École Polytechnique.

2e Division

1884-85

# 1ère Conférence d'analyse.

## Mr Poincaré.

Différentielles totales — Soit :

$$z = f(x,y), \quad \frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q.$$

Il existe en général entre les différentielles $dx$, $dy$, $dz$ la relation linéaire :

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

où $p$ et $q$ dépendent seulement de $x$ et de $y$ et nullement de $dx$ et $dy$. Le théorème souffre cependant des exceptions.

Soit par exemple ;

$$z = \sqrt{x^2+y^2}.$$

il viendra

$$dz = \sqrt{(x+dx)^2+(y+dy)^2} - \sqrt{x^2+y^2}$$

ou pour $x = y = 0$ :

$$dz = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Le théorème est donc en défaut pour $x = y = 0$.

Rendons nous compte du point où la démonstration est elle-même en défaut.

Posons :

$$f(x+dx, y+dy) - f(x, y+dy) = dx\, f'_x(x, y+dy) + dx\, \varepsilon'.$$

En général, $\varepsilon'$ tend vers 0 avec $dx$ et $dy$ et quelle que soit la manière dont $dx$ et $dy$ tendent vers 0. Ce point est essentiel dans la démonstration du théorème des différentielles totales. Dans le cas particulier qui nous occupe, on a :

$$\varepsilon' = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2} - dy}{dx}.$$

Il est bien vrai que $\varepsilon'$ tend vers 0 quand $dy$ tend vers 0, $dx$ restant fini ; mais il n'en est plus de même quand $dx$ et $dy$ tendent simultanément vers 0.

Cela tient à ce que les dérivées:

$$p = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad q = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

cessent d'être des fonctions continues pour $x = y = 0$. La continuité des dérivées partielles est donc nécessaire pour que le théorème des différentielles totales s'applique.

Le fait que nous venons de signaler a une interprétation géométrique très simple. Si en effet on regarde $x, y, z$ comme les coordonnées d'un point, le théorème des différentielles totales, traduit dans le langage géométrique, signifie que la surface $z = f(x,y)$ admet un plan tangent. Dans le cas exceptionnel qui nous occupe, il n'y a plus de plan tangent, on a affaire à un point conique.

Infiniment petits — La somme de deux infiniment petits d'ordre différent est de même ordre que le plus grand d'entre eux. La somme de deux infiniment petits d'un même ordre $n$ est en général d'ordre $n$, mais peut être exceptionnellement d'ordre supérieur.

Le produit de deux infiniment petits d'ordres $n$ et $p$ est d'ordre $(n+p)$.

Exemples: Si $x$ est l'infiniment petit principal, $\sin x$ est du premier ordre, $\sin^2 x$ est du deuxième ordre; on a:

$$1 - \cos x = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \sin^2 x \left( \frac{1}{1 + \cos x} \right)$$

$1 - \cos x$ est le produit de deux quantités d'ordres 2 et 0; c'est donc un infiniment petit du 2$^e$ ordre. Si on multiplie par $\operatorname{tg} x$ qui est du 1$^{er}$ ordre, on a $\operatorname{tg} x - \sin x$ qui est du 3$^e$ ordre.. &c$^a$.

Si $x$ étant l'infiniment petit principal, $y$ est d'ordre $n$, $\frac{dy}{dx}$ sera d'ordre $(n-1)$. Si $y$ est infiniment petit ainsi que , $n$ premières dérivées par rapport à $x$ et que la $(n+1)^{ième}$ soit finie, $y$ est d'ordre $(n+1)$.

La démonstration peut s'appuyer sur la règle de l'Hopital. En effet, si on a:

$$\lim \frac{y}{x^n} = \alpha,$$

On aura aussi

$$\lim \frac{\frac{dy}{dx}}{n x^{n-1}} = \alpha$$

Application: $x - \sin x$ est du 3$^e$ ordre; car sa dérivée $1 - \cos x$ est du 2$^e$ ordre. Par conséquent, $x^n - \sin^n x$ est d'ordre $(n+2)$, car c'est le produit de $x - \sin x$ par: $x^{n-1} + x^{n-2}\sin x + \dots + x \sin^{n-2} x + \sin^{n-1} x$.

qui est d'ordre $(n-1)$.

2° $x - \sin x - \frac{x^3}{6}$ est du 5e ordre ; car sa dérivée seconde est $\sin x - x$.

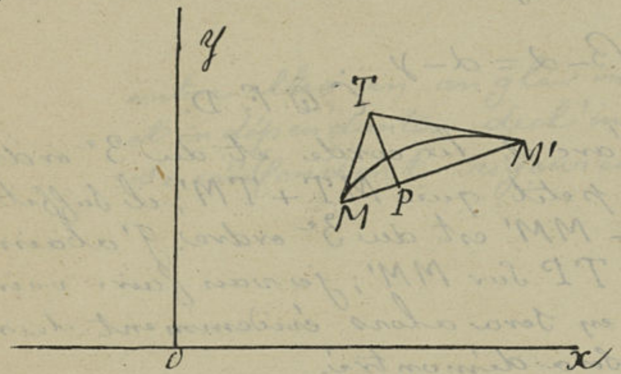
3° $2 \sin x + tg.x - 3x$ est du 5e ordre ; car sa dérivée quatrième

$$2 \sin x + 2 tg.x (1 + tg^2 x) + 2 \frac{d^2}{dx^2}(tg^3 x)$$

est encore infiniment petite.

Une fonction paire infiniment petite est toujours d'ordre pair, une fonction impaire d'ordre impair.

