LEÇONS SYNTHÉTIQUES

DE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

SERVANT

D'INTRODUCTION AU COURS DE MÉCANIQUE PHYSIQUE

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS;

Par M. J. BOUSSINESQ,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

Publiées par les soins de MM. LEGAY et VIGNERON, Élèves de la Faculté.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

LEÇONS SYNTHÉTIQUES

DE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE.

15192 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS SYNTHÉTIQUES

DE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

SERVANT

D'INTRODUCTION AU COURS DE MÉCANIQUE PHYSIQUE

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS;

Par M. J. BOUSSINESQ,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

Publiées par les soins de MM. LEGAY et VIGNERON, Élèves de la Faculté.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE LEÇON.

But de la Mécanique physique. Notions cinématiques indispensables.

DEUXIÈME LEÇON.

Les deux principes fondamentaux de la Mécanique.

TROISIÈME LEÇON.

Forme des équations du mouvement; ce qu'on entend en Mécanique par force, forces motrices, actions mutuelles, etc. — Pesanteur.

QUATRIÈME LEÇON.

Énergie potentielle interne. Action moléculaire.

CINQUIÈME LEÇON.

Principes de la conservation des quantités de mouvement et de leurs moments, pour un système matériel indépendant ou sans relations extérieures.

SIXIÈME LEÇON.

Principes des quantités de mouvement et des moments pour un système partiel; de leur application à la formation des équations de mouvement des corps.

SEPTIÈME LEÇON.

Idées générales sur les pressions.

HUITIÈME LEÇON.

Raisons physiologiques et psychologiques des dénominations de forces, actions, tensions, etc., employées en Mécanique. — Forces d'inertie et centrifuges.

NEUVIÈME LEÇON.

**Principe des forces vives pour un système partiel.
Travail des forces. — Énergie interne.**

DIXIÈME LEÇON.

Suite de l'étude des forces vives et du travail : flux de chaleur; loi fondamentale de la Thermodynamique.

ONZIÈME LEÇON.

Application du principe des forces vives aux mouvements visibles ou moyens locaux; rôles qu'y prennent le travail de déformation des pressions exercées sur les particules matérielles et l'énergie potentielle de pesanteur; etc.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

LEÇONS SYNTHÉTIQUES

DE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE[1]

PREMIÈRE LEÇON.

BUT DE LA MÉCANIQUE PHYSIQUE. NOTIONS CINÉMATIQUES INDISPENSABLES.

1. — Idée générale de la Mécanique.

L'esprit humain, en observant les phénomènes naturels, y reconnaît, à côté de beaucoup d'éléments confus qu'il ne parvient pas à débrouiller, un élément clair, susceptible par sa précision d'être l'objet de connaissances vraiment scientifiques. C'est l'élément géométrique, tenant à la localisation des objets dans l'espace, et qui permet de se les représenter, de les dessiner ou de les construire d'une manière au moins idéale. Il est constitué par les dimensions et les formes des corps ou des systèmes de corps, par ce qu'on appelle, en un mot, leur *configuration* à un moment donné. Ces formes, ces configurations, dont les parties mesu-

(1) Ces Leçons sont les premières du Cours de *Mécanique physique* professé à la Sorbonne par M. J. Boussinesq, cours dont le but est une exposition approfondie des idées et des méthodes permettant de mettre en équation les problèmes de la mécanique des solides naturels, des fluides et des semi-fluides, avec un aperçu des résultats qu'on en déduit, complété, chaque année, par l'étude de quelqu'une des questions spéciales les plus importantes.

rables sont des distances et des angles, tantôt se conservent, du moins à peu près, pendant un certain temps et paraissent même se maintenir dans les mêmes régions de l'espace (ou dans ce qui nous semble tel), pour constituer ce qu'on appelle le *repos*, tantôt changent sans cesse, mais avec continuité; et leurs changements de lieu sont ce qu'on appelle le *mouvement local* ou simplement le *mouvement*.

D'une manière générale, l'étude de ce *mouvement*, des changements de lieu éprouvés par les corps, se nomme *Mécanique*.

La *Statique* en est la partie relative au cas spécial où s'annule le mouvement, c'est-à-dire où persistent la situation et, par suite, la figure des corps. On y comprend, par une extension bien naturelle, l'étude des cas, au moins les plus simples, où un système de corps, tout en se déplaçant, conserve des distances invariables entre ses diverses parties, c'est-à-dire ses dimensions avec sa forme, éléments constitutifs de sa *configuration*. Et, par opposition à la Statique, on appelle *Dynamique* l'étude propre du mouvement.

2. — Hypothèses spéciales à la Mécanique rationnelle; leur insuffisance dans l'étude de phénomènes très importants.

Pourquoi a-t-on été amené à diviser la Mécanique en Mécanique rationnelle et en Mécanique physique? A quoi répond cette distinction? Telle est la première question que nous devons nous poser ici.

Les phénomènes naturels se trouvant très complexes, et, de plus, nos connaissances sur la constitution intime des corps étant fort imparfaites, nous sommes inévitablement conduits, dans l'étude de leurs mouvements, à faire, sur cette constitution, des hypothèses seulement approchées, très précieuses néanmoins lorsqu'elles sont simples et qu'il existe des cas, reconnaissables à l'avance, où la nature les réalise à fort peu près. Or ce qu'a de propre la Mécanique rationnelle tient justement à deux hypothèses de cette espèce, imaginées, chacune, pour une des deux sortes de corps que l'on rencontre le plus souvent et qui diffèrent autant que possible l'une de l'autre. Je veux parler des *solides* et des *fluides*, les premiers pourvus d'une forme déterminée, les seconds affectant successivement les formes les plus diverses, mais surtout celles des solides qui les touchent. La Mécanique rationnelle, fruit des premières spéculations mécaniques des géomètres, a tout naturellement poussé à l'extrême les caractères distinctifs de ces corps. D'une part, elle a supposé les solides *invariables,* c'est-à-dire tout à fait indéformables, de manière à simplifier au plus haut degré la question de leurs mouvements, qu'elle réduit à n'être que des *mouvements d'ensemble* où se conservent toutes les distances mutuelles des diverses parties. Et, d'autre part, elle a supposé, au contraire, les fluides doués de la propriété, dite *fluidité parfaite*, consistant en ce qu'ils seraient absolument dépourvus de toute tendance à garder une forme quelconque.

Or ces hypothèses, suffisantes pour l'explication de certains phénomènes, se trouvent absolument en défaut dans d'autres.

Supposons, par exemple, que les déformations d'un solide, bien que fort petites, même imperceptibles, atteignent les limites qui amènent la *rupture*. Que deviendra, à partir de ce moment, l'hypothèse de la conservation absolue de la forme du corps, alors que cette forme est détruite ? Et comment se contenter d'une théorie qui, négligeant absolument les petites déformations, dont les grandes sont de fréquentes conséquences, ne permet pas de prévoir ces grandes déformations, c'est-à-dire le phénomène de la rupture, si capital pour l'ingénieur tenu avant tout d'en préserver ses constructions ? Le physicien lui-même est très intéressé à connaître les petites déformations dont il s'agit; car ce sont elles qui différencient les corps sous le rapport de leur plus ou moins d'élasticité et de dureté, elles aussi qui, se produisant dans des milieux matériels de natures diverses, transmettent et constituent le son, la lumière, la chaleur.

Quant aux fluides, l'hypothèse de leur *fluidité parfaite* ne se montre pas moins insuffisante dans l'étude d'un très grand nombre de faits. Tel est, pour ne citer que le plus important, l'écoulement le long des tuyaux de conduite ou dans les cours d'eau. Par exemple, un fleuve issu, comme le Rhin ou le Rhône, de sources situées à des altitudes de 2000^{m} et plus, aurait d'après cette hypothèse, en arrivant dans la plaine [1], une vitesse $\sqrt{2gh}$

---

[1] Malgré l'immobilisation d'une mince couche liquide, adhérente au lit.

ou $\sqrt{2 \times 9,8 \times 2000}$, de 200^m par seconde environ, à laquelle ne résisteraient nul fond et nulle rive. Ainsi, tout dans la nature serait bouleversé, si les phénomènes se conformaient à la supposition fondamentale adoptée par la Mécanique rationnelle dans la théorie du mouvement des fluides.

3. — Objet et caractère de la Mécanique physique.

Il a donc été absolument nécessaire de fonder une mécanique où, même au prix d'une complication plus grande, et aussi d'un appel plus fréquent à l'observation pour suppléer parfois à l'insuffisance de l'Analyse, on tînt compte des petites déformations intérieures des solides et des petites résistances qu'éprouvent les fluides à changer de forme. C'est cette mécanique, plus en harmonie avec les faits, basée sur des hypothèses en quelque sorte moins rudimentaires, qu'on appelle la *Mécanique physique*.

Le but spécial de la Mécanique physique lui impose donc l'obligation de moins s'abandonner à la tendance spéculative, et de se tenir plus près des faits d'observation, que ne le fait la Mécanique rationnelle. Elle devra, par conséquent, recourir un peu moins rarement à l'expérience. Mais ce ne sera que pour établir quelques principes très simples, presque évidents à un premier coup d'œil attentif jeté sur les choses. Et elle gardera le caractère dominant de science mathématique ; car elle déduira de ces quelques faits primitifs, grâce au principe fécond de la continuité avec lequel nous a familiarisés l'Analyse infinitésimale, tout un vaste ensemble de lois particulières et précises que les phénomènes confirmeront. C'est ainsi qu'elle édifiera ce qu'on peut appeler la *Géométrie de la Nature*, non moins belle, même au point de vue abstrait, que la Géométrie tout idéale des analystes purs.

Malgré ces différences, les principes les plus essentiels de la Mécanique rationnelle, ou qui forment ce qu'on a quelquefois nommé la *Mécanique générale*, serviront également de base à la Mécanique physique. Mais, comme la manière de les y considérer et les conditions de leur emploi se trouveront assez différentes, il nous sera utile de consacrer d'abord quelques Leçons à en faire une revue d'ensemble.

4. — Hypothèse atomique sur la constitution des corps ; points matériels.

Dès le début de toute étude sur un système donné de corps et sur leurs mouvements, le géomètre sent la nécessité de bien se représenter et définir les objets dont il s'occupera. Or il ne parvient à la netteté désirable, dans cette *construction* idéale des phénomènes et dans leur expression analytique, qu'en regardant chaque corps comme un ensemble d'*atomes* sans étendue ni dimensions, dits *points matériels*, dont il voit chacun occuper à tout instant, dans l'espace, une *situation déterminée ;* et il définit *quantitativement* cette situation elle-même, au moyen de ses trois coordonnées x, y, z par rapport à un système d'axes rectangulaires fixes.

Ce qui l'oblige à arriver ainsi jusqu'à des éléments sans étendue, jusqu'à des *points*, c'est que, justement, les points sont les seuls êtres géométriques dont la situation soit précise, ou puisse s'exprimer nettement au moyen de trois *quantités simples*, de trois *longueurs* x, y, z. Autrement dit, la *distance*, qui est par excellence, dans les phénomènes, la chose mesurable, n'a de sens que lorsqu'elle relie deux points. C'est, on le voit, une nécessité logique inhérente à la nature même de l'esprit humain, qui nous fait *idéaliser* de la sorte les éléments matériels. Portés, par une tendance instinctive, à ramener l'inconnu au connu, l'obscur au clair, nous profitons de la ressemblance des objets extérieurs avec les formes géométriques pour les leur identifier : notre intuition des figures géométriques présente, en effet, le plus haut degré de netteté, tandis que nous n'avons des objets extérieurs qu'une perception confuse.

Aussi plusieurs géomètres, le P. Boscovich, Ampère, Cauchy, de Saint-Venant, etc., ont-ils regardé cette conception d'atomes sans étendue comme réelle, comme parfaitement conforme à la véritable structure de la matière. Sans aller jusque-là (car ce serait supposer un accord bien extraordinaire, bien parfait, entre le monde idéal *atteint* par l'esprit du géomètre et le monde physique perçu par nos sens), nous remarquerons que les procédés d'observation, aux moments de leurs plus grands progrès, n'ont jamais reconnu d'erreur dans les conséquences résultant de l'application de nos idées géométriques aux choses : preuve que ces idées n'ont pas cessé d'être supérieures, pour l'exactitude pratique, aux moyens de mesure les plus précis, et que les désaccords possibles ou même probables entre elles et les objets, ou notamment entre les points matériels hypothétiques, atomes sans étendue, et les véritables éléments de la matière, se trouvent relégués dans une sphère, celle des infiniment petits de la nature, inaccessible à nos intelligences et destinée probablement à nous échapper toujours.

5. — État statique d'un système matériel.

Concevons donc un système fini de points matériels, que nous imaginerons d'abord assez éloigné de tout autre pour pouvoir être supposé seul dans l'espace. Nous appellerons

$M_1, M_2, \ldots, M_p, \ldots, M_q, \ldots, M_n$ les n points qui le composent ;

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_p, y_p, z_p), \ldots, (x_q, y_q, z_q), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$ leurs coordonnées à l'époque t, par rapport à un système d'axes rectangulaires fixes ;

r_{pq} la distance mutuelle de deux quelconques d'entre eux M_p, M_q, distance définissant leur situation relative et dont l'expression générale est

$$r_{pq} = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2}; \tag{1}$$

enfin a_{pq}, b_{pq}, c_{pq} les cosinus directeurs de cette droite, censée tirée de M_p vers M_q, cosinus dont les valeurs sont

$$a_{pq} = \frac{x_q - x_p}{r_{pq}}, \qquad b_{pq} = \frac{y_q - y_p}{r_{pq}}, \qquad c_{pq} = \frac{z_q - z_p}{r_{pq}}. \tag{2}$$

Quand nous aurons à écrire ainsi plusieurs formules analogues, il nous arrivera souvent, pour abréger, de les condenser en une formule multiple, qui sera, par exemple, à la place des trois relations (2),

$$(a_{pq}, b_{pq}, c_{pq}) = \frac{(x_q - x_p,\ y_q - y_p,\ z_q - z_p)}{r_{pq}}.$$

De même encore, pour abréger, nous supprimerons les indices lorsqu'il n'en résultera pas d'équivoque, c'est-à-dire quand il s'agira momentanément d'un seul point ou encore d'une seule distance ; alors nous désignerons le point par M, ses coordonnées par x, y, z, et la distance unique en question par r. Si nous avions à parler de plusieurs distances, mais sans qu'il fût nécessaire de désigner les points matériels qu'elles relient, nous les représenterions par r, r', r'', ...

En résumé, c'est au moyen des coordonnées x, y, z des divers points M à une époque considérée t que sera définie analytiquement, c'est-à-dire *quantitativement,* la situation ou, comme on dit, l'*état statique* du système à l'époque t, cet état que les points M eux-mêmes, supposés *donnés* dans l'espace, définissent *géométriquement.*

6. — État dynamique ; vitesses.

Or l'état statique change, en général, d'un instant à l'autre ; car x, y, z sont, pour chaque point M, trois fonctions graduellement variables de t, ne se réduisant à des constantes que dans le cas très particulier du repos. Donc, pendant que s'écoule, à partir de l'époque t, un instant infiniment petit dt, x, y, z éprouvent certaines variations dx, dy, dz ; et il est clair que la rapidité actuelle du changement de place, ou du *mouvement* de M, est mesurée par les dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, que nous appellerons souvent, pour abréger, u, v, w. Ces trois dérivées $\frac{d(x,y,z)}{dt}$, augmentations instantanées, *rapportées à l'unité de temps,* des coordonnées du *mobile* M, sont dites *ses trois vitesses suivant les axes ;* et l'on appelle sa *vitesse* réelle une droite V, égale au rapport à dt du chemin simultanément parcouru

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

menée à partir de la position actuelle du point dans la direction même de cet élément ds de la *trajectoire* décrite. La droite V dont il s'agit, quand on se la représente construite dans l'espace, est l'équivalent des trois vitesses u, v, w suivant les axes, qui expriment *analytiquement*, c'est-à-dire au moyen de quantités variables seulement en plus ou en moins, ce qu'elle exprime *géométriquement,* c'est-à-dire pour l'*orientation* et la *grandeur* tout à la fois. Le *mouvement actuel* de M se trouve donc complètement représenté, en grandeur (rapidité) et en direction, par cette ligne

$$V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

diagonale d'un parallélépipède rectangle ayant pour arêtes, parallèles aux x, y, z, les vitesses u, v, w du point suivant les axes, censées représentées de même par des droites tirées, à partir de M, dans les sens positifs ou négatifs des axes selon que leurs signes sont *plus* ou *moins :* elle vaut, *en grandeur,* la racine carrée de la somme des carrés de ses trois composantes $\frac{d(x, y, z)}{dt}$; et elle dépend, *en direction,* des rapports mutuels de celles-ci.

On appelle *état dynamique* du système cet état actuel de mouvement, exprimé par les vitesses *géométriques* $V = \frac{ds}{dt}$ de tous les points du système ou par leurs composantes *algébriques* $(u, v, w) = \frac{d(x, y, z)}{dt}$. Il pourra, comme on voit, se définir, d'une manière abrégée, la *dérivée de l'état statique* par rapport au temps.

7. — Digression sur l'addition géométrique ou composition des droites.

On remarquera que, dans le parallélépipède dont V et u, v, w sont respectivement la diagonale et les trois dimensions, V joint les deux extrémités de la ligne brisée formée par trois arêtes ayant respectivement les grandeurs et les directions des composantes u, v, w.

Généralisant cette remarque, pour l'appliquer à des droites en nombre arbitraire et orientées à volonté dans l'espace, on appellera *composantes* d'une droite donnée issue d'un point quelconque, d'autres droites émanées du même point, telles, qu'une ligne brisée en émanant aussi, et formée de côtés respectivement égaux et parallèles à ces autres droites, aboutisse au même point que la proposée. Celle-ci est dite la *résultante,* ou encore la *somme géométrique,* de ses composantes ; et elle a évidemment pour projections, sur un quelconque des axes coordonnés, la somme algébrique des projections, sur le même axe, des composantes ou *parties géométriques* que l'on a mises ainsi bout à bout en forme de ligne brisée. La condition nécessaire, et évidemment suffisante, pour qu'il y ait *composition*, ou *addition géométrique*, de plusieurs droites en une seule, tirées toutes d'une même origine, sera donc qu'il y ait *addition algébrique de leurs projections de même nom* pour donner la projection analogue de la droite dite leur *somme*. C'est bien, en particulier, ce qui a lieu pour les trois composantes u, v, w, suivant les axes, de la vitesse V de chaque point.

8. — Accélérations suivant les axes et accélération totale.

L'état dynamique du système considéré est lui-même généralement variable d'instant en instant; car aux deux époques consécutives t, $t + dt$, les composantes u, v, w de la vitesse d'un point M ont des valeurs légèrement différentes, dont les secondes dépassent les premières de $d(u, v, w)$, c'est-à-dire de $d\frac{d(x,y,z)}{dt}$. La rapidité de variation de l'état dynamique est évidemment, pour le mobile M, définie par les rapports de ces excédents à dt, accroissements actuels par unité de temps des vitesses du mobile suivant les axes. Ces rapports $\frac{d(u,v,w)}{dt}$ ou $\frac{d^2(x,y,z)}{dt^2}$, dérivées secondes des coordonnées, s'appellent les trois *accélérations* du mobile *suivant les axes*. Nous les désignerons souvent par u', v', w'.

Or celles-ci, qu'on peut représenter par trois droites issues de M, ayant pour longueur leurs valeurs absolues et tirées dans les sens des (x, y, z) positifs ou négatifs suivant leurs signes, admettent une résultante, diagonale issue également de M, dans le parallélépipède construit sur ces trois droites comme arêtes. Cette résultante s'appelle l'*accélération totale*. Multipliée par dt sans changer de direction, elle aura évidemment pour composantes

$$\frac{d^2(x,y,z)}{dt^2}dt$$

ou $d(u, v, w)$, c'est-à-dire les accroissements infiniment petits éprouvés durant l'instant dt par les vitesses u, v, w du point suivant les axes. Ainsi, l'accélération totale multipliée par dt est la ligne dont il faut ajouter algébriquement les projections à celles de même nom de la vitesse V de M à l'époque t, pour obtenir sa vitesse $V + dV$ à l'époque $t + dt$. C'est, en d'autres termes, la ligne infiniment petite qu'il faut composer avec la vitesse V, relative à l'époque t, pour avoir la vitesse $V + dV$ à l'époque $t + dt$; et, par suite, elle se trouve représentée, tant en direction qu'en grandeur, par le second côté d'un triangle infiniment aigu, qui aurait pour ses premier et troisième côtés, respectivement, deux droites égales et parallèles aux deux vitesses considérées successives V, $V + dV$ du mobile.

L'accélération totale est par conséquent indépendante du choix des axes, comme la vitesse totale.

9. — Accélération tangentielle et accélération centripète.

Ses composantes particulières les plus remarquables s'obtiennent en prenant pour les deux premiers axes, à partir du mobile M considéré à l'époque t, la vitesse V elle-même, tangente à la trajectoire, et le rayon R de courbure de celle-ci, situé dans le plan osculateur où commence à se produire, après l'époque t, le changement de direction de la courbe, et où l'on peut ainsi supposer comprise, au moment $t + dt$, la nouvelle vitesse $V + dV$. Cette dernière, tangente à la seconde extrémité de l'arc élémentaire parcouru $ds = V\,dt$, fait par suite avec la vitesse précédente V l'angle de contingence $d\theta = \frac{ds}{R}$ de cet arc. Ainsi, tandis que les cosinus directeurs de la première vitesse V sont

$$1, \quad 0, \quad 0,$$

ceux de la seconde $V + dV$ seront, sensiblement ou sauf erreur d'un ordre de petitesse supérieur au premier,

$$\cos d\theta = 1, \qquad \sin d\theta = d\theta = \frac{ds}{R} = \frac{V\,dt}{R}, \qquad 0.$$

Les trois composantes de la vitesse étant donc, à l'époque t,

$$V, \quad 0, \quad 0$$

et, à l'époque $t + dt$,

$$V + dV, \qquad (V + dV)\,d\theta = V\,d\theta = \frac{V^2\,dt}{R}, \qquad 0,$$

leurs accroissements respectifs, divisés par dt, valent

$$\frac{dV}{dt}, \quad \frac{V^2}{R}, \quad 0.$$

Cela revient à dire que l'accélération totale se compose d'une accélération dirigée suivant la vitesse même V, ou *tangentielle*, égale à la dérivée de cette vitesse par rapport au temps, et d'une accélération *normale centripète*, dirigée vers le centre de la courbure $\frac{1}{R}$ de la trajectoire et égale au produit de cette courbure par le carré de la vitesse.

DEUXIÈME LEÇON.

LES DEUX PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MÉCANIQUE.

10. — **Des lois fondamentales du mouvement. — Première loi ou premier principe : c'est d'après l'état statique que se règle la rapidité de variation de l'état dynamique.**

La Mécanique, science des lois effectives du mouvement, est basée sur deux grands principes qu'a fait admettre une longue expérience aussi variée et aussi précise que possible, complétée, dans ses lacunes inévitables, par la croyance naturelle de la raison à des règles simples ou à un ordre intelligible en toutes choses.

Le premier, connu, dans un cas particulier qu'a signalé Galilée, sous le nom de *Principe de l'indépendance des mouvements simultanés,* consiste en ce que, le système matériel considéré étant supposé très éloigné de tout autre ou seul dans l'espace, *la rapidité avec laquelle change d'instant en instant son état dynamique, dépend, d'une manière déterminée, de son état statique seul.* Autrement dit, les accélérations $\frac{d^2(x, y, z)}{dt^2}$ de ses divers points égalent certaines fonctions, déterminées dans chaque cas par les lois physiques, des coordonnées actuelles x, y, z de tous. Les mouvements sont ainsi régis par des systèmes d'équations différentielles du second ordre. Ces équations laissent donc disponible ou arbitraire l'*état initial* du système, comprenant l'ensemble, tant des situations (x, y, z), que des vitesses $\frac{d(x, y, z)}{dt}$, à une époque spéciale $t = t_0$ prise pour *origine ;* mais elles relient étroitement à cet état initial du système matériel ses autres états, ultérieurs ou même antérieurs.

Par exemple, l'accélération d'un corps qui tombe à la surface du globe est une fonction lentement variable de la position relative qu'il a atteinte par rapport à la terre ; celle d'une planète est une fonction analogue de ses distances aux autres corps du système solaire et principalement du soleil ; l'accélération d'un solide, fixé à l'extrémité d'un ressort qui se détend, dépend de l'écart existant entre les dimensions actuelles de ce ressort et ses dimensions à l'état naturel de repos ; celle de la partie d'un corps contre laquelle un autre corps vient se heurter est fonction du rapprochement qu'éprouvent leurs matières respectives, etc.

11. — Valeur toujours finie des accélérations ; graduelle variation des vitesses ; inertie ; distinction entre le contact géométrique et le contact physique.

Tout porte d'ailleurs à admettre que les lois physiques ne permettent jamais aux accélérations dont il s'agit de devenir infinies ; d'où il suit que les vitesses, dont ces accélérations sont les dérivées, ne le deviennent pas non plus, ni ne peuvent être discontinues ou passer brusquement d'une valeur à une autre. Aussi suppose-t-on que, dans les chocs dont il vient d'être parlé, les accélérations ou modifications de vitesses surviennent dès que le corps heurtant arrive à de certaines distances imperceptibles du corps heurté, ou avant qu'il y ait entre eux *contact géométrique*. Sans cela, le corps heurté, qui ne cesse pas de se trouver au-devant du corps heurtant, devrait brusquement, à l'endroit et au moment du contact géométrique, acquérir une vitesse pour le moins égale à la vitesse primitive du corps heurtant, à moins que celui-ci n'en perdît lui-même brusquement une partie. Or une telle discontinuité de ces deux vitesses ou de l'une d'elles est contraire au grand principe de la graduelle variation de toutes choses. De plus, elle serait scientifiquement bien regrettable; car elle empêcherait l'application de l'Analyse infinitésimale au problème du choc et rendrait vraisemblablement impossible la théorie de ce phénomène si fréquent, conséquence qui accroît encore son improbabilité.

Ainsi, nous admettrons qu'un certain temps est nécessaire pour engendrer ou pour détruire une partie quelconque de vitesse ; et tout point matériel, animé à un moment donné d'une certaine vitesse, la possédera encore après un intervalle de temps assez petit.

C'est ce fait de la conservation, au moins pendant un temps très court, de la vitesse des corps, que l'on entend quelquefois par l'*inertie de la matière,* ou propriété qu'elle aurait de persévérer dans son état actuel soit de mouvement, soit de repos. On l'appelle encore l'effet de la *vitesse acquise,* quand on dit qu'un corps se meut *en vertu* de sa vitesse acquise.

Il résulte, d'autre part, des mêmes considérations, que le *contact physique* de deux corps, susceptible de degrés divers suivant les différences de vitesse qui l'amènent dans le cas d'un choc, ou suivant le degré de *compacité* de la matière entre les parties adjacentes de laquelle on l'observe à l'état de repos, devra être soigneusement distingué du *contact géométrique* ou absolu, qui est purement idéal : ce ne sera pas autre chose qu'un rapprochement de deux corps, suffisant pour provoquer de rapides modifications de leur mouvement, si d'ailleurs aucune autre circonstance ne s'y oppose.

12. — Extension du premier principe, malgré d'apparentes difficultés, premièrement, à la résistance des fluides.

En voyant la vitesse d'un corps lancé à travers un milieu comme l'air ou l'eau, se ralentir ordinairement d'autant plus vite, ou éprouver d'instant en instant une diminution absolue d'autant plus grande, que sa valeur actuelle est plus forte, on pourrait être tenté de faire dépendre les accélérations, des *vitesses* actuelles, en même temps que des *situations* actuelles. Mais un peu d'attention montre de suite que ce à quoi tient l'accélération négative du corps considéré est l'intimité plus grande, à son avant qu'à son arrière, de son contact physique avec le milieu fluide qui le gêne dans son mouvement. Donc l'accélération considérée se règle bien uniquement d'après des rapprochements entre particules, ou d'après les situations relatives des points matériels du système.

Si, au lieu de cela, on la suppose, dans les Cours de Mécanique rationnelle, fonction de la vitesse du corps, c'est qu'on s'y borne, d'une manière implicite (car on néglige de le dire), aux circonstances ordinaires où le corps a son mouvement assez lentement varié pour que la manière d'être du milieu par rapport à lui ait eu le temps de *se régler,* à fort peu près, d'après cette vitesse même ; d'où il suit que celle-ci se substitue dès lors, comme variable définitive et unique, à toutes celles dont dépend immédiatement l'influence retardatrice du fluide. Et l'on restreint ainsi la question afin de la rendre plus abordable, en permettant d'éliminer toute considération directe du milieu pour ne s'occuper que du corps lui-même.

En réalité, ce n'est pas seulement de la vitesse, mais aussi de l'accélération, de la dérivée de l'accélération, etc., ou plutôt de toutes les circonstances du mouvement antérieur auxquelles serait dû, pour une part quelconque, l'état de rapprochement actuel du solide et du fluide ambiant, que dépendrait le retard apporté par le fluide au mouvement du corps, si l'état relatif de celui-ci et du fluide ne parvenait pas à se régler, c'est-à-dire n'atteignait pas un degré suffisant d'uniformité ou, comme on dit, de *permanence.* Un pendule qui oscille dans l'air ou dans l'eau, et dont la durée d'oscillation est assez brève, fournit un exemple simple de ce cas plus général : l'influence retardatrice du fluide y dépend, en majeure partie, de l'accélération et non de la vitesse.

13. — **Deuxièmement, au frottement des solides et au frottement intérieur des milieux qu'on déforme avec une certaine vitesse.**

Une deuxième exception apparente au premier principe se produit quand un solide glisse sur un autre avec une certaine vitesse. La déformation qu'il fait naître sur celui-ci n'est pas symétrique de part et d'autre d'une normale commune à leurs surfaces, par suite de l'impossibilité, où se trouve la partie du corps fixe sans cesse atteinte par le corps mobile, d'acquérir, surtout instantanément, la vitesse de ce dernier. Le corps mobile est ainsi, à tout instant, plus gêné ou retenu à son avant que poussé à son arrière; d'où résulte encore pour lui une accélération négative qui, si le mouvement se règle, dépend, tout au moins en direction, de la vitesse. En effet, cette direction change quand celle de la vitesse change elle-même. Mais là encore, on le voit, la vitesse n'entre dans l'équation différentielle du mouvement du corps qu'après l'élimination des vraies variables seules propres à y figurer directement, qui sont les distances séparant le corps mobile, à son avant et à son arrière, d'avec le corps fixe.

De telles dissymétries de configuration, à la partie antérieure et à la partie postérieure de corps ou même seulement de groupes moléculaires en mouvement entourés par d'autres, peuvent donc avoir pour effet d'introduire, dans l'accélération de ces groupes, des termes négatifs, qu'on regardera presque toujours comme fonctions de la seule vitesse actuelle des mêmes groupes par rapport à la matière ambiante, quand on voudra se dispenser de faire entrer dans le calcul les dissymétries en question.

De pareils termes sont, à un facteur constant près, ce qu'on appelle des *frottements intérieurs*. Et il importe au plus haut point d'observer que leur existence n'est pas en contradiction avec la grande loi d'après laquelle les accélérations dépendent uniquement de l'état statique actuel.

14. — Troisièmement, enfin, à certains phénomènes, mal connus, électriques ou autres.

Les exemples précédents suffisent pour montrer que, lorsqu'on rencontrera, dans des parties de la Science encore obscures et dont l'*idée mère* nous manque, comme l'Électrodynamique par exemple, les formules, au moins provisoires, d'accélérations paraissant échapper à cette loi fondamentale, il faudra non pas conclure à son défaut de généralité, mais attendre, des progrès ultérieurs de la Science, l'explication de désaccords purement apparents sans doute. Et si les formules en question sont réellement fondées sur l'expérience, on aura tout lieu d'espérer découvrir à la suite de quelles éliminations elles auront pris leur forme paradoxale.

Quoi qu'il en soit, rien ne serait actuellement moins sensé, que de faire servir les parties non débrouillées de la Mécanique physique à obscurcir ce qu'elle a acquis de plus clair depuis deux siècles, savoir, son premier principe, qui résume l'expression d'un nombre déjà prodigieux de faits.

15. — Considérations tendant à établir la généralité du premier principe.

D'ailleurs, *a priori,* on conçoit que la manière d'être, relativement à un point matériel, des autres points matériels situés tout autour et, par suite, l'influence qu'ils peuvent avoir sur son accélération, dépendent de leur situation par rapport à lui. Mais on ne conçoit pas qu'elles dépendent de leurs vitesses; car celles-ci, durant l'instant imperceptible où se produit l'accélération considérée, ne font varier que dans des rapports infiniment petits la configuration du système ou les distances mutuelles de ses diverses parties (distances supposées, bien entendu, ne s'annuler jamais tout à fait, même pendant les chocs). Autrement dit, le point dont on considère l'accélération et que l'on serait peut-être tenté de croire, en quelque sorte, directement sensible à son propre mouvement, mais non certes à celui des autres, n'a, pour ainsi dire, aucun moyen de s'apercevoir des changements tout à fait négligeables survenus autour de lui durant un instant dt. C'est donc, à sa vitesse près, uniquement d'après l'*état statique actuel,* qu'il devra, pour ainsi dire, régler son accélération, ou que les autres points du système influeront sur elle.

