices de 2 couleurs pour le 1^{er} prisme α .
 --- n'_i, n'_j --- 2 mêmes couleurs pour le 2^e prisme α'
 --- N_i, N_j --- pour le 3^e prisme β

J'accouple les deux prismes α, β et je fais varier β de telle sorte qu'il y ait achromatisme (il suffit pour cela qu'en regardant au travers des deux prismes une ligne brillante éloignée elle apparaisse sans irisation).

On a alors
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{N_i - N_j}{n_i - n_j}$$

On mesure exactement l'angle β au moyen d'un goniomètre
 On combine ensuite le prisme variable avec le prisme α' on aura

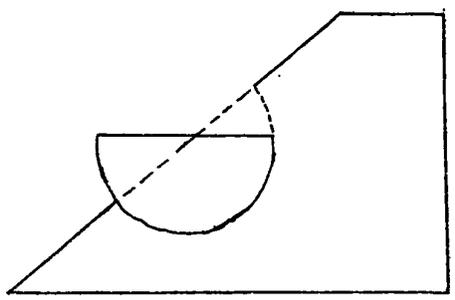
$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{N_i}{n'_i} - \frac{N_j}{n'_j}$$

Divisant membre à membre ces deux égalités il vient :

$$\frac{\alpha\beta'}{\beta\alpha'} = \frac{n'_i - n'_j}{n_i - n_j} = \frac{A}{A} \text{ tel est le rapport cherché}$$

Donc si l'on taille deux prismes dont l'angle est dans ce rapport on a l'achromatisme.

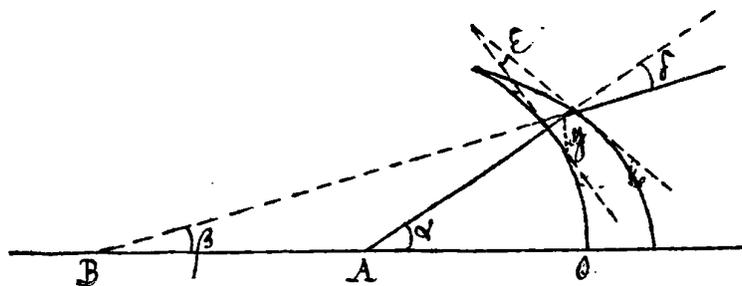
Voici maintenant la disposition adoptée pour obtenir un prisme d'angle variable on a un demi-cylindre en verre qui peut tourner autour de son axe dans une cavité cylindrique de même substance. Cette pièce étant fixe, si l'on fait tourner le demi-cylindre, on modifie à volonté l'inclinaison de la face mobile α sur la face fixe MN .



Ce prisme variable se nomme Diasporamètre de Boscovich.

Les considérations précédentes nous conduisent à l'achromatisme des lentilles, qui est la chose importante pour les instruments d'optique.

Montrons d'abord qu'une lentille peut être considérée comme un assemblage d'éléments prismatiques.



Il n'entre ici en jeu que les éléments d'entrée et de sortie du rayon lumineux.
Soit ϵ l'angle des plans tangents à ces éléments.

Soit α, β les angles des rayons incident et réfracté avec l'axe de la lentille. Soit δ l'angle de déviation.

la lentille A étant le point lumineux et B son foyer virtuel : on a la relation :

$$\delta = \alpha - \beta$$

Mais on sait d'autre part que $\delta = \epsilon (n-1)$ ici l'angle du prisme est ϵ . On a de plus en désignant par y la distance du point d'incidence à l'axe de la lentille :

$$\alpha = \frac{y}{D} \quad \beta = \frac{y}{F} \quad \text{en posant } D = AO, F = BO$$

Je vais chercher quelle est la série des valeurs à donner à l'angle ϵ d'une série de prismes de hauteurs variables y pour que tous les rayons viennent converger en B.

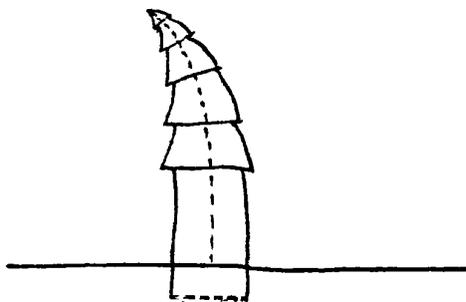
$$\text{On a } \delta = \alpha - \beta = y \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{D} \right)$$

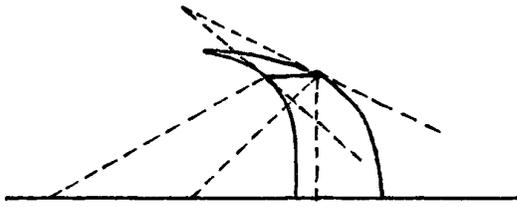
$$\text{Donc : } y \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{D} \right) = \epsilon (n-1)$$

On a donc cette égalité 4 quantités variables : y, F, D, ϵ . Si l'on veut que F soit constant, lorsque D reste constant quels que soient ϵ et y cela revient à poser $\frac{\epsilon}{y} = \text{const}$ et l'on aura

$$\frac{1}{F} - \frac{1}{D} = \text{const}$$

cette relation étant vérifiée dans les lentilles (comme nous allons le voir) on pourra considérer la lentille comme un assemblage de prismes infiniment petits dans lesquels on a $\frac{\epsilon}{y} = \text{const}$.





Montrons qu'en effet dans les lentilles on a la relation $\frac{\varepsilon}{y} = \text{const.}$
Soit R et R' les rayons de courbure de chacune des faces de la lentille; et u, u' les angles de l'axe avec les rayons aboutissant aux points d'incidence et d'émergence

On rayonne lumineux à la hauteur y .
on a sensiblement: $u = \frac{y}{R}, u' = \frac{y}{R'}$

$$\text{Or: } \varepsilon = u' - u$$

$$\text{Donc } \varepsilon = y \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right)$$

et par suite: $\frac{\varepsilon}{y} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \text{const.}$

Si je remplace $\frac{\varepsilon}{y}$ par sa valeur trouvée plus haut, j'obtiendrais la formule des lentilles.

$$\frac{1}{F'} - \frac{1}{D} = (n-1) \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) \quad (F' \text{ et } D \text{ sont deux foyers conjugués}).$$

Les longueurs ont toutes été comptées positivement à gauche de la lentille: si R et R' étant positifs, on a $R' < R$ la lentille est convergente, dans le cas contraire elle est divergente.

D'après cela on a tout ce qu'il faut pour déterminer l'achromatisme d'une lentille.

Soit un élément prismatique dont l'angle est ε on peut l'achromatiser avec un élément prismatique d'angle ε' la condition sera:

$$\varepsilon (n_i - n_j) + \varepsilon' (n'_i - n'_j) = 0$$

$$\text{ou: } \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = - \frac{n'_i - n'_j}{n_i - n_j}$$

Supposons que y soit le même pour les deux éléments correspondants, on aura alors:

$$\frac{\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}}{\frac{1}{S'} - \frac{1}{S}} = \frac{n'_i - n'_j}{n_i - n_j}$$

qui montre que les rapports $\frac{S}{S'}$ et $\frac{R}{R'}$ doivent être de signes contraires, par suite on achromatise une lentille convergente, au moyen d'une lentille divergente dont la distance focale est déterminée par la formule ci-dessus.

On peut arriver directement au même résultat.

Pour un même rayon lumineux nous aurons avec chaque lentille :

$$\frac{1}{F} - \frac{1}{D} = (n_i - 1) \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right)$$

$$\frac{1}{F'} - \frac{1}{D'} = (n'_i - 1) \left(\frac{1}{S'} - \frac{1}{S} \right)$$

Considérons le foyer F de la 1^{ère} lentille comme coïncidant avec le point lumineux relatif à la seconde lentille alors on a $D' = F$; il vient alors en ajoutant ces deux équations ci-dessus :

$$\frac{1}{F} - \frac{1}{D} = (n_i - 1) \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) + (n'_i - 1) \left(\frac{1}{S'} - \frac{1}{S} \right)$$

Pour la couleur j on aura de même :

$$\frac{1}{F_j} - \frac{1}{D} = (n_j - 1) \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) + (n'_j - 1) \left(\frac{1}{S'} - \frac{1}{S} \right)$$

Nous voulons obtenir la superposition des couleurs et par conséquent $F_i = F_j$, et par suite :

$$(n_i - n_j) \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) + (n'_i - n'_j) \left(\frac{1}{S'} - \frac{1}{S} \right) = 0$$

Celle est la relation trouvée ci-dessus.

- On achromatise les lentilles des instruments d'optique en employant le crown et le flint glass.

Il faut déterminer quatre éléments R, R', S, S' pour cela nous devons avoir 4 conditions.

1^o, on se donne d'abord la distance focale de l'objectif ce qui fait une condition.

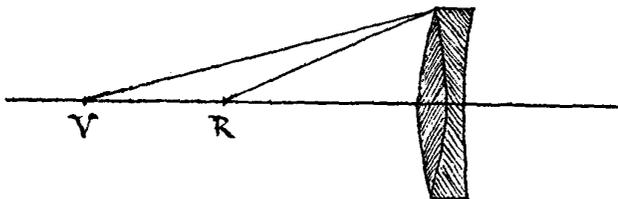
2^o, la condition d'achromatisme.

3^o, on assujettit les surfaces en contact à avoir même rayon de courbure; 1 condition.

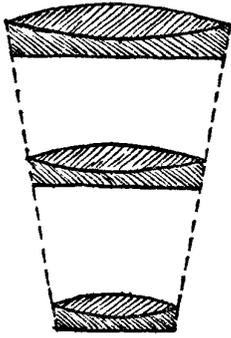
4^o, reste une quatrième condition qui permet de rendre minimum l'aberration de sphéricité.

On démontre en effet que la forme sphérique est impropre à donner un seul foyer dans les lentilles. Pour une lentille simple sphérique dont l'indice de réfraction est $n = \frac{3}{2}$ le minimum d'aberration s'obtient pour $\frac{R}{R'} = \frac{1}{6}$.

Les oculaires n'ont pas besoin d'être achromatiques; car d'une part ils donnent une image virtuelle peu éloignée, par suite l'aberration est petite. (l'erreur est proportionnelle à la distance de l'image à l'objet.)



De plus en couvrant les objectifs, on peut tenir compte de ce que l'oculaire n'est pas achromatique : on force alors un peu l'achromatisme de l'objectif de manière que les rayons violets forment leur foyer au-delà de celui des rayons rouges, alors l'oculaire rétablit l'achromatisme parfait.



Les verres de microscope sont formés de lentilles sphériques à faces très courbées collées à des lentilles plan-concaves de flint; on en superpose trois, on arrive alors à avoir des objectifs dont l'ouverture angulaire est très-considérable (près de 160°). On compense ainsi la perte de lumière provenant de la multiplication des surfaces

11^e Leçon.

Etude des spectres des différentes lumières.

Lumières simples ou monochromatiques. — Si dans un spectre solaire, on isole un faisceau lumineux au moyen d'une fente ou d'un trou très étroit pratiqués dans un écran, ce faisceau n'éprouve plus qu'une dispersion très faible dans un second prisme et se comporte presque comme s'il était homogène. C'est ainsi que Newton a constaté que l'analyse de la lumière par le premier prisme était complète.

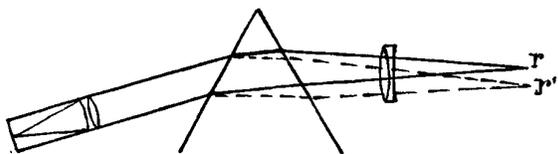
Depuis on a découvert que certains sels, tels que ceux de Sodium, de Lithium, de Strontium communiquent à la flamme de l'alcool ou d'un brûleur de Bunsen la faculté d'émettre des rayons simples ou monochromatiques, On le constate au moyen d'un appareil semblable au goniomètre, le spectroscope, en vérifiant que ces lumières donnent

une image nette à travers le prisme.

Le spectroscope se compose d'un collimateur, d'un ou plusieurs prismes et d'une lunette. Le collimateur possède une lentille achromatique, de façon à donner des rayons parallèles quelque soit la lumière employée; il résulte en effet de la formule établie pour les lentilles à surfaces sphériques.

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

que la valeur absolue de la distance focale principale des lentilles décroît à mesure que l'indice de réfraction augmente. Avec une



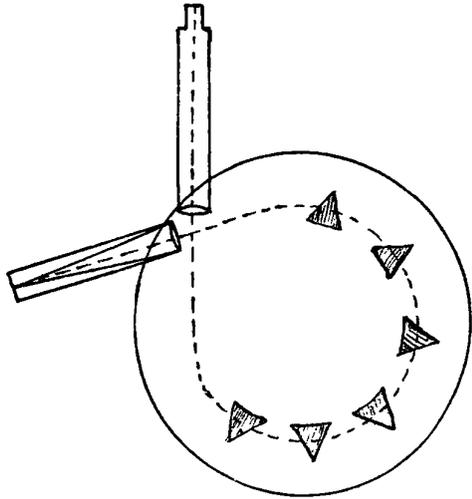
lentille achromatique les foyers principaux diffèrent très-peu avec les différentes lumières, et les rayons émergents de toutes les couleurs sont sensiblement parallèles. À la sortie du prisme les rayons forment encore des faisceaux cylindriques mais de direction diffé-

rente suivant la couleur de chacun d'eux. Si l'on reçoit ces faisceaux sur un objectif achromatique, ils viennent tous former des images R' et on obtient la position de ces images en menant par le centre optique des parallèles aux axes des faisceaux lumineux.

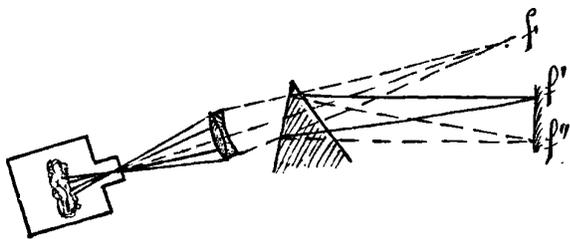
Si la lumière est composée d'un petit nombre de rayons simples, on aura autant d'images séparées de la fente que de rayons simples; le spectre se composera donc de quelques raies lumineuses séparées par des espaces obscurs; on dit alors qu'il est discontinu. Au contraire, si la lumière se compose d'une infinité de rayons simples, on a alors une infinité de foyers conjugués dans le plan focal de l'objectif, par suite une infinité d'images de l'ouverture du spectroscope, qui empiètent les unes sur les autres et forment un spectre continu. Tel est le spectre de la lumière solaire, de l'arc voltaïque, d'une bougie, etc; les sels de sodium, de lithium, de calcium etc ---, au contraire portés à l'incandescence dans une flamme chaude donnent une radiation jaune, rouge ou verte qui produit dans le spectroscope une image unique de la fente du collimateur.

Le spectroscope permet donc d'observer toutes les lumières, et de les classer, en lumières donnant un spectre continu ou discontinu. Il prend le nom de spectromètre quand il est disposé de manière à pouvoir mesurer la réfrangibilité des radiations simples qu'elles émettent.

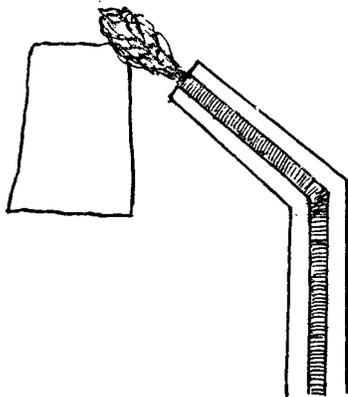
Pour agrandir les images, on donne une grande longueur à la lunette; et pour mieux séparer les images, on fait traverser aux rayons lumineux, une série de prismes qui augmentent leur dispersion on en prend jusqu'à six et même vingt qu'on dispose en cercle sur le plateau Spectroscopique.



Cet appareil ne permet que des observations individuelles. Pour rendre les phénomènes visibles à la fois pour un grand nombre de spectateurs, on opère par projection. On place la lumière à étudier devant une fente placée un peu en avant du foyer d'une lentille achromatique; on obtient ainsi un faisceau convergent en un point très éloigné sur le parcours duquel on interpose une prisme; on reçoit alors sur un tableau convenablement disposé, autant d'images de la fente qu'il y a de radiations simples.



La forme légèrement conique du faisceau n'influe pas beaucoup sur les résultats que nous avons obtenus dans le cas d'un faisceau cylindrique.



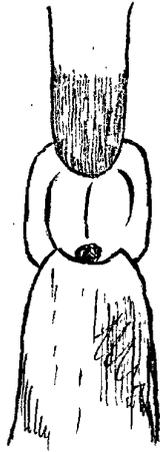
Les sels métalliques en vapeur dans la flamme de l'alcool ou d'un brûleur ne donnent pas de spectre assez brillant pour être projeté sur un écran.

On emploie pour cela la lumière de Drummond ou la lumière électrique.

La lumière de Drummond est produite par l'incandescence d'un morceau de chaux que vient lécher la flamme d'un bec oxydrique, formé de deux tubes, l'un intérieur, amenant l'air ou l'oxygène, l'autre, comprenant un espace annulaire par où arrive l'hydrogène. Le mélange se fait au bout même du bec

On place le corps à étudier sur le morceau de charbon, dont la chaleur le volatilise.

La lumière électrique est fournie par l'arc voltaïque jaillissant entre deux cônes de charbon suffisamment rapprochés. Le cône inférieur porte une cavité dans laquelle on place le métal ou le sel métallique à vaporiser.



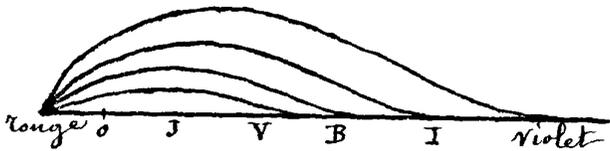
Résultats des observations faites au spectroscope.

1^o Les corps solides incandescents émettent une lumière dont le spectre est continu. Un fil de platine chauffé au rouge ou un charbon incandescent donnent un spectre continu.

Les gaz carbonés, dont l'éclat provient des particules de charbon incandescent donnent également un spectre continu; il en est de même des liquides carbonés.

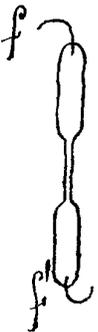
2^o, les spectres continus des solides incandescents deviennent de plus en plus brillants quand le corps s'échauffe davantage et s'étend du côté du violet.

Le maximum d'intensité a toujours lieu vers le jaune. En représentant graphiquement les intensités par des ordonnées proportionnelles (autant que cela est possible, car il est difficile de comparer les intensités de couleurs différentes), on obtient des courbes s'étendant vers le violet à mesure



que la température s'élève.

3^o Les corps gazeux incandescents débarrassés de toute particule solide incandescente, émettent une lumière dont le spectre est discontinu c'est-à-dire formé de rayons simples ou monochromatiques. Pour le démontrer on prend un tube plein de gaz raréfié, capillaire en son milieu; on fait passer un courant électrique au moyen de deux fils de platine f, f' , qui chauffe le gaz dans la partie étroite, dont la résistance au passage du courant est plus grande que celle



de la partie large. Le gaz devient ainsi lumineux et donne un spectre discontinu.

Au moyen de ces tubes, construits par Geissler, on a étudié le spectre de la plupart des gaz. C'est ainsi que l'hydrogène donne quatre raies, une rouge très-brillante, une bleue verdâtre, une indigo et une violette.

En faisant jaillir l'étincelle d'une bouteille de Leyde dans un gaz raréfié, on obtient un spectre plus brillant.

4^o Le système des lignes brillantes d'un spectre est caractéristique de l'élément chimique volatilisé. Le simple aspect d'un spectre suffit pour reconnaître la composition d'un corps volatilisé. C'est le principe de l'analyse spectrale.

Le cuivre est caractérisé par deux raies vertes très-brillantes et deux orangées assez vives.

Le zinc trois raies bleues, une raie rouge

L'argent deux raies vertes très-brillantes.

Avec la lumière Drummond, on peut encore montrer par projection les raies du Calcium (rouge et verte).

On se sert en général des chlorures, plus volatils que les autres sels.

Cette propriété des vapeurs métalliques a été entrevue en 1845 par H. Brewster, physicien anglais qui recherchait la cause de la coloration des flammes.

M. M. Bunsen et Kirchhoff ont fait de l'analyse spectrale une méthode d'analyse chimique d'une sensibilité extraordinaire, en découvrant la loi que nous venons d'énoncer et en donnant la carte des raies spectrales et en éléments chimiques connus. Il suffit en effet de quelques millièmes de milligramme d'un corps, pour que sa présence soit révélée par les raies de son spectre. C'est ainsi que la raie jaune du Sodium se retrouve dans presque tous les spectres, à cause de la petite quantité de sels de soude répandus dans l'air.

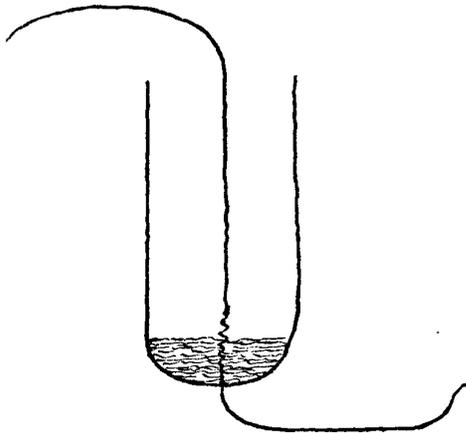
L'analyse spectrale a donné lieu à la découverte de cinq nouveaux métaux. M. M. Kirchhoff et Bunsen en étudiant le spectre de la lépidolithe ou mica rose de Saxe, aperçurent une raie rouge ne correspondant à aucune raie encore observée. Soupçonnant la présence d'un métal nouveau, ils parvinrent à concentrer la dissolution du sel métallique par des moyens spéciaux, et finirent par obtenir le rubidium, métal alcalin ainsi nommé de la couleur de sa raie caractéristique. Les eaux mères de la saline de

Durckheim, ainsi analysées qui donnaient aux mêmes physiciens une nouvelle raie violette, qui les amena à isoler un nouveau métal alcalin le Cæsium.

Par la même méthode le Thallium (raie verte) découvert par M^r Crookes, a été obtenu par M^r Eamy qui l'a extrait des boues des Chambres de plomb. Ce métal est analogue au plomb.

L'Indium, qui donne une belle raie indigo, fut découvert par M^r M. Reich et Richter, en Allemagne dans les résidus du grillage des blémes. C'est un métal, qui paraît-il est très-répandu dans la nature.

Enfin un Chimiste français, M^r Secog de Boisbaudry en cherchant par des raisons théoriques un métal voisin de l'aluminium dont les raies spectrales devaient être voisines observa les raies bleues qu'il cherchait et lui firent découvrir le métal intermédiaire entre l'aluminium et le magnésium, qu'il a appelé le Gallium. C'est un métal d'un blanc brillant fondant à 29° restant surfondu à la température ordinaire et se solidifiant sous l'influence d'un cristal solide de Gallium.



qui volatilise une partie du sel et produit une étincelle dont on peut observer le spectre.

M^r Edmond Berquerel a trouvé un dispositif permettant d'obtenir un spectre avec une très-petite quantité du sel étudié et qui de plus permet de le conserver longtemps. On place la dissolution du sel au fond d'un tube portant un fil de platine soudé à son extrémité inférieure et dans lequel descend un autre fil de platine s'arrêtant à une petite distance de la liqueur. On fait passer le courant électrique

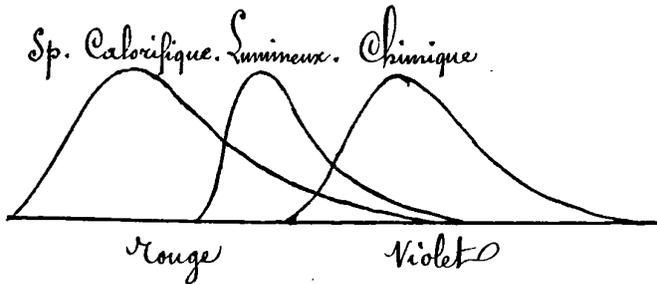
Propriétés générales du Spectre.

On peut représenter, comme nous l'avons vu les intensités de chaque couleur par des ordonnées proportionnelles. Comme les couleurs sont dissemblables, il est difficile d'établir des rapports

entre elles, cependant il est évident que le rouge extrême éclaire peu, que le bleu, l'indigo et le violet sont très sombres, tandis que le jaune et l'orangé ont un grand éclat.

Mais les faisceaux lumineux sont encore chauds; la chaleur rayonnante doit se disperser elle aussi comme la lumière et il est intéressant de rechercher dans quelle partie du spectre sont situés ces faisceaux calorifiques. On les trouve dans la région rouge, et même les rayons infra-rouges invisibles sont les plus chauds. Avec une petite pile thermo-électrique on peut étudier la chaleur de chaque radiation et construire une courbe approximative; on voit que l'ordonnée maxima est au-delà du rouge.

Enfin les rayons lumineux produisent des décompositions chimiques. Si l'on place dans le spectre une plaque couverte de chlorure d'argent, la décomposition n'est sensible qu'à partir du vert, va en croissant vers le violet et se produit encore à sept ou huit fois la longueur du spectre. On est parvenu



à construire une courbe des intensités chimiques.

Il ne faudrait pas croire que dans un faisceau lumineux il y ait trois sortes de radiations distinctes: chaque radiation possède les trois propriétés précédentes, mais à des degrés différents. On constate en effet que si l'on vient à diminuer de moitié par exemple l'intensité lumineuse d'un spectre, en chaque point, l'intensité calorifique et chimique se trouve également diminuée de moitié.

Principes de la Photographie.

Nicephore Niepce est le premier qui ait eu l'idée de reproduire les images par l'action solaire. S'appuyant sur ce fait que le bitume de Judée exposé au soleil n'est plus soluble dans l'huile de naphte, il était parvenu à reproduire des gravures sur des plaques enduites de ce bitume, exposées longtemps devant ces

gravées, et lavées ensuite à l'huile de naphte, qui enlève les parties correspondantes aux ombres.

Daguerre, qui cherchait de son côté à fixer les images de la chambre noire, substitua au procédé de Niepce un procédé nouveau le daguerréotype, fondé sur la décomposition de l'iodure d'argent par la lumière. Il exposait une plaque de cuivre argenté sur l'une de ses faces à l'action de vapeurs d'iode; cette plaque ainsi préparée était placée dans la chambre obscure; la mince couche d'iodure d'argent était attaquée dans les parties correspondant aux clairs et l'on achevait l'action en exposant la plaque aux vapeurs de mercure qui formait un amalgame blanc avec l'argent mis à nu. On lavait alors la plaque avec l'hyposulfite de soude, qui enlevait l'iodure non attaqué; le métal découvert, forme les ombres tandis que les parties impressionnées sont recouvertes d'une infinité de globules de mercure qui leur donne un aspect blanc et mat: de là les clairs.

Ce procédé demande une exposition de plusieurs minutes dans la chambre obscure. Le procédé actuel de la photographie au collodion exige à peine quelques secondes; il suffit parfois de quelques millièmes de seconde.

Photographie au collodion. — On forme un mélange de $\frac{1}{3}$ d'éther et $\frac{2}{3}$ d'alcool. Dans 100 centimètres cubes du mélange on fait dissoudre 1 gramme de coton poudre, 1 gramme d'iodure de cadmium et $\frac{1}{4}$ de gramme de bromure de cadmium.

On étend quelques gouttes de ce liquide sur une plaque de verre soigneusement nettoyée, de façon à obtenir une mince couche d'égal épaisseur, sans la moindre ride.

Le collodion ayant fait prise, on immerge pendant 2 minutes environ, jusqu'à ce que l'aspect huileux du collodion ait disparu. La glace collodionnée dans un bain composé de 8 grammes d'azotate d'argent pour 100 grammes d'eau. Il se forme des iodures et des bromures d'argent, impressionnables par la lumière.

On expose la plaque quelques secondes au foyer de la lentille de la chambre noire. Rien n'est encore visible. Pour révéler l'image, on verse sur la plaque une dissolution de sulfate de fer, corps réducteur, qui achève la décomposition des sels d'argent. On obtient ainsi un cliché négatif, s'altérant à la lumière à cause des sels non encore décomposés. Un lavage à l'hyposulfite de soude les fait disparaître, et l'épreuve peut se conserver indéfiniment.

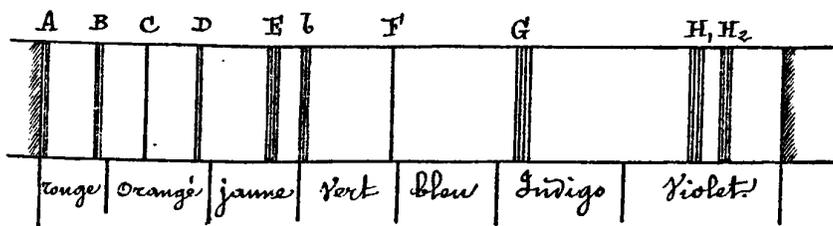
Pour obtenir une épreuve positive, on prépare un papier sensible, en le plongeant d'abord dans une dissolution de chlorure de sodium, puis dans une solution d'azotate d'argent. On place ce papier desséché sous le négatif, on expose le tout à la lumière solaire; puis l'image produite on lave le papier à l'hyposulfite de soude, on le plonge dans un bain de virage, formé de chlorure d'or neutre qui donne à la photographie la teinte violette. On finit par des lavages à l'eau distillée.

La substitution d'une émulsion de gélatine au bromure d'argent au collodion, a permis depuis quelques années d'obtenir une sensibilité plus de vingt fois plus grande même après dissecation, (plaques sèches au gélatino-bromure).

12^e Leçon.

Wollaston, en étudiant le spectre solaire, y a reconnu certaines séparations ou raies obscures, notamment au milieu de l'orange et entre le vert et le bleu.

Fraunhofer reprit ces expériences en perfectionnant les appareils par l'emploi des lentilles parfaitement achromatiques, de fentes excessivement fines et surtout de prismes bien purs. Il obtint ainsi un spectre solaire présentant un grand nombre de raies obscures parmi lesquelles, celles qui avaient été signalées par Wollaston. Il forma alors le tableau ci-contre représentant



la position de ces raies dans le spectre: elles forment des groupes principaux représentés par les lettres A B C D E F G H₁ H₂.

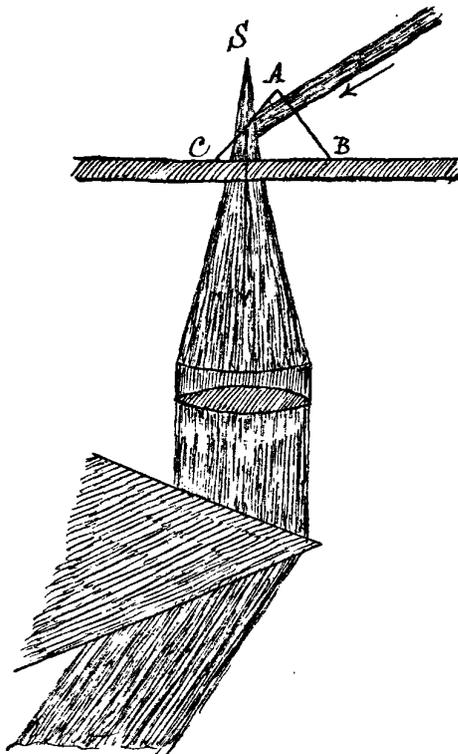
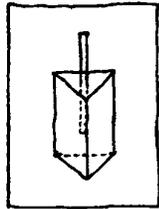
Ces raies noires sont des images de la fente, images négatives provenant de ce que dans la lumière étudiée il manque les couleurs

dont la réfrangibilité correspondrait à la position de ces raies obscures.

Lors de la publication des résultats des observations de Wollaston et Fraunhofer un grand nombre d'expériences furent entreprises et l'on reconnut que quelque soit la substance du prisme, les mêmes raies noires apparaissent et dans des positions identiques. Ces lignes ne sont donc pas dues à une propriété spéciale de la substance réfringente, mais bien à une propriété de la lumière même du soleil.

On compara ce spectre à ceux des flammes colorées, et les physiciens remarquèrent de singulières coïncidences.

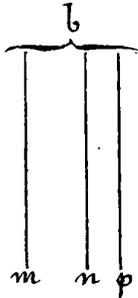
Si l'on observe avec des instruments très-déliés le spectre de la soude on reconnaît que la raie jaune caractéristique se dédouble en deux qui coïncident exactement avec la double raie D du spectre solaire.



On peut introduire la lumière des deux sources par la même fente au moyen de la disposition suivante: On masque la moitié de l'ouverture par un prisme de 60° dont une des faces s'applique entre la plaque qui porte la fente. Un faisceau entrant dans le prisme normalement à la face AB vient se réfléchir sur la face AC et sort normalement à la face BC en passant par la fente du collimateur. Si d'autre part on place en avant de la fente une source lumineuse S qui éclaire directement la seconde moitié de la fente, on obtiendra dans le spectromètre deux spectres juxtaposés dans lesquels il sera facile d'observer les coïncidences dont nous venons de parler.

On a reconnu ainsi que la presque totalité des raies sombres du spectre solaire coïncident avec les raies brillantes des vapeurs métalliques.

Ainsi : C et F coïncident avec des raies de l'hydrogène.
 D avec celle du Sodium
 E et G avec celles du fer.
 H₁ et H₂ avec celles du calcium



Le fer en particulier a donné près de cinq ou six cents coïncidences avec les raies du spectre solaire. Le groupe b coïncide avec les raies du magnésium il se compose de trois raies m, n, p, telles que la distance entre m et n est le double de celle qui existe entre n et p.

De nombreuses recherches ont été faites par les physiciens dans le but d'expliquer la cause de ces singuliers résultats.

Si l'on songe au nombre considérable des raies en coïncidence avec celle des métaux connus on peut avoir la certitude absolue que la cause qui produit ces phénomènes est la même. On en conclut que c'est la présence du fer et des autres métaux dans le soleil qui produit ces raies sombres correspondant aux raies brillantes fournies par les flammes de ces mêmes métaux.

Comment se fait-il que ce ne soit pas l'inverse qui se produise?

Les travaux de Léon Foucault de Kirchhof et de Angström nous en donnent l'explication.

Foucault en étudiant simultanément la lumière de l'arc voltaïque (gaz incandescents) et celle des charbons eux-mêmes, reconnut dans cette dernière la présence des raies de la soude, de la chaux, l'alumine, la magnésie, etc. — ce qui n'a rien d'étonnant à cause des impuretés du charbon des cornues. Il eut alors l'idée de faire passer à travers cet arc un faisceau de lumière solaire : il aperçut que les raies D qui dans le spectre étaient très-fines, devenaient aussitôt très larges, en restant obscures.

Il en conclut que l'arc électrique qui a la propriété d'émettre avec intensité la lumière définie par la réfrangibilité des raies D, a aussi la propriété d'absorber cette lumière avec une grande énergie.

Le dernier pas dans cette théorie a été fait par Angström et Kirchhof qui posèrent ce principe :

Une vapeur incandescente est parfaitement transparente pour toutes les radiations qu'elle n'émet pas ; au contraire elle absorbe toutes les radiations qu'elle émet, et son pouvoir

absorbant croît dans le même sens que son pouvoir émissif.
C'est précisément là ce qui arrive dans l'expérience de Foucault.

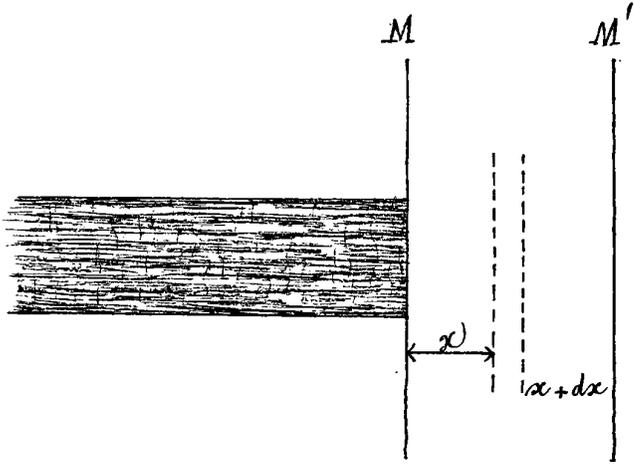
Si l'on admet ce principe, que nous allons démontrer tout à l'heure, on en conclut qu'une épaisseur suffisante d'une vapeur incandescente quelconque :

1°. Absorbe les radiations de même réfrangibilité que celles qu'elle émet, quelque soit l'intensité de celle qu'on lui fait absorber.

2°. Après cette absorption, elle restitue son intensité propre à l'intensité des radiations absorbées.

Démontrons le principe de Kirchhoff :

Plaçons nous dans un cas particulier simple : Supposons la masse gazeuse limitée à deux plans parallèles : M, M' .



Considérons un faisceau de la radiation considérée, tombant normalement sur la face M et soit Q la quantité de radiation qui passe par l'unité de surface pendant l'unité de temps. Connaissant le pouvoir émissif E et le pouvoir absorbant A de la masse gazeuse, calculons ce qui va rester de ce faisceau quand il aura traversé une épaisseur x de la vapeur incandescente.

Soit Q la quantité de radiation qui traverse pendant l'unité de temps la tranche limitée aux deux plans $x, x+dx$.

Elle se sera accrue de la quantité $E dx$.

D'autre part elle perd $QA dx$.

On a donc l'équation différentielle :

$$dQ = E dx - QA dx$$

$$= \left(\frac{E}{A} - Q \right) A dx$$

$$\frac{dQ}{\frac{E}{A} - Q} = A dx$$

$$\text{Intégrons : } \log. \left(\frac{E}{A} - Q \right) = -Ax + c.$$

Déterminons la constante c par l'intensité à l'origine $\left. \begin{matrix} x=0 \\ Q=Q_0 \end{matrix} \right\}$

$$\log \frac{\frac{E}{A} - Q}{\frac{E}{A} - Q_0} = -Ax$$

$$\frac{E}{A} - Q = \left(\frac{E}{A} - Q_0 \right) e^{-Ax}$$

$$Q = \frac{E}{A} (1 - e^{-Ax}) + Q_0 e^{-Ax} \quad . E, A \text{ et } x \text{ sont toujours positifs.}$$

Analisons les deux termes de cette formule :

Le second terme $Q_0 e^{-Ax}$ montre l'effet dû à la radiation qui pénètre dans la masse gazeuse ; e^{-Ax} décroît très-rapidement quand x augmente et l'on peut toujours assigner à x une valeur telle que e^{-Ax} soit aussi petit que l'on voudra.

$Q e^{-Ax} < q$ q étant une quantité donnée aussi petite que l'on voudra.

$$\log Q - Ax < \log q \quad x > \frac{1}{A} \log \frac{Q}{q}$$

Le premier $\frac{E}{A} (1 - e^{-Ax})$ part de zéro pour $x = 0$.

Lorsque x augmente la parenthèse converge très-vite vers l'unité, donc la quantité Q converge vers la limite finie $Q = \frac{E}{A}$. Donc à la place de l'intensité Q_0 qu'elle recevait, la masse gazeuse a substitué l'intensité $\frac{E}{A}$.

Il résulte de cette discussion que l'on se tromperait si l'on croyait multiplier indéfiniment l'intensité d'une flamme en en plaçant un grand nombre les unes derrière les autres, car on ne peut dépasser la limite $\frac{E}{A}$.

On peut à volonté produire des raies sombres dans un spectre continu : il suffit de faire tomber un faisceau de lumière très-intense sur une couche assez épaisse de vapeurs incandescentes. Les radiations que la vapeur n'émet pas traversent, mais celles qu'elle émet sont absorbées et sont remplacées par des radiations de même réfrangibilité mais d'éclat différent. L'éclat sera augmenté si l'intensité de la radiation considérée est plus grande dans la vapeur incandescente que dans la source lumineuse. Dans le cas contraire on obtiendra des raies obscurcies.

On fait l'expérience facilement au moyen de la lumière électrique ou celle de Drummond. La colonne gazeuse absorbante s'obtient au moyen d'une ou plusieurs flammes de

gaz d'éclairage colorée par la soude, et produite par des briques de Bunsen.

Le faisceau provenant des charbons incandescents tend à produire un spectre continu, mais le passage sur la flamme ou gaz donne lieu à deux raies obscurcies à la place même des raies de la soude; on peut parler plus exactement ces raies possèdent précisément leur faible intensité provenant de la lumière ou gaz, ce que l'on vérifie en interceptant la lumière électrique.

Hypothèse de Kirchhof sur la Constitution du Soleil: D'après ce physicien, le soleil serait composé d'un globe fluide incandescent émettant un spectre continu; autour duquel se trouverait une atmosphère gazeuse formée de vapeurs métalliques. Ces vapeurs émettent des radiations qui possèdent une intensité propre et qui la substituent à l'intensité de la radiation provenant du globe central nommé photosphère.

Kirchhof a eu le tort d'attribuer une épaisseur considérable à cette atmosphère: les astronomes ont prétendu qu'ils ne l'ont jamais aperçue. Mais remarquons qu'il est inutile de supposer une grande épaisseur car les vapeurs métalliques ont un pouvoir absorbant très-considérable.

La première expérience à ce sujet a été faite par Fizeau: en plaçant un morceau de sodium dans l'arc électrique: Si l'on rapproche les charbons, le sodium s'enflamme. On obtient d'abord un spectre continu tant que le métal n'est pas volatilisé. Aussitôt que le sodium est réduit en vapeurs on aperçoit une raie orangée D. Puis les vapeurs s'échauffent se disséminent autour de l'appareil en atteignant l'épaisseur de quelques millimètres. Leur température s'abaisse un peu et elles peuvent absorber complètement la lumière que le centre émet, bien que leur épaisseur soit très-faible. On obtient alors une raie obscure à la place de la raie D. Peu à peu les vapeurs se dissipent et la raie D redevient très-brillante.

Dans le soleil la couche gazeuse pourrait être encore 1.000.000 de fois plus épaisse que dans l'expérience précédente, tout en restant insensible aux instruments des astronomes.

On a cru pendant longtemps qu'on ne connaîtrait jamais la composition chimique des corps célestes; mais la lumière venant des astres nous donne des indications sur leur composition. Le spectre solaire nous révèle en effet que les causes qui produisent

Les raies sombres, sont identiques à celles qui causent les raies brillantes dans les flammes métalliques.

Ces métaux semblent être d'après cela les éléments cosmiques communs à tout le système solaire. Les aéroolithes nous en donnent une autre preuve; on y a reconnu en effet la présence de plusieurs métaux tels que le fer, le magnésium, l'aluminium, le sodium, etc. -----

La spectroscopie nous a donné des renseignements intéressants sur les autres corps de notre système: c'est ainsi que la lune et les planètes donnent une lumière identique à celle du soleil, d'où l'on conclut que ces astres ne possèdent pas de lumière propre.

Certaines planètes, telles que Jupiter et Saturne présentent lorsqu'on les regarde avec une lunette certaines zones affaiblies que l'on attribue à la présence des vapeurs froides: c'est par analogie qu'on raisonne, en effet diverses vapeurs telles que l'acide hypooxygéné qui à la température ordinaire n'émettent pas de lumière propre produisent lorsqu'on les fait traverser par un faisceau de lumière non plus des raies mais des bandes d'absorption analogues à celles que l'on observe dans ces planètes. La lune au contraire ne possède pas d'atmosphère.

Les physiciens ont étudié aussi la lumière des étoiles; cette lumière à une faible intensité, on a pu néanmoins obtenir les spectres des 6 premières grandeurs. Ces spectres offrent des caractères très-distincts, on peut les ramener à plusieurs types: le plus généralement répandu est celui du soleil (spectre continu avec des raies fines). Dans la plupart on voit apparaître les raies du sodium, du magnésium et de l'hydrogène, mais les autres éléments y sont disposés de diverses manières. Dans certaines étoiles on a obtenu des bandes cambrées. Sirius donne un spectre continu avec les raies du sodium et de l'hydrogène.

On a examiné aussi la lumière de certaines étoiles temporaires: en 1864 notamment une étoile de seconde grandeur a apparu dans la couronne boréale et a disparu peu de temps après; en 1876, une étoile de quatrième grandeur a fait une courte apparition dans la constellation du cygne. Leur spectre est tout différent des précédents il est formé de raies brillantes: en particulier celles de l'hydrogène, du sodium et du magnésium, on est donc conduit à penser que cet éclat est dû à l'inflammation subite d'une masse ou prédominent ces trois corps.

Les nébuleuses sont divisées en deux groupes : résolubles et non-résolubles. Le spectroscopie a confirmé la constitution que les télescopes avaient indiquée : les nébuleuses résolubles donnent un spectre analogue à celui des étoiles (raies sombres un fond brillant.) Les nébuleuses non résolubles (qui semblent formées d'une masse gazeuse) présentent au contraire un spectre formé de raies brillantes, parmi lesquelles on retrouve communément des raies de l'azote.

Enfin une des observations les plus curieuses faites avec le spectroscopie fut effectuée pendant les éclipses totales :

En 1842 il se produisit une éclipse qui dura deux minutes environ, le disque de la lune vint recouvrir celui du soleil et l'on aperçut tout autour, des nuages roses qui semblaient se déplacer. Les astronomes furent très-intrigués de ce phénomène mais ne purent en donner une explication satisfaisante. En 1868 l'analyse spectrale vint prêter un concours utile aux observations astronomiques : Janssen a reconnu ainsi que ces protubérances étaient dues à une couche d'hydrogène incandescent : en amenant ces rayons lumineux sur la fente d'un spectroscopie il a obtenu en effet les quatre raies de ce gaz (rouge, bleu-vert, violet, indigo). Cette couche rosée qui entoure le soleil, et que l'on désigne sous le nom de chromosphère, contient outre l'hydrogène, de petites quantités de sodium et de magnésium.

Janssen a montré le moyen d'observer de tout temps ce phénomène qui jusque-là n'avait été étudié que très-rarement pendant les éclipses de soleil.

Il s'est fondé sur une propriété très-délicate :

Ce qui nous empêche de voir cette couche rose, c'est que l'atmosphère qui nous enveloppe diffuse tellement la lumière du soleil qu'elle nous arrive noyée de lumière blanche. Si l'on place au foyer d'un objectif une très-petite partie du disque solaire et qu'on l'étale par un prisme, son intensité diminue, s'il existe des lumières simples elles ne s'étalent pas et conservent toujours l'image de la fente, tandis que les lumières composées s'étalent et se recouvrent. On éteint donc ainsi notablement le voile de lumière blanche, et on laisse isolées les radiations simples qui existent dans la lumière solaire.

Si l'on dispose l'image du disque solaire tangentielle à la fente, on observe alors le spectre de l'hydrogène, et l'on constate ainsi qu'il existe une atmosphère de ce gaz autour du soleil.

Non exigé - En 1871, un astronome italien, Respighi, étudia l'ensemble des phénomènes spectroscopiques formés par la couche rose qui enveloppe le soleil.

Son appareil se composait d'une lunette astronomique au-devant de laquelle était un prisme d'angle très-petit qui n'altère pas le parallélisme des faisceaux simples. On a donc autant d'images du soleil qu'il y a de lumières simples. Si le soleil par suite de l'interposition du disque lunaire, est réduit à la petite couche rose composée de radiations simples.

Il a ainsi obtenu quatre ou cinq images: une rouge, une bleue, une violette, une indigo, enfin une jaune très-voisine des raies D du sodium, mais qui en diffère pourtant; on suppose qu'elles proviennent soit de l'hydrogène dans certaines circonstances inconnues jusqu'ici, soit d'un métal particulier nommé Hélium.

Au lieu d'une fente on peut employer comme objet lumineux, un anneau circulaire, on obtient ainsi une série d'anneaux colorés correspondant aux raies que l'on obtenait au moyen de fentes éclairées: on reproduit ainsi un fac-simile de l'observation de Respighi.

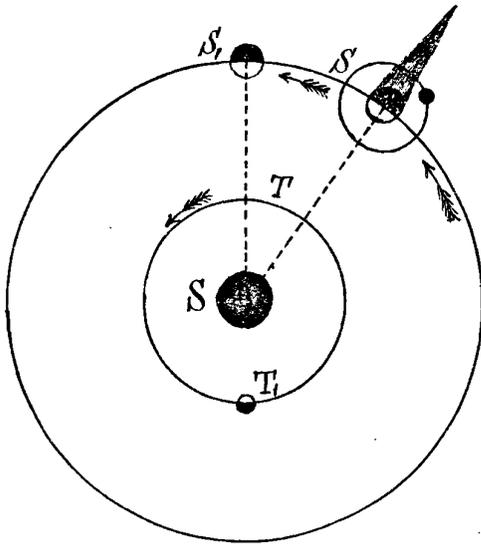
13^e Leçon.

Vitesse de la lumière.

Les anciens croyaient la propagation de la lumière instantanée. Galilée le premier essaya d'en mesurer la vitesse. Il plaça à deux postes distants d'environ deux kilomètres, deux observateurs (A et B) ils étaient munis chacun d'une lumière cachée par un écran. Si un des observateurs A soulevait son écran,

et il était convenu que B soulèverait le sien au moment où il apercevrait la lumière de A; le temps écoulé entre le moment où A soulève son écran et le moment où il voit la lumière de B, représente évidemment deux fois le temps nécessaire à la lumière pour parcourir la distance des deux postes. Ce temps fut toujours inappréciable.

Observation de Rømer. — Rømer découvrit la propagation successive de la lumière par des observations astronomiques; il observait les éclipses des satellites de Jupiter; celles du satellite inférieur en particulier sont très-faciles à observer parce qu'il tourne très-rapidement autour de la planète et qu'il traverse très-peu de la pénombre; il entre immédiatement dans le cône d'ombre. Quand Jupiter est en opposition les temps des immersions dans le cône d'ombre sont en progression arithmétique et se produisent toutes les 42 heures; on peut donc prévoir les moments des éclipses suivantes avec beaucoup d'exactitude :



no 4

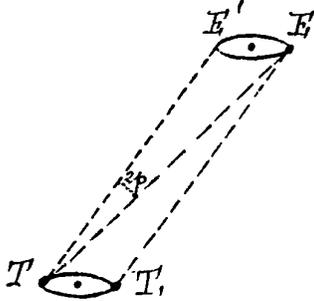
Rømer observa qu'il se produisait un retard, croissant à mesure que la planète se rapproche de la conjonction; à ce moment le retard atteint $16^m \frac{1}{2}$ puis il décroît et devient nul à l'opposition suivante. Rømer attribua ce retard au temps que la lumière mettait à se propager; de l'opposition à la conjonction la terre s'est constamment éloignée, parce qu'elle décrit son orbite $10 \frac{1}{2}$ fois plus vite que Jupiter, et la lumière a un plus long chemin à parcourir pour arriver jusqu'à nous; de là un retard dans les observations; ce retard atteint 16^m au moment de la conjonction, quand la terre est en T c'est-à-dire quand la route de la lumière s'est augmentée du diamètre de l'orbite terrestre (300.000.000 Kilomètres; sa vitesse est donc par seconde :

$$\frac{300.000.000}{960} = \text{environ } 300.000 \text{ Kilomètres}$$

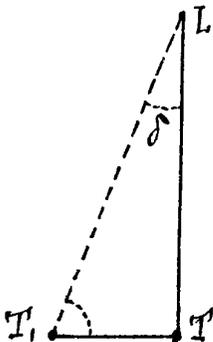
La découverte de Rømer contrariait trop les idées de son époque (1676);

on lui opposa un grand nombre d'objections futiles; les autres satellites de Jupiter n'ayant pas été observés bien exactement ne donnaient pas de résultats aussi nets, on objecta à Rømer que si la vitesse était cause du retard observé, ce retard serait le même pour les autres satellites; cette objection la plus sérieuse qu'on lui ait faite, tomba devant une étude plus exacte des satellites.

Découverte de Bradley, aberration des Étoiles. — Une autre découverte vint 50 ans après confirmer les résultats de Rømer. Bradley cherchait à déterminer la distance des étoiles et pour cela il voulait déterminer leur parallaxe annuelle; Soit E la position de l'étoile; on la voit de la Terre T suivant la direction TE ; six mois après quand la terre est en T_1 , on voit l'étoile suivant la direction T_1E et comme la terre nous semble immobile, l'étoile paraît s'être déplacée en E' ; la corde EE' qui sous-



tend l'angle $E'TE$ est connue, c'est le diamètre de l'orbite terrestre; on observe l'angle; on peut donc en conclure le rayon; Bradley avait des instruments très-précis; il savait qu'il ne devait trouver les parallaxes que de $0''$ à $1''$ et il observait une étoile passant très-près du zénith (γ du Dragon) pour faire disparaître l'incertitude de la réfraction. Il connaissait aussi la direction EE' , puisque l'étoile se déplace dans le plan STE . Il fut donc fort étonné d'observer un déplacement qui atteignait à six mois d'intervalle jusqu'à $40''$ et se produisait perpendiculairement à la direction présumée; il vit là une composition de vitesses: Supposons qu'à un instant donné l'observateur en T reçoive des particules lumineuses qui se déplacent réellement sur la direction TE ;



il les verra dans la même direction que si on avait imprimé à tout le système une vitesse égale et contraire à celle de la terre; la lumière décrivant TE dans le même temps que la terre TT_1 , semblera avoir parcouru TE' ; La direction observée est donc

la résultante de la vitesse de la terre et de la vitesse de la lumière. Si on suppose que l'étoile soit au pôle de l'écliptique, comme l'est à peu près γ du Dragon, la ligne ET est toujours sensiblement perpendiculaire à l'écliptique; la tangente à l'orbite terrestre et par suite le déplacement de l'étoile seront perpendiculaires au plan TSI ; le triangle T, I, I' est rectangle et on a pour la déviation T, I, I' :

$$D = \frac{\text{vitesse de la terre}}{\text{vitesse de la lumière}} = 20''$$

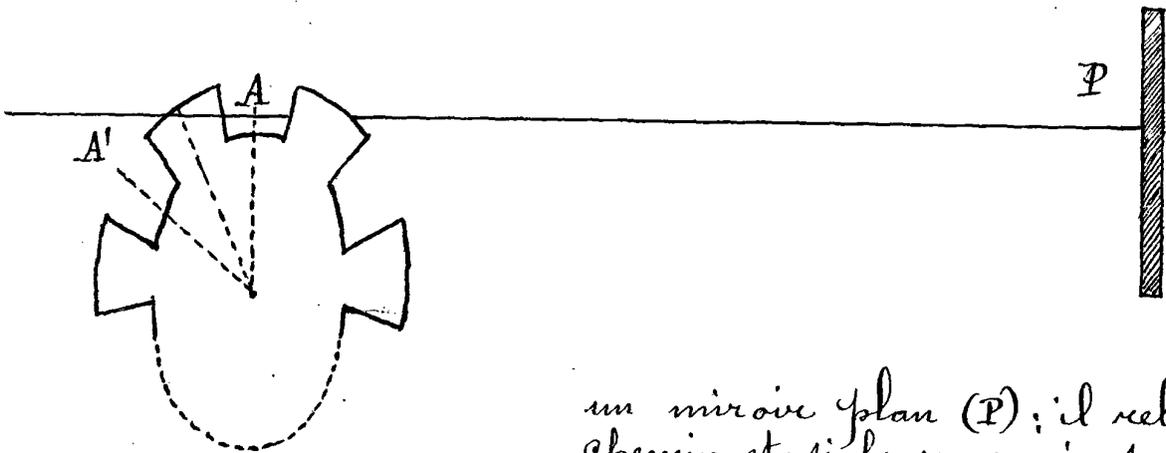
L'étoile semble décrire dans le sens de translation de la terre un cercle de $20''$ de rayon à six mois d'intervalle la déviation de l'étoile sera 2 fois $20''$ c'est-à-dire $40''$, nombre trouvé par Bradley.

C'est là une vérification admirable et complète de la découverte de Roemer.

Mesure directe. — La vitesse immense de la lumière fit croire longtemps qu'il fallait se borner à des observations astronomiques, et qu'on ne pourrait pas faire de mesure directe à la surface de la terre; témoin Galilée; la lumière mettait pour franchir 3 ou 4 kilomètres $\frac{300}{300.000.000} = \frac{1}{300.000}$ temps absolument inappréciable.

M. Fizeau le premier résolut ce problème.

Soit une roue dentée A ; et un rayon lumineux passe dans l'intervalle de deux dents et vient tomber normalement sur



un miroir plan (P); il rebrousse chemin et si la roue n'a pas tourné il rencontre encore l'intervalle des dents et passe. — Si la roue tourne avec une certaine vitesse, telle qu'elle se déplace d'une demi dent dans le temps où la lumière parcourt deux fois AP , le rayon à son retour

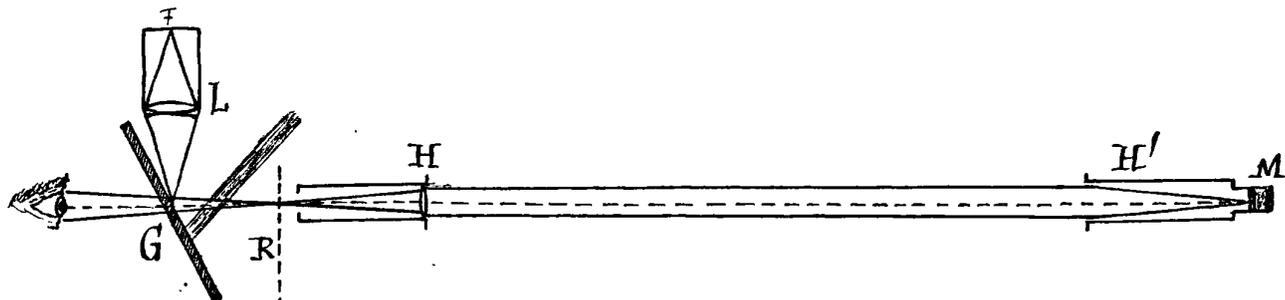
rencontrera le plein de la roue et sera arrêtée; si la vitesse double, le rayon rencontrera le creux A et passera; et ainsi de suite ω étant cette vitesse première pour les multiples pairs la lumière passera; elle sera arrêtée pour les multiples impairs.

2ω 3ω 4ω 5ω 6ω $(2n)\omega$ $2n\omega$ la lumière passe
la lumière est arrêtée

La mise en pratique de cette théorie si simple présentait de sérieuses difficultés:

- 1^o, la lumière s'affaiblit en traversant la distance des deux Stations.
- 2^o, il faut observer le rayon de retour sans être gêné par les rayons d'aller.
- 3^o, il faut amener ces deux rayons à coïncider bien exactement.
- 4^o, il faut connaître la vitesse de la roue.

M^r Fizeau résolut heureusement ces difficultés; les deux postes étaient établis à Montmartre et à Suresne à une distance de 8633^m; il fallait placer entre les deux de la roue un point lumineux très-brillant; on y fit converger par l'intermédiaire d'une lentille achromatique L et d'une glace sans tain G les rayons issus d'un feu très-vivement éclairé F.

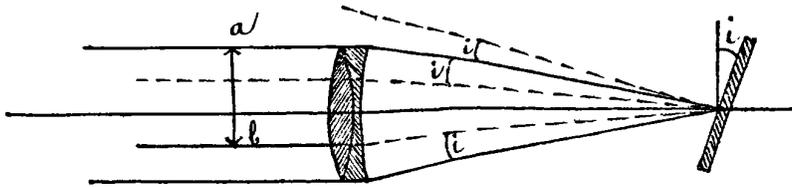


La glace G réfléchit les rayons lumineux, mais n'empêche pas l'œil placé derrière elle de recueillir les rayons de retour; au-delà de la roue R les rayons sont reçus par une lentille achromatique (H) dont le foyer est exactement sur la roue; les rayons en sortent parallèles et vont tomber à l'autre station sur un objectif analogue qui les fait converger sur un petit miroir M.

Pour régler l'appareil il faut amener les foyers de H et de F à être en R; au foyer de H vient se peindre l'image de l'autre station; on l'amènera facilement dans le plan de la roue on y placera de même le sommet du cône lumineux issu de L.

À l'autre station on remplace le miroir par une lentille

oculaire et on amène un diaphragme, et on le remplace par le miroir que l'on applique sur le diaphragme; une erreur de quelques minutes sur l'inclinaison du miroir n'aurait que peu d'influence; le cône incident et le cône réfléchi ne coïncident plus complètement mais ils ont une partie considérable (ab) de sorte qu'on pourra voir encore l'image de M à l'autre station; son éclat sera seulement un peu affaibli.



Les choses étant en cet état on place l'œil

Derrière la glace, on voit le paysage de la station M sur lequel se détache la roue un point brillant qui est l'image de l'objectif illuminé à l'autre station. Je suppose maintenant qu'on fasse tourner la roue: elle tournera d'abord trop lentement pour intercepter le rayon de retour, on verra le point brillant au milieu de la bande glisse formée par la superposition des images des dents: peu à peu le point brillant s'atténue et disparaît tout à fait quand on aura atteint la vitesse ω ; puis il reparaitra peu à peu redeviendra brillant et disparaîtra encore pour la vitesse 3ω --- ---; il disparaîtra une n^{e} fois pour la vitesse $(2n-1)\omega$.

