ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

Francesco Brioschi

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi *in Pisa*
Luigi Cremona *in Roma*
Ulisse Dini *in Pisa*
Giuseppe Jung *in Milano*

SERIE III.ª - TOMO V.

MILANO,
TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.
1901.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO V. (SERIE III.ª)

PAG.

Lehrsätze über lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Kugelbüschel, Kugelbündel und Kugelgebüsche. — *Th. Reye* 1

Sur une classe de polynômes qui se présentent dans la théorie des fonctions cylindriques. — *Niels Nielsen* 17

Contributo alla teoria del gruppo di 168 collineazioni piane. — *Edgardo Ciani.* 33

Extrait de quelques lettres de M. Ch. Hermite à M. S. Píncherle. — *Ch. Hermite* 57

Risoluzione di due questioni geometriche. — *Geminiano Pirondini* 73

Sulle varietà algebriche a tre dimensioni costituite da una semplice infinità di piani. — *Carlo Pagliano* 77

Sulla riducibilità delle equazioni differenziali lineari a coefficienti doppiamente periodici. — *Carlo Bigiavi* 107

Inaugurazione del Monumento a FRANCESCO BRIOSCHI nel Regio Istituto Tecnico Superiore di Milano 141

Sulla deformazione delle quadriche di rotazione negli spazî di curvatura costante. — *Luigi Bianchi* 165

Sopra alcuni criteri di instabilità. — *T. Levi-Civita* 221

Lehrsätze über lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Kugelbüschel, Kugelbündel und Kugelgebüsche.

(*Von* Th. Reye *in Strassburg i. E.*)

Die ∞^n Elemente einer linearen Mannigfaltigkeit $|M_n|$ sind bekanntlich in analoger Weise innig mit einander verbunden, wie die ∞^2 Punkte oder Geraden einer Ebene, die ∞^2 Strahlen oder Ebenen eines Bündels und die ∞^3 Punkte oder Ebenen des Raumes. Beliebige $n+1$ von ihnen bestimmen, wenn sie linear von einander unabhängig sind, die ganze Mannigfaltigkeit $|M_n|$, und diese enthält jede lineare Mannigfaltigkeit $|M_i|$, die durch beliebige $i+1$ ihrer Elemente bestimmt ist. Die Zusammenfassung projectiver Gebilde zu linearen Mannigfaltigkeiten fördert deshalb die *systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander,* welche Jacob Steiner der geometrischen Forschung zur Aufgabe machte. Zudem sind mit solchen Mannigfaltigkeiten verschiedenartige geometrische Gestalten und mancherlei Erzeugnisse ihrer projectiven Gebilde verbunden, die an sich von erheblichem Interesse sind.

Die nachfolgenden Sätze über derartige Mannigfaltigkeiten lassen sich aus meiner: *Synthet. Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme* (Leipzig 1879) (*) und meiner Abhandlung: *Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume, I* (in Crelle's Journal, Bd. 104) ableiten mit Hülfe des Satzes:

« Die Potenzebenen, welche eine beliebige Kugel $\varkappa$ mit homologen Ku-
« geln projectiver Kugelbüschel, Kugelbündel oder Kugelgebüsche bestimmt,

(*) Reye, *Geometria sintetica delle Sfere e dei loro Sistemi lineari.* Traduzione per Massimo Misani, Milano 1881.

« entsprechen einander in projectiven Ebenenbüscheln, collinearen Ebenen-« bündeln resp. collinearen Räumen. »

Mit linearen Mannigfaltigkeiten projectiver Kugelbüschel hat sich meines Wissens Herr TIMERDING (*) zuerst beschäftigt, und durch ihn wurde ich zu Untersuchungen darüber angeregt.

Mit $|k_n|$, $|B_n|$ resp. $|\Gamma_n|$ bezeichne ich lineare, n-fach unendliche Mannigfaltigkeiten projectiver Kugelbüschel k, Kugelbündel B resp. Kugelgebüsche Γ, und bemerke ein für allemal gleich hier, dass diese Mannigfaltigkeiten durch Inversion in lineare Mannigfaltigkeiten gleicher Art übergehen. Ihre Specialfälle lassen wir i. A. unberücksichtigt. Von den mit ihnen verbundenen und hier erörterten Gebilden seien hervorgehoben eine Congruenz von ∞^2 Kreisen (13.), von denen zu einer beliebigen Kugel oder Ebene nur einer normal ist und durch einen beliebigen Punkt nur einer geht, ein Complex von ∞^3 Kreisen (27.), von denen auf einer beliebigen Kugel oder Ebene nur einer liegt, und eine Gruppe von acht Punkten (18.), von welchen beliebige sieben den achten eindeutig bestimmen, die aber nicht die Schnittpunkte von drei linear unabhängigen Flächen zweiter Ordnung sind.

§ 1. SCHAAREN PROJECTIVER KUGELBÜSCHEL (**).

1. Eine Schaar $|k_1|$ projectiver Kugelbüschel ist durch beliebige zwei ihrer ∞^1 Büschel bestimmt. Sie erzeugt durch die homologen Kugeln ihrer Büschel eine zweite Schaar projectiver Kugelbüschel, die *Leitschaar* der ersteren. Die Büschel von jeder der beiden Schaaren bestehen aus homologen Kugeln der Büschel der anderen Schaar und sind durch diese Leitschaar projectiv auf einander bezogen. Beide Büschelschaaren sind durch zwei beliebige projective Büschel der einen oder der anderen Schaar eindeutig bestimmt und in dem Kugelgebüsch enthalten, das die beiden Büschel verbindet. Die ∞^2 Kugeln ihrer ∞^1 Büschel bilden in dem Gebüsch eine quadratische Congruenz C_2; durch jede Kugel von C_2 geht ein Büschel der einen und einer der anderen Schaar.

2. Die Potenzebenen, welche die Kugeln den Congruenz C_2 mit einer beliebigen Kugel $\varkappa$ bestimmen, umhüllen i. A. eine Regelfläche R^2 zweiten

(*) In *Crelle's Journal*, Bd. 121, S. 193.

(**) Vgl. *Crelle's Journal*, 101, S. 213 und TIMERDING a. a. O.

Grades; die Potenzaxen, welche die Büschel der beiden Schaaren $|k_1|$ mit $\varkappa$ bestimmen, bilden die beiden Regelschaaren von R^2. Wenn die Kugel $\varkappa$ sich ändert, so geht die Fläche R^2 in collineare Flächen zweiten Grades über, die zu je zweien perspective Lage haben (*). Auch die Polarebenen eines beliebigen Punktes bezüglich der Kugeln der Congruenz C_2 umhüllen eine zu R^2 collineare Regelfläche zweiten Grades. Die Mittelpunkte der Kugeln von C_2 liegen i. A. auf einer zu R^2 reciproken Fläche R_1^2 zweiten Grades (*). Die quadratische Congruenz C_2 besteht demnach aus den ∞^2 Kugeln, deren Mittelpunkte auf R_1^2 liegen, und die eine gewisse Kugel, die Orthogonalkugel des durch C_2 gehenden Gebüsches, rechtwinklig schneiden; ihre ∞^2 Kugeln umhüllen nach Darboux eine Cyklide (**), d. h. eine Fläche vierter Ordnung, die den unendlich fernen Kugelkreis doppelt enthält. Die biquadratische Schnittlinie der Orthogonalkugel mit R_1^2 ist der Ort der Punktkugeln von C_2.

3. Die Grundkreise der ∞^1 Kugelbüschel beider Schaaren liegen i. A. auf einer Fläche F^4 vierter Ordnung und bilden auf ihr zwei Kreisschaaren. Ieder Kreis der einen Schaar kann mit jedem Kreise der anderen durch eine Kugel der Congruenz C_2 verbunden werden (1.). Diese Kugel schneidet die Fläche F^4 in den beiden Kreisen und berührt F^4 doppelt in deren Schnittpunkten. Die Fläche F^4 wird demnach von den Kugelcongruenz C_2 umhüllt und ist die Cyklide von Darboux (2.); sie geht durch Inversion bezüglich der Orthogonalkugel von C_2 in sich selbst über. Auch die Ebenen der Congruenz enthalten je zwei Kreise der beiden Schaaren und berühren die Cyklide doppelt; sie gehen durch das Centrum der Orthogonalkugel und tangiren die Regelfläche R^2 (vgl. 2.), umhüllen also einen Kegel zweiter Ordnung. Die Kugeln durch einen beliebigen Kreis der einen Schaar schneiden die Cyklide in den Kreisen der anderen Schaar und bilden einen der ∞^1 Kugelbüschel von C_2. Je zwei projective Büschel der einen oder der anderen Schaar $|k_1|$ erzeugen die Cyklide und eine ihrer Kreisschaaren.

4. Ein beliebiges Kugelgebüsch hat mit der Congruenz C_2 eine quadratische Schaar von Kugeln gemein. Diese Kugelschaar ist in einem Bündel enthalten und umhüllt eine specielle Cyklide, welche eine Schaar

(*) Vgl. Reye, *Synth. Geom. der Kugeln und linearen Kugelsysteme* (Lpz. 1879), S. 15-16.

(**) Darboux, *Sur une Classe remarquable de Courbes et de Surfaces algébriques*, Paris 1873, p. 116. Ueber Cycliden und ihre verschiedenen Arten vgl. Loria, *Ricerche intorno alla Geometria della Sfera* (Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1884).

kreisförmiger Krümmungslinien hat und der Cyklide F^4 längs einer biquadratischen Raumcurve eingeschrieben ist; die Mittelpunkte ihrer Kugeln liegen i. A. auf einem Kegelschnitt. Die Potenzebenen resp. Potenzaxen, welche die Kugeln der quadratischen Schaar mit einer Kugel oder einem Kreise bestimmen, umhüllen i. A. einen Kegel zweiter Ordnung resp. einen Kegelschnitt. Auch die Polarebenen eines beliebigen Punktes bezüglich dieser Kugeln umhüllen einen Kegel zweiter Ordnung.

5. Die quadratische Congruenz C_2 wird aus einer beliebigen Kugel $\varkappa$ durch einen quadratischen Kugelcomplex C_3 projicirt. Dieser enthält die K.-Büschel und-Bündel, welche $\varkappa$ mit den Kugeln und Kugelbüscheln der Congruenz verbinden. Der Complex enthält zwei Schaaren von Kugelbündeln und hat $\varkappa$ zur Doppelkugel; seine Ebenen umhüllen eine Regelfläche R^2 zweiten Grades (2), und er besteht aus den ∞^2 Büscheln, welche $\varkappa$ mit den Berührungsebenen dieser Fläche verbinden. Der Ort der Punktkugeln des Complexes ist eine Cyklide, die zu sich selbst invers ist in Bezug auf $\varkappa$. Mit einem Kugelgebüsche hat der Complex C_3 eine quadratische Kugelcongruenz gemein, die als eine Projection von C_2 aus der Kugel $\varkappa$ aufgefasst werden kann und dieselben Eigenschaften hat wie C_2.

6. Die ∞^1 Kugelbündel, deren Orthogonalkugeln je einen Büschel der quadratischen Congruenz C_2 bilden, sind in einem quadratischen Complexe C'_3 enthalten. Dieser enthält zwei Schaaren von Kugelbündeln und hat die Orthogonalkugel von C_2 zur Doppelkugel. Der Ort seiner Punktkugeln ist die von C_2 umhüllte Cyklide (3.); der Ort seiner Ebenen und der Potenzaxen seiner ∞^1 Bündel ist die Regelfläche R_1^2 zweiten Grades, welche die Mittelpunkte der Kugeln von C_2 enthält (2.). Dieser quadratische Complex C'_3 hat dieselben Eigenschaften wie der vorhin (5.) erwähnte C_3.

§ 2. Das Netz projectiver Kugelbüschel und die Reihe projectiver Kugelbündel (*).

7. Ein Netz $|k_2|$ projectiver Kugelbüschel ist durch beliebige drei seiner ∞^2 Büschel bestimmt; es enthält jede Büschelschaar, welche zwei dieser Büschel verbindet. Seine ∞^2 Büschel erzeugen eine Reihe $|B_1|$ von ∞^1 Ku-

(*) Vgl. *Crelle's Journal* 101 S. 214. Herr Timerding definirt a. a. O. das Netz, nicht aber die Reihe.

gelbündeln, die aus je ∞^2 homologen Kugeln der Büschel bestehen und durch die Büschel des Netzes projectiv auf einander bezogen werden. Die ∞^1 Bündel der Reihe erzeugen durch ihre homologen Kugeln die ∞^2 Büschel des Netzes; die Bündelreihe B_1 ist deshalb durch zwei beliebige ihrer projectiven Kugelbündel zugleich mit dem Büschelnetze k_2 bestimmt.

Die Potenzpunkte, die eine beliebige Kugel $\varkappa$ mit je einem Bündel der Reihe $|B_1|$ bestimmt, liegen i. A. auf einer cubischen Raumcurve c^3; die ∞^2 Sehnen dieser Raumcurve aber sind die Potenzaxen, welche $\varkappa$ mit je einem Büschel des Netzes $|k_2|$ bestimmt. Da in der Potenzebene eines durch $\varkappa$ gehenden Kugelbüschels i. A. drei Punkte und drei Sehnen der cubischen Raumcurve liegen, so hat der Büschel i. A. mit drei Bündeln der Reihe und mit drei Büscheln des Netzes je eine Kugel gemein.

8. Die ∞^2 Büschel des Netzes $|k_2|$ und die ∞^1 Bündel der Reihe $|B_1|$ liegen demnach in einem cubischen Kugelcomplexe C_3, von dessen ∞^3 Kugeln jede in einem Büschel von $|k_2|$ und in einem Bündel von $|B_1|$ enthalten ist. Die Ebenen des Complexes C_3 umhüllen eine Regelfläche R^3 dritten Grades, den Ort der Potenzaxen seiner ∞^1 Kugelbündel, der Potenzebenen der ∞^2 Büschel von k_2 und der Potenzpunkte der ∞^2 Kugelgebüsche, die je eine Büschelschaar von k_2 enthalten. Die Centralebenen der ∞^1 Bündel der Reihe B_1 bilden i. A. einen cubischen Ebenenbüschel, dessen Axen die Centrallinien der ∞^2 Büschel des Netzes $k_2|$ sind. Von diesen Axen liegt i. A. eine unendlich fern, und das Netz enthält daher einen und i. A. nur einen Ebenenbüschel. Die Ebenen dieses Büschels schneiden sich in der Doppelpunktsgeraden der cubischen Regelfläche R^3. Die Punktkugeln des Complexes C_3 und die Orthogonalkreise seiner ∞^1 Kugelbündel liegen auf einer Fläche sechster Ordnung; diese enthält den unendlich fernen Kugelkreis dreifach und (vgl. 9.) einen andern Kreis doppelt, der mit den Orthogonalkreisen durch Kugeln verbunden werden kunn.

9. Zwei beliebige Bündel der Reihe $B_1|$ haben eine Doppelkugel des cubischen Complexes C_3 gemein. Durch die Doppelkugel gehen von dem Netze k_2 zwei Kugelbüschel, die in je einem der beiden Bündel enthalten sind und aus Doppelkugeln von C_3 bestehen. Der cubische Complex enthält einen Bündel von Doppelkugeln und in ihm ∞^1 Büschel des Netzes $k_2|$. Diese Büschel bilden eine specielle Schaar, und ihre Grundkreise liegen auf einer besonderen Cyklide. Sie bestimmen mit einer beliebigen Kugel Potenzaxen, die nicht auf einer Regelfläche sondern auf einem Kegel zweiter Ordnung liegen; ihre Centrallinien umhüllen einen Kegelschnitt, und ihre ∞^1

Ebenen berühren die cubische Regelfläche R^3 doppelt (8.) und schneiden sich in der einfachen Leitlinie von R^3, welche mit der Potenzaxe des Doppelkugelbündels zusammenfällt.

10. Ein beliebiger Kugelbüschel kann mit den drei Bündeln der Reihe B_1, mit denen er Kugeln gemein hat (7.), durch Kugelgebüsche verbunden werden, und drei seiner Orthogonalkugeln sind zu je einem dieser Bündel orthogonal. Demnach bilden die ∞^2 zu je einem Bündel von $|B_1$ orthogonalen Kugeln eine cubische Congruenz, die aus ∞^1 Büscheln besteht. Ihre Mittelpunkte liegen i. A. auf einer cubischen Regelfläche, und die Potenzebenen, die sie mit einer beliebigen Kugel $\varkappa$ bestimmen, umhüllen i. A. eine cubische Regelfläche. Einen ausgezeichneten Büschel der Congruenz bilden die Kugeln, die zu dem Doppelkugelbündel des Complexes C_3 orthogonal sind. Ihre Mittelpunkte liegen auf der einfachen Leitlinie der ersteren, und ihre Potenzebenen mit $\varkappa$ gehen durch die Doppelpunktsgerade der letzteren cubischen Regelfläche. Von den ∞^4 Kugelbüscheln, die je zwei Kugeln der cubischen Congruenz verbinden, bestehen ∞^1 aus concentrischen Kugeln, und deren Mittelpunkte liegen auf der Doppelpunktsgeraden der ersteren cubischen Regelfläche. Andere ∞^1 von den ∞^4 Büscheln gehen durch die beliebige Kugel $\varkappa$, und diese liegen in einem Bündel, welcher die einfache Leitlinie der zweiten cubischen Regelfläche zur Potenzaxe hat. Die Ebenen der cubischen Kugelcongruenz sind die Centralebenen der ∞^1 Bündel der Reihe $|B_1|$ und bilden einen cubischen Ebenenbüschel (8.); die Punktkugeln der Congruenz fallen mit den Knotenpunkten der Bündel von $|B_1|$ zusammen und liegen auf einer Raumcurve sechster Ordnung (vgl. 13.).

11. Der cubische Complex C_3 hat mit einem beliebigen Kugelgebüsch Γ eine cubische Kugelcongruenz gemein. Diese kann durch einen K.-Büschel beschrieben werden und enthält die Kugeln eines ausgezeichneten Büschels doppelt (9.). Die Potenzebenen, welche die ∞^2 Kugeln der Congruenz mit einer beliebigen Kugel $\varkappa$ bestimmen, umhüllen eine cubische Regelfläche; durch deren einfache Leitlinie gehen die sie doppelt berührenden Potenzebenen, welche die ∞^1 Doppelkugeln mit $\varkappa$ bestimmen. Die Ebenen der Congruenz umhüllen einen Kegel dritter Klasse; sie berühren die cubische Regelfläche und gehen durch den Potenzpunkt von Γ. Das Kugelgebüsch Γ enthält einen und i. A. nur einen Büschel des Netzes $|k_2|$; dieser bestimmt mit $\varkappa$ eine Potenzaxe, auf welcher die ∞^1 Doppelpunkte der cubischen Regelfläche liegen.

12. Die Centrenfläche der cubischen Kugelcongruenz (11.) ist ebenfalls eine cubische Regelfläche, die zu der vorigen reciprok ist; ihre Doppelpunkte sind die Mittelpunkte der ∞^1 Doppelkugeln, und ihre doppelt berührenden Ebenen gehen durch die Centrallinie des in der Congruenz enthaltenen Kugelbüschels von $|k_2|$. Diese Fläche hat mit der Orthogonalkugel von Γ eine Raumcurve sechster Ordnung gemein, den Ort aller Punktkugeln der Congruenz.

Wenn das Kugelgebüsch Γ durch einen Bündel der Reihe $|B_1|$ geht, so hat es mit dem cubischen Complexe C_3 diesen Bündel und eine Büschelschaar des Netzes $|k_2|$ gemein. Die zugehörigen cubischen Regelflächen zerfallen dann in je eine Regelfläche zweiten Grades und einen Punkt oder eine Ebene. Iedes durch den Doppelkugelbündel von C_3 gehende Gebüsch hat mit C_3 einen Bündel der Reihe $|B_1|$ gemein.

13. Von den Büscheln des Netzes $|k_2|$ sind die ∞^2 Grundkreise so im Raume vertheilt, dass eine beliebige Kugel oder Ebene zu nur einem von ihnen normal ist (11.), und dass folglich ein beliebiger Punkt auf nur einem von ihnen liegt. Eine Ausnahme machen die ∞^2 Kugeln, die zu je einem Bündel der Reihe $|B_1|$ orthogonal sind und (10.) eine cubische Congruenz bilden. Denn zu jeder von ihnen sind ∞^1 der Grundkreise normal (12.), und zwar ist deren Ort eine Cyklide (3). Von den ∞^2 Orthogonalkugeln der Reihe $|B_1|$ reduciren sich ∞^1 auf Punkte, und durch jeden von diesen gehen ∞^1 auf einer Cyklide liegende Grundkreise des Netzes $|k_2|$ und ∞^2 homologe Kugeln seiner Büschel. Diese ausgezeichneten Punkte sind die Knotenpunkte der ∞^1 Bündel von $|B_1|$, in ihnen schneiden sich je ∞^1 homologe Kreise der Bündel und die ∞^2 Cykliden, welche je eine Büschelschaar von $|k_2|$ einhüllen (vgl. 3.), und sie liegen mit sechs Punkten des unendlich fernen Kugelkreises auf einer Raumcurve sechster Ordnung. Mit den ∞^2 Grundkreisen des Netzes $|k_2|$ hat die Raumcurve je vier Punkte gemein, und die Axe des in $|k_2|$ enthaltenen Ebenenbüschels schneidet sie viermal. Das Büschelnetz $|k_2|$ und die Bündelreihe $|B_1|$ sind durch die Raumcurve eindeutig bestimmt.

§ 3. Der lineare Complex projectiver Kugelbüschel und die Schaar projectiver Kugelgebüsche (*).

14. Ein linearer Complex $|k_3|$ projectiver Kugelbüschel ist durch beliebige vier seiner Büschel bestimmt; er enthält ∞^3 Büschelnetze $|k_2|$ und ∞^4 Büschelschaaren $|k_1|$. Seine ∞^3 Büschel erzeugen eine Schaar $|\Gamma_1|$ von ∞^1 Kugelgebüschen, die aus je ∞^3 homologen Kugeln der Büschel bestehen und durch die Büschel projectiv auf einander bezogen werden. Die projectiven Gebüsche der Schaar $|\Gamma_1|$ erzeugen durch ihre homologen Kugeln die ∞^3 Büschel des Complexes $|k_3|$, und zwei beliebige von ihnen bestimmen den Complex und zugleich die Schaar. Die Gebüsche der Schaar enthalten folglich je ∞^2 Büschel des Complexes $|k_3|$; zu zweien oder dreien haben sie eine Büschelschaar $|k_1|$ resp. einen Büschel des Complexes mit einander gemein.

15. Die ∞^3 Büschel des linearen Complexes $|k_3|$ bestimmen mit einer beliebigen Kugel $\varkappa$ Potenzaxen, die einen tetraedralen quadratischen Strahlencomplex bilden. Iede Hauptebene dieses Strahlencomplexes ist die Potenzebene eines durch $\varkappa$ gehenden Büschels von $|k_3|$; durch die Kugel $\varkappa$ gehen demnach i. A. vier Büschel des Complexes $|k_3|$ und vier Gebüsche der Schaar $|\Gamma_1|$. Auf der beliebigen Kugel $\varkappa$ liegen also die Grundkreise von vier Büscheln des Complexes. Die ∞^1 projectiven Gebüsche der Schaar bestimmen mit $\varkappa$ collineare, den Strahlencomplex erzeugende Ebenenräume; von diesen ∞^1 Räumen aber arten i. A. vier aus in Ebenenbündel, und deren Mittelpunkte sind die vier Hauptpunkte des tetraedralen Strahlencomplexes und die Potenzpunkte der vier durch $\varkappa$ gehenden Gebüsche von $|\Gamma_1|$. Von den ∞^4 Büschelschaaren des linearen Complexes $|k_3|$ sind ∞^2 speciell (vgl. 9.) und in Kugelbündeln enthalten, von denen i. A. sechs durch $\varkappa$ gehen; die Potenzaxen dieser sechs Bündel verbinden die vier Hauptpunkte. Der Complex $|k_3|$ enthält (8.) eine Schaar projectiver Ebenenbüschel (Timerding), und deren windschiefe Axen liegen mit den vier Hauptpunkten auf einer Fläche zweiten Grades.

16. Von den ∞^1 Kugelgebüschen der Schaar $|\Gamma_1|$ bilden die Orthogonalkugeln eine rationale biquadratische Kugelschaar (**). Vier von ihnen

(*) Vgl. *Crelle's Journal* 101 S. 217 und Timerding a. a. O.

(**) Herr Timerding discutirt a. a. O. insbesondere diese Kugelschaar und leitet u. a. die Sätze dieser N.° 16 ab.

sind zu einer beliebigen Kugel oder Ebene $\varkappa$ normal (15.) oder gehen durch einen beliebigen Punkt, vier der Orthogonalkugeln sind Ebenen und acht reduciren sich auf Punkte. Zu beliebigen drei der Orthogonalkugeln ist allemal ein Büschel des Complexes $|k_3|$ orthogonal (14.). Die Mittelpunkte der ∞^1 Orthogonalkugeln liegen i. A. auf einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung. Diese Raumcurve schneidet die Axen der ∞^1 in $|k_3$ enthaltenen Ebenenbüschel je dreimal und liegt mit ihnen auf einer Fläche zweiten Grades (15.). Die Potenzebenen, welche die Orthogonalkugeln von $|\Gamma_1|$ mit einer Kugel $\varkappa$ bestimmen, bilden einen cubischen oder biquadratischen rationalen Ebenenbüschel, jenachdem $\varkappa$ eine oder keine der Orthogonalkugeln ist.

Von den ∞^3 Kugelbüscheln des linearen Complexes $|k_3|$ bilden die Centrallinien einen tetraedralen quadratischen Strahlencomplex, welcher die Orthogonalebenen der vier symmetrischen Gebüsche von $|\Gamma_1|$ zu Hauptebenen hat. Die vier Hauptpunkte dieses Strahlencomplexes sind die Mittelpunkte von vier Büscheln concentrischer Kugeln, ihre sechs Verbindungslinien sind die Centrallinien von je ∞^1 Büscheln des Complexes $|k_3|$.

17. Zu einer beliebigen Kugel $\varkappa$ sind ∞^1 Büschel von $|k_3|$ orthogonal, nämlich von den ∞^3 in $|k_3|$ enthaltenen Bündelnetzen i. A. je ein Büschel (11.). Diese ∞^1 Büschel bilden eine Schaar $|k_1|$, und ihre zu $\varkappa$ normalen Grundkreise liegen auf einer Cyklide (3.). Ist aber $\varkappa$ die Orthogonalkugel eines Gebüsches der Schaar $|\Gamma_1|$, so sind zu ihr ∞^2 Büschel des linearen Complexes $|k_3|$ orthogonal (14). Diese bilden in dem Gebüsch ein specielles Netz $|k_2|$; ihre ∞^2 zu $\varkappa$ normalen Grundkreise sind wieder so im Raume vertheilt, dass von ihnen nur einer zu einer beliebigen Kugel normal ist und nur einer durch einen beliebigen Punkt geht (13.).

18. Die Schaar $|\Gamma_1|$ enthält acht specielle Gebüsche, deren Orthogonalkugeln sich auf Punkte reduciren (16.), und deren Kugeln durch je einen dieser acht « Grundpunkte » gehen. In jedem Grundpunkte schneiden sich homologe Kugeln der ∞^3 Büschel von $|k_3|$ und die ∞^2 Grundkreise eines speciellen Netzes des Complexes. Durch zwei beliebige Grundpunkte gehen die ∞^1 Grundkreise einer speciellen Büschelschaar von $|k_3|$; zu je dreien liegen die acht Grundpunkte auf 56 Grundkreisen des linearen Complexes $|k_3|$. Die Cykliden, welche die ∞^4 Büschelschaaren von $|k_3|$ umhüllen, schneiden sich in den acht Grundpunkten.

Beliebige sieben von den acht Punkten bestimmen eindeutig den achten und zugleich den linearen Büschelcomplex $|k_3|$ nebst der Schaar $|\Gamma_1|$ projectiver Kugelgebüsche. Iede Inversion, die einen der acht Grundpunkte zum

Centrum hat, verwandelt die sieben übrigen in sieben Punkte einer cubischen Raumcurve, den Complex $|k_3|$ aber in einen speciellen Büschelcomplex, der ein Netz projectiver Ebenenbüschel enthält. Die cubische Raumcurve schneidet in den neuen sieben Punkten eine specielle Cyklide dritter Ordnung, welche beliebige zwei der Punkte zu Doppelpunkten hat; durch sechs dieser Punkte ist so der siebente eindeutig bestimmt.

§ 4. Netze projectiver Kugelbündel (*).

19. Ein Netz $|B_2|$ projectiver Kugelbündel ist durch beliebige drei seiner ∞^2 Bündel bestimmt und enthält jede Bündelreihe, welche zwei dieser Bündel verbindet. Seine Bündel erzeugen durch ihre homologen Kugeln ein zweites Netz $|B'_2|$ projectiver Kugelbündel, das « Leitnetz » von $|B_2|$. Die Bündel eines jeden der beiden Netze bestehen aus homologen Kugeln der Bündel des anderen Netzes und sind durch dessen Bündel projectiv auf einander bezogen. Iedes der Netze hat das andere zum Leitnetz, und drei beliebige seiner projectiven Bündel bestimmen beide Netze eindeutig.

20. Die ∞^2 Potenzpunkte, welche die Kugelbündel der beiden Netze $B_2|$, $|B'_2|$ mit einer beliebigen Kugel $\varkappa$ bestimmen, liegen auf einer allgemeinen Fläche F^3 dritter Ordnung, der zu $\varkappa$ gehörigen « Ordnungsfläche » der Netze. Mit der Potenzaxe eines beliebig durch $\varkappa$ gehenden Kugelbündels hat F^3 drei Potenzpunkte gemein, und diesen entsprechen in den Netzen drei paar Bündel, die mit $\varkappa$ und jenem beliebigen Bündel durch drei Kugelgebüsche verbunden werden können. Iedes dieser Gebüsche hat einen der drei Punkte zum Potenzpunkt und enthält $\varkappa$. Unter der Orthogonalkugeln eines beliebigen Kugelbündels giebt es also i. A. drei, die zu je einem Bündel des einen Netzes und damit auch zu je einem Bündel des anderen orthogonal sind.

21. Die Orthogonalkugeln der ∞^2 Bündel beider Netze bilden einen cubischen Complex C_3, worin zwei Systeme von je ∞^2 Kugelbüscheln leicht nachzuweisen sind; in einem beliebigen Kugelbüschel liegen i. A. drei der Orthogonalkugeln (20.). Von den Potenzaxen der ∞^2 Bündel des Netzes $|B_2|$

(*) Vgl. *Crelle's Journal* 104, S. 223.

gehen demnach drei durch der Mittelpunkt concentrischer Kugeln, d. h. durch einer beliebigen Punkt. Die Ebenen des Complexes C_3 umhüllen eine Fläche Φ^3 dritter Klasse; sie sind die Centralebenen der ∞^2 Bündel und enthalten deren Orthogonalkreise. Unter den Bündeln eines jeden der beiden Netze giebt es i. A. sechs, deren Orthogonalkreise Gerade sind (vgl. 22.), und diese zweimal sechs Geraden bilden auf Φ^3 eine SCHLÄFLI'sche Doppelsechs. Der Ort der Punktkugeln des cubischen Complexes C_3 ist eine Fläche sechster Ordnung; diese geht dreimal durch den unendlich fernen imaginären Kugelkreis, enthält die Knotenpunkte der Bündel beider Netze und wird durch beliebige drei projective Bündel des einen oder des anderen Netzes erzeugt.

22. Durch die beliebige Kugel $\varkappa$ gehen von den beiden Netzen $|B_2|$, $|B'_2|$ je sechs Bündel, und deren zweimal sechs Potenzaxen bilden auf der vorhin (20.) erwähnten cubischen Fläche F^3 eine SCHLÄFLI'sche Doppelsechs. Die Orthogonalkreise der ∞^2 Bündel von $|B_2|$ oder $|B'_2|$ sind demnach so im Raume vertheilt, dass eine Kugel oder Ebene i. A. zu sechs von ihnen normal ist, und dass durch einen beliebigen Punkt sechs von ihnen gehen; auch giebt es unter ihnen i. A. sechs Gerade, wie hieraus durch Inversion folgt. Von den Potenzaxen der ∞^2 Bündel des Netzes $|B_2|$ liegen sechs in einer beliebigen Ebene und gehen (21.) drei durch einen beliebigen Punkt. Die Orthogonalkreise der ∞^2 Bündel bestimmen mit einer beliebigen Kugeln ∞^2 Potenzaxen, von denen drei in einer beliebigen Ebene liegen (21.) und sechs durch einen beliebigen Punkt gehen. Der Orthogonalkreis eines Bündels von $|B_2|$ kann mit den Orthogonalkreisen von ∞^1 Bündeln des Netzes $|B'_2|$ durch Kugeln verbunden werden; diese bilden einen Büschel des cubischen Kugelcomplexes C_3.

23. Mit einem Kugelgebüsch Γ hat der Complex C_3 eine cubische Kugelcongruenz C_2 gemein, und diese enthält zwölf Kugelbüschel, die aus der Orthogonalkugeln je eines Bündels von $|B_2|$ oder $|B'_2|$ bestehen (22.). Die Potenzebenen, welche die ∞^2 Kugeln der Congruenz C_2 mit einer beliebigen Kugeln $\varkappa$ bestimmen, umhüllen eine Fläche dritter Klasse; jene zwölf Büschel bestimmen mit $\varkappa$ zwölf Potenzaxen, die eine Doppelsechs dieser Fläche bilden. Die Mittelpunkte der Kugeln von C_2 liegen auf einer Fläche F^3 dritter Ordnung, und auf dieser bilden die Centrallinien der zwölf Büschel eine Doppelsechs. Die cubische Congruenz besteht aus den ∞^2 Kugeln des Gebüsches Γ, deren Mittelpunkte auf F^3 liegen; sie enthält ausser den zwölf noch i. A. fünfzehn andere Kugelbüschel.

§ 5. Der lineare Complex projectiver Kugelbündel und das Netz projectiver Kugelgebüsche (*).

24. Ein linearer Complex $|B_3|$ projectiver Kugelbündel ist durch beliebige vier seiner ∞^3 Bündel bestimmt und enthält ∞^3 Bündelnetze und ∞^4 Bündelreihen. Seine Bündel erzeugen durch ihre homologen Kugeln ein Netz $|\Gamma_2|$ von ∞^2 projectiven Kugelgebüschen, deren homologe Kugeln je einen Bündel des Complexes bilden. Das Netz $|\Gamma_2|$ enthält ∞^2 Schaaren projectiver Kugelgebüsche und ist durch beliebige drei seiner Gebüsche zugleich mit dem linearen Complexe $|B_3|$ bestimmt.

25. Durch eine beliebige Kugel $\varkappa$ gehen ∞^1 Gebüsche des Netzes $|\Gamma_2|$, und deren Potenzpunkte liegen auf einer Raumcurve sechster Ordnung, der zu $\varkappa$ gehörigen « Kerncurve » c^6. Durch $\varkappa$ gehen auch ∞^1 Bündel des linearen Complexes $|B_3|$, und deren Potenzaxen schneiden die Kerncurve c^6 je dreimal und liegen auf einer Fläche F^8 achten Grades. Ieder durch $\varkappa$ gehende Bündel von $|B_3|$ ist somit in drei Gebüschen von $|\Gamma_2|$ enthalten; seine Potenzaxe schneidet c^6 in den drei Potenzpunkten, und sein Orthogonalkreis liegt auf den Orthogonalkugeln dieser drei Gebüsche. Die Fläche F^8 hat c^6 zur dreifachen Curve, und durch die Punkte von c^6 gehen je drei jener ∞^1 Potenzaxen. Die ∞^1 durch $\varkappa$ gehenden Gebüsche von $|\Gamma_2|$ enthalten also je drei durch $\varkappa$ gehende Bündel von $|B_3|$.

26. Iedes Gebüsch der Netzes $|\Gamma_2|$ enthält ∞^1 Bündel des linearen Complexes $|B_3|$, und durch eine beliebige seiner Kugeln $\varkappa$ gehen drei dieser Bündel (25.); die Orthogonalkreise der drei Bündel sind zu der Kugel $\varkappa$ normal. Auf der Orthogonalkugel eines Gebüsches von $|\Gamma_2|$ liegen demnach die Orthogonalkreise von ∞^1 Bündeln des Complexes $|B_3|$, und zwar bilden die Ebenen dieser Kreise einen cubischen Ebenenbüschel; die Potenzaxen der ∞^1 Bündel aber liegen auf einem Kegel dritter Ordnung mit einem Doppelstrahl. Die ∞^1 Bündel bilden eine specielle Bündelreihe des Complexes $|B_3|$. Ein beliebiger Bündel B von $|B_3|$ hat mit den übrigen Bündeln i. A. je eine Kugel, mit ∞^1 von ihnen aber je einen Kugelbüschel gemein. Diese ∞^1 Bündel liegen in den drei durch B gehenden Gebüschen des Netzes $|\Gamma_2|$. Durch den

(*) Vgl. *Crelle s Journal* 104 S 227.

Orthogonalkreis jedes Bündels von $|B_3|$ gehen (25.) die Orthogonalkugeln dreier Gebüsche von $|\Gamma_2|$.

27. Die Potenzpunkte, welche die Kugel $\varkappa$ mit den ∞^3 Bündeln des Complexes $|B_3|$ bestimmt, erfüllen den ganzen Raum, und in einen beliebigen Punkt fällt nur einer von ihnen. Eine Ausnahme machen die Punkte der Kerncurve c^6, indem mit ihnen je ∞^1 der Potenzpunkte zusammenfallen. Die zu $\varkappa$ gehörigen cubischen Ordnungsflächen der ∞^3 Bündelnetze von $|B_3|$ gehen alle durch c^6 (vgl. 20.). Ein durch $\varkappa$ gelegtes Kugelgebüsch enthält unendlich viele oder nur einen Bündel von $|B_3|$, jenachdem sein Potenzpunkt auf c^6 liegt oder nicht. Iedes Kugelgebüsch, welches zwei Bündel und damit eine Bündelreihe von $|B_3|$ enthält, gehört dem Netze $|\Gamma_2|$ an.

Ein beliebiges Kugelgebüsch enthält also nur einen Bündel des linearen Complexes $|B_3|$, und die Orthogonalkreise der ∞^3 Bündel von $|B_3|$ sind demnach so im Raume vertheilt, dass auf einer beliebigen Kugel oder Ebene nur einer von ihnen liegt. Auf den Orthogonalkugeln der ∞^2 Gebüsche von $|\Gamma_2|$ aber liegen, wie schon bemerkt (26.), je ∞^1 dieser Orthogonalkreise. Ein beliebiger Punkt ist Knotenpunkt eines einzigen Bündels von $|B_3|$, und hieraus folgt durch Inversion, dass ein Bündel des linearen Complexes aus Ebenen besteht. Die drei Gebüsche von $|\Gamma_2|$, in denen dieser Ebenenbündel enthalten ist, haben dessen Mittelpunkt D zum Potenzpunkt, und ihre drei Orthogonalkugeln haben D zum Centrum.

28. Die Potenzebene eines beliebigen Kugelbüschels hat mit der Kerncurve c^6, die zu einer seiner Kugeln gehört, sechs Punkte gemein. Diese sind die Potenzpunkte von sechs den Büschel enthaltenden Gebüschen des Netzes $|\Gamma_2|$, und die sechs Orthogonalkugeln dieser Gebüsche sind auch zu dem Büschel orthogonal. Die Orthogonalkugeln der ∞^2 Gebüsche von $|\Gamma_2|$ bilden demnach eine rationale Congruenz sechsten Grades; denn sechs von ihnen liegen in einen beliebigen Kugelbündel oder sind zu einem Kreise oder zu einer beliebigen Geraden normal oder gehen durch zwei gegebene Punkte. Die Potenzebenen, welche die Orthogonalkugeln von $|\Gamma_2|$ mit einer Kugel $\varkappa$ bestimmen, umhüllen i. A. eine rationale Fläche sechster Klasse, die eine dreifache Berührungsebene hat (26. 27.). Sie umhüllen eine rationale Fläche fünfter Klasse, wenn $\varkappa$ selbst eine der Orthogonalkugeln ist, und diese Fläche wird von den Ebenen eines cubischen Ebenenbüschels doppelt berührt (26.).

29. Die Mittelpunkte der ∞^2 Orthogonalkugeln von $|\Gamma_2|$ liegen auf einer rationalen Fläche sechster Ordnung (28.). Diese enthält ∞^2 rationale biquadratische Raumcurven, denn je zwei ihrer Punkte können durch eine

dieser Raumcurven verbunden werden (16.). Sie hat einen dreifachen Punkt D (27.). Auf der Centrenfläche liegen auch die ∞^4 Kerncurven c^6, die zu je einer Kugel gehören (25.); durch vier beliebige Punkte der Fläche geht allemal eine der Kerncurven. Unter den Orthogonalkugeln des Netzes $\Gamma_2|$ giebt es ∞^1 Ebenen, von denen sechs durch einen beliebigen Punkt gehen. Auch reduciren sich ∞^1 Orthogonalkugeln auf Punkte, und diese liegen mit zwölf Punkten des unendlich fernen Kugelkreises auf einer Raumcurve zwölfter Ordnung. In ihnen schneiden sich je ∞^3 homologe Kugeln der Bündel von $|B_3|$. Ieder dieser Punkte ist Knotenpunkt von ∞^1 Bündeln des Complexes $|B_3|$, die eine specielle Bündelreihe bilden, und deren übrige Knotenpunkte auf einer rationalen Raumcurve sechster Ordnung liegen (13.).

3). Von den ∞^1 Kugelbündeln des Complexes $|B_3|$, welche die Kugel $\varkappa$ enthalten, können acht mit einem durch $\varkappa$ gelegten Bündel B durch Gebüsche verbunden werden, nämlich die acht, deren Potenzaxen die Axe von B schneiden (25.). Diese acht Bündel haben mit B je einen Büschel und folglich mit einem beliebigen Kugelbüschel von B je eine Kugel gemein. Die ∞^1 durch $\varkappa$ gehenden Bündel von $|B_3|$ liegen demnach in einem Kugelcomplex achten Grades, und ihre ∞^2 Orthogonalkugeln bilden eine Congruenz achten Grades, die ∞^1 zu $\varkappa$ orthogonale Kugelbüschel enthält. Die Potenzaxen der ∞^1 Bündel und die Mittelpunkte ihrer Orthogonalkugeln liegen auf einer Fläche achten Grades (25.), die von den ∞^2 Ebenen des Complexes 8. Grades umhüllt wird. Die Orthogonalkreise der ∞^1 Bündel und die Punktkugeln dieses Complexes liegen auf einer Fläche 16ter. Ordnung, und die Ebenen der Orthogonalkreise umhüllen einer Kegel achter Klasse. Auch wenn $\varkappa$ verschwindend klein ist, gelten diese Sätze. Ist $\varkappa$ eine Ebene, so umhüllen die Ebenen der Orthogonalkreise einen Cylinder und die Potenzaxen der ∞^1 Bündel eine Curve achter Klasse. Die Potenzaxen aller Bündel des Complexes $|B_3|$ bilden demnach einen Strahlencomplex achten Grades, der ∞^2 Doppelstrahlen hat (26.). In $|B_3|$ giebt es ∞^1 Kugelbündel mit Orthogonalgeraden; diese Geraden liegen auf einer Fläche achter Ordnung.

§ 6. Lineare Complexe projectiver Kugelgebüsche (*).

31. Ein linearer Complex $|\Gamma_3|$ projectiver Kugelgebüsche enthält ∞^3 Gebüsche, welche ∞^3 Netze und ∞^4 Schaaren bilden. Seine projectiven Gebüsche erzeugen durch ihre homologen Kugeln die ∞^3 projectiven Gebüsche eines zweiten linearen Complexes $|\Gamma'_3|$, und die Gebüsche von $|\Gamma'_3|$ erzeugen ebenso die von $|\Gamma_3|$. Durch vier beliebige projective Gebüsche des einen oder des anderen Complexes sind beide Complexe bestimmt.

32. Durch eine beliebige Kugel $\varkappa$ gehen ∞^2 Gebüsche der linearen Complexe $|\Gamma_3|$ und $|\Gamma'_3|$, und deren Potenzpunkte liegen auf einer Fläche vierter Ordnung, der zu $\varkappa$ gehörigen « Kernfläche » K^4. Diese Gebüsche sind in beiden Complexen enthalten, aber ihre projective Verwandtschaft ist eine andere, wenn sie zu $|\Gamma'_3|$, als wenn sie zu $|\Gamma_3|$ gerechnet werden. Mit der Potenzaxe eines durch $\varkappa$ gelegten Kugelbündels hat die Kernfläche K^4 vier Punkte gemein, die Potenzpunkte von vier durch den Bündel gehenden Gebüschen von $|\Gamma_3|$. Durch einen beliebigen Kugelbündel gehen demnach vier Gebüsche des linearen Complexes $|\Gamma_3|$, und deren vier Orthogonalkugeln gehen durch den Orthogonalkreis des Bündels.

33. Die Orthogonalkugeln der ∞^3 Gebüsche von $|\Gamma_3|$ und $|\Gamma'_3|$ bilden also einen Kugelcomplex vierten Grades; es giebt unter ihnen i. A. vier, die in einem beliebigen Kugelbüschel liegen oder durch irgend einen Kreis gehen oder einen gegebenen Mittelpunkt haben. Zu einer beliebigen Kugel $\varkappa$ sind ∞^2 Orthogonalkugeln von $|\Gamma_3|$ normal, und deren Mittelpunkte liegen auf der zu $\varkappa$ gehörigen Kernfläche K^4 vierter Ordnung (32.). Diese ∞^2 Orthogonalkugeln bilden eine biquadratische Congruenz in dem zu $\varkappa$ orthogonalen Kugelgebüsche; die Potenzebenen, die sie mit $\varkappa$ oder einer anderen beliebigen Kugel bestimmen, umhüllen eine zu K^4 reciproke Fläche vierter Klasse. Unter den ∞^3 Orthogonalkugeln des linearen Complexes $|\Gamma_3|$ giebt es ∞^2 Ebenen, die eine Fläche vierter Klasse umhüllen, und ∞^2 Punktkugeln, die auf einer Fläche F^8 achter Ordnung liegen. Diese Fläche F^8 geht durch den unendlich fernen Kugelkreis viermal, denn sie hat mit einer Kugel $\varkappa$ nur noch die Raumcurve achter Ordnung gemein, in welcher $\varkappa$ von der zugehörigen Kernfläche K^4 geschnitten wird.

Strassburg i. E., 2. Mai 1900.

(*) Vgl. *Crelle's Journal* 104 S. 235.

Sur une classe de polynômes qui se présentent dans la théorie des fonctions cylindriques.

(Par Niels Nielsen, *à Copenhague.)*

Dans l'article que voici je désigne comme *fonction cylindrique de l'argument x et du paramètre* μ une fonction $\overset{\mu}{C}(x)$ qui est assujettie à satisfaire aux deux équations fonctionnelles suivantes :

$$\overset{\mu-1}{C}(x) - \overset{\mu+1}{C}(x) = 2\, D_x\, \overset{\mu}{C}(x)\,, \tag{I}$$

$$\overset{\mu-1}{C}(x) + \overset{\mu+1}{C}(x) = \frac{2\,\mu}{x}\, \overset{\mu}{C}(x)\,, \tag{II}$$

mais étant du reste aussi arbitraires que ces conditions le permettent. Cela posé, on démontrera facilement que la fonction cylindrique la plus générale peut être donnée sous cette forme :

$$\overset{\mu}{C}(x) = a\,(\mu)\, \overset{\mu}{J}(x) + b\,(\mu)\, \overset{\mu}{Y}(x)\,,$$

où $\overset{\mu}{J}(x)$ désigne la fonction cylindrique de la première espèce, $\overset{\mu}{Y}(x)$ celle de la deuxième espèce, à savoir :

$$\overset{\mu}{Y}(x) = \frac{\pi}{\sin\mu\,\pi}\,(\cos\mu\,\pi\, \overset{\mu}{J}(x) - \overset{-\mu}{J}(x))\,,$$

tandis que $a\,(\mu)$, $b\,(\mu)$ ont la période additive $+1$, mais étant du rest complètement arbitraires. (Voir à ce sujet le § 5 de cet article.) Adoptant la définition donnée plus haut, on verra immédiatement que $\cos\mu\,\pi\, \overset{-\mu}{C}(x)$ est aussi une fonction cylindrique de l'argument x et du paramètre μ, pourvu que $\overset{\mu}{C}(x)$ le soit.

§ 1. Sur la deuxième équation fonctionnelle des fonctions cylindriques.

En effectuant, d'après la règle de Cauchy, la multiplication de:

$$\overset{\mu}{J}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2n}}{n!\,\Gamma(\mu+n+1)},$$

par la série analogue $\overset{\nu}{J}(x)$, on démontrera facilement la formule fondamentale de M. Lommel (*), comme je l'ai fait voir dans un article récent (**):

$$\overset{\mu+n}{C}(x)\overset{\mu}{J}(x) - \overset{\mu}{C}(x)\overset{\mu+n}{J}(x) = \frac{\sin 2\mu\pi}{2\pi}\cdot\frac{2}{x}\cdot\overset{\mu,n-1}{R}(x), \tag{1}$$

où l'on a posé:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\mu}{C}(x) &= \cos\mu\pi\,\overset{-\mu}{J}(x), \\ \overset{\mu,n}{R}(x) &= \sum_{s=0}^{<\frac{n+1}{2}} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s!}\binom{\mu+n-s}{n-2s}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2s}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

et où n désigne un positif entier.

Notre polynôme $\overset{\mu,n}{R}(x)$ est identique à celui que M. Graf désigne par $\overset{\mu}{P}_n(x)$. Or, cette désignation dernière est moins heureuse, ce me semble; elle est beaucoup trop analogue à celle que l'on applique généralement dans la théorie des fonctions sphériques. C'est pourquoi j'adopte avec une légère modification la désignation de M. Lommel.

Remarquant que $\overset{\mu,0}{R}(x)$ se réduit à l'unité, on aura ces deux formules plus spéciales:

$$\overset{-\mu+1}{J}(x)\overset{\mu}{J}(x) + \overset{-\mu}{J}(x)\overset{\mu-1}{J}(x) = \frac{\sin\mu\pi}{\pi}\cdot\frac{2}{x}, \tag{1_a}$$

$$\overset{\mu-1}{Y}(x)\overset{\mu}{J}(x) - \overset{\mu}{Y}(x)\overset{\mu-1}{J}(x) = \frac{2}{x}, \tag{1_b}$$

(*) *Mathematische Annalen*, t. IV, p. 109, 1871.
(**) *Mathematische Annalen*, t. LII, p. 229, 1899.

qui sont également dues à M. Lommel (*); la dernière a été trouvée indépendamment par Hankel (**) et par M. Heinrich Weber (***).

Faisons maintenant croître à l'infini le positif entier n, tandis que μ ne doit pas être égal à un entier, nous aurons asymptotiquement:

$$\overset{-\mu-n}{J}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu-n}}{\Gamma(1-\mu-n)},$$

ce qui donnera, en vertu d'une formule *eulérienne* bien connue:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+n-1}\cdot\overset{-\mu-n}{J}(x)}{\Gamma(\mu+n)}\right) = \frac{2}{x}\cdot\frac{\sin\mu\pi}{\pi},$$

d'où l'on tire, à l'aide de (1):

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+n-1}\cdot\overset{\mu,n+1}{B}(x)}{\Gamma(\mu+n)}\right) = \overset{\mu}{J}(x), \tag{3}$$

formule qui a été indiquée par M. Graf (****).

Supposons maintenant que $\overset{\mu}{F}(x)$ soit une fonction qui satisfasse à l'équation (II), savoir:

$$\overset{\mu+1}{F}(x) = \frac{2\mu}{x}\overset{\mu}{F}(x) - \overset{\mu-1}{F}(x), \tag{II}$$

nous aurons une formule plus générale de la forme:

$$\overset{\mu+n}{F}(x) = \overset{\mu,n}{A}(x)\,\overset{\mu}{F}(x) - \overset{\mu,n}{B}(x)\,\overset{\mu-1}{F}(x), \tag{α}$$

où n est un positiv entier, tandis que $\overset{\mu,n}{A}(x)$, $\overset{\mu,n}{B}(x)$ sont deux fonctions entières de μ et de $\frac{2}{x}$ et indépendantes de la fonction $\overset{\mu}{F}(x)$. Ces deux fonctions A, B peuvent être déterminées par la conclusion habituelle de n à $n+1$, comme l'a fait M. Lommel (*****); or, la méthode suivante nous conduira immédiate-

(*) *Mathematische Annalen*, t. IV, p. 105, 108.

(**) Loc. cit., t. VIII, p. 458, 1876 (signé 1869).

(***) *Journal de Crelle*, t. LXXVI, p. 10, 1873 (signé 1872).

(****) *Annali di Matematica*, 2e série, t. XXIII, p. 51, 1895.

(*****) *Studien über die Bessel'schen Functionen*, p. 3, Leipzig 1868.

ment au but. Portant, en effet, dans (1) les expressions obtenues pour $\overset{\mu+n}{J}(x)$, $\overset{\mu+n}{C}(x)$, à l'aide de (α), on aura:

$$\overset{\mu,n}{B}(x) = \overset{\mu,n-1}{R}(x).$$

Posons ensuite dans (α) $n+1$ au lieu de n et $\mu-1$ au lieu de μ, nous aurons de la même manière:

$$\overset{\mu,n}{A}(x) = \overset{\mu-1,n}{R}(x),$$

ce qui donnera la formule cherchée:

$$\overset{\mu+n}{F}(x) = \overset{\mu-1,n}{R}(x) \,.\, \overset{\mu}{F}(x) - \overset{\mu,n-1}{R}(x) \,.\, \overset{\mu-1}{F}(x). \tag{4}$$

On trouvera la formule correspondante pour $\overset{\mu-n}{F}(x)$ en posant dans (4) $\cos\mu\pi\,\overset{-\mu}{F}(x)$, au lieu de $\overset{\mu}{F}(x)$; supprimant ensuite le facteur commun $\cos\mu\pi$ et changeant le signe de μ, on aura finalement:

$$(-1)^n\,\overset{\mu-n}{F}(x) = \overset{-\mu-1,n}{R}(x) \,.\, \overset{\mu}{F}(x) + \overset{-\mu,n-1}{R}(x) \,.\, \overset{\mu+1}{F}(x). \tag{4_a}$$

Les formules (4) montrent que les fonctions rationnelles $\overset{\mu,n}{R}(x)$ jouent un rôle assez fondamental dans la théorie des fonctions cylindriques. M. Lommel a indiqué, le premier d'après ce que je sais, que les fonctions $\overset{\mu,n}{R}(x)$ possèdent une série de propriétés remarquables. En prenant comme point de départ la formule (4), ce savant a démontré un nombre de relations entre nos fonctions R, complètement analogues à (I), (II), (4). Plus tard MM. Graf et Crelier ont développé les formules de M. Lommel et quelques autres sans connaître évidemment le développement de M. Lommel. Les deux géomètres suisses ont pris comme point de départ le développement bien connu en fraction continue. M. Graf vient de réimprimer son développement dans son beau livre sur les fonctions cylindriques (*).

Le § 2 de cet article est déstiné à approfondir la méthode de M. Lommel, c'est-à-dire évaluer les formules trouvées par les trois savants susdits par

---

(*) Graf und Gubler: *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen*, Bern 1898-1900.

une application systématique des formules (4), (4_a), procédé qui nous conduira immédiatement au but.

Les autres résultats que j'ai obtenus dans les §§ 3, 4 semblent être nouveaux.

§ 2. Première méthode pour obtenir des relations entre les fonctions $\overset{\mu,n}{R}(x)$.

Supposons que $\overset{\mu}{F_1}(x)$ soit une fonction qui satisfasse aussi à (II), savoir:

$$\overset{\mu+1}{F_1}(x) = \frac{2\mu}{x}\overset{\mu}{F_1}(x) - \overset{\mu-1}{F_1}(x),$$

nous verrons immédiatement que *la différence :*

$$\overset{\mu}{f}(x) = \overset{\mu}{F}(x)\overset{\mu-1}{F_1}(x) - \overset{\mu-1}{F}(x)\overset{\mu}{F_1}(x),$$

doit être une fonction périodique de μ *ayant la période additive* $+1$.

Cela posé, exprimons les quatre fonctions $\overset{\mu\pm n}{F}(x)$, $\overset{\mu\pm n}{F_1}(x)$ à l'aide de (4), (4_a), nous aurons respectivement :

$$\overset{\mu+n}{F}(x)\overset{\mu}{F_1}(x) - \overset{\mu}{F}(x)\overset{\mu+n}{F_1}(x) = \overset{\mu}{f}(x)\overset{\mu,n-1}{R}(x), \tag{5}$$

$$\overset{\mu-n}{F}(x)\overset{\mu}{F_1}(x) - \overset{\mu}{F}(x)\overset{\mu-n}{F_1}(x) = (-1)^n\overset{\mu}{f}(x)\overset{-\mu,n-1}{R}(x). \tag{5_a}$$

Remarquant que (5_a) peut être déduite de (5) en y posant $\mu - n$ au lieu de μ, on aura:

$$\overset{\mu-n,n-1}{R}(x) = (-1)^{n-1}\overset{-\mu,n-1}{R}(x), \tag{6}$$

formule qui peut être démontrée immédiatement à l'aide de la définition (2) du § 1 en y appliquant sur chaque terme du second membre la formule *eulérienne* pour le produit $\Gamma(\omega)\Gamma(1-\omega)$.

Remarquant en outre que (5_a) peut être déduite de (5) en y changeant le signe de n, on aura de même :

$$\overset{\mu,-n-1}{R}(x) = (-1)^n\overset{-\mu,n-1}{R}(x) = -\overset{\mu-n,n-1}{R}(x), \tag{6_a}$$

formule qui peut servir comme une définition de la fonction $\overset{\mu,n}{R}(x)$, dont l'indice n est négatif; elle est due à M. Graf (*).

(*) *Annali di Matematica*, 2e série, t. XXIII, p. 59, 1895.

Posons maintenant dans la formule (5) $\mu + p$ au lieu de μ et $n - p$ au lieu de n, p étant un positif entier, nous aurons:

$$\overset{\mu+n}{F}(x)\,\overset{\mu+p}{F_1}(x) - \overset{\mu+p}{F}(x)\,\overset{\mu+n}{F_1}(x) = \overset{\mu}{f}(x)\,\overset{\mu+p,\,n-p-1}{R}(x)\,; \tag{α}$$

exprimant ensuite les quatre fonctions qui figurent au premier membre de (α) à l'aide de (4), on aura:

$$\overset{\mu,n-1}{R}(x)\;\overset{\mu-1,p}{R}(x) - \overset{\mu,p-1}{R}(x)\;\overset{\mu-1,n}{R}(x) = \overset{\mu+p,n-p-1}{R}(x), \tag{7}$$

formule qui est due à M. Lommel (*), elle a été retrouvée par M. Crelier (**). Faisons croître au delà de toute limite l'entier n et appliquons (3), nous aurons la formule (4) pour $\overset{\mu+p}{J}(x)$. Posons en outre $n = p + 1$, nous aurons:

$$\overset{\mu-1,p}{R}(x)\;\overset{\mu,p}{R}(x) - \overset{\mu,p-1}{R}(x)\;\overset{\mu-1,p+1}{R}(x) = 1, \tag{7_a}$$

formule qui a été indiquée par M. Graf (***). Enfin, appliquons (7), nous démontrerons facilement cette autre formule:

$$\overset{\mu,n}{R}(x)\,\overset{\mu+p+1,r-p-1}{R}(x) - \overset{\mu,r}{R}(x)\,\overset{\mu+p+1,n-p-1}{R}(x) = \overset{\mu,p}{R}(x)\,\overset{\mu+n+1,r-n-1}{R}(x), \tag{8}$$

découverte par M. Crelier (****).

Regardons certains cas spéciaux de la formule (7). Posons $p = 1$, nous aurons:

$$\overset{\mu-1,n}{R}(x) + \overset{\mu+1,n-2}{R}(x) = \frac{2\mu}{x}\,\overset{\mu,n-1}{R}(x). \tag{9}$$

Faisons croître à l'infini le positif entier n, on tirera par là la formule (II) pour la fonction $\overset{\mu}{J}(x)$. Posons en outre $n = 1$ et $\mu - p$ au lieu de μ, nous aurons:

$$\overset{\mu-p-1,p}{R}(x) - \overset{\mu,-p}{R}(x) = \frac{2(\mu - p - 1)}{x}\,\overset{\mu-p,p-1}{R}(x),$$

changeant ensuite le signe de μ, appliquant (6), on aura, après avoir posé

(*) Loc. cit., p. 115.

(**) *Annali di Matematica*, 2e série, t. XXIV, p. 135, 1896.

(***) Loc. cit., p. 57.

(****) Loc. cit., p. 141.

$p+1$ au lieu de p:

$$\overset{\mu,p-2}{R}(x) + \overset{\mu,p}{R}(x) = \frac{2(\mu+p)}{x} \overset{\mu,p-1}{R}(x). \tag{9_a}$$

Les formules (9), (9_a) appartiennent aussi à M. LOMMEL (*), elles sont retrouvées par M. GRAF (**).

Prenant (6_a) comme une définition des fonctions $\overset{\mu,n}{R}(x)$ dont l'indice n est négatif, on verra immédiatement que les formules (7) — (9_a) sont valables aussi dans ce cas. Cela posé, faisons une remarque essentielle sur la formule (9_a). En effet, posons :

$$\overset{n}{F}(x) = \overset{-1,n+1}{R}(x), \tag{β}$$

(9_a) peut s'écrire sous cette forme :

$$\overset{n-1}{F}(x) + \overset{n+1}{F}(x) = \frac{2n}{x} \overset{n}{F}(x), \tag{9_b}$$

ce qui est précisément la dernière équation fondamentale des fonctions cylindriques. Or, la formule (6_a) montrera que (9_a) n'est plus applicable si l'on suppose n négatif, de sorte que *la fonction* $\overset{n}{F}(x)$ *dans* (β) *ne peut pas être regardée comme une solution de* (II), c'est ce qui s'accorde bien avec les résultats obtenus dans le § 5 de cet article.

§ 3. DEUXIÈME MÉTHODE

POUR OBTENIR DES RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS $\overset{\mu,n}{R}(x)$.

Supposons que nous eussions démontré une formule de la forme :

$$\sum_{n=p}^{n=p'} \overset{\mu+n}{f}(x) \overset{\mu+n}{J}(x) = \sum_{m=q}^{m=q'} \overset{\mu+m}{g}(x) \overset{\mu+m}{J}(x), \tag{α}$$

où f, g sont des fonctions rationnelles par rapport à x, tandis qu'elles peuvent être des fonctions quelconques par rapport à μ, *et où* p, p', q, q' *sont quatre entiers finis.*

(*) Loc. cit., p. 113, 114.
(**) Loc. cit., p. 59, 60.

Cela adopté, appliquons les formules (4), (4_a), nous aurons une relation de cette forme :

$$A(x)\overset{\mu}{J}(x) = B(x)\overset{\mu-1}{J}(x), \tag{β}$$

$A(x)$, $B(x)$ étant des fonctions *rationnelles* de x. Or, un théorème fondamental dû à M. HADAMARD montre, fait bien connu, que chacune des deux équations transcendantes :

$$\left(\frac{2}{x}\right)^{\mu}\overset{\mu}{J}(x) = 0, \quad \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu-1}\overset{\mu-1}{J}(x) = 0,$$

a une infinité de racines, et la formule (1_a) du § 1 montrera en outre qu'elles ne peuvent avoir aucune racine *commune*. Cela posé, l'équation (β) entraîne les deux identités suivantes :

$$A(x) = 0, \quad B(x) = 0,$$

de sorte que *la formule* (α) *n'est autre chose qu'une relation entre les fonctions* $\overset{\mu\, n}{R}(x)$, savoir :

$$\sum_{n=p}^{n=p'} \overset{\mu+n}{f}(x)\overset{\mu-1,n}{R}(x) = \sum_{m=q}^{m=q'} \overset{\mu+m}{g}(x)\overset{\mu-1,m}{R}(x), \tag{10}$$

ce qui montre que *dans la formule* (α) $\overset{\mu}{J}(x)$ *pourra être remplacée par une fonction quelconque satisfaisant à l'équation* (II).

Ce principe pour la généralisation de la formule (α) semble être inconnu (*).

Appliquons maintenant notre principe aux deux formules suivantes :

$$\overset{\mu+n}{J}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (\mu + 2s)\binom{n}{s}\frac{\Gamma(\mu+s)}{\Gamma(\mu+n+s+1)}\overset{\mu+2s}{J}(x),$$

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\overset{\mu}{J}(x)}{\Gamma(\mu+n+1)} = \sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^{s}\binom{n}{s}}{\Gamma(\mu+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{s}\overset{\mu+n+s}{J}(x),$$

nous aurons respectivement :

$$\sum_{s=0}^{s=n} (\mu + 2s)\binom{n}{s}\frac{\Gamma(\mu+s)}{\Gamma(\mu+n+s+1)}\overset{\mu-1.2s}{R}(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{n}\overset{\mu-1,n}{R}(x), \tag{11}$$

(*) Voir par exemple l'excellent Mémoire de M. SONINE inséré dans les *Mathematische Annalen*, t. XVI, p. 22, 1880.

$$\sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s\binom{n}{s}}{\Gamma(\mu+s+1)}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-s}\overset{\mu-1,n+s}{R}(x)=\frac{1}{\Gamma(\mu+n+1)},\tag{11_a}$$

dont la première nous donne $\overset{\mu-1,n}{R}(x)$ exprimée sous une forme finie à l'aide d'autres fonctions R; on trouvera dans le § 4 d'autres formules plus élégantes de cette espèce.