Dès lors, la seule vitesse qui semble pouvoir entrer dans l'expression de l'accélération d'un point sera la vitesse même V de ce point. Or cela encore est inadmissible. En effet, si, pour l'instant considéré, que rien n'empêche de choisir comme instant initial, on prend égales et parallèles à V les vitesses alors arbitraires de tous les autres points, vitesses reconnues sans influence sur l'accélération à évaluer, tout le système ne se trouvera animé à ce moment que d'un mouvement commun V de translation dans l'espace. Mais le principe expérimental, reconnu par Galilée, de l'*indépendance des mouvements simultanés,* apprend que, dans un tel cas, les déplacements ultérieurs des divers points du système matériel, par rapport à des axes coordonnés possédant la translation dont il s'agit, sont les mêmes que si cette vitesse V était nulle. Et comme, vu la proportionnalité simple, au temps ultérieurement écoulé, des différences entre les deux coordonnées correspondantes x, y ou z d'un même point, par rapport aux deux systèmes d'axes, les uns fixes, les autres mobiles, les dérivées secondes

$\frac{d^2(x,y,z)}{dt^2}$ seront aussi les mêmes quand on les évaluera dans l'un ou l'autre de ces deux systèmes d'axes, il suit bien de là que ces accélérations, à l'époque considérée où il n'y a pas d'autres vitesses que V, dépendront uniquement de l'état statique, c'est-à-dire de la configuration du système.

En résumé, nous pouvons admettre comme premier principe de la Mécanique, comprenant ou plutôt exprimant en son entier celui de l'indépendance des mouvements simultanés, la loi suivante :

Dans un système matériel indépendant de tout autre, les accélérations des divers points sont des fonctions parfaitement déterminées de leurs situations actuelles.

16. — **Deuxième principe, consistant dans la conservation des forces vives ou de l'énergie; notion de masse.**

Un second principe non moins important, suggéré sans doute par ce fait que dans l'Univers le mouvement se communique d'un corps à l'autre sans disparaître jamais définitivement, a été entrevu par Descartes, puis dégagé par Leibnitz : c'est celui d'une *certaine* conservation du mouvement, supposé évalué *séparément* chez les divers points matériels du système d'après une règle invariable simple, puis réuni pour tous en une somme unique, *sans y tenir compte des différences de direction.*

Pour des points exactement pareils, animés d'une égale vitesse V, la grandeur à évaluer se trouve évidemment la *même*, ou donne un total proportionnel à leur nombre, c'est-à-dire à la *quantité de matière en mouvement*. Et il est naturel de penser qu'un point matériel de nature différente, mais animé encore de la vitesse V, équivaudra, sous ce rapport, à un certain nombre entier ou fractionnaire, le même quel que soit V, de points de la première espèce, nombre dont la constance ne sera autre chose que l'expression mathématique du principe de la *conservation de la matière,* fondamental dans toutes les Sciences de la nature. Ce nombre, que nous représenterons par m et qui s'évaluera, pour chaque point, en prenant comme unité une quantité définie d'une certaine matière, s'appelle la *masse* du point. Il sera, dans l'expression cherchée du mouvement, le facteur caractéristique de l'élément de matière mû.

17. — Quantité de mouvement et force vive; énergie actuelle.

Mais l'autre facteur, qui dépend évidemment de la vitesse V, ou qui égale une certaine fonction simple de V, sera-t-il V, comme l'avait pensé Descartes, qui fut ainsi conduit à appeler le produit mV la *quantité de mouvement du point?*

Ne sera-t-il pas plutôt, comme une Science plus avancée le fit voir à Leibnitz, proportionnel au carré V^2 de la vitesse? En effet, dans la décomposition si naturelle du mouvement suivant trois directions rectangulaires, ce carré V^2 égale justement, d'après une remarque aussi simple que profonde de Leibnitz lui-même, la somme des trois carrés analogues des vitesses composantes du point, et se montre ainsi apte à donner des produits, tels que mV^2, s'agrégeant dans tout un système par simple *addition arithmétique malgré les différences de direction,* puisque chaque terme mV^2 est déjà lui-même une somme de parties mu^2, mv^2, mw^2, non moins diverses ou, pour ainsi dire, non moins hétérogènes quant à la direction des vitesses qui y figurent [1]. L'expression qu'il s'agit de former, appelée par Leibnitz *force vive* du système, serait donc ΣmV^2, c'est-à-dire la somme des produits obtenus en

---

[1] *Caractère géométrique distinctif de la force vive, ou de la puissance vive qui est sa moitié.* — Si, en effet, la fonction de V dont il s'agit, destinée à évaluer le mouvement d'un point, et que j'appellerai $f(V)$, doit être déterminée par la condition

$$(\alpha) \qquad f(V) = f(u) + f(v) + f(w),$$

il viendra, en différentiant celle-ci,

$$(\beta) \qquad \frac{df(V)}{dV}dV = \frac{df(u)}{du}du + \frac{df(v)}{dv}dv + \frac{df(w)}{dw}dw.$$

Or

$$(\gamma) \qquad V^2 = u^2 + v^2 + w^2;$$

d'où

$$V\,dV = u\,du + v\,dv + w\,dw,$$

c'est-à-dire

$$(\delta) \qquad dV = \frac{u}{V}du + \frac{v}{V}dv + \frac{w}{V}dw,$$

multipliant les masses de ses divers points matériels par les carrés de leurs vitesses respectives.

L'expérience a prouvé que la quantité qui se conserve est bien cette dernière $\Sigma m V^2$, ou encore, ce qui revient évidemment au même, mais se trouve plus commode dans les formules, que c'est

---

valeur de dV qui, substituée dans (β), lui donne aisément la forme

$$\begin{cases} 0 = \left[\frac{1}{u}\frac{df(u)}{du} - \frac{1}{V}\frac{df(V)}{dV}\right] u\,du + \left[\frac{1}{v}\frac{df(v)}{dv} - \frac{1}{V}\frac{df(V)}{dV}\right] v\,dv \\ \qquad + \left[\frac{1}{w}\frac{df(w)}{dw} - \frac{1}{V}\frac{df(V)}{dV}\right] w\,dw. \end{cases}$$

Cette relation, devant être vérifiée quels que soient les rapports mutuels des différentielles du, dv, dw, exige évidemment que

$$(\varepsilon) \qquad \frac{1}{u}\frac{df(u)}{du} = \frac{1}{v}\frac{df(v)}{dv} = \frac{1}{w}\frac{df(w)}{dw} = \frac{1}{V}\frac{df(V)}{dV}.$$

D'ailleurs, comme u, v, w sont trois quantités arbitraires, indépendantes l'une de l'autre, les trois premiers membres de (ε) ne peuvent être égaux que si leur valeur commune ne varie ni avec u, qui figure seulement dans le premier membre, ni avec v et w qui n'y figurent pas. Cette valeur commune est donc une certaine constante m, tant qu'il s'agit d'un même point matériel. Ainsi, considérant, par exemple, le quatrième membre de ε, on a

$$\frac{1}{V}\frac{df(V)}{dV} = m,$$

c'est-à-dire

$$df(V) = mV\,dV,$$

et, par une intégration immédiate,

$$(\zeta) \qquad f(V) = m\frac{V^2}{2} + \text{une constante C}.$$

Il en résulte

$$(\eta) \qquad f(u) = m\frac{u^2}{2} + C, \qquad f(v) = m\frac{v^2}{2} + C, \qquad f(w) = m\frac{w^2}{2} + C.$$

Enfin ces valeurs (ζ), (η) de $f(V)$, $f(u)$, $f(v)$, $f(w)$, substituées dans la relation (α), y satisfont identiquement, vu (γ), à la condition nécessaire et suffisante que l'on pose

$$C = 0.$$

Donc la fonction cherchée est bien, comme le pensait Leibnitz,

$$(\theta) \qquad f(V) = \frac{mV^2}{2},$$

m y désignant la *masse* du point matériel considéré, c'est-à-dire le coefficient proportionnel d'importance ou la valeur mécanique de ce point, dans l'appréciation de sa part de mouvement.

la moitié, $\sum \frac{mV^2}{2}$, de la somme en question, moitié désignée sous les noms de *puissance vive* et d'*énergie actuelle* du système.

18. — Énergie potentielle ou capital latent de puissance vive, qui, joint à l'énergie actuelle, donne une énergie totale invariable.

Mais en quel sens cette quantité $\sum \frac{1}{2} mV^2$ se conserve-t-elle? En ce sens qu'elle se retrouve pareille, malgré ses différences possibles de répartition entre les points, chaque fois que le système repasse par la même configuration ou disposition relative de ses diverses parties. L'exemple d'un poids qui, en montant, c'est-à-dire en s'éloignant du sol, perd sa force vive, pour la retrouver en descendant, ceux d'un ressort bandé, dont la vitesse, d'abord nulle, augmente à mesure qu'il se détend, ou d'un mélange explosible qui crée du mouvement par un groupement nouveau de sa matière, prouvent, en effet, que les changements de forme et de dimensions d'un système entraînent certains accroissements ou certains décroissements de sa puissance vive : mais ces accroissements ou ces décroissements doivent plutôt être appelés des *développements* ou des *dissimulations,* que des *créations* ou des *anéantissements,* puisque les quantités de puissance vive produite ou détruite qu'ils représentent disparaîtraient ou reparaîtraient par des changements inverses de figure.

On peut donc concevoir qu'une certaine provision, un certain *capital* de puissance vive, variable avec la configuration du système, s'y trouve, par le fait même que ce système existe, emmagasiné sous une forme invisible et, lors des changements de configuration, accroît de ses pertes ou diminue de ses gains l'énergie actuelle primitivement communiquée au système en quantité arbitraire, suivant les vitesses plus ou moins grandes imprimées initialement à ses divers points.

On appelle *énergie potentielle* cette provision actuellement latente de puissance vive, qui dépend de la figure formée par les divers points du système ou qui est, par conséquent, une certaine fonction $\Psi(r, r', r'', \ldots)$ de leurs distances mutuelles. Et le second principe fondamental de la Mécanique, appelé *Principe de la* *conservation des forces vives ou de l'énergie,* s'exprime en disant que *l'énergie totale du système, somme de son énergie actuelle* $\sum \frac{1}{2} m V^2$ *et de son énergie potentielle* $\Psi(r, r', r'', \ldots)$, *est invariable,* ou que l'on a

$$(3) \qquad \sum \frac{1}{2} m V^2 + \Psi(r, r', r'', \ldots) = \text{une constante.}$$

Les distances ou droites de jonction r, r', r'', ... ne sont pas toutes indépendantes; car, lorsque trois d'entre elles, côtés du triangle ayant pour sommets trois des points matériels, sont données, les distances à ces trois sommets de tous les autres points situés, par rapport au plan du triangle, d'un même côté, suffisent pour déterminer les positions relatives de ces autres points et, par suite, toutes leurs distances mutuelles. On pourrait donc éliminer de la fonction Ψ un grand nombre de variables r, r', r'', ... Mais cette fonction doit avoir une forme naturelle, que nous supposerons adoptée, où elles figurent toutes; car il est rationnel d'admettre que chaque distance joue un rôle dans la production des phénomènes, en tant qu'exprimant le rapport des deux points qu'elle relie.

D'ailleurs, comme nous ne connaissons pas d'état des corps où leur énergie potentielle soit complètement épuisée, c'est-à-dire où leur puissance vive ne puisse plus s'accroître par aucun changement de configuration, cette fonction Ψ ne sera déterminée que dans sa partie variable, ou à une constante arbitraire près. Celle-ci se réduira avec la constante arbitraire du second membre de (3), et il sera dès lors permis d'en faire abstraction.

TROISIÈME LEÇON.

FORME DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT; CE QU'ON ENTEND EN MÉCANIQUE PAR FORCE, FORCES MOTRICES, ACTIONS MUTUELLES, ETC. — PESANTEUR.

19. — Forme des équations du mouvement.

Des deux principes fondamentaux de la Mécanique se déduisent presque immédiatement d'importantes lois; car la formule, (3) [p. 22], de la conservation des forces vives permet de préciser la forme des équations différentielles du mouvement, beaucoup plus que ne l'indiquait le principe, même généralisé, de l'indépendance des mouvements simultanés.

Différentions, en effet, cette relation (3) par rapport au temps, après avoir remplacé V^2 par $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$, ce qui donne, pour la dérivée de $\frac{1}{2}V^2$, le trinôme $\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}$; et observons que Ψ, fonction des distances mutuelles des divers points du système, ne dépend en définitive que des coordonnées actuelles de ceux-ci, vu la valeur (1) [p. 6] de la distance r_{pq} de deux points quelconques M_p, M_q. En groupant ensemble les termes du résultat où figurent comme facteurs les trois dérivées $\frac{d(x_p, y_p, z_p)}{dt}$ relatives à un même point M_p (dont m_p désignera la masse), et en nous contentant d'indiquer l'existence des autres termes, nous aurons l'équation

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(m_p \frac{d^2x_p}{dt^2} + \frac{d\Psi}{dx_p}\right)\frac{dx_p}{dt} + \left(m_p \frac{d^2y_p}{dt^2} + \frac{d\Psi}{dy_p}\right)\frac{dy_p}{dt} \\ &\qquad + \left(m_p \frac{d^2z_p}{dt^2} + \frac{d\Psi}{dz_p}\right)\frac{dz_p}{dt} + \ldots = 0. \end{aligned} \right.$$

Il faut d'ailleurs s'y représenter les accélérations $\frac{d^2(x_p, y_p, z_p)}{dt^2}$ remplacées par leurs valeurs, qui, d'après le premier principe, dépendent uniquement de l'état statique du système, c'est-à-dire des coordonnées x, y, z de ses divers points, comme les dérivées mêmes de Ψ en x_p, y_p, z_p.

Cela posé, rien n'empêche de choisir l'époque actuelle t pour l'instant initial et de s'y donner arbitrairement toutes les composantes des vitesses. Ou, si l'on aime mieux, on peut imaginer que, successivement, le système matériel considéré présente, pour une même configuration quelconque définie par les coordonnées x, y, z, toutes les combinaisons possibles de vitesses, c'est-à-dire tous les modes possibles de grandeur relative des composantes $\frac{d(x, y, z)}{dt}$. Or, alors, l'égalité constante à zéro du premier membre de (4) exigera évidemment l'annulation séparée du coefficient total, le même dans tous ces cas, de chaque composante $\frac{d(x_p, y_p, z_p)}{dt}$ de vitesse, coefficient du terme unique auquel se réduirait le premier membre si la composante de vitesse dont il s'agit différait seule de zéro.

L'ensemble des deux principes fondamentaux implique donc l'annulation, dans (4), de chaque quantité entre parenthèses ; ce qui donne, pour tout point M_p du système, en transposant finalement le second terme, les trois équations de mouvement

$$(5) \qquad m_p \frac{d^2(x_p, y_p, z_p)}{dt^2} = -\frac{d\Psi}{d(x_p, y_p, z_p)}.$$

Si l'on se rappelle d'ailleurs que Ψ ne dépend de x_p, y_p, z_p que par l'intermédiaire des distances r_{pq} du point M_p aux autres points M_q du système, et que les trois dérivées de r_{pq} en x_p, y_p, z_p sont, d'après l'expression (1) de ces distances,

$$\frac{dr_{pq}}{d(x_p, y_p, z_p)} = \frac{(x_p - x_q, y_p - y_q, z_p - z_q)}{r_{pq}},$$

c'est-à-dire, plus simplement, $-(a_{pq}, b_{pq}, c_{pq})$ en vertu des formules (2) [p. 6] des cosinus a_{pq}, b_{pq}, c_{pq} qui définissent la direction des droites r_{pq}, les trois équations (5) deviendront évidemment

$$(6)\quad \begin{cases} m_p \dfrac{d^2(x_p, y_p, z_p)}{dt^2} = \sum \dfrac{d\Psi}{dr_{pq}} \dfrac{(x_q - x_p, y_q - y_p, z_q - z_p)}{r_{pq}} \\ \qquad\qquad\qquad\quad = \sum \dfrac{d\Psi}{dr_{pq}} (a_{pq}, b_{pq}, c_{pq}), \end{cases}$$

où les signes de sommation Σ s'étendent à toutes les valeurs 1, 2, ..., n de l'indice q, *autres que* p.

Or, sous cette forme définitive (6), les équations du mouvement admettent une interprétation géométrique remarquable et simple, qui doit maintenant nous occuper.

20. — Ce qu'on entend par forces, forces motrices, actions mutuelles, action et réaction.

Menons, à partir du point quelconque M_p : 1° d'une part, la droite dont les projections sur les axes égalent respectivement les premiers membres $m_p \frac{d^2(x_p, y_p, z_p)}{dt^2}$, droite de même sens que l'accélération totale de ce point et valant le produit de cette accélération par la masse m_p ; 2° d'autre part, des droites dont l'une quelconque, dirigée, si elle est positive, suivant la ligne r_{pq} qui joint le point M_p à tout autre point M_q du système, ou dans le sens opposé si elle est négative, ait pour valeur la dérivée $\frac{d\Psi}{dr_{pq}}$, c'est-à-dire pour projections sur les axes les termes écrits des seconds ou troisièmes membres de (6).

De plus, donnons à toutes ces droites le nom de *forces*, dénomination que nous nous réservons d'expliquer ou de motiver un peu plus loin. Et appelons, en particulier : 1° *force motrice* du point M_p la première d'entre elles, produit de la masse de ce point par son accélération ; 2° *action de* M_q *sur* M_p, celle des autres qui est dirigée suivant la ligne $r_{pq} = M_pM_q$, force évidemment égale et contraire à l'action analogue $\frac{d\Psi}{dr_{qp}}$, de M_p sur M_q ; 3° *action mutuelle* du couple de points M_p, M_q, l'ensemble de ces deux forces égales et contraires, dont l'une, la première considérée, s'appellera simplement l'*action* et, l'autre, la *réaction*. Enfin, convenons, comme il a été déjà dit (p. 8), de nommer *résultante* d'un système de droites données, issues toutes d'un même point, la droite, émanée également de ce point, qui a sa projection sur un axe quelconque égale à la somme algébrique des projections, sur le même axe, des droites données, et qui joint, par conséquent, les deux extrémités d'une ligne polygonale ayant ses divers côtés égaux et parallèles aux mêmes droites.

21. — Loi de formation de la force motrice de chaque point au moyen des actions des autres points sur celui-là.

Alors les relations (6) exprimeront évidemment que *la force motrice d'un point quelconque du système est la résultante d'actions partielles, dont chacune, exercée sur ce point par l'un des autres, se trouve dirigée suivant la droite qui joint ces deux points, égale et contraire à la réaction du premier sur le second, et a pour valeur la dérivée, par rapport à leur distance, d'une même fonction* Ψ *des distances actuelles de tous les points du système.*

Aussi appelle-t-on, au signe près, *fonction des forces,* cette *fonction potentielle* ou *énergie potentielle* Ψ, pour rappeler qu'elle donne par différentiation toutes les actions mutuelles exercées à l'intérieur du système. On la prend avec le signe *moins,* afin que ses dérivées complètes par rapport aux trois coordonnées x_p, y_p, z_p du point quelconque M_p représentent exactement, d'après (5), les trois composantes de la force motrice de ce point.

22. — Équilibre ; sa stabilité, son instabilité.

L'*équilibre* est dit avoir lieu entre les diverses forces quand, *pour les n points du système,* les seconds membres des formules (5) ou (6) s'annulent. Alors les $3n$ équations que représentent ces formules se trouvent vérifiées par des valeurs constantes de toutes les coordonnées x, y, z, et, si les vitesses initiales données des points sont nulles, le système pourra indéfiniment rester en repos. Ce cas tend souvent à se produire à la longue dans les systèmes matériels. De là le grand intérêt qu'il offre, accru encore par sa simplicité relative. En effet, les $3n$ équations du problème cessent d'y être différentielles en t, pour devenir des relations finies où cette variable t ne paraît plus. Leur résolution fera connaître la figure correspondante du système, ainsi que les réactions mutuelles $\frac{d\Psi}{dr_{pq}}$ de ses diverses parties.

Les conditions d'équilibre expriment donc, vu la forme même des seconds membres de (5) [p. 24], l'annulation des dérivées partielles premières de l'énergie potentielle Ψ par rapport aux coordonnées, toutes indépendantes, $x, y, z, x', y', z', x'', \ldots,$ dont elle dépend. Ce sont, d'après le principe usuel de Képler et de Fermat sur les maxima ou minima des fonctions bien continues, les premières conditions pour que la fonction Ψ soit maximum ou minimum ; car elles définissent une configuration du système où son énergie potentielle égale, à des infiniment petits du second ordre près, ce qu'elle est dans toutes les configurations infiniment peu différentes.

Le cas le plus important, parce que la nature le réalise souvent, est celui du minimum. Appelons Ψ_0 la valeur de Ψ correspondant à l'équilibre considéré et moindre que toutes ses voisines. Alors de très petits déplacements initiaux quelconques imprimés aux divers points, à partir des situations d'équilibre, et aussi de très petites vitesses initiales quelconques qu'on leur communiquerait, n'ajouteront à l'énergie totale Ψ_0 relative au cas du repos, qu'une quantité insignifiante ε^2. L'équation (3) des forces vives, devenue

$$\sum \frac{1}{2} m \mathrm{V}^2 + \Psi = \Psi_0 + \varepsilon^2,$$

c'est-à-dire

$$\Psi - \Psi_0 = \varepsilon^2 - \sum \frac{1}{2} m \mathrm{V}^2,$$

astreindra évidemment l'accroissement essentiellement positif $\Psi - \Psi_0$ de l'énergie potentielle à ne pas dépasser ε^2, ou les variables $r, r', r'', \ldots$ (dont dépend Ψ), à ne changer que dans d'étroites limites. La figure du système ne s'altérera donc presque pas, et, de plus $\left(\text{par suite de l'inégalité évidente} \sum \frac{1}{2} m \mathrm{V}^2 < \varepsilon^2\right)$, ses vitesses resteront fort petites : double circonstance qu'on exprimera en qualifiant l'équilibre de *stable*.

Il y aurait, au contraire, *instabilité*, si la configuration du système pouvait changer *sensiblement* à la suite d'une rupture *insensible* de l'équilibre. C'est ce qui arrive quand, l'état d'équilibre dont il s'agit correspondant à un maximum de Ψ, la valeur $\varepsilon^2 + (\Psi_0 - \Psi)$ de la demi-force vive $\sum \frac{1}{2} m \mathrm{V}^2$ varie dans le même sens que les écarts d'avec cet état déjà produits; car il en résulte que le mouvement s'accélère par ces écarts mêmes.

Enfin, l'équilibre est dit *indifférent* quand $\Psi =$ const. : car aucune demi-force vive ne se trouve alors engendrée par les changements de configuration, et la somme $\sum \frac{1}{2} m V^2$ reste toujours infiniment petite comme au départ; ce qui implique, il est vrai, la conservation indéfinie du mouvement imprimé, mais aussi celle de sa lenteur.

23. — Actions moléculaires et actions de pesanteur.

Pour pouvoir préciser encore plus la forme des équations de mouvement (6) [p. 25], il reste à connaître celle de la fonction potentielle Ψ, ou plutôt de ses variations correspondant aux changements qui se produisent dans les distances mutuelles des divers points du système.

Et d'abord, les phénomènes vulgaires de pression, de choc, d'explosion, etc., montrent que de minimes changements survenus dans les imperceptibles distances qui séparent des points du système très proches les uns des autres, ou, si l'on veut, *physiquement* contigus, amènent des absorptions ou des dégagements de force vive sans comparaison plus grands que ceux qui résulteraient de variations, même très sensibles, dans les distances de points séparés par des intervalles appréciables. Donc les dérivées $\frac{d\Psi}{dr}$ relatives aux distances r accessibles à nos sens sont presque nulles, en général, à côté de celles que l'on prendrait par rapport à des distances *imperceptibles*. En d'autres termes, les actions, dites *de pesanteur,* s'exerçant aux distances de grandeur notable, peuvent être regardées comme infiniment petites en comparaison de celles, appelées le plus souvent *actions moléculaires,* qui existent, entre points matériels, à ces distances absolument insensibles auxquelles se produit le *contact physique* des corps, et dont même la plus grande, dite *rayon d'activité des actions moléculaires*, échappe complètement à nos mesures.

24. — Caractères différents de ces deux sortes d'actions.

Aussi pourrait-on négliger toujours, comme on le peut souvent, les forces de pesanteur, si elles ne compensaient leur petitesse par leur nombre incomparablement plus élevé et surtout par la permanence de leur action. En effet, un léger éloignement, suffisant pour soustraire un point matériel au *contact* physique de ses voisins ou à ce que nous appelons leurs *actions moléculaires,* ne modifie pas d'une manière appréciable ses distances aux autres points matériels plus éloignés, ni, par suite, les *actions de pesanteur* qu'ils exercent sur lui : car la partie de ces dernières due aux points assez voisins pour que leurs petites distances au proposé aient changé dans des rapports notables, n'est pour ainsi dire rien à côté de celle qui provient des points éloignés, incomparablement plus nombreux; et l'on peut la supprimer sans erreur appréciable.

De là, aussi, une bien plus grande constance des actions de pesanteur, et la possibilité de les prendre comme type ou comme terme de comparaison pour toutes les forces, c'est-à-dire d'évaluer les forces en *poids;* ce que nous verrons dans un instant.

Le simple phénomène de la chute d'un corps, tombant d'une certaine hauteur, dans le vide ou même à travers l'air, jusqu'à la rencontre du sol ou d'un obstacle quelconque, suffit pour mettre en évidence le contraste entre la faiblesse relative des actions de pesanteur et l'intensité des actions moléculaires. C'est, en effet, dans un instant extrêmement court que toute la vitesse du corps, acquise durant le temps sensible de la chute, est anéantie au contact de l'obstacle; d'où il résulte bien que les accélérations négatives éprouvées par le corps vers la fin de sa course, par l'effet des actions moléculaires, sont incomparablement supérieures à l'accélération positive de pesanteur qu'il a éprouvée durant tout le trajet. Celle-ci, à vrai dire, ne le quitte à aucun moment, mais est finalement neutralisée par l'accélération négative due au contact persistant (quoique affaibli ou moins intime qu'au premier moment) de l'obstacle et du corps.

25. — Considérations relatives à la manière dont l'énergie potentielle doit dépendre des distances de grandeur sensible; et, d'abord, éléments rationnels paraissant déterminer jusqu'à un certain point cette dépendance.

D'ordinaire, les changements de configuration se succèdent assez graduellement pour que, durant tout le cours d'un phénomène, ce soient les mêmes points qui restent très proches les uns des autres et les mêmes qui restent relativement éloignés. D'ailleurs, des mélanges qui n'auraient pour effet que de substituer à certains points matériels d'autres points d'égale masse et de même nature, comme il arrive dans un liquide sillonné de courants contraires, ne changeraient évidemment ni les actions produites quelque part, ni l'énergie potentielle qui s'y trouverait engagée. On peut donc distribuer en deux catégories les distances mutuelles dont l'énergie potentielle Ψ est fonction : mettre dans l'une les distances, *absolument imperceptibles*, qui par leurs variations développent les grands ou rapides changements de puissance vive et donnent naissance à la presque totalité des phénomènes, dans l'autre, toutes les distances perceptibles, *comme infinies* par rapport aux précédentes, et dont les changements font comparativement peu varier l'énergie potentielle Ψ du système ou, par suite, sa demi-force vive.

Nous appellerons ces grandes distances $R, R', R'', \ldots$, et, les petites, $r, r', r'', \ldots$.

Il n'y aura pas à en considérer d'intermédiaires, c'est-à-dire de moins insensibles que $r, r', r'', \ldots$; car les actions de pesanteur qui s'y exerceraient se trouveront toujours négligeables, n'étant en tout, comme il sera démontré plus complètement vers la fin de la IVe Leçon (p. 45), qu'une insignifiante fraction de l'ensemble des actions de pesanteur, dont le rôle total n'est déjà pas le plus important, malgré ce qu'il a d'essentiel.

Cela posé, cherchons comment Ψ, fonction de $r, r', r'', \ldots$ et de $R, R', R'', \ldots$, pourra dépendre de ces grandes variables, $R, R', R'', \ldots$, ou plutôt de leurs inverses $\frac{1}{R}, \frac{1}{R'}, \frac{1}{R''}, \ldots$ mieux en rapport, par leur petitesse, avec leur faible influence sur les valeurs de Ψ.

La lenteur croissante avec laquelle change Ψ quand $R, R', R'', \ldots$ grandissent, conduit à penser que, même en portant ces variables jusqu'à l'infini ou en atténuant leurs inverses $\frac{1}{R}, \frac{1}{R'}, \frac{1}{R''}, \ldots$ jusqu'à zéro, on ne ferait varier Ψ que d'une quantité finie; car il doit y avoir un certain degré d'éloignement au delà duquel, à en juger par le sens commun, l'influence réciproque de deux corps sur leurs états respectifs doit rester désormais inappréciable. Or, la fonction Ψ étant supposée, dans ces conditions, finie et bien continue même pour R, R′, R″, ... infinis, ou pour $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$, $\frac{1}{R''}$, ... nuls, il est naturel que ses très faibles accroissements, corrélatifs aux petits changements, à partir de zéro, de ses variables $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$, $\frac{1}{R''}$, ..., s'expriment à la manière d'une simple différentielle totale, ou soient de forme *linéaire* par rapport à $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$, $\frac{1}{R''}$, ... Ces inverses, en effet, s'y trouveront presque nuls, comparativement aux valeurs en quelque sorte *normales* $\left(\text{comme } \frac{1}{r}\right)$, pour lesquelles se produisent les principales variations de Ψ, regardée comme dépendant de tous les inverses analogues des distances intermoléculaires.

Donc, si nous appelons Φ, fonction inconnue de r, r', r'', ..., ce que deviendrait l'énergie potentielle Ψ du système pour R, R′, R″, ... infinis, et $-$ B, $-$ B′, $-$ B″, ... des coefficients dépendant peut-être aussi de r, r', r'', ..., nous pourrons poser

$$\Psi = \Phi - \frac{B}{R} - \frac{B'}{R'} - \frac{B''}{R''} - \dots \tag{7}$$

Il en résulte, pour l'action réciproque des deux points éloignés dont R est la distance, et pour celle des deux points très proches que sépare seulement une distance imperceptible r, les valeurs respectives

$$\frac{d\Psi}{dR} = \frac{B}{R^2}, \qquad \frac{d\Psi}{dr} = \frac{d\Phi}{dr} - \frac{1}{R}\frac{dB}{dr} - \frac{1}{R'}\frac{dB'}{dr} - \dots \tag{8}$$

On voit que, si B dépend effectivement de r, r', r'', ..., la distance R, relativement très grande, influera d'une petite quantité $-\frac{dB}{dr}\frac{1}{R}$, proportionnelle à son inverse $\frac{1}{R}$, sur l'action mutuelle $\frac{d\Psi}{dr}$ des deux points très proches reliés par la droite r, tandis que, sur la propre action mutuelle $\frac{d\Psi}{dR}$ des deux points qu'elle relie, elle n'influe que proportionnellement au carré, incomparablement plus faible, de cet inverse $\frac{1}{R}$. Or il n'est pas naturel que l'existence d'un couple de points dont chacun fait naître sur l'autre, suivant leur droite R de jonction, des accélérations si minimes, en détermine, ou sur un de ces points, ou sur d'autres n'appartenant pas même au couple, d'incomparablement plus grandes suivant une autre droite, r, de jonction. On doit donc supposer nulles les dérivées comme $\frac{dB}{dr}, \frac{dB'}{dr}, \ldots$, ou admettre que B, B', B'', ... sont de simples coefficients constants.

26. — Éléments historiques qui semblent avoir complété la même dépendance, ou la spécification des lois de la pesanteur, dans notre système solaire.