Ce nombre n ayant été compté il faut mesurer ω ou plutôt le point brillant ne reparaisse pas; on embraye alors sur l'axe d'une des roues d'engrenage qui porte un filet de vis sans fin, un compteur analogue à celui de la Siviène.

Soit N le nombre de tours que la roue fait dans une seconde; elle fait un tour en

Soit d'autre part m le nombre de dents, il passe entre l'aller et le retour du rayon $\frac{2n-1}{2}$ dents, n étant le nombre des extinctions successives du point brillant; le temps que le rayon a mis à parcourir la double distance des deux stations $2D$ est donc $\frac{2n-1}{2mN}$

$$\text{et la vitesse } \frac{2D}{\theta} = \frac{4DmN}{2n-1} = v$$

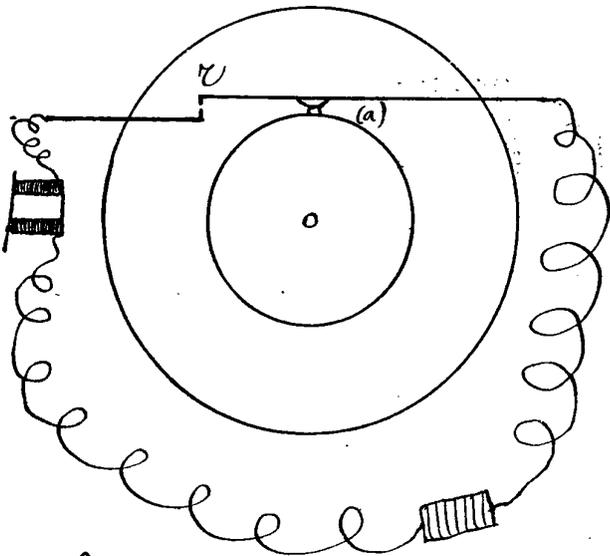
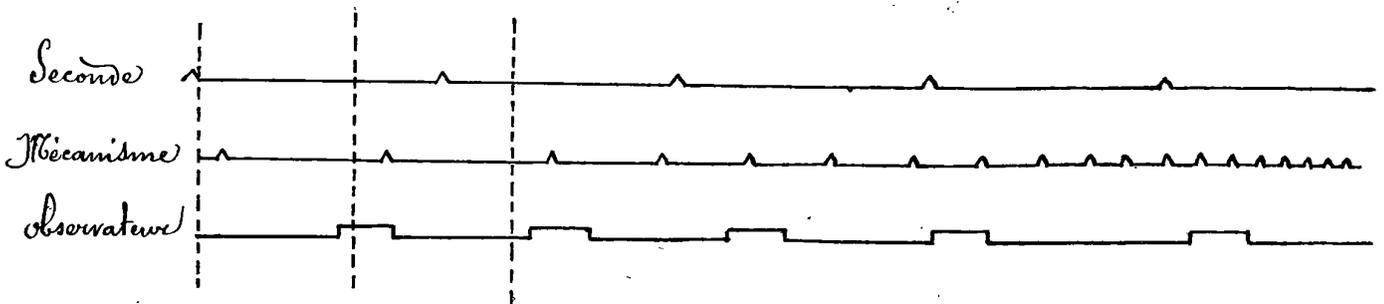
Pour obtenir un certain nombre d'extinctions il faut donner à la roue une vitesse considérable et faire les dents très fines et

très-nombreuses; on en met sur la roue jusqu'à 500.

La principale difficulté, et elle a été signalée par M. Fizeau lui-même quand il fit ses expériences en 1849, consiste à déterminer le nombre de tours N . Il est absolument impossible de maintenir à un instant donné la vitesse de la roue assez constante pour des mesures précises.

Expériences de M. Cornu. - M. Cornu surmonte cette difficulté en déterminant la loi complète du mouvement angulaire de la roue dentée. On connaît ainsi à chaque instant la vitesse de la roue et en particulier à chaque extinction; M. Cornu emploie une méthode d'enregistrement électrique. Son appareil enregistreur est analogue à l'appareil employé par M. Regnault pour déterminer la vitesse du son. Trois styles s'appuient à chaque instant sur une même génératrice d'un cylindre enregistreur.

Le premier est, en relation avec le pendule d'une horloge astronomique; il trace une ligne droite, interrompue de seconde en seconde



plus fréquentes à mesure que la vitesse augmente; on connaît

par un crochet.

Le second est destiné à enregistrer le nombre de tours. Il est commandé par un électro-aimant placé sur un circuit qui sera interrompu à chaque tour d'une roue d'engrenage à cet effet la roue porte une petite lame (a) qui à chaque tour vient soulever le ressort r et interrompt momentanément le courant; ces interruptions sont de plus en

du reste par le nombre de dents des pignons et des roues d'engrenage, le nombre de tours que fait la roue optique pour une interruption; on est ramené à un simple problème d'interpolation pour trouver à chaque instant la vitesse de la roue.

Le troisième style est manœuvré par l'observateur: aussitôt que l'extinction du point brillant est complète, on presse un bouton et le style marque un crochet sur le cylindre. On aura ainsi la vitesse à chaque interruption; et on pourra calculer une série de vitesses de la lumière et faire une discussion sur les résultats obtenus.

$$v = \frac{4 D m N}{1} = \frac{1 D m N z}{3} \dots = \frac{1 D m N K}{2 K - 1} + \dots$$

La première application de cette méthode a été faite par M. Cornu entre l'École Polytechnique et le Mont-Valérien; la distance des deux stations était de 10^k 310; le nombre des extinctions successives fut de 10. M. Cornu trouva pour la vitesse de la lumière 298 500^k avec une erreur de $\frac{1}{100}$.

Il fit en 1874 une seconde série d'expériences entre Montlhéry et l'Observatoire (23 Kilomètres). La distance étant plus grande et ses appareils donnant une vitesse plus grande, il obtint jusqu'à 21 extinctions; les résultats furent plus précis et il trouva: 300.400 Kilomètres à $\frac{1}{1000}$ près en valeur relative.

Miroir tournant Il existe une autre méthode pour déterminer la vitesse de la lumière; c'est la méthode du miroir tournant. Le principe de l'appareil est dû à M^r S. Beeston

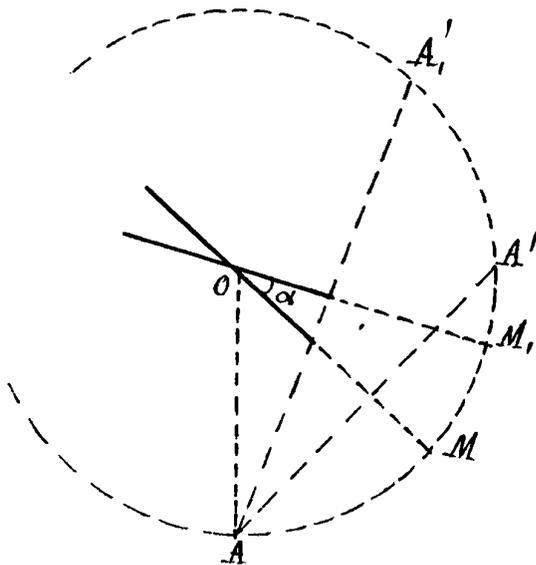
qui l'employa pour déterminer la vitesse de l'électricité. Rappelons que si un miroir tourne, l'image d'un point fixe semblera avoir tourné autour du même axe que le miroir d'un angle double.

$$AA' = 2AM$$

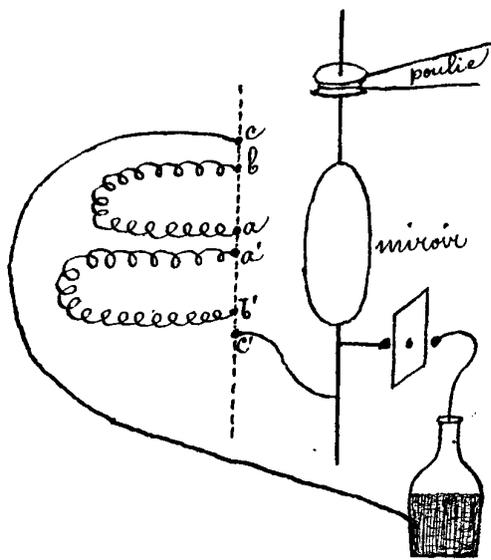
$$AA_1 = 2AM_1 = 2AM + 2MM_1,$$

$$A_1A' = AA_1 - AA = 2MM_1.$$

Le chemin parcouru par l'image A' est donc l'arc 2α sur une circonférence de rayon OA.

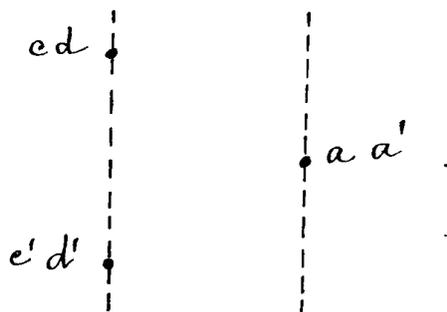


(Non exigé). - M^c Wheatston plaça devant un miroir tournant avec une grande rapidité (jusqu'à 800 et 1000 tours par seconde) deux conducteurs terminés chacun par une boule (a et a') ils ont même longueur



De manière que l'électricité les traverse dans le même temps (A et A') les autres extrémités sont aussi terminées par des boules (b et b') placées elles-mêmes en regard d'autres boules (c et c') avec les deux armatures d'une bouteille de Leyde l'étincelle jaillira d'abord entre c et b et entre c et b', puis un certain temps après entre a et a'; c'est ce temps, employé par l'électricité à parcourir chacun des conducteurs, A, qu'il s'agit de mesurer; pendant le même temps le miroir a tourné de α ; l'œil a vu d'abord les étincelles c b et b' c'; il verra un peu

à côté l'étincelle a a', et comme l'intervalle écoulé entre les deux étincelles est plus petit que $\frac{1}{10}$ de seconde; il les verra toutes



deux à la fois; on pourra donc mesurer la distance de a a' à la droite c c'; Wheatston l'évaluait à simple vue; soit d la déviation de la distance des boules à l'axe, l la longueur d'un conducteur, N le nombre de tours du miroir dans une seconde.

δ est l'axe intercepté par l'angle 2α sur la circonférence

du rayon d .

$$\delta = 2\alpha d$$

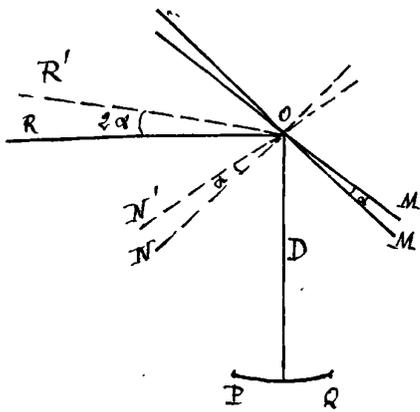
Le miroir fait un tour en $\frac{1}{N}$ seconde; il mettra le temps θ à tourner de l'angle α

$$\theta = \frac{1}{N} \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\delta}{4Nd\pi} \quad v = \frac{l}{\theta} = \frac{l\delta}{4Nd\pi}$$

Wheatston a ainsi trouvé pour la vitesse de l'électricité, 400 000 Kilomètres par seconde.

Arago songea à employer cet appareil pour déterminer la vitesse relative de la lumière dans l'eau et dans l'air. Le problème fut résolu à peu près en même temps par Foucault et par M^{rs} Fizeau et Bréguet.

Considérons un rayon lumineux tombant sur un miroir plan



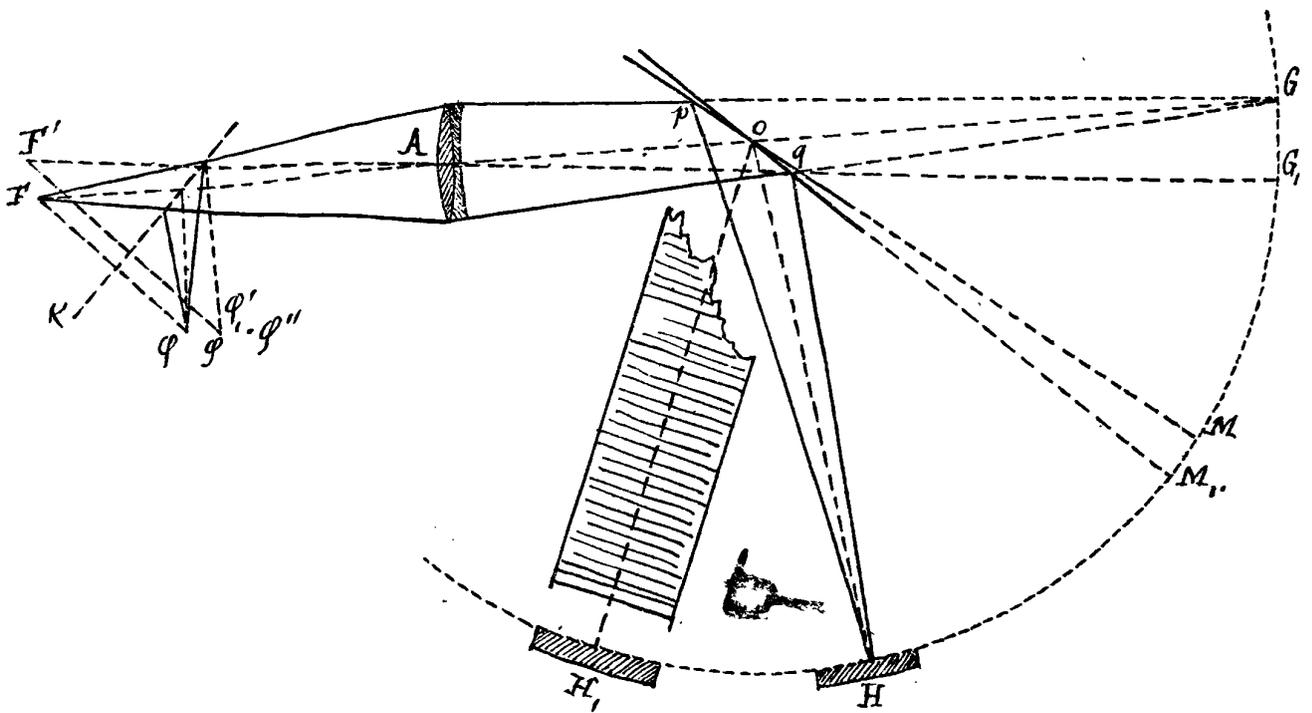
M et de la sur un miroir convexe sphérique P Q dont le centre est au milieu (O) du miroir plan.

Si M est immobile le rayon réfléchi coïncidera avec le rayon incident R; si le miroir tourne autour du point O le rayon ne le rencontrera plus à son retour dans la même position; la normale au miroir a tourné de α , le rayon réfléchi aura tourné par suite de 2α ;

Si on peut déterminer cet angle,

et si on connaît en même temps la vitesse du miroir, on en conclura le temps que la lumière a mis pour parcourir l'espace $2L$.

Voici la disposition pratique que Foucault a donnée à l'expérience



Un point (F) fortement éclairé est placé devant une lentille achromatique (A) qui le fait converger en un certain point G; mais on interpose sur le trajet des rayons un miroir O.M; les rayons vont alors converger en H; plaçons en H un miroir sphérique de rayon OH le faisceau va revenir en sens contraire; la seule différence est que les rayons sont permutés 2 à 2; p.H se réfléchira suivant Hq et Hq suivant Hp; les rayons reviendront converger en F; on les arrête encore par une glace sans tain (K) placée à H; sur OF, et ils forment en Q symétrique de F par rapport à la glace K; on voit que ce point est indépendant de la position du miroir M, pourvu que les rayons rencontrent un miroir H, il est indépendant et de l'angle du miroir avec OF, et de sa distance au point A.

Supposons que le miroir M soit mobile, et tourne: à son retour le faisceau ne le trouvera plus dans la même position, et son axe sera dévié de 2α , α étant la rotation du miroir.

Les rayons lumineux arriveront sur la lentille comme s'ils partaient de G et sans l'interposition de la glace ils viendraient converger en F; la glace les réfléchit et ils concourent en un point Q', image de F par rapport à la glace K, le lieu des points F', serait l'image de la portion de sphère ou plutôt de plan tangent à la sphère au point G; le lieu de Q' sera donc un plan dans lequel on pourra placer une échelle divisée et qu'on observera à la loupe; le miroir étant immobile, on observe la position du point Q' avec autant d'exactitude que l'on veut, puis on fait tourner le miroir et on observe le point Q'; soit δ la distance QQ'; l la distance FA; l' , AG; D , OH; α , l'angle dont a tourné le miroir; N le nombre de tours qu'il fait dans une seconde; θ de temps que la lumière a mis pour revenir en O.

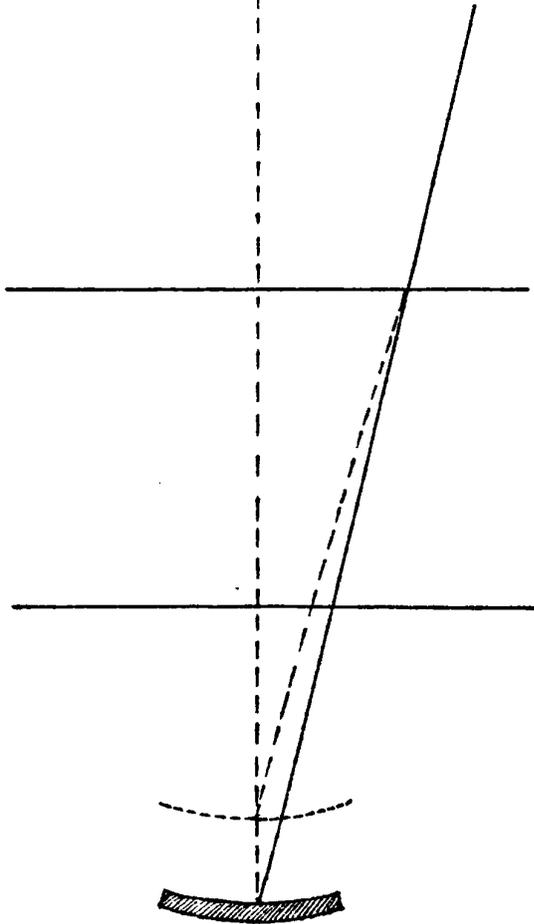
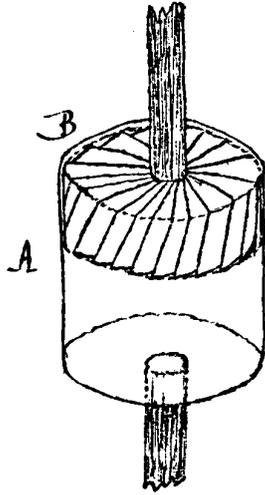
$$\frac{\delta}{l} = \frac{GG'}{l'} = \frac{2\alpha D}{l'}$$

$$\theta = \frac{1}{N} \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{N} \frac{l' \delta}{4\pi l D}$$

$$v = \frac{2D}{\theta} = \frac{8\pi l D^2 N}{l' \delta}$$

Pour faire tourner le miroir, Foucault employait une vraie turbine à air; une boîte A communique avec une soufflerie; à la partie supérieure est une roue, formée d'aubes hélicoïdales et c'est l'axe de cette roue qui porte le miroir; c'est une sorte de

sière, et comme dans cet appareil l'air en sortant produit un son; ce son sert à reconnaître si la vitesse est constante et à déterminer cette vitesse.



Le même appareil peut servir à déterminer la vitesse relative de la lumière dans l'eau et dans l'air; il suffit de placer près du miroir H , un second miroir H' , et entre H , et OM un tube plein d'eau (T) et fermé par des glaces planes et perpendiculaires à OH , les rayons lumineux étant sensiblement perpendiculaires à la surface du liquide seront fort peu déviés, et même en sortant du tube ils reprendront exactement leur direction première; seulement leur point de concours se sera un peu éloigné et il faudra reculer légèrement le miroir H , en H' .

La position des miroirs n'ayant aucune influence sur la position du foyer, le point F sera le même pour H et H' ; soit donc F'' le point analogue F' forme par le passage de la lumière dans le tube à eau, $F F''$ servira à évaluer la vitesse de la lumière dans l'eau; on distingue très nettement F' et F'' , F' est blanc et brillant; F'' est légèrement bleuâtre; la lumière en traversant le tube a pris la teinte de l'eau; F'' est toujours plus éloigné de F que F' ; la lumière met plus de temps à traverser l'eau que l'air; la vitesse est plus grande dans l'air; ce résultat est très-important, comme nous le verrons dans la

prochaine leçon, car il faut rejeter la théorie de l'émission; jusqu'à cette expérience, comparant la lumière au son qui va plus vite dans

l'eau que dans l'air, on avait cru qu'il en était de même pour les rayons lumineux; cet appareil ne permet pas il est vrai de mesurer avec exactitude la vitesse de la lumière dans l'eau, mais néanmoins il permet d'affirmer ce résultat, qu'il était surtout important de constater: La lumière va plus vite dans l'air que dans l'eau.

11^e Leçon.

Dans tout ce qui précède nous avons étudié les propriétés de la lumière indépendamment de la nature même de la lumière. C'est cette dernière étude qui va nous occuper dans le cours de cette leçon.

La lumière doit être considérée comme un mode de mouvement; ceci nous est démontré par ce fait élémentaire: qu'une source lumineuse éclaire les objets situés à distance, lesquels à leur tour renvoient quelque chose qui impressionne notre œil. Il y a là idée de transport d'un certain élément.

Si nous voulons une preuve moins métaphysique, il nous suffit de remarquer que les rayons lumineux ont en même temps des propriétés calorifiques, donc la lumière transporte la chaleur ou la force vive.

Or le fait de la propagation ne peut s'expliquer que de deux manières: ou par le transport direct de molécules matérielles ayant une certaine vitesse ou par une suite de vibrations ou ondulations transmises par un milieu immobile existant entre la source lumineuse et les corps éclairés.

La théorie de l'Émission due à Newton, dans laquelle la sensation de la lumière serait produite par le choc des particules matérielles sur l'œil.

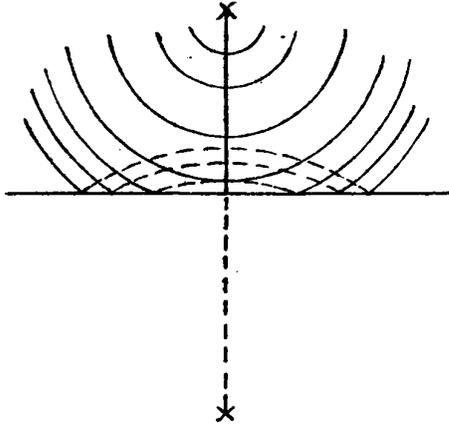
Et la théorie des Ondulations, adoptée par Huygens, Descartes et d'autres physiciens, dans laquelle les sources lumineuses seraient des corps vibratoires envoyant des ondulations analogues à celles qui produisent le son et que l'œil percevrait, de la même manière que l'oreille perçoit les sons.

Ces deux théories ne doivent pas expliquer également bien tous les phénomènes ; c'est ce que nous allons examiner :

Réflexion de la lumière. — Prenons d'abord la théorie de l'émission.

La lumière tombe sur une surface plane de la même manière qu'un projectile animé d'une grande vitesse ; or on démontre en mécanique que dans ce dernier cas le mobile est renvoyé en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence ; il doit donc en être de même pour la lumière, c'est ce que vérifie l'expérience.

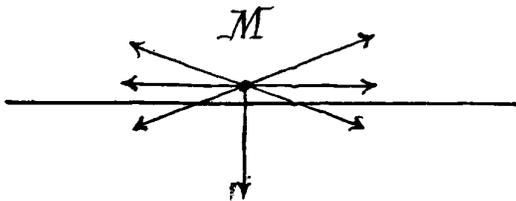
Ajoutons que si la molécule lumineuse est très tenue elle pourra pénétrer dans le corps si elle tombe entre deux molécules de ce dernier ; ceci nous fait concevoir la possibilité de la réfraction, et de la transparence de certains corps.



elles étaient émises par le point symétrique au point de départ par rapport à la surface réfléchissante ; l'analogie avec la propagation des ondes sur l'eau tranquille permet même de retrouver les lois de la réflexion.

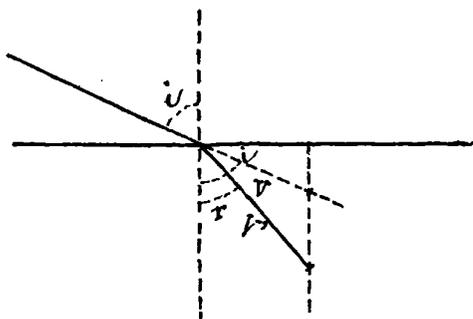
Passons aux lois de la réfraction :

Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse de l'émission : considérons un rayon lumineux. (Trajectoire d'une molécule lumineuse) et supposons que la molécule pénètre dans le second milieu ; les circonstances dans lesquelles vont se trouver cette molécule, seront changées et l'on doit admettre que la vitesse n'est plus la même.



Je dis qu'on peut prévoir une brisure dans la trajectoire ; En effet,

Dans le voisinage de la surface de séparation des deux milieux, la molécule lumineuse est soumise à l'action des molécules des deux corps; ces actions sont différentes, mais s'il y a une résultante, on peut affirmer qu'elle sera normale à cette surface de séparation, car toutes les composantes parallèles à cette surface de séparation se font équilibre par raison de symétrie.



Donc dans le mouvement la composante horizontale de la vitesse n'est pas altérée, la composante verticale seule pourra l'être.

Or en désignant par V et V' les vitesses dans les deux milieux, on aura, en exprimant que les composantes horizontales se détruisent :

$$V' \sin r = V \sin i$$

Où on :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V'}{V}$$

On peut poser ce rapport égal à une constante n , car V et V' sont indépendants de la direction initiale de la molécule.

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse des ondulations.

Considérons les ondes planes correspondant à un faisceau parallèle, on sait que les rayons d'un semblable faisceau, après réfraction à travers une surface plane restent encore parallèles entre eux. Les ondes resteront encore planes et se raccorderont sur la surface de séparation des milieux; mais on doit supposer que la vitesse normale de ces ondes n'est plus la même; Soit V et V' les vitesses

dans chacun des milieux.

Écrivons que la brisure de cette onde est telle que les vitesses normales soient V et V' .

Formons les triangles rectangles $OO'P$, $OO'P'$ on aura :

$$OO' \sin i = V$$

$$OO' \sin r = V'$$

Divisant membre à membre :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V}{V'} = n \text{ Comme ci-dessus.}$$

Il semble donc que nous arrivions au même résultat dans l'une et l'autre hypothèse; il y a cependant une différence capitale en effet en désignant par V la vitesse dans le milieu le plus dense, la théorie de l'émission nous donne pour indice de ce milieu $\frac{V'}{V}$, tandis que la théorie des ondulations nous donne $\frac{V}{V'}$, c'est-à-dire l'inverse. Il y a donc contradiction évidente, et l'une des théories doit être rejetée.

Supposons qu'il s'agisse du passage d'un rayon lumineux de l'air dans l'eau; on sait que l'on a $n = \frac{4}{3}$. L'hypothèse de l'émission nous donnerait donc $V > V'$, c'est-à-dire que la vitesse de la lumière serait plus grande dans l'eau que dans l'air. Or il n'en est rien; l'expérience a été faite sur le Conseil d'Orago par la méthode des miroirs tournants (voir la dernière leçon) et l'on a trouvé que la vitesse de la lumière dans l'air est environ les $\frac{4}{3}$ de la vitesse dans l'eau. D'où l'on conclut que le phénomène de la réfraction conduit à un résultat incompatible avec la théorie de l'émission et au contraire conforme à la théorie des ondulations.

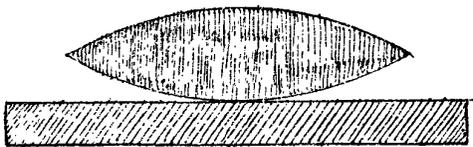
Ses études ultérieures nous montreront que cette théorie est toujours en concordance avec les phénomènes observés.

Il résulte de l'hypothèse des ondulations qu'un rayon lumineux devra être considéré comme un système vibratoire à mouvement permanent, analogue aux colonnes cylindriques en acoustique: le rayon de lumière doit donc posséder une constitution périodique dans le temps et dans l'espace; et il est impossible que cette constitution périodique ne se traduise pas par des phénomènes périodiques.

C'est ce que nous allons rechercher:

Le premier phénomène de ce genre a été découvert par Newton: c'est le phénomène des anneaux colorés: Newton fut amené à cette découverte par l'observation des couleurs très-vives qui se produisent sur les bulles de savon dont l'épaisseur est excessivement faible.

Il se proposa de reproduire le phénomène d'une manière qui permit de mesurer l'épaisseur de la couche. Il plaça dans ce but une lentille de grand rayon sur un plan de verre. Il aperçut alors autour du point de contact une série d'anneaux colorés d'une manière analogue. Si l'on ajoute une goutte d'eau entre les deux surfaces on obtient des colorations de même nature.



Newton reconnut que c'est la minceur de la lame d'air ou d'eau qui produit cette coloration et que toutes les fois qu'un corps transparent quelconque a une épaisseur très faible il produit le même phénomène. Pour les solides on peut considérer les fragments d'une boule de verre soufflée brusquement.

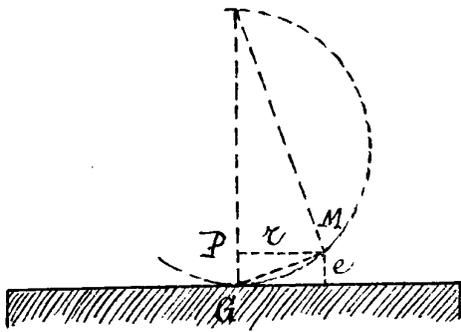
Newton étudia ce phénomène et en détermina les lois : la première fois qu'il put s'agir de déterminer l'épaisseur, pour cela il employa une surface sphérique dont le rayon de courbure est connu. (On mesure actuellement cet élément au moyen du spectromètre). Pour avoir l'épaisseur au point M, on commence par déterminer le point de contact (centre des anneaux colorés). On a la relation.

$$r^2 = e(2R - e) = 2Re - e^2$$

r est le rayon de l'anneau considéré.

Or, e est très-petit (quelques millièmes de millimètre) on peut donc négliger e^2 et il vient :

$$e = \frac{r^2}{2R}$$



Lois expérimentales déduites des expériences de Newton :

1^o Les anneaux colorés doivent leur irisation à la superposition d'une infinité de systèmes d'anneaux correspondants aux différentes couleurs simples dont la lumière blanche est composée.

2^o En observant les anneaux produits par une lumière monochromatique on remarque : que chaque couleur simple donne un système d'anneaux alternativement sombres et brillants qui suivent les lignes d'égale épaisseur de la lame mince.

Ces lignes ne sont donc pas nécessairement circulaires, dans le cas où la surface courbe n'est pas sphérique.

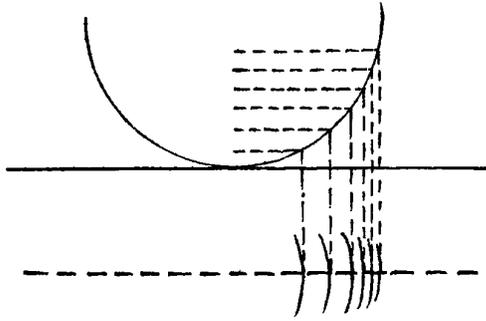
L'expérience des anneaux colorés peut se faire simplement par la juxtaposition de deux morceaux de verre à vitres, dont les surfaces sont toujours fort irrégulières il n'y a alors qu'un petit nombre de points en contact, autour desquels se produisent les lignes colorées, affectant tantôt une forme elliptique, tantôt hyperbolique suivant les lignes d'égale épaisseur.

3^o Pour une même couleur simple, les anneaux successifs observés normalement à la lame mince, correspondent à des épaisseurs

variant en progression arithmétique. Nous reviens plus loin que la raison de cette progression est environ $\frac{1}{4}$ de millièmes de millimètre.

Aussi ne doit-on pas s'étonner des perturbations apportées dans le phénomène par la présence d'un grain de poussière.

Si le contact est parfait, et si l'on observe les anneaux par réflexion, on observe au centre une tache noire et les épaisseurs des anneaux obscurs successifs sont proportionnelles à la série des nombres pairs 0, 2, 4,

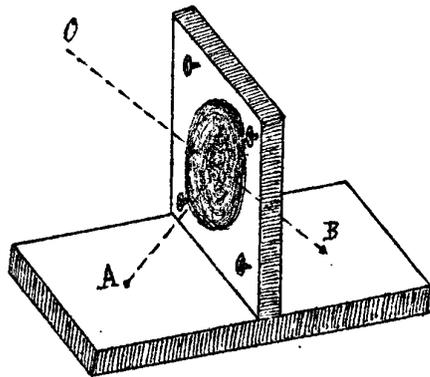


6, 8, ... On les appelle Anneaux réfléchis.

Newton a reconnu que ces mêmes lames minces donnent par transparence des anneaux mais plus pâles, leur centre est blanc, on les appelle : anneaux à centre blanc, ou Anneaux transmis.

Ces deux systèmes d'anneaux se correspondent clair à sombre et réciproquement ; dans les anneaux transmis les épaisseurs des anneaux obscurs se succèdent comme la série des nombres impairs, 1, 3, 5, 7, 9, ...

Arago a imaginé une disposition simple pour montrer que ces anneaux sont complémentaires ; La lentille maintenant par son vis de réglage contre le plan de verre est placée verticalement



Le plan horizontal inférieur de l'appareil est recouvert de papier blanc, si l'on place l'œil en O de manière à regarder la lentille sous une inclinaison de 45° , on reçoit alors à la fois de la lumière envoyée par chacune des plages A B, l'une par réflexion, l'autre par transmission. Si ces deux plages A et B sont également éclairées on ne voit rien, mais si l'on vient à recevoir B d'un carton noir on aperçoit des anneaux

réfléchis produits par la lumière A ; au contraire si l'on recourt à d'un carton noir, on aperçoit les anneaux transmis provenant de la lumière B.

4^o Les anneaux formés sur une lame mince avec divers rayons simples, sont d'autant plus étroits que les rayons sont plus réfrangibles. Ainsi les anneaux produits par la lumière sont plus larges.

5^o Les diamètres des anneaux colorés de même ordre sont en raison inverse des racines carrées des indices de réfraction de la lame mince.

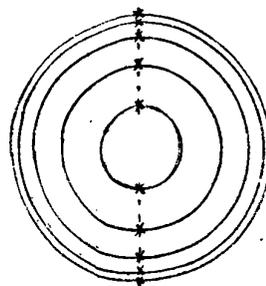
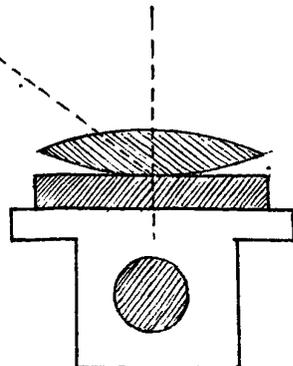
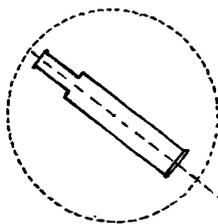
Ainsi si l'on place entre les deux lames de verre divers liquides, par exemple : l'eau dont l'indice est $\frac{4}{3}$, la benzine $\frac{3}{2}$, le sulfure de carbone 1.67, on voit que les diamètres des anneaux sont dans les rapports $\sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{1}{1.67}}$.

6^o Pour une incidence oblique, les anneaux primitivement circulaires paraissent elliptiques par un effet de perspective. Les diamètres homologues vus en vraie grandeur croissent comme l'inverse de la racine carrée du cosinus de l'angle d'incidence.

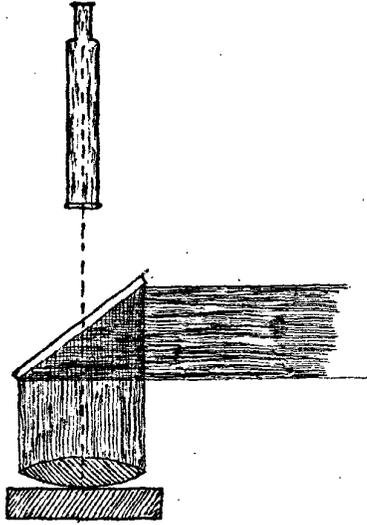
Les anneaux vus normalement sont plus petits que dans toute autre position.

Pour mesurer les diamètres des anneaux. Newton employait le compas, mais depuis on a imaginé une méthode beaucoup plus précise (due à de la Provostaye et Desains)

Supposons que l'on dirige une lunette fixe sur le système de lentilles offrant les anneaux, placée sur la plate-forme d'une machine à diviser et éclairée par une lumière monochromatique. On fera tourner la vis de manière à amener successivement chaque anneau coloré à former son image tangentielllement au fil vertical du réticule de la lunette. Le nombre de tours et fractions de tours nous donnera le rayon de chaque anneau, si l'on veut en même temps vérifier la 6^o loi ci-dessus, on ajoutera à la lunette un limbe gradué qui donne l'inclinaison de la lunette, et par suite l'angle d'incidence du rayon visuel, en supposant que la plate-forme soit parfaitement horizontale.



Pour observer sous l'incidence normale on peut adopter le dispositif suivant; la lumière d'une source lumineuse quelconque tombe sur une glace sans tain inclinée à 45^o.



qui la renvoie sur la lame mince, on dirige alors une lunette de manière à observer à travers la glace, sans tain.

Pour diriger la lunette bien normalement à la lame mince on emploie la disposition usitée en astronomie; on enlève la glace et la lentille en laissant seulement la lame mince, et l'on dispose la lunette de manière que l'image des fils ou réticule obtenue par réflexion sur la lame de verre vienne se faire exactement sur les fils ou réticule.

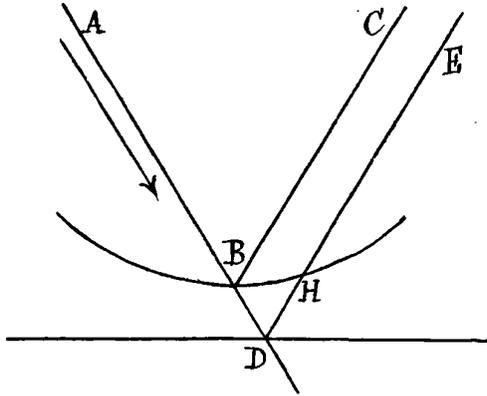
15^e Leçon.

Ces phénomènes des anneaux colorés témoignent que la lumière a une constitution périodique:

En effet: rappelons-nous comment on a défini la constitution d'une corde vibrant transversalement, ou d'une colonne vibrant longitudinalement: On a vu que la courbe représentative de l'état du corps en mouvement est périodique dans le temps et dans l'espace, et qui produit une translation de tout le système des déplacements: Nous avons appelé T la période dans le temps, et $\lambda = aT$ la période dans l'espace.

Imaginons qu'on puisse supposer sur la même corde deux mouvements identiques: si les phases initiales sont différentes d'un nombre pair de demi-longueurs d'ondes les amplitudes se superposent, si la différence est un nombre impair de demi-longueurs d'onde, les amplitudes égales et contraires en chaque point se détruisent complètement et il y aura interférence des sons. (Voir ci-dessus: 8^e Leçon)

Young a expliqué les anneaux colorés par des mouvements vibratoires identiques à ceux qui produisent le son, et il a montré qu'il y a dans ce phénomène tous les éléments pour avoir la superposition de ces mouvements vibratoires.

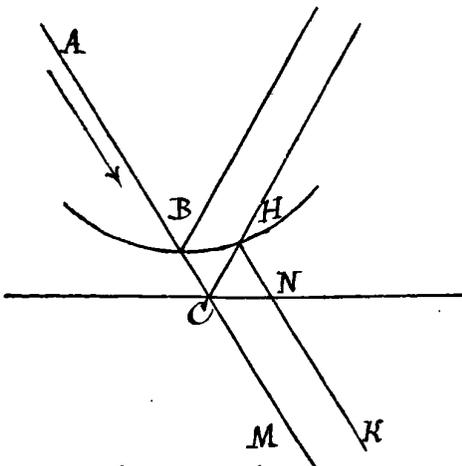


Considérons un rayon AB tombant sur une lame mince : en arrivant à la surface au point B , le rayon se partage ; une partie de la lumière se réfléchit en BC , l'autre partie pénètre dans la lame mince et arrive en D sur la seconde face. Soit une partie du rayon traverse, l'autre partie est réfléchi en DE , et comme les plans tangents aux deux faces en B et D sont peu inclinés l'un sur l'autre, les rayons réfléchis BC, DE sont

sensiblement parallèles et l'œil les recevra simultanément. Ces deux rayons nous donnent donc deux mouvements vibratoires issus de la même source, de même période, mais de phase différente : Soit e l'épaisseur de la lame au point B , si je suis presque normal à la lame mince, la différence de phase sera sensiblement $2e$, c'est-à-dire le chemin B, D, H .

Si l'on a $2e = 2n \frac{\lambda}{2}$ il y aura superposition des amplitudes et augmentation d'éclat.

Si au contraire $2e = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$ il y aura destruction des amplitudes et absence de lumière.



Considérons donc les points pour lesquels l'épaisseur de la lame mince varie en progression arithmétique de raison $\frac{\lambda}{4}$, alors les quantités $2e$ ou phases initiales seront égales alternativement à un nombre pair ou impair de fois $\frac{\lambda}{2}$ on obtiendra donc ainsi une série d'anneaux concentriques (circulaires si la surface est sphérique) alternativement obscurs et éclairés.

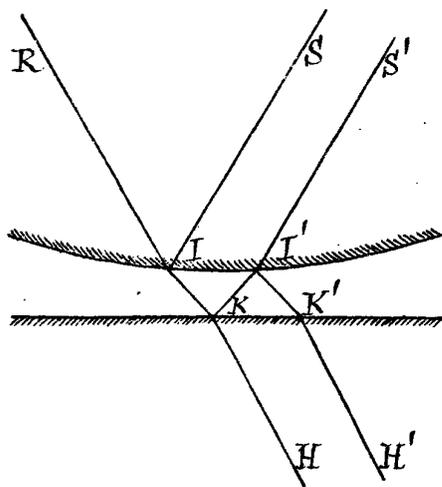
On explique d'une manière analogue la formation des anneaux transmis : Le rayon AB pénètre dans la lame mince ; il se divise au point C : une partie de la lumière traverse la surface et continue sa route en CM ,

L'autre partie se réfléchit et arrive en H ou elle subit une seconde réflexion et revient dans la direction HK sensiblement parallèle à CM. Dans ce cas la différence des phases initiales sera encore $2e$ ou CHN . On observera donc encore une série d'anneaux alternativement clairs et obscurs et dont les rayons sont égaux à ceux des anneaux réfléchis.

Il est facile d'expliquer pourquoi les anneaux transmis sont plus pâles que les rayons réfléchis : Dans ceux-ci en effet les deux rayons BC, HE qui se superposent ont subi chacun une réflexion, il auront donc sensiblement la même intensité, et par suite dans les anneaux obscurs résultants les deux lumières se détruiront entièrement et ces anneaux seront complètement noirs.

Dans les anneaux transmis, au contraire, l'un de ces rayons CM arrive à l'œil directement tandis que l'autre NK a subi deux réflexions qui atténuent considérablement son intensité. Par suite dans les anneaux obscurs ces deux intensités inégales ne peuvent se détruire complètement et ces anneaux conserveront toujours un peu de lumière, qui les rend plus pâles que les précédents.

Nous avons vu comment Young en assimilant la constitution des rayons lumineux à celle des ondes sonores, explique la formation des anneaux colorés réfléchis ou transmis. Un rayon tombe sur une



lame mince d'air comprise entre un plan de verre et une lentille sphérique de grand rayon ; une partie se réfléchit sur la face supérieure de la lame, et suit le chemin IS ; une autre pénètre dans la lame d'air rencontre le plan de verre et se subdivise à son tour en deux parties, l'une pénètre dans la lame de verre, l'autre se réfléchit sur elle, suit les chemins KI'S' et KIK'H. Les deux rayons IS, I'S' qui sont très-rapprochés produisent sur la rétine une impression unique et

si la différence géométrique des chemins parcourus par les deux rayons à partir du point I est égale à un nombre pair ou impair de demi-longueurs d'onde, leurs effets s'ajoutent ou s'annulent et on obtient l'impression d'un anneau clair ou obscur ; le même raisonnement s'applique aux rayons KH, K'H'.

Une difficulté se présente : Si l'on suppose que l'épaisseur de

la lame d'air au point I diminue indéfiniment la différence des chemins parcourus par les deux rayons diminue en même temps, et quand cette épaisseur devient nulle, cette différence est nulle - Les deux rayons IS, IS' sont alors en parfaite concordance, on est dans le cas de deux ondes sonores parallèles de même période et de même phase; leurs effets doivent donc s'ajouter, par suite le centre des anneaux réfléchis doit être clair comme le centre des anneaux transmis: l'expérience montre qu'il est noir.

Cette grave difficulté a été expliquée au moyen d'une hypothèse que Young a faite en se fondant sur l'analogie avec les phénomènes des tuyaux sonores.

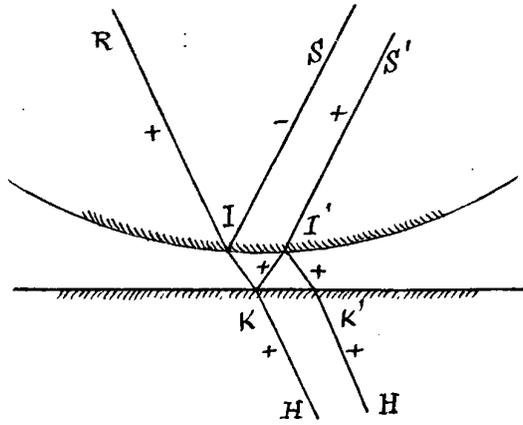
En étudiant les mouvements des tranches formant une colonne gazeuse, nous sommes arrivés à cette conclusion que le mouvement le plus général de ces tranches peut se rapporter au mouvement résultant de deux ondes de même période se propageant en sens contraire avec des vitesses égales. Il en résulte que dans un tuyau ouvert ou fermé, l'onde directe doit se réfléchir à l'extrémité du tuyau d'une manière qu'il se produise une onde rétrograde.

L'analyse faite précédemment de ces mouvements a prouvé que l'effet du fond d'un tuyau est de modifier l'onde réfléchie de deux manières différentes suivant que le tuyau est ouvert ou fermé. La différence entre ces deux modifications équivaut à un déplacement de l'onde réfléchie d'une demi-longueur d'onde: en effet dans le tuyau fermé le fond du tuyau est fermé par un nœud, dans le tuyau ouvert par un ventre.

Young a appliqué ces considérations aux rayons lumineux. Quand un rayon lumineux se réfléchit sur un milieu moins réfringent que celui où il se meut il assimile l'onde réfléchie à celle réfléchie sur le fond d'un tuyau ouvert. S'il se réfléchit sur un milieu plus réfringent que celui où il se propage, il l'assimile au cas du tuyau fermé; En sorte que deux rayons réfléchis dans ces deux cas diffèrent d'une demi-longueur d'onde.

Reprenons la figure qui nous a donné le trajet des rayons réfléchis dans les anneaux réfléchis et transmis nous voyons que le rayon IS se réfléchit sur un milieu moins réfringent que le verre; le rayon IK se réfléchit sur le verre, plus réfringent que l'air de même que KI et IS,

Si l'on considère le centre des anneaux, c'est-à-dire le point où l'épaisseur de la lame s'annule en I, les ondes réfléchies IS et IS' bien que n'ayant aucune différence de marche géométrique due à l'épaisseur de la lame d'air différeront d'une demi-longueur d'onde s'annuleront et on aura un point noir; KH et K'H différeront de

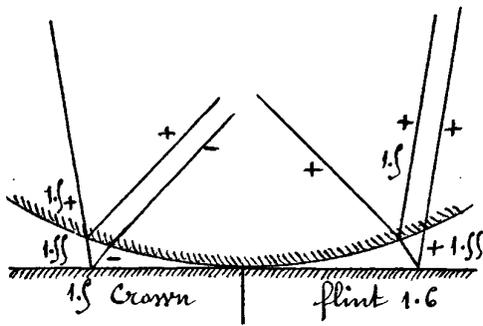


Deux demi-longueurs d'onde s'ajouteront, et l'on aura un point clair: les anneaux réfléchis auront donc leur centre noir et les anneaux transmis leur centre blanc.

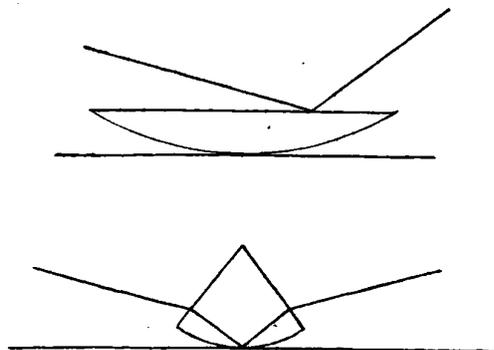
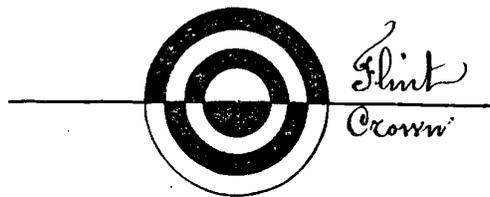
D'après l'hypothèse de Young, si la lame mince a un indice de réfraction intermédiaire entre ceux de la lame et de la lentille faites alors de verres inégalement réfringents, les anneaux réfléchis doivent avoir un centre blanc, comme on

peut le vérifier facilement d'après la construction précédente.

Une expérience de Young justifie cette conclusion. On prend une lentille en crown dont l'indice est 1,5 et une plaque formée de deux rectangles accolés, l'un de crown l'autre de flint dont l'indice est 1,6,



et l'on s'arrange de manière que le point de contact ait lieu sur la ligne de séparation des deux plaques. Quand la lame interposée n'est que de l'air, les anneaux réfléchis ont un centre noir; si l'on interpose entre la lentille et la lame une goutte d'un mélange en parties égales d'essences de girofle et de lavande dont l'indice de réfraction est 1,55, on obtient des anneaux dont le centre est blanc dans la moitié correspondant au flint et noir dans la partie correspondante au crown.



Dans cette expérience, au lieu de prendre une lentille plane convexe sur laquelle un rayon incident trop oblique se réfléchit presque totalement et par suite ne produit pas d'anneaux, on se sert d'un prisme dont l'une des faces au lieu d'être plane a une forme sphérique.

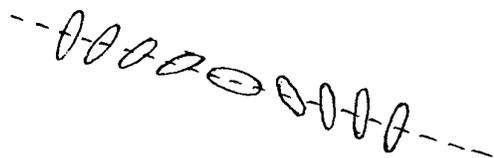
Quand Newton découvrit le phénomène des anneaux colorés, il fut obligé de recourir à une constitution périodique du rayon lumineux pour l'expliquer.

Théorie des accès. -

Il fit deux hypothèses additionnelles :

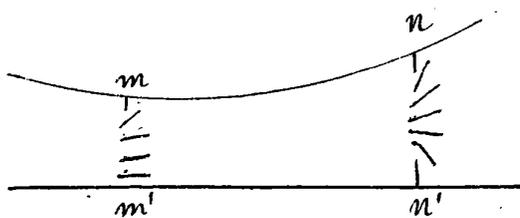
- 1°. les molécules lumineuses sont allongées ;
- 2°. elles sont douées d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe passant par leur centre de gravité et perpendiculaire à la direction d'un rayon lumineux.

On peut se représenter les différentes positions d'une molécule lumineuse sur sa trajectoire comme le montre la figure et l'on voit que la molécule repasse par les mêmes positions relatives au bout d'un demi-tour.



Si elle se présente de front elle rebondit sur la surface et se réfléchit. C'est l'accès de facile réflexion.

Prenez les anneaux réfléchis sous l'incidence normale. Une



molécule m se présente dans l'accès de facile transmission ; si l'épaisseur de la lame est telle que la molécule arrivée en m' ait accompli une demi-révolution, elle se trouve alors dans l'accès de facile réflexion, revient sur ses pas et ressort en m ; il se produira

donc un anneau clair. Si l'épaisseur est double, une molécule n arrivant dans l'accès de facile transmission, se trouve en n' dans le même accès, traverse la lame, et il se produit un anneau obscur. On voit que pour l'épaisseur nulle, on doit avoir un point noir.

Cette théorie est en contradiction avec les faits. Nous avons parlé que des molécules en accès de facile transmission ; mais il arrive à leur suite dans l'accès de facile réflexion, et les anneaux obscurs devraient être lavés de blanc ; le centre des anneaux devrait avoir un certain éclat, et l'expérience prouve que sous l'incidence normale, il est rigoureusement noir.

Enfin la théorie de Newton ne tient pas compte de la nature de la lame mince ; les anneaux réfléchis devraient toujours avoir

un centre, alors que l'expérience d'Young montre que dans des circonstances spéciales, il peut être clair.

Nous ne parlerons plus désormais de la théorie de l'émission.
Phénomènes d'interférence de la lumière. -

C'est à Fresnel qui on doit d'avoir mis hors de doute les principes sur lesquels s'est appuyé Young pour expliquer le phénomène des anneaux colorés, à savoir :

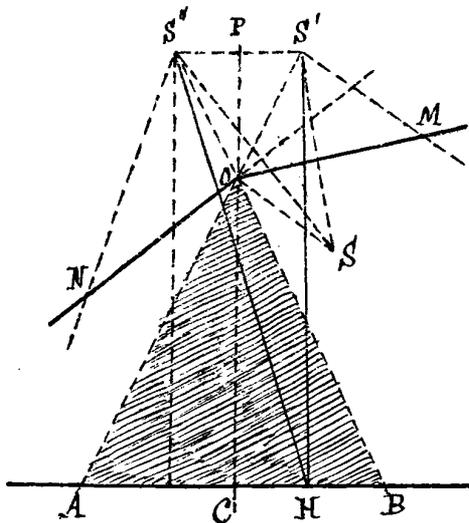
1^o Action réciproque de deux rayons lumineux.

2^o Hypothèse additionnelle sur le signe de la réflexion.

Le premier principe paraît un paradoxe. Si la différence de phase de deux rayons est $\frac{1}{2}$ ces rayons doivent s'annuler ; de la lumière ajoutée à la lumière, produit donc dans certains cas de l'obscurité. Le phénomène des anneaux colorés en est une preuve ; Fresnel l'a démontré d'une façon directe et rigoureuse par l'expérience des deux miroirs.

Expérience des deux Miroirs.

Deux miroirs formés chacun d'une lame de verre parfaitement polie, sont entre eux un angle voisin de 180° . Soient OM, ON ces deux miroirs ; S un point lumineux. Les deux images S' et S'' sont identiques et on peut les considérer comme deux sources de lumière vibrant synchroniquement.



La partie OAB du plan perpendiculaire à l'arête commune des deux miroirs, recevra à la fois les rayons lumineux qui semblent émaner des points S' et S'' ; elle a pour bissectrice, la perpendiculaire abaissée du point O sur $S'S''$ puisque le triangle $OS'S''$ est isocèle. Les rayons qui émanent des points S' et S'' arrivent en un point de la ligne OC , ont une différence géométrique de chemin nulle et vibrent synchroniquement.

Si nous considérons un point H situé entre la ligne OC et la ligne OB situé sur une perpendiculaire CB

élevée en C sur OC à une distance d de $S'S''$, et que nous mesurons les rayons $S'H$, $S''H$ aboutissant à ce point, on aura en posant $S'S'' = 2a$, $CH = x$.

$$S''H = \sqrt{(a+x)^2 + d^2}$$

$$S'H = \sqrt{(-a+x)^2 + d^2}$$

et par suite la différence géométrique δ des chemins $S'H$ et $S''H$, est

$$\delta = \sqrt{(a+x)^2 + d^2} - \sqrt{(-a+x)^2 + d^2}$$

$$\delta = \frac{(a+x)^2 + d^2 - [(-a+x)^2 + d^2]}{\sqrt{(a+x)^2 + d^2} + \sqrt{(-a+x)^2 + d^2}}$$

et négligeant le carré de $a+x$ vis à vis de d^2

$$\delta = \frac{4ax}{2d} = \frac{2ax}{d}$$

Si δ est égal à un nombre pair de $\frac{\lambda}{2}$, il y a concordance dans les vibrations, et on a une image ²claire; si δ est égal à un nombre impair de $\frac{\lambda}{2}$, il y a discordance par suite les rayons s'annulent, et on a une image noire.

$$\text{Posons : } \frac{2ax}{d} = m \frac{\lambda}{2}$$

m étant un nombre entier pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, etc.

$$\text{Nous aurons : } x = m \frac{\lambda d}{4a}$$

Pour une même radiation λ , d et a sont constants: m seul est variable. Pour les valeurs paires de m , on a duplication d'intensité; pour les valeurs impaires intensité nulle.

Si l'on considère des plans passant par $S'S''$ et leurs intersections avec le plan mené par AB perpendiculairement à OC , en répétant le raisonnement précédent, on voit que le lieu des points situés dans ce dernier plan et tels que la différence de leurs distances à S' et S'' soit constante, et égale à une quantité donnée, est l'intersection de ce plan avec un hyperboloïde de révolution à deux nappes ayant $S'S''$ pour axe transverse: on aura donc dans le plan AB des franges colorées alternativement sombres & claires symétriques par rapport

à une bande centrale claire et qui ne seront autres que des arcs d'hyperbole sensiblement rectilignes si la distance PC est suffisamment grande.

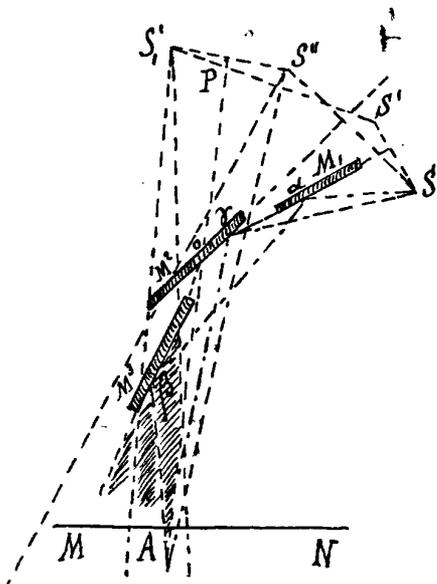
La frange claire commune à toutes les couleurs est dite la frange centrale.

L'hypothèse additionnelle d'Young, à savoir que la réflexion sur un milieu plus réfringent ajoute un retard d'une demi-longueur d'onde, a été prouvée par Fresnel au moyen de l'expérience des trois miroirs.

Expérience des trois miroirs.

Fresnel a cherché à obtenir deux sources identiques, mais dont l'une ait subi une réflexion de plus que l'autre; si l'hypothèse de Young est exacte, et si la marche des rayons est la même on devra avoir le phénomène complémentaire de celui des deux miroirs c'est-à-dire une frange centrale noire: en effet on doit ajouter $\frac{\lambda}{2}$ à la marche géométrique du rayon qui n'a subi qu'une seule réflexion & $\frac{\lambda}{2}$ à la marche de celui qui a subi une double réflexion. La différence entre les marches géométriques des rayons aboutissant aux différents points de la droite POA sera donc $\frac{\lambda}{2}$ et par suite les deux rayons interfèrent et produisent une frange noire.

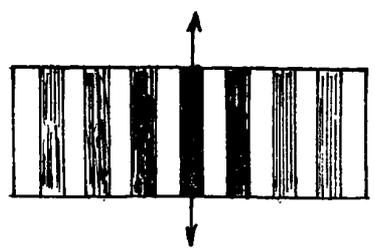
C'est ce que vérifie l'expérience, le dispositif est le suivant:



Deux miroirs $M_1 M_2$ dont l'intersection est en O dans le plan du troisième miroir M_3 . Un rayon $S\alpha\beta A$ tombe sur le premier miroir M_1 et arrive au point A après une seconde réflexion en β sur le miroir M_3 . Un autre rayon $S\gamma A$ arrive en A après une seule réflexion sur le miroir M_2 . Si l'on place en A un tableau blanc MN les deux rayons interfèrent et produisent une raie obscure centrale. On obtient ainsi des franges

complémentaires de celles obtenues dans l'expérience des deux miroirs (analogie avec les anneaux colorés à centre blanc et à centre obscur).

On observe ces franges au moyen d'un oculaire achromatique et l'on remarque qu'elles sont produites avec de la lumière blanche la frange centrale est noire : les autres franges sont d'ailleurs symétriquement colorées par rapport à la ligne médiane.