Donnerons ici la formule:

$$\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^s}{s!\,(n-s)!}\overset{\mu+n-s,n}{R}(x)=\left(\frac{2}{x}\right)^n,\tag{12}$$

que l'on peut démontrer immédiatement à l'aide de (2) en appliquant les principes du calcul des différences finies.

Différentions encore la formule:

$$\overset{\mu+n}{J}(x)=\overset{\mu-1,n}{R}(x)\,\overset{\mu}{J}(x)-\overset{\mu,n-1}{R}(x)\,\overset{\mu-1}{J}(x),$$

par rapport à x, et appliquons les formules:

$$D_x\overset{\nu}{J}(x)=-\frac{\nu}{x}\overset{\nu}{J}(x)+\overset{\nu-1}{J}(x)=\frac{\nu}{x}\overset{\nu}{J}(x)-\overset{\nu+1}{J}(x),$$

nous aurons les formules remarquables:

$$D_x\overset{\mu-1,n}{R}(x)=-\frac{n}{x}\overset{\mu-1,n}{R}(x)+\overset{\mu-1,n-1}{R}(x)+\overset{\mu,n-1}{R}(x),\tag{13}$$

$$D_x\overset{\mu-1,n}{R}(x)=\frac{2\mu+n}{x}\overset{\mu-1,n}{R}(x)-\overset{\mu-1,n+1}{R}(x)+\overset{\mu,n-1}{R}(x),\tag{13_a}$$

qui sont dues à M. Lommel (*), et qui donnent immédiatement la formule (9_a) du § 2.

§ 4. Troisième méthode
pour obtenir des relations entre les fonctions $\overset{\mu,n}{R}(x)$.

Supposons en dernier lieu que $\overset{\mu}{G}(x)$ soit une fonction qui satisfasse à l'équation fonctionnelle:

$$\overset{\mu-1}{G}(x)+\overset{\mu+1}{G}(x)=\frac{2\mu}{x}\overset{\mu}{G}(x)+\frac{2}{x}\overset{\mu}{g}(x),$$

(*) Loc. cit., p. 114.

$\overset{\mu}{g}(x)$ désignant une fonction donnée de μ et de x, tandis que $\overset{\mu}{F}(x)$ est une fonction satisfaisant à l'équation (II). Cela posé, on démontrera aisément la formule suivante :

$$\overset{\mu}{G}(x)\overset{\mu+1}{F}(x) - \overset{\mu-1}{G}(x)\overset{\mu}{F}(x) = \overset{\mu+1}{G}(x)\overset{\mu}{F}(x) - \overset{\mu}{G}(x)\overset{\mu+1}{F}(x) + \frac{2}{x}\overset{\mu}{g}(x)\overset{\mu}{F}(x),$$

d'où l'on tire, n désignant un positif entier :

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\mu+n}{G}(x)\overset{\mu+n-1}{F}(x) - \overset{\mu+n-1}{G}(x)\overset{\mu+n}{F}(x) = \overset{\mu}{G}(x)\overset{\mu-1}{F}(x) - \overset{\mu-1}{G}(x)\overset{\mu}{F}(x) + \\ &\qquad + \frac{2}{x}\sum_{p=0}^{p=n-1}\overset{\mu+p}{g}(x)\overset{\mu+p}{F}(x). \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

Mettons maintenant dans (α) $\overset{\mu}{J}(x)$ et ensuite $\overset{\mu}{Y}(x)$ au lieu de $\overset{\mu}{F}(x)$, multiplions la première des formules ainsi obtenues par $\overset{\mu+n}{Y}(x)$, la deuxième par $\overset{\mu+n}{J}(x)$, nous aurons, en vertu de (1) du § 1 :

$$\overset{\mu+n}{G}(x) = \overset{\mu-1,n}{R}(x)\overset{\mu}{G}(x) - \overset{\mu,n-1}{R}(x)\overset{\mu-1}{G}(x) + \frac{2}{x}\sum_{p=0}^{p=n-1}\overset{\mu+p}{g}(x)\overset{\mu+p,n-p-1}{R}(x). \qquad (14)$$

De cette formule générale on peut en déduire plusieurs autres. En effet, posons en premier lieu :

$$\overset{\mu}{G}(x) = \overset{\mu+\nu}{J}(\alpha x),$$

α et ν désignant deux quantités finies quelconques, nous aurons :

$$\overset{\mu}{g}(x) = \left(\frac{\mu+\nu}{\alpha} - \mu\right)\overset{\mu+\nu}{J}(\alpha x),$$

ce qui donnera :

$$\begin{aligned} \overset{\mu+\nu+n}{J}(\alpha x) &= \overset{\mu-1,n}{R}(x)\overset{\mu+\nu}{J}(\alpha x) - \overset{\mu,n-1}{R}(x)\overset{\mu+\nu-1}{J}(\alpha x) + \\ &+ \frac{2}{x}\sum_{p=0}^{p=n-1}\left(\frac{\mu+\nu+p}{\alpha} - (\mu+p)\right)\overset{\mu+\nu+p}{J}(\alpha x)\overset{\mu+p,n-p-1}{R}(x). \end{aligned}$$

Posant ensuite y au lieu de αx et $\nu - \mu$ au lieu de ν, on aura, en vertu du principe expliqué au § 3, cette formule remarquable :

$$\overset{\nu-1,n}{R}(y) - \overset{\mu-1,n}{R}(x) = 2\sum_{p=0}^{p=n-1}\left(\frac{\nu+p}{y} - \frac{\mu+p}{x}\right)\overset{\nu-1,p}{R}(y)\overset{\mu+p,n-p-1}{R}(x). \qquad (15)$$

Regardons ici les cas suivants plus spéciaux :

1.° $\nu = \mu$; différentions par rapport à y et posons ensuite $y = x$, nous aurons :

$$- D_x \overset{\mu-1\, n}{R}(x) = \frac{2}{x^2} \sum_{p=0}^{p=n-1} (\mu + p) \overset{\mu-1,p}{R}(x) \overset{\mu+p,n-p-1}{R}(x). \tag{16}$$

2.° $y = x$; différentions par rapport à ν et posons $\nu = \mu$, nous aurons :

$$D_\mu \overset{\mu-1,n}{R}(x) = \frac{2}{x} \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} \overset{\mu-1,p}{R}(x) \overset{\mu+p,n-p-1}{R}(x). \tag{17}$$

3.° $y = \infty$ ou bien $x = \infty$; appliquant les formules :

$$\overset{\mu,2n}{R}(\infty) = (-1)^n, \quad \overset{\mu,2n+1}{R}(\infty) = 0,$$

ou ce qui vaut autant :

$$\overset{\mu,n}{R}(\infty) = \cos\frac{n\pi}{2},$$

on aura les formules élégantes :

$$\overset{\mu-1,n}{R}(x) - \cos\frac{n\pi}{2} = \frac{2}{x} \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} (\mu + p) \cos\frac{n-p-1}{2}\pi \cdot \overset{\mu-1,p}{R}(x), \tag{18}$$

$$\overset{\mu-1,n}{R}(x) - \cos\frac{n\pi}{2} = \frac{2}{x} \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} (\mu + p) \cos\frac{p\pi}{2} \cdot \overset{\mu+p,n-p-1}{R}(x). \tag{18$_a$}$$

4.° $y = -x$, $\nu = \mu$:

$$\overset{\mu-1,2n+1}{R}(x) = \frac{2}{x} \cdot \sum_{p=0}^{p=2n} (-1)^p (\mu + p) \overset{\mu+1,p}{R}(x) \overset{\mu+p,2n-p}{R}(x), \tag{19}$$

$$0 = \frac{2}{x} \cdot \sum_{1=0}^{p=2n-1} (-1)^p (\mu + p) \overset{\mu-1,p}{R}(x) \overset{\mu+p,2n-p-1}{R}(x). \tag{19$_a$}$$

Posons en second lieu dans (14) $\mu = 0$, et mettons la fonction de Schläfli (*) :

$$\overset{n}{S}(x) = \sum_{p=0}^{<\frac{n}{2}} \frac{(n-p-1)!}{p!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2p}, \qquad \overset{0}{S}(x) = 0,$$

au lieu de $\overset{n}{G}(x)$, nous aurons :

$$\overset{n}{g}(x) = 2\cos^2\frac{n\pi}{2},$$

(*) *Mathematische Annalen*, t. III, p. 139, 1871.

d'où :

$$\overset{n}{S}(x) = \frac{4}{x} \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} \cos^2 \frac{p\pi}{2} \overset{p,n-p-1}{R}(x) - \frac{2}{x} \overset{0,n-1}{R}(x). \tag{20}$$

Regardons encore la fonction :

$$\overset{n}{\mathfrak{S}}(x) = e^{-ix} \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} i^p (n-p-1)! \binom{2n-p-1}{p} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-p}, \quad \overset{0}{\mathfrak{S}}(x) = 0,$$

qui est entièrement analogue à $\overset{n}{S}(x)$ mais qui semble être inconnue. Nous aurons dans ce cas :

$$\overset{n}{g}(x) = 2\, i^n e^{ix},$$

ce qui donnera :

$$e^{ix} \overset{n}{\mathfrak{S}}(x) = \frac{4}{x} \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} i^p \overset{p,n-p-1}{R}(x) - \frac{2}{x} \overset{0,n-1}{R}(x). \tag{21}$$

Regardant la fonction $\overset{\mu+\nu}{G}(\alpha x)$, on peut généraliser la formule (14), ce qui donnera un nombre d'autres formules entre les fonctions S, $\mathfrak{S}$ et les polynômes R; mais cela nous conduira trop loin dans cette brève recherche sur les propriétés fondamentales de nos polynômes R.

§ 5. Solution complète de l'équation (II). Développement en fraction continue.

Dans le § 2 nous avons remarqué que la différence :

$$\overset{\mu}{F}(x) \overset{\mu-1}{F_1}(x) - \overset{\mu-1}{F}(x) \overset{\mu}{F_1}(x) = \overset{\mu}{f}(x), \tag{α}$$

regardée comme fonction de μ, doit être périodique et avoir la période additive $+1$, pourvu que $\overset{\mu}{F}(x)$, $\overset{\mu}{F_1}(x)$ satisfassent, toutes les deux, à l'équation fonctionnelle (II).

Posons $\mu + n$ au lieu de μ et appliquons les valeurs asymptotiques pour $\overset{\mu+n}{J}(x)$, n étant infini, nous aurons par là une nouvelle démonstration pour les formules fondamentales (1_a), (1_b) de M. Lommel.

Regardons en outre les deux formules:

$$\overset{\mu}{F}(x)\,\overset{\mu-1}{J}(x)-\overset{\mu-1}{F}(x)\,\overset{\mu}{J}(x)=\overset{\mu}{a}(x),$$

$$\overset{\mu}{F}(x)\,\overset{\mu-1}{Y}(x)-\overset{\mu-1}{F}(x)\,\overset{\mu}{Y}(x)=\overset{\mu}{b}(x),$$

nous aurons, en vertu de (1_b) du § 1:

$$\overset{\mu}{F}(x)=\overset{\mu}{b}(x)\,\overset{\mu}{J}(x)-\overset{\mu}{a}(x)\,\overset{\mu}{Y}(x), \tag{22}$$

formule qui représente la solution complète de (II) *pourvu que* $\overset{\mu}{a}(x)$, $\overset{\mu}{b}(x)$ *soient des fonctions périodiques par rapport à* μ *ayant la periode additive* $+1$.

Ce résultat s'accorde bien avec le fait que notre équation fonctionnelle (II) est une équation aux différences finies, linéaires, homogènes et du deuxième ordre. En effet, posons:

$$\Delta^2_\mu\,\overset{\mu}{F}(x)=\overset{\mu+1}{F}(x)-2\,\overset{\mu}{F}(x)+\overset{\mu-1}{F}(x),$$

l'équation (II) peut s'écrire sous cette forme:

$$\Delta^2_\mu\,\overset{\mu}{F}(x)-\left(\frac{2\mu}{x}-2\right)\overset{\mu}{F}(x)=0.$$

Remarquons ici qu'il semble être beaucoup plus difficile de donner sous une forme commune toutes les solutions de l'équation (I), difficulté qui s'accorde bien avec le fait connu, qu'une foule de fonctions qui se présentent sous des formes les plus différentes satisfont à cette équation fonctionnelle.

La formule (22) nous donnera immédiatement l'expression de la fonction cylindrique la plus générale. En effet, supposons que (22) satisfasse aussi à (I), il faut que la fonction:

$$\overset{\mu}{J}(x)\,D_x\overset{\mu}{b}(x)-\overset{\mu}{Y}(x)\,D_x\overset{\mu}{a}(x),$$

est égale à zéro. Or, cette condition entraîne nécessairement les deux autres:

$$D_x\overset{\mu}{a}(x)=0,\quad D_x\overset{\mu}{b}(x)=0,$$

car le quotient des deux fonctions $\overset{\mu}{J}(x)$, $\overset{\mu}{Y}(x)$ ne peut pas représenter une fonction périodique de μ.

Posant dans (22) $\mu\pm n$ au lieu de μ, faisant ensuite croître à l'infini le positif entier n, on pourra déterminer les fonctions $\overset{\mu}{a}(x)$, $\overset{\mu}{b}(x)$ à l'aide des valeurs asymptotiques de $\overset{\mu\pm n}{J}(x)$, $\overset{\mu\pm n}{Y}(x)$, d'où:

Une solution de (II) *est complètement déterminée quand on sait ce que deviendront les valeurs de* $\overset{\mu+n}{F}(x)$ *pour le positif entier n infiniment grand.*

Voici encore ce corollaire de (22):

La fonction $\overset{\mu}{b}(x)\,.\,\overset{\mu}{J}(x)$ *est la seule solution de* (II) *qui s'évanouit quand la partie réelle de* μ, *supposée positive, croît à l'infini.*

Écrivons maintenant notre équation fonctionnelle (II) sous cette forme:

$$\frac{\overset{\mu-1}{F}(x)}{\overset{\mu}{F}(x)} = \frac{2\mu}{x} - \frac{1}{\left(\dfrac{\overset{\mu}{F}(x)}{\overset{\mu+1}{F}(x)}\right)},$$

nous aurons ce développement en fraction continue:

$$\frac{\overset{\mu-1}{F}(x)}{\overset{\mu}{F}(x)} = \frac{2\mu}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{2(\mu+1)}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{2(\mu+2)}{x} - \ddots - \cfrac{1}{\cfrac{2(\mu+n)}{x} - R_n}}}, \tag{23}$$

où l'on a posé:

$$R_n = \frac{\overset{\mu+n+1}{F}(x)}{\overset{\mu+n}{F}(x)}. \tag{23$_a$}$$

Voilà une autre propriété commune à toutes nos fonctions $\overset{\mu}{F}(x)$; généralement on ne semble avoir remarqué l'existence de la formule (23) que pour la solution $\overset{\mu}{J}(x)$. Pour que la fraction continue puisse être prolongée à l'infini il faut que:

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

condition qui ne peut être satisfaite que si l'on prend $\overset{\mu}{F}(x) = \overset{\mu}{J}(x)$, comme nous venons de le démontrer, toutes les autres solutions de (II) faisant croître à l'infini cette limite.

Du reste, on démontrera aisément que les numérateurs $Y_r^{\mu-1}$, et les dénominateurs $Z_r^{\mu-1}$ des réduites de la fraction continue (23) seront précisément des fonctions $\overset{\mu,n}{R}(x)$. En effet, on aura:

$$Z_r^{\mu-1} = Y_{r-1}^{\mu}, \quad 0 < r \leq n, \quad Z_0^{\mu-1} = 1,$$

tandis que la définition de ces réduites donnera :

$$\frac{Y_r^{\mu-1}}{Y_{r-1}^{\mu}} = \frac{2\mu}{x} - \frac{Y_{r-2}^{\mu+1}}{Y_{r-1}^{\mu}},$$

ou bien :

$$Y_r^{\mu-1} + Y_{r-2}^{\mu+1} = \frac{2\mu}{x} Y_{r-1}^{\mu}, \quad r \geqq 2,$$

et en outre :

$$Y_0^{\mu-1} = \overset{\mu-1,0}{R}(x), \quad Y_1^{\mu-1} = \overset{\mu-1,1}{R}(x),$$

de sorte que nous aurons généralement :

$$Y_r^{\mu-1} = \overset{\mu-1,r}{R}(x).$$

Écrivons encore la formule (α) de ce paragraphe sous la forme suivante:

$$\frac{\overset{\mu-1}{F_1}(x)}{\overset{\mu-1}{F}(x)} = \frac{\overset{\mu}{F_1}(x)}{\overset{\mu}{F}(x)} + \frac{\overset{\mu}{f}(x)}{\overset{\mu-1}{F}(x)\,\overset{\mu}{F}(x)},$$

nous aurons, n désignant un positif entier :

$$\frac{\overset{\mu}{F_1}(x)}{\overset{\mu}{F}(x)} = \frac{\overset{\mu+n}{F_1}(x)}{\overset{\mu+n}{F}(x)} + \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{\overset{\mu}{f}(x)}{\overset{\mu+p+1}{F}(x)\,\overset{\mu+p}{F}(x)}, \tag{24}$$

$$\frac{\overset{\mu}{F_1}(x)}{\overset{\mu}{F}(x)} = \frac{\overset{\mu-n}{F_1}(x)}{\overset{\mu-n}{F}(x)} - \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{\overset{\mu}{f}(x)}{\overset{\mu-p-1}{F}(x)\,\overset{\mu-p}{F}(x)}. \tag{24_a}$$

Posant dans (24) $\mu = 0$, $\overset{\mu}{F}(x) = \overset{\mu}{J}(x)$, $\overset{\mu}{F_1}(x) = \overset{\mu}{Y}(x)$, on retombe dans une formule due à M. Sonine (*). Prenant pour $\overset{\mu}{F}(x)$ une solution convenable de (II), on pourra dans (24), (24_a) faire croître à l'infini le positif entier n, comme le montrera la formule (22).

Copenhague, le 26 février 1900.

(*) *Mathematische Annalen*, t. XVI, page 33, 1880.

Contributo alla teoria del gruppo di 168 collineazioni piane.

(*Di* Edgardo Ciani, *a Milano.*)

Il primo intendimento col quale fu scritto questo lavoro era di risolvere la seguente questione inerente alle curve piane del 4.° ordine. È stato recentemente dimostrato che una quartica generica può riguardarsi come covariante S di altre 36 quartiche (*). Ora, la cosidetta quartica di Klein, invariante rispetto al noto gruppo di 168 collineazioni piane, gode la proprietà di essere covariante S di sè medesima. Si può dunque domandare quali sono le altre 35 di cui la precedente è covariante S secondo il teorema sopra citato. La questione è completamente risoluta ai n.i 16-22 (**). Ma con essa se ne sono presentate e sono state trattate altre che a quella più, o meno manifestamente si collegano e che sono poi tutte dipendenti dal gruppo suddetto di 168 collineazioni piane. L'isomorfismo oloedrico che passa fra questo gruppo e il gruppo modulare di ugual ordine dà agio di passare con semplicità dalle note proprietà di quest'ultimo a quelle del primo ricavandone così delle interpretazioni geometriche che mi sembrano interessanti. I primi nove numeri sono destinati a riassumere quelle proprietà già note, o facili a dedursi del G_{168} modulare, che sono necessarie per il seguito.

(*) Scorza, *Un nuovo teorema sopra le quartiche piane generali* (Math. Ann.: Bd. 52, 1899).

(**) I resultati contenuti in quei numeri furono già riassunti e pubblicati in una mia Nota presentata pochi mesi or sono all'Istituto Lombardo: cfr. Ciani, *Un teorema sopra la quartica di* Klein. (Rendic. Ist. Lomb., Serie II, Vol. XXIII, 1900.)

I.

1. Cominciamo dal ricordare ciò che s'intenda per gruppo modulare (*): sia p un numero primo e si prendano $p+1$ elementi $x_\infty x_0 x_1 x_2 \dots x_{p-1}$ caratterizzati dai $p+1$ indici: ∞, 0, 1, 2,... $p-1$, allora la relazione

$$x' \equiv \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} (\mathrm{mod}\, p)$$

con la condizione $(\alpha\delta - \beta\gamma) \equiv 1$ (mod p), per ogni valore di α, β, γ, δ serve a produrre una sostituzione sopra gl'indici suddetti e quindi sopra i $p+1$ elementi dati. Tali sostituzioni per tutti i possibili valori di $\alpha\beta\gamma\delta$ compongono un gruppo che si chiama *modulare* in relazione alla teoria delle funzioni modulari ellittiche. Due sistemi di valori α', β', γ', δ'; α'', β'', γ'', δ'' producono la stessa sostituzione quando $\alpha' + \alpha'' \equiv 0$, $\beta' + \beta'' \equiv 0$, $\gamma' + \gamma'' \equiv 0$, $\delta' + \delta'' \equiv 0$. L'ordine del gruppo è $\frac{p(p^2-1)}{2}$. Per $p = 3$, $p = 5$ il gruppo è in isomorfismo oloedrico rispettivamente con i gruppi alterni sopra 4 e sopra 5 elementi. Il 1.° caso interessante si ha per $p = 7$. Il gruppo relativo, che noi indicheremo con G_{168}, è composto di 168 sostituzioni operanti sopra 8 elementi che chiameremo gli elementi fondamentali del gruppo medesimo. È di questo di cui ora vogliamo ricordare le proprietà principali (**).

2. Le sostituzioni del gruppo si possono classificare in riguardo al valore del periodo, il quale è caratterizzato dalle condizioni di congruenza nelle quali si trova la somma $\alpha + \delta$ rispetto al modulo 7. Si trovano così:

21 sostituzioni di periodo 2, $(\alpha + \delta \equiv 0)$.

56 sostituzioni di periodo 3, $(\alpha + \delta \equiv \pm 1)$. Esse si distribuiscono in 28 paia in guisa che quelle di ogni paio sono l'una la 2.ª potenza dell'altra.

(*) Per la teoria dei gruppi modulari veggansi ad esempio le lezioni del prof. Bianchi recentemente pubblicate sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche (Pisa, Spoerri, 1899).

(**) Klein, *Ueber die Transformation Siebenter Ordnung der elliptischen Functionen* (Math. Ann.: Bd. 14). — Klein-Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der Elliptischen Modulfünctionen*. Vol. I.°, pag. 369. Lipsia. Teubner, 1890.

42 sostituzioni di periodo 4, ($\alpha + \delta \equiv 3$). Esse pure si dividono in 21 paia: quelle di un paio sono ciascuna la 3.ª potenza dell'altra. Il quadrato di una qualunque di queste ha il periodo 2.

48 sostituzioni di periodo 7, ($\alpha + \delta \equiv \pm 2$). Esse si riuniscono a 6, a 6 con l'identità per formare 8 gruppi di potenze di una medesima sostituzione.

Aggiungendo a queste 167 sostituzioni l'identità si ha il G_{168} completo. Esso, come ogni altro gruppo modulare per $p > 3$, è semplice. Quanto alla sua struttura può riassumersi brevemente così:

Esistono in G_{168} con i loro rispettivi sottogruppi:

a) 14 gruppi di 24.° ordine ciascuno dei quali è in isomorfismo oloedrico col noto gruppo ottaedrico,

b) 8 gruppi di 21.° ordine.

3. Per mettere in rilievo le relazioni che passano fra gli uni e gli altri è indispensabile anche ricordare, con opportune notazioni che ci serviranno pure in seguito, la composizione e la struttura di un gruppo ottaedrico. Se $a\,b\,c\,d$ sono i 4 elementi del gruppo, le 24 sostituzioni possono caratterizzarsi così:

$$S_1 = 1;\quad S_2 = (a\,b)(c\,d);\quad S_3 = (a\,c)(b\,d);\quad S_4 = (a\,d)(b\,c);$$
$$S_5 = (b\,c\,d);\quad S_6 = (a\,c\,d);\quad S_7 = (a\,b\,d);\quad S_8 = (a\,b\,c);$$
$$S_9 = (b\,d\,c);\quad S_{10} = (a\,d\,c);\quad S_{11} = (a\,d\,b);\quad S_{12} = (a\,c\,b);$$
$$S_{13} = (a\,b);\quad S_{14} = (c\,d);\quad S_{15} = (b\,d);\quad S_{16} = (a\,c);\quad S_{17} = (a\,d);\quad S_{18} = (b\,c);$$
$$S_{19} = (a\,b\,c\,d);\quad S_{21} = (a\,b\,d\,c);\quad S_{23} = (a\,c\,b\,d);$$
$$S_{20} = (a\,d\,c\,b);\quad S_{22} = (a\,c\,d\,b);\quad S_{24} = (a\,d\,b\,c).$$

Ecco la descrizione dei sottogruppi:

I.° Nove sottogruppi di 2.° ordine (perchè 9 sono le sostituzioni di periodo 2):

$$G_2^{\mathrm{I}} = (S_1\,S_2);\quad G_2^{\mathrm{II}} = (S_1\,S_3);\quad G_2^{\mathrm{III}} = (S_1\,S_4);$$
$$G_2^{\mathrm{IV}} = (S_1\,S_{13});\quad G_2^{\mathrm{V}} = (S_1\,S_{14});\quad G_2^{\mathrm{VI}} = (S_1\,S_{15});$$
$$G_2^{\mathrm{VII}} = (S_1\,S_{16});\quad G_2^{\mathrm{VIII}} = (S_1\,S_{17});\quad G_2^{\mathrm{IX}} = (S_1\,S_{18}).$$

II.° Quattro sottogruppi di 3.° ordine:

$$G_3^{\mathrm{I}} = (S_1\,S_5\,S_9);\quad G_3^{\mathrm{II}} = (S_1\,S_6\,S_{10});$$
$$G_3^{\mathrm{III}} = (S_1\,S_7\,S_{11});\quad G_3^{\mathrm{IV}} = (S_1\,S_8\,S_{12}).$$

III.° Sette sottogruppi di 4.° ordine divisi in due specie e cioè quattro costituiti da sostituzioni di periodo due, e tre composti ciascuno con due sostituzioni di periodo due e due di periodo quattro.

I primi quattro sono:

$$G_4^{\mathrm{I}} = (S_1\, S_2\, S_3\, S_4)\,; \qquad G_4^{\mathrm{II}} = (S_1\, S_2\, S_{13}\, S_{14})\,;$$
$$G_4^{\mathrm{III}} = (S_1\, S_3\, S_{15}\, S_{16})\,; \qquad G_4^{\mathrm{IV}} = (S_1\, S_4\, S_{17}\, S_{18})\,,$$

il G_4^{I} è *invariante*; gli altri non lo sono.

I secondi tre sono invece:

$$G_4^{\mathrm{V}} = (S_1\, S_{19}\, S_3\, S_{20})\,; \quad G_4^{\mathrm{VI}} = (S_1\, S_{21}\, S_4\, S_{22})\,; \quad G_4^{\mathrm{VII}} = (S_1\, S_{23}\, S_2\, S_{24}).$$

IV.° Quattro sottogruppi di 6.° ordine:

$$G_6^{\mathrm{I}} = (S_{13}\, S_{15}\, S_{17}\, S_1\, S_7\, S_{11})\,; \quad G_6^{\mathrm{II}} = (S_{14}\, S_{16}\, S_{17}\, S_1\, S_6\, S_{10})\,;$$
$$G_6^{\mathrm{III}} = (S_{13}\, S_{16}\, S_{18}\, S_1\, S_8\, S_{12})\,; \quad G_6^{\mathrm{IV}} = (S_{15}\, S_{14}\, S_{18}\, S_1\, S_5\, S_9).$$

V.° Tre sottogruppi di 8.° ordine:

$$G_8^{\mathrm{I}} = (S_1\, S_2\, S_3\, S_4\, S_{13}\, S_{14}\, S_{23}\, S_{24})\,;$$
$$G_8^{\mathrm{II}} = (S_1\, S_2\, S_3\, S_4\, S_{15}\, S_{16}\, S_{19}\, S_{20})\,;$$
$$G_8^{\mathrm{III}} = (S_1\, S_2\, S_3\, S_4\, S_{17}\, S_{18}\, S_{21}\, S_{22}).$$

VI.° Un sottogruppo di 12.° ordine (gruppo alterno):

$$G_{12}^{\mathrm{I}} = (S_1\, S_2\, S_3\, S_4\, S_5\, S_6\, S_7\, S_8\, S_9\, S_{10}\, S_{11}\, S_{12}).$$

4. Esistono in G_{168} quattordici G_{24} ciascuno isomorfo oloedricamente al precedente. La determinazione di tali G_{24} si riduce a quella dei loro G_4 invarianti perchè vi è corrispondenza biunivoca fra i 14 G_{24} e i 14 G_4. Cominciamo dunque da questi ultimi. Per questo, si osservi che le sostituzioni di periodo 2 del G_{168} sono le seguenti:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0, & 2 \\ 3, & 0 \end{pmatrix}; \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0, & 3 \\ 2, & 0 \end{pmatrix}; \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 6, & 0 \end{pmatrix};$$
$$T_4 = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 5, & -1 \end{pmatrix}; \quad T_5 = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 6, & -1 \end{pmatrix}; \quad T_6 = \begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 4, & -1 \end{pmatrix};$$
$$T_7 = \begin{pmatrix} 1, & 4 \\ 3, & -1 \end{pmatrix}; \quad T_8 = \begin{pmatrix} 1, & 5 \\ 1, & -1 \end{pmatrix}; \quad T_9 = \begin{pmatrix} 1, & 6 \\ 2, & -1 \end{pmatrix};$$
$$T_{10} = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 2, & -2 \end{pmatrix}; \quad T_{11} = \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ 1, & -2 \end{pmatrix}; \quad T_{12} = \begin{pmatrix} 2, & 3 \\ 3, & -2 \end{pmatrix};$$

$$T_{13}=\begin{pmatrix}2, & 4\\ 4, & -2\end{pmatrix};\quad T_{14}=\begin{pmatrix}2, & 5\\ 6, & -2\end{pmatrix};\quad T_{15}=\begin{pmatrix}2, & 6\\ 5, & -2\end{pmatrix};$$

$$T_{16}=\begin{pmatrix}3, & 1\\ 4, & -3\end{pmatrix};\quad T_{17}=\begin{pmatrix}3, & 2\\ 2, & -3\end{pmatrix};\quad T_{18}=\begin{pmatrix}3, & 3\\ 6, & -3\end{pmatrix};$$

$$T_{19}=\begin{pmatrix}3, & 4\\ 1, & -3\end{pmatrix};\quad T_{20}=\begin{pmatrix}3, & 5\\ 5, & -3\end{pmatrix};\quad T_{21}=\begin{pmatrix}3, & 6\\ 3, & -3\end{pmatrix},$$

e provengono da tutte le possibili e diverse soluzioni di:

$$\alpha\delta-\beta\gamma\equiv 1,\quad \alpha+\delta\equiv 0 \pmod 7).$$

Ebbene esse si raggruppano in 14 gruppi Γ_4 che sono quelli domandati. Per trovarne uno basta scegliere tre T_i a due, a due permutabili e aggiungervi la identità. Si ottengono così i seguenti Γ_4 descritti in questa tabella:

$$\Omega'_7=\begin{cases}\Gamma_4^{\mathrm{I}}=(1\ T_1\ T_{10}\ T_{19})\\ \Gamma_4^{\mathrm{III}}=(1\ T_2\ T_{11}\ T_{16})\\ \Gamma_4^{\mathrm{V}}=(1\ T_3\ T_{13}\ T_{17})\\ \Gamma_4^{\mathrm{VII}}=(1\ T_4\ T_6\ T_{14})\\ \Gamma_4^{\mathrm{IX}}=(1\ T_5\ T_9\ T_{12})\\ \Gamma_4^{\mathrm{XI}}=(1\ T_7\ T_8\ T_{15})\\ \Gamma_4^{\mathrm{XIII}}=(1\ T_{18}\ T_{20}\ T_{21})\end{cases}\qquad \Omega''_7=\begin{cases}\Gamma_4^{\mathrm{II}}=(1\ T_1\ T_{15}\ T_{18})\\ \Gamma_4^{\mathrm{IV}}=(1\ T_2\ T_{14}\ T_{21})\\ \Gamma_4^{\mathrm{VI}}=(1\ T_3\ T_{12}\ T_{20})\\ \Gamma_4^{\mathrm{VIII}}=(1\ T_4\ T_8\ T_{13})\\ \Gamma_4^{\mathrm{X}}=(1\ T_5\ T_{10}\ T_6)\\ \Gamma_4^{\mathrm{XII}}=(1\ T_7\ T_9\ T_{11})\\ \Gamma_4^{\mathrm{XIV}}=(1\ T_{16}\ T_{17}\ T_{19}).\end{cases}$$

Vedremo in seguito le ragioni dei due precedenti raggruppamenti.

Due Γ_4 possono trovarsi nelle seguenti mutue condizioni:

1.° Hanno una sostituzione T a comune (Γ_4^{I} e Γ_4^{II}).

2.° Oppure una sostituzione T dell'uno è permutabile con una T dell'altro (Γ_4^{I} e Γ_4^{III}).

3.° Non hanno ne sostituzioni comuni, nè permutabili (Γ_4^{I}, Γ_4^{IV}).

Nel 1.° caso i due gruppi si chiameranno *coniugati di 1.ª specie*, nel 2.° *coniugati di 2.ª specie*, nel 3.° *coniugati di 3.ª specie.* — Un Γ_4 (ad es. Γ_4^{I}) è coniugato di 1.ª specie con altri tre (Γ_4^{II}, Γ_4^{X}, Γ_4^{XIV}), di 2.ª specie con altri sei (Γ_4^{III}, Γ_4^{V}, Γ_4^{VII}, Γ_4^{IX}, Γ_4^{XI}, Γ_4^{XIII}), di 3.ª specie con altri quattro (Γ_4^{IV}, Γ_4^{VI}, Γ_4^{VIII}, Γ_4^{XII}). Due Γ_4 coniugati di 2.ª specie (Γ_4^{I}, Γ_4^{III}) sono coniugati di 1.ª specie ad un medesimo Γ_4 (che nel nostro caso è Γ_4^{XIV}). Due Γ_4 coniugati di 3.ª specie sono invece tali che un coniugato di 1.ª specie dell'uno è coniugato di 2.ª specie dell'altro, ovvero un coniugato di 1.ª specie dell'uno è coniugato di 1.ª specie ad un coniugato di 1.ª specie dell'altro. Ma su questo proposito l'osservazione più interessante è la seguente: i coniugati di 2.ª specie di un medesimo Γ_4 sono coniugati di 2.ª specie fra loro. *Cioè i quattordici Γ_4 si possono dividere in due gruppi Ω'_7, Ω''_7 di sette ognuno così che i Γ_4 di uno stesso gruppo siano fra loro coniugati di 2.ª specie e viceversa.* Altra e più importante ragione degli aggruppamenti Ω'_7, Ω''_7 sarà esposta al N. 8.

5. Ciò premesso, la costruzione dei G_{24} è ben semplice. Abbiamo già detto che ogni G_{24} ha per sottogruppo invariante di 4.° ordine un Γ_4. Ebbene, dato un Γ_4 per trovare il G_{24} che lo contiene come invariante, basta aggiungere al Γ_4 dato i suoi tre Γ_4 coniugati di 1.ª specie: si ottengono così le 9 sostituzioni di periodo 2 del G_{24} cercato, dalle combinazioni delle quali si può molto facilmente completare il G_{24} medesimo.

Si estendono ai G_{24} le denominazioni stabilite per i Γ_4. Due G_{24} si chiamano coniugati di 1.ª, 2.ª, 3.ª specie quando i loro Γ_4 invarianti siano coniugati di 1.ª, 2.ª, 3.ª specie.

6. *Due gruppi ottaedrici coniugati di 1.ª specie hanno a comune un sottogruppo G_8 di ottavo ordine.*

Infatti si considerino i due G_{24} che hanno per Γ_4 invarianti:

$$\Gamma_4^{\mathrm{I}} = (1\ T_1\ T_{10}\ T_{19}), \quad \Gamma_4^{\mathrm{II}} = (1\ T_1\ T_{15}\ T_{18}),$$

coniugati di 1.ª specie. Secondo la legge di formazione dei G_{24}, dianzi ricordata, tali Γ_4 appartengono entrambi ad entrambi i due G_{24} in questione. Ma due sottogruppi di 4.° ordine costituiti con sostituzioni di periodo 2, appartenenti ad uno stesso G_{24} e uno essendone invariante esistono in un medesimo G_8 (N. 3). È il G_8 cercato. È evidente che i due gruppi considerati non hanno altre sostituzioni comuni.

7. *Due gruppi ottaedrici coniugati di 2.ª specie hanno a comune un sottogruppo Γ_4 di 4.° ordine (che naturalmente non è invariante per alcuno di essi).*

Siano i due G_{24} aventi per Γ_4 invarianti:

$$\Gamma_4^{\mathrm{I}} = (1\ T_1\ T_{10}\ T_{19}), \quad \Gamma_4^{\mathrm{III}} = (1\ T_2\ T_{11}\ T_{16}),$$

coniugati di 2.ª specie. Le sostituzioni permutabili sono T_{16}, T_{19} ed esistono (N. 4) nel:

$$\Gamma_4^{\mathrm{XIV}} = (1\ T_{16}\ T_{17}\ T_{19}),$$

il quale è coniugato di 1.ª specie ai due Γ_4 dati. Dunque appartiene ai due G_{24} che posseggono tali Γ_4 come invarianti. È facile verificare che non ci sono altre sostituzioni comuni.

8. *Due gruppi ottaedrici coniugati di 3.ª specie hanno a comune un sottogruppo G_6 del sesto ordine.*

Abbiansi i due gruppi ottaedrici di cui i Γ_4 invarianti sono:

$$\Gamma_4^{\mathrm{I}} = (1\ T_1\ T_{10}\ T_{19}), \quad \Gamma_4^{\mathrm{IV}} = (1\ T_2\ T_{14}\ T_{21}).$$

Ora, secondo il N. 5, il 1.º gruppo ottaedrico contiene le ulteriori sostituzioni di periodo 2: $T_{15}\, T_{18}\, T_5\, T_6\, T_{16}\, T_{17}$ e il 2.º: $T_{11}\, T_{16}\, T_4\, T_6\, T_{18}\, T_{20}$ per cui sono sostituzioni comuni le seguenti:

$$T_6\ T_{16}\ T_{18},$$

ed esse generano il sottogruppo G_6 cercato. Non vi sono altre sostituzioni comuni.

9. Si ritrova così facilmente il numero dei sottogruppi G_3, G_6, G_8, G_{12} contenuti in G_{168}. Secondo i N. 3, 4, 5, 6, 7 esisteranno in G_{168} (come Klein afferma) tanti G_3 e tanti G_6 quanti ne esprime il numero $\frac{14 \cdot 4}{2} = 28$, tanti G_8 quanti ne esprime il numero $\frac{14 \cdot 3}{2} = 21$ e finalmente 14 G_{12}. Segue anche che i sette G_{24} aventi per Γ_4 invarianti quelli di Ω'_7, o di Ω''_7 esauriscono tutte le sostituzioni di periodo 2, 3, 4 e quindi anche tutti i G_3, G_6, G_8, G_{12} di G_{168}. — Ciò posto vogliamo adesso dimostrare che niuna sostituzione del G_{168} può portare un Γ_4 (o un G_{24}) di Ω'_7 in un Γ_4 (o G_{24}) di Ω''_7. — Infatti applichiamo a Ω'_7 una sostituzione di periodo 2, o 3, o 4. Poichè, come già abbiamo osservato, una tale sostituzione appartiene almeno a uno dei sette G_{24} di Ω'_7, tale G_{24} e il suo invariante Γ_4 saranno trasformati in sè stessi e quindi saranno permutati fra loro i coniugati di 2.ª specie del Γ_4 suddetto, cioè precisamente saranno permutati fra loro gli altri sei Γ_4 che con quello in parola compongono Ω'_7 (N. 4). — È dunque impossibile che per effetto di una tale sostituzione un Γ_4 di Ω'_7 sia portato in un Γ_4 di Ω''_7 e quindi ciò è impossibile per qualsiasi altra sostituzione del G_{168} chè esso può certamente generarsi mediante prodotti di sostituzioni col periodo 2, 3, 4. — Viceversa prendiamo due qualunque Γ_4 di Ω'_7, ad es.:

$$\Gamma_4^{\mathrm{I}} = (1\ T_1\ T_{10}\ T_{19}), \quad \Gamma_4^{\mathrm{III}} = (1\ T_2\ T_{11}\ T_{16}),$$

essi sono coniugati di 2.ª specie fra loro, ed entrambi coniugati di 1.ª specie con:

$$\Gamma_4^{\mathrm{XIV}} = (1\ T_{16}\ T_{17}\ T_{19}).$$

Ogni sostituzione che porti T_{19} in T_{16} porterà Γ_4^{I} in un Γ_4 contenente T_{16} ma non certo in Γ_4^{XIV} perchè Γ_4^{I} e Γ_4^{XIV} appartengono rispettivamente a Ω'_7, Ω''_7; dunque necessariamente tale sostituzione porterà Γ_4^{I} in Γ_4^{II}. Le sostituzioni che portano T_{19} in T_{16} non è dubbio che possano mancare: per trovarle basterebbe sceglierle nel G_{24} che ha per invariante Γ_4^{XIV}. Quindi si può dire che due qualunque Γ_4 (o G_{24}) di Ω'_7 (o di Ω''_7) possono esser sempre trasformati l'uno nell'altro mediante sostituzioni del G_{168}. Cioè:

Il G_{168} opera transitivamente sopra i Γ_4 (o G_{24}) appartenenti a un medesimo sistema Ω_7 e intransitivamente sopra Γ_4 (o G_{24}) appartenenti a sistemi Ω_7 diversi. — In altre parole: i due aggruppamenti Ω_7 formati ciascuno da Γ_4 (o G_{24}), a due, a due coniugati di 2.ª specie, realizzano i due noti sistemi, di 7 elementi ciascuno, sopra i quali può operare il G_{168} (*).

10. Chiuderemo queste poche osservazioni sul G_{168}, indispensabili per il seguito, notando e ricordando come per gli 8 elementi fondamentali sui quali esso opera (N. 1) si possano prendere gli 8 sottogruppi d'ordine 7 ovvero gli 8 sottogruppi d'ordine 21, onde ne viene che il G_{168} opera transitivamente tanto sui primi quanto sui secondi.

II.

11. Tutto ciò che è noto rispetto al gruppo di 168 collineazioni piane è esposto e riassunto con efficace semplicità nella bella opera del Weber già citata e precisamente nel capitolo: *Gruppen linearer ternärer Substitutionen* Vol. II, pag. 433 e di cui si suppone la conoscenza.

Poichè fra il G_{168} modulare e il presente gruppo di collineazioni piane esiste isomorfismo oloedrico, a ogni sostituzione, a ogni sottogruppo del 1.° corrisponde una sostituzione e un sottogruppo del 2.°

Seguiteremo a indicare con la lettera G_i (dove i è l'ordine) il gruppo modulare e i suoi sottogruppi; mentre adopreremo la lettera $\mathbf{G}_i$ per il gruppo di 168 collineazioni e relativi sottogruppi. Così, ad esempio, ricordando la

(*) Klein-Fricke, Cf. loc. cit. Vol. I.° pag. 383 e l'ultimo capitolo *Das Galois'sche Problem 168ten Grades und seine Resolventen 8ten und 7ten Grades* (pag. 732). — Weber, *Lehrbuch der Algebra:* cf. il Vol. II.° particolarmente il capitolo *Das Formenproblem der Gruppe G_{168} und die Theorie der Gleichungen Siebenten Grades*, pag. 466.

struttura del G_{168} (N. 2) diremo che il $\mathbf{G}_{168}$ contiene 14 $\mathbf{G}_{24}$ (gruppi ottaedrici) e 8 $\mathbf{G}_{21}$ con i relativi sottogruppi.

Consideriamo uno dei 14 sottogruppi ottaedrici $\mathbf{G}_{24}$ e il suo sottogruppo invariante di 4.° ordine $\mathbf{G}_4$. Quest'ultimo è composto dell'identità e di tre omologie armoniche tali che ciascuna è il prodotto delle altre due. Dunque esse saranno individuate da un triangolo in guisa che ogni vertice col lato opposto costituisce centro e asse di una delle omologie suddette. Poichè il $\mathbf{G}_4$ è invariante di $\mathbf{G}_{24}$ anche tale triangolo sarà invariabile per tutte le collineazioni del $\mathbf{G}_{24}$ e perciò sarà chiamato il *triangolo invariante* del gruppo ottaedrico considerato. Assumendolo come fondamentale e servendosi delle stesse notazioni del N. 2, il $\mathbf{G}_4$ sarà costituito dalle 4 sostituzioni:

$$S_1 = 1, \quad S_2 = (a\,b)(c\,d) = \begin{pmatrix} -x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = (a\,c)(b\,d) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad S_4 = (a\,d)(b\,c) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Per trovare ad es. S_{13}, S_{14} si osservi che dall'esistenza del sottogruppo $(S_1\, S_2\, S_{13}\, S_{14})$ ne segue che ciascuna delle tre S_2, S_{13}, S_{14} deve essere il prodotto delle altre due. Dunque disponendo opportunamente del punto unità avremo:

$$S_{13} = (a\,b) = \begin{pmatrix} -x_1 & x_3 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad S_{14} = (c\,d) = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Analogamente si trova:

$$S_{15} = (b\,d) = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad S_{16} = (a\,c) = \begin{pmatrix} x_3 & -x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_{17} = (a\,d) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & -x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad S_{18} = (b\,c) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

e adesso da queste si hanno le altre sostituzioni del $\mathbf{G}_{24}$:

$$S_5 = (b\,c\,d) = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad S_9 = (b\,d\,c) = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_6 = (a\,c\,d) = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 & -x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad S_{10} = (a\,d\,c) = \begin{pmatrix} x_2 & -x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_7 = (a\,b\,d) = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & -x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad S_{11} = (a\,d\,b) = \begin{pmatrix} -x_3 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_8 = (a\,b\,c) = \begin{pmatrix} x_3 & -x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad S_{12} = (a\,c\,b) = \begin{pmatrix} -x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_{19} = (a\,b\,c\,d) = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 & -x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 \end{pmatrix}, \quad S_{20} = (a\,d\,c\,b) = \begin{pmatrix} -x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_{21} = (a\,b\,d\,c) = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad S_{22} = (a\,c\,d\,b) = \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_{23} = (a\,c\,b\,d) = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & -x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad S_{24} = (a\,d\,b\,c) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_3 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

Tutte le sostituzioni del gruppo ottaedrico di collineazioni piane possono rappresentarsi sotto l'unica forma:

$$\begin{pmatrix} \pm x_i & \pm x_k & \pm x_l \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \ldots i,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3.$$

12. Varie sono le conseguenze. Enumereremo qui le più importanti per il nostro scopo:

I.° Le quattro rette:

$$a \equiv x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$b \equiv -x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$c \equiv x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$d \equiv x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$

compongono un quadrilatero invariante rispetto all'intero gruppo ottaedrico. Lo chiameremo *il quadrilatero invariante del gruppo.* I suoi lati servono a dare una interpretazione geometrica ai 4 elementi a, b, c, d. Il triangolo diagonale è invariante del gruppo.

II.° *Tutte le curve invarianti del gruppo ottaedrico possono essere rappresentate da una equazione della forma:*

$$\varphi\,(x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2) = 0,$$

dove la φ è simmetrica in $x_1\,x_2\,x_3$.

III.° Ogni covariante, o contravariante di un quadrilatero (considerato come curva del 4.° ordine) deve rimanere invariato per tutte le collineazioni che trasformano il quadrilatero in sè stesso. Quindi:

L'equazione di dianzi:

$$\varphi\,(x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2) = 0,$$

e l'altra:

$$\psi\,(u_1^2,\ u_2^2,\ u_3^2) = 0,$$

dove la ψ è pure simmetrica in $u_1 u_2 u_3$ possono rappresentare rispettivamente tutti i covarianti e contravarianti del quadrilatero.

IV.° *L'unica conica covariante del quadrilatero è:*

$$\Sigma x_i^2 = 0,$$

ossia la cosidetta conica dei 14 punti (*).

V.° *Tutte le quartiche covarianti del quadrilatero sono quelle del fascio:*

$$\Sigma x_i^4 + 6 \lambda \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0.$$

Ora, la quartica di Klein è certo invariante rispetto al gruppo ottaedrico, dunque:

La quartica di Klein *appartiene al fascio precedente.*

Per $\lambda = -\frac{1}{3}$ si trova il quadrilatero invariante, per $\lambda = \frac{1}{3}$ si ha la sua conica covariante contata due volte. Indicandola con C l'equazione del fascio può scriversi:

$$a\, b\, c\, d + \lambda\, C^2 = 0.$$

Quindi:

I quattro lati del quadrilatero invariante sono quattro bitangenti fisse di tutte le quartiche del fascio. I punti di contatto sono i punti base ed esistono sulla conica covariante del quadrilatero medesimo.

Nel $\mathbf{G}_{168}$ esistono 14 gruppi ottaedrici, dunque:

La quartica di Klein *appartiene a 14 fasci individuati ciascuno dal quadrilatero di 4 sue particolari bitangenti e dalla conica covariante del quadrilatero contata due volte* (**).

13. Ci proponiamo la determinazione dei 14 triangoli invarianti dei 14 gruppi ottaedrici. Essi intanto sono certamente tutti distinti perchè tali sono i gruppi ottaedrici relativi. Il $\mathbf{G}_{24}$ fondamentale precedente contiene i 4 sottogruppi di 4.° ordine (N. 3):

$$\mathbf{G}_4^{\mathrm{I}} = (S_1\, S_2\, S_3\, S_4)\,; \qquad \mathbf{G}_4^{\mathrm{II}} = (S_1\, S_2\, S_{13}\, S_{14})\,;$$
$$\mathbf{G}_4^{\mathrm{III}} = (S_1\, S_3\, S_{15}\, S_{16})\,; \qquad \mathbf{G}_4^{\mathrm{IV}} = (S_1\, S_4\, S_{17}\, S_{18})\,;$$

(*) Ricorderemo che questi 14 punti sono i seguenti: 8 sono a due a due sui lati del quadrilatero e compongono le 4 coppie hessiane delle 4 terne di vertici relativi; 6 sono a due a due sui lati del triangolo diagonale e costituiscono su ciascuna la coppia armonica ai vertici del triangolo e del quadrilatero.

(**) Klein-Fricke, loc. cit., pag. 692.

dei quali soltanto il 1.° è invariante. Gli altri tre sono invarianti per i 3 rispettivi $\mathbf{G}_{24}$ coniugati di 1.ª specie del 1.° (N. 4 e 5): i triangoli invarianti rispettivi sono:

$$x_1 x_2 x_3 = 0, \qquad x_3 (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0,$$
$$x_1 (x_2 + x_3)(x_2 - x_3) = 0, \qquad x_2 (x_3 + x_1)(x_3 - x_1) = 0.$$

Prendiamo a considerare i primi due, cioè i triangoli invarianti di due qualunque $\mathbf{G}_{24}$, $\mathbf{G}'_{24}$ coniugati di 1.ª specie. Essi hanno a comune il lato $x_3 = 0$; indichiamo con A, B i vertici, su questo lato, del 1.° triangolo e con A', B' quelli del 2.° Ebbene si riconosce subito che i lati del quadrilatero invariante di $\mathbf{G}_{24}$ si tagliano a due, a due in A', B' e quindi anche i lati del quadrilatero invariante di $\mathbf{G}'_{24}$ si segheranno a due, a due in A, B. Per conseguenza l'equazioni dei lati di quest'ultimo quadrilatero avranno la forma:

$$x_3 + \mu x_2 = 0, \quad x_3 - \mu x_2 = 0, \quad x_3 + \mu x_1 = 0, \quad x_3 - \mu x_1 = 0.$$

Allora, come dal quadrilatero invariante di $\mathbf{G}_{24}$ si sono dedotti i triangoli invarianti dei tre $\mathbf{G}_{24}$ coniugati di 1.ª specie, così adesso dal quadrilatero invariante di $\mathbf{G}_{24}$ potremo determinare i triangoli invarianti dei tre coniugati di 1.ª specie di $\mathbf{G}'_{24}$.

Uno è naturalmente $x_1 x_2 x_3 = 0$; gli altri due sono:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & x_1 - x_2 = 0 \\ & \mu (x_1 + x_2) + 2 x_3 = 0 ; \\ & \mu (x_1 + x_2) - 2 x_3 = 0 \end{aligned} \right. \qquad (2) \left\{ \begin{aligned} & x_1 + x_2 = 0 \\ & \mu (-x_1 + x_2) + 2 x_3 = 0 \\ & \mu (\;\; x_1 - x_2) + 2 x_3 = 0 \end{aligned} \right.$$

permutando circolarmente si trovano quest'altri:

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & x_2 - x_3 = 0 \\ & \mu (x_2 + x_3) + 2 x_1 = 0 ; \\ & \mu (x_2 + x_3) - 2 x_1 = 0 \end{aligned} \right. \qquad (4) \left\{ \begin{aligned} & x_2 + x_3 = 0 \\ & \mu (-x_2 + x_3) + 2 x_1 = 0 \\ & \mu (\;\; x_2 - x_3) + 2 x_1 = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & x_3 - x_1 = 0 \\ & \mu (x_3 + x_1) + 2 x_2 = 0 ; \\ & \mu (x_3 + x_1) - 2 x_2 = 0 \end{aligned} \right. \qquad (6) \left\{ \begin{aligned} & x_3 + x_1 = 0 \\ & \mu (-x_3 + x_1) + 2 x_2 \quad 0 \\ & \mu (\;\; x_3 - x_1) + 2 x_2 = 0 \end{aligned} \right.$$

se a questi si aggiunge il triangolo fondamentale

$$(7), \qquad x_1 x_2 x_3 = 0,$$

otterremo i 7 triangoli invarianti dei 7 gruppi ottaedrici di un Ω_7 (N. 4).

14. Rimane da determinare il valore della indeterminata μ. Per questo, siccome sappiamo già che la quartica di KLEIN appartiene al fascio:

$$\Sigma x_i^4 + 6\lambda \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0,$$

così basterà prendere una delle omologie armoniche individuate da uno dei triangoli precedenti (all'infuori del fondamentale) ed osservare che essa non appartiene al $\mathbf{G}_{24}$ fondamentale. La quartica del fascio invariante rispetto a questa nuova omologia sarà invariante rispetto all'intero $\mathbf{G}_{168}$ e sarà quindi quella cercata. Si prenda ad es. la omologia armonica:

$$\begin{pmatrix} \mu(x_2 - x_1) + 2x_3 & \mu(x_1 - x_2) + 2x_3 & \mu^2(x_1 + x_2) \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

e si esiga che essa trasformi in sè una quartica del fascio suddetto: si troverà necessariamente (escludendo la conica doppia):

$$\mu = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2},$$

$$\mu = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2},$$

ciò che determina μ e le due quartiche di KLEIN esistenti nel fascio (*). Assumendo l'uno, o l'altro dei due valori di μ si hanno i due $\mathbf{G}_{168}$ relativi alle due quartiche suddette.

15. Determinato μ si trovano con processi analoghi a quelli del N. 13 gli altri 7 triangoli invarianti dei 7 gruppi ottaedrici che mancano. Essi sono i seguenti:

$$(8)\ \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0; \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad (9)\ \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 + x_1 = 0; \\ x_3 - x_1 = 0 \end{cases} \quad (10)\ \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$(11)\ \begin{cases} \mu(x_1 + x_2) - 2x_3 = 0 \\ \mu(x_2 + x_3) - 2x_1 = 0; \\ \mu(x_3 + x_1) - 2x_2 = 0 \end{cases} \quad (12)\ \begin{cases} \mu(-x_1 + x_2) - 2x_3 = 0 \\ \mu(\ \ x_2 + x_3) + 2x_1 = 0 \\ \mu(\ \ x_3 - x_1) - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

(*) CIANI, *I vari tipi possibili di quartiche piane più volte omologico-armoniche.* (Rendic. Circ. Mat. di Palermo, 1899.)

$$(13)\begin{cases}\mu(x_1-x_2)-2x_3=0\\ \mu(-x_2+x_3)-2x_1=0;\\ \mu(x_3+x_1)+2x_2=0\end{cases}\qquad(14)\begin{cases}\mu(x_1+x_2)+2x_3=0\\ \mu(x_2-x_3)-2x_1=0\\ \mu(-x_3+x_1)-2x_2=0\end{cases}$$

(nelle quali è d'uopo ricordare il valore di μ, ovvero che μ soddisfa la $\mu^2-\mu+2=0$).

16. Passiamo alla ricerca dei flessi. Basterà trovare, per questo, una collineazione del $\mathbf{G}_{168}$ col periodo 7: il triangolo unito sarà costituito da tre flessi con le loro tangenti relative e lo chiameremo un triangolo inflessionale della curva. Per trovare una tale collineazione basta osservare che in G_{168} si ottiene una sostituzione di periodo 7 moltiplicandone una di periodo 3 per una di periodo 2 che sia esterna ai due G_{24} ai quali la prima appartiene. Le operazioni analoghe compiute sul $\mathbf{G}_{168}$ condurranno allo scopo. Sia dunque la collineazione di periodo 3 rappresentata dal ciclo:

$$(x_1\, x_2\, x_3).$$

Essa appartiene ai due $\mathbf{G}_{24}$ i cui triangoli invarianti sono (7) e (11) dei N. 13 e 15. Quindi moltiplicandola per una omologia armonica del $\mathbf{G}_{168}$ esterna a tali $\mathbf{G}_{24}$ (ad es. quella del N. 14) troveremo la collineazione richiesta. Essa è:

$$\begin{pmatrix}\mu(x_1-x_2)+2x_3 & \mu^2(x_1+x_2) & \mu(x_2-x_1)+2x_3\\ x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}.$$

L'equazioni per gli elementi uniti sono dunque:

$$\begin{aligned}&\rho x_1-\mu\ (x_1-x_2)-2x_3=0\\ &\rho x_2-\mu^2(x_1+x_2)=0\\ &\rho x_3-\mu\ (x_2-x_1)-2x_1=0,\end{aligned}$$

e così la ricerca dei flessi viene a dipendere dalla equazione di 3.° grado:

$$\begin{vmatrix}\rho-\mu & \mu & -2\\ -\mu^2 & \rho-\mu^2 & 0\\ \mu & -\mu & \rho-2\end{vmatrix}=0.$$

Risoluta questa, sarà conosciuto un triangolo inflessionale e quindi anche gli altri 7 perchè il $\mathbf{G}_{168}$ opera transitivamente sopra gli 8 sottogruppi di collineazioni di periodo 7 (N. 10).

Ricordando le osservazioni dei N. 9 e 10 e le considerazioni fatte nei numeri ultimi (14, 15 e 16) possiamo dire:

I due sistemi di 7 elementi ciascuno, sopra i quali opera il $\mathbf{G}_{168}$, *possono essere rappresentati geometricamente, con molta semplicità, dai due sistemi di triangoli invarianti trovati nei N. 13 e 15. Così pure gli 8 triangoli inflessionali precedenti possono rappresentare geometricamente gli 8 elementi fondamentali del gruppo medesimo.*

17. Intraprendiamo le considerazioni relative al covariante S di Clebsch. Cominceremo dall'osservare che i covarianti di 4.° ordine delle quartiche del fascio:

$$\Sigma x_i^4 + 6 \lambda \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0,$$

debbono rimanere invariati per tutte le collineazioni che lasciano invariate le curve del fascio, cioè per tutte quelle del gruppo ottaedrico fondamentale onde (N. 12):

Tutti i covarianti di 4.° ordine delle quartiche del fascio appartengono di nuovo al fascio. In particolare ciò accade per i covarianti S. Relativamente a quest'ultimi la conferma del teorema si può avere dal calcolo diretto che in questo caso è ben semplice. Indicando con λ' il valore del parametro individuante il covariante S della quartica corrispondente al valore λ, si ha (cf. ad es. Salmon, *Curve piane*):

$$\lambda' = \frac{1 - 2\lambda - \lambda^2}{6 \lambda^2}.$$

Per $\lambda' = \lambda$ si ottengono le curve del fascio che coincidono con i loro covarianti S. Si ha così l'equazione di condizione:

$$6 \lambda^3 + \lambda^2 + 2 \lambda - 1 = 0,$$

che ha per radici $\frac{1}{3}$, $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$ e si trovano: la conica doppia e le due quartiche di Klein del fascio (*).

18. Che la quartica di Klein coincidesse col proprio covariante S fu dimostrato per la prima volta dal Brioschi (**). Ciò risulta anche dal calcolo precedente. Più generalmente si può osservare che la quartica in que-

(*) Ciani, loc. cit.

(**) Brioschi, *Sopra una classe di curve del 4.° ordine* (Atti R. Acc. dei Lincei, Ser. III, Vol. VIII.

stione deve coincidere non soltanto col proprio covariante S ma con ogni altro suo covariante di 4.° ordine. Perchè un tale covariante deve essere invariante rispetto al $\mathbf{G}_{168}$, e il $\mathbf{G}_{168}$ ammette un solo invariante di 4.° ordine che è giusto la quartica di Klein. Dunque:

La quartica di Klein *coincide con tutti i suoi covarianti di 4.° ordine (in particolare col covariante S)* (*).

Nasce allora la seguente questione. Dal momento che una quartica generale può riguardarsi come covariante S di altre 36 quartiche (secondo il già citato teorema di Scorza) e che la quartica di Klein è già covariante S di sè stessa, quali saranno le altre 35 di cui la quartica in parola può riguardarsi come covariante S? A questa ricerca sono destinati i tre numeri seguenti.

19. Quattòrdici soluzioni del nostro problema si trovano subito. Infatti riprendiamo l'equazione del N. 16:

$$6\lambda^2\lambda' + \lambda^2 + 2\lambda \quad 1 = 0,$$

che lega il valore λ del parametro λ di una curva generica del fascio:

$$\Sigma x_i^4 + 6\lambda \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0,$$

al valore λ' del covariante S della curva medesima. La relazione suddetta per ogni valore di λ' ci dà due valori per λ e quindi ci dice che ogni quartica del fascio precedente è covariante S di altre due quartiche del fascio medesimo. Dunque in particolare la quartica di Klein sarà covariante S di sè stessa e di un'altra quartica del fascio. Per trovare quest'ultima basta porre nella relazione precedente:

$$\lambda' = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4},$$

(*) Ad esempio la quartica di Klein coinciderà col contravariante quadratico del contravariante quadratico cioè col luogo equianarmonico dell'inviluppo equianarmonico, da cui si deduce la seguente proprietà: *Se per ogni punto della quartica suddetta si conducono le 4 trasversali che la tagliano equianarmonicamente esse compongono di nuovo un gruppo equianarmonico.* — Quanto alla coincidenza della quartica di Klein col proprio covariante S è noto che essa è proprietà caratteristica della quartica in questione (cf. la mia Nota in proposito *Rendic. circ. mat. di Palermo*, 1899) e forse, con poche eccezioni, è caratteristica anche la coincidenza con qualsiasi covariante di 4.° ordine e di 4.° grado quando si rifletta che un tale covariante è rappresentabile con $S + k A f = 0$ dove A è l'invariante cubico, f la quartica, S il covariante S e k un coefficiente numerico. (Maisano, *Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica.* Giorn. di Battaglini. Vol. XIX.)

e risolvere rispetto a λ. Si trovano così per λ i valori:

$$\lambda = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4} = \lambda'; \qquad \lambda = \frac{5 + i\sqrt{7}}{16},$$

quindi la quartica del fascio individuata dal valore $\frac{5 - i\sqrt{7}}{16}$ del parametro λ ha per covariante S la quartica di Klein. Possiamo dunque dire intanto:

Ciascuno dei 14 sottogruppi ottaedrici del $\mathbf{G}_{168}$ *individua una quartica, invariante rispetto a quel sottogruppo, la quale ha per covariante S la quartica di* Klein *del* $\mathbf{G}_{168}$.

Si hanno così 14 soluzioni manifestamente distinte perchè se due coincidessero, o coinciderebbero due sottogruppi ottaedrici (il che è assurdo), oppure esisterebbe una quartica invariante rispetto ai due gruppi e non all'intero $\mathbf{G}_{168}$ il che è assurdo del pari.

20. Per cercare altre soluzioni osserviamo che la quartica di Klein appartiene al sistema lineare:

$$m x_1^4 + n x_2^4 + p x_3^4 + 6 f x_2^2 x_3^2 + 6 g x_3^2 x_1^2 + 6 h x_1^2 x_2^2 = 0,$$

costituito da tutte le quartiche invarianti rispetto alle omologie armoniche individuate dal triangolo fondamentale. Ebbene proponiamoci di ricercare quali curve del precedente sistema lineare hanno per covariante S la quartica di Klein in parola. Ora il covariante S della curva generica del sistema è (cf. ad es. Salmon, *Curve piane*).

$$S = m' x_1^4 + n' x_2^4 + p' x_3^4 + 6 f' x_2^2 x_3^2 + 6 g' x_3^2 x_1^2 + 6 h' x_1^2 x_2^2 = 0,$$

dove:

$$m' = 6 g^2 h^2, \qquad n' = 6 h^2 f^2, \qquad p' = 6 f^2 g^2$$
$$f' = n p g h - f(n g^2 + p h^2) - f^2 g h$$
$$g' = p m h f - g(p h^2 + m f^2) - g^2 h f$$
$$h' = m n f g - h(m f^2 + n g^2) - h^2 f g.$$

Se S deve coincidere con la quartica di Klein si hanno le condizioni:

$$m' = n' = p', \qquad f' = g' = h', \qquad \frac{f'}{m'} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}.$$

È dunque un semplice problema algebrico che si tratta di risolvere. Vedremo che, insieme ad alcune soluzioni già trovate, esso ce ne darà certamente delle nuove. Prima di tutto dalle relazioni $m' = n' = p'$ segue:

$$f^2 = g^2 = h^2,$$

chiamando con k^2 questo comune valore di f^2, g^2, h^2 avremo quindi per f, g, h le sole seguenti soluzioni (distinte):

$$\begin{aligned} &f = g = h = k \\ &f = g = k\,, \qquad h = -k \\ &g = h = k\,, \qquad f = -k \\ &h = f = k\,, \qquad g = -k. \end{aligned}$$

Ma per $f = g = h$ si vede facilmente che si è condotti ad $m = n = p$ e in tal caso la soluzione che si troverebbe non è certo nuova perchè essa ci darebbe una curva del fascio $\Sigma x_i^4 + 6\lambda \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0$. Rimane dunque da considerarsi il solo caso $f = g = -h$ chè gli altri sono simili a questo.