Il faut observer d'ailleurs que nous nous bornons, presque toujours, à l'étude de corps faisant partie d'un même système solaire, dont le passé a probablement compris une longue période d'élaboration pendant laquelle sa matière, *très disséminée,* ou dite *à l'état de nébuleuse,* ne devait guère être soumise qu'à ces forces de pesanteur. Or une pareille matière se serait évidemment dispersée dans l'espace, au lieu de se condenser, comme elle a fait, en corps de masses perceptibles sous des volumes restreints, si les accélérations réciproques des points matériels du système s'étaient trouvées dirigées à l'opposé des droites de jonction R, et non suivant ces droites, ou, en d'autres termes, si les actions mutuelles $\frac{d\Psi}{dR} = \frac{B}{R^2}$ avaient été des *répulsions,* et non des *attractions.*

Ces actions sont donc tenues, au moins dans un système comme celui que nous connaissons, d'être *attractives,* et de constituer par conséquent, en chaque point de l'espace occupé par lui, sur la matière palpable qui peut s'y trouver, ce qu'on appelle la *pesanteur,* c'est-à-dire une *gravitation vers* les autres points. Ainsi les *coefficients* B *y sont positifs.*

Mais il fallait de plus que, dans toutes les situations relatives susceptibles de se produire et qui ont eu bien le temps de se réaliser, il y eût parité des accélérations imprimées par la pesanteur aux divers atomes de la nébuleuse réunis en un même endroit; car des accélérations tant soit peu différentes les auraient bientôt séparés. Par suite, dans chaque région de l'univers, comme est celle qui comprend tout notre système solaire et peut-être même stellaire, il n'a dû rester *définitivement* ensemble, pour participer désormais aux mêmes mouvements généraux, que de la matière sur laquelle les accélérations produites par les forces $\frac{d\Psi}{dR} = \frac{B}{R^2}$ sont constantes en un même endroit ou aux mêmes distances R de l'ensemble des corps. Or une telle égalité de pesanteur implique évidemment la proportionnalité des forces en question, $\frac{B}{R^2}$, aux masses sollicitées par elles, *quelle que soit la nature chimique de ces masses*.

Ainsi, quand on passe des actions exercées sur un point par ceux qui en sont sensiblement éloignés aux actions analogues exercées sur un autre très voisin du premier, le coefficient B varie dans le simple rapport des masses de ces deux points ; d'où il suit que ce coefficient est proportionnel, quelle que soit l'espèce du point *attiré*, à sa masse m. Or il résulte alors de la parité de la réaction à l'action qu'il l'est de même à la masse m' du point *attirant;* car, dans les couples que forme un même point avec divers autres, ceux-ci, attirés par lui proportionnellement à leurs masses, l'attirent à leur tour avec les mêmes intensités.

Par conséquent, en appelant k un coefficient positif, unique pour toute la matière qui nous est connue ou qui accompagne notre système planétaire, et m, m' les masses d'un couple quelconque de points situés à une distance perceptible R l'un de l'autre, la seule partie de la fonction des forces Ψ qui dépende de R sera $-\frac{kmm'}{R}$; et la fonction Ψ aura la forme

$$\Psi = \Phi - \sum \frac{kmm'}{R}, \tag{9}$$

le signe Σ s'étendant à tous les couples de points du système dont les droites R de jonction sont d'une grandeur accessible à nos mesures.

27. — Lois de la pesanteur auxquelles conduisent les réflexions précédentes, et que l'observation a fait connaître; gravité.

On déduit d'abord de la formule (9), pour l'action mutuelle $\frac{d\Psi}{dR}$ de l'un de ces couples, la valeur $\frac{kmm'}{R^2}$, *en raison inverse du carré* *de la distance et proportionnelle aux masses;* d'autre part, pour la *pesanteur,* résultante de toutes les actions pareilles exercées sur un même point et divisées par sa masse, ou accélération que leur ensemble imprime aux corps, une valeur constante, à un moment donné, en chaque endroit de l'espace, et lentement variable d'un endroit à l'autre, ou fort peu dans des régions même très étendues. En effet, les actions qui y dominent sont exercées d'assez loin pour n'être pas modifiées sensiblement par un déplacement modéré.

A la surface de la terre, cette accélération prend le nom de *gravité,* après qu'on lui a fait subir une légère modification (dont nous n'avons pas à parler autrement ici) pour permettre de raisonner à fort peu près, dans l'étude des mouvements ou lents ou médiocrement rapides que nous offrent, par rapport à des axes liés au sol qui nous porte, les objets du monde terrestre, comme si ce sol ou plutôt l'ensemble de notre globe était fixe dans l'espace.

L'expérience montre qu'elle a alors ses valeurs (représentées par g) assez peu différentes partout, près de la surface, de $9^{m},8$, les unités de longueur et de temps étant le mètre et la seconde, et qu'elle se trouve, en chaque endroit, très sensiblement constante non seulement quant à la grandeur, mais aussi quant à la direction, indiquée par le *fil à plomb* (1). Multipliée par la masse des divers corps terrestres, cette accélération g exprime l'action de la gravité sur eux, ou ce qu'on appelle leur *poids;* et l'on sait que cette action s'évalue pratiquement, sans mesurer le nombre g, en utilisant des phénomènes d'équilibre offerts par les *balances,*

---

(1) Toutefois, cette double constance de l'accélération g en chaque endroit du globe n'est vraie, bien entendu, que dans la mesure où se conserve le mode de répartition, avec les dimensions, de la masse terrestre, et où même son mouvement autour de son centre de gravité se trouve réductible à une rotation uniforme autour d'un axe fixe dans son intérieur.

Elle n'est vraie aussi qu'abstraction faite de légères perturbations sans cesse variables avec les positions de la Lune, du Soleil et même des planètes par rapport à la région considérée, perturbations tenant à la très faible différence des petites accélérations imprimées par les astres aux objets qui occupent cette région et au corps même de la terre qui porte les axes coordonnés : elles demeurent, du reste, tout à fait insaisissables à l'observation, sauf dans les changements de forme de l'Océan qui constituent les marées.

romaines, dynamomètres, dans lesquels elle est mise en comparaison directe avec le *kilogramme,* poids d'un décimètre cube d'eau qui devient ainsi, non seulement l'unité de poids, mais encore, par suite, l'unité de force.

Quoi qu'on puisse penser des *inductions* théoriques précédentes, tout le monde sait que l'étude des phénomènes comparés de pesanteur à la surface ou autour de la Terre, jusqu'à la Lune inclusivement, et dans les mouvements des planètes, a conduit d'abord Newton, puis les astronomes et mécaniciens ses successeurs, à affirmer l'exactitude physique de ces lois d'attraction, évidemment équivalentes à la formule précédente (9).

28. — **Différence de l'éther lumineux impondérable d'avec la matière planétaire ou stellaire : comment il peut être soustrait à la pesanteur.**

Observons enfin que, dans notre tentative pour y motiver deux circonstances importantes, savoir le signe *positif* du coefficient B et son expression simple kmm', nous avons eu à faire intervenir un élément *historique,* savoir une sorte de *sélection,* un véritable triage, effectué pendant les premiers temps de la période d'élaboration de notre système solaire, et qui n'aurait permis à ce système d'entraîner définitivement, dans ses mouvements à travers l'espace, que des matières pour lesquelles les deux circonstances dont il s'agit auraient été réalisées d'elles-mêmes. Donc, en fait de matière palpable, ou assez massive pour être directement perçue par nos sens, et qui soit en même temps située à notre portée, il n'y a sans doute que des corps également pesants à masses égales.

Mais l'uniformité de pesanteur que nous y constatons n'étant pas nécessairement, comme on voit, une loi physique universelle, rien n'empêche de concevoir, à côté de ces corps, qui comprennent notre Terre et tous les astres, ou du moins ceux du système solaire, une matière d'une autre nature, pour laquelle on aurait $B = 0$, et qui, par conséquent, ne pèserait pas. Cette matière, ainsi soustraite à toute accélération dépendant des corps éloignés, pourrait rester immobile dans l'espace, si elle était, en outre, assez ténue, c'est-à-dire assez raréfiée, pour ne pas gêner d'une manière appréciable les mouvements des corps célestes, mais passer librement dans les intervalles compris entre les groupes d'atomes ou de points matériels dont ces corps sont formés, bien mieux que l'eau d'un lac, très massive malgré sa fluidité, ne passe à travers un filet à larges mailles qu'on y promène. Et ce défaut de résistance la rendrait incapable d'affecter notre toucher à la manière des corps beaucoup plus denses.

Ainsi se comprendraient à la fois les deux faits de l'*existence*, et de l'*immobilité* complète ou presque complète dans l'espace, d'un *éther* sans pesanteur mais non tout à fait sans masse, dont les physiciens ont besoin pour expliquer, par d'imperceptibles vibrations que propagent ses actions *interatomiques* exercées aux plus petites distances imaginables, tous les phénomènes de lumière et de chaleur rayonnante [1].

---

[1] La manière dont nous avons essayé d'expliquer l'uniformité de la pesanteur laisse également le champ libre pour les tentatives de théorie que l'on pourrait donner de ces modifications considérables, mais accidentelles, du poids des corps, qui constituent les actions électrostatiques, et auxquelles s'étendent les lois newtoniennes, sauf la constance de k (en grandeur et en signe) pour toute la matière. Mais nous n'avons pas l'intention de nous occuper ici des phénomènes soit électriques, soit magnétiques, restés jusqu'à présent une énigme, et dont la tendance actuelle serait plutôt de rendre compte par des actions moléculaires ou des pressions d'une espèce particulière.

QUATRIÈME LEÇON.

ÉNERGIE POTENTIELLE INTERNE. ACTION MOLÉCULAIRE.

29. — **Division de l'énergie potentielle en énergie de pesanteur et en une autre partie, Φ, où n'entrent que des distances imperceptibles; données d'expérience touchant les actions moléculaires, qui sont les dérivées partielles de cette seconde partie Φ.**

L'énergie potentielle Ψ étant ainsi déterminée quant à sa partie, $-\sum \frac{kmm'}{R}$, qui dépend des distances R de grandeur sensible, ou que l'on peut appeler *énergie potentielle de pesanteur,* il reste à s'occuper de son autre partie Φ, où entrent seulement des distances mutuelles imperceptibles r, r', r'', ... des points du système, et dont les dérivées partielles $\frac{d\Phi}{d(r, r', r'', \ldots)}$ sont les forces ordinairement qualifiées d'*actions moléculaires,* comme il a été déjà dit.

Une chose évidente pour le sens commun, du moins après l'observation des phénomènes les plus vulgaires, est que l'action réciproque $\frac{d\Phi}{dr}$ de deux points, situés dans un même espace d'un rayon égal à celui d'activité des actions moléculaires, ne peut pas plus (ni même autant) dépendre des droites de jonction de points situés dans tout autre espace analogue, que des droites de grandeur appréciable les reliant à ceux du premier. Par conséquent, $\frac{d\Phi}{dr}$ n'est fonction que de la droite de jonction correspondante r, et, peut-être aussi, de celles qui l'avoisinent, dans le rayon imperceptible (de l'ordre des plus grandes droites r) appelé rayon d'activité des actions moléculaires.

30. — Proportionnalité de la fonction Φ, toutes choses égales d'ailleurs, à la masse ou au volume.

Or, imaginons que l'on divise toute la matière du système, au moyen, par exemple, de trois familles de surfaces, en parties ne s'entremêlant pas, du moins pendant un temps de durée sensible, et occupant ainsi des volumes juxtaposés, que nous appellerons *éléments de volume,* de dimensions très petites, mais pourtant plus grandes sans comparaison que les distances r, r', r'', ... Les droites de jonction imperceptibles, comme r, r', r'', ... qui traverseront la surface d'un volume élémentaire, et même toutes celles qui s'en trouveront assez voisines (bien que situées dans le volume) pour que les actions mutuelles des points reliés par elles puissent être influencées par la présence de la matière extérieure, seront évidemment en nombre *insignifiant, à côté* des autres distances des points intérieurs très proches remplissant le volume. Et l'on peut en dire autant pour tous les éléments de volume juxtaposés qui composent le corps.

Si donc on considère la variation, $\frac{d\Phi}{dr}dr + \frac{d\Phi}{dr'}dr' + \ldots$, éprouvée d'un instant à l'autre par la fonction Φ, ses termes ayant en facteur la différentielle des droites de jonction coupées ou presque atteintes par la surface séparative de deux volumes élémentaires pourront être ou supprimés, ou modifiés dans un rapport fini quelconque, *sans erreur appréciable,* à moins que quelque circonstance extraordinaire dont nous ferons abstraction, comme serait, par exemple, une destruction mutuelle presque totale des autres termes, ne compense la petitesse relative du nombre de ceux que l'on supprime ou change de la sorte.

Par conséquent, la différentielle totale $d\Phi$ se compose, sauf erreur négligeable, des valeurs qu'elle aurait séparément dans les diverses parties en lesquelles on a divisé le système, si chacune de celles-ci, qui comprend toute la matière occupant un même petit espace, existait seule, mais continuait à présenter les configurations successives de ses points qu'elle affecte dans le système. Et il suit immédiatement de là, en intégrant cette somme de différentielles totales exactes, que, sauf une constante arbitraire, la fonction Φ est la somme des énergies potentielles que possédеraient, *isolées,* toutes ces parties d'étendue presque imperceptible. Autrement dit, la fonction Φ est, *toutes choses égales d'ailleurs,* proportionnelle à la masse ou au volume des corps dont elle donne, par ses dérivées du premier ordre, les actions moléculaires.

31. — Raison de la dénomination d'énergie potentielle interne donnée à cette fonction Φ; autre manière de reconnaître sa proportionnalité à la masse ou au volume.

On peut donc, s'il y a, par exemple, parité ou uniformité d'état physique dans des étendues sensibles, rapporter les valeurs de Φ à l'unité de ces espaces, en un mot, diviser cette fonction en parties correspondant *séparément* aux diverses portions de la matière, ou leur appartenant *en propre.* De là le nom d'énergie potentielle *interne,* attribué à la fonction Φ, par opposition à l'énergie potentielle de pesanteur $-\sum \frac{kmm'}{R}$, laquelle, expression de rapports entre corps (ou fragments de corps) éloignés, se trouve être *extérieure* à chacun d'eux.

On arrive à la même conséquence, de la proportionnalité de Φ à la masse quand il y a parité de l'état physique autour de chaque point, en groupant d'une manière simple les termes

$$\frac{d\Phi}{dr}dr, \quad \frac{d\Phi}{dr'}dr', \quad \ldots,$$

dont se compose la différentielle de Φ relative à un changement élémentaire de configuration. Nous pourrons, à la condition de prendre ensuite la moitié du résultat total, compter deux fois chacun de ces éléments, savoir une première fois en nous occupant de l'un des deux points matériels que joint la droite correspondante r, et une seconde fois en nous occupant de l'autre. Alors il y aura autant de termes, de la forme $\frac{d\Phi}{dr}dr$, relatifs à un même point matériel quelconque du système, qu'il existera d'autres points dans le voisinage de celui-là, à l'intérieur d'une sphère l'ayant comme centre et décrite avec le rayon d'activité des actions moléculaires. Ces termes, dont nous désignerons l'ensemble par $S\frac{d\Phi}{dr}dr$, ne dépendront d'ailleurs que des deux états consécutifs de la matière dans la même sphère. Il faudra évidemment ajouter ensuite toutes les sommes analogues, se rapportant, chacune, à un des points du système, puis enfin prendre la moitié du total général. Et, si une infinité de changements élémentaires se succèdent, la variation intégrale $\int d\Phi$ de l'énergie potentielle interne sera de même la demi-somme de toutes ces expressions partielles $S\frac{d\Phi}{dr}dr$ intégrées séparément, c'est-à-dire remplacées par $\int S\frac{d\Phi}{dr}dr$, expression où le signe $\int$ indique la sommation effectuée des valeurs successives de $S\frac{d\Phi}{dr}dr$ pour un même point matériel.

Donc, à une constante arbitraire près qui dépend du premier état considéré, Φ se compose de parties relatives, chacune, à un des points du système, et pareilles pour tous les points autour desquels les circonstances auront été les mêmes dans une étendue imperceptible; ce qui rend bien la valeur de Φ pour l'ensemble de ces points proportionnelle à leur nombre, ou à leur masse totale.

32. — **Cette proportionnalité n'est cependant pas absolue : cas exceptionnel où la fonction Φ comprend une partie sensible proportionnelle à la surface, en outre de celle qui l'est au volume.**

Mais on voit toujours qu'il faut pouvoir faire abstraction de ceux, avoisinant des surfaces, qui se trouveraient dans des conditions plus ou moins exceptionnelles quant à la manière dont ils seraient entourés d'autres points.

De fait, si, comme on peut parfaitement le concevoir dans le calcul de Φ, les éléments de volume, de grandeur presque imperceptible, en lesquels on divise fictivement un corps, avaient, une fois séparés les uns des autres, leur matière artificiellement maintenue groupée comme elle l'est quand ils se touchent, ce n'est probablement pas la suppression des termes $\frac{d\Phi}{dr}dr$ relatifs aux droites de jonction r coupées par les surfaces de ces éléments, non plus que les changements de grandeur éprouvés par les termes analogues se rapportant à des droites de jonction comprises dans une couche contiguë d'une épaisseur égale au rayon d'activité des actions moléculaires, qui pourraient modifier d'une manière appréciable l'évaluation de Φ pour tout le système ou pour un de ses fragments. Mais, en réalité, les conditions particulières dans lesquelles se trouve la matière contiguë à une surface *effective* peuvent y produire un état spécial, se propageant vers l'intérieur jusqu'à des distances *très supérieures* à ce rayon d'activité, quoique presque (sinon tout à fait) inappréciables; et l'on conçoit qu'alors la fonction Φ comprenne, outre un terme de l'ordre de la masse ou du volume, propre à exprimer l'énergie potentielle interne de la matière *intérieure,* un second terme, quelquefois appréciable, *de l'ordre de la surface,* pour exprimer l'énergie potentielle interne des couches minces de matière possédant cette constitution spéciale, et dont l'ensemble est appelé *la couche superficielle* du corps.

33. La dénomination d'énergie potentielle interne suppose que la pulvérisation de la matière ne soit pas poussée trop loin.

On voit que, tout en justifiant d'ordinaire son nom d'énergie potentielle *interne,* c'est-à-dire d'énergie répandue dans les diverses parties du système, et qui s'y retrouverait en détail si l'on venait à les séparer, la fonction Φ n'est pas toutefois, d'une manière absolument rigoureuse, décomposable entre ces fragments, dont il ne faudrait pas pousser trop loin la pulvérisation. Et cela se conçoit, puisqu'une telle décomposition oblige à supprimer de sa différentielle tous les termes de la forme $\frac{d\Phi}{dr}\,dr$ relatifs aux imperceptibles droites r de jonction coupées par la surface de séparation de deux fragments, et reliant un point de l'un à un point de l'autre.

34. — Hypothèses plausibles sur les actions moléculaires ou exercées aux distances imperceptibles.

Les propriétés précédentes de l'énergie potentielle interne Φ, basées sur celle dont jouit sa dérivée, $\frac{d\Phi}{dr}$, par rapport à une droite quelconque de jonction r imperceptible, de n'être pas fonction des autres droites analogues qui en sont éloignées d'une manière appréciable, s'expliquent d'elles-mêmes quand on admet, comme on le fait souvent, que l'action réciproque de deux points ne dépend, pas plus aux petites distances qu'aux grandes, des droites de jonction autres que la leur. Cette hypothèse réduit, en effet, $\frac{d\Phi}{dr}$, dans tous les cas, à une simple fonction $f(r)$ de la variable unique r (ou R); et elle rend, dans chaque couple de points matériels, le rapport des deux points aussi simple quand il y a un nombre quelconque de ces couples, que lorsqu'il n'y en a qu'un. Alors les sommes $S\frac{d\Phi}{dr}dr$ considérées tout à l'heure, ou relatives à chaque point en particulier, sont séparément et en toute rigueur des différentielles exactes; car, la dérivée $\frac{d\Phi}{dr}$ ayant la forme simple $f(r)$, chaque somme $S\frac{d\Phi}{dr}dr$ devient $dS\int f(r)\,dr$.

Mais voyons comment il faudra, dans l'hypothèse simple dont il s'agit, supposer variable avec leur droite de jonction r l'action réciproque $f(r)$ de deux points matériels, c'est-à-dire de deux *atomes,* pour se rendre à peu près compte des phénomènes qui se produisent au contact (physique). Quoiqu'on n'en connaisse pas l'expression, certainement plus complexe que celle de la petite attraction newtonienne $\frac{kmm'}{R^2}$ à laquelle cette action se réduit aux distances sensibles R, on peut cependant regarder comme certain qu'elle change de signe une ou plusieurs fois, de manière à être négative ou *répulsive* aux plus petites distances r, positive ou *attractive* aux moins petites; et que, de plus, dès que r grandissant tend à devenir sensible, elle décroît très rapidement, au point de s'être déjà, *comparativement,* comme évanouie ou réduite presque à rien, dès que r commence à être mesurable pour nous et même dès que la forme *asymptotique* $\frac{kmm'}{r^2}$ devient tant soit peu propre à représenter la fonction $f(r)$.

C'est ce que nous allons reconnaître, en commençant par établir que l'action moléculaire est répulsive aux plus petites distances et peut changer de signe plusieurs fois.

35. — **Ces actions doivent être répulsives et indéfiniment croissantes aux plus petites distances, pour expliquer l'impénétrabilité. Répulsions et attractions chimiques ou interatomiques; répulsions et attractions physiques ou intermoléculaires.**

D'une part, en effet, puisqu'on admet que les vitesses, même dans les chocs, varient avec continuité, et que nul contact géométrique (c'est-à-dire absolu) entre corps ou entre atomes ne se produit jamais, c'est, aux plus petites distances, la répulsion, et une répulsion indéfiniment croissante quand la distance tend vers zéro, qui, seule, peut maintenir distincts les atomes et conserver aux corps un certain volume apparent, tenir lieu, en un mot, de ces pressions de surface contre surface, de cette *impénétrabilité,* que l'imagination ferait admettre entre des corps se heurtant, si l'on rejetait la continuité de variation des vitesses.

D'autre part, les imperceptibles assemblages d'atomes que les chimistes appellent des *molécules,* et qui, doués de stabilité, souvent même très résistants, se présentent à côté les uns des autres, en nombre incalculable, exactement pareils dans toute l'étendue d'un corps composé ou même d'un corps chimiquement simple, ne se produiraient évidemment pas, si, à des distances de l'ordre de grandeur de leurs dimensions, l'action $f(r)$ n'était pas devenue attractive pour contrebalancer les répulsions exercées à des distances moindres. Ainsi l'action $f(r)$, négative ou répulsive, et extrêmement grande, pour les plus petites valeurs de r, s'annule et devient attractive à la distance où se produit l'équilibre chimique de deux atomes, alors qu'ils se groupent statiquement pour former une molécule.

Or, outre l'équilibre propre ou intérieur de la molécule, il y a cet équilibre, de molécules agissant à des distances très supérieures aux dimensions de l'une d'elles, qui constitue les états liquide et solide, états dont la stabilité exige entre atomes, tout à la fois, des répulsions aux plus *petites distances intermoléculaires*, pour s'opposer à un rapprochement plus grand des molécules que forment ces atomes, et des attractions à des distances moins faibles, pour produire la *cohésion* ou, tout au moins, limiter l'expansion d'une particule matérielle, de grandeur sensible, supposée placée dans le vide; car, par exemple, une couche d'un liquide non volatil devrait s'y dissiper en un instant sans ces attractions, alors qu'elle s'y constitue dans un état d'équilibre.

Peut-être même y a-t-il plus encore, du moins à l'état solide. On dirait que les *molécules chimiques* s'y trouvent groupées en associations complexes, en *molécules intégrantes,* bien plus étendues que chacune d'elles, et dont le mode d'agrégation, variable à la suite des déformations *persistantes* que peuvent produire certaines causes énergiques, caractériserait les diverses structures, *cristalline, fibreuse,* etc. La cohésion résulterait alors justement des actions mutuelles de ces molécules intégrantes, ou plutôt de tous les atomes qui les composent.

36. — Multiples valeurs de la distance de deux atomes, pour lesquelles s'annule leur action mutuelle; rayon d'activité des actions chimiques ou atomiques.

Donc, lorsque la distance r excède dans un rapport notable les dimensions d'une molécule chimique, ou ce qu'on pourrait appeler *le rayon d'activité des actions chimiques* (entre atomes), au delà duquel commencent *les actions physiques* (entre molécules), la force $f(r)$, qui s'était déjà annulée pour la valeur de r correspondant à *l'équilibre chimique* des deux atomes, doit, de nouveau, changer de signe, de manière à se trouver négative ou répulsive quand r atteint la distance des molécules d'un liquide les plus voisines, pour s'annuler une troisième fois à la distance de *l'équilibre physique* de deux molécules, et redevenir enfin positive dès que cette situation d'équilibre physique est dépassée.

On peut justement prendre comme *rayon d'activité des actions chimiques* la distance où l'action $f(r)$, après avoir été positive ou attractive, s'annule et redevient négative. A cette distance, en effet, les deux points sont évidemment en équilibre *instable,* puisque le moindre rapprochement y provoque une tendance de chacun des deux vers l'autre, et, le moindre écartement, une tendance opposée; de sorte que l'équilibre instable dont il s'agit marque, en quelque sorte, la limite séparative des deux domaines *chimique* et *physique.*

Enfin l'existence des diverses contextures que présentent les solides, explicable par un groupement en molécules intégrantes, semble même indiquer plusieurs distances différentes produisant l'équilibre physique; car autre chose est l'équilibre propre de chaque molécule intégrante et autre chose l'équilibre du système formé par deux ou plusieurs de ces molécules. Donc, pour r grandissant de zéro à l'infini, la fonction continue $f(r)$ passerait plus de deux fois du négatif au positif, avant de devenir définitivement positive, et puis inversement proportionnelle à r^2 ou à R^2, comme on constate qu'elle l'est aux distances R appréciables.

37. — Rayon d'activité des actions physiques et des actions dites de contact ; possibilité de négliger les actions de pesanteur exercées aux petites distances.

D'ailleurs, la distance où $f(r)$ a déjà assez décrû, et où la rapidité de son décroissement s'est déjà assez ralentie, pour que commence à se produire, même grossièrement, cette proportionnalité de l'action à l'inverse de r^2 ou R^2 peut être prise pour le rayon d'activité des actions moléculaires, c'est-à-dire pour la limite au delà de laquelle il n'y a plus de *contact physique,* plus d'effet sensible *local,* ou émanant d'une petite quantité de matière et non de grandes masses très étendues ; car les effets de pareilles actions inverses de r^2, bien que produits à des distances encore imperceptibles, se fondent dans ceux de la pesanteur sans les modifier sensiblement et restent ainsi inaperçus.

Il suffit, pour le reconnaître, de considérer l'attraction exercée dans l'hypothèse newtonienne, sur une molécule, par toute la matière située relativement à elle d'un certain côté quelconque, ou comprise à l'intérieur d'un cône aigu ayant cette molécule pour sommet.

Si l'on désigne par ω le petit angle solide du cône, angle que mesurera la portion interceptée de surface sphérique décrite de son sommet comme centre avec un rayon égal à l'unité, la molécule en question sera attirée, par la couche de matière située dans le cône entre les distances r, $r+dr$ du sommet, ou ayant pour volume $\omega r^2\,dr$ et une masse numériquement comparable à ce volume, avec une force, d'ailleurs inverse de r^2, dont la valeur totale sera évidemment de l'ordre de $\frac{1}{r^2}(\omega r^2\,dr) = \omega\,dr$; et, par conséquent, cette attraction ne se trouvera pas plus grande que celle des couches de la même épaisseur $dR = dr$ situées dans le cône à des distances sensibles quelconques R. Or ces dernières couches sont plus nombreuses, sans comparaison, que les précédentes, contiguës ou presque contiguës au sommet ; et l'on voit bien, en répétant le même raisonnement pour tous les cônes analogues, que l'attraction newtonienne totale de la matière avoisinant la molécule considérée n'est, pour ainsi dire, rien à côté de celle qu'exerce sur cette molécule la matière éloignée.

Il est vrai que, aux très petites distances r, l'hypothèse, introduite dans notre calcul, de la continuité en étendue de chaque couche attirante, ou plutôt de sa parité (quant à l'ordre de grandeur) au volume $\omega r^2 dr$ qu'elle occupe, n'est pas aussi permise qu'aux grandes distances R ; car, en se représentant la masse de chaque molécule, *fictivement* disséminée dans tout l'espace intermoléculaire environnant, afin de pouvoir faire les sommations comme pour une matière continue, on altère les distances r et, par suite, les résultats, dans des rapports d'autant plus grands que r est plus petit ou comprend moins de fois l'intervalle de deux molécules voisines. Mais ces rapports ne seraient très considérables, au point de changer l'ordre de grandeur du résultat, que pour les molécules les plus proches de la proposée. Or il n'y a pas lieu de s'en occuper ici, le calcul actuel n'étant relatif qu'aux distances, *très supérieures* à l'intervalle de deux molécules voisines, où les actions moléculaires sont seulement de l'ordre de celles qu'exprimerait la formule de Newton.

On peut, d'après cela, regarder les actions dites *moléculaires,* ou *actions physiques,* et, à bien plus forte raison, les *actions chimiques,* comme n'existant pas aux distances où la loi newtonienne commence à s'appliquer. Elles ne s'exercent que dans des rayons bien plus imperceptibles.

38. — Explication, par les actions moléculaires, de divers phénomènes, et, d'abord, de la non-adhésion des solides qui se touchent.

Ces quelques idées, malheureusement un peu vagues, sont tout ce qu'on a pu, jusqu'à ce jour, établir de vraisemblable sur les actions moléculaires. Elles permettent de se rendre assez bien compte de phénomènes avec lesquels une longue habitude nous a familiarisés, mais dont l'explication reste délicate.

Tel est, en premier lieu, le fait de deux solides contigus, qui exercent l'un sur l'autre d'énergiques répulsions, indiquant un rapprochement supérieur à celui où entrent en jeu des attractions considérables, et qui, cependant, ne manifestent aucune cohésion mutuelle, ou se séparent sans que ces attractions se fassent sentir, de manière à rester distincts, à garder chacun leur individualité.

Imaginons, en effet, pour fixer les idées, qu'un solide pesant soit déposé sur un sol horizontal ; et demandons-nous comment il peut, sans y adhérer, s'y maintenir en équilibre. Il s'en approche pourtant bien assez, comme il vient d'être dit, pour que des attractions se développent entre eux ; puisque le sol exerce en somme sur ce corps une répulsion qui l'arrête dans sa chute ou qui neutralise l'accélération produite sur lui par la pesanteur, et puisque, d'autre part, les répulsions moléculaires ont lieu à des distances plus petites que les attractions analogues, destinées qu'elles sont à empêcher un trop grand rapprochement, de même que les attractions à empêcher les trop grands écartements. Il y a donc lieu de chercher pourquoi le rapprochement du corps et du sol, suffisant pour faire naître des répulsions énergiques, ne développe pas, *à plus forte raison,* des attractions équivalant à une adhérence sensible, et capables de retenir le corps dès qu'en le soulevant légèrement on fera disparaître les répulsions.

L'explication se trouve dans ce fait, que les répulsions sont, à masses égales, beaucoup plus grandes que les attractions. Pour le concevoir, imaginons, par exemple, un solide à l'état naturel, c'est-à-dire non comprimé ni tiré ; ce qui signifie que, si l'on mène à son intérieur un plan quelconque et si l'on considère les actions moléculaires exercées par la matière située d'un côté de ce plan sur celle qui est de l'autre côté, leur effet total est nul, ou que ces deux quantités de matière ne s'impriment en somme, l'une à l'autre, aucune accélération. Or, parmi les forces dont il s'agit, les répulsions sont produites seulement par une couche mince de molécules contiguës au plan, sur une couche pareille adjacente, tandis que les attractions, exercées de plus loin, sont incomparablement plus nombreuses sur chaque molécule de cette dernière couche, et s'étendent en outre à bien d'autres couches moins rapprochées du plan. Donc les attractions ont besoin de s'exercer entre des quantités de matière beaucoup plus grandes que les répulsions, pour les neutraliser.

Cela posé, notre corps solide, placé sur le sol et toujours plus ou moins rugueux comme celui-ci, n'est en contact physique avec lui que par des saillies ayant de grandes courbures. Autour du point de contact de chaque plan tangent (apparent) commun, les *répulsions,* exercées de très près, *sont presque en aussi grand nombre* que si les surfaces du corps et du sol y étaient planes (car les écarts de celles-ci d'avec le plan tangent y sont négligeables), tandis que les *attractions,* ne se produisant qu'entre molécules moins rapprochées, dont l'une au moins sur deux est quelque peu éloignée du point de contact, et n'ayant pourtant de valeur sensible qu'à des distances bien plus faibles que les dimensions des rugosités, *sont loin de s'exercer en aussi grand nombre* que dans le cas où les surfaces en question seraient planes. Les attractions se trouvent donc très insuffisantes pour contrebalancer les répulsions, et aucune cohésion ne se produit.

39. — Deuxièmement, adhérence entre solides, établie par de fortes pressions momentanées.

Il n'en serait évidemment plus de même, si une pression énergique rapprochait assez les deux solides pour qu'il n'y eût entre eux que peu de vides sensibles; alors les attractions entreraient en jeu au même degré que les répulsions et le corps adhérerait au sol. C'est ce que prouvent de remarquables expériences, celles, par exemple, de M. W. Spring, qui, en comprimant fortement des poussières de nitrate de potassium et de sodium, de la sciure de bois, etc., a obtenu des blocs durs, très résistants, plus compacts que ceux que donnait la fusion (quand elle était possible) et, parfois, translucides même (1).

40. — Troisièmement, insuffisance du simple contact physique pour déterminer les combinaisons chimiques ; énormes valeurs des forces en jeu dans ces combinaisons.