On pourrait faire les expériences précédentes en opérant dans un milieu liquide dont l'indice de réfraction est plus grand que

celui du verre, et l'on retrouverait comme dans les expériences de Young sur les anneaux colorés, des franges à centre blanc.

16^e Leçon.

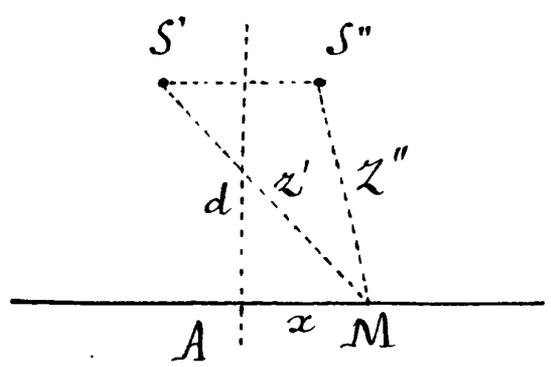
Mesure des longueurs d'onde. — L'expérience des 2 miroirs à fentes à Fresnel de mesurer avec exactitude la longueur d'onde des différentes radiations ou couleurs qui constituent la lumière.

Reprenons en effet le calcul indiqué dans la dernière Leçon : nous avons deux sources identiques dont le mouvement vibratoire commun est représenté d'une manière générale

par

$$U = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right)$$

ce mouvement émané de chaque source parvient au point M situé à la distance Z au bout d'un temps $\theta = \frac{Z}{V}$. V étant la vitesse



De propagation de la lumière, de sorte qu'en M le mouvement vibratoire est le même que celui de la source à l'époque $t - \theta$. c'est-à-dire

$$u = b \sin 2\pi \left(\frac{t - \theta}{T} + \varphi \right) = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{z}{VT} \right) = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{z}{\lambda} \right)$$

en posant $\lambda = VT$, λ étant la longueur d'onde du mouvement vibratoire de période T .

Le point M reçoit à la fois les mouvements des deux sources S' S'' situées aux mêmes distances z' , z'' , on aura donc d'après le principe de la superposition des petits mouvements : pour le mouvement du pt. M

$$u = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{z'}{\lambda} \right) + b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{z''}{\lambda} \right)$$

$$u = 2b \cos 2\pi \left(\frac{z' - z''}{\lambda} \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{z' + z''}{2\lambda} \right)$$

C'est un mouvement vibratoire de même nature que celui des deux sources, mais dont l'amplitude est égale à $2b \cos 2\pi \frac{z' - z''}{\lambda}$ c'est-à-dire dépend de la position du point M, ou de la différence de marche $z' - z'' = \delta$. Il en résulte que l'intensité lumineuse au point M sera :

$$I = 4b^2 \cos^2 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

Cette intensité varie de $4b^2$ à zéro ; l'expression ci-dessus représente donc la loi d'intensité du champ des franges ; on retrouve en effet les conditions déjà indiquées : l'intensité sera $4b^2$ (quadruple de l'intensité de la source) lorsqu'on aura

$$\cos^2 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 1 \text{ ou } 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = i\pi \text{ } i \text{ étant pair}$$

$$\delta = i \frac{\lambda}{2} \text{ } i \text{ pair}$$

elle sera nulle lorsque i sera impair.

Or, on a calculé dans la précédente leçon δ

$$\delta = \sqrt{(a+x)^2 + d^2} - \sqrt{(a-x)^2 + d^2} = \frac{2ax}{d} \text{ très approximativement}$$

La distance d'une frange claire à la frange claire centrale sera donc donnée par la condition

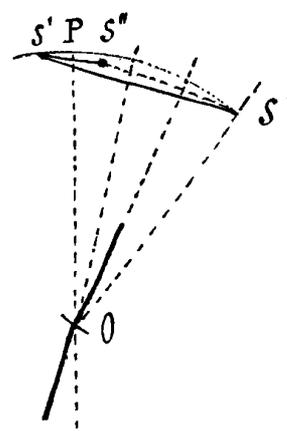
$$\frac{2ax}{d} = \frac{i\lambda}{2} \text{ } i \text{ étant pair}$$

Or on conclut la valeur de la longueur d'onde λ

$$\lambda = \frac{4ax}{i}$$

Il suffit de compter le nombre de franges claires mesurées pour connaître i et de mesurer d, a et x .

Mesure de d . — La source S et les deux images $S'S''$ étant sur le même centre O est l'intersection des deux miroirs, la distance d ou PA est sensiblement égale à $OS'' + OA = OS + OA$

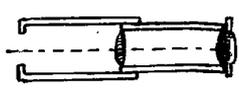
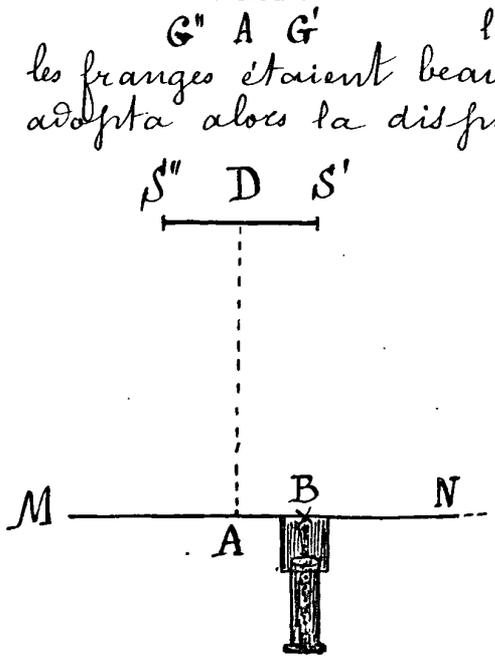


Mesure de a : Fresnel plaçait sur la ligne médiane une aiguille dont la pointe G formait deux ombres G' et G'' dont il mesurait la distance $G'G''$. Connaissant d et la distance $GA = h$, les deux triangles semblables $S'S''G$ $G'G''G$ donnent

$$\frac{a}{d} = \frac{G'G''}{h}$$

Mesure de la distance x des franges.

Fresnel a d'abord projeté les franges sur un écran de verre dépoli, et en se plaçant derrière il mesurait les distances au moyen d'une loupe et d'un micromètre. Mais en enlevant l'écran de verre dépoli, il remarqua que les franges étaient beaucoup plus nettes et plus brillantes; il adopta alors la disposition suivante:



Soit un oculaire achromatique formé de deux lentilles montées dans un tube qui peut glisser dans un tube plus large portant un diaphragme et dans le plan de ce diaphragme, un réticule formé de fils croisés: On dispose le tirage de manière à voir distinctement le réticule. Cet oculaire est porté sur un chariot mobile au moyen d'une vis micrométrique parallèlement à la ligne MN

De manière que le plan du diaphragme et du réticule reste toujours dans le plan MN où se trouvait primitivement l'écran de verre dépoli. Il résulte de cette disposition que l'œil voit l'ébranlement lumineux au point B croisement des fils du réticule. On observe ainsi successivement les diverses franges aériennes, en déplaçant l'oculaire Fresnel. a pu obtenir les distances à $\frac{1}{100}$ de millimètre près; on a donc la valeur de x et par suite tous les éléments nécessaires pour le calcul des longueurs d'onde.

Résultats obtenus par Fresnel pour la longueur de l'onde dans les diverses couleurs

| | | | |
|-------------|-----|----------------------------|--|
| Rouge moyen | 620 | millionièmes de millimètre | |
| Orange | 589 | | (correspondant environ à la lumière du sodium) |
| Jaune | 571 | | |
| Vert | 521 | | |
| Bleu | 449 | | |
| Violet | 423 | | |

Ces valeurs doivent évidemment être les mêmes que celles auxquelles on fait allusion dans l'explication des anneaux colorés. Or Newton a mesuré ce qu'il appelait la longueur d'accès, c'est-à-dire la distance parcourue par les molécules lumineuses pendant une demi-rotation, une longueur d'accès doit donc correspondre à une demi-longueur d'onde. En doublant les nombres trouvés par Newton, on obtient les résultats suivants que l'on peut comparer aux précédents.

Pour le rouge extrême 648 millionièmes de millimètre
 ----- orange rouge ----- 596 -----

----- Violet extrême -- 409 -----

L'assimilation avec le mouvement vibratoire des sons est donc complètement démontrée avec toute l'exactitude désirable et de deux manières différentes (anneaux colorés, expérience de Fresnel).

Remarquons que l'on peut déduire de la longueur d'onde, la durée moyenne de la période oscillatoire du rayon lumineux; au moyen de la formule

$$\lambda = VT$$

Prenez la valeur de λ pour la partie moyenne de la

lumière blanche (jaune vert) cette valeur est 0.000500 approxi-
mativement

$$\text{On en déduit } T = \frac{\lambda}{V} = \frac{0.0005}{300.000.000} = \frac{1}{6.10^{14}}$$

Si l'on prend l'inverse on aura le nombre de périodes par seconde :

$$N = 6.10^{14} = 600 \text{ Billions de vibrations}$$

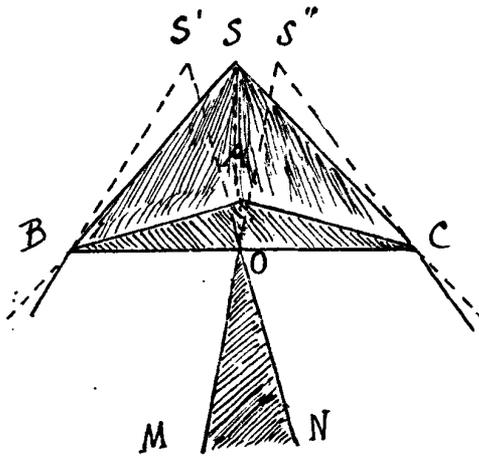
Si l'on n'était pas certain de l'exactitude des valeurs de λ et V on pourrait s'étonner d'un tel résultat, mais d'une part λ a été déterminé par deux phénomènes différents : (lameaux colorés, expérience de Fresnel), d'autre part V a été obtenu par des méthodes très différentes (méthode astronomique de Roemer, méthode de Fizeau, miroir tournant, etc. ---) on est donc forcé d'admettre ce nombre : N quelque grand qu'il puisse nous paraître au premier abord. Du reste, si l'on y réfléchit, ce résultat devient moins extraordinaire : Notre oreille en effet comporte des organes dont la délicatesse n'est pas infinie : or elle peut entendre des sons dont le nombre de périodes surpasse $100.000 = 10^5$ par seconde. Ce nombre est déjà considérable ; mais l'œil est beaucoup plus délicat que l'oreille, et la perception ne se fait pas de la même manière.

Généralité du mode de production des interférences. — Toutes les fois que deux faisceaux issus d'une même source se croisent sous un très petit angle, le même phénomène d'interférence se produit : des franges apparaissent ; la loi de leur écartement et celle de leur intensité sont les mêmes que dans le cas de deux miroirs ; il suffira de citer deux dispositifs qui permettent d'obtenir plus facilement les franges d'interférence que les miroirs de Fresnel ; car cette expérience des deux miroirs très simple au point de vue théorique, présente quelques difficultés pratiques.

Il faut avoir soin de faire coïncider les arêtes propres des miroirs avec la droite d'intersection des deux faces réfléchissantes ; sans cela les franges seraient rejetées hors du champ commun aux deux faisceaux. On fait en général tomber la lumière sous une incidence rasante, ce qui donne aux faisceaux lumineux une plus grande intensité et rend le moins appréciable les défauts de réglage.

On fait porter un des miroirs par une vis micrométrique et on opère par tâtonnement.

Pour éviter ces difficultés Fresnel a imaginé le biprisme qui se compose d'une lame de verre dont une des faces est formée de deux plans inclinés en biseau, mais formant avec la face opposée un angle très aigu. Soit S le point lumineux, le faisceau qui tombe sur la face AB est légèrement réfracté et semble issu du point S' le faisceau tombant sur la face AC est également réfracté et semble issu du point S'' . On a ainsi deux sources lumineuses comme dans le cas de deux miroirs et les deux faisceaux ont une partie commune MON .



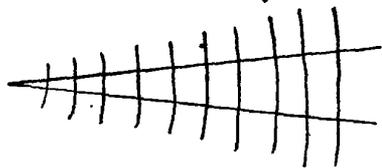
Ce procédé expérimental est le plus commode pour la manifestation des phénomènes d'interférence, mais il ne convient pas à la recherche des lois de ces phénomènes à cause de la complication qui résulte des deux réfractions, et de la diversité

des milieux que traverse successivement la lumière.

M. Billet a imaginé un autre dispositif à l'aide duquel les deux sources au lieu d'être virtuelles forment deux foyers réels. Il prend une lentille convergente d'environ $0^m 50$ de foyer et il la coupe suivant un diamètre à l'aide d'un trait de diamant en deux parties égales : si l'on sépare ces deux lentilles de façon à ce que les centres optiques des deux parties soient sur une droite perpendiculaire au plan de séparation, on reconnaît que les deux faisceaux convergents puis divergents ont une partie commune au delà des deux foyers réels, images de la source : dans cette portion commune on reconnaît des franges d'autant plus fines que les demi-lentilles sont plus écartées.

Propagation de la lumière.

Avant d'aborder la théorie de la propagation des ondes, il est nécessaire de revenir sur l'optique géométrique et de voir si cette théorie peut rendre compte des lois fondamentales établies par l'expérience.



La loi de propagation rectiligne de la lumière repose sur la notion du rayon lumineux. Or dans l'hypothèse des ondulations, le rayon est la limite d'un secteur conique

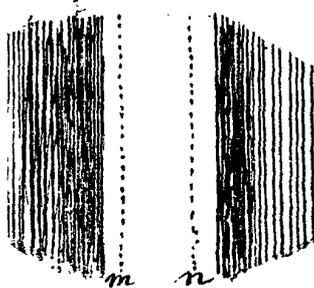
dont le sommet est au point lumineux.

Les ondes sont sphériques, mais si la source lumineuse est très éloignée elles pourraient être considérées comme planes. On conçoit donc très facilement la notion d'un faisceau lumineux mais on ne se fait pas une idée très nette d'un simple rayon; c'est qu'en effet cette conception du rayon lumineux infiniment mince n'a pas d'existence physique.

C'est ce que l'on démontre par l'expérience suivante qui tranche d'une manière décisive entre la théorie de l'émission et celle des ondulations.

Soit un faisceau de rayons parallèles; interceptons-le par un écran portant une fente mince formée par deux lames d'acier que l'on peut rapprocher à volonté. S'il y avait une série de molécules lumineuses suivant une trajectoire lumineuse, elles conserveraient leur mouvement quelque petite que fut la fente, et l'on aurait un faisceau parallèle dont la section varierait proportionnellement aux variations de la fente. L'expérience ne donne pas ce résultat.

Quand l'ouverture a une certaine largeur on obtient une bande lumineuse dont les bords possèdent diverses colorations, les bords de l'ombre ont aussi des franges colorées d'une teinte assez sombre. Si l'on rétrécit la fente, on voit d'abord apparaître deux raies sombres: on n'a une petite distance des bords de la bande claire, puis ces deux raies se confondent au centre et de part et d'autre



ou a des raies claires.

Si l'on reserve encore, on voit la lumière s'étaler de plus en plus en perdant rapidement de son éclat, au moment où la fente serait nulle si nos organes étaient assez délicats on observerait un épanouissement limite de 180° .

Faisons l'expérience inverse: interposons un fil ou un cheveu dans un faisceau lumineux:

L'ombre portée devrait avoir un diamètre égal à celui du fil: or il n'en est rien: on aperçoit deux ombres séparées par une raie brillante, et de chaque côté, une série de franges d'autant plus nombreuses que la lumière se rapproche plus d'être monochromatique. Ces phénomènes sont inexplicables par la théorie de l'émission, et doivent être attribués à une composition de mouvements vibratoires périodiques.

Ainsi il résulte de ce qui précède que:

- 1° il n'existe pas de rayon lumineux isolé,
- 2° il peut y avoir de la lumière dans les ombres,
- 3° il peut y avoir de l'ombre dans les parties qui géométriquement doivent être éclairées,
- 4° il se produit dans certains cas autour des ombres, des franges colorées,
- 5° Conclusion: La lumière ne se propage pas toujours en ligne droite.

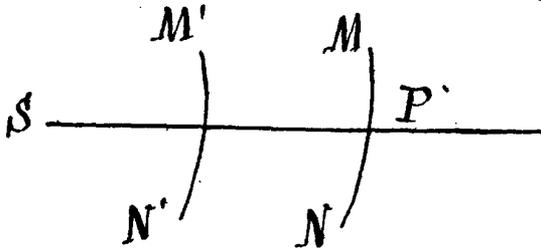
Ces perturbations causées dans les ombres ont reçu le nom de phénomènes de Diffraction.

17^e Leçon.

Analyse de la propagation des ondes. - Diffraction.

La théorie de propagation des ondes repose sur les deux principes suivants:

1^o Principe d'Huyghens. - Une onde quelconque isolée, c'est-à-dire le lieu des points vibrant synchroniquement peut être considérée au point de vue mécanique comme la résultante des mouvements vibratoires émanés des différents points d'une position antérieure quelconque de cette onde, chacun de ces points fonctionnant comme un véritable centre d'ébranlement.



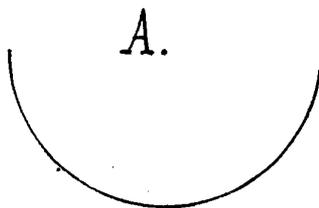
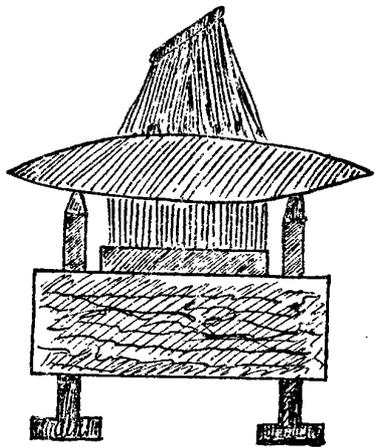
Ce principe est une manière d'expliquer la propagation des ondes : En effet, l'action de la source lumineuse : S ne se transmet au point : P de l'onde, MN que par l'intermédiaire des ondes telles que M'N' parties

de S à une certaine époque : Si l'on venait à supprimer l'action de la source S, on conçoit facilement que l'onde M'N' continuant la même série de vibrations, l'action sur le point P resterait la même. Le mouvement de ce point est donc le mouvement résultant de tous les mouvements envoyés par les divers éléments de l'onde : M'N'.

2^o Principe de Fresnel. - Les ondes lumineuses résultent de la propagation d'un mouvement vibratoire permanent qui reste identique à lui-même pendant un très grand nombre de vibrations, en d'autres termes : les ondes lumineuses sont en optique ce que sont en acoustique les sons musicaux soutenus.

Fresnel avait pu obtenir avec des miroirs ou des lames minces plus de 50 franges, ce qui constituait le phénomène d'interférence avec une marche de 50 ondulations. Fizeau a démontré que l'identité des ondes avait une bien plus grande durée. Il a produit des anneaux colorés avec une lame de 1 centimètre d'épaisseur et même davantage. Or, $\lambda = 0^m,005$ environ ; dans un centimètre il y aura donc 5000 vibrations. Pour faire l'expérience il employait une lentille bi convexe de très grand rayon ou même un simple plan de verre porté sur trois vis calantes permettant d'augmenter ou de diminuer l'épaisseur de la lame d'air. En éclairant avec une lumière monochromatique il a obtenu une très grande succession d'anneaux. Cette expérience

exige une lumière absolument simple, celle de la soude formée de deux notations distinctes introduit quelques difficultés. On emploie de préférence la flamme de l'alcool contenant en dissolution un sel de lithine, ou mieux encore l'étincelle électrique jaillissant entre deux pôles de *Challium* qui donne une lumière verte parfaitement monochromatique.



En opérant ainsi M. Fizeau a pu obtenir des anneaux colorés jusqu'à une épaisseur de deux centimètres pour la lame mince, ce qui prouve que les rayons après 100000 ondulations peuvent encore interférer. Mais le phénomène devient de moins en moins sensible lorsque l'épaisseur de la lame augmente.

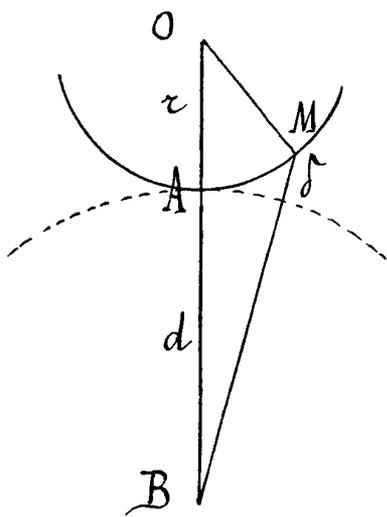
Nous allons faire l'analyse de la propagation d'une ^{onde} lumineuse; pour simplifier les calculs nous choisirons un cas qui nous ramène à la géométrie plane; nous prendrons pour source une ligne lumineuse; il est évident que les ondes sont cylindriques, et nous serons ramenés à étudier le mouvement dans un plan perpendiculaire à cette droite en prenant pour source dans ce plan un point lumineux A

Nous ferons de suite abstraction de ce point, en appliquant le principe de Huyghens; nous considérerons tout le mouvement lumineux comme émané d'une position antérieure de l'onde (on appelle onde le lieu des points qui vibrent synchroniquement, c'est-à-dire où la phase est la même: tous les points d'une même onde sont donc animés de mouvements vibratoires ayant même période, même amplitude et même phase.)

Nous appliquerons en outre le principe de Fresnel, en supposant que ce mouvement reste identique à lui-même pendant un grand nombre de périodes (environ 100000).

Il est nécessaire d'en la théorie des ondulations de ne pas considérer un point mathématique comme répandant du mouvement tout autour de lui; nous avons vu en effet dans

la dernière leçon qu'on ne peut pas amener un espace lumi-
-neux à être infiniment petit sans produire des phénomènes
secondaires. Comme confirmation de cette manière de voir,
nous verrons en effet que le rayon arbitraire de cette surface
s'éliminera dans le calcul.



Soit donc AM une onde lumi-
-neuse tous les points de cette surface
ont à chaque instant un mouvement
identique et communiquant ce mouve-
-ment à un point B;

Soit :

$$x = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right)$$

l'équation de ce mouvement.

Il nous faut composer tous les
mouvements qui arrivent à un
même instant t au point B; ils seront
partis à des instants différents des
divers points de l'onde; soit L la

distance MB. θ le temps employé à la parcourir avec la
vitesse V.

$$\theta = \frac{L}{V}$$

Réduisons ce temps en périodes

$$\frac{\theta}{T} = \frac{L}{VT}$$

VT est l'espace parcouru pendant une période de temps,
c'est une période de l'espace ou longueur d'onde λ .

$$\frac{\theta}{T} = \frac{L}{VT} = \frac{L}{\lambda}$$

Le mouvement est arrivé au temps t en B, mais comme
il a mis le temps θ à arriver, il est parti de A avec la valeur

$$x = a \sin 2\pi \left(\frac{t - \theta}{T} + \varphi \right) = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{L}{\lambda} \right)$$

Quant il arrivera au point B l'amplitude sera réduite,
donc le mouvement reçu par B de chaque élément de A de
MN au temps t sera de la forme

$$x = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{L}{\lambda} \right)$$

On point B je décris un cercle avec BP pour rayon.

(P est le pôle de l'onde par rapport à B); soit d cette longueur, AB sera égal à d , plus une certaine quantité que j'appelle δ ; soit de plus ω l'angle AOP;

$$\begin{aligned}(d+\delta)^2 &= (r+d)^2 + r^2 - 2(r+d)r \cos \omega \\ &= [(r+d)^2 + r^2 - 2r(r+d)] + 2r(r+d)(1 - \cos \omega) \\ &+ 2d\delta + \delta^2 = + 2r(r-d) \sin \frac{2\omega}{2}\end{aligned}$$

Nous vérifierons plus tard que les éléments dont l'influence est sensible au point B sont très voisins de P; je puis donc remplacer $\sin \frac{2\omega}{2}$ par $\frac{\omega^2}{4}$ à la 4^e puissance près de ω et négliger δ^2 .

$$\delta = \frac{r+d}{2rd} \omega^2 r^2 = \frac{r+d}{2rd} \rho^2$$

ρ étant la longueur de l'arc PA.

Tous les points tels que ρ soit égal à un nombre pair de demi-longueurs d'onde $2i \frac{\lambda}{2}$, enverront en B des mouvements concordants; on obtiendra donc les valeurs des arcs qui envoient des mouvements concordants avec le mouvement qu'envoie P en posant

$$2i \frac{\lambda}{2} = \frac{r+d}{2rd} \rho^2$$

$$\rho = \sqrt{\frac{r\lambda d}{r+d}} \sqrt{2i}$$

Au contraire les points qui enverront des mouvements discordants s'obtiendront en faisant λ égal à un nombre impair de demi-longueurs d'onde.

$$\rho = \sqrt{\frac{r\lambda d}{r+d}} \sqrt{2i+1}$$

En général on aura pour tous ces points la formule

$$\rho = \sqrt{\frac{r\lambda d}{r+d}} \sqrt{n}$$

Soit σ ce premier radical qui est constant pour les valeurs de ρ

$$\rho_1 = \sigma$$

$$\rho_2 = \sigma \sqrt{2}$$

$$\rho_3 = \sigma \sqrt{3}$$

$$\rho_n = \sigma \sqrt{n}$$

Les extrémités de ces arcs tendent à devenir équidistants ; la distance de la $(n-1)^e$ à la n^e

$$s_n - s_{n-1} = 6(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 6 \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ sensiblement.}$$

Deviens insensible quand n est suffisamment grand, et comme σ est très petit s est encore fort petit quand n est très grand ; donc au bout d'un arc très petit les points qui envoient des mouvements concordants et discordants sont les uns des autres à des distances extrêmement petites mais égales, car le rapport de deux distances consécutives est $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$ est rapidement égal à 1 : ces mouvements se déterminent donc mutuellement à partir d'une certaine limite assez rapprochée du pôle de l'onde.

Le mouvement au point B est donc fort complexe ; puisque les mouvements élémentaires sont tantôt concordants et tantôt discordants ; mais il suffit de considérer quelques éléments ; à partir d'une certaine distance ; si un élément envoie un certain mouvement, ils seront détruits par le mouvement discordant envoyé par l'élément contigu. Nous allons faire voir numériquement combien ces éléments tendent rapidement à devenir égaux ; prenons σ pour unité :

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= \sigma \sqrt{2} = 1,414 \\ s_3 &= \sigma \sqrt{3} = 1,7318 \\ s_4 &= \sigma \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

La longueur du premier élément

$$\begin{aligned} l_1 &= s_1 = 1 \\ l_2 &= s_2 - s_1 = 0,414 \\ l_3 &= s_3 - s_2 = 0,318 \\ l_4 &= s_4 - s_3 = 0,268 \end{aligned}$$

La différence entre l_2 et l_1 est 0,586, plus de la moitié du premier élément; la différence entre l_3 et l_2 n'est déjà plus que 0,05 de même

$$l_2 = 0,172$$

$$l_{10} = 0,144$$

la différence est 0,028
Considérons maintenant le 100^e élément

$$l_{99} = 0,0503$$

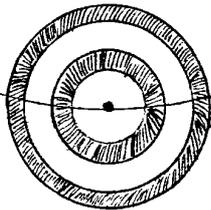
$$l_{100} = 0,0501$$

La différence n'est plus que 0,002 c'est-à-dire 2 fois la 1000^e partie du 1^{er} arc; on peut dès maintenant considérer ces arcs sinon comme négligeables du moins comme égaux, et cela à une bien petite distance de P, car 30 arcs égaux à $l_1 - l_2$ ($0,028 + 36 = 1,008$ reproduiraient juste le premier.

¹⁰ Calculons σ en supposant $l = d = 1^{\text{mètre}}$ et $\lambda = 500$ millions de millimètres

$$b = \sqrt{\frac{1000 \times 1000}{2000} \times \frac{500}{10000}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0^{\text{mm}} \frac{1}{2}$$

Si nous considérons une onde sphérique il faudra décrire du point P des cercles avec $b, b\sqrt{2}, b\sqrt{3}, \dots$ pour diamètres mais seulement jusqu'à 4 ou 5 fois le premier arc, c'est-à-dire 3^{mm} ; on voit du reste que c'est la loi des diamètres des anneaux colorés; la première plage enverra un certain mouvement au point B; la seconde ombree un mouvement discordant; la troisième un mouvement concordant; la quatrième ombree aussi, un mouvement discordant, etc



Pour vérifier cette théorie Fresnel eut l'idée de supprimer les parties discordantes, au moyen de petits écrans; mais l'expérience est très délicate dans le cas où nous sommes placés, il faudrait un écran dont le diamètre intérieur serait $f = 0 = 0^{\text{mm}} \frac{1}{5}$ et le diamètre extérieur $f = 0,1^{\text{mm}}$; si on dispose d'une chambre assez grande ou l'on puisse faire $r + d = 20$ mètres l'expérience est plus facile, $f = 2^{\text{mm}}$

$\lambda = 1^{mm}.6$. Fresnel a même construit un second écran pour supprimer la 2^e plage discordante. La vérification fut complète; quand il plaça le premier écran l'éclat de B augmenta beaucoup; quand il mit le deuxième il augmenta encore.

Ce calcul montre bien comment la lumière semble aller en ligne droite d'un point à un autre; en réalité il n'en est pas ainsi; mais comme le mouvement n'est trans-mis sur chaque onde que par des joints distants de λ de quelques dixièmes de millimètres, elle semble ne pas s'écarter de la ligne droite OAB .

Pour faire le calcul exact nous allons supposer que tous les mouvements élémentaires qui arrivent au point B sont parallèles et d'après le principe de Bernoulli ils s'ajoutent.

$$x = \sum a \sin \left(\frac{t}{T} + \varphi \right) = \sum a \left(\cos 2\pi \varphi \sin \frac{t}{T} + \sin 2\pi \varphi \cos \frac{t}{T} \right)$$

$$= \sin \frac{t}{T} \sum a \cos 2\pi \varphi + \cos \frac{t}{T} \sum a \sin 2\pi \varphi$$

Nous pouvons identifier le mouvement résultant à un nouveau mouvement pendulaire en posant

$$A \sin 2\pi \phi = \sum a \sin 2\pi \varphi$$

$$A \cos 2\pi \phi = \sum a \cos 2\pi \varphi$$

$$A^2 = \sum a^2 (\cos^2 2\pi \varphi + \sin^2 2\pi \varphi) + \sum 2aa' \begin{bmatrix} \sin 2\pi \varphi \cos 2\pi \varphi \\ + \sin 2\pi \varphi \cos 2\pi \varphi \end{bmatrix}$$

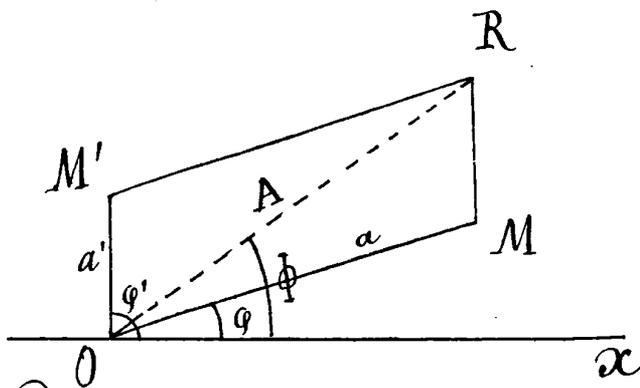
$$A^2 = \sum a^2 + 2 \sum aa' \cos \left(\frac{\varphi + \varphi'}{2} \right) 2\pi$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \phi = \frac{\sum a \sin 2\pi \varphi}{\sum a \cos 2\pi \varphi}$$

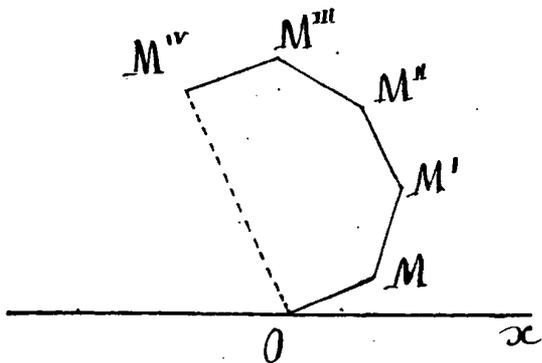
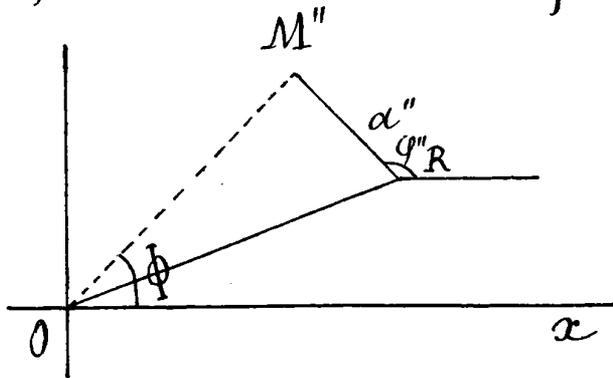
Ces équations constituent l'expression analytique de la loi de Fresnel. c'est ainsi que nous composerions des forces a, a', \dots faisant avec un axe les angles $2\pi \varphi, \dots$. Appliquons donc la construction géométrique que nous connaissons pour composer ces derniers.

Soient deux mouvements :

$$x = a' \sin \left(\frac{t}{T} + \varphi \right) \text{ et } x = a' \sin \left(\frac{t}{T} + \varphi' \right) \text{ à composer;}$$



Pour composer un troisième mouvement avec les deux premiers, je le composerais avec le mouvement résultant; cela reviendrait à porter à partir de R une droite



je trace un axe Ox et par le point O deux droites proportionnelles à a et a' et faisant avec Ox les angles $2\pi\varphi$ et $2\pi\varphi'$, je complète le parallélogramme et la diagonale est proportionnelle à l'amplitude résultante A et fait avec Ox l'angle $2\pi\Phi$.

égale à a'' et faisant avec Ox l'angle $2\pi\varphi''$; OM'' et $M''Ox$ seraient l'amplitude et la phase résultante.

De même pour un quatrième et ainsi de suite. Ainsi pour composer un certain nombre de mouvements, on formera un polygone dont les côtés seront les amplitudes et feront avec un axe Ox des angles égaux aux phases; la droite qui ferme le polygone OM'' est l'amplitude résultante et fait avec Ox un angle égal à la phase finale.

Inversement étant donné un mouvement pendulaire on

pourra toujours le décomposer en un nombre quelconque de mouvements analogues.

Remarquons que dans la composition de deux mouvements, si la différence de phase est $\frac{1}{4}$ le parallélogramme sera un rectangle, $\cos(\varphi - \varphi') 2\pi$ sera nulle et dans la valeur de l'amplitude résultante il n'y aura pas de double produit c'est ce qui a lieu en particulier quand on développe

$$x = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right) = a \cos \varphi \sin 2\pi \frac{t}{T} + a \sin \varphi \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

$$= a \cos \varphi \sin 2\pi \frac{t}{T} + a \sin \varphi \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{1}{4} \right)$$

Nous avons obtenu deux mouvements composés dont la différence de phase est $\frac{1}{4}$ en ce cas (*)

$$A^2 = a^2 + a'^2$$

Théorème : La quantité de mouvement d'un mouvement vibratoire est représentée par la même fonction que le déplacement, à un facteur $\left(\frac{2m\pi}{T} \right)$ près et en changeant d'origine de $\frac{1}{4}$ de période

$$x = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right)$$

$$m \frac{dx}{dt} = a \frac{m 2\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right)$$

Toutes les propriétés que nous trouverons s'appliqueront donc aussi bien aux quantités de mouvement et aux vitesses qu'aux déplacements eux-mêmes.

Théorème : Le carré de l'amplitude maximum est proportionnel à la force vive moyenne (ou intensité) du mouvement vibratoire

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left[\frac{2\pi a}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right) \right]^2$$

Il faut prendre la force vive moyenne pendant une période, c'est-à-dire depuis t jusqu'à $t+T$.

$$\frac{\int_t^{t+T} \frac{mv^2}{2} dt}{\int_t^{t+T} dt} = \frac{m}{2T} \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} \int_t^{t+T} \frac{1 + \cos 4\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right)}{2} dt$$

La deuxième partie de cette intégrale $\int_t^{t+T} \cos 4\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right) dt$ reprendra évidemment la même valeur aux deux limites

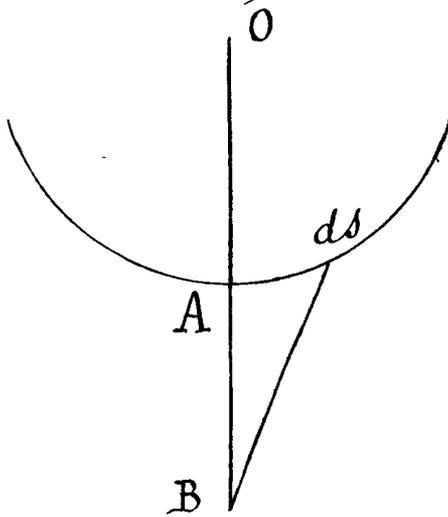
(*) Il est bon de rappeler ici ce qui a déjà été énoncé en acoustique relativement aux propriétés des mouvements vibratoires.

l'intégrale définie est nulle et il reste

$$\frac{m}{4T} \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} \int_0^{t-T} dt = \frac{m\pi^2}{T^2} a^2$$

Donc a^2 caractérise l'intensité du mouvement vibratoire.

Calcul des éléments du mouvement vibratoire envoyé au point B.



Nous allons appliquer tous ces principes à l'étude du mouvement du point B, un arc ds envoyé en B un mouvement périodique dont la phase est $\varphi - \frac{d+\delta}{\lambda}$.

Il est évident que l'amplitude de ce mouvement est proportionnelle à ds , à l'amplitude au point ds et à un certain facteur h , constante que nous étudierons plus tard; il arrivera donc en B une infinité de mouvements élémentaires de la forme

$$h a ds \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{d+\delta}{\lambda} \right)$$

Nous admettrons que tous ces mouvements élémentaires sont parallèles; le mouvement résultant en sera la somme algébrique que

$$U = h a \sum_i ds \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{d+\delta}{\lambda} \right)$$

et nous savons que $\delta = \frac{v+d}{2vd} s^2$

$$U = h a \int_{s_0}^{s_1} ds \left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{d}{\lambda} \right) \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{d}{\lambda} \right) \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \right]$$

$$= h a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{d}{\lambda} \right) \int_{s_0}^{s_1} ds \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} - h a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{d}{\lambda} \right) \int_{s_0}^{s_1} ds \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

Chacune de ces intégrales est fonction de s_0 mais indépendante de t ; nous avons donc à faire la somme de deux mouvements

dont les phases diffèrent de $\frac{1}{4}$. L'amplitude du mouvement résultant sera ainsi que nous l'avons vu indépendante du double produit des amplitudes composantes

$$A^2 = I = h^2 a^2 (C^2 + S^2)$$

en appelant C la première intégrale et S la seconde.

Les limites de ces intégrales seront déterminées par la portion efficace de l'arc.

Pour rendre le calcul plus général et pouvoir calculer une table de intégrales définies utile pour toutes les valeurs de x, d , Fresnel a fait un changement variable

$$2\pi \frac{x+d}{2xd} s^2 = \frac{\pi}{2} v^2$$

$$2 \frac{x+d}{xd} s^2 = v^2$$

$$s = v \sqrt{\frac{xd}{2(x+d)}}$$

$$ds = dv \sqrt{\frac{xd}{2(x+d)}}$$

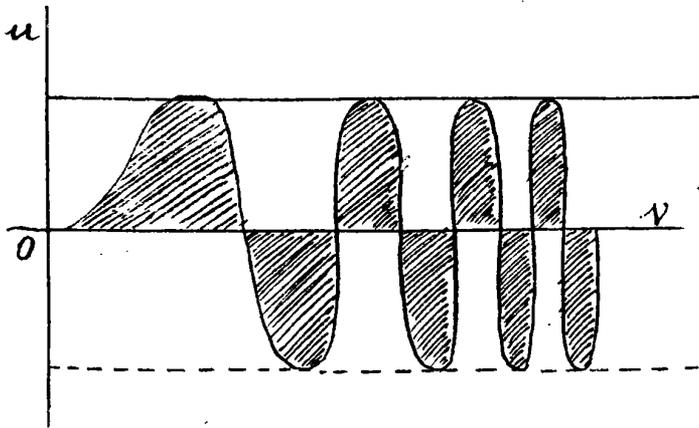
$$C_{v_0}^{v_1} = \sqrt{\frac{xd}{2(x+d)}} \int_{v_0}^{v_1} \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv$$

$$S_{v_0}^{v_1} = \sqrt{\frac{xd}{2(x+d)}} \int_{v_0}^{v_1} \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv.$$

On peut alors dresser une table des intégrales définies entre 0 et v ; si on veut avoir l'intégrale entre v_0 et v_1 on prendra $\int_{v_0}^{v_1} - \int_0^{v_0}$ et pour obtenir $C_{v_0}^{v_1}$ on n'aura qu'à multiplier cette différence par le facteur $\sqrt{\frac{xd}{2(x+d)}}$. Fresnel a ainsi dressé une table en donnant à v toutes les valeurs de 100° en 100° .

Nous pouvons nous rendre compte facilement de la marche de ces intégrales définies quand v varie. Construisons la courbe

$$u = \sin \frac{\pi}{2} v^2$$



Les aires prises de 0 à v seront les valeurs de S^v . — Cette courbe a une série de maximum égaux alternant avec des minimum aussi égaux.

Elle semble une sinusoïde de plus en plus reserrée. Les maximum auront lieu aux points

$$\frac{\pi}{2} v^2 = (4n+1) \frac{\pi}{2}$$

$$v = \sqrt{4n+1}$$

Les minimum auront lieu pour

$$v = \sqrt{4n+3}$$

Elle coupera l'axe des x aux points dont les abscisses sont données par la formule:

$$\frac{\pi}{2} v^2 = n\pi$$

On voit que les différentes aires alternativement positives et négatives dont l'addition algébrique donne S , tendent à devenir égales; dès lors à partir d'une certaine limite (x) on pourra ajouter $\int_0^{+\infty}$ sans changer la valeur de \int_0^v au lieu de déterminer la valeur v qui correspond à l'arc utile de l'onde primitive, nous supposons que v devienne infini positif et négatif, et nous prendrons pour déterminer l'amplitude au point B due à l'action d'une demi-onde

$$A^2 = h^2 a^2 \left[\left(S_0^{+\infty} \right)^2 + \left(C_0^{+\infty} \right)^2 \right]$$

Ces deux intégrales peuvent alors se calculer en toute rigueur, leur valeur commune est égale à $\frac{1}{2}$. En effet je fais la somme de ces deux intégrales en multipliant

$$C + i S = i \int_0^{+\infty} \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv + \int_0^{+\infty} \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv = \int_0^{+\infty} (\cos \frac{\pi}{2} v^2 + i \sin \frac{\pi}{2} v^2) dv = \int_0^{+\infty} e^{i \frac{\pi}{2} v^2} dv$$

nous savons que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$

$$\text{Posons donc } -x^2 = \frac{\pi}{2} v^2 = \frac{\pi}{2} v^2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$ix = v \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$idx = dv \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$C + iS = \frac{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx}{\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} i}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}} = \frac{i}{1+i} = i(1-i) = i+1.$$

$$\text{Donc : } C_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \quad S_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

$$C^2 + S^2 = \frac{1}{2}$$

et on aura pour l'intensité au point B :

$$I = A^2 = h^2 a^2 \frac{1}{2} \frac{rd}{2(r+d)} = \frac{h^2 a^2}{4} \frac{rd}{r+d}$$

L'action des deux demi-ondes correspondrait à des valeurs doubles des deux intégrales : l'onde entière fournit donc l'intensité

$$I = h^2 a^2 \frac{rd}{(r+d)}$$

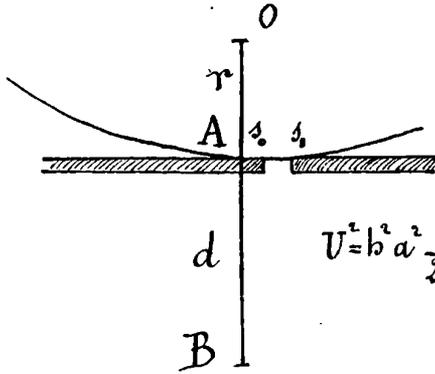
18^e Leçon.

Les résultats obtenus dans la dernière leçon sont basés sur le principe d'Huyghens. Il s'agit de vérifier que ces résultats sont conformes aux principes de mécanique en particulier aux principes des forces vives.

On a trouvé dans la leçon précédente

$$V^2 = h^2 a^2 \left[\left(S_{s_0}^{s_i} \cos \alpha s^2 ds \right)^2 + \left(S_{s_0}^{s_i} \sin \alpha s^2 ds \right)^2 \right]$$

en faisant : $\alpha = \pi \frac{r+d}{\lambda rd}$



ou si l'on change de variable α $S^2 = \frac{\pi}{2} v^2$

$$S = v \sqrt{\frac{\pi \lambda d}{2(\pi + d)}}$$

La formule ci-dessus deviendra :

$$V^2 = h^2 a^2 \frac{\pi \lambda d}{2(r+d)} \left[\left(\int_{v_0}^{v_1} \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv \right)^2 + \left(\int_{v_0}^{v_1} \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv \right)^2 \right]$$

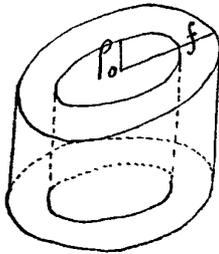
On a vu comment on calcule la valeur de ces intégrales pour : $\left. \begin{array}{l} v_0 = -\infty \\ v_1 = +\infty \end{array} \right\}$ et l'on a trouvé que

chacune d'elles devient égale à l'unité.

Si donc nous faisons ces hypothèses il vient :

$$V^2 = h^2 a^2 \frac{\pi \lambda d}{2} \quad (1)$$

Note non exigée. — Montrons que ce résultat est conforme au principe des forces vives et en particulier indépendant de r et d (dépendant seulement de la somme : $r + d$).



En effet, nous avons jusqu'ici considéré des ondes cylindriques (telles que tout le mouvement qui se trouve à un instant sur un cylindre de rayon r_0 et de hauteur f sera transporté intégralement à un instant quelconque sur un cylindre concentrique de rayon r et de même hauteur : f).

Or, nous avons vu que la force vive en un point est proportionnelle à a^2 . Donc la somme des forces vives de tous les points de la surface du cylindre de rayon r_0 sera proportionnelle à :

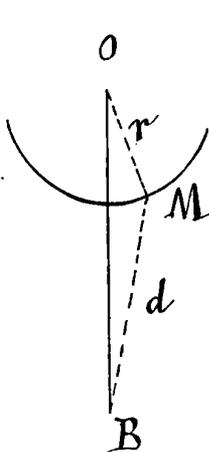
$$2 \pi r_0^2 f a^2$$

nous devons donc écrire que cette force vive s'est transportée intégralement sur la surface du second cylindre, par conséquent :

$$2 \pi r^2 f a^2 = 2 \pi r_0^2 f a^2$$

$$a^2 r^2 = a^2 r_0^2$$

Donc le produit du carré de l'amplitude par le rayon doit être constant ; en d'autres termes : l'intensité : I est en raison inverse



de la distance ρ .

Par conséquent dans la formule (1) le produit: $a^2 r$ est constant. Il reste donc à démontrer que le produit $h^2 d$ est constant.

Revenons à la formule (1). - Elle renferme implicitement trois fois l'application de la loi de diminution de l'intensité avec la distance; En effet soit $Q(x)$. Cette fonction qui l'exprime: si A^2 représente l'intensité idéale de la source, l'intensité de la sphère de rayon r sera

$$a^2 = A^2 Q(r).$$

En second lieu, le point M étant considéré comme une source dont l'intensité est a^2 , et envoie au point B c'est-à-dire à la distance d une intensité représentée par $h^2 a^2$ par chaque élément ds .

Donc on aura en appelant m^2 une constante

$$h^2 a^2 = m^2 a^2 Q(d)$$

Enfin l'intensité V^2 résultante peut être considérée comme émise directement par la source O et alors

$$V^2 = A^2 Q(r+d)$$

Substituant les valeurs de $a^2 h^2$ et de V^2 il vient finalement:

$$(r+d) Q(r+d) = m^2 \lambda \times r Q(r) \times d Q(d)$$

Comme r et d sont absolument quelconques on doit donc avoir:

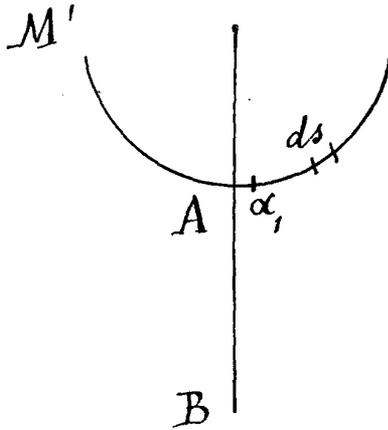
$$(r+d) (Q(r+d) = r Q(r) = d Q(d) = \text{Const.}$$

donc $Q(x) = \frac{C}{x}$ c'est-à-dire que l'intensité est en raison inverse de la distance. c. q. f. d.

Dans le cas d'une onde sphérique que nous traiterons plus loin on vérifiera facilement de la même manière que l'intensité est en raison inverse, non plus de la distance mais du carré de la distance.

Au point de vue analytique, la question est résolue d'après ce qui précède (au moyen des tables de Fresnel qui donnent les valeurs des intégrales ci-dessus pour des valeurs de x variant de centième en centième), mais sous cette forme, qui est commode pour le calcul numérique des expressions, la discussion des

résultats est très difficile nous allons voir une méthode plus simple qui rendra intuitives toutes les démonstrations précédentes.



On emploie la représentation géométrique de la règle de Fresnel au lieu de la représentation analytique.

Il s'agit de composer tous les mouvements vibratoires aboutissant au point B des divers points de l'arc AM'. Or, on sait que les amplitudes des mouvements envoyés par chaque élément ds sont égales entre elles mais les phases initiales ont une différence:

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda} = \pi \frac{r+d}{r\lambda d} s^2$$

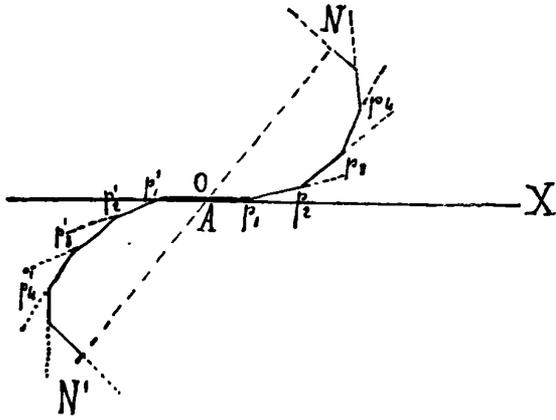
provenant de la différence des distances au point B.

Nous allons composer géométriquement les mouvements vibratoires (comme on l'a vu dans la dernière leçon) soit A₁ le premier des éléments: ds, son amplitude sera $dV = Kds$, sa phase initiale sera nulle si nous choisissons convenablement l'origine du temps. On peut donc représenter ce mouvement par une droite Op₁ dirigée suivant Ox et de longueur do. L'arc suivant donne une amplitude: d₂o, mais la différence de phase s'obtient en substituant à la valeur de s, la distance du centre de l'élément ds, au point A; nous aurons un élément p₁p₂ à la suite du précédent, on compose ainsi toutes les droites: p₂p₃; p₃p₄, etc..... dont les angles avec Ox sont respectivement

$$0, \frac{2\pi\delta_1}{\lambda}, \frac{2\pi\delta_2}{\lambda}, \frac{2\pi\delta_3}{\lambda}, \text{ etc.....}$$

La droite ON qui ferme le polygone formé par un certain nombre des éléments ainsi construits, représente l'amplitude et la phase du mouvement résultant.

Si l'on considère les points de l'arc: AM' symétrique de l'arc AM, on aura une série d'éléments identiques aux précédents en grandeur et direction. On aura ainsi un polygone



: Op'_1, p'_2, p'_3, \dots

Ces éléments rectilignes infiniment petits, forment à la limite une courbe dont nous allons chercher l'équation.

On sait qu'à chaque instant,

$$d\theta = k ds$$

l'angle de chaque élément avec Ox étant : $\frac{2\pi d}{\lambda}$, on aura

la relation suivante qui donne le coefficient angulaire :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{en posant } \alpha = \frac{\pi (x+d)}{r \lambda d}$$

Mais on sait que $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$$\text{donc } dx^2 + dy^2 = k^2 ds^2$$

soit on déduit facilement dx et dy :

$$dy = dx \operatorname{tg} \alpha \quad \text{en posant } \alpha = \frac{\pi (x+d)}{r \lambda d}$$

$$dx^2 (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = k^2 ds^2$$

$$\frac{dx^2}{\cos^2 \alpha} = k^2 ds^2$$

$$\text{par suite : } \begin{cases} dx = k \cdot ds \cdot \cos \alpha \\ dy = k \cdot ds \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

$$\text{et : } \begin{cases} x = k \int ds \cdot \cos \alpha \\ y = k \int ds \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

Cette courbe a donc précisément pour coordonnées les intégrales de Fresnel, (à une constante près : k) et par suite on peut la construire par point au moyen des tables en changeant de variable de la manière sui-

vante : $\alpha s^2 = \frac{\pi}{2} v^2$.

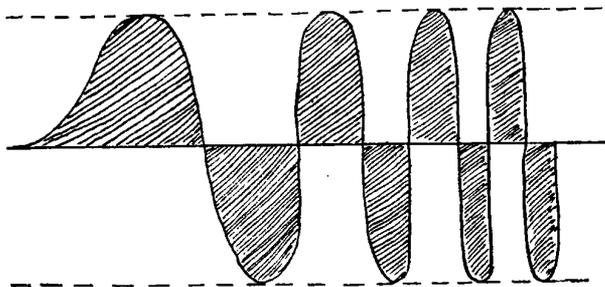
$$\begin{cases} x = K \sqrt{\frac{r \lambda d}{2(r+d)}} \int_0^v dv \cos \frac{\pi}{2} v^2 \\ y = K \sqrt{\frac{r \lambda d}{2(r+d)}} \int_0^v dv \sin \frac{\pi}{2} v^2 \end{cases}$$

on aura au moyen des tables les valeurs de x et y correspondantes aux valeurs de v croissant de centième en centième.
Remarquons qu'il suffit de construire la courbe une fois pour toutes, car le facteur $K \sqrt{\frac{r \lambda d}{2(r+d)}}$ est le même pour x et y .

On aura aussi la phase du mouvement résultant c'est:

$$\text{tg. } 2\pi\phi = \frac{y}{x} = \frac{\int_0^v dv \sin \frac{\pi}{2} v^2}{\int_0^v dv \cos \frac{\pi}{2} v^2}$$

Étudions la forme de cette courbe. Les intégrales de Fresnel présentent des maxima et minima (aire de la courbe croissante) et la courbe est une spirale, en effet le rayon de courbure nous est donné par la formule

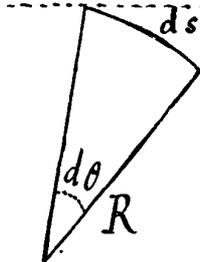


$$R d\theta = d\sigma \quad R = \frac{d\sigma}{d\theta}$$

$$\text{or } \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \int \dots d\theta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{r+d}{2r} \cdot 2s ds$$

$$\text{et : } d\theta = K ds$$

$$\text{donc : } R = \frac{K r \lambda d}{2\pi(r+d)} \frac{1}{s}$$



Le rayon de courbure est donc en raison inverse de la longueur de l'arc, et décroît d'une manière uniforme. D'autre part on sait que le cercle osculateur en un point traverse la courbe; mais R est infini à l'origine (point d'inflexion) et va en diminuant, donc en chaque point la courbe d'abord extérieure à son cercle osculateur est ensuite intérieure, par

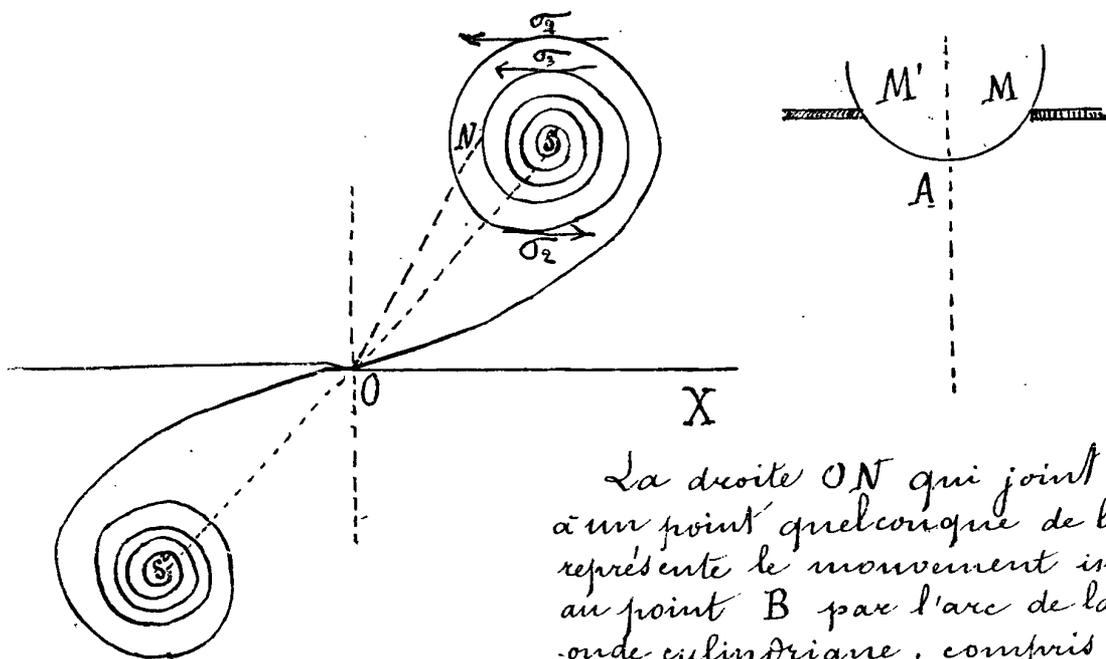
suite, à chaque instant le cercle osculateur contient tout le reste de la courbe.

La courbe possède un point asymptotique : en effet, les intégrales de Fresnel tendent vers $\frac{1}{2}$ lorsque v augmente indéfiniment, par suite le point limite de la courbe sera :

$$x = \frac{1}{2} K \sqrt{\frac{r \lambda d}{2(r+d)}}$$

$$y = \frac{1}{2} K \sqrt{\frac{r \lambda d}{2(r+d)}}$$

L'origine est un centre de symétrie, car de part et d'autre du point A les points équidistants ont même phase (par suite les éléments correspondants de la courbe ont leurs tangentes parallèles).



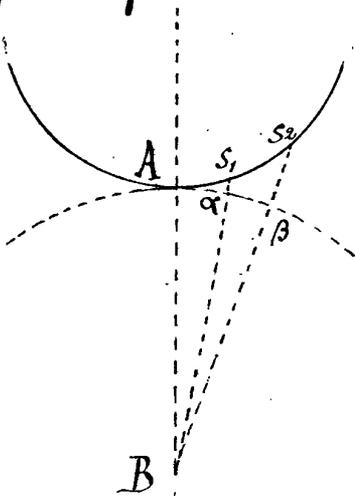
La droite ON qui joint l'origine à un point quelconque de la courbe représente le mouvement imprimé au point B par l'arc de la demi-onde cylindrique, compris entre les points A et M (les points M et N se correspondant sur les deux courbes.)

Si le point M s'éloigne indéfiniment, on aura l'action de la demi-onde AM complète qui sera représentée en grandeur et direction par la droite OS qui joint l'origine à l'un des points asymptotiques.

(La figure de la courbe montre que dans le voisinage du point asymptotique S, les spires se rapprochent de plus en plus, par suite les droites qui joignent ces points à l'origine tendent

De plus en plus à se confondre; on vérifie ainsi que pour une valeur de v suffisamment grande on peut prendre: $\int_0^{+\infty}$ au lieu de \int_0^v comme nous l'avons annoncé plus haut.)

L'action de l'onde cylindrique toute entière sera représentée par la droite SS' . La phase de ce mouvement résultant est $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$, (car la droite SS' est inclinée à 45° sur Ox) la phase du mouvement envoyé par le point A étant nulle; la différence de phase des actions résultant: de l'onde toute entière d'une part, et du point A s'il était seul d'autre part, sera donc $\frac{1}{8}$ de période.