Allora dalla $f' = g'$ segue:

$$(m - n)(p + k) = 0.$$

Ma con $p = -k$ non si può soddisfare alla:

$$\frac{f'}{m'} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4},$$

dunque avremo $m = n$. Quindi la $\dfrac{h'}{m'} = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{4}$ ci dà:

$$\frac{m^2 + 2mk - k^2}{3k^2} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2},$$

dalla quale si toglie:

$$\frac{k}{m} = \frac{-2 \pm (3 + i\sqrt{7})}{1 - 3i\sqrt{7}},$$

cioè si hanno le due soluzioni:

$$\frac{k}{m} = \frac{-5 + i\sqrt{7}}{16}, \qquad \frac{k}{m} = \frac{1 - i\sqrt{7}}{4}.$$

Si ha poi dalla $g' = h'$:

$$\frac{p}{m} = \frac{2\left(\dfrac{k}{m}\right)^2 - 3\dfrac{k}{m} - 1}{1 + \dfrac{k}{m}}.$$

Quindi le due soluzioni sono le seguenti:

$$1.^a: \quad \frac{k}{m} = \frac{f}{m} = \frac{f}{n} = \frac{g}{m} = \frac{g}{n} = \frac{-h}{m} = -\frac{h}{n} = \frac{-5 + i\sqrt{7}}{16}$$

$$\frac{p}{m} = \frac{p}{n} = -\left(\frac{1 + 3i\sqrt{7}}{8}\right),$$

$$2.^a: \quad \frac{k}{m} = \frac{f}{m} = \frac{f}{n} = \frac{g}{m} = \frac{g}{n} = -\frac{h}{m} = -\frac{h}{n} = \frac{1 - i\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{p}{m} = \frac{p}{n} = -2.$$

21. Discutiamole separatamente. La 1.ª non è una nuova soluzione. Perchè si può dimostrare che la curva che essa individua è invariante rispetto a quel gruppo ottaedrico il quale ha per triangolo invariante (N. 15):

$$x_3 (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0.$$

Basta perciò osservare che il quadrilatero invariante del gruppo in parola è dato da (N. 13):

$$(x_3^2 - \mu^2 x_2^2)(x_3^2 - \mu^2 x_1^2) = 0,$$

e la conica covariante è:

$$2 x_3^2 + \mu^2 (x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

dunque il fascio delle quartiche invarianti rispetto al gruppo ottaedrico in questione sarà (N. 12):

$$(x_3^2 - \mu^2 x_2^2)(x_3^2 - \mu^2 x_1^2) + \alpha \,\{ 2 x_3^2 + \mu^2 (x_1^2 + x_2^2) \}^2 = 0.$$

Ebbene per $\alpha = \frac{-1 + 3i\sqrt{7}}{8}$ si trova la curva individuata dalla 1.ª soluzione.

Passiamo alla 2.ª soluzione cioè alla quartica:

$$x_1^4 + x_2^4 - 2 x_3^4 + 6 \, \frac{1 - i\sqrt{7}}{4} (x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_3^2 - x_1^2 x_2^2) = 0.$$

Questa costituisce veramente un caso nuovo. Perchè tale curva è invariante rispetto al sottogruppo $\mathbf{G}_8$ (N. 3 e 11):

$$\mathbf{G}_8 = (S_1 \, S_2 \, S_3 \, S_4 \, S_{17} \, S_{18} \, S_{21} \, S_{22}),$$

ma non rispetto ad alcuno dei due gruppi ottaedrici contenenti detto $\mathbf{G}_8$ e quindi nemmeno rispetto a qualsiasi altro gruppo ottaedrico del $\mathbf{G}_{168}$.

Dunque ognuno dei 21 sottogruppi di 8.° ordine del $\mathbf{G}_{168}$ individua pure una quartica che ha per covariante S quella di Klein.

Tali 21 curve sono manifestamente tutte distinte perchè se due coincidessero in una sola, o coinciderebbero due $\mathbf{G}_8$ il che è impossibile, oppure tale curva essendo invariante rispetto a due $\mathbf{G}_8$ sarebbe invariante rispetto almeno a un $\mathbf{G}_{24}$ il che abbiamo visto or ora essere pure impossibile. Abbiamo dunque trovato le 36 soluzioni del nostro problema cioè tante quante ne comporta, per il teorema già citato di Scorza, una quartica qualunque.

22. I N. 17, 18, 19, 20 conducono dunque alla seguente conclusione:

La quartica di Klein *è covariante S di sè stessa e di altre 35 quartiche. Quattordici di queste sono ciascuna invarianti rispetto a uno dei 14 sottogruppi ottaedrici del $\mathbf{G}_{168}$; le 21 rimanenti sono invece, ciascuna, invarianti rispetto a uno dei 21 sottogruppi di 8.° ordine.*

Il modo di caratterizzare tali curve e scriverne le equazioni relative è espresso ai N. 19 e 20.

Il teorema del N. 8 ci dice che le prime 14 si dividono in due gruppi di 7 ognuno così che quelle di un medesimo gruppo sono proiettive, mentre è impossibile trasformare una di un gruppo in una dell'altro mediante collineazioni del $\mathbf{G}_{168}$. Ma è impossibile ottenere ciò anche mediante una collineazione esterna al $\mathbf{G}_{168}$ perchè essa dovrebbe trasformare in sè stessa la quartica di Klein, il che è assurdo. Sia infatti C una tale collineazione; essa trasporta un gruppo ottaedrico di Ω'_7 in un gruppo ottaedrico di Ω''_7 cioè ad es. il gruppo ottaedrico fondamentale in un suo coniugato di 1.ª o di 3.ª specie. Deve dunque il triangolo fondamentale essere trasportato in:

$$x_3(x_1+x_2)(x_1-x_2)=0,$$

ovvero in:

$$\{\mu(x_1+x_2)-2x_3\}\{\mu(x_2+x_3)-2x_1\}\{\mu(x_3+x_1)-2x_2\}=0.$$

Nel 1.° caso è ben semplice verificare che le collineazioni capaci di attuare il trasporto non trasformano in sè la quartica di Klein. Il 2.° caso si riduce al 1.° perchè i due triangoli soprascritti sono invarianti di due gruppi ottaedrici coniugati di 2.ª specie i quali sono sempre transitivi (N. 8). Moltiplicando quindi C per una delle collineazioni che effettuano il transito si ricadrebbe nel 1.° caso.

Invece le altre 21 curve trovate sono proiettivamente identiche perchè due sottogruppi $\mathbf{G}_8$ o appartengono allo stesso gruppo ottaedrico e sono per conseguenza trasformabili l'uno nell'altro (con sostituzioni del gruppo ottaedrico stesso) o altrimenti si possono riguardare come appartenenti a due gruppi ottaedrici coniugati di 2.ª specie e sono trasformabili del pari.

Dunque rispetto alla proiettività delle curve trovate si può dire che:

Le prime 14 si dividono in due gruppi di 7 ciascuno, così che sono proiettivamente identiche quelle di uno stesso gruppo e proiettivamente diverse quelle appartenenti a gruppi diversi.

Invece le 21 rimanenti sono tutte proiettivamente identiche.

23. Termineremo le nostre considerazioni volgendole allo studio di qualche proprietà relativa ai 24 flessi della quartica di Klein. Perciò cominceremo dall'osservare che riferendosi al solito triangolo fondamentale si vede facilmente che delle tre coordinate di un flesso nè due possono essere uguali, nè alcuna può essere zero (perchè un flesso non può esistere sopra nessuno dei 21 assi delle 21 omologie armoniche del $\mathbf{G}_{168}$).

Potremo dunque scrivere le sei quaderne seguenti con la sicurezza che esse sono composte da 24 punti tutti distinti. Se $y_1\, y_2\, y_3$ sono le coordinate di un flesso, i 24 flessi si potranno distribuire così:

$$(q_1)\left\{\begin{array}{l}(\ y_1\ \ y_2\ \ y_3)\\(-y_1\ \ y_2\ \ y_3)\\(\ y_1\ -y_2\ \ y_3)\\(\ y_1\ \ y_2\ -y_3)\end{array}\right.;\qquad(q_2)\left\{\begin{array}{l}(\ y_1\ \ y_3\ \ y_2)\\(-y_1\ \ y_3\ \ y_2)\\(\ y_1\ -y_3\ \ y_2)\\(\ y_1\ \ y_3\ -y_2)\end{array}\right.;\qquad(q_3)\left\{\begin{array}{l}(\ y_3\ \ y_2\ \ y_1)\\(-y_3\ \ y_2\ \ y_1)\\(\ y_3\ -y_2\ \ y_1)\\(\ y_3\ \ y_2\ -y_1)\end{array}\right.$$

$$(q_4)\left\{\begin{array}{l}(\ y_2\ \ y_1\ \ y_3)\\(-y_2\ \ y_1\ \ y_3)\\(\ y_2\ -y_1\ \ y_3)\\(\ y_2\ \ y_1\ -y_3)\end{array}\right.;\qquad(q_5)\left\{\begin{array}{l}(\ y_2\ \ y_3\ \ y_1)\\(-y_2\ \ y_3\ \ y_1)\\(\ y_2\ -y_3\ \ y_1)\\(\ y_2\ \ y_3\ -y_1)\end{array}\right.;\qquad(q_6)\left\{\begin{array}{l}(\ y_3\ \ y_1\ \ y_2)\\(-y_3\ \ y_1\ \ y_2)\\(\ y_3\ -y_1\ \ y_2)\\(\ y_3\ \ y_1\ -y_2)\end{array}\right.$$

Ogni quaderna è invariante rispetto al $\mathbf{G}_4$ invariante del gruppo ottaedrico fondamentale. Si riconosce facilmente che gli 8 punti di due quaderne esistono su di una conica (*). Si hanno così le 15 coniche se-

(*) Ciani, *I vari tipi possibili di quartiche piane più volte omologico-armoniche*, loc. cit.

guenti:

$$\left.\begin{aligned}
(q_1 q_2) &\equiv x_1^2 (y_2^2 + y_3^2) - (x_2^2 + x_3^2) y_1^2 = 0 \\
(q_4 q_5) &\equiv x_1^2 (y_3^2 + y_1^2) - (x_2^2 + x_3^2) y_2^2 = 0 \\
(q_3 q_6) &\equiv x_1^2 (y_1^2 + y_2^2) - (x_2^2 + x_3^2) y_3^2 = 0
\end{aligned}\right\} \text{ Invarianti rispetto a } \mathbf{G}_8^{\mathrm{I}}.$$

$$\left.\begin{aligned}
(q_1 q_3) &\equiv x_2^2 (y_1^2 + y_3^2) - (x_1^2 + x_3^2) y_2^2 = 0 \\
(q_2 q_5) &\equiv x_2^2 (y_2^2 + y_1^2) - (x_1^2 + x_3^2) y_3^2 = 0 \\
(q_4 q_6) &\equiv x_2^2 (y_3^2 + y_2^2) - (x_1^2 + x_3^2) y_1^2 = 0
\end{aligned}\right\} \text{ Invarianti rispetto a } \mathbf{G}_8^{\mathrm{II}}.$$

$$\left.\begin{aligned}
(q_1 q_4) &\equiv x_3^2 (y_1^2 + y_2^2) - (x_1^2 + x_2^2) y_3^2 = 0 \\
(q_3 q_5) &\equiv x_3^2 (y_2^2 + y_3^2) - (x_1^2 + x_2^2) y_1^2 = 0 \\
(q_2 q_6) &\equiv x_3^2 (y_3^2 + y_1^2) - (x_1^2 + x_2^2) y_2^2 = 0
\end{aligned}\right\} \text{ Invarianti rispetto a } \mathbf{G}_8^{\mathrm{III}}.$$

$$\left.\begin{aligned}
(q_1 q_5) &\equiv m\, x_1^2 + n\, x_2^2 + p\, x_3^2 = 0 \\
(q_2 q_4) &\equiv m\, x_1^2 + p\, x_2^2 + n\, x_3^2 = 0 \\
(q_2 q_3) &\equiv p\, x_1^2 + n\, x_2^2 + m\, x_3^2 = 0 \\
(q_3 q_4) &\equiv n\, x_1^2 + m\, x_2^2 + p\, x_3^2 = 0 \\
(q_5 q_6) &\equiv n\, x_1^2 + p\, x_2^2 + m\, x_3^2 = 0 \\
(q_1 q_6) &\equiv p\, x_1^2 + m\, x_2^2 + n\, x_3^2 = 0
\end{aligned}\right\} \text{ Invarianti rispetto al solo } \mathbf{G}_4 \text{ invariante.}$$

dove:

$$m = y_3^4 - y_1^2 y \;, \quad n = y_1^2 - y^2 y_3^2 \,, \quad p = y_2^4 - y_3^2 y_1^2 \,.$$

È essenziale osservare che queste 15 coniche sono tutte distinte e che non sono degeneri. Che siano tutte distinte resulta dal considerare che se due coincidessero in una sola, questa avrebbe più che 8 punti comuni con la quartica; che poi non siano degeneri risulta dal considerare che esse, se mai, dovrebbero spezzarsi in rette per i vertici del triangolo fondamentale ciò che è escluso dalle osservazioni già fatte sulle coordinate $y_1\, y_2\, y_3$ di un flesso e dal relativo quadro delle coordinate di tutti i flessi.

24. Abbiamo così per ogni sottogruppo ottaedrico due specie di coniche contenenti ciascuna 8 flessi della quartica di Klein. Nove di esse sono a tre a tre invarianti rispetto a uno stesso $\mathbf{G}_8$ e sei solo rispetto al $\mathbf{G}_4$ invariante. Quante sono in tutto le une e le altre? Circa alle prime si osservi che ogni sottogruppo $\mathbf{G}_8$ del $\mathbf{G}_{168}$ ne individua tre, e come abbiamo osservato nel numero precedente, esse sono distinte: per le medesime ragioni sono

distinte due di tali coniche individuate da $\mathbf{G}_8$ diversi ma contenuti nel medesimo $\mathbf{G}_{24}$: se finalmente potessero coincidere in una sola due coniche individuate da due $\mathbf{G}_8$ non appartenenti allo stesso $\mathbf{G}_{24}$, tale conica sarebbe invariante rispetto ai due $\mathbf{G}_8$ in parola e quindi rispetto all'intiero $\mathbf{G}_{168}$ il che è impossibile.

Dunque i 21 $\mathbf{G}_8$ individuano 63 delle coniche cercate.

Circa poi alle seconde il fatto che debbono essere distinte quelle invarianti rispetto a uno stesso $\mathbf{G}_4$ (N. 22) porta che i coefficienti m, n, p sono tutti diversi fra loro. Dunque non possono coincidere in una sola nemmeno due che siano invarianti rispetto a due $\mathbf{G}_4$ coniugati di 1.ª specie perchè dovrebbe una tal conica essere invariante rispetto al $\mathbf{G}_8$ che contiene i due $\mathbf{G}_4$ e si ricadrebbe in una delle 63 precedenti. E in ultimo se potessero coincidere in una sola due che fossero invarianti rispetto a due $\mathbf{G}_4$ coniugati di 2.ª o di 3.ª specie (e quindi non contenuti in uno stesso $\mathbf{G}_8$) dovrebbe una tal conica essere invariante o rispetto a un $\mathbf{G}_{24}$ o all'intero $\mathbf{G}_{168}$. Nel 1.º caso sarebbe la conica covariante del $\mathbf{G}_{24}$, nel 2.º caso non esisterebbe.

Quindi i 14 $\mathbf{G}_4$ individuano 84 delle coniche in parola. Abbiamo dunque il teorema:

I 24 flessi della quartica di KLEIN *giacciono a otto, a otto sopra 147 coniche divise in due specie e cioè: 63 di esse sono a tre a tre invarianti rispetto ai 21 sottogruppi di 8.º ordine e 84 sono a sei, a sei invarianti rispetto ai 14 sottogruppi $\mathbf{G}_4$ invarianti a loro volta dei 14 sottogruppi ottaedrici.*

Con considerazioni analoghe alle precedenti e ricordando quelle fatte al N. 15 del lavoro più volte citato sulle quartiche più volte omologico armoniche si trova anche:

I medesimi 24 flessi esistono a 6, a 6 sopra 112 coniche le quali appartengono a 4, a 4 a 28 fasci. Ogni fascio è collegato a una bitangente della quartica, e conseguentemente al relativo sottogruppo $\mathbf{G}_6$ di sest'ordine, nel seguente modo: le coniche del fascio sono bitangenti fra loro, secanti la bitangente suddetta nei suoi punti di contatto con la quartica, e invarianti ciascuna rispetto al sottogruppo $\mathbf{G}_6$.

Extrait de quelques lettres de M. Ch. Hermite à M. S. Pincherle.

Paris, le 10 Mai 1900.

. . . mon travail touche de près au vôtre, puisqu'il concerne la relation:

$$f(a+x)=f(a)+\frac{x}{1}\Delta f(a)+\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\Delta^2 f(a)+\cdots$$

dans les cas où elle a lieu, et où je suppose $\Delta a = 1$. Elle donne le type de ces fonctions qui sont complétement définies par les seules valeurs entières de la variable et vous remarquerez son caractère essentiel de conserver la même forme, lorsqu'on prend soit les dérivées, soit les différences finies, par rapport à a, de sorte qu'une seule égalité donne naissance à une infinité d'autres. Voici celle que j'ai obtenue; elle se rapporte à la fonction Gamma et fournit une expression de son logarithme, d'une toute autre nature que la formule classique:

$$\log\Gamma(1+x)=-Cx+\frac{S_2 x^2}{2}-\frac{S_3 x^3}{3}+\cdots$$

qui suppose le module de la variable inférieur à l'unité, et où les coefficients $S_n=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$ sont des trascendantes numériques. La méthode, comme vous allez voir, est on ne peut plus facile; elle a son point de départ dans la formule:

$$\log\Gamma(x)=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{xy}-e^y}{e^y-1}-(x-1)e^y\right]\frac{dy}{y}.$$

J'en tire d'abord la relation

$$\log\Gamma(a+x)-\log\Gamma(a)=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ay}(e^{xy}-1)}{e^y-1}-x\,e^y\right]\frac{dy}{y},$$

et je remarquerai que pour $x = 1$ on a :

$$\Delta \log \Gamma(a) = \int_{-\infty}^{0} (e^{ay} - e^{y}) \frac{dy}{y},$$

puis par un calcul facile :

$$\Delta^n \log \Gamma(a) = \int_{-\infty}^{0} e^{ay} (e^{y} - 1)^{n-1} \frac{dy}{y},$$

en prenant :

$$\Delta a = 1.$$

Cela étant, j'écris :

$$e^{xy} = [1 + (e^{y} - 1)]^{x} = 1 + \frac{x}{1} (e^{y} - 1) + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} (e^{y} - 1)^2 + \cdots,$$

série convergente, la quantité $1 - e^{y}$ étant moindre que l'unité, puisque la variable est toujours négative dans l'intégrale. Nous avons ainsi :

$$\frac{e^{xy} - 1}{e^{y} - 1} = x + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} (e^{y} - 1) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} (e^{y} - 1)^{n-1} + \cdots$$

et par conséquent :

$$\log \Gamma(a+x) - \log \Gamma(a) = x \int_{-\infty}^{0} (e^{ay} - e^{y}) \frac{dy}{y} +$$
$$+ \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \int_{-\infty}^{0} e^{ay} (e^{y} - 1) \frac{dy}{y} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} \int_{-\infty}^{0} e^{ay} (e^{y} - 1)^{n-1} \frac{dy}{y} + \cdots$$

et enfin, d'après la remarque précédente :

$$\log \Gamma(a+x) - \log \Gamma(a) = x \Delta \log \Gamma(a) + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 \log \Gamma(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} \Delta^n \log \Gamma(a) + \cdots$$

ou bien :

$$\log \Gamma(a+x) - \log \Gamma(a) = x \log a + \frac{x(x-1)}{1.2} \Delta \log a + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{1.2\dots n} \Delta^{n-1} \log a + \cdots$$

Il est clair que a doit être supposé positif pour que les intégrales aient un sens; cette condition admise, la convergence est démontrée comme conséquence de la formule du binôme pour toutes les valeurs positives de x. Vous voyez qu'en faisant $a = 1$ afin d'obtenir $\log \Gamma(1+x)$, le calcul des coefficients se fait bien aisément et par de simples soustractions avec une table de logarithmes. Sous forme explicite, on peut écrire :

$$\log \Gamma(1+x) = \frac{x(x-1)}{1.2} \log 2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} (\log 3 - 2 \log 2) +$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4} (\log 4 - 3 \log 3 + 3 \log 2) + \cdots$$

et j'observe surtout qu'ils sont tous de même nature, tandis que les quantités S_n s'expriment par les puissances de π si n est pair et représentent pour n impair des transcendantes plus complexes. Je n'écris pas les égalités semblables qu'on obtient en prenant les dérivées par rapport à a; je remarque seulement que la différence finie donne :

$$\log(a+x) = \log a + \frac{x}{1} \Delta \log a + \frac{x(x-1)}{1.2} \Delta^2 \log a + \cdots$$

et, qu'en prenant les dérivées, on obtient les éléments simples des fonctions uniformes d'une variable. Mais leur expression par la formule d'interpolation, à la quelle on serait ainsi amené, n'a lieu qu'en supposant la variable positive et sous la restriction que les pôles soient représentés par des quantités réelles négatives, ou par des imaginaires ayant leur partie réelle négative; c'est-à-dire que les pôles se trouvent tous dans le demi plan, à gauche de l'axe des ordonnées.

Paris, 19 Mai 1900.

. . . Voici une généralisation qui va faire disparaître, s'il existe, tout le prestige du cas particulier de $\log \Gamma(x)$. Je considère, avec LAPLACE et ABEL, les fonctions définies par l'égalité suivante :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\, e^{xy}\, dy, \tag{1}$$

et je remarque qu'on en tire :

$$\Phi(a+x) - \Phi(a) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\,(e^{xy}-1)\, e^{ay}\, dy,$$

ce qui donne, pour $x = 1$,

$$\Delta\,\Phi(a) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\,(e^{y}-1)\, e^{ay}\, dy, \tag{2}$$

puis :

$$\Delta^n\,\Phi(a) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\,(e^{y}-1)^n\, e^{ay}\, dy. \tag{3}$$

J'admettrai que la première relation ait lieu pour toutes les valeurs positives de x; il en sera de même de celles qui suivent sous la condition de $a > 0$. Cela étant, on aura cette expression par la formule d'interpolation de NEWTON :

$$\Phi(a+x) = \Phi(a) + \frac{x}{1}\,\Delta\,\Phi(a) + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^2\,\Phi(a) + \cdots$$

Elle s'établit, en effet, en partant encore de l'identité :

$$e^{xy} = (1 + e^y - 1)^x,$$

et de la série convergente qui en résulte :

$$e^{xy} = 1 + \frac{x}{1}(e^y - 1) + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}(e^y-1)^2 + \cdots \tag{4}$$

si l'on suppose x positif et y négatif, en sorte que $e^y - 1$ soit en valeur absolue inférieur à l'unité. Nous pouvons ainsi l'employer dans l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{0} \varphi(y)(e^{xy}-1)\, e^{ay}\, dy,$$

et au moyen des égalités (2) et (3) en conclure sur le champ le résultat annoncé.

Une conclusion semblable a lieu si l'on considère la fonction :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} [\varphi(y)\, e^{xy} + \varphi_1(y)]\, dy,$$

car on a comme tout à l'heure :

$$\Phi(a+x) - \Phi(a) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)(e^{xy}-1)\, e^{ay}\, dy.$$

Soit encore :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} [\varphi(y)\, e^{xy} + x\, \varphi_1(y) + \varphi_2(y)]\, dy\,;$$

nous trouverons dans ce cas :

$$\Phi(a+x) - \Phi(a) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\, [(e^{xy}-1)\, e^{ay} + x\, \varphi_1(y)]\, dy.$$

Il vient par suite :

$$\Delta\, \Phi(a) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\, [(e^{y}-1)\, e^{ay} + \varphi_1(y)]\, dy,$$

puis à partie de $n=2$:

$$\Delta^n\, \Phi(a) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\, (e^{y}-1)^n\, e^{ay}\, dy.$$

Cela étant, l'emploi de la série (4) donne de nouveau :

$$\Phi(a+x) = \Phi(a) + \frac{x}{1}\, \Delta\, \Phi(a) + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\, \Delta^2\, \Phi(a) + \cdots$$

Cette formule s'applique au terme complémentaire $J(x)$ de la série de

Stirling, dans la relation :

$$\log \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x + \log \sqrt{2\pi} + J(x),$$

puisqu'on a :

$$J(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{xy} \frac{e^y (y-2) + y + 2}{2 y^2 (e^y - 1)} \, d y.$$

Mais alors s'introduisent les différences successives de la quantité,

$$J(a+1) - J(a) = \left(a + \frac{1}{2}\right) \log (a+1) - \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a.$$

On peut aussi l'employer pour $\log \Gamma(x)$, d'après la formule :

$$\log \Gamma(x) = \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{e^{xy} - e^y}{e^y - 1} - (x-1) e^y\right] \frac{d y}{y},$$

et retrouver l'expression plus simple à la quelle j'étais parvenu, où entrent seulement les différences de $\log a$.

S.t Jean-de-Luz, 8 Juin 1900.

. . . J'ajouterai une remarque concernant la fonction $\Phi(x)$, définie en posant :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} [e^{xy} \varphi(y) + x \varphi_1(y) + \varphi_2(y)] \, d y,$$

et pour laquelle on a la relation :

$$\Phi(a+x) = \Phi(a) + \frac{x}{1} \Delta \Phi(a) + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 \Phi(a) + \cdots$$

Je pose :

$$\mathfrak{J} = \int_{0}^{1} \Phi(a+x) \, d x,$$

ce qui sera l'intégrale de Raabe généralisée, et j'établis que pour a très grand, la valeur asymptotique de $\Phi(a)$ est donnée par l'expression $\mathfrak{J} - \frac{1}{2} \Delta \Phi(a)$.

Soit à cet effet, $\Phi(a) = \mathfrak{J} - \frac{1}{2}\Delta\,\Phi(a) + \mathfrak{J}(a)$; les égalités suivantes:

$$\int_0^1 \Phi(a+x)\,dx = \int_{-\infty}^0 \left[e^{ay}\varphi(y)\frac{e^y-1}{y} + \left(a+\frac{1}{2}\right)\varphi_1(y) + \varphi_2(y)\right]dy,$$

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^0 [e^{ay}\varphi(y) + a\,\varphi_1(y) + \varphi_2(y)]\,dy,$$

$$\Delta\,\Phi(a) = \int_{-\infty}^0 [e^{ay}\varphi(y)(e^y-1) + \varphi_1(y)]\,dy,$$

conduisent, pour ce terme complémentaire $\mathfrak{J}(a)$, à la formule:

$$\mathfrak{J}(a) = \int_{-\infty}^0 e^{ay}\varphi(y)\,\frac{e^y(y+2)+y-2}{2y}\,dy.$$

La variable y étant négative dans le champ de l'intégration, vous voyez que $\mathfrak{J}(a)$ s'annule en supposant a infini; ce qui démontre la proposition énoncée, si connue dans le cas de $\Phi(a) = \log\Gamma(a)$.

Je dois à M. Lerch, la remarque importante que si l'on intègre entre les limites $x = 0$ et $x = 1$ les deux membres de l'égalité dont je lui avais donné communication:

$$\log\Gamma(a+x) = \log\Gamma(a) + \frac{x}{1}\log a + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\Delta\log a +$$

et qu'on pose:

$$\alpha_n = \int_0^1 \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1\,.\,2\ldots n}\,dx,$$

on en tire, en remarquant que $\alpha_1 = \frac{1}{2}$:

$$\log\Gamma(a) = J - \frac{1}{2}\log a - \alpha_2\,\Delta\log a - \alpha_3\,\Delta^2\log a - \cdots$$

Ce résultat est fort remarquable; il met en évidence la valeur asymptotique de $\log\Gamma(a)$ représentée par la quantité:

$$J - \frac{1}{2}\log a = \left(a-\frac{1}{2}\right)\log a - a + \log\sqrt{2\pi},$$

et le terme complementaire $J(a) = -\alpha_3 \Delta \log a - \alpha_3 \Delta^2 \log a - \cdots$, s'exprime par les différences de $\log a$, au lieu des différences de

$$\left(a + \frac{1}{2}\right) \log (a+1) - \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a,$$

aux quelles j'avais été amené.

Il ouvre de plus, m'a écrit l'éminent géomètre, la voie pour obtenir la composition des nombres de Bernouilli avec les quantités α_n.

Mais j'ai cherché autre chose, je suis revenu à la fonction plus générale :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} [e^{xy} \varphi(y) + x \varphi_1(y) + \varphi_2(y)]\, dy,$$

et à la relation,

$$\Phi(a) = \mathfrak{Z} - \frac{1}{2} \Delta \Phi(a) + \mathfrak{Z}(a).$$

En écrivant le terme complémentaire de cette manière :

$$\mathfrak{Z}(a) = \int_{-\infty}^{0} e^{ay} \varphi(y) \left[\frac{e^y - 1}{2} - \left(\frac{e^y - 1}{y} - 1\right)\right] dy,$$

j'ai recours à la série suivante :

$$\frac{z}{\log(1+z)} = 1 + \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \cdots$$

qui est convergente lorsqu'on suppose le module de z inférieur à l'unité. Soit $1 + z = e^y$, on en tire l'égalité :

$$\frac{e^y - 1}{y} - 1 = \omega_1 (e^y - 1) + \omega_2 (e^y - 1)^2 + \cdots,$$

valable par conséquent pour y négatif; en remarquant que le coefficient ω_1 est égal à $\frac{1}{2}$, il vient ensuite :

$$\frac{e^y - 1}{2} - \left(\frac{e^y - 1}{y} - 1\right) = -\omega_2 (e^y - 1)^2 - \omega_3 (e^y - 1)^3 - \cdots$$

et l'on en conclut :

$$\mathfrak{Z}(a) = -\Sigma \omega_n \int_{-\infty}^{0} e^{ay} (e^y - 1)^n \varphi(y)\, dy.$$

Il faut prendre dans la somme du second membre $n=2, 3,\ldots$ en excluant la valeur $n=1$, nous avons donc:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}(a) &= -\,\omega_2\,\Delta^2\,\Phi(a) - \omega_3\,\Delta^3\,\Phi(a)\ldots\\ &= \frac{\Delta^2\,\Phi(a)}{12} - \frac{\Delta^3\,\Phi(a)}{24} + \frac{19\,\Delta^4\,\Phi(a)}{720} - \frac{3\,\Delta^5\,\Phi(a)}{160} + \cdots\end{aligned}$$

Cette formule généralise la relation de M.r Lerch, elle a lieu pour toutes les valeurs positives de a et j'observerai que les coefficients ω_n se ramènent à α_n, au moyen de l'égalité:

$$\int_0^1 (1+z)^x\,d\,x = \frac{z}{\log(1+z)},$$

en développant les deux membres suivant les puissances de z.

Je sors ainsi de la question d'interpolation que j'avais en vue, mais en restant dans le domaine des séries où entrent les différences finies d'une même fonction. Bientôt j'y reviendrai . . .

S.t Jean-de-Luz, 10 Août 1900.

Je viens vous mentionner une application de la formule d'interpolation à la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, ou même à l'expression plus générale qui a été l'objet des beaux travaux de M.r Lerch et de M.r Mellin, à savoir:

$$R(a,s) = \frac{1}{a^s} + \frac{1}{(a+1)^s} + \frac{1}{(a+2)^s} + \cdots$$

On a, comme vous savez:

$$R(a,s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,x^{s-1}\,d\,x}{1-e^{-x}},$$

mais il existe une autre formule dont je fais usage, et que je tire de la relation donnée par Abel:

$$f(a) + f(a+1) + \cdots = \int_a^\infty f(x)\,d\,x + \frac{1}{2}\,f(a) + \int_0^\infty \frac{f(a-i\,x) - f(a+i\,x)}{i\,(e^{2\pi x}-1)}\,d\,x.$$

Soit $f(x) = \frac{1}{x^s}$: on en conclut l'expression suivante, qui est d'une grande importance :

$$R(a, s) = \frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}} + \frac{1}{2\,a^s} + \int_0^\infty \frac{(a - i\,x)^{-s} - (a + i\,x)^{-s}}{i\,(e^{2\pi x} - 1)}\,d\,x. \qquad (1)$$

Elle conduit, en effet, à l'extension à tout le plan de la série qui n'a d'existence qu'autant que la variable s est supérieure à l'unité. Elle montre que cette série donne naissance à une fonction uniforme, si l'on convient de prendre dans l'intégrale, pour toute valeur de s, ce que l'on nomme la determination principale des puissances $(a - i\,x)^{-s}$ et $(a + i\,x)^{-s}$. Elle fait voir encore que cette fonction uniforme a un seul pôle $s = 1$ provenant du terme $\frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}}$; le développement en série :

$$\frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}} = \frac{1}{s-1} - \log a + \frac{s-1}{2} \log^2 a \ldots$$

suffit ensuite pour établir que la difference $R(a, s) - \frac{1}{s-1}$ est une fonction holomorphe. J'observerai en dernier lieu qu'ayant :

$$\frac{1}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{1}{2\pi} D_x \log(1 - e^{-2\pi x}),$$

on peut écrire au moyen d'une intégration par parties :

$$\int_0^\infty \frac{(a - i\,x)^{-s} - (a + i\,x)^{-s}}{i\,(e^{2\pi x} - 1)}\,d\,x =$$

$$= -\frac{s}{2\pi} \int_0^\infty [(a - i\,x)^{-s-1} + (a + i\,x)^{-s-1}] \log(1 - e^{-2\pi x})\,d\,x,$$

et conclure de cette nouvelle expression,

$$R(a, s) = \frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}} + \frac{1}{2\,a^s} -$$

$$- \frac{s}{2\pi} \int_0^\infty [(a - i\,x)^{-s-1} - (a + i\,x)^{-s-1}] \log(1 - e^{-2\pi x})\,d\,x,$$

les deux premiers termes, trouvés par M. Lerch, du développement de $R(a, s)$ suivant les puissances croissantes de s. Nous avons en effet:

$$\frac{1}{(s-1)a^{s-1}} + \frac{1}{2a^s} = \frac{1}{2} - a + s\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a\right] + \cdots$$

en négligeant le carré et les puissances supérieures.

Remarquant ensuite que l'intégrale:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty [(a-ix)^{-1} + (a+ix)^{-1}]\log(1 - e^{-2\pi x})\,dx,$$

revient à la suivante,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\log(1 - e^{-2\pi x})}{a^2 + x^2}\,dx,$$

qui est précisément le terme complémentaire changé de signe de la série de Stirling, nous avons l'égalité:

$$R(a, s) = \frac{1}{2} - a + s\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a\right] -$$
$$+ s\left[\log\Gamma(a) - \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a - \log\sqrt{2\pi}\right],$$

et en réduisant:

$$R(a, s) = \frac{1}{2} - a + s\left[\log\Gamma(a) - \log\sqrt{2\pi}\right].$$

A ce résultat il convient de joindre celui qu'on tire de la formule:

$$R(a, s+1) = -\frac{1}{s}D_a R(a, s),$$

en différentiant la relation précédente par rapport à a. Nous obtenons ainsi:

$$R(a, s+1) = \frac{1}{s} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)},$$

ou bien en changeant s en $s-1$, et par conséquent pour des valeurs de la variable voisines de l'unité:

$$R(a, s) = \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)},$$

comme l'a encore trouvé M.r Lerch.

Après ces remarques, j'arrive à la conséquence à tirer de l'équation (1) relativement à la formule d'interpolation. Elle découle de la transformée de l'integrale :

$$\int_0^\infty \frac{(1-ix)^{-s}-(1+ix)^{-s}}{i(e^{2\pi x}-1)}\,dx,$$

qui s'obtient en faisant $x = a \operatorname{tang} \varphi$, et au moyen des égalités :

$$1 + i \operatorname{tang} \varphi = \frac{2}{1+e^{-2i\varphi}},$$

$$1 - i \operatorname{tang} \varphi = \frac{2}{1+e^{2i\varphi}}.$$

Cette transformée est en effet :

$$\frac{1}{2^s a^{s-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+e^{2i\varphi})^s-(1+e^{-2i\varphi})^s}{i\left(e^{2\pi a \operatorname{tg}\varphi}-1\right)}\,d\varphi,$$

de sorte qu'en faisant pour abréger :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\varphi \,.\, d\varphi}{\cos^2\varphi\,(e^{2\pi a \operatorname{tg}\varphi}-1)},$$

on est amené à la relation suivante :

$$R(a, s) = \frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}} + \frac{1}{2\,a^s} + \frac{1}{2^{s-1}\,a^{s-1}}\left[\frac{s}{1} J_1 + \frac{s(s-1)}{1.2} J_2 + \cdots\right]. \qquad (2)$$

C'est l'expression par la formule d'interpolation que j'avais en vue d'obtenir, mais elle suppose essentiellement la convergence du développement de $(1+e^{2i\varphi})^s$, et n'est démontrée que pour des valeurs positives de la variable.

Permettez moi encore une remarque sur cette question difficile autant qu'importante de la représentation analytique de la fonction $R(a, s)$.

Revenant à la formule :

$$R(a, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,x^{s-1}\,dx}{1-e^{-x}},$$

j'en tire, en y joignant les égalités :

$$\frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-ax}\,x^{s-2}\,dx\,,$$

$$\frac{1}{a^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-ax}\,x^{s-1}\,dx\,,$$

la relation suivante :

$$R(a,s) - \frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}} - \frac{1}{2\,a^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-ax}\,x^{s-1}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)dx.$$

Cela étant, j'emploie en y changeant x en $-x$, la série dont j'ai déja fait usage elle devient ainsi,

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \omega_1(e^{-x}-1) + \cdots + \omega_n(e^{-x}-1)^n + \cdots$$

et au moyen de l'égalité :

$$\Delta^n\,\frac{1}{a^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-ax}(e^{-x}-1)^n\,x^{s-1}\,dx\,,$$

j'en conclus immédiatement le nouveau développement :

$$\begin{aligned} R(a,s) &= \frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}} + \frac{1}{2\,a^s} + \omega_1\,\Delta\,\frac{1}{a^s} + \omega_2\,\Delta^2\,\frac{1}{a^s} + \cdots \\ &= \frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}} + \frac{1}{2\,a^s} + \frac{1}{2}\,\Delta\,\frac{1}{a^s} - \frac{1}{12}\,\Delta^2\frac{1}{a^s} + \frac{1}{24}\,\Delta^3\,\frac{1}{a^s} - \frac{19}{720} \\ &\qquad \Delta^4\,\frac{1}{a^s} + \frac{3}{160}\,\Delta^5\,\frac{1}{a^s} - \cdots \end{aligned}$$

24 Août 1900.

Je viens de remarquer qu'une généralisation bien facile de l'intégrale :

$$\int_0^\infty \frac{(a-ix)^{-s} - (a+ix)^{-s}}{i\,(e^{2\pi x}-1)}\,dx,$$

conduit encore à une application de la formule d'interpolation de Newton.

Ne m'étant pas servi, en effet, de la forme particulière de la quantité $\frac{1}{e^{2\pi x}-1}$, il est clair qu'on peut traiter de même l'expression :

$$\int_0^\infty \theta(x)\,[(a-ix)^{-s}-(a+ix)^{-s}]\,dx.$$

Mais afin de ne pas complètement me répéter, je poserai :

$$\Theta(s)=\int_0^\infty \theta(x)\,(a+ix)^{-s}\,dx,$$

et la substitution $x = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$ donnera :

$$\Theta(s)=\frac{1}{2^s a^{s-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta(a\,\mathrm{tang}\,\varphi)\,(1+e^{-2i\varphi})^s}{\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

cela étant si l'on écrit :

$$J_n = a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta(a\,\mathrm{tang}\,\varphi)\,e^{-2ni\varphi}}{\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

nous avons l'égalité :

$$(2a)^s\,\Theta(s)=J_0+\frac{s}{1}J_1+\frac{s(s-1)}{1.2}J_2+\cdots$$

qui se trouve établie avec la restriction de s positif. Une remarque maintenant sur les coefficients J_n qui figurent dans cette formule. Le premier J_0 est seul indépendant de a, si l'on suppose, ce que j'admettrai que la fonction $\theta(x)$ ne contienne pas cette quantité. Nous avons en effet,

$$J_0 = a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta(a\,\mathrm{tang}\,\varphi)\,d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$=\int_0^\infty \theta(x)\,dx.$$

Les autres comme je vais le faire voir, s'espriment tous explicitement, sous une formule simple, au moyen de,

$$\Theta(1) = \int_0^\infty \theta(x)(a + ix)^{-1} dx$$
$$= \frac{1}{2}(J_0 + J_1).$$

Qu'on fasse en effet pour un moment,

$$\varphi(s) = (2a)^s \Theta(s),$$

il est clair que J_n sera la différence finie d'ordre n de cette fonction, pour $s = 0$, en prenant $\Delta s = 1$. Désignant par n_1, $n_2, \ldots$ les coefficients binomiaux, nous aurons donc,

$$J_n = \varphi(n) - n_1 \varphi(n-1) + n_2 \varphi(n-2) - \cdots + (-1)^n \varphi(0),$$

ou bien si nous renversons l'ordre des termes,

$$(-1)^n J_n = \varphi(0) - n_1 \varphi(1) + n_2 \varphi(2) - \cdots + (-1)^n \varphi(n).$$

Cela étant, soit:

$$\Phi(a) = \int_0^\infty \theta(x)(a + ix)^{-1} dx$$
$$= \Theta(1),$$

on en conclura pour un entier k quelconque,

$$\frac{(-1)^{k-1} D_a^{k-1} \Phi(a)}{\Gamma(k)} = \Theta(k)$$

de sorte que nous pourrons écrire:

$$n_1 \varphi(1) - n_2 \varphi(2) + \cdots + (-1)^{n-1} \varphi(n)$$
$$= n_1 (2a) \Phi(a) + n_2 (2a)^2 \frac{D_a \Phi(a)}{\Gamma(2)} + \cdots + (2a)^n \frac{D_a^{n-1} \Phi(a)}{\Gamma(n)}.$$

J'observerai que le second membre de cette égalité est le coefficient du terme en $\frac{1}{x}$ dans le produit des deux facteurs,

$$\Phi(a+x) = \Phi(a) + x\frac{D_a \Phi(a)}{\Gamma(2)} + \cdots + x^{n-1}\frac{D_a^n \Phi(a)}{\Gamma(n)},$$

$$\left(1+\frac{2a}{x}\right)^n = 1 + n_1\left(\frac{2a}{x}\right) + n_2\left(\frac{2a}{x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2a}{x}\right)^n.$$

Nous avons donc la formule,

$$(-1)^n J_n = \Phi(0) - F(a)$$

ou $F(a)$ représente le résidu correspondant à la valeur $x = 0$, de l'expression

$$\left(1+\frac{2a}{x}\right)^n \Phi(a+x),$$

c'est le résultat au quel je voulais parvenir. En revenant ensuite à $R(a, s)$ et aux coefficients J_n qui figurent dans l'équation (2), on trouve que $(-1)^n J_n$ est le résidu de

$$\left(1+\frac{2a}{x}\right)^n D_x J(a+x)$$

ou $J(a)$ est le terme complémentaire de la série de Stirling.

Risoluzione di due questioni geometriche.

(*Di* Geminiano Pirondini, *a Parma.*)

1.

Se L è una linea qualunque dello spazio, L_1 il luogo degli estremi dei segmenti H presi sulle tangenti, L_2 il luogo degli estremi dei segmenti T perpendicolari ai segmenti H e situati nei piani osculatori di L, s e ρ l'arco e il raggio di curvatura di L, è facile vedere che la condizione che L sia lo spigolo di regresso della sviluppabile polare di L_2 è espressa dalle due equazioni differenziali:

$$\frac{dH}{ds} + \frac{T}{\rho} = 1, \qquad \frac{dT}{ds} - \frac{H}{\rho} = 0, \tag{1}$$

la cui integrazione è riducibile a quadrature col noto metodo di Serret (*).

Si sposti ora un triedro trirettangolo nello spazio in modo, che il suo vertice A percorra una curva arbitraria L e i suoi spigoli siano costantemente le direzioni principali di L.

Preso sul piano osculatore di L in $A(x, y, z)$ un punto arbitrario $O(\xi, \eta, \zeta)$, si domanda come (durante il movimento del triedro nello spazio) deve spostarsi il punto O nel piano, onde la trajettoria da esso descritta sia ortogonale ai piani osculatori di L.

Chiamando t la distanza AO e ω l'inclinazione di AO sulla tangente di L, si ha:

$$\xi = x + t(\cos\omega\cos\alpha + \operatorname{sen}\omega\cos\lambda), \qquad \text{ecc.}$$

(*) V. Bianchi, *Geometria Differenziale*. Cap. I, § 18.

d'onde (chiamando σ l'arco della trajettoria descritta da O):

$$\frac{d\xi}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{ds}=\left[1+(t\cos\omega)'-\frac{t\operatorname{sen}\omega}{\rho}\right]\cos\alpha+$$

$$+\left[(t\operatorname{sen}\omega)'+\frac{t\cos\omega}{\rho}\right]\cos\lambda-\frac{t\operatorname{sen}\omega}{r}\cos l,\qquad \text{ecc.}$$

[essendo ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), ($\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$), ($\cos l$, $\cos m$, $\cos n$) i coseni direttivi della tangente, della normale principale e della binormale di L, ed r il raggio di torsione].

Si hanno dunque le due equazioni differenziali:

$$(t\cos\omega)'-\frac{t\operatorname{sen}\omega}{\rho}+1=0,\quad (t\operatorname{sen}\omega)'+\frac{t\cos\omega}{\rho}=0,$$

le quali si riducono alle (1) col porre:

$$t\cos\omega=-H,\quad t\operatorname{sen}\omega=T. \tag{2}$$

Potendosi qui riguardare le H, T come funzioni note di s, l'eliminazione di questa variabile conduce ad una relazione nota:

$$F(t,\ \omega)=0, \tag{3}$$

fra t e ω.

Siccome poi le (2) dànno:

$$\frac{d\omega}{ds}=-\frac{H^2}{H^2+T^2}\left(\frac{T}{H}\right)', \tag{4}$$

si deduce immediatamente che, durante il movimento del triedro nello spazio, il punto O deve spostarsi, nel piano osculatore di L, sulla curva rappresentata in coordinate polari dall'equazione (3) in modo che il rapporto $\frac{d\omega}{ds}$ della velocità di rotazione attorno ai punti di L alla velocità di traslazione del vertice del triedro sulla L abbia, in ogni istante, il valore (4).

È poi evidente che se al punto O viene collegata rigidamente una curva arbitraria C posta nel piano osculatore di L e si fa in modo che, durante il movimento del triedro, i suoi punti descrivano delle trajettorie eguali a quella descritta dal punto O, essa genera una superficie modanata avente questa curva per profilo.

Osservazione. Siccome le formole precedenti non contengono il raggio di torsione di L, si conclude che, durante il movimento del triedro, si può far subire alla curva L qualunque deformazione che non alteri nè l'arco, nè il suo raggio di curvatura.

2.

La linea L_2 i cui raggi di curvatura e di torsione ρ_2, r_2 sono legati dalla relazione:

$$\rho_2 = a\, e^{\cot\theta \int \frac{ds_2}{r_2}},$$

(con a e θ costanti), e che si presenta in varie questioni geometriche, ha molte proprietà caratteristiche notevoli.

Così ad esempio: il raggio della sfera osculatrice è proporzionale al raggio del cerchio osculatore; i piani osculatori segano la sfera osculatrice sotto angolo costante; la distanza fra due tangenti consecutive di L_2 è proporzionale alla distanza fra i due cerchi osculatori consecutivi corrispondenti della linea piana l_2 che si ottiene distendendo sopra un piano la sviluppabile osculatrice di L_2, ecc., ecc.

Della linea L_2 si può dare una facile costruzione geometrica.

Infatti, notando che:

$$r_2 \frac{d\rho_2}{d s_2} = \cot\theta\, \rho_2,$$

per gli elementi ρ, r, s relativi al luogo L dei centri delle sfere osculatrici di L_2, si hanno le formole:

$$\rho = \frac{\rho_2}{\operatorname{sen}^2\theta}, \quad r = \frac{\rho_2^2}{r_2 \operatorname{sen}^2\theta}, \quad \frac{ds}{ds_2} = \frac{\rho_2}{r_2 \operatorname{sen}^2\theta},$$

le quali riducono la precedente all'altra:

$$\frac{d\rho}{ds} = \cot\theta,$$

d'onde:

$$\rho = \cot\theta \,.\, s, \tag{5}$$

(potendosi mettere a zero la costante arbitraria, senza nuocere alla generalità).

Si ha in questo caso:

$$\left.\begin{aligned} H &= r_2 \frac{d\rho_2}{ds_2} = s \,.\, \cos^2\theta \\ T &= \rho_2 \qquad\;\; = s \,.\, \operatorname{sen}\theta \cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Notando quindi che la linea L di cui il raggio di curvatura è (5) può rappresentarsi colle equazioni:

$$x = \int \operatorname{sen} \varphi(s) \, . \cos \left[\frac{\sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2 \theta}{s^2} - \varphi'^2(s)}}{\operatorname{sen} \varphi(s)} \cdot d s \right] d s \, ,$$

$$y = \int \operatorname{sen} \varphi(s) \, . \operatorname{sen} \left[\frac{\sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2 \theta}{s^2} - \varphi'^2(s)}}{\operatorname{sen} \varphi(s)} \cdot d s \right] d s \, ,$$

$$z = \int \cos \varphi(s) \, d s \, ,$$

[essendo $\varphi(s)$ una funzione arbitraria di s], si comprende come, partendo da queste, si può, col sussidio delle (6), giungere alla costruzione dell'intera famiglia di curve L.

Parma, settembre 1900.

Sulle varietà algebriche a tre dimensioni costituite da una semplice infinità di piani.

(*Di* Carlo Pagliano, *a Torino.*)

Una nota a piè di pagina nel § 22 dell'*Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito,* del prof. Segre (*), dà la ragione di questo lavoro. In quel paragrafo vi è una proposizione generale riguardante le varietà costituite da semplici infinità di spazi aventi un ordine ed un genere qualsivogliano; e la nota detta, mentre accenna ai risultati ottenuti nei casi particolari in cui si tratti di rigate (**) oppure di varietà razionali semplicemente infinite di piani (***), rileva come con quegli stessi metodi si possa procedere alla risoluzione delle quistioni analoghe, relative a varietà semplicemente infinite di piani, di genere qualunque, anche se stiano nello spazio ordinario. Ed è appunto ciò che mi sono proposto di fare: di determinare sulle varietà di piani semplicemente infinite le rigate e le curve *direttrici* (****) e di trovarne l'ordine minimo. Ho dovuto anch'io (come vien fatto nei lavori citati) distinguere le varietà in speciali e non speciali e le ricerche accennate riguardano le ultime; delle prime si ottengono solo poche proprietà.

(*) *Annali di Matematica,* (2), 22, 1894.

(**) Segre, *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques,* (1.ª Partie: Math. Ann., 30, 1887. — 2.ª Partie: Math. Ann., 34, 1889).

(***) Segre, *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplicemente infinite razionali di piani,* (Atti della R. Acc. di Torino, 21, 1885).

(****) Cioè tali che in ogni piano della varietà abbiano risp. *una* sola generatrice, od *un* solo punto.

§ I. Spazi normali delle varietà algebriche semplicemente infinite di piani (*).

1. Quando su di una varietà algebrica $S_r - F_{r+1}$ (costituita cioè da una semplice infinità di spazi S_r) di ordine n e del genere p si considera una curva γ^ν_π (cioè di ordine ν e del genere π) la quale incontri ogni S_r generatore in un gruppo di $r+1$ punti linearmente indipendenti, allora fra i numeri r, n, p, ν, π sussiste la relazione:

$$\nu - \pi = n - (r+1)p + r;$$

questa, per $r = 2$ diventa:

$$\nu - \pi = n - 3p + 2$$

e riguarda una $S_2 - F_3$, ossia una varietà costituita da una semplice infinità di piani. Dovendo nel seguito occuparci solo di tali varietà le indicheremo brevemente col simbolo V^n_p (dove n denota l'ordine e p il genere della varietà).

È noto che una curva γ^ν_π la quale appartenga ad uno spazio di dimensione $< \nu - \pi$ si può sempre considerare come proiezione di un'altra dello stesso genere appartenente ad un $S_{\nu-\pi}$ o ad uno spazio di maggior dimensione; di qui e dall'ultima eguaglianza vista si ricava che una V di genere p e di ordine $n > 3p$ può sempre essere ottenuta come proiezione di un'altra dello stesso ordine e dello stesso genere appartenente ad un $[n - 3p + 2]$ (**) o ad uno spazio di maggior dimensione. Conservando la convenzione di dire normale per un dato spazio una varietà che non si possa ottenere come proiezione di un'altra dello stesso ordine appartenente ad uno spazio di dimensione maggiore del suo, avremo che *le V^n_p sono normali per ispazi di dimensione $\geqq n - 3p + 2$*. Diremo speciale una V^n_p quando sia normale per uno spazio di dimensione $> n - 3p + 2$; non speciale invece quando il suo spazio normale è precisamente un $[n - 3p + 2]$. Sapendo

(*) Cfr. ad es.: Segre, *Introduzione*..., citata, n.° 91.

(**) Useremo di preferenza in tutto il seguito questo simbolo invece dell'altro: S_{n-3p+2}, ogni volta che la dimensione dello spazio sia data da un'espressione un po' lunga.

poi che una curva di ordine ν e del genere π è detta speciale o non speciale secondo che il suo spazio normale è un $S_{\nu-\pi}$ oppure uno spazio di maggior dimensione, segue ancora che le curve situate su una V_p^n ed aventi in ogni suo piano generatore una terna di punti non allineati sono tutte speciali se la varietà è speciale, tutte non speciali se la varietà è non speciale. Per le varietà non speciali dev'essere evidentemente $n - 3p + 2 \geqq 3$ ossia $n \geqq 3p + 1$; se invece è $n < 3p + 1$ non si potranno avere che varietà speciali.

§ II. Varietà ottenibili mediante curve oppure mediante curve e rigate in corrispondenza biunivoca.

2. Giova considerare un modo particolare di ottenere delle V mediante tre curve algebriche riferite fra loro in corrispondenza biunivoca.

Siano perciò δ^m, $\delta^{m'}$, $\delta^{m''}$ tre curve degli ordini m, m', m'' e dello stesso genere p, riferite fra loro in corrispondenza univoca. Se le curve sono date in posizione generica i piani passanti per le terne di punti omologhi generano una V_p^n, dove $n = m + m' + m''$ (*). Supponiamo poi che quelle curve si possano ottenere come proiezione di tre altre rispettivamente del medesimo ordine immerse negli spazi S_h, $S_{h'}$, $S_{h''}$ indipendenti fra di loro; infine sia S_d lo spazio a cui appartengono complessivamente le curve date (e quindi lo spazio a cui appartenga la V^n).

Vogliamo provare che se $d < h + h' + h'' + 2$ la V^n si può ottenere come proiezione di una varietà V', dello stesso ordine e appartenente ad un $[h + h' + h'' + 2]$.

Infatti proiettando una delle δ, ad es. δ^m, da un S_t, l'S_t-cono risultante, in virtù dell'ipotesi fatta, sarà proiezione di un altro S_t-cono del medesimo ordine e appartenente ad un $[t + h + 1]$ (**) e godrà della proprietà (evidente per quest'ultimo cono) che per $h + 1$ suoi punti arbitrari linear-

(*) Risultato già noto. D'altra parte si può averlo facilmente proiettando le curve da un S_{d-3} su un piano; l'ordine cercato sarà dato allora dal numero delle terne di punti omologhi allineati delle curve proiezioni; si ricorre perciò ad una corrispondenza algebrica che si pone facilmente su una di queste ultime curve e si ottiene appunto $n = m + m' + m''$.

(**) Segre, *Recherches générales*, ecc...., 1.° Partie, n.° 10.

mente indipendenti passa una sua curva direttrice di ordine m. Ciò posto si proiettino le tre curve δ da un $[h + h' + h'' - d + 1]$ indipendente dall'S_d e sui tre coni proiettanti si prendano rispettivamente $h + 1$, $h' + 1$, $h'' + 1$, punti arbitrari che tutti insieme siano linearmente indipendenti; per quei tre gruppi di punti passano ordinatamente tre curve degli ordini m, m', m'' riferite prospettivamente alle curve primitive e quindi proiettivamente fra loro; esse determinano una V' di ordine n immersa in un $[h + h' + h'' + 2]$ la quale ha come proiezione la V^n di S_d.

Se gli spazi S_h, $S_{h'}$, $S_{h''}$ sono quelli normali per le δ, lo spazio $[h + h' + h'' + 2]$ sarà pure normale per la V^n. Se poi le curve sono non speciali i loro spazi normali avendo la dimensione $m - p$, $m' - p$, $m'' - p$ la varietà con esse ottenuta apparterrà ad un

$$[m + m' + m'' - 3\,p + 2],$$

ossia, avendo posto $n = m + m' + m''$, ad un $[n - 3\,p + 2]$, ma non a spazio di maggior dimensione; vale a dire che la V^n non può essere speciale. Se invece una delle curve è speciale sarà tale anche la varietà; perciò *una varietà semplicemente infinita di piani, che possa generarsi coi piani congiungenti le terne di punti omologhi di tre curve riferite fra loro biunivocamente, senza punti uniti, è speciale se una almeno di esse è speciale, non speciale se sono tutte e tre non speciali.*

Se invece consideriamo una rigata di ordine m le cui generatrici siano riferite biunivocamente ai punti di una curva di ordine m', i piani passanti per le coppie di elementi omologhi generano una $V^{m+m'}$ (se la rigata e la curva non abbiano elementi omologhi appartenentisi), e con un ragionamento analogo al precedente si ricava che *una varietà semplicemente infinita di piani, la quale possa generarsi coi piani congiungenti gli elementi omologhi di una rigata e di una curva riferite fra loro biunivocamente (senza elementi omologhi appartenentisi) è speciale se una almeno delle due forme è speciale; non speciale se nessuna di esse è speciale.*

3. Vediamo invece se, partendo dall'ipotesi che su una V^m esista una rigata F^m direttrice, si possa trovare (con qualche condizione) una curva di ordine $n - m$, pure direttrice, che insieme con la rigata serva a costruire la varietà.

Per maggior generalità la V^n appartenga ad un $[n - p - i + 2]$ e la sua rigata direttrice F^m ad un S_h; una sezione iperpiana generica della varietà ci dà una sua rigata direttrice d'ordine n, F^n, contenente una curva direttrice di ordine m di un $[h-1]$, intersezioni della F^m e del suo S_h con l'iperpiano. Quando sia soddisfatta la condizione:

$$n \geqq m(h+i-m+1)+2p-1, \qquad (1)$$

sappiamo (*) di poter trovare su quella F^n una curva direttrice di ordine $n-m$ e allora la varietà potremo costruirla con la detta curva e con la rigata F^m.

Se poi rammentiamo che una curva di ordine $n-m$ e del genere p può sempre essere ottenuta come proiezione di un'altra dello stesso ordine e dello stesso genere appartenente almeno ad un $[n-m-p]$ (a spazio di maggior dimensione se è speciale) da ciò che precede e dal n.° 2 si ha questa nuova conseguenza che:

Se una varietà V_p^n immersa in un $[n-p-i+2]$ possiede una rigata direttrice di ordine m appartenente ad un S_h e la disegnaglianza (1) *è soddisfatta insieme con la $m<h+i-1$* (**), *la varietà può sempre aversi come proiezione di un'altra dello stesso ordine appartenente ad un*

$$[n-m-p+h-1]$$

(od a spazio maggiore) e avente ancora una rigata direttrice di ordine m di un S_h; e sarà proiezione di una varietà appartenente a spazio di maggior dimensione che non quello detto, se la rigata sia essa medesima proiezione di un'altra di eguale ordine appartenente ad uno spazio di dimensione $>h$.

Similmente partendo dall'esistenza di una curva direttrice d'ordine m, di S_h, posta su una V^n di $[n-p \quad i+2]$ si può facilmente trovare la condizione perchè esista anche una rigata di ordine $n-m$ che insieme con la curva permetta di costruire la varietà; il che non istaremo a fare poichè nel seguito ci ha da servire solo quel primo risultato ora ottenuto.

4. Avendosi sopra una V^n di un $[n-p-i+2]$ una rigata direttrice di ordine m di $S_h\,(h \leqq n-p-i+1)$, per un valore di n abbastanza grande rispetto agli altri dati si può porre una restrizione al valore di h: e precisamente se:

$$n \geqq 2p+2i+2h-m-1 \qquad (1)$$

si dovrà avere $h \geqq m-i+1$.

(*) Vedi SEGRE, *Recherches générales...*, citato, 2.ª Partie, n.° 9.

(**) Questa restrizione proviene da ciò che per quello che segue nell'enunciato dovrà aversi $n-p-i+2<n-m-p+h-1$, ossia appunto $m<h+i-1$.

Infatti gli iperpiani passanti per l'S_h segano la varietà in una serie lineare di gruppi di $n-m$ piani e sulla varietà si possono prendere $n-p-i-h+1$ piani arbitrari come elementi di un gruppo, poichè per essi e per l'S_h passa un iperpiano determinato; la serie è certamente speciale se:

$$n-p-i-h+1>n-m-p \quad \text{ossia se} \quad h<m-i+1;$$

in tale ipotesi per un noto teorema (corollario del teorema di RIEMANN-ROCH) sarà: $n-m \geqq 2(n-p-i-h+1)$, contrariamente alla (I).

Il teorema vale pure se invece della (I) si pone $n \geqq m+2p-1$; infatti se insieme con questa potesse sussistere anche la relazione $m>h+i-1$ da esse si dedurrebbe $n \geqq 2p+2i+2h-m-1$, la quale non può esistere con la $h<m-i+1$.

§ III. VARIETÀ V COME PROIEZIONE DI ALTRE DI ORDINE MAGGIORE.

5. Presa una V_p^n non speciale appartenente ad S_d si fissino l rette (dove l è un numero comunque grande) su l suoi piani generatori diversi; si vuol provare che la varietà data può sempre considerarsi come proiezione di un'altra, che indicheremo con V', di ordine $n+l$, appartenente ad un S_{d+l}, da l suoi punti, in modo che le immagini dei piani generatori uscenti da questi punti siano quelle rette fissate sopra la V.

Anzitutto proveremo che una V_p^n non speciale si può sempre ritenere come la proiezione di una V^{n+l} da l suoi punti; ciò fatto vedremo di soddisfare anche all'altra condizione.

Prendiamo perciò sulla V^n di S_d una qualunque γ_π^ν (*), la quale, non essendo speciale (V. n.° 1), potrà considerarsi in infinite maniere come proiezione di una $\gamma'^{\nu+l}_\pi$ di S_{d+l} da l suoi punti in modo che questi si proiettino in altrettanti punti fissati prima ad arbitrio su γ_π^ν (**).

(*) Per brevità in tutte le considerazioni di questo numero riserveremo la lettera γ ad indicare quelle curve della varietà che incontrano ogni suo piano generatore in una terna di punti non allineati.

(**) SEGRE, *Introduzione alla geometria...*, citato, n.° 86.

Sulla nuova γ' si otterrà una involuzione di terne di punti avente per immagine quella esistente su γ; e la serie di piani passanti per quelle terne costituisce una V' di ordine $n+l$ (per la relazione $\nu+l-\pi=n+l-3p+2$ che pel n.° 1 deve intercedere) la quale proiettata da quei medesimi l punti dà come immagine la V^n. Se P'_1 è uno dei centri di proiezione che sulla γ' faccia terna coi punti P'_2, P'_3, le loro immagini P_1, P_2, P_3 sulla γ (ossia sulla V) staranno in un certo piano generatore α della V stessa; e il piano della V' uscente da P'_1 e l'S_3 tangente ad essa in questo punto hanno come immagini sulla V rispettivamente la retta $P_2 P_3$ e il piano α contenente la medesima. Analogamente si dica di ciascuno dei rimanenti $l-1$ centri di proiezione. E allora vediamo che la proposizione posta in principio risulterebbe dimostrata ove la coppia di punti P_2, P_3 e le analoghe si fossero fissate fin da principio ad arbitrio sulla V, ossia se quella γ^{ν}_{π} da cui siamo partiti si fosse obbligata a passare per tutti i punti detti. Ci riduciamo così a provare che fissate l coppie di punti (l grande a piacere) in altrettanti piani generatori di una V^n, per essi si può sempre far passare una γ (*).