Application à la géométrie — Soit $MM'$ un arc infiniment petit du 1er ordre ; soit $MT$ et $M'T$ les tangentes en $M$ et en $M'$.




1° Les angles $TMM'$, $TM'M$ sont égaux aux infiniment petits près du 2e ordre. Soient, en effet, $\alpha, \beta, \gamma$ les angles que fait l'axe des $x$ avec les trois droites : $MM'$, $MT$, $M'T$ ; il s'agit de démontrer que :

$$\beta - \alpha = \alpha - \gamma$$

Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe ; soient $x$ et $x+h$ les abscisses des points $M$ et $M'$ ; on aura :

$$tg\,\alpha = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad tg\beta = f'(x) \qquad tg.\gamma = f'(x+h)$$

Je vais démontrer d'abord la relation

$$tg.\beta - tg.\alpha = tg.\alpha - tg.\gamma.$$

En négligeant les infiniment petits du 2e ordre, on a :

$$\lim. \frac{tg\beta - tg\alpha}{tg.\alpha - tg.\gamma} = 1$$

Ou enfin :

$$\lim. \frac{hf'(x) - f(x+h) + f(x)}{f'(x+h) - f(x) - hf'(x+h)} = 1$$

Cette dernière identité est évidente. Si en effet nous appliquons la règle de l'Hopital, et si nous prenons la dérivée, haut et bas, par rapport à $h$, le premier membre devient :

$$\frac{f'(x) - f'(x+h)}{f'(x+h) - [f'(x+h) + hf''(x+h)]} = \frac{f'(x+h) - f'(x)}{hf''(x+h)}.$$

Or on a:

$$\lim f''(x+h) = f''(x) \qquad \text{Lim.}\ \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = f''(x).$$

ou:

$$\text{Lim.}\ \frac{tg\beta - tg\alpha}{tg\alpha - tg.\gamma} = \text{Lim.}\ \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h f''(x+h)} = 1$$

Or on peut écrire:

$$\text{Lim.}\ \frac{\beta-\alpha}{\alpha-\gamma} = \lim \frac{tg\beta - tg\alpha}{tg\alpha - tg.\gamma}\ \lim \frac{\beta-\alpha}{tg.\beta - tg\alpha}\ \lim \frac{tg\alpha - tg.\gamma}{\alpha-\gamma}.$$

Le premier facteur du second membre est égal à 1, le second à $\frac{1}{1+tg^2\alpha}$, le troisième à $1+tg^2\alpha$. Donc:

$$\text{Lim.}\ \frac{\beta-\alpha}{\alpha-\gamma} = 1 \qquad \beta-\alpha = \alpha-\gamma.$$

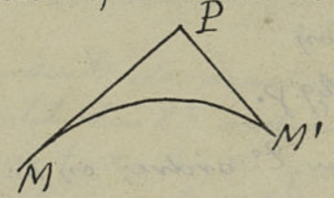
C.Q.F.D.

2° La différence entre l'arc et la corde et du 3e ordre. En effet, l'arc $MM'$ est plus petit que $MT + TM'$; il suffit donc de démontrer que $M'T + TM - MM'$ est du 3e ordre. J'abaisse du point $T$ une perpendiculaire $TP$ sur $MM'$; je vais faire voir que $MT - MP$ est du 3e ordre; il en sera alors évidemment de même de $M'T - M'P$ et le théorème sera démontré.

On a en effet: $MT - MP = MT(1 - \cos M)$.

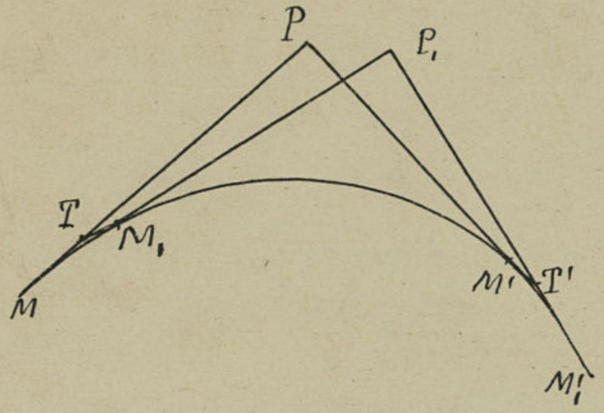
$MT$ est du 1er ordre, ainsi que l'angle $M$. Donc $1-\cos M$ est du 2e ordre, donc $MT - MP$ est du 3e ordre. – C.Q.F.D.

Application à la recherche des tangentes. – Problème:




Un angle constant est circonscrit à une courbe donnée; trouver la tangente au lieu décrit par son sommet. Réponse. – La tangente au lieu décrit est la même que la tangente au cercle circonscrit au triangle $PMM'$, si $P$ est le sommet de l'angle et $M, M'$ les points de contact des côtés de cet angle avec la courbe donnée.

Démonstration. – Soit $D$ la tangente au lieu du point $P$, $D'$ la tangente au cercle circonscrit au triangle $PMM'$. Je dis que ces deux tangentes se confondent. En effet, soit $M_1 P_1 M'_1$ (fig. page suivante) une position infiniment voisine de l'angle $MPM'$. Soit $T$ le point d'intersection des deux droites $MP$, $M_1P_1$; $T'$ celui des deux droites $M'P$, $M'_1P_1$. Le point $T$ est infiniment voisin de $M$, le point $T'$ de $M'$. Donc les deux triangles $PTT'$, $PMM'$ diffèrent infiniment peu; donc le cercle circonscrit à $PTT'$ qui passe par $P_1$ diffère infiniment peu du cercle circonscrit à $PMM'$. Donc la tangente à ce cercle




fait un angle infiniment petit avec D'. Elle fait d'ailleurs un angle infiniment petit avec $PP_1$ qui est la droite joignant deux points infiniment voisins du cercle qu'elle touche.