Reportons nous maintenant à la discussion des arcs AS_1, S_1S_2 , etc..... alternativement concordants et discordants: si l'on a:

$$S_1 \alpha = \frac{1}{2} \lambda.$$

les mouvements sont discordants, la différence de phase est $\frac{1}{2}$. Cherchons sur la courbe les points

dont les phases diffèrent de $\frac{1}{2}$ se sont ceux pour lesquels les coefficients angulaires diffèrent de 180° ou voit ainsi que les points représentatifs de: S_1, S_2, S_3, \dots sont respectivement $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$

On sait exprimer la longueur AS en fonction des données de la question

$$\frac{r+d}{2r \cdot d} S^2 = \frac{\lambda}{2} \dots \dots \dots S = \sqrt{\frac{\lambda r d}{r+d}}$$

On pourra donc dans chaque cas particulier établir l'échelle de proportion entre les deux courbes (en comparant les arcs: $AS, O\sigma_1$).

Appliquons ce qui précède à l'étude du phénomène le plus simple de la diffraction.

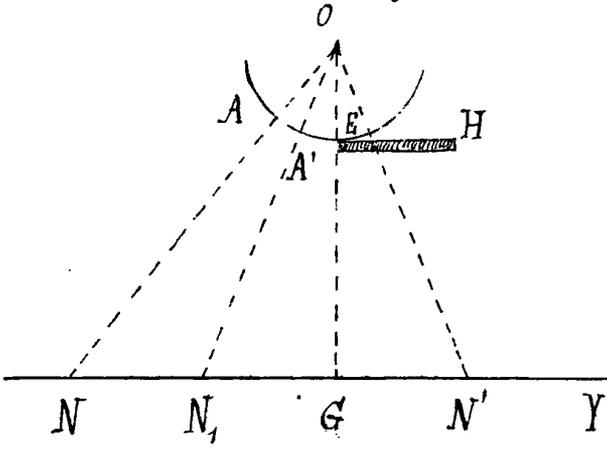
Ombre du bord d'un écran rectiligne: L'expérience prouve qu'il y a de croisés avec graduelle de l'ombre à la lumière, et production de franges d'interférence sur les bords de la partie éclairée.

Nous allons voir que les considérations précédentes nous permettent d'expliquer le phénomène dans tous ses détails:

Soit GY le tableau sur lequel se projette le phénomène et E, H

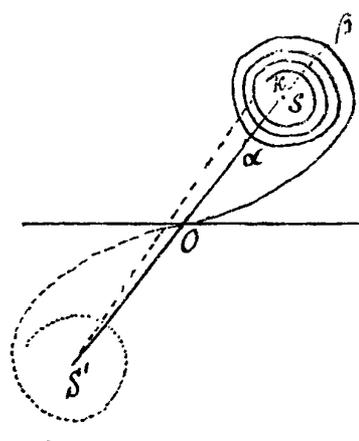
l'écran d'après le principe d'Huyghens on peut prendre pour source lumineuse l'onde cylindrique passant par le bord E de l'écran.

Considérons ce qui se passe au point N très éloigné de G; alors l'écran ne fait pas sentir son influence et l'amplitude en N est représentée par la droite SS'.



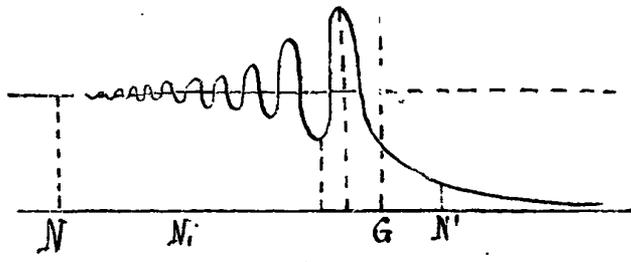
en N est représentée par la droite SS'. Cette amplitude sera constante, par conséquent en N aucun phénomène particulier.

Considérons un point : N₁ plus rapproché de G, pour ce point le pôle est A₁, et la demi onde de droite est parallèlement interceptée par l'écran; l'arc A₁E correspond alors à un arc : OK n'allant plus jusqu'au point asymptotique, et plus A₁ se rapproche de E, plus le point K se rapproche de : O, le rayon vecteur S'K variera en passant par des maxima et minima relatif. On peut représenter géométriquement ces variations, en portant à chaque point : N une ordonnée proportionnelle de l'amplitude : S'K; les variations sont de plus en plus grandes, jusqu'à un minimum minimum correspondant au point : α puis un maximum maximum pour le point : β; finalement on

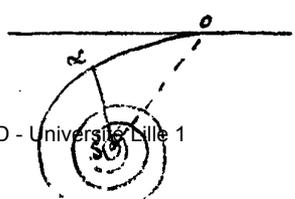


aura au point : G une ordonnée égale à la moitié de celle du point : N, l'intensité est donc 4 fois moindre (proportionnelle au carré de l'amplitude).

On aura donc des franges claires et sombres correspondant à ces variations d'intensité.



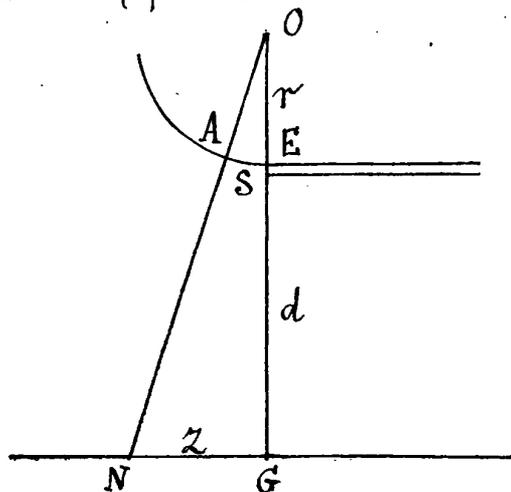
Si l'on considère un point N' dans l'ombre, son pôle est caché par l'écran, et par suite la partie de droite de la courbe représentative devient inutile ainsi qu'une partie de celle



de gauche. On voit que les amplitudes représentées par des droites telles que : $S' \alpha$ vont en diminuant indéfiniment par suite la courbe ci-dessus est asymptote à la droite : NG .

On voit que les franges sont nécessairement colorées ; en effet : les équations qui nous ont servi jusqu'ici contiennent : λ . Or, λ est variable avec les couleurs simples. Il doit donc se produire des interférences.

On peut calculer la largeur et l'écartement des franges connaissant : R , d et λ (pour une couleur simple).



On sait que le phénomène se passe dans une région très restreinte autour de G . On peut donc sans erreur grave considérer l'arc AE comme se confondant avec un élément rectiligne parallèle à GN , et les triangles semblables : $OA E$; ONG nous donnent :

$$\frac{s}{z} = \frac{r}{r+d} \dots \dots \dots z = s \frac{r+d}{r}$$

On a ainsi les valeurs de z correspondantes à chaque valeur de l'arc : S . On peut calculer l'amplitude en chaque point : N de deux manières : soit par le calcul :

$$U^2 = K \left\{ \left(\int_{-\infty}^{+s} \sin \alpha s^2 ds \right) + \left(\int_{-\infty}^{+s} \cos \alpha s^2 ds \right)^2 \right\}$$

On l'on fera : $K = \frac{1}{2}$ si l'on prend pour unité l'amplitude du mouvement qui serait produit si l'écran n'existait pas : en effet dans ce cas on devra prendre les intégrales de : $-\infty$ à $+\infty$ comme d'elles devaient être égales à l'unité, par suite : $U^2 = 1 = 2K$ et $K = \frac{1}{2}$.

Soit au moyen de la courbe représentative :

sont les coordonnées sont :

$$\begin{cases} x = \int_0^v dv \cos \frac{\pi}{2} v^2 \\ y = \int_0^v dv \sin \frac{\pi}{2} v^2 \end{cases}$$

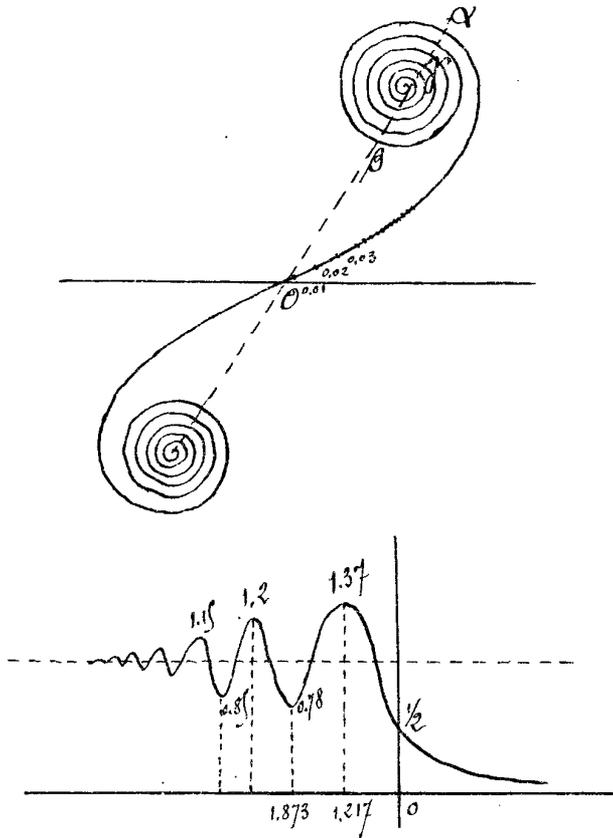
v et s étant liés par $\frac{\pi}{2} v^2 = \alpha s^2$ (on a vu que : $\alpha = \frac{\pi(r+d)}{r \lambda d}$)

d'où :

$$v = s \sqrt{\frac{2(r+d)}{r \lambda d}}$$

et par suite :

$$z = v \sqrt{\frac{\lambda d(r+d)}{2r}}$$

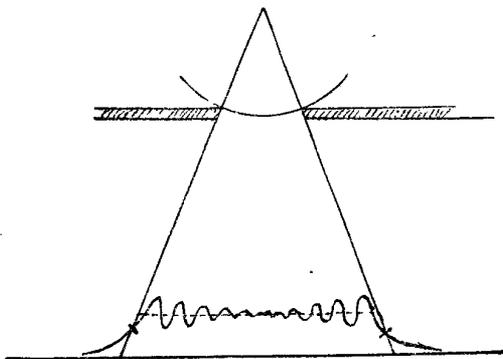
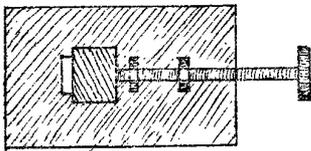


À chaque valeur de x correspond une valeur de Z et réciproquement. On aura donc les amplitudes maxi-ma et minima, en prenant les points α, β, γ --- de la courbe pour lesquels le rayon vecteur issu du point S' est maximum ou minimum: on a eu soin de graver préalablement la courbe pour les valeurs de x croissant de centième en centième puis on utilise dans la formule ci-dessus les valeurs de x pour les points α, β , --- on déduit les distances (Z) des franges au bord de l'ombre G . Leurs amplitudes maxima sont données par des rayons vecteurs correspondants.

Voici les résultats calculés par Fresnel dans un cas particulière. Les nombres marqués sur l'axe OZ représentent les valeurs de Z et les nombres inscrits sur les ordonnées

Donnent les amplitudes correspondantes.

Ces données servent à calculer les résultats du phénomène pour une distance donnée quelconque.



Fresnel a obtenu des vérifications expérimentales très-nettes. Il a remarqué que le point G bord de l'ombre n'est pas donné d'une manière exacte par l'expérience précédente, et par suite on ne peut mesurer directement les distances Z pour les différentes franges. Il a éludé la difficulté, en employant au lieu d'un seul écran, deux écrans parallèles formant une fente qu'il laissait assez large (environ 10mm) de cette manière le phénomène se produisait d'une

manière parfaitement symétrique pour les bords de la fente : il obtenait au moyen du micromètre le point milieu du phénomène, en prenant la moyenne des observations de deux franges de même ordre.

Il a trouvé ainsi en opérant avec la lumière rouge :

$$\lambda = 0,00000638 \text{ et } \left. \begin{array}{l} r = 1^m 011 \\ d = 0^m 99 \end{array} \right\}$$

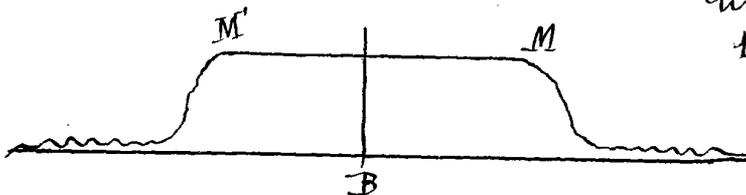
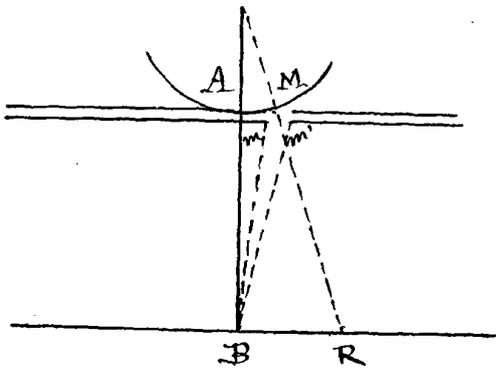
| | | |
|-------------------------|-------------|----------------|
| pour le premier minimum | $r = 1,873$ | $\% = 1^m, 40$ |
| second | $r = 2,17$ | $\% = 2, 18$ |
| troisième | $r = 2,69$ | $\% = 2, 69$ |
| quatrième | $= 3,12$ | $= 3, 13$ |
| cinquième | $= 3,51$ | $= 3, 51$ |

Cette expérience de Fresnel et celles qui ont été faites après lui, ont prouvé que le calcul théorique est aussi exacte que possible.

Il nous reste à expliquer le second phénomène de diffraction que nous avons décrit plus haut.

Epanouissement des faisceaux. — C'est une conséquence de ce qui précède. — Supposons en effet la fente très-étroite, et considérons un point s'éloignant de plus en plus du point B ou ce qui revient au même, laissons B fixe et faisons éloigner de plus en plus la fente en m' ou point A.M. Le point B reçoit l'action d'un petit arc : $m m'$ constant mais qui va en s'éloignant.

L'amplitude à chaque instant sera représentée par la corde d'un petit arc de longueur constante qui se meut sur la spirale étudiée ci-dessus, en s'écartant du point o.



Il est facile de voir que plus l'arc sera petit, et plus la corde restera constante et sensiblement égale à l'arc (tant qu'on n'arrivera pas à un point où le rayon de courbure soit trop faible) par suite si on construit comme ci-dessus la courbe représentative des amplitudes en chaque point tel que B on voit que plus la fente sera fine, plus cette courbe M.M' s'étendra de part et d'autre du point B avec une ordonnée sensiblement constante.

Ceci vous explique les phénomènes étudiés expérimentalement à la fin de la 16^e Leçon : épanouissement du faisceau lumineux lorsque la fente diminue (l'éclaircissement étant de plus en plus faible).

19^e Leçon.

Ondes sphériques.

Nous allons chercher la résultante des mouvements vibratoires envoyés en B par tous les éléments d'une onde sphérique émanant de la source lumineuse O.

Soit $d^2 \Omega$ la surface de l'élément M pris dans une zone CD, l'amplitude du mouvement qui se propage de M en B, est proportionnelle à la surface de l'élément, en raison inverse de sa distance d au point B et

si k désigne une constante égale à $\frac{H}{d}$, a étant l'amplitude du mouvement en M, et H une constante, on aura en faisant la somme de tous les mouvements envoyés par la sphère en B.

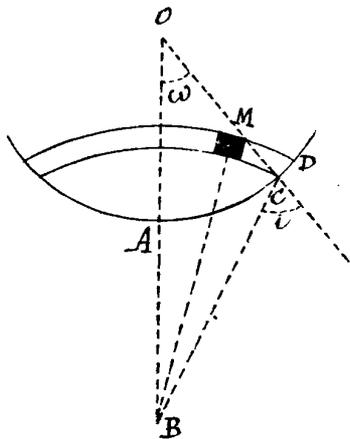
$$v \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \Phi \right) = k \iint d^2 \Omega \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{d}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda} \right)$$

Φ désignant la phase du mouvement résultant, φ celle du mouvement émané de M, et δ la différence des distances MB et AB en prenant l'origine du temps de façon que la

phase initiale du mouvement envoyée par A soit nulle.

Les quantités par rapport auxquelles il faut intégrer sont $d^2 \Omega$ et δ car k est constant pour tous les mouvements que nous considérons à un instant donné, et d varie peu d'un élément à l'autre ; on détermine les limites d'après la forme de l'écran.

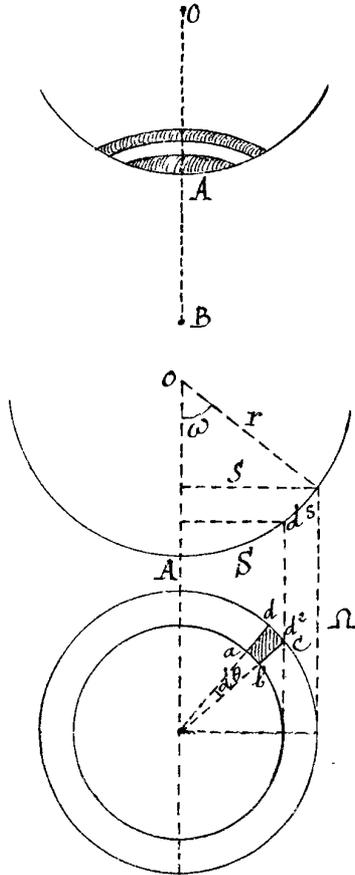
Dans le cas des ondes sphériques, on est obligé de considérer l'action



De zones assez éloignées du pôle A, et comme l'a montré Fresnel, les mouvements considérés ne sont plus parallèles dans l'étendue considérée, on doit modifier le résultat précédent en multipliant le mouvement émané de M, par une fonction $f(i)$ dite fonction d'affaiblissement, où i désigne l'angle de MB avec la normale en M à la sphère, et l'on a

$$v \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{\Phi}{\lambda} \right) = k \iint d^2\Omega \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \Phi - \frac{d}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda} \right) f(i)$$

Si nous décrivons du point B comme centre, des sphères de rayons égaux à AB plus un nombre entier variable de $\frac{\lambda}{2}$, on obtient des zones successives dont les mouvements sont alternativement concordants et discordants avec ceux du point A. Les surfaces de ces zones décroissent très-lentement et l'on peut les considérer sensiblement comme égales ainsi que nous allons le voir.



Il en résulte que suivant qu'on prend un nombre pair ou impair de ces zones à partir du point A, on aura un mouvement résultant nul ou égal au mouvement envoyé par une seule zone.

Ce résultat absurde montre qu'il est absolument nécessaire de tenir compte de l'obliquité des rayons.

Évaluons la surface de ces zones. Une zone est engendrée par la rotation d'un arc de s autour de l'axe OA.

Note (non exigée) La surface de la calotte sphérique calculée rigoureusement est:

$$\Omega = r \int_{s_0}^{2\pi} d\theta \int_{s_0}^{s_1} \sin \frac{s}{r} ds$$

s_0 et s_1 étant les arcs qui comprennent l'arc ds entre leurs extrémités.

Posons: $\frac{s}{r} = x$ d'où $s = rx$ $ds = r dx$; il vient

$$\Omega = 2\pi r^2 \int_{x_0}^{x_1} \sin x dx, \text{ d'où}$$

$$\Omega = 2\pi r^2 (\cos x_0 - \cos x_1).$$

Projetons cette zone sur un plan perpendiculaire à OA et considérons un élément $d^2\omega$ limité par deux plans passant par OA et faisant entre eux un angle $d\theta$. L'élément $d\Omega$ peut être considéré comme un petit rectangle abcd, de base $ab = \rho d\theta$, et de hauteur dS . D'ailleurs $\rho = r \sin \omega = r \sin \frac{S}{r}$.

D'où :

$$d^2\Omega = r \sin \frac{S}{r} d\theta dS.$$

Si l'on se contente pour simplifier le calcul de remplacer le sinus par l'arc, on accroît un peu l'aire des parties éloignées du pôle, et l'on a l'expression simplifiée :

$$d^2\Omega = S dS d\theta$$

qui intégrée de 0 à S et de 0 à 2π donne pour l'aire de la calotte sphérique

$$\Omega = \pi S^2$$

Valeur évidemment un peu trop grande : si l'on introduit les valeurs de S calculées précédemment dans le cas de l'onde sphérique

$$= 4\pi r^2 \sin \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)}{2} \sin \frac{(\alpha_1 + \alpha_0)}{2}$$

$$= 4\pi r^2 \sin \frac{(\delta_1 - \delta_0)}{2r} \sin \frac{(\delta_1 + \delta_0)}{2r}$$

Si les arcs sont petits, nous pouvons remplacer les sinus par leurs arcs, et il vient alors :

$$\Omega = 4\pi r^2 \frac{(\delta_1 - \delta_0)}{2r} \sin \frac{(\delta_1 + \delta_0)}{2r}$$

$$\Omega = \pi (\delta_1^2 - \delta_0^2)$$

Nous avons vu que dans le cas des ondes cylindriques, les arcs correspondant aux différences de phases égales à $\frac{\lambda}{2}$, sont donnés par la formule

$$\delta^2 = m \sigma^2$$

m étant un entier, σ une constante

La surface des zones correspondantes sera donc

$$\Omega = \pi \sigma^2 m^2, \text{ qui est une constante.}$$

Mais si l'arc est suffisamment grand, on a bien le droit de remplacer : $\sin \frac{\delta_1 - \delta_0}{2r}$ par $\frac{\delta_1 - \delta_0}{2r}$, qui diminue indéfiniment ; mais non : $\sin \frac{\delta_1 + \delta_0}{2r}$ par $\frac{\delta_1 + \delta_0}{2r}$ qui croît constamment. Nous pourrions donc seulement écrire.

$S_m \propto \sqrt{n}$, on reconnaîtra que les zones successives concordantes et discordantes ont des surfaces égales : en réalité le calcul rigoureux (voir la note) montre qu'elles vont en diminuant.

Formules Générales

La substitution de la valeur approchée $d^2 \Omega = s ds d\theta$ et la réduction à l'unité de la fonction d'obliquité rendent les formules générales si simples qu'il y a lieu d'adopter ces hypothèses.

Les résultats seront exacts tant qu'on fera entrer en ligne de compte les portions de la surface sphérique de l'onde voisine du pôle ; pour les portions éloignées il y aura lieu d'examiner la question de plus près.

Le mouvement résultant envoyé au point B sera donc :

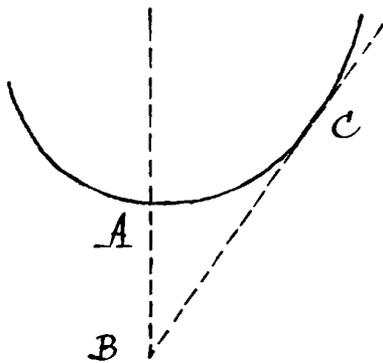
$$X = h a \int dA \int s ds \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{d}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda} \right) \text{ avec } \delta = \frac{r+d}{2rd} s^2$$

$$\Omega = 4\pi r^2 \frac{(s_1 - s_0)}{2r} \sin \frac{s_1 + s_0}{2r}$$

Multiplions et divisons par $\frac{s_1 + s_0}{2r}$; il vient :

$$\Omega = 4\pi r^2 \frac{(s_1 - s_0)}{2r} \frac{\sin \frac{s_1 - s_0}{2r}}{\frac{s_1 + s_0}{2r}}$$

Or quand l'axe augmente, le rapport du sinus à l'axe diminue ; donc on voit que les surfaces des zones vont en diminuant en s'éloignant du pôle A.



Ce qui influe le plus sur le mouvement résultant en B est la fonction d'affaiblissement $f(i)$. Cette fonction est égale à 1, en A, nulle au point C. On voit que le mouvement résultant en B est la somme d'une série de termes alternativement positifs et négatifs (c'est-à-dire de mouvements alternativement concordants et discordants), qui sont de la forme $\pi b^2 f(i)$; on voit donc que les termes de cette série diminuent indéfiniment, tendent vers 0, et que leur somme, qui correspond à l'action de toute la zone AC, tend vers une limite finie.

Les limites des intégrales dépendent de la surface libre de la sphère d'onde. Un changement convenable de l'origine ou temps permet de simplifier légèrement en posant :

$$\frac{t'}{T} = \frac{t}{T} + \varphi - \frac{d}{\lambda} : \text{D'où}$$

$$X = h a \int d\theta \int s ds \sin 2\pi \left(\frac{t'}{T} - \frac{r+d}{2rd} s^2 \right)$$

Comme $s ds$ est à un facteur constant près la différentielle de $\frac{s^2}{\lambda}$ posant :

$$\pi \frac{r+d}{r \lambda d} s^2 = z \quad s ds = dz \frac{r \lambda d}{2\pi(r+d)}$$

$$\text{il vient } X = h a \frac{r \lambda d}{2\pi(r+d)} \int d\theta \int dz \sin \left(2\pi \frac{t'}{T} - z \right)$$

Développant le sinus

$$X = h a \frac{r \lambda d}{2\pi(r+d)} \left\{ \sin 2\pi \frac{t'}{T} \int d\theta \int dz \cos z - \cos 2\pi \frac{t'}{T} \int d\theta \int dz \sin z \right\}$$

$$\text{Posant : } \begin{cases} M = \int d\theta \int dz \sin z \\ N = \int d\theta \int dz \cos z \end{cases} \text{ et } h a \frac{r \lambda d}{r+d} = w$$

$$\text{il vient : } X = \frac{1}{2\pi} w \left\{ N \sin 2\pi \frac{t'}{T} - M \cos 2\pi \frac{t'}{T} \right\}$$

$$\text{de la forme : } X = U \sin 2\pi \left(\frac{t'}{T} - \Phi \right) \text{ D'où } \begin{cases} U^2 = \frac{w^2}{4\pi^2} (M^2 + N^2) \\ \tan 2\pi \Phi = \frac{M}{N} \end{cases}$$

L'intensité du mouvement résultant au pt. B est ainsi U^2 et la différence de phase initiale avec celle du mouvement transmis par le pôle de l'onde est égale à Φ .

Appliquons ces formules aux cas simples que voici :

1°. Ouverture circulaire.

Nous nous limiterons à l'étude des phénomènes lumineux existant au centre de l'onde, c'est-à-dire l'espace circulaire qui dans la théorie de l'émission devrait être éclairé dans tous les cas.

Les formules sont rigoureuses si le rayon S de l'ouverture c'est-à-dire z est très-petit.

Les limites de l'intégration sont constantes 0 et z pour l'invariable.

z et 0 et 2π pour θ . On a donc par un calcul facile :

$$M = 2\pi (1 - \cos z) \quad N = 2\pi \sin z$$

$$\text{D'où : } V_1^2 = \omega^2 \left[\sin^2 z + (1 - \cos z)^2 \right] = \omega^2 \times 2 (1 - \cos z) = 4\omega^2 \sin \frac{z}{2}$$

$$\text{La phase : } \operatorname{tg} 2\pi \Phi_1 = \frac{1 - \cos z}{\sin z} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} z}{2 \sin \frac{1}{2} z \cos z} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} z \text{ d'où } 2\pi \Phi_1 = \frac{1}{2} z$$

L'intensité peut donc varier entre zéro et $4\omega^2$: le cas où elle est nulle est extrêmement curieux : il est donné par la condition

$$\frac{z}{2} = i\pi \quad \text{ou} \quad \frac{r+d'}{2r\lambda d} s^2 = i \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{d} = \frac{2i\lambda}{s^2}$$

expression qu'on discuterait comme la formule des foyers conjugués d'une lentille. L'expérience confirme de tout point ce résultat remarquable.

2° Onde sphérique toute entière.

Il semble qu'il suffise de faire S ou $z = \infty$ dans la formule précédente pour obtenir l'effet de l'onde entière : la formule répond par une indétermination $V_1^2 = 4\omega^2 \sin^2 \infty$.

Cette indétermination provient de ce que le cas de l'ouverture circulaire, qui au point de vue géométrique paraît le plus simple est en effet presque absolument irréalisable à cause de la loi suivant laquelle varie la surface des zones concordantes et discordantes loi qui est celle qui met le plus en évidence l'erreur qu'on commet dans l'emploi des formules approximatives employées.

La preuve, à la fois de cette explication et de la légitimité des formules, c'est que si l'on prend un contour arbitraire pour limiter l'onde on arrive à un résultat déterminé et indépendant de la forme de ce contour ce qui est bien le résultat expérimental attendu.

$$\text{Soit donc : } S = f(\theta) \quad \text{ou} \quad z = F(\theta)$$

l'équation du contour choisi rapporté au pôle de l'onde et à une direction arbitraire, l'ordre des intégrations étant indifférent, commençons l'intégration par la variable z en substituant les limites $z = 0$ $dz = F'(\theta)$ on aura évidemment :

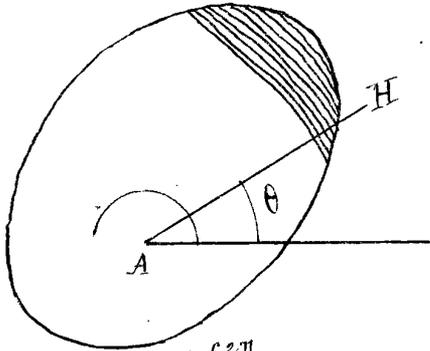
$$M = \int_0^{2\pi} d\theta (1 - \cos F(\theta)) \quad N = \int_0^{2\pi} d\theta \sin F(\theta)$$

Si le contour est suffisamment éloigné du pôle la variable $z = F(\theta)$ sera très-grande, car :

$$z = \pi \frac{r+d}{r \lambda d} s^2$$

et λ est très-petit. Comme les zones sont extrêmement resserrées la moindre variation de $S = AH$

fera donc varier l'argument de $\cos z$ ou de $\sin z$ de quantités considérables; or les variations de $\sin z$ et $\cos z$, sont comprises entre $+1$ et -1 : l'intégrale cherchée est donc la somme d'une infinité de quantités comprises indifféremment entre $+1$ et -1 ; elle a donc une valeur sensiblement nulle.



Donc : $\int_0^{2\pi} d\theta \cos F(\theta) = 0$, $\int_0^{2\pi} d\theta \sin F(\theta) = 0$

et par suite $M = 2\pi$ $N = 0$

D'où $v_0^2 = w^2$ $\text{tg } 2\pi \Phi_0 = \infty$ $2\pi \Phi_0 = \frac{\pi}{2}$

L'intensité due à l'onde limitée par un contour un peu étendu est donc égale à w^2 et indépendante de la forme de ce contour. On peut donc supposer ce contour étendu à l'onde entière ce qui est le résultat cherché.

On voit en même temps que le raisonnement précédent ne peut être en défaut que pour des contours très-particuliers mais parmi lesquels le plus simple est le contour circulaire.

3° Écran circulaire.

Nous nous bornerons aussi au cas du centre de l'ombre qui d'après la théorie de l'émission devrait être obscur dans tous les cas.

Les limites seraient $S = S_0$ rayon de l'écran et $S = \infty$; mais on rencontrerait la même difficulté que dans le cas précédent: intégrons donc depuis $z = z_0$ jusqu'à un contour indéterminé mais très-grand

$z = F(\theta)$, on aura évidemment :

$$M = \int_0^{2\pi} d\theta (\cos z_0 - \cos F(\theta)) \quad N = \int_0^{2\pi} d\theta (\sin F(\theta) - \sin z_0)$$

qui le réduisent à :

$$M = 2\pi \cos z_0 \quad N = -2\pi \sin z_0$$

Où $v_2^2 = W^2$ et $2\pi \Phi_2 = -\frac{\cos z_0}{\sin z_0} \cdot 2\pi \Phi_1 = \frac{\pi}{2} + z_0$.

Le résultat est tout à fait inattendu : le centre de l'ombre est aussi éclairé que si l'écran n'existait pas et cela indépendamment du diamètre de l'écran. Ce résultat découvert par Poisson et présenté par lui comme une objection a été vérifié ^{expérimentalement} par Arago et Fresnel : il constitue une des vérifications les plus délicates et les plus frappantes de la théorie des ondulations.

Remarque : Ces trois cas présentent entre eux une relation qu'il est utile de signaler. La surface de l'onde entière peut être décomposée en deux parties, l'une formée d'une ouverture circulaire, et l'autre l'espace laissé libre par l'écran circulaire de même diamètre.

L'amplitude vibratoire due à l'onde toute entière est donc la résultante des amplitudes due à chacune des deux parties.

D'après la règle de Fresnel en appelant respectivement : v_0, v_1, v_2 , les amplitudes dans ces trois cas et Φ_0, Φ_1, Φ_2 , les phases correspondantes, on doit avoir la relation :

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos 2\pi (\Phi_1 - \Phi_2)$$

si l'on substitue les valeurs obtenues ci-dessus :

$$v_0^2 = W^2 \quad v_1 = 4W^2 \sin^2 \frac{z}{2} \quad v_2 = W^2 2\pi (\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{1}{2}z - \left(\frac{\pi}{2} + z\right)$$

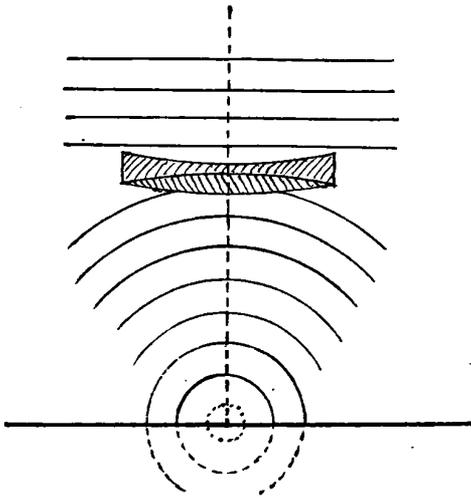
la relation est satisfaite.

20^e Leçon.

Par tout ce qui précède nous avons vu que le point lumineux, de même que le rayon lumineux n'a point d'existence réelle. Mais à propos des instruments d'optique nous avons parlé des foyers et des plans focaux. Il s'agit de nous faire une idée exacte de la signification de ces mots:

La théorie de l'émission nous donne pour foyer d'une lentille un point unique défini par le croisement des rayons lumineux. La théorie des ondulons va nous donner une solution toute différente mais entièrement conforme aux résultats de l'expérience.

Considérons une onde plane transformée par une lentille en ondes sphériques concaves concentriques, (1) le foyer se formera dans le plan mené parallèlement à la lentille par le centre de cette onde concave; dans ce cas les calculs des leçons précédentes se simplifient et les intégrations deviennent plus faciles. On trouve que la lumière est concentrée en un disque dont les bords sont estompés. Autour se trouve une série d'anneaux alternativement éclairés et obscuris de plus en plus faible. C'est ce que l'on voit en



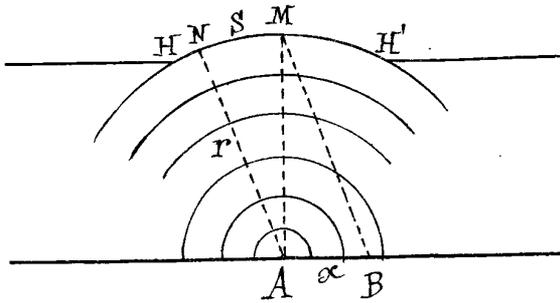
(1) La mise en équation des problèmes relatifs aux ondes concaves ne diffère en rien de celle relative aux ondes convexes; le signe de r seul dans l'expression approché de δ

$$\delta = \frac{d+r}{2rd} s^2$$

est changé; il est négatif au lieu d'être positif. Mais la formule tombe en défaut par insuffisance dans l'approximation lorsque d est très voisin de r . C'est-à-dire lorsqu'on étudie les phénomènes de diffraction dans le voisinage du plan focal: on verra plus loin comment on résout la question dans ce cas limite.

observant une étoile avec des instruments puissants.

L'étude des ondes sphériques exige l'emploi de la géométrie à trois dimensions. Considérons alors pour simplifier les calculs, le cas d'une onde cylindrique: Soit HH' une lentille cylindrique qui transforme les ondes convexes en ondes concaves. Soit A le centre



de ces dernières, cherchons les phénomènes de diffraction qui se produisent en ce point. La valeur approchée de la différence de marche δ ne convient plus ici parce que $d = r$ d'où $\delta = 0$ quelque soit S ; il va donc falloir déterminer une nouvelle formule approchée, laquelle comme on va le voir est extrêmement simple.

Prenez comme source lumineuse l'onde qui passe par les bords HH' de la lentille et cherchons l'action exercée par chacun de ces points N sur un point B du plan focal.

Le mouvement résultant est donné par la formule,

$$v \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \Phi \right) = K \int ds \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi - \frac{r}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda} \right)$$

En posant $BN - BM = \delta$
Calculons δ

$$\text{On a: } \begin{aligned} BN^2 &= x^2 + r^2 - 2xr \cos(90^\circ + \omega) \\ &= x^2 + r^2 + 2xr \sin \omega \end{aligned}$$

$$\text{Et: } BM^2 = x^2 + r^2$$

$$BN^2 - BM^2 = 2xr \sin \omega$$

$$\delta (BN + BM) = 2xr \sin \omega$$

$$\text{ou sensiblement } \delta 2r = 2xr \sin \omega \quad \dots \quad \delta = x \sin \omega = x \sin \frac{s}{r}$$

$$\text{ou en remplaçant: } \sin \frac{s}{r} \text{ par } \frac{s}{r} \quad \delta = x \frac{s}{r}$$

Remarquons qu'ici δ est proportionnel à s et non à s^2 comme précédemment.

$$\text{On en déduit: } \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi x}{r\lambda} s$$

Je change de variable en posant $\frac{2\pi x}{r\lambda} s = z \quad ds = dz \frac{r\lambda}{2\pi x}$
Ici l'intégration sera facilement:

on a:
$$U^2 = K^2 \left\{ \left(\int_{-s}^{+s} ds \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \right)^2 + \left(\int_{-s}^{+s} ds \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \right)^2 \right\}$$

$$= K^2 \frac{\lambda x}{2\pi x} \left\{ \left(\int_{-z}^{+z} dz \sin z \right)^2 + \left(\int dz \cos z \right)^2 \right\}$$

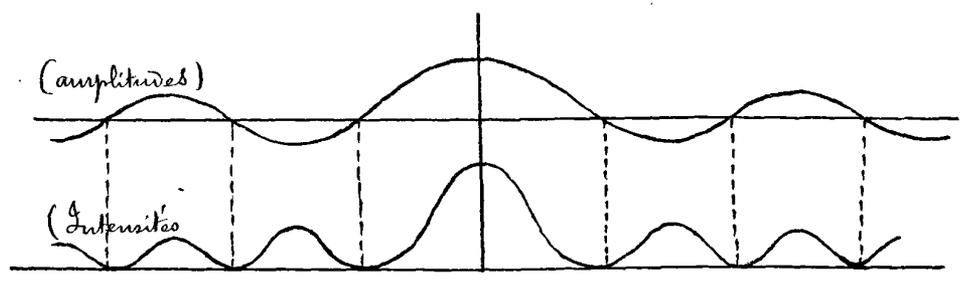
Intégrons et remplaçons z par sa valeur en fonction de S nous arriverons au résultat suivant

$$U^2 = 4 K^2 S^2 \left(\frac{\sin \frac{2\pi x S}{r \lambda}}{\frac{2\pi x S}{r \lambda}} \right)^2$$

S étant la demi ouverture de la lentille.

On voit qu'au point A ($x=0$), l'intensité varie avec la grandeur de l'ouverture. La théorie de l'émission nous donnerait au point A une intensité maxima, et pour tous les autres points une intensité nulle. Or ceci n'a pas lieu; on voit d'après la formule précédente que la courbe des amplitudes est une sinusoïde dont les ordonnées maxima vont en diminuant de plus en plus et s'annulent pour toutes les valeurs:

$$\frac{2\pi x S}{r \lambda} = m \pi$$



m étant un entier positif ou négatif, donc pour toutes les valeurs entières de m , (sauf pour

$m=0$) on a des franges noires de plus en plus pâles.

La courbe des intensités a une forme analogue mais les ordonnées ne sont jamais négatives: cette relation simple entre la longueur d'onde λ et la largeur $2S$ de l'ouverture et la largeur $2x$ de la frange centrale a été utilisée par Fresnel comme une méthode pour la détermination des longueurs d'onde: en effet la demi-largeur x de cette frange s'obtient en posant $m=1$

$$x = \pi \frac{r \lambda}{2\pi S} = \frac{r \lambda}{2S}$$

elle est donc proportionnelle à l'ouverture, c'est-à-dire si la largeur absolue de l'ouverture augmente de plus en plus, les franges se resserrent et l'image tend vers une ligne. (1)

Pour les ondes sphériques on a des résultats analogues: les franges sont remplacées par des anneaux alternativement clairs et obscurs et d'autant plus resserrés, que le diamètre de l'objectif est plus grand.

Ce résultat est très-important pour la construction des instruments d'optique:

On s'imaginait autrefois qu'avec un objectif de grande ouverture on pouvait obtenir des images aussi fines que l'on voulait; or nous voyons par la théorie des ondulations que les images ne se réduisent jamais à de simples points au foyer d'une lentille; l'expérience du reste sert à vérifier ce résultat, si l'on observe

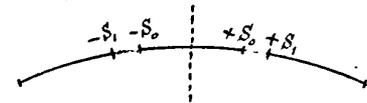


en effet un astre avec un fort télescope on obtient une tache brillante estompée sur les bords et entourée d'anneaux de diffraction d'intensité assez notable. S'il s'agit d'une étoile double les images des deux étoiles se recouvrent

en partie et l'œil ne voit plus qu'une seule masse lumineuse,

D'après le calcul et l'expérience on voit que pour redoubler deux objets dont la distance angulaire est 1" il faut que l'objectif

(1) Note non exigée. - Franges d'interférence avec deux ouvertures égales et parallèles (Expérience des trous de Young perfectionnés par M^{rs} Fizeau par l'observation au foyer d'une lentille sphérique ou cylindrique). L'intégration



ne diffère de celle du cas précédent que par les

limites

$$\left[-\cos z \right]_{-z_1}^{-z_0} + \left[-\cos z \right]_{+z_0}^{+z_1} = 0 \quad \left[\sin z \right]_{-z_1}^{-z_0} + \left[\sin z \right]_{+z_0}^{+z_1} = 2 (\sin z_1 - \sin z_0)$$

Le résultat se met aisément sous la forme.

$$V^2 = 4 K^2 (S_1 - S_0)^2 \left(\frac{\sin \pi x \left(\frac{S_1 - S_0}{r \lambda} \right)}{\pi x \left(\frac{S_1 - S_0}{r \lambda} \right)} \right)^2 \cos^2 \pi \frac{x (S_1 - S_0)}{r \lambda}$$

La discussion des deux facteurs montre qu'il y a superposition de deux systèmes de franges: d'abord les franges de diffraction de l'ouverture $S_1 - S_0$ comme précédemment; et dans l'intérieur de la large frange centrale les franges d'interférence analogue à celle des miroirs de Fresnel données par le facteur $\cos \pi \frac{x (S_1 - S_0)}{r \lambda}$.

ait au moins 12 centimètres de diamètre. Alors les anneaux de diffraction ont moins de $0''$ et l'on voit deux points séparés.

Si l'on veut obtenir le pouvoir de définition, ou pouvoir optique d'une lentille, il faut diviser $0^m 12$ par le diamètre $\frac{0.12}{D}$ on voit ainsi qu'une lentille (ou un miroir)

| | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|----------|
| de 24 ^e de diamètre | peut séparer deux points distants de | $0''$ |
| 36 | | $0'' 33$ |
| 48 | | $0'' 25$ |
| etc | | |

C'est pourquoi dans ces derniers temps on a cherché à construire des miroirs de très-grandes dimensions. (Télescope de Foucault).

Si l'on considère l'œil comme instrument d'optique dont la lentille est le cristallin, on reconnaît que le pouvoir de définition ne peut dépasser une certaine limite : en effet le diamètre de la pupille est d'environ 3 mm.

L'angle minimum que l'œil peut séparer est donc $\frac{0.12}{0.003} = 24''$ C'est-à-dire environ $\frac{1}{2}$ minute c'est l'angle sous-tendu par un millimètre placé à 10 mètres.

Revenons maintenant sur les notions géométriques données au début de l'optique pour voir en quoi ils sont exacts ou non :

On a admis que la lumière se propage en ligne droite. Or cela n'est pas rigoureusement vrai au point de vue physique, mais lorsque les obstacles capables de déranger la marche des ondes, sont symétriquement disposés autour de la droite qui joint la source lumineuse au point éclairé, on peut considérer la marche moyenne comme se faisant en ligne droite. Mais ceci n'est plus vrai si les obstacles sont disposés d'une manière quelconque.

Il n'y a pas de rayons lumineux à proprement parler, mais quand la marche des ondes n'est pas influencée par un obstacle trop voisin, tout se passe comme s'il existait des rayons.

Enfin on ne peut admettre que le foyer d'une lentille soit un simple point mathématique, il n'est qu'une concentration de lumière sur une surface plus ou moins petite, mais possédant des dimensions finies.

Avec ces restrictions on n'a plus besoin de revenir sur la théorie géométrique des phénomènes lumineux.

Citons comme exemple les observations astronomiques et géomé-

-siques, où l'on a besoin de directions très-exactes. On admet que la marche géométrique des rayons a lieu en ligne droite, mais à la condition d'avoir un objectif parfaitement circulaire et de n'avoir aucun obstacle trop rapproché de la direction à observer.

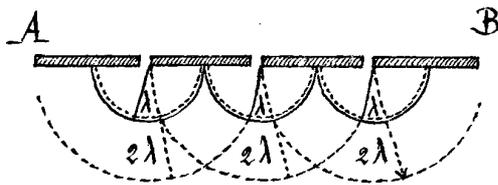
Phénomènes de Diffraction par les réseaux, utilisés pour la mesure des longueurs d'ondes.

On nomme réseau une série d'ouvertures rectilignes parallèles, très-fines, équidistantes, très-nombreuses et dans un même plan.

Ces conditions si nombreuses s'obtiennent sans trop de difficultés dans la pratique. Ainsi Fraunhofer le premier a formé des réseaux en tendant des fils métalliques très-fins sur un cadre convenablement disposé; on en obtient de très-bons en traçant au moyen d'un diamant et d'une machine à diviser une série de raies sur une lame de verre, ou encore par l'action d'un lavis sur une plaque recouverte de noix de fumée ou d'arsenic. (Appareil de Moiré).



Etudions la marche de la lumière qui aurait traversé un semblable système. Supposons qu'une onde plane arrive sur le réseau AB, elle traverse une des fentes, mais il se produit un faisceau qui diffuse la lumière dans toutes les directions car tout passe comme si l'ouverture était un centre d'ébranlement (l'épanouissement de la lumière est d'autant plus grand que la fente est plus fine) Le même phénomène se produit en même temps à chacune des autres fentes.

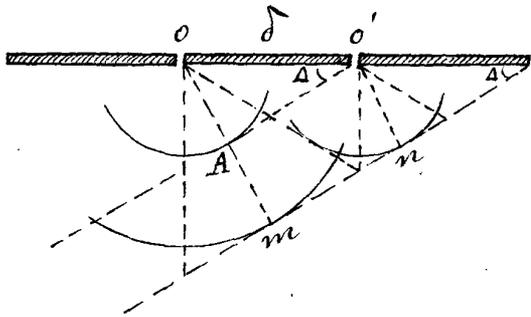


Supposons qu'à l'origine des temps un mouvement vibratoire ait lieu à chaque ouverture, au bout du temps T on aura de petites ondes cylindriques ayant pour axes chacune des fentes, et dont le rayon est pour toutes le même et égal à λ .

Au bout du temps $2T$ on aura des cylindres de rayon 2λ et ainsi de suite. Ces cylindres sont le siège de mouvements identiques qui se composent aux points d'intersection de ces cylindres. Mais ceux-ci se coupent sous des angles très-petits.

(à cause du rapprochement des fentes), et on pourra considérer la droite d'intersection comme confondue avec la génératrice de contact de chacun des cylindres sur le plan tangent commun.

Cherchons les ondes produisant le même mouvement, (mouvements concordants) pour cela menons le plan tangent commun à deux quelconques de ces cylindres la condition de concordance est que : les mouvements vibratoires en m et n , ou ce qui revient au même, en O' et A diffèrent entre eux d'un nombre entier de périodes.



C'est-à-dire $d \sin \Delta = i \lambda$.
 i étant un nombre entier quelconque en représentant par d l'intervalle des deux fentes, et par Δ l'inclinaison du plan tangent sur le plan du réseau.

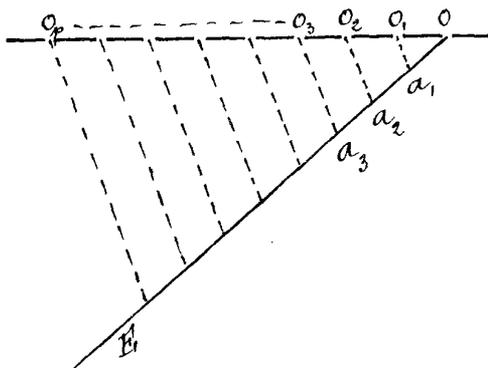
Il en résulte que les plans ainsi définis par la valeur de Δ correspondante à chaque valeur de i , forment des ondes planes (par définition même puisqu'ils sont le

lien des points vibrant synchroniquement). Par suite au sortir du réseau le mouvement vibratoire peut être considéré comme une série d'ondes planes dont les obliquités sont définies par la relation

$$d \sin \Delta = i \lambda$$

ou l'on donne à i les valeurs entières successives et à λ la valeur correspondante à la couleur avec laquelle on opère.

Il est facile de montrer que pour toute direction intermédiaire telle que OE entre deux valeurs consécutives de Δ déterminées comme on vient de le voir, le mouvement vibratoire est détruit complètement.



En effet imaginons qu'entre les mouvements aux points O et a_1 , il y ait une différence de marche représentée par $n \lambda + \epsilon$ (provenant du trajet O, a_1).

Je puis poser $\epsilon = \frac{1}{p} \frac{1}{2}$.

Donc le mouvement envoyé sur le plan OE par O , sera légèrement discordant de celui du point O et la divergence sera :

Discordant de celui du point O

pour le point O_2 la divergence sera: $\frac{1}{2} \frac{\lambda}{2}$

----- O_3 ----- $\frac{2}{p} \frac{\lambda}{2}$

----- O_p ----- $\frac{p}{p} \frac{\lambda}{2} \frac{\lambda}{2}$

Or les plus fortes sont assez rapprochées pour qu'on puisse considérer les fentes O et O_p comme envoyant la lumière sur le même point du plan OE . Ces deux mouvements vibratoires s'annulant d'une marche géométrique $\frac{\lambda}{2}$ se détruisent donc complètement: les mouvements envoyés par les ouvertures O, O_{p+1} se détruisent de même, ainsi que O_2, O_{p+2} etc. ---

Il n'y a donc pas d'onde plane parallèle à la direction OE . Ce phénomène permet de déterminer λ , en effet, une onde plane qui tombe sur un réseau se transforme en une série d'ondes planes dont l'une est la continuation de l'onde primitive (correspondante à $i = 0$), et les autres ont des inclinaisons Δ définies par

$$d \sin \Delta = i \lambda$$

$$\lambda = \frac{d \sin \Delta_i}{i}$$

on aura donc λ fonction de i, d, λ .

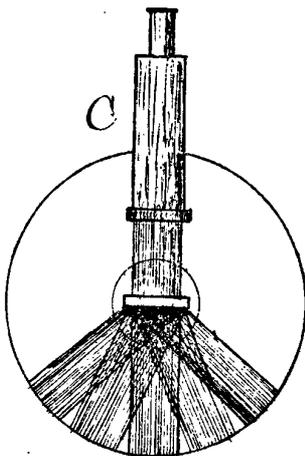
L'intervalle d des fentes se mesure au moyen de la machine à diviser.

Le nombre i est facile à compter.

Reste à mesurer Δ ; on se sert pour cela du Goniomètre: on dispose le réseau verticalement sur le plateau central et on l'éclaire normalement par le collimateur C qui envoie un faisceau parallèle (ondes planes). On reçoit dans la lunette successivement les différents faisceaux émergents (de manière que l'image de la fente du collimateur se fasse à la croisée des fils du réticule) et l'on note sur le limbe gradué, les angles correspondants aux valeurs de i

1. 2. 3. ---

On obtient donc λ sans difficulté



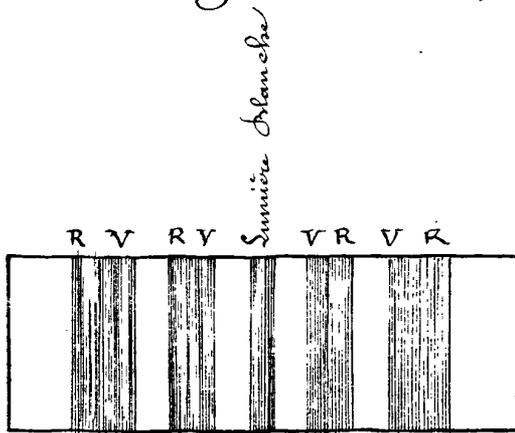
en opérant avec une lumière monochromatique.

Remarquons que la détermination de λ sera susceptible d'une exactitude d'autant plus grande que i sera plus grand. Cherchons en effet l'influence d'une erreur commise sur Δ_i sur la valeur de λ .

Différentions:
$$d\lambda = \delta \frac{d\Delta_i \cos \Delta_i}{i}$$

D'où l'on voit que $d\lambda$ sera d'autant moindre que $\frac{\cos \Delta_i}{i}$ sera lui-même plus faible, or Δ_i grandit avec i , donc $\frac{\cos \Delta_i}{i}$ va en diminuant lorsque i augmente.

La formule $\sin \Delta_i \delta = i \lambda$ nous montre que la déviation varie avec λ et qu'elle est sensiblement proportionnelle à λ pour de petites déviations. Or pour les rayons rouges λ est plus grand que pour les rayons violets, par suite si l'on opère avec la



lumière blanche les rayons rouges seront plus fortement déviés que les rayons violets (c'est le contraire de ce qui se produit avec un prisme) on obtiendra donc un spectre d'autant plus étalé que i sera plus grand.

Si l'on opère avec une lumière monochromatique on obtient une série d'images de la fente ou collimateur. Si on opère avec une lumière

dont le spectre est discontinu on aura des spectres avec raies noires, ainsi la lumière solaire présente les raies de Fraunhofer, et l'on peut mesurer les longueurs d'ondes correspondantes à ces raies.

Ainsi la raie C dans le rouge $\lambda = 656$ millionièmes de millimètre

| | |
|---|--------|
| D | 588.88 |
| F | 486.06 |

21^e Leçon

21^e Leçon.

De l'Ether.

Il nous reste encore deux questions importantes à résoudre :

1^o. Quel est le milieu qui propage le mouvement vibratoire ; sont-ce les corps transparents eux mêmes qui vibrent ?

2^o. Quelle est la nature de ce mouvement vibratoire (longitudinal ou transversal) ?

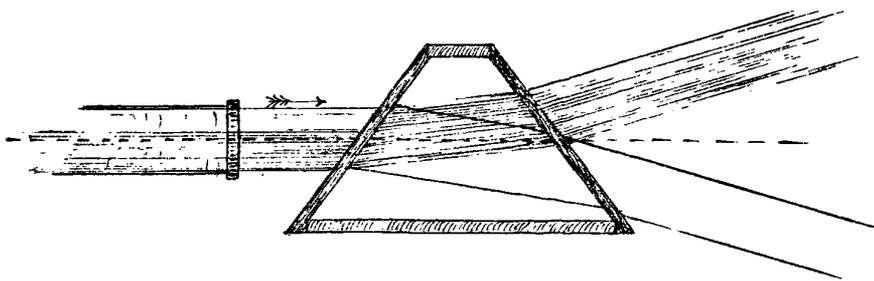
Nous démontrerons successivement : 1^o que ce n'est pas la matière pondérable qui vibre ; 2^o que les vibrations lumineuses les plus simples sont transversales et rectilignes.

Pour démontrer le premier point il suffit de considérer que la lumière se propage dans le vide, et même plus vite que dans les autres milieux. Or on pourrait objecter que ce qu'on nomme le vide, n'est qu'une raréfaction de gaz.

Mais si la lumière avait sa propagation à ces traces de matière pondérable en faisant le vide dans des gaz différents, il ne resterait pas le même résidu, or on montre que la vitesse est la même dans tous les cas. On emploie pour cela la méthode suivante : On a vu plus haut que :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V}{V'} = n$$

Prenez un prisme d'angle très obtus formé d'un tube en verre ou en porcelaine terminé par deux glaces à faces parallèles, formant entre elles un angle très ouvert (car l'indice des gaz est très faible) ou introduit dans ce tube un gaz quelconque sans



on fait le vide et l'on mesure la pression au moyen d'un manomètre barométrique. En éclairant une des faces du prisme au moyen d'un collimateur on observe une déviation δ que l'on mesure (l'appareil étant monté sur un goniomètre). On en déduit la valeur de l'indice n .

On arrive aux résultats suivants :

avec l'air : $n = \frac{V}{V'} = 1.000294$ (V est la vitesse dans le vide, V' dans l'air)

avec l'acide carbonique = 1.000429

avec l'hydrogène = 1.000138

On a sensiblement $\frac{n-1}{\text{densité}}$ une constante qui est la même pour tous les gaz simples.

Le rapport $\frac{V}{V'}$ étant toujours plus grand que l'unité, il s'en suit que la vitesse de la lumière dans le vide est plus grande que dans n'importe quel corps transparent. Ainsi non-seulement la matière pondérable n'est pas nécessaire à la transmission du mouvement lumineux, mais au contraire elle entrave cette transmission.

Nous avons vu dans la dernière leçon que ce n'est pas la matière pondérable qui propage la lumière ; elle se propage dans le vide ; on peut objecter que le vide n'est pas parfait et qu'il reste quelques traces de matière pondérable ; mais il n'est pas probable que dans les espaces interplanétaires où se meut la lumière, le vide ne soit pas absolu ; nous avons vu directement aussi que dans le vide que nous produisons, la lumière a toujours la même vitesse ; si la lumière était transmise par la matière pondérable, la vitesse varierait avec la nature des résidus.

Il faut donc admettre l'existence d'un milieu spécial qui existe dans le vide et que nous appellerons éther ; ce fluide est insensible ; nous ne voulons pas dire par là qu'il n'a pas de masse, (ce serait faux, puisqu'il transporte la force vive de la lumière accompagnée de chaleur) mais seulement que nous ne savons pas le peser.

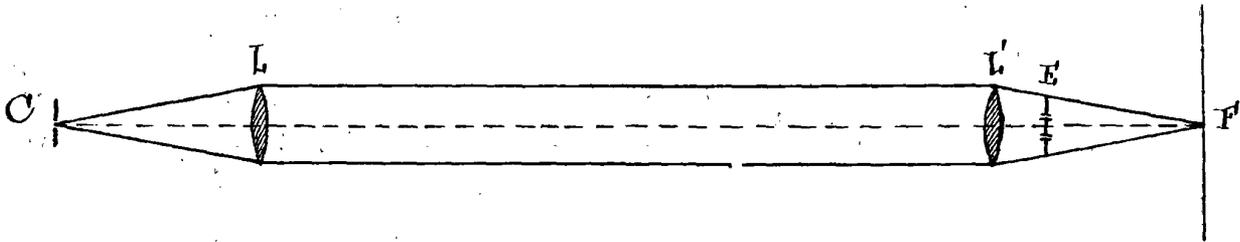
On peut démontrer directement que - 1^o ce n'est pas la matière qui transporte la lumière - 2^o le fluide qui la transmet tantôt n'est pas entraîné par le mouvement des corps, tantôt l'est partiellement : Les considérations sur lesquelles la composition de l'éther est fondée sont dues à Fresnel.