Perciò si pensi la data V^n_p di S_d come proiezione di una V'^{n+x} di $S_{d'}$ dove $d'=d+x$ (il che abbiamo visto di poter sempre fare); ci riserveremo di prendere x grande ad arbitrio. Su V' potremo ottenere delle curve γ segandola con varietà $M^3_{d'-2}$ (cioè di terzo ordine e della dimensione $d'-2$) alle quali si potrà imporre un numero di condizioni crescente con d', ossia con x, che è arbitrario.

Un modo di veder ciò possiamo averlo prendendo come $M^3_{d'-2}$ l'ulteriore intersezione di due $M^2_{d'-1}$ aventi in comune un S_{d-2} fisso (**); se le rappresentiamo analiticamente con

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 B_1 + x_2 B_2 = 0$$

dove le A e le B sono forme lineari nelle coordinate x_1, $x_2, \ldots$, $x_{d'+1}$ allora lo spazio da togliere, comune alle due forme, è $x_1 = x_2 = 0$.

Ognuna delle equazioni contiene $2d'$ costanti non omogenee; potremo adunque fissare $2d'-1$ punti di V' ed obbligare entrambe le $M^2_{d'+1}$ a conte-

(*) Anzi ci basterebbe anche di meno: cioè obbligare una γ ad avere la retta $P_2 P_3$ e le analoghe come corde.

(**) La curva così ottenuta non avrà in generale terne di punti allineati, poichè tra i piani di V' solo un numero finito sono tangenti a una delle $M^2{}_{d'-1}$ e questi in generale non sono tangenti all'altra; perciò in generale non vi sarà nessun piano di V' contenente una retta comune alle due $M^2{}_{d'-1}$.

nerli. Tra questi prenderemo pure i $d' - d$ centri di proiezione affinchè per la proiezione della γ sulla V accada lo stesso fatto che per la γ oggettiva di V'; vi manchino cioè le terne di punti allineati.

Potremo dunque prendere $2d' - 1 - (d' - d) = d' + d - 1$ punti ad arbitrio; noi li sceglieremo sulla V anzichè sulla V' ed assumeremo di poi in quest'ultima i loro corrispondenti; per questi e pei centri di proiezione facendo passare la $M^3_{d'-2}$ otterremo una γ la cui proiezione su V è ancora una γ, e passa inoltre pei $d' + d - 1$ punti fissati ad arbitrio. Ora prendendo d' abbastanza grande possiamo rendere $d' + d - 1$ grande a piacere; onde su una V^n potremo fissare come corde di una γ quante si vogliono rette; se l è il loro numero basterà poi considerare gli l punti della curva fuori delle dette corde ma giacenti con esse negli stessi piani generatori e riguardare infine la γ come proiezione di una γ' (e ciò si può in infiniti modi) in guisa che gli l centri di proiezione abbiano per immagini quegli l punti di V; sulla γ' avremo allora una involuzione di terne di punti ed i piani che le contengono costituiranno una V' che soddisfa alle condizioni espresse in principio del numero. Adunque:

Una V^n non speciale, appartenente ad S_d, si può sempre considerare in infinite maniere come proiezione di una V^{n+l} fatta da l suoi punti in modo che i piani generatori uscenti da questi punti abbiano come proiezioni sulla V^n altrettante rette fissate su di essa ad arbitrio in altrettanti suoi piani generatori.

6. Riguardiamo una data V non speciale, di ordine n, come proiezione di una V' di ordine $n + l$ nel modo visto al numero precedente, e siano $P'_1\, P'_2, \ldots, P'_l$ i centri di proiezione, $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_l$ i piani generatori della V' uscenti da essi e $a_1, a_2, \ldots, a_l$ le loro rette immagini sulla V. Consideriamo poi uno dei centri di proiezione, ad es. P'_1 e diciamo Π'_1 lo spazio S_3 tangente alla V' in P'_1; per modo che Π'_1 conterrà α'_1.

Sulla V l'immagine di Π'_1 viene ad essere un certo piano π_1 contenente la retta a_1, immagine di α'_1. Ora una rigata F', direttrice della V', la quale passi per P'_1, avrà in questo punto un piano tangente giacente in Π'_1 e diverso in generale da α'_1, epperò la sua proiezione F su V avrà in π_1 una generatrice diversa in generale da a_1. Ma se la rigata F' non passa per P'_1 la sua generatrice situata in α'_1 ha per proiezione la retta a_1 che sarà la generatrice di F su π_1.

Se adunque sulla V' la rigata F' non contiene nessuno dei centri di proiezione, la sua proiezione su V sarà una rigata F, pure direttrice, avente lo stesso ordine della F' e passante $a_1, \ldots, a_l$; e viceversa una rigata direttrice di V passante per le rette $a_1, \ldots, a_l$ sarà proiezione di una rigata (direttrice di V') del medesimo ordine, non contenente alcuno dei centri di proiezione. E più in generale: se la rigata F' contiene i centri $P'_r, P'_s, \ldots$ (che possono essere anche tutti i centri di proiezione), le immagini delle generatrici che ne escono sono punti situati risp. sulle rette $a_r, a_s, \ldots$ nel mentre l'ordine della rigata F viene abbassato di tante unità quanti sono quei centri per cui passa la F'. E viceversa: una rigata F^m direttrice di V, che passi per t fra le l rette e precisamente per le $a_r\, a_s \ldots$ e non per le rimanenti $l - t$, le quali siano le $a_v, a_i, \ldots$ sarà proiezione di una rigata direttrice di V', di ordine $m + l - t$, che contiene i centri $P'_v\, P'_i \ldots$ e non $P'_r\, P'_s \ldots$

Analogamente se una curva direttrice di V' passa per un centro di proiezione, ad es. per P'_1, la sua immagine incontrerà α_1 in un punto situato in generale fuori di a_1; perciò se la curva direttrice passa per t fra gli l centri, la sua proiezione ha l'ordine abbassato di t unità e non incontra le immagini dei piani passanti per quei t centri mentre incontra tutte le altre. E viceversa, una curva di ordine μ, direttrice di V, che incontri t' delle rette $a_1, a_2, \ldots, a_l$ e non incontri le rimanenti in numero di $l - t'$, sarà proiezione di un'altra d'ordine $\mu + l - t'$, contenente tutti quei centri di proiezione dai quali escono i piani aventi quelle $l - t'$ rette come immagini.

Queste osservazioni ci torneranno utili nella determinazione delle curve e delle rigate direttrici di una V non speciale.

7. Vediamo intanto di applicare alcuni risultati dei numeri precedenti.

Abbiasi una V^n non speciale (che possiamo supporre nel suo spazio normale $[n - 3p + 2]$) e su di essa una rigata direttrice F^m di S_h; dico che non può essere $h > m - 2p + 1$. Infatti pei n.ⁱ 5 e 6 potremo considerare la data varietà come proiezione di un'altra, $V^{n'}$ $(n' > n)$ appartenente ad un $[n' - 3p + 2]$ ed avente ancora una rigata direttrice di ordine m di un S_h; prendendo n' abbastanza grande sarà possibile soddisfare alla condizione del n.° 3 (posto $i = 2p$) e quindi si potranno trovare certamente sulla V' anche delle curve di ordine $n - m$, direttrici. Se ora supponiamo che la rigata F^m appartenga a spazio di dimensione $h > m - 2p + 1$ oppure sia proiezione di un'altra appartenente a tale spazio (ed in questo caso porteremo le nostre considerazioni su una nuova varietà di ordine n', di cui la $V^{n'}$ sia proiezione, e sulla quale la rigata direttrice di ordine m appartenga precisamente ad uno spazio di dimensione h), essendo così verificata in ogni caso anche la relazione $m < h + i - 1$ $(i = 2p)$ dello stesso n.° 3, ne viene che la $V^{n'}$ risulta proiezione di un'altra del medesimo ordine appartenente ad uno spazio di dimensione $n' - m - p + h + 1$ e cioè $> n' - 3p + 2$, e che quindi è speciale, mentre la sua proiezione $V^{n'}$ non è speciale; questo è assurdo e perciò abbiamo che

a) *Una V^n non speciale non può contenere una rigata direttrice speciale.*

D'altra parte una rigata non speciale non può contenere una curva direttrice speciale (*) e quindi:

b) *Una V non speciale non può contenere una curva direttrice speciale.*

Se ritorniamo al n.° 4 e consideriamo una V^n di $[n - 3p + 2]$, (essendosi posto $i = 2p$ nella formola alla fine del citato numero) si vede che se $m \leqq n - 2p + 1$ dev'essere $h \geqq m - 2p + 1$, tanto se la varietà sia o non sia speciale; se ora teniamo conto anche della proposizione *a*) sopra enunciata dovremo ritenere per h precisamente il valore $m - 2p + 1$; adunque:

Ogni rigata direttrice di ordine $\leqq n - 2p + 1$ di una V_p^n normale non speciale è una rigata normale non speciale.

§ IV. Determinazione delle rigate direttrici di una V. Rigate direttrici del minimo ordine.

8. Facciamo dapprima l'ipotesi che date su una V^n, del genere p e non speciale, x rette arbitrarie su piani generatori diversi risultino determinate delle rigate direttrici di un certo ordine σ. Consideriamo (n.° 5) la V^n come la proiezione di una V^{n+x} fatta da x suoi punti in modo che i piani uscenti da essi abbiano per immagini sulla V^n le x rette prese ad arbitrio. Se la V^n la supponiamo nel suo spazio normale, ossia in un $[n - 3p + 2]$, anche la V^{n+x} sarà normale e quindi in un $[n + x - 3p + 2]$. Allora le F^σ direttrici della V^n e passanti per le x rette fissate saranno le proiezioni (n.° 6) di *tutte* le rigate direttrici del medesimo ordine σ, giacenti sulla V^{n+x}; su questa le F^σ sono adunque in numero finito e apparterranno a degli

(*) Segre, *Recherches générales*..., citato, 2.° Partie, n.° 10.

$[\sigma - 2p + 1]$ se:

$$\sigma - 2p + 1 \leqq n + x - 3p + 1, \quad \text{ossia se} \quad \sigma \leqq n + x - p,$$

e inoltre (n.° 7, ultima proposizione), se

$$\sigma \leqq n + x - 2p + 1.$$

Per quegli spazi $[\sigma - 2p + 1]$ e per $n + x - \sigma - p$ punti arbitrari dello spazio $[n + x - 3p + 2]$ passano degli iperpiani ben determinati i quali dovranno contenere ancora $n + x - \sigma$ piani generatori della V^{n+x}; vale a dire, fissati ad arbitrio $n + x - \sigma - p$ punti nello spazio $[n + x - 3p + 2]$, risulta determinato un numero finito di iperpiani se si impone loro le condizioni di contenere i detti punti e ancora $n + x - \sigma$ piani generatori della varietà; ciò deve equivalere in tutto a $n + x - 3p + 2$ condizioni, quante appunto occorrono a determinare un iperpiano; dovrà sussistere perciò in generale la relazione:

$$n + x - \sigma - p - 2(n + x - \sigma) = n + x - 3p + 2,$$

da cui

$$2x = 3\sigma - 2n - 2p + 2$$

che ci dà per σ la condizione:

$$\sigma \geqq \frac{2(n + p - 1)}{3} \tag{α}$$

e per le due restrizioni di sopra:

$$\sigma \geqq 4p - 2 \quad \text{e} \quad \sigma \geqq 6p - 4 \tag{β}$$

delle quali, per $p > 0$, la seconda include la prima. La formola trovata esige poi che σ sia pari.

9. Ed ora supponiamo che le rigate direttrici di ordine dato ρ, qualunque, di una V^n non speciale e del genere p siano ∞^y; presi y punti arbitrari $P_1 P_2 \ldots P_y$ in piani generatori distinti, che diremo $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_y$, pei detti punti passeranno delle F^ρ direttrici in numero finito. Si riguardi la V^n come proiezione di una V^{n+y} in guisa che le immagini dei piani generatori che escono dai centri di proiezione siano y rette di V^n prese nei fasci (P_1), (P_2),..., (P_y) dei piani α_1, α_2,..., α_y; e converrà, per la validità del ragionamento, sceglierle in modo da non coincidere con nessuna delle generatrici delle F^ρ uscenti da quei medesimi punti. Allora dalle considerazioni del n.° 6 segue che le rigate direttrici di V^n, d'ordine ρ e passanti per P_1,

$P_2, \ldots, P_y$ sono le proiezioni di *tutte* le rigate direttrici di ordine $\rho + y$ delle V^{n+y} passanti per y rette assegnate di quest'ultima (cioè quelle uscenti dai centri di proiezione e che hanno come immagini i punti $P_1, P_2, \ldots, P_y$). Possiamo adunque applicare il risultato del numero precedente a queste $F^{\rho+y}$ di V^{n+y}, determinate dal passaggio per y rette, ed avremo:

$$2y = 3(\rho + y) - 2(n + y) - 2p + 2$$

ossia

$$y = 3\rho - 2n - 2p + 2,$$

la quale fornisce ancora per ρ la restrizione (α) del numero precedente. Dunque: *Le rigate direttrici di ordine* $\rho \geqq \frac{2}{3}(n + p - 1)$ *di una* V^n *non speciale del genere p costituiscono un sistema di dimensione* $3\rho - 2n - 2p + 2$ *quando questa si riduce a zero, od a uno, oppure a due, si ha per* ρ *il minimo valore, onde, in generale, una* V^n *non speciale del genere p possiede un numero finito di rigate di ordine* $\frac{2n + 2p - 2}{3}$, *oppure una semplice infinità di rigate di ordine* $\frac{2n + 2p - 1}{3}$, *oppure una doppia infinità di rigate di ordine* $\frac{2n + 2p}{3}$, *secondo quello dei tre numeri che è intero.*

La varietà può tuttavia possedere eccezionalmente una rigata di ordine minore del numero trovato.

§ V. Sull'indice del sistema di rigate direttrici di un dato ordine di una V^n non speciale.

10. Consideriamo su una V^n le rigate direttrici di ordine $\rho + 1$ determinate (n.° 9) dal passaggio per $3(\rho + 1) - 2n - 2p + 2$ punti arbitrari; il numero di esse (ossia l'indice del sistema) non cambia se tre dei punti sono presi in uno stesso piano generatore; di conseguenza le rigate si scompongono in quel piano e nelle rigate di ordine ρ che passano pei rimanenti $3\rho - 2n - 2p + 2$ punti. Però quando vi sia una rigata minima eccezionale bisognerà prendere questi punti fuori di essa e inoltre i piani della varietà in numero di $3\rho - 2n - 2p + 2$ passanti per i detti punti non deb-

bano con la rigata eccezionale formare un complesso di ordine ρ, bensì maggiore; sicchè dicendo m l'ordine della rigata eccezionale si deve avere:

$$m + 3\rho - 2n - 2p + 2 > \rho,$$

ossia:

$$2\rho \geqq 2n + 2p - m - 1 \quad \text{e perciò basta che:} \quad \rho \geqq n + p - \frac{m}{2}. \qquad (\gamma)$$

Se nel caso che esista una rigata minima eccezionale di ordine m consideriamo solo le rigate direttrici di ordine $\geqq n + p - \frac{m}{2}$, l'indice delle rigate di ordine ρ è uguale a quello delle rigate di ordine $\rho + 1$. Quell'indice è poi eguale anche al numero delle rigate di ordine $\frac{2n + 2p - 2}{3}$, se questo numero è intero ed inoltre non vi sia rigata minima eccezionale.

Infine proiettando la V^n di $[n - 3p + 2]$ su un S_5 da $n - 3p - 3$ suoi punti ottengo una V^{3p+3} mentre l'indice in discorso non cambia; esso non dipende adunque che da p; purchè esistendo una rigata minima eccezionale di ordine m ci limitiamo a considerare solo quelle rigate il cui ordine è $\geqq n + p - \frac{m}{2}$.

11. Si potrebbe tentare la ricerca di questo indice. Supponendo di aver determinato su V^n delle F^σ di $[\sigma - 2p + 1]$ dando x rette arbitrarie (laonde, come risulta dal n.° 8, sarà σ pari), ponendo $\sigma = 2r$, poichè $2x = 3\sigma - 2n - 2p + 2$ si avrà: $x = 3r - n - p + 1$. Consideriamo poi (n.° 8) la V^n come proiezione di una V^{n+x} di $[n + x - 3p + 2]$; proiettando da $n + x - \sigma - p$ (*) punti arbitrari su un $[\sigma - 2p + 2]$ ottengo una $V^{3r\ p+1}$ di questo spazio, contenente ancora delle F^σ in numero finito appartenenti a degli iperpiani i quali devono contenere ulteriormente $r - p + 1$ piani della varietà. Se poniamo per comodità $r - p + 1 = s$, il problema dell'indice si riduce a quello di trovare il numero degli S_{2s-1} di un S_{2s}, i quali contengono s piani di una V^m $(m = 3s + 2p - 2)$. (V. n.° 21.)

(*) Dev'essere però $n + x - \sigma - p \geqq 0$; ora nel n.° 8 si è posta la restrizione:

$$\sigma \leqq n + x - 2p + 1,$$

da cui si ha $n + x \geqq \sigma + 2p - 1$; epperò (qualunque sia p, purchè > 0) sarà anche:

$$n + x - \sigma - p \geqq 0.$$

Osservazione. Si sono poste al n.° 8 le restrizioni (β), ma tuttavia valgono gli ultimi risultati anche se non siano soddisfatte; invero noi potremo sempre considerare le F^{σ} direttrici di una V^n come proiezioni delle $F^{\sigma+l}$ direttrici di una V^{n+l}; e se la (γ) del n.° 10 e la (α) del n.° 8 sono soddisfatte, lo saranno pure le analoghe per la V^{n+l}, qualunque sia l; se poi prendiamo l abbastanza grande si potranno rendere soddisfatte anche le (β) del n.° 9 e applicando alle $F^{\sigma+l}$ le proposizioni viste, esse avranno pure luogo per la F^{σ} di V^n.

§ VI. Determinazione delle curve direttrici di una V^n. Curve direttrici minime.

12. Consideriamo una V_p^n non speciale e di più normale (il che si può sempre supporre) la quale contenga una curva direttrice C^m appartenente ad S_h; dico che quando siano verificate le diseguaglianze:

$$n \geqq 2p + \frac{3m+5}{2} \tag{I}$$

e

$$n \geqq 6p + m - 2 \tag{II}$$

dev'essere $h = m - p$, e quindi la C^m è essa pure normale.

Intanto è certo $h \leqq m - p$ perchè la C^m non può essere speciale (n.° 7, proposizione b); dimostreremo che ha luogo il segno di uguaglianza. A tal fine per l'S_h e per $2p-1$ coppie di punti presi in $2p-1$ piani generatori diversi della varietà facciamo passare un iperpiano; ciò è possibile per l'ipotesi fatta (II). Quell'iperpiano segherà la V^n in una rigata composta di un certo numero $\geqq 2p-1$ di piani e di una $F^{m'}$ residua, irriducibile, per la quale è

$$m' \leqq n - 2p + 1.$$

Grazie a questa relazione la rigata $F^{m'}$ è certo normale (n.° 7) e quindi appartiene ad un $[m' - 2p + 1]$; essa contiene poi la C^n di S_h. Ora si è dimostrato (n.i 8 e 9) che per una V_p^n generale non speciale, con una $F^{m'}$ direttrice, è:

$$3m' \geqq 2n + 2p - 2.$$

Se questa si somma con la (I), cioè con:

$$2n \geqq 4p + 3m + 5$$

e con

$$6m - 6p \geqq 6h$$

si ha:

$$2m' \geqq 12p + 6h - 3m + 3, \quad \text{ossia} \quad m' \geqq 4p + 2h - m + 1.$$

Di qui deriva, applicando alla $F^{m'}$ di $[m' - 2p + 1]$ il risultato del lavoro sotto citato (*), che $m \leqq h + p$; adunque ha luogo il segno $=$.

Ciò posto veniamo ora a determinare le curve direttrici di una V^n; e precisamente, supponiamo che su una V^n del genere p, non speciale e normale, le curve direttrici di un dato ordine, μ, siano ∞^z; se fissiamo z rette $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_z$ su altrettanti piani generatori esse verranno incontrate da un numero finito di quelle curve. Si riguardi poi la V^n come proiezione di una V^{n+z} (che sarà pure normale e quindi di $[n + z - 3p + 2]$) per modo che le immagini dei piani uscenti dai centri di proiezione siano le rette a_1, $a_2, \ldots, a_z$; ciò si può sempre (n.° 5). Le curve direttrici di ordine μ della V^n, incontranti quelle z rette saranno proiezioni (n.° 6) di tutte le curve direttrici di ordine μ esistenti sulla V^{n+z}. Queste curve saranno poi normali, ossia apparterranno a spazi $[\mu - p]$ se $\mu - p \leqq n + z - 3p$ ossia se $\mu \leqq n + z - 2p$ e inoltre (v. principio di questo numero), se:

$$n + z \geqq 2p + \frac{3\mu + 5}{2} \quad \text{e} \quad n + z \geqq 6p + \mu - 2.$$

Per questi $[\mu - p]$ contenenti le curve e per $n - \mu - 2p + z$ punti generici passano degli $[n + z - 3p]$ determinati i quali devono contenere ulteriormente $n + z - \mu$ rette della varietà; ed un $[n + z - 3p]$ deve risultare determinato in un numero finito di modi se debba passare per $n + z - \mu - 2p$ punti fissati e contenere $n + z - \mu$ rette non date della V^{n+z}; tutto ciò deve equivalere a $2(n + z - 3p + 1)$ condizioni, quante appunto occorrono a determinare un $[n + z - 3p]$. Avremo così:

$$2(n + z - \mu - 2p) + n + z - \mu = 2(n + z - 3p + 1),$$

ossia:

$$z = 3\mu - n - 2p + 2,$$

(*) SEGRE, *Recherches générales*..., citato, 2.e Partie, n.° 7.

la quale ci dà $\mu \geqq \frac{n+2p-2}{3}$ e per le restrizioni poste sopra fornisce:

$$\mu \geqq 2p-1, \quad \mu \geqq \frac{8p+1}{3} \quad \text{e} \quad \mu \geqq 4p-2.$$

Dunque: Su una V^n non speciale, di genere p, le curve direttrici di un dato ordine μ $\left(\text{dove } \mu \geqq \frac{n+2p-2}{3}\right)$ formano un sistema di dimensione $3\mu - n - 2p + 2$. Quando la dimensione si riduce a zero o ad uno o a due si ha per μ il valore minimo. Perciò una V_p^n non speciale contiene un numero finito di curve direttrici di ordine $\frac{n+2p-2}{3}$ oppure ∞^1 curve direttrici di ordine $\frac{n+2p-1}{3}$ oppure ∞^2 curve direttrici di ordine $\frac{n+2p}{3}$, secondo quello dei tre numeri che è intero.

Tuttavia la varietà può possedere curve minime eccezionali, cioè di ordine minore di quello ora trovato.

L'osservazione fatta alla fine del n.° 11 si può ripetere relativamente a questo n.° 13 e si conclude che delle restrizioni poste per μ è da tener conto solo della prima, cioè: $\mu \geqq \frac{n+2p-2}{3}$.

13. Sulla V^n non speciale le curve direttrici di ordine $\mu+1$ risultano determinate dando $3(\mu+1) - n - 2p + 2$ rette che debbano incontrarle (n.° precedente); se tre di queste le assumo in uno stesso piano generatore allora il numero delle curve non cambia ed esse dovendo avere in quel piano almeno due punti si scompongono in una retta e nelle curve direttrici di ordine μ che incontrano le rimanenti $3\mu - n - 2p + 2$ rette. Però se esiste una curva minima eccezionale di ordine ν, essa con le $3\mu - n - 2p + 2$ rette non deve formare un complesso di ordine μ, ma di ordine maggiore; ossia deve essere: $\nu + 3\mu - n - 2p + 2 > \mu$, da cui: $2\mu > n + 2p - \nu - 2$ od anche: $\mu > \frac{n-\nu}{2} + p - 1$. Ed anche qui, proiettando la V^n da $n - 3p - 3$ suoi punti su di un S_5 si ha una V^{3p+3} mentre l'indice non muta; esso dipende adunque solo da p, e, non essendovi curva minima eccezionale, è uguale al numero delle curve di ordine $\frac{n+2p-2}{3}$ se questo numero è intero.

Infine se la V^n di $[n-3p+2]$ si riguarda come proiezione di una V^{n+z} di $[n+z-3p+2]$ contenente un numero finito di curve direttrici di ordine μ, proiettando su un $[\mu - p + 2]$ da $n + z - \mu - 2$ punti generici (*) otterremo una V^{n+z}, ossia, poichè (n.° 13) $z = 3\mu - n - 2p + 2$, una $V^{3\mu-2p+2}$ di $[\mu - p + 2]$ sulla quale le curve direttrici di ordine μ sono in numero finito e apparteranno a degli spazi $[\mu - p]$ contenenti ulteriormente $2\mu - 2p + 2$ rette della varietà. Il numero di codeste curve, ossia l'indice del sistema, ci è dato adunque del numero degli S_{t-2} di un S_t, i quali contengano $2(t-1)$ rette di una V^m (dove $m = 3t + p - 4$).

14. Prendendo in esame i risultati dei n.i 9 e 13 osserviamo che se si fa il triplo dell'ordine delle curve minime o la somma di questo medesimo ordine con quello delle rigate minime si ottengono numeri maggiori di n, salvo che sia $p = 0$ oppure $p = 1$. Adunque una V^n non speciale generica non può essere costruita riferendo fra loro biunivocamente tre curve di ordine μ, ν, ρ, essendo $\mu + \nu + \rho = n$, oppure una curva di ordine μ e una rigata di ordine m, essendo $\mu + m = n$. Una siffatta generazione conduce a delle V^n particolari, tranne quando $p = 0$ oppure $p = 1$, nei quali casi una tal generazione è invero generale sempre che sia $\frac{n}{3}$ un numero intero. All'infuori di questi casi, volendo costruire una V^n non speciale mediante tre curve o mediante una curva e una rigata, bisognerà riferire biunivocamente fra loro queste forme, sotto certe condizioni. E precisamente, se abbiamo una curva C^μ e una rigata F^m, per ottenere una V^n dovremo riferirle in modo che $\mu + m - n$ punti della curva stiano sulle generatrici omologhe della rigata (**). E se abbiamo tre curve C^μ, C^ν, C^ρ, per ottenere una V^n dovremo riferirle in modo che essi abbiano $\mu + \nu + \rho - n$ terne di punti omologhi allineati; giacchè la rigata che passa per due delle curve, ad es. per la C^μ e la C^ν, ha l'ordine $m = \mu + \nu$ e risulta riferita biunivocamente alla C^ρ; di più le incidenze tra elementi omologhi di questa curva C^ρ e della rigata F^m sono date tutte e sole dalle terne di punti omologhi allineati delle C^μ, C^ν, C^ρ.

Inversamente tre curve direttrici C^μ, C^ν, C^ρ di una V^n risultano riferite biunivocamente tra loro in modo da avere $\mu + \nu + \rho - n$ terne di punti

(*) Questo numero dev'essere $\geqq 0$; ciò è verificato dacchè si è posto nel n.° 13 la restrizione $\mu \leqq n + z - 2p$.

(**) Però, assunte a priori l'ordine μ della curva e l'ordine m della rigata, quello della V^n da costruire dev'essere soggetto alle restrizioni forniteci dai n.i 13 e 9 ossia:

$$\mu \geqq \frac{n + 2p - 2}{3}; \quad m \geqq \frac{2n + 2p - 2}{3}.$$

omologhi allineati. Infatti esse risultano riferite prospettivamente alla varietà e quindi biunivocamente tra loro. Se poi si considera la rigata che passa per due delle curve, per es. per la C^μ e C^ν, il suo ordine è $\mu+\nu$ e con la C^ρ può servire alla costruzione della V^n; bisogna perciò che la curva incontri la rigata in $\mu+\nu+\rho-n$ punti, che è il numero delle terne di elementi omologhi allineati delle tre curve.

Se poniamo $\mu=\nu=\rho$ abbiamo che tre curve direttrici di ordine μ di una V^n hanno $3\mu-n$ terne di punti omologhi allineati. Se la V^n è non speciale e generale e si assume per μ l'ordine delle curve minime, ossia quello dei tre numeri

$$\frac{n+2p}{3},\quad \frac{n+2p-1}{3},\quad \frac{n+2p-2}{3}$$

che è intero, avremo $2p$, oppure $2p-1$ oppure $2p-2$ terne di punti omologhi allineati, secondo che le curve minime sono ∞^2 oppure ∞^1 oppure ∞^0. Adunque tre curve qualunque di una V^n non speciale e del genere p non potranno in generale avere meno di $2p-2$ terne di punti omologhi allineati.

§ VII. Varietà V speciali.

15. Applicando al caso che si tratti di una V le proposizioni contenute nel lavoro qui sotto citato (*) risulta che quando $n>2p-2$ la varietà non può appartenere ad uno spazio di dimensione $d>n-p+2$ e che supponendo in particolare che sia $d>n-p$ e $p>0$, per n abbastanza grande si hanno tutti coni. Più precisamente una V^n di genere p appartenente ad un $[n-p+1]$ oppure ad un $[n-p+2]$, se è rispettivamente $n \geqq 2p+1$ oppure $n \geqq 2p$, è sempre un cono.

16. Si è veduto che una V non speciale non può contenere una rigata od una curva speciale; possiamo proporci di trovare se una V speciale contenga sempre una rigata speciale, oppure quando ciò accada.

Abbiasi perciò una V^n di genere $p>0$, appartenente ad S_r; per $i+1$ suoi piani presi ad arbitrio, ove $0 \leqq i \leqq p-1$, si faccia passare un iperpiano,

(*) Segre, *Sulle varietà algebriche composte di una semplice infinità di spazi*, n.° 4, (R. Acc. dei Lincei, luglio e ottobre 1887).

per il che basta che sia

$$r \geqq 3\,i + 3. \tag{1}$$

La residua intersezione con V^n sarà una rigata di ordine $n - i - 1$, la quale non potrà stare in un S_{r-1}, altrimenti tutti gli iperpiani passanti per questo determinerebbero come residua intersezione con la varietà una g^1_{i+1} di piani tali che gli $i+1$ piani assunti ad arbitrio ne sarebbero un gruppo, mentre, avendosi $i + 1 \leqq p$, ciò è assurdo pel teorema di Riemann-Roch. Per maggior generalità si supponga che quella rigata di ordine $n - i - 1$ si spezzi in una rigata direttrice irriducibile di ordine m, appartenente ad un S_h, ed in $n - i - m - 1$ piani; dovrà essere

$$h \geqq r - n + m + i, \tag{2}$$

altrimenti questo S_h starebbe con gli $n - m - i - 1$ piani in un S_{r-2} o in uno spazio minore, il quale verrebbe a contenere la rigata complessiva, mentre si è visto che ciò non può accadere. La rigata F^m è poi certamente speciale se $h \geqq m - 2\,p + 2$, la qual condizione in virtù della (2) è soddisfatta se si pone:

$$i \geqq n - 2\,p - r + 2\,; \tag{3}$$

e siccome $i \leqq p - 1$ questa condizione conduce all'altra:

$$r \geqq n - 3\,p + 3, \tag{4}$$

la quale dice che la V dev'essere speciale. Supposto adunque di avere una V^n speciale, normale di S_r, allora la (4) sarà verificata e quindi se la (3) si potrà soddisfare con un valore di i compreso tra zero e $p - 1$ (inclusi i limiti) e inoltre si possa far ciò in modo da verificare anche la (1), la rigata F^m risulterà speciale. Ma la (1) è soddisfatta se $r \geqq 3\,p$ (poichè $p \geqq i + 1$) o anche se $n \geqq 6\,p - 3$, perchè questa con la (4) dà $r \geqq 3\,p$; onde si ha che

Una V^n di genere $p > 0$, speciale, di S_r ($r \geqq n - 3\,p + 3$) contiene sempre una rigata direttrice speciale se è $r \geqq 3\,p$ oppure se $n \geqq 6\,p - 3$.

Lo stesso vale più in generale se esiste un valore di i compreso fra zero e $p - 1$ (inclusi i limiti) che verifichi le relazioni: $r \geqq 3\,i + 3$ ed $i \geqq n - 2\,p - r + 2$.

Dall'esistenza di una rigata direttrice speciale si potrà poi dedurre quella di una curva direttrice speciale, per esempio quando l'ordine di quella rigata sia $\geqq 4\,p - 2$ (*).

(*) Segre, *Recherches générales...*, 2.^{e} Partie, n.° 16.

17. Possiamo ottenere per m nel numero precedente una restrizione. Si consideri la serie g_{n-m}^{r-h-1} che sulla V^n è segata dagli iperpiani condotti per l'S_h e si supponga che la serie non sia speciale; basta perciò che sia $n - m \geqq 2p - 1$, ossia $n \geqq 2p + m - 1$. Allora per la supposizione fatta sarà $n - m - (r - h - 1) \geqq p$; questa con la (3) del numero precedente dà: $m \leqq h + p + i - 1$.

18. Vediamo alcune proprietà nel caso che le V^n siano coni.

Sia un S_i-cono composto di una semplice infinità di S_{i+2}, e quindi di dimensione $i + 3$, che giaccia in un $[i + r + 1]$ e che da un S_r indipendente dal sostegno venga tagliato in una rigata F^n, il cui spazio normale abbia la dimensione ρ. Allora con un ragionamento in tutto simile a quello che si può vedere nel lavoro sottocitato (*) si dimostra che il cono dato può aversi come proiezione di un altro appartenente ad un $[\rho + i + 1]$; e poichè in esso le sezioni fatte con gli S_ρ sono rigate di questi spazi ed occorrono $\rho + 1$ punti a determinarne una, si ha che:

Un S_i-cono luogo di una semplice infinità di S_{i+2}, del genere p e di ordine n, il cui spazio normale sia $[\rho + i + 1]$ contiene $\infty^{(i+1)(\rho+1)}$ rigate direttrici di ordine n in modo che per ogni gruppo di $\rho + 1$ punti presi ad arbitrio su altrettanti S_{i+2} generatori ne passa in generale una sola.

Come casi particolari si hanno le seguenti proposizioni:

Un S_0-cono composto di una semplice infinità di piani, del genere p e di ordine n, non speciale, (cioè con sezioni iperpiane non speciali) contiene ∞^{n-2p+2} rigate direttrici di ordine n per modo che per ogni gruppo di $n - 2p + 2$ punti presi ad arbitrio su altrettanti piani generatori ne passa in generale una sola.

Un S_0-cono formato da una semplice infinità di piani, del genere p e di ordine n, speciale, il cui spazio normale abbia la dimensione $\rho \geqq n - 2p + 3$ contiene $\infty^{\rho+1}$ rigate speciali in modo che per $\rho + 1$ punti arbitrariamente presi in altrettanti piani generatori ne passa in generale una sola.

(*) Segre, *Recherches générales...*, 1.e Partie, n.° 10.

§ VIII. Estensioni alle varietà superiori.

19. Quegli stessi metodi che hanno servito a determinare sopra una V non speciale le rigate e le curve direttrici possono applicarsi più in generale a determinare su una $S_r - F_{r+1}$ (*) le varietà $S_{r-1} - F_r$ direttrici. Non c'è da far altro che estendere i vari numeri dei vari paragrafi a queste varietà.

E prima di tutto il lavoro sottocitato (**) fornisce per lo spazio normale di una varietà $S_r - F^n_{r+1}$ del genere p, non speciale, la dimensione $n-(r+1)p+r$. I numeri 2 e 3 del presente lavoro estesi a queste varietà ci forniscono per esse proposizioni analoghe a quelle enunciate per le V. L'analogo del n.° 4 dice che se una $S_r - F^n_{r+1}$ del genere p appartiene ad un $[n-p-i+2r]$ e possiede una $S_{r-1} - F^m_r$ direttrice, di S_h, per:

$$n \geqq 2p + 2i + 2h - m - 2(r-1) + 1 \tag{1}$$

si deve pure avere $m \leqq h - r + i + 1$, o, se si vuole: $h \geqq m + r - i - 1$. Si trova poi che la (I) è sostituibile con la seguente: $n \geqq m + 2p - 1$.

I numeri 5 e 6 si estendono pure con facilità; così per l'analogo del n.° 5 si ottiene la seguente proposizione finale: « Una $S_r - F^n_{r+1}$ non speciale si può sempre considerare come proiezione di una $S_r - F^{n+x}_{r+1}$ (qualunque sia x) da x suoi punti in modo che gli S_r generatori che escono da questi punti abbiano per immagini degli S_{r-1} obbligati a contenere ciascuno un S_k ($k \leqq r-1$), avendo dapprima fissati gli x spazi S_k ad arbitrio in altrettanti S_r generatori della $S_r - F^n_{r+1}$ ».

L'analogo del n.° 7 ci dà che ogni $S_r - F_{r+1}$ non speciale non può contenere una $S_{r-1} - F_r$ direttrice speciale; d'onde segue più in generale che su una $S_r - F_{r+1}$ non speciale nessuna varietà $S_i - F_{i+1}$ ($i \leqq r-1$) direttrice può essere speciale.

Possiamo anche citare la proposizione analoga a quella con cui termina il n.° 7: « Ogni $S_{r-1} - F^m_r$ direttrice di una $S_r - F^n_{r+1}$ normale, non speciale, del genere p, è essa pure normale se $m \leqq n - 2p + 1$. »

(*) Con questa notazione si intende una varietà algebrica composta di una semplice infinità di S_r.

(**) Segre, *Sulle varietà algebriche composte di una semplice infinità di spazi*, (R. Acc. dei Lincei, luglio e ottobre 1887). — V. anche: *Introduzione...*, citata, n.° 91.

Con la scorta delle varie proposizioni citate possiamo procedere alla determinazione delle varietà $S_{r-1} - F_r^\sigma$ direttrici di una $S_r - F_{r+1}^n$ non speciale, del genere p, che supporremo normale. Le varietà direttrici in discorso formino un sistema ∞^z; allora per z punti fissati su degli S_r generatori distinti della varietà ne passerà un numero finito. Ciò fatto si riguardi la varietà stessa come proiezione di una $S_r - F_{r+1}^{n+z}$ in modo che gli spazi S_r generatori uscenti dai centri di proiezione abbiano le loro immagini (che sono degli S_{r-1}) passanti per gli z punti fissati. Le varietà $S_{r-1} - F_r^\sigma$ direttrici della varietà data, che passano per gli z punti presi su questa saranno così le proiezioni di tutte quelle di ordine $\sigma + z$ giacenti sulla $S_r - F_{r+1}^{n+z}$ e passanti per z rette. Dalla $S_r - F'^{n+z}_{r+1}$ si risalga in modo analogo ad una $S_r - F_{r+1}^{n+2z}$ e così via fino ad arrivare ad una $S_r - F_{r+1}^{n+rz}$, che sarà normale, ossia di $[n + rz - (r+1)p + r]$ e che conterrà un numero finito di varietà $S_{r-1} - F_r^{\sigma+(r-1)z}$ direttrici. Queste saranno normali, ossia di

$$[\sigma + (r-1)z - rp + r - 1]$$

se

$$n + rz - (r+1)p + r - 1 \geqq \sigma + (r-1)z - rp + r - 1,$$

ossia se $\sigma \leqq n + z - p$ e inoltre (per l'analogo del n.° 7) se

$$\sigma + (r-1)z \leqq n + rz - 2p + 1,$$

ossia se

$$\sigma \leqq n + z - 2p + 1.$$

Allora fissati nell'$[n + rz - (r+1)p + r]$ un numero $n + z - \sigma - p$ di punti arbitrari, per essi e per gli spazi $[\sigma + (r-1)z - rp + r - 1]$ passano degli iperpiani ben determinati contenenti ulteriormente $n + z - \sigma$ spazi S_r generatori. Il passaggio per quei punti fissati e per $n + z - \sigma$ spazi S_r non dati della varietà deve determinare un iperpiano in un numero finito di modi; epperò dev'essere:

$$(n + z - \sigma - p) + r(n + z - \sigma) = n + rz - (r+1)p + r,$$

da cui

$$z = (r+1)\sigma - rn - rp + r$$

che dà per σ la restrizione $\sigma \geqq \frac{r(n+p-1)}{r+1}$, mentre si hanno dalle due restrizioni poste sopra altre limitazioni per σ; di esse riparleremo tosto. Intanto si osservi che per $r = 1$ si ritrova la formola già nota (*): $z = 2\sigma - n - p + 1$ e per $r = 2$ si ritrova quella del n.° 9 del presente lavoro.

20. Anche qui si presenta il problema dell'indice; lo stesso metodo già usato per le V ci dimostra che esso dipende soltanto da p.

Ciò posto si supponga che presi su x spazi S_r generatori di una $S_r - F^n_{r+1}$ normale non speciale, del genere p, x spazi S_{r-1} risulti determinato un numero finito di $S_{r-1} - F^\rho_r$ direttrici, passanti per quegli spazi. Riguardiamo di poi la varietà data come proiezione di un'altra di ordine $n + x$ da x suoi punti in modo che gli S_r generatori passanti per essi abbiano come immagine gli x spazi S_{r-1} fissati. Sulla nuova varietà le $S_{r-1} - F_r$ direttrici di ordine ρ sono in numero finito; e di più sono normali, cioè di

$$[\rho - rp + r - 1] \text{ se } \rho \leqq n + x - 2p + 1 \text{ e se } \rho \leqq n + x - p. \qquad (\alpha)$$

Fissati allora $n + x - \rho - p$ punti arbitrari, risulta determinato un iperpiano in un numero finito di modi se lo si obbliga a contenerli e inoltre a contenere $n + x - \rho$ spazi S_r, non dati, della varietà. Si stabilisce così l'equazione:

$$n + x - \rho - p + r(n + x - \rho) = n + x - (r + 1)p + r$$

da cui:

$$rx = (r + 1)\rho - rn - rp + r \qquad (1)$$

la quale esige che ρ sia multiplo di r. Poniamo adunque: $\rho = rq$; la (I) diventa $x = (r + 1)q - n - p + 1$ e le due restrizioni (α) a lor volta dànno: $\rho \geqq r(3p - 2)$ e $\rho \geqq r(2p - 1)$.

Se ora proietto da $n + x - \rho - p$ punti arbitrari generici su di un $[\rho - rp + r]$, ottengo una $S_r - F^{n+x}_{r+1}$ di questo spazio contenente un numero finito di $S_{r-1} - F^\rho_r$ direttrici, appartenenti a degli spazi $[\rho - rp + r - 1]$, i quali contengono ulteriormente $n + x - \rho$ spazi S_r generatori della varietà; sostituendo ora ad x il suo valore e ponendo per comodità $q - p + 1 = s$ avremo una $S_r - F^{(r+1)s+(p-1)r}_{r+1}$ di un S_{rs} contenente delle $S_{r-1} - F^{r(s+p-1)}_r$ direttrici appartenenti ad iperpiani i quali segano quella varietà ulteriormente in s spazi S_r generatori. A ciò si riduce il problema dell'indice: di trovare quanti siano gli iperpiani di un S_{rs} contenente s spazi S_r generatori di una $S_r - F_{r+1}$ di ordine $s(r + 1) + r(p + 1)$. Ora il prof. Segre mi ha corte-

(*) Segre, *Recherches génèrales...*, citato, 2.^{e} Partie, n.° 11.

semente comunicato in proposito una sua formola che trascrivo (*):

$$1 + rp + r^2\binom{p}{2} + r^3\binom{p}{3} + \cdots r^s\binom{p}{s}.$$

L'indice quindi per $s \geqq p$ non dipende più da s e vale $(r+1)^p$.

Pel caso di $p=1$ ed $r=2$ si vedrà più avanti determinato l'indice in un modo particolare; il risultato si accorda precisamente con questo più generale.

21. Si possono pure ricercare su una $S_r - F^n_{r+1}$ non speciale e normale le curve direttrici di un dato ordine. Siano precisamente ∞^y le $S_0 - F^\mu_1$ direttrici; allora dati y spazi S_{r-1} in altrettanti S_r della varietà vi sarà solo un numero finito di curve che li incontrano.

Si riguardi poi la data varietà come proiezione di un'altra d'ordine $n+y$ in modo che gli S_r uscenti dai centri di proiezione abbiano come immagine quegli y spazi S_{r-1} fissati. Le curve di ordine μ sulla varietà $S_r - F^{n+y}_{r+1}$ sono in numero finito e con certe restrizioni apparterranno a degli $S_{\mu-p}$. La varietà ultima nominata appartiene a $[n+y-(r+1)p+r]$; fissati $n+y-\mu-rp$ punti generici, per essi e per quegli $S_{\mu-p}$ passano degli spazi $[n+y-(r+1)p]$ determinati, i quali conterranno $n+y-\mu$ rette della varietà. Il passaggio per un tal numero di rette non date della varietà e per $n+y-\mu-rp$ punti dati deve costituire un numero di condizioni sufficienti a determinare un $[n+y-(r+1)p]$ in numero finito di modi, onde si deve avere:

$$[n+y-\mu] + r\,[n+y-\mu-rp] = r\,[n+y-(r+1)p+1],$$

da cui:

$$y = (r+1)\mu - n - rp + r.$$

(*) Il prof. SEGRE, avendo visto (indipendentemente da me) che il problema dell'indice si riduceva a quello anzi detto, fu indotto a scrivere la formola su riportata dall'esame di alcuni casi particolari trattati nella sua Memoria del t. 34 dei *Math. Annalen*, e di altri dovuti al sig. A. TANTURRI. Questi ha poi dimostrato una formola molto generale, nella quale rientra la suddetta, in una Nota che uscì fra gli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, tomo 35, febbraio 1900.

§ IX. Applicazioni.

22. Ritornando alle varietà semplicemente infinite di piani potremo ottenere alcuni risultati particolari notevoli dando a p valori numerici bassi e supponendole inoltre nello spazio ordinario. Allora le dette varietà di piani vengono ad essere l'insieme dei piani tangenti di una *sviluppabile* (o dei piani osculatori di una curva sghemba). Ciò che era detto ordine della varietà diventa la classe della sviluppabile e le curve e le rigate direttrici sono curve e rigate *riferite prospettivamente* alla sviluppabile, cioè curve e rigate i cui elementi (punti o generatrici) sono in corrispondenza biunivoca coi piani della sviluppabile per modo che due elementi omologhi sono sempre incidenti. La conoscenza di queste curve e rigate conduce alla generazione della varietà mediante piani congiungenti terne di punti omologhi di tre curve in corrispondenza biunivoca fra loro, oppure punti e rette omologhe di una curva e di una rigata fra loro riferite biunivocamente. Questo modo di generazione sarà tanto più giovevole quanto più basso l'ordine di quelle curve e rigate; onde, trattandosi delle varietà non speciali, tornerà utile la determinazione delle curve e delle rigate direttrici minime. Se poi trasformiamo il problema per dualità (sempre in S_3) otterremo delle proposizioni e delle generazioni relative a curve: avremo la classe delle semplici infinità di piani e l'ordine delle rigate minime riferite prospettivamente alla curva e quindi la generazione di essa come luogo dei punti di incontro delle generatrici di una rigata coi piani omologhi di una varietà semplicemente infinita di piani riferita biunivocamente alla rigata stessa, oppure come luogo delle intersezioni dei piani omologhi di tre varietà semplicemente infinite di piani in corrispondenza biunivoca fra loro.

Se per le V^n non speciali, del genere p, (per le quali ha da essere $n \geqq 3p+1$) consideriamo le rigate e le curve direttrici minime, potremo costruire le varietà stesse con tre curve di ordine $I\dfrac{n+2p}{3}$ (riferite fra loro biunivocamente in modo da avere un certo numero di terne di punti omologhi allineati); oppure con una curva dell'ordine detto e con una rigata di ordine $I\dfrac{2n+2p}{3}$ (riferite biunivocamente e con un certo numero di elementi omologhi incidenti).

Dualmente (nell'S_3) una C_p^n si potrà costruire come luogo delle intersezioni degli elementi omologhi di tre varietà semplicemente infinite di piani di classe $I\frac{n+2p}{3}$, riferite fra loro in modo da avere un certo numero di terne di piani omologhi formanti fascio; oppure come luogo delle intersezioni di una varietà di piani della detta classe e di una rigata di ordine $I\frac{2n+2p}{3}$ tra loro riferite biunivocamente in modo che un certo numero di elementi omologhi si appartengano.

Ed ora diamo a p dei valori particolari. Facendo $p=0$ abbiamo delle V^n razionali e per esse l'ordine delle curve minime è dato (n.° 13) da $\frac{n-2}{3}$, o da $\frac{n-1}{3}$, o da $\frac{n}{3}$ e quello delle rigate minime è dato (n.° 9) da $\frac{2n-2}{3}$, $\frac{2n-1}{3}$, $\frac{n}{3}$, dovendosi prendere in ciascuna terna di valori quello che è intero. Ora dall'essere intero $\frac{n}{3}$, oppure $\frac{n-1}{3}$, oppure $\frac{n-2}{3}$ segue che sarà intero rispettivamente anche $\frac{2n}{3}$, oppure $\frac{2n-2}{3}$, oppure $\frac{2n-1}{3}$. Per le V^n razionali avremo quindi nello stesso tempo ∞^0 (una) curva di ordine $\frac{n-2}{3}$ e ∞^1 rigate di ordine $\frac{2n-1}{3}$, direttrici minime; oppure ∞^1 curve di ordine $\frac{n-1}{3}$ e ∞^0 (una) rigata di ordine $\frac{2n-2}{3}$; o infine ∞^2 curve di ordine $\frac{n}{3}$ e ∞^2 rigate di ordine $\frac{2n}{3}$.

D'altra parte questi risultati sono già noti insieme con molti altri pei quali rimando il lettore ai lavori qui sotto citati (*).

23. Veniamo ad esaminare il caso di $p=1$. Il n.° 16 ci dà subito che le V^n ellittiche speciali, avendo per ispazi normali o S_{n+1} oppure S_n, sono sempre coni. Noi ci limiteremo a considerare le V^n ellittiche che non sono coni.

(*) Segre, *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*, (Atti della R. Acc. di Torino, t. 12, 1885). — A. Brill, *Ueber rationale Curven und Regelflächen*, (Sitzber. bay. Akad., 1885, ristampato nei Math. Ann., t. 36, 1890). — W. Stahl, *Zur Erzeugung der ebenen rationalen Curven*, (Math. Ann., t. 38, 1891). — *Zur Erzeugung der rationalen Raumcurven*, (Math. Ann., t. 40, 1892).

Le formole che dànno l'ordine delle rigate e delle curve minime diventano:

Per le rigate: $\frac{2n}{3}(\infty^0)$; $\frac{2n+1}{3}(\infty^1)$; $\frac{2n+2}{3}(\infty^2)$,

Per le curve: $\frac{n}{3}(\infty^0)$; $\frac{n+1}{3}(\infty^1)$; $\frac{n+2}{3}(\infty^2)$,

Dall'essere intero $\frac{n}{3}$ oppure $\frac{n+1}{3}$ oppure $\frac{n+2}{3}$ segue che sarà intero rispettivamente $\frac{2n}{3}$ oppure $\frac{2n+2}{3}$ oppure $\frac{2n+1}{3}$; e viceversa. Per le V^n ellittiche andranno adunque sempre accoppiati i valori $\frac{n}{3}$ e $\frac{2n}{3}$; $\frac{n+1}{3}$ e $\frac{2n+2}{3}$; $\frac{n+2}{3}$ e $\frac{2n+1}{3}$ dei quali il primo è l'ordine delle curve, il secondo quello delle rigate minime. Ma se consideriamo delle rigate di ordine $\frac{2n}{3}$, $\frac{2n+2}{3}$, $\frac{2n+1}{3}$ e del genere uno, troviamo su di esse delle curve minime rispettivamente di ordine $\frac{n}{3}$, $\frac{n+1}{3}$, $\frac{n+2}{3}$ (*); quindi per $p=1$ sulle rigate minime stanno delle curve minime della varietà.

Esaminiamo il legame che passa tra le curve e le rigate minime di una varietà semplicemente infinita di piani, ellittica, considerando il caso in cui quelle curve e rigate siano in numero finito, cioè il caso di n multiplo di tre. Si osservi allora che il doppio dell'ordine delle curve minime è uguale all'ordine delle rigate minime, d'ondè segue che le rigate le quali passano per le curve minime prese a due a due sono tutte minime. Intersecando poi fra loro due qualunque delle rigate minime otteniamo una curva minima. Adunque accoppiando le curve minime in tutti i modi possibili otteniamo tutte le rigate minime ed accoppiando queste in tutti i modi possibili otteniamo tutte le curve minime. Se x è il numero delle une ed x' il numero delle altre avremo:

$$\binom{x}{2}=x'; \quad \binom{x'}{2}=x,$$

dalle quali si ricava $x=x'=3$.

Ciò vale nell'ipotesi che non ci siano rigate o curve minime eccezionali; ma in tale ipotesi sappiamo (n.i 10 e 14) che l'indice dei sistemi di rigate

(*) Segre, *Recherches générales...*, citato, 2.e Partie, n.o 11.

e di curve direttrici (il quale indice dipende solo da p) è uguale al numero delle rigate e delle curve direttrici minime quando queste si trovino in numero finito. Possiamo quindi conchiudere che per le varietà di piani semplicemente infinite, ellittiche, non speciali, l'indice dei sistemi di rigate e di curve direttrici è tre; il qual risultato concorda con quello del n.° 21 ove si ponga $r=2$ e $p=1$.

Se ora consideriamo il caso che $n+1$ sia multiplo di tre abbiamo ∞^1 curve minime di ordine $\frac{n+1}{3}$, ∞^2 rigate minime di ordine $\frac{2n+2}{3}$; per due qualunque delle curve passa una rigata mentre una rigata contiene solo due curve minime (*). Se infine è $n+2$ multiplo di tre abbiamo ∞^1 rigate minime di ordine $\frac{2n+1}{3}$ e ∞^2 curve minime di ordine $\frac{n+2}{3}$; ognuna delle rigate contiene ∞^1 curve minime (*) e due qualunque delle rigate si tagliano in una tal curva.

Dando ora ad n successivi valori (essendo $p=1$) a partire da $n=4$ otterremo dei risultati numerici circa le varietà semplicemente infinite di piani, ellittiche e non speciali, che supporremo tutte nello spazio ordinario.

Così le varietà della quarta classe hanno rigate direttrici minime del 3.° ordine, le quali non sono altro che le sezioni coi propri piani; mentre le ∞^2 curve minime del 2.° ordine sono rette doppie (assi della sviluppabile).

Sulle varietà della quinta classe troviamo ∞^2 rigate minime del 4.° ordine e ∞^1 coniche, che sono rette doppie delle rigate; mentre sulle varietà della sesta classe abbiamo ancora delle rigate del 4.° ordine, ma solo in numero di tre, le quali si tagliano a due a due in tre rette doppie.

Le varietà della settima, ottava e nona classe hanno rispettivamente ∞^2, ∞^1, ∞^0 (tre) curve direttrici minime del 3.° ordine; la prima varietà possiede ∞^1 rigate minime del 5.° ordine, e le altre due rispettivamente contengono ∞^2 e ∞^0 (tre) rigate minime del 6.° ordine, ecc., ecc.

Enunciamo questi risultati trasformandoli con la dualità dello spazio ordinario. Avremo che le C^4, C^5, C^6 ellittiche sono prospettive a delle semplici infinità di piani di seconda classe: non possono essere altro che fasci di piani in cui ogni piano è da contarsi due volte e quindi incontra la curva in due punti variabili. Sono adunque i fasci che hanno per assi le ∞^2 corde della C^4,

(*) Segre, *Ricerche sulle rigate ellittiche*, (Atti della R. Acc. di Torino, t. 21, 1886, n.[i] 15 e 16).

le ∞^1 trisecanti della C^5 e le quadrisecanti della C^6, che sono in numero finito e precisamente in numero di tre (indice trovato pei sistemi di curve e rigate direttrici delle varietà ellittiche semplicemente infinite di piani).

Le rigate del minimo ordine prospettive alla C^4 sono i coni cubici proiettanti da' suoi punti; quelle prospettive alla C^5 e alla C^6 sono rigate del 4.° ordine.

Le C^7, C^8, C^9 ellittiche sono prospettive a dei coni di piani di 3.ª classe e precisamente a ∞^2, ∞^1, ∞^0 (tre) di tali coni rispettivamente. Queste tre curve si possono generare come luogo delle intersezioni dei piani tangenti omologhi di tre coni di 3.ª classe i quali siano riferiti a due a due in corrispondenza biunivoca; però per la C^7 due terne di piani omologhi debbono formare fascio e per la C^8 una terna sola.

In generale una C^{3m} ellittica si può generare come luogo delle intersezioni dei piani omologhi di tre varietà semplicemente infinite di piani (sviluppabili) di classe m, riferite a due a due biunivocamente; poichè una C^{3m} ellittica si può riferire biunivocamente e prospettivamente a *tre* ben determinate varietà semplicemente infinite di piani di classe m (*). Anche le C^{3m-1} e le C^{3m-2} ellittiche si possono generare con varietà semplicemente infinite di piani, di classe m riferite fra loro biunivocamente (però in modo da avere rispettivamente una o due terne di piani omologhi costituenti un fascio); per le C^{3m-1} abbiamo ∞^1 varietà di piani che possono servire allo scopo e per la C^{3m-2} ne abbiamo ∞^2. Proseguendo per $p = 2, 3, \ldots$, si potranno avere alcuni risultati sulle curve di genere superiore ad uno.

Torino, 30 marzo 1900.

(*) Una verificazione di questa nuova e notevole proprietà delle curve ellittiche si ha contando le costanti. Si sa che le C^{3m} ellittiche dipendono da $12m$ costanti; tre varietà semplicemente infinite di piani, della classe m, con lo stesso birapporto dipendono similmente da $12m - 2$ costanti; riferendole poi tra loro (essendo ∞^1 le corrispondenze biunivoche possibili tra due di esse) si dispone ancora di due costanti e si ritrovano così le $12m$ di prima.

Sulla riducibilità delle equazioni differenziali lineari a coefficienti doppiamente periodici.

(Di Carlo Bigiavi, *a Firenze.)*

1. Nella Memoria (*): *Sopra una classe di equazioni differenziali lineari riducibili,* ho esposto, assieme ad altre considerazioni generali, la dimostrazione di un teorema sulla riducibilità delle equazioni differenziali lineari a coefficienti doppiamente periodici. In cotesta dimostrazione sono caduto in una leggera inesattezza, che è bene rilevare, tanto più che per correggerla bisogna anche modificare l'enunciato del teorema, che, sebbene di secondaria importanza, è pur sempre di un certo interesse.

Trattandosi di cosa breve, trascriverò dapprima l'enunciato e la dimostrazione del teorema come figurano nella Memoria sopraccennata, indicando poi in che consista l'errore, ed esponendo da ultimo, dopo qualche considerazione ausiliaria; il nuovo enunciato e la nuova dimostrazione, che farò seguire da alcune osservazioni ed esempi.

2. Mi servirò delle medesime notazioni di allora:

$$F(x,\ y,\ n)=0,\quad G(x,\ y,\ m)=0,\quad \Phi(v,\ z,\ p)=0,$$

o $F=0$, $G=0$, $\Phi=0$ per rappresentare le equazioni differenziali lineari omogenee che hanno il coefficiente della più alta derivata eguale all'unità e gli altri eguali a funzioni meromorfe tali che quello della derivata i^{esima} abbia soltanto poli d'ordine inferiore o tutt'al più eguali ad i. Quest'equazioni godono della proprietà di avere tutti i loro integrali regolari nelle vicinanze di ogni punto singolare a distanza finita. Nelle prime notazioni le tre lettere fra parentesi stanno ad indicare rispettivamente la variabile indipendente, la funzione incognita e l'ordine dell'equazione.

(*) *Annali di Matematica pura ed applicata.* Serie II, tomo XIX.

Ciò premesso ecco l'enunciato e la dimostrazione del teorema:

Un'equazione $F(x, y, n) = 0$, a coefficienti ellittici e riducibile, ammette tutti gl'integrali di un'altra equazione $G(x, y, m) = 0$, pure a coefficienti ellittici e di ordine $m < n$.

La $F(x, y, n) = 0$, essendo riducibile, ammetterà tutti gl'integrali di un'altra equazione $G(x, y, m) = 0$, d'ordine $m < n$. Di queste equazioni ve ne potranno essere più d'una: noi peraltro sceglieremo una di quelle per le quali m abbia il massimo valore. Si tratta di dimostrare che l'equazione $G(x, y, m) = 0$, scelta in questo modo, è pure a coefficienti ellittici.

Supponiamo infatti che non lo sia; allora, indicando con 2ω e $2\omega'$ i periodi dei coefficienti di $F = 0$, osserviamo che quest'equazione sarà ancora soddisfatta dagl'integrali delle altre due:

$$G(x + 2\omega, y, m) = 0, \quad G(x + 2\omega', y, m) = 0.$$

Confrontiamo la $G(x, y, m) = 0$ con una di queste equazioni, ad es.: colla prima; può darsi che le due equazioni:

$$G(x, y, m) = 0, \quad G(x + 2\omega, y, m) = 0 \tag{1}$$

non abbiano alcun integrale a comune, come pure può accadere che siano ambedue riducibili ed abbiano p integrali a comune, essendo naturalmente $p < m$. In tal caso questi p integrali appartengono ad un'equazione $H(x, y, p) = 0$.

Consideriamo un punto qualunque x_0 che non sia un polo dei coefficienti di $F = 0$, e indichiamo con $u_1, u_2, \ldots u_n$ n integrali distinti di quest'equazione, definiti dai loro sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze di x_0. È chiaro che potremo supporli scelti in modo che:

$$u_1, u_2, \ldots u_{m-p}, u_{m-p+1}, \ldots u_m, \tag{2}$$

$$u_{m-p+1}, u_{m-p+2}, \ldots u_{2m-p}, \tag{3}$$

appartengono gli uni alla prima delle (1) e gli altri alla seconda. Allora $u_{m-p+1}, u_{m-p+2}, \ldots u_m$ saranno gl'integrali di $H = 0$. Se le (1) non avessero integrali a comune, e quindi la $H = 0$ non esistesse, basterebbe fare $p = 0$.

Si descriva con la x un cammino qualunque tale che, partendo da x_0, non passi per alcun polo dei coefficienti di $F = 0$, e ritorni in x_0. Durante questo giro chiuso, che potremo indicare con Γ, le funzioni u variano con continuità; ma, quando x ritorna in x_0, le u prendono valori differenti dagli iniziali, e che si possono ottenere effettuando su questi valori iniziali una sostituzione lineare a coefficienti costanti.

Ma col giro Γ si vengono ad eseguire altre due sostituzioni lineari, cioè una sugl'integrali (2) e l'altra sugl'integrali (3), e ciò perchè i coefficienti delle equazioni (1) sono monodromi. Da ciò risulta subito che, se consideriamo le funzioni:

$$u_1, u_2, \ldots u_{2m-p}, \tag{4}$$

su di esse pure si viene ad eseguire una sostituzione lineare a coefficienti costanti, quando colla x si fa il giro Γ. Se quindi si costruisce un'equazione che nelle vicinanze di x_0 abbia le funzioni (4) per integrali, si vede subito che essa è a coefficienti monodromi e di quelle che si possono indicare con una notazione della forma $K(x, y, 2m-p)=0$.

Ma quest'equazione non può sussistere, perchè tutti i suoi integrali, che sono in numero di $2m-p>m$ appartengono anche alla $F=0$. Per conseguenza i coefficienti di $G(x, y, m)=0$ devono avere il periodo 2ω. Similmente si prova che ammettono il periodo $2\omega'$; quindi la $G(x, y, m)=0$ è un'equazione a coefficienti ellittici c. d. d.

Questa dimostrazione per altro non regge più, quando le funzioni (4) costituiscono un sistema d'integrali particolari della $F=0$, cioè quando è $2m-p=n$, nel qual caso la $K=0$ viene a coincidere coll'equazione data $F=0$, e quindi sussiste effettivamente.

3. Avanti di esporre il nuovo teorema modificato, sarà utile, per abbreviarne e semplificarne la dimostrazione, di premettere tre lemmi relativi alle equazioni differenziali lineari. Faremo precedere da alcune osservazioni il primo di essi, che si riferisce alle equazioni a coefficienti semplicemente periodici.

Essendo data un'equazione $G(x, y, m)=0$ ed un punto x_0 del piano della variabile, scelto ad arbitrio, colla condizione peraltro che non sia un polo dei coefficienti di $G=0$, si può sempre determinare uno ed un solo sistema $y_1, y_2, \ldots y_m$ d'integrali particolari distinti di questa equazione, quando siano dati i valori che essi devono prendere nel punto x_0. *Chiameremo x_0 origine del sistema d'integrali $y_1, y_2, \ldots y_m$, e chiameremo valori iniziali di questi integrali i valori che prendono in x_0.*

Uno dei modi per costruire gl'integrali $y_1, y_2, \ldots y_m$ è quello di determinarne gli sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze di x_0. Si ottengono così m funzioni definite entro un circolo di centro x_0, che possono proseguirsi in tutto il piano, quando ne siano esclusi i poli dei coefficienti di $G=0$. Esse variano con continuità, quando x si muove, evitando tali punti, e, al ritorno della variabile in x_0, dopo un cammino qualunque chiuso Γ, prendono in questo punto e nelle sue vicinanze dei valori che possono ottenersi eseguendo sui valori iniziali delle y, nei punti corrispondenti, una sostituzione lineare S a coefficienti costanti e a determinante diverso da zero. Le nuove funzioni così ottenute, che sono e si mantengono legate alle antiche dalla sostituzione S, possono nel medesimo modo di esse proseguirsi in tutto il piano, e costituiscono un altro sistema di m integrali particolari distinti di $G = 0$, coll'origine in x_0 e di cui i valori iniziali si esprimono coi valori iniziali antichi mediante la sostituzione S.