Les répulsions considérables auxquelles se réduit presque l'action des particules, en contact physique, de deux solides à surfaces plus ou moins rugueuses, peuvent rendre très difficile un rapprochement, entre leurs molécules les plus voisines, suffisant pour mettre en jeu leurs actions chimiques réciproques, dont le rayon d'activité n'est sans doute comparable qu'aux dimensions mêmes d'une molécule chimique.

---

(1) *Bulletin de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique;* 1er juin 1878, t. XLV, p. 746, et 11 mai 1880, t. XLIX, p. 323.

Ainsi s'explique l'adage des chimistes « *corpora non agunt, nisi soluta* », en vertu duquel les changements intimes de composition exigent, pour se produire dans un mélange non comprimé, que l'un au moins des corps en contact soit liquide ou gazeux, à l'exception peut-être de quelques cas singuliers dont un examen attentif permettrait vraisemblablement de se rendre compte. Il serait, par exemple, à cet égard, curieux de voir si un morceau de sodium, posé sur un bloc de glace, le décomposerait à une température assez basse pour que le bloc ne dégageât pas de vapeur d'eau en quantité sensible. On conçoit d'ailleurs que la fluidité de l'un des corps entrant dans un mélange, et même celle de plusieurs, ne suffise pas toujours pour en opérer le rapprochement au degré qu'exige la mise en train d'une réaction; et qu'il y faille encore, par exemple, des chocs, une agitation appropriée, principalement sous la forme de vibrations calorifiques, lumineuses, sonores même, etc.

Observons à ce sujet que les attractions chimiques entre atomes, s'exerçant à des distances beaucoup plus faibles que les répulsions physiques, sont probablement plus grandes qu'elles, et que les répulsions chimiques entre les mêmes atomes, répulsions qui contre-balancent les attractions chimiques dont il vient d'être parlé, quoiqu'elles ne s'exercent qu'à des distances moindres, doivent être bien plus considérables encore. D'ailleurs, il faut que, en général, les forces chimiques, dérivées $\frac{d\Phi}{dr}$ de l'énergie potentielle interne par rapport aux plus petites droites de jonction r de points matériels, soient excessivement grandes, presque infinies en comparaison de la pesanteur. Sans cela, les imperceptibles rapprochements ou écartements d'atomes $\mp \Delta r$ qui constituent les phénomènes de combinaison et de décomposition ne pourraient pas déterminer les variations énormes de Φ et, par suite, les considérables dégagements ou absorptions de demi-force vive, que mesurent, quand cette demi-force vive ne consiste qu'en une agitation invisible, les chaleurs émises ou absorbées lors de pareils changements de la constitution moléculaire d'un mélange.

Les oscillations que présente l'action $f(\mathrm{R})$ ou $f(r)$ de deux atomes, quand on y fait décroître la distance R ou r de l'infini à zéro, paraissent donc avoir de plus en plus d'amplitude, dans le sens des ordonnées y de la courbe $y = f(r)$ représentant $f(r)$, à mesure qu'elles se resserrent davantage dans le sens des abscisses r; en sorte que les valeurs successives les plus petites de cette fonction f représentent les attractions s'exerçant aux distances R sensibles, et qu'au contraire les valeurs les plus grandes, infinies même, expriment les répulsions que ferait naître un contact mathématique des deux atomes, s'il était réalisable. Ce mode de variation de $f(r)$ n'a rien d'invraisemblable ni même de compliqué.

CINQUIÈME LEÇON.

PRINCIPES DE LA CONSERVATION DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT ET DE LEURS MOMENTS, POUR UN SYSTÈME MATÉRIEL INDÉPENDANT OU SANS RELATIONS EXTÉRIEURES.

41. — Existence de six combinaisons des équations générales de la Dynamique, d'où sont éliminées les actions et réactions mutuelles.

Dans l'étude des mouvements intérieurs de chaque espèce de corps (fluides, solides, plastiques ou pulvérulents), nous suppléerons au défaut de données précises sur la constitution intime de ces corps et sur leurs actions moléculaires, par l'utilisation de quelques propriétés spéciales ou de quelques faits, toujours fort simples, que l'expérience nous indiquera comme caractéristiques de l'espèce considérée et qui seront, en quelque sorte, eu égard du moins à l'état actuel de nos connaissances, la définition même de la classe de corps ou de phénomènes les présentant. Mais de pareils faits ne suffiraient pas pour mettre les problèmes en équation, sans deux grands principes généraux, d'une application continuelle, dits des *quantités de mouvement* et des *moments,* qui se déduisent des équations du mouvement, (6) [p. 25], auxquelles nous sommes parvenus. Ces principes, en les donnant d'abord pour notre système matériel complet ou indépendant de tout autre, sont exprimés en effet par six combinaisons, immédiatement intégrables, des $3n$ équations différentielles simultanées du second ordre que forment les relations (6) appliquées successivement aux n points du système.

42. — Relations simples concernant chaque couple d'actions élémentaires, et qui rendent possible l'élimination dont il s'agit.

Afin d'y arriver simplement, appelons, pour abréger, X, Y, Z les trois composantes, suivant les axes, de l'action $\frac{d\Psi}{dr}$ d'un point M′ sur un autre M, action que nous désignerons aussi par F, tandis que r exprimera la distance de ces deux points; enfin, soient m, x, y, z, pour M, et m', x', y', z', pour M′, leurs masses et leurs coordonnées à l'époque t.

La réaction inverse de F, ou action de M sur M′, aura ses composantes évidemment égales et contraires à celles de F; en sorte que, si on les désigne par X′, Y′, Z′, il viendra

$$X' = -X, \qquad Y' = -Y, \qquad Z' = -Z. \tag{10}$$

De plus, l'action mutuelle des deux points s'exerçant suivant leur droite de jonction, il y a proportionnalité de X, Y, Z aux cosinus directeurs de cette droite MM′ ou à ses trois projections, $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$, sur les axes; d'où il résulte que l'on peut écrire

$$\tag{10 bis} \left\{ \begin{aligned} (y'-y)Z-(z'-z)Y&=0,\\ (z'-z)X-(x'-x)Z&=0,\\ (x'-x)Y-(y'-y)X&=0. \end{aligned} \right.$$

Et le rapprochement de ces trois relations, changées de signes, avec les précédentes (10) donne en tout, sous une forme plus symétrique:

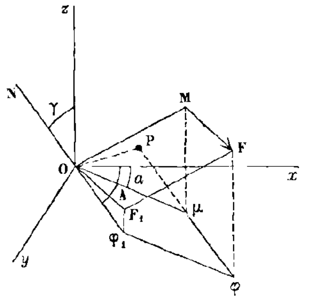
$$\tag{11} \left\{ \begin{aligned} &X+X'=0, \qquad Y+Y'=0, \qquad Z+Z'=0;\\ &(yZ-zY)+(y'Z'-z'Y')=0,\\ &(zX-xZ)+(z'X'-x'Z')=0,\\ &(xY-yX)+(x'Y'-y'X')=0. \end{aligned} \right.$$

43. — Comment on est conduit à la notion des moments des forces.

Les trois premières de ces six égalités s'interprètent immédiatement et signifient que les composantes, suivant chaque axe en particulier, des actions mutuelles de deux points quelconques, ont leur somme algébrique nulle. Mais il reste à interpréter de même les trois dernières, où figurent, pour chaque force $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ ou F, les déterminants binômes $yZ-zY$, $zX-xZ$, $xY-yX$.

A cet effet, considérons, par exemple, la projection, $\sqrt{X^2+Y^2}$, sur le plan des xy normal à l'axe des z, de la force F ou MF appliquée au point M (*fig.* 1), projection qui a évidemment X et Y pour composantes suivant les x et les y, et qui fait avec une pa-

Fig. 1.



rallèle aux x positifs, en tournant dans le sens des x positifs vers les y positifs, un certain angle A (compris entre $-\pi$ et $+\pi$), lié à X et à Y par les deux relations

$$(12)\qquad X=\sqrt{X^2+Y^2}\cos A,\qquad Y=\sqrt{X^2+Y^2}\sin A.$$

Soit, de plus, μ la projection de M sur le même plan des xy, point de départ de la droite ou force $\mu\varphi=\sqrt{X^2+Y^2}$, dont il vient d'être parlé; et, ayant mené le rayon vecteur $O\mu=\sqrt{x^2+y^2}$ qui joint l'origine à ce point μ, appelons a l'angle (également compris entre $-\pi$ et $+\pi$) que fera ce rayon avec les x positifs, angle tel, de même, que

$$(13)\qquad x=\sqrt{x^2+y^2}\cos a,\qquad y=\sqrt{x^2+y^2}\sin a.$$

Le troisième binôme en question, $xY-yX$, deviendra de suite, par la substitution de ces valeurs de X, Y, x et y,

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{X^2+Y^2}(\sin A\cos a-\cos A\sin a)\\&\quad=\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{X^2+Y^2}\sin(A-a).\end{aligned}\right.$$

Sous sa dernière forme, il exprime l'aire du parallélogramme construit, dans le plan des xy, sur les deux droites $O\mu=\sqrt{x^2+y^2}$, $\mu\varphi=\sqrt{X^2+Y^2}$, c'est-à-dire, d'une part, sur le rayon vecteur $\sqrt{x^2+y^2}$ joignant l'origine au point μ, d'autre part, sur une parallèle $O\varphi_1$ menée par l'origine à la force $\sqrt{X^2+Y^2}$ et de mêmes sens et grandeur qu'elle, parallèle dont l'angle avec ce rayon vecteur est bien évidemment $A - a$ (à un multiple près de 2π). Cette aire se trouvera, d'ailleurs, prise ainsi avec le signe de $\sin(A - a)$, c'est-à-dire positivement, quand la force $\mu\varphi = \sqrt{X^2 + Y^2}$ sera, par rapport au rayon $O\mu$ joignant l'origine au point μ, du côté des angles $xO\mu = a$ croissants, côté où arriverait le rayon vecteur $O\mu$ en tournant à partir de sa position actuelle, de moins de $180°$, dans le sens qui va des x positifs vers les y positifs; et elle se trouvera prise négativement dans le cas contraire. En d'autres termes, son signe est $+$ ou $-$, suivant que les côtés $O\mu$ et $O\varphi_1$ du parallélogramme offrent même disposition relative que Ox et Oy, ou disposition inverse.

Une pareille aire $xY - yX$, dont la valeur absolue égale aussi le produit de la force $\mu\varphi = \sqrt{X^2 + Y^2}$, qui est un des côtés du parallélogramme, par la hauteur correspondante OP, dite *bras de levier* de la force, distance de l'origine ou de l'axe considéré des z à cette force, s'appelle *le moment par rapport à l'axe* en question des z, soit de cette force, soit de la force $F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ qui l'a pour projection sur un plan normal à l'axe.

44. — Relation entre le moment d'une résultante et les moments de ses composantes.

Comme X et Y y entrent *linéairement*, il est clair que la décomposition de la force proposée F en autant de forces que l'on voudra appliquées au même point M, et dont nous appellerons X_1, X_2, X_3, ..., Y_1, Y_2, Y_3, ..., Z_1, Z_2, Z_3, ... les composantes ayant pour sommes respectives X, Y, Z, donnera, pour ces diverses forces, des moments par rapport à l'axe considéré des z, $xY_1 - yX_1$, $xY_2 - yX_2$, ..., dont la somme algébrique vaudra le moment même $xY - yX$ de la force décomposée ou résultante F. Il en sera donc, dans la décomposition et dans la composition des forces appliquées à un même point, de leurs moments par rapport à un axe, comme de leurs composantes relatives à cet axe : *aux compositions et décompositions géométriques des forces dans l'espace, par la loi du polygone des forces* (p. 26), *correspondront des compositions et des décompositions purement algébriques tant de leurs moments que de leurs composantes, par rapport à un axe quelconque.*

45. — Relations entre les moments d'une force par rapport à trois axes coordonnés et la direction du plan mené par l'origine suivant cette force.

Remarquons encore que le parallélogramme $O\mu\varphi\varphi_1$ (même *fig.* 1) construit, dans le plan des xy, sur les deux projections correspondantes du rayon vecteur $OM = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, joignant l'origine au point M, et de la force $MF = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, est la projection du parallélogramme de l'espace, $OMFF_1$, dont nous appellerons $\mathfrak{M}$ l'aire, qui a pour côtés ce rayon OM et cette force MF, ou ce rayon et une droite OF_1 menée, à partir de l'origine, parallèlement à la force avec même longueur qu'elle. Le moment, que nous désignerons par $\mathfrak{M}_z$, de la force proposée F *relativement* à l'axe des z, égale donc, en valeur absolue, la projection, sur le plan xOy, de ce parallélogramme $\mathfrak{M}$ de l'espace; et, si l'on appelle $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les cosinus directeurs de la *normale* au propre plan de celui-ci $\mathfrak{M}$, tirée *provisoirement* du côté qui fait un angle aigu avec les z positifs, on aura $\mathfrak{M}_z = \pm\, \mathfrak{M}\cos\gamma$.

De plus, en considérant les deux plans menés suivant l'axe des z qui projettent ainsi sous des angles aigus, sur le plan des xy, les deux côtés du parallélogramme $\mathfrak{M}$ de l'espace émanés de l'origine, savoir, d'une part, le rayon vecteur $OM = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, d'autre part, la parallèle OF_1 à la force $MF = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, on verra que ces deux côtés se trouveront toujours disposés, par rapport à un observateur les regardant qui aurait ses pieds à l'origine et la tête suivant la normale dont il vient d'être parlé, de la même manière que le seront leurs deux projections sur le plan des xy, par rapport à un observateur ayant de même ses pieds à l'origine et sa tête du côté des z positifs. Il suffit donc, pour que le moment $\mathfrak{M}_z$ ait le signe de la projection $\mathfrak{M}\cos\gamma$, de prendre γ ou aigu ou obtus, suivant que l'observateur normal au parallélogramme de l'espace voit le rayon vecteur OM et la parallèle OF_1 à la force F, disposés respectivement comme le sont les deux axes positifs des x et des y pour un observateur identifié de même avec l'axe des z positifs, ou suivant qu'il les voit présenter la disposition inverse ; car, dans ce dernier cas, ils lui offriront, au contraire, la même disposition, s'il se place dans la direction normale exactement opposée, en changeant de signes $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et en rendant, par conséquent, γ obtus.

Ainsi le signe de $\cos\gamma$ sera celui du moment $\mathfrak{M}_z$, si l'on convient de tirer, à partir de l'origine, la normale ON au plan du parallélogramme $\mathfrak{M}$ de l'espace, d'un côté tel, que le rayon vecteur $\mathrm{OM} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et la parallèle OF_1 à la force F soient disposés respectivement, par rapport à cette normale, ON, comme le sont par rapport à l'axe positif des z les deux axes des x et des y positifs. Il faudra, en d'autres termes, qu'un changement d'orientation imprimé à l'ensemble du parallélogramme et de sa normale ON, de manière à amener la normale suivant les z positifs et le côté $\mathrm{OM} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ du parallélogramme suivant les x positifs, amène le parallélogramme $\mathfrak{M}$ lui-même du côté des y positifs; et il est d'ailleurs évident qu'alors une rotation de la même figure, OMFN, propre à amener la normale ON suivant les x positifs et le côté OM suivant les y positifs, amènera le parallélogramme du côté des z positifs, ou encore, qu'une rotation propre à amener ON suivant les y positifs et OM suivant les z positifs, amènera le parallélogramme du côté des x positifs.

Grâce à ce choix dans la direction de ON, le moment $xY - yX$ de la force $F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ par rapport à l'axe des z, et, pour les mêmes raisons, ses moments $yZ - zY$, $zX - xZ$ par rapport aux axes des x et des y, seront donc, *en grandeur et en signe*, les trois projections positives ou négatives $\mathfrak{M}\cos\alpha$, $\mathfrak{M}\cos\beta$, $\mathfrak{M}\cos\gamma$, sur les plans coordonnés respectifs normaux à ces axes, du parallélogramme $\mathfrak{M}$ construit en prenant pour côtés contigus la force proposée et le rayon vecteur qui joint l'origine à son point d'application.

46. — Construction d'une force ayant, par rapport aux axes coordonnés, trois moments donnés à volonté.

Il suit immédiatement de là qu'on peut toujours imaginer une force, de telle grandeur F qu'on voudra, ayant pour moments relatifs aux trois axes des x, y, z trois quantités données quelconques $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$; car, après avoir posé

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2},$$

il suffira de porter cette force F à une distance de l'origine exprimée par $\frac{\mathfrak{M}}{F}$, de manière qu'elle détermine avec le rayon vecteur joignant l'origine à son point d'application un parallélogramme d'aire $\mathfrak{M}$ dans le plan, mené par l'origine, dont la normale aura pour cosinus directeurs, conformément aux conventions faites, les trois rapports

$$(15) \qquad \cos\alpha = \frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}}, \qquad \cos\beta = \frac{\mathfrak{M}_y}{\mathfrak{M}}, \qquad \cos\gamma = \frac{\mathfrak{M}_z}{\mathfrak{M}}.$$

Mais, s'il est permis de lui attribuer une grandeur arbitraire F, on ne pourra pas supposer tout à fait quelconques son orientation ou les rapports mutuels de ses trois composantes X, Y, Z, auxquelles sont proportionnels ses trois cosinus directeurs $\frac{(X, Y, Z)}{F}$. Il faut, en effet, qu'elle puisse venir se placer sur le plan ainsi défini, et qu'elle vérifie par conséquent la condition de perpendicularité à la normale de celui-ci, obtenue en annulant la somme des trois produits deux à deux de leurs cosinus directeurs respectifs. Donc, quand les six quantités données X, Y, Z, $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ satisferont à cette condition de perpendicularité

$$(16) \qquad X\mathfrak{M}_x + Y\mathfrak{M}_y + Z\mathfrak{M}_z = 0,$$

mais seulement alors, il sera possible d'imaginer une force unique ayant, par rapport aux axes coordonnés, X, Y, Z pour composantes et $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ pour moments. Cette condition était d'ailleurs, *a priori*, bien nécessaire, puisque, si $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ sont les moments d'une force dont les composantes s'appellent X, Y, Z, on a

$$\mathfrak{M}_x = yZ - zY, \qquad \mathfrak{M}_y = zX - xZ, \qquad \mathfrak{M}_z = xY - yX,$$

et, par suite,

$$X\mathfrak{M}_x + Y\mathfrak{M}_y + Z\mathfrak{M}_z = 0.$$

47. — Principes de la conservation des quantités de mouvement et de leurs moments.

Cela posé, les équations (11) [p. 52] signifient que les actions exercées sur les divers points du système ont, par rapport à un axe coordonné quelconque, soit leurs composantes, soit leurs moments, deux à deux de même valeur absolue, mais de signes contraires. Donc il suffira, pour éliminer ces composantes et ces moments, d'ajouter ensemble les équations de mouvement, comme (6) [p. 25], relatives aux n points du système, après les avoir multipliées par des facteurs propres à ne faire figurer dans le second membre que des composantes ou des moments comme celles ou ceux que contient chacune des relations (11).

En substituant, pour plus de simplicité, m, x, y, z à m_p, x_p, y_p, z_p, les équations (6) pourront s'écrire

$$(17)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z;$$

et les facteurs par lesquels il faudra ainsi les multiplier, respectivement, avant de les ajouter ensemble et à leurs analogues multipliées de même, seront évidemment

$$1,\ 0,\ 0;\quad 0,\ 1,\ 0;\quad 0,\ 0,\ 1;\quad 0,\ -z,\ y;\quad z,\ 0,\ -x;\quad -y,\ x,\ 0.$$

Il en résultera les six équations ou combinaisons cherchées

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\sum m\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\\
&\sum m\frac{d^2y}{dt^2} = 0,\\
&\sum m\frac{d^2z}{dt^2} = 0,\\
&\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0,\\
&\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0,\\
&\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0,
\end{aligned}\right.$$

où les signes de sommation Σ s'étendent à tous les points M du système.

Or on reconnaît, par une différentiation immédiate, qu'un binôme comme $y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}$ est la dérivée en t d'un autre binôme, savoir $y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}$; en sorte que les six équations (18) peuvent évidemment s'écrire encore, si on les groupe trois par trois en deux formules multiples,

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sum m\dfrac{d(x, y, z)}{dt} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\sum m\left(y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt},\ z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt},\ x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\right) = 0. \end{cases}$$

La première de celles-ci exprime que *la quantité totale de mouvement*, $\sum m\frac{dx}{dt}$, ou $\sum m\frac{dy}{dt}$, ou $\sum m\frac{dz}{dt}$, *possédée par le système dans le sens d'un axe coordonné quelconque*, a sa dérivée $\frac{d}{dt}$ nulle, ou *reste invariable pendant tout le mouvement*.

Ainsi le principe de la *conservation des quantités de mouvement*, imaginé par Descartes (p. 19), est exact pourvu qu'on l'entende du mouvement *projeté* suivant un même axe pour tout le système, puis ajouté *non en valeur absolue*, mais *algébriquement*. Cette rectification est due à Huygens. Et comme, d'autre part, la somme *arithmétique* totale du mouvement évalué par les demi-forces vives au lieu des simples produits des masses par les vitesses se conserve également d'une certaine manière (p. 21), on peut dire que la conception fondamentale de Descartes contenait en germe, *moyennant deux rectifications différentes*, les deux lois de la Mécanique qui se trouvent être les plus importantes, ou du moins les plus utiles dans les applications, lorsqu'elles deviennent celles des *quantités de mouvement* et *du travail;* ce que nous verrons bientôt.

Quant à la seconde équation multiple (19), si l'on y assimile la quantité de mouvement mV de chaque point à une force s'exerçant sur ce point dans la direction de la vitesse V et qui aurait évidemment mu, mv, mw pour composantes suivant les axes, on remarquera que les quantités sous le signe Σ y expriment les trois moments correspondants d'une pareille force. C'est pourquoi l'on appelle ces quantités les *moments des quantités de mouvement* animant les divers points du système; et la seconde équation multiple (19) signifie que les *moments, relatifs à un axe fixe quelconque, des quantités de mouvement possédées par les divers points du système, ont leur somme totale invariable*. Les deux formules (19) traduisent donc ce qu'on peut appeler les deux *principes de la conservation des quantités de mouvement et de leurs moments.*

Mais elles comportent une interprétation encore plus géométrique.

48. — Autre forme de ces deux principes ; et, d'abord, conservation du mouvement du centre de gravité.

Représentons-nous, dans l'espace, le point (idéal) mobile, dit *centre de gravité* du système, dont les coordonnées, que nous appellerons ξ, η, ζ, sont à chaque instant les moyennes arithmétiques des coordonnées de même nom des divers points matériels M, chacune de celles-ci comptant, dans la somme, pour autant que l'indique la masse m du point auquel elle appartient. On démontre aisément que ce point (ξ, η, ζ), ainsi défini par les trois équations

$$(20) \qquad \xi = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \qquad \eta = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \qquad \zeta = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m},$$

est bien le même dans l'espace, quels que soient les axes choisis (¹). Or les formules (20), multipliées par Σm et différentiées

---

(¹) Car, si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées, par rapport à d'autres axes, du point (x, y, z) du système, et ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées correspondantes du point (ξ, η, ζ), on sait que ξ_1 et x_1, par exemple, s'exprimeront linéairement, en fonction de ξ, η, ζ ou de x, y, z, par des formules comme

$$x_1 = ax + by + cz + \alpha, \qquad \xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta + \alpha,$$

dans lesquelles a, b, c, α désignent quatre constantes. Or, en remplaçant ξ, η, ζ, dans cette expression de ξ_1, par leurs valeurs (20), puis faisant passer a, b, c sous les signes de sommation Σ et réduisant tous les termes du second membre au dénominateur commun Σm, il vient évidemment

$$\xi_1 = \frac{\Sigma m(ax + by + cz + \alpha)}{\Sigma m},$$

c'est-à-dire, vu la valeur x_1 de l'expression $ax + by + cz + \alpha$,

$$\xi_1 = \frac{\Sigma m x_1}{\Sigma m};$$

et l'on aurait de même

$$\eta_1 = \frac{\Sigma m y_1}{\Sigma m}, \qquad \zeta_1 = \frac{\Sigma m z_1}{\Sigma m}.$$

Ainsi, le point (ξ, η, ζ) se trouve bien être, dans le nouveau système d'axes non moins que dans l'ancien, celui dont les coordonnées sont les moyennes de celles de même nom de tous les points matériels du système.

De là résulte, dans un solide invariable, la fixité du centre de gravité par rapport à des axes coordonnés quelconques liés à ce corps.

en t, donnent

$$(21) \quad \begin{cases} \sum m \frac{dx}{dt} = \left(\sum m\right) \frac{d\xi}{dt}, \\ \sum m \frac{dy}{dt} = \left(\sum m\right) \frac{d\eta}{dt}, \\ \sum m \frac{dz}{dt} = \left(\sum m\right) \frac{d\zeta}{dt}; \end{cases}$$

ce qui signifie que les quantités totales de mouvement, possédées suivant les trois axes par le système, sont identiquement celles qui animent son centre de gravité, censé avoir comme masse toute la masse Σm du système qu'on s'y représenterait condensée. Ces trois quantités se conservant, la vitesse du centre de gravité a donc ses trois composantes invariables; et ce centre se meut en ligne droite avec sa vitesse initiale, dont les composantes sont, en vertu de (21), les moyennes de celles de même nom imprimées alors aux divers points et qu'on doit supposer données.

49. — Principe des aires.

L'interprétation géométrique des secondes équations (19) [p. 59] est presque aussi simple. Considérons, par exemple, celle d'entre elles que nous savons pouvoir s'écrire

$$(22) \quad \sum m\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) = \text{une constante } c,$$

et où figurent les moments, par rapport à l'axe des z, des quantités de mouvement $mV = m\frac{ds}{dt}$ des divers points M. La projection, sur le plan des xy, de la droite $mV = \frac{m}{dt}ds$ dirigée, à partir de la position actuelle de M, suivant le chemin élémentaire ds que M va parcourir, est évidemment le produit, par $\frac{m}{dt}$, de la projection analogue, que nous désignerons par $d\sigma$, de cet élément ds de sa trajectoire. Et ce que nous avons appelé le *moment* de mV est, de même, le produit, par $\frac{m}{dt}$, du parallélogramme construit sur $d\sigma$ et sur le rayon vecteur $O\mu = \sqrt{x^2+y^2}$ (p. 53) joignant l'origine à sa première extrémité μ (projection de M), parallélogramme double du triangle, ayant même base $d\sigma$ et son sommet à l'origine, que décrit durant l'instant dt, *en projection sur le plan des* xy, le rayon vecteur variable mené de l'origine au point mobile M.

Désignons par ω la valeur de l'aire projetée ainsi décrite depuis une époque fixe quelconque : $d\omega$ sera son accroissement positif ou négatif durant l'instant dt; et nous aurons, par conséquent, comme moment de $m\text{V}$, le produit de $\frac{m}{dt}$ par $2\,d\omega$, c'est-à-dire la dérivée $\frac{d(2m\omega)}{dt}$. Ainsi l'équation (22) deviendra

$$\frac{d}{dt}(2\Sigma m\omega) = c$$

et signifiera que la double somme algébrique des produits des aires ω par les masses des points correspondants a sa dérivée égale à la constante c.

Par conséquent, *les aires que décrivent durant chaque unité de temps, en projection sur un même plan, les rayons vecteurs des divers points du système, donnent, multipliées par les masses de ces points, une somme algébrique constante pendant tout le mouvement*. De là le nom de *principe des aires* qu'a reçu cette loi de la conservation des moments des quantités de mouvement.

SIXIÈME LEÇON.

PRINCIPES DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT ET DES MOMENTS POUR UN SYSTÈME PARTIEL; DE LEUR APPLICATION A LA FORMATION DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT DES CORPS.

50. — Ce qu'on entend par système partiel, forces intérieures et forces extérieures.

Dans notre système matériel indépendant de tout autre ou supposé seul dans l'espace, nous aurons souvent à considérer, en particulier, un ou plusieurs corps désignés, c'est-à-dire certains groupes plus ou moins étendus de points. Alors l'ensemble de tous ces points constituera un *système partiel;* leurs actions et réactions mutuelles, égales et opposées deux à deux, seront ce que nous appellerons des *forces intérieures,* tandis que les actions exercées sur ces points par les autres du système général et qui, par conséquent, n'auront pas leurs *réciproques* dans le système partiel, seront dites des *forces* ou *actions extérieures.*

51. — Principes des quantités de mouvement dans le cas d'un système partiel; impulsion des forces.

Il est clair que, si l'on ajoute ensemble les premières, ou les secondes, ou les troisièmes équations (17) de mouvement [p. 58] relatives aux seuls points du système partiel, équations dans lesquelles figurent les accélérations de ces points suivant l'axe coordonné des x, des y, ou des z, les forces intérieures seules, en s'entre-détruisant deux à deux, s'élimineront du second membre obtenu. Celui-ci deviendra, par conséquent, la somme des composantes, suivant l'axe considéré, des actions extérieures; et, après multiplication de l'équation par dt, il égalera l'*impulsion* totale, *pour l'instant dt*, de ces composantes, pourvu que l'on appelle *impulsion* d'une force le produit de cette force par un temps durant lequel elle agit. Le premier membre, multiplié de même par dt, sera $d\sum m\frac{d(x,y,z)}{dt} = d\sum m(u,v,w)$, ou exprimera l'accroissement, pendant l'instant dt, de la quantité totale de mouvement possédée par le système partiel suivant l'axe coordonné en question. On pourra donc énoncer comme il suit cette extension, aux systèmes partiels, de la loi de conservation des quantités de mouvement propre aux systèmes complets ou sans relations extérieures :

L'accroissement algébrique, durant un instant infiniment petit dt, de la quantité totale de mouvement du système suivant un axe quelconque, égale la somme, multipliée par cet instant dt, des composantes, suivant le même axe, des forces extérieures appliquées au système, ou vaut, en d'autres termes, *l'impulsion totale exercée pendant le même instant par ces forces extérieures, dans le sens du même axe.*

Tel est le principe dit des *quantités de mouvement.*

Enfin, introduisons dans les expressions

$$\sum m\frac{d(x,y,z)}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}\Sigma m(x,y,z)$$

des quantités de mouvement possédées suivant les trois axes par le système partiel, les composantes $\frac{d(\xi,\eta,\zeta)}{dt}$ de la vitesse de son centre de gravité qui, multipliées par Σm, donnent précisément $\sum m\frac{d(x,y,z)}{dt}$; d'autre part, observons que les produits, par Σm, des vitesses initiales de ce centre suivant les axes égalent les quantités correspondantes totales de mouvement $\Sigma m(u,v,w)$ possédées au début par le système. Et nous verrons alors le principe des quantités de mouvement signifier que *le centre de gravité du système partiel se meut comme il le ferait si l'on y avait réuni toute la masse Σm de ce système, avec sa quantité de mouvement initiale, et si l'on y transportait, parallèlement à elles-mêmes, toutes les forces extérieures agissant sur ses diverses parties.*

52. — Principe des aires pour un système partiel; impulsion de rotation des forces.

Pour passer maintenant au principe des aires, ajoutons les équations (17) [p. 58], multipliées respectivement par o, $-z$, y, ou par z, o, $-x$, ou par $-y$, x, o, aux équations de mouvement des autres points du système partiel multipliées par des facteurs analogues. Les seconds membres des trois résultats, sommes des moments, par rapport aux axes des x, des y, ou des z, de toutes les forces agissant sur le système, se réduiront évidemment, par la destruction mutuelle de ceux des forces réciproques, aux moments des actions extérieures; et, d'autre part, les premiers membres

$$\left\{\begin{array}{l}\sum m\left(y\dfrac{d^2z}{dt^2}-z\dfrac{d^2y}{dt^2}\right),\\ \sum m\left(z\dfrac{d^2x}{dt^2}-x\dfrac{d^2z}{dt^2}\right),\\ \sum m\left(x\dfrac{d^2y}{dt^2}-y\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)\end{array}\right.$$

ou

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right),\quad \ldots,$$

exprimeront les accroissements durant un instant infiniment petit, divisés par cet instant ou rapportés à l'unité de temps, des moments, relatifs aux mêmes axes, des quantités de mouvement animant le système partiel. Il viendra donc, au lieu de la loi de conservation des moments des quantités de mouvement qu'on aurait pour un système complet, le *principe* suivant, dit des *moments : La somme algébrique des moments, par rapport à un axe quelconque, des quantités de mouvement animant les divers points d'un système, s'accroît dans l'unité de temps d'une quantité égale à la somme algébrique des moments des forces extérieures par rapport au même axe.*

Le produit du moment d'une force, relatif à un axe quelconque, par un temps infiniment petit durant lequel agit cette force, peut être appelé, très naturellement, l'*impulsion de rotation,* pour ce temps, de la force *autour de l'axe considéré,* à cause des rapports existant (comme on le verra bientôt), d'après le principe même des moments ou des aires, entre les moments des forces et les mouvements de rotation imprimés aux corps; et, par suite, la somme de tous les produits pareils, pour les éléments dt composant un temps fini quelconque, peut être appelée de même l'*impulsion de rotation* de la force pendant ce temps. Grâce à ces désignations, le principe des moments s'énoncera donc encore ainsi : *Le moment total, par rapport à un axe fixe quelconque, des quantités de mouvement d'un système, s'accroît sans cesse de l'impulsion correspondante de rotation des forces extérieures.*

On pourrait d'ailleurs, évidemment, substituer dans ces énoncés, au moment de la quantité de mouvement possédée par chaque point, le double produit de la masse de ce point par l'aire que son rayon vecteur émané de l'origine décrit, durant l'unité de temps, *en projection sur un plan normal à l'axe considéré.*

53. — Application des deux principes à un solide rigide; formation des équations de mouvement d'un tel corps.