L'expérience qui les vérifie a été réalisée par M^o Fizeau ; En voici le principe : Si la lumière est transportée par les corps, sa vitesse devra s'augmenter ou se diminuer de la vitesse des corps, comme la vitesse du son dans l'air s'augmente ou se diminue

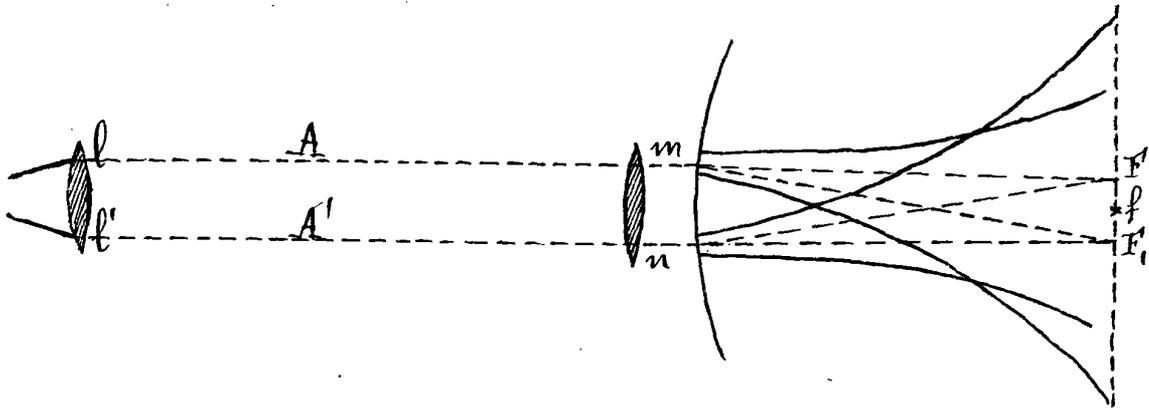
de la vitesse du vent. L'expérience est difficile à réaliser parce que les vitesses les plus grandes que nous puissions imprimer aux corps seront toujours infiniment petites par rapport à celle de la lumière; M. Fizeau s'est fondé sur les phénomènes d'interférence; il a profité de la petitesse des ondes lumineuses.

Au moyen d'un collimateur placé au foyer d'une lentille L , on produit une onde plane; une 2^e lentille L' transforme cette onde en une onde concave,

Supposons que près de cette 2^e lentille on place un écran E



percé de deux petites fentes; l'onde concave en traversant les deux trous s'épanouira; il se formera deux faisceaux épanouis et par suite des ondes sphériques concaves dont les axes convergeront au



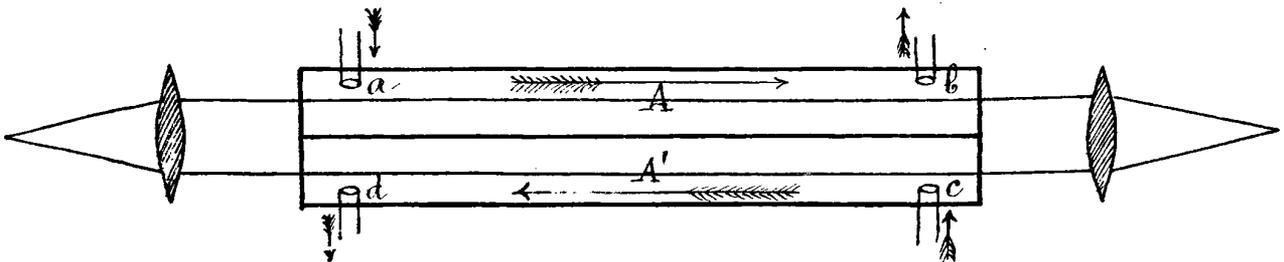
point F ; il se produira des phénomènes d'interférence analogues à ceux que nous avons étudiés dans les ondes convexes avec le miroir de Fresnel; on verra dans le plan focal des franges dont la ligne centrale passera par le point F ; supposons qu'on augmente la vitesse de la lumière sur la ligne A , et que, en arrivant au point m , on ait gagné n longueurs d'onde; le point F s'abaissera en F_1 , tel que la différence $(mF_1 - m'F_1)$ corresponde à n longueurs d'onde; si on augmente la vitesse sur A et si on diminue sur A' le déplacement $F'F_1$ sera double.

Supposons les vitesses égales, nous voyons se former dans le

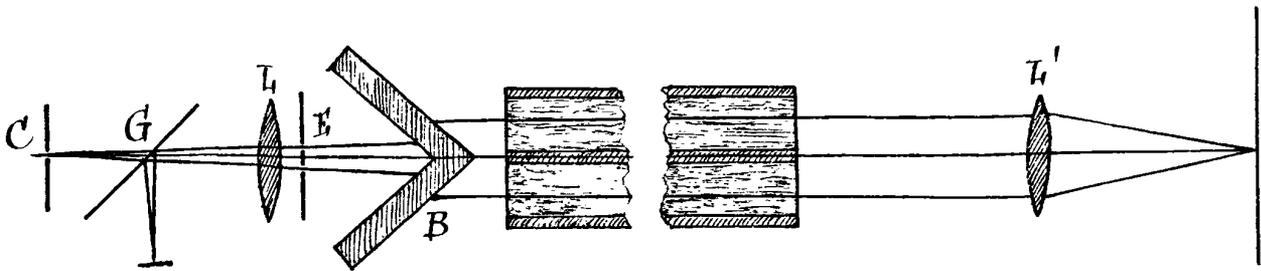
plan $F F'$, des franges, et leurs centres correspondants à des différences de trajet ($m f - m' f'$) de $0, 1, 2, 3, \dots, n$ longueurs d'onde; nous pouvons évaluer avec beaucoup d'exactitude la position de ces centres au moyen d'un micromètre. — Faisons maintenant varier la vitesse en A et A' , F viendra en F' ; nous voyons que $F F'$ correspond à n franges; c'est-à-dire que la différence entre $m F$ et $m F'$ est de n longueurs d'onde, ou ce qui est la même chose que les temps employés à parcourir A et A' diffèrent de $n T$, n périodes.

M. Fizeau plaçait entre deux lentilles un tube fermé par deux lames de verre et divisé par une cloison longitudinale.

Au moyen de tubulures a, b, c, d , on faisait arriver dans



L'appareil un double courant gazeux ou liquide, qui parcourait A et A' en sens contraire et avec même vitesse, en supposant aux deux parties la même section. La cloison qui sépare les tubes est nécessairement épaisse, plus épaisse que la distance des deux fentes de l'écran; et c'est pourquoi M. Fizeau transporte l'écran à côté de la première lentille et reçoit les deux petits faisceaux parallèles qui le traversent sur une Bilame B.



C'est un système de deux lames à faces parallèles, obliques l'une par rapport à l'autre; les deux faisceaux arrivant chacun sur une lame différente se réfractent en sens contraire et sortent encore parallèles mais écartés.

On pourrait craindre que dans cet appareil les deux colonnes gazeuses ne fussent pas bien identiques; qu'il rencontre un échauffement inégal des différentes parties, par suite une modification des indices de réfraction et un déplacement des franges. Pour éviter cette objection M^r Fizeau fait passer les deux faisceaux par les deux tubes; il place un miroir M au foyer de la seconde lentille; les rayons se permutent; celui qui arrivait en A passe dans le tube A' et réciproquement; dans ce double trajet A A' va toujours dans le même sens que le liquide et A' A en sens contraire. Cette disposition a encore l'avantage de doubler le déplacement des franges, quoiqu'elle en diminue un peu l'éclat. Les franges viennent se produire autour de la fente du collimateur, on les rend visibles en arrêtant la lumière à son retour par une glace sans tain G; elles viennent se former en I.

Soit u la vitesse du liquide ou du gaz dans le tube. V la vitesse de la lumière dans ce liquide ou ce gaz, l la longueur du tube; supposons que la lumière soit transportée par la matière, la vitesse résultante sera pour un faisceau $V+u$ et pour l'autre $V-u$; le temps que les faisceaux emploieront à parcourir 2 fois les tubes sera:

$$\text{pour le premier} \quad \dots \quad \frac{2l}{V+u}$$

$$\text{et pour le deuxième} \quad \dots \quad \frac{2l}{V-u}$$

ce qui donne pour la différence

$$\theta = \frac{2l}{V+u} - \frac{2l}{V-u} = 2l \left(\frac{2u}{V^2 - u^2} \right)$$

ou en négligeant la quatrième puissance de $\frac{u}{V}$

$$\theta = \frac{4lu}{V^2}$$

Je réduis cette différence de temps en différence de phase c'est-à-dire en fraction de période:

$$\frac{\theta}{T} = \frac{4lu}{VVT} = \frac{4lu}{V\lambda}$$

Soit δ la distance parcourue par la lumière dans le temps θ on aura encore

$$\frac{\theta}{T} = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{x}{L}$$

en appelant x le déplacement de la frange centrale et L la largeur d'une frange :

En définitive :

$$\frac{x}{L} = \frac{4l}{\lambda} \frac{u}{v}$$

Nous connaissons l , u , v , λ ; nous pouvons donc calculer $\frac{x}{L}$, d'autre part l'observer; et comparer les deux valeurs.

M. Fizeau fit d'abord l'expérience avec un courant d'air de 25^m par seconde; quoique son micromètre lui donnât le 100% de longueur d'onde, il ne trouva aucun déplacement.

Il recommença avec de l'eau dont la vitesse atteignit 7^m ; il observa un déplacement de $\frac{1}{4}$ de longueur d'onde ($0^{\prime}23$), quand il aurait dû trouver $0^{\prime}47$.

Ce ne sont donc pas les corps pondérables qui transportent la lumière; mais néanmoins ils entraînent partiellement le milieu qui la propage.

Ce résultat était prévu par Fresnel; il avait même calculé la valeur de l'entraînement et les nombres que trouva plus tard M. Fizeau par l'expérience vérifient complètement la théorie; soit v la vitesse du corps transparent, n son indice de réfraction, et v' la vitesse d'entraînement. Fresnel avait trouvé :

$$v' = u \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Pour l'air $n = 1.00039$ soit $\varepsilon = 0.00039$

$$1 - \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} = 1 - \frac{1}{1+2\varepsilon} = 1 - (1-2\varepsilon) = 2\varepsilon$$

Le déplacement observé serait $2\varepsilon \frac{x}{L} = 0.00078 \frac{x}{L}$ quantité qu'on peut considérer comme négligeable.

$$n = \frac{4}{3}$$

$$v' = u \left(1 - \frac{9}{16}\right) = \frac{7}{16}u$$

Le déplacement observé doit être un peu plus petit que la moitié de $\frac{x}{L}$ donné par le calcul; en effet M. Fizeau a trouvé 0.23 quand le calcul indiquait 0.47 .

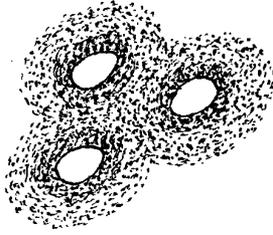
Ces résultats montrent que l'appareil de M. Fizeau est rigoureux et de plus il vérifie la formule de Fresnel que nous avons énoncée et que nous allons démontrer.

Pour y arriver Fresnel est obligé de faire sur la constitution

de l'éther différentes hypothèses.

1^o Il considère les molécules des corps comme ayant des dimensions considérables par rapport aux molécules d'éther ; l'éther peut donc circuler librement entre les molécules des corps, et c'est pourquoi, on ne fait pas le vide de l'éther quand on fait le vide d'un gaz.

2^o Les molécules des corps et de l'éther s'attirent de sorte que l'éther formera autour des molécules du corps une sorte de couche d'autant plus dense qu'on s'approchera davantage de la molécule, comme dans le spectre magnétique les particules de limaille sont d'autant plus serrées qu'elles sont plus près du pôle de l'aimant.



3^o L'éther a une densité.

Comment peut-on se faire une idée de la densité d'un corps impondérable ? Fresnel a raisonné par analogie. Nous savons que la lumière est un mouvement vibratoire, (longitudinal ou transversal) et nous connaissons sa vitesse ; en acoustique nous avons vu que :

$$\text{pour les vibrations longitudinales} \quad V = \sqrt{\frac{e}{d}}$$

$$\text{transversales.} \quad V = \sqrt{\frac{\tau}{d}}$$

e étant l'élasticité du corps et τ la tension, analogue à l'élasticité dans l'autre formule. Fresnel admet que les corps en contact la tension est la même $\tau = \tau'$ ou $e = e'$ selon le mode de mouvement lumineux. Donc en supposant la vitesse de la lumière donnée par une formule analogue à celle du son, on aura à la surface de séparation des milieux :

$$V\sqrt{d} = V'\sqrt{d'} = \sqrt{\tau} \text{ ou } \sqrt{e}$$

$$\text{D'autre part nous savons que } \frac{V}{V'} = n$$

$$\frac{V}{V'} = \frac{\sqrt{d'}}{\sqrt{d}} = n$$

Prenons pour unité de vitesse, la vitesse dans le vide.

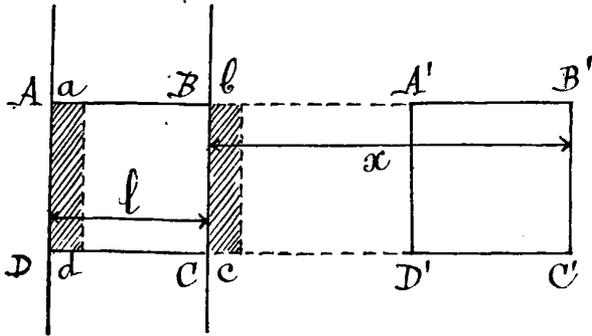
$$V' = \frac{1}{n}$$

et pour unité de densité dans le vide

$$d' = n^2$$

n étant alors l'indice de réfraction de la substance par rapport au vide.

Pour étudier l'entraînement de l'éther le plus simplement possible, nous supposons un corps transparent limité par deux plans infinis parallèles, et se déplaçant dans le vide parallèlement à leur normale; considérons dans ce corps un parallélépipède rectangle $ABCD$; il suffit d'étudier ce qui se passe sur les faces BC et AD ; c'est afin d'être ramenés à ce cas simple que nous supposons le parallélépipède partie d'un corps infini.



Quand le corps est venu en $a.b.c.d$ nous pouvons supposer que le volume $BbCc$ d'éther a été transporté en $AaDd$, ou bien ce qui est

la même chose, que ce volume soit venu former une couche à la partie antérieure du parallélépipède tandis qu'il en est sorti de l'autre côté une couche égale. C'est comme si on avait simplement transporté de $AaDd$ en $BbCc$ un volume d'éther ayant pour densité la différence des densités dans le corps et dans le vide.

Soit $A'B'C'D'$ la position du corps au moment où tout l'éther du corps a été renouvelé c'est-à-dire où la couche BC a été repoussée de l'autre côté du corps; cela revient à dire que la masse d'éther qui occupait dans le vide le volume $AA'DD'$ est équivalente à la masse qui occupe dans le corps le volume $DA'BC'$, soit ω la section commune de ces deux volumes, et d la densité de l'éther dans le corps transparent:

$$x \cdot \omega = l \cdot d \cdot \omega$$

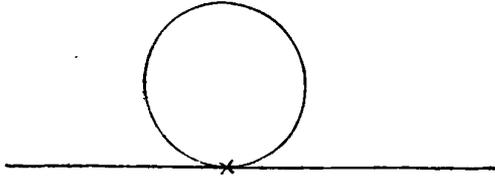
$$x = l \cdot d$$

La tranche qui est entrée dans le corps en AB en est sortie en $D'C'$, c'est-à-dire à la distance $x - l$; sa vitesse d'entraînement est donc $v = \frac{x-l}{t} = \frac{l(d-1)}{t}$; pendant le même temps le corps transparent s'est transporté de la quantité x avec la vitesse u :

$$x = tu = l d.$$

$$v = \frac{u}{d} (d-1) = u \left(1 - \frac{1}{d}\right) = u \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Les remorqueurs à chaîne nous donnent une image de ce genre de transport, si on marque un chaînon au moment où le tambour arrivera sur lui il sera entraîné, et son mouvement s'arrêtera quand il aura parcouru les n tours de chaîne enroulés sur le tambour. Il sera donc transporté de la quantité $2n\pi R$; seulement en ce cas la vitesse d'entraînement est égale à la vitesse du bateau (qui joue le rôle du corps transparent).



22^e Leçon.

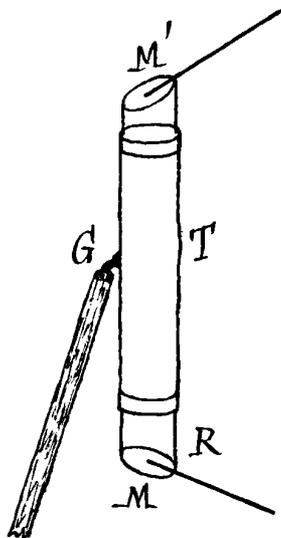
Polarisation de la Lumière.

Nous avons pleinement démontré par toutes les leçons qui précèdent, que la lumière est un mode de vibration, mais nous ne nous sommes pas encore occupés de la nature de ces vibrations : Sont-elles perpendiculaires à l'onde, (longitudinales dans le sens du rayon lumineux) ou parallèles à l'onde (transversales) ? Dans le premier cas, quel que phénomène qu'on arrive à produire, il y aura symétrie tout autour du faisceau ; tous les plans passant par le faisceau seront identiques ; dans le second on verra se révéler des différences de symétrie. On doit à Malus des expériences qui nous serviront à résoudre la question. Voici le premier résultat qu'il obtint :

Les rayons réfléchis sur une lame de verre sous un

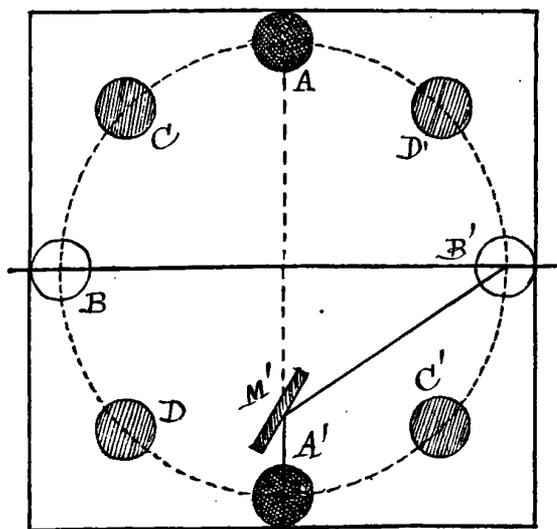
angle de $35^{\circ}\frac{1}{2}$ ($i = 54^{\circ}\frac{1}{2}$ quand on essaie de les faire réfléchir sur une deuxième lame s'éteignent si les deux plans de réflexion sont perpendiculaires et ont un maximum d'intensité si les plans de réflexion sont parallèles.

L'expérience se fait très-simplement en faisant tourner le deuxième miroir autour du rayon réfléchi une première fois; à cet effet un tube monté sur un pied à genoux G, porte à chaque extrémité sur un manchon un miroir (M et M'). Ces miroirs peuvent tourner autour de l'axe du tube par l'intermédiaire du



manchon et autour d'une droite perpendiculaire à cet axe; on les fait d'abord tourner autour de cette seconde droite de manière à leur faire faire avec le tube un angle de $35^{\circ}\frac{1}{2}$ puis on fait tomber sur M un rayon R dans une direction telle qu'il se réfléchisse dans le tube et rencontre M' ce rayon fait alors avec les deux miroirs un angle de $35^{\circ}\frac{1}{2}$.

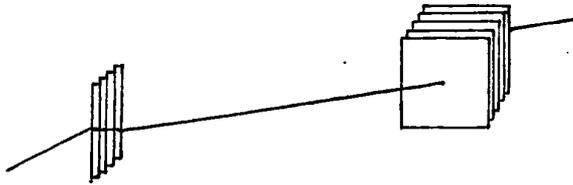
On fait tourner le 2^e miroir autour de l'axe du tube le rayon réfléchi deux fois va décrire un cône de révolution autour de MM'. Plaçons un écran perpendiculaire à cet axe; il coupera le cône suivant une circonférence; mais l'éclat n'est pas le même aux différents points de cette circonférence; en A et A', correspondant à des plans de réflexion perpendiculaire à RMM' l'éclat est nul; il augmente peu à peu quand on s'éloigne de ces points, et devient maximum en B et B' qui correspondent à des plans de réflexion confondus avec RMM'.



Ce phénomène s'appelle: polarisation par réflexion; et on dit que les rayons RMM'A

ou R.M.M'A' sont polarisés complètement?

La polarisation peut aussi se produire par réflexion, il suffit de faire tomber un faisceau lumineux très-obliquement sur deux piles de glaces; l'expérience se fait de la même façon et l'énoncé de la loi est le même.



Les rayons réfractés très-obliquement sur une pile de glaces, quand on essaie de les faire réfracter sur une deuxième pile, s'éteignent si les deux plans de réfraction sont perpendiculaires, et ont un maximum d'intensité quand les plans de

réfraction sont parallèles.

Ces deux modes de polarisation sont identiques; on fait varier l'éclat d'un rayon lumineux réfléchi sur un miroir à $35^\circ \frac{1}{2}$ en le recevant sur une pile de glaces mobile et réciproquement seulement le maximum d'éclat a lieu quand les plans de réfraction et de réflexion sont perpendiculaires, et le maximum quand ils sont parallèles.

On peut rappeler ces quatre lois par un tableau; je désignerai un miroir par M, une pile de glaces par P; j'indiquerai que les plans de réfraction ou de réflexion sont parallèles par deux flèches parallèles et perpendiculaires.

| | Maximum | Minimum |
|----|---------|---------|
| MM | | |
| PP | | |
| MP | | |
| PM | | |

Si les vibrations sont longitudinales, on ne peut guère concevoir les phénomènes de diffraction. Au contraire si elles sont transversales on conçoit que les propriétés ne soient pas identiques dans toutes les directions autour du rayon lumineux. La découverte de Malus montre que dans certaines circonstances un rayon perd effectivement cette symétrie. Cette modification peut être

produite par la réflexion et la réfraction,

Le rayon polarisé à deux plans, de symétrie rectangulaire ainsi que nous l'avons vu à la fin de la dernière leçon, nous allons faire une distinction entre ces deux plans: Étant donné un rayon polarisé quelle que soit sa provenance, on le compare à un rayon polarisé par réflexion, et on appelle: plan de polarisation le plan dans lequel aurait eu lieu s'effectuer cette première réflexion pour que le rayon possédât précisément les mêmes propriétés dans les mêmes azimuts.

Règle pratique pour déterminer le plan de polarisation d'un rayon donné: On cherche à éteindre ce rayon (dont l'azimut de polarisation est inconnu) en le faisant réfléchir sur une lame de verre sous l'incidence de $54^{\circ} \frac{1}{2}$, quand l'extinction est complète, on est sûr que le plan de polarisation cherché est le plan mené par le rayon donné normalement au plan de réflexion du miroir analyseur.

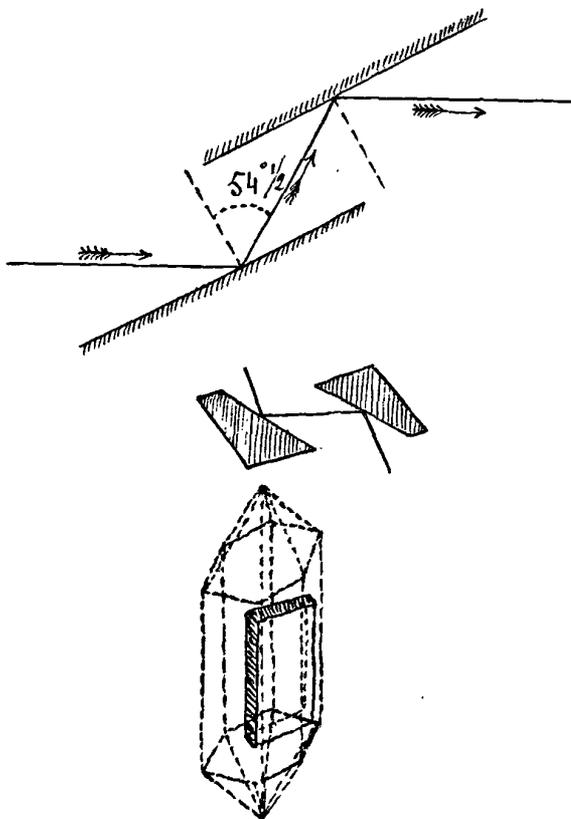
Cette expérience se nomme l'analyse du rayon polarisé. Le miroir sur lequel s'opère la première réflexion se nomme, polariseur, le second est l'analyseur.

Le polariseur le plus simple est la glace de verre dont la seconde face a été noircie (sous une incidence de $54^{\circ} \frac{1}{2}$).

Remarquons que cette réflexion change la direction du rayon incident; si l'on veut le ramener à sa direction primitive, on le fait réfléchir sous le même angle sur un second miroir parallèle on a ainsi un faisceau polarisé ayant même direction que le faisceau primitif de lumière ordinaire (non polarisé).

On peut faire aussi un oculaire polariseur de petites dimensions.

On peut employer comme polariseur une pile de glaces (10 ou 15) mais cet appareil



est moins parfait que le précédent et ne donne pas une polarisation complète.

Quelquefois encore on emploie une lame de tourmaline (substance minérale cristallisée) taillée parallèlement à l'axe du cristal. La lumière qui traverse cette substance est polarisée, et son plan de polarisation est normal à la direction des grandes arêtes de cette lame.

Les polariseurs ne diffèrent pas des analyseurs; ainsi une glace de verre (incidence de $54^{\circ} \frac{1}{2}$) sert à la fois à polariser et à analyser; de même une pile de glaces, ou une lame de tourmaline.

Il existe encore d'autres analyseurs que nous verrons en étudiant la double réfraction.

23^e Leçon.

Les vibrations de la lumière polarisée sont rectilignes et transversales.

Les procédés de Malus pour obtenir de la lumière polarisée paraissent bien particuliers, mais ils sont susceptibles de généralisation: le verre en effet n'est pas la seule substance capable de polariser.

1^{re} Loi. - Toutes les substances transparentes polarisent aussi bien par réflexion que par réfraction.

Ainsi on trouve toujours une incidence pour polariser totalement la lumière par réflexion sur les cristaux naturels I polis, les pierres polies, le bois verni, les liquides, en particulier la surface de l'eau, etc; (les métaux qui sont opaques ne polarisent jamais complètement la lumière).

Cette incidence de polarisation complète, nommée souvent incidence principale est même caractéristique pour chaque substance, ainsi que l'indique la loi suivante.

2^e Loi. - Loi de Brewster. - La tangente trigonométrique de l'angle d'incidence correspondant à la polarisation complète du rayon réfléchi est précisément égal à l'indice de réfraction de la substance réfléchissante

$$\operatorname{tg} I = n$$

D'où l'on déduit deux autres énoncés équivalents de la même loi. Sous l'incidence principale le rayon réfléchi est perpendiculaire au rayon réfracté.

En effet on sait que $\frac{\sin I}{\sin R} = n$

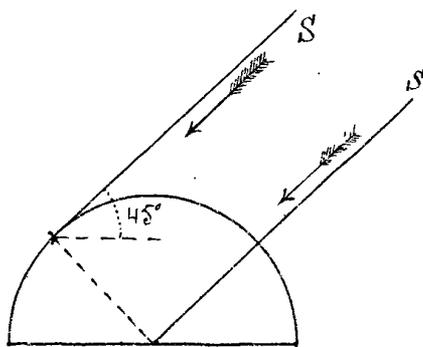
D'autre part $\operatorname{tg} I = \frac{\sin I}{\cos I} = n$ donc $\sin R = \cos I$, $I + R = 90^\circ$

D'où le troisième énoncé.

La somme d'incidence (principale) et de l'angle de réfraction est égal à 90°

Brewster a découvert cette loi en considérant différentes substances sans faire des expériences très-précises. Aussi cette loi a-t-elle été contestée dans l'origine : voici quelques-unes des vérifications qu'on peut indiquer : la première correspond au cas limite $n = 1$

1^o Polarisation de la lumière de l'atmosphère : Arago a découvert que si l'on observe avec un analyseur la région du ciel bleu qui s'étend à 90° autour du soleil environ le ciel paraît noir la lumière bleue du ciel produite par la réflexion de la lumière solaire sur les molécules de l'air est donc presque totalement polarisée.



Brewster remarque que la réflexion doit se faire sous un angle de 45° , c'est-à-dire telles que $i = 45^\circ$ et par suite $\operatorname{tg} i = 1$.

Donc on devrait avoir d'après la loi de Brewster $n = 1$. Or c'est très-sensiblement l'indice

de réfraction de l'air (en négligeant une petite erreur dont on ne peut tenir compte, ou le peu de précision de l'observation).

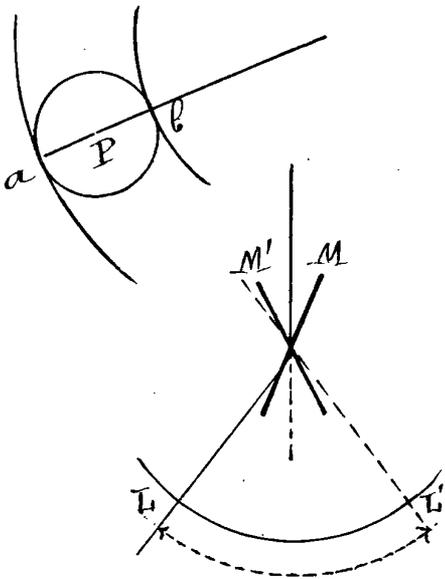
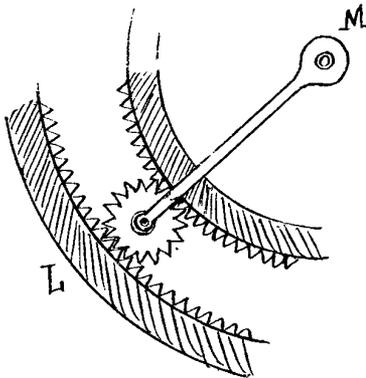
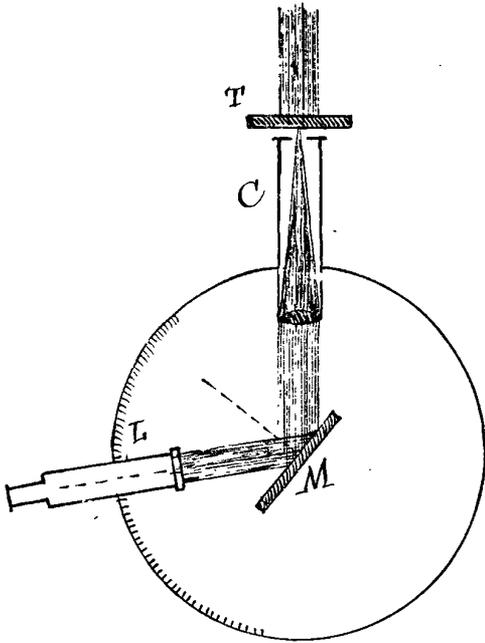
2^o Malus en opérant avec une glace de verre trouvait que l'incidence principale est de $54^\circ 31'$. Or $\operatorname{tg} 54^\circ 35' = 1.406$ c'est sensiblement la valeur de l'indice du verre avec lequel opérait Malus.

Les premières expériences précises sur ce sujet furent faites par Seebeck :

Il se servit d'un cercle gradué analogue au goniomètre : Le collimateur portait une fente précédée d'une lame de tourmaline que traversait la lumière provenant de la source. Cette lame était disposée de telle sorte que le plan de polarisation fut vertical (grandes arêtes horizontales).

Le faisceau lumineux à sa sortie du collimateur était reçu sur une lame polie transparente jouant le rôle d'analyseur. La lumière était réfléchi (sauf dans le cas de l'incidence principale), et on la recevait dans une lunette L qui permettait de lire l'angle sous lequel s'opérait la réflexion,

Difficulté expérimentale
Dans les environs de l'angle d'incidence principale l'extinction est presque complète il faut donc faire mouvoir la lunette assez rapidement, pour pouvoir observer facilement l'instant précis du phénomène que l'on veut observer. Or en même temps que l'on fait tourner la lunette de l'angle α il faut que la plateforme centrale qui supporte le miroir M tourne elle-même rigoureusement de l'angle $\frac{\alpha}{2}$ ce qui ne serait pas facile à obtenir dans la pratique sans la disposition ingénieuse de Seebeck: il a adopté à l'alidade qui porte la lunette L une denture engrenant



avec un pignon fixé à l'extrémité de l'alidade qui détermine le mouvement de la plate-forme centrale. Ce pignon engrène lui-même avec le limbe fixe du goniomètre.

On voit aisément que si le pignon se déplace d'un certain angle, le cercle qui porte la lunette se déplacera de l'angle double car le centre instantané de rotation est en b , donc le déplacement infiniment petit de a est le double de celui de P .

Pour mesurer avec plus d'exactitude, on donne ensuite au miroir M la position M' symétrique de manière à obtenir l'extension, le déplacement de la lunette donne alors l'angle H ($\frac{\pi}{2} - I$),

Ces expériences ont été faites avec beaucoup de précision et on a reconnu qu'avec un poli parfait de la surface réfléchissante, la loi de Brewster est très-exacte.

Les considérations qui précèdent montrent que les propriétés de la lumière réfléchie, dépendent essentiellement des propriétés optiques intérieures de la matière réfléchissante. Nous nous éloignons ainsi de plus en plus de la théorie de l'émission où l'on considérerait la réflexion comme un acte purement mécanique indépendant de la nature du corps réfléchi.

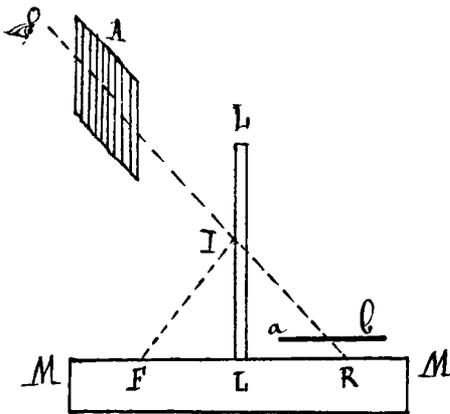
Il n'existe pas d'incidence particulière qui produise une polarisation complète par réflexion: mais on doit à Arago une loi simple qui lie sous ce rapport les propriétés de la réflexion à celles de la réflexion.

3^e Loi (non exigée) - Loi d'Arago. - La quantité de lumière polarisée par réflexion est égale à la quantité de lumière polarisée par réflexion.

Dans ces deux cas, les plans de polarisation sont à angle droit (ou comme on le disait autrefois, la polarisation est contraire). On profite de cette propriété pour démontrer cette proposition avec un dispositif analogue à celui avec lequel Arago

démontra que les anneaux colorés vus par transmission ont la même intensité que les anneaux vus par réflexion.

Une lame de glace TL est placée perpendiculairement à une feuille de papier blanc bien uniformément éclairée par de la lumière naturelle; l'œil placé en O reçoit donc à la fois un faisceau réfléchi FIO et un faisceau



réfracté RIO venant de deux sources également intenses : à l'aide d'une pile de glace A servant d'analyseur, on constate que le faisceau reçu n'est nullement polarisé ; si l'on détruit l'un des faisceaux en plaçant une feuille de papier noir ab d'un côté ou de l'autre de la lame, l'autre seul subsiste et le faisceau qui subsiste présente la polarisation qui convient à l'angle sous lequel la modification s'est opérée.

Telles sont les lois expérimentales relatives à la production de la lumière polarisée : voici maintenant celles qui permettent de définir la nature ou le mouvement vibratoire particulier qui la caractérise.

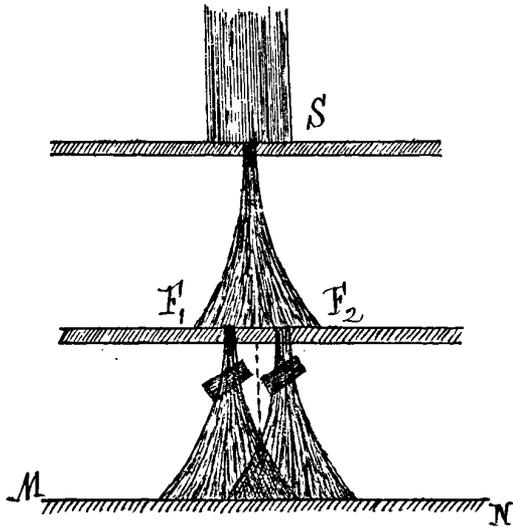
Lois de Fresnel et Arago sur l'interférence des rayons polarisés. On doit à ces deux physiciens une expérience très importante qui rend compte de la nature ou le mouvement lumineux. Fresnel après avoir découvert l'interférence de la lumière (expérience des deux miroirs), rechercha avec Arago si la lumière polarisée, soumise de propriétés si particulières, était soumise aux lois de l'interférence ; ils furent amenés aux deux conclusions suivantes :

1^o Des rayons issus de la même source, polarisée dans des plans parallèles se coupant sous un petit angle, interfèrent comme des rayons de lumière ordinaire.

2^o Des rayons issus de la même source se coupant sous un très petit angle, mais polarisés dans des plans perpendiculaires sont sans action mutuelle apparente.

Fresnel et Arago adoptèrent un dispositif analogue à celui qui avait employé Young précédemment : la source lumineuse est une fente éclairée par le soleil. La lumière épanouie par cette fente est reçue sur un écran percé de deux fentes (distances de 2 ou 3 millimètres). Les faisceaux qui traversent ces fentes s'épanouissent et interfèrent en produisant des franges lumineuses comme l'expérience des deux miroirs.

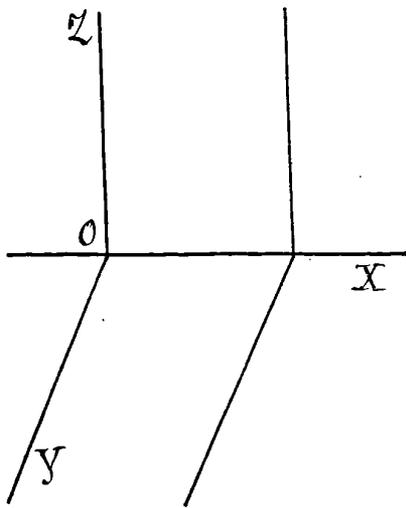
Fresnel et Arago polarisèrent chacun des faisceaux F_1 , F_2 en plaçant sur le trajet de chacun d'eux une pile de glaces (formée de lames extrêmement minces de verre soufflé ou de mica). Ces deux piles étaient aussi identiques que possible : lorsque leurs plans de réfraction étaient parallèles les faisceaux interféraient, mais lorsqu'on les plaçait à angle droit il ne se produisait plus de franges. Mais si l'on faisait varier progressivement l'inclinaison, ces franges apparaissaient de nouveau avec une intensité de plus en plus grande.



En changeant la direction des lames, tout en les maintenant parallèles, on observait un léger déplacement de franges; dû à ce que les deux piles n'étaient pas rigoureusement identiques, le centre des franges ne se trouvait plus exactement au point à égale distance des ouvertures F_1 et F_2 et la position de ce point pouvait varier avec l'augmentation des lames.

versales et non longitudinales.

Nous allons donner la démonstration de Fresnel, modifiée par Serret (car elle manquait un peu de rigueur) Considérons les points essentiels de l'expérience: Deux ondes provenant



d'une même source mais polarisées à angle droit se courent sous un très-petit angle qui serait nul si le point d'observation MN était suffisamment loins: Définissons d'abord l'une de ces ondes: pour cela, Donnons trois axes coordonnées rectangulaires et imaginons une onde plane en régime permanent parallèle au plan YOZ .

D'après les lois de la mécanique, les équations du mouvement élémentaire le

plus général d'un point qui vibre sont:

$$x = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right)$$

$$y = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right)$$

$$z = c \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right)$$

§. 7.3. Étant les variations de coordonnées du point vibrant, C'est le mouvement le plus général, en effet chacune des projections sur les trois axes est une fonction périodique qui peut être développée suivant la série de Fourier dont chaque terme représente un mouvement pendulaire simple. Ces mouvements pendulaires simples parallèles sur chaque axe se composent en un mouvement pendulaire simple unique que l'on représente par chacune des équations ci-dessus.

Ces équations représentent dans l'expérience de Fresnel le mouvement vibratoire du faisceau émis par la fente F, par exemple, en supposant OX parallèle à l'axe de ce faisceau.

Pour l'équation de l'onde formant le second faisceau, que nous supposons polarisé dans un plan rectangulaire, il faudra augmenter chaque phase δ provenant de la différence de marche pour les différents points de l'écran MN, et multiplier chaque amplitude par un coefficient: m d'affaiblissement pour tenir compte de l'inégalité de transparence ou d'inclinaison des piles de mica. En outre les plans de polarisation étant rectangulaires, c'est comme si l'on avait fait tourner de 90° autour de OX les axes: OY et OZ par suite les amplitudes suivant OY et OZ seront respectivement $-m c$, $m b$ et l'on aura:

$$\begin{aligned} \xi &= m a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi + \delta \right) \\ \eta &= m b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi'' + \delta \right) \\ z &= m c \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi' + \delta \right) \end{aligned}$$

Or l'expérience de Fresnel et Arago indique que l'intensité (ou éclaircissement) est constante sur tous les points de l'écran MN, puisque les franges ont disparu. Donc la superposition des deux ondes produit un mouvement vibratoire indépendant de δ , ce mouvement résultant est représenté par les équations:

$$\begin{aligned} X &= a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right) + m a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi + \delta \right) \\ Y &= b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right) - m c \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi'' + \delta \right) \\ Z &= c \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right) + m b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi' + \delta \right) \end{aligned}$$

Cherchons les conditions qui doivent exister entre $a, b, c, \varphi, \varphi'$ pour que l'intensité ou force moyenne de ce mouvement vibratoire soit indépendante de δ . Or si l'on représente par M^2 la force vive d'un mouvement résultant, et par M_x^2, M_y^2, M_z^2 les forces vives moyennes des mouvements composant suivant trois directions rectangulaires, on sait que :

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$$

Appliquons ici ce résultat : On sait qu'en général ; on a (d'après la règle de Fresnel) pour l'intensité d'un mouvement résultant de la composition de deux mouvements vibratoires parallèles

$$V^2 = A^2 + A'^2 + 2AA' \cos 2\pi (\varphi - \varphi')$$

$$\text{Ici nous aurons : } A_y^2 = b^2 + m^2 c^2 - 2mbc \cos 2\pi (\varphi'' - \varphi' + \delta)$$

$$A_z^2 = c^2 + m^2 b^2 + 2mbc \cos 2\pi (\varphi' - \varphi'' + \delta).$$

$$\text{et : } M^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

exprimons que cette somme est indépendante de δ , en posant les termes contenant δ égaux à une constante :

$$2a^2 m \cos 2\pi \delta - 2mbc \cos 2\pi (\varphi'' - \varphi' - \delta) + 2mbc \cos 2\pi (\varphi' - \varphi'' + \delta) = \text{const.}$$

$$\text{ou : } a^2 \cos 2\pi \delta + 2bc \sin 2\pi \delta \sin 2\pi (\varphi'' - \varphi') = \text{const.}$$

$$\text{Or : } \varphi'' \text{ est une constante, donc si nous posons } \begin{cases} \cos 2\pi \delta = x \\ \sin 2\pi \delta = y \end{cases}$$

$$\text{il faudra : } \begin{cases} px + qy = \text{const} \\ \text{avec : } x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} p \text{ et } q \text{ étant des constantes}$$

Or ces conditions exigent que l'on ait $p=0, q=0, \text{const}=0$

$$\text{Ici nous aurons } \begin{cases} a^2 = 0 \\ bc \sin 2\pi (\varphi' - \varphi'') = 0 \end{cases}$$

La première condition : $a=0$ exprime que la composante du mouvement suivant Ox est nulle. Donc le mouvement vibratoire s'effectue dans le plan de l'onde, donc les vibrations sont transversales.

La seconde condition est remplie et si l'on a une des trois relations

$$\begin{cases} b=0 \\ c=0 \\ \sin 2\pi (\varphi' - \varphi'') = 0 \end{cases}$$

$b = 0$ veut dire que le mouvement primitif n'a de composante que suivant Ox , c'est alors un mouvement rectiligne parallèle à Ox .

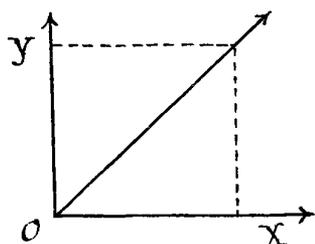
$c = 0$ mouvement rectiligne parallèle à Oy

Enfin, $\sin 2\pi(\varphi' - \varphi'') = 0$ signifie $2\pi\varphi'' - 2\pi\varphi' = i\pi$, i étant entier
 $2\pi\varphi'' = 2\pi\varphi' + i\pi$

substitution du mouvement dans les équations il vient:

$$\begin{aligned} \xi &= 0 \\ \eta &= b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi' \right) \\ z &= c \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi + \frac{i}{2} \right) \end{aligned}$$

Donc le mouvement z a la même phase que η avec une différence de un nombre entier de demi-périodes. Or deux vibrations qui diffèrent de $\frac{1}{2}$ période passent ensemble par zéro et le maximum d'amplitude, donc les deux mouvements vibratoires sont concomitants et l'on a constamment:



$$\frac{\eta}{z} = 1 \frac{b}{c}$$

C'est un déplacement vibratoire qui est encore rectiligne.

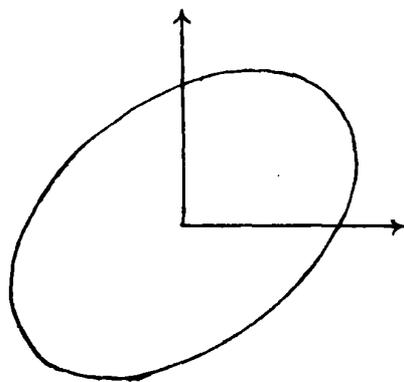
Donc la lumière polarisée est produite par un mouvement rectiligne et transversal.

Remarquons en outre que nous n'avons pas tenu compte de ce que le plan de polarisation est un plan de symétrie. Il en résulte que la vibration de la lumière polarisée est parallèle ou perpendiculaire à ce plan.

Il en résulte que toutes les molécules d'éther situées dans un plan parallèle à l'onde, se déplacent simultanément suivant des droites égales et parallèles d'après la loi:

$$u = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right)$$

On voit facilement pourquoi deux faisceaux polarisés dans les plans parallèles interfèrent, car alors on a des mouvements vibratoires parallèles qui s'ajoutent ou se retranchent, d'où la production des franges. Au contraire si les deux plans de polarisation sont rectangulaires, on a deux mouvements rectilignes



à angle droit, qui ne peuvent jamais se détruire complètement. Leur composition donne lieu à un déplacement elliptique comme nous l'avons vu en acoustique dans l'expérience de Sissajous.

Si nous considérons un rayon lumineux, et toutes les molécules d'éther situées sur cette droite à l'état de repos, à un instant déterminé du mouvement, elles

affecteront la forme d'une sinusoïde, le rayon voisin donnera une sinusoïde identique, qu'on peut considérer comme la première déplacée très-peu perpendiculairement au rayon.

Remarquons encore que l'onde polarisée, c'est-à-dire le lieu des points qui sont à la même phase de leur mouvement, sera une série de plans perpendiculaires à la direction du rayon lumineux, et équidistants d'une longueur d'onde.

21^e Leçon.

Théorie mécanique de la réflexion et de la réfraction.

Nous avons vu que la lumière polarisée est constituée par des vibrations rectilignes et transversales; ce résultat obtenu d'une manière en quelque sorte abstraite par l'interprétation d'une expérience négative demande des vérifications.

1^o, Preuve indirecte dans le fait de la polarisation de la lumière. Comment la lumière ordinaire devient-elle polarisée? Par la disparition de l'une des composantes de la vibration elliptique.

En effet, nous avons reconnu que dans le mouvement vibratoire

D'un rayon polarisé, il n'y a pas de composante dirigée dans le sens de la propagation de l'onde; nous admettons qu'il en est de même pour la lumière ordinaire. Si elle existait, elle apporterait une force vive qui modifierait nécessairement les résultats prévus par le calcul, et nous verrons que tous les résultats fournis par le calcul dans cette hypothèse, sont vérifiés par l'expérience: d'ailleurs la théorie de l'élasticité prouve que les vibrations longitudinales n'ont pas la même vitesse de propagation que les ondes transversales.

La lumière ordinaire sera donc formée d'ondes planes, dans lesquelles les mouvements de chaque point, estimés suivant deux axes rectangulaires situés dans le plan de l'onde d'une manière quelconque, sont représentés par les équations.

$$y = b \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

$$z = c \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right)$$

C'est-à-dire que la molécule d'éther doit être animée d'un mouvement elliptique, l'ellipse étant toujours placée dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation, mais changeant sans cesse de forme.

On peut alors concevoir comment la lumière ordinaire se polarise par réflexion. Les deux composantes du mouvement elliptique sont en effet modifiées par la réflexion, en général d'une manière inégale, et se recomposent après en donnant un autre mouvement elliptique; mais si l'une des composantes, choisie d'ailleurs dans une direction arbitraire, est complètement éteinte, l'autre subsistera seule après réflexion, donnera un mouvement rectiligne et transversal, et le rayon sera polarisé. Ce raisonnement s'appliquerait aussi bien à tout phénomène optique tendant à modifier la constitution du rayon lumineux. Recherchons maintenant dans quelle direction s'effectue la vibration transversale et rectiligne qui constitue un rayon polarisé.

2^e. Preuve numérique de la transversalité et de la rectilignité des vibrations de la lumière polarisée.

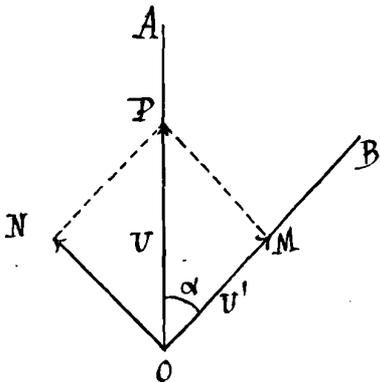
Soit de Malus. — L'intensité d'un rayon polarisé par une réflexion sous l'angle d'incidence principale est après une seconde réflexion sous le même angle proportionnelle au carré du cosinus de l'angle que font entre eux les plans de réflexion sur les deux lames.

Cette loi est facile à vérifier avec ce que nous savons de la composition d'un rayon polarisé.

Un faisceau de lumière naturelle tombe sur le premier miroir, le mouvement elliptique peut être décomposé en deux mouvements rectangulaires, situés, l'un dans le plan de réflexion, l'autre perpendiculaire à ce plan.

Puisque après réflexion, il n'y a plus qu'une vibration rectiligne, l'une des composantes est détruite, l'autre se conserve, tout en pouvant s'affaiblir; mais nous n'avons pu décider si c'est la vibration située dans le plan de polarisation, ou celle qui lui est perpendiculaire, qui se conserve. Nous allons faire successivement chacune de ces deux hypothèses, et expliquer dans chacune d'elle la loi de Malus.

Supposons d'abord que la composante qui se conserve, soit située dans le plan de polarisation, c'est-à-dire dans le plan de la réflexion sur le premier miroir.



Prenez le plan du tableau perpendiculaire aux deux plans de réflexion; soit OA la trace du plan de la première réflexion, OB la trace du plan de la seconde. Soit OP la projection de l'amplitude du rayon après sa première réflexion; décomposons-la en deux, OM projection de OP sur le plan OB et ON projection de OP sur une perpendiculaire en O au plan B .

Dans l'hypothèse actuelle, la composante OM subsiste seule: or on a:

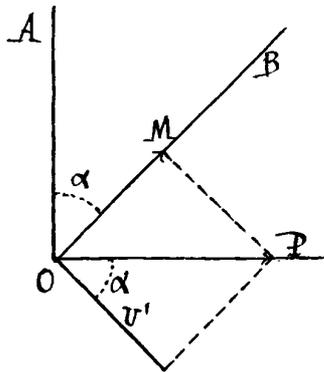
$$V' = V \cos \alpha$$

Soit I l'intensité du rayon après sa seconde réflexion, I_0 celle après la première; comme ces quantités sont proportionnelles aux carrés de V et V' , on aura, k désignant un coefficient constant,

$$I = k I_0 \cos^2 \alpha$$

Supposons maintenant que la composante qui subsiste est celle qui est perpendiculaire au plan de réflexion; soient encore OA et OB les traces des deux plans de réflexion, OP la

Composante qui subsiste après la première réflexion, OM et ON les deux composantes situées, l'une dans le plan de la seconde réflexion l'autre perpendiculairement à ce plan; c'est ON qui subsiste dans notre hypothèse et comme l'angle $PON = AOB$, on a encore :

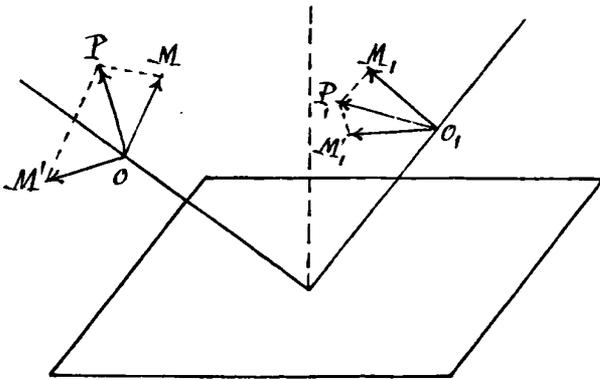


$$V' = V \cos \alpha$$

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha$$

Conséquences - Un faisceau de lumière complètement polarisée reste polarisée après une réflexion ou une réfraction - Sa vibration

rectiligne ou rayon polarisé pourra être décomposée en deux autres vibrations rectilignes l'une OM parallèle au plan d'incidence, l'autre OM' perpendiculaire; par raison de symétrie, nous avons tout lieu de croire que ces composantes



ne cessent pas après réflexion, d'être, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à ce plan, ces deux composantes sont altérées; l'une d'elle, même peut être complètement détruite et dans ce cas on a encore un mouvement rectiligne après réflexion; dans le cas où elles subsistent toutes deux, comme toutes les composantes parallèles seront affaiblies dans le même rapport,

on aura des mouvements rectilignes tels que O_1M_1 , O_1M_1' , formant des rectangles semblables, dont les diagonales O_1P_1 , sont parallèles quel que soit le point ou rayon que l'on considère, et l'on voit que le mouvement est encore rectiligne et transversal.

L'expérience vérifie cette conclusion.

Il nous reste encore un élément indéterminé dans la constitution d'une onde polarisée rectilignement c'est la direction de la vibration relative au plan de polarisation. Par raison de symétrie cette direction doit être parallèle ou normale à ce plan; les expériences précédentes ne permettent pas de lever l'indétermination.

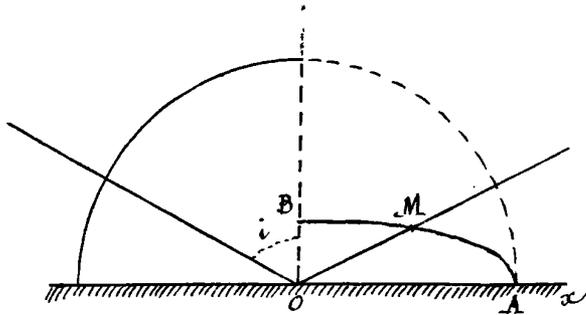
Si Étude approfondie du phénomène de la réflexion de la lumière

polarisée nous donnera la solution du problème.

Étude spéciale de la réflexion de la lumière polarisée. — Prenons une lame transparente sur laquelle nous faisons tomber un rayon polarisé. Examinons deux cas particuliers intéressants.

1° le plan d'incidence est parallèle au plan de polarisation du faisceau incident.

Cela veut dire que si le rayon avait été polarisé par réflexion, le plan de cette réflexion eût été parallèle au plan incident que nous considérons.

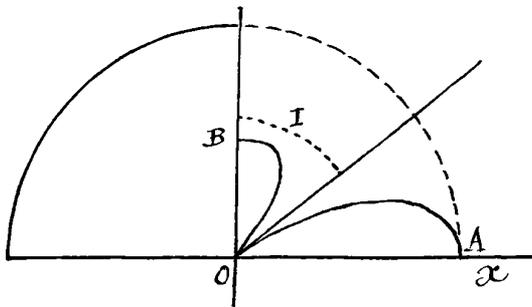


Si l'on fait varier l'angle d'incidence depuis 90° jusqu'à 0 on voit que l'intensité du rayon réfléchi, varie depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{20}$ d'une manière continue, en prenant pour unité l'intensité du rayon incident.

Si l'on porte sur le rayon réfléchi à partir du point O une longueur proportionnelle à son intensité, on obtient une courbe telle que A.M.B.

2° le plan d'incidence est perpendiculaire au plan de polarisation (si on avait voulu polariser le rayon par réflexion, le plan de cette réflexion eût été perpendiculaire au plan d'incidence que nous considérons).

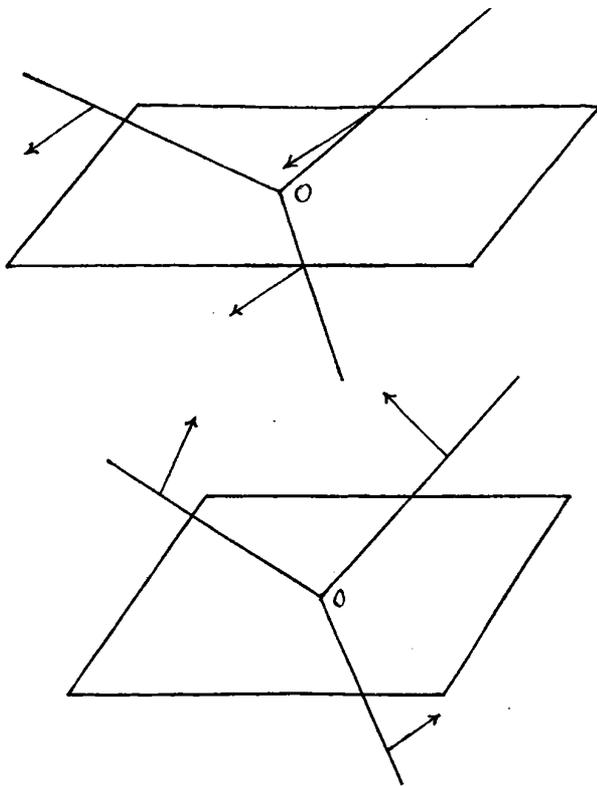
L'intensité est la même que dans le cas précédent pour $i = 0$ et $i = 90^\circ$. Dans l'intervalle elle devient nulle quand l'angle d'incidence est l'angle de la polarisation complète I. Dans ce cas, la courbe des intensités présente la forme A.O.B.



Ces deux expériences permettent de déterminer avec une certaine probabilité la direction des vibrations transversales.

Dans le premier cas où la courbe ne présente aucun accident, il est naturel d'admettre que les

vibrations sont perpendiculaires au plan d'incidence; car en passant du rayon incident au rayon réfléchi, les vibrations ne changent pas de direction. Il y aura au contraire discontinuité probable quand les vibrations seront situées dans le plan d'incidence parce que la vibration réfléchie et la vibration réfractée occupent par rapport



à la direction de la vibration incidente les directions les plus variées,

On est donc conduit à penser que quand la lumière est polarisée dans le plan d'incidence, les vibrations sont situées dans ce dernier plan, c'est-à-dire que, dans tous les cas, la vibration est perpendiculaire au plan de polarisation.

C'est à Fresnel qu'on doit une théorie mécanique des phénomènes précédents, qui démontre la réalité de cette dernière hypothèse en donnant des résultats que l'expérience vérifie.

Théorie mécanique de la réflexion et de la réfraction

Des ondes lumineuses.

Considérons une onde plane indéfinie tombant sur une surface réfléchissante; elle se transforme en une onde plane réfléchie et une onde plane réfractée. Isolons dans ces masses d'éther qui ont un régime permanent trois parallélépipèdes ayant une base commune de surface Ω , sur la surface de séparation des deux milieux et dont les arêtes sont parallèles respectivement aux trois rayons, incident, réfléchi et réfracté. Par raison de symétrie, ces prismes étant des parties d'ondes indéfinies, on peut supposer que tout le mouvement qui se propage dans ces parallélépipèdes y demeure.

1^o Toutes les molécules d'éther situées dans un plan normal à la direction des arêtes d'un des parallélépipèdes ont des vitesses égales et parallèles. C'est la définition même de l'onde plane.

2^o, A un moment donné, les lieux des points ou les molécules d'éther ont la même vitesse avec même direction et même sens, sont des plans équidistants normaux aux arêtes distants respectivement d'une longueur d'onde.

On peut donc diviser chacun de ces prismes en parallélépipèdes rectangles égaux formant des concavités identiques.

3^o Sur un de ces plans, les vitesses redeviennent identiques à

à des époques équidistantes séparées par la période T du mouvement vibratoire.