Si può dimostrare facilmente che tutte le sostituzioni S che subiscono gl'integrali $y_1, y_2, \ldots y_m$ con tutti i possibili giri Γ costituiscono un gruppo.

Considerando un altro sistema $z_1, z_2, \ldots z_m$ d'integrali particolari distinti di $G = 0$, coll'origine in x_0 e con valori iniziali differenti da quelli degl'integrali y, e denotando con T la sostituzione lineare per mezzo della quale gl'integrali z si esprimono con quelli y, è facile vedere che col giro Γ le funzioni z subiscono la sostituzione $T S T^{-1}$, da cui risulta che il gruppo di sostituzioni relativo agl'integrali z è il trasformato mediante T di quello relativo agl'integrali y.

Considerando poi un altro punto x_1 diverso da x_0, che non sia un polo dei coefficienti di $G = 0$, ed una linea Δ che vada da x_0 a x_1 passando per punti tutti della stessa natura di x_0 ed x_1, si può prendere x_1 e i valori che in esso assumono gl'integrali y, quando la variabile partendo da x_0 vi giunge per Δ, come origine e come valori iniziali degl'integrali y. In tal caso si vede facilmente che il gruppo di sostituzioni che ne risulta coincide con quello relativo al punto x_0, e ciò anche modificando la scelta della linea Δ Sicchè ogni giro chiuso della variabile che non passi per alcun polo dei coefficienti di $G = 0$, e che principii da un punto qualunque del piano, fa subire agli integrali y una sostituzione che appartiene al gruppo del punto x_0 o a quello del punto x_1. Perciò *chiameremo gruppo di sostituzione dell'equazione* $G = 0$ *relativo al sistema d'integrali* y *quel gruppo di sostituzioni che subiscono questi integrali con tutti i possibili giri chiusi della variabile che non passano per alcun polo dei coefficienti di* $G = 0$.

Diremo che più equazioni, in numero finito e dello stesso ordine, posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni, quando si può determinare per ognuna di esse un sistema d'integrali particolari distinti in modo che gl'integrali di questi diversi sistemi subiscano la medesima sostituzione lineare per ogni giro chiuso della variabile che non passi per alcun polo dei loro coefficienti.

Per mezzo della proprietà, che il cambiamento del sistema d'integrali trasforma il gruppo mediante una sostituzione, si dimostra facilmente *che tre equazioni posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni, quando ciò accade per due coppie qualunque di esse.*

Diremo finalmente che tutte le equazioni di una successione infinita posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni, quando ciò accade per un numero finito qualunque di esse, scelte ad arbitrio.

4. Ciò premesso ecco l'enunciato del 1.° lemma:

Un'equazione riducibile $F(x, y, n) = 0$, a coefficienti semplicemente periodici, a cui appartengono tutti gl'integrali di un'equazione irriduttibile $\Phi_0(x, y, p) = 0$, a coefficienti non periodici, ammette tutti gl'integrali d'infinite altre equazioni che posseggono il medesimo gruppo di sostituzioni di $\Phi_0 = 0$.

Essendo 2ω il periodo dei coefficienti di $F = 0$, si faccia nell'equazione $\Phi_0 = 0$ un cambiamento di variabile, ponendo:

$$x = x' + 2s\omega,$$

essendo s un numero intero qualunque, e si seguiti a rappresentare con x, invece che con x', la variabile indipendente della nuova equazione che così si ottiene, che indicheremo con $\Phi_s(x, y, p) = 0$, e che è distinto dalla $\Phi_0 = 0$, poichè i coefficienti di quest'ultima equazione non sono periodici. Dando successivamente ad s tutti i valori interi positivi e negativi diversi da zero, si ottiene, considerando anche la $\Phi_0 = 0$, la serie di equazioni di ordine p:

$$\ldots\Phi_{-s} = 0, \ldots\ \Phi_{-1} = 0,\ \Phi_0 = 0,\ \Phi_1 = 0, \ldots\ \Phi_s = 0, \ldots \tag{5}$$

che sono tutte distinte, irriduttibili e godono della proprietà che i loro integrali sono anche integrali di $F = 0$.

Essendo ε_1 un numero intero e positivo, eguale o immediatamente inferiore al rapporto $\frac{n}{p}$, consideriamo le $\varepsilon_1 + 1$ equazioni:

$$\Phi_0 = 0,\ \Phi_1 = 0, \ldots\ \Phi_{\varepsilon_1} = 0, \tag{6}$$

ed un punto x_0 sul piano della variabile tale che i punti:

$$x_0 - 2\varepsilon_1\omega, \ldots\ x_0 - 2\omega,\ x_0,\ x_0 + 2\omega, \ldots\ x_0 + 2\varepsilon_1\omega,$$

non siano poli dei loro coefficienti, e determiniamo per ciascuna delle (6) un sistema di p integrali particolari distinti mediante sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze di x_0.

Può darsi che tutti gl'integrali così definiti delle prime $\varepsilon_2 + 1$ equazioni (6), essendo ε_2 un numero intero compreso fra zero ed ε_1, non siano legate fra loro da alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti, il che accade sempre per $\varepsilon_2 \leqq 1$; come pure può darsi, e ciò si verifica sempre per $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, che essi siano legati fra loro da alcune di tali relazioni. Esisterà quindi un valore intero ε tale che per $\varepsilon_2 \geqq \varepsilon$ si verifichi questo secondo caso e per $\varepsilon_2 < \varepsilon$ si verifichi invece il primo.

In ognuna delle relazioni lineari omogenee che sussistono fra gl'integrali delle prime $\varepsilon + 1$ equazioni (6), e nelle quali si devono sempre trovare integrali di $\Phi_\varepsilon = 0$, devono pure figurare integrali di $\Phi_0 = 0$. Supponendo infatti che gl'integrali di $\Phi_h = 0$, essendo $h > 0$, siano i primi che figurano in una di tali relazioni, consideriamo una linea Δ che vada da x_0 a $x_0 - 2\,h\,\omega$ senza passare per alcun polo dei coefficienti delle (6), e prendiamo il punto $x_0 - 2\,h\,\omega$ come nuova origine degl'integrali delle equazioni $\Phi_h = 0, \ldots \Phi_\varepsilon = 0$ e come valori iniziali di questi integrali i valori che prendono in $x_0 - 2\,h\,\omega$, quando la variabile vi giunge passando per Δ, gl'integrali già stabiliti per queste equazioni. Per ricondurre l'origine nel punto x_0 si faccia un cambiamento di variabile, penendo $x = x' - 2\,h\,\omega$, e si seguiti a rappresentare con x, invece che con x', la nuova variabile indipendente. In questo modo le equazioni precedenti si trasformano nelle altre $\Phi_0 = 0, \ldots \Phi_{\varepsilon-h} = 0$, e i loro integrali divengono integrali di quest'ultime equazioni, e possono quindi rappresentarsi con gl'integrali già stabiliti per esse mediante espressioni lineari omogenee a coefficienti costanti. Perciò la relazione che si considera viene a trasformarsi in un'altra fra integrali di equazioni (6), comprese fra la $\Phi_0 = 0$ e la $\Phi_{\varepsilon-h} = 0$, e nella quale figurano sempre alcuni integrali di ognuna di queste due equazioni, il che è impossibile, essendo ε il più piccolo indice che possa dare origine ad una simile relazione.

Dalle prime $\varepsilon + 1$ delle (6) escludiamo alcune equazioni, diverse dalla prima e dall'ultima, in modo da formare un sistema di $q + 1$ equazioni tali che fra gl'integrali di q qualunque di esse non esiste alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti e che esistano invece di tali relazioni fra gl'integrali di tutte le $q + 1$ equazioni.

Esaminando in modo speciale una di queste relazioni, osserviamo che in essa deve sempre figurare almeno un integrale di ciascuna delle $q + 1$ equazioni, che considereremo sempre secondo l'ordine crescente dei loro indici. Se $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_p$ sono i p integrali particolari distinti di $\Phi_0 = 0$, e se quest'integrali si trovano nella relazione, formando in essa l'espressione

$\delta_1 \tau_1 + \delta_2 \tau_2 + \cdots + \delta_p \tau_p$, nella quale le δ sono costanti, potremo sostituire nella relazione a questa espressione delle τ un unico integrale u_1 di $\Phi_0 = 0$, legato alle τ dalla relazione:

$$A u_1 = \delta_1 \tau_1 + \delta_2 \tau_2 + \cdots + \delta_p \tau_p ,$$

nella quale A è una costante che si può scegliere ad arbitrio, purchè si escluda il valore $A = 0$. Operando sullo stesso modo sugl'integrali delle altre q equazioni potremo sempre mettere la relazione che si considera sotto la forma:

$$A u_1 + B v_1 + C w_1 + \cdots = 0, \tag{7}$$

nella quale le A, B, C,... sono costanti sempre diverse da zero, ma che del resto possono scegliersi ad arbitrio, ed ogni funzione u_1, v_1, w_1,... è un integrale di quella delle $q+1$ equazioni che occupa il medesimo posto.

Esclusa l'equazione $Q_0 = 0$, tutti gl'integrali delle altre q, che sono linearmente indipendenti, costituiscono, come si può dimostrare facilmente, un sistema di $q\,p$ integrali particolari distinti di un'equazione $F_1 = 0$ di ordine $q\,p$. Ma anche u_1 a causa della (7) verifica la $F_1 = 0$. Perciò tutti gli altri integrali di $\Phi_0 = 0$ devono pure verificarla, essendo la $\Phi_0 = 0$ irriduttibile. Epperò, se u_2 è un altro integrale di quest'equazione, distinto da u_1, esso, dovendo verificare la $F_1 = 0$, sarà un'espressione lineare omogenea a coefficienti costanti degl'integrali di $F_1 = 0$, ossia degl'integrali delle altre q equazioni $\Phi = 0$, ed in questa espressione dovrà figurare almeno un integrale di ogni equazione. Potremo qui pure raggruppare in un solo tutti gl'integrali di una stessa equazione e scegliere questi nuovi integrali in modo che la relazione che ci dà u_2 possa anch'essa convertirsi in una relazione della forma:

$$A u_2 + B v_2 + C w_2 + \cdots = 0,$$

nella quale ogni funzione u_2, v_2, w_2,... è un integrale di un'equazione, di quella medesima a cui appartiene come integrale la funzione corrispondente della (7). Scegliendo quindi per l'equazione $\Phi_0 = 0\,p$ integrali particolari distinti, fra i quali si trovino anche u_1 e u_2, e che indicheremo con u_1, u_2,... u_p, si potranno formare per queste funzioni u le relazioni:

$$\left.\begin{array}{l} A u_1 + B v_1 + C w_1 + \cdots = 0 \\ A u_2 + B v_2 + C w_2 + \cdots = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A u_p + B v_p + C w_p + \cdots = 0 , \end{array}\right\} \tag{8}$$

nelle quali le funzioni di una medesima colonna, che posseggono il medesimo fattore costante e sono rappresentate dalla medesima lettera con indici differenti, sono p integrali particolari di una stessa equazione e sono distinti. Difatti, se esistessero p costanti l_1, l_2,... l_p per le quali fosse:

$$e_1 v_1 + e_2 v_2 + \cdots + e_p v_p = 0,$$

si avrebbe pure:

$$A \Sigma_i e_i u_i + C \Sigma_i e_i w_i + \cdots = 0,$$

e quindi esisterebbe una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti fra gl'integrali di q delle $q+1$ equazioni, il che è impossibile.

Abbiamo così per ciascuna delle $q+1$ equazioni scelto un sistema speciale di p integrali particolari distinti, ed al tempo stesso siamo giunti alla conclusione che tutti questi integrali sono legati fra loro dalle p relazioni indipendenti (8). È facile anche vedere che all'infuori delle (8) non può sussistere alcun'altra relazione lineare omogenea a coefficienti costanti fra gl'integrali delle $q+1$ equazioni che non sia una conseguenza di esse. Difatti, se una tal relazione esistesse, si potrebbe fra essa e le (8) eliminare i p integrali u_1, u_2,... u_p, e si otterrebbe così una relazione fra gl'integrali di q soltanto delle $q+1$ equazioni, il che è impossibile.

Si faccia percorrere alla variabile a partire dal punto x_0 un cammino chiuso qualunque Γ che non passi per alcun polo dei coefficienti delle $q+1$ equazioni. Gl'integrali di ciascuna di esse, dopo questo giro chiuso, si trasformano in altri integrali, che possono ottenersi eseguendo sui primitivi una sostituzione lineare. Siano:

$$[u_1],.. [u_p]; \quad [v_1],\ldots [v_p]; \quad [w_1],\ldots [w_p];\ldots$$

le nuove funzioni in cui si mutano le antiche:

$$u_1,\ldots u_p; \quad v_1,\ldots v_p; \quad w_1,\ldots w_p;\ldots$$

col giro Γ e:

$$\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ldots \alpha_{pp}; \quad \beta_{11},\ \beta_{12},\ldots \beta_{pp}; \quad \gamma_{11},\ \gamma_{12},\ldots \gamma_{pp},\ldots$$

le costanti delle sostituzioni che ci danno i valori delle prime espressi con quelli delle seconde. Avremo allora:

$$[u_1] = \alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2 + \cdots + \alpha_{1p} u_p$$
$$[u_2] = \alpha_{21} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \cdots + \alpha_{2p} u_p$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$
\begin{aligned}
[v_1] &= \beta_{11} v_1 + \beta_{12} v_2 + \cdots + \beta_{1p} v_p \\
[v_2] &= \beta_{21} v_1 + \beta_{22} v_3 + \cdots + \beta_{2p} v_p \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[w_1] &= \gamma_{11} w_1 + \gamma_{12} w_2 + \cdots + \gamma_{1p} w_p \\
[w_2] &= \gamma_{21} w_1 + \gamma_{22} w_2 + \cdots + \gamma_{2p} w_p \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

da cui si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&A\,\alpha_{11} u_1 + B\,\beta_{11} v_1 + C\,\gamma_{11} w_1 + \cdots + A\,\alpha_{12} u_2 + B\,\beta_{12} v_2 + C\,\gamma_{12} w_2 + \cdots = 0 \\
&A\,\alpha_{21} u_1 + B\,\beta_{21} v_1 + C\,\gamma_{21} w_1 + \cdots + A\,\alpha_{22} u_2 + B\,\beta_{22} v_2 + C\,\gamma_{22} w_2 + \cdots = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Sostituendo a $u_1, \ldots u_p$ i loro valori ricavati dalle (8), si ha:

$$
\begin{aligned}
&B\,(\beta_{11} - \alpha_{11})\,v_1 + C\,(\gamma_{11} - \alpha_{11})\,w_1 + \cdots + \\
&\qquad + B\,(\beta_{12} - \alpha_{12})\,v_2 + C\,(\gamma_{12} - \alpha_{12})\,w_2 + \cdots = 0 \\
&B\,(\beta_{21} - \alpha_{21})\,v_1 + C\,(\gamma_{21} - \alpha_{21})\,w_1 + \cdots + \\
&\qquad + B\,(\beta_{22} - \alpha_{22})\,v_2 + C\,(\gamma_{22} - \alpha_{22})\,w_2 + \cdots = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Quest'ultime relazioni non possono sussistere altro che nel caso che tutti i coefficienti degl'integrali v_1, $w_1, \ldots$ siano identicamente nulli, perchè esse sono relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti fra gl'integrali di q delle $q+1$ equazioni. Perciò le costanti $\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots \gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots$ devono eguagliare rispettivamente le α cogli stessi indici. Quindi la sostituzione, che col giro qualunque chiuso Γ subiscono gl'integrali di ognuna delle $q+1$ equazioni, è la stessa per tutte. Epperò tutte queste equazioni posseggono il medesimo gruppo di sostituzioni.

Siano $\Phi_i = 0$, $\Phi_{i+l_1} = 0$ due delle $q+1$ equazioni, consecutive e scelte in modo che la differenza positiva l_1 dei loro indici abbia il minimo valore. Essendo r un numero intero qualunque, si faccia un cambiamento di variabile, ponendo $x = x' + 2\,r\,\omega$, e si chiami nuovamente con x la variabile indipendente. Si ottengono così le due equazioni $Q_{i+r} = 0$, $Q_{i+r+l_1} = 0$, le quali posseggono evidentemente lo stesso gruppo di sostituzioni come le precedenti. Se diamo ad r tutti i valori interi positivi e negativi, si vede che due equazioni della serie (5), che hanno l_1 per differenza dei loro indici, posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni.

Considerando poi la serie di equazioni:

$$\Phi_{a-sl_1}=0,\dots\ \Phi_{a-l_1}=0,\quad \Phi_a=0,\quad \Phi_{a+l_1}=0,\dots\ \Phi_{a+sl_1}=0\dots \tag{9}$$

nelle quali a è un numero intero qualunque, e confrontando ciascuna di esse con quelle che la segue, si può concludere che posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni due equazioni (5) che hanno un multiplo qualunque di l_1 per differenza dei loro indici.

Nel caso speciale di $a=0$ le (9) divengono equazioni della serie (5) che hanno per indici tutti i multipli di l_1, e che posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni di $\Phi_0=0$. Questo risultato è sufficiente per la dimostrazione del lemma; noi per altro lo completeremo con alcune osservazioni.

5. Se le $q+1$ equazioni, fra le quali è anche la $\Phi_0=0$, non hanno tutte la forma $\Phi_{hl_1}=0$, ove h è un numero intero e positivo, essendo nullo solo per $\Phi_0=0$, se ne troverà sempre una di esse $\Phi_m=0$ di cui l'indice sarà compreso fra due multipli consecutivi di l_1, ad es.: $b\,l_1$, $(b+1)\,l_1$. Allora le tre equazioni:

$$\Phi_{bl_1}=0,\quad \Phi_m=0,\quad \Phi_{(b+1)\,l_1}=0,$$

posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni, e le differenze d'indici $m-b\,l_1$, $(b+1)\,l_1-m$ sono tutte due minori di l_1. Indicando con l_2 la più piccola di esse, si trova che posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni due equazioni (5) che hanno un multiplo qualunque di l_2 per differenza dei loro indici.

Ragionando sul numero l_2 come sul numero l_1, e seguitando in questo modo si giungerà ad un numero intero e positivo l_k, che potrà anche essere l'unità, tale che gl'indici delle $q+1$ equazioni risultino multipli positivi di l_k, eccetto quello della prima che è lo zero. Inoltre anche per l_k come per l_1 e l_2, sussiste la proprietà che due equazioni (5), che hanno per differenza dei loro indici un multiplo di l_k, posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni.

Nel caso che sia $l_k>1$ può anche darsi che posseggano lo stesso gruppo di sostituzioni due equazioni (5), che hanno per differenza dei loro indici un numero minore di l_k, e per conseguenza anche due qualunque della (5), che hanno per differenza dei loro indici un multiplo di questo numero minore di l_k. Se l è il più piccolo numero intero e positivo che gode di questa proprietà, si può vedere facilmente che l_k è un multiplo di l, e che quindi gli indici delle $q+1$ equazioni, esclusa la $\Phi_0=0$, sono multipli di l.

6. Passiamo a dimostrare il 2.° lemma che si può enunciare così:

Se un'equazione irriduttibile $G(x,\,y,\,m)=0$ ammette due sistemi di m integrali particolari distinti, che subiscono la medesima sostituzione lineare *per ogni giro chiuso della variabile che non passi per alcun polo dei coefficienti dell'equazione, gl'integrali del 1.° sistema differiscono per un medesimo fattore costante da quelli corrispondenti del secondo.*

Siano $y_{11}, y_{12}, \ldots y_{1m}$; $y_{21}, y_{22}, \ldots y_{2m}$ due sistemi d'integrali particolari distinti di $G=0$, che subiscono la medesima sostituzione lineare S per ogni giro chiuso Γ della variabile che non passi per alcun polo dei coefficienti di $G=0$, e sia:

$$T = \left\{ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{array} \right\},$$

la sostituzione lineare che ci dà i valori degl'integrali del 1.° sistema espressi per mezzo di quelli del 2.° Quando questi ultimi subiscono col giro Γ la sostituzione S quelli del 1.° sistema subiscono la sostituzione $T S T^{-1}$, che, dovendo essere eguale ad S, ci conduce all'eguaglianza $S = T S T^{-1}$, o anche all'altra $T = S T S^{-1}$, dalla quale risulta, come del resto è già noto che il giro Γ trasforma i due sistemi d'integrali in altri due sistemi tali che gl'integrali del 1.° sistema si esprimono sempre con quelli del 2.° mediante la sostituzione T.

Considerando altri due sistemi d'integrali particolari distinti di $G=0$ $z_{11}, z_{12}, \ldots z_{1m}$; $z_{21}, z_{22}, \ldots z_{2m}$, i quali siano espressi rispettivamente con quelli y dei due sistemi precedenti mediante la sostituzione R. Evidentemente gl'integrali di questi due nuovi sistemi col giro Γ della variabile subiscono anch'essi una medesima sostituzione, la quale è data da $S_1 = R S R^{-1}$ e gli integrali z del 1.° sistema possono esprimersi con quelli del 2.° mediante la sostituzione $T_1 = R T R^{-1}$. Cosicchè, essendo:

$$S_1 T_1 = R S T R^{-1}, \quad T_1 S_1 = R T S R^{-1},$$

avremo pure: $T_1 = S_1 T_1 S_1^{-1}$.

Potremo disporre delle costanti di R in modo che la sostituzione T_1 abbia la forma canonica, cioè tale che gl'integrali $z_{11}, z_{12}, \ldots z_{1m}$ del 1.° sistema e quindi anche quelli corrispondenti $z_{21}, z_{22}, \ldots z_{2m}$ del 2.° possano distribuirsi in gruppi, in modo che per uno qualunque di questi gruppi, ad es.: per il primo si abbia:

$$\begin{aligned}
z_{11} &= \mu\, z_{21} \\
z_{12} &= \alpha_{21}\, z_{21} + \mu\, z_{22} \\
z_{13} &= \alpha_{31}\, z_{21} + \alpha_{32}\, z_{22} + \mu\, z_{23} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_{1k} &= \alpha_{k1}\, z_{21} + \alpha_{k2}\, z_{22} + \alpha_{k3}\, z_{23} + \cdots + \alpha_{kk-1}\, z_{2k-1} + \mu\, z_{2k}\,,
\end{aligned}$$

essendo μ una radice multipla secondo k dell'equazione caratteristica:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varepsilon & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-\varepsilon & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm}-\varepsilon \end{vmatrix} = 0.$$

Può darsi che alcune delle costanti α siano nulle in modo che oltre all'integrale z_{11} ve ne siano altri del 1.° sistema d'integrali z che eguaglino i corrispondenti del 2.° sistema moltiplicati per il medesimo fattore μ. Supponendo che in tutti siano in numero di h, indichiamoli con t_{11}, $t_{12}, \ldots\, t_{1h}$ e indichiamo con t_{21}, $t_{22}, \ldots\, t_{2h}$ quelli corrispondenti del 2.° sistema.

Dalla relazione $T_1 = S_1\, T_1\, S_1^{-1}$ risulta che i valori che prendono gl'integrali t_{11}, $t_{12}, \ldots\, t_{1h}$ dopo un giro Γ devono sempre eguagliare il fattore μ moltiplicato pei valori che prendono gl'integrali t_{21}, $t_{22}, \ldots\, t_{2h}$ dopo lo stesso giro Γ. Ma, quando sugl'integrali z del 2.° sistema si effettua la sostituzione T_1 per avere i valori di z_{11}, $z_{12}, \ldots\, z_{1m}$ espressi per mezzo di quelli di z_{21}, $z_{22}, \ldots\, z_{2m}$, tutte le espressioni lineari omogenee a coefficienti costanti di quest'ultime funzioni: che mediante T_1 si riproducono moltiplicate per il fattore costante μ, devono contenere soltanto gl'integrali t_{21}, $t_{22}, \ldots\, t_{2h}$. Quindi con un giro qualunque Γ quest'integrali devono trasformarsi in espressioni lineari omogenee a coefficienti costanti di essi stessi, ossia devono subire una sostituzione lineare a coefficienti costanti e a determinante diverso da zero. Quest'ultima condizione è necessaria, perchè altrimenti fra gl'integrali t_{21}, $t_{22}, \ldots\, t_{2h}$ sussisterebbero delle relazioni omogenee a coefficienti costanti, il che è impossibile. Ma, se gl'integrali t_{21}, $t_{22}, \ldots\, t_{2h}$ godono di questa proprietà, esiste un'equazione $G_1(x, y, h) = 0$, d'ordine h a m, di cui essi costituiscono un sistema d'integrali particolari distinti, il che è pure impossibile, perchè l'equazione $G(x, y, m) = 0$ è irriduttibile. Da tutto ciò si conclude che tutti gl'integrali z_{21}, z_{22},... z_{2m} devono, mediante la sostituzione T_1, riprodursi moltiplicati per il fattore costante μ, e lo stesso deve accadere per gl'integrali y_{21}, y_{22},.... y_{2m}, quando su di essi si effettua la sostituzione T, che quindi coincide con T_1 ed è della forma:

$$T = \begin{vmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mu \end{vmatrix} .$$

Di qui risulta che gl'integrali del primo sistema differiscono per un medesimo fattore costante μ da quelli corrispondenti del 2.° sistema. c. d. d.

7. Valendoci di questi due lemmi, possiamo dimostrare il terzo, che è relativo alla riducibilità delle equazioni differenziali lineari a coefficienti semplicemente periodici, e che si può enunciare nel modo seguente:

Un'equazione differenziale lineare riducibile $F(x, y, n) = 0$, a coefficienti semplicemente periodici, ammette tutti gl'integrali di un'equazione irriduttibile $\Phi(x, y, p) = 0$, pure a coefficienti semplicemente periodici ed aventi lo stesso periodo 2ω di $F = 0$ o un multiplo conveniente di questo periodo.

Indichiamo con $\Phi_0(x, y, p) = 0$ un'equazione d'ordine $p < n$ e tale che tutti i suoi integrali appartengano anche ad $F = 0$, e supponiamola scelta in modo che p abbia il minimo valore. Ne viene di conseguenza che una simile equazione è necessariamente irriduttibile. Escludendo l'ipotesi che la $\Phi_0 = 0$ sia a coefficienti periodici con un multiplo di 2ω per periodo, nel qual caso non occorrerebbe più proseguire la dimostrazione, si deduca dalla $\Phi_0 = 0$ la serie di equazioni analoghe alle (5):

$$\dots \Phi_{-s} = 0, \quad \Phi_{-1} = 0, \quad \Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = 0, \dots \quad \Phi_s = 0, \dots, \tag{10}$$

sulle quali potremo ragionare ed operare come nel 1.° dei due lemmi precedenti.

Troveremo così il numero ε_1 che ci permetterà di scegliere il punto x_0 e di determinare i numeri ε, q, l_k, l e le $q + 1$ equazioni, che potremo rappresentare con:

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_{al} = 0, \quad \Phi_{bl} = 0, \dots \quad \Phi_{hl} = 0, \tag{11}$$

ove a, b, c,... h sono numeri interi soggetti alle disuguaglianze:

$$0 < a < b < \cdots < h.$$

Dovendo la $\Phi_\varepsilon = 0$ essere la $\Phi_{hl} = 0$, avremo pure: $h\,l = \varepsilon$.

Considerando le prime due delle $h+1$ equazioni:

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_l = 0, \quad \Phi_{2l} = 0, \ldots \quad \Phi_{hl} = 0, \tag{12}$$

che posseggono tutto il medesimo gruppo di sostituzioni, denotiamo con u_{01}, $u_{02}, \ldots u_{0p}$ e con $u_{11}, u_{12}, \ldots u_{1p}$ due sistemi d'integrali particolari distinti, l'uno di $\Phi_0 = 0$ e l'altro di $\Phi_l = 0$, definiti da sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze di x_0, e tali che subiscano la medesima sostituzione lineare per ogni giro chiuso della variabile, che, partendo da x_0, vi ritorni senza passare per alcun polo dei coefficienti di $\Phi_0 = 0$ e di $\Phi_l = 0$.

Considerando una linea Δ che vada da x_0 a $x_0 + 2\,l\,\omega$ senza passare per alcun polo dei coefficienti delle (12), prendiamo il punto $x_0 + 2\,l\,\omega$ come nuova origine degl'integrali dell'equazione $\Phi_0 = 0$ e come valori iniziali di questi integrali i valori che prendono in $x_0 + 2\,l\,\omega$, quando la variabile vi giunge passando per Δ, gl'integrali $u_{01}, \ldots u_{0p}$. Per ricondurre l'origine nel punto x_0 si faccia un cambiamento di variabile, ponendo $x = x' + 2\,l\,\omega$, e si seguiti a rappresentare con x, invece che con x', la nuova variabile indipendente. In questo modo l'equazione $\Phi = 0$ si trasforma nell'altra $\Phi_l = 0$, e i suoi integrali, che dopo il cambiamento indicheremo con $(u_{01}), \ldots (u_{0p})$, divengono p integrali particolari distinti di $\Phi_l = 0$, che nel punto x_0 prendono rispettivamente i valori che prendono in $x_0 + 2\,l\,\omega$ gl'integrali $u_{01}, \ldots$ u_{0p}, quando la variabile giunge in questo punto passando per Δ. Perciò le funzioni $(u_{01}), \ldots (u_{0p})$ potranno esprimersi con gl'integrali $u_{11}, \ldots u_{1p}$, già stabiliti per $\Phi_l = 0$, mediante una sostituzione lineare T.

Considerazioni analoghe a queste possono farsi sull'equazione $\Phi_l = 0$ e sui suoi integrali $u_{11}, \ldots u_{1p}$. Dopo il cambiamento di variabile la $\Phi_l = 0$ si trasforma nella $\Phi_{2l} = 0$, e i suoi integrali, che indicheremo con $(u_{11}), \ldots$ (u_{1p}), divengono p integrali particolari distinti di $\Phi_{2l} = 0$, che nel punto x_0 prendono rispettivamente i valori che prendono in $x_0 + 2\,l\,\omega$ gl'integrali $u_{11}, \ldots u_{1p}$, quando la variabile giunge in questo punto passando per Δ. Potremo quindi determinare un sistema $u_{21}, \ldots u_{2p}$ di p integrali particolari distinti di $\Phi_{2l} = 0$, definiti da sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze di x_0, in modo che le funzioni $(u_{11}), \ldots (u_{1p})$ possano esprimersi con essi mediante la sostituzione T.

Evidentemente le funzioni $u_{01}, \ldots u_{0p}$ subiscono la medesima sostituzione lineare delle altre $u_{11}, \ldots u_{1p}$ per ogni giro chiuso della variabile che, partendo da $x_0 + 2\,l\,\omega$, vi ritorni senza passare per alcun polo dei coefficienti di $\Phi_0 = 0$ e di $\Phi_l = 0$. Col cambiamento di variabile che abbiamo indicato le due equazioni $\Phi_0 = 0$ e $\Phi_l = 0$ si trasformano nelle altre due $\Phi_l = 0$, $\Phi_{2l} = 0$, e gl'integrali dei due sistemi $u_{01}, \ldots u_{0p}$; $u_{11}, \ldots u_{1p}$ si trasformano in quelli degli altri due $(u_{01}), \ldots (u_{0p})$; $(u_{11}), \ldots (u_{1p})$. Epperò questi ultimi integrali subiscono una medesima sostituzione lineare per ogni giro chiuso della variabile che, partendo da x_0, vi ritorna senza passare per alcun polo dei coefficienti delle due equazioni $\Phi_l = 0$, $\Phi_{2l} = 0$. Lo stesso deve quindi accadere per gli altri integrali $u_{11}, \ldots u_{1p}$; $u_{21}, \ldots u_{2p}$ di queste equazioni, che sono legati ai precedenti dalla sostituzione T. Perciò gl'integrali dei tre sistemi $u_{01}, \ldots u_{0p}$; $u_{11}, \ldots u_{1p}$; $u_{21}, \ldots u_{2p}$, che appartengono rispettivamente alle equazioni $\Phi_0 = 0$, $\Phi_l = 0$, $\Phi_{2l} = 0$, subiscono la medesima sostituzione lineare per ogni giro chiuso della variabile che, partendo da x_0, vi ritorna senza passare per alcun polo dei coefficienti di queste tre equazioni.

Anche per l'equazione $\Phi_{2l} = 0$ e pei suoi integrali $u_{21}, \ldots u_{2p}$ possiamo fare le stesse considerazioni fatte per le precedenti. Dopo il noto cambiamento di variabile si ottengono gl'integrali $(u_{21}), \ldots (u_{2p})$ di $\Phi_{3l} = 0$, che nel punto x_0 prendono gli stessi valori di $u_{21}, \ldots u_{2p}$ nel punto $x_0 + 2\,l\,\omega$, quando la variabile giunge in questo punto per Δ. Qui pure potremo determinare un sistema di p integrali particolari distinti $u_{31}, \ldots u_{3p}$ di $\Phi_{3l} = 0$, definiti da sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze di x_0, in modo che le funzioni $(u_{21}), \ldots (u_{2p})$ possano esprimersi con essi mediante la sostituzione T.

Potremo seguitare in questo modo fino all'equazione $\Phi_{hl} = 0$, ed otterremo così gli $h + 1$ sistemi d'integrali:

$$u_{01}, \ldots u_{0p}; \quad u_{11}, \ldots u_{1p}; \quad \ldots u_{h1}, \ldots u_{hp}, \tag{13}$$

che appartengono rispettivamente alle (12) e che godono delle due seguenti proprietà:

1.° Considerando $x_0 + 2\,l\,\omega$ come punto d'origine degl'integrali delle (12) e i valori che le funzioni (13) prendono in esso, quando la variabile vi giunge per Δ, come valori iniziali, e facendo il noto cambiamento di variabile, x in $x + 2\,l\,\omega$, che riconduce l'origine in x_0, gl'integrali di ogni sistema (13) divengono integrali dell'equazione relativa a quelli del sistema successivo avanti il cambiamento, e si esprimono con essi mediante la sostituzione lineare T.

2.° Gl'integrali di ognuno di questi sistemi (13) subiscono la medesima sostituzione lineare per ogni giro chiuso della variabile che, partendo da x_0, vi ritorna senza passare per alcun polo dei coefficienti delle (12).

Per costruire le p relazioni fra gl'integrali delle $q+1$ equazioni (11) possiamo scegliere ad arbitrio gli integrali di una di esse, della $\Phi_0=0$ ad es.: per la quale sceglieremo il sistema $u_{01},\ldots u_{0p}$. In tal caso, in virtù del 2.° lemma, gl'integrali della seconda equazione $\Phi_{al}=0$ devono differire rispettivamente da quelli del sistema $u_{a1},\ldots u_{ap}$ per un fattore costante, che potremo ridurre eguale all'unità, fissando in modo conveniente la costante diversa da zero, ma che si può scegliere ad arbitrio, che deve moltiplicare nelle relazioni quest'integrali. Denotando con A_0, A_a, $A_b,\ldots$ A_h le $q+1$ costanti così fissate, le p relazioni assumono la forma:

$$A_0 u_{01}+A_a u_{a1}+\cdots+A_h u_{h1}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_0 u_{0p}+A_a u_{ap}+\cdots+A_h u_{hp}=0.$$

Se per tutti i valori interi di i, compresi fra zero ed h, che sono diversi da 0, a, b, $c,\ldots$ h, poniamo $A_i=0$, possiamo mettere le relazioni precedenti sotto l'altra forma:

$$\sum_{0}^{h}{}_i A_i u_{i1}=0,\ldots \sum_{0}^{h}{}_i A_i u_{ip}=0, \tag{14}$$

nella quale apparentemente figurano gl'integrali di tutti i sistemi (12).

Denotando con λ_1, $\lambda_2,\ldots$ λ_{h-1} $h-1$ costanti arbitrarie, costruiamo le p funzioni:

$$y_1=u_{01}+\lambda_1 u_{11}+\lambda_2 u_{21}+\cdots+\lambda_{h-1} u_{h-1,1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_p=u_{0p}+\lambda_1 u_{1p}+\lambda_2 u_{2p}+\cdots+\lambda_{h-1} u_{h-1,p}.$$

Nessuna di esse può mai risultare identicamente nulla, perchè solo dopo introdotti gl'integrali di $\Phi_\varepsilon=0$, essendo $\varepsilon=h\,l$, si possono avere relazioni lineari omogenee fra gl'integrali di $\Phi_0=0$, $\Phi_1=0,\ldots$ Per questa medesima ragione non possono sussistere fra le y relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti. Inoltre le y variano con continuità, quando la variabile si muove sul piano, evitando certi punti, (i poli dei coefficienti delle (12), esclusa l'ultima), sempre in numero finito in ogni porzione finita del piano, e, con ogni giro chiuso dalla variabile che non passi per questi punti, subiscono una sostituzione lineare, la medesima degl'integrali di ognuno dei sistemi (13). Da tutte queste proprietà delle y risulta che esse sono p integrali particolari distinti di un'equazione $\Phi(x, y, p) = 0$, di cui tutti gl'integrali appartengono anche alla $F = 0$.

Riguardo a quest'equazione $\Phi = 0$ può accadere che per certi valori della λ i suoi coefficienti divengano infiniti in x_0 o in $x_0 + 2l\omega$ o in qualche punto di Δ. In ogni caso però i suoi integrali si mantengono sempre finiti e continui in questi poli, che si chiamano per questa ragione punti ad apparenza singolare. Perciò, tanto per la $\Phi = 0$ quanto per le altre equazioni, potremo considerare gl'integrali anche in questi punti speciali che sono poli dei coefficienti.

Considerando per gl'integrali y di $\Phi = 0$ $x_0 + 2l\omega$, invece di x_0, come origine e i valori che essi prendono in questi punti, quando la variabile vi giunge passando per Δ, come valori iniziali, e facendo il solito cambiamento di variabile, x in $x + 2l\omega$, che riconduce l'origine in x_0, la $\Phi = 0$ si trasforma in un'altra equazione $\Phi^{(1)}(x, y, p) = 0$, e i suoi integrali, che indicheremo con (y_1), (y_2),... (y_p), divengono integrali di quest'ultima equazione.

Per la $\Phi^{(1)} = 0$ possiamo considerare l'altro sistema di p integrali particolari distinti:

$$y_{11} = u_{11} + \lambda_1 u_{21} + \lambda_2 u_{31} + \cdots + \lambda_{h-1} u_{h1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{1p} = u_{1p} + \lambda_1 u_{2p} + \lambda_2 u_{3p} + \cdots + \lambda_{h-1} u_{hp},$$

i quali, per il modo col quale sono costruiti, ci danno gl'integrali (y_1),... (y_p), quando su di essi si eseguisce la sostituzione T. Ma, tenendo conto delle (14), quest'integrali $y_{11} \dots y_{1p}$ possono anche rappresentarsi colle espressioni:

$$y_{11} = -\frac{A_0}{A_h}\lambda_{h-1}u_{01} - \left(\frac{A_1}{A_h}\lambda_{h-1} - 1\right)u_{11} - \left(\frac{A_2}{A_h}\lambda_{h-1} - \lambda_1\right)u_{21} -$$

$$- \cdots - \left(\frac{A_{h-2}}{A_h}\lambda_{h-1} - \lambda_{h-3}\right)u_{h-2\cdot 1} - \left(\frac{A_{h-1}}{A_h}\lambda_{h-1} - \lambda_{h-2}\right)u_{h-1\cdot 1}$$

$$y_{21} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Vediamo ora se si possono determinare le costanti λ_1, λ_2,... λ_{h-1} in modo che gl'integrali y_1,... y_p eguaglino rispettivamente gli altri y_{11},... y_{1p}, moltiplicato per un medesimo fattore finito e costante θ. Basta per questo che si ponga:

$$\left.\begin{aligned}
&1+\theta\frac{A_0}{A_h}\lambda_{h-1}=0\\
&\lambda_1+\theta\frac{A_1}{A_h}\lambda_{h-1}-\theta=0\\
&\lambda_2+\theta\frac{A_2}{A_h}\lambda_{h-1}-\theta\lambda_1=0\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\lambda_{h-2}+\theta\frac{A_{h-2}}{A_h}\lambda_{h-1}-\theta\lambda_{h-3}=0\\
&\lambda_{h-1}+\theta\frac{A_{h-1}}{A_h}\lambda_{h-1}-\theta\lambda_{h-2}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Moltiplicando rispettivamente i due membri di queste h relazioni per le potenze θ^{h-1}, θ^{h-2},... θ^2, θ, 1 e sommando, si ottiene:

$$\lambda_{h-1}+\frac{\lambda_{h-1}}{A_h}\left[A_0\,\theta^h+A_1\,\theta^{h-1}+\cdots+A_{h-2}\,\theta^2+A_{h-1}\,\theta\right]=0.$$

Il valore zero per la costante λ_{h-1} deve escludersi, perchè la prima delle (15) ci darebbe in tal caso un valore infinito per θ. Possiamo perciò dividere l'ultima relazione trovata per λ_{h-1} e moltiplicarla per la costante A_h, che è pure diversa da zero. Si ottiene così l'equazione algebrica in θ:

$$A_0\,\theta^h+A_1\,\theta^{h-1}+\cdots+A_{h-1}\,\theta+A_h=0, \tag{16}$$

la quale, essendo sempre $A_0 \neq 0$, è di grado h, e non ha radici nulle.

Perciò si può sempre determinare per θ un valore finito e differente da zero che verifica la (16) e che, sostituito nelle (15), ci dà per λ_1, λ_2,... λ_{h-1} un sistema di valori completamente determinato. Questi valori delle λ ci danno quindi le relazioni: $y_1=\theta\,y_{11}$, $y_2=\theta\,y_{12}$,... $y_p=\theta\,y_{1p}$, dalle quali risulta che anche le funzioni y_{11},... y_{1p} sono p integrali particolari distinti di $\Phi=0$, ossia che l'equazione $\Phi^{(1)}=0$ coincide con la $\Phi=0$. Ora, trattandosi di equazioni a coefficienti uniformi in tutto il piano, si vede subito dalle operazioni eseguite per passare dalla $\Phi=0$ alla $\Phi^{(1)}=0$, che la $\Phi=0$ è a coefficienti periodici con $2\,l\,\omega$ per periodo, ed è quindi una di quelle equazioni di cui si voleva dimostrare l'esistenza.

8. Essendo data un'equazione $L(x, y, m) = 0$, a coefficienti periodici con $2 l \omega$ per periodo, si può determinare per essa un sistema $y_1, y_2, \dots y_m$ di m integrali particolari distinti, definiti da sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze di un punto x_0 che non sia un polo dei suoi coefficienti. Anche gl'infiniti punti $x_0 + 2 s l \omega$ che si ottengono dando ad s tutti i valori interi positivi e negativi, godono della medesima proprietà di x_0. Epperò, se, evitando i poli di $L = 0$, facciamo percorrere alla variabile una linea qualunque Δ che vada da x_0 ad uno determinato di questi punti, $x_0 + 2 s_1 l \omega$ ad es.: le funzioni y prendono all'arrivo dei valori differenti da quelli che hanno in x_0. Prendendo $x_0 + 2 s_1 l \omega$ come origine e questi valori come valori iniziali, e facendo uno dei soliti cambiamenti di variabile, x in $x + 2 s_1 l \omega$, che riconduce l'origine in x_0, la $L = 0$ non muta, essendo a coefficienti periodici con $2 l \omega$ per periodo, e le funzioni y si trasformano in altri m integrali particolari distinti di quest'equazione, che indicheremo con $\{y_1\}$, $\{y_2\}, \dots \{y_m\}$, e che si possono ottenere eseguendo sui primitivi $y_1, y_2, \dots y_m$ una determinata sostituzione lineare S, che dipende dalla scelta della linea Δ.

Con alcune considerazioni analoghe a quelle che precedono il 1.° lemma si può vedere facilmente *che, quando la variabile si muove sul piano, evitando i poli dei coefficienti di* $L = 0$, *tutte le infinite sostituzioni che subiscono gl'integrali* $y_1, y_2, \dots y_m$ *con tutti i possibili cammini che vanno da un punto qualunque* x *ad uno dei punti* $x + 2 s l \omega$, *costituiscono un gruppo, che chiameremo gruppo di sostituzioni di* $L = 0$ *relativo al sistema d'integrali* $y_1, y_2, \dots y_m$ *e al periodo* $2 l \omega$.

Abbiamo aggiunto *e al periodo* $2 l \omega$ per non confondere questo gruppo con quello di cui si è parlato in principio per le equazioni in generale, e che nel caso di equazioni a coefficienti periodici è un sottogruppo di quello ora definito, essendo nei cammini della variabile inclusi come caso speciale quelli chiusi corrispondenti al valore particolare zero del numero intero s.

Essendo date più equazioni in numero finito, dello stesso ordine e a coefficienti periodici con lo stesso periodo $2 l \omega$, *e facendo muovere la variabile senza che passi per alcun polo dei loro coefficienti, diremo che esse posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni relativamente al periodo* $2 l \omega$, *quando si può determinare per ognuna di esse un sistema d'integrali particolari distinti, in modo che gl'integrali di questi diversi sistemi subiscano la medesima sostituzione lineare per ogni cammino della variabile che va da un punto qualunque* x *ad uno dei punti* $x + 2 s l \omega$.

Sempre con considerazioni analoghe a quelle che precedono il 1.° lemma si può vedere facilmente *che tre equazioni, dello stesso ordine e a coefficienti periodici collo stesso periodo* $2\,l\,\omega$, *posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni relativamente a questo periodo, quando ciò accade per due coppie qualunque di esse.*

Diremo che tutte le equazioni di una successione infinita, che sono dello stesso ordine e a coefficienti periodici collo stesso periodo $2\,l\,\omega$, *posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni relativamente a questo periodo, quando ciò accade per un numero finito qualunque di esse, scelte ad arbitrio.*

Mediante queste definizioni si può dimostrare un 4.° lemma con un procedimento del tutto simile a quello di cui ci siamo serviti per la dimostrazione del primo.

Questo lemma si può enunciare così:

Un'equazione riducibile $F(x,\ y,\ n) = 0$, *a coefficienti doppiamente periodici coi periodi* $2\,\omega$, $2\,\omega'$, *a cui appartengono tutti gl'integrali di un'equazione irriduttibile* $\Psi_0(x,\ z,\ p) = 0$, *a coefficienti semplicemente periodici con* $2\,l\,\omega$ *per periodo, essendo* l *un numero intero, ammette tutti gl'integrali d'infinite altre equazioni pure a coefficienti periodici con* $2\,l\,\omega$ *per periodo, e che relativamente a questo periodo posseggono il medesimo gruppo di sostituzioni di* $\Psi_0 = 0$.

9. Possiamo finalmente dimostrare il teorema relativo alla riducibilità delle equazioni differenziali lineari a coefficienti doppiamente periodici, di cui si è parlato in principio e di cui si può modificare l'enunciato nel modo seguente:

Un'equazione differenziale lineare riducibile $F(x,\ y,\ n) = 0$, *a coefficienti ellittici, ammette tutti gl'integrali di un'equazione irriduttibile* $\Psi(x, z, p) = 0$, *a coefficienti doppiamente periodici ed aventi gli stessi periodi* $2\,\omega$, $2\,\omega'$ *di* $F = 0$ *e dei multipli convenienti di questi periodi.*

Col metodo indicato nel 3.° lemma possiamo costruire un' equazione $\Psi_0(x,\ y,\ p) = 0$, di cui tutti gl'integrali appartengano ad $F = 0$ e a coefficienti semplicemente periodici con $2\,l\,\omega$ per periodo, essendo l un numero intero. Come è già noto, l'ordine p di $\Psi_0 = 0$, che è irriduttibile, è il minimo possibile, vale a dire ogni altra equazione di cui tutti gl'integrali appartengono ad $F = 0$ è di ordine superiore o tutt'al più eguale a p.

Escludendo l'ipotesi che la $\Psi_0 = 0$ sia a coefficienti periodici con un multiplo di $2\,\omega'$ per periodo, nel qual caso sarebbe a coefficienti doppiamente periodici secondo l'enunciato del teorema e non occorrerebbe più proseguire la dimostrazione, si applichino alla $\Psi_0 = 0$, relativamente al periodo $2\,\omega'$, procedimenti simili a quelli del 3.° lemma, utilizzando i risultati del 4.° e 2.° lemma, come per il 3.° si sono utilizzati quello del 1.° e del 2.°

Otterremo così dapprima la serie di equazioni:

$$\ldots \Psi_{-s} = 0, \ldots \quad \Psi_{-1} = 0, \quad \Psi_0 = 0, \quad \Psi_1 = 0, \ldots \quad \Psi_s = 0, \ldots$$

e quindi il numero ε'_1 analogo ad ε_1, che ci permetterà di scegliere il punto x_0, come nel 3.° lemma, e di determinare i numeri ε', q', l' analoghi a ε, q, l e le $q' + 1$ equazioni, che potremo rappresentare con:

$$\Psi_0 = 0, \quad \Psi_{a'l'} = 0, \quad \Psi_{b'l'} = 0, \ldots \quad \Psi_{h'l'} = 0,$$

ove a', b',… h' sono numeri interi soggetti alle diseguaglianze:

$$0 < a' < b' < \cdots < h'.$$

Per il numero h' si deve avere inoltre $h'\,l' = \varepsilon'$.

Considerando poi le $h' + 1$ equazioni:

$$\Psi_0 = 0, \quad \Psi_{l'} = 0, \quad \Psi_{2l'} = 0, \ldots \quad \Psi_{h'l'} = 0, \tag{17}$$

analoghe alle (12), potremo determinare per esse i sistemi d'integrali:

$$v_{01}, \ldots v_{0p}; \quad v_{11}, \ldots v_{1p}; \ldots \quad v_{h1}, \ldots v_{hp},$$

analoghi ai sistemi (13), e mettere le p relazioni fra gl'integrali delle $q' + 1$ equazioni sotto la forma:

$$\begin{array}{l} A'_0\, v_{01} + A'_{a'}\, v_{a'1} + A'_{b'}\, v_{b'1} + \cdots + A'_{h'}\, v_{h'1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{array}$$

essendo A'_0, $A'_{a'}$, $A'_{b'}$,… $A'_{h'}$ $q' + 1$ costanti sempre diverse da zero, o anche sotto l'altra:

$$\sum_0^{h'}{}_i\, A'_i\, v_{i1} = 0, \ldots \quad \sum_0^{h'}{}_i\, A'_i\, v_{ip} = 0,$$

quando sia $A'_i = 0$ per tutti i valori di i diversi da 0, a', b',… h'.

Denotando con λ'_1, λ'_2,… $\lambda'_{h'-1}$ $h' - 1$ costanti arbitrarie, si potranno costruire le funzioni:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = v_{01} + \lambda'_1\, v_{11} + \lambda'_2\, v_{21} + \cdots + \lambda'_{h'-1}\, v_{h'-1 \cdot 1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_p = v_{0p} + \lambda'_1\, v_{1p} + \lambda'_2\, v_{2p} + \cdots + \lambda'_{h'-1}\, v_{h'-1 \cdot p} \end{array}\right\}, \tag{18}$$

che sono analoghe alle $y_1, \ldots y_p$ del 3.° lemma, e che costituiscono come queste ultime un sistema di p integrali particolari distinti di un'equazione $\Psi(x, z, p) = 0$.

Ora, considerando una linea Δ che non passi per alcun polo dei coefficienti delle (18) e della $\Psi = 0$ e che vada da x_0 a $x_0 + 2\,l\,\omega$, si prenda per origine degl'integrali v e z il punto $x_0 + 2\,l\,\omega$ e per valori iniziali di questi integrali i valori che essi prendono in $x_0 + 2\,l\,\omega$, quando la variabile vi giunge passando per Δ, e si faccia il solito cambiamento di variabile, x in $x + 2\,l\,\omega$. In tal caso le equazioni (17) non cambiano, perchè sono a coefficienti periodici con $2\,l\,\omega$ per periodo, e i loro integrali, in virtù del 4.° lemma, prendono dei valori che si possono ottenere effettuando una medesima sostituzione lineare su quelli primitivi di ciascuna equazione. Quindi, a causa delle (18), anche i nuovi integrali di $\Psi = 0$ si esprimono con gli antichi mediante questa stessa sostituzione. Di qui risulta che neppure la $\Psi = 0$ muta coi cambiamenti ora indicati, ed è per conseguenza essa pure a coefficienti periodici con $2\,l\,\omega$ per periodo.

Arrivati a questo punto non abbiamo da far altro che ripetere sulle funzioni $z_1, \ldots z_p$, relativamente al periodo $2\,\omega'$, lo stesso ragionamento già fatto nel 3.° lemma per le funzioni y, relativamente all'unico periodo $2\,\omega$, e giungeremo così ad un sistema di valori di $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_{h'-1}$ che renderanno la $\Psi = 0$ a coefficienti doppiamente periodici; coi periodi $2\,l\,\omega$, $2\,l'\,\omega'$.

10. Ritorniamo all'equazione $F(x, y, n) = 0$ a coefficienti periodici col periodo $2\,\omega$ del 3.° lemma e alla serie di equazioni (10) che possono dividersi in l categorie, comprendendo in una medesima categoria tutte quelle della forma $\Phi_{i+ml} = 0$, nella quale i è uno dei numeri $0, 1, 2, \ldots l - 1$ ed m un numero variabile che prende tutti i valori interi da $-\infty$ a $+\infty$. Le equazioni (10) così distribuite in l categorie godono delle seguenti proprietà, delle quali alcune sono note e le altre possono dimostrarsi facilmente:

1.° *Tutte le equazioni di una stessa categoria posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni.*

2.° *Fra gl'integrali di h equazioni consecutive di una stessa categoria non esiste alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Esistono invece p di tali relazioni e p soltanto fra gl'integrali di $h + 1$ equazioni consecutive di una medesima categoria. In queste p relazioni figurano gl'integrali di $q + 1$ equazioni, essendo $q \leqq h$, delle quali però fanno sempre parte le due estreme.* Scegliendo gl'integrali delle $h + 1$ equazioni in modo che godono di proprietà simili a quelle dei sistemi (13), possiamo mettere le p relazioni sotto una forma analoga alla (14).

3.° *Esiste un'equazione* $G_i(x, y, h p) = 0$, *d'ordine* $h p$ *e a coefficienti periodici con* $2 l \omega$ *per periodo, che possiede tutti gl'integrali delle equazioni della* i^{ma} *categoria, e della quale costituiscono un sistema di* $h p$ *integrali particolari distinti* h *sistemi di* p *integrali di* h *equazioni consecutive della* l^{ma} *categoria.*

4.° *Le* l *equazioni* $G_1 = 0$, $G_2 = 0, \ldots G_l = 0$, *che corrispondono rispettivamente alle* l *categorie, confrontate a due a due, non hanno alcun integrale a comune, e tutti i loro integrali appartengono ad un'equazione* $G(x, y, h l p) = 0$, *a coefficienti periodici con* 2ω *per periodo.*

Se è $h l p = n$, la $G = 0$ coincide colla $F = 0$, ed in questo caso ogni integrale di $F = 0$ può sempre eguagliarsi ad un'espressione lineare omogenea a coefficienti costanti d'integrali di equazioni (10). Viceversa, se ogni integrale di $F = 0$ si può eguagliare ad un'espressione lineare omogenea a coefficienti costanti d'integrali di equazioni (10), sussiste la relazione $h l p = n$ e la $G = 0$ coincide colla $F = 0$.

Considerando sempre il caso di $h l p = n$, denotiamo con $E_0(x, y, p) = 0$ un'equazione irriduttibile di cui tutti gl'integrali appartengono anche alla $F = 0$, e consideriamola assieme alle equazioni:

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = 0, \ldots \quad \Phi_{\varepsilon-1} = 0,$$

essendo $\varepsilon = h l$. Fra tutte queste $h l + 1$ equazioni scegliamone un certo numero $r + 1$, del quale faccia sempre parte la $E_0 = 0$, in modo che fra gli integrali di r qualunque di esse non esista alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti e che esistano invece di tali relazioni fra gl'integrali di tutte le $r + 1$ equazioni. Ragionando allora come nel 1.° lemma, si dimostra che le relazioni sono in numero di p, che tutte le $r + 1$ equazioni posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni e che quindi le r equazioni diverse dalla $E_0 = 0$ appartengono alla medesima categoria. Diremo che anche l'equazione $E_0 = 0$ appartiene a questa categoria.

Supponendo cha si tratti della prima categoria e scegliendo per integrali delle $\Phi = 0$ quelli dei sistemi (13), potremo determinare per la $E_0 = 0$ un sistema d'integrali che indicheremo con $t_{01}, \ldots t_p$, in modo che le p relazioni assumano la forma:

$$\left.\begin{array}{l} t_{01} = b_{00} u_{01} + b_{01} u_{11} + \cdots + b_{0h-1} u_{h-1 \cdot 1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{0p} = b_{00} u_{0p} + b_{01} u_{1p} + \cdots + b_{0h-1} u_{h-1 \cdot p} \end{array}\right\}, \qquad (19)$$

ove le b sono costanti, alcune delle quali possono anche essere eguali allo zero. Abbiamo già veduto nel 3.° lemma che viceversa p espressioni $t_{01},\ldots t_{0p}$ come le precedenti costituiscono un sistema di p integrali particolari distinti di un'equazione $E_0=0$, di ordine p che possiede lo stesso gruppo di sostituzioni delle (12) e che appartiene quindi alla prima categoria.

Consideriamo assieme alla $E_0=0$ altre $h-1$ equazioni irriduttibili di ordine p appartenenti alla prima categoria, che indicheremo con $E_1=0,\ldots E_{h-1}=0$, e denotiamo con $t_{11},\ldots t_{1p};\ldots t_{h-1\cdot 1},\ldots t_{h-1\cdot p}$ i loro integrali espressi mediante quelli dei sistemi (13) dalle relazioni:

$$\left.\begin{array}{l}
t_{11}=b_{10}\,u_{01}+b_{11}\,u_{11}+\cdots+b_{1\cdot h-1}\,u_{h-1\cdot 1}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
t_{1p}=b_{10}\,u_{0p}+b_{11}\,u_{1p}+\cdots+b_{1\cdot h-1}\,u_{h-1\cdot p}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
t_{h-1\cdot 1}=b_{h-1\cdot 0}\,u_{01}+b_{h-1\cdot 1}\,u_{11}+\cdots+b_{h-1\cdot h-1}\,u_{h-1\cdot 1}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
t_{h-1\cdot p}=b_{h-1\cdot 0}\,u_{0p}+b_{h-1\cdot 1}\,u_{1p}+\cdots+b_{h-1\cdot h-1}\,u_{h-1\cdot p}
\end{array}\right\}\qquad(20)$$

e supponiamo che il determinante:

$$D=\begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} & \ldots & b_{0h-1}\\ b_{10} & b_{11} & \ldots & b_{1h-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{h-1\cdot 0} & b_{h-1\cdot 1} & \ldots & b_{h-1\cdot h-1}\end{vmatrix}$$

sia diverso da zero. In tal caso non esiste alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti fra gl'integrali:

$$t_{01},\ldots t_{0p};\quad t_{11},\ldots t_{1p};\quad \ldots t_{h-1\cdot 1},\ldots t_{h-1\cdot p}\qquad(21)$$

delle h equazioni:

$$E_0=0,\quad E_1=0,\ldots\quad E_{h-1}=0,\qquad(22)$$

perchè altrimenti dovrebbe esistere una relazione simile fra gl'integrali:

$$u_{01},\ldots u_{0p};\quad u_{11},\ldots u_{1p};\quad \ldots u_{h-1\cdot 1},\ldots u_{h-1\cdot p}\qquad(23)$$

delle h equazioni:

$$\Phi_0=0,\quad \Phi_l=0,\ldots\quad \Phi_{(h-1)l}=0,\qquad(24)$$

i cui valori si possono ricavare risolvendo rispetto ad essi le (19) e (20).

Essendo data un'altra equazione irriduttibile e di ordine p $E_h = 0$ della prima categoria e p suoi integrali $t_{h1}, \ldots t_{hp}$ espressi con quelli dei sistemi (23) mediante le relazioni:

$$\begin{gathered} t_{h1} = b_{h0}\, u_{01} + b_{h1}\, u_{11} + \cdots + b_{hh-1}\, u_{h-1\cdot 1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{hp} = b_{h0}\, u_{0p} + b_{h1}\, u_{1p} + \cdots + b_{hh-1}\, u_{h-1\, p}, \end{gathered}$$

si possono sostituire alle funzioni u i loro valori ricavati dalle (19) e (20), e si ottengono così p relazioni, alle quali si può dare la forma:

$$\sum_{0}^{h}{}_i\, B_i\, t_{i1} = 0, \ldots \;\; {}_i\sum_{0}^{h} B_i\, t_{ip} = 0,$$

ove le B sono $h+1$ costanti determinate.

Si vede dunque che fra gl'integrali di $h+1$ equazioni di una stessa categoria esistono sempre relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti, nel mentre che per una stessa categoria si possono sempre trovare h equazioni tali che fra i loro integrali non esistano di queste relazioni. Diremo che h equazioni che godono di una simile proprietà costituiscono un sistema di h equazioni indipendenti della categoria a cui appartengono. Così costituiscono h equazioni indipendenti della prima categoria le (22), le (24) e h equazioni consecutive qualunque $\Phi = 0$ della prima categoria.

Riguardo alle relazioni (19) e (20), che ci dànno le funzioni (21) espresse con le (23), diremo che si ottengono gli h sistemi d'integrali (21), eseguendo sugli h sistemi d'integrali (23) la sostituzione:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & \ldots & b_{0h-1} \\ b_{10} & b_{11} & \ldots & b_{1h-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{h-1\cdot 0} & b_{h-1\cdot 1} & \ldots & b_{h-1\cdot h-1} \end{pmatrix},$$

ossia che si passa dalle h equazioni (24) alle h equazioni (22) mediante la sostituzione Σ.

Consideriamo la linea Δ del 3.° lemma che va da x_0 a $x_0 + 2\,l\,\omega$, e trasportiamo l'origine degl'integrali delle equazioni (22) e (24) in $x_0 + 2\,l\,\omega$, prendendo per valori iniziali di essi i valori che assumono gl'integrali (21) e (23) in $x_0 + 2\,l\,\omega$, quando la variabile vi giunge passando per Δ, e facciamo il solito cambiamento di variabile, x in $x + 2\,l\,\omega$. Così gl'integrali (23) si trasformano in altre funzioni $(u_{01}),\dots (u_{0p});\dots$. che si possono ottenere eseguendo prima la sostituziane T sugl'integrali di ogni sistema, eppoi la sostituzione:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{-A_0}{A_h} & \frac{-A_1}{A_h} & \frac{-A_2}{A_h} & \dots & \frac{-A_{h-1}}{A_h} \end{pmatrix},$$

sugli h sistemi. Lo stesso può dirsi per gl'integrali (21) che si trasformano in altre funzioni $(t_{01}),\dots (t_{0p});\dots$ che si possono ottenere eseguendo prima la stessa sostituzione T sugl'integrali di ogni sistema eppoi la sostituzione $\Theta_1 = \Sigma\, \Theta\, \Sigma^{-1}$ sugli h sistemi.

Per un'altra linea qualunque Δ' che goda delle medesime proprietà di Δ e che vada da x_0 a $x_0 + 2\, l\, \omega$ si hanno risultati analoghi a quelli ora ottenuti per Δ. Siano per questa nuova linea T', Θ', Θ'_1 le sostituzioni corrispondenti a T, Θ, Θ_1. Quando la variabile percorre la linea Δ a partire da x_0 eppoi la linea Δ' in senso inverso a partire da $x_0 + 2\, l\, \omega$, si viene a formare un cammino chiuso che non altera le equazioni (22) e (24), ossia che, lasciando fissi i sistemi (21) e (23), fa subire agl'integrali di ognuno di essi la sostituzione $T\, T'^{-1}$. Perciò dovremo avere: $\Theta\, \Theta'^{-1} = 1$, $\Theta_1\, \Theta_1'^{-1} = 1$, da cui risulta $\Theta = \Theta'$, $\Theta_1 = \Theta'_1$. Si vede dunque che le sostituzioni Θ e Θ_1 che subiscono gl'integrali (23) e (24) sono indipendenti dalla linea Δ che va da x_0 a $x_0 + 2\, l\, \omega$.

Possiamo disporre delle costanti della sostituzione Σ in modo che la sostituzione Θ_1 assuma una delle forme canoniche, ad es.: la più semplice:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \mu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \mu_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{h-1} & \mu_{h-1} \end{pmatrix}, \qquad (25)$$

nella quale le costanti μ sono le h radici dell'equazione algebrica di grado

h in ρ:

$$\begin{vmatrix} -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\rho & 1 \\ -\frac{A_0}{A_h} & -\frac{A_1}{A_h} & -\frac{A_2}{A_h} & \dots & -\frac{A_{h-1}}{A_h} & -\frac{A_{l-1}}{A_h} - \rho \end{vmatrix} = 0, \qquad (26)$$

disposte lungo la diagonale in modo che quelle eguali fra loro sono consecutive, e le α sono costanti diverse da zero, essendo soltanto nulla ognuna di quelle che si trova nella stessa linea con una μ che sia lungo la diagonale la prima di un gruppo di radici eguali.

Che, quando la sostituzione Θ_1 è ridotta ad avere la forma precedente, il che è sempre possibile, tutte le α, all'infuori di quelle ora indicate, debbano essere diverse da zero, risulta dal fatto che nessuna delle radici μ può annullare simultaneamente tutti i determinanti minori di ordine $h-1$ del determinante di ordine h che forma il 1.° membro dell'equazione (26).