Supposons d'abord que le système partiel étudié soit un corps solide, assez peu déformable pour qu'on puisse attribuer, à chacun de ses points matériels, des coordonnées *constantes* x_1, y_1, z_1, par rapport à un système d'axes entraînés dans ses mouvements et se croisant, par exemple, à son centre de gravité. Alors les coordonnées x, y, z de ces mêmes points, relatives à notre système général d'axes fixes, s'expriment, comme on sait, très simplement, au moyen des coordonnées invariables x_1, y_1, z_1, et des six fonctions de t qui caractériseront la situation, à chaque instant, des axes mobiles, savoir, les trois coordonnées ξ, η, ζ de leur point actuel d'intersection et trois angles (les angles d'Euler par exemple) définissant leur orientation actuelle. On aura, en effet,

$$\left\{\begin{aligned} x &= \xi + a x_1 + a' y_1 + a'' z_1, \\ y &= \eta + b x_1 + b' y_1 + b'' z_1, \\ z &= \zeta + c x_1 + c' y_1 + c'' z_1, \end{aligned}\right.$$

les neuf coefficients a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' étant des fonctions connues des trois angles dont il s'agit. Donc les six équations fournies par les principes des quantités de mouvement et des moments suffiront, si l'on donne les actions extérieures qui, seules, y paraissent [1], pour déterminer à chaque instant les dérivées secondes, par rapport au temps, de ces six quantités variables, et aussi, par suite, celles de a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', x, y, z, c'est-à-dire les accélérations $\frac{d^2(x, y, z)}{dt^2}$, qu'on n'aura plus, désormais, besoin de demander aux équations individuelles de mouvement (17).

Autrement dit, les six équations ainsi formées tiendront complètement lieu, en vue de la détermination du mouvement, de toutes les équations (17) ; et les divers points matériels du corps n'y figureront que par leurs masses m et leurs coordonnées constantes x_1, y_1, z_1, ou auront pour seul effet d'en modifier les coefficients. Ce n'est donc pas la forme de ces six équations, mais seulement la valeur de leurs coefficients, qui variera avec la figure du solide et la distribution de sa masse.

54. — Translation et rotations du solide.

Les trois premières, fournies par le principe des quantités de mouvement, feront connaître, comme on vient de voir, le mouvement du centre de gravité, point qui sera ici invariable dans le corps, ou défini, par rapport aux axes mobiles, par des coordonnées constantes, comme celles des divers points dont elles sont les moyennes. Il ne paraîtra évidemment, dans ces trois équations, aucun autre coefficient dépendant des divers points du corps que la masse totale Σm.

Les trois dernières, fournies par le principe des moments, beaucoup plus compliquées, et dans les coefficients desquelles les divers points matériels figureront à la fois par leurs masses m et par leurs coordonnées constantes x_1, y_1, z_1, serviront donc uniquement à déterminer ce qu'on appelle les *rotations* du corps autour de son centre de gravité, c'est-à-dire les changements d'orientation du système des axes mobiles, changements liés aux variations des trois angles dont dépend la direction de ces axes.

Dans le cas très simple où, les neuf coefficients a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' se trouvant constants, ces rotations seraient nulles, tous les points du corps décriraient évidemment, durant chaque in-

---

(1) A l'exclusion des forces intérieures ou réactions mutuelles des diverses parties du corps.

stant dt, des éléments rectilignes ds égaux et parallèles, ou posséderaient le même mouvement que le centre de gravité. Un tel mouvement commun est appelé la *translation* du corps ; et l'on voit que, en général, les *rotations* dont il vient d'être parlé se superposent à cette *translation* pour donner le mouvement effectif.

55. — Réduction, à des intégrales, des sommes constituant les coefficients des équations de mouvement du solide.

Non seulement on se dispensera de considérer les équations de mouvement spéciales à chaque point matériel du solide, mais même les sommes Σm, $\Sigma m x_1^2$, $\Sigma m y_1 z_1$, ..., figurant en coefficients dans les six combinaisons obtenues de ces équations, se détermineront sans tenir compte individuellement des masses ou des coordonnées des divers points, ni, par suite, des groupements inconnus de ces derniers en molécules plus ou moins complexes. Comme les valeurs absolues de x_1, y_1, z_1 seront, en général, très supérieures pour chaque molécule à ses distances d'avec les molécules voisines, on n'altérera les sommes dont il s'agit qu'extrêmement peu ou, pour ainsi dire, qu'infiniment peu par rapport à elles-mêmes, en étalant *fictivement* chaque masse m, d'après une loi continue, dans tout l'espace intermoléculaire environnant ; et, dès lors, ces sommes Σ se calculeront à la manière d'intégrales. La densité de la matière en chaque endroit (x_1, y_1, z_1), fonction graduelle des coordonnées, paraîtra seule, avec x_1, y_1, z_1, sous les signes $\int\int\int$, et dispensera de considérer les vrais arrangements moléculaires de la matière du corps.

56. — Réflexion sur la manière dont les problèmes de Mécanique deviennent abordables.

Nous n'avons pas à nous occuper en détail de cette détermination des mouvements d'ensemble d'un solide, qui constitue le problème capital de la Mécanique rationnelle. Mais il était bon de remarquer ici comment le *fait* très simple de la quasi-invariabilité des distances intermoléculaires, combiné avec les principes des quantités de mouvement et des moments, dispense d'y faire une étude, qui serait inextricable, des actions mutuelles intérieures et des groupements d'atomes. Il n'a pu, d'ailleurs, on le voit bien, suppléer à notre ignorance sous ces deux rapports, qu'avec le concours des deux principes généraux des quantités de mouvement et des moments. Nous reconnaîtrons peu à peu qu'il en est de même, ainsi que nous l'avons déjà dit (p. 51), dans toutes les branches de la Mécanique physique ; seul, le fait simple choisi comme hypothèse ou point de départ des raisonnements changera suivant les cas.

57. — Systèmes de forces dits statiquement équivalents.

Contentons-nous ici d'observer, au sujet de ce problème du mouvement d'ensemble d'un solide, que les forces extérieures y figureront uniquement par les six sommes respectives de leurs composantes suivant les axes coordonnés et de leurs moments relatifs aux mêmes axes.

Donc, quand deux systèmes de forces donneront à ces six sommes les mêmes valeurs, ils seront *statiquement équivalents*, c'est-à-dire équivalents au point de vue de la *Statique* classique, qui a été édifiée jusqu'à ce jour dans la supposition d'une rigidité parfaite des corps, ou sans y tenir compte des déformations qu'ils subissent. L'on sait, en effet, qu'une telle équivalence se déduit élémentairement, dans les cas les plus compliqués, du fait, admis à titre de *postulatum* fondamental par la Statique classique, de son existence dans le cas le plus simple, savoir, celui de deux forces égales et de même direction, exercées en deux points quelconques d'une droite rigide ayant cette direction. Comme il est évident qu'en déplaçant une force le long de la droite suivant laquelle elle agit, on ne change ni les valeurs de ses projections, ni la plus courte distance (perpendiculaire commune) de cette droite à un axe quelconque, ni, par suite, le moment où entre comme bras de levier cette plus courte distance, le postulatum fondamental de la Statique élémentaire se trouve, ici, bien justifié.

Appelons les six sommes respectives données $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$, les trois premières quantités étant les composantes totales et, les trois dernières, les moments totaux. On a vu précédemment (p. 57) que, si elles vérifient la relation

$$\mathcal{X}\mathfrak{M}_x + \mathcal{Y}\mathfrak{M}_y + \mathcal{Z}\mathfrak{M}_z = 0,$$

une force unique F suffira pour les donner toutes les six. Donc cette force produira exactement, *quant au mouvement d'ensemble* considéré du corps, le même effet que toutes les actions extérieures dont il s'agit : aussi en sera-t-elle dite la *résultante* ou, d'une manière plus précise, la *résultante statique* (encore au point de vue de la Statique classique, c'est-à-dire abstraction faite des déformations et des réactions intérieures développées).

58. — Comment on est conduit à la notion de couple.

Si, au contraire, la condition

$$\mathfrak{X}\mathfrak{M}_x + \mathfrak{Y}\mathfrak{M}_y + \mathfrak{Z}\mathfrak{M}_z = 0$$

n'est pas vérifiée, on pourra toujours imaginer : 1° une force ayant pour composantes les trois premières sommes $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ et passant par l'origine des coordonnées, ou à moments $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ nuls, force pour laquelle les six quantités caractéristiques seront par conséquent

$$\mathfrak{X}, \quad \mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{Z}, \quad 0, \quad 0, \quad 0\,;$$

2° d'autre part, une force F ayant les trois moments totaux donnés $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$, et à laquelle on en adjoindra une autre F_1 égale, mais de sens contraire, passant par l'origine ou à moments nuls, pour que l'ensemble de ces deux forces, tout en n'ayant pas de moments différents de ceux de la première seule, ne donne suivant les trois axes que des composantes totales nulles.

Alors les deux forces de sens contraire F et F_1 considérées en second lieu ont évidemment, pour leurs six quantités caractéristiques totales,

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad \mathfrak{M}_x, \quad \mathfrak{M}_y, \quad \mathfrak{M}_z\,;$$

leur ensemble s'appelle, comme on sait, un *couple*. On voit qu'il est propre à exprimer trois moments totaux arbitraires $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$, *sans composantes totales*, tout comme l'est une simple force appliquée à l'origine pour exprimer trois composantes totales arbitraires $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, *sans moments;* et que, enfin, le système entier formé par cette force et le couple équivaut au système quelconque donné d'actions, défini au moyen des six sommes $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ de composantes et de moments.

Un parallélogramme construit sur les deux forces F et F_1 ou $-F$ comme côtés opposés équivaut évidemment à celui que détermine, dans le même plan, la première d'entre elles F avec une droite parallèle et de même sens menée par l'origine, et que nous avons, plus haut (p. 55), appelé $\mathfrak{M}$.

Le parallélogramme construit sur les deux forces F et $-F$ aura donc, lui aussi, pour projections respectives sur les plans coordonnés des yz, des zx et des xy, les moments totaux donnés $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$. Ainsi, les trois moments du couple par rapport aux axes seront simplement les projections du parallélogramme $\mathfrak{M}$ construit sur ses deux forces F et $-F$; d'où il suit que, son effet dépendant uniquement de ces trois moments $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$, sa valeur dynamique se trouvera parfaitement définie au moyen de l'aire $\mathfrak{M}$ du parallélogramme et des trois cosinus directeurs de sa normale. De là le nom de *moment du couple,* donné à l'aire $\mathfrak{M}$ que comprennent entre elles les deux forces F, $-F$ et qui mesure ainsi son importance : ce moment égale, comme on voit, le produit de l'une des forces par leur distance perpendiculaire.

Remarquons, en terminant, que, l'une, $-F$, des deux forces du couple peut être composée, par la règle du polygone (ou plutôt du parallélogramme) des forces, avec celle dont les six quantités caractéristiques sont $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, o, o, o, et qu'il reste alors, pour représenter le système donné quelconque de forces extérieures, non plus une force et un couple, mais bien deux forces, dont l'une passe même par l'origine qui est un point arbitraire. Nous retombons ainsi sur un théorème connu de la Statique élémentaire.

59. — Équations d'équilibre du solide.

Avant de quitter ce sujet, observons encore que le repos sera possible, car les six équations du mouvement se trouveront satisfaites par les suppositions $\frac{d^2(x, y, z)}{dt^2} = 0$, si l'on a tout à la fois, avec des vitesses initiales nulles,

$$\mathfrak{X} = 0, \qquad \mathfrak{Y} = 0, \qquad \mathfrak{Z} = 0, \qquad \mathfrak{M}_x = 0, \qquad \mathfrak{M}_y = 0, \qquad \mathfrak{M}_z = 0.$$

Donc, vu les expressions ΣX, ΣY, ΣZ, $\Sigma(yZ - zY)$, ..., de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{M}_x$, ..., les équations caractéristiques de l'équilibre d'un solide seront, comme on sait,

$$
(23) \quad \begin{cases} \Sigma X = 0, & \Sigma Y = 0, & \Sigma Z = 0, \\ \Sigma(yZ - zY) = 0, & \Sigma(zX - xZ) = 0, & \Sigma(xY - yX) = 0, \end{cases}
$$

formules où les signes de sommation Σ s'étendent à toutes les forces extérieures appliquées au solide.

60. — Sur l'application des principes des quantités de mouvement et des moments à l'étude de l'état moyen local d'une particule matérielle quelconque.

En résumé, comment les deux principes des quantités de mouvement et des moments, par leur combinaison avec l'hypothèse de l'indéformabilité du corps, rendent-ils abordable l'étude du mouvement d'ensemble d'un solide? Ce n'est pas seulement en dispensant d'y considérer la multitude des réactions intérieures mutuelles des divers points du corps, c'est aussi parce qu'ils relèguent et fusionnent ensemble, dans de simples coefficients constants, les rôles de ces innombrables points matériels où l'on se serait autrement perdu, pour appeler l'attention, exclusivement, sur les déplacements du centre de gravité, qui constituent la *translation* du corps, et sur les rotations autour de ce centre, qui s'ajoutent, se composent avec la translation.

Or ces principes sont encore propres à rendre les mêmes services dans la question la plus essentielle de la Mécanique physique, savoir, l'étude du *mouvement moyen* d'une particule très petite en tous sens, mais d'ailleurs quelconque, faisant partie d'un corps ou d'un milieu matériel.

Mais définissons d'abord ce que nous entendrons par un tel *mouvement moyen*, et montrons pourquoi il sera nécessaire de le considérer.

Nos connaissances du monde extérieur, si bornées qu'elles soient, nous permettent d'entrevoir l'extrême complication des groupements de points, dans les moindres parcelles visibles de matière, ainsi que l'infinie variété de ces imperceptibles quoique très vifs mouvements de détail dont nos nerfs y ressentent, en chaleur, le sourd retentissement, comme, au bord de la mer (suivant une comparaison célèbre de Leibnitz), notre ouïe perçoit sous la forme d'un bruit confus les innombrables chocs des flots. Donc ces connaissances suffisent de reste pour nous convaincre de l'impossibilité où nous serions de voir rien de clair dans les mouvements intérieurs d'un corps solide ou fluide, si nos formules devaient exprimer, pour toute son étendue, l'agitation incessante des groupes d'atomes constituant ses molécules chimiques, ou même seulement des groupes de molécules chimiques, diversement conformés et orientés, qui s'y trouvent répandus partout. Que seraient, en effet, des fonctions qui devraient, presque à tout instant et dans tous les sens, présenter des milliards d'ondulations opposées? Mais heureusement l'expérience prouve qu'il règne, dans chaque petite région du corps, un mouvement général, ayant sa vitesse variable graduellement d'une région à l'autre et d'un instant à l'autre. Ce mouvement est seul mesurable; car, seul, il reste assez longtemps de même sens pour produire des déplacements sensibles, que puissent apprécier avec quelque détail nos instruments et nos organes. Les inégalités qui l'affectent sont aussi de sens divers d'un point à l'autre, et assez faibles; sans quoi elles produiraient la dislocation de la particule.

C'est, dès lors, ce *mouvement moyen local* seul visible, se dégageant, en chaque endroit, de l'agitation confuse qui y règne, que nous chercherons à nous représenter d'une manière précise. L'hypothèse même de son existence, dans les conditions énoncées, sera ici le fait très simple qui nous dispensera d'une connaissance détaillée des actions moléculaires contribuant à le produire et des groupes de points qu'il affecte.

61. — De la vitesse moyenne locale.

La vitesse qui l'exprimera en chaque endroit et à chaque instant sera ce que nous appellerons *la vitesse moyenne locale :* elle se trouvera définie analytiquement au moyen de ses trois composantes suivant les axes, formées en prenant les moyennes des composantes de mêmes sens d'un grand nombre de vitesses successives ou simultanées, savoir celles qu'ont, pendant un petit temps sensible, les divers points composant la particule.

D'ailleurs, malgré cette intervention de composantes suivant trois axes rectangulaires des x, y, z, il est aisé de s'assurer qu'elle n'en sera pas moins indépendante de l'orientation de ceux-ci, soit pour la grandeur, soit pour la direction. Car si, par exemple, u,

v, w désignent les composantes, suivant les x, y, z, d'une des vitesses vraies V dont on prend la moyenne, et a, b, c les cosinus des angles d'un nouvel axe quelconque avec les x, y, z, la composante de V suivant ce nouvel axe égalera, comme on sait, $au + bv + cw$. Or, cette expression étant linéaire en u, v, w et sans terme constant, on en déduit de suite, pour composante, suivant le nouvel axe, de la vitesse moyenne qu'il s'agit de former, la somme des produits respectifs de a, b, c par les valeurs moyennes de u, v, w, c'est-à-dire par les trois composantes de la vitesse du mouvement moyen local, telle qu'elle est définie dans le système des coordonnées x, y, z. Et l'on voit que la somme ainsi trouvée égale justement la composante, suivant le *nouvel* axe, de cette vitesse moyenne obtenue avec l'aide des axes primitifs. Donc celle-ci serait encore la même si on la formait en se servant de la composante moyenne des vitesses vraies suivant le nouvel axe et, pareillement, des composantes analogues suivant deux autres propres à constituer avec lui un système trirectangle d'une orientation arbitraire.

62. — De l'accélération moyenne locale.

Cela établi, isolons par la pensée, dans une région quelconque du corps, ce que nous avons appelé déjà un *élément de volume*, c'est-à-dire, ordinairement, un parallélépipède matériel de dimensions presque insensibles, assimilables à des infiniment petits en comparaison des étendues où se déroulent les phénomènes étudiés. Un pareil élément n'en contiendra pas moins un nombre de molécules dépassant tout ce que notre imagination peut se représenter et, par conséquent, bien suffisant pour que le mouvement de son centre de gravité soit exempt des inégalités ou variations imperceptibles, mais extrêmement rapides ou changeantes, qui compliquent celui de ses atomes ou même de ses molécules. L'accélération, suivant chaque axe, du centre de gravité d'un élément de volume ainsi défini, sera donc celle de même nom du mouvement moyen local de sa matière, ou égalera la dérivée, par rapport au temps, de la composante analogue de la vitesse moyenne locale; et, par suite, la résultante des trois accélérations du même centre suivant les trois axes sera l'accélération totale du mouvement moyen local ou visible de la particule considérée. Aussi appellerons-nous cette résultante l'*accélération moyenne locale* et, ses composantes, les *accélérations moyennes locales suivant les axes*.

63. — Détermination de cette accélération par les principes des quantités de mouvement et des moments.

On voit que, pour l'endroit du corps où se trouve l'élément de volume considéré, les trois accélérations moyennes locales suivant les axes, et, par conséquent, les équations du mouvement visible de la matière, s'obtiendront en appliquant à tout l'élément de volume le principe du mouvement du centre de gravité ou des quantités de mouvement. Ainsi, l'on égalera la dérivée, par rapport au temps, de sa quantité de mouvement suivant chaque axe, à la somme des composantes, suivant le même axe, de son poids, représentant l'action totale, sur lui, de toute la matière extérieure *non contiguë*, et des actions moléculaires exercées par la matière extérieure *contiguë* sur ses parties les plus voisines de sa surface.

Comme la considération de pareils éléments de volume, dans toutes les parties du corps, y déterminera les accélérations analogues, de l'ensemble desquelles résulteront, d'instant en instant, les changements de vitesse de ces parties et ceux d'orientation de leurs droites de jonction respectives, il semble même que l'on n'aura pas, du principe des moments, le même besoin que dans le cas d'un solide rigide. Mais ce principe, on le verra bientôt, y sera nécessaire, concurremment avec celui des quantités de mouvement, pour établir d'importantes relations, entre les sommes des actions moléculaires extérieures s'exerçant à travers les faces contiguës d'un même élément de volume ou à travers celles de divers éléments de volume, construits en un même endroit suivant des orientations différentes.

64. — État statique moyen local et état dynamique moyen local.

Nous appellerons *état statique moyen local*, à un moment donné et en un endroit donné, la figure formée par l'ensemble des centres de gravité de toutes les plus petites particules *visibles* d'un fragment de matière occupant cet endroit, ou de tous ses groupes moléculaires à peine perceptibles. Il sera donc défini, soit par les distances mutuelles de ces centres, soit par leurs coordonnées ; et les variations de ces distances ou de ces coordonnées d'un instant à l'autre caractériseront les déformations visibles du fragment ou élément matériel dont il s'agit.

On partira généralement d'un premier état (réel ou fictif) de l'élément, dit *état primitif,* qui sera censé connu ; et l'on considérera surtout les modifications qu'éprouvera cet état. Elles se trouveront définies par les changements visibles des coordonnées de chaque particule, c'est-à-dire par leurs accroissements (positifs ou négatifs), qu'on appelle les *déplacements de la particule suivant les axes.* Nous les désignerons d'ordinaire par les lettres ξ, η, ζ. De ces changements dépendront, comme il vient d'être dit, les *déformations* visibles du fragment considéré (augmentations ou diminutions des droites de jonction de particules voisines et changements des angles de ces droites).

Il est clair aussi que ce seront les dérivées, par rapport au temps, soit premières, soit secondes, des coordonnées ou des déplacements ξ, η, ζ des mêmes centres des groupes moléculaires, qui, en chaque région du fragment, égaleront les composantes, soit de la vitesse moyenne locale, soit de l'accélération moyenne locale ; en sorte que ces dérivées seront des fonctions variant graduellement d'un instant à l'autre et d'une région du corps à l'autre, ou affranchies des inégalités locales.

L'ensemble des dérivées premières, en particulier, c'est-à-dire des vitesses, définira évidemment le mouvement moyen local du fragment, ou ce que nous appellerons son *état dynamique moyen local.*

65. — Comment la formation des équations de mouvement amène à considérer, sous le nom de pressions, certaines sommes d'actions moléculaires, bien plus graduellement variables que ces actions elles-mêmes.

Grâce à l'emploi du principe des quantités de mouvement, les actions moléculaires individuelles que supportent les atomes ou les molécules de la couche superficielle d'un élément de volume, et qui émanent d'atomes ou de molécules faisant partie de la matière extérieure adjacente, n'auront même nul besoin d'être évaluées à part ; ce que nous rendraient comme impossible le manque de données sur les forces moléculaires, mais surtout le fait des mouvements confus agitant d'une foule de manières les divers couples à considérer, en nombre d'ailleurs inconnu et prodigieux, d'atomes ou de molécules. Il suffira de pouvoir apprécier les *sommes* de leurs composantes suivant chaque axe, sommes appelées, d'ordinaire, des *pressions*. Or on conçoit que les *inégalités* variables non graduellement, et par conséquent en sens divers d'un terme à l'autre, s'y neutralisent, pour laisser subsister seulement des totaux à variations relatives bien continues, comme sont toujours les moyennes d'assez grands nombres. De pareils totaux ne dépendront, par suite, que de quantités bien continues elles-mêmes, c'est-à-dire très peu changeantes d'une région du corps aux régions voisines et d'un instant aux suivants.

Sans doute, les oscillations confuses et les rapides déformations des groupes moléculaires ou atomiques y seront en général représentées, mais par des caractères généraux et moyens relatifs à l'endroit dont il s'agit, comme est, par exemple, ce qu'on pourrait appeler *le degré* plus ou moins grand *de l'agitation*. Ici, ce degré, concernant la vivacité du mouvement invisible de chaque parcelle de matière, sera la quantité, appelée *température*, qu'y mesurerait un très petit *thermomètre* interposé, mais au sujet de laquelle nous n'avons heureusement pas à insister en ce moment.

Les quantités bien continues dont dépendront ainsi les sommes considérées d'actions moléculaires se lieront d'ailleurs, comme on verra, aux changements mêmes, d'un point à l'autre ou d'un instant à l'autre, de l'état statique moyen local, de manière à permettre d'exprimer ces sommes d'actions moléculaires en fonction des mêmes variables que les quantités de mouvement, savoir, en fonction des déplacements moyens locaux de la matière ou de leurs dérivées. Et l'on entrevoit alors qu'il sera possible de former les équations des mouvements moyens locaux du corps étudié; ce qui est le premier but de la Mécanique physique. Car toute science d'application des Mathématiques aux phénomènes se propose d'abord de ramener les questions concrètes à des problèmes d'Analyse, c'est-à-dire les éléments *qualitatifs* des choses à des éléments *quantitatifs*, qui sont ce qu'il y a de plus clair pour notre esprit.

SEPTIÈME LEÇON.

IDÉES GÉNÉRALES SUR LES PRESSIONS.

66. — **Définition d'un élément plan et de la pression qui s'y exerce.**

Les considérations précédentes nous conduisent à faire, pour toute face plane ou sensiblement plane d'un élément de volume, la somme des composantes, suivant un même axe, des actions exercées, à des distances imperceptibles et à travers cette face, par les points matériels qui sont d'un de ses côtés, savoir, à l'extérieur du volume, sur ceux qui sont de l'autre, ou à l'intérieur. Une pareille surface, peu étendue en tout sens, prend le nom d'*élément superficiel* ou d'*élément plan*. Sur toutes les très petites parties similaires juxtaposées en lesquelles elle est décomposable, parties presque invisibles ou même absolument invisibles et en nombre fort grand, mais de dimensions incomparablement supérieures à la distance de deux molécules contiguës, l'état moyen local de la matière est, en général, sensiblement le même; autrement dit, les conditions physiques y sont pareilles. Donc les trois sommes de composantes, suivant les axes, des actions moléculaires éprouvées à travers chacune d'elles par la matière comprise sur un de leurs côtés, actions existant entre couples de points dont la droite de jonction croise cette partie, se trouveront aussi pareilles pour toutes. Nous les représenterons par une force unique, dont elles seraient les composantes, et que nous supposerons appliquée en un point quelconque de la partie considérée de l'élément plan. Cette force unique fictive s'appellera la *pression* exercée sur la partie correspondante de surface.

Elle sera évidemment propre à remplacer, dans les calculs de quantités de mouvements, les actions moléculaires individuelles qu'elle résume. Et elle les remplacera aussi très bien dans les calculs de moments, même quand les moments seront pris par rapport aux axes les plus rapprochés possibles de l'élément plan ; car, en transportant en un seul point de la partie considérée de celui-ci toutes les actions moléculaires exercées suivant des droites qui la traversent, on n'a modifié les coordonnées x, y, z de leurs points d'application et, par suite, leurs bras de levier, que de quantités négligeables, *même* comparativement aux dimensions presque imperceptibles de l'élément plan.

Enfin on appellera *pression totale* exercée sur l'élément superficiel donné, une force unique, valant la somme de toutes ces petites forces égales relatives aux diverses parties similaires de l'élément, dirigée, en outre, dans le même sens qu'elles, et appliquée au centre de gravité de l'élément, c'est-à-dire au point dont les coordonnées sont les moyennes des coordonnées de même nom de toutes ses parties. Cette pression totale sera encore propre, tant au point de vue des moments qu'à celui des quantités de mouvement, à représenter toutes les pressions élémentaires entrant dans sa composition. En effet, si n est le nombre des pressions élémentaires égales dont elle constitue la somme, que X, Y, Z désignent les trois composantes de l'une quelconque d'entre elles, et x, y, z les coordonnées de son point d'application, le moment de cette pression partielle relatif, par exemple, à l'axe des z sera $x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}$; et l'on aura pour la somme des n moments analogues

$$(\Sigma x)\mathrm{Y} - (\Sigma y)\mathrm{X},$$

ce qui est bien l'expression du moment correspondant de la pression totale, dont les composantes sont $n\mathrm{X}$, $n\mathrm{Y}$, $n\mathrm{Z}$ et dont le point d'application a les trois coordonnées moyennes $\frac{1}{n}\Sigma x$, $\frac{1}{n}\Sigma y$, $\frac{1}{n}\Sigma z$.

67. — **Ce qu'on entend par une pression rapportée à l'unité d'aire.**

La pression totale étant simplement proportionnelle à l'aire de l'élément quand on conçoit celui-ci plus ou moins étendu dans son plan autour d'un point donné, il suffira de la construire, à partir de ce point, pour le cas d'une surface égale à l'unité, censée tout entière soumise aux conditions qui règnent à l'endroit dont il s'agit. Alors on aura ce qu'on appelle une *pression rapportée à l'unité de surface,* ou, plus précisément, la *pression* exercée *sur* l'*unité d'aire* de l'élément plan considéré d'abord, dont le contour devient ainsi indéterminé et dont l'orientation seule reste, par conséquent, définie, à l'endroit où l'on doit le mener. Cette orientation s'exprime analytiquement au moyen des trois cosinus directeurs de la normale à l'élément, tirée vers l'extérieur, c'est-à-dire du côté où est la matière exerçant les actions moléculaires qu'il s'agit de totaliser.

68. — **Cas où la pression est, en réalité, une traction, et cas où elle est une pression proprement dite ; ses composantes normale et tangentielles.**

La pression que supporte un élément plan aura, par suite, tout comme les actions élémentaires qui la composent, sa projection sur la normale à l'élément plan *positive* quand elle se trouvera dirigée vers le dehors, c'est-à-dire du côté de la matière l'exerçant ; cas où les attractions intermoléculaires, qui sont justement les actions élémentaires réputées positives, y surpasseront les répulsions. Or il est clair que, dans ce cas où les attractions y dominent, la résultante considérée mérite plutôt le nom de *tension,* ou celui de *traction,* que celui de *pression,* qui, à proprement parler, lui convient seulement quand les répulsions y ont le principal rôle, c'est-à-dire quand sa composante considérée suivant la normale est négative.

Mais on a eu, pour lui attribuer de préférence la dénomination générique de *pression,* la raison d'une bien plus grande fréquence du cas où elle se trouve négative. Elle ne devient même jamais positive dans certains corps, les fluides non visqueux, non plus qu'entre deux solides en contact (p. 48), ni, par conséquent, dans les masses pulvérulentes formées par la juxtaposition d'un grand nombre de petits solides.

Il est clair que la pression ou la traction comprendra, en général, outre sa *composante normale* (négative ou positive), dont il vient d'être parlé et qui s'exerce suivant la normale à l'élément plan, une *composante tangentielle,* c'est-à-dire rasant l'élément plan, et décomposable elle-même en deux composantes tangentielles, suivant deux droites rectangulaires quelconques de l'élément, émanées de son centre de gravité.

69. — Les pressions sont des forces accessibles à nos mesures et finies par unité d'aire.

Si les actions moléculaires individuelles échappent à nos mesures, les pressions ou tractions, qui en constituent des sommes prises, comme l'on voit, de certaines manières, s'évaluent aisément en kilogrammes ; car ce sont elles qui, dans les corps terrestres en équilibre autour de nous, neutralisent la pesanteur. Il suffit, par exemple, de suspendre un poids à un fil vertical, pour que la *tension* ou *traction* produite, à travers une quelconque des sections horizontales de ce fil, par sa partie située au-dessus sur celle qui est au-dessous, fasse équilibre aux autres actions extérieures s'exerçant sur l'ensemble de cette dernière partie et du corps, c'est-à-dire à leur poids total : elle lui est donc égale. Ce fait très simple prouve que *les pressions sont finies* et généralement sensibles *sur une aire finie,* c'est-à-dire *finies par unité d'aire.*

70. — Neutralisation très approchée des pressions et neutralisation analogue de leurs moments, sur un élément de volume.

Il importe d'observer que, dans le calcul, au moyen du principe des quantités de mouvement, de la dérivée par rapport au temps t de la quantité totale de mouvement possédée par un élément de volume suivant un quelconque des axes, cette dérivée, produit de l'accélération moyenne locale correspondante

$$\frac{d^2(x, y, z)}{dt^2},$$

toujours finie, par la masse Σm de l'élément de volume, sera numériquement du troisième ordre de petitesse, comme le volume de cet élément auquel la masse Σm est (toutes choses égales d'ailleurs) proportionnelle. Or, de même, le poids de l'élément, produit de Σm par la gravité ou pesanteur g, sera du troisième ordre. Il faudra donc que l'excédent du premier de ces deux produits sur le second, c'est-à-dire, d'après le principe des quantités de mouvement, la somme algébrique des pressions exercées, suivant l'axe considéré des x, ou des y, ou des z, sur l'élément de volume, à travers toutes ses faces, soit également du troisième ordre, quoique ces faces et, par conséquent, les pressions individuellement éprouvées par elles, soient du second. Donc, *les pressions supportées par les diverses faces d'un élément de volume se neutralisent dans le sens de chaque axe, avec une erreur négligeable comparativement à leurs valeurs.*

On peut en dire autant de leurs moments, même quand on fait passer les axes tout près de l'élément de volume ou à son intérieur, de manière à n'avoir pour tous ses points que des coordonnées x, y, z de l'ordre de ses dimensions. Alors les dérivées en t, comme $\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, des moments des quantités de mouvement, sont évidemment de l'ordre des produits de Σm par ces coordonnées, c'est-à-dire du quatrième ordre, ainsi que les moments du poids de l'élément; tandis que les moments des pressions subies par les diverses faces sont, en général, de l'ordre du produit de ces pressions par les coordonnées, c'est-à-dire seulement du troisième. Ainsi, *les moments des pressions par rapport à chaque axe se neutralisent à eux seuls, sur toute particule, sauf des fractions négligeables de leurs valeurs.*

71. — Circonstances dont dépendent les pressions.