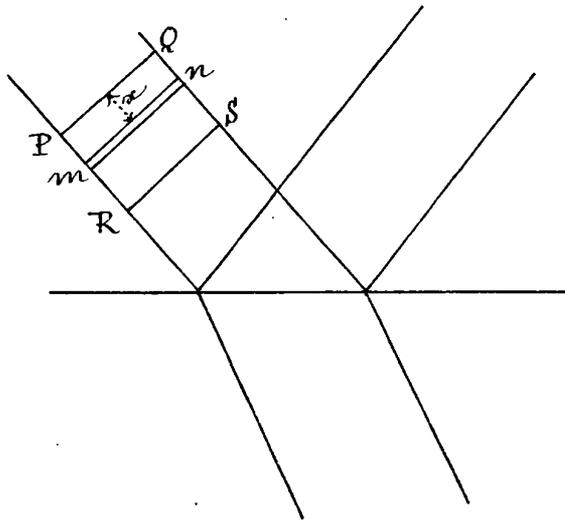
Il y a donc deux périodicités l'une dans l'espace, et l'autre dans le temps. Tout se passe comme si une concavération se répétait d'un mouvement uniforme dans chaque prisme avec des vitesses respectivement égales à V, V_1, V_2 , et telles que $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$, étant les longueurs d'onde correspondant à chaque mouvement on ait :

$$\lambda = VT, \quad \lambda_1 = V_1 T, \quad \lambda_2 = V_2 T.$$

Les vitesses sont différentes, mais quand une concavération a avancé d'une longueur d'onde dans l'un des prismes, dans le même temps les concavérations ont aussi avancé d'une longueur d'onde dans les autres prismes.

Écrivons que la force vive dans une concavération incidente est égale à la somme des forces vives des concavérations réfléchies et réfractées; il serait d'ailleurs équivalent d'écrire que la force vive qui traverse dans l'unité de temps un plan normal au prisme incident, est égale

à la somme des forces vives qui passent dans des plans normaux aux prismes réfléchis et réfractés dans le même temps.



Considérons une concavération de l'onde incidente comprise entre deux plans PQ, RS ; soit une tranche $m n$ d'épaisseur x à une distance x de PQ . Le déplacement d'une molécule dans cette tranche est :

$$u = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi + \frac{x}{\lambda} \right)$$

Il en est de même de toutes

les molécules de la tranche $m n$.

La vitesse est

$$\frac{du}{dt} = A \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi + \frac{x}{\lambda} \right)$$

La force vive de ces molécules est $m v^2$; la masse totale est $\omega \cdot dx \cdot M$, ω étant la section droite du prisme, et δ la densité de l'éther dans le milieu; la force vive pour la tranche $m n$

sera donc :

$$\omega \cdot dx \cdot \delta A^2 \frac{4\pi^2}{T^2} \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi + \frac{x}{\lambda} \right)$$

Pour toute la concamération la force vive est :

$$\mathcal{F} = \int_0^\lambda \omega dx \delta A^2 \frac{4\pi^2}{T^2} \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi + \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\mathcal{F} = \omega \delta A^2 \frac{4\pi^2}{T^2} \int_0^\lambda dx \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi + \frac{x}{\lambda} \right)$$

Changeons de variable ; posons :

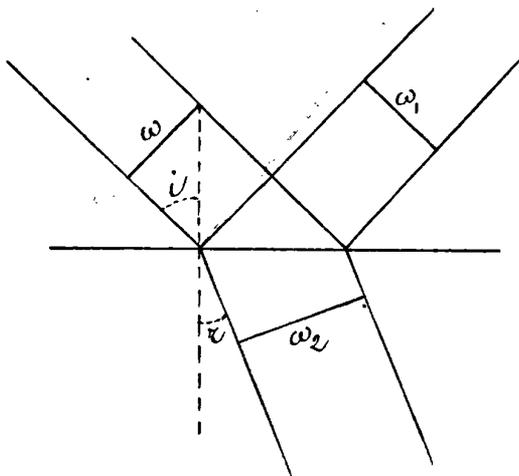
$$\frac{x}{\lambda} = z \text{ d'où } dx = \lambda dz$$

il vient :
$$\mathcal{F} = \omega \delta A^2 \frac{4\pi^2}{T^2} \lambda \int_0^1 dz \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi + z \right)$$

Effectuons le même calcul pour les deux autres concamérations ; remarquant que la quantité sous le signe \int sera la même pour les trois concamérations, et écrivant que la somme des forces vives réfléchies est égale à la force vive incidente, on aura, A_1, A_2 , désignant les amplitudes des mouvements dans les deux autres prismes ω_1, ω_2 , leurs sections droites λ_1, λ_2 , les longueurs d'ondes correspondantes et δ_1, δ_2 la densité de l'éther dans ces milieux.

$$H \omega \delta A^2 \frac{4\pi^2}{T} \lambda = \left(\omega_1 \delta_1 A_1^2 \frac{4\pi^2}{T^2} \lambda_1 + \omega_2 \delta_2 A_2^2 \frac{4\pi^2}{T^2} \lambda_2 \right) H$$

H désigne le facteur intégral commun aux deux membres ; il n'est ni nul, ni infini puisque tous les éléments de l'intégrale sont finis et positifs. On peut donc supprimer H dans les deux membres et il reste :



$$\omega \delta A^2 \lambda = \omega_1 \delta_1 A_1^2 \lambda_1 + \omega_2 \delta_2 A_2^2 \lambda_2$$

Mais les sections droites $\omega, \omega_1, \omega_2$ sont les projections de la base commune Ω des parallélépipèdes, on aura :

$$\omega = \Omega \cos i$$

$$\omega_1 = \Omega \cos i$$

$$\omega_2 = \Omega \cos r$$

De plus on a :

$$\lambda = VT, \quad \lambda_1 = VT, \quad \lambda_2 = V_2 T \text{ d'où}$$

Or on a $v = v_1$ et $\frac{v_2}{v} = \frac{1}{n}$; on a donc en prenant v pour
 mètre $\frac{\lambda}{v} = \frac{\lambda_1}{v_1} = \frac{\lambda_2}{v_2}$

Enfin la densité de l'éther dans un milieu réfringent est pro-
 portionnelle au carré de l'indice de réfraction du milieu, on a donc

$$\frac{d}{v} = \frac{d_1}{v_1} = \frac{d_2}{v_2}$$

L'équation obtenue devient donc, en supprimant le facteur
 commun Ω

$$\cos i \cdot 1 A^2 = \cos i \cdot 1 A_1^2 + \cos r \cdot n^2 A_2^2 \frac{1}{n}$$

$$(A^2 - A_1^2) \cos i = A_2^2 n \cos r$$

Remplaçons n par $\frac{\sin i}{\sin r}$; il vient:

$$(A^2 - A_1^2) \cos i \sin r = A_2^2 \cos r \sin i$$

Ce résultat suppose que l'éther ne transmet pas à la
 matière une partie de sa force vive, c'est-à-dire que le corps
 est parfaitement transparent.

Nous n'avons fait aucune hypothèse sur la direction du
 mouvement vibratoire; nous n'avons même pas supposé que la
 lumière fût polarisée; on pourrait donc appliquer la formule
 à la lumière naturelle, en la décomposant en une infinité de
 vibrations rectilignes formant deux systèmes rectangulaires, et
 faisant la somme des forces vives dans chacun des systèmes.

Considérons pour simplifier le cas de la lumière polarisée;
 tâchons de voir en lui appliquant la formule trouvée, si le
 mouvement vibratoire est réellement perpendiculaire au plan de
 polarisation.

1°. Supposons d'abord qu'un rayon polarisé tombe sur
 une glace de manière que le plan d'incidence coïncide avec
 le plan de polarisation. Dans notre hypothèse, la vibration
 est alors perpendiculaire au plan d'incidence.

Posons: $A = 1$, $A_1 = a$, $A_2 = b$.

a et b sont les coefficients d'affaiblissement du rayon
 réfléchi et du rayon réfracté.

Nous avons l'équation déduite du principe des forces vives.

$$(1-a^2) \cos i \sin r = b^2 \cos r \sin i$$

Une deuxième équation se déduit du principe de continuité. Considérons des molécules infiniment voisines de la surface de séparation au-dessus de l'amplitude du mouvement de l'éther est b ; au-dessus les ondes incidentes et réfléchies se superposent, et l'amplitude des vibrations pour des points voisins de la surface dans la partie commune aux deux ondes est $1+a$, puisque les vibrations sont parallèles et s'ajoutent intégralement à la surface de séparation, les amplitudes sont nécessairement les mêmes donc :

$$1+a=b$$

La résolution des deux équations précédentes donne :

$$a = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} \quad b = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)}$$

2^e Supposons que le plan d'incidence soit perpendiculaire au plan de polarisation; c'est-à-dire que les vibrations soient parallèles au plan d'incidence

Soient $A=1$ $A_1=a'$ $A_2=b'$ nous avons

$$(1-a'^2) \cos i \sin r = b'^2 \cos r \sin i$$

Cherchons l'équation de continuité; pour cela égalons les composantes horizontales des trois mouvements; on aura

$$(1-a') \cos i = b' \cos r$$

La résolution de ces deux équations nous donne

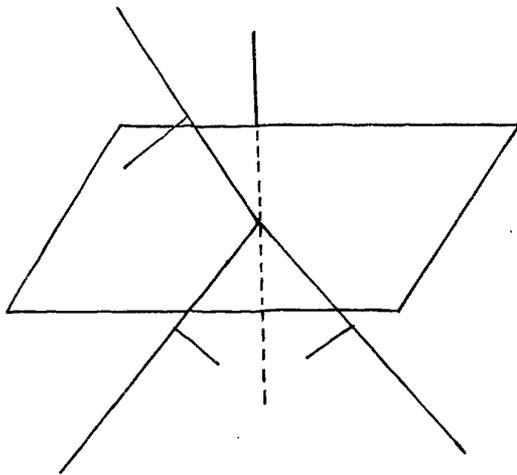
$$a' = \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}$$

$$b' = \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r) \cos(i-r)}$$

Ces formules rendent parfaite-

ment compte des phénomènes observés.

Si nous formons pour les diverses valeurs de i le carré de a, a' ,



b et b' , qui représentent les intensités des rayons réfléchis et réfractés dans les deux cas, nous aurons des valeurs qui concourent avec les formes des courbes que nous avons obtenues expérimentalement.

1^o Pour $i = 90^\circ$ les formules du premier cas nous donnent:

$$a = \frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)} \text{ comme } i = 90^\circ \text{ cette formule devient?}$$

$$a = \frac{\cos r}{\cos r} = -1$$

Pour $i = 0$, $r = 0$; on a indétermination; mais on peut remplacer i par $n r$ et l'on a:

$$a = \lim - \frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)} = - \frac{i - r}{i + r} = \frac{r(n-1)}{r(n+1)} = \frac{n-1}{n+1}$$

Dont le carré est égal à environ $\frac{1}{20}$; dans l'intervalle de $i = 90^\circ$ à $i = 0$ le dénominateur de a ne s'annule jamais, et le numérateur non plus; puisque i est toujours plus grand que r .

On voit donc que l'intensité du rayon réfléchi varie d'une manière continue de 1 à $\frac{1}{20}$; c'est ce que nous avons trouvé expérimentalement.

2^o. Prenons le second cas.

Pour $i = 90^\circ$ on a:

$$a = \frac{\operatorname{tg}(90 - r)}{\operatorname{tg}(90 + r)} = -1 \text{ d'où } a' = a$$

Pour $i = 0$ $r = 0$

$$a = \frac{\operatorname{tg}(i - r)}{\operatorname{tg}(i + r)} = \lim \frac{i - r}{i + r} = \frac{n-1}{n+1} \text{ d'où } a' = a$$

Dans l'intervalle a' s'annule pour $i + r = 90^\circ$; phénomène que l'expérience vérifie:

Si nous avions supposé que la vibration s'effectue dans ce plan de polarisation, les formules du premier cas se seraient appliquées aux phénomènes observés dans le second, et réciproquement. Cette hypothèse est donc inadmissible et l'on doit conclure que les vibrations de la lumière polarisée sont perpendiculaires au plan de polarisation.

25^e Leçon.

Les formules de Fresnel établies ci-dessus dans deux cas qui paraissent au premier abord si particuliers (puis-
qu'elles supposent une vibration rectiligne, soit parallèle soit
perpendiculaire au plan d'incidence) sont cependant suffisantes
pour résoudre tous les problèmes relatifs à la réflexion et à la
réfraction de la lumière polarisée ou non.

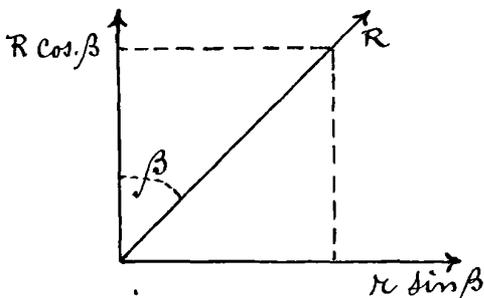
1^o Réflexion et réfraction de la lumière polarisée dans
un azimut quelconque.

Soit i l'amplitude de la vibration incidente faisant un angle
 α avec le plan d'incidence; R l'amplitude réfléchie faisant un
angle β avec le même plan et F l'amplitude réfractée faisant
un angle γ ; Comme on a donné arbitrairement l'amplitude
incidente et l'azimut de la vibration, il ne reste que quatre
inconnues R, F, β et γ .

Pour les déterminer, il suffira de décomposer l'amplitude
incidente en deux composantes, l'une parallèle au plan d'in-
cidence, avec l'amplitude $\cos \alpha$, l'autre perpendiculaire avec
l'amplitude $\sin \alpha$, on est alors ramené au cas précédent.

Traitons ces deux composantes comme nous l'avons vu
dans la dernière leçon, on voit que les amplitudes réfléchies
sont respectivement $\left\{ \begin{array}{l} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \end{array} \right.$

Donc après réflexion nous avons encore deux compo-
santes rectangulaires (l'une
normale au plan d'incidence, l'autre
située dans ce plan), et comme
la transformation des mouvements
a lieu au même instant, leur dif-
férence de phase est nulle, elles se
composent donc en un mouvement
vibratoire rectiligne, soit R son



amplitude, et β son angle avec le plan d'incidence; on aura:

$R \cos \beta = a' \cos \alpha$ dans le plan d'incidence,

$R \sin \beta = a \sin \alpha$ normalement à ce plan,

d'où l'on déduit

$$R^2 = a'^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{et } \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{a'} \operatorname{tg} \alpha$$

qui permettent de calculer l'intensité de la lumière réfléchie polarisée, et l'angle β de la vibration réfléchie avec le plan d'incidence

On trouverait de même en représentant par F et γ l'amplitude et l'angle du mouvement vibratoire du rayon réfracté.

$$\begin{cases} F \cos \gamma = b \cos \alpha \\ F \sin \gamma = b \sin \alpha \end{cases}$$

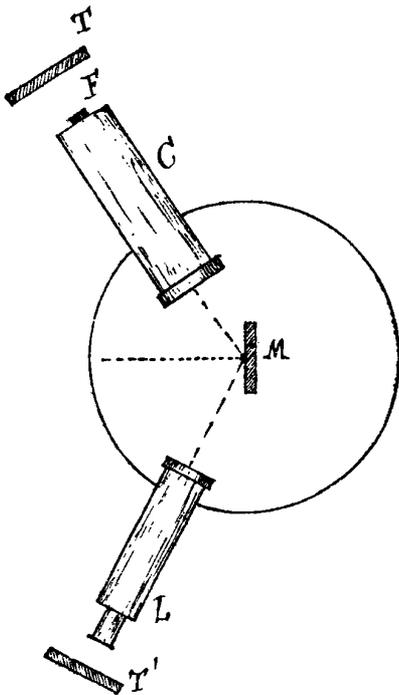
$$F^2 = b^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b}{b'} \operatorname{tg} \alpha.$$

On peut donc calculer : 1^o, l'intensité de la lumière polarisée réfléchie R^2 ou réfractée F^2 dans une direction quelconque, et 2^o, les azimuts β et γ des plans de polarisation de ces rayons.

Des expériences photométriques permettent de vérifier les valeurs théoriques des intensités

Quant aux azimuts de polarisation on peut également les déterminer par expérience et comparer l'observation avec la théorie, à cet effet : on fait arriver sur une glace polie verticale dirigée au centre



goniometre un faisceau polarisé dans une direction quelconque au moyen d'un collimateur et d'une tourmaline par exemple.

La lumière est réfléchie par le miroir, on la reçoit dans la lunette dont l'oculaire est précédé d'une tourmaline (taillée comme on l'a vu plus haut de manière que les grandes arêtes soient parallèles à l'axe du cristal). Or nous savons qu'un rayon qui a traversé une semblable lame est polarisé, et que son plan de polarisation est perpendiculaire aux grandes arêtes; la vibration étant normale au plan de polarisation, sera par suite parallèle à la direction de ces arêtes.

Or ici le plan d'incidence est horizontal (parallèle au limbe) par suite l'angle α de la vibration du rayon incident FM avec le plan d'incidence sera donné précisément par l'angle des grandes arêtes de la première tourmaline I avec le plan horizontal.

Après réflexion en M , le rayon réfléchi MI (qui reste polarisé) possède un mouvement vibratoire rectiligne dont l'angle avec le plan d'incidence est β . Si l'on reçoit ce rayon sur la tourmaline I' de manière que l'angle des grandes arêtes avec le plan ou limbe soit β , la lumière transmise aura l'intensité maxima, si au contraire on tourne de 90° , l'extinction aura lieu. Par suite pour avoir la valeur de β il suffit de tourner la tourmaline I' jusqu'à ce qu'on arrive à l'extinction, à ce moment l'inclinaison des arêtes sera $90^\circ + \beta$.

Pour faciliter la lecture des angles α , $90^\circ + \beta$, les deux tourmalines sont montées sur des cercles verticaux gradués qui permettent de mesurer les inclinaisons.

On a vérifié ainsi la formule

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{a'} \operatorname{tg} \alpha.$$

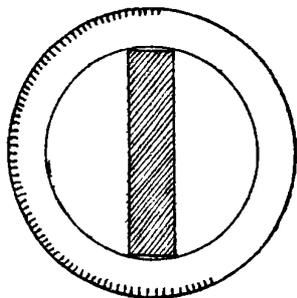
On est toujours ramené à une mesure d'intensité. Mais l'œil juge mieux une intensité qui s'annule,

que l'égalité de deux intensités, comme dans la photométrie. Cette mesure est donc en général plus précise que les précédentes.

On doit considérer les formules de Fresnel comme parfaitement justifiées par l'expérience.

2^o De la lumière naturelle, ou non polarisée: On doit la considérer comme un mouvement vibratoire de l'éther, parallèlement au plan de l'onde: nous admettons qu'il n'y a pas de composante normale au plan de l'onde, car dans un milieu isotrope on aurait alors une ellipse inclinée sur le plan de l'onde, or il n'y aurait pas de raison pour que cette ellipse fut inclinée dans un sens plutôt que dans l'autre. On vérifiera plus loin la légitimité de cette hypothèse.

Or le mouvement vibratoire le plus général est un mouvement elliptique. Nous devons donc admettre que les molécules d'éther sont animées de mouvements vibratoire de ce genre dans le plan de l'onde. Cette ellipse ne doit être orientée dans aucune directions fixe, elle change de forme à chaque instant, sans aucune loi

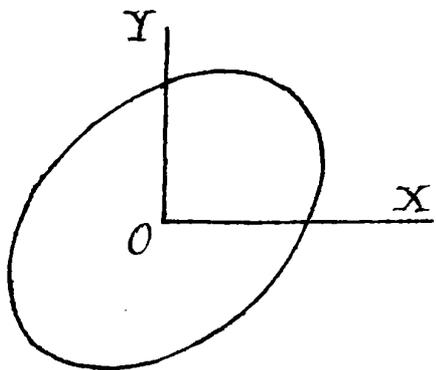


et très-rapidement. Elle ne présente aucune symétrie; la seule restriction que nous puissions faire est que la force vive moyenne de tous ces mouvements elliptique soit être constante.

Celle est l'idée que nous nous formons de la lumière ordinaire.

Il semble que nous soyons ici en contradiction avec le principe de Fresnel sur la stabilité du mouvement vibratoire; pendant 5000 périodes. Mais cette stabilité n'exclue en rien un changement très-rapide dans le mouvement vibratoire; une seconde en effet contient 500 trillions de périodes environ. Si nous divisons ce nombre par 5000 le quotient est 10 milliards, d'où il résulte qu'on peut avoir 10 milliards de changements par seconde sans être en opposition avec le principe de Fresnel.

Lorsqu'on considère un faisceau d'intensité constante, ce qui reste constant c'est l'intensité moyenne; l'œil en effet, n'apprécie pas chaque vibration en particulier, mais l'effet moyen d'un grand nombre de vibrations (puisque l'impression persiste pendant $\frac{1}{10}$ de seconde).



Soit donc un mouvement vibratoire elliptique, je puis le décomposer en deux mouvements vibratoires rectilignes suivant deux axes rectangulaires orientés d'une manière quelconque.

$$\xi = A_x \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right)$$

$$\eta = A_y \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi' \right)$$

La force vive moyenne de ce mouvement résultant est la somme des

forces vives moyennes:

$$A_x^2 + A_y^2$$

La moyenne étant prise par rapport à la durée d'une période. Quand la vibration aura changé de forme, on aura:

$$A_x'^2 + A_y'^2, \text{ etc. ---}$$

On fait la moyenne de ces moyennes pendant une seconde, on aura:

$$I = \text{moy. } A_x^2 + \text{moy. } A_y^2$$

Supposons l'intensité I du mouvement résultant constante; si nous la représentons - la par l'unité, on aura alors:

$$\text{Moy. } A_x^2 = \frac{1}{2} \quad \text{Moy. } A_y^2 = \frac{1}{2}$$

Par suite tout se passe comme si la lumière naturelle était composée de deux faisceaux polarisée dans deux directions rectangulaires arbitraires OX, OY , ayant chacun pour intensité moyenne $\frac{1}{2}$ et complètement indépendante l'une de l'autre.

Étudions la réflexion d'un faisceau de lumière naturelle; nous sommes ramenés à ce que nous avons déjà vu; décomposons en effet la vibration lumineuse en deux autres rectilignes, l'un parallèle au plan d'incidence, avec l'amplitude $\frac{1}{\sqrt{2}}$ l'autre perpendiculaire à ce plan avec l'amplitude $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Après la réflexion, la première composante aura l'amplitude $\frac{1}{\sqrt{2}} a'$, la seconde aura l'amplitude $\frac{1}{\sqrt{2}} a$; par suite la force vive du mouvement résultant sera

$$R^2 = \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a'^2$$

Ainsi on ne peut reconstituer la forme de la vibration, mais on a sa force vive moyenne.

De même pour la réfraction:

$$F^2 = \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} b'^2$$

On voit par là une vérification de la manière de voir le phénomène qui se passe dans la polarisation.

$\frac{1}{2} a^2$ représente l'intensité de la vibration dans un sens;

$\frac{1}{2} a'^2$ ----- à angle droit.

Si l'une de ces composantes est nulle, la lumière sera complètement polarisée, c'est précisément ce qui arrive pour l'incidence principale $i + r = 90^\circ$, a' s'annule il ne reste que $\frac{1}{2} a^2$ pour l'intensité du faisceau réfléchi polarisé dans le plan d'incidence.

On voit que la polarisation annule une des composantes de la lumière naturelle.

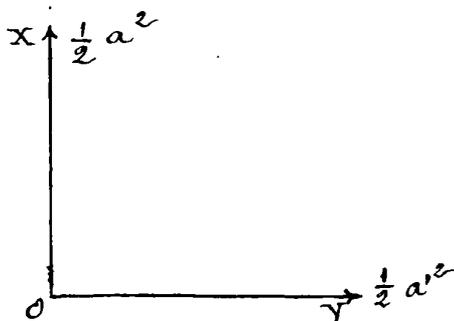
On se rend facilement compte que la réfraction ne peut jamais produire une polarisation parfaite: en effet, quelles que soient les valeurs de i et de r , les quantités b et b' ne peuvent s'annuler ni l'une ni l'autre. On n'aura donc jamais un faisceau complètement polarisé, mais il est facile de voir que le rapport:

$$\frac{b}{b'} = \cos(i - r) \text{ est constamment inférieur à l'unité,}$$

par suite une des composantes de la lumière naturelle (celle qui est perpendiculaire au plan d'incidence) est plus affaiblie que l'autre par la réfraction, par suite si on fait subir au faisceau un grand nombre de réfractions successives (pile de glaces) cette composante

S'affaiblira de plus en plus par rapport à l'autre et la proportion de lumière polarisée dans le faisceau émergent sera d'autant plus considérable, et le plan de polarisation sera normal au plan d'incidence, comme le montre l'expérience.

Si l'on a : $a = a'$ on a deux vibrations d'intensités égales rectangulaires, on retombe donc sur la lumière naturelle telle que nous l'avons définie. C'est ce qui se produit pour l'incidence normale $a = a' = 1$ on le vérifie par l'expérience.



En général, après la réflexion une des composantes du mouvement vibratoire prédomine; et l'on a facilement la proportion de lumière polarisée

$$f = \frac{a^2 - a'^2}{a^2 + a'^2}$$

En effet la vibration réfléchie a deux composantes rectangulaires dont les intensités sont $\frac{1}{2} a^2$, $\frac{1}{2} a'^2$, je puis

considérer $\frac{1}{2} a^2$, comme la somme de deux intensités $\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} a'^2$ et $\frac{1}{2} a'^2$.

Ces deux vibrations rectangulaires égales à $\frac{1}{2} a'^2$ produisent de la lumière naturelle; il reste donc de la lumière polarisée dans la direction OX dont l'intensité est $\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} a'^2$, d'autre part l'intensité totale de la lumière réfléchie est $\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a'^2$ donc la proportion de lumière polarisée est bien représentée par le rapport

$$f = \frac{a^2 - a'^2}{a^2 + a'^2}$$

On voit que si $a = a'$, f devient nul, et l'on retombe sur la lumière naturelle comme nous l'avons dit.

Pour la réfraction on aura de même le rapport $\rho = \frac{b^2 - b'^2}{b^2 + b'^2}$

Remarquons que ces formules ont été établies en supposant que la lumière possède un mouvement vibratoire transversal. Il en sera de même pour tout mouvement analogue. Des expériences très-précises ont été faites sur les radiations infra-rouges au moyen de la pile thermo-électrique (Desains et de La Provostaye) et sur les rayons ultra-violet par la photographie: on a déterminé au moyen d'un prisme n de la substance étudiée pour ces différents mouvements vibratoires (rayons calorifiques et rayons chimiques) si l'on mesure chaque fois l'angle d'incidence i on

Déduit des formules de Fresnel l'intensité du faisceau réfléchi, le résultat a toujours été conforme à l'expérience.

Nous avons vérifié par ces expériences très-déliées tout ce que nous cherchions sur la nature de la lumière ; nous pourrions donc nous arrêter ici dans l'étude de la lumière au point de vue de sa constitution. Il y a cependant des phénomènes étranges qui semblent ne pas concorder avec ce qui précède ; nous allons les étudier successivement. Nous parlerons d'abord de la double réfraction.

Phénomène de la double réfraction.

Vers le milieu du XVII^{ème} siècle, un voyageur, Erasme Bartholin découvrit que l'on voit une double image des objets quand on les regarde à travers une lame de spath d'Islande. Ce minéral est du carbonate de chaux qui cristallise dans le système rhomboédrique. Il se clive très-facilement en lames parallèles à 3 directions. Chacune de ses faces est un parallélogramme dont l'angle obtus est $101^{\circ}54'$. Les arêtes correspondantes aux arêtes qui forment un trièdre obtus sont de $105^{\circ}5'$.

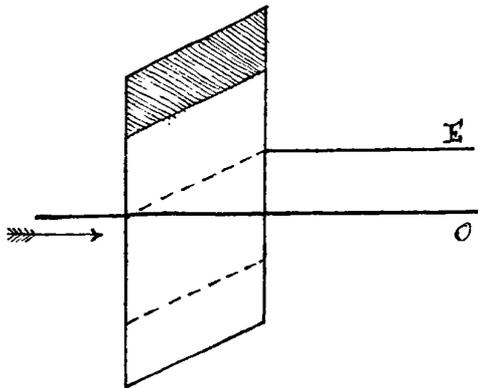
On donne souvent au cristal un maximum de symétrie en le taillant de telle sorte que les 12 arêtes soient égales.

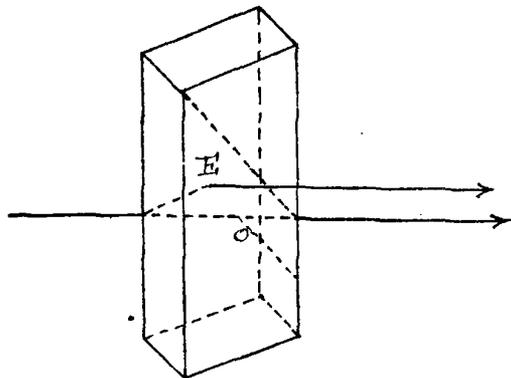
A un même rayon incident correspondent deux rayons réfractés.

L'un des rayons suit la marche ordinaire de la lumière (Soit de Descartes) l'autre suit une marche extraordinaire.

Faisons tomber un rayon normalement à une des faces du cristal. Le rayon ordinaire traverse sans déviation, le rayon extraordinaire sera dévié à son entrée dans le cristal et sort parallèlement au rayon ordinaire. Ces deux rayons émergents sont dans

un plan parallèle à la bissectrice de l'angle obtus de la face de sortie, et si l'on fait tourner le cristal sur lui-même de manière





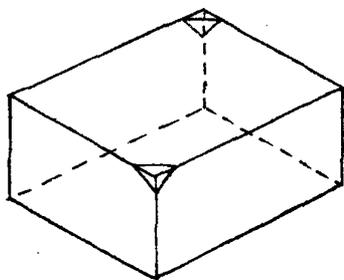
que l'incidence soit toujours normale, le rayon ordinaire ne variera pas de position, le rayon extraordinaire tournera alors autour du premier de manière que le plan des deux rayons demeure toujours parallèle à la bissectrice obtuse, et la distance des deux rayons reste constante.

Ces deux rayons émergents sont l'un et l'autre polarisés; le rayon ordinaire a son plan de polarisation

parallèle à la bissectrice obtuse, le rayon extraordinaire a son plan de polarisation perpendiculaire à cette bissectrice.

Un cristal de spath peut donc être employé efficacement comme polariseur; il suffit de masquer par un écran l'un des rayons émergents; il ne restera qu'un seul rayon complètement polarisé.

Avec des faces artificielles orientées d'une manière quelconque, le phénomène est le même qu'avec les faces de clivage. Il n'y a d'exception que pour une direction particulière obtenue par un plan également incliné sur les trois arêtes des trièdres obtus. (Ce plan déterminera dans le parallélépipède une section qui sera un triangle équilatéral).



Si l'on taille des lames parallèles à ce plan, on observe qu'un rayon normal n'est pas dévié et qu'il ne se produit aucune bifurcation. La direction de ce rayon est appelée axe optique du rhomboèdre. (C'est la bissectrice du trièdre obtus).

On reconnaît que la direction de l'axe optique est un axe de symétrie optique; c'est-à-dire que des lames taillées artificiellement

dans le cristal et également inclinées sur cet axe, produisent à égalité d'épaisseur, des déviations égales au rayon extraordinaire. Il faut considérer cet axe comme une direction qui reste fixe et non comme un axe matériel, ce n'est point, par exemple, l'ensemble des molécules situées sur une droite déterminée mais une simple

direction, que l'on soit toujours supposer menée par le point autour duquel on étudie la réfraction ou tout autre phénomène.

Les deux rayons émergents dans le cas de l'incidence normale sont toujours dans un plan parallèle à l'axe optique; on est convenu d'appeler: Section principale le plan ainsi déterminé (C'est un plan normal à la face d'entrée et parallèle à l'axe optique).

Si l'on juxtapose deux cristaux de spath, on obtient quatre rayons émergents, qui forment sur un écran quatre images. Si l'on fait tourner un de ces cristaux il est facile de voir que deux de ces images seront fixes, les deux autres mobiles, et les intensités varient d'une manière continue: deux de ces images atteignent leur maximum d'intensité, lorsque les deux autres s'éteignent et réciproquement.

26^e Leçon.

On doit à Huyghens l'explication des phénomènes de double réfraction; il a du moins ramené la marche des rayons à un postulat géométrique, il faisait bien entendre abstraction de la polarisation car à son époque on ne connaissait pas encore ce phénomène.

Jusqu'à présent nous n'avons étudié que des corps isotropes, c'est-à-dire tels que la distribution moléculaire soit la même dans toutes les directions à l'intérieur du cristal; si on considère un centre d'ébranlement lumineux dans l'intérieur d'un tel cristal, le déplacement sera le même dans toutes les directions; on aura une onde sphérique. Mais si, comme dans la plupart des cristaux, la distribution moléculaire varie dans les différentes directions, le déplacement ne sera pas le même tout autour du centre lumineux et on aura une surface d'onde différente de la sphère. (Corps hétéotropes).

Si le corps hétéotrope possède un axe de symétrie, et si la distribution est la même dans tous les plans qui passent par cet axe la surface de l'onde sera une surface de révolution autour de cet axe (axe optique).

Huyghens avait observé dans la biréfraction, trois points:
1^o Un rayon suit la marche ordinaire;

2^o. Tout autour d'un axe (axe optique) les phénomènes sont symétriques.

3^o. Un faisceau lumineux ne se bifurque pas suivant l'axe.

Pour expliquer ces phénomènes il admit que la lumière se propage dans le spath avec deux vitesses différentes, de sorte que la surface de l'onde a deux nappes. Nous verrons plus tard comment Fresnel démontre à priori l'existence de ces deux nappes. - Huyghens admettait simplement leur existence. Puisqu'il y a un rayon qui suit toutes les lois ordinaires, l'une de ces nappes est une sphère, l'ébranlement lumineux qui produit cette onde se propage dans tous les sens avec la même vitesse.

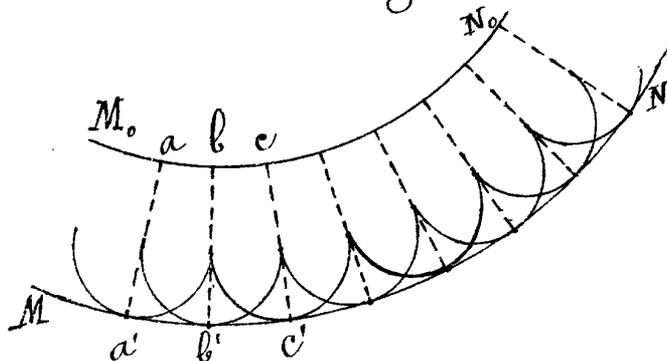
Pour la 2^e nappe, la vitesse varie d'une façon continue avec la direction du déplacement, mais d'après la même loi dans tous les plans qui passent par l'axe optique; l'observation nous indique en effet qu'il y a symétrie dans les phénomènes lumineux tout autour de cet axe. La surface de l'onde sera de révolution. Cette

surface de révolution sera bitangente à la sphère, à ses intersections avec l'axe optique, car dans la direction de l'axe optique un rayon ne se bifurque pas: la vitesse de propagation est la même sur les deux nappes.

Huyghens fit l'hypothèse la plus simple, il admit que la surface d'onde extraordinaire est un ellipsoïde, et l'expérience a constaté l'exactitude de cette hypothèse le principe que nous avons appelé principe d'Huyghens, il

en a conclu une construction très-simple de la marche des ondes planes dans un cristal de spath.

Cette méthode est générale. Soit $M_0 N_0$ une onde de forme



quelconque. Une position postérieure de l'onde résulte des mouvements émanés de tous les points de $M_0 N_0$, chacun de ses points étant considéré comme une source lumineuse. Au bout d'un

temps t , chacune de ces sources élémentaires (a, b, c, \dots) aura donné lieu à une onde élémentaire (a', b', c', \dots) l'onde résultante est le lieu des points dont les déplacements sont concordants; si on considère l'enveloppe des ondes élémentaires, elle jouira de cette propriété, puisqu'elle se composera d'un élément infiniment petit de chacune de ces ondes et que sur toutes le mouvement est concordant. Supposons que chaque centre d'ébranlement donne aussi naissance à une onde à deux nappes, chacune de ces nappes aura une enveloppe, et l'onde résultante se composera aussi de deux nappes.

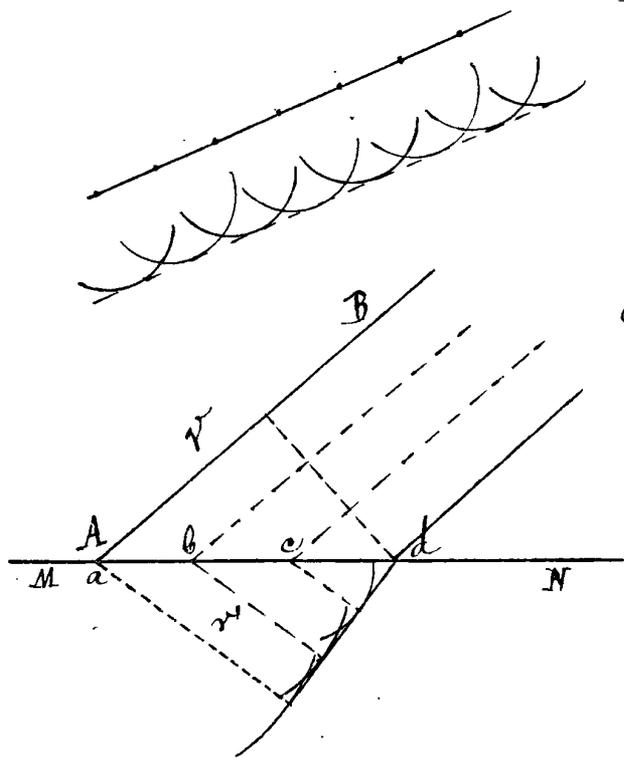
Quelque soit ou reste la forme de l'onde élémentaire, une onde plane restera plane et parallèle à elle-même dans un milieu hétérotrope, pourvu qu'il soit identique en chaque point. Cela est évident: toutes les ondes élémentaires seront identiques et auront leur centre d'ébranlement dans un même plan; leur enveloppe sera un plan parallèle au plan des centres.

Il résulte encore de ces principes que toute onde plane se réfractera suivant une onde plane dans un milieu hétérotrope terminé par une face plane.

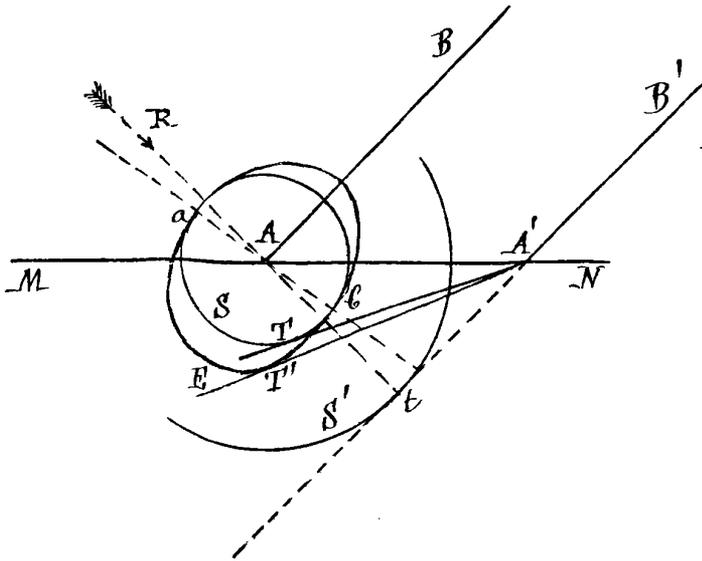
Soit MN la surface de séparation des deux milieux, v et v' les vitesses de propagation et AB une onde plane coupant MN en a ; le point a sera le centre d'une onde qui se propagera dans le 2^e milieu; considérons l'onde après des temps $t, 2t, 3t, \dots$ elle coupera MN en des points b, c, d , ces points équidistants sur MN enverront des ondes semblables à la

1^{ère} mais plus petites; toutes les lignes homologues diminueront en progression arithmétique; elles seront plus petites de $v't, 2v't, 3v't, \dots$ il en résulte que leur enveloppe sera encore un plan.

Si chaque point a, b, c, d, \dots donne naissance à deux ondes élémentaires, il y aura deux plans enveloppes, et par suite l'onde incidente donnera lieu à deux ondes réfractées



Construction d'Huyghens. — C'est sur ces principes qu'est fondée la construction d'Huyghens; Supposons comme la surface de l'onde élémentaire, c'est-à-dire (dans le spath d'Islande) le rapport des deux axes de l'ellipse méridienne.



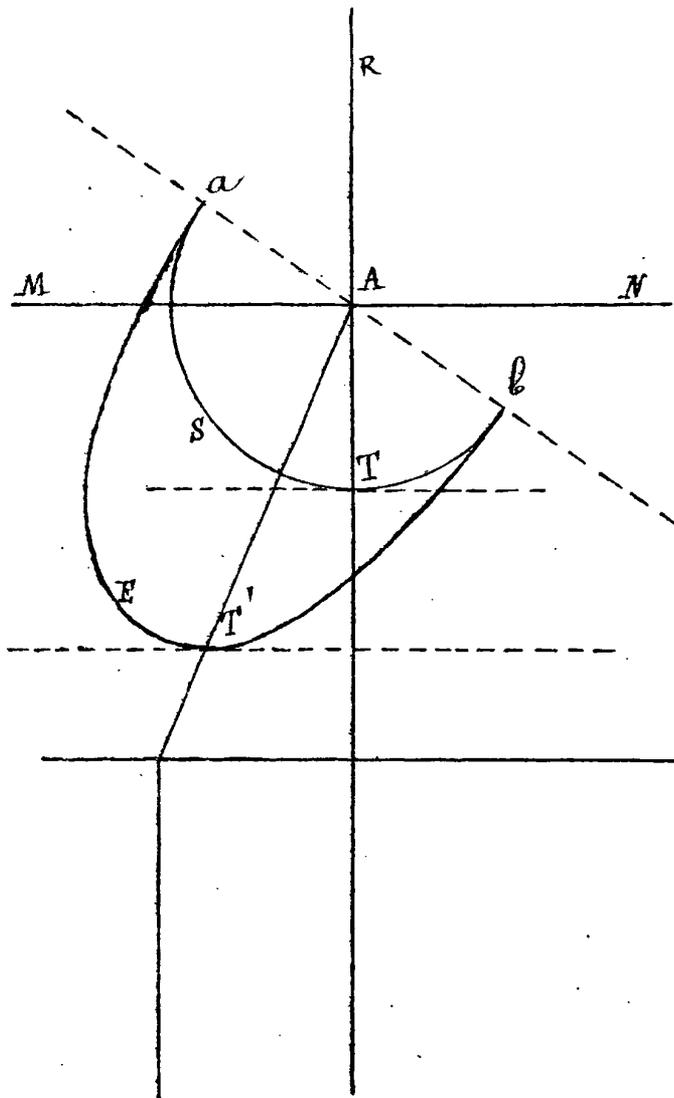
Soit AB l'onde incidente, à un certain instant le point A donne naissance à deux ondes; au bout d'un temps t , la sphère aura un rayon $r't$, la 2^e nappe sera un ellipsoïde bitangent à la sphère aux extrémités a et a' de l'axe optique et que je peux construire; d'autre part si le deuxième milieu n'avait pas existé le point A aurait donné naissance à une onde de rayon rt ; je décris cette sphère S' ; elle serait tan-

gente à l'onde continuant son chemin dans le premier milieu; pour avoir cette onde je mène donc un plan tangent $A'B'$ parallèle à AB ; il coupe la surface M suivant une droite A' ; au temps t que nous considérons tous les points de A sont centres d'ondes encore évanouissantes; et obtiendra les ondes réfractées en menant par cette droite un plan tangent à la sphère S (onde ordinaire) et à l'ellipsoïde E (onde extraordinaire).

Pour le spath et tous les corps dont l'onde extraordinaire est de révolution le problème se résout dans une foule de cas par une construction plane: Par exemple lorsque le plan de l'axe du cristal (aAb) est dans le plan d'incidence, la normale à l'onde incidente (RA) étant perpendiculaire aux ondes réfractées; il suffit d'avoir leurs traces dans ce plan, on décrit deux circonférences de centre A et de rayons proportionnels aux vitesses dans les deux milieux; on trace aussi l'ellipsoïde E ; on mène dans le sens de propagation de l'onde un rayon de la circonférence S' ; à l'extrémité de ce rayon on mène une tangente à la circonférence; on la continue au dessus de MN et on a la trace de l'onde qui a continué son chemin dans le premier milieu; par le point A' on mène des tangentes à S et E et on a les ondes réfractées.

Ce que nous pouvons observer ce n'est pas l'onde, c'est le rayon lumineux.

Dans les milieux isotropes, et toutes les fois que l'onde élémentaire est sphérique, le rayon est par symétrie la perpendiculaire à l'onde. Dans l'onde extraordinaire il n'en est plus ainsi; un rayon est le lieu des points qui se transmettent directement le mouvement lumineux; ce sera donc la direction dans laquelle un centre d'onde élémentaire envoie son mouvement à l'onde résultante; l'onde émanée de ce centre n'a de commun avec l'onde résultante, son enveloppe, que son point de contact donc le rayon lumineux s'obtiendra en joignant le centre A au point de contact T . (Cette règle est générale; il est évident en effet qu'elle s'applique au cas de l'onde sphérique; mais alors le rayon est normal à l'enveloppe). Huyghens a vérifié par l'expérience cette marche oblique de l'onde extraordinaire et la construction qu'il en donnait.



Appliquons cette construction dans le cas de l'incidence normale: le point A est reporté à l'infini; menons aux deux ondes S et E des tangentes parallèles à MN ; le rayon AT au point de contact sera le prolongement de R ; le rayon ordinaire ne sera donc pas dévié; pour le rayon extraordinaire AT il sera contenu dans le plan de symétrie, contenant l'axe optique (plan de la figure). Si donc on fait tourner le cristal autour de la normale AR , toutes choses resteront égales d'ailleurs, mais le plan des deux rayons tourne autour du rayon ordinaire; c'est ce que l'expérience constate; si on reçoit les rayons lumineux sur un écran perpendiculaire au rayon ordinaire la trace du rayon extraordinaire décrit une circonférence autour

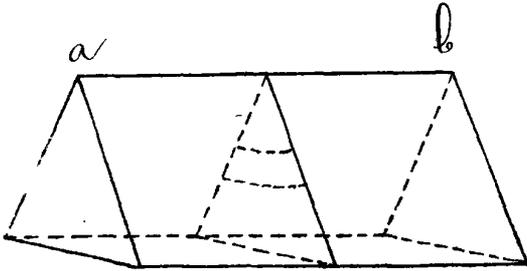
de la trace du rayon ordinaire; cette rotation pourra servir même à distinguer le rayon extraordinaire de l'autre rayon.

Verifications expérimentales de la construction de Huyghens et construction de l'ellipsoïde. -

Le rayon ordinaire se comportant comme dans un milieu isotrope aura dans toutes les directions même indice de réfraction. Rudberg en calculant cet indice avec des prismes dont les faces faisaient différents angles avec l'axe optique l'a toujours trouvé constant à la 5^e décimale près

$$n_o = 1,65850$$

La surface étant de révolution sera coupée par un plan perpendiculaire à l'axe optique suivant deux circonférences; cela veut dire que la vitesse du rayon extraordinaire et par suite son indice de réfraction sont constants quand les rayons sont perpendiculaires à l'axe optique.



Rudberg a mesuré l'indice du rayon extraordinaire à la méthode

habituelle avec un prisme dont l'arête est parallèle à l'axe optique. Il a trouvé un nombre constant, quels que fussent l'angle du prisme et l'angle d'incidence.

$$n_e = 1,48635.$$

Cet indice est inversement proportionnel à la vitesse de la lumière dans la section équatoriale et par suite aux axes égaux de l'ellipsoïde; l'autre axe sera le rayon de la sphère puisque la sphère est bitangente à l'ellipsoïde;

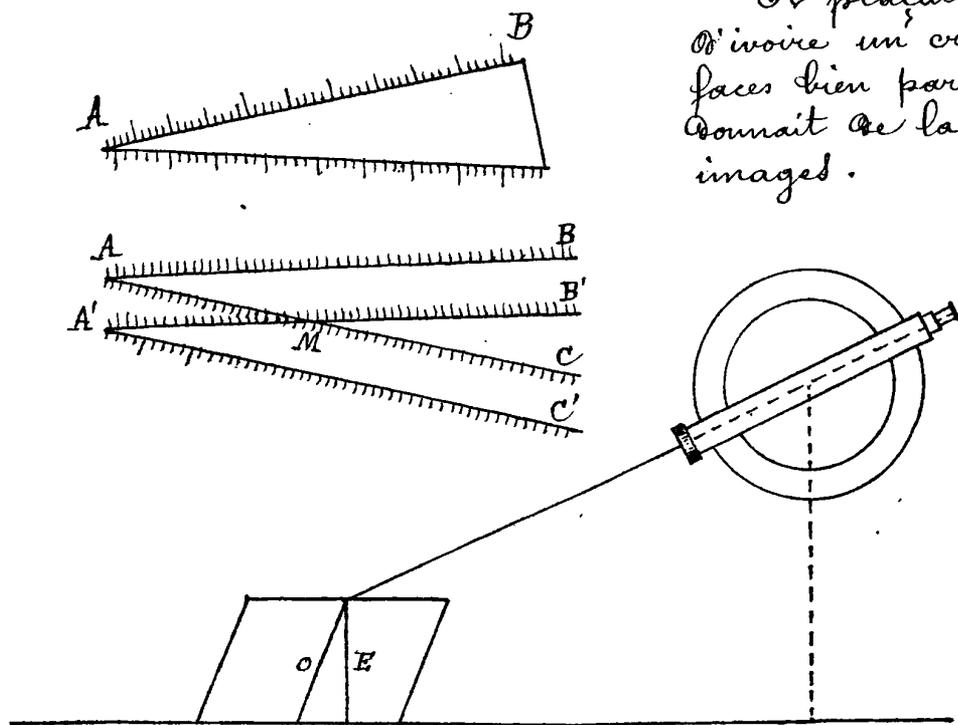
$$n_o = \frac{1}{a} \quad a = \frac{1}{n_o} = \frac{1}{1,65850}$$

$$n_e = \frac{1}{b} \quad b = \frac{1}{n_e} = \frac{1}{1,48635}$$

L'ellipsoïde est donc aplati et extérieur à la sphère; les axes sont à peu près dans le rapport de 9 à 10.

Connaissant la forme de l'ellipsoïde nous pouvons calculer la position d'un rayon extraordinaire quelconque, d'autre part l'observer et comparer les deux résultats; Malus a constaté qu'il y avait la

concordance la plus complète entre le calcul et l'observation. Il fit graver sur une plaque d'ivoire deux lignes qui se croisent sous angle très aigu (triangle de Malus).



Il plaçait sur cette lame d'ivoire un cristal de spath à faces bien parallèles; le spath donnait de la graduation deux images.

On visait avec une lunette le point de rencontre des deux images M ; ce point correspondait à l'image ordinaire d'un point situé sur AB , et d'un point extraordinaire situé sur AC ; les deux points du plan dont les images se confondent sont bien déterminés; il suffit

de lire sur l'échelle les divisions auxquelles ils correspondent.

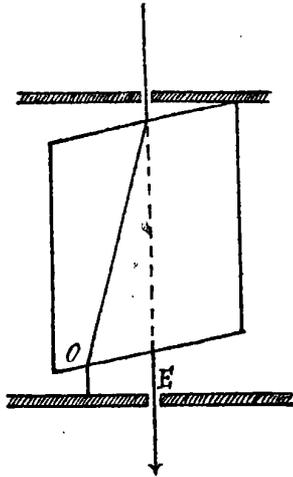
On connaît d'autre part le plan dans lequel se meut la lunette, l'angle qu'elle fait avec le cristal; on peut construire la route du rayon ordinaire, et en conclure la route du rayon extraordinaire, puisqu'on connaît les points où il perce les deux faces du cristal.

On peut aussi déterminer la marche du rayon extraordinaire par la construction de Huyghens. — Malus qui fit ces expériences trouva toujours l'accord le plus parfait entre l'expérience et la théorie.

La perfection avec laquelle le spath polarise la lumière permet de l'utiliser pour la construction d'appareils pratiques de polarisation. C'est au reste au moyen de cette substance qu'a été découverte la polarisation: Malus observait un soir le soleil couchant dont les rayons lui arrivaient après avoir été réfléchis sur les vitres du Luxembourg en regardant au travers d'un spath il y avait une certaine incidence pour laquelle un des rayons émergents disparaissait entièrement.

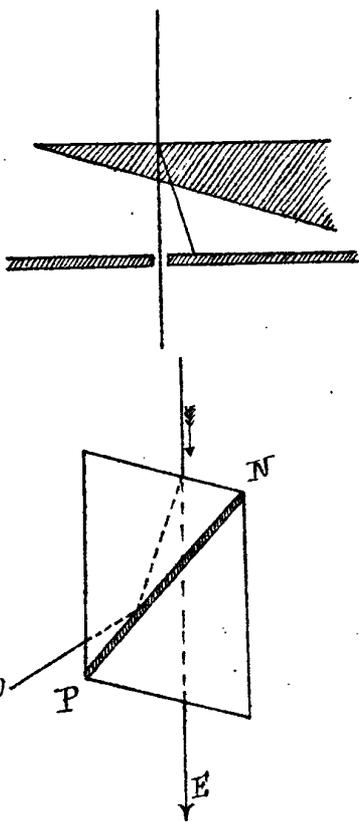
C'est ce fait qui mit Malus sur la voie de la découverte du nouveau phénomène.

On peut construire un polariseur au moyen d'un rhomboïde de spath, sur lequel on fait arriver un faisceau lumineux par une ouverture pratiquée dans un écran. Le faisceau se bifurque à son entrée dans le cristal, on arrête un des faisceaux émergents au moyen d'un écran. Le faisceau conservé est ordinairement le faisceau extraordinaire car il est moins dévié.



Ce dispositif exige l'emploi d'un spath un peu long autrement les deux se recouvriraient en partie.

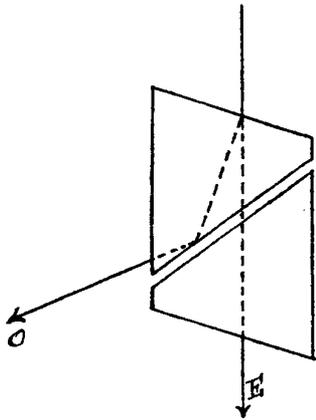
On préfère un prisme biréfringent, car alors les deux faisceaux s'écartent de plus en plus, mais les bords sont irisés. On compense la dispersion de l'un de ces rayons en l'achromatisant avec un prisme de crown ou de flint.



Prisme de Nicol. - On élimine un des rayons par réflexion totale. Pour construire un semblable prisme on prend un rhomboïde obtenu par clivage, on le scie suivant un plan PN perpendiculaire à la section principale, on polit avec soin les faces ainsi obtenues et on les recolle avec du baume du Canada, substance dont l'indice de réfraction: 1,55 est intermédiaire entre les indices: 1,46 du rayon extraordinaire et 1,67 du rayon ordinaire. Le rayon se bifurque en pénétrant dans le cristal et l'inclinaison de PN est telle que le rayon ordinaire subit la réflexion totale (ce rayon arrivant d'un milieu plus réfringent, il y a un angle pour lequel la réflexion

a lieu), au contraire le rayon extraordinaire passant d'un milieu moins réfringent à un milieu plus réfringent ne peut subir cette réflexion, et traverse seul la surface de séparation.

Cet appareil est ordinairement monté dans une enveloppe de liège entourée d'un tube de laiton.



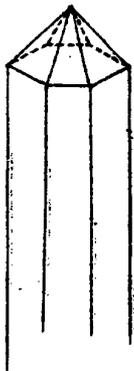
Prisme de Foucault. - Foucault a supprimé le bain de Canada, en remarquant qu'une simple lame d'air sous une incidence convenable suffit pour opérer la réflexion totale du rayon ordinaire tout en laissant passer, le rayon extraordinaire qui est moins incliné sur la surface de séparation.

27^e Leçon.

Il ne faudrait pas croire que la double réfraction appartient exclusivement au spath d'Islande. Tous les corps transparents au système cubique tel que le sel gemme, le spath fluor, etc. -----

Ses corps homogènes obtenus par fusion, tels que le verre, sont évidemment isotropes et ne produisent jamais de double réfraction.

Parmi les corps les plus biréfringents, nous citerons l'azotate de soude (rebombé-ore), le chromate de plomb, le carbonate de plomb, etc. -----

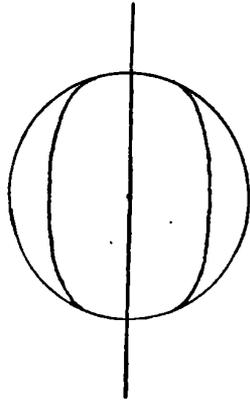


Le quartz ou cristal de roche (prisme hexagonal terminé par des pyramides à 6 pans) est moins biréfringent que le spath, on trouve encore un axe de symétrie et la surface de l'onde est encore composée d'une sphère et d'un ellipsoïde, mais ici l'ellipsoïde au lieu d'être aplati, est allongé et par suite intérieure à la sphère.

La tourmaline est biréfringente, mais les deux rayons, ordinaire

et extraordinaire ne sont pas absorbés également par le cristal, le rayon ordinaire est beaucoup plus absorbé, et il ne reste que le rayon extraordinaire, c'est ainsi qu'on s'en sert comme polariseur ou analyseur.

On emploie encore le mica, le gypse, l'aragonite, la topaze.



Mais la forme de la surface de l'onde n'est pas toujours la même: pour les corps présentant un axe de symétrie elle se compose comme on l'a vu d'une sphère et d'un ellipsoïde; mais pour le système à base rectangle, droit ou oblique, elle est beaucoup plus complexe: (surface du 4^e ordre, en général indécomposable).

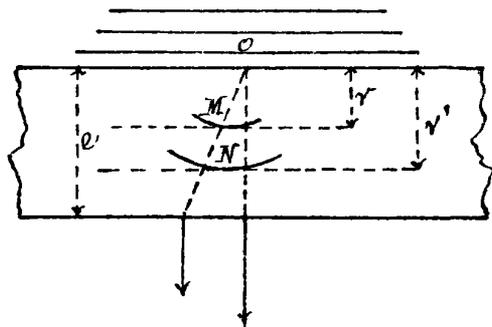
Nous allons chercher au moyen de la double réfraction une vérification sur la constitution de la lumière.

Toutes les lames cristallines à faces parallèles donnent sous l'incidence normale deux ondes polarisées à angle droit se propageant à l'intérieur du cristal avec deux vitesses différentes. Les vibrations des deux ondes permanentes, identiques à leur entrée, acquièrent au sortir de la lame une différence de phases définies par la relation:

$$\varphi = \frac{n - n'}{\lambda} e$$

n et n' étant les indices de réfraction des deux ondes, c'est-à-dire l'inverse de leur vitesse de propagation normale, λ la longueur d'onde de la lumière monochromatique avec laquelle on opère, et e l'épaisseur de la lame. Nous allons le démontrer;

Imaginons une onde plane tombant normalement sur la lame, on obtient au moyen de la construction de Huyghens la position des ondes et des rayons à l'intérieur du cristal. Les deux rayons sont les droites: OM. ON. qui joignent le point O aux points de contact des plans tangents à la surface de l'onde parallèle au plan de l'onde.



Ces deux points de contact ne sont pas nécessairement dans le plan de la figure ci-contre

et par suite il en est de même des rayons O.M., O.N.

Au sortir de la lame les deux rayons sont parallèles et ont chacun une polarisation particulière. L'expérience et le calcul prouvent que les deux ondes sont polarisées à angle droit.

Or ces deux ondes ne mettent pas le même temps pour traverser la lame: Soit v et v' les vitesses (normales) de ces deux ondes, soit t et t' les durées correspondantes:

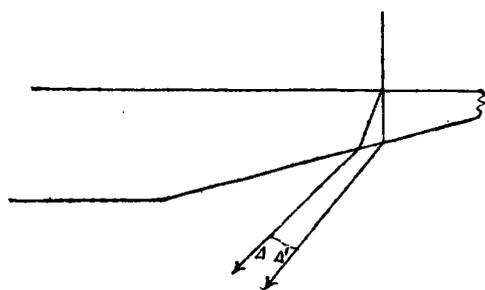
$$e = vt \quad e = v't'$$

Donc les mouvements qui étaient concordants à l'entrée ne le sont plus à la sortie, et la différence de phase est $\frac{t-t'}{T}$ ou:

$$\frac{e}{T} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'} \right)$$

On sait que d'autre part l'on peut avoir les vitesses de propagation d'une onde dans divers milieux au moyen de leurs indices de réfraction.

Si l'on taille la lame en biseau on pourra très-bien mesurer les deux indices pour le rayon ordinaire et pour le rayon extraordinaire.



en effet tout se passe comme si le prisme ainsi formé était mono-réfringent pour chaque rayon; et l'on aura:

$$n = \frac{v}{V} \quad v \text{ étant la vitesse dans le milieu extérieur.}$$

Or dans le cas d'un petit angle on a la relation

$$\Delta = (n-1)A \quad A \text{ étant l'angle du prisme.}$$

$$\text{et } \Delta' = (n'-1)A$$

D'où l'on tire: $n - n' = \frac{\Delta - \Delta'}{A}$ L'observation des rayons émergents nous donne donc la différence: $n - n'$.