D'autre part, la tangente D fait un angle infiniment petit avec $PP_1$ puisque par définition elle est la limite de cette sécante $PP_1$.

Donc les droites D et D' font entre elles un angle infiniment petit et comme elles sont fixes et indépendantes de l'infiniment petit principal $PP_1$, elles se confondent rigoureusement.

C. Q. F. D.

Ecole
Polytechnique.

2e Division.

1884-85.

# 2e Conférence d'analyse.

## Mr Poincaré,

Applications des formules:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}.$$

1° Longueur de l'arc de parabole.

On a:

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

d'où:

$$dy = \frac{x\,dx}{p}$$

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}$$

ce qui peut s'écrire, en posant $x = pu$:

$$\frac{ds}{p} = du\sqrt{1+u^2} = \frac{u^2 du}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

Or on a:

$$d\log\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$d\left(u\sqrt{1+u^2}\right) = \frac{2u^2 du}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

Ajoutant ces deux égalités, il vient:

$$d\log\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) + d\left(u\sqrt{1+u^2}\right) = \frac{2ds}{p}$$

ou:

$$\log\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) + u\sqrt{1+u^2} = \frac{2s}{p} + \text{const}.$$

Si on compte les arcs à partir du sommet de la parabole, on doit avoir $s = 0$ pour $u = 0$; donc la constante est nulle ce qui donne la formule:

$$s = \frac{p}{2}\left[\log.\left(\frac{x}{p} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\right) + \frac{x}{p}\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\right]$$

2° Arc de spirale logarithmique.

On a:

$$\rho = e^{m.\omega}.$$

d'où:
$$d\rho = m\,d\omega\, e^{m\omega}$$
et:
$$ds = d\omega\, e^{m\omega}\sqrt{1+m^2} = d\rho\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}$$
d'où:
$$s = (\rho-\rho_0)\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}$$

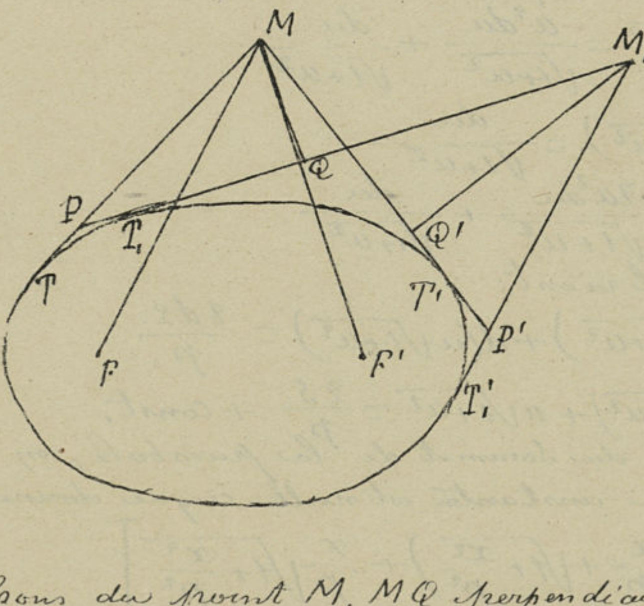
$\rho_0$ étant le rayon vecteur du point à partir duquel on compte les arcs. On peut les compter à partir du pôle et écrire:
$$s = \rho\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}$$

On a donc une infinité de spires dont la longueur totale est finie, en faisant varier $\omega$ depuis $-\infty$ jusqu'à une valeur finie quelconque.

3° Il y a des cas où on ne peut pas exprimer un arc de courbe en termes finis, mais où il est aisé de trouver un arc d'ellipse égal à l'arc de courbe donné.

Calculons d'abord la longueur de l'arc d'ellipse. Posons:
$$x = a\cos\varphi \qquad y = b\sin\varphi$$
$a$ et $b$ sont les axes, $\varphi$ l'anomalie excentrique. Il vient:
$$ds = d\varphi\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$$

Cet arc n'est pas exprimable en termes finis, et cependant on peut trouver un grand nombre de théorèmes à son sujet. Soient par exemple deux tangentes $MT$ et $MT'$. Quel est le lieu des points pour lesquels
$$MT + MT' - \text{arc}\, TT' = \text{const.}?$$
C'est une ellipse homofocale.




Menons d'un point voisin du lieu $M_1$ deux tangentes $M_1T_1$ et $M_1T_1'$ coupant $MT$ et $MT'$ en $P$ et en $P'$; On aura:
$$MT + MT' - \text{arc}\, TT' = M_1T_1 + M_1T_1' - \text{arc}\, T_1T_1'$$
ou:
$$(MT - M_1T_1) + (MT' - M_1T_1') = \text{arc}\, TT' - \text{arc}\, T_1T_1'$$
ou:
$$(MP - M_1P + \text{arc}\, TT_1) + (MP' - M_1P' - \text{arc}\, T'T_1') = \text{arc}\, TT_1 - \text{arc}\, T'T_1'$$
ou:
$$MP - M_1P = M_1P' - MP'$$

abaissons du point $M$, $MQ$ perpendiculaire sur $M_1P$ et du point $M_1$, $M_1Q'$ perpendiculaire sur $MP'$. Cette équation pourra s'écrire:
$$M_1Q = MQ'.$$

C'est à dire que la tangente au lieu $MM_1$ doit faire des angles égaux avec $MT$ et $MT'$.