Quando la sostituzione Θ_1 ha la forma canonica (25) o un'altra forma canonica qualunque, chiameremo le (21) equazioni corrispondenti alla forma canonica. Fra esse si trovano anche quelle a coefficienti periodici con $2\,l\,\omega$ per periodo che si possono determinare coi procedimenti del 3.° lemma. Anzi per ricollegare i due risultati notiamo che le radici θ della (14) sono le reciproche delle radici μ della (26). Notiamo inoltre che dalle osservazioni fatte sulle costanti α risulta che ad ogni gruppo di radici θ o μ eguali corrisponde una sola equazione $E=0$ a coefficienti periodici con $2\,l\,\omega$ per periodo.

Con un cambiamento di variabile si può passare da queste equazioni corrispondenti alla forma canonica a quelle delle altre categorie.

11. Passiamo ora al caso che la $F(x, y, n)=0$ abbia anche il periodo $2\,\omega'$, sia cioè a coefficienti ellittici con $2\,\omega$ e $2\,\omega'$ per periodi, e costruiamo coll'equazione $\Phi^0=0$ la serie:

$$\Phi'_{-s}=0, \dots \quad \Phi'_{-1}=0, \quad \Phi_0=0, \quad \Phi'_1=0, \dots \quad \Phi'_s=0, \dots, \qquad (27)$$

che, relativamente al periodo $2\,\omega'$, è analoga alla (10) del 3.° lemma relativa al periodo $2\,\omega$. Denotiamo con h' e l' i numeri analoghi ad h e l, e supponiamo che, oltre ad essere $n=h\,l\,p$, sia pure $n=h\;l'\,p$.

Le (27) possono dividersi in l' categorie, che godono delle medesime proprietà delle l categorie in cui sono state distribuite le (10), tanto per quelle generali quanto per quelle speciali relative al caso $n = h\,l\,p$. Perciò ogni equazione irriduttibile di ordine p, di cui tutti gl'integrali appartengono anche alla $F = 0$, oltre a considerarsi come appartenente ad una delle l categorie relative al periodo $2\,\omega$, dovrà anche considerarsi come appartenente ad una delle l' categorie relative al periodo $2\,\omega'$. Inoltre tutte le equazioni irriduttibili di ordine p, di cui tutti gl'integrali appartengono anche ad $F = 0$, che fanno parte di una stessa categoria rispetto ad uno dei periodi di $2\,\omega$, $2\,\omega'$, devono far parte di una stessa categoria anche rispetto all'altro, perchè posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni. Ne viene di conseguenza che deve essere $l = l'$. Da quest'eguaglianza e dall'altra: $h\,l\,p = h'\,l'\,p$ risulta pure $h = h'$. Quest'ultima relazione potrebbe anche ottenersi osservando che h equazioni indipendenti di una stessa categoria rispetto al periodo $2\,\omega$ devono pure essere indipendenti per la categoria a cui appartengono rispetto al periodo $2\,\omega'$, e che quindi deve essere $h \leqq h'$. Viceversa, dovendo essere pure $h' \leqq h$, se ne conclude che sarà $h' = h$.

Supponiamo scelto il punto x_0 in modo che i lati del parallelogrammo Γ aventi per vertici i punti x_0, $x_0 + 2\,l\,\omega$, $x_0 + 2\,l\,\omega + 2\,l\,\omega'$, $x_0 + 2\,l\,\omega'$ non passino per alcun polo dei coefficienti di $F = 0$, e consideriamo le equazioni (22) coi loro integrali (21), appartenente rispetto al periodo $2\,\omega$ alla prima categoria e ad una stessa categoria rispetto al periodo $2\,\omega'$. Gl'integrali (21), essendo anche integrali di $F = 0$, sono sempre finiti e continui sui lati di Γ.

Per quello che abbiamo detto i sistemi d'integrali (21), quando la variabile va lungo il lato $(x_0,\ x_0 + 2\,l\,\omega)$ da x_0 a $x_0 + 2\,l\,\omega$, non mutano di categoria rispetto a $2\,\omega$ e quindi neppure rispetto a $2\,\omega'$, ma subiscono la sostituzione lineare Θ_1. Lo stesso può dirsi per il lato $(x_0,\ x_0 + 2\,l\,\omega')$, per il quale indicheremo con Θ_2 la sostituzione lineare che subiscono i sistemi d'integrali (21).

Quando la variabile percorre tutto il contorno di Γ partendo da x_0 e in modo da incontrare i vertici $x_0 + 2\,l\,\omega$, $x_0 + 2\,l\,\omega + 2\,l\,\omega'$, $x_0 + 2\,l\,\omega'$ nell'ordine nel quale sono scritti, gl'integrali di ogni sistema (21) subiscono una medesima sostituzione lineare; ma i sistemi non mutano, perchè dopo un cammino chiuso della variabile le equazioni (22) si riproducono. Perciò avremo per le sostituzioni Θ_1 e Θ_2 la relazione:

$$\Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_1^{-1}\,\Theta_2^{-1} = 1,$$

dalla quale risulta che Θ_1 e Θ_2 sono permutabili.

Quindi, se Θ_1 ha la forma canonica (25) o un'altra forma canonica qualunque, anche Θ_2, come si può vedere facilmente, avrà una forma canonica, e questa forma di Θ_2 godrà della proprietà che la sua diagonale, che è costituita dalle h radici $\mu'_0, \mu'_1, \ldots \mu'_{h-1}$ di un'equazione algebrica simile alla (26), confrontata colla diagonale di Θ_1, è tale che ad ogni gruppo di radici μ eguali corrisponde un gruppo di radici μ' pure eguali. Di qui risulta che se le (22) sono h equazioni corrispondenti alla forma canonica per il periodo $2\,\omega$, lo sono anche per il periodo $2\,\omega'$. In tal caso quelle di esse che sono a coefficienti periodici con $2\,l\,\omega$ per periodo, sono anche a coefficienti periodici con $2\,l\,\omega'$ per periodo, sono cioè a coefficienti ellittici coi periodi $2\,l\,\omega$, $2\,l\,\omega'$.

Con cambiamenti di variabile si può passare dalle (22) alle equazioni corrispondenti alla forma canonica delle altre categorie relative al periodo $2\,\omega$ ed al tempo stesso anche a quelle delle altre categorie relative a $2\,\omega'$, poichè queste categorie relative ai due periodi $2\,\omega$, $2\,\omega'$ si corrispondono.

12. Considerando sempre un'equazione $F(x, y, n) = 0$ di quelle studiate nel paragrafo precedente, supponiamo che sia:

$$n = 4, \quad p = 2, \quad l = 1, \quad h = 2.$$

Abbiamo in questo caso una sola categoria per i periodi $2\,\omega$, $2\,\omega'$ e due equazioni indipendenti irriduttibili di 2.° ordine appartenenti a questa categoria, che indicheremo, per usare le stesse notazioni di prima, con:

$$E_0(x, y, z) = 0, \quad E_1(x, y, z) = 0,$$

quando siano quelle corrispondenti alla forma canonica. Siano:

$$t_{01},\ t_{02};\quad t_{11},\ t_{12}$$

due sistemi d'integrali di queste equazioni, scelte in modo che godano delle proprietà dei sistemi (21), e:

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{pmatrix} \mu' & 0 \\ \alpha' & \mu \end{pmatrix}$$

le due sostituzioni canoniche permutabili, relative ai periodi $2\,\omega$, $2\,\omega'$.

Essendo $l = 1$, la $E_0 = 0$ è a coefficienti ellittici coi periodi $2\,\omega$, $2\,\omega'$.

Quando la variabile fa un giro chiuso senza passare per alcun polo dei coefficienti di $F = 0$, gl'integrali t dei due sistemi subiscono una stessa sostituzione lineare, e quindi le tre espressioni:

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{01} \\ t_{12} & t_{02} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} t'_{01} & t_{11} \\ t'_{02} & t_{12} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} t'_{01} & t_{01} \\ t'_{02} & t_{02} \end{vmatrix}, \tag{28}$$

nelle quali le t' stanno a rappresentare le derivate prime delle t, si riproducono moltiplicate per il determinante di questa sostituzione. Epperò i rapporti delle prime due alla terza sono due funzioni meromorfe, che indicheremo con $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Considerando un parallelogramma Γ avente per vertici i punti x_0, $x_0 + 2\,\omega$, $x_0 + 2\,\omega + 2\,\omega'$, $x_0 + 2\,\omega'$, scelto in modo che i suoi lati non passino per poli di $F = 0$, e facendo percorrere alla variabile il lato $(x_0, x_0 + 2\,\omega)$ da x_0 a $x_0 + 2\,\omega$, gl'integrali dei due sistemi si trasformano nelle funzioni:

$$(t_{01}),\ (t_{02})\,;\quad (t_{11}),\ (t_{12}),$$

che si possono ottenere eseguendo, prima una sostituzione T_1 sugl'integrali di ogni sistema, eppoi la sostituzione Θ_1 sui due sistemi.

Per le espressioni (28) abbiamo:

$$\begin{vmatrix} (t_{11}) & (t_{01}) \\ (t_{12}) & (t_{02}) \end{vmatrix} = \mu^2 (T_1) \begin{vmatrix} t_{11} & t_{01} \\ t_{12} & t_{02} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (t'_{01}) & (t_{11}) \\ (t'_{02}) & (t_{12}) \end{vmatrix} = \mu^2 (T_1) \begin{vmatrix} t'_{01} & t_{11} \\ t'_{02} & t_{12} \end{vmatrix} + \alpha\,\mu\,(T_1) \begin{vmatrix} t'_{01} & t_{01} \\ t'_{02} & t_{02} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (t'_{01}) & (t_{01}) \\ (t'_{02}) & (t_{02}) \end{vmatrix} = \mu^2 (T_1) \begin{vmatrix} t'_{01} & t_{01} \\ t'_{02} & t_{02} \end{vmatrix},$$

essendo (T_1) il determinante della sostituzione T_1. Si hanno quindi per le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ le relazioni:

$$f_1(x_0 + 2\,\omega) = f_1(x_0)$$

$$f_2(x_0 + 2\,\omega) = f_2(x_0) + \frac{\alpha}{\mu}\,.$$

Similmente si ottiene per il periodo $2\,\omega'$:

$$f_1(x_0 + 2\,\omega') = f_1(x_0), \quad f_2(x_0 + 2\,\omega') = f_2(x_0) + \frac{\alpha'}{\mu'}\,.$$

Da queste relazioni e dalle due precedenti risulta che la $f_1(x)$ e la derivata prima della $f_2(x)$ sono due funzioni doppiamente periodiche coi periodi $2\,\omega$, $2\,\omega'$.

Abbiamo inoltre:

$$t_{11} = f_1(x)\, t'_{01} + f_2(x)\, t_{01}$$
$$t_{12} = f_1(x)\, t'_{02} + f_2(x)\, t_{02}.$$

Mediante queste due relazioni, quando sia nota l'equazione a coefficienti ellittici $E_0 = 0$, e siano note pure le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, si può costruire l'altra equazione $E_1 = 0$, che non è a coefficienti ellittici e l'equazione data del 4.° ordine $F = 0$, che è a coefficienti doppiamente periodici cogli stessi periodi di $E_0 = 0$.

Se le sostituzioni Θ_1 e Θ_2 hanno l'altra forma:

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{pmatrix} \mu'_0 & 0 \\ 0 & \mu'_1 \end{pmatrix},$$

le due equazioni $E_0 = 0$, $E_1 = 0$ sono tutte due a coefficienti ellittici, e le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ sono due funzioni di 2.ª specie coi periodi 2ω, $2\omega'$ e coi moltiplicatori $\frac{\mu_1}{\mu_0}$, $\frac{\mu'_1}{\mu'_0}$.

13. Essendo data un'equazione irriduttibile $H(x, y, z) = 0$, a coefficienti doppiamente periodici coi periodi 4ω, $2\omega'$, si faccia in essa un cambiamento di variabile, ponendo $x = x' + 2\omega$ e chiamando nuovamente con x la variabile indipendente. Si ottiene così un' altra equazione irriduttibile $H_1(x, y, z) = 0$, a coefficienti doppiamente periodici cogli stessi periodi 4ω, $2\omega'$.

Supponiamo che queste due equazioni non posseggano lo stesso gruppo di sostituzioni, e costruiamo l'equazione $F(x, y, 4) = 0$ che possiede tutti i loro integrali, la quale risulta a coefficienti doppiamente periodici coi periodi 2ω, $2\omega'$. Si tratta di dimostrare che, all'infuori di $H = 0$ e di $H_1 = 0$, non esiste alcun'equazione di ordine inferiore a 4, di cui tutti gl'integrali appartengono ad $F = 0$.

Supponiamo che sia $K = 0$ una simile equazione, che potrà essere del 3.° o del 2.° ordine. Considerando dapprima il caso del 3.° ordine, determiniamo per ciascuna delle tre equazioni $H = 0$, $H_1 = 0$, $K = 0$ un sistema d'integrali particolari distinti definiti da sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze di un punto x_0 che non sia un polo dei loro coefficienti, e denotiamo con u_1, u_2; v_1, v_2; t_1, t_2, t_3 rispettivamente quest'integrali. I primi quattro costituiscono un sistema d'integrali particolari distinti di $F = 0$. Perciò ogni altro integrale di $F = 0$ dovrà potersi esprimere con essi. Avremo quindi le relazioni:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma v_1 + \delta v_2 \\ t_2 &= \alpha' u_1 + \beta' u_2 + \gamma' v_1 + \delta' v_2 \\ t_3 &= \alpha'' u_1 + \beta'' u_2 + \gamma'' v_1 + \delta'' v_2 \end{aligned}\right\}, \tag{29}$$

nelle quali le α, β,... sono costanti. Ponendo:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \quad A' = \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}, \quad A'' = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

si ottiene l'unica relazione:

$$A\, t_1 + A'\, t_2 + A''\, t_3 = (A\,\gamma + A'\,\gamma' + A''\,\gamma'')\, v_1 + \\ + (A\,\delta + A'\,\delta' + A''\,\delta'')\, v_2,$$

la quale esprime che un integrale di $K = 0$ è eguale a un integrale di $H_1 = 0$. Ma, essendo quest'ultima equazione irriduttibile, ne risulta che ogni suo integrale deve appartenere alla $K = 0$. Similmente si dimostra che ogni integrale di $H = 0$ appartiene alla $K = 0$, che viene così ad essere soddisfatta da tutti gl'integrali di $F = 0$, il che è impossibile.

Vediamo allora se è possibile il caso che $K = 0$ sia del 2.° ordine, al quale si può passare ponendo $t_3 = 0$ e sopprimendo l'ultima delle (29). Supponendo che uno dei due determinanti $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$ sia nullo, si può sempre dalle prime due delle (29) ottenere un'unica relazione che esprima l'eguaglianza fra un'integrale di $K = 0$ e un'integrale di una delle equazioni $H = 0$, $H_1 = 0$, il che non può mai accadere, essendo queste tre equazioni distinte e irriduttibili. Perciò i due determinanti precedenti sono sempre diversi da zero, e si può quindi sostituire ai due sistemi d'integrali distinti u_1, u_2; v_1, v_2 gli altri due y_1, y_2; z_1, z_2 dati dalle relazioni:

$$y_1 = \alpha u_1 + \beta u_2, \quad y_2 = \alpha' u_1 + \beta' u_2$$
$$z_1 = \gamma v_1 + \delta v_2, \quad z_2 = \gamma' v_1 + \delta' v_2.$$

In tal caso le (29) divengono:

$$t_1 = y_1 + z_1, \quad t_2 = y_2 + z_2. \tag{30}$$

Quando la variabile fa un giro chiuso Γ senza passare per alcun polo dei coefficienti delle tre equazioni: $H = 0$, $H_1 = 0$, $K = 0$, gl'integrali di ciascuna di esse subiscono una sostituzione lineare. Denotando rispettivamente con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$ queste tre sostituzioni e tenendo conto delle (30), si ottengono le due relazioni:

$$(a - a'')\, y_1 + (b - b'')\, y_2 + (a' - a'')\, z_1 + (b' - b')\, z_2 = 0$$
$$(c - c'')\, y_1 + (d - d'')\, y_2 + (c' - c'')\, z_1 + (d' - d')\, z_2 = 0,$$

le quali devono essere due identità, perchè y_1, y_2; z_1, z_2 costituiscono un sistema di 4 integrali particolari distinti di $F = 0$. Quindi le tre sostituzioni precedenti sono eguali. Ma ciò non può accadere per tutti i possibili giri chiusi Γ della variabile, perchè allora le tre equazioni $H = 0$, $H_1 = 0$, $K = 0$ possederebbero lo stesso gruppo di sostituzioni, il che è stato escluso per le prime due. Per conseguenza neppure il caso di $K = 0$ del 2.° ordine è possibile; epperò le due equazioni $H = 0$, $H_1 = 0$ sono le sole di ordine inferiore a 4 di cui tutti gl'integrali appartengono anche ad $F = 0$.

Perciò per quest'equazione riducibile $F = 0$ non esiste un'equazione d'ordine inferiore a 4, a coefficienti doppiamente periodici cogli stessi periodi 2ω, $2\omega'$, di cui tutti gl'integrali appartengano ad $F = 0$.

Abbiamo considerato quest'esempio di un'equazione del 4.° ordine per giustificare il nuovo enunciato del teorema e per togliere il dubbio che una equazione riducibile $F(x, y, n) = 0$, a coefficienti ellittici, debba sempre possedere tutti gl'integrali di un'altra equazione di ordine inferiore ad n, a coefficienti doppiamente periodici e cogli stessi periodi di $F = 0$.

Inaugurazione del Monumento a Francesco Brioschi nel R. Istituto Tecnico Superiore di Milano.

Il giorno 13 dicembre 1900, terzo anniversario della morte di Francesco Brioschi, ebbe luogo l'inaugurazione del monumento a lui eretto nel R. Istituto Tecnico Superiore, con parte dei fondi raccolti per sottoscrizione fra i suoi amici, ammiratori ed allievi.

Intervennero alla cerimonia in gran numero le Autorità governative e cittadine, i rappresentanti della famiglia, delle accademie nazionali e straniere, delle università, scuole d'applicazione ed altri istituti d'istruzione superiore, molti professori, professionisti, sottoscrittori ed allievi.

Si fecero rappresentare, dandone speciale preventiva comunicazione:

S. E. il Ministro della pubblica istruzione, dal Prefetto della Provincia; *S. E. il Ministro dell'agricoltura, industria e commercio,* dal Prof. Guglielmo Koerner, Direttore della R. Scuola Superiore d'Agricoltura; *S. E. il Ministro dei lavori pubblici,* dall'Ing. Capo del Genio Civile.

Il *Sindaco di Roma,* Principe Prospero Colonna, dal Prof. G. Colombo.

L'*Accademia Reale di Bruxelles,* dal Prof. Schiaparelli.

Il *R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti,* dal Prof. G. Colombo.

La *R. Accademia delle Scienze di Torino,* dal Vice Presidente, Prof. A. Cossa; quella *di Padova,* dal Prof. G. Colombo; quelle *di Bologna* e *di Napoli,* dal Prof. G. Schiaparelli; quella *di Modena,* dal Conte Ippolito Malaguzzi-Valeri; quella *di Palermo,* dal Prof. Cantone; quella *dei Lincei,* dal Vice-Presidente, Sen. Blaserna.

La *Società Italiana delle Scienze,* detta dei XL, dal Prof. G. Schiaparelli e dal Prof. G. Celoria.

Il *R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli,* dal Prof. G. Colombo.

Il *Consiglio superiore di pubblica istruzione,* dal Prof. G. Colombo.

La *R. Università di Bologna,* dal Prof. J. Bertolini; quella *di Catania,* dal Prof. R. Sabbadini; quella *di Messina,* dal Prof. G. Jung; quelle *di Modena, di Napoli, di Parma* e *di Roma,* dal Prof. G. Colombo; quella *di Padova,* dal Prof. G. Koerner; quella *di Palermo,* dal Prof. G. Celoria; quella *di Pavia,* dal Prof. Pascal; quella *di Pisa,* dai Prof. G. Colombo e U. Dini; quella *di Siena,* dal Prof. C. Civoli; quella *di Torino,* dal Prof. A. Cossa.

La *Libera Università di Perugia,* dal Prof. G. Colombo; quella *di Urbino,* dal Prof. Gaspare Colombi.

La *R. Scuola d'applic. per gli ing. di Roma* e quella *di Padova,* dal Prof. G. COLOMBO; quella *di Torino,* dal Direttore Prof. A. COSSA; la *R. Scuola Navale superiore di Genova,* dal Prof. G. COLOMBO; la *R. Scuola sup. d'Agricoltura di Milano,* dal Direttore Prof. KOERNER; quella *di Medicina Veterinaria di Milano,* dal Prof. SERTOLI e dal Segretario Rag. PUPILLI; quella *di Torino,* dal Prof. G. COLOMBO; quella *di Napoli,* dal Prof. SERTOLI.
La *R. Accademia scientifico-letteraria di Milano,* dal Preside Prof. V. INAMA.
La *Società d'incoraggiamento d'arti e mestieri,* dal Presidente Sen. PRINETTI.
La *R. Accademia di belle arti di Milano,* dal Presidente Prof. C. BOITO.
Il *Museo civico di storia naturale,* dal Direttore T. VIGNOLI.
La *Società degli ingegneri ed architetti italiani,* dal Prof. G. COLOMBO.
La *Commissione internazionale dei Congressi delle strade ferrate di Bruxelles,* dal Comm. LAMPUGNANI.
Il *Collegio degli Ing. ed Arch. di Milano,* dal Pres. Sen. GIULIO VIGONI.
L'*Ispettorato del Catasto di Milano,* dall'Ing. EDG. DE-CAPITANI.

Mandarono la loro adesione:

Il *Sindaco di Firenze,* Marchese PIETRO TORRIGIANI.
La *R. Acc. delle Scienze di Stoccolma*; quella *di Parigi*; quella *di Monaco.*
L'*Accademia Reale Prussiana delle Scienze;* la *Società delle Scienze di Gottinga;* la *Società fisico-medica di Erlangen.*
Le *R. Università di Genova; di Macerata; di Sassari.*
La *R. Scuola d'applicazione per gli ingegneri di Bologna;* la *R. Scuola di applicazione d'Artiglieria e Genio* e la *R. Accademia militare di Torino.*
Donna LAURA MINGHETTI e sua figlia S. E. la Contessa BÜLOW, moglie del Gran Cancelliere dell'Impero Germanico.
I Sen. NEGRI e MASSARANI. Il Comm. FERDINANDO BOCCONI ed il Comm. BORGNINI.
I Professori MESSEDAGLIA, CERRUTI, BELLIO, MISANI, FUCHS, D'OVIDIO, SCHELL, WEDEKIND, G. LORIA, MARINETTI, MARCOLONGO, VIVANTI, FANO, MOSSO, SEGRÉ, JADANZA, CAPPA, GUIDI, REYCEND, BAGGI, SACCO, J. FETTARAPPA, PENATI.
Alcuni antichi allievi di Trieste. — Molti altri antichi allievi ed amici che si dichiararono dolenti di non poter intervenire personalmente alla cerimonia.

Prima che il monumento fosse scoperto parlarono in una delle sale del R. Istituto Tecnico Superiore, nella quale gli invitati si erano radunati, il Prof. GIUSEPPE COLOMBO a nome del *Comitato per le onoranze*, il Prof. PIETRO BLASERNA per *l'Accademia dei Lincei,* il Prof. GIOVANNI CELORIA per l'*Istituto Lombardo di Scienze e Lettere* e il Prof. GIUSEPPE BARDELLI pel *Politecnico.*

Dopo lo scoprimento della statua parlò a piedi della medesima l'allievo dell'ultimo anno di applicazione FRANCESCO SQUASSI.

Il monumento in bronzo è opera pregevolissima dello scultore LUIGI SECCHI di Milano.

DISCORSO DEL PROF. GIUSEPPE COLOMBO

Direttore del R. Istituto Tecnico Superiore
e
Presidente del Comitato per le Onoranze a Francesco Brioschi.

Signore e Signori,

In nome dei sottoscrittori alle onoranze a Francesco Brioschi e del Comitato da loro eletto, io porgo un grato e riverente saluto a tutti coloro che in questo giorno, terzo anniversario della sua morte, hanno voluto onorare colla loro presenza la solenne inaugurazione del monumento che abbiamo eretto alla sua memoria.

I Ministri della pubblica istruzione, dell' agricoltura, industria e commercio e dei lavori pubblici, le Autorità cittadine, i Sindaci di Roma e di Firenze, le Accademie e i Corpi scientifici nazionali e stranieri, ai quali egli apparteneva, gli Istituti di insegnamento superiore e numerosi amici e ammiratori dell' illustre estinto si son fatti rappresentare o hanno espresso al Comitato la loro adesione. A tutti io mando, a nome del Comitato, i più vivi ringraziamenti.

Non appena Francesco Brioschi si spense, da Milano, immersa nel lutto per la perdita di un tanto concittadino, partì l'iniziativa di una sottoscrizione per onorarne la memoria. In brevissimo tempo da 1128 sottoscrittori si raccolse, in tutte le parti d'Italia ed all'estero, una somma cospicua, la cui erogazione fu commessa al Comitato che io ho l'onore di presiedere, e in nome del quale ho l'onore di parlarvi. Sventuratamente il Comitato non è più quale veniva designato dai promotori della sottoscrizione; poichè un nostro carissimo collega, un allievo prediletto di Francesco Brioschi, il Senatore Beltrami, ci ha lasciati per sempre, seguendo nella tomba, a due soli anni di distanza, il suo amato maestro. Diamo alla sua cara memoria il tributo d' un affettuoso rimpianto.

Il Comitato, seguendo la via che gli era stata additata, e interpretando nella pienezza delle facoltà accordategli, i propositi dei sottoscrittori, ha disposto perchè con una parte della somma raccolta fosse acquisita all'Istituto Tecnico Superiore la preziosa biblioteca lasciata da Brioschi, e a se stesso la libera disposizione dei suoi scritti; con un'altra parte provvide all' erezione in questo stesso Istituto di un monumento alla sua memoria, affidandone la esecuzione ad un artista valoroso, lo scultore Luigi Secchi, e provvederà anche a collocare un ricordo suo presso l'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e presso il Collegio degli ingegneri; e infine col resto iniziò la pubblicazione di tutti i suoi scritti matematici, che formeranno materia di parecchi volumi, il primo dei quali è già pronto a veder la luce. Essi costituiranno per la sua memoria un monumento ancora più perenne del bronzo nel quale è scolpita la sua immagine che stiamo per scoprire.

Era giusto che l'Italia e la città dove egli nacque consacrassero alla sua memoria queste solenni manifestazioni di omaggio: perchè non solo perdettero in lui uno dei più illustri scienziati che abbiano onorato un paese e il fondatore del Politecnico; ma in lui si spense pure un forte carattere, un mirabile esempio di attività, un soldato rimasto sempre fedele al sentimento del dovere.

Gli atti della sua vita parlano per lui. Nato nel 1824, laureatosi in scienze matematiche nel 1845, emerge ben tosto in queste scienze in tal grado, che a 26 anni è chiamato a insegnarle nella Università di Pavia. Nel 1861 lo troviamo deputato di Todi e poi segretario generale nel Ministero della pubblica istruzione; nel 1863 fonda l'Istituto Tecnico Superiore; nel 1865 entra in Senato dove acquista ben presto un'autorità incontestata; nel 1870, appena entrate le truppe italiane in Roma, è delegato a organizzarvi con altri il nuovo regime sotto la luogotenenza di Lamarmora; nel 1876 benchè fosse venuta al potere la parte contraria a quella nella quale egli militò tutta la vita, egli fu designato a metter ordine alla situazione economica di Firenze, tanta era la fiducia nel suo senno amministrativo e nella sua energia; e compì il suo mandato in modo che Firenze riconoscente lo volle suo concittadino. Nel 1878 a lui si affida il difficilissimo cómpito di dirigere quella celebre inchiesta ferroviaria che condusse alle convenzioni del 1885; e fu allora che egli contribuì a quell'ordinamento delle reti ferroviarie italiane, il quale, benchè combattuto accanitamente a quel tempo, pure apparve più tardi, agli occhi dei più, il migliore, tanto dal lato politico che dal lato economico. E mentre attendeva a questi poderosi lavori, trovava tempo di presiedere a due altre grandi inchieste, di collaborare alla preparazione della legge pel Catasto, di succedere a Quintino Sella nella presidenza dell'Accademia dei Lincei, di sedere per più di 30 anni nel Consiglio superiore della pubblica istruzione, esercitandovi un'influenza alla quale nessuno tentava sottrarsi, di attendere a grandiose intraprese dalle quali doveva trarre pur troppo amari frutti, di adempiere infine a difficili incarichi d'indole tecnica, pubblici e privati, pei quali pareva naturale di rivolgersi a lui, come all'uomo che più di tutti affidava per la competenza, per l'integrità, per la singolare capacità di lavoro.

A questo immane lavoro egli ha potuto bastare in un periodo di 50 anni, senza mai trascurare un solo istante la prima, la vera, la grande passione della sua vita, la matematica, alla quale consacrava tutti i ritagli di tempo, cui attendeva nella tarda notte, trovando nei suoi studi prediletti, i più ardui che la mente umana possa concepire, un vero riposo, un compenso alle noie, alle difficoltà, alle traversie della vita, ritemprandovisi, anzi, e attingendo, alla pura fonte della scienza, la forza per superarle. Cinquant'anni di vita attiva, da lui spesa tutta non per sè, ma per la scienza e pel Paese; cinquant'anni di ricerche scientifiche, dalla sua prima memoria sul calore terrestre letta a 23 anni all'Istituto Lombardo nel 1847 all'ultima sulle equazioni di 5.° grado e sulle funzioni elittiche presentata al Congresso matematico di Zurigo quattro mesi prima di morire nel 1897; cinquant'anni di insegnamento, appena interrotto dagli uffici pubblici; cinquant'anni di patriottismo e di vita pubblica, dalle cospirazioni del 1848 e dalla rivoluzione delle cinque giornate, che gli valse, sin dalla sera del primo giorno, di esser tratto prigioniero al Castello, sino all'ultimo discorso pronunziato in Senato nel 19 luglio del 1897 quale relatore sul disegno di legge per i lavori del porto di Genova.

Salvo che negli ultimissimi giorni della sua vita, egli non apparve mai stanco. Forte e grigio al pari dell'acciaio, come disse di lui il suo più illustre discepolo ed amico, Senatore Cremona, il suo aspetto stesso rivelava la forte tempra, l'energia indomabile del carattere. E questa dote così rara non gli mancò neppure quando, rimasto vittima più che della sua fiducia, di errori e di colpe altrui, ebbe sciagure immeritate che portò con fierezza e con un stoicismo antico. Fu allora che più che mai rifulse in lui l'uomo tenace di Orazio, colui che:

> Si fractus illabatur orbis
> Impavidum ferient ruinae.

Nè allora, nè mai, egli declinò alcuna responsabilità delle sue azioni pubbliche o private, anche a costo della sua popolarità, anche a costo dei suoi più gravi interessi. Tutti l'hanno riconosciuto, anche i suoi più fieri nemici.

In mezzo a così varie manifestazioni della sua attività, però, e malgrado la potente attrattiva della politica, e le lusinghe, non meno potenti, del grande movimento economico che si manifestò in Italia dopo il 1870, due soli ideali tennero veramente soggiogato l'animo suo: la scienza e l'insegnamento. Erano quegli stessi ideali che lo avevano ispirato nella sua giovinezza; a questi ideali egli rimase fedele sempre, anche nei momenti più tumultuosi della sua vita; e ad essi tornò con maggiore ardore nei suoi ultimi anni, trovandovi, come egli stesso ebbe a dire in una circostanza solenne, le sue gioie più grandi, le soddisfazioni più pure.

Non compete a me, benchè suo allievo, di parlare di Francesco Brioschi come matematico; altri più competenti di me ve ne parleranno fra breve. Questo solo io dirò: che nella scienza egli fu un uomo essenzialmente moderno. Fu un teorico dotato di un grande senso pratico. Così, anche nelle più elevate astrazioni matematiche, egli non perdette mai di vista il vero, nè le applicazioni al mondo reale, per quanto remote e non chiaramente discernibili sin d'ora. Così nell'idraulica, che professò molti anni nel Politecnico, formando allievi che si son dimostrati non indegni del loro maestro, egli unì in felice connubio le risorse della matematica ai procedimenti della scuola sperimentale. Tale era la natura del suo ingegno, che in ogni questione egli riusciva sempre a determinare con grande facilità il lato pratico e positivo.

Fu appunto l'indole del suo ingegno che lo condusse a fondare il Politecnico. Eravamo ai primordi del nostro risorgimento; ed egli pensava che le sorti dell'Italia politica non potevano dirsi assicurate senza provvedere al suo pronto risorgimento economico, e comprese, contro l'opinione comune, che il progresso economico, più che dalla diffusione dell'istruzione nelle masse popolari, dipende dall'insegnamento superiore sapientemente e fortemente organizzato. E allora fondò nel 1863 l'Istituto Tecnico Superiore, che fu l'oggetto più caro delle sue cure durante il resto della sua vita e costituisce il suo maggior titolo alla riconoscenza degli italiani.

Quale potente organismo egli avesse creato lo dimostrarono in breve i risultati. Ristretto dapprima in brevi confini, ma sostenuto con forte mano dal suo direttore, e affidato a una esigua schiera di insegnanti, scarsi bensì, ma infiammati dall'entusiasmo e dalla coscienza del loro grande còmpito, il Politecnico si impose ben presto coll'efficacia dei suoi insegnamenti e coll'esempio di quell'austera disciplina che fu sempre ed è tuttora il vanto e la caratteristica del nostro Istituto. Dalla sua fondazione ad oggi, esso ha dato al Paese 1974 laureati, dei quali 1140 ingegneri civili, 640 ingegneri meccanici e industriali, 144 ingegneri elettricisti, 40 architetti, 10 insegnanti di scienze fisiche, chimiche e naturali. La fama del Politecnico, l'autorità del suo direttore svegliarono generose iniziative a suo favore. Carlo Erba vi fonda l'istituzione elettrotecnica che porta il suo nome, con un fondo di 400 mila lire, accresciuto recentemente di altre 25 mila lire dal fratello Luigi per l'incremento dei laboratori. Gli industriali milanesi concorrono a istituire e corredare il laboratorio di meccanica con 30 mila lire e con altrettanta o maggior somma in apparecchi e macchine. In quest'anno si è finito di montare un laboratorio per la prova dei materiali con un primo fondo di 40 mila lire offerte dall'ingegnere Giovanni Marsaglia del quale deplorammo non ha guari la perdita, e con altri sussidi di contribuenti milanesi. Eugenio Cantoni, la Cassa di risparmio, l'ingegnere Cavallini ed altri donatori contribuiscono a render sempre più completa un'istituzione, ormai così ricca d'insegnamenti, da giustificare il titolo di Politecnico che per universale consenso serve a designarla dovunque.

Quest'istituzione è opera esclusiva dell'uomo che oggi onoriamo in questa seduta solenne; essa si è impersonata in lui; e ben a ragione disse di lui uno dei suoi allievi, il giorno in cui lo deponemmo nella tomba, che quando egli si spense, parve che il cuore del Politecnico avesse cessato di battere.

Per questo il Comitato dei sottoscrittori ha voluto collocar qui, in questa scuola che è creazione sua, la sua effigie; qui, dove egli ha, più che istruita, educata la gioventù al culto del dovere, al sentimento dell'ordine e della disciplina, al lavoro indefesso; qui, dove i professori formati alla sua scuola, raccolti intorno a lui per secondarlo nel suo alto e patriottico còmpito, componevano con lui una famiglia legata dai vincoli del più caldo affetto; qui donde elette schiere di giovani vanno da un terzo di secolo spargendosi in tutto il Paese, dalle Alpi alla Sicilia, portando dovunque la luce della scienza, risvegliando e dirigendo l'attività nazionale, contribuendo potentemente al meraviglioso risorgimento economico della patria.

In questo Istituto, ove sarà sempre sacro e venerato il nome di Francesco Brioschi, ove il suo spirito presiede ancora invisibile ai nostri lavori, noi tutti, professori e studenti, riceviamo in consegna e prendiamo impegno di custodire con gelosa cura il monumento che la riconoscenza dei suoi concittadini ha eretto alla sua memoria, e che i sottoscrittori ci hanno affidato; e con cura altrettanto gelosa ci impegniamo a custodire, ora e in avvenire, le tradizioni che egli ci ha lasciato, e di tener sempre alto l'onore ed il prestigio della sua scuola prediletta.

DISCORSO DEL PROF. PIETRO BLASERNA

Vice-Presidente della R. Accademia dei Lincei.

Signore e Signori,

Siamo invitati ad assistere all'inaugurazione di un monumento, in onore di Francesco Brioschi, nell'Istituto Tecnico Superiore. Ed è giusto che così sia. Questa scuola è opera sua; egli le dedicò tanta parte del suo tempo e del suo pensiero, ed ha creato una istituzione, i cui effetti benefici sono visibili a tutti.

Ma l'ingegno del Brioschi era largo e comprensivo e la sua attività fu tale e tanta, che mentre voi lo consideravate vostro, noi a Roma lo credevamo nostro. Quando per la prematura morte di Quintino Sella, la R. Accademia dei Lincei rimase senza il suo Presidente, il còmpito suo era grave. Si trattava non solo di trasportarla alla sua nuova sede al Palazzo Corsini, ma, ben anco di risolvere molte e non facili questioni che la morte quasi improvvisa del Sella aveva lasciate insolute.

Il Brioschi fu eletto Presidente e l'opera sua fu tale, che l'Accademia, in segno di gratitudine, volle riconfermarlo di quadriennio in quadriennio fino alla sua morte. A nome dell'Accademia, vi domando quindi di associarmi nel modo più cordiale a questa festa di riconoscenza verso l'illustre scienziato.

Nè tutto ciò sembrava sufficiente alla febbrile sua attività. Io non ho qui alcuna veste per parlare a nome del Senato del Regno, di cui il Brioschi era membro autorevole e benemerito. Chiedo però, come suo amico e collega di rammentare l'opera sua nella Commissione permanente di Finanza. Quando veniva un progetto urgente, che richiedeva una sollecita discussione, il Brioschi era sempre pronto ad assumere la relazione. Noi lo lasciavamo alle 19 o alle 20: l'indomani mattina la relazione era fatta, stampata e distribuita, e conteneva sempre qualche veduta nuova, qualche apprezzamento originale, che richiamava l'attenzione del Senato e richiedeva la nostra meditazione.

Scienziato profondo, instancabile, multilaterale: ecco l'uomo che oggi onoriamo.

DISCORSO DEL PROF. GIOVANNI CELORIA

Presidente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.

Signore e Signori,

Io devo alla carica che copro nell'Ufficio di Presidenza del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere l'onore di prendere la parola in questa occasione solenne, ed io appunto dalle aule sacre al vero di quest'Istituto, qui, dove ancora aleggia lo spirito di Francesco Brioschi, porto l'espressione della più schietta e convinta ammirazione, dell'entusiasmo più vivo per l'opera imperitura dello scienziato insigne.

Eravamo alla metà circa del secolo che sta per tramontare. I matematici nostri, affascinati dal genio del sommo Lagrange, mantenevano vive fra noi le nobili tradizioni dello studio dell'analisi generale e delle grandiosi applicazioni sue fisiche e meccaniche. Sotto la scuola di Antonio Bordoni a Pavia, assistito dal consiglio di Gabrio Piola a Milano, un giovane poco più che quadrilustre già mostravasi padrone del pur vasto dominio qui riserbato alle matematiche, e di 23 anni, due anni dopo che egli aveva conseguita la laurea dottorale, mandava per le stampe un lavoro pregevolissimo sulla dottrina della propagazione del calore.

In quel giovane promettente, Francesco Brioschi, sorgeva un matematico e uno scienziato che avrebbe per 50 anni tenuto, con grande onore in Italia, alta la bandiera del sapere.

Al di là delle Alpi nella prima parte del secolo nostro le matematiche avevano per opera specialmente di Gauss, di Abel, di Iacobi, fatto progressi meravigliosi, creati nuovi sussidi, nuove forme di trascendenti, nuovi metodi di indagine. Il Brioschi, primo fra noi, avverte tutta l'importanza dei progressi fatti all'estero, rapido come il pensiero, se ne impadronisce, li perfeziona, li diffonde, ne trova applicazioni mirabili. Pubblica negli *Annali di scienze matematiche e fisiche,* fondati nel 1850 in Roma da Barnaba Tortolini, lavori che di botto lo rivelano geometra di primo ordine; mostra le applicazioni infinite dei determinanti, e dà a questo nuovo strumento di indagine diritto di cittadinanza nelle scuole italiane prima assai che nelle rimanenti d'Europa; con Hermite, con Cayley, con Sylvester, con Clebsch si afferma e si asside fra i creatori dell'algebra moderna, così feconda di applicazioni alla geometria e all'analisi.

Sarebbe impossibile entrare qui in un esame analitico di questi lavori del Brioschi anteriori al 1859, che tutti portano l'impronta indelébile di una gagliarda genialità. Le matematiche pure hanno questo di speciale che rispondono a quel bisogno generale ed elevatissimo dell' animo umano per il quale noi aspiriamo senza posa a un fine più nobile di quello che si possa per noi raggiungere, per le quali noi aneliamo nel dominio del bello, del vero, del buono a una perfezione ideale che non ci è dato di possedere. Vagheggiano esse figure senza difetti, punti senza estensione, linee senza larghezza, superfici senza spessore, e, circondate dal discontinuo e dall'eterogeneo, si struggono in cerca dell'omogeneo e del continuo. Forma di poesia poco intesa, esse muovonsi in altissime plaghe, accessibili a pochi eletti, nelle quali i privilegiati soltanto riescono a fare scoperte, e le quali noi quasi tutti dobbiamo star contenti ad ammirare da lontano e con occhio riverente, perchè questo sappiamo, che difficilissime esse sono, e che da esse uscirono ed escono mezzi di indagine, armi potenti che, applicate alle scienze fisiche e naturali, alle discipline meccaniche, furono e sono eccitatrici di invenzioni genialissime, di utili trasformazioni delle industrie nostre, di progressi mirabili dell'Umanità.

In queste alte regioni del sapere umano, alle quali non arrivano per fortuna nè gli infingardi invidi, nè gli sterili presuntuosi, l'ingegno di Francesco Brioschi, prima e dopo il 1859, si mosse disinvolto e senza sforzo per un periodo di 50 anni interi, producendo in esso 250 lavori circa di varia mole, lavori che riguardano ogni ramo può dirsi della matematica pura, la meccanica analitica, il calcolo delle variazioni, la geometria analitica e differenziale, l'algebra superiore, la teoria delle equazioni differenziali, delle funzioni elittiche, delle abeliane; lavori nei quali egli non volle nè seguire le orme di Riemann, nè abbandonare l' indirizzo classico che s' impersona nei nomi di Eulero e di Iacobi; lavori per mezzo dei quali egli « gareggiò con Sylvester e con Cayley nell' erigere la colossale teoria delle forme, nell' aprire con Hermite e con Kronecker alla dottrina secolare delle equazioni algebriche quei nuovi e mirabili varchi, che ebbero la loro prima radice nella scoperta della risoluzione delle equazioni di quinto grado ».

Nessuna meraviglia quindi, o signori, se, appoggiato a sì grande, vasta e robusta base scientifica, il nome di Francesco Brioschi salì in Italia e fuori ad altissima fama fra i contemporanei; se egli fu universalmente considerato come l'ispiratore di quella insigne schiera di matematici italiani che ancor oggi mantiene una viva corrente di solidarietà fra le produzioni matematiche italiane e quelle di tutto il mondo civile; se quanti italiani nella seconda parte di questo nostro secolo si occuparono di studi matematici ebbero per lui affetto e ossequio riverente di discepoli.

Eppure il vasto dominio delle matematiche pure riuscì angusto al grande ingegno del Brioschi, nè esso bastò a tutta esaurirne la mirabile potenzialità.

Fin dal 1852, in una sua prefazione ad alcune considerazioni postume di Gabrio Piola sul moto delle acque, egli scriveva press'a poco così: « Forse lo studio delle teorie idrauliche non devesi disgiungere da quello dell'idraulica sperimentale, come si fece fino ad ora; forse l'esperienza e l'osservazione devono fornire i mezzi principali e servire di guida alle ricerche astratte. » Con queste parole l'ancor giovane cultore delle matematiche pure, quasi in iscorcio mostrava un nuovo e non sospetto lato del suo baldo e confidente ingegno, e presagiva a futuri successi che da lui in quel momento non si sarebbero aspettati.

Riprendendo più tardi gli studi idraulici egli infatti d'un tratto si rivelò degnissimo della scuola idraulica italiana, che per tradizione secolare, egli stesso diceva, andare da Torricelli a Lombardini, e che noi oggi possiam dire avere avuto in lui e in Turazza e in altri, continuatori nobilissimi. Nei suoi scritti sui recenti progressi pratici dell'idraulica, sulle formole empiriche per le portate dei fiumi, sulle traverse oblique, sulle traverse in muratura, nel programma di esperienze idrauliche da lui escogitato, nella direzione dei rilievi idrometrici del Po destinati a meglio studiare il bacino idraulico padano, egli seppe mostrare una profonda e chiara percezione della funzione che le matematiche pure sono chiamate ad adempiere nelle ricerche idrauliche e nelle fisiche in generale; egli giustamente opinò che non si devono, che non si possono a forza piegare al calcolo teorico e a formole dottrinali i fenomeni della natura; egli seppe accoppiare alla consueta sua virtuosità di analista e di calcolatore « tutti gli avvedimenti di un osservatore acutissimo, di un tecnico consumato, di un vero e proprio sperimentatore ». Egli maestro riconosciuto di matematiche pure, con maraviglia di molti si affermò maestro ancora di matematiche applicate.

Nè dell'insolito fatto è difficile rendersi ragione. Esistono due specie di tendenze intellettive; l'una propria degli ingegni forti e profondi, che conduce a sviscerare le conseguenze ultime di uno o di pochi princípi; l'altra propria degli ingegni vasti e comprensivi, che conduce ad abbracciare ad un tempo un gran numero di princípi diversi senza confonderli. Due vie diverse si possono battere nella ricerca del vero; l' una antichissima, la deduttiva; l'altra, relativamente recente, l'induttiva. Nella mente di Francesco Brioschi, per felice disposizione di natura, le due opposte tendenze dello spirito umano, l' intensiva e l' estensiva, mirabilmente si accoppiavano. Francesco Brioschi, grazie all' esercizio assiduo di una volontà tenace, era riuscito a rendersi ugualmente padrone dei due opposti metodi di indagine, a percorrere con andatura sempre magistrale le vie della deduzione non meno che quelle dell'induzione.

In questo sta la vera caratteristica della mente di Francesco Brioschi, in questo risiede la sua straordinarietà; da questo punto di vista noi la dobbiamo guardare se vogliamo con sguardo sintetico tutta abbracciare la potente opera sua di scienziato.

Nel 1862 egli, segretario generale, reggeva con Carlo Matteucci, ministro, il dicastero della pubblica istruzione. Il metodo sperimentale che, sorto in Italia, aveva gettato le sue propaggini per tutto il mondo civile, qui, dove nacque, aveva finito per essere in parte trascurato. Francesco Brioschi non esita un istante: munisce l'osservatorio di Brera di un nuovo strumento salito ben presto a meritata fama: dà mano efficace a fondare istituti speciali di fisica sperimentale, e via via gabinetti e laboratori per tutte quelle scienze che dall'osservazione e dalle esperienze traggono alimento e progresso. Alla mia fibra di scienziato italiano riesce ognora di sommo conforto immaginare quest'italo Titano che con una mano, per mezzo degli *Annali* alla sua direzione affidati, governa in Italia gli studi di matematica pura, coll'altra contribuisce a risospingere a vita nuova e vigorosa la scuola tutta italica di Galileo.

Più tardi nel 1875, Quintino Sella, presidente della R. Accademia dei Lincei, provocava un decreto che in essa istituiva la classe di scienze morali e politiche. Francesco Brioschi, dopo Sella, fu uno dei più caldi promotori di quel decreto. Non era smania di imitare gli ordinamenti delle grandi accademie straniere quella che spingeva i due eminenti intelletti. Essi si ispiravano ben più alto, al concetto voglio dire che le scienze morali e politiche le quali tanta parte sono della scienza di Stato, avessero ad attingere nuova gioventù al metodo di Galileo, allo studio e all'osservazione diretta degli uomini e delle cose. È moda commiserare, sprezzare pur anche le accademie scientifiche; eppure se alla fresca fonte di modernità, aperta, ora è un quarto di secolo, dagli accademici italiani, meglio e più dissetati si fossero i legislatori nostri, meno dottrinaria certo, più originale, meglio corrispondente ai veri e sentiti bisogni della penisola sarebbe riescita l'opera loro.

Più tardi ancora nel 1887, presiedendo Brioschi alla R. Accademia dei Lincei, in una di quelle sedute solenni nelle quali usava con parola sobria e colorita svelare la sua mente di scienziato e di pensatore, usciva egli in questi detti memorabili: « è credenza che il complesso di alcune qualità della scienza predisponga l'animo de' suoi cultori a tiepidezza e fin anco a indifferenza rispetto a quei problemi sociali che, per quanto non estranei ad essa, traggono però in buona parte dal sentimento la loro ragione di esistenza. Questa credenza, o per dir meglio questo giudizio, non esatto in alcun tempo, è fallace per lo scienziato moderno. »

Nessuno in Italia avrebbe potuto pronunciare con altrettanta autorità parole più veridiche. Alla sua mente comprensiva che abbracciava la più gran parte dell'intenso lavoro intellettuale positivo del secolo nostro, all'occhio suo di moderno linceo sfuggito non era, nè sfuggir poteva, che sotto l'alta temperatura e sotto la forte pressione create dai progressi delle scienze, dalle facili comunicazioni, dai cresciuti rapporti umani e dalle rapide trasmissioni di pensiero che ne sono la conseguenza, il problema sociale, da statico che prima era, trasformato erasi in dinamico e del moto aveva preso insieme pregi e pericoli. Nè egli poteva sgomentarsene. A lui matematico e idraulico troppo erano famigliari i caratteri tutti del movimento. Egli sapeva che nei sistemi cosmici tutto si muove, e che in essi il moto, anzichè causa di distruzione, è ragione necessaria di esistenza. Egli non ignorava che il moto diventa fatale solo quando trasmodi o quando si voglia bruscamente arrestarlo; egli a ragione pensava che il moderno moto sociale dovesse essere governato e rialzando la coltura delle diverse classi e adottando ordinamenti opportuni.

Ed egli pensò che fra questi ordinamenti uno dovesse esserci che mirasse a produrre uomini capaci di sospingere e moderare insieme questo moto moderno; ed egli pensò che allo scopo giovar dovesse l'istituire a fianco delle antiche università delle scienze la moderna università tecnica, nella quale lo studio delle matematiche fatto con diverso e proprio indirizzo, lo studio delle scienze applicate governato sempre dalla viva luce che emana dalle scienze pure, lo studio della scienza delle probabilità ausilio indispensabile alle ricerche induttive, riguardino esse i fatti o cosmici, o fisici, o sociali, valessero a risvegliare nei giovani l'abito di sprezzare l'empirismo sotto tutte le sue forme, l'abito di portare nei problemi pratici i dettami sicuri della scienza, il bisogno di sottoporre i propri pensieri alla critica inesorabile dei fatti, la giusta coscienza del proprio sapere, il senso prezioso della misura, la persuasione che tutte le teorie e dottrine umane qualche cosa in sè hanno di ipotetico e di arbitrario, e più ne hanno quanto più sono assolute nelle loro affermazioni, o temerarie nelle loro negazioni.

A questo altissimo ordine di idee, non ai miserrimi e puerili moventi dei quali talora udii parlare, noi dobbiamo o signori, voi dovete o giovani allievi questo nostro Istituto Tecnico Superiore, che io, pur considerandolo da un astratto ed esclusivo punto di vista scientifico, non esito a dichiarare l'opera più sapiente e comprensiva del nostro maestro immortale, ben degno di monumento. Qui con cura paziente, lunga, tenace, sagacissima egli integrò, nel senso matematico della parola, tutti i tesori del suo vario sapere, tutte le risorse del suo maraviglioso ingegno, che non conobbe nè l'immaturità giovanile, nè la senile decadenza, che per mezzo secolo intero godè di una robusta e feconda virilità, che non domo nè stanco un giorno fatalmente si spezzò, come lama adamantina si spezza nel bollore della mischia, e che ancor poco prima di giacere estinto lanciò lampi di luce vivissima.

DISCORSO DEL PROF. GIUSEPPE BARDELLI

del R. Istituto Tecnico Superiore.

Signore e Signori,

L'illustre Direttore dell'Istituto Tecnico Superiore ha desiderato che in questa solenne circostanza anche la mia voce si facesse sentire, ed io ho accolto l'invito non senza esitanza, perchè nessun altro titolo poteva indicare la scelta della mia persona tranne che l'essere io stato di Francesco Brioschi modesto scolaro in quel periodo, prima del 1859, che fu forse il più brillante della sua carriera scientifica e sopratutto per sentirmi a lui legato da imperitura e sempre viva gratitudine, chè alla sua benevolenza io debbo l'avviamento negli studi, la carriera nell' insegnamento, le mie attuali posizioni ufficiali: e come avrei potuto rinunziare ad occasione così opportuna per questa mia riconoscente attestazione?

La figura di Francesco Brioschi, a cui oggi è rivolto il pensiero di quanti qui sono convenuti, può essere sotto vari e tutti importanti aspetti considerata, ma principalmente sotto quelli dello scienziato e dell'insegnante.

Di questi io mi permetto brevemente, come meglio mi sarà dato, intrattenervi ed in particolare sul secondo, chè a quanto avete ora udito esporre intorno al primo aspetto con tanta eleganza ed autorità dai senatori Colombo e Blaserna e dal prof. Celoria, mi sento molto peritoso aggiungere le mie parole.

Alte notabilità scientifiche nazionali ed estere hanno commemorato ed illustrato il matematico ed il mio dire non potrebbe essere che una pallida eco di quanto in accademie, in riviste scientifiche, in solenni occasioni fu detto e scritto con competenza ed autorità indiscutibili. Io mi sentirei troppo inferiore all'argomento quando dovessi affrontarlo coll'intento di esporre cose nuove o di svolgerlo adeguatamente, chè lo stesso Senatore Eugenio Beltrami, di cui è ancor vivo il compianto per la immatura perdita, e che fu dei più insigni discepoli di Brioschi, ebbe a dichiarare di non sentirsi abbastanza forte per accingersi ad una storia rispondente al soggetto della operosità e della produzione scientifica del Maestro. Mi limiterò pertanto a qualche particolare che a giudizio mio mi parve meritevole di essere ricordato, coordinandolo ad alcuni concetti che, vorrei sperare, varranno a bene delineare la figura dell'eminente scienziato.

La comparsa di Brioschi nel campo scientifico segnò, principalmente per iniziativa e per merito suoi, un vivo risveglio, una feconda attività negli studi matematici italiani, di cui i buoni frutti non tardarono a manifestarsi. Oltre i confini nostri più che di nome non erano conosciuti i più valenti cultori delle scienze esatte; di Antonio Bordoni e di Gabrio Piola, maestri a Brioschi, le pubblicazioni pressochè tutte escirono alla luce in Italia e furono quindi quasi ignorate dagli studiosi stranieri. Il Brioschi ebbe subito la vera intuizione dei nuovi tempi e pur continuando a pubblicare lavori negli *Atti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, e negli *Annali del Tortolini*, dove aveva fatte le prime armi e che più tardi tramutò nella più importante rivista matematica italiana che vigorosa a lui sorvive, contemporaneamente con assidua lena arricchiva dei frutti del suo ingegno le più reputate raccolte scientifiche straniere in ispecie le *Nouvelles Annales de Mathématique*, il *Journal de Mathématique di Liouville*, il *Journal für die Mathematik di Crelle*, i *Comptes rendus dell'Istituto di Francia*.

Oltre a ciò egli curò le personali ed amichevoli relazioni coi più rinomati matematici d'oltrealpi, relazioni che si fecero sempre più frequenti ed estese e proseguirono intime sino agli ultimi suoi giorni. Accennerò in particolare ai vincoli che lo legarono al Cayley, al Sylvester, al Kronecker, al Bertrand, all'Hermite e che tanto contribuirono a diffondere ed a far apprezzare la scienza italiana all'estero. Non voglio a questo proposito omettere di menzionare come, nel suo primo viaggio in Germania, nel 1854, Humbold, a cui era stato presentato, non potè trattenere la sua grata sorpresa di trovare tanto giovane l'autore della *Teorica dei determinanti.*

Si racconta che Cauchy, il sommo annalista, chiamò poeta il Poncelet resosi celebre per le alte investigazioni di geometria pura, non intravedendo che il poeta si preparava col *Traité des propriétés projectives des figures* a diventare il fondatore della meccanica industriale. Il confronto fra Poncelet e Brioschi pare a me che possa istituirsi e con vantaggio di quest' ultimo, perocchè lo studio delle matematiche pure si associò in lui sino dall' inizio della sua carriera, sebbene in minore misura, con quello delle scienze d'applicazione. Poco dopo avere elaborato la classica opera sui determinanti e quando attendeva, tra gli altri lavori, alla pubblicazione di quell'aureo opuscolo che è la *Statica dei sistemi di forma invariabile,* lo vediamo occuparsi di studi idraulici e stendere la magistrale prefazione ad una memoria postuma di Idrodinamica del Piola nella quale seppe condensare una diligentissima storia critica delle ricerche fatte in Italia nella prima metà di questo secolo intorno al moto delle acque, lavoro che, al dire di Beltrami, brilla per maturità e sicurezza di vedute in una parte così difficile ed incompleta e così controversa nelle scienze esatte.

Il ricordato giudizio di Cauchy su Poncelet io lo appresi ripetutamente dalla bocca dello stesso Brioschi e duplice parve a me il significato o la portata ch'egli vi attribuiva. Innanzi tutto, che un solido fondamento di coltura matematica esso riteneva indispensabile a chiunque voglia provarsi con vantaggio nel campo delle applicazioni e lasciarvi durevole traccia; di poi che nello studio delle matematiche pure non è mai da dimenticarsi il loro principale ufficio, che ne costituisce un pregio effettivo, indiscutibile, da cui si è bene spesso attratti a coltivarle, quello cioè di prestarsi come mezzo, come strumento di ricerca e nella esplicazione dei fenomeni naturali, potente e necessario sussidio alle scienze sperimentali e di osservazione, dalle quali, storicamente, nell'antichità non meno che nei tempi moderni, la matematica ripete le sue origini od ha preso le mosse. Se mi si permette la espressione, Brioschi non intendeva la matematica per la matematica ed anco nelle teoriche in cui lasciò profonda l'orma del suo ingegno, come nella integrazione delle equazioni della dinamica, nella risoluzione delle equazioni di quinto e sesto grado, nella stessa teoria delle forme, non sarebbe difficile il riconoscere la possibile applicazione che quelle teoriche potrebbero ricevere, sia pure in lontano avvenire, a problemi di interesse e di utilità pratica. Che codesti fossero i suoi concetti n' è prova lo speciale ordinamento da lui dato agli studi di coltura generale scientifica nel biennio preparatorio alla Scuola di applicazione per gli ingegneri, allorchè nel 1876 fu completato l'Istituto Tecnico Superiore.

La matematica spazia ormai in regioni così astruse, così elevate, quasi metafisiche, che è assai difficile intuire come possa trovar la via per riattaccarsi al mondo della realtà. A codesto nuovo e specialissimo indirizzo degli studi è significante che Brioschi non ha portato un diretto contributo, mentre a lui sarebbe stato di certo agevole anche in quelle regioni mietere abbondantemente; e la opportunità gli era offerta, chè nel notevolissimo numero de' suoi lavori, sono oltre a 250, non v' è parte importante della analisi, della geometria, della meccanica razionale di cui non siasi occupato. Ma pur essendo scienziato moderno nel senso più vero della parola, punto esclusivo, estimatore sempre d'ogni ordine di studi, come matematico egli preferì attenersi alla scuola classica, che ha per antesignani Lagrange e Gauss.

A Leonardo da Vinci vuolsi attribuire la risoluzione generale dell'equazione di secondo grado, a Nicolò Tartaglia, a Gerolamo Cardano, a Luigi Ferrari è dovuta quella delle equazioni di terzo e di quarto grado; spetta primamente a Paolo Ruffini la dimostrazione della impossibilità della risoluzione dell' equazione di quinto grado per mezzo di radicali. Ora se nella teorica delle equazioni algebriche vuolsi da taluni sostenere, e con buoni argomenti, che sostanzialmente consista l' algebra e l' analisi algebrica, se è vero, come non è da dubitarsi, che in Italia sono da ricercarsi l'origine ed il più importante svolgimento di quelle discipline, il nome di Brioschi, tanto intimamente legato alla dottrina delle equazioni di quinto e sesto grado ed ai risultati in essa conseguiti, per onore della scienza nazionale, deve degnamente unirsi a quelli dei testè nominati e completarne la illustre schiera.

Lasciate ch' io chiuda quello che troppo succintamente ed in modo disadorno vi ho esposto sullo scienziato col ripetere qui le parole con cui il principe dei matematici francesi viventi, l' Hermite, lo ha commemorato all'Istituto di Francia:

« La carriera percorsa dal nostro eminente confratello è stata una delle più onorevolmente operose di cui rammenti la storia scientifica del tempo nostro. Per quasi mezzo secolo i suoi lavori si succedettero senza interruzione in ogni ramo della scienza matematica, lasciando dovunque la impronta indelebile della sua gagliarda originalità. Al primo aprirsi di questa splendida carriera, quando siffatti studi poco coltivati in Italia non avevano altro organo che il giornale romano di Tortolini, Brioschi vi inserì lavori che lo rivelarono di bòtto geometra di primo ordine. Queste pubblicazioni gli valsero il raro ed invidiabile vanto di dare un impulso potente alla scienza matematica del suo paese. Per l'influsso di lui essa prese il posto che le spettava e fece bella mostra di sè negli *Annali di matematica* da lui diretti e recati ben presto all' altezza delle più cospicue pubblicazioni periodiche di Francia, di Germania e d'Inghilterra. La vita scientifica di lui divenne così esempio pei suoi discepoli e la stima universale che circonda il suo nome valse di incoraggiamento a quelli che ne seguirono le orme; egli ha meritato che l'Italia si professi riconoscente a lui della illustrazione che essa riceve dalle sue scuole matematiche. »

L'insegnante fu per valore e per efficacia all'altezza dello scienziato. La perspicuità, la versatilità del suo ingegno, già notata negli studi, noi la riscontriamo in esso anche sulla cattedra.

Due fatti a questo riguardo vanno principalmente menzionati. Allorchè nel 1850, al riaprirsi della università pavese dopo le vicende del 1848, il Brioschi, proposto dal Piola al Bordoni, fu ivi chiamato pel corso di meccanica razionale, egli dettò per qualche tempo anche il corso di architettura civile ed idraulica a cui non erasi ancora provveduto con uno speciale professore, ed è probabile che questa circostanza abbia influito a che esso ritornasse più tardi all' idraulica e ne facesse il suo insegnamento normale. Fondandosi sul finire del 1863 questo Istituto Tecnico Superiore, Brioschi oltre alla meccanica razionale insegnò, per imprescendibili necessità nella assunzione del nuovo personale, contemporaneamente l'idraulica e la scienza delle costruzioni, mostrando anche in questa una padronanza che nessuno avrebbe in lui supposta, comechè non sapevasi che ne avesse mai fatto oggetto di studio speciale. Trascorso un anno occupò definitivamente la cattedra di idraulica, trattando pure per vari anni in un corso di esercitazioni matematiche svariati argomenti di analisi superiore e di meccanica superiore, dopo avere assegnate ad altri le cattedre di meccanica razionale e della scienza delle costruzioni.

La facile ed incisiva parola, l' ordine e la chiarezza della esposizione, la straordinaria perizia del calcolo, una memoria veramente eccezionale che lo dispensava dal ricorrere ad appunti scritti, a note nello svolgimento delle sue lezioni, per quanto ardui e complessi ne fossero gli argomenti, tutto ciò in fine che fa didatticamente perfetto il maestro, in lui riunivasi in pieno accordo ed in grado veramente eccezionale.

Ma le sue lezioni acquistavano la massima efficacia e riescivano oltremodo profittevoli quando a lui ricorrevasi per consigli, per schiarimenti, per avere indicazioni di fonti di studio. Ricordo come, anche pressato da molte e gravi cure, egli sempre volontieri, direi quasi piacevolmente, corrispondeva alle richieste che gli venivano fatte, sentivasi soddisfatto, contento, quando riconosceva di avere nello scolaro seriamente destato l'interesse, l'amore per lo studio, e gli era largo di aiuti o di incoraggiamento. Era sua massima che studiare vuol dire meditare e con lavoro indefesso vincere difficoltà e che è certo indizio di poco o punto studio quando le difficoltà non si affacciano, quando si trova facile tutto quanto esce dalla bocca, sia pure, del più valente maestro.

Che con codeste singolari attitudini, con così favorevoli disposizioni, verso gli studiosi seri, volonterosi, abbia saputo creare una vera scuola che da lui si designa, di leggieri si comprende, una scuola che conta tra i più illustri suoi rappresentanti, Felice Casorati, Eugenio Beltrami, entrambi tolti alla scienza, e Luigi Cremona a cui mando, come scolare, un riverente saluto ed un vivo augurio di lunga e prosperosa esistenza.