Nous verrons bientôt que cette double annulation, infiniment approchée, de la somme algébrique des pressions exercées suivant chaque axe sur les éléments de volume, et de la somme de leurs moments par rapport au même axe, permet d'exprimer toutes les composantes de pression relatives aux divers éléments plans se croisant en un même point, au moyen de six seulement d'entre elles. Mais il reste à se demander de quoi dépendront, en définitive, ces six composantes et, par suite, toutes les autres.

Si un corps était composé d'atomes uniformément répartis dans l'espace, ou non distribués en groupements spéciaux comme molécules et associations de molécules, son seul mouvement en chaque endroit, à part l'agitation calorifique que définit la température, serait le mouvement moyen local, celui que nos formules représenteront; et se donner, avec la constitution primitive du corps, les déplacements totaux éprouvés, dans ce mouvement bien continu, par les particules d'une région, ce serait, à part encore l'agitation calorifique, s'y donner complètement l'état statique de la matière, dont toutes les actions intermoléculaires sont des fonctions déterminées. Par suite, les pressions dépendraient uniquement, à température constante, des *déplacements dont il s'agit,* ou de ce que nous appelons l'*état statique moyen local.*

Mais il n'en est pas ainsi, et, en réalité, l'*état statique moyen local ne règle immédiatement que les situations des centres de gravité des groupes d'atomes ou de molécules,* sans déterminer d'une manière nécessaire la forme et l'orientation que chaque groupe peut prendre. On conçoit néanmoins que, pour un état statique moyen local *supposé donné arbitrairement,* il existe certaines formes et orientations particulièrement stables, dont chaque groupe, *d'après la place qui lui est faite,* s'accommode pour ainsi dire mieux que de toutes les autres, et dont l'une, à chaque instant la plus voisine, entre toutes, de l'état actuel effectif, tende, vu la petitesse de ce système partiel et de ses déplacements intérieurs, à se produire très vite, au point de se trouver réalisée presque aussitôt que l'est lui-même l'état moyen local correspondant, *pour peu que celui-ci persiste.*

72. — Forces élastiques et état élastique de la matière.

Alors, si la vitesse avec laquelle se succèdent les déformations dans le mouvement moyen local n'est pas trop grande, on pourra supposer que les groupes atomiques ou moléculaires aient sans cesse atteint leur équilibre propre intérieur, lié aux situations actuelles de leurs centres de gravité, c'est-à-dire à l'état statique moyen local; et ce sera, par suite, uniquement celui-ci (abstraction faite de la température) qui réglera les actions intermoléculaires. Donc la pression s'exerçant sur un élément plan donné variera uniquement, à température constante, avec les déformations perceptibles subies à partir de l'état primitif, du moins entre des limites de déformation assez restreintes pour que les mêmes groupements moléculaires s'y maintiennent. De pareilles pressions sont appelées *forces élastiques,* parce qu'elles persistent indéfiniment avec les déformations qui les ont amenées, ou ne disparaissent qu'avec elles; et l'on dit que le corps où elles se produisent est *élastique,* c'est-à-dire, plutôt, *à l'état élastique.*

73. — Parties non élastiques des pressions; frottements intérieurs.

Mais, si les vitesses de déformation de la matière, dans le mouvement moyen local, deviennent assez *grandes,* les groupes moléculaires ou atomiques auront à chaque instant une forme et une orientation *sensiblement* différentes de leurs forme et orientation limites, qui seraient celles de leur équilibre intérieur pour l'état statique moyen local actuel; et, par conséquent, les pressions différeront des forces élastiques. Il s'y adjoindra certains termes, évidemment *d'autant plus grands,* comme les écarts de forme et d'orientation signalés, *que seront plus considérables elles-mêmes les vitesses de déformation* dont il s'agit. Ces termes, parties *non élastiques* des pressions, constitueront, du moins par leurs composantes tangentielles, ce qu'on appelle le *frottement intérieur* du corps ou du milieu. Ils diffèrent, comme on voit, des précédents, c'est-à-dire des parties *élastiques* des pressions, en ce que, au lieu de dépendre de l'*état statique moyen local* actuel, ils dépendent surtout de l'*état dynamique moyen local,* dérivée par rapport au temps de l'état statique de même nom.

74. — Petitesse ordinaire des pressions par rapport aux deux sommes de forces, les unes répulsives, les autres attractives, qui les composent; caractère exceptionnel, à cet égard, de la tension superficielle des liquides.

Observons enfin, avant de quitter ce sujet, qu'une pression (ou une traction) ne se compose pas de forces moléculaires toutes répulsives ou toutes attractives, mais d'un nombre très considérable d'actions de ces deux espèces, qui peuvent s'y neutraliser en plus ou moins grande partie. On conçoit donc que les pressions s'annulent à fort peu près, par exemple, dans un solide homogène d'un poids négligeable ayant sa surface supérieure et latérale libre de tout contact (même atmosphérique ou, s'il le faut, sous le récipient d'une machine à faire le vide), malgré les fortes valeurs des actions moléculaires dont elles sont les sommes algébriques et dont elles représentent certains effets généraux. On conçoit également que, si, dans un corps solide ou fluide, les pressions exercées sur les éléments plans intérieurs (c'est-à-dire éloignés de leurs couches superficielles), ont des valeurs finies par unité de surface, tout en n'étant que des différences de quantités sans doute beaucoup plus grandes, ces pressions puissent atteindre d'énormes valeurs par unité d'aire, sur les éléments plans choisis dans des conditions exceptionnelles *où ne se produirait plus la même neutralisation.*

Ainsi s'explique, au moins comme possible, l'existence, sur les éléments plans qui coupent normalement la surface d'un liquide, de la *tension* dite *superficielle,* force atteignant par unité de longueur de l'élément, malgré une largeur totale (épaisseur des couches superficielles) d'une extrême petitesse impossible ou presque impossible à apprécier, des valeurs sensibles et quelquefois influentes (dans les phénomènes capillaires), quoique d'ordinaire leur petitesse relative permette heureusement de les négliger.

HUITIÈME LEÇON.

RAISONS PHYSIOLOGIQUES ET PSYCHOLOGIQUES DES DÉNOMINATIONS DE FORCES, ACTIONS, TENSIONS, ETC., EMPLOYÉES EN MÉCANIQUE. — FORCES D'INERTIE ET CENTRIFUGES.

75. — **Raison des dénominations d'action et de force données à des produits de masses par des accélérations, quand il s'agit d'accélérations provoquées par nos efforts personnels ou par ceux d'autres êtres vivants.**

Nous pouvons maintenant comprendre pourquoi l'on a, d'une manière générale, appelé *forces* ou *actions*, en y attachant des sens d'*effort* et de *cause*, les produits de masses données par leurs accélérations ou par des composantes de leurs accélérations, c'est-à-dire les quantités de mouvement, totales ou partielles, communiquées à ces masses durant un instant infiniment petit, mais divisées par cet instant ou rapportées à l'unité de temps; et pourquoi l'on a appelé, en particulier, *action* d'un point sur un autre, la quantité de mouvement que cet autre, en vertu des lois physiques, acquiert ainsi par unité de temps à raison de la présence du premier.

Occupons-nous, d'abord, des phénomènes mécaniques auxquels il nous arrive de prendre part, que ce soit, ou non, volontairement.

Il y a en nous toute une catégorie de sensations, concernant les mouvements que nos organes impriment aux corps voisins ou en reçoivent, auxquelles convient le nom général d'*efforts physiques*. Elles se diversifient en *efforts actifs*, soit *moteurs*, soit *résistants* que nous éprouvons quand, par des contractions musculaires conscientes et ordinairement voulues, nous accélérons ou ralentissons un mouvement, et en *efforts passifs* ou *subis* (c'est-à-dire exercés sur nous par une autre personne, ou censés spontanément l'être au point de vue des effets *ressentis,* même quand ces effets sont dus au seul mouvement d'objets inanimés), tels que les sensations variées de *compression,* d'*extension,* de *choc,* etc.

Cela posé, nos efforts tant actifs que passifs sont proportionnés, dans leur grandeur intérieurement perçue, aux déformations simultanées des organes où nous les éprouvons, comme il le fallait bien pour que nous fussions avertis des dangers de rupture que courent ces organes quand les déformations dont il s'agit viennent à dépasser certaines limites. En un mot, l'échelle de nos sensations est à nos organes ce que serait à un dynamomètre flexible la graduation inscrite sur la règle qu'il porte, s'il pouvait, étant animé, lui-même la lire à chaque instant. Or, d'autre part, en vertu de la loi physique (p. 83) qui fait dépendre les pressions, exercées entre parties d'un même corps ou entre corps contigus, surtout de leur état statique moyen local, c'est-à-dire de leurs rapprochements ou écartements moléculaires, il y a aussi corrélation entre les déformations de nos organes et les pressions ou tractions exercées par eux au dehors, qui sont des sommes de quantités de mouvement communiquées dans l'unité de temps aux corps qui les touchent.

Donc, de cette double corrélation résulte, notamment, une correspondance aussi parfaite que possible, *une sorte d'équivalence,* entre chacun de nos efforts volontaires, et le produit de la masse extérieure à laquelle nous l'appliquons par l'accélération que lui impriment nos organes. Celle-ci, bien entendu, n'est pas toujours son accélération totale, mais se compose géométriquement avec ses autres accélérations partielles s'il lui en vient d'ailleurs. Quoi qu'il en soit, de ces deux faits en relation étroite dont l'un, l'effort, peut être regardé comme la *cause* et l'autre, la quantité de mouvement imprimée, comme l'*effet,* c'est le premier, la cause, que nous prenons, d'une manière instinctive, comme mesure de l'autre, l'effet, contrairement à ce que nous faisons le plus souvent; car, ici, la *cause,* nous étant personnelle, se trouve *directement connue* ou s'offre d'elle-même comme terme de comparaison.

Et il suit de là que le mot *effort* ou *force,* propre à désigner cette cause, est employé, presque à notre insu, pour désigner aussi l'effet, savoir, le produit de la masse mue par l'accélération que nous lui communiquons.

76. — Ce qu'ont de vague en Mécanique ces dénominations, entendues dans leur sens naturel.

Cependant nos sensations d'effort, quoique *claires* ou impossibles à confondre avec d'autres, ne sont pas assez *distinctes* (dans leurs éléments) pour servir de base à une véritable évaluation mathématique. Elles constituent, il est vrai, des *grandeurs,* comme toutes nos sensations *susceptibles de plus ou de moins ;* mais elles ne sont pas, à proprement parler, des *quantités,* c'est-à-dire des grandeurs *mesurables,* ou dans lesquelles on puisse nettement discerner et *compter* de petites parties *égales*. Aussi la mesure en efforts des quantités de mouvement imprimées par unité de temps, toute instinctive qu'elle soit, n'est-elle propre, au fond, qu'à obscurcir l'idée de ces quantités, si précise ou contraire sous sa forme purement géométrique ou arithmétique, telle qu'elle s'est offerte dans ce cours (p. 25).

77. — Manière dont s'acquiert, sous forme sensible, la notion du poids des corps.

Un exemple très simple de l'assimilation spontanée de telles quantités de mouvement à des efforts se présente quand nous maintenons un fardeau en équilibre, au moyen d'une de nos mains, le bras pendant verticalement. Le corps ainsi soutenu reçoit sans cesse de nous une accélération, de bas en haut, égale et contraire à celle que lui imprime la pesanteur ; ce qui implique de notre part la communication à ce fardeau, par unité de temps, d'une quantité de mouvement égale à son poids. Il tend donc notre bras au degré précis qu'exige une pareille communication, et qu'accompagnera une sensation d'effort assez nette pour nous permettre d'apprécier ce poids ; de sorte que, conformément à une comparaison ébauchée tout à l'heure, notre bras est alors un véritable dynamomètre élastique, ayant sa graduation, extérieurement invisible, constituée par l'échelle même des sensations que ses divers degrés d'extension font naître en nous. Et le poids des objets nous paraît être dès lors la propriété qu'ils auraient, du moins près de la Terre, de se porter sans cesse vers son centre ou vers le sol, de manière à n'être empêchés par nous d'y tomber qu'au prix d'un certain effort.

78. — Emploi des mêmes dénominations de forces ou d'actions, dans les cas d'accélérations produites sans le concours d'aucun être sensible.

Enfin, comme notre tempérament intellectuel nous porte à spiritualiser le monde physique, à personnifier à notre image les mystérieux agents, totalement inconnus, auxquels un invincible instinct nous fait attribuer les changements que nous y observons, rien ne nous sera plus naturel que de voir en idée, partout où surviendra une accélération positive ou négative de mouvement, une personne invisible, *une force en un mot*, *pousser* ou *retenir* le point matériel qui en sera l'objet, si nous nous la représentons comme un être animé, qui agirait sur le point, c'est-à-dire sur l'objet mû, par pression directe *à l'arrière* ou *à l'avant* de celui-ci. Mais les géomètres préfèrent ordinairement se la représenter agissant sur le point par l'intermédiaire d'un *lien* tiré dans le sens du mouvement ou en sens contraire. De là cette assimilation familière de toute force à une main invisible, qui tendrait une corde non moins invisible attachée au corps.

Un pareil trait ou lien, réduit, pour simplifier, à une droite dont on convient de prendre la longueur proportionnelle à la tension censée produite, c'est-à-dire à la quantité de mouvement imprimée dans sa direction, par unité de temps, au point matériel auquel on suppose fixé son premier bout, est donc devenu, sous le nom de *force,* l'expression sensible de cette quantité de mouvement imprimée. N'y voyons, par conséquent, qu'un symbole, qu'une simple image, d'une chose un peu abstraite, trop abstraite peut-être pour les intelligences étrangères aux conceptions analytiques, mais au fond très claire, puisqu'elle est le produit d'une masse par une accélération. Et gardons-nous de confondre cette quantité précise, constituant le seul sens positif ou démontré des forces mécaniques, avec la signification relativement vague d'*effort musculaire,* mais surtout avec celle, encore moins définie, de *cause physique,* que le mot *force* rappelle également ; notions qu'il faut laisser à d'autres champs d'étude, où notre esprit ne peut malheureusement prétendre qu'à un degré de clarté médiocre.

79. — Légitimité et avantages, à certains égards, de cette interprétation physiologique ou psychologique des produits de masses par des accélérations.

Mais, une fois ce discernement fait, il n'y a pas d'inconvénient à laisser, dans certains cas, toute sa portée à l'image en question, qui est légitime par cela seul que des liens tirés en effet comme elle l'indique produiraient les accélérations observées. En personnifiant la nature d'une manière qui nous est instinctive, elle traduit les problèmes mécaniques dans la langue du sentiment, que nous comprenons (d'une certaine manière) même sans réfléchir, et qui réveille en nous la foule de ces notions, vagues, il est vrai, mais précieuses, dites justement *vérités de sentiment,* notions acquises peut-être par l'expérience des choses, mais trop nombreuses ou trop complexes pour que nous ayons pu les débrouiller. Telles sont, par exemple, toutes celles qui, l'habitude aidant, nous permettent de mouvoir avec tant de précision et de tant de manières nos organes, sans en connaître les ressorts autrement que par une perception des plus confuses.

L'emploi des forces, considérées à la fois dans leur sens géométrique précis et dans leur sens psychologique relativement obscur, pourra donc, quand il s'agira de questions trop difficiles pour que tous leurs éléments soient dès à présent susceptibles d'être mis en pleine lumière, nous permettre d'utiliser ce fonds inépuisable de demi-lueurs d'où ont peu à peu émergé nos connaissances claires, et qui semble être la source des inspirations conduisant aux découvertes.

Ainsi, par exemple, l'idée vulgaire du *poids* des corps, envisagé comme étant chez eux, près de la surface de la terre, une qualité inhérente qui les porte vers son centre et que mesure notre propre effort quand nous les soutenons, a été probablement indispensable pour arriver au grand principe de la conservation de la masse. Car, chez la plupart des hommes, même de science, la notion de *masse,* réduite à la signification vague de *quantité de matière,* reste presque confondue avec celle de *poids,* et n'est pressentie qu'à la faveur de la proportionnalité effective de la masse au poids, ou, tout au plus, de la proportionnalité, seulement entrevue, de la résistance qu'opposent les corps quand on leur communique une vitesse à celle, plus familière, qu'on éprouve à les soulever lentement, c'est-à-dire à les porter. Sans l'admission préalable du sens obscur de l'idée de *poids,* nous ne serions donc jamais, selon toute vraisemblance, arrivés à sa signification géométrique et claire, d'après laquelle le poids est le produit de la masse des corps par l'accélération g que leur imprime la pesanteur.

80. — Des forces fictives dites d'inertie.

Dans les mouvements volontaires où nous nous sentons cause d'une modification de vitesse, il se produit en nous, corrélativement à l'état plus ou moins accusé de contraction de nos muscles, une double sensation, comprenant, d'une part, celle de l'effort exercé ou actif, en rapport avec le mouvement imprimé que nous jugeons être son effet, et, d'autre part, celle de l'effort passif ou subi, c'est-à-dire d'une résistance éprouvée, en rapport avec la quantité équivalente de mouvement détruite sans cesse dans nos organes au fur et à mesure que nous l'y faisons naître. Or nous attribuons d'instinct ce second effort, comme à sa cause, à une propriété qu'aurait la matière de s'opposer à sa mise en mouvement, puis aux modifications de sa vitesse acquise. Et nous le regardons comme s'exerçant non seulement sur nous, mais d'abord sur ce corps même, d'où il nous serait transmis.

La raison en est, probablement, que cette idée de réaction ou de résistance nous sera venue à la suite d'observations dans lesquelles, par exemple, nous produisions un équilibre en appliquant nos deux mains à un même objet, dans deux directions opposées, de manière à fournir nous-même tout à la fois, consciemment, l'action et la réaction. Elle aurait pu nous être suggérée aussi par des phénomènes d'équilibre dus au concours, sinon plutôt au conflit, de notre propre effort et de celui d'autres personnes jugées par nous s'y opposer ; cas où c'était encore sur un même corps que nous voyions se combattre l'action et la réaction. Et notre penchant à généraliser les résultats de l'observation nous aura dès lors fait regarder tout effort employé à mouvoir un corps comme suscitant inévitablement en lui une force résistante égale, éprouvée d'abord par lui-même et se transmettant de là à l'organe ou au corps moteur.

Cette résistance, dont l'effet se constate sur l'organe ou le corps moteur, auquel seul, par conséquent, on doit la dire appliquée, mais *que nous supposons instinctivement s'exercer d'abord sur le corps mû lui-même,* a été appelée la *force d'inertie* de ce dernier corps, parce qu'elle est, à chaque instant, de sens contraire à la direction de son mouvement nouveau, et qu'elle semble, en particulier, *s'opposer,* comme une sorte de paresse, à la cessation de son repos primitif.

Par suite, pour chaque point matériel (ayant des coordonnées appelées x, y, z) d'un système quelconque, la force totale d'inertie, censée appliquée de la sorte à ce point lui-même, sera la résultante de toutes les réactions qui en émanent, égales et contraires aux actions exercées sur lui. Or, celles-ci ont pour résultante le produit de la masse m du point par son accélération totale, ou pour sommes de leurs composantes suivant les axes les trois termes $m\frac{d^2(x, y, z)}{dt^2}$. Donc, les composantes égales et contraires de la force d'inertie seront $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$, suivant les trois axes respectifs des x, y, z. Elles définissent entièrement, pour le géomètre, cette force fictive, qu'une tendance naturelle nous porte à voir appliquée au point même de masse m comme la cause ou la source des réactions qu'il exerce. Aussi appelle-t-on *inerties* du point *suivant* les axes les trois quantités $-m\frac{d^2(x, y, z)}{dt^2}$.

81. — Leur emploi pour rattacher la Dynamique à la Statique et pour unifier le langage.

La considération de cette force fictive a été utilisée par d'Alembert et ensuite par la plupart des mécaniciens, pour ramener, d'une certaine manière, les problèmes de mouvement à des problèmes d'équilibre, ou la Dynamique à la Statique. En effet, la force d'inertie d'un point matériel, *si elle y existait réellement,* ou qu'on pût ainsi composer en une résultante toutes les réactions du point, dont elle est la somme *fictive,* se trouverait exactement égale et opposée à la résultante des vraies actions exercées sur le point et ferait, par conséquent, équilibre à celles-ci.

On le voit, du reste, de suite, en écrivant les équations (17) [p. 58] de mouvement d'un point quelconque sous la forme

$$-m\frac{d^2(x, y, z)}{dt^2} + \Sigma(X, Y, Z) = 0,$$

qui indique la neutralisation mutuelle, suivant chaque axe, de la force d'inertie et des actions ΣX, ΣY, ΣZ appliquées effectivement au point dont il s'agit. Il suffirait donc que les vitesses actuelles du point fussent nulles, *et que les forces d'inertie, cessant d'être purement fictives, devinssent réelles,* pour que le système matériel proposé conservât sa configuration et même sa situation dans l'espace.

On appelle, à proprement parler, *équilibre dynamique* l'équilibre instantané qui existe entre forces s'exerçant sur un système en mouvement, quand celles-ci n'y font naître actuellement aucune accélération; en sorte que l'annulation des vitesses présentes manque seule (la persistance des mêmes actions étant supposée) pour le repos du système. Mais cette expression a été étendue à l'équilibre purement fictif que l'on imagine à chaque instant exister entre les forces d'inertie et les forces *effectives* (c'est-à-dire réelles, *du moins* quant à leurs effets). Ainsi, l'*équilibre dynamique* est censé coexister non seulement avec le mouvement, mais même avec des mouvements variés quelconques. Il ne constitue, au fond, qu'une certaine manière de rattacher la Dynamique à la Statique.

La considération des forces d'inertie permet, déjà à ce point de vue, d'unifier plus complètement le langage de la Mécanique. Et elle le permet encore à d'autres égards. Par exemple, on pourra évidemment regarder les diminutions des quantités de mouvement, d'un instant à l'autre, comme étant (p. 64) les *impulsions* des forces d'inertie, les diminutions analogues des moments de ces quantités de mouvement comme en étant (p. 65) les *impulsions de rotation;* et, de même, les diminutions des demi-forces vives comme constituant les *travaux* des forces d'inertie, conformément à la notion du travail qui sera exposée dans la prochaine Leçon. Alors les principes des quantités de mouvement, des moments, de l'énergie, admettront des énoncés plus homogènes et plus rapprochés de ceux des théorèmes de Statique; car ils reviendront à dire que la somme algébrique soit des impulsions des forces non réciproques (tant extérieures que d'inertie) exercées suivant un axe quelconque, soit de leurs impulsions de rotation relatives à un axe quelconque, soit de leurs travaux joints à ceux des forces réciproques, reste sans cesse égale à zéro.

82. — Force centrifuge dans un mouvement de rotation uniforme.

C'est surtout quand un système matériel, supposé sans relations extérieures, affecte une configuration invariable, dont dépendent les actions mutuelles de ses points, et se trouve animé d'une simple rotation uniforme connue autour d'un axe fixe, que la considération des forces d'inertie présente quelque utilité; car elle permet bien réellement de se le figurer en repos et de l'examiner pour ainsi dire à l'aise, en le soustrayant au mouvement qui dérobait sans cesse à la vue et à l'attention ses diverses parties.

Dans ce cas, chaque point, qu'anime une vitesse V égale au produit de sa distance R à l'axe par la *vitesse angulaire* donnée ω (vitesse commune des points dont la distance à l'axe est 1), a pour accélération totale son accélération centripète

$$\frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R,$$

dirigée vers l'axe suivant le rayon de courbure R de sa trajectoire circulaire. Donc la force d'inertie $-m\omega^2 R$, appelée alors *force centrifuge,* a sa direction opposée au rayon R et non moins invariable *dans le système* que l'est sa grandeur absolue $m\omega^2 R$.

Comme l'introduction fictive de cette force établit l'équilibre avec les actions intérieures exercées sur chaque point, la forme du système et les réactions mutuelles de ses diverses parties ne diffèrent pas de celles qu'on y observerait à l'état d'immobilité si, en effet, de pareilles forces extérieures $m\omega^2 R$ s'y trouvaient partout appliquées à l'opposite de l'axe donné de rotation. Les forces centrifuges sont donc, pour un système animé d'un mouvement uniforme de rotation et parvenu à une forme constante, des forces qui, si l'on anéantissait la rotation donnée, en tiendraient lieu, c'est-à-dire conserveraient dans le système, réduit au repos, la configuration et les actions intérieures mutuelles qu'y fait naître l'influence de cette rotation.

Ainsi le mouvement ne produit pas des forces centrifuges, mais il produit les effets qu'auraient celles-ci sur le corps en repos; et l'on peut dire que *les forces centrifuges sont l'équivalent statique de la rotation*.

83. — Forces centrifuges et inerties tangentielles dans des mouvements quelconques.

Par extension, on appellera *force centrifuge* d'un point, dans un mouvement quelconque, la composante de la force d'inertie de ce point, suivant le prolongement du rayon de courbure R de sa trajectoire. On voit qu'elle aura pour valeur absolue $m\frac{V^2}{R}$, c'est-à-dire le produit de la masse du point par son accélération centripète $\frac{V^2}{R}$, quotient du carré de sa vitesse par sa distance R au centre autour duquel il tourne actuellement. Quant à l'autre composante, $-m\frac{dV}{dt}$, de la force d'inertie, composante opposée en direction (quand elle est négative) à la vitesse V et tangente à la trajectoire, on pourrait l'appeler l'*inertie tangentielle du point*.

NEUVIÈME LEÇON.

PRINCIPE DES FORCES VIVES POUR UN SYSTÈME PARTIEL. TRAVAIL DES FORCES. — ÉNERGIE INTERNE.

84. — Extension du principe des forces vives au cas d'un système partiel.

De même que nous avons étendu les principes des quantités de mouvement et des moments à des systèmes partiels, c'est-à-dire à des systèmes sur lesquels s'exercent certaines actions extérieures en outre des actions intérieures égales et opposées deux à deux, de même aussi il y a lieu de chercher ce que devient, pour un tel système partiel, le principe des forces vives, c'est-à-dire la loi fondamentale de la conservation des forces vives ou de l'énergie.

Souvenons-nous, dans ce but, que nous avons, de la formule exprimant le principe des forces vives pour le système complet auquel appartient notre système partiel, déduit les équations de mouvement des divers points de ce dernier,

$$(24)\qquad m\frac{du}{dt}=\Sigma X,\qquad m\frac{dv}{dt}=\Sigma Y,\qquad m\frac{dw}{dt}=\Sigma Z,$$

en la différentiant par rapport à t, groupant ensemble tous les termes du résultat qui contenaient en facteur la même composante u, v ou w de vitesse, et annulant enfin le coefficient total de cette composante. Donc, à partir des équations ainsi obtenues (24), on parviendra au principe que l'on cherche (généralisé de celui de la conservation des forces vives), en suivant la marche inverse, c'est-à-dire en multipliant toutes les équations, comme (24), relatives aux divers points du système *partiel*, par les composantes correspondantes u, v ou w de vitesse, et puis faisant la somme. Or cela revient évidemment, sauf l'introduction du facteur infiniment petit dt, à multiplier les équations (24) par les chemins $u\,dt = dx$, $v\,dt = dy$, $w\,dt = dz$, parcourus suivant les axes durant un instant dt, puis à ajouter les résultats analogues d'abord pour un seul point du système partiel, et ensuite pour tous.

Dans le premier membre, chaque expression de la forme $m(u\,du + v\,dv + w\,dw)$ sera la différentielle, $d\left(\frac{mV^2}{2}\right)$, de la demi-force vive, $\frac{m}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ ou $\frac{m}{2}V^2$, d'un des points : la somme de toutes les expressions pareilles, $d\sum \frac{mV^2}{2}$, représentera par suite l'accroissement, pendant l'instant dt, de la demi-force vive totale ou énergie actuelle du système.

Quant au second membre obtenu, valeur de cette demi-force vive acquise, il se composera d'autant de termes triples qu'il existera de forces $F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ agissant sur le système partiel; et chacun d'eux aura la forme $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ ou sera la somme des produits des trois composantes de la force considérée par les composantes analogues du déplacement de son point d'application durant l'instant dt.

83. — Travail (ou apport de demi-force vive) des forces.

Or appelons ds ce déplacement, élément $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ de trajectoire parcouru par le point d'application durant le temps dt. Les cosinus directeurs de ds seront respectivement $\frac{(dx, dy, dz)}{ds}$, ceux de la force F, $\frac{(X, Y, Z)}{F}$; et l'angle, que j'appellerai α, de la force F avec l'élément ds du chemin décrit, aura, comme on sait, pour cosinus, la somme des produits deux à deux des cosinus directeurs précédents, c'est-à-dire le rapport

$$\frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{F\,ds}.$$

Ainsi, l'expression $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ deviendra simplement $F\,ds\cos\alpha$, ou le produit soit du chemin parcouru ds par la projection $F\cos\alpha$ de la force sur ce chemin, soit de la force F par la projection $ds\cos\alpha$, sur elle, du chemin ds parcouru. Tel sera donc l'*apport de demi-force vive* dû à la force F, durant l'instant dt, au profit de tout système partiel comprenant son point d'application, c'est-à-dire au profit de ce point d'application lui-même, auquel le système se réduit dans le cas particulier le plus simple; et il en résultera, par *unité de temps*, l'apport

$$F\frac{ds}{dt}\cos\alpha = FV\cos\alpha.$$

Cette demi-force vive ou énergie actuelle, ainsi produite par une force donnée F, et qui, pour un temps fini quelconque $\int dt$, vaudra l'intégrale $\int F\cos\alpha\, ds$ ou $\int (FV\cos\alpha)\, dt$, s'appelle le *travail* de la force.

86. — Composition et décomposition algébriques du travail, dans les compositions et décompositions géométriques des forces.

Son expression $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, pour un instant dt, étant linéaire par rapport à X, Y, Z, sa valeur ne sera nullement altérée par une décomposition géométrique quelconque de la force F en forces partielles, dont les composantes suivant les axes, que nous appellerons X_1, Y_1, Z_1 pour l'une, X_2, Y_2, Z_2 pour une deuxième, X_3, Y_3, Z_3 pour une troisième, etc., auront toujours les trois sommes respectives X, Y, Z. En d'autres termes, les travaux simultanés des forces partielles, savoir

$$X_1\,dx + Y_1\,dy + Z_1\,dz, \quad X_2\,dx + Y_2\,dy + Z_2\,dz, \quad \ldots,$$

donneront, si on les ajoute algébriquement, le travail correspondant

$$(X_1 + X_2 + \ldots)\,dx + (Y_1 + Y_2 + \ldots)\,dy + (Z_1 + Z_2 + \ldots)\,dz$$

ou

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

de leur résultante F. On peut donc grouper à volonté, en les décomposant et recomposant, toutes les forces appliquées à un *même* point, sans changer leur travail total.

C'est une propriété du travail, analogue à celles que présentent, relativement à leurs composition et décomposition algébriques, les projections et les moments des forces. Mais, tandis que, pour pouvoir composer ou décomposer par voie de simple addition ou soustraction algébrique ces projections et ces moments, il faut les rendre en quelque sorte homogènes, en les prenant par rapport à une même direction ou à un même axe, ici, au contraire, les travaux sont toujours directement comparables et combinables, sans égard à aucune direction, de même que l'étaient déjà (p. 19) les demi-forces vives décomposées suivant trois sens rectangulaires.

87. — Énergie potentielle et énergie totale d'un système partiel; variation de l'énergie totale.

Cela posé, distinguons, dans notre système partiel, les actions intérieures, égales et opposées deux à deux, d'avec les forces extérieures; et, pour les premières, considérant un quelconque des couples de points du système, dont r désignera la droite de jonction, ajoutons les travaux de l'action F exercée sur l'un de ces points par l'autre, et de la réaction $-$F éprouvée par celui-ci.

Les composantes de la première, ainsi que les coordonnées de son point d'application, étant respectivement X, Y, Z, x, y, z, et celles de la seconde, X_1, Y_1, Z_1, x_1, y_1, z_1, nous savons qu'on aura

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= -X_1 = F\frac{x_1 - x}{r}, \\ Y &= -Y_1 = F\frac{y_1 - y}{r}, \\ Z &= -Z_1 = F\frac{z_1 - z}{r}. \end{aligned}\right.$$

Par suite, la somme des deux travaux en question,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,\quad X_1\,dx_1 + Y_1\,dy_1 + Z_1\,dz_1$$

sera

$$(26)\qquad -F\frac{(x_1 - x)(dx_1 - dx) + (y_1 - y)(dy_1 - dy) + (z_1 - z)(dz_1 - dz)}{r},$$

ou simplement $-F\,dr$, vu que le numérateur vaut ici $r\,dr$ à cause de l'identité

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = r^2,$$

différentiée et divisée par 2.