C'est là une propriété des ellipses homofocales à l'ellipse donnée, car si je joins le point $M$ aux foyers $F$ et $F'$, les angles $FMT$, $F'MT'$ seront égaux. Donc la tangente $MM_1$ fera des angles égaux avec les deux rayons vecteurs $MF$ et $MF'$. C.Q.F.D.

Voyons maintenant les courbes dont on peut ramener la longueur à celle de l'ellipse.

1er exemple. — Courbe $\rho = \sin m\omega$.

Il vient:

$$ds = d\omega\sqrt{\sin^2 m\omega + \cos^2 m\omega}.$$

ou en posant $m\omega = \varphi$,

$$ds = \frac{d\varphi}{m}\sqrt{\sin^2\varphi + m^2\cos^2\varphi}$$

Pour avoir la courbe entière, il faut faire varier $\omega$ de $0$ à $2\pi$, (si $m$ est pair) ou $\varphi$ de $0$ à $2m\pi$. La longueur totale de la courbe est égale à l'ellipse dont les axes sont $1$ et $m$ (ou à la moitié, si $m$ est impair.)

Si $m = 2$, on a la lemniscate.

2e exemple. — Limaçon de Pascal:

$$\rho = \alpha + \beta\cos\omega.$$

Il vient:

$$d\rho = -\beta\, d\omega \sin\omega.$$

$$ds = d\omega\sqrt{\beta^2\sin^2\omega + (\alpha+\beta\cos\omega)^2} = d\omega\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\omega}$$

ou:

$$ds = d\omega\sqrt{(\alpha+\beta)^2\cos^2\frac{\omega}{2} + (\alpha-\beta)^2\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

Ou en posant $\frac{\omega}{2} = \varphi$, il vient:

$$ds = 2\,d\varphi\sqrt{(\alpha+\beta)^2\cos^2\varphi + (\alpha-\beta)^2\sin^2\varphi}$$

Pour avoir la courbe entière, il faut faire varier $\omega$ de $0$ à $2\pi$ ou $\varphi$ de $0$ à $\pi$.

Donc la longueur totale du limaçon est égale à l'ellipse dont les axes sont $\alpha+\beta$ et $\alpha-\beta$.

3e exemple. — Cycloïde raccourcie.

Lorsqu'un cercle roule sur une droite, un point intérieur au cercle décrit une cycloïde raccourcie.

Soit $R$ le rayon du cercle, $a$ la distance du point au centre, $\omega$ l'angle dont a tourné le cercle; les équations de la cycloïde seront:

$$x = R\omega - a\sin\omega.$$

$$y = R - a\cos\omega.$$

d'où:

$$ds = d\omega\sqrt{(R-a\cos\omega)^2 + a^2\sin^2\omega} = d\omega\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\omega}$$

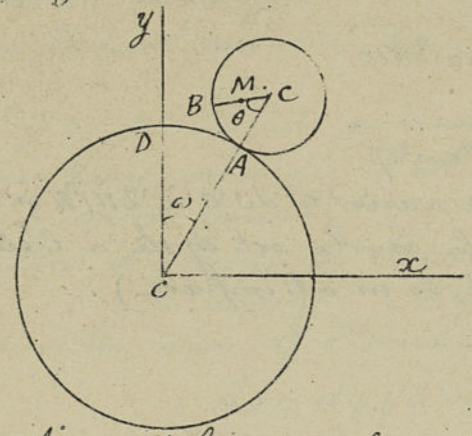
ou:
$$dS = d\omega\sqrt{(R-a)^2\cos^2\frac{\omega}{2}+(R+a)^2\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

ou pour $\frac{\omega}{2}=\varphi$,
$$dS = 2d\varphi\sqrt{(R-a)^2\cos^2\varphi+(R+a)^2\sin^2\varphi}\,.$$

Pour un tour complet de roue, $\varphi$ varie de $0$ à $\pi$. Donc la longueur correspondante de la cycloïde est égale à l'ellipse dont les axes sont: $R-a$ et $R+a$.

4e exemple. — Epicycloïde raccourcie.

Quand un cercle se roule sur un cercle, un point intérieur décrit une épicycloïde raccourcie.




Soit O le centre du cercle fixe, R son rayon.

Soit C le centre du cercle mobile, r son rayon.

Soit $R+r=\beta$, $R=\alpha r$

Soit M le point mobile, $\rho$ la distance MC. Soit B l'extrémité du rayon CM; Soit A le point de contact. Soit D le point du cercle fixe où avait lieu le contact initial des deux cercles, au moment où le contact avait lieu par le point B du petit cercle.

Prenons OD pour axe des y.

Soit $\omega$ l'angle DOA, $\theta$ l'angle MCA. On aura:
$$\text{arc } DA = \text{arc } BA\,,\quad \text{d'où } \theta=\alpha\omega.$$

Les équations de l'épicycloïde seront:
$$x=\beta\sin\omega-\rho\sin(\theta+\omega) \qquad y=\beta\cos\omega-\rho\cos(\theta+\omega)$$

D'où:
$$dS = d\omega\sqrt{\left[\beta\cos\omega-(\alpha+1)\rho\cos(\alpha+1)\omega\right]^2+\left[\beta\sin\omega-(\alpha+1)\rho\sin(\alpha+1)\omega\right]^2}$$

ou:
$$dS = d\omega\sqrt{\left[\beta-\rho(\alpha+1)\right]^2\cos^2\frac{\alpha\omega}{2}+\left[\beta+\rho(\alpha+1)\right]^2\sin^2\frac{\alpha\omega}{2}}$$

On posera:
$$\frac{\alpha\omega}{2}=\varphi\,,\quad \text{d'où } d\omega=\frac{2}{\alpha}d\varphi.$$

On fera varier $\theta$ de $0$ à $2\pi$; c'est à dire $\varphi$ de $0$ à $\pi$.