La différence de phase pourra dès lors s'écrire:

$$\varphi = \frac{e}{T} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'} \right) = \frac{e}{T} \left(\frac{n}{V} - \frac{n'}{V} \right) = \frac{e(n-n')}{VT}$$

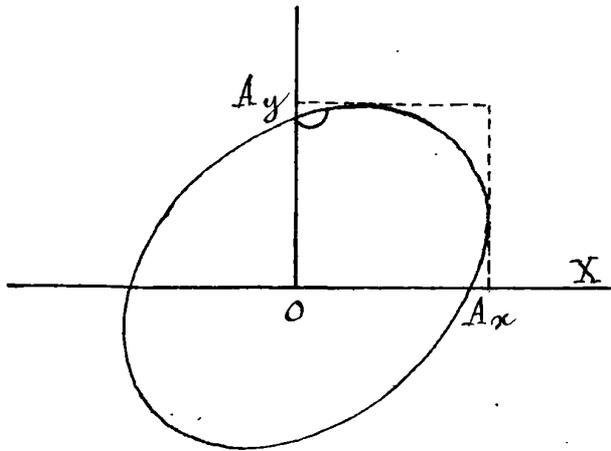
$$\varphi = \frac{e(n-n')}{\lambda}$$

Pour reconnaître les plans de polarisation des deux rayons, on les sépare au moyen de la lame taillée en biseau comme nous venons de le voir et on les étudie séparément, on reconnaît ainsi qu'ils sont polarisés à angle droit.

D'après ce que nous venons de voir on aura au sortir d'une lame

à faces parallèles deux faisceaux polarisés à angle droit avec différence de phase : $\varphi = \frac{n-n'}{\lambda}$ et qui se superposent (à moins que la lame n'ait une trop grande épaisseur). Il semble au premier abord que ce cas soit identique à celui des anneaux colorés, et par suite les ondes doivent interférer ou donner lieu à un mouvement vibratoire elliptique. Mais deux vibrations rectilignes et rectangulaires ne peuvent interférer. Je dis que leur composition ne produit pas non plus de vibrations elliptiques.

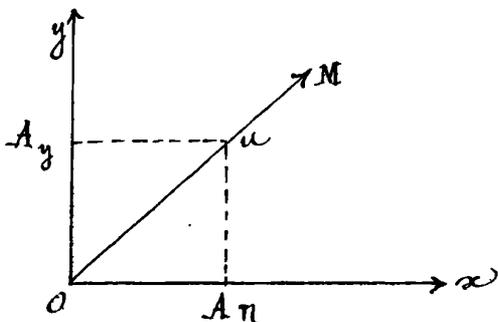
En effet nous avons supposé qu'on opérerait sur la lumière naturelle. Or dans le faisceau incident on a, à un instant quelconque, un mouvement elliptique que l'on peut décomposer en deux mouvements rectangulaires OX, OY dirigés parallèlement et perpendiculairement à la section principale de la lame biréfringente.



Chacune de ces composantes ; A_x, A_y est parfaitement polarisée ; mais l'ellipse que nous venons de considérer n'est pas fixe, elle se déplace très-rapidement en changeant de forme et d'orientation ; la composante A_y change donc à

chaque instant, ce qui reste constant c'est la moyenne des valeurs de A_y pendant un temps fini. Il en est de même pour la composante suivant OX . On a donc à chaque instant deux vibrations rectangulaires d'amplitudes : A_x, A_y et si la différence de phase était ψ à l'entrée, elle deviendra à la sortie de la lame : $\psi + \varphi$. - Un instant après on aura les valeurs $A'_x, A'_y, \psi + \varphi$. Nous aurons donc dans le faisceau émergent une série d'ellipses variant constamment de forme et d'orientation, on retombe donc sur la lumière naturelle.

D'après cela si l'on veut obtenir un mouvement elliptique stable, il suffit de faire tomber sur la lame biréfringente un faisceau de lumière polarisée. (Soit OM la direction de la vibration.) La lame laissera passer chacune des composantes : ox et oy et l'on aura à la sortie.



avec différence de phase : φ provenant de l'épaisseur de la lame :

$$\begin{cases} A_y = u \sin \alpha = b \\ A_x = u \cos \alpha = a \end{cases}$$

$$\left(\varphi = \frac{n - n'}{\lambda} e \right)$$

Je dis qu'on obtiendra un mouvement elliptique stable ; en effet à un instant donné on aura les deux déplacements :

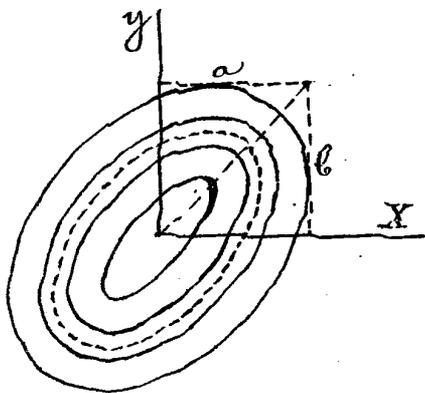
$$x = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

$$y = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right)$$

Éliminons t entre ces deux équations, il vient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \pi \varphi = \sin^2 2\pi \varphi.$$

équation d'une ellipse (ou l'on remplace a et b par leurs valeurs ci-dessus en fonction de n).



Remarquons que la lumière polarisée n'a pas une intensité absolument constante ; en effet : n n'est pas constant c'est la valeur moyenne de l'amplitude de u .

Mais quelque soit n le rapport $\frac{b}{a} = \tan \alpha$ reste constant ainsi que φ dont le rectangle où est inscrite l'ellipse reste semblable à lui-même, les ellipses sont donc semblables et semblablement placées, et le mouvement moyen sera un mouvement elliptique semblable

correspondant à l'intensité moyenne de la vibration. On a donc une ellipse stable (non en grandeur absolue mais en forme et en position).

L'intensité du mouvement vibratoire s'obtient facilement :

$$I = a^2 + b^2 = n^2 \sin^2 \alpha + n^2 \cos^2 \alpha = n^2$$

I est donc indépendant de α ce qui veut dire que si l'on fait tomber un faisceau de lumière polarisée d'intensité n^2 l'intensité du faisceau elliptique émergent sera la même que celle du faisceau incident.

Si l'on fait tomber un faisceau de lumière quelconque sur un cristal bi-réfringent, l'intensité du faisceau émergent dans la partie où deux faisceaux polarisés à angle droit se superposent est constante. C'est une vérification de la loi de Malus qui a reconnu en séparant les deux faisceaux que leurs intensités respectives étaient représentées par $n^2 \cos^2 \alpha$ et $n^2 \sin^2 \alpha$.

Quoiqu'il en soit on peut produire un mouvement vibratoire fixe en moyenne, on l'appellera : lumière polarisée elliptiquement.

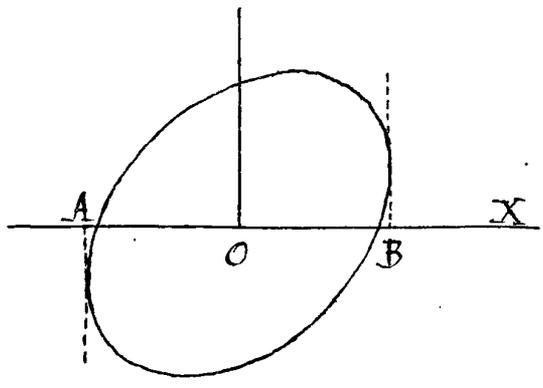
Propriétés de la lumière polarisée elliptiquement.

- 1.° Un rayon polarisé elliptiquement n'est jamais complètement éteint par un analyseur.
- 2.° Le maximum et le minimum du rayon analysé s'obtiennent dans les sections principales de l'analyseur qui coïncident avec les axes de l'ellipse.

Ces deux propriétés sont évidentes d'après la définition de l'analyseur : instrument qui éteint toutes les composantes sauf celles qui sont dirigées dans une direction particulière.

On appelle section principale d'un polariseur ou d'un analyseur, le plan de polarisation de la lumière qui le traverse, c'est donc un plan perpendiculaire à la vibration qui passe. (quelquefois pour abrégé, on parle des :

sections principales d'une lame biréfringente, il faut entendre par là les plans de polarisation des deux rayons émergents ordinaire et extraordinaire; on sait du reste qu'ils sont rectangulaires).



Quand on soumet la lumière elliptique à un analyseur, il éteint toute composante ^{normale} parallèle à une certaine direction : Soit OX cette direction; le faisceau polarisé qui passe a donc une

amplitude représentée par la longueur AB, projection de l'ellipse sur OX. D'où l'on voit que si l'analyseur tourne, cette amplitude AB varie, et devient maxima ou minima lorsque les axes de l'ellipse coïncident avec les sections principales de la lame.

Dans le cas particulier où l'ellipse se réduit à un cercle, il faut que l'on ait :

$$a = b \text{ et } \cos 2\pi \varphi = 0$$

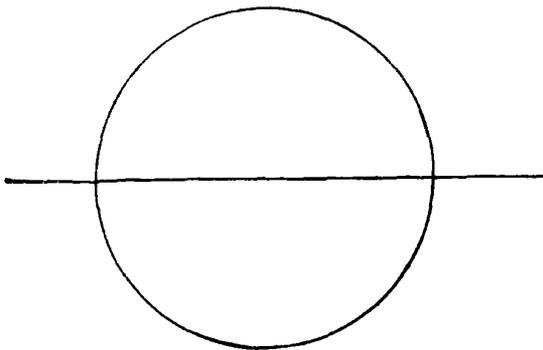
$$2\pi \varphi = (2i+1) \frac{\pi}{2} \text{ --- } \varphi = \frac{2i+1}{4}$$

Il s'ensuit que : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} = 1$ donc l'angle $\alpha = 45^\circ$

Il faut en outre choisir une lame d'épaisseur e telle que l'on ait

$$\frac{n-n'}{\lambda} e = \frac{2i+1}{4} \text{ --- } e = \frac{2i+1}{4} \frac{\lambda}{n-n'}$$

On a alors une lumière qui ne change pas d'intensité lorsqu'on fait tourner l'analyseur, car la projection du cercle est toujours le diamètre de ce cercle et par suite l'amplitude est constante.



Objection: On peut objecter que les considérations précédentes sont purement théoriques; dans certains cas en effet (lumière ordinaire imparfaitement polarisée) l'analyseur ne polarise complètement le rayon dans aucune direction.

De même on pourrait croire que rien ne distingue la lumière de la lumière polarisée circulairement.

Mais il est facile de distinguer ces deux catégories de phénomènes c'est ce que nous allons faire

Distinction expérimentale de la lumière polarisée elliptiquement ou circulairement et de la lumière partiellement polarisée ou naturelle.

On peut toujours considérer une vibration elliptique comme résultant de la composition de deux vibrations rectangulaires dont la différence de phase soit $\frac{1}{4}$ de période.

Il suffit pour cela de décomposer la vibration suivant les axes de l'ellipse l'équation de celle-ci deviendra :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et l'on aura : $\left\{ \begin{array}{l} \cos 2\pi \varphi = 0 \text{ --- } \varphi = (2i+1) \frac{1}{4} \text{ en particulier} \\ \sin 2\pi \varphi = 1 \end{array} \right.$

pour $i = 0$ on aura : $Q = \frac{1}{4}$

Etant donnée une substance cristalline on peut toujours en former une lame qui produise dans les deux faisceaux réfractés une différence de phase égale à $\frac{1}{4}$. Il suffit que l'épaisseur satisfasse à la relation.

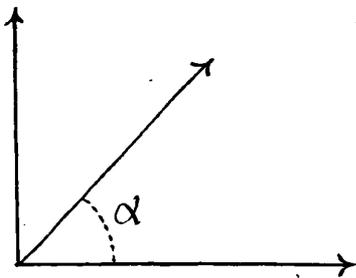
$e = \frac{\lambda}{4(n-n')}$ dans le cas de la lumière jaune on posera $\lambda = 0^{mm}000589$.

On clive des morceaux de gypse ou de mica et on mesure les épaisseurs au sphéromètre jusqu'à ce qu'on ait obtenu une lame ayant précisément l'épaisseur cherchée. Une lame ainsi déterminée se nomme : lame quart d'onde.

Une telle lame à cause de son peu d'épaisseur ne peut être employée comme analyseur car elle ne sépare pas les deux faisceaux émergents.

Nous allons voir qu'on peut avec cette lame produire toutes les variétés d'ellipses : supposons par exemple que l'on se donne les deux axes a, b . pour obtenir une ellipse ayant ces deux axes, il suffit de poser $\text{tg } \alpha = \frac{b}{a}$.

Alors on orientera la lame mince de telle sorte que la direction de la vibration incidente fasse avec une des sections principales de la lame l'angle α ainsi déterminé.



On obtiendra alors comme on l'a vu plus haut une ellipse dont les axes seront $\frac{a}{n} \cos \alpha$ et $\frac{a}{n} \sin \alpha$ dont le rapport est bien $\text{tg } \alpha$, c'est donc

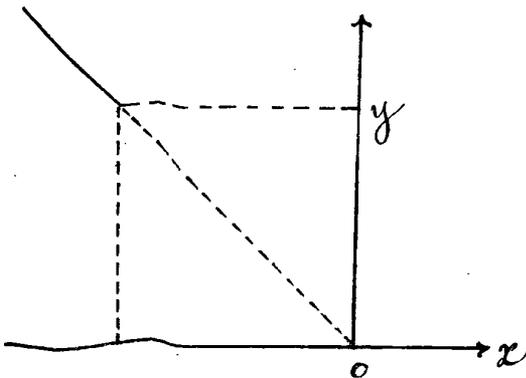
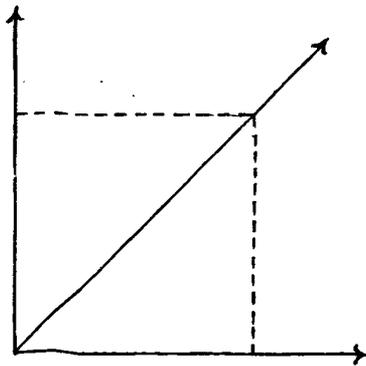
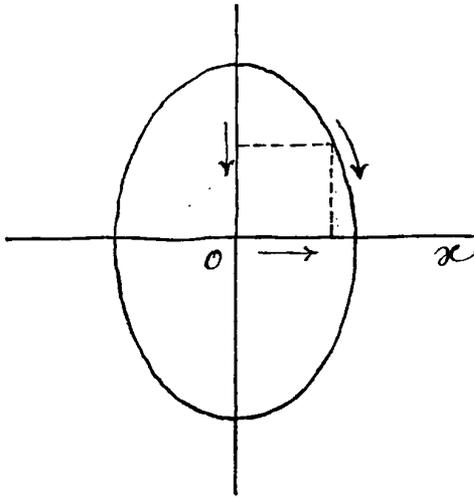
l'ellipse demandée.

Si l'on veut obtenir un mouvement vibratoire circulaire, il suffira de poser $\alpha = 45^\circ$.

Généralement on taille une lame quart d'onde en carré dont les côtés donnent précisément les directions des sections principales (ou directions des vibrations conservées).

Soit à analyser avec cette lame une lumière elliptique dont on ne connaît pas l'origine. La première chose à faire est de vérifier si elle est véritablement elliptique. C'est-à-dire si elle est la résultante de deux mouvements vibratoires rectangulaires dont un est en avance sur l'autre de $\frac{1}{4}$ de période.

Supposons que le mouvement s'effectue dans le sens des flèches,



et que oy soit en avance sur ox de $\frac{1}{4}$ de période ; nous avons une lame qui permet d'établir à volonté un avance ou un retard de $\frac{1}{4}$.
Si nous plaçons cette lame sur le trajet de manière que la vibration suivant ox coïncide avec la direction conservée, alors ox avance brusquement du quart d'ondulation dont il était en retard, on aura alors deux mouvements concomitants et la résultante sera rectiligne, cela revient à faire $\varphi = 0$ dans la formule, et alors l'introduction de cette lame va restaurer un mouvement vibratoire rectiligne.

Si au contraire c'est oy qui coïncide avec la direction des vibrations conservées par la lame, son avance sur ox qui était de $\frac{1}{4}$ de période deviendra $\frac{1}{2}$, leur superposition donne encore à un mouvement rectiligne mais qui est symétrique du précédent par rapport aux axes.

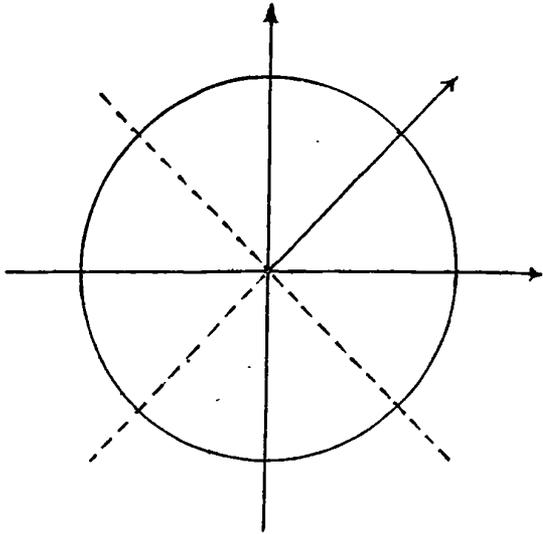
Si l'on opérerait ainsi sur la lumière partiellement polarisée ou naturelle il ne se produirait rien d'analogue, il faudrait pour chaque ellipse réduire le mouvement à une même direction. Or ces ellipses dans la lumière naturelle ou partiellement polarisée sont orientées d'une manière quelconque ; on ne

pourra donc jamais avec une seule lame produire un mouvement rectiligne.

Cas où la lumière incidente est circulaire : dans le cas de la lumière elliptique on était obligé de déterminer la direction des axes de l'ellipse (par la position du maximum et du minimum

d'intensité, comme on l'a vu au commencement de cette leçon) et de placer la lame quart d'onde de telle sorte que ses sections principales fussent précisément en coïncidence avec les axes de cette ellipse.

Mais dans la lumière circulaire, il n'est plus nécessaire de faire cette détermination, la lame quart d'onde sera toujours bien orientée et le $\frac{1}{4}$ de période ajouté ou retranché donnera toujours lieu à une vibration rectiligne dirigée à 45° de la section principale de la lame de 90° ; la vibration elle-même aura tourné de 90° , ce qui n'avait pas lieu dans le cas précédent, puisque nous avons vu qu'un déplacement de 90° produisait dans la vibration résultante une rotation de l'angle 2α .



Résumons ce qui précède;

Etant donné un faisceau qui analysé donne un maximum et un minimum d'intensité, inter-

posons une lame quart d'onde, si l'on dirige successivement les deux directions principales de cette lame parallèlement à la section principale de l'analyseur, (qui nous a servi à trouver le maximum et le minimum d'intensité), il y aura au sortir de la lame un faisceau polarisé rectilignement, et si l'on tourne de 90° la lame, le rayon polarisé est rétabli dans un autre azimut qui fait avec le premier un angle 2α tel que $\text{tg } \alpha$ soit égal au rap. port des axes de l'ellipse (on peut vérifier que ce rapport est égal au rapport des racines carrées des intensités).

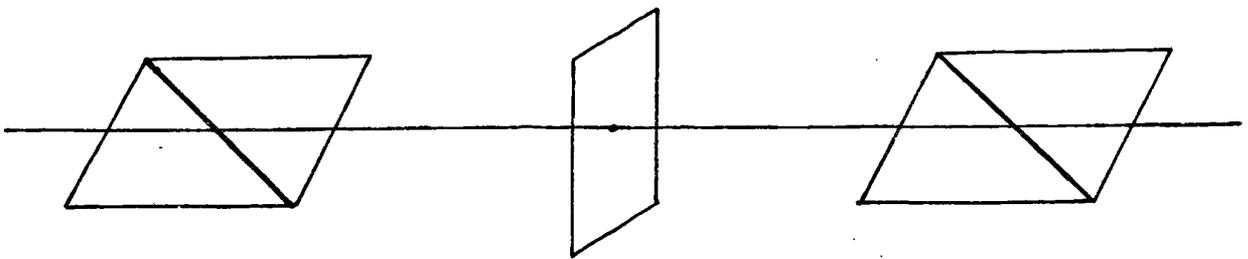
Pour la lumière circulaire au contraire il n'est plus nécessaire d'orienter la lame quart d'onde elle produit toujours la lumière polarisée et si l'on tourne de 90° la vibration rectiligne est aussi transportée de 90° .

28^e Leçon...

28^e Leçon.

Polarisation chromatique.

Nous avons vu que la lumière solaire était polarisée dans une région située à 90° du soleil. Arago examinant un jour cette région avec un analyseur eut l'idée d'interposer une lame cristallisée et fut très-surpris de voir cette lame prendre des couleurs les plus vives. Il attribua ce fait à la polarisation. On répète aisément cette expérience en interposant sur le trajet d'un rayon lumineux un prisme de Nicol, une lame cristallisée, (gypse ou mica) et un second prisme de Nicol. Les colorations de la lame varient beaucoup suivant les positions relatives des trois appareils.

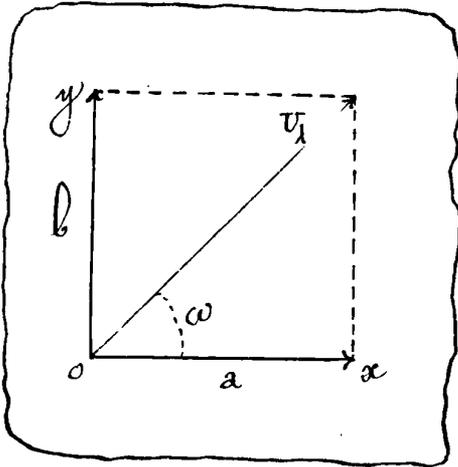


Biot découvrit expérimentalement les lois de ce phénomène; mais c'est à Fresnel qu'on doit l'explication de la polarisation chromatique, dans la théorie des ondulatoires.

Lorsqu'une couleur simple polarisée rectilignement traverse une lame biréfringente, elle donne deux rayons polarisés à angle droit, qui pour une épaisseur suffisamment mince se recomposent en donnant de la lumière polarisée elliptiquement, à cause de leur différence de phase.

$$\varphi = e \frac{(n - n')}{\lambda}$$

Si nous désignons par v_λ , l'amplitude de la vibration inci-



incidente, ω l'angle qui fait la direction du mouvement avec l'un des plans principaux de la lame cristallisée, les deux rayons polarisés émergents ont pour amplitudes

$$a = v_{\lambda} \cos \omega$$

$$b = v_{\lambda} \sin \omega$$

et l'équation de l'ellipse provenant de la composition de ces deux mouvements est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{2b} \cos 2\pi \varphi = \sin^2 2\pi \varphi.$$

φ dépend de λ et de $n - n'$; nous voyons donc que la forme de l'ellipse varie avec la lumière employée.

Nous ne considérerons φ que comme fonction de λ seulement. On trouve en effet pour valeurs de n et de n' des expressions de la forme :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

$$n' = A' + \frac{B'}{\lambda^2}$$

A, B, A', B' , étant des constantes; B et B' diffèrent très-peu, et l'on voit que la différence

$$n - n' = A - A'$$

est sensiblement constante pour toutes les couleurs.

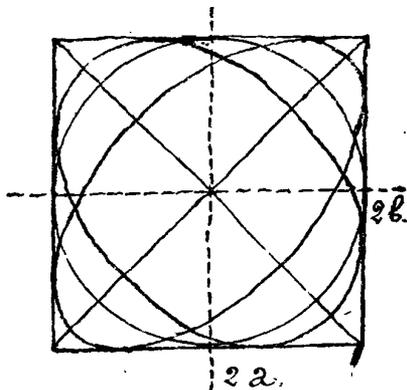
La valeur φ varie beaucoup d'une couleur à une autre, car λ varie de 400 à 800 millièmes de millimètre.

D'après l'équation de l'ellipse nous voyons que quelle que soit la couleur, l'ellipse est inscrite dans un rectangle de côtés $2a, 2b$.

Nous pouvons écrire cette équation :

$$\frac{x^2}{\cos^2 \omega} + \frac{y^2}{\sin^2 \omega} - \frac{2xy}{\sin \omega \cos \omega} \cos 2\pi \varphi = v_{\lambda}^2 \sin^2 2\pi \varphi$$

Nous voyons que pour que a et b soient constants il faut que v_{λ} le soit aussi; ce n'est pas absolument vrai; mais dans tous les cas, a et b conservent entre leurs longueurs respectives un rapport constant, et le rectangle dans lequel sont inscrites les ellipses reste toujours semblable à lui-même.

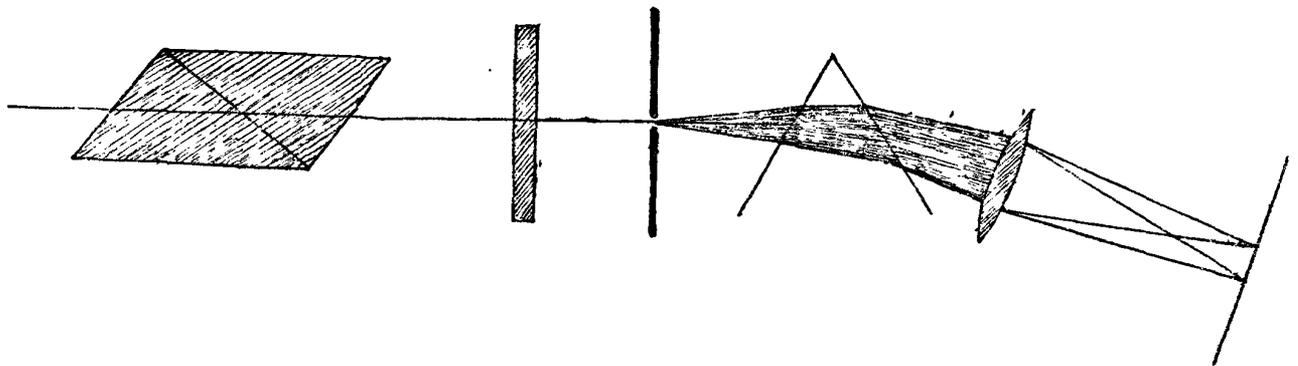


Si l'on prend de la lumière blanche ou λ varie progressivement on obtiendra toutes les variétés d'ellipses, y compris les diagonales du rectangle. Dans le cas où $a = b$ c'est-à-dire pour $\omega = 45^\circ$, ce qui correspond au cas où la vibration incidente est dirigée suivant la bissectrice de l'angle des sections principales de la lame biréfringente on obtiendra un cercle parmi toutes les ellipses, dont les axes seront dirigés suivant les

Diagonales du carré.

On conçoit donc la possibilité d'obtenir avec de la lumière polarisée blanche, des vibrations elliptiques, circulaires et rectilignes. C'est ce qui a été vérifié d'expérience de M. M. Fizeau et Foucault.

Expérience de M. M. Fizeau et Foucault.



Un rayon de lumière blanche traverse un polariseur, puis une lame mince cristallisée, dont les plans principaux font des angles de 45° avec le plan de polarisation du faisceau incident; on reçoit le rayon émergent sur un écran percé d'une ouverture très étroite; un prisme étale le faisceau, et une lentille sur le parcours du faisceau divergent, donne sur un écran autant d'images de la fente de l'écran, qu'il y a de radiations simples dans le faisceau; on obtient ainsi un spectre continu, formé de radiations très-complexes au point de vue du mouvement vibratoire.

L'équation de l'ellipse, où nous poserons $\omega = 45^\circ$ d'où $\cos \omega = \sin \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Comme la formule générale du mouvement:

$$x^2 + y^2 - xy \cos 2\pi \varphi = \frac{1}{2} v_\lambda^2 \sin^2 2\pi \varphi$$

$$\text{ou } \varphi = \frac{n - n'}{\lambda} e$$

Cherchons les valeurs de φ qui donnent une vibration rectiligne, nous n'avons qu'à poser $\sin^2 2\pi \varphi = 0$ car $\cos 2\pi \varphi = \pm 1$, et le premier membre se réduit à $(x \pm y)^2 = 0$ équation qui représente les diagonales du carré circonscrit.

Posons donc: $2\pi \varphi = 2\pi \frac{n - n'}{\lambda} e = i\pi$
 i étant un nombre entier quelconque. Nous avons

$$\lambda = \frac{n - n'}{i} e$$

Pour des valeurs convenables de $(n - n')$ et e , on peut obtenir pour λ , en donnant à i toutes les valeurs possibles, un certain nombre de valeurs comprises entre les limites extrêmes des longueurs d'onde des diverses couleurs simples.

Il existera donc dans le spectre des bandes lumineuses dont les vibrations sont rectilignes et obliques alternativement suivant l'une ou l'autre des diagonales du carré, suivant OA pour i pair, suivant OB pour i impair.

Ces bandes sont à peu près équidistantes dans le spectre.

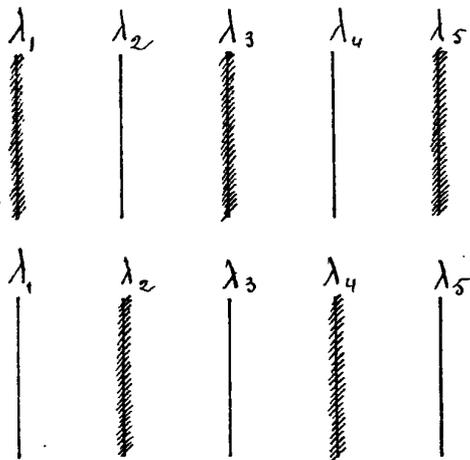
Pour les valeurs intermédiaires de φ , nous avons toutes les variétés d'ellipses y compris le cercle.

Nous pourrions donc représenter les vibrations en chaque point du spectre ainsi que le sens de la vibration par la figure suivante:



On vérifie ce résultat en plaçant derrière la lame cristallisée

un analyseur biréfringent qui dans une certaine position éteint toutes les bandes de rang impair, par exemple, qui correspondent à des vibrations rectilignes et donne des bandes obscures à leur place; en le tournant de 90° ces bandes obscures redeviennent brillantes, et ce sont les bandes de rang pair qui deviennent obscures.



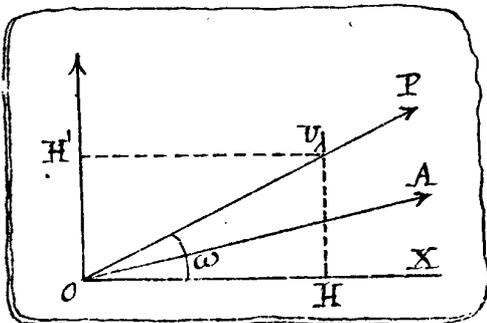
Entre ces bandes sont celles qui correspondent à des vibrations circulaires et dont l'intensité ne varie pas, quand on fait tourner l'analyseur. Enfin avec une lame quant à onde, on peut étudier en chaque point la forme des ellipses et le rapport de leurs axes, et

l'on vérifie toujours les conclusions auxquelles nous sommes arrivés par le calcul.

Cette expérience montre qu'un analyseur altère différemment les intensités des diverses radiations d'un rayon de lumière polarisée blanche, qui a traversé une lame cristallisée: Supposons, par exemple que l'analyseur enlève principalement les radiations jaunes; il restera dans le faisceau des radiations rouges et bleues qui donneraient une lumière violette; on peut s'expliquer ainsi d'une manière approximative, le phénomène des lames colorées observé par Arago.

Nous allons à présent chercher par le calcul, qu'elle doit être la coloration pour une position donnée de la lame par rapport au polariseur et à l'analyseur, et prévoir toutes les circonstances de cette coloration lorsque l'on fait tourner la lame biréfringente.

Soit OP la direction de vibration conservée par le polariseur,



Lame mince biréfringente.

on reçoit sur la lame mince une vibration V_1 dont la direction est OP . On ajoute un analyseur dont on définit la position, par la direction OA de la vibration conservée par cet analyseur.

Or la vibration V_1 peut se décomposer en deux, suivant

les directions principales OX, OY de la lame mince:

$$\begin{aligned} V_\lambda \cos \omega &= a \\ V_\lambda \sin \omega &= b \end{aligned}$$

avec une différence de phase $\varphi = \frac{n' - n}{\lambda} e$

On a donc au sortir de la lame une vibration elliptique permanente que l'on reçoit sur un analyseur, lequel ne conserve qu'une vibration rectiligne parallèle à OA .

Décomposons les amplitudes a et b suivant OA et la perpendiculaire à OA . L'analyseur ne conservera donc que les deux composantes:

$$B = a \cos \alpha \quad C = b \sin \alpha.$$

Deux vibrations rectilignes parallèles avec différence de phase φ . La règle de composition de Fresnel déjà vue plusieurs fois est la suivante.

$$A^2 = B^2 + C^2 + 2BC \cos 2\pi \varphi$$

On aura ici

$$A^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha + 2ab \cos \alpha \sin \alpha \cos 2\pi \varphi$$

Remplaçons a et b par leurs valeurs posées plus haut.

$$A^2 = V_\lambda^2 \left\{ \cos^2 \alpha \cos^2 \omega + \sin^2 \alpha \sin^2 \omega + 2 \cos \alpha \cos \omega \sin \alpha \sin \omega \cos 2\pi \frac{n - n'}{\lambda} e \right\}$$

Celle est l'intensité d'un rayon dont la longueur d'onde est λ ; après qu'il a traversé un polariseur, une lame biréfringente d'épaisseur e et enfin un analyseur; les positions respectives de ces trois instruments étant définies par les angles α et ω .

Discutons cette formule:

Remarquons d'abord que α et ω entrent d'une manière symétrique, donc on peut changer l'une dans l'autre les directions du polariseur ou de l'analyseur, ce qui revient à supposer que l'on peut faire arriver le rayon incident dans un sens inverse.

Cela fait remarquer que les différentes couleurs sont inégalement altérées: en effet dans l'expérience précédente lorsque α, ω, e sont données, φ varie d'une couleur à l'autre (à cause de λ qui est variable).

Donc dans la formule ci-dessus, le terme qui altère les intensités relatives des diverses couleurs est:

$$2 \cos \alpha \cos \omega \sin \alpha \sin \omega 2\pi \frac{n - n'}{\lambda} e.$$

Ce terme n'étant pas nul en général, le faisceau émergent sera coloré.

Autre remarque, si l'on tourne l'analyseur de 90° ce qui revient à changer α en $\alpha + \frac{\pi}{2}$ on obtiendra pour chaque couleur :

$$A'^2 = V_\lambda^2 \left\{ \cos^2 \omega \sin^2 \alpha + \sin^2 \omega \cos^2 \alpha - 2 \sin \omega \cos \omega \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\pi \frac{n-n'}{\lambda} e \right\}$$

le dernier terme a changé de signe.

Si donc on reçoit les deux faisceaux à la fois sur un écran en les superposant, on a :

$$A^2 + A'^2 = V_\lambda^2$$

ce qui donne l'intensité de la lumière dans le faisceau incident, ce qui veut dire que pour chaque couleur dans une des images se trouve une portion de l'intensité, et dans l'autre la quantité complémentaire. Donc les images produites par deux analyseurs à angle droit ont des couleurs complémentaires.

Pour étudier ces phénomènes on emploie de préférence un analyseur biréfringent, car alors on peut faire empiéter les deux images partiellement et les positions de ces images indiquent les plans de la polarisation.

On peut donc laisser de côté la seconde formule pour ne s'occuper que de la première.

$$A^2 = V_\lambda^2 \left\{ \cos^2 \alpha \cos^2 \omega + \sin^2 \alpha \sin^2 \omega + 2 \cos \alpha \cos \omega \sin \alpha \sin \omega \cos 2\pi \frac{n-n'}{\lambda} e \right\}$$

Continuons la discussion :

Il est intéressant de chercher le cas où il ne se produit aucune coloration, ceci se produit évidemment lorsque toutes les couleurs sont altérées dans le même rapport.

Il faut pour cela que le dernier terme de la formule précédente soit constant quelque soit λ , il faut pour cela que l'on ait

$$2 \cos \alpha \sin \alpha \cos \omega \sin \omega = 0$$

$$\text{ou: } \sin 2\alpha \sin 2\omega = 0$$

ce qui exige une des deux conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2\alpha = 0 \text{ --- } 2\alpha = i\pi \text{ --- } \alpha = i\frac{\pi}{2} \\ \sin 2\omega = 0 \text{ --- } 2\omega = i\pi \text{ --- } \omega = i\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

Il faut donc que la section principale du polariseur (caractérisée par ω) soit parallèle à une des sections principales de la lame biréfringente ; ou bien que cette condition soit remplie par l'analyseur (α).

La formule devient alors dans ce cas :

$$A^2 = V_\lambda^2 \cos^2 \alpha \text{ si } i \text{ est pair,}$$

$$A^2 = V_\lambda^2 \sin^2 \alpha \text{ si } i \text{ est impair.}$$

Ces intensités sont complémentaires.

Mais si en même temps on a $\alpha = i \frac{\pi}{2}$ il vient

$$A^2 = 0 \text{ si } i \text{ et } i' \text{ sont des parités différentes}$$

$$A^2 = V_\lambda^2 \text{ si } i \text{ et } i' \text{ sont de même parité}$$

On obtient donc dans ce cas de la lumière blanche ou une extinction complète suivant que l'analyseur et le polariseur sont parallèles ou croisés.

Recherchons le maximum de coloration : cela revient à rechercher le cas où les alterations des couleurs sont aussi différentes que possible.

Le terme suivant doit donc être maximum :

$$\frac{1}{2} \sin 2\omega \sin 2\alpha \cos 2\pi \frac{n-n'}{\lambda} e$$

ce qui aura lieu lorsqu'on aura simultanément :

$$\begin{cases} \sin 2\omega = 1 \\ \sin 2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$2\omega = (2i+1) \frac{\pi}{2} \quad \omega = (2i+1) \frac{\pi}{4}$$

$$2\alpha = (2i'+1) \frac{\pi}{2} \quad \alpha = (2i'+1) \frac{\pi}{4}$$

C'est-à-dire que les directions principales de l'analyseur et du polariseur, doivent avoir une des directions ci-contre, (inclines à 45° sur les sections principales de la lame).

On trouve dans ce cas.

$$A^2 = V_\lambda^2 \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \cos 2\pi \frac{n-n'}{\lambda} e \right.$$

$$\left. \begin{cases} A^2 = V_\lambda^2 \cos 2\pi \frac{n-n'}{\lambda} e \\ A^2 = V_\lambda^2 \sin 2\pi \frac{n-n'}{\lambda} e \end{cases} \right| \text{ suivant}$$

que i et i' sont de même parité ou de parités différentes.

Remarque : On pourrait croire que pour obtenir le maximum

de coloration, il serait utile d'annuler les deux premiers termes de la formule (qui laissent le spectre de lumière blanche) mais si l'on annule ces deux termes, on voit que le troisième disparaît également.

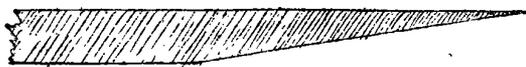
On voit expérimentalement que les lames trop minces ou trop épaisses ne donnent point de coloration, on peut en donner une explication:

Nous avons vu que les couleurs qui disparaissent sont celles qui ont été polarisées rectilignement après avoir traversé la lame biréfringente, les valeurs de λ correspondantes sont données par la formule:

$$2\pi \frac{n-n'}{\lambda} e = i\pi$$

$$\lambda = \frac{2(n-n')e}{i}$$

Si e est trop grand les valeurs de λ sont très-écartées, par suite il peut arriver qu'aucune de ces valeurs ne soit comprise dans les limites de visibilité; (c'est-à-dire entre le rouge et le violet) et dans ce cas l'interposition de l'analyseur ne détruisant aucune couleur, la lumière restera blanche. Si au contraire e est trop faible, les valeurs de λ seront très-rapprochées les une des autres, par suite il y aura dans chaque couleur du spectre un nombre à peu près égal de raies noires produites par l'interposition de l'analyseur, donc l'intensité de chaque couleur est diminuée à peu près dans le même rapport, on aura donc la lumière blanche.



Remarquons encore l'analogie de ce phénomène avec les anneaux colorés.

Soit une lame de gypse mince taillée en biseau, les épaisseurs croissent d'une manière constante à partir de l'arête, en chaque point, on a au sortir du cristal deux ondes qui ont des différences de marches proportionnelles à l'épaisseur ($\varphi = \frac{n-n'}{\lambda} e$) de même que pour les anneaux colorés. Mais ne peut y avoir interférence car les deux ondes sont polarisées à angle droit. Mais si on peut les faire interférer on aura des bandes noires; c'est ce que l'on fait au moyen d'un analyseur et l'on trouve des points en progression arithmétique ou l'intensité est annihilée et réciproquement.

Si le polariseur et l'analyseur sont orientés parallèlement, la lumière blanche n'est pas altérée au point A de la lame mince, ou l'épaisseur

est nulle, et les franges se détachent sur fond blanc, dans le cas où le polariseur et l'analyseur, sont orientés perpendiculairement, le contraire a lieu, et les franges se détachent sur fond noir.

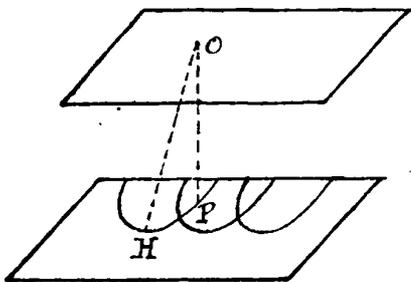
29^e Leçon.

Théorie mécanique de la double réfraction.

Surface de l'onde dans les cristaux à axe optique: — Fresnel s'est proposé le problème suivant: Peut-on retrouver théoriquement la surface de l'onde indiquée par Huyghens et vérifiée par l'expérience? La théorie a reçu depuis lui de nombreuses modifications, mais nous allons l'exposer à cause de sa grande simplicité, bien qu'elle présente quelques points faibles que nous ferons remarquer.

Le problème est le suivant: Déterminer dans un milieu quelconque (spath d'Islande, par exemple), la forme de la surface de l'onde lumineuse, c'est-à-dire un ébranlement lumineux étant produit à un instant donné en un point intérieur à ce milieu trouver le lieu des points où cet ébranlement s'est propagé au bout de l'unité de temps.

Fresnel remarqua que ce problème peut être ramené à la recherche de la vitesse de propagation normale d'une onde plane dans une direction quelconque.



En effet: d'après la construction de Huyghens; étant donnée une onde plane, on trace autour de chacun des points du plan une surface de l'onde, l'enveloppe de toutes ces surfaces représente la nouvelle position de l'onde, et l'on a la vitesse nor-

-male en abaissant la perpendiculaire commune à ces deux plans OP .

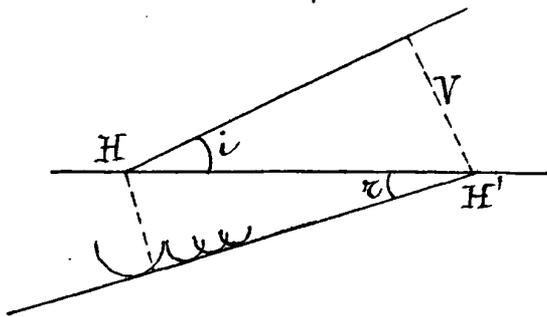
Inversement si l'on connaît la vitesse normale dans la direction OP , il suffira de mener par le point P un plan perpendiculaire à cette direction l'enveloppe des plans ainsi construits (lorsque l'orientation de OP varie) sera précisément la surface de l'onde.

Dans tout ce qui va suivre nous parlerons de la vitesse dans certaines directions; il s'agit donc de définir nettement ce que l'on entend par vitesse de l'onde.

La perpendiculaire commune aux deux positions de l'onde donnera la vitesse de propagation normale OP .

Si maintenant on mène le rayon OH au point de contact avec la surface de l'onde issue du point O , on aura la vitesse de propagation réelle du rayon.

Enfin il faut considérer la vitesse de toutes les molécules vibrantes dans les plans de l'onde: Vitesse d'oscillation des molécules.



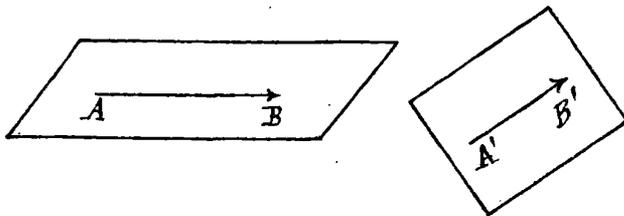
Importance de la vitesse normale: Nous avons vu que dans la réfraction d'une onde plane à la séparation de deux milieux, l'onde reste encore plane; il faut ajouter que quelle que soit la forme de la surface de l'onde la loi des sinus se conserve (pour la vitesse normale seulement).

La figure ci-contre mon-

tre en effet que l'on a:

$$V_0 = HH' \sin i \quad HP = HH' \sin r$$

D'où: $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V_0}{HP}$ or HP est la vitesse normale de l'onde réfractée, donc le rapport des sinus est bien égal au rapport des vitesses dans les deux milieux.



Cette vitesse normale va jouer un rôle capital dans ce qui suit pour établir la théorie de la double réfraction.

L'idée originale et tout à fait nouvelle de Fresnel fut la suivante: C'est la force élastique développée dans chaque oscillation ou mouvement vibratoire de l'onde plane, qui détermine la vitesse de propagation.

En d'autres termes, soit une onde plane en régime permanent, tous ses points sont animés de mouvements oscillatoires provenant de l'élasticité du milieu. Dans un milieu isotrope l'élasticité mise en jeu par cette oscillation est la même quelle que soit la direction ou plan de l'onde.

Cette vitesse doit aussi dépendre de la masse mise en mouvement ou ce qui revient au même à la densité du milieu.

Dès lors Fresnel a été conduit à appliquer la formule de Newton pour les ondes sonores:

Vibrations longitudinales $v = \sqrt{\frac{e}{d}}$, e est l'élasticité du milieu.

Vibrations transversales $v = \sqrt{\frac{\tau}{d}}$, τ est la tension de la corde vibrante
il admet aussi que dans les cristaux (milieux non isotropes) l'élasticité de l'éther est variable suivant la direction ou déplacement des molécules,

C'est là une idée nouvelle introduite dans la science par Fresnel, avant lui on supposait constante dans toutes les directions l'élasticité du milieu vibrant. (éther)

Dans les milieux à un axe optique, on est ramené à considérer deux élasticités principales l'une suivant l'axe et l'autre suivant la perpendiculaire à l'axe et cette dernière doit être la même dans toutes les directions par raison de symétrie.

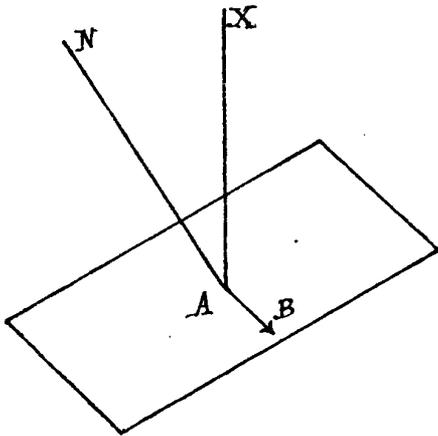
Lorsqu'on veut traiter analytiquement cette question il se présente une autre difficulté: quelle constitution doit-on supposer au milieu vibrant, l'éther, à l'intérieur d'un milieu cristallisé. Comme on n'a aucune donnée directe sur cette constitution, on risque, même en posant le problème de mécanique sous la forme que l'on croit être la plus générale, d'être tout-à-fait en dehors de la vérité. Aussi Fresnel n'a-t-il pas cherché à traiter la question d'une manière entièrement rationnelle, préférant faire appel à des principes vraisemblables, c'est-à-dire en substituant des hypothèses susceptibles d'interprétations physiques à des hypothèses analytiques.

Principe de symétrie - Fresnel a posé le principe suivant qui n'est qu'une hypothèse géométrique relative à la constitution du milieu.

La direction du mouvement vibratoire constitutif des ondes planes doit avoir le plus possible d'éléments communs de symétrie avec la constitution du milieu.

Ce principe sera expliqué par l'application que nous allons en faire. Il suppose la vibration rectiligne ce qui a toujours lieu dans un milieu biréfringent.

Propagation d'une onde plane. — Nous ne considérerons dans ce qui suit qu'un milieu à un seul axe de symétrie. Soit AX cet axe, traçons le plan de l'onde et sa normale



AN . Or la symétrie du milieu est caractérisée par AX et celle de l'onde plane par AN donc les directions de symétrie commune à l'onde et au milieu sont le plan NAX , et la perpendiculaire à ce plan. Nous allons examiner successivement les deux cas où la vibration est dirigée suivant la perpendiculaire au plan NAX , ou située dans ce plan.

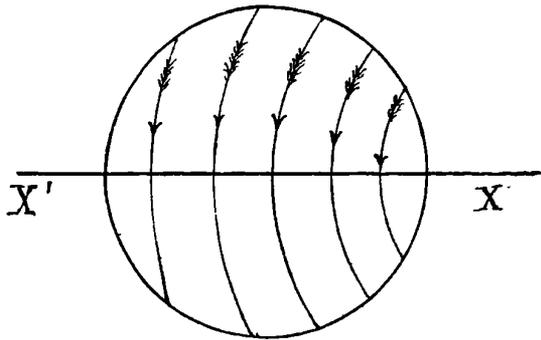
1^{er} Cas. — La vibration est perpendiculaire au plan NAX ce

qui revient à dire qu'elle est perpendiculaire à l'axe optique et située dans le plan de l'onde il pourra toujours y avoir une vibration satisfaisant à ces conditions, et comme autour de l'axe d'élasticité est la même dans toutes les directions, ce que nous dirons pour une onde s'applique à toutes.

Il en résulte que la vitesse de propagation est indépendante de la direction de ce plan. L'onde élémentaire qui est l'enveloppe de ces ondes planes est donc une onde sphérique, c'est l'une des nappes de l'onde d'Huyghens.

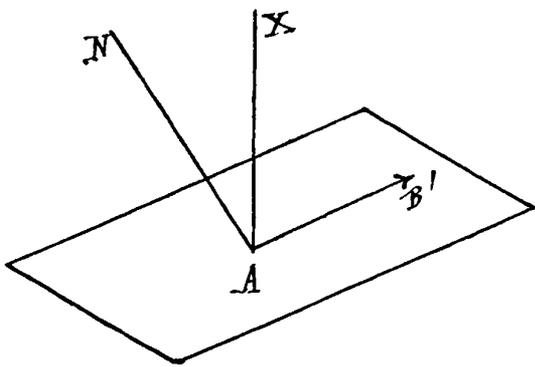
De plus cette onde plane se propageant parallèlement à elle-même, la vibration AB conservera sa direction primitive; donc l'onde est polarisée dans le plan NAX qui passe par le rayon NA et l'axe optique AX . Si donc on fait tomber une onde plane normalement sur une lame à faces parallèles, cette onde ne changera pas de direction à la sortie de même que la vibration, on peut donc vérifier expérimentalement la position du plan de polarisation du rayon émergent.

On voit que la vibration est perpendiculaire à l'axe, donc le plan de polarisation du rayon ordinaire doit être parallèle à la section principale : c'est ce que l'expérience nous a déjà appris.



Nous trouvons là une vérification inattendue de la direction de la vibration dans la lumière polarisée.

Si l'on trace en chaque point de la nappe sphérique la direction de la vibration qui s'y rencontre, ces directions étant perpendiculaires à l'axe seront tangentes aux petits cercles ayant pour axes l'axe optique $X'X$. Sur la trace de l'axe la direction est indéterminée (axe optique).



Second cas. - La vibration est située dans le plan NAX . Mais ici il se présente une difficulté ; qu'elle doit être la position de la vibration par rapport à l'onde ? Dans un milieu isotrope on a vu que la vibration lumineuse est rectiligne, perpendiculaire au rayon lumineux et d'autre part située dans le plan de l'onde. Mais dans le cas qui nous occupe nous n'avons

plus le droit de supposer le rayon normal à l'onde ; comment alors allons-nous généraliser le principe précédent relatif à la direction de la vibration ? On peut supposer celle-ci ou bien normale au rayon, ou bien en coïncidence avec le plan de l'onde.

Fresnel s'est arrêté à cette seconde conclusion, c'est à dire que la vibration est dans le plan de l'onde.

Nous avons donc ici la droite AB' intersection du plan de l'onde et du plan NAX .

Cette direction AB' fait avec AX un angle qui varie avec la position du plan de l'onde dont la vibration mettra en jeu des forces élastiques différentes suivant la direction du plan. La vitesse de cette onde suivra donc une loi extraordinaire.

Déterminons la surface de l'onde correspondante :

On a vu :

$$r \sqrt{\frac{e}{d}}$$

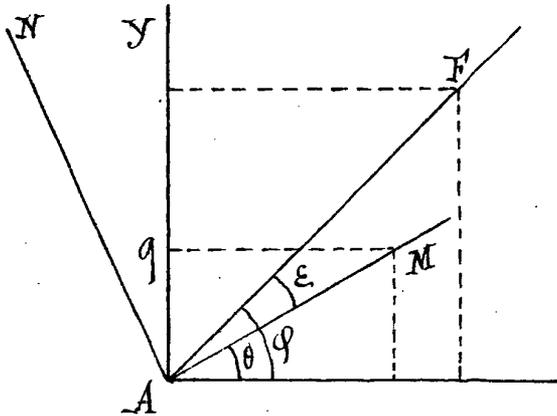
Il s'agit donc de voir comment varie e suivant la direction AB' .

Évaluation de la force élastique mise en jeu.

Remarquons de suite que la question est ramenée à la géométrie plane à cause de la symétrie par rapport à l'axe optique.

Soit $AM = \sigma$ le déplacement, et AX l'axe optique.

On a vu en mécanique que :
Lorsqu'un point matériel est soumis à l'action de forces quelconques, la force qui tend à le ramener à sa position d'équilibre est pour un déplacement très-petit, la résultante des forces qui correspondent aux déplacements composants du déplacement réel.



Au lieu du déplacement AM nous considérerons donc que les composantes du déplacement :

$$\begin{cases} Ax = \sigma \cos \theta \\ Ay = \sigma \sin \theta \end{cases}$$

Pour un déplacement très-petit, on admet que la force mise en jeu est proportionnelle au déplacement : on aura donc les composantes de la force suivant OX et suivant OY

$$X = h \sigma \cos \theta$$

$$Y = k \sigma \sin \theta$$

h et k étant deux constantes que nous supposons différentes car pour un même déplacement dans les directions différentes les élasticités mises en jeu ne sont pas les mêmes (cas d'un milieu non isotrope).

La résultante F de ces forces sera donnée par la relation :

$$F^2 = X^2 + Y^2 = \sigma^2 (h^2 \cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta)$$

Il est remarquable que cette force AF ne soit pas dirigée dans le sens du mouvement on a en effet en représentant par φ l'angle de cette force F avec AX

$$\operatorname{tg} \varphi \frac{Y}{X} = \frac{k \sin \theta}{h \cos \theta} = \frac{k}{h} \operatorname{tg} \theta.$$

On aura l'angle de F avec AM en projetant la force sur la direction du déplacement, ainsi que ses deux composantes :

$$F \cos \varepsilon = X \cos \theta + Y \sin \theta \\ = (k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta)$$

Cet angle ε crée une petite difficulté, car alors le mouvement ne peut pas être rectiligne. Mais Fresnel néglige la composante de cette force hors du plan de l'onde et considère seulement la composante $F \cos \varepsilon$, dirigée suivant le déplacement. Dans cette hypothèse le coefficient d'élasticité dans la direction AM sera le quotient de la force par le déplacement, c'est-à-dire

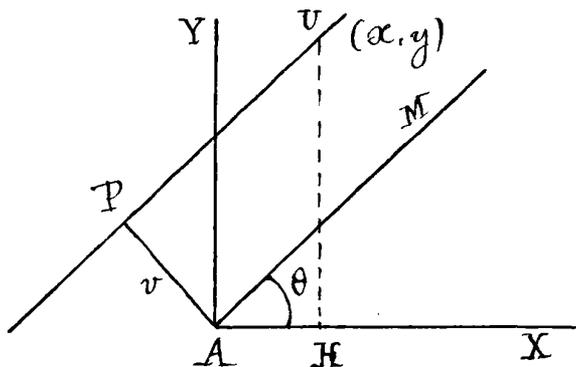
$$e = \frac{F \cos \varepsilon}{\sigma} = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

La formule de Newton donnera :

$$v \sqrt{\frac{1}{d}} \sqrt{k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta}$$

vitesse qui varie avec la direction de l'onde (θ)

L'onde élémentaire est une surface de révolution, il nous suffira d'avoir la méridienne située dans le plan de la figure.



On pourrait objecter que la formule de Newton $v = \sqrt{\frac{e}{d}}$ a été démontrée pour des vibrations longitudinales; mais il est facile de s'assurer que la formule donnée dans l'acoustique pour les vibrations transversales :

$$v = \sqrt{g \frac{P}{\pi l}} \quad \pi \text{ est le poids de la corde : } \pi = s.l.d. \\ p \text{ est le poids tenseur.}$$

conduit au même résultat.

Nous porterons donc sur la perpendiculaire à AM une longueur $AP = v$ et menons une droite PV parallèle à AM , il nous suffira de déterminer l'enveloppe des positions de cette droite. Soit un point (x, y) quelconque de cette droite, projetons sur AP le contour AHV , on aura :

$$v = x \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + y \cos \theta \\ = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$\text{Donc (1)} \quad -x \sin \theta + y \cos \theta = \sqrt{\frac{1}{d}} \sqrt{k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta}$$

250

Celle est l'équation de la Droite PV, elle contient un paramètre variable θ .

Je prends la dérivée par rapport à ce paramètre :

$$(2) \quad -x \cos \theta - y \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{(k-b) \sin \theta \cos \theta}{R}$$

en posant pour abréger: $R = \sqrt{b \cos^2 \theta + k \sin^2 \theta}$

L'équation (1) peut s'écrire :

$$(3) \quad -x \sin \theta + y \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{1}{R} (b \cos^2 \theta + k \sin^2 \theta)$$

Multiplications (2) par $\sin \theta$ et (3) par $\cos \theta$ et retranchons

$$\text{On a même} \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{1}{R} b \cos \theta \\ x = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{1}{R} k \sin \theta \end{cases}$$

Entre ces équations j'élimine le paramètre θ j'aurai l'équation de l'enveloppe.

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{b} = \frac{1}{d}$$

ellipse rapportée à ses axes

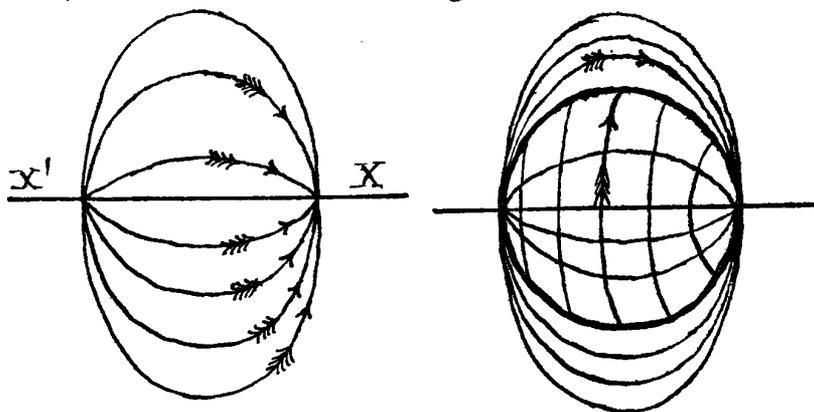
Les longueurs des demi-axes sont $\left| \begin{array}{l} \text{pour } y=0 \quad x = \sqrt{\frac{k}{d}} \\ \text{pour } x=0 \quad y = \sqrt{\frac{b}{d}} \end{array} \right.$

Les quantités b et k sont précisément les coefficients d'élasticité dans la direction AX et la direction perpendiculaire.

La vitesse suivant la perpendiculaire à l'axe est donc :

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{d}}$$

ce sera le rayon de la sphère correspondante au rayon ordinaire c'est précisément la longueur du demi-axe de l'ellipse dirigé



suivant AX donc la sphère et l'ellipsoïde sont tangentes comme l'avait supposé Huyghens.

Si l'on trace en chaque point de la nappe ellipsoïdale la direction de la

vibration qui s'y exerce, on trouve qu'elles sont toujours dans le plan passant par l'axe. Elles sont donc tangentes aux méridiens de la surface.