All' opera dell' insegnante fu in Brioschi intimamente coordinata quella di direttore di questo Politecnico, di cui è qui superfluo l' intrattenervi, perocchè della sua robusta compagine, dell'ordinamento de' suoi studi, del modo col quale corrispose e corrisponde ai nobili e utili intenti propostisi dall' il-l' illustre suo fondatore, voi tutti potete giudicare. Dirò invece della autorità grandissima dal direttore esercitata sui docenti e sugli allievi, la quale, più che dalla superiorità dell' ingegno, dalla riputazione scientifica, io penso che gli derivasse dall' equilibrio delle sue facoltà, dalla imparzialità dei giudizi, dalla larghezza di idee che portava in ogni quistione, dalla straordinaria operosità, da quelle doti personali infine che si possono concepire anche all' infuori dell' ingegno eccezionale e che fortunatamente fanno ancora sugli animi impressione più viva di quella che faccia lo stesso sapere, forse perchè più rado a riscontrarsi.

Ai docenti concesse libertà di movimenti certamente maggiore che in altre scuole superiori; specie nelle proposte de' programmi di insegnamento, nel loro svolgimento, nelle modalità per gli esami e simili, il che è bene rilevare per confutare l' opinione infondata di coloro che ritenevano affatto personale, autoritario, il sistema didattico e direttivo di Brioschi. Egli è certo che, come quella libertà conferiva maggiore autorità all' insegnante, questi sentiva altrettanto impegnata la propria responsabilità e di conseguenza era meglio guarentito l'adempimento del suo ufficio.

Gli allievi voleva educati a quella disciplina che direbbesi di sentimento, di cui ciascuno deve riconoscere la necessità, perchè se viene a mancare, mancano pure nella scuola ordine, lavoro, profitto; i primi ad esserne pregiudicati sono gli studenti medesimi; disciplina che ben compresa non avrebbe bisogno di alcuna sanzione regolamentare. Il Politecnico di Milano, conviene saperlo, non fu dal suo fondatore dotato di un regolamento interno e quando ciò gli veniva da qualcuno osservato rispondeva sorridendo, che i regolamenti sono superflui colà dove tutti adempiono al loro dovere, verità che sarebbe utile veder raccolta e sviluppata in ogni trattato di pedagogia. E di doveri più che di diritti. egli preferiva che si parlasse; in tutti riconosceva i primi, era punto facile ad ammettere i secondi.

Le agitazioni degli studenti universitari che a certi e non lunghi periodi si sono susseguite in Italia a disturbare la vita degli studi e che formano purtroppo una parte non piccola nella storia delle nostre scuole superiori, tentarono una volta di far breccia anche nel Politecnico di Milano. Il movimento era nel suo inizio ed il direttore Brioschi, fatti adunare gli allievi in un'aula, vi si recò per conoscere gli intendimenti ed i desideri. Inutile il dire che trattavasi di diritti degli studenti dimenticati o conculcati da parte delle autorità scolastiche, le sole che avessero mancato ai loro doveri. Agli oratori dell'assemblea troncò egli senz'altro la parola, opponendo che non ammetteva negli studenti dei diritti, ma dei doveri; ma poi subito soggiunse: cioè mi correggo, un solo diritto riconosco in voi, pieno ed indiscutibile, ed è quello che siate bene istruiti, quello cioè che noi, io ed i miei professori, facciamo il nostro dovere. La parola coraggiosa, in forma quasi tagliente, ch'egli sapeva in opportuna occasione usare, produsse maggiore e più pronto effetto sugli allievi di un lungo discorso o di un provvedimento disciplinare. Non rammento se dopo d'allora siansi manifestati altri tentativi di agitazioni nel nostro Politecnico, per eccitamento o suggestione di altre scuole, si intende, chè gli allievi che lo frequentano conoscono molto bene come la tutela dei loro diritti, se mai, a nessuno possa essere meglio raccomandata che al loro direttore ed ai loro professori.

Giudicherebbe male chi credesse che la tradizionale osservanza della disciplina nell'Istituto Tecnico Superiore sia l'effetto di una speciale severità delle disposizioni che lo governano. Ho già accennato alla mancanza di un regolamento interno, ora aggiungo che pene o castighi di qualche gravità per trasgressioni disciplinari non so che siansi mai applicati agli allievi. A formare l'ambiente serio, sereno, adatto agli studi dell'Istituto ebbero parte, più di tutto, l'ascendente morale del Direttore e la bontà dell'animo suo che traspariva tosto dal suo fare riciso, apparentemente rude; solamente coi negligenti e coi neghittosi egli si conservava austero, non proclive ad indulgenza. Il desiderio e l'intento di giovare prima cogli studi, poi coi collocamenti nell'esercizio professionali ai giovani ingegneri avanzò in lui ogni altro pensiero. Delle stesse traversie della sua vita, e purtroppo ne ha provate, l'origine è da cercarsi non già nell'interesse e nella ambizione sua personale, sì bene, è d'uopo affermarlo, anche in questa occasione, nel proposito in Lui vivissimo di aprire un più vasto campo d'azione agli allievi suoi, destando e favorendo iniziative per un maggiore movimento industriale nel nostro paese in cui il Politecnico milanese avesse una parte principale.

Membro del Consiglio superiore della pubblica istruzione per oltre trent'anni e suo Vice-Presidente per quattro anni, Brioschi tenne in quell'alto consesso una parte preponderante. Io ebbi l'onore di trovarmi nel Consiglio con lui nell'anno che fu l'ultimo della sua vita e confesso che mi si è rivelato in una fase per me nuova, quasi di sorpresa, della sua operosità e delle sue svariate attitudini. In ogni maniera di questioni presentate al Consiglio, concernenti la legislazione scolastica, gli ordinamenti didattici, i concorsi a cattedre, le nomine e promozioni degli insegnanti, egli portava una così alta competenza, una tale prontezza di memoria nel rammentare fatti e particolari anche di vecchia data, che nella discussione senza l'intervento suo sarebbersi ignorati, un giudizio così sicuro, imparziale e sempre elevato, da indurre i colleghi quasi sempre ad accettarne le proposte; e rarissime, eccezionali erano le occasioni in cui egli non intervenisse coll'autorevole sua parola.

Le cariche tenute da Brioschi nel Consiglio superiore della pubblica istruzione hanno avuto tale affinità e corrispondenza con quelle di insegnante e di Direttore del Politecnico, che sarebbe stata inescusabile lacuna il non toccarne; al poco che ne ho detto è da aggiungersi che nel Senato, in altri Consigli, in Commissioni permanenti o straordinarie presso il Governo centrale, oltre che nelle accademie ed in sodalizi scientifici, egli esercitò ad un tempo e continuamente la sua sorprendente attività, dovunque lasciando indelebile segno del suo passaggio; onde è pienamente vera, perchè dettata da un giusto sentimento di sè, non per vanto o da immodestia, l'affermazione sua che si riteneva in Italia uno dei più strenui ed indefessi lavoratori; ed immane davvero per mole, per importanza, per varietà fu il lavoro da lui compiuto.

Ed ora, al termine del mio dire, mi rivolgo a voi giovani, allievi ingegneri; la statua che si va ad inaugurare è quella di un uomo che toccò le più alte vette del sapere; l'avvicinarlo, non che eguagliarlo, sarà per voi un ideale a raggiungere il quale non basta volere; Natura non stampa in tutti orme egualmente profonde. Ma Francesco Brioschi volle, e fortemente volle, congiungere la eccelsa mente a doti morali non meno eccelse. Negli adescamenti, nelle suggestioni della vita pubblica e politica, da cui le fibre anche robuste sono scosse ed infiacchite, nelle stesse traversie in cui s'è trovato, seppe ognora ritemprarsi e rinvigorirsi collo studio e col lavoro. Egli tenne sempre fermo, non ha mai *piegato, nè pencolato;* fu un carattere nel senso più nobile e più elevato della parola. L'effigie di lui parlante vi sia esempio e stimolo ad imitarlo in ciò che dalla volontà vostra principalmente dipende; voi lo potete e lo dovete, chè l'Italia ha bisogno di uomini di sapere, ma al pari di questi, e, starei per dire, più che di questi, occorrono ad Essa cittadini di forte ed integro carattere. È questo l'augurio che in nome di Francesco Brioschi io faccio a voi ed alla patria nostra.

DISCORSO DI FRANCESCO SQUASSI

allievo del 3.º anno della Scuola d'applicazione per gli ingegneri industriali nel R. Istituto Tecnico Superiore.

Ho accettato volontieri di dire due parole, a nome de'miei compagni, in memoria di Francesco Brioschi perchè mi sembra doveroso si unisca alle voci di quelli che oggi fanno elogio alla venerata memoria di lui, anche quella di coloro che molto devono alla sua sapiente opera di educazione.

Se al rispetto ed alla riconoscenza che ciascuno deve al maestro aggiungete una grande ammirazione, avrete un'idea dei sentimenti che muovono l'animo mio in quest'ora solenne; e per giustificare questa ammirazione non è necessario che io vada molto lungi.

Altri che hanno conosciuto più davvicino Francesco Brioschi, nella sua vita pubblica e privata, ritrassero, meglio di quello che non potrei fare io, la sua spiccata personalità.

Io non ho bisogno di uscire da queste mura.

L'ordine esemplare di tutto ciò che è qui dentro, la tranquillità serena di queste aule, molte e molte cose vi possono dire dell'amore che egli ha portato a questo luogo, della sua meravigliosa potenza educatrice.

Quando ancora gli studi tecnici in Italia versavano in deplorevoli condizioni, volle fondare questo Istituto, assumendone egli stesso la direzione.

Dedicando ad esso la sua poderosa intelligenza ed il suo acuto spirito d'osservazione, riuscì a portarlo in brevissimo tempo all'altezza alla quale voi oggi lo trovate.

Egli ne studiò con cura amorosa l'ordine degli insegnamenti, e nella scelta stessa delle materie tutte, dalla meno alla più importante, fu felicissimo; cosicchè oggi chi esce dal R. Istituto Tecnico Superiore può ben dire di non avere, dal lato tecnico, più alcun bisogno, anche per affrontare i più ardui problemi.

Fu una meritata soddisfazione per lui il vedere gli allievi del suo Istituto ricercati anche fuori d'Italia; e appunto per questo egli volle istituire nei due corsi preparatori le cattedre di lingua tedesca ed inglese, perchè oltre a coloro che egli stesso si occupava di mandare negli stabilimenti esteri, anche quelli che rimanevano tra noi potessero usufruire di tutta quella esperienza tecnica che facevasi nelle altre nazioni.

Oltre che direttore, egli fu professore in questo Istituto, ed io, che ebbi la fortuna di assistere alle sue lezioni, non posso tacere la mia ammirazione per la chiarezza del suo dire.

Devo confessare che mi sembrava qualche cosa di strano il vedere quell'uomo, che fuori di qui aveva tanti e gravi pensieri, mettersi d'un tratto sopra una via diversa, scendere, direi quasi fino al livello delle nostre menti, e cercare tutti i modi di renderci chiaro quello che egli insegnava.

Teneva un ordine meraviglioso, e riusciva facile di seguirlo, anche quando era costretto a riempire la tavola di formole e di numeri.

Ed era in ispecial modo attraente il sentirlo spiegare quelle difficili teorie delle quali egli stesso era padre, cosa che egli modestamente taceva.

Egli volle anche stabilire per questo Istituto un regolamento speciale che sembrò a molti piuttosto severo, quantunque in realtà non lo fosse.

Piuttosto fu severo nel farlo scrupolosamente osservare; ma in ciò fece bene, in quanto anche questo serve a meglio educare l'animo dei giovani.

Ora voi vedete che soltanto fra queste mura Francesco Brioschi ha saputo acquistarsi tre soddisfazioni che io chiamerei anche glorie.

Egli ha, si può ben dire, creato un Istituto, l'ordinamento del quale non ha affatto bisogno di essere cambiato nel più piccolo particolare.

Egli seppe educare dei giovani i quali fecero onore in altre nazioni a se stessi, a lui, e all'Italia.

Egli infine contribuì, in modo molto efficace allo sviluppo dell'industria italiana, poichè certamente buona parte dei nostri industriali furono suoi allievi ed ebbero da lui consigli anche dopo che furono usciti di qui; di più trovarono sempre valido aiuto in quella schiera di giovani che hanno saputo trar profitto da' suoi insegnamenti.

La morte lo tolse a noi quando ancora egli avrebbe potuto esserci molto utile. Ma oltre a tutto ciò che di lui il tempo non potrà far sparire, oggi, quasi a concretare tutte le lodi che salgono a lui da tutto quello che egli ha fatto qui dentro, è ritornato fra noi il suo caro sembiante, che ci porta la gioia, di crederci ancora a lui più vicini.

Ci sembrerà di sentire ancora la sua voce, che sotto un'apparenza burbera, mal riusciva a nascondere la gentilezza del suo animo e l'affabilità colla quale egli era solito trattare i suoi allievi; e quella sua posa abituale di uomo che pensa profondamente, ci ricorderà come, appunto per questa abitudine di pensare assai, tutto a lui riusciva facile.

Ed ora tocca a noi di fargli onore traendo profitto da questo ordinamento esemplare, che egli ci ha creato, e che, con lodevole intenzione, si è voluto mantenere da chi condivise con lui idee efficaci e nobili ideali.

La via, ch'egli ci ha così luminosamente tracciata, sfolgora davanti a noi circondata da un'aureola di gloria; a noi il percorrerla con quell'operosità febbrile della quale egli ci diede un non comune esempio.

Questo sarà il più bell'omaggio che potremo fare alla memoria di lui, che con l'atto, con la parola, con l'esempio seppe destare nell'animo dei giovani la *coscienza del dovere* e *l'amore al lavoro.*

Sulla deformazione delle quadriche di rotazione negli spazî di curvatura costante.

(*Di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

Scopo principale del presente lavoro, che fa seguito alle mie due Memorie pubblicate nei Tomi III e IV (Serie 3) di questi *Annali* (*), è di dare l'estensione completa agli spazî di curvatura costante dei teoremi di Guichard, relativi alle superficie applicabili sulle quadriche di rotazione.

Anche qui la cosa per noi più importante è la *inversione* di questi teoremi, che permette di costruire un metodo di trasformazione per le superficie a curvatura media costante dello spazio ellittico ed iperbolico e, più in generale, per tutte quelle superficie i cui raggi principali (ridotti) di curvatura r_1, r_2 sono legati fra loro da una relazione bilineare simmetrica:

$$a\, r_1\, r_2 + b\,(r_1 + r_2) + c = 0, \tag{α}$$

a coefficienti a, b, c costanti. Per abbreviare, diremo che queste superficie appartengono alla *classe* α). Fra le superficie parallele ad una tale superficie ve ne ha sempre almeno una (§ 1), per la quale risulta costante la curvatura assoluta, ovvero la curvatura media, o in fine la somma dei raggi principali di curvatura. In sostanza adunque le nostre trasformazioni possono intendersi limitate a queste speciali superficie.

Fermandoci particolarmente alla estensione dei teoremi di Guichard, è da notarsi che la quadrica di cui si tratta è sempre di rotazione attorno all'asse focale della conica meridiana. Questa curva può definirsi metricamente dalla proprietà di avere costante la somma o la differenza delle distanze di ogni suo punto da due circoli base fissi, normali all'asse di rotazione. Ora

(*) Citerò questi due lavori antecedenti rispettivamente con: Mem.ª 1.ª; Mem.ª 2.ª.

nello spazio ellittico vi ha una sola specie di circoli e i due fuochi della conica meridiana sono sempre reali; si ha così una sola specie di quadriche di rotazione, le cui flessioni vengono a collegarsi, come si vedrà, alle superficie di curvatura media costante in questo spazio. Nello spazio iperbolico invece sono da distinguersi i circoli in tre specie, secondo che il centro è reale a distanza finita, reale all'infinito, ovvero ideale (*). Corrispondentemente le quadriche di rotazione si distinguono in varie specie a seconda della specie dei due circoli base. Alle flessioni delle quadriche di queste diverse specie corrispondono varii tipi fra loro irriducibili di superficie della classe α); ed è appunto della classificazione di queste quadriche e delle corrispondenti superfici della classe α) che tratta la prima parte della presente Memoria (§§ 1-14).

Passo quindi ad occuparmi del problema d'inversione. Suppongo cioè data una superficie $\overline{S}$ della classe α) e ricerco se essa può sempre farsi derivare, colla costruzione geometrica studiata nella prima parte, da una superficie applicabile sopra una delle superficie fondamentali di rotazione avanti determinate. La risposta è sempre affermativa, ed anzi, mentre data una superficie S applicabile sopra una delle fondamentali di rotazione ne derivano solo due (o quattro) superficie $\overline{S}$ della classe α), coi raggi principali di curvatura legati dalla medesima relazione bilineare, ogni superficie data $\overline{S}$ deriva invece in una *tripla infinità di modi* da superficie S applicabili sulle superficie di rotazione fondamentali. Scelta una qualunque di queste ultime S, costruendo la superficie $\overline{S}'$ simmetrica della $\overline{S}$ rispetto alla S, considerata come superficie riflettente delle normali di $\overline{S}$, si ha in questa superficie $\overline{S}'$ una nuova superficie della *medesima* classe α) della primitiva $\overline{S}$. In questa costruzione consiste il metodo di trasformazione per le superficie della classe α).

La ricerca effettiva delle trasformazioni dipende dalla integrazione di un notevole sistema completo di equazioni simultanee alle derivate parziali, il sistema (A), (B) del § 15. Ha luogo poi l'importante proprietà che, una volta eseguita la integrazione completa di un tal sistema per una superficie iniziale $\overline{S}$, la integrazione dei nuovi sistemi analoghi per tutte le superficie derivate $\overline{S}'$ si compie con soli calcoli algebrici e di derivazione.

Farò da ultimo osservare come questi metodi di trasformazione abbiano un corrispondente significato nell'ordinario spazio euclideo. Per vederlo basta

(*) I circoli della seconda specie diconsi anche *oricicli* e quelli della terza non sono altro che le linee geodeticamente parallele nel piano alla retta.

ricorrere (Cf. Mem.[a] 2.[a], prefazione) alla consueta rappresentazione conforme dello spazio a curvatura costante sullo spazio euclideo. Le superficie immagini delle nostre $\overline{S}$ risultano definite da un'equazione a derivate parziali del secondo ordine della forma d'Ampère e precisamente di quella forma che, secondo le ultime ricerche di Weingarten, si collega col problema dell'applicabilità. Possiamo dunque riguardare i detti metodi di trasformazione come ralativi a queste speciali equazioni d'Ampère, ovvero alla classe corrispondente di superficie applicabili dello spazio ordinario. Così p. e. si dimostrerà che per il caso ellittico le superficie derivate dallo spazio ordinario costituiscono la classe di superficie applicabili sul più generale paraboloide: $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2\,i\,z$, a parametri puramente immaginari. Le presenti ricerche ci pongono dunque in grado di trovare *con soli calcoli algebrici e di derivazione* quante si vogliano superficie reali dello spazio euclideo applicabili sul detto paraboloide.

§ 1.

Le superficie $\overline{S}$ della classe α).

Consideriamo nello spazio di curvatura costante K_0 una superficie $\overline{S}$, i cui raggi principali (ridotti) di curvatura r_1, r_2 soddisfino l'equazione bilineare simmetrica:

$$a\,r_1\,r_2+b\,(r_1+r_2)+c=0. \tag{α}$$

Escludiamo subito, perchè privo d'interesse, il caso in cui sia nullo il determinante $b^2-a\,c$ della α). In questo caso si può scrivere

$$(a\,r_1+b)\,(a\,r_2+b)=0$$

e la superficie $\overline{S}$, avendo costante uno dei raggi di curvatura, sarebbe l'inviluppo di una semplice infinità di posizioni della medesima sfera; apparterrebbe cioè alla ben nota classe delle superficie *canali* (*). I metodi di tra-

(*) Per lo spazio iperbolico sono da distinguersi tre specie di superficie canali, secondo che il centro della sfera mobile è reale a distanza finita, ovvero all'infinito o in fine un punto ideale.

sformazione, che stabiliremo in seguito per la superficie della classe α), sono invero applicabili anche alle superficie canali; ma per lo scarso interesse che offrono allora le trasformazioni in discorso tralascieremo di occuparcene.

Tutte le superficie $\overline{S'}$ parallele ad una superficie $\overline{S}$ della classe α) appartengono nuovamente a questa classe e soltanto variano, nel passaggio da $\overline{S}$ a $\overline{S'}$, i valori dei coefficienti a, b, c. Ora diciamo che si può sempre scegliere questa superficie parallela in guisa che uuo dei tre nuovi coefficienti, che diremo a', b', c', risulti nullo.

Lasciando da parte il caso dello spazio euclideo ($K_0 = 0$), ove l'asserzione trova un'immediata verifica (*), faremo per semplicità $K_0 = +1$ per lo spazio ellittico e $K_0 = -1$ per lo spazio iperbolico. Separando la trattazione dei due casi, cominciamo dallo

Spazio ellittico.

Indichi ω il segmento costante di normale che intercede fra le due superficie parallele $\overline{S}$, $\overline{S'}$ e pongasi

$$\operatorname{tg} \omega = m.$$

Per i raggi principali di curvatura r'_1, r'_2 della $\overline{S'}$ avremo le formole

$$r'_1 = \frac{r_1 + m}{1 - m r_1}, \quad r'_2 = \frac{r_2 + m}{1 - m r_2},$$

onde la relazione α) fra r'_1, r'_2 sarà:

$$a' r'_1 r'_2 + b' (r'_1 + r'_2) + c' = 0,$$

ove si ponga:

$$\begin{aligned} a' &= a + 2 b m + c m^2 \\ b' &= - a m + b (1 - m^2) + c m \\ c' &= a m^2 - 2 b m + c. \end{aligned}$$

L'equazione $b' = 0$ ha sempre le radici in m reali e quindi:

Nello spazio ellittico ad ogni superficie $\overline{S}$ della classe α) sono parallele due superficie a curvatura totale costante (polari l'una dell'altra) (**).

(*) In questo caso fra le superficie parallele ad $\overline{S}$ ve ne ha sempre una ad area minima se $a = 0$, ed invece una a curvatura totale costante se $a \neq 0$.

(**) Si osservi che la proprietà sussiste anche nel caso di una superficie canale. Soltanto allora delle due superficie parallele l'una si riduce alla curva asse della superficie canale, l'altra alla sviluppabile polare di questa curva.

Domandiamo ora se una superficie a curvatura totale costante ammette fra le sue parallele una superficie a curvatura media costante, nel qual caso ne ammetterà anche una, la polare di questa, che avrà costante la somma dei raggi principali di curvatura. Supposto $r_1 r_2 = \frac{1}{k}$, potremo fare nella α)

$$a = k, \quad b = 0, \quad c = -1,$$

e l'equazione $c' = 0$ ci darà $m^2 = \frac{1}{k}$; ne risulta la seguente proprietà, che corrisponde ad una nota proposizione di Bonnet nello spazio euclideo:

Fra le superficie parallele ad una di curvatura relativa k costante se ne trovano due a curvatura media costante solo quando k è positiva. Il valore di questa curvatura media sarà $\frac{k-1}{\sqrt{k}}$.

Passiamo ora allo

Spazio iperbolico.

Ponendo in questo caso

$$\operatorname{tgh} \omega = m,$$

si ha

$$r'_1 = \frac{r_1 + m}{1 + m r_1}, \quad r'_2 = \frac{r_2 + m}{1 + m r_2},$$

e dobbiamo subito osservare che, volendo rimanere nel campo reale, il valore assoluto della costante m dovrà sempre prendersi minore dell'unità.

Per la relazione α) che lega r'_1, r'_2 avremo ora

$$\left.\begin{aligned} a' &= a - 2bm + cm^2 \\ b' &= -am + b(m^2+1) - cm \\ c' &= am^2 - 2bm + c. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Poichè supponiamo $b^2 - ac \neq 0$, sarà $b^2 > ac$, ovvero $b^2 < ac$. Nel primo caso le due equazioni $a' = 0$, $c' = 0$, a radici reciproche in m, hanno radici reali e distinte e danno quindi almeno un corrispondente valore di m tale che $|m| < 1$. Nel secondo caso le equazioni $a' = 0$, $c' = 0$ hanno radici immaginarie; ma l'altra $b' = 0$, cioè

$$bm^2 - (c + a)m + b = 0$$

le ha reali e distinte, poichè

$$(a+c)^2 \geqq 4\,a\,c > 4\,b^2.$$

Inoltre, siccome il prodotto delle due radici di $b'=0$ è l'unità, per una di essa risulterà appunto $|m|<1$.

Abbiamo dunque il risultato:

Nello spazio iperbolico ogni superficie $\overline{S}$ della classe α) possiede fra le sue parallele almeno una superficie, per la quale è costante la curvatura totale, o la curvatura media, o la somma dei raggi principali di curvatura.

Sostituendo ad una superficie $\overline{S}$ della classe α) una conveniente sua parallela, riduciamo queste superficie a vari tipi distinti, colle considerazioni seguenti.

Domandiamo se una superficie $\overline{S}$ a curvatura totale costante possiede fra le sue parallele qualche superficie per la quale sia costante $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$, o r_1+r_2.

Se con k indichiamo il valore costante della curvatura *relativa* $\frac{1}{r_1 r_2}$ di $\overline{S}$, potremo fare nella α)

$$a=k, \quad b=0, \quad c=-1$$

e perchè le equazioni $a'=0$ o $c'=0$, date dalle (1) abbiano radici reali converrà che sia $k>0$. Più precisamente se $k>1$, si potrà rendere soltanto $c'=0$ col porre

$$m=\pm\frac{1}{\sqrt{k}};$$

e se $k<1$ si renderà invece $a'=0$ ponendo

$$m=\pm\sqrt{k}.$$

Dopo di ciò per la superficie parallela $\overline{S'}$ avremo nel primo caso

$$\frac{1}{r'_1}+\frac{1}{r'_2}=\pm\frac{1+m^2}{m}$$

e nel secondo

$$r'_1+r'_2=\pm\frac{1+m^2}{m}.$$

Ne segue: *Ad una superficie $\overline{S}$ dello spazio iperbolico di curvatura relativa k costante positiva sono parallele due superficie a curvatura media costante $H=\frac{1+k}{\sqrt{k}}$, equidistanti da $\overline{S}$, quando $k>1$, ed invece due super-*

ficie (equidistanti da $\overline{S}$) che hanno costante $= \frac{1+k}{\sqrt{k}}$ *la somma dei raggi principali di curvatura quando* $k < 1$ (*).

Si osservi che il valore assoluto di $\frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2}$ nel primo caso o di $r'_1 + r'_2$ nel secondo riesce sempre > 2. Inversamente ad ogni superficie per la quale $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$, ovvero $r_1 + r_2$, sia costante ed in valore assoluto > 2 è parallela una superficie a curvatura relativa costante e positiva.

Supponiamo ora che sia $\overline{S}$ una superficie a curvatura media

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

costante e sia $|H| < 2$; facilmente vediamo che essa ne ammette una parallela $\overline{S'}$ con $r'_1 + r'_2 = -H$. E infatti, se poniamo nella α)

$$a = H \quad b = -1 \quad c = 0$$

e prendiamo poi $m = -\frac{H}{2}$, ne risulterà $a' = 0$, indi appunto

$$r'_1 + r'_2 = -H.$$

Possiamo riassumere questi risultati relativi al caso iperbolico, distribuendo le superficie $\overline{S}$ della classe α) nelle tre classi seguenti:

a) Superficie a curvatura media costante.

b) Superficie per le quali è costante la somma $r_1 + r_2$ dei raggi principali di curvatura.

c) Superficie a curvatura relativa costante e negativa.

In ciascuna delle due classi *a*) *b*) sono poi da distinguersi tre tipi essenzialmente distinti, secondo che il valore assoluto di $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$, o di $r_1 + r_2$, è > 2, $= 2$, ovvero < 2. L'ultima specie in *a*) forma coll'ultima in *b*) un unico tipo. Abbiamo dunque in definitiva nello spazio iperbolico *sei* tipi distinti di superficie della classe α). Fra questi i tipi caratterizzati dalle equa-

(*) Si osservi che nel caso $k = 1$ tutte le superficie parallele hanno la medesima curvatura. È questo il caso ben noto delle superficie a curvatura assoluta K nulla.

zioni

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\pm 2, \quad \text{o} \quad r_1+r_2=\pm 2$$

si possono determinare completamente in termini finiti, come altrove ho dimostrato (*).

§ 2.

CASO DI UNA SUPERFICIE $\overline{S}$ A CURVATURA MEDIA COSTANTE DELLO SPAZIO ELLITTICO.

Cominciamo le nostre ricerche sulla estensione dei teoremi di GUICHARD allo spazio ellittico, riprendendo la discussione iniziata al § 9 Mem.ª 2.ª, della quale riterremo altresì tutte le notazioni. Siano dunque σ, τ due funzioni della sola u, che soddisfino alle equazioni differenziali

$$\tau' = -\cos\sigma \tag{2}$$

$$(3\,\sigma'^2 - \sigma''\,\mathrm{tg}\,\sigma)(1-\cos 2\,\tau) - 2\,\sigma'\,\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,2\,\tau + 2\,\mathrm{sen}^2\sigma = 0, \tag{3}$$

gli accenti indicando derivazione rapporto ad u (**). Abbiamo ivi dimostrato che, presa una qualunque superficie S dello spazio ellittico applicabile sulla superficie di rotazione d'elemento lineare

$$d\,s^2 = d\,u^2 + \cot^2\sigma\,d\,v^2,$$

se per ogni punto M di S si conduce un raggio normale alla linea $u=$ cost. ed inclinato sulla linea $v=$ cost., nell'uno o nell'altro verso, dell'angolo σ, indi sopra ogni raggio della congruenza, a partire da M, si porta un segmento $M\overline{M}=\tau$, il luogo degli estremi $\overline{M}$ sarà una superficie $\overline{S}$ ortogonale ai raggi e, nella corrispondenza fra i punti di S, $\overline{S}$, ai sistemi coniugati di S corrisponderanno i sistemi ortogonali sopra $\overline{S}$. Ora diciamo che *la superficie $\overline{S}$ sarà a curvatura media costante.*

(*) Vedi *Alcune ricerche di geometria non euclidea.* Tom. II (Ser. 3.ª) di questi *Annali.*
(**) La (3) non è altro che la equazione segnata (27) al § 9 Mem.ª 2.ª.

Per dimostrarlo cominciamo dall'osservare che la (3), avendo riguardo alla (2), può scriversi sotto la forma

$$\frac{d}{d\,u}\cdot\frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}2\,\tau-\sigma'(1-\cos2\,\tau)}{\sigma'\operatorname{sen}2\,\tau-\operatorname{sen}\sigma\cos2\,\tau}=0,$$

ed integrata dà quindi l'equazione equivalente:

$$(\sigma'-c\operatorname{sen}\sigma)\operatorname{sen}2\,\tau-(c\,\sigma'+\operatorname{sen}\sigma)\cos2\,\tau+c\,\sigma'=0, \tag{3*}$$

dove c indica una costante arbitraria.

D'altra parte esprimiamo che la $\overline{S}$ ha la curvatura media H costante $=2\,c$, scrivendo le proporzioni (*):

$$E+\overline{e}+2\,c\,\overline{D}:\overline{F}+\overline{f}+2\,c\,\overline{D}':\overline{G}+\overline{g}+2\,c\,\overline{D}''=\overline{E}:\overline{F}:\overline{G},$$

ovvero poichè nel caso attuale

$$\overline{E}:\overline{F}:\overline{G}=D:D':D'',$$

le altre:

$$\overline{E}+\overline{e}+2\,c\,\overline{D}:\overline{F}+\overline{f}+2\,c\,\overline{D}':\overline{G}+\overline{g}+2\,c\,\overline{D}''=D:D':D''.$$

Sostituendo i valori effettivi di

$$\overline{E}+\overline{e},\quad \overline{F}+\overline{f},\quad \overline{G}+\overline{g},\quad \overline{D},\ D',\ \overline{D}'',$$

dati al § 1 Mem.ª 2.ª, si trova che queste proporzioni equivalgono all'unica equazione

$$(3\,\sigma'^2-\sigma''\operatorname{tg}\sigma+\operatorname{sen}^2\sigma)(1+c\operatorname{sen}2\,\tau)+\operatorname{sen}^2\sigma\,(1-c\operatorname{sen}2\,\tau)-$$
$$-2\,c\,\sigma'\operatorname{sen}\sigma\cos2\,\tau=0.$$

Ma questa è una semplice combinazione delle (3), (3*) e trovasi per ciò identicamente verificata.

Resta ora che, integrando il sistema di equazioni (2), (3*), determiniamo la forma dell'elemento lineare della nostra superficie S di rotazione, indi la forma della corrispondente curva meridiana. La prima cosa si fa subito, prendendo per variabile indipendente τ in luogo di u, poichè allora la (3*) si

---

(*) Propriamente il verificarsi di queste proporzioni lascierebbe per sè luogo all'altra possibilità che la $\overline{S}$ sia una sfera; ma le considerazioni stesse svolte nei §§ 4, 5 Mem.ª 2.ª dimostrano che ciò è impossibile. La medesima osservazione, senza che la ripetiamo, vale nei casi analoghi dei paragrafi seguenti.

scrive

$$\cot \sigma \frac{d\sigma}{d\tau} = -\frac{c \operatorname{sen} 2\tau + \cos 2\tau}{\operatorname{sen} 2\tau + c(1 - \cos 2\tau)}$$

ossia

$$\frac{d \log \operatorname{sen} \sigma}{d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau} \log [\operatorname{sen} 2\tau + c(1 - \cos 2\tau)],$$

e integrando si ha

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = k \{ \operatorname{sen} 2\tau + c(1 - \cos 2\tau) \}, \tag{4}$$

indicando k una costante arbitraria.

L'elemento lineare della S sarà dunque

$$ds^2 = \frac{d\tau^2}{\cos^2 \sigma} + \cot^2 \sigma \, dv^2, \tag{5}$$

dove σ si esprime in funzione di τ per mezzo della (4).

§ 3.

L'ellissoide di Guichard in geometria ellittica.

Si tratta ora di definire geometricamente la curva meridiana della nostra superficie di rotazione: dimostreremo che si può assumere per meridiano un'ellisse o, se si vuole, un'iperbola (ciò che nello spazio ellittico torna lo stesso), l'asse di rotazione essendo l'asse focale. Per ciò calcoleremo l'elemento lineare di un ellissoide di rotazione e dimostreremo che coincide con quello sopra ottenuto.

Indichiamo con F, F' i due fuochi, con $2b$ la distanza focale ed, essendo M con punto variabile sulla curva, denotiamo con $2a$ la somma costante delle distanze focali

$$\rho = MF, \quad \rho' = MF'.$$

Ricordiamo ora che l'elemento lineare del piano ellittico (o della sfera ordinaria di raggio $=1$) è dato in coordinate ellittiche dalla formola (*):

$$d s^2 = (\cos 2 \mu - \cos 2 \nu)\left(\frac{d \mu^2}{\cos 2 \mu - \cos 2 b} + \frac{d \nu^2}{\cos 2 b - \cos 2 \nu}\right),$$

essendo

$$\mu = \frac{1}{2}(\rho + \rho'), \quad \nu = \frac{1}{2}(\rho - \rho')$$

la semisomma e la semidifferenza delle distanze focali. Facendo adunque $2 \mu = 2 a$, per l'elemento d'arco $d u$ della nostra ellisse avremo:

$$d u^2 = \frac{\cos 2 a - \cos 2 \nu}{\cos 2 b - \cos 2 \nu} d \nu^2,$$

ossia

$$d u^2 = \frac{\cos 2 a - \cos 2 (\rho - a)}{\cos 2 b - \cos 2 (\rho - a)} d \rho^2. \tag{6}$$

Ora sia σ l'inclinazione comune dei raggi focali sulla tangente; siccome nel triangolo $F M F'$ l'angolo in M è $= \pi - 2 \sigma$, la formola fondamentale di trigonometria sferica ci dà:

$$\cos 2 b = \cos 2 \rho \cos (2 a - \rho) - \operatorname{sen} \rho \operatorname{sen} (2 a - \rho) \cos 2 \sigma,$$

da cui

$$\cos 2 \sigma = \frac{\cos \rho \cos (2 a - \rho) - \cos 2 b}{\operatorname{sen} \rho \operatorname{sen} (2 a - \rho)}$$

e quindi

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} &= \frac{\cos 2 a - \cos 2 (\rho - a)}{\cos 2 a - \cos 2 b} \\ \frac{1}{\cos^2 \sigma} &= \frac{\cos 2 a - \cos 2 (\rho - a)}{\cos 2 b - \cos 2 (\rho - a)}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

onde per la (6) risulta

$$\left(\frac{d \rho}{d u}\right)^2 = \cos^2 \sigma.$$

Ora indichi v l'angolo $M F F'$; avremo

$$\frac{\operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} 2 \sigma} = \frac{\operatorname{sen} (2 a - \rho)}{\operatorname{sen} 2 b}.$$

Se quindi r significa la distanza di M dall'asse focale, sarà

$$\operatorname{sen} r = \operatorname{sen} \rho \operatorname{sen} v = \frac{\operatorname{sen} \rho \operatorname{sen} (2 a - \rho)}{\operatorname{sen} 2 b} \operatorname{sen} 2 \sigma$$

(*) Vedi Darboux, *Théorie des surfaces.* Tom. II, pag. 422.

ovvero

$$\operatorname{sen} r = \frac{\cos 2(\rho - a) - \cos 2a}{\operatorname{sen} 2b} \operatorname{sen}^2 \sigma \,.\, \cot \sigma,$$

cioè, per la prima delle (7):

$$\operatorname{sen} r = \frac{\cos 2b - \cos 2a}{\operatorname{sen} 2b} \cot \sigma.$$

L'elemento lineare dell'ellissoide di rotazione dello spazio ellittico:

$$d s^2 = d u^2 + \operatorname{sen}^2 r \, d \beta^2$$

diverrà quindi:

$$d s^2 = \frac{d \rho^2}{\cos^2 \sigma} + \cot^2 \sigma \, d \beta_1^2 .$$

Facciamo coincidere questo elemento lineare con quello (5) della nostra superficie di rotazione ponendo $\tau = -\rho$ e determinando a, b in guisa che vengano a coincidere le due formole (4) e (7) che, nei rispettivi casi, definiscono σ. Perciò dobbiamo porre:

$$\frac{\cos 2a - \cos 2(\tau + a)}{\cos 2a - \cos 2b} = k \{ \operatorname{sen} 2\tau + c(1 - \cos 2\tau) \},$$

ciò che dà

$$k(\cos 2a - \cos 2b) = \operatorname{sen} 2a$$

$$k c(\cos 2a - \cos 2b) = \cos 2a$$

e quindi

$$\cot 2a = c, \quad \cos 2b = \cos 2a - \frac{1}{k} \operatorname{sen} 2a. \tag{8}$$

Manifestamente risulta di qui che un qualunque ellisoide di rotazione soddisfa a tutte le condizioni imposte alla superficie di rotazione del § 2. Ma viceversa è facile vedere che questa superficie di rotazione, qualunque siano i valori delle costanti c e k può identificarsi con un ellissoide. Per ciò basta dimostrare che, essendo a determinata dalla prima delle (8), risulterà:

$$\left| \cos 2a - \frac{\operatorname{sen} 2a}{k} \right| \leqq 1, \tag{8*}$$

dopo di che la seconda delle (8) darà un valore reale per b.

Ora, a causa del valore (4) di $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma}$ per la nostra superficie si ha

$$k \{ \operatorname{sen} 2\tau + c(1 - \cos 2\tau) \} \geqq 1,$$

ovvero ponendo per c il valore $\cot 2\,a$, dato dalla prima delle (8)

$$\frac{k\{\cos 2\,a - \cos 2\,(\tau + a)\}}{\operatorname{sen} 2\,a} \geqq 1.$$

Se supponiamo

$$\frac{\operatorname{sen} 2\,a}{k} > 0\,,$$

la precedente disuguaglianza si scrive

$$\cos 2\,(\tau + a) \leqq \cos 2\,a - \frac{\operatorname{sen} 2\,a}{k}$$

e, supposto

$$\cos 2\,a - \frac{\operatorname{sen} 2\,a}{k} < 0,$$

sarà anche $\cos 2\,(\tau + a) < 0$, indi

$$\left|\cos 2\,a - \frac{\operatorname{sen} 2\,a}{k}\right| \leqq |\cos 2\,(\tau + a)\,| \leqq 1.$$

Se poi $\cos 2\,a - \frac{\operatorname{sen} 2\,a}{k} > 0$, allora è

$$\cos 2\,a - \frac{\operatorname{sen} 2\,a}{k} < \cos 2\,a < 1$$

e sussiste quindi ancora la (8*). Del tutto similmente si procederà quando sia $\frac{\operatorname{sen} 2\,a}{k} < 0$.

Si osservi poi che la curvatura media costante H della superficie $\overline{S}$ ortogonale ai raggi di una delle due congruenze associate al nostro ellissoide avrà il valore

$$H = 2\,c = 2\cot 2\,a,$$

indipendente dalla distanza focale.

Pel significato geometrico di σ e τ vediamo inoltre che, quando la superficie S è conformata ad ellissoide di rotazione, le due congruenze associate sono costituite dai raggi focali e le due superficie a curvatura media costante ortogonali ai raggi si riducono rispettivamente ai due fuochi, mentre le loro simmetriche rispetto all'ellissoide sono le due sfere di raggio $2\,a$ coi rispettivi centri nei fuochi (*).

(*) Come conferma si osservi che per una tale sfera è $r_1 = r_2 = \operatorname{tg} 2\,a$ e quindi $H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2\cot 2\,a$.

§ 4.

Il teorema di Guichard in geometria ellittica.

Possiamo compendiare i risultati ottenuti nel paragrafo precedente nel seguente teorema, che rappresenta il teorema di Guichard in geometria ellittica:

Si consideri nello spazio ellittico (di curvatura $K_0 = +1$) un ellissoide di rotazione attorno all'asse focale, la cui lunghezza sia $= 2a$. Flettendo comunque l'ellissoide che seco trasporti, invariabilmente legati alla superficie, i segmenti che dai punti di questa vanno all'uno o all'altro dei due fuochi, il luogo dei termini di questi segmenti, primitivamente riuniti in un fuoco, sarà sempre una superficie di curvatura media costante $H = 2 \cot 2a$ (*).

È da notarsi poi che nella corrispondenza fra i punti di due qualunque di queste quattro superficie a curvatura media costante si ha sempre una rappresentazione conforme poichè ai sistemi ortogonali di una qualunque di esse corrispondono sulla deformata dell'ellissoide i sistemi coniugati (§ 2).

Quando l'asse focale abbia la lunghezza di un quadrante, cioè sia $2a = \frac{\pi}{2}$, l'ellissoide assume quella forma speciale che al § 7 Mem.ª 2.ª abbiamo detta *paraboloide* e le superficie $\overline{S}$ diventano superficie ad area minima.

Per alcune considerazioni è utile dare al teorema la forma primitiva di Guichard:

Se si fa rotolare un ellissoide di rotazione, colla lunghezza $2a$ *dell'asse*

(*) Se si supponesse $K_0 = \frac{1}{R^2}$, verrebbe soltanto modificato il valore di H in

$$H = \frac{2}{R} \cot\left(\frac{2a}{R}\right).$$

Facendo crescere R all'infinito, lo spazio ellittico diventa al limite lo spazio euclideo ed H converge verso $\frac{1}{a}$; si ha così al limite il teorema di Guichard per lo spazio euclideo (Cf. Mem.ª 1.ª, prefazione).

focale di rotazione, sopra una qualunque sua superficie applicabile (*), *ciascuno dei due fuochi descrive una superficie di curvatura media costante*

$$H = 2 \cot 2 a.$$

Il rotolamento può avvenire indifferentemente dall'una o dall'altra parte della superficie applicabile e si hanno così le quattro superficie, a curvatura media costante $2 \cot 2 a$, di cui sopra è discorso.

Osserviamo due casi particolari interessanti del teorema generale.

1.° Riduciamo l'ellissoide ad una sfera di raggio $= a$, facendo coincidere i due fuochi ed abbiamo: *Le due superficie parallele alla distanza a da una superficie applicabile sulla sfera di raggio a hanno la curvatura media costante $H = 2 \cot 2 a$.* Questo è il teorema di Bonnet, generalizzato alla geometria ellittica, come già venne osservato al § 1.

2.° Dell'ellissoide generale di rotazione consideriamo una qualunque S delle sue ∞^1 deformate di rotazione. Le due superficie descritte dai due fuochi dell'ellissoide nel rotolamento di questo sulla superficie applicabile S saranno manifestamente ancora superficie di rotazione e di più a curvatura media costante. Dunque: *Se nel piano della geometria ellittica si fa rotolare la ellisse sopra la curva meridiana di una superficie di rotazione applicabile sull'ellissoide, il fuoco descriverà una curva che, rotando attorno al medesimo asse, genererà una superficie a curvatura media costante.*

La deformata di rotazione S dell'ellissoide può restringersi indefinitamente attorno all'asse, sino a ridursi, al limite, all'asse stesso. Ne deduciamo il teorema:

Se nel piano ellittico si fa rotolare un'ellisse sopra una retta, il fuoco descrive una curva che, rotando attorno alla retta fissa, genera una superficie di curvatura media costante.

Questo non è altro che l'estensione allo spazio ellittico di un noto teorema di Delaunay, relativo allo spazio euclideo.

Considerazioni analoghe a quelle del presente paragrafo, valgono, senza che stiamo a ripeterle, pel caso iperbolico.

(*) Essendo Σ, Σ' due superficie applicabili M, M' una coppia di punti corrispondenti si collochi Σ' in guisa che M' coincida con M e Σ, Σ' ivi si tocchino, coincidendo gli elementi lineari di Σ uscenti da M coi corrispondenti di Σ'. Se, tenendo fissa Σ, immaginiamo di ripetere la costruzione per *ogni* punto M di Σ, diciamo allora che Σ' *rotola* sopra Σ.

§ 5.

Caso di una superficie $\overline{S}$ a curvatura totale costante nello spazio ellittico.

Le congruenze associate ad un ellissoide di Guichard nello spazio ellittico rimangono ciascuna, in tutte le flessioni dell'ellissoide, normali a due superficie parallele $\overline{S}$, $\overline{S}'$ colla medesima curvatura media costante e quindi anche (§ 1) ad una superficie Σ a curvatura totale costante, la superficie media fra $\overline{S}$, $\overline{S}'$. Tali superficie Σ non sono però le più generali a curvatura costante, poichè per esse la curvatura *relativa* è positiva (v. § 1).

Vogliamo ora occuparci del caso più generale in cui la superficie $\overline{S}$ normale ai raggi della congruenza associata alla superficie S di partenza rimanga, in tutte le flessioni di S, a curvatura totale costante, il valore di questa curvatura essendo affatto arbitrario. Partiremo per ciò dal risultato stabilito al § 3 Mem.ª 2.ª, secondo il quale volendo che, in ogni flessione di S, alle assintotiche di S corrispondano sempre le assintotiche sulla superficie $\overline{S}$ normale ai raggi della congruenza associata, bisogna prendere per S una superficie d'elemento lineare

$$d s^2 = d u^2 + \cot^2 \sigma \, d v^2$$

e, serbando le funzioni σ, τ di u il significato del § 2, debbono essere soddisfatte le equazioni caratteristiche:

$$\left.\begin{aligned} \tau' &= -\cos\sigma \\ (3\sigma'^2 - \sigma'' \operatorname{tg}\sigma) \operatorname{sen} 2\tau &= 2\sigma' \cos\sigma \cos 2\tau \ (*). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Cominciamo dal dimostrare che la $\overline{S}$ avrà appunto in tal caso costante la curvatura totale. Perciò osserviamo che la seconda delle (9) può scriversi, in forza della prima, sotto la forma:

$$\frac{d}{du}\left\{\cos 2\tau + \frac{\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen} 2\tau}{\sigma'}\right\} = 0,$$

cioè $\cos 2\tau + \dfrac{\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen} 2\tau}{\sigma'}$ sarà una costante.

(*) Questa seconda equazione non è altro che la seeonda delle (11) § 3 Mem.ª 2.ª.

Indicandone il valore, per opportunità di confronto, con $1 - \frac{2}{K}$ potremo sostituire alla seconda delle (9) la seguente:

$$2\sigma' + K \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen} 2\tau - K\sigma'(1 - \cos 2\tau) = 0. \tag{9*}$$

D'altra parte esprimiamo che la $\overline{S}$ ha la curvatura assoluta costante $= K$, scrivendo le proporzioni:

$$\bar{e} - \overline{E} + K\overline{E} : \bar{f} - \overline{F} + K\overline{F} : \bar{g} - \overline{G} + K\overline{G} = \overline{D} : \overline{D}' : \overline{D}'',$$

ovvero, ciò che nel caso attuale torna lo stesso

$$\bar{e} - \overline{E} + K\overline{E} : f - \overline{F} + K\overline{F} : \bar{g} - \overline{G} + K\overline{G} = D : D' : D''.$$

Col calcolo effettivo, si trova che queste proporzioni equivalgono all'unica equazione:

$$(3\sigma'^2 - \sigma'' \operatorname{tg}\sigma)\left\{\cos 2\tau + \frac{K}{2}(1 - \cos 2\tau)\right\} +$$
$$+ 2\sigma' \operatorname{sen}\sigma\left(1 - \frac{K}{2}\right)\operatorname{sen} 2\tau + K\operatorname{sen}^2\sigma = 0,$$

la quale è una semplice combinazione delle (9), (9*) ed è quindi verificata. Così abbiamo dimostrato che prese σ, τ in guisa da soddisfare la (9*) e l'altra $\tau' = -\cos\sigma$, la $\overline{S}$ avrà la curvatura costante K.

Per determinare completamente l'elemento lineare della S basta ora procedere in modo analogo al § 2, scrivendo la (9*) sotto la forma immediatamente integrabile

$$\frac{\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{d\sigma}{d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\log\{2 - K(1 - \cos 2\tau)\}.$$

Se ne conclude: La superficie S avrà in questo caso l'elemento lineare:

$$ds^2 = \frac{d\tau^2}{\cos^2\sigma} + \cot^2\sigma\, dv^2, \tag{10}$$

essendo σ definito, in funzione di τ, dalla formola

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma} = k\{2 - K(1 - \cos 2\tau)\}, \tag{10*}$$

dove k indica una costante arbitraria.

Abbiamo già data al § 3 la definizione geometrica della curva meridiana per la forma tipica S di rotazione nel caso $K > 1$, il che ci ha condotto all'ellissoide di GUICHARD. Negli altri casi dovremmo suddistinguere varie forme tipiche per questa curva; ma tralasciamo tale discussione che, salvo la complicazione maggiore, sarebbe analoga a quella già eseguita per lo spazio euclideo al § 7 della Mem.ª 1.ª.

§ 6.

SUPERFICIE $\overline{S}$ A CURVATURA MEDIA COSTANTE NELLO SPAZIO IPERBOLICO.

Passando ora alla estensione dei teoremi di GUICHARD allo spazio iperbolico, cominciamo dalle ricerche relative alla superficie S di curvatura media costante, nella qual cosa procederemo in modo del tutto analogo al § 2, rilevando solo le differenze fra i due casi. Le due funzioni σ, τ di u debbono qui soddisfare le due equazioni differenziali:

$$\left.\begin{aligned} &\tau' = -\cos\sigma \\ &(3\sigma'^2 - \sigma''\operatorname{tg}\sigma)(\cosh 2\tau - 1) - 2\sigma'\operatorname{sen}\sigma\operatorname{senh} 2\tau + 2\operatorname{sen}^2\sigma = 0, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

l'ultima delle quali non è altro che la (27*) § 9 Mem.ª 2.ª.

Come al § 2, dimostriamo anche qui che la superficie $\overline{S}$ sarà a curvatura media costante. Per ciò osserviamo che la seconda delle (11) può scriversi:

$$\frac{d}{du}\,\frac{\sigma'(\cosh 2\tau - 1) - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{senh} 2\tau}{\sigma'\operatorname{senh} 2\tau - \operatorname{sen}\sigma\cosh 2\tau} = 0$$

ed una prima integrazione darà quindi, come equivalente alla seconda delle (11), la equazione seguente:

$$(c\sigma' + \operatorname{sen}\sigma)\cosh 2\tau - (c\operatorname{sen}\sigma + \sigma')\operatorname{senh} 2\tau - c\sigma' = 0, \quad (11^*)$$

dove c indica una costante arbitraria.

Se esprimiamo ora che la $\overline{S}$ ha la curvatura media costante $H = 2c$, scrivendo le proporzioni:

$$\bar{e} - \overline{E} + 2c\overline{D} : \bar{f} - \overline{F} + 2c\overline{D}' : \bar{g} - \overline{G} + 2c\overline{D}'' = \overline{E} : \overline{F} : \overline{G},$$

ovvero

$$\bar{e} - \overline{E} + 2c\overline{D} : \bar{f} - \overline{F} + 2c\overline{D}' : \bar{g} - \overline{G} + 2c\overline{D}'' = D : D' : D'',$$

il calcolo effettivo (*) le traduce nell'unica equazione

$$(3\,\sigma'^2 - \sigma''\,\mathrm{tg}\,\sigma - \mathrm{sen}^2\,\sigma)\,(1 - c\,\mathrm{senh}\,2\,\tau) - \mathrm{sen}^2\,\sigma\,(1 + c\,\mathrm{senh}\,2\,\tau) + \\ + 2\,c\,\sigma'\,\mathrm{sen}\,\sigma\cosh 2\,\tau = 0,$$

che è una conseguenza delle (11), (11*) e quindi trovasi verificata.

Per determinare l'elemento lineare della S si procederà ora come nei casi precedenti, integrando la (11*) scritta sotto la forma:

$$\frac{\cos\sigma}{\mathrm{sen}\,\sigma}\,\frac{d\,\sigma}{d\,\tau} = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{d\,\tau}\log\{c\,(\cosh 2\,\tau - 1) - \mathrm{senh}\,2\,\tau\},$$

e se ne concluderà: L'elemento lineare della S ha la forma

$$d\,s^2 = \frac{d\,\tau^2}{\cos^2\sigma} + \cot^2\sigma\,d\,v^2, \tag{12}$$

essendo

$$\frac{1}{\mathrm{sen}^2\,\sigma} = k\,\{\mathrm{senh}\,2\,\tau + c\,(1 - \cosh 2\,\tau)\}, \tag{12*}$$

con k costante arbitraria.

Resta ora che determiniamo la forma della curva meridiana per la S deformata a superficie di rotazione. Ora, come era da prevedersi per la suddistinzione delle superficie a curvatura media costante dello spazio iperbolico in tre tipi diversi secondo il § 1, questa curva meridiana presenta forme diverse secondo che $|c| > 1$, $|c| = 1$ o $|c| < 1$, cioè secondo che

$$|H| > 2, \quad |H| = 2, \quad |H| < 2.$$

Il caso intermedio $|H| = 2$ è già stato trattato nella Mem.ª 2.ª (§ 19 e s. s.); lo ritroveremo qui nuovamente come caso limite fra i due estremi, che andiamo a considerare separatamente.

(*) Avvertasi che nelle formole (B*) § 2 M.ª 2.ª nell'ultimo termine di $\overline{D}$ deve leggersi $\frac{\partial\sigma}{\partial u}$ in luogo di $\frac{\partial\sigma}{\partial v}$.

§ 7.

L'ellissoide ed iperboloide di Guichard in geometria iperbolica.

Dimostreremo che nel caso $|H| > 2$ per curva meridiana della superficie di rotazione coll'elemento lineare corrispondente alle formole superiori (12), (12*), si può prendere un'ellisse od un'iperbola a fuochi reali e a distanza finita, l'asse focale essendo al solito l'asse di rotazione. Diremo ellissoide od iperboloide di rotazione la quadrica generata e vedremo che la quadrica avrà la prima o la seconda forma secondo che nella (12*) le costanti c, k hanno il medesimo segno, ovvero segno contrario. Per calcolare l'elemento lineare del nostro ellissoide od iperboloide ci potremmo servire delle formole analoghe di quelle al § 6 sostituendo alle funzioni circolari le funzioni iperboliche. Preferiamo qui, per uniformità di trattazione coi paragrafi successivi, il metodo seguente.

Scegliamo nel piano iperbolico un sistema di coordinate di Weierstrass x_0, x_1, x_2, posto

$$x_0 = \cosh\rho, \quad x_1 = \operatorname{senh}\rho\cos v, \quad x_2 = \operatorname{senh}\rho\operatorname{sen} v,$$

sicchè l'elemento lineare del piano

$$d s^2 = d x_1^2 + d x_2^2 - d x_0^2$$

assume la forma geodetica (ellittica)

$$d s^2 = d\rho^2 + \operatorname{senh}^2\rho\, d v^2.$$

Prendiamo il primo fuoco F nel punto (1, 0, 0), ossia $\rho = 0$, centro del sistema geodetico, sicchè il parametro ρ rappresenterà appunto la distanza dal primo fuoco F. Sia poi

$$F' \equiv (\cosh 2b,\ \operatorname{senh} 2b,\ 0)$$

il secondo fuoco, ove dunque $2b$ rappresenta la distanza focale. La distanza ρ' di un punto $M \equiv (x_0,\ x_1,\ x_2)$ dal secondo fuoco F' sarà data dalla nota formola

$$\cosh\rho' = \cosh 2b \,.\, x_0 - \operatorname{senh} 2b\, x_1,$$

ossia

$$\cosh \rho' = \cosh 2\,b \cosh \rho - \operatorname{senh} 2\,b \operatorname{senh} \rho \cos v.$$

Si consideri ora l'ellisse

$$\rho + \rho' = 2\,a,$$

significando $2\,a$ la somma costante delle distanze focali; l'equazione della curva in coordinate ρ, v sarà quindi:

$$\cosh (2\,a - \rho) = \cosh 2\,b \cosh \rho - \operatorname{senh} 2\,b \operatorname{senh} \rho \cos v, \tag{13}$$

da cui

$$\cos v = \frac{(\cosh 2\,b - \cosh 2\,a) \cosh \rho + \operatorname{senh} 2\,a \operatorname{senh} \rho}{\operatorname{senh} 2\,b \operatorname{senh} \rho}$$

$$\operatorname{sen}^2 v = \frac{(\cosh 2\,b - \cosh 2\,a)(\cosh 2\,(\rho - a) - \cosh 2\,b)}{\operatorname{senh}^2 2\,b \operatorname{senh}^2 \rho},$$

e differenziando la prima

$$\operatorname{sen} v\, d\,v = \frac{\cosh 2\,b - \cosh 2\,a}{\operatorname{senh} 2\,b} \frac{d\,\rho}{\operatorname{senh}^2 \rho}.$$

Ora, indicando con σ l'angolo d'inclinazione del raggio focale sulla tangente alla curva, si ha

$$\operatorname{tg} \sigma = \operatorname{senh} \rho \frac{d\,v}{d\,\rho} = \frac{\cosh 2\,b - \cosh 2\,a}{\operatorname{senh} 2\,b \operatorname{senh} \rho \operatorname{sen} v}$$

e però

$$\cot^2 \sigma = \frac{\operatorname{senh}^2 2\,b \operatorname{senh}^2 \rho \operatorname{sen}^2 v}{(\cosh 2\,b - \cosh 2\,a)^2} = \frac{\cosh 2\,(\rho - a) - \cosh 2\,b}{\cosh 2\,b - \cosh 2\,a}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \frac{\cosh 2\,(\rho - a) - \cosh 2\,a}{\cosh 2\,b - \cosh 2\,a}. \tag{14}$$

Per l'arco elementare $d\,u$ della nostra conica avremo:

$$d\,u^2 = d\,\rho^2 + \operatorname{senh}^2 \rho\, d\,v^2 = (1 + \operatorname{tg}^2 \sigma)\, d\,\rho^2 = \frac{d\,\rho^2}{\cos^2 \sigma},$$

e poichè, indicando con r la distanza del punto M mobile sull'ellisse dall'asse focale $v = 0$, è

$$\operatorname{senh} r = \operatorname{senh} \rho \operatorname{sen} v = \frac{\cosh 2\,b - \cosh 2\,a}{\operatorname{senh} 2\,b} \cot \sigma,$$

l'elemento lineare dell'ellissoide sarà dato da

$$d\,s^2 = d\,u^2 + \operatorname{senh}^2 r\, d\,\beta^2,$$

ossia

$$d s^2 = \frac{d \rho^2}{\cos^2 \sigma} + \cot^2 \sigma \, d \beta_1^2, \tag{15}$$

avendo σ il valore assegnato dalla (14).

Se, invece dell'ellisse, vogliamo considerare l'iperbola $\rho' - \rho = 2\, a$, non avremo da fare altro che cangiare nella formola fondamentale (13) a in $-a$. Valgono quindi, con questo cangiamento, anche tutte le formole seguenti, in particolare la (14) che diventerà

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \frac{\cosh 2\,(\rho + a) - \cosh 2\, a}{\cosh 2\, b - \cosh 2\, a}. \tag{14*}$$

§ 8.

Il corrispondente teorema di Guichard in geometria iperbolica.

L'elemento lineare (15) dell'ellissoide od iperboloide coinciderà con quello (12) § 6 della nostra superficie S allorquando, fatto $\tau = \rho$, si possono determinare a, b in guisa da identificare la (12*) colla (14), o colla (14*) rispettivamente.

a) Ora supponiamo dapprima nella (12) le costanti c, k del medesimo segno, che si potrà supporre positivo bastando nel caso opposto cangiare c, k, τ in $-c$, $-k$, $-\tau$. Identificando la (12) con (14), abbiamo

$$\frac{\cosh 2\,(\rho - a) - \cosh 2\, a}{\cosh 2\, b - \cosh 2\, a} = k \,\{ \operatorname{senh} 2\, \rho + c\,(1 - \cosh 2\, \rho) \},$$

il che porta le equazioni

$$k\,(\cosh 2\, a - \cosh 2\, b) = \operatorname{senh} 2\, a$$

$$c\, k\,(\cosh 2\, a - \cosh 2\, b) = \cosh 2\, a,$$

cioè

$$\coth 2\, a = c, \quad \cosh 2\, b = \cosh 2\, a - \frac{\operatorname{senh} 2\, a}{k}. \tag{16}$$

Ora, poichè qui supponiamo $|H| > 2$, cioè $c > 1$, possiamo sempre determinare un valore reale (e positivo) a dalla prima delle (16). Ne risulterà poi anche un valore reale per b della seconda se avremo

$$\cosh 2\,a - \frac{\operatorname{senh} 2\,a}{k} > 1.$$

Ciò ha luogo effettivamente poichè per la (12*) § 6 deve essere

$$k\,\{\operatorname{senh} 2\,\tau + c\,(1 - \cosh 2\,\tau)\} > 1,$$

ossia, sostituendo per c il valore $\coth 2\,a$

$$k\,\frac{\cosh 2\,a - \cosh 2\,(\tau - a)}{\operatorname{senh} 2\,a} \geqq 1.$$

Ma siccome qui è $\frac{\operatorname{senh} 2\,a}{k} > 0$, la disuguaglianza superiore può scriversi

$$\cosh 2\,a - \cosh 2\,(\tau - a) \geqq \frac{\operatorname{senh} 2\,a}{k}$$

o

$$\cosh 2\,a - \frac{\operatorname{senh} 2\,a}{k} \geqq \cosh 2\,(\tau - a) > 1, \qquad \text{c. d. d.}$$

b) Abbiano ora c, k segno contrario e potremo supporre c negativa, k positiva.

Identificando questa volta la (12) colla (14*) troveremo

$$k\,(\cosh 2\,b - \cosh 2\,a) = \operatorname{senh} 2\,a$$

$$c\,k\,(\cosh 2\,b - \cosh 2\,a) = -\cosh 2\,a,$$

da cui

$$\coth 2\,a = -c, \quad \cosh 2\,b = \cosh 2\,a + \frac{\operatorname{senh} 2\,a}{k}, \qquad (16^*)$$

che danno valori reali (positivi) per a, b.

Riassumiamo i risultati ottenuti col teorema:

Si consideri nello spazio iperbolico (di curvatura $K_0 = -1$) l'ellissoide od iperboloide di rotazione, caratterizzato dalla proprietà che la somma o la differenza delle distanze di ogni loro punto da due punti fissi (fuochi) sia costante $= 2\,a$. Si fletta comunque la quadrica, che seco trasporti, invariabilmente legati alla superficie, i segmenti che dai punti di questa vanno all'uno od all'altro fuoco; il luogo degli estremi, primitivamente riuniti nel fuoco, sarà sempre una superficie media di curvatura costante

$$H = 2 \coth 2\,a.$$

Anche qui è da notarsi che ciascuna di queste due superficie, a curvatura media costante $2 \coth 2a$, ne ammette una parallela alla distanza $2a$ colla medesima curvatura media ed ogni volta la superficie media fra le due parallele ha la curvatura totale costante

$$K = \frac{1}{\operatorname{senh}^2 a},$$

come risulta dal § 1. Si osservi ancora che valgono anche qui nel caso iperbolico le considerazioni svolte al § 4 pel caso ellittico.

§ 9.

Il caso limite del paraboloide per $c = 1$.

Nei due paragrafi precedenti abbiamo supposto $|c| > 1$, ossia $|H| > 2$. Ma già nella Mem.ª 2.ª abbiamo risoluto il problema pel caso $|c| = 1$ o $|H| = 2$, trovando come superficie tipica S il paraboloide di rotazione (di 2.ª specie) cioè il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso e da un'orisfera (vedi Mem.ª 2.ª § 20).

Vediamo ora come al medesimo risultato si arrivi, con passaggio al limite, dal caso precedente.