La longueur correspondante de l'épicycloïde sera égale à l'ellipse dont les axes sont:
$$\frac{\beta-\rho(\alpha+1)}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\beta+\rho(\alpha+1)}{\alpha}$$

ou bien:
$$\frac{(R+r)(r-\rho)}{R} \quad \text{et} \quad \frac{(R+r)(r+\rho)}{R}$$

Dans le cas de l'épicycloïde ordinaire on a: $r=\rho$. L'un des axes de l'ellipse est nul; la longueur est alors égale à 4 fois l'autre axe, ou bien à:
$$8(R+r)\frac{r}{R}.$$

Ecole
Polytechnique.

2e Division.

1884-85.

# 3ième Conférence d'analyse.

## Mr Poincaré.

Equation différentielle des surfaces réglées. — Soit une surface réglée:

$$z = f(x, y)$$

Soient $p$, $q$ les dérivées du 1er ordre de $z$; $r, s, t$ celles du second ordre; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ celles du troisième. Donnons à $x$ un accroissement constant $dx$ de telle sorte que:

$$d^2x = d^3x = 0.$$

Si l'on donne à $y$ et à $z$ des accroissements correspondants $dy$ et $dz$ de telle façon que le déplacement se fasse le long d'une génératrice, on aura:

$$d^2y = d^3y = 0$$

$$d^2z = d^3z = 0$$

d'où:

$$d^2z = r dx^2 + 2s\, dx dy + t dy^2 = 0.$$

$$d^3z = \alpha dx^3 + 3\beta dx^2 dy + 3\gamma dx dy^2 + t dy^3 = 0.$$

Il reste à éliminer $\frac{dy}{dx}$ entre ces deux équations. Soient $\lambda$ et $\lambda_1$ les deux racines de l'équation

$$r + 2s\lambda + t\lambda^2 = 0$$

Nous devons avoir:

$$(\alpha + 3\beta\lambda + 3\gamma\lambda^2 + \delta\lambda^3)(\alpha + 3\beta\lambda_1 + 3\gamma\lambda_1^2 + \delta\lambda_1^3) = 0$$

ou:

$$\begin{aligned} &\alpha^2 + 9\beta^2\lambda\lambda_1 + 9\gamma^2(\lambda\lambda_1)^2 + \delta^2(\lambda\lambda_1)^3 \\ &+ (\lambda+\lambda_1)\left[3\alpha\beta + 9\beta\gamma\lambda\lambda_1 + 3\gamma\delta(\lambda\lambda_1)^2\right] \\ &+ (\lambda^2+\lambda_1^2)(3\alpha\gamma + 3\beta\delta\lambda\lambda_1) \\ &+ (\lambda^3+\lambda_1^3)(\alpha\delta) = 0. \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\lambda+\lambda_1=-\frac{2s}{t},\ \lambda\lambda_1=\frac{r}{t},\ \lambda^2+\lambda_1^2=\frac{4s^2-2rt}{t^2},\ \lambda^3+\lambda_1^3=\frac{6rst-8s^3}{t^3}.$$

On a donc l'équation différentielle cherchée :

$$\alpha^2t^3+9\beta^2rt^2+9\gamma^2r^2t+\delta^2r^3-6\alpha\beta st^2-18\beta\gamma rst-6\gamma\delta r^2s+12\alpha\gamma s^2t+12\beta\delta rs^2$$
$$-6\alpha\gamma rt^2-6\beta\delta r^2t+6\alpha\delta rst-8\alpha\delta s^3=0.$$

Application de la formule :

$$\frac{y}{2}=\frac{\sin\varphi}{1}-\frac{\sin 3\varphi}{3}+\frac{\sin 5\varphi}{5}-\frac{\sin 7\varphi}{7}+\ldots\ldots$$

où $\varphi$ est supposé compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Si on change $\varphi$ en $\pi-\varphi$, il vient :

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin\varphi}{1}+\frac{\sin 3\varphi}{3}+\frac{\sin 5\varphi}{5}+\ldots\ldots$$

pourvu que $\varphi$ soit compris entre $0$ et $2\pi$.

Posons donc :

$$F(\varphi)=\sum\frac{\sin n\varphi}{n}$$

Il viendra :

$$F(\varphi)=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$$

si $\varphi$ est compris entre $0$ et $2\pi$, et dans le cas contraire,

$$F(\varphi)=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}-K\pi$$

où le nombre entier $K$ doit être choisi de telle sorte que $\varphi+2K\pi$ soit compris entre $0$ et $2\pi$.

Conséquence. — Si on donne à $\varphi$ un accroissement infiniment petit $d\varphi$, l'accroissement de $F(\varphi)$ est infiniment petit et égal à $-\frac{d\varphi}{2}$ si l'intervalle $(\varphi,\ \varphi+d\varphi)$ ne contient aucun multiple de $2\pi$ ; il est fini et égal à $+\pi$ dans le cas contraire.