Si l'on considère à la fois l'ellipsoïde et la sphère tangente, c'est-à-dire la surface de l'onde complète on reconnaîtra que les courbes traçant la direction des vibrations sur chaque nappe sont les intersections de deux surfaces octogonales; une série de cônes de révolution pour la sphère, une série de plans principaux pour l'ellipsoïde.

Nous avons indiqué la difficulté rencontrée par Fresnel dans le courant du calcul précédent ($F \cos \epsilon$ au lieu de F). Aussi l'analyse de Fresnel est-elle incomplète. Fresnel est arrivé par suite de son hypothèse au même résultat que s'il avait fait un calcul absolument rigoureux (comme l'ont fait après lui plusieurs géomètres entre autres Cauchy). Effais quoi qu'on fasse, comme la constitution des corps cristallisés nous est inconnue il faut toujours compléter les données par une hypothèse soit physique soit géométrique.

Cette méthode a permis à Fresnel de démontrer que le spath n'est pas le seul milieu capable de produire la double réfraction, et à établir la forme de la surface de l'onde dans le cas plus général, comme nous le verrons dans la prochaine leçon.

Appendice (non exigé)

Forme la plus générale de la surface de l'onde.

Nous avons vu dans la dernière leçon comment Fresnel avait retrouvé à l'aide de certaines hypothèses la forme de l'onde extraordinaire dans les cristaux à un axe optique. Il chercha alors à appliquer les mêmes principes dans le cas général ou les cristaux n'ont plus d'axe de symétrie. Il s'appuya sur ce résultat (rigoureusement démontré en mécanique) que pour des déformations très-petites d'un corps, il existe

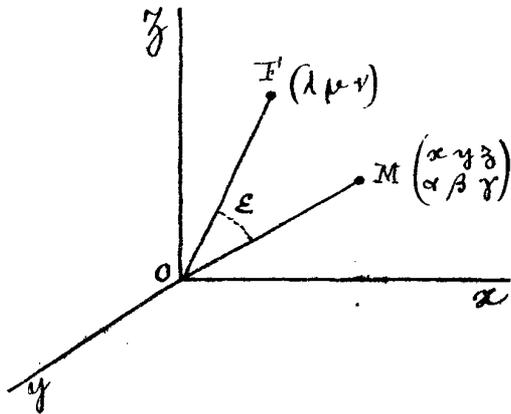
252.

3 Directions, suivant lesquelles la force élastique est dans la direction du déplacement: mais les coefficients d'élasticité ne sont pas les mêmes - Soient ox, oy et oz ces trois axes d'élasticité h, k, l les coefficients d'élasticité.

Le déplacement x donnerait une force $-hx$.

----- y ----- ky
----- z ----- lz

Supposons que le point O se déplaçant soit venu en M .



Soient x, y, z les coordonnées du point M ; α, β, γ les angles de OM avec les trois axes; s la longueur OM .

Nous admettrons comme dans la leçon précédente que la force élastique OF est la résultante des forces produites par les déplacements composants du point M ; on aura donc en appelant F la force, X, Y, Z ses composantes suivant les axes, λ, μ, ν ses angles les axes d'élasticité.

$$X = F \cos \lambda = -hx = -ks \cos \alpha$$

$$Y = F \cos \mu = -ky = -ks \cos \beta$$

$$Z = F \cos \nu = -lz = -ls \cos \gamma$$

On tire de là en multipliant la première équation par $\cos \alpha$, la 2^e par $\cos \beta$, la 3^e par $\cos \gamma$ et en ajoutant

$$F(\cos \lambda \cos \alpha + \cos \mu \cos \beta + \cos \nu \cos \gamma) = -s(h \cos^2 \alpha + k \cos^2 \beta + l \cos^2 \gamma)$$

Le coefficient de F est exactement le Cosinus de l'angle MOF (ϵ)

$$(1) \quad F \cos \epsilon = -s(h \cos^2 \alpha + k \cos^2 \beta + l \cos^2 \gamma)$$

Fresnel a imaginé une représentation très simple de ces forces élastique autour du point O . Supposons que nous cherchions le lieu des points M tels que

$$s F \cos \epsilon = -c$$

c étant une constante. Ce lieu est une ellipsoïde: Pour le montrer il suffit de multiplier les deux membres de l'équation précédente par s

$$\text{Il vient: } -s F \cos \epsilon = +h s^2 \cos^2 \alpha + k s^2 \cos^2 \beta + l s^2 \cos^2 \gamma,$$

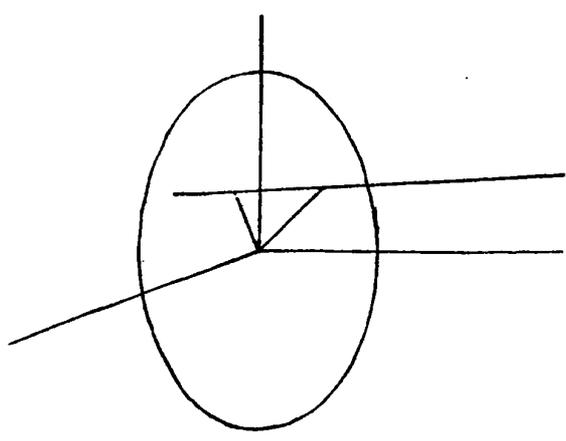
On - $S F \cos \epsilon = C$, $S \cos \alpha = x$, $S \cos \beta = y$, $S \cos \gamma = z$

Donc $h x^2 + k y^2 + l z^2 = C$
 h, k, l et C sont des constantes positives; le lieu est un ellipsoïde: on l'appelle ellipsoïde d'égal travail élastique; car la quantité constante $S F \cos \epsilon$ n'est pas autre chose que le travail accompli par la force élastique F faisant avec son déplacement S l'angle ϵ .

On l'appelle encore ellipsoïde inverse d'élasticité parce que les carrés de ses axes sont les inverses d'élasticités h, k, l et qu'en général ses rayons vecteurs sont les inverses des composantes élastiques suivant leur direction; on a en effet par hypothèse

$$S = \frac{-C}{F \cos \epsilon}$$

Prenons sur cet ellipsoïde un point (M).



La force élastique en ce point sera la normale même à l'ellipsoïde. En effet les cosinus de la normale sont proportionnels à hx, ky, lz

C'est-à-dire x, y, z ; donc elle fait avec les axes les mêmes angles: à p v que la force élastique. Du point O j'abaisse la perpendiculaire OP sur PM.

$$MP = OM \cos \epsilon = \frac{C}{F}$$

Donc PM représente l'inverse de la force élastique, comme MO l'inverse de sa composante suivant le déplacement.

Jusqu'à présent nous n'avons rien supposé sur la constitution intérieure du cristal; nous avons seulement emprunté à la mécanique des théorèmes généraux sur l'élasticité, et nous avons admis que l'éther suivait ces lois. Pour trouver la forme de la surface d'onde, il faut faire une hypothèse: l'élasticité rencontrée par une vibration est caractéristique de la vitesse de l'onde dont cette vibration fait partie.

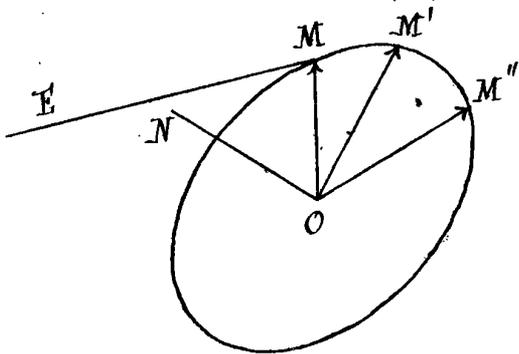
Il nous faut calculer la force élastique développée par une vibration quelconque.

Soit donc un plan d'onde quelconque il coupe l'ellipsoïde d'égal travail élastique suivant une ellipse; en menant tous les rayons vecteurs OM, OM', OM'' - - - - - on aura toutes les vibrations

rectilignes qui peuvent constituer l'onde.

Élevons en M, M' les normales à l'ellipse; elles représenteront

les directions des forces élastiques développées; en général ces forces E, M ne rencontreront pas la normale ON au plan de l'onde; une normale ne rencontrera ON que si son pied est à l'un des sommets de la section M, M', M'' -----



Pour tous les autres points il n'y aura aucune symétrie entre la vibration, la direction de l'onde et la force élastique.

Comme nous admettons avec

Fresnel qu'il doit y avoir le plus possible d'éléments de symétrie entre ces directions, nous voyons que la vibration n'est possible que dans la direction des axes, direction pour laquelle vibration, force élastique et normale à l'onde sont contenues dans le même plan.

Pour trouver la vitesse de l'onde plane dans laquelle le mouvement lumineux est ainsi bien déterminé, il nous reste à calculer l'élasticité développée par la vibration, en effet:

$$v = \sqrt{\frac{e}{d}}$$

C'est le quotient de la force par le déplacement qu'elle produit. Cette force n'agissant pas dans la direction du déplacement, Fresnel admit (et c'est le point mauvais de sa démonstration) qu'il ne faut tenir compte que de sa projection sur le déplacement:

$$e = \frac{F \cos \epsilon}{s} = \frac{s F \cos \epsilon}{s^2} = \frac{c}{s^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{e}{d}} \frac{1}{s}$$

On ne peut prendre la vibration que suivant les axes de la conique; donc en appelant s_1 et s_2 ces deux axes, on aura:

$$v = \sqrt{\frac{e}{d}} \frac{1}{s}$$

s désignant s_1 ou s_2 .

La nouvelle position de l'onde s'obtiendra donc en menant

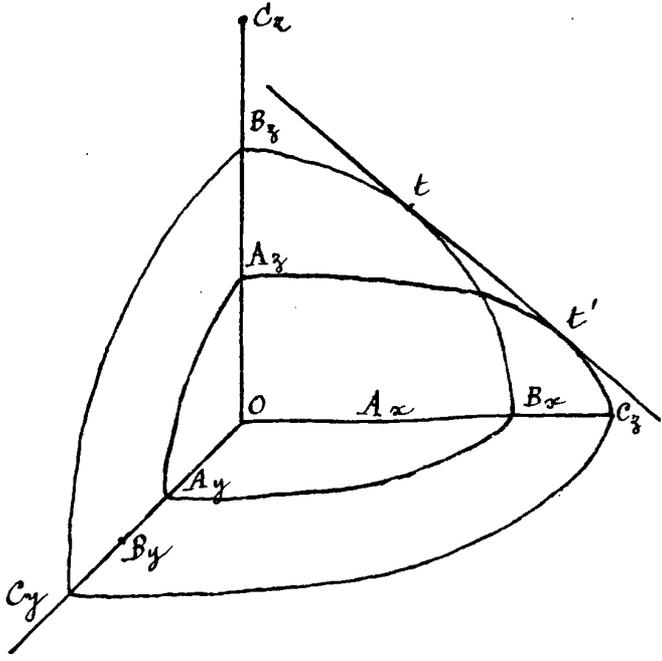
un plan parallèle à la première position et situé dans le sens du mouvement à une distance $\sqrt{\frac{c}{d}} \frac{1}{3}$; il y en aura deux puisque $\sqrt{\frac{c}{d}}$ peut avoir deux valeurs. Nous savons aussi qu'on aura l'onde élémentaire en répétant cette construction pour toutes les directions d'ondes planes et en prenant l'enveloppe des ondes. Il y aura deux séries de plans, l'enveloppe aura deux nappes. Nous ne ferons pas le calcul; on le trouvera dans le traité de M^r Bertrand à la théorie des enveloppes; on arrive à une équation du 4^e degré indécomposable et qu'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2} + \frac{y^2}{x^2-y^2+z^2-b^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2} = 1$$

a, b, c étant des constantes correspondant à h, k, l.

On peut même discuter complètement cette surface sans calculer son équation (Cours de M^r Mannheim).

Les sections par les 3 plans de coordonnées se composent d'une ellipse et d'un cercle; il y a une règle très simple pour les construire.



Portons sur chaque axe 3 longueurs respectivement égales à a, b, c.

Des points Ax, By et Cz ne partent aucune courbes; les trois cercles seront alors Bz Bx, Cy Cx, Az Ay et les trois ellipses auront pour axes l'une Az et Cx l'autre Bx Ay et la troisième Bz et Cy.

Les deux courbes ne se couperont que dans le plan perpendiculaire à l'axe moyen de l'ellipsoïde. Les points d'intersection seront des points singuliers

de la surface; il est facile de voir que ce sont des points coniques, c'est-à-dire qu'il y a en ces points une infinité de plans tangents enveloppant un cône du second ordre.

On reconnaît aussi le plan tangent qui passe par la tangente commune t t' à une infinité de points de contact situés

sur une circonférence.

Ces deux singularités pouvaient se prévoir. Si le plan d'onde est un plan de section circulaire tous les diamètres seront des axes; les deux positions de l'onde se confondront; on aura deux plans tangents à la surface confondus en un seul et il est probable que ce plan aura autant de points de contact qu'on peut considérer de diamètres; en construisant en effet le point de contact par la géométrie, on en trouve, en effet, une infinité disposés sur une circonférence.

Au moment où Fresnel découvrit cette surface les méthodes d'élimination n'étaient pas si perfectionnées qu'à notre époque. Il parvint heureusement à démontrer que la surface était du 4^e degré, et à trouver les courbes situées dans les plans principaux; il exprima alors qu'une surface du 4^e ordre contenait ces coniques et il obtint la surface de l'onde.

Arago obtint directement l'équation de la surface, mais par des méthodes très-lourdes et très-longues. Sénarmont enfin a donné une méthode plus élégante qui a encore été perfectionnée depuis.

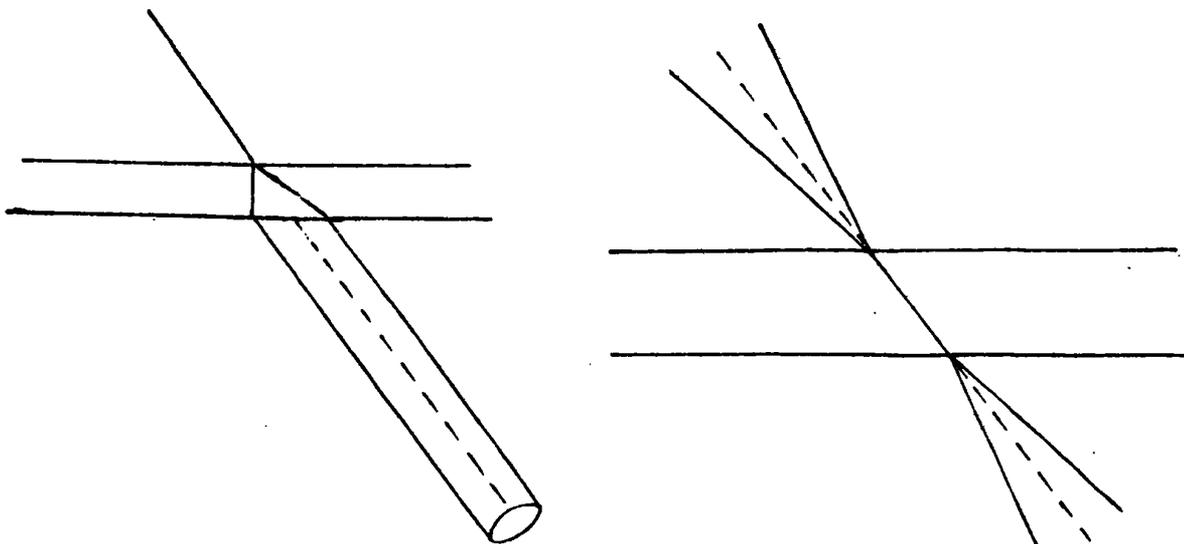
Fresnel avait découvert les points singuliers; mais la discussion complète de la surface est due à un Anglais. Hamilton. Celui-ci demanda à l'expérience de vérifier ses résultats; il chargea un physicien Ecossais Lloyd de trouver un cristal biréfringent et sans axe optique, et de rechercher, s'il n'y avait pas un rayon passant par réfraction une infinité de rayons (Correspondant au plan à contact circulaire) et d'autre part une infinité d'ondes passant même rayon réfracté (infinité de plans tangents en un seul point.).

Lloyd choisit l'aragonite, en tailla une lame à faces parallèles et ne tarda pas à découvrir les deux phénomènes suivants:

1^o Si on fait tomber un faisceau très-délié R sous un certain angle, il s'épanouit en cône dans l'intérieur du cristal; puis à la sortie les différents rayons redeviennent parallèles à leur direction première et on obtient une espèce de cylindre de lumière creux.

Cette direction est appelée axe de réfraction cylindrique extérieure; ou axe de réfraction conique intérieure.

2^o Si l'on fait tomber un faisceau conique en choisissant convenablement les angles sur une lame d'aragonite, de telle sorte que le sommet du cône soit sur la surface, tous



Les rayons se confondent en un seul dans l'intérieur du cristal; à la sortie, il se forme un nouveau cône (axe de réfraction conique extérieure ou de réfraction cylindrique intérieure).

C'est là une vérification aussi complète que curieuse des principes de Fresnel et de la théorie des ondulations.

Polarisation rotatoire.

Les phénomènes de polarisation rotatoire se sont révélés à Arago par des colorations très-vives; il avait fait tailler des lames de quartz, perpendiculairement à l'axe, s'attendant à ne trouver ni double réfraction ni polarisation. Il fit tomber normalement à cette lame un faisceau polarisé et l'observa avec un analyseur; il fut fort étonné d'apercevoir une coloration très-vive, variable quand on fait tourner l'analyseur, mais (au contraire des colorations vues aux lames minces cristallisées) constante quand on fait tourner la lame.

Quand l'analyseur tourne, les colorations varient, mais on n'obtient jamais ni blanc, ni noir; tandis qu'avec une lame non perpendiculaire à l'axe il y aurait toujours un azimut, ou la lumière serait blanche et un autre où il y aurait extinction.

Ces phénomènes sont donc bien distincts des phénomènes de polarisation chromatique, c'est à Biot qu'on en doit l'étude

et à Fresnel l'explication.

Biot eut l'idée d'employer des lumières monochromatiques et il aperçut bientôt les lois suivantes:

1^o Un rayon de lumière monochromatique polarisé rectiligne-ment émerge encore polarisé; mais dans un plan différent.

2^o Il y a rotation du plan de polarisation proportionnellement à l'épaisseur du cristal (de là le nom de pouvoir rotatoire).

3^o L'angle spécifique de rotation croît du rouge au violet.

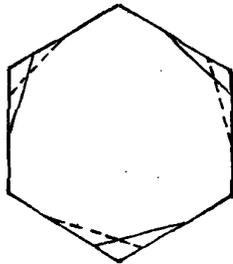
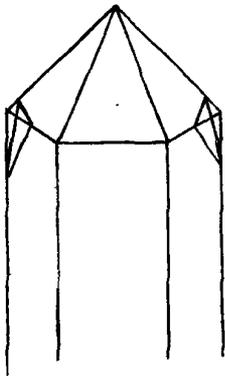
4^o La rotation du plan de polarisation s'effectue à droite ou à gauche suivant les échantillons mais toujours de la même quantité.

De là une distinction des cristaux de spath en dextrogyres (déviant à droite) et en lévogyres (à gauche).

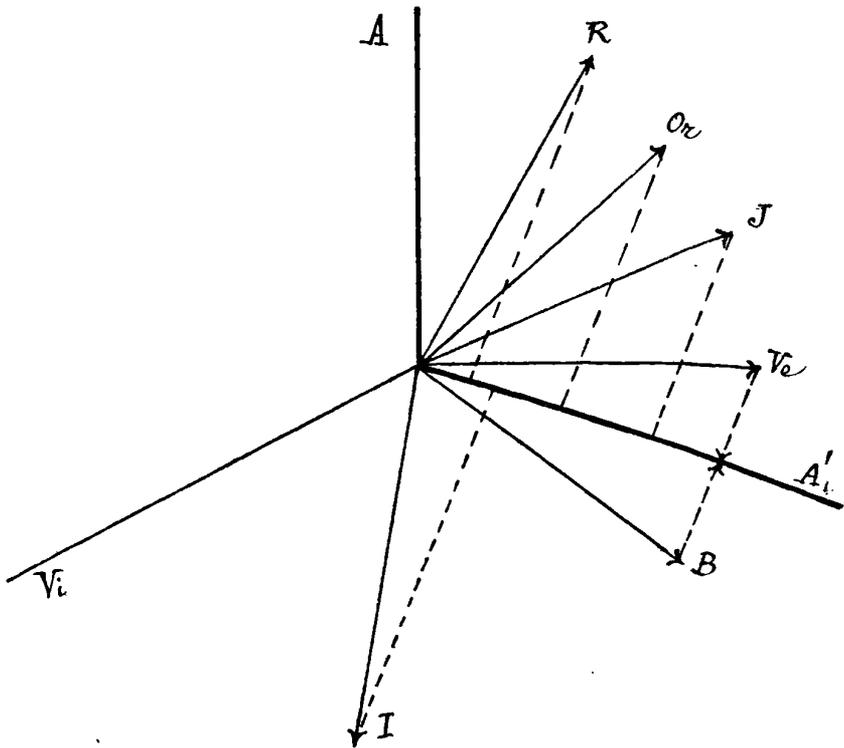
Il employait un prisme de Nicol et même une simple glace en verre noir, sous l'angle principal; il plaçait un analyseur de manière à éteindre le rayon; il interposait alors la lame et l'angle dont il fallait tourner l'analyseur pour retrouver l'extinction donnant la rotation du plan de polarisation. Il put ainsi vérifier les lois que nous avons énoncées plus haut et calculer les angles de rotation spécifiques pour les différentes couleurs 1^{mm} de spath dévie le plan de polarisation

| | | | |
|------------|------------------|----|---------|
| de la raie | B (rouge) | de | 15° 18' |
| | C (orange) | | 17° 15' |
| | D (jaune sombre) | | 21° 40' |
| | E (vert) | | 27° 28' |
| | F (bleu) | | 31° 30' |
| | G (violet) | | 42° 12' |

On peut reconnaître à priori les cristaux de spath lévogyres, des cristaux dextrogyres, grâce aux faces plagiaves: ce sont de petites troncutures qui viennent se former aux extrémités des arêtes du prisme, de deux en deux sommets et plus



inclonnées sur une face que sur l'autre; la dissymétrie de structure qui rend les cristaux dextrogyres ou lévogyres se traduit dans ces facettes parce qu'elles sont plus inclinées à



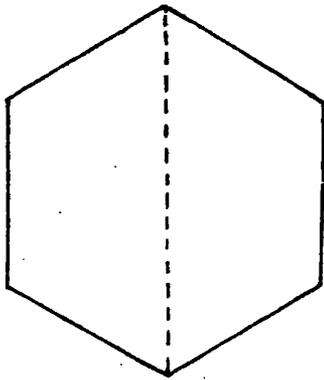
à droite qui à gauche, on a reconnu au reste que ce fait est général.

Ces différences de rotation expliquent très-bien les colorations soient OA la direction des vibrations lumineuses après qu'elles ont traversé le polariseur; on interpose la lame; les plans de polarisation des couleurs sont déviés de quantités différentes et deviennent OR, OR', OJ, \dots

Si on regarde avec un analyseur (Soit OA' la direction des vibrations qu'il conserve) les intensités seront inégalement conservées; elles seront maintenant les projections des intensités OR, OJ, \dots sur OA' ; certaines couleurs seront complètement conservées (par exemple OV_e) et d'autres totalement éteintes (celles dont les vibrations après la rotation sont perpendiculaires à OA').

Si on fait tourner le polariseur ou l'analyseur les couleurs varieront; l'un d'eux restant fixe, pour deux positions rectangulaires, de l'autre les intensités seront complémentaires; on peut réaliser constamment ces faisceaux complémentaires en employant pour analyseur un prisme biréfringent; on obtient deux faisceaux qui donnent du blanc à leur partie commune.

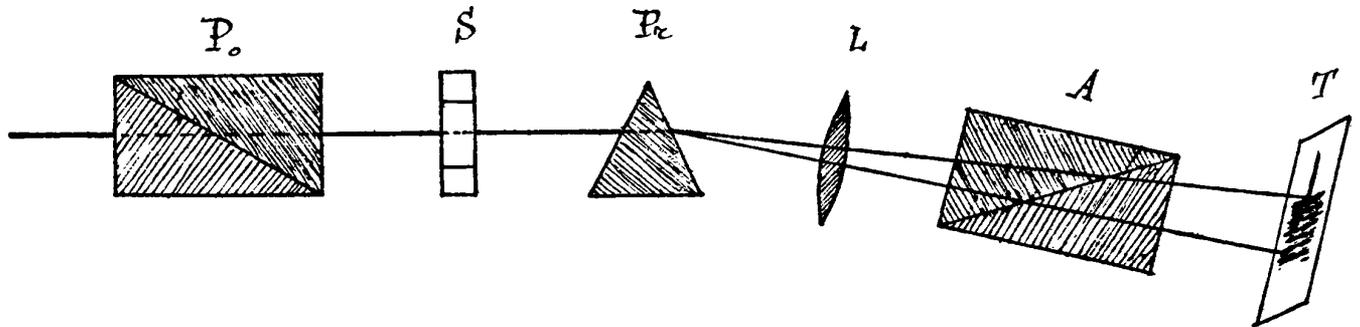
Notre œil est très impressionné par le jaune; si on place l'analyseur de manière à éteindre le jaune on obtient une teinte bleuâtre que Biot a appelé la teinte sensible; aussi peu qu'on tourne l'analyseur à droite ou à gauche la couleur varie énormément. On peut arriver à retrouver rapidement cette teinte sensible en employant des quartz à double rotation; ce sont deux lames de quartz l'une dextrogyre et l'autre lévogyre, leur épaisseur est calculée pour dévier l'un à droite,



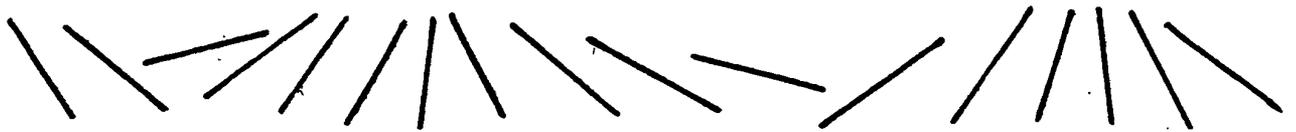
L'autre à gauche le plan de polarisation au jaune clair; on les accole; elles auront exactement même teinte lorsque la section principale de l'analyseur coïncidera avec la ligne de jonction; mais si on fait tourner l'analyseur, on obtient sur chaque côté les altérations inverses; cet appareil est si sensible qu'il est très difficile d'amener les deux plages à avoir

même teinte. C'est ainsi qu'on peut définir avec beaucoup d'approximation la position du plan de polarisation d'un rayon donné.

On peut vérifier synthétiquement que les rayons sont polarisés rectilignement. Il suffit d'analyser à sa sortie de la lame le faisceau avec un spectroscope, comme nous l'avons déjà fait. (expérience de M. M. Fizeau et Foucault).



L'appareil se composera d'un polariseur P_0 , d'une lame de spath normale; d'un prisme P_c ; d'une lentille L destinée à faire converger les différents rayons de chaque couleur sur un écran T ; les couleurs vont s'étaler sur l'écran polarisées rectilignement, mais avec des directions variables.



Le spectre sera tout à fait analogue à un spectre ordinaire

supposons qu'on place après la lentille un analyseur; il éteindra toutes les vibrations parallèles à une direction déterminée; on verra le spectre se couper de bandes noires.

Quand on fera tourner A la direction des vibrations éteintes variera d'une façon continue; les bandes semblent se déplacer de la droite vers la gauche ou de la gauche vers la droite suivant le sens de la rotation. Ce fait distingue ce spectre de celui qu'avaient obtenu M. M. Lizeau et Foucault dans l'expérience analogue sur la polarisation chromatique; le spectre en effet contenait des vibrations circulaires, dont l'intensité était toujours la même à l'analyseur et des vibrations rectilignes qui pouvaient s'éteindre; On avait des camelures qui paraissaient et disparaissaient sur place; mais ne s'éloignaient pas par translation comme ici.

Beaucoup de corps possèdent la polarisation rotatoire; par exemple le cinabre, (sulfure de mercure cristallisé en prismes hexagonaux rhomboédriques) tourne le plan de polarisation 17 fois plus que le quartz.

Piot a constaté même que cette propriété existe dans des corps non cristallisés, des essences, (essence de térébenthine) des dissolutions. La dissolution du sucre en particulier est dextrogyre; bouillie avec un acide, elle n'est plus cristallisable et devient laevogyre.

Presque tous ces corps, les liquides aussi bien que les cristaux dévient la lumière violette plus que la lumière rouge.

Piot a même découvert une loi approximative ainsi conçue: La déviation est à très peu près en raison inverse du carré de la longueur d'onde.

$$\alpha = \frac{H}{\lambda^2}$$

Cette loi n'est pas rigoureuse: quelques corps même, comme l'acide tartrique présentent un maximum de rotation pour une certaine couleur; aussi a-t-on proposé une autre formule qui se vérifie exactement pour le quartz.

$$\alpha = \frac{H}{\lambda^2} + \frac{H'}{\lambda^4}.$$

M^r Soret de Genève a poussé l'étude expérimentale de cette loi pour les rayons ultra-violet jusqu'à des vibrations de 175 millièmes de millimètre (le rayon rouge en a 800) et dans ces limites étendues la loi s'est parfaitement vérifiée.

30^e Leçon.

Explication cinématique de la polarisation de la lumière.

On est tenté pour expliquer ces phénomènes de s'appuyer sur la constitution de l'éther, or ce procédé est dangereux, car on est loin de connaître cette constitution. Fresnel a évité cet écueil par des considérations purement cinématiques.

Le point de départ de sa théorie est le lemme suivant

Une onde polarisée rectilignement peut être considérée comme la superposition de deux ondes planes polarisées circulairement en sens inverse et se propageant avec la même vitesse.

C'est-à-dire que chaque molécule peut être considérée comme animée de deux mouvements circulaires simultanés de sens inverse.

Ces deux mouvements seront représentés par les équations suivantes :

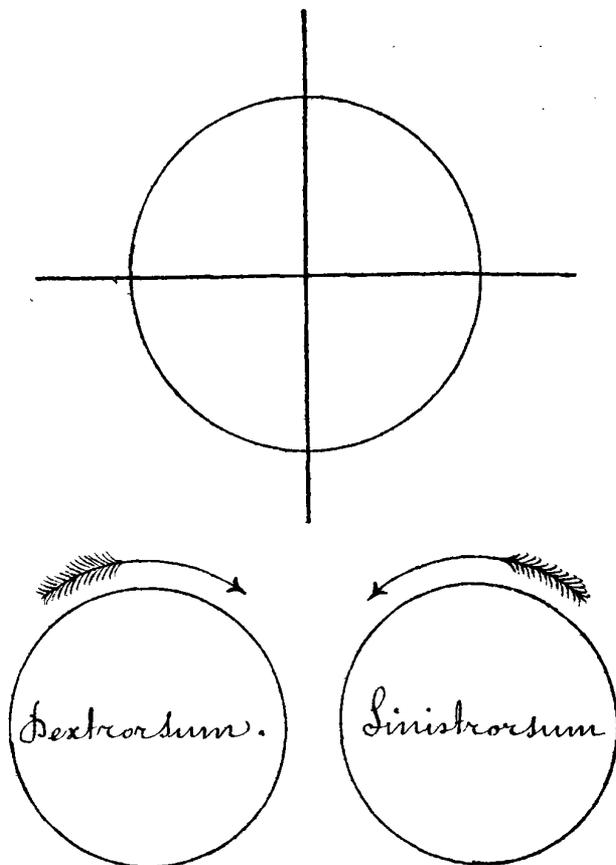
$$\begin{cases} x' = a \sin 2\pi \frac{t}{T} & \text{Circulaire} \\ y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{1}{4} \right) & \text{Dextrorsum} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = a \sin 2\pi \frac{t}{T} \\ y'' = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{4} \right) & \text{Sinistrorsum} \end{cases}$$

Les différences de phases sont égales et de signes contraires dans les deux mouvements

La superposition de ces deux mouvements donne le mouvement suivant :

$$\begin{aligned} X &= x' + x'' = 2a \sin 2\pi \frac{t}{T} \\ Y &= y' + y'' = 0 \end{aligned}$$



vibration rectiligne dirigée suivant ox dont l'amplitude est $2a = A$.
On peut donc considérer ce mouvement comme la superposition de deux vibrations circulaires de sens contraires, le rayon du cercle étant égal à la moitié de l'amplitude A de ce mouvement rectiligne.

Cela posé d'après Fresnel, une onde plane polarisée en entrant dans un milieu qui jouit du pouvoir rotatoire se dédouble en deux ondes polarisées circulairement (de sens inverse) se propageant avec des vitesses différentes. A la sortie, ces ondes qui ont parcouru des chemins inégaux ont une différence de phase et se recombinent pour former une onde polarisée rectilignement, mais dans un autre azimut.

Ainsi les corps qui jouissent de cette propriété propagent plus rapidement les ondes à vibrations circulaires dans un sens, que celles dont les vibrations sont en sens inverse, c'est une sorte de double réfraction; on a vu en effet que les cristaux biréfringents propagent les ondes en les bifurquant: l'une avec une certaine vitesse et une certaine vibration de plan de polarisation perpendiculaire au précédent. Les deux phénomènes sont donc analogues, la seule différence est que la double réfraction s'applique aux vibrations rectilignes, tandis

que le pouvoir rotatoire s'applique aux vibrations circulaires.

Montrons que cette théorie permet de retrouver les lois expérimentales de Biot:

Considérons une onde plane incidente polarisée rectilignement suivant Ox , avec une amplitude $2a$. On a vu qu'elle peut se décomposer en deux ondes

polarisées circulairement.

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{A}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T} \\ y' &= \frac{A}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{4} \right) \end{aligned} \right\} \text{Sinistrorsum.}$$

$$\left. \begin{aligned} x'' &= \frac{A}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T} \\ y'' &= \frac{A}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{1}{4} \right) \end{aligned} \right\} \text{Dextrorsum.}$$

Cette décomposition qui est possible, se produira réellement (d'après Fresnel) dès que l'onde pénètre dans le milieu. Il y a donc une bifurcation même sous l'incidence normale, et elles n'arrivent pas ensemble à la face de sortie. Soit v la vitesse de propagation de l'une des ondes, et v' l'autre; pour parcourir l'épaisseur e de la lame, la première emploiera le temps: $0' = \frac{e}{v}$
la deuxième ----- $0'' = \frac{e}{v'}$

Donc deux ondes qui sortent ensemble de la lame, y sont entrées à des instants différents représentés par $(t - 0', t - 0'')$.

Ces deux ondes possèdent donc des mouvements représentés par les formules:

$$x' = \frac{A}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{e}{T v'} \right)$$

$$y' = \frac{A}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{e}{T v'} - \frac{1}{4} \right)$$

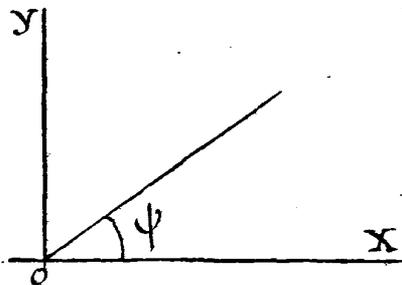
$$x'' = \frac{A}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{e}{T v''} \right)$$

$$y'' = \frac{A}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{e}{T v''} + \frac{1}{4} \right)$$

Le mouvement résultant sera:

$$X = x + x' = A \sin 2\pi \left\{ \frac{t}{T} + \frac{e}{2T} \left(\frac{1}{v'} + \frac{1}{v''} \right) \right\} \cos 2\pi \frac{e}{2T} \left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{v''} \right)$$

$$Y = y + y' = A \sin 2\pi \left\{ \frac{t}{T} + \frac{e}{2T} \left(\frac{1}{v'} + \frac{1}{v''} \right) \right\} \cos 2\pi \frac{e}{2T} \left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{v''} \right) - \frac{1}{4}$$



Je dis que cette vibration est rectiligne, en effet, le terme où entre la variable t est le même dans les deux expressions, donc en divisant membre à membre on élimine le temps et il vient:

$$\frac{Y}{X} = \frac{\cos 2\pi \left\{ \frac{e}{2T} \left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{v''} \right) - \frac{1}{4} \right\}}{\cos 2\pi \frac{e}{2T} \left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{v''} \right)} = \text{tg } 2\pi \frac{e}{2T} \left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{v''} \right)$$

Ce rapport $\frac{Y}{X}$ étant indépendant du temps, la vibration sera rectiligne; soit ψ l'angle de cette vibration avec OX ,

on aura évidemment

$$\tan 2\pi\psi = \frac{Y}{X} = \frac{\pi e}{T} \left(\frac{t}{v'} - \frac{t}{v''} \right) = \frac{\pi e}{vT} \left(\frac{v}{v'} - \frac{v}{v''} \right)$$

et par suite en remarquant que $\lambda = vT$

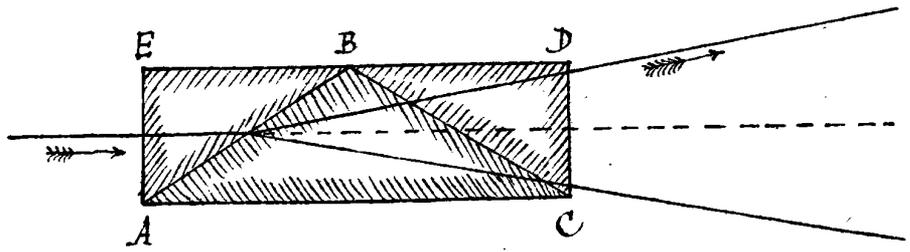
$$\psi = \frac{e}{2\lambda} \left(\frac{v}{v'} - \frac{v}{v''} \right)$$

C'est-à-dire que l'arc de rotation ψ est précisément égal à la moitié de la différence de phase introduite par la différence de vitesse des ondes circulaires dextrosum et sinistrosum.

On retrouve ainsi la loi de Biot: rotation proportionnelle à l'épaisseur, en effet pour une substance donnée la quantité $\frac{1}{v'} - \frac{1}{v''}$ est constante, par suite l'angle ψ est proportionnel à l'épaisseur e de la lame.

La loi de dispersion des diverses couleurs ne peut être donnée par cette formule; car il faudrait y introduire les valeurs de v et v' correspondantes aux différentes couleurs, or ces valeurs sont difficiles à déterminer par l'expérience.

Expérience de Fresnel: Pour démontrer le fait fondamental de sa théorie Fresnel a opéré comme il suit: il prend un parallélépipède de quartz formé de:



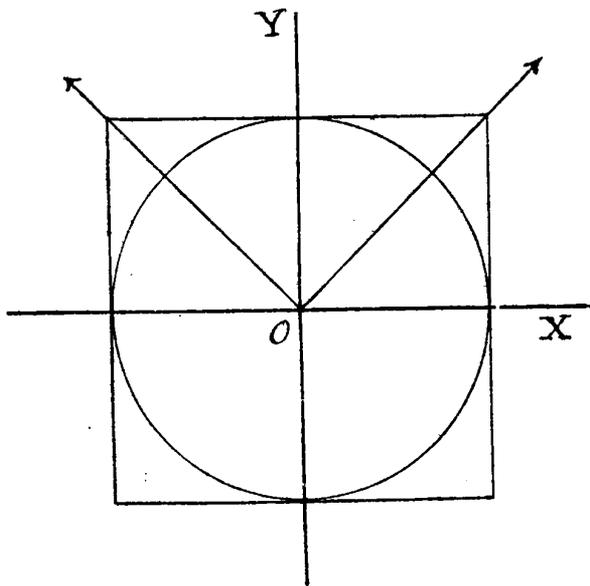
deux prismes dextrogyres ABE, BCD (ces prismes ayant été taillés de manière que leurs grandes arêtes soient normales à l'axe du cristal) la figure

montre les sections droites de ces prismes: Supposons que l'on fasse tomber normalement à une des faces AE un rayon de lumière polarisée rectilignement; en pénétrant dans le prisme AEB l'onde plane se sépare en deux ondes planes de vitesses différentes mais suivant le même chemin jusqu'à la face AB. Ces deux ondes sont polarisées circulairement en sens inverses d'après la théorie de Fresnel.

Mais en entrant dans le second prisme par la face AB, les deux ondes vont se séparer, en effet, celle qui a la plus grande

vitesse dans AEB aura la vitesse la plus faible dans ABC et inversement, or on a vu que dans le passage d'un milieu dans un autre, on a l'indice de réfraction du second milieu en prenant le rapport de la vitesse dans le second, par suite à son entrée dans le prisme ABC, l'onde qui a la plus grande vitesse dans AEB va se rapprocher de la normale, l'autre au contraire s'en éloignera, l'écartement augmentera encore au passage en BC et au sortir du cristal les deux rayons seront distincts. Mais si cet écartement est très faible, pour le rendre plus sensible on juxtapose une série de parallélépipèdes analogues et l'expérience réussit parfaitement.

Objection : Le quartz est biréfringent, s'il n'est pas taillé bien perpendiculairement à l'axe, la double réfraction ordinaire se produit. Il n'en est rien en effet : cette double réfraction donnerait au sortir du cristal des rayons polarisés rectilignement et à angle droit, dont l'intensité varierait suivant les orientations respectives de l'analyseur et du polariseur. Or l'expérience prouve que quelle que soit la direction de la vibration incidente, l'intensité reste constante ; on est donc dans le cas de la lumière naturelle ou polarisée circulairement. Mais si l'on interpose une lame quart



d'onde, il y a restauration d'une polarisation rectiligne, quelle que soit l'orientation du quart d'onde ; et l'analyseur, étant alternativement l'un et l'autre des rayons émergents dans des azimuts à 45° . Il en résulte que l'on a deux ondes polarisées circulairement. Cette explication ne s'appuie en rien sur la constitution du quartz, l'expérience a pu être faite même avec des liquides tels que l'éther et même l'eau, mais les images étaient très-rapprochées, car le pouvoir rotatoire des liquides est beaucoup plus faible que celui du quartz.

coups plus faible que celui du quartz.

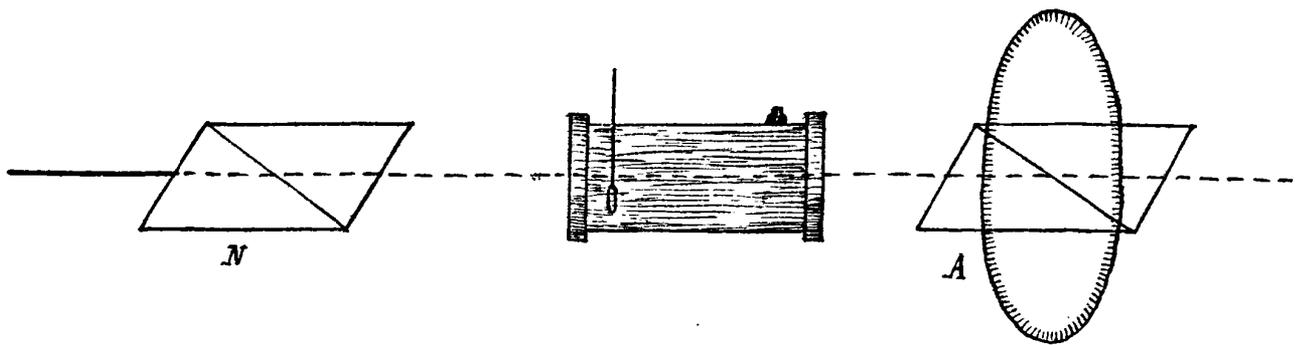
Applications. - Saccharimétrie.

Une dissolution de sucre dévie à droite le plan de polarisation,

Et cette déviation est proportionnelle à l'épaisseur traversée et au poids de la substance dissoute, on a basé sur cette propriété une méthode très-exacte pour le dosage de la quantité de sucre cristallisable contenu dans une liqueur.

Le sucre sous l'influence des acides qui se développent pendant l'évaporation, subit une transformation (on l'appelle alors sucre interverti) qui l'empêche de cristalliser. Or le sucre cristallisable est le seul qui ait de la valeur pour le commerce, il s'agit donc d'avoir la proportion pour ces deux sortes de sucre dans un poids donné de sucre brut. Mais le sucre interverti au lieu de dévier le plan de polarisation à droite, le dévie au contraire à gauche.

Si l'on introduit dans un tube de 20 centimètres par exemple, le liquide à analyser et qu'on y fasse passer un rayon polarisé le plan de polarisation sera dévié vers la droite d'un angle α que l'on mesure. Cette déviation est due à la différence d'action du sucre cristallisable (qui tend à produire une déviation β vers la droite) et du sucre interverti (qui tend à dévier de l'angle γ vers la gauche). Si l'on ajoute à la dissolution de l'acide chlorhydrique et qu'on fasse bouillir pendant quelques instants tout le sucre est interverti et donne une déviation δ vers la gauche. On réduit des mesures des angles α et δ , les valeurs de β et γ , et par suite les proportions relatives aux deux sucres.

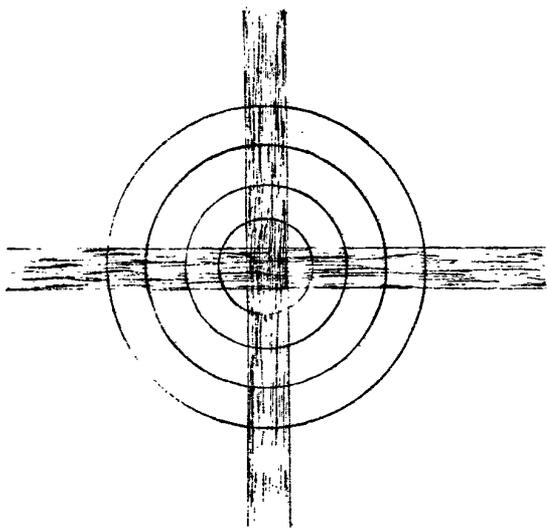


Autrefois on employait le Saccharimètre de M. Soleil, aujourd'hui on se sert d'un appareil beaucoup plus simple formé comme le représente la figure: d'un tube fermé par deux glaces de verre avec un thermomètre indiquant la température du liquide. La lumière est polarisée au moyen d'un prisme de Nicol N et on l'étudie au moyen d'un analyseur A qui n'est autre chose qu'un second prisme de Nicol monté sur un cercle gradué qui permet de lire les

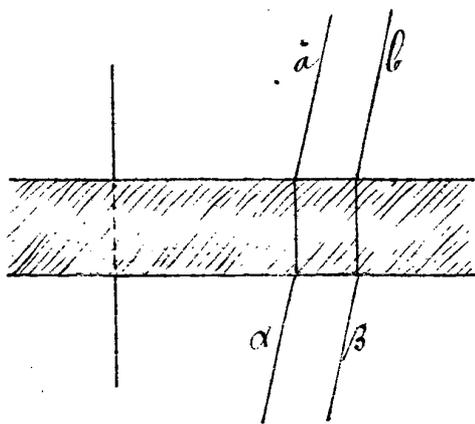
Déviation du plan de polarisation. (on emploie une lumière monochromatique); (Sel de soude dans l'alcool).

On fait la même expérience sur un grand nombre de substances chimiques et l'on a vu que les corps isomères se distinguent par des pouvoirs rotatoires différents.

Ajoutons ici quelques mots sur les phénomènes de coloration étudiés dans la 27^e Leçon: Considérons un faisceau convergent issu d'une lentille et tombant sur une lame de spath taillée normalement à l'axe optique.



Si l'on interpose un écran sur le trajet des rayons, qui ont traversé la lame et l'analyseur on voit se former la figure ci-contre formée d'une série d'anneaux alternativement noirs et colorés et une croix noire.



Pour expliquer ce phénomène reportons nous à la formule établie plus haut (27^e Leçon) et qui donne l'intensité A^2 d'un rayon qui a traversé un polariseur une lame biréfringente et un analyseur; et supposons que le polariseur et l'analyseur soient orientés à 90° l'un de l'autre, c'est-à-dire $\omega = \alpha + \frac{\pi}{2}$; la formule deviendra:

$$A^2 = V_\lambda^2 (\sin^2 2\omega \sin^2 \pi \varphi)$$

Expliquons la formation des cercles.

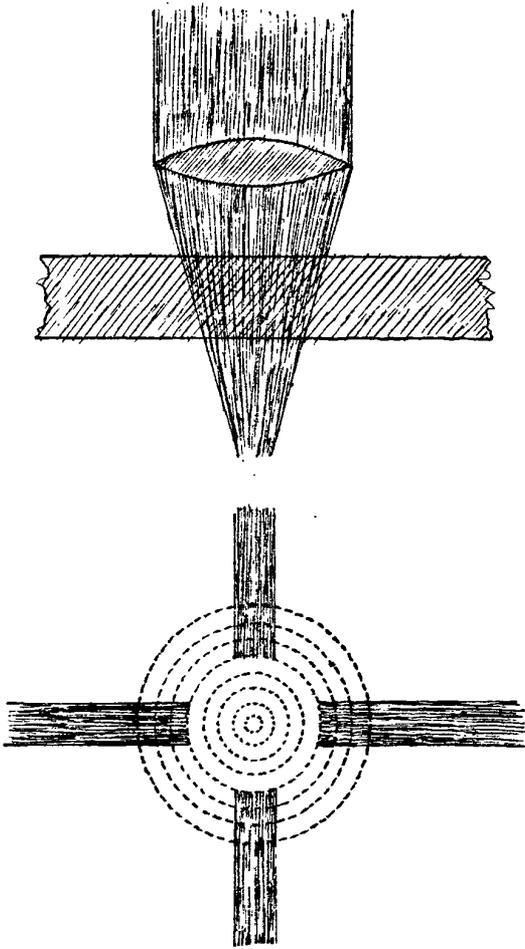
Soit O la projection de l'axe optique, l'azimut OS dans lequel se trouve le rayon est un plan principal de la lame relatif à ce rayon.

La valeur de A^2 montre

que l'intensité en un point m du cercle, de rayon Om , augmente quand ω varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$, et diminue quand ω varie de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$.

D'autre part nous avons des cercles alternativement colorés et obscurs, car deux rayons consécutifs, tels que $a\alpha$, $b\beta$ situés dans un plan de symétrie, ont une différence de marche qui augmente à mesure qu'on s'éloigne de l'axe optique. Ces différences de marche produiront des interférences, c'est-à-dire que sur un même rayon OS on aura successivement des points noirs et des points éclairés et comme tout est symétrique par rapport à l'axe optique on aura des anneaux alternativement noirs et colorés.

On voit en outre que A^2 est nul quand $\omega = 90^\circ$ et $\omega = 0$, on aura donc une croix noire dont les branches seront dirigées parallèlement à OP et OA tandis que les maximum de coloration auront lieu pour $\omega = 45^\circ$.



On peut observer des phénomènes de double réfraction avec des corps non cristallisés; il suffit de modifier leur constitution moléculaire.

Ainsi si un faisceau polarisé traverse une lame de verre, il reste blanc, mais si le verre est comprimé en quelques points on voit des phénomènes d'interférence qui indiquent une double réfraction aux points comprimés.

Si l'on répète les expériences précédentes, non plus avec une lame de spath mais avec une lame de quartz perpendiculaire à l'axe; on observe en l'éclairant par un faisceau convergent une série d'anneaux colorés, mais le centre de la croix noire est complètement absent. Ici en effet ce n'est plus le phénomène de double

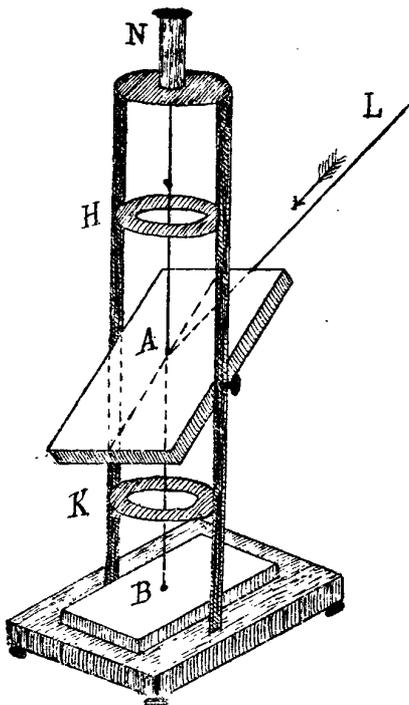
réfraction ordinaire qui se produit, mais une polarisation rotatoire; mais à une certaine distance de l'axe, l'inclinaison des rayons incidents étant plus grande, la double réfraction se produit et l'on voit apparaître la croix noire.

Phénomènes des spirales. - Ce phénomène a été découvert par un physicien anglais, Airy. Si l'on fait tomber un faisceau convergent de lumière polarisée sur deux lames de quartz normales à l'axe, l'une dextrogyre, l'autre lévogyre; on se rend facilement compte que suivant la direction de l'axe les effets produits par les deux lames se détruisent mais sous des obliquités différentes, il y a à combiner les effets de la polarisation rotatoire et de la double réfraction et l'on parvient expérimentalement au résultat suivant.



La partie centrale de la figure est formée d'une sorte de croix dont les quatre branches se retournent en spirales; dans les parties extérieures se trouvent des anneaux colorés; mais beaucoup plus nébuleux que dans les cas étudiés précédemment.

Ce phénomène permet de distinguer si un morceau de quartz est dextrogyre ou lévogyre, au moyen de l'appareil suivant:



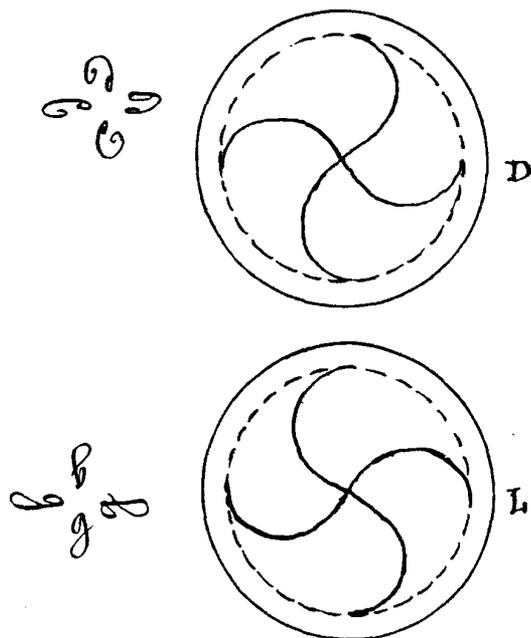
Appareil de Nuremberg.
- Il peut servir à répéter presque toutes les expériences de polarisation: Il se compose d'une lame de glace non étamée A faisant avec la verticale un angle de $38\frac{1}{2}^\circ$ au dessous est un miroir étamé horizontal B et au-dessus en N un prisme de Nicol

Servant d'analyseur.

Faisons tomber sur le miroir A un rayon IA faisant avec ce miroir un angle de $37^{\circ} \frac{1}{2}$. ce rayon se réfléchira verticalement en A B et sera complètement polarisé dans le plan d'incidence. Il se réfléchit en B en suivant le même chemin, une portion de la lumière traverse la lame A et arrive en H sur l'analyseur.

On peut placer en H des lames minces cristallines ou des quartz et étudier leur action sur la lumière polarisée. Si au contraire ces lames en K, la lumière les traverse deux fois en allant et en revenant, alors la différence de marche des rayons interférents est doublée pour les lames cristallines telles que le spath; au contraire pour une lame de quartz la polarisation rotatoire est détruite, car il se produit successivement deux rotations successives de sens inverses

Si l'on veut étudier l'action d'une lame de quartz sur un faisceau polarisé convergent, il suffit de placer une lentille convergente au-dessus du miroir B de telle sorte que l'image vienne se former en N à l'œil du spectateur; pour voir si un quartz est lévogyre ou dextrogyre on le place sur la plate-forme K et l'on examine les images résultantes; il se produit alors le phénomène des spirales découvert par Argy, et l'on a l'une des figures ci-contre suivant qu'on opère sur un quartz dextrogyre ou lévogyre.



Pouvoir rotatoire Magnétique.

Ce phénomène a été découvert par Faraday; les substances

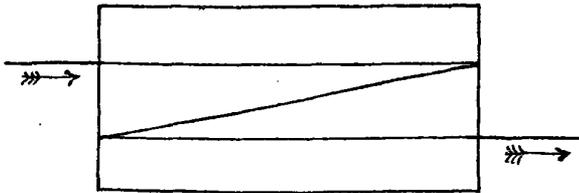
transparentes non magnétiques et ne possédant pas le pouvoir rotatoire, l'acquièrent lorsqu'on les place dans l'intérieur d'une hélice où circule un courant électrique.

La rotation est proportionnelle à l'action magnétique, elle se produit même plus simplement quand on place le corps transparent entre les deux pôles d'un fort aimant ou mieux, d'un électro-aimant.

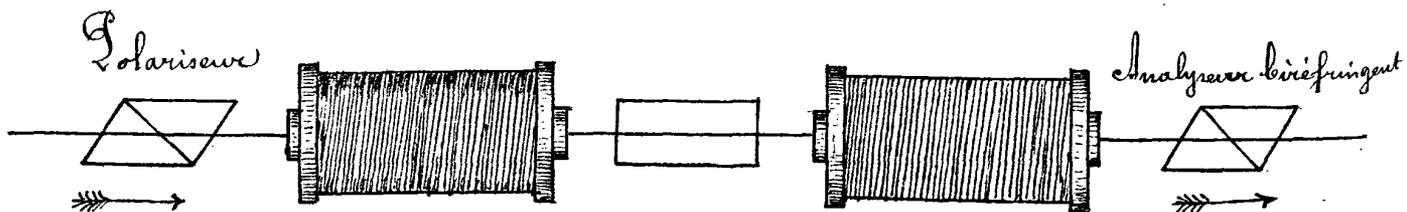
Le sens de la rotation du plan de polarisation est celui qu'un observateur recevant le rayon à l'émergence suppose conventionnellement au courant dans les spires de l'hélice.

Il y a une différence frappante entre le pouvoir rotatoire naturel et le pouvoir rotatoire magnétique. Si nous prenons un corps transparent soumis à une action magnétique et qu'on fasse passer le rayon plusieurs fois en sens inverse au moyen de

miroirs placés aux extrémités, la rotation est multipliée par le nombre de passages. Tandis que dans un cristal de quartz un second passage en sens inverse détruirait l'effet du premier et un troisième passage donnerait la même déviation que le premier.



L'expérience de Faraday peut se répéter de la manière suivante ; la substance transparente est placée en A entre les deux armatures de deux fortes bobines ; ces armatures sont creusées et on les fait traverser par un rayon qui a traversé un prisme de Nicol, servant de polariseur, on le reçoit sur un analyseur biréfringent.



La substance qui se prête le mieux à ces expériences, est un verre très-plombéux ; une sorte de Flint très-lourd.

Les liquides en particulier, le sulfure de carbone prennent un pouvoir rotatoire sous l'influence magnétique.

Ce phénomène est très-important, car il montre les liens étroits qui rattachent la lumière et l'électricité qu'on avait d'abord regardés comme des agents complètement distincts et qui ne sont au fond que des mouvements de l'éther.

Remarque curieuse: On peut par des phénomènes purement électriques retrouver un coefficient qui est précisément la vitesse de la lumière.

Le rapport des évaluations d'une même quantité d'électricité en unités électrostatique et électrodynamique est le quotient d'une longueur par un temps, c'est donc une vitesse et sa valeur est environ 300 000 kilomètres par seconde qui représente très-approximativement la vitesse de la lumière.

Ces rapprochements encore vagues montrent combien toutes les questions d'optique, d'électricité de chaleur ont de rapports entre elles et avec le problème de la constitution moléculaire des corps, et tendent à nous démontrer la nécessité d'un milieu intermédiaire que nous avons désigné sous le nom d'éther.

Objection: L'éther s'il existe se trouve dans les espaces interplanétaires et doit par sa masse influencer la marche des planètes. A cela nous répondrons d'abord que les Comètes (en particulier celle d'Encke) semblent influencer dans leur passage au périhélie par des actions qu'on ne peut attribuer qu'au milieu dans lequel elles se meuvent d'autre part, si l'éther produit un effet de résistance sur le mouvement des planètes, pourquoi n'opposerait-il pas une résistance analogue au mouvement de rotation de la terre autour de la ligne des pôles, or l'unité de temps est donnée par la rotation de la terre. par suite si la durée de cette rotation subit une diminution de même ordre que la durée des révolutions des planètes il n'y aura aucun moyen de démontrer que le mouvement des planètes est demeuré constant depuis les siècles les plus reculés où des observations astronomiques ont été effectuées.

On peut ajouter enfin que rien n'empêche de supposer la masse de l'éther excessivement faible et le frottement de l'éther contre les molécules matérielles presque entièrement

négligeable comparativement aux frottements des molécules matérielles pondérables

Terminons en disant que l'astronomie s'appuie sur les attractions à distance, or il est impossible d'admettre des actions s'exerçant d'un corps à l'autre, s'il n'existe pas entre eux un milieu capable de les transmettre.

FIN.