Donc le travail total, pendant un instant dt, des deux actions mutuelles d'un couple de points, se réduit au produit de l'une de ces actions (comptée positivement quand elle est attractive) par le rapprochement $-dr$ qu'éprouvent les deux points.

Et comme, enfin, l'action mutuelle F sera ou la dérivée en r de l'énergie potentielle de pesanteur $-\sum \frac{kmm'}{r}$ du système partiel, si la droite de jonction r est de grandeur sensible, ou la dérivée en r de son énergie potentielle interne Φ, si cette droite est, au contraire, de grandeur imperceptible, la somme de tous les travaux pareils constituera la différentielle totale, *changée de signe,* de ce que l'on peut appeler l'*énergie potentielle propre* du système partiel, fonction de toutes les distances de ses points, comprenant, d'une part, l'énergie potentielle de pesanteur $-\sum \frac{kmm'}{r}$ de ses parties les unes vers les autres, et, d'autre part, son énergie potentielle interne Φ, localisée dans ses divers éléments de volume.

Si les actions réciproques ou intérieures exercées très près de la surface se trouvent modifiées par la présence de la matière extérieure, il n'en résulte point d'erreur sensible dans $d\Phi$, vu que les termes correspondants de cette différentielle sont, comme on a vu (p. 38), insignifiants par rapport à ceux qui concernent les distances r de couples atomiques intérieurs.

Donc, en représentant maintenant par $\Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ les travaux des *seules* actions *extérieures* pendant l'instant dt, et, de plus, par R les distances mutuelles sensibles des points du système partiel, afin de les distinguer de leurs distances mutuelles insensibles r, il viendra

$$d\sum \frac{mV^2}{2} = d\sum \frac{kmm'}{R} - d\Phi + \sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

ou bien

$$(27) \qquad d\left(\sum \frac{mV^2}{2} + \Phi - \sum \frac{kmm'}{R}\right) = \sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Or, dans cette équation, la somme

$$\sum \frac{mV^2}{2} + \Phi - \sum \frac{kmm'}{R}$$

de l'énergie actuelle du système considéré et de son énergie potentielle propre constitue son *énergie totale,* que nous représenterons par $\mathcal{E}$.

L'équation (27) peut donc s'écrire

$$(27\ bis) \qquad d\mathcal{E} = \Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Ainsi le principe cherché, dit *des forces vives* ou *de l'énergie,* signifiera que *l'énergie totale du système considéré, somme de sa demi-force vive, de l'énergie de pesanteur de ses parties les unes vers les autres, et de son énergie potentielle interne, croît, d'un instant à l'autre, de tout le travail produit par les actions qui, du dehors, s'exercent sur lui* (1).

88. — **Tout travail est une consommation d'énergie potentielle.**

Il est bon d'observer que, si l'on passait du système partiel proposé au système complet ou indépendant auquel il appartient, le travail de chaque action extérieure se grouperait avec celui d'une réaction égale et contraire pour donner la différentielle partielle, changée de signe, de l'énergie potentielle du système complet par rapport à la droite de jonction de deux points suivant laquelle cette action extérieure s'exerce ; de sorte qu'un travail exprime toujours une variation simultanée, prise en signe contraire, d'une énergie potentielle, ou autrement dit, une *dépense*, une *consommation* d'énergie potentielle. Par conséquent, le travail d'une force, *pour tout déplacement élémentaire donné de son point d'application,* peut être défini *la quantité d'énergie potentielle que cette force y transforme en énergie actuelle de ce point d'application.*

On le vérifie aisément pour l'action totale exercée sur un point (x, y, z); sa composante suivant la droite quelconque choisie, par exemple, comme axe des x, a la valeur $-\frac{d\Psi}{dx}$, ainsi qu'on l'a vu plus haut en posant les formules (5) [p. 24]; et elle égale, en conséquence, le quotient, par tout déplacement élémentaire dx qu'éprouverait ce point suivant la direction proposée, du décroissement simultané $-d\Psi$ de la fonction des coordonnées ou des situations de tous les points du système complet appelée *énergie potentielle.* Par suite, le travail correspondant, produit du déplacement dx par cette

(1) On pourrait encore ne pas grouper deux à deux les actions intérieures de pesanteur, mais laisser les travaux de ces actions dans le second membre, afin que celui-ci comprît, pour chaque point, le travail de son *poids* tout entier, et alors le premier membre ne contiendrait plus que la variation de l'énergie actuelle du système avec celle de son énergie potentielle interne.

composante de même sens de la force, est bien la diminution corrélative $-\frac{d\Psi}{dx}dx$ de l'énergie potentielle; et l'on peut dire que *la composante, suivant une direction quelconque, de l'action totale exercée sur un point, exprime la consommation d'énergie potentielle qu'exige, par unité du chemin parcouru, un déplacement infiniment petit du point suivant cette direction.*

Ainsi une force, exprimée en fonction de ce qu'il y a *de plus réel* en Mécanique, savoir, en fonction d'énergies et de longueurs, est la dérivée d'une énergie (ou d'un travail) par rapport à une coordonnée.

89. — Complications diverses dans l'emploi du principe des forces vives.

Dans le principe des forces vives appliqué à un système partiel, l'énergie *totale* du système joue donc le rôle qu'avaient la projection totale ou le moment total, relatifs à un axe, de la quantité de mouvement du système, dans les principes généraux des quantités de mouvement ou des moments; et l'on voit de même le travail des actions extérieures y prendre le rôle qui, dans ces mêmes principes, revenait à l'impulsion soit ordinaire, soit *de rotation* des actions extérieures. Mais il importe d'observer que l'énergie totale constitue une notion ou une chose plus complexe que les quantités de mouvement ou leurs moments. En effet, tout n'y est pas de la demi-force vive, c'est-à-dire une réalité en rapport avec le mouvement *actuel,* ou exprimée et mise en jeu par celui-ci, comme le sont ces autres quantités; car, deux de ses parties sur trois, savoir, Φ et $-\sum\frac{kmm'}{R}$, représentent de l'énergie *potentielle.* Par suite d'une plus grande portée, d'une pénétration plus intime dans les détails des phénomènes, le principe des forces vives est donc moins simple que les autres.

Or sa complication, au point de vue du mouvement moyen local ou visible d'une particule de matière, est encore accrue, dans tous les termes non relatifs aux forces de pesanteur, par le fait de l'agitation calorifique qui, au contraire, s'élimine des équations exprimant les deux autres principes.

90. — Des complications dues à l'agitation calorifique.

Appelons, en effet, pour fixer les idées, x, y, z les coordonnées *moyennes* d'un point matériel quelconque du système, coordonnées ne différant pas d'une manière appréciable de ses coordonnées *vraies* à l'époque t; et ξ, η, ζ les composantes de son déplacement *calorifique,* ou ce qu'il faut ajouter à ces coordonnées moyennes pour avoir les coordonnées vraies. Les quantités ξ, η, ζ seront négligeables devant x, y, z et, de plus, par définition même, elles se trouveront aussi souvent et autant négatives que positives, ou auront leurs valeurs moyennes, soit pour un même point durant un temps perceptible très court, soit même à un instant quelconque pour tous les points situés dans une étendue à peine visible, négligeables en comparaison de leurs valeurs ordinaires. Mais leurs dérivées premières et secondes par rapport au temps, composantes de la vitesse ou de l'accélération *d'agitation,* seront au contraire sensibles, sinon même considérables, tout en s'annulant *en moyenne* dans toute étendue très petite, d'après la définition de ξ, η, ζ qui astreint ces déplacements et, par suite, leurs dérivées en t, à y avoir leurs valeurs moyennes sans cesse nulles.

91. — Cette agitation ne modifie ni les quantités de mouvement, ni leurs moments, pour des particules matérielles d'étendue perceptible.

Cela étant admis, d'une part, la quantité de mouvement d'un corps, ou seulement d'un élément de volume, suivant l'axe des x par exemple, quantité exprimée par $\sum m\left(\frac{dx}{dt}+\frac{d\xi}{dt}\right)$, et, d'autre part, le moment correspondant

$$\sum m\left[(y+\eta)\left(\frac{dz}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}\right)-(z+\zeta)\left(\frac{dy}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\right)\right]$$

ou, simplement,

$$\sum m\left[y\left(\frac{dz}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}\right)-z\left(\frac{dy}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\right)\right],$$

ne se trouvent pas changés d'une manière appréciable par le mouvement calorifique, c'est-à-dire sont réductibles respectivement à $\sum m\frac{dx}{dt}$ et à $\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)$. Car on peut admettre que, dans des étendues très inférieures même à un élément de volume, ou assez restreintes pour que x, y, z n'y varient pas sensiblement, les composantes $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ de la vitesse d'agitation affectent autant un sens que le sens contraire et ne donnent que des quantités de mouvement $\sum m\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ algébriquement nulles.

D'ailleurs, les vitesses mesurables $\frac{d(x, y, z)}{dt}$ de chaque point pourront n'y être pas distinguées de celles du mouvement moyen local. En effet, elles n'en diffèrent que par les vitesses propres des déformations et rotations des groupes moléculaires corrélatives non à l'agitation calorifique, mais au mouvement moyen local. Or ces déformations et rotations, exprimées dans un même groupe par des déplacements relatifs imperceptibles comme ses dimensions, ne changent pas plus souvent de sens que ne le font les déformations moyennes locales ou visibles dont elles sont solidaires; ce qui rend évidemment les rapidités de variation de ces déplacements (c'est-à-dire les vitesses et accélérations correspondantes) aussi négligeables qu'ils le sont eux-mêmes sans cesse en grandeur absolue.

92. -- **Mais elle ajoute à la demi-force vive du mouvement visible une demi-force vive, dite énergie actuelle calorifique ou énergie actuelle interne, généralement considérable.**

Mais on n'en peut pas dire autant de la demi-force vive

$$
(28)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}+\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]\\
&\quad = \frac{1}{2}\sum m\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)+\frac{1}{2}\sum m\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)\\
&\qquad +\sum m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

La dernière somme Σ, seule, y est formée de parties qui se neutralisent, vu leurs facteurs $m\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$, de signes variés dans chaque petite et même imperceptible étendue où leurs autres facteurs $\frac{d(x, y, z)}{dt}$ peuvent être censés constants. Les deux termes précédents expriment, l'un, savoir $\frac{1}{2}\sum m\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)$, la demi-force vive *non* calorifique, qui correspond au déplacement des situations moyennes, c'est-à-dire très sensiblement, comme on vient de voir, au mouvement moyen local seul perceptible, l'autre, $\frac{1}{2}\sum m\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)$, la demi-force vive d'agitation ou calorifique, évaluée comme si les situations moyennes des molécules étaient fixes, ou qu'il n'y eût pas de mouvement visible.

Cette seconde partie, sensible seulement au thermomètre ou en tant que chaleur, vient donc, en s'adjoignant à la demi-force vive du mouvement visible, compliquer l'expression de l'énergie actuelle. Comme la température est la seule variable connue dont dépende l'agitation calorifique, dans un corps donné et qui a les situations moyennes, également données, de ses divers points matériels, définies par leurs distances mutuelles, cette demi-force vive du mouvement imperceptible sera, pour chaque particule d'un corps, une certaine fonction de sa température, et, en outre, des distances existant entre les situations actuelles *moyennes* de ses points. Or ces distances dépendront elles-mêmes uniquement (du moins à la température donnée) de l'état statique moyen local ou visible, quand on pourra faire abstraction du frottement intérieur et supposer ainsi, à chaque instant, atteinte la forme d'équilibre des groupes moléculaires corrélative à l'état statique moyen local réalisé. En un mot, la demi-force vive calorifique ne sera, le plus souvent, dans une particule donnée dont la contexture (groupement moléculaire) ne s'altérera pas, fonction que de la température et de ses déformations visibles ou d'ensemble.

Quoi qu'il en soit, cette demi-force vive calorifique, se trouvant évidemment pareille dans des particules similaires, peut être rapportée à l'unité de masse, mieux encore que l'énergie potentielle interne; et, comme elle n'est d'ailleurs pas moins invisible que celle-ci, on l'appelle énergie actuelle *interne,* c'est-à-dire cachée.

93. — Énergie interne totale ; sa division en une énergie calorifique et une énergie élastique ou de ressort.

Il sera, par suite, naturel de la séparer de la demi-force vive du mouvement moyen local ou perceptible, dans l'expression de l'énergie totale du système, pour la joindre plutôt à l'énergie potentielle interne, avec laquelle elle a, comme on voit, quelque analogie; et l'on appellera *énergie interne totale* ou, simplement, *énergie interne,* cette somme des deux énergies internes, potentielle et actuelle.

L'énergie potentielle interne de la particule considérée, fonction de toutes les imperceptibles droites actuelles de jonction de ses points, aura, elle aussi, sa partie dépendant directement de l'agitation calorifique (c'est-à-dire de la température) et des distances existant entre les situations moyennes des points matériels, en outre d'une autre partie où figurent ces seules distances et qui, par conséquent, subsisterait sans le mouvement calorifique, pourvu que, sans lui, les distances dont il s'agit se réalisassent.

On serait, il est vrai, à première vue, tenté de regarder comme insignifiants, dans l'expression de l'énergie potentielle interne Φ, les petits écarts calorifiques ξ, η, ζ des coordonnées des molécules de part et d'autre des valeurs moyennes x, y, z, tant à cause de leur extrême petitesse, les dérobant absolument à l'observation, qu'à cause de l'annulation de leurs valeurs moyennes, qui entraîne celle du total des termes du premier degré en ξ, η, ζ par lesquels débute le développement de Φ suivant les puissances de ces écarts ξ, η, ζ. Mais il ne faut pas oublier que les variables en fonction desquelles Φ change avec une rapidité extrême sont justement les plus petites et plus insensibles distances intermoléculaires ou interatomiques, celles que les vibrations calorifiques (à phases très rapidement changeantes d'un atome à l'autre) font varier *dans un très grand rapport* ou presque du tout au tout, comme le prouvent les phénomènes de fusion, volatilisation, dissolution, dissociation et décomposition chimique par la chaleur.

Il y aura donc une grande partie de l'énergie potentielle interne Φ, de la forme $\Phi(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, \ldots) - \Phi(x, y, z, \ldots)$, qui sera directement *calorifique,* ou fonction non seulement de x, y, z, ..., c'est-à-dire de la configuration visible de la matière, mais aussi de la température, c'est-à-dire de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$; sans compter, bien entendu, une première partie, de la forme $\Phi(x, y, z, \ldots)$, où n'entreront que les distances entre les situations moyennes des molécules. Celle-ci, n'étant fonction, du moins à l'état élastique et à la température donnée, que des déformations d'ensemble et visibles de la matière, peut être appelée *énergie potentielle d'élasticité* ou encore *énergie propre de ressort*. La température, si elle y figure, ne le fait que par l'influence qu'elle peut avoir sur la manière dont les groupes atomiques ou moléculaires se disposent presque instantanément quand on astreint leur ensemble à réaliser une configuration perceptible définie.

En résumé, l'énergie interne comprendra une partie potentielle purement élastique d'ordinaire, qui ne dépendra pas ou ne dépendra qu'indirectement de la température, plus deux parties, l'une actuelle, l'autre potentielle, proprement calorifiques et, par conséquent, fonctions directes de la température.

Les trois parties réunies, rapportées à l'unité de masse, donneront pour somme (du moins quand on pourra faire abstraction du frottement intérieur) une certaine fonction U de la température et des déformations d'ensemble ou visibles éprouvées par la particule : son produit MU par la masse M de la particule sera l'*énergie interne* de celle-ci.

94. — Réduction fréquente de l'énergie totale à l'énergie interne et à la demi-force vive du mouvement visible.

L'énergie totale du système partiel se composera : 1° de cette énergie interne, évaluée séparément pour chacun de ses éléments de volume et puis sommée dans toute son étendue; 2° de la demi-force vive du mouvement moyen local ou visible, dont l'étude fait l'objet principal de la Mécanique physique ; 3° enfin de l'énergie de pesanteur $-\sum \frac{kmm'}{R}$ de ses divers points les uns vers les autres, où ne figurent que des distances R de grandeur notable, et sur laquelle, par suite, les imperceptibles changements de distance dus à l'agitation calorifique sont sans influence sensible.

Au reste, cette troisième partie est évidemment négligeable quand le système considéré n'a que peu d'étendue et, en particulier, quand il se réduit à l'une de ces particules matérielles que nous appelons des *éléments de volume*. Dans ce dernier cas, l'augmentation, durant un instant dt, de la somme que donnent son énergie interne et la demi-force vive de son mouvement moyen local ou mouvement de son centre de gravité, égalera donc le travail total, pendant le même instant, des forces extérieures appliquées à sa masse, forces comprenant, d'une part, le poids de ses molécules, ou action totale, sur sa matière, de celle qui en est à des distances notables, d'autre part, les actions moléculaires subies par sa couche superficielle et provenant de la matière extérieure contiguë.

Il pourrait s'exercer en outre du dehors, sur la particule, quelques-unes de ces actions encore mal expliquées qui constituent les forces électriques. Nous nous bornerons au cas où il sera permis de les regarder comme modifiant simplement, en grandeur et en direction, le poids des molécules, d'une manière uniforme pour toutes les molécules existant dans une étendue très petite en tous sens ; et nous désignerons par G ce qui devient alors à l'époque t, dans la particule en question, l'accélération correspondante, qui s'appellerait g, à la surface de la terre, pour la pesanteur (apparente) toute seule.

93. — Le travail de la pesanteur est indépendant du mouvement calorifique.

Le poids ainsi modifié des molécules, produit de cette accélération G, constante en grandeur et en direction dans tout l'élément, par leurs masses respectives m, aura pour travail total durant un instant dt, à part le facteur $G\,dt$, la somme des produits de ces masses m par les composantes de leurs vitesses dans la direction de G. Si a, b, c désignent les trois cosinus directeurs de celle-ci, les composantes en question, projections totales sur elle des trois composantes des mêmes vitesses suivant les axes, auront évidemment pour expression, avec les notations de tout à l'heure (p. 103),

$$a\frac{d(x+\xi)}{dt}+b\frac{d(y+\eta)}{dt}+c\frac{d(z+\zeta)}{dt}.$$

La somme de leurs produits par les masses m sera donc

$$a\sum m\frac{d(x+\xi)}{dt}+b\sum m\frac{d(y+\eta)}{dt}+c\sum m\frac{d(z+\zeta)}{dt}.$$

Enfin, rappelons-nous que

$$\sum m\frac{d(x+\xi)}{dt},\quad \sum m\frac{d(y+\eta)}{dt},\quad \sum m\frac{d(z+\zeta)}{dt}$$

sont les produits de la masse totale Σm du volume élémentaire par cette moyenne des vitesses $\frac{d(x+\xi)}{dt}$, $\frac{d(y+\eta)}{dt}$, $\frac{d(z+\zeta)}{dt}$, qui est la vitesse correspondante du centre de gravité de l'élément, ou la vitesse (suivant chaque axe), propre au mouvement moyen local, dont $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ne diffèrent pas d'une manière appréciable ; et nous aurons, pour le travail total considéré de la pesanteur,

$$(29)\quad (\Sigma m \mathrm{G})\left(a\frac{dx}{dt}+b\frac{dy}{dt}+c\frac{dz}{dt}\right)dt=(\Sigma m \mathrm{G})(a\,dx+b\,dy+c\,dz),$$

c'est-à-dire le produit du poids modifié, $\Sigma m\mathrm{G}$, de la particule, par la composante, suivant sa direction, du déplacement qu'éprouve son centre de gravité ou, encore, qu'éprouve sensiblement toute sa matière dans son mouvement moyen local.

Donc l'agitation calorifique n'a pas d'influence sur le travail que la pesanteur ou les autres forces analogues effectuent, pour des déplacements visibles donnés, dans un élément de volume, ni par suite, sur celui qu'elles produisent dans un système matériel quelconque.

DIXIÈME LEÇON.

SUITE DE L'ÉTUDE DES FORCES VIVES ET DU TRAVAIL : FLUX DE CHALEUR; LOI FONDAMENTALE DE LA THERMODYNAMIQUE.

96. — **Du travail des actions moléculaires exercées du dehors sur la couche superficielle d'une particule ou d'un corps : il comprend une première partie, dite flux de chaleur, qui est purement calorifique.**

Si le travail de la pesanteur ne se trouve pas rendu plus complexe par les invisibles vibrations qui constituent la chaleur, il n'en est pas de même du travail des actions moléculaires exercées, par exemple, à travers les faces d'un élément de volume, et à des distances imperceptibles, sur sa couche superficielle. Ces forces sont grandement modifiées par l'agitation calorifique, qui fait varier les plus petites et plus influentes distances intermoléculaires de fractions comparables à leurs valeurs et dans des sens aussi rapidement changeants que le sont ceux mêmes des vitesses correspondantes. Par suite, les produits des composantes X, Y, Z, suivant les axes, de ces forces, par celles, $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$, des vitesses en question, n'ont généralement plus, sur de petites étendues, leurs valeurs moyennes nulles.

Et, en effet, si l'on suppose d'abord, pour simplifier, qu'il n'y ait pas de mouvement moyen local, ou que l'agitation calorifique règne seule, les travaux, $X\,d\xi + Y\,d\eta + Z\,d\zeta$, des forces dont il s'agit, se trouveront, en général, tellement peu négligeables, que l'agitation calorifique et, avec elle, l'énergie interne totale s'accroîtront, comme on sait, dans les régions où la température est le plus basse, pour diminuer au contraire dans les régions où elle est le plus élevée ; ce qui ne peut évidemment se faire que grâce aux travaux considérés, des actions moléculaires s'exerçant à travers les surfaces de séparation de ces régions diverses.

Comme l'énergie ainsi transmise d'une région à l'autre est sensible seulement sous forme de chaleur, on donne au travail total, effectué de la sorte dans le mouvement imperceptible d'agitation, des forces s'exerçant à travers un élément plan sur la matière contiguë située d'un côté désigné de cet élément, le nom de *flux de chaleur* (1). Il sera fini par unité d'aire et durant l'unité de temps, puisqu'il aura transmis, au bout d'un temps fini, une quantité sensible d'énergie calorifique au volume de matière que limite une surface finie. On voit en outre que, rapporté à l'unité d'aire, un pareil flux dépendra de l'état statique moyen local et de la température qui existent près de l'élément plan, mais surtout des inégalités de distribution de celle-ci dans le voisinage, ou de sa rapidité de variation suivant les divers sens, dans une étendue extrêmement petite. En effet, le flux s'annulera si la température y devient uniforme.

Revenons maintenant au cas général d'un mouvement moyen local ou visible, se superposant à l'agitation calorifique d'ordinaire beaucoup plus rapide. Comme celle-ci se fait très sensiblement de la même manière que si elle était seule, du moins quand le frottement intérieur est négligeable ou quand les groupes moléculaires ont à chaque instant leur forme et leur orientation d'équilibre pour l'état moyen local actuel, les travaux,

$$\mathrm{X}(dx + d\xi) + \mathrm{Y}(dy + d\eta) + \mathrm{Z}(dz + d\zeta),$$

dont il s'agit d'évaluer la somme, auront une première partie, $\mathrm{X}\,d\xi + \mathrm{Y}\,d\eta + \mathrm{Z}\,d\zeta$, identique à ce qu'ils seraient tout entiers si l'agitation calorifique régnait seule.

En d'autres termes, cette partie donnera, en tout, sur un élément plan, le flux de chaleur *qui le traverse*, flux ne différant pas sensiblement de celui qu'on aurait, pour la répartition actuelle de la température tout près de l'élément et pour l'état statique moyen

(1) Il n'est peut-être pas inutile de dire ici que, lorsqu'on l'évaluera en *calories*, ce que font d'ordinaire les physiciens, cette valeur devra être convertie en kilogrammètres, c'est-à-dire multipliée par 425 (équivalent mécanique de la chaleur) avant de pouvoir figurer dans nos formules.

local qu'on y observe, si cet état statique persistait, ou qu'il n'y eût pas de mouvement visible.

97. — Il comprend en outre le travail des pressions qui représentent les sommes de ces actions moléculaires.

Mais les travaux considérés auront, en outre, la partie,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

à laquelle ils se réduiraient sans l'agitation calorifique. Or dx, dy, dz, relatifs au mouvement moyen local, y seront des facteurs fort peu près constants dans chaque très petite étendue perceptible ou presque perceptible. Par suite, pour toutes les actions moléculaires exercées à travers une petite portion d'élément, et dont il s'agira de sommer le travail, cette première partie donnera

$$(\Sigma X)\,dx + (\Sigma Y)\,dy + (\Sigma Z)\,dz,$$

expressions où ΣX, ΣY, ΣZ, projections totales, suivant les divers axes, des actions moléculaires considérées, seront évidemment les composantes de ce que nous avons nommé la *pression* exercée sur la partie correspondante d'élément plan. Et la somme ainsi obtenue, formée des produits des trois composantes de cette pression par les composantes de mêmes sens du mouvement visible ou moyen local éprouvé par la surface matérielle qui la supporte, est ce qu'on peut appeler, et ce qu'on appelle en effet, le *travail de la pression*.

En résumé, les *pressions*, que l'on se représente subies par les faces d'un élément de volume, ou par la superficie d'un corps quelconque, sont bien des forces fictives propres à remplacer les actions moléculaires réelles exercées sur l'élément ou sur le corps à travers ces surfaces, tant qu'on se propose d'évaluer uniquement les impulsions totales et les moments de ces actions. Mais elles cessent généralement de pouvoir remplir le même but dès qu'il s'agit d'évaluer des travaux; car il faut alors, pour avoir le vrai travail total des actions moléculaires considérées, joindre aux travaux des pressions ceux que les actions moléculaires résumées en elles produisent dans l'imperceptible mouvement d'agitation calorifique, et qui constituent les *flux* de chaleur. Ainsi ces flux, fonction principalement des inégalités de distribution de la température de part et d'autre des surfaces qu'ils traversent, échappent complètement au travail des pressions, c'est-à-dire n'y sont pas compris, quoique dus aux mêmes forces élémentaires.

98. — Égalité des deux flux de chaleur, de sens contraires, relatifs aux deux faces d'un même élément plan.

Nous pouvons remarquer, d'ailleurs, que les actions moléculaires exercées, à travers un élément plan, sur la matière située d'un côté de cet élément, ne sont pas seulement égales et contraires aux réactions, s'exerçant suivant les mêmes droites de jonction imperceptibles, de cette matière sur celle qui est de l'autre côté, de manière que les pressions soient elles-mêmes égales et contraires sur les deux faces de l'élément plan; mais qu'on peut, de plus, admettre l'égalité, en valeur absolue, avec signes différents, des deux sommes respectives des travaux produits par ces actions durant un instant dt.

En effet, ces deux sommes réunies, travail total des forces exercées aux extrémités des imperceptibles droites de jonction r dont il s'agit, ou qui traversent l'élément plan, sont les différentielles partielles, par rapport aux distances en question r, de l'énergie potentielle interne, changée de signe, du corps où est tracé l'élément plan. Or nous avons précédemment remarqué (p. 38), en définissant l'énergie potentielle interne, que le nombre des droites de jonction ainsi coupées par une surface ne se trouve presque rien à côté du nombre de celles que contient ce corps ou même seulement que contient une particule matérielle sensible; de sorte que le travail total qui leur correspond est insignifiant en comparaison de la variation simultanée de l'énergie potentielle interne de l'une des deux parties en lesquelles cette surface divise le corps. Mais, au contraire, le travail des actions moléculaires exercées, à travers la surface, sur cette partie, ou *d'un seul côté,* modifie, en général, très grandement la variation de la même énergie, et lui est pour le moins comparable. Donc, tandis que le travail total des actions s'exerçant à travers un élément plan sur les deux côtés de cet élément plan est toujours négligeable, celui des actions exercées sur un seul des côtés ne l'est pas; d'où il suit bien que les travaux des actions appliquées aux deux côtés, ou aux deux couches superficielles limitées par l'élément plan, se neutralisent, c'est-à-dire sont relativement égaux avec signes contraires.

Comme d'ailleurs, vu la lenteur avec laquelle varient d'un point à l'autre les déplacements moyens locaux, ou vu, par conséquent, leur égalité très sensible pour les deux couches superficielles que sépare un élément plan, cette parité est évidente en ce qui regarde les travaux des pressions, il s'ensuit qu'elle devra se produire également pour l'autre partie des travaux d'actions moléculaires, c'est-à-dire pour les flux de chaleur traversant dans les deux sens l'élément quelconque de surface considéré.

Voilà pourquoi *l'on peut,* sans erreur appréciable, *assimiler la chaleur à une matière qui passerait à travers l'élément plan, ou regarder le flux qui entre d'un côté comme sortant de l'autre;* car l'un de ces flux constitue un travail positif emmagasiné sur une face, et l'autre, un travail négatif perdu sur la seconde face.

99. — Principe de la quasi-neutralisation des flux de chaleur sur tout élément de volume.

La neutralisation des deux travaux totaux des actions moléculaires exercées, sur les deux faces d'un élément plan, à travers cet élément, se démontre, comme on voit, en admettant que chacun d'eux soit *au moins* de l'ordre de grandeur de la variation simultanée de l'énergie potentielle interne d'un élément de volume limité par l'élément plan. Mais, en réalité, ils se trouvent incomparablement plus grands; car, rapportés à l'unité de temps, ils sont, en général, de l'ordre de l'aire de l'élément plan, c'est-à-dire du second ordre de petitesse, tandis que la variation, rapportée de même à l'unité de temps, de l'énergie potentielle interne dont il s'agit, est de l'ordre du volume dans lequel elle se produit, c'est-à-dire du troisième. Et comme la variation simultanée de l'énergie actuelle, tant visible que calorifique, du même volume, est également comparable à celui-ci ou encore du troisième ordre, ainsi que le travail du poids de la particule, le principe des forces vives, appliqué à cette particule ou volume élémentaire considéré, montre que les travaux des actions moléculaires exercées, à travers ses faces, sur toute sa couche superficielle, devront se neutraliser, à des différences près du troisième ordre, négligeables à côté de ces travaux qui sont du deuxième. Donc les travaux en question ont leur somme relativement nulle, comme l'étaient déjà les sommes des composantes, suivant un axe quelconque, de toutes ces actions, et les sommes de leurs moments relatifs au même axe, sommes qui se réduisaient à celles des composantes et des moments analogues des pressions exercées sur les faces du volume élémentaire.

Mais il y a lieu de répéter ici, à propos des travaux de ces pressions, le raisonnement que nous venons de faire pour les travaux des pressions exercées sur les deux faces d'un élément plan. Le déplacement moyen local suivant chaque axe étant pareil dans toute l'étendue d'une particule, à des erreurs relatives près de l'ordre de ses dimensions, ou du premier ordre, le travail total de leurs composantes parallèles au même axe aura pour première partie le produit du déplacement moyen local commun dont il s'agit par la somme algébrique de ces composantes, somme nulle, ou plutôt du troisième ordre de petitesse, comme le seront les produits, composant son autre partie, des pressions (du second ordre) par les petites inégalités (du premier ordre) des déplacements moyens locaux de leurs points respectifs d'application. Donc les travaux des pressions se neutralisent séparément, à des termes près du troisième ordre de petitesse, et l'excédent des travaux totaux des actions moléculaires considérées sur ceux-là, c'est-à-dire *les flux de chaleur qui pénètrent à la fois dans la particule, se neutraliseront aussi à ce degré d'approximation.*

100. — Ce principe permettra d'exprimer tous les flux relatifs à un même point en fonction de trois d'entre eux, qui dépendront eux-mêmes, principalement, des dérivées premières de la température suivant les divers sens.

De même que l'annulation relative, ou ayant lieu à des erreurs négligeables près, de la somme algébrique soit des pressions appliquées à des particules d'orientations diverses, soit de leurs moments, nous permettra bientôt d'exprimer la pression s'exerçant en un point donné sur un élément plan quelconque, en fonction de celles qu'y supportent trois éléments plans rectangulaires, de même aussi, l'annulation de la somme des flux de chaleur introduits dans de pareilles particules nous fera connaître, en fonction des flux qui traversent trois éléments plans rectangulaires se croisant en un point donné, celui qui passera en même temps par tout autre élément plan mené au même point.

Quant à ces trois flux principaux, les explications précédentes suffisent pour prévoir qu'ils dépendront, en général, de la nature de la matière et de son état moyen local, ainsi que de sa température dans une très petite étendue autour de l'élément plan, mais surtout des variations ou inégalités affectant cette température à la traversée de l'élément plan.

101. — Pénétration exceptionnelle du principe des forces vives, comparé à ceux des quantités de mouvement et des moments, dans l'étude des mouvements intimes des corps.