Problème. — Déterminer les coëfficients de la série trigonométrique

$$S=A_0+A_1\cos\varphi+A_2\cos 2\varphi+\ldots\ldots+A_m\cos m\varphi+\ldots\ldots$$
$$+B_1\sin\varphi+B_2\sin 2\varphi+\ldots\ldots+B_m\sin m\varphi+\ldots\ldots$$

de telle façon que la somme de cette série soit égale à $M_1$ depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=h_2$, à $M_2$ depuis $\varphi=h_2$ jusqu'à $\varphi=h_3$, ..... à $M_{q-1}$ depuis $\varphi=h_{q-1}$ jusqu'à $\varphi=h_q$, et à $M_q$ depuis $\varphi=h_q$ jusqu'à $\varphi=2\pi$ ; les $M$ étant des constantes données.

Nous écrirons la série cherchée sous la forme :

$$S=L_0+L_1F(\varphi)+L_2F(\varphi-h_2)+L_3F(\varphi-h_3)+\ldots\ldots+L_qF(\varphi-h_q)$$

les $L$ étant des coëfficients constants qu'il reste à déterminer, quand on donnera à $\varphi$ un accroissement $d\varphi$ ne comprenant aucun des points $0, h_2, h_3 \dots h_q$; l'accroissement de $S$ devra être nul. On devra donc avoir:

$$L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_q = 0$$

Lorsque l'accroissement $d\varphi$ comprendra le point $h_i$, l'accroissement de $S$ devra être fini et égal à $M_i - M_{i-1}$. On devra donc avoir:

$$M_i - M_{i-1} = L_i \pi.$$

Ces équations suffisent pour déterminer $L_1, L_2 \dots L_q$; il reste à calculer $L_0$. Pour cela, donnons à $\varphi$ une valeur très petite et positive, et égalons l'expression de $S$ à $M_1$; il viendra:

$$L_0 + L_1\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) + L_2 \frac{h_2 - \pi - \varphi}{2} + L_3 \frac{h_3 - \pi - \varphi}{2} + \dots + L_q \frac{h_q - \pi - \varphi}{2} = M_1$$

ce qui détermine $L_0$.

En particulier, la série

$$\sum \frac{\sin (2n+1)\varphi}{2n+1}$$

est égale à $+\frac{\pi}{4}$ lorsque $\varphi$ est compris entre $0$ et $\pi$, à $-\frac{\pi}{4}$ lorsque $\varphi$ est compris entre $\pi$ et $2\pi$ et à $0$ lorsque $\varphi$ est égal à un multiple de $\pi$.

Développement de $(1-2xy+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ suivant les puissances croissantes de $x$. — Le développement est possible si $x$ et $y$ sont tous deux plus petits que 1, en valeur absolue. Calculons les coëfficients, en représentant, suivant l'habitude, le produit $1.2 \dots p$ par $p!$.

Soit:

$$2xy - x^2 = z, \quad (1-2xy+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum P_n x^n$$

Il viendra:

$$(1-z)^{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} \cdots \cdots \frac{2p-1}{2}}{1.2 \cdots \cdots p} z^p = \sum \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} z^p.$$

La formule du binôme donne:

$$z^p = x^p(2y-x)^p = \sum (2y)^q (-1)^{p-q} x^{2p-q} \frac{p!}{q!\,(p-q)!}$$

où

$$q \geqq 0 \quad , \quad q \leqq p.$$

ou bien:

$$(1-2xy+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{(2p)!\,(-1)^{p-q} x^{2p-q} y^q}{2^{2p-q} p!\, q!\,(p-q)!}$$

Pour avoir $P_n$ coëfficient de $x^n$, dans le développement, il faut faire

$$2p - q = n,$$

d'où:

$$p - q = n - p \qquad q = 2p - n.$$

et:

$$q \leq p \leqq n.$$

Il vient:

$$P_n = \sum \frac{2p!(-1)^{n-p}y^{2p-n}}{2^n p!(2p-n)!(n-p!}$$

où $2p-n<n$, ce qui prouve que $P_n$ est un polynôme entier d'ordre $n$ en $y$.

Pour en avoir une expression plus simple, j'introduis les polynômes de Légendre. Considérons l'expression:

$$(y^2-1)^n;$$

c'est la dérivée $n^e$ de cette expression par rapport à $y$ qui est un polynôme d'ordre $n$ en $y$, que l'on appelle le $n^e$ polynôme de Legendre et que l'on désigne par $Y_n$.

La formule du binôme nous donne:

$$(y^2-1)^n = \sum \frac{n!}{p!(n-p)!} y^{2p}(-1)^{n-p}$$

D'aillaurs, la dérivée $n^e$ de $y^{2p}$ est:

$$\frac{(2p)!}{(2p-n)!} y^{2p-n}$$

Donc il vient:

$$Y_n = \sum \frac{(2p)!(-1)^{n-p}n!\,y^{2p-n}}{p!(n-p)!(2p-n)!}$$

La comparaison des expressions de $Y_n$ et de $P_n$ donne:

$$P_n = \frac{Y_n}{2^n n!}$$

Il vient donc:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xy+x^2}} = \sum \frac{x^n}{2^n n!} \cdot \frac{d^n\left[(y^2-1)^n\right]}{dy^n}.$$

Ecole
Polytechnique.

2e Division

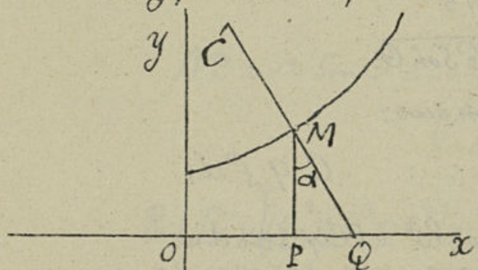
1884-85

# 4e Conférence d'analyse.

## Mr. Poincaré.

### 1° Rayon de courbure de la chainette.

Soit: $MP = y$, $OP = x$, $AM = s$, $PMQ = \alpha$, $MC = \rho$.




$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\frac{ds^2}{dx^2} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$$

D'où l'on tire : $\frac{dy}{dx} = s$, $\quad \frac{ds}{dx} = y$, $\quad y^2 = 1 + s^2$.

$$\frac{dy}{dx} = tg\alpha = s \qquad 1 + tg^2\alpha = 1 + s^2 = y^2.$$

$$y = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad MQ = \frac{y}{\cos\alpha} = y^2. \qquad MC = \rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{d\,tg\alpha}{d\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = y^2$$

d'où enfin :

$$MC = MQ.$$

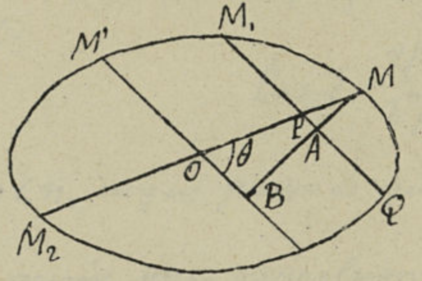
### 2° Rayon de courbure de l'Ellipse.

$x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$; $dx = -a\sin\varphi\, d\varphi$, $\quad dy = b\cos\varphi\, d\varphi$.

$$d^2x = -a\cos\varphi\, d\varphi^2 \qquad d^2y = -b\sin\varphi\, d\varphi^2$$

et enfin :

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x} = \frac{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$




Soient $a'$ et $b'$ les diamètres conjugués OM et OM'; la formule précédente peut s'écrire:

$$\rho = \frac{b'^3}{ab}$$

Démontrons la géométriquement. Dans la figure, $M_1Q$ est parallèle à la tangente en M et par conséquent à OM' et infiniment voisin de M; MAB est la normale; $\theta$ est l'angle MOB des deux diamètres conjugués $a'$ et $b'$.

La formule géométrique du rayon de courbure donne:

$$2\rho = \frac{\overline{M_1A}^2}{MA} = \frac{\overline{M_1P}^2}{MA} = \frac{\overline{M_1P}^2}{MP.\sin\theta}$$

car $M_1A = M_1P$ à l'infiniment petit du 2^e^ ordre près PA.

D'autre part, une propriété des coniques donne:

$$\frac{\overline{M_1P}^2}{MP.M_2P} = \frac{\overline{M'O}^2}{MO.M_2O} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{M_1P}^2}{MP \times 2a'} = \frac{b'^2}{2a'}$$

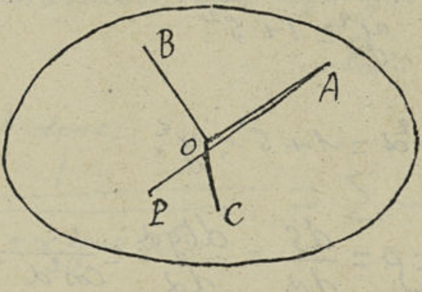
d'où:

$$\rho = \frac{b'^2}{a'\sin\theta} = \frac{b'^3}{a'b'\sin\theta}.$$

ou en vertu du théorème d'Apollonius:

$$\rho = \frac{b'^3}{ab}. \qquad C.q.f.d.$$

## Rayons de courbure principaux de l'ellipsoïde.




Soient OA, OB et OC trois diamètres conjugués de longueur $a'$, $b'$ et $c'$, les deux derniers rectangulaires. Nous voulons les rayons principaux en A. Soit AP la normale ou, ce qui revient au même, la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan BOC.

Soit $\theta$ l'angle de OA avec le plan BOC. Soient $\lambda$ et $\mu$ les angles des deux plans BOA et COA avec la normale AP; $\beta$ et $\gamma$ les angles AOC et BOA. L'angle BOC est droit.

Le volume du parallélipipède construit sur OA, OB et OC s'exprime de trois manières qui doivent conduire au même résultat. On a donc:

$$a'b'c'\sin\theta = a'b'c'\sin\beta\cos\mu = a'b'c'\sin\gamma\cos\lambda.$$

$$AP = a'\sin\theta.$$

Soient $R$ et $R'$ les rayons de courbure principaux cherchés; $\rho$ et $\rho'$ les rayons de courbure des deux Sections $AOB$, $AOC$ au point $A$. Ces deux Sections étant tangentes aux axes de l'indicatrice, le théorème de Meunier donne:

$$R = \frac{\rho}{\cos\lambda}, \quad R' = \frac{\rho'}{\cos\mu}.$$

D'ailleurs les formules démontrées plus haut pour l'ellipse donnent:

$$\rho = \frac{b'^2}{a'\sin\gamma}, \quad \rho' = \frac{c'^2}{a'\sin\beta}$$

d'où:

$$R = \frac{b'^2}{a'\sin\theta}, \quad R' = \frac{c'^2}{a'\sin\theta}.$$

Tenons compte des théorèmes d'Apollonius:

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2$$

$$abc = a'b'c'\sin\theta$$

($a$, $b$ et $c$ étant les axes de l'ellipsoïde) il viendra:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = (a^2+b^2+c^2) - (x^2+y^2+z^2)$$

$$AP = a'\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}}}$$

$$R + R' = \left[(a^2+b^2+c^2) - (x^2+y^2+z^2)\right]\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

$$RR' = \frac{b'^2c'^2}{a'^2\sin^2\theta} = \frac{a'^2b'^2c'^2\sin^2\theta}{(a'\sin\theta)^4} = a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^2$$

Ce qui permet d'écrire l'équation des rayons de courbure principaux:

$$R^2 + R\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\left[(x^2+y^2+z^2) - (a^2+b^2+c^2)\right] + a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^2 = 0.$$

Lignes de courbure d'une Surface canal.