Il résulte de ce qui précède que l'application du principe des forces vives à un élément de volume ne donne pas d'indication directe sur ses vitesses perceptibles, à cause des quantités (l'énergie interne et les flux de chaleur) qui y figurent, quoique n'ayant que des rapports compliqués avec le mouvement moyen local. Mais, justement pour cela, elle fournira d'importantes indications, souvent indispensables, sur l'état intérieur d'agitation de la matière et, par suite, sur la température, c'est-à-dire sur ce qui s'éliminait des autres principes généraux de la Mécanique à raison même de leur trop grande simplicité. Le grand avantage de l'équation des forces vives est donc précisément, par la trace qu'elle conserve de circonstances intimes échappant aux autres équations, de suppléer et compléter celles-ci quand le mouvement invisible de la matière se trouve influer sensiblement sur les phénomènes observables.

Or nous verrons qu'il existe beaucoup de ces phénomènes, savoir, tous ceux dans lesquels des variations notables de la température obligent à introduire celle-ci parmi les fonctions inconnues. Alors il est nécessaire, même pour ne déterminer que le mouvement moyen local, d'avoir une équation définissant les changements de la température d'un instant à l'autre; et nous verrons qu'on ne peut la former que par une application appropriée du principe des forces vives à une particule matérielle.

102. — Application du principe des forces vives à une particule matérielle : premièrement, travail de la pesanteur et travail des pressions, pour le mouvement de translation de la particule.

Considérons donc un élément de volume donné V, de masse M; et ayant désigné, conformément à des notations déjà adoptées dans la Leçon précédente, par

MG la force extérieure s'exerçant sur toute sa masse, force de pesanteur ou de nature analogue, dont on a déjà appelé a, b, c les trois cosinus directeurs;

MU son énergie interne à l'époque t, U étant ainsi l'énergie interne de son unité de masse;

u, v, w les composantes, suivant les axes, de la vitesse simultanée de son centre de gravité, laquelle diffère très peu, en grandeur et en direction, des vitesses moyennes locales ou perceptibles de ses diverses parties;

exprimons que la variation $M(u\,du + v\,dv + w\,dw) + M\,dU$, durant un instant dt, de son énergie totale $\frac{1}{2}M(u^2+v^2+w^2)+MU$, vaut la somme, que nous appellerons dQ, des flux de chaleur entrés pendant le même instant par ses diverses faces, plus le travail total produit en même temps par son poids et par les pressions exercées sur sa superficie.

Le poids a, comme nous avons vu, même travail que s'il était tout entier appliqué au centre de gravité de la particule. Quant aux pressions, leur travail est évidemment la somme de ce qu'il serait si toutes les parties de la surface ne possédaient que le mouvement même du centre de gravité de la particule, et de la valeur qu'il aurait si, au contraire, les diverses parties de la surface n'étaient animées que de leur mouvement relatif par rapport à ce centre de gravité; car la vitesse, suivant un axe quelconque, de chaque petite partie de la surface, est bien celle du centre de gravité, plus ou moins un petit écart du premier ordre (c'est-à-dire comparable aux dimensions de la particule) constituant la vitesse relative de cette partie par rapport au centre de gravité.

Ne comptons d'abord que la première partie, savoir le travail des pressions pour le déplacement du centre de gravité; et joignons-y celui de la pesanteur, qui peut être tout entier, comme nous venons de dire, rattaché à ce mouvement. Nous aurons ainsi à considérer le déplacement $u\,dt$, ou $v\,dt$, ou $w\,dt$, suivant chaque axe, du centre de gravité de la particule, et à le multiplier par la composante totale de même sens des pressions exercées sur elle et de son poids, c'est-à-dire de toutes les actions extérieures qu'elle supporte. Or ces composantes totales sont précisément les trois composantes $M\frac{d(u, v, w)}{dt}$ de sa force motrice. Ainsi le travail considéré, ou correspondant au mouvement du centre de gravité, est $M\left(\frac{du}{dt}u\,dt + \ldots\right)$ ou

$$M(u\,du + v\,dv + w\,dw).$$

103. — Deuxièmement, travail des pressions, pour le mouvement de la particule par rapport à son centre de gravité; c'est un travail de déformation et non de rotation.

Reste à y ajouter le travail des pressions pour le mouvement relatif des diverses parties de la surface par rapport au centre de gravité de la particule. Les déplacements par unité de temps, ou vitesses suivant les axes, qui y figureront comme facteurs, s'y trouveront de l'ordre de petitesse des distances existant entre le centre de gravité et la surface, c'est-à-dire du premier ordre; et, les pressions elles-mêmes y étant, sur chaque face, du second ordre, le travail dont il s'agit sera, par unité de temps, du troisième ordre, ou comparable au volume de la particule.

Il importe de reconnaître que la partie de ce travail attribuable à un mouvement d'ensemble, c'est-à-dire à une rotation qu'éprouverait par unité de temps la particule autour de son centre de gravité, se trouve seulement du quatrième ordre, et négligeable par rapport à son autre partie; de sorte que le travail en question se rapporte essentiellement à la déformation, aux changements de dimensions de la particule et constitue ce qu'on peut appeler, pour abréger, un *travail de déformation*.

En effet, toute rotation élémentaire (ou relative à un instant dt) de la particule autour de son centre de gravité équivaut, comme l'on sait, au point de vue des déplacements produits ou, par suite, du travail développé, à trois rotations infiniment petites, effectuées successivement autour de trois axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ parallèles à ceux des x, y, z, mais passant par le centre de gravité dont il s'agit, que j'appellerai O'. Or le travail total des pressions dans chacune de ces rotations, dans celle, par exemple, qui se fait autour de $O'z'$, est nul, ou du moins du quatrième ordre négligeable de petitesse, par unité de temps.

Car soient $d\theta$ cette rotation, r le rayon vecteur perpendiculaire mené d'un point quelconque (x', y', z') sur l'axe $O'z'$ de rotation, enfin θ l'azimut qui définit la direction de ce rayon vecteur. On aura

$$x' = r\cos\theta, \qquad y' = r\sin\theta;$$

et, comme la rotation considérée consiste dans l'accroissement $d\theta$ que reçoit l'azimut θ sans que z' ni r varient, il vient, pour les déplacements corrélatifs suivant les axes,

$$\left\{\begin{array}{l} dx' = r\,d\cos\theta = -r\sin\theta\,d\theta = -y'\,d\theta, \\ dy' = r\,d\sin\theta = r\cos\theta\,d\theta = x'\,d\theta, \end{array}\right.$$

avec

$$dz' = 0.$$

Le travail $X\,dx' + Y\,dy' + Z\,dz'$ d'une force quelconque (ayant les composantes X, Y, Z) appliquée au point (x', y', z'), vaudra donc $(x'Y - y'X)\,d\theta$, ou le produit, par $d\theta$, du moment de la force relatif à l'axe $O'z'$. Par suite, le travail total des pressions dans un mouvement de rotation de la particule autour de $O'z'$ sera le produit, par le facteur commun $d\theta$, du moment total des pressions par rapport à l'axe dont il s'agit. Or on sait que, sur une particule, les moments des pressions par rapport à un tel axe se neutralisent, ou que, étant individuellement du troisième ordre pour chaque face de l'élément, ils ont, pour toutes les faces, une somme du quatrième ordre.

Donc, par unité de temps, le travail considéré, produit de la dérivée finie $\frac{d\theta}{dt}$ par la somme des moments, ne sera que du quatrième ordre et négligeable.

104. — Il peut s'évaluer dans l'hypothèse d'une neutralisation parfaite des pressions suivant chaque axe ; cas simple d'une pression normale et uniforme.

Il est d'ailleurs évident que, à des écarts près encore négligeables du même quatrième ordre, on pourra, en évaluant le travail que les pressions exercées sur la particule produisent dans ses déformations ou ses changements de volume, commettre d'infiniment petites erreurs relatives sur les pressions, qui sont du second ordre.

Or cette circonstance permettra de modifier les pressions dont il s'agit de manière à rendre rigoureuse leur neutralisation sur la particule suivant chaque axe, neutralisation qui n'y est qu'approchée et qui deviendra complète par l'application (fictive), sur la moitié des faces, de pressions supplémentaires du troisième ordre, destinées à faire que ces faces soient pressées ou tirées exactement comme leurs opposées. Autrement dit, les *pressions* pourront être censées en équilibre sur l'élément ou incapables d'y produire aucune translation, hypothèse qui, annulant leur composante totale suivant chaque axe, rend nul leur travail relatif à la translation (quelle qu'elle soit) du centre de gravité, et rend leur travail cherché, pour le mouvement de la particule par rapport à ce centre de gravité, identique à leur travail pour le mouvement vrai ou absolu, travail total dont le calcul sera parfois plus facile.

Nous appellerons $d\mathfrak{C}$ cette seconde partie du travail des pressions, savoir leur travail correspondant à la déformation (ou aux changements de dimensions) de la particule : nous l'évaluerons spécialement dans chaque cas où il sera utile de le faire.

Bornons-nous ici, comme exemple ayant pour but de fixer les idées, au cas le plus simple, le seul que traitent ordinairement les physiciens. C'est celui d'une pression uniforme, dont p désignera la valeur par unité d'aire, sollicitant, perpendiculairement partout, la superficie de la particule considérée.

La force exercée sur chaque élément de la surface y vaudra le produit de p par l'élément même; et la composante du déplacement dans le sens de cette force, autre facteur du travail à évaluer, sera la hauteur du volume, sensiblement prismatique, décrit par l'élément dans son recul (positif ou négatif) vers l'intérieur de la particule, ou, encore, sera l'épaisseur, normalement à l'élément considéré, de l'étendue infiniment mince comprise entre les deux positions successives, aux époques t et $t+dt$, de la surface de la particule, cette épaisseur étant comptée positivement au dedans de la particule, ou quand l'élément plan considéré empiète, dans son mouvement, sur le volume actuel V, et négativement au dehors, c'est-à-dire quand, au contraire, le volume de la particule s'agrandit du côté de l'élément plan. Le travail de la pression exercée sur l'élément de surface dont il s'agit égalera donc, en grandeur et en signe, le produit de p par la diminution, positive ou négative, que le déplacement de cet élément de surface aura fait subir au volume V; et, par suite, on aura, pour toute la superficie de la particule,

$$d\mathfrak{T} = -p\,dV, \tag{30}$$

$-dV$ étant la perte totale de volume subie par la particule durant l'instant dt, ou dV la variation correspondante de son étendue.

105. — Résultat du calcul : formule fondamentale de la Thermodynamique.

En somme, le travail total, pour l'instant dt, des forces extérieures appliquées à la particule, sera

$$dQ + M(u\,du + v\,dv + w\,dw) + d\mathfrak{T}. \tag{31}$$

Égalons-le, comme il a été dit, à l'accroissement

$$M(u\,du + v\,dv + w\,dw) + M\,dU$$

de l'énergie totale de la particule, et il viendra simplement

$$M\,dU = dQ + d\mathfrak{T} \qquad \text{ou} \qquad dQ = M\,dU - d\mathfrak{T}. \tag{32}$$

Ainsi, le principe des forces vives, appliqué à un élément de volume de manière à éliminer des deux membres de l'équation le terme $M(u\,du + v\,dv + w\,dw)$, fournit une relation simple entre la quantité dQ de chaleur qui, du dehors, pénètre dans le volume durant un instant infiniment petit, l'augmentation de son énergie interne MU et le travail total de déformation $d\mathfrak{T}$ des pressions exercées sur sa surface, travail évalué, soit pour le mouvement relatif des diverses parties de la surface par rapport au centre de gravité du volume, soit encore pour tout le mouvement visible ou moyen local de chaque élément de la surface, mais en ayant soin alors de modifier les pressions, de quantités du premier ordre de petitesse par unité d'aire, au point de rendre exacte leur neutralisation suivant chaque axe. La somme de la quantité de chaleur dQ

fournie et du travail de déformation $d\mathfrak{T}$ exercé égale, en effet, l'accroissement M dU de l'énergie interne.

Cette relation, où des quantités de chaleur figurent comme étant des travaux de forces (1), et dont l'utilité nous apparaîtra bientôt, est l'équation fondamentale de la Science qui étudie les rapports entre la chaleur et le travail, c'est-à-dire de la *Thermodynamique*.

(1) Il faut donc, comme il a été dit dans la note de la page 111, les supposer converties en kilogrammètres, ou multipliées par 425 environ, si on les donne exprimées en calories.

ONZIÈME LEÇON.

APPLICATION DU PRINCIPE DES FORCES VIVES AUX MOUVEMENTS VISIBLES OU MOYENS LOCAUX : ROLES QU'Y PRENNENT LE TRAVAIL DE DÉFORMATION DES PRESSIONS EXERCÉES SUR LES PARTICULES MATÉRIELLES ET L'ÉNERGIE POTENTIELLE DE PESANTEUR; ETC.

---

106. — Application du principe des forces vives au mouvement perceptible d'un corps quelconque.

On voit que, dans l'équation des forces vives posée pour une particule de masse M, l'accroissement de la demi-force vive se rapportant au mouvement moyen local, et que représentait le terme

$$M(u\,du + v\,dv + w\,dw)$$

commun aux deux membres, s'est éliminé de la formule finale (32) [p. 121]. Mais il est aisé d'avoir une relation où entre cet accroissement de la demi-force vive perceptible, pour telle partie qu'on voudra du système, formée d'une agglomération, ΣM, de particules dont l'énergie interne totale s'exprimera par ΣMU. Il suffira, en effet, d'écrire l'équation des forces vives pour toute la partie considérée, et de tenir compte, dans le résultat, de la formule précédente (32) appliquée à chaque particule M.

L'accroissement $d\Sigma\frac{1}{2}M(u^2+v^2+w^2)+\Sigma M\,dU$, durant un instant dt, de la demi-force vive perceptible possédée par ce système partiel, et de son énergie interne, c'est-à-dire, en tout, de la somme des deux énergies *propres,* actuelle et potentielle interne, de ses particules, égalera (p. 101) le travail des actions moléculaires extérieures exercées sur lui et de son poids total dû aux attractions de la matière suffisamment éloignée tant intérieure qu'extérieure. Or ce travail comprendra :

1° Celui, $\Sigma MG(au + bv + cw)\,dt$, de la pesanteur, ou autres forces analogues, sur toutes ses particules élémentaires M;

2° Celui des pressions exercées sur la surface de toute la partie considérée, travail que nous représenterons par $d\mathfrak{T}_e$ (où l'indice e rappellera qu'il s'agit d'un travail de pressions *extérieures*);

3° Enfin la somme, que nous appellerons dQ_e (en employant encore le même indice), des flux de chaleur entrés durant l'instant dt par cette surface enveloppe de toute la matière en question. Il viendra donc

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} & d\Sigma\, \tfrac{1}{2} M(u^2 + v^2 + w^2) + \Sigma M\, dU \\ & \quad = \Sigma M\, G(au + bv + cw)\, dt + d\mathfrak{T}_e + dQ_e. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons, dans le premier membre, chaque quantité $M\,dU$, relative à une particule de cette matière, par sa valeur (32), qui est

$$d\mathfrak{T} + dQ.$$

Enfin observons que $\Sigma\, dQ$, somme de tous les flux de chaleur entrés dans les diverses particules, se réduit à la quantité dQ_e entrée par la surface extérieure, vu que les deux flux pénétrant dans deux particules contiguës à travers leur surface de séparation sont, à chaque instant, égaux et contraires. Nous aurons, par conséquent,

$$\Sigma\, dQ = dQ_e;$$

et l'équation (33) se trouvera réduite à

$$(34) \quad d\Sigma\, \tfrac{1}{2} M(u^2 + v^2 + w^2) + \Sigma\, d\mathfrak{T} = \Sigma M\, G(au + bv + cw)\, dt + d\mathfrak{T}_e.$$

Cette relation montre que la demi-force vive du mouvement moyen local ou visible varie, d'un instant à l'autre, comme s'il n'y avait pas en même temps une rapide quoique imperceptible agitation calorifique, ni, par suite, des flux de chaleur à l'intérieur ou à travers la surface du corps, mais que la variation de l'énergie potentielle interne fût la somme des quantités $d\mathfrak{T}$ relatives à tous les éléments de volume, ou égalât le *travail de déformation* absorbé par eux, travail total des parties principales (se faisant mutuellement équilibre) des pressions qu'ils supportent.

Nous aurons parfois, dans la suite du Cours, l'occasion de voir comment cette formule, relative à la demi-force vive totale du mouvement moyen local, peut s'obtenir, à partir des trois équations déduites de l'application du principe des quantités de mouvement à un élément de volume, en multipliant respectivement ces trois équations par les trois composantes $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$ du déplacement moyen local durant un instant dt, puis les ajoutant, d'abord pour une particule, et ensuite pour toute la matière considérée. On conçoit en effet que, l'accélération actuelle du mouvement moyen local étant partout déterminée, comme il a été dit, au moyen des seuls principes des quantités de mouvement et des moments, la force vive qui correspond à ce mouvement puisse se calculer sans recourir directement au principe de l'énergie.

107. — Équation déterminant les variations de l'énergie interne et de la température.

Mais l'équation (32) que nous a fournie ce dernier principe pour une particule quelconque, et qui régit en quelque sorte l'ensemble de ses mouvements intérieurs, sera indispensable quand il s'agira d'évaluer le changement $d\mathrm{U}$, par unité de masse et durant un instant dt, de l'énergie interne d'une telle particule ; ce qui aura lieu surtout lorsque sa température, dont dépendent les pressions et aussi, par suite, l'accélération du mouvement moyen local, changera au point qu'il faille l'introduire *comme quatrième inconnue,* à côté des trois composantes u, v, w de la vitesse de la particule, ou à côté de celles de son déplacement total jusqu'à l'époque t, parties variables *sensibles* des coordonnées x, y, z d'un quelconque de ses points matériels.

Alors, concurremment avec le principe des quantités de mouvement, qui (complété, quant aux lois des pressions, par celui des moments) donnera les trois équations nécessaires pour évaluer les composantes de l'accélération de la particule, on emploiera, disons-nous, l'équation (32), dans laquelle $d\mathfrak{T}$ et $d\mathrm{Q}$ ou plutôt $\frac{d\mathfrak{T}}{dt}dt$ et $\frac{d\mathrm{Q}}{dt}dt$ s'exprimeront, comme on a vu, en fonction de l'état moyen local actuel tant statique que dynamique de la particule et de la distribution actuelle des températures dans la région qu'elle occupe, tandis que $\mathrm{M}\,d\mathrm{U}$ ou plutôt $\mathrm{M}\frac{d\mathrm{U}}{dt}dt$, différentielle en t de la fonction MU de son état statique moyen local et de sa température, aura, avec des termes où figureront les vitesses de déformation entrant dans l'expression de la dérivée en t de cet état statique, un dernier terme où la dérivée de U par rapport à la température se trouvera multipliée par la différentielle en t de celle-ci. Cette équation sera donc propre à faire connaître, comme nous le montrerons sur d'importants exemples, les changements de température éprouvés d'un instant à l'autre par les diverses parties du système matériel étudié.

108. — **Son application au cas d'un solide plongé dans un milieu à température uniforme. Énergie potentielle d'élasticité.**

Une simplification importante y est possible dans le cas d'un corps solide éloigné de son point de fusion, quand les variations de température dont il s'agit ne sont produites que par le mouvement moyen local lui-même, à raison surtout de la présence, dans l'équation (32), du terme $d\mathfrak{T}$ dépendant de ce mouvement. L'expérience montre, d'une part, que de petites modifications de l'état statique, c'est-à-dire des contractions ou des dilatations assez peu sensibles de la matière, développent alors, en général, de grandes pressions et même donnent lieu à des travaux $d\mathfrak{T}$ relativement considérables ; d'autre part, que les variations simultanées de la température et, par suite, celles de l'énergie interne MU, entraînées par elles, ainsi que les affluences ou sorties dQ de chaleur qui en résultent, sont insignifiantes et peuvent être négligées (du moins à une première approximation) dans l'étude de ces mouvements, au même degré que peuvent l'être celles qui naissent des faibles changements accidentels de la température survenus pendant la durée des phénomènes.

En d'autres termes, il est permis de regarder comme invariable, dans ce cas, la *partie calorifique* de l'énergie interne U par unité de masse, et de faire porter tout le changement M dU sur l'*autre partie,* fonction seulement des très petites distances des situations moyennes autour desquelles oscillent calorifiquement les atomes de la particule. Cette autre partie de l'*énergie interne* est celle que nous avons appelée (p. 107) l'*énergie potentielle d'élasticité,* du moins à cette approximation où l'on néglige le frottement intérieur et où, par conséquent, on identifie les pressions à leurs valeurs élastiques. On pourra donc poser alors $dQ = 0$ et regarder le changement M dU de l'énergie interne comme ayant lieu sans variation de la température, mais en vertu seulement des modifications éprouvées par l'état statique moyen local. Or il suit de là qu'on aura sensiblement, *dans les solides à température constante,*

$$M\,dU = d\mathfrak{E}. \tag{35}$$

109. — Intégrabilité du travail de déformation des pressions élastiques exercées sur une particule solide dont la température est constante.

La relation (35) montre, en particulier, que le travail $d\mathfrak{E}$ produit à température constante dans une déformation infiniment petite, par les pressions élastiques s'exerçant sur une particule d'un solide, ou par leurs parties principales qui se font équilibre (seules en jeu dans la déformation), constitue la différentielle totale exacte d'une certaine fonction de son état statique moyen local.

Cette fonction, qui est MU, ou plutôt une partie de MU sensiblement indépendante de la température, savoir, une *énergie de ressort* ou *de tension,* comme on vient de voir, peut, dès lors, s'appeler $\mathfrak{E}$, puisqu'elle a $d\mathfrak{E}$ pour différentielle.

Donc, si la particule passe graduellement d'un état primitif donné à tout autre état, assez peu différent toutefois du premier pour que, dans l'intervalle, la contexture (groupement moléculaire) n'ait pas été altérée, ou pour que les pressions soient restées toujours les mêmes fonctions des déformations comptées à partir de l'état primitif, *le travail total,* $\int d\mathfrak{E}$, *de déformation, des forces élastiques exercées sur la particule, dépendra uniquement des deux états extrêmes* dont il s'agit, *et non de la succession des états intermédiaires :* il égalera la variation simultanée de l'énergie potentielle d'élasticité de la particule.

110. — Démonstration de cette intégrabilité par le principe physique de l'impossibilité du mouvement perpétuel.

Cette intégrabilité de l'expression différentielle $d\mathfrak{E}$ quand la température est constante, ou plutôt n'éprouve que des variations infiniment petites, se démontre encore, sans supposer $dQ = 0$ et indépendamment de la considération de l'énergie interne MU, en se basant sur un fait constant d'expérience qu'on appelle l'*impos-*

sibilité du mouvement perpétuel. D'après ce fait capital, que la complication des phénomènes calorifiques n'a pas, jusqu'à ce jour, permis de ramener clairement aux deux principes fondamentaux de la Mécanique (pp. 12 et 21) s'il en est susceptible, ou à ses termes les plus simples s'il ne l'est pas, on ne saurait faire produire, en somme, aucun travail, aux pressions exercées par un corps qui, après une série de déformations, revient à son état primitif, quand ces transformations ont lieu dans un espace *à température uniforme,* et assez lentement pour que l'équilibre des températures (*infiniment peu rompu à chaque instant*) puisse se rétablir sans cesse par des échanges dQ de chaleur et aussi pour qu'aucune force vive sensible ne soit engendrée.

Sans une telle impossibilité, en effet, rien n'empêcherait de fournir à une machine, en répétant indéfiniment les transformations dont il s'agit, une quantité illimitée de travail. Or celle-ci, il est vrai, ne serait pas, de la sorte, nécessairement créée de rien ou contrairement à la loi fondamentale de la constance de l'énergie; car elle pourrait n'être que de la chaleur transformée, extraite du réservoir calorifique inépuisable que constitue le milieu terrestre ou atmosphérique (et même cosmique) dans lequel nous vivons. Mais une pareille *condensation* et *utilisation* de chaleur, au sein d'un espace *supposé à température partout égale,* choque le sens pratique et ne paraît nullement admissible, alors que l'agitation calorifique, toujours prête à se dissiper, jamais ne se condense d'elle-même (dans les circonstances où nous observons), soit sous sa forme propre, c'est-à-dire de manière à élever localement, si peu que ce soit, la température, soit même après transformation en une autre sorte d'énergie, comme serait une énergie élastique ou de ressort utilisable [1].

Ainsi, l'expression différentielle $(-d\mathfrak{C})$ du travail des pressions exercées par un corps ou par une particule dans les conditions supposées, travail égal et contraire à celui, $d\mathfrak{C}$, des pressions que subissent ce corps ou cette particule, ne doit donner une

---

[1] Un développement plus complet de cet ordre de considérations conduit au *Principe* célèbre *de Carnot,* duquel se tirent, malgré l'obscurité du fond, d'importantes conséquences, que nous aurons l'occasion d'indiquer, au sujet de l'énergie interne et des forces élastiques dans tous les corps.

somme totale $-\int d\mathfrak{S}$ positive pour aucune suite continue de déformations ramenant le corps ou la particule à leur configuration première. Et elle ne peut davantage en donner une négative; sans quoi il suffirait de faire passer le corps ou la particule par les mêmes états, mais en suivant l'ordre inverse ou changeant simplement les signes des déplacements élémentaires successifs, pour obtenir cette valeur de la somme avec le signe *plus*. En effet, les mêmes éléments $-d\mathfrak{S}$ s'y retrouveraient tous, sauf le signe, formés qu'ils seraient par les produits des mêmes forces (à très peu près) et de déplacements égaux mais contraires.

C'est dire que $\int d\mathfrak{S} = 0$ quand il y a identité des deux états statiques, initial et final, de la particule. Par suite, si, au contraire, on appelle $\int d\mathfrak{S}$ la somme des valeurs de l'expression $d\mathfrak{S}$ depuis l'état initial jusqu'à tout autre état, et $-\int d\mathfrak{S}'$ la somme de ses valeurs dans le retour (effectué d'une manière continue quelconque) de cet autre état à l'état initial, ou $\int d\mathfrak{S}'$ la somme analogue pour cette deuxième série d'états, mais supposés produits dans l'ordre inverse, on aura $\int d\mathfrak{S} - \int d\mathfrak{S}' = 0$. Il vient donc bien $\int d\mathfrak{S} = \int d\mathfrak{S}'$; et l'intégrale $\int d\mathfrak{S}$, évaluée en partant d'un état primitif *constant*, est bien une fonction parfaitement déterminée de la configuration finale *seule* de la particule.

111. — Hypothèses approximatives, pour l'appréciation des changements de température provoqués, dans les fluides, par les phénomènes mécaniques.

Cette démonstration, qui implique l'hypothèse de déformations assez lentes pour ne pas développer de force vive sensible et pour laisser l'équilibre de température (infiniment peu rompu à chaque instant) se rétablir sans cesse par des échanges appropriés $\pm dQ$ de chaleur, s'applique à des corps quelconques et, par conséquent, aux fluides, pour lesquels nous verrons, d'ailleurs, que le fait de l'intégrabilité de $\int d\mathfrak{S}$ à température constante est évident, à cause de la simplicité qu'y atteignent les lois des pressions. Mais on ne peut plus alors, surtout s'il s'agit de matières gazeuses, admettre tout à la fois, approximativement, la conservation de la température primitive avec l'annulation des flux de chaleur dQ. La raison en est que, vu, sans doute, l'étendue des échauffements ou des refroidissements (pour peu de chaleur gagnée ou perdue par unité de volume) qu'entraîne la faible densité soit des gaz, soit des vapeurs, et vu aussi la température toujours relativement assez haute de ces dernières ou même des liquides, l'agitation calorifique joue, dans les valeurs de leurs pressions et de leur énergie interne, un rôle prépondérant, auquel elle n'arrivait pas dans les solides. D'où il suit que les phénomènes mécaniques y font, en général, assez varier la température, ou pour provoquer des flux dQ de chaleur non négligeables, ou, du moins, si l'insuffisance de ces flux empêche le rétablissement de l'équilibre thermique et laisse les variations de la température s'accentuer, pour rendre la différentielle $M\,dU$ de l'énergie interne notablement dépendante de celles-ci.

Le second cas se produit le plus souvent, avec une certaine approximation; car la *conductibilité* pour la chaleur, c'est-à-dire la facilité au passage des flux calorifiques, est très faible chez les fluides, surtout chez les gaz. Alors, en écrivant l'équation (32), on peut bien prendre encore $dQ = 0$ et, par suite, $M\,dU - d\mathfrak{G} = 0$, mais il n'est plus permis de supposer, dans U, la température constante.

Nous verrons plus loin comment cette relation ainsi interprétée atteint son but, qui est de faire connaître les températures successives de la particule à laquelle on l'applique, et comment alors le travail $d\mathfrak{G}$ devient pour celle-ci la différentielle exacte d'une certaine fonction de son état statique moyen local actuel, bien différente d'ailleurs, au moins chez les gaz, de la fonction analogue correspondant à l'hypothèse d'une température constante.

Il est cependant quelques cas où presque tout le fluide se trouve comme en contact avec une paroi solide d'une épaisseur suffisante pour lui communiquer sa température sans en être sensiblement refroidie ou échauffée (ce qui arrive surtout quand ce fluide est un gaz ou une vapeur d'une très faible masse par unité de volume, coulant le long d'un tube étroit); et l'on peut alors admettre, au contraire, l'invariabilité de la température du fluide, ou l'égalité de $d\mathfrak{G}$ à la différentielle totale de la dernière fonction de l'état actuel dont il vient d'être parlé.

En général, la vérité se trouve entre les deux hypothèses précédentes, confondues sensiblement dans le cas des solides, et qui consistent, l'une, à négliger les échanges dQ de chaleur dus au mouvement, ou à supposer nul, dans les phénomènes *mécaniques*, l'effet de la conductibilité entre particules voisines, l'autre, à raisonner, au contraire, comme si cet effet se trouvait sans cesse pleinement réalisé, au point de maintenir partout la température uniforme du milieu ambiant.

112. — Énergies d'élasticité et de pesanteur propres à chaque corps, dans les problèmes de Mécanique physique; leur emploi dans l'équation des forces vives.

Dans les problèmes relatifs au mouvement visible des corps et où l'on peut, avec quelque approximation, admettre soit l'absence des flux dQ de chaleur, avec la conservation de la température, s'il s'agit d'un solide, soit l'une ou l'autre seulement de ces circonstances s'il s'agit d'un fluide, l'expression $\int d\mathfrak{E}$ est donc (à une constante près), pour chaque particule, une fonction déterminée $\mathfrak{E}$ de son état statique moyen local actuel et constitue, par suite, une véritable *énergie potentielle d'élasticité*.

De plus, quand il est question de phénomènes se passant près de la surface terrestre et rapportés à des axes liés à cette surface, la constance presque absolue de la pesanteur g en chaque endroit permet de regarder le poids Mg de toute particule comme une qualité *qui lui serait inhérente* ou qui du moins ne dépendrait, avec *sa* masse M, que de *sa* situation par rapport à la Terre. Alors l'expression $Mg(au + bv + cw)\,dt$, travail élémentaire de la pesanteur pour le déplacement de la particule, devient le travail correspondant du *poids* Mg *de cette dernière*, produit de Mg par l'*abaissement* $(au + bv + cw)\,dt$ *de son niveau*, c'est-à-dire par la différentielle $d\mathfrak{h}$, changée de signe, de son *altitude* au-dessus d'une *surface horizontale* fixe choisie comme origine des altitudes, hauteur verticale que j'appellerai $\mathfrak{h}$ et qui sera très sensiblement constante sur toute surface horizontale, du moins dans l'étendue à considérer. Or, à ce point de vue, le travail $-Mg\,d\mathfrak{h}$, à chaque instant, du poids de la particule, pourra évidemment être considéré comme la dépense d'une énergie potentielle $M\int_0^{\mathfrak{h}} g\,d\mathfrak{h}$, dont il égale bien sans cesse le décroissement, et qui, variable seulement avec l'altitude $\mathfrak{h}$ de la particule, paraîtra *propre à celle-ci,* ou devra être appelée *son énergie de pesanteur.*

Or, grâce aux deux énergies potentielles d'élasticité et de pesanteur ainsi introduites pour chaque partie du système matériel considéré, le principe des forces vives appliqué aux mouvements visibles comportera une certaine simplification dans son énoncé. Il signifiera, en effet, d'après la formule (34) [p. 124] où l'on transposera au premier membre le terme $-d\Sigma \mathrm{M}\int_0^{\mathfrak{h}} g\, d\mathfrak{h}$ du second, que *la demi-force vive perceptible de tout corps terrestre, accrue de ses deux énergies potentielles d'élasticité et de pesanteur, constitue une certaine énergie totale ne variant, d'un instant à l'autre, que du travail $d\mathfrak{T}_e$ des pressions exercées sur la surface de ce corps.*

Mais il importe de ne pas oublier les restrictions admises ici, relativement soit au maintien, soit au mode de variation de la température et, aussi, relativement à l'arrangement interne de la matière, supposée s'y trouver à l'état élastique ou sans frottements intérieurs appréciables.

FIN DES LEÇONS SYNTHÉTIQUES.

15192 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

16667 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.