Soient $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \theta(s)$ les équations d'une courbe gauche, $s$ étant l'arc de cette courbe. L'équation

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 = \rho^2$$

où $\rho$ est une constante, représente une Sphère de rayon constant ayant son centre sur la courbe. L'enveloppe de cette Sphère, qu'on appelle Surface canal, touche cette Sphère suivant un grand cercle qu'on obtient en coupant la Sphère par le plan normal à la courbe, c'est à dire par:

$$(X-x)dx + (Y-y)dy + (Z-z)dz = 0.$$

Les grands cercles forment un premier système de lignes de courbure et pour obtenir le second système, il faut en prendre les trajectoires orthogonales. Soient $\xi, \eta, \zeta$ les cosinus directeurs de la normale principale à la courbe gauche; $\lambda, \mu, \nu$ ceux de la normale au plan osculateur. Les cosinus directeurs d'une droite faisant un angle $\varphi$ avec la normale principale et située dans le plan normal seront:

$$\xi \cos\varphi + \lambda \sin\varphi, \quad \eta \cos\varphi + \mu \sin\varphi, \quad \zeta \cos\varphi + \nu \sin\varphi.$$

Cette droite rencontrera le cercle situé dans le plan normal et par conséquent la surface canal au point:

$$X = x + \rho(\xi\cos\varphi + \lambda\sin\varphi), \quad Y = y + \rho(\eta\cos\varphi + \mu\sin\varphi), \quad Z = z + \rho(\zeta\cos\varphi + \nu\sin\varphi)$$

Comme $x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$ sont des fonctions de $s$, on a donc les coordonnées d'un point de la surface canal exprimées en fonctions de deux paramètres $s$ et $\varphi$. On trouve d'ailleurs:

$$dX = dx + \rho(d\xi\cos\varphi + d\lambda\sin\varphi) + \rho\, d\varphi(\lambda\cos\varphi - \xi\sin\varphi)$$

et deux équations analogues.

La tangente à la ligne de courbure du second système devant être perpendiculaire au plan normal, sera parallèle à la tangente à la courbe gauche, de sorte qu'on pourra écrire:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy} = \frac{dZ}{dz}$$

Mais on a:

$$\Sigma \lambda\, dx = 0, \quad \Sigma \xi\, dx = 0$$

Car les droites $(\lambda, \mu, \nu)$ et $(\xi, \eta, \zeta)$ qui sont des normales sont perpendiculaires à la tangente dont les cosinus directeurs sont proportionnels à $dx$, $dy$ et $dz$. On aura donc aussi:

$$\Sigma \lambda\, dX = 0 \qquad \Sigma \xi\, dX = 0$$

Ou bien, en conservant seulement la première de ces équations, et y remplaçant $dX$, $dY$, $dZ$ par leurs valeurs:

$$\Sigma\lambda\, dx + \rho\cos\varphi\, \Sigma\lambda\, d\xi + \rho\sin\varphi\, \Sigma\lambda\, d\lambda + \rho\, d\varphi \cos\varphi\, \Sigma\lambda^2 - \rho\, d\varphi \sin\varphi\, \Sigma\lambda\xi$$

Ou, en tenant compte de

$$\Sigma\lambda^2 = 1, \quad \Sigma\lambda\, d\lambda = \Sigma\lambda\, dx = \Sigma\lambda\xi = 0,$$

il viendra:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \sum \lambda \frac{d\xi}{ds}$$

Le second membre est une fonction donnée de $s$. Pour avoir l'équation des lignes de courbure, c'est à dire pour avoir $\varphi$ en fonction de $s$, il faut remonter à la fonction primitive.

Supposons en particulier que la courbe gauche soit une hélice tracée sur un cylindre de révolution ayant pour axe l'axe des $z$ et pour rayon $a$. Il viendra:

$$x = a\cos\omega, \quad y = a\sin\omega, \quad z = s\sin\theta, \quad a\omega = s\cos\theta,$$

$\theta$ étant un angle constant. D'où:

$$\frac{dx}{ds} = -\sin\omega\cos\theta, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\omega\cos\theta, \quad \frac{dz}{ds} = \sin\theta.$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{-\cos\omega\cos^2\theta}{a}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{-\sin\omega\cos^2\theta}{a}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

D'où, pour la courbure: $-\frac{1}{a}$.

et pour $\xi, \eta, \zeta$;

$$\xi = \cos\omega, \quad \eta = \sin\omega, \quad d\xi = -\sin\omega \frac{ds\cos\theta}{a}, \quad d\eta = \cos\omega \frac{ds\cos\theta}{a}$$

On trouvera $\lambda, \mu, \nu$ à l'aide des 3 équations:

$$\sum \lambda^2 = 1 \qquad \sum \lambda\xi = 0, \quad \sum \lambda\, dx = 0,$$

qui donnent

$$\lambda = -\sin\omega\sin\theta; \quad \mu = \cos\omega\sin\theta; \quad \nu = -\cos\theta.$$

$$\sum \lambda \frac{d\xi}{ds} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{a}, \quad \text{et enfin:} \quad \varphi = \frac{\sin\theta\cos\theta \cdot s}{a} + \text{const.}$$

Ce qui donne l'équation des lignes de courbure.