L'ellisse o l'iperbola del § 7 possono anche definirsi come il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso F e da un circolo C' col centro F' reale e a distanza finita; soltanto nel caso ellittico il fuoco F è interno a C' nel caso iperbolico esterno. Ora, insieme al fuoco F, si tenga fisso dei due punti d'incontro di C' coll'asse focale quello A pel quale i due segmenti $\overline{F'F}$, $\overline{F'A}$ hanno il medesimo senso, indi si faccia allontanare all'infinito F', cioè crescere a all'infinito. Il circolo C' diventerà al limite un oriciclo, che nel primo caso volgerà verso il fuoco F la sua concavità, nel secondo la convessità e la conica diventerà il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso F e da un oriciclo, cioè, secondo le denominazioni della Mem.ª 2.ª, una parabola di 2.ª specie. Nello stesso tempo, crescendo a all'infinito, la curvatura media

$$H = 2 \coth 2a$$

delle superficie $\overline{S}$, normali ai raggi delle congruenze associate alle flessioni della quadrica, convergerà verso il limite **2**. Troviamo così nuovamente i risultati dimostrati con calcolo diretto al § 20 della Mem.ª 2.ª. Ciò che qui vi aggiungiamo è la suddistinzione di due forme possibili pel paraboloide secondo che il fuoco F è interno od esterno all'orisfera fissa.

§ 10.

La quadrica di rotazione corrispondente ad una superficie $\overrightarrow{S}$ di curvatura media costante H, con $|H| < 2$.

Della questione proposta alla fine del § 6 ci resta ora a trattare il caso $|c| < 1$, ossia $|H| < 2$. Dimostreremo che in questo caso si può prendere come curva meridiana la conica luogo dei punti equidistanti da un punto fisso F e da un circolo fisso *a centro ideale,* l'asse di rotazione essendo la normale calata dal fuoco F sul circolo. Si distinguono due tipi diversi di questa conica secondo che il fuoco F è interno od esterno al circolo, cioè secondo che la retta a cui il circolo è geodeticamente parallelo giace, rispetto al fuoco, al di là o al di qua del circolo.

Per calcolare l'elemento lineare della quadrica allo scopo di identificarlo con quello dato dalle (12), (12*) § 6, osserviamo che la nostra conica può anche definirsi come il luogo dei punti che hanno costante la differenza delle distanze da un punto fisso F e da una retta fissa d. Riprendendo le notazioni del § 7, sia $F \equiv (1, 0, 0)$ il fuoco e $d \equiv (\operatorname{senh} b, \cosh b, 0)$ la retta fissa, rappresentando dunque b la distanza del fuoco F dalla retta d. La distanza ρ' di un punto (x_0, x_1, x_2) dalla retta è data dalla formola

$$\operatorname{senh} \rho' = \operatorname{senh} b \cosh \rho - \cosh b \operatorname{senh} \rho \cos v.$$

Lungo la curva abbiamo $\rho - \rho' = a$, essendo a una costante, e però l'equazione della curva è:

$$\operatorname{senh}(\rho - a) = \operatorname{senh} b \cosh \rho - \cosh b \operatorname{senh} \rho \cos v,$$

da cui, procedendo, come al § 7, deduciamo

$$\cos v = \frac{(\operatorname{senh} b + \operatorname{senh} a) \cosh \rho - \cosh a \operatorname{senh} \rho}{\cosh b \operatorname{senh} \rho}$$

$$\operatorname{sen}^2 v = \frac{(\operatorname{senh} b + \operatorname{senh} a)(\operatorname{senh}(2\rho - a) - \operatorname{senh} b)}{\cosh^2 b \operatorname{senh}^2 \rho}$$

$$\operatorname{sen} v\, d v = \frac{\operatorname{senh} b + \operatorname{senh} a}{\cosh b} \frac{d\rho}{\operatorname{senh}^2 \rho}.$$

E, serbando σ il significato del § 7:

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\operatorname{senh} b + \operatorname{senh} a}{\cosh b \operatorname{senh} \rho \operatorname{sen} v}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \frac{\operatorname{senh}(2\rho - a) + \operatorname{senh} a}{\operatorname{senh} b + \operatorname{senh} a},$$

quindi per l'elemento lineare della quadrica di rotazione

$$d s^2 = \frac{d\rho^2}{\cos^2 \sigma} + \cot^2 \sigma\, d\beta^2.$$

Per identificare le formole precedenti colle (12), (12*) § 6, basta porre $\tau = \rho$ e determinare a, b in guisa che si abbia

$$\operatorname{senh}(2\rho - a) + \operatorname{senh} a = k(\operatorname{senh} b + \operatorname{senh} a) \{ \operatorname{senh} 2\rho + c(1 - \cosh 2\rho) \},$$

il che dà

$$k(\operatorname{senh} b + \operatorname{senh} a) = \cosh a$$

$$c\, k(\operatorname{senh} b + \operatorname{senh} a) = \operatorname{senh} a$$

e quindi

$$\operatorname{tgh} a = c, \quad \operatorname{senh} b = \frac{\cosh a}{k} - \operatorname{senh} a.$$

Siccome qui è supposto $|c| < 1$, ne segue per a sempre un valore reale e medesimamente per b, prendendo il seno iperbolico tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$.

Abbiamo dunque il teorema: *Si consideri nello spazio iperbolico (di curvatura $K_0 = -1$) la quadrica di rotazione luogo dei punti che hanno costante $= a$ la differenza delle distanze da un punto fisso F (fuoco) e da un piano fisso. Si fletta comunque la quadrica, che seco trasporti, invariabilmente legati alla superficie, i segmenti che dai punti di questa vanno al fuoco; il luogo degli estremi, primitivamente riuniti nel fuoco, sarà sempre una superficie $\overline{S}$ di curvatura media costante $= 2 \operatorname{tgh} a$.*

Una seconda superficie $\overline{S}'$, colla medesima curvatura media $= 2 \operatorname{tgh} a$, si otterrà nella simmetrica di $\overline{S}$ rispetto alla quadrica deformata.

Si osservi poi che, secondo il § 1, fra le superficie parallele a ciascuna delle due $\overline{S}$, $\overline{S'}$ ve ne ha una, parallela ed alla distanza a da questa, per la quale si ha

$$r_1 + r_2 = 2 \operatorname{tgh} a.$$

Le flessioni dell'attuale quadrica di rotazione possono dunque collegarsi, anzichè colle superficie di curvatura media costante H, con $|H| < 2$, alle superficie per le quali è $r_1 + r_2$ costante ed, in valore assoluto, < 2.

Dimostreremo nei prossimi paragrafi che anche le altre superficie $\overline{S}$ con $r_1 + r_2 = \text{cost.}$ si collegano colle flessioni di nuove specie di quadriche di rotazione.

§ 11.

Superficie $\overline{S}$ con $r_1 + r_2 = \text{cost.}$

Per giungere al risultato testè accennato conviene che, al modo dei §§ 3, 9 Mem.ª 2.ª, risolviamo la seguente questione preliminare. Quando accadrà che, in tutte le flessioni della superficie S di partenza della congruenza C, normale alla superficie $\overline{S}$, abbiano sempre luogo le proporzioni:

$$\overline{e} : \overline{f} : \overline{g} = D : D' : D''$$

fra i coefficienti della terza forma fondamentale di $\overline{S}$ e della seconda di S?

Procedendo precisamente come nelle analoghe ricerche dei citati paragrafi Mem.ª 2.ª, troviamo che le condizioni a ciò necessarie e sufficienti sono le seguenti:

1.° La superficie S deve essere applicabile sopra una superficie di rotazione d'elemento lineare

$$d s^2 = d u^2 + \cot^2 \sigma \, d v^2,$$

σ indicando una conveniente funzione di u.

2.° I raggi della congruenza debbono uscire da ogni punto di S normalmente alle deformate u dei paralleli ed inclinati sulle deformate v dei meridiani (nell'uno o nell'altro verso) dell'angolo σ.

3.° Il segmento τ di ogni raggio che intercede fra S ed $\overline{S}$ deve essere una funzione della sola u, legata a σ dalle equazioni differenziali caratteristiche:

$$\left.\begin{aligned} \tau' &= -\cos\sigma \\ (3\,\sigma'^2 - \sigma''\operatorname{tg}\sigma)(\cosh 2\,\tau + 1) - 2\,\sigma' \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh} 2\,\tau &- 2\operatorname{sen}^2\sigma = 0, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

gli accenti indicando al solito derivazione rapporto ad u.

Ora comincieremo dal dimostrare che la superficie $\overline{S}$ normale alla congruenza C, avrà costante la somma $r_1 + r_2$ dei raggi di curvatura.

Per ciò scriviamo la seconda delle (17) sotto la forma

$$\frac{d}{d\,u}\cdot\frac{\sigma' \operatorname{senh} 2\,\tau - \operatorname{sen}\sigma\cosh 2\,\tau}{\sigma'(\cosh 2\,\tau + 1) - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh} 2\,\tau} = 0$$

ed una prima integrazione ci darà:

$$\sigma'\{c(\cosh 2\,\tau + 1) - \operatorname{senh} 2\,\tau\} + \operatorname{sen}\sigma(\cosh 2\,\tau - c\operatorname{senh} 2\,\tau) = 0, \tag{17*}$$

dove c indica una costante arbitraria.

D'altra parte, se vogliamo esprimere che la $\overline{S}$ ha costante $= 2\,c$ la somma dei raggi di curvatura, basterà che scriviamo le proporzioni:

$$\overline{E} - \overline{e} + 2\,c\,\overline{D} : \overline{F} - \overline{f} + 2\,c\,\overline{D}' : \overline{G} - \overline{g} + 2\,c\,\overline{D}'' = \overline{e} : \overline{f} : \overline{g},$$

ovvero, ciò che nel caso nostro torna lo stesso, le altre:

$$\overline{E} - \overline{e} + 2\,c\,\overline{D} : \overline{F} - \overline{f} + 2\,c\,\overline{D}' : \overline{G} - \overline{g} + 2\,c\,\overline{D}'' = D : D' : D''.$$

Col calcolo effettivo, mediante le formole § 2 Mem.ª 2.ª, troviamo che queste proporzioni equivalgono all'unica equazione:

$$(\sigma''\operatorname{tg}\sigma - 3\,\sigma'^2)(c\operatorname{senh} 2\,\tau + 1) + 2\,c\,\sigma' \operatorname{sen}\sigma\cosh 2\,\tau + 2\operatorname{sen}^2\sigma = 0,$$

che, derivando per combinazione dalle (17), (17*), trovasi identicamente verificata.

Resta che integriamo la (17*), ciò che si fa subito scrivendola sotto la forma

$$\frac{\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{d\,\sigma}{d\,\tau} = -\frac{1}{2}\frac{d}{d\,\tau}\log\{c(\cosh 2\,\tau + 1) - \operatorname{senh} 2\,\tau\},$$

da cui integrando:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma} = k\{c(\cosh 2\,\tau + 1) - \operatorname{senh} 2\,\tau\}, \tag{18}$$

designando k una costante arbitraria.

L'elemento lineare della S avrà dunque la solita forma tipica

$$d s^2 = \frac{d\tau^2}{\cos^2 \sigma} + \cot^2 \sigma \, d v^2, \tag{18*}$$

essendo qui σ determinato in funzione di τ dalla (18).

Abbiamo già visto che nel caso $|c| < 1$ si può assumere per superficie tipica S la quadrica di rotazione del paragrafo precedente. Dimostreremo ora che per $|c| \geq 1$ si può, per convenienti valori delle costanti c, k nella (18), assumere ancora per superficie S una quadrica di rotazione e precisamente nel caso $|c| > 1$ la conica meridiana è il luogo dei punti di un piano che hanno costante la differenza (o la somma) delle distanze da due rette fisse normali ad una medesima retta, che è l'asse di rotazione; nel caso $|c| = 1$ la conica è il luogo dei punti equidistanti da una retta e da un oriciclo, la cui normale comune è l'asse di rotazione. In tutti tre i casi l'asse di rotazione è sempre l'asse focale ed uno dei due fuochi è un punto ideale; si suddistinguono i tre casi per ciò che il secondo fuoco è reale a distanza finita per $|c| < 1$, reale all'infinito per $|c| = 1$ e infine ideale per $|c| > 1$.

§ 12.

La quadrica di rotazione corrispondente alle superficie $\overline{S}$ con $r_1 + r_2 = 2c$, per $|c| > 1$.

Cominciamo dall'osservare che nel caso $|c| > 1$ necessariamente le costanti k, c nella (18) avranno il medesimo segno. E infatti se determiniamo λ in guisa che sia $\coth \lambda = c$ (anche λ avrà un valore reale) la (18) si scrive

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \frac{k}{\operatorname{senh} \lambda} \{ \cosh (2\tau - \lambda) + \cosh \lambda \} .$$

Il fattore $\cosh(2\tau - \lambda) + \cosh \lambda$ essendo positivo, k avrà dunque il segno di λ cioè di c. Senza alterare la generalità potremo supporre c, k, λ positivi, bastando nel caso opposto cangiare τ in $-\tau$.

Ciò premesso, volendo dimostrare le ultime asserzioni del paragrafo precedente, procediamo, come già ai §§ 7 e 10, riferendo il piano iperbolico ad un sistema di coordinate di Weierstrass x_0, x_1, x_2 legate dalla identità quadratica

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1\,;$$

ma questa volta porremo

$$x_0 = \cosh \rho \cosh v, \quad x_1 = \operatorname{senh} \rho, \quad x_2 = \cosh \rho \operatorname{senh} v.$$

Con ciò l'elemento lineare del piano

$$d\,s^2 = d\,x_1^2 + d\,x_2^2 - d\,x_0^2$$

acquisterà la forma iperbolica

$$d\,s^2 = d\,\rho^2 + \cosh^2 \rho\, d\,v^2,$$

significando ρ la distanza di un punto P variabile del piano dalla retta fissa $\rho = 0$ o $d \equiv (0,\ 1,\ 0)$ e v il segmento di retta $v = 0$ o $(0,\ 0,\ 1)$ intercetto fra l'origine $O \equiv (1,\ 0,\ 0)$ ed il piede della perpendicolare abbassata da P.

Ora si consideri una seconda retta

$$d' \equiv (\operatorname{senh} b,\ \cosh b,\ 0),$$

che è normale, come $d \equiv (0,\ 1,\ 0)$ alla retta $(0,\ 0,\ 1)$, significando b la minima distanza di d, d'. Le distanze δ, δ' di un punto $(\rho,\ v) \equiv (x_0,\ x_1,\ x_2)$ da d, d' rispettivamente sono date dalle formole

$$\delta = \rho$$

$$\operatorname{senh} \delta' = \cosh b\, x_1 - \operatorname{senh} b\, x_0,$$

ossia

$$\operatorname{senh} \delta' = \cosh b \operatorname{senh} \rho - \operatorname{senh} b \cosh \rho \cosh v.$$

La curva luogo dei punti pei quali è costante $= a$ la differenza $\delta' - \delta$ ha dunque l'equazione

$$\operatorname{senh} (\rho + a) = \cosh b \operatorname{senh} \rho - \operatorname{senh} b \cosh \rho \cosh v,$$

ossia

$$\cosh v = \frac{\cosh b - \cosh a}{\operatorname{senh} b} \operatorname{tgh} \rho - \frac{\operatorname{senh} a}{\operatorname{senh} b},$$

che scriviamo

$$\cosh v = \alpha + \beta \operatorname{tgh} \rho, \tag{19}$$

avendo qui le costanti α, β i valori

$$\alpha = -\frac{\operatorname{senh} a}{\operatorname{senh} b}, \quad \beta = \frac{\cosh b - \cosh a}{\operatorname{senh} b}. \tag{20}$$

Ora dimostreremo in generale che, prendendo per meridiano della superficie S la conica (19), qualunque siano le costanti α, β, l'asse di rotazione essendo la retta (0, 0, 1), se si pone $\tau = \rho$ e si prende per σ l'angolo d'inclinazione sulla tangente della perpendicolare calata dal punto di contatto sulla retta d (o sulla d'), avremo precisamente una superficie S corrispondente alle formole (18), (18*) § 11 per convenienti valori di k, c.

Dalle (19) differenziando si ha

$$\operatorname{senh} v \, d v = \frac{\beta \, d \rho}{\cosh^2 \rho}$$

e poichè

$$\operatorname{tg} \sigma = \cosh \rho \frac{d v}{d \rho},$$

ne deduciamo

$$\cot \sigma = \frac{\cosh \rho \operatorname{senh} v}{\beta}. \tag{21}$$

Ma per la distanza r del punto (ρ, v) dall'asse di rotazione si ha

$$\operatorname{senh} r = \cosh \rho \operatorname{senh} v,$$

cioè

$$\operatorname{senh} r = \beta \cot \sigma,$$

onde per l'elemento lineare della quadrica di rotazione

$$d s^2 = d u^2 + \cot^2 \sigma \, d v_1^2,$$

significando $d u$ l'elemento d'arco di meridiano. Ora si ha

$$d u^2 = d \rho^2 + \cosh^2 \rho \, d v^2 = (1 + \operatorname{tg}^2 \sigma) \, d \rho^2 = \frac{d \rho^2}{\cos^2 \sigma},$$

quindi

$$d s^2 = \frac{d \rho^2}{\cos^2 \sigma} + \cot^2 \sigma \, d v_1^2. \tag{22}$$

Dalle (19), (21) si ha poi

$$\operatorname{senh}^2 v = \frac{(\beta \operatorname{senh} \rho + \alpha \cosh \rho)^2 - \cosh^2 \rho}{\cosh^2 \rho}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \frac{\cosh^2 \rho \operatorname{senh}^2 v + \beta^2}{\beta^2}$$

e quindi

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \frac{\frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 - 1) (\cosh 2 \rho + 1) + \alpha \beta \operatorname{senh} 2 \rho}{\beta^2}. \tag{22*}$$

Facciamo coincidere queste formole (22), (22*) colle (18*), (18) § 11 ponendo

$$\tau = \rho$$

$$k\,c = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2\,\beta^2}, \quad k = -\frac{\alpha\beta}{\beta^2},$$

cioè

$$c = \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{2\,\alpha\beta}, \quad k = -\frac{\alpha}{\beta}. \tag{23}$$

Ciò dimostra intanto la nostra asserzione superiore. Pei valori particolari (20) delle costanti α, β risulta poi:

$$c = -\coth a, \quad \frac{1}{k} = \frac{\cosh b - \cosh a}{\operatorname{senh} a}. \tag{24}$$

Se, invece di supporre $\delta' - \delta = a$, avessimo supposto $\delta' + \delta = a$, l'equazione della curva sarebbe stata

$$\operatorname{senh}(a - \rho) = \cosh b \operatorname{senh} \rho - \operatorname{senh} b \cosh \rho \cosh v,$$

che rientra ancora nella (19), posto questa volta

$$\alpha = -\frac{\operatorname{senh} a}{\operatorname{senh} b}, \quad \beta = \frac{\cosh b + \cosh a}{\operatorname{senh} b},$$

onde risulta per questo caso dalle (23)

$$c = \coth a, \quad \cosh b = -\cosh a + \frac{\operatorname{senh} a}{k}. \tag{24*}$$

Come già abbiamo osservato al principio del paragrafo si può supporre senz'altro k, c positivi e fatto $c = \coth \lambda$, sarà λ positivo, avremo nel caso delle (24)

$$a = -\lambda, \quad \cosh b = \cosh \lambda - \frac{\operatorname{senh} \lambda}{k} \tag{25}$$

e nel caso delle (24*)

$$a = \lambda, \quad \cosh b = -\cosh \lambda + \frac{\operatorname{senh} \lambda}{k}. \tag{25*}$$

Abbiamo dunque stabilito il teorema seguente: *Si consideri nello spazio iperbolico la quadrica di rotazione luogo dei punti, che hanno costante* $= \lambda$ *la somma o la differenza delle distanze da due piani fissi, normali all'asse di rotazione. Se si flette comunque la quadrica che seco trasporti, invariabilmente legati alla superficie, i segmenti delle perpendicolari calate dai punti* *di questa sull'uno o sull'altro dei due piani, terminati al piano stesso, il luogo degli estremi di questi segmenti sarà sempre una superficie che avrà costante* $= 2 \coth \lambda$ *la somma dei raggi di curvatura.*

Dobbiamo per altro osservare che, a differenza di tutti gli altri casi precedentemente considerati, le due quadriche di rotazione non danno qui la più generale superficie S del § 11. E infatti, perchè la (25) dia un valore reale per b, è necessario che risulti

$$\cosh \lambda - \frac{\operatorname{senh} \lambda}{k} > 1,$$

cioè

$$k > \coth \frac{\lambda}{2};$$

invece perchè risulti dalla (25*) un valore reale per b bisogna che sia

$$k < \operatorname{tgh} \frac{\lambda}{2}.$$

Quando dunque k giaccia nell'intervallo fra $\operatorname{tgh} \frac{\lambda}{2}$ e $\coth \frac{\lambda}{2}$ è impossibile identificare l'una o l'altra quadrica di rotazione colla nostra superficie S.

§ 13.

La quadrica di rotazione corrispondente ad una superficie $\overline{S}$ con $r_1 + r_2 = \pm 2$.

Dal caso $|c| > 1$ del paragrafo precedente possiamo giungere all'altro $|c| = 1$ con passaggio al limite. Consideriamo infatti la conica luogo dei punti equidistanti da una retta d e da un circolo a centro ideale C, che siano normali ad una medesima retta e sia λ la distanza fra C e la retta d', a cui C è geodeticamente parallelo. Questa non è altro che la conica del paragrafo precedente, rappresentando λ la differenza, o la somma, costante della curva da d, d'. Ora, mantenendo fissa d ed il punto ove il circolo C sega la perpendicolare, si mandi all'infinito d', con che λ crescerà all'infinito. La conica diventerà al limite il luogo dei punti equidistanti dalla retta fissa d

e da un oriciclo, limite del circolo C, e la somma $r_1 + r_2 = \coth \lambda$ convergerà verso ± 2. Si osservi che in questo caso è inutile aggiungere la condizione che l'oriciclo e la retta abbiano una perpendicolare comune poichè questa esiste sempre, supposto naturalmente che la retta non sia perpendicolare all'oriciclo.

Possiamo dunque enunciare il teorema:

Si consideri la quadrica luogo dei punti equidistanti da un piano fisso e da un'orisfera, quadrica che è di rotazione attorno alla perpendicolare comune al piano ed all'orisfera. Se si flette comunque la quadrica che seco trasporti, invariabilmente legati alla superficie, i segmenti delle perpendicolari calate dai punti di questa sul piano o sull'orisfera, il luogo degli estremi di questi segmenti sarà sempre una superficie $\overline{S}$, *che avrà costante* $= \pm 2$ *la somma* $r_1 + r_2$ *dei raggi di curvatura.*

Non sarà inutile stabilire il teorema precedente con considerazioni dirette, anzichè con passaggio al limite; avremo così anche occasione di constatare come la quadrica attuale dia la forma più generale della superficie S di rotazione del § 11 per $c = \pm 1$, escluso soltanto il caso che si abbia altresì $k = \pm 1$.

Riprendendo a tale oggetto le notazioni del § 12, osserviamo che le rette parallele alla $v = 0$ sono quelle per le quali la terza coordinata $\xi_2 = 1$ e quindi $\xi_0 = \pm \xi_1$, il doppio segno distinguendo il senso del parallelismo. La loro equazione in coordinate ρ, v è quindi

$$\frac{\operatorname{tgh} \rho}{\operatorname{senh} v} \pm \coth v = \text{cost.}$$

Secondo una nota formola della teoria delle geodetiche (*), con una quadratura si calcolerà l'arco θ di queste geodetiche contato da una loro traiettoria ortogonale fissa (oriciclo); si trova così:

$$\theta = \log (\cosh \rho \cosh v \pm \operatorname{senh} \rho) + \text{cost.}$$

Per un punto $M \equiv (\rho, v)$ è dunque θ la distanza da un oriciclo normale alla retta $v = 0$, mentre ρ è la distanza della retta $u = 0$; quindi per la conica da noi considerata sarà $\theta = \rho$, cioè

$$\cosh \rho \cosh v \pm \operatorname{senh} \rho = a\, e^{\rho},$$

ovvero

$$\cosh v = (a \mp 1) \operatorname{tgh} \rho + a,$$

(*) Vedi *Lezioni di geometria differenziale*, pag. 163.

indicando a una costante. Questa forma di equazione rientra nella (19) § 12, avendo qui le costanti α, β i valori

$$\alpha = a, \quad \beta = a \mp 1.$$

Dalle (23) risulta quindi

$$c = -1, \quad k = -\frac{a}{a \mp 1},$$

le quali dimostrano nuovamente il teorema superiore e fanno vedere di più che dato k ad arbitrio, purchè sia $k \neq -1$, ne risulta un valore finito per a.

§ 14.

Caso di una superficie $\overline{S}$ a curvatura costante dello spazio iperbolico.

Per completare le nostre ricerche sulle superficie $\overline{S}$ dello spazio iperbolico, i cui raggi principali di curvatura sono legati da una relazione bilineare simmetrica, non ci resta ormai (secondo la classificazione in tipi del § 1) che da trattare il caso di una superficie $\overline{S}$ a curvatura relativa costante e negativa.

Più in generale, come già al § 5 per la geometria ellittica, faremo la ricerca per una superficie $\overline{S}$ a curvatura totale costante K, avendo K un valore arbitrario. Partendo per ciò ancora dai risultati al § 3 Mem.ª 2.ª, prendiamo due funzioni σ, τ di u, che soddisfino le equazioni differenziali

$$\left.\begin{aligned} \tau' &= -\cos\sigma \\ 2\,\sigma' \operatorname{sen}\sigma \cosh 2\,\tau &= (3\,\sigma'^2 - \sigma'' \operatorname{tg}\sigma) \operatorname{senh} 2\,\tau. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Se consideriamo una superficie S d'elemento lineare

$$d\,s^2 = d\,u^2 + \cot^2\sigma\, d\,v^2$$

e vi associamo, al modo del § 2, una congruenza C e la superficie $\overline{S}$ ortogonale ai raggi di questa, serbando σ, τ il solito significato geometrico, avremo che sopra le superficie S, $\overline{S}$ si corrisponderanno i sistemi coniugati. Dimostriamo ora che la S avrà costante la curvatura assoluta. La (26) si può scrivere sotto la forma

$$\frac{d}{d u} \left\{ \cosh 2 \tau - \frac{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{senh} 2 \tau}{\sigma'} \right\} = 0,$$

onde segue che $\cosh 2 \tau - \frac{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{senh} 2 \tau}{\sigma'}$ ha un valore costante. Indicando questa costante, per opportunità di confronti, con $1 + \frac{2}{K}$, integrando avremo

$$\sigma' \{ K(1 - \cosh 2 \tau) + 2 \} + K \operatorname{sen} \sigma \operatorname{senh} 2 \tau = 0. \tag{26*}$$

D'altra parte esprimiamo che la $\overline{S}$ ha la curvatura totale costante $= K$ mediante le proporzioni:

$$\overline{e} + (K+1) \overline{E} : \overline{f} + (K+1) \overline{F} : \overline{g} + (K+1) \overline{G} = \overline{D} : \overline{D'} : \overline{D''}$$

ossia, avendosi $\overline{D} : \overline{D'} : \overline{D''} = D : D' : D''$:

$$\overline{e} + (K+1) \overline{E} : \overline{f} + (K+1) \overline{F} : \overline{g} + (K+1) \overline{G} = D : D' : D''.$$

Il calcolo effettivo dimostra che queste proporzioni si traducono nell'unica equazione:

$$(3 \sigma'^2 - \sigma'' \operatorname{tg} \sigma) \{ (K+2) \cosh 2 \tau - K \} -$$
$$- 2 (K+2) \sigma' \operatorname{sen} \sigma \operatorname{senh} 2 \tau + 2 K \operatorname{sen}^2 \sigma = 0,$$

la quale risulta dal combinare le (26), (26*) ed è perciò identicamente soddisfatta. Resta ora soltanto che, integrando la (26*), determiniamo l'elemento lineare della nostra superficie S. Per ciò basta scriverla sotto la forma

$$\frac{\cos \sigma}{\operatorname{sen} \sigma} \frac{d \sigma}{d \tau} = - \frac{1}{2} \frac{d}{d \tau} \{ K(1 - \cosh 2 \tau) + 2 \}$$

e integrando otteniamo

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = c \{ K(1 - \cosh 2 \tau) + 2 \}, \tag{27}$$

indicando c una costante arbitraria.

L'elemento lineare della S ha dunque la solita forma

$$d s^2 = \frac{d \tau^2}{\cos^2 \sigma} + \cot^2 \sigma \, d v^2, \tag{27*}$$

essendo σ la funzione di τ assegnata dalla (27).

Meritano particolare menzione i casi particolari $K=0$ e $K=-1$. Per $K=0$ la (27) dimostra che σ è costante e tanto la superficie $\overline{S}$ quanto la S sono a curvatura totale nulla e di più sulla S le linee $\tau=\text{cost.}$, $v=\text{cost.}$ formano un doppio sistema di geodetiche ortogonali. Si ha allora il caso discusso al § 4 Mem.ª 2.ª e per meridiano della S, conformata a quadrica di rotazione, si può prendere un circolo a centro ideale, l'asse di rotazione essendo la retta geodeticamente parallela al circolo.

Per $K=-1$ la (27) diventa

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma}=a^2\cosh^2\tau,$$

denotando a una costante e per l'elemento lineare (27*) della S abbiamo

$$ds^2=\frac{a^2\cosh^2\tau}{a^2\cosh^2\tau-1}\,d\tau^2+(a^2\cosh^2\tau-1)\,dv^2.$$

Se distinguiamo i tre casi $a^2>1$, $a^2=1$, $a^2<1$ e facciamo il rispettivo cangiamento di variabile

$$\begin{aligned} a\operatorname{senh}\tau&=\sqrt{a^2-1}\operatorname{senh}u, && \text{per } a^2>1\\ \operatorname{senh}\tau&=e^u &&, \text{per } a^2=1\\ a\operatorname{senh}\tau&=\sqrt{1-a^2}\cosh u, && \text{per } a^2<1,\end{aligned}$$

otteniamo per S ordinatamente

$$\begin{aligned} ds^2&=du^2+\cosh^2u\,dv^2\\ ds^2&=du^2+e^{2u}\,dv^2\\ ds^2&=du^2+\operatorname{senh}^2u\,dv^2.\end{aligned}$$

Tanto la $\overline{S}$ quanto la S hanno qui la curvatura dello spazio ambiente, cioè sono sviluppabili (applicabili sul piano iperbolico). Nell'ultimo caso ($a^2<1$) per meridiano della superficie tipica S di rotazione si può prendere una retta normale all'asse.

Se percorriamo ora le varie specie di quadriche di rotazione dello spazio iperbolico incontrate successivamente nei §§ 7, 9, 10, 12, 13 vediamo figurarvi, salvo uno, tutti i possibili tipi di coniche meridiane, le curve basi di queste ellissi od iperbole geodetiche essendo circoli (Cf. prefazione). Il solo tipo mancante è quello in cui i circoli base sono ambedue oricicli. Ma allora se si considera la retta r normale comune ai due oricicli, si vede subito che le ellissi ed iperbole geodetiche si riducono in tal caso alle rette normali alla r ed ai circoli geodeticamente paralleli a questa retta. Queste linee ruotando attorno alla r generano le superficie di rotazione di curvatura $K = -1$ e $K = 0$ rispettivamente che sopra abbiamo considerato.

§ 15.

Il problema d'inversione e le conseguenti trasformazioni delle superficie $\overline{S}$.

Ad ogni superficie S dello spazio a curvatura costante, applicabile sulle varie superficie di rotazione, la cui forma abbiamo determinato nei paragrafi precedenti trovansi ogni volta associate due congruenze normali, invariabilmente legate alle flessioni della S, e riflessa l'una dell'altra sulla superficie S, e due superficie $\overline{S}$, $\overline{S}'$ ortogonali rispettivamente ai raggi incidenti ed ai riflessi e simmetriche rispetto alla superficie riflettente S (*). Queste due superficie $\overline{S}$, $\overline{S}'$ appartengono alla *medesima* classe α), cioè hanno i raggi principali di curvatura legati da una stessa relazione bilineare e simmetrica a coefficienti costanti.

Come già nello spazio euclideo (Mem.ª 1.ª § 11) nasce ora il problema di invertire questi risultati e cioè, supposta *data* una superficie $\overline{S}$ della classe α), di ricercare se è possibile di riportare sulle sue normali un tale segmento, variabile da punto a punto, in guisa che il luogo degli estremi sia una delle superficie S applicabili sulle nostre superficie di rotazione e la congruenza delle normali di $\overline{S}$ coincida precisamente con una delle due associate alla S. La risposta, come si vedrà, è sempre affermativa, ed anzi dimostreremo di più che, data la $\overline{S}$, esiste una *tripla infinità* di superficie S applicabili sopra una delle dette superficie di rotazione, che stanno precisamente colla $\overline{S}$ nella relazione richiesta.

(*) Possono anche considerarsi $\overline{S}$, $\overline{S}'$ come le due falde di un inviluppo di sfere, i cui centri sono distribuiti sulla S.

Fissata allora una di queste ∞^3 superficie S, se di ogni punto $\overline{M}$ di $\overline{S}$ prendiamo il simmetrico $\overline{M}'$ rispetto al piano tangente alla S nel punto corrispondente M, il luogo di $\overline{M}'$ sarà, pei teoremi dimostrati nella prima parte della presente Memoria, una seconda superficie $\overline{S}'$, i cui raggi principali di curvatura risulteranno legati dalla medesima relazione bilineare che vincola quelli di $\overline{S}$. Così per tutte le superficie $\overline{S}$ della classe α), immerse negli spazî di curvatura costante, veniamo a costruire una specie di trasformazioni geometriche, che permettono di ottenere quante si vogliono nuove superficie di questa classe.

Considerazioni analoghe a quelle svolte nella Mem.ª 1.ª, per le superficie a curvatura costante dello spazio euclideo, dimostrerebbero ulteriormente che allorquando di una superficie $\overline{S}$ della classe α), nello spazio ellittico od iperbolico, si possono determinare tutte le ∞^3 superficie $\overline{S}'$ trasformate, la ripetuta applicazione del processo medesimo alle superficie derivate $\overline{S}'$ non richiede più alcun calcolo d'integrazione.

Per abbreviare le ricerche seguenti, in luogo di esporre i calcoli che conducono direttamente alle equazioni di trasformazione, daremo subito queste equazioni sotto la forma generale che abbraccia tutti i casi possibili, in coordinate curvilinee generali e sopra di esse procederemo alle opportune verifiche.

§ 16.

Le equazioni generali di trasformazione.

Nello spazio di curvatura costante K_0 si consideri una superficie $\overline{S}$ della classe α), riferita ad un sistema qualunque di coordinate curvilinee u, v e siano, nelle solite notazioni:

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

le due forme quadratiche fondamentali di $\overline{S}$. Indicando con Φ, W due funzioni incognite di u, v, e con α, β, γ tre costanti, si consideri il seguente sistema di equazioni simultanee alle derivate parziali per Φ, W, dove i simboli di Christoffel $\begin{Bmatrix} r\,i \\ k \end{Bmatrix}$ si intendono costruiti rispetto ai coefficienti E, F, G della prima forma quadratica:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + (\alpha E + \beta D)\,\Phi + (\beta E + \gamma D)\,W \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\,\partial v} &= \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + (\alpha F + \beta D')\,\Phi + (\beta F + \gamma D')\,W \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + (\alpha G + \beta D'')\,\Phi + (\beta G + \gamma D'')\,W
\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial u} &= \frac{G D - F D'}{E G - F^2} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{E D' - F D}{E G - F^2} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\
\frac{\partial W}{\partial v} &= \frac{G D' - F D''}{E G - F^2} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{E D'' - F D'}{E G - F^2} \frac{\partial \Phi}{\partial v}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Si osservi intanto il carattere *invariantivo* di questo sistema: cangiando comunque le linee coordinate, esso si muta nel sistema analogo costruito per le nuove linee coordinate.

Se si scrivono le condizioni di integrabilità del sistema (A), (B), tenendo conto delle equazioni di Gauss e di Codazzi (*) e insieme delle quattro espressioni della curvatura *assoluta* K della $\overline{S}$, espresse pei simboli di Christoffel (**), si trova che queste condizioni sono identicamente soddisfatte quando fra la curvatura assoluta

$$K = \frac{1}{r_1 r_2} + K_0$$

e la media

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

sussiste la relazione lineare a coefficienti costanti

$$(\gamma + 1)\,K - \beta\,H + \alpha - \gamma\,K_0 = 0. \qquad (I)$$

Dunque se la $\overline{S}$ appartiene alla classe α), soddisfacendo i suoi raggi principali di curvatura alla relazione bilineare (I), il sistema di equazioni simultanee (A), (B) risulterà *illimitatamente integrabile*: dati cioè ad arbitrio

(**) *Lezioni di geometria differenziale*, pag. 51, formole (II).

i valori iniziali di

$$\Phi, W, \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

per una coppia iniziale (u_0, v_0) di valori delle variabili u, v, ne risulterà individuata una coppia (Φ, W) di soluzioni del sistema.

Si noti che fissata la $\overline{S}$ e quindi la relazione bilineare che lega r_1, r_2, dei tre coefficienti α, β, γ due risulteranno individuati in funzione (lineare intera) del terzo che resterà arbitrario.

Importa ora osservare che l'espressione

$$\Omega = \Delta_1 \Phi - \alpha \Phi^2 - 2 \beta \Phi W - \gamma W^2,$$

costruita per una coppia qualsiasi (Φ, W) di soluzioni del sistema (A), (B) ($\Delta_1 \Phi$ significando al solito il parametro differenziale primo di Φ) ha sempre un valore costante. Se si costruiscono infatti le due derivate $\frac{\partial \Omega}{\partial u}, \frac{\partial \Omega}{\partial v}$, avendo riguardo alle equazioni differenziali (A), (B), si trova identicamente

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = 0;$$

si ha dunque in ogni caso:

$$\Delta_1 \Phi - \alpha \Phi^2 - 2 \beta \Phi W - \gamma W^2 = \text{cost.} \ (*)$$

Per lo scopo nostro converrà limitarci a considerare quelle coppie di soluzioni per le quali la costante del secondo membro è nulla, che soddisfano cioè alla equazione:

$$\Delta_1 \Phi = \alpha \Phi^2 + 2 \beta \Phi W + \gamma W^2. \tag{C}$$

Basterà evidentemente per ciò che i valori *iniziali* di

$$\Phi, W, \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

siano scelti in guisa da soddisfare la (C).

(*) Più in generale se (Φ, W), (Φ_1, W_1) sono due coppie di soluzioni, distinte o coincidenti, del sistema (A), (B), e $\nabla(\Phi, \Phi_1)$ significa il parametro differenziale misto di Φ, Φ_1, si ha:

$$\nabla(\Phi, \Phi_1) - \alpha \Phi \Phi_1 - \beta(\Phi W_1 + \Phi_1 W) - \gamma W W_1 = \text{cost.}$$

Osserviamo infine che, fissate le costanti α, β, γ, avremo una tripla infinità di coppie di soluzioni (Φ, W) del sistema (A), (B), (C); e poichè questo sistema è omogeneo, nel rapporto $\frac{\Phi}{W}$ rimarranno *due* costanti arbitrarie.

§ 17.

Costruzione della superficie riflettente S.

Fissata una coppia (Φ, W) di soluzioni delle equazioni fondamentali (A), (B), (C), procediamo alla costruzione della superficie riflettente S, indicata nel paragrafo precedente.

Se si tratta dapprima dello spazio euclideo ($K_0 = 0$) (*), porteremo sulla normale in ogni punto $\overline{M}$ alla $\overline{S}$ un segmento $\overline{M}M = \tau$, essendo

$$\tau = \frac{\Phi}{W} \tag{a}$$

il quoziente delle due soluzioni scelte.

Il luogo degli estremi M dei segmenti sarà la superficie riflettente S cercata.

Quando lo spazio sia ellittico od iperbolico faremo al solito, per semplicità, rispettivamente

$$K_0 = +1 \quad \text{o} \quad K_0 = -1$$

ed il risultato sarà perfettamente analogo, salvo che per definire il segmento τ, in luogo della formola (a), avremo le altre:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\Phi}{W}, \quad \text{per} \quad K_0 = +1 \tag{b}$$

$$\operatorname{tgh} \tau = \frac{\Phi}{W}, \quad \text{per} \quad K_0 = -1. \tag{c}$$

Per procedere alle verifiche, cominciamo dal riferire la superficie S, immersa in uno qualunque dei tre spazî a curvatura costante, alle sue linee di

(*) Questo caso è già stato ampiamente discusso nella Mem.ª 1.ª per le superficie a curvatura costante e nella mia Nota inserita nei *Rendiconti* dei Lincei (Settembre 1899) per le superficie d'area minima.

curvatura u, v, talchè avremo:

$$F=0, \quad D'=0$$

ed, indicando con r_1, r_2 i raggi principali (ridotti) di curvatura:

$$D=-\frac{E}{r_2}, \quad D''=-\frac{G}{r_1}.$$

Le equazioni di trasformazione (A) possono scriversi, con queste speciali coordinate, sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)=-\frac{1}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\left(\alpha-\frac{\beta}{r_2}\right)\sqrt{E}\,\Phi+\left(\beta-\frac{\gamma}{r_2}\right)\sqrt{E}\,W\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)=-\frac{1}{E}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\left(\alpha-\frac{\beta}{r_1}\right)\sqrt{G}\,\Phi+\left(\beta-\frac{\gamma}{r_1}\right)\sqrt{G}\,W,
\end{aligned}\right\} \quad (A')$$

mentre le (B), (C) diventano semplicemente

$$\frac{\partial W}{\partial u}=-\frac{1}{r_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial W}{\partial v}=-\frac{1}{r_1}\frac{\partial\Phi}{\partial v} \tag{B'}$$

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{G}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2=\alpha\,\Phi^2+2\,\beta\,\Phi W+\gamma W^2. \tag{C'}$$

Ed ora, per eseguire i calcoli necessarii al nostro scopo, converrà separare la trattazione dei tre casi $K_0=0$, $K_0=+1$, $K_0=-1$. Lascieremo da parte il primo, già trattato completamente nei lavori precedenti (*), e ci volgeremo al caso ellittico $K_0=+1$; basterà poi la semplice indicazione dei risultati pel caso iperbolico $K_0=-1$, ove i calcoli sono del tutto analoghi.

(*) Il lettore verificherà che nel caso euclideo il metodo stesso dei paragrafi seguenti conduce ancor più semplicemente al risultato finale.

§ 18.

Verifiche relative alla superficie riflettente.

Supposto dunque di trovarci nel caso ellittico, riteniamo per la nostra superficie $\overline{S}$ le notazioni stesse già usate al § 1 Mem.ª 2.ª ed avremo le seguenti formole fondamentali:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}=\sqrt{E}\,\overline{\eta}, \quad \frac{\partial \overline{x}}{\partial v}=\sqrt{G}\,\overline{\zeta} \\
&\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial u}=\frac{\sqrt{E}}{r_2}\overline{\eta}, \quad \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial u}=-\sqrt{E}\,\overline{x}-\frac{\sqrt{E}}{r_2}\overline{\xi}-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\overline{\zeta}, \quad \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\overline{\eta} \\
&\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial v}=\frac{\sqrt{G}}{r_1}\overline{\zeta}, \quad \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\overline{\zeta}, \quad \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial v}=-\sqrt{G}\,\overline{x}-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\overline{\xi}-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\overline{\eta},
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

delle quali ci serviremo ora per calcolare l'elemento lineare della superficie S luogo del punto M, estremo del segmento $\overline{M}M=\tau$ staccato sulla normale di $\overline{S}$. Constateremo così in primo luogo che la S risulterà applicabile sopra una superficie di rotazione, perfettamente fissata dai valori delle costanti α, β, γ.

Indichino x_0, x_1, x_2, x_3 le coordinate di M; avremo

$$x=\overline{x}\cos\tau+\overline{\xi}\operatorname{sen}\tau,$$

da cui, derivando, si ottiene per le (28):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u}&=\sqrt{E}\left(\cos\tau+\frac{\operatorname{sen}\tau}{r_2}\right)\overline{\eta}+(\overline{\xi}\cos\tau-\overline{x}\operatorname{sen}\tau)\frac{\partial\tau}{\partial u} \\
\frac{\partial x}{\partial v}&=\sqrt{G}\left(\cos\tau+\frac{\operatorname{sen}\tau}{r_1}\right)\overline{\zeta}+(\overline{\xi}\cos\tau-\overline{x}\operatorname{sen}\tau)\frac{\partial\tau}{\partial v}\cdot
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Se per brevità facciamo le posizioni:

$$\left.\begin{aligned}
A&=\sqrt{E}\left(\cos\tau+\frac{\operatorname{sen}\tau}{\tau_2}\right) \\
B&=\sqrt{G}\left(\cos\tau+\frac{\operatorname{sen}\tau}{r_1}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

ed indichiamo con e, f, g i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare di S:

$$d s^2 = d x_0^2 + d x_1^2 + d x_2^2 + d x_3^2 = e\, d u^2 + 2 f\, d u\, d v + g\, d v^2,$$

troveremo subito dalle (29):

$$e = A^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2, \quad f = \frac{\partial \tau}{\partial u}\frac{\partial \tau}{\partial v}, \quad g = B^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2, \tag{31}$$

indi

$$e g - f^2 = A^2 B^2 \left\{ \frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right) + 1 \right\} \tag{32}$$

$$e\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 - 2 f \frac{\partial \tau}{\partial u}\frac{\partial \tau}{\partial v} + g\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2 = A^2 B^2 \left\{ \frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 \right\}. \tag{33}$$

Ma dalla formola (6) § 17

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\Phi}{W},$$

derivando, coll'osservare le (B'), deduciamo

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{A}\frac{\partial \tau}{\partial u} &= \frac{\cos \tau}{W}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Phi}{\partial u} \\ \frac{1}{B}\frac{\partial \tau}{\partial v} &= \frac{\cos \tau}{W}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Phi}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

da cui quadrando e sommando risulta per la (C'):

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 = \alpha \operatorname{sen}^2 \tau + 2 \beta \operatorname{sen} \tau \cos \tau + \gamma \cos^2 \tau. \tag{35}$$

Per ciò le (32), (33), ove si ponga per abbreviare

$$\Omega = \alpha \operatorname{sen}^2 \tau + 2 \beta \operatorname{sen} \tau \cos \tau + \gamma \cos^2 \tau, \tag{36}$$

diventano:

$$e g - f^2 = A^2 B^2 . (\Omega + 1) \tag{32*}$$

$$e\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 - 2 f \frac{\partial \tau}{\partial u}\frac{\partial \tau}{\partial v} + g\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2 = A^2 B^2 . \Omega. \tag{33*}$$

Di qui, calcolando sulla superficie S il parametro differenziale primo della funzione τ:

$$\Delta_1 \tau = \frac{e\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 - 2 f \frac{\partial \tau}{\partial u}\frac{\partial \tau}{\partial v} + g\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2}{e g - f^2},$$

deduciamo la formola

$$\Delta_1 \tau = \frac{\Omega}{\Omega + 1}. \tag{37}$$

Questa, essendo Ω una funzione della sola τ (data dalla (36)) ci dimostra intanto che: *le linee* $\tau =$ cost. *sulla superficie S sono geodeticamente parallele.*

Andiamo ora a calcolare la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_\tau}$ di queste medesime linee, applicando la formola del Bonnet:

$$\frac{1}{\rho_\tau} = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{f\frac{\partial \tau}{\partial v} - g\frac{\partial \tau}{\partial u}}{\sqrt{e\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 - 2f\frac{\partial \tau}{\partial u}\frac{\partial \tau}{\partial v} + g\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2}} + \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{f\frac{\partial \tau}{\partial u} - e\frac{\partial \tau}{\partial v}}{\sqrt{e\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 - 2f\frac{\partial \tau}{\partial u}\frac{\partial \tau}{\partial v} + g\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2}} \right\},$$

che assegna alla curvatura geodetica il dovuto segno (*). Per le formole precedenti (31), (32*), (33*), otterremo:

$$-\frac{1}{\rho_\tau} = \frac{1}{AB\sqrt{\Omega + 1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B}{A\sqrt{\Omega}}\frac{\partial \tau}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A}{B\sqrt{\Omega}}\frac{\partial \tau}{\partial v}\right) \right\}. \tag{38}$$

§ 19.

Continuazione.

Perveniamo ad una formola semplice per $\frac{1}{\rho_\tau}$, osservando che sussiste la seguente identità:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B}{A\,\Omega}\frac{\partial \tau}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A}{B\,\Omega}\frac{\partial \tau}{\partial v}\right) = 0. \tag{39}$$

(*) Vedi *Lezioni*, ecc., pag. 144-145.

E infatti questa, per la (34'), equivale all'altra:

$$\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\sqrt{G}\left(W+\frac{\Phi}{r_1}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}}{\alpha\Phi^2+2\beta\Phi W+\gamma W^2}+\frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\sqrt{E}\left(W+\frac{\Phi}{r_2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}}{\alpha\Phi^2+2\beta\Phi W+\gamma W^2}=0, \qquad (39^*)$$

la cui verifica si fa senza difficoltà quando si tenga conto delle equazioni di trasformazione (A'), (B'), (C') e delle formole di Codazzi:

$$\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\sqrt{G}}{r_1}=\frac{1}{r_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\sqrt{E}}{r_2}=\frac{1}{r_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}.$$

Ciò posto, scritta la (38) sotto la forma:

$$-\frac{1}{\rho_\tau}=\frac{1}{AB\sqrt{\Omega+1}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B}{A\Omega}\frac{\partial\tau}{\partial u}\cdot\sqrt{\Omega}\right)+\left(\frac{A}{B\Omega}\frac{\partial\tau}{\partial v}\cdot\sqrt{\Omega}\right)\right\},$$

basta aver riguardo alla identità (39) e alla formola (35) per dedurne la formola richiesta

$$-\frac{1}{\rho_\tau}=\frac{1}{\sqrt{\Omega+1}}\frac{d\sqrt{\Omega}}{d\tau}. \qquad (40)$$

Poichè Ω è funzione solo di τ segue di qui che le linee $\tau=\text{cost.}$ sulla superficie S sono a curvatura geodetica costante ed, essendo inoltre pel paragrafo precedente geodeticamente parallele, la S è applicabile sopra una superficie di rotazione. Determiniamo in fine completamente la forma dell'elemento lineare di S riferita alle trasformate $\tau=\text{cost.}$ dei paralleli ed alle geodetiche ortogonali (trasformate dei meridiani) che indicheremo con $v_1=\text{cost.}$, osservando che l'elemento d'arco $d\alpha$ di queste geodetiche è:

$$d\alpha=\frac{d\tau}{\sqrt{\Delta_1\tau}}=\frac{\sqrt{\Omega+1}}{\sqrt{\Omega}}\,d\tau$$

e per l'elemento lineare ds della S avremo quindi

$$ds^2=\frac{\Omega+1}{\Omega}\,d\tau^2+\varphi^2(\tau)\,dv_1^2, \qquad (41)$$

indicando $\varphi(\tau)$ una funzione della sola τ che resta da determinare. Per ciò osserviamo che la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_\tau}$, calcolata dalla (41), è data da

$$-\frac{1}{\rho_\tau}=\frac{\sqrt{\Omega}}{\sqrt{\Omega+1}}\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{d\tau}$$

ed il confronto colla (40) dà quindi

$$\frac{d \log \varphi}{d \tau} = \frac{d \log \sqrt{\Omega}}{d \tau};$$

possiamo dunque porre senz'altro

$$\varphi(\tau) = \sqrt{\Omega}.$$

Ne concludiamo:

L'elemento lineare di S ha la forma

$$d s^2 = \frac{\Omega + 1}{\Omega} d \tau^2 + \Omega \, d v_1^2, \tag{42}$$

dove

$$\Omega = \alpha \operatorname{sen}^2 \tau + 2 \beta \operatorname{sen} \tau \cos \tau + \gamma \cos^2 \tau; \tag{43}$$

esso appartiene ad una superficie di rotazione, che dipende unicamente dai valori delle costanti α, β, γ.

Nel caso iperbolico, con calcoli perfettamente analoghi, si trova per l'elemento lineare della S ancora la forma (42), dove però Ω ha attualmente il significato

$$\Omega = \alpha \operatorname{senh}^2 \tau + 2 \beta \operatorname{senh} \tau \cosh \tau + \gamma \cosh^2 \tau. \tag{43*}$$

Per completare le nostre verifiche ci sono ancora necessarie alcune osservazioni. In primo luogo questa che i segmenti $\overline{M} M = \tau$, essendo normali in $\overline{M}$ alla $\overline{S}$, saranno normali alle linee $\tau = \text{cost.}$ sulla superficie S.

Ed ora calcoliamo l'angolo σ d'inclinazione dei segmenti stessi sulla superficie S, cioè sulle linee $v_1 = \text{cost.}$ Perciò osserviamo che, indicando con

$$\xi_0, \; \xi_1, \; \xi_2, \; \xi_3$$

i coseni di direzione della normale in M alla S, dalle (29), (35) si ha subito:

$$\sqrt{\Omega + 1}\, \xi = \overline{x} \operatorname{sen} \tau - \overline{\xi} \cos \tau + \frac{1}{A} \frac{\partial \tau}{\partial u} \overline{\eta} + \frac{1}{B} \frac{\partial \tau}{\partial v} \overline{\zeta}, \tag{44}$$

e poichè i coseni di direzione del raggio $M \overline{M}$ nel punto M (cioè le coordinate del piano normale in M al raggio) sono

$$\overline{x}_i \operatorname{sen} \tau - \overline{\xi}_i \cos \tau \quad (i = 0, \; 1, \; 2, \; 3),$$

avremo

$$\operatorname{sen} \sigma = \Sigma\, \xi\, (\overline{x} \operatorname{sen} \tau - \overline{\xi} \cos \tau) = \frac{1}{\sqrt{\Omega + 1}},$$

da cui la formola finale:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \Omega + 1 = \alpha \operatorname{sen}^2 \tau + 2\beta \operatorname{sen} \tau \cos \tau + \gamma \cos^2 \tau + 1, \tag{45}$$

che, nel caso iperbolico, si muta nell'altra

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \Omega + 1 = \alpha \operatorname{senh}^2 \tau + 2\beta \operatorname{senh} \tau \cosh \tau + \gamma \cosh^2 \tau + 1. \tag{45*}$$

In fine la formola (42) per l'elemento lineare di S si scrive ora

$$d s^2 = \frac{d \tau^2}{\cos^2 \sigma} + \cot^2 \sigma \, d v_1^2 \text{ (*)}. \tag{46}$$

§ 20.

Suddistinzione di $\overline{S}$ nei varii tipi e relative verifiche.

Se riflettiamo al significato geometrico di σ, τ, vediamo che, per compiere le nostre verifiche, altro non resta che suddistinguere le superficie $\overline{S}$ nei varii tipi, secondo la discussione del § 1, e constatare che l'elemento lineare (46) di S combina ogni volta con quello che abbiamo determinato nei successivi paragrafi da 2 a 14.

Caso ellittico.

Cominciando dallo spazio ellittico, consideriamo dapprima il caso

a) *Superficie a curvatura media costante H.*

La (I) § 16, essendo qui $K = +1$, diventa

$$(\gamma + 1) K - \beta H + \alpha - \gamma = 0 \tag{I*}$$

e perchè si riduca ad $H = \text{cost.}$ dovrà essere

$$\gamma = -1, \quad \alpha + 1 = \beta H.$$

(*) Nel caso euclideo ($K_0 = 0$) vale ancora questa medesima formola; ma la (45) diventa

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \alpha \tau^2 + 2\beta \tau + \gamma + 1.$$

Per ciò la (45) diventa

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = (\beta H - 1) \operatorname{sen}^2 \tau + \beta \operatorname{sen} 2\tau - \cos^2 \tau + 1,$$

cioè

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \beta \left\{ \operatorname{sen} 2\tau + \frac{H}{2}(1 - \cos 2\tau) \right\},$$

rimanendo β arbitraria. Questa, se si pone

$$\beta = k, \quad H = 2c$$

si identifica colla (4) § 2, onde si conclude che l'elemento lineare dell'attuale superficie S coincide appunto con quello della superficie di rotazione al § 2, cioè dell'ellissoide od iperboloide di Guichard.

b) *Superficie a curvatura assoluta costante K.*

Nella precedente formola (I*) dovremo fare

$$\beta = 0, \quad \alpha = \gamma - (\gamma + 1) K$$

e rimarrà γ arbitraria. La (45) diventa

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \frac{\gamma + 1}{2} \{ 2 - K(1 - \cos 2\tau) \}$$

e, posto

$$\frac{\gamma + 1}{2} = k,$$

si identifica colla (10*) § 5, onde si traggono le medesime conclusioni come nel caso superiore.

Caso iperbolico.

Venendo ora al caso $K_0 = -1$, dobbiamo osservare che la (I) § 16 diventa qui

$$(\gamma + 1) K - \beta H + \alpha + \gamma = 0. \tag{II}$$

Eseguendo le verifiche nell'ordine stesso tenuto nella prima parte per calcolare l'elemento lineare della superficie S, distingueremo i casi seguenti:

c) *Superficie $\overline{S}$ a curvatura media costante H.*

Nella (II) dobbiamo fare

$$\gamma = -1, \quad \alpha = \beta H + 1$$

e rimarrà β arbitraria. La (45*) diventa

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \beta \left\{ \operatorname{senh} 2\tau + \frac{H}{2} (\cosh 2\tau - 1) \right\},$$

che si identifica colla (12*) § 6, ove si faccia

$$\beta = k, \quad H = -2c.$$

d) *Superficie* $\overline{S}$ *con* $r_1 + r_2 = a$ (a cost.).

Sostituendo nella (II) alla curvatura assoluta K il suo valore espresso per la relativa

$$K = \frac{1}{r_1 r_2} - 1,$$

questa diventa

$$(\alpha - 1) r_1 r_2 - \beta (r_1 + r_2) + \gamma + 1 = 0.$$

Nel caso attuale sarà adunque

$$\alpha = 1, \quad \gamma = a\beta - 1$$

e la (45*) ci dà

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \beta \left\{ \operatorname{senh} 2\tau + \frac{a}{2} (\cosh 2\tau + 1) \right\},$$

che coincide colla (18) § 11 appena si faccia

$$\beta = -k \quad a = -2c.$$

e) *Superficie* $\overline{S}$ *a curvatura assoluta* K *costante.*

Dobbiamo fare nella (II)

$$\beta = 0 \quad \alpha = -\gamma - (\gamma + 1) K$$

e dalla (45*) deduciamo

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \frac{\gamma + 1}{2} \{ 2 + K (1 - \cosh 2\tau) \},$$

che coincide colla (27) § 14, posto

$$\frac{\gamma + 1}{2} = k.$$

§ 21.

Le superficie $\overline{S}'$ trasformate.

Compiute così tutte le nostre verifiche, vogliamo da ultimo stabilire le formole effettive, mediante le quali si calcolano le coordinate $\overline{x}'$ di un punto $\overline{M}'$ della superficie $\overline{S}'$ trasformata, nota la coppia speciale (Φ, W) di soluzioni delle equazioni di trasformazione (A), (B), (C). Basterà per ciò procedere come nelle particolari ricerche della Mem.ª 2.ª (§ 17).

Essendo M, $\overline{M}$, $\overline{M}'$ tre punti corrispondenti sopra S, $\overline{S}$, $\overline{S}'$, il segmento $\overline{M}\,\overline{M}'$ è normale nel suo punto medio μ al piano (ξ) tangente in M alla S. Per ciò, indicando con w la metà del segmento $\overline{M}\,\overline{M}'$ e con X_0, X_1, X_2, X_3 le coordinate del detto punto medio μ, avremo:

$$\overline{x} = X \cos w \pm \xi \operatorname{sen} w$$

$$\overline{x}' = X \cos w \mp \xi \operatorname{sen} w,$$

da cui

$$\overline{x}' = \overline{x} \mp 2\,\xi \operatorname{sen} w. \tag{47}$$

Ora si ha, dando a w un conveniente segno

$$\operatorname{sen} w = \Sigma\,\overline{x}\,\xi\,, \tag{48}$$

e poichè il piano (ξ) passa per μ, sarà

$$\Sigma\,\xi\,X = 0,$$

cioè

$$\Sigma\,\xi\,\frac{\overline{x}' + \overline{x}}{2} = \Sigma\,\xi\,(\overline{x} \mp \xi \operatorname{sen} w) = 0.$$

Determinando w dalla (48), dovremo dunque scegliere nelle nostre formole i segni superiori ed avremo per ciò:

$$\overline{x}' = \overline{x} - 2\,\xi\,\Sigma\,\overline{x}\,\xi.$$

Sostituendo gli effettivi valori delle ξ, dati dalle (44), avremo:

$$\overline{x}' = x - \frac{2 \operatorname{sen} \tau}{\Omega + 1} \left\{ \overline{x} \operatorname{sen} \tau - \overline{\xi} \cos \tau + \frac{1}{A} \frac{\partial \tau}{\partial u} \overline{\eta} + \frac{1}{B} \frac{\partial \tau}{\partial v} \overline{\zeta} \right\}$$

e se esprimiamo

$$\tau, \quad \frac{1}{A} \frac{\partial \tau}{\partial u}, \quad \frac{1}{B} \frac{\partial \tau}{\partial v}$$

per Φ, W secondo la formola

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\Phi}{W}$$

e le (30) § 18, otterremo le formole finali richieste:

$$\left.\begin{aligned} &\{(\alpha + 1)\Phi^2 + 2\beta \Phi W + (\gamma + 1) W^2\} . \overline{x}' = \\ &= \{(\alpha - 1)\Phi^2 + 2\beta \Phi W + (\gamma + 1) W^2\} \overline{x} + 2 \Phi W \overline{\xi} - \\ &\quad - \frac{2\Phi}{\sqrt{E}} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \overline{\eta} - \frac{2\Phi}{\sqrt{G}} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \overline{\zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Del tutto analogamente procedendo nel caso iperbolico, si avranno le altre formole:

$$\left.\begin{aligned} &\{(\alpha - 1)\Phi^2 + 2\beta \Phi W + (\gamma + 1) W^2\} . \overline{x}' = \\ &= \{(\alpha + 1)\Phi^2 + 2\beta \Phi W + (\gamma + 1) W^2\} \overline{x} + 2 \Phi W \overline{\xi} - \\ &\quad - \frac{2\Phi}{\sqrt{E}} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \overline{\eta} - \frac{2\Phi}{\sqrt{G}} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \overline{\zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Su queste formole finali sarebbe facile, con successive derivazioni, verificare che sulle superficie trasformate $\overline{S}'$ le linee u, v sono ancora le linee di curvatura e, calcolando i raggi principali di curvatura della $\overline{S}'$, si confermerebbe che essi sono legati dalla medesima relazione bilineare a) che vincolava quelli della primitiva $\overline{S}$.

Facciamo ancora l'osservazione seguente relativa al caso iperbolico. La funzione ausiliaria τ, definita dalla formola

$$\operatorname{tgh} \tau = \frac{\Phi}{W}, \tag{c}$$

è sparita dalle formole finali (50). Ora quando sia $\Phi^2 > W^2$, il valore corrispondente di τ tratto dalla (c) è (puramente) immaginario ed immaginaria è quindi la superficie riflettente S. Però la superficie $\overline{S}'$ trasformata della $\overline{S}$, data dalle formole (50), resta sempre reale. Esiste anche in questo caso una sfera che tocca $\overline{S}$, $\overline{S}'$ in due punti corrispondenti $\overline{M}$, $\overline{M}'$, ma il centro di essa sfera è ideale.

§ 22.

Le superficie dello spazio euclideo applicabili sul paraboloide:
$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{c}=2iz.$$

Come ho accennato nella Prefazione, alle superficie della classe α) dello spazio ellittico od iperbolico si può applicare la trasformazione di Weingarten per ottenerne (con quadrature) una classe di superficie applicabili dell'ordinario spazio euclideo. Limitandomi per brevità al caso ellittico, ed applicando il metodo di Weingarten nel modo sviluppato in altra mia Memoria (*), dimostrerò che per superficie tipica di questa classe può prendersi il *più generale* paraboloide
$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{c}=2iz,$$
a parametri ia, ic puramente immaginari. E qui conviene ricordare come già il Darboux nelle sue ricerche sui teoremi di Guichard (**) sia stato condotto a collegare una classe di superficie isoterme alle superficie applicabili sulle quadriche generali e conseguentemente a stabilire una teoria delle trasformazioni di queste ultime superficie. Ma, mentre nel caso generale nulla si sa ancora sulla effettiva integrazione del sistema lineare necessaria per applicare la trasformazione, la teoria delle superficie applicabili sul più generale paraboloide immaginario resta invece portata, colle considerazioni della presente Memoria, al medesimo punto di sviluppo di quella della superficie a

(*) *Alcune ricerche di geometria non-euclidea.* Questi *Annali*, Serie III, tom. II (1898).

(**) *Comptes Rendus de l'Académie*, 23 et 29 mai 1899 o *Annales de l'École Normale*, tom. 16^{me} 1899 (Novembre-Décembre).

curvatura costante, sicchè siamo in grado, con sole quadrature, di trovare infinite di queste superficie applicabili dipendenti da un numero, grande quanto si vuole, di costanti arbitrarie.

Per dimostrare le asserite proprietà, ricorriamo alle formole del § 3 della citata Memoria (*Annali*, Tom. II, 1898) e poniamo

$$\varphi = \frac{1}{2}(a\,\alpha^2 + 2\,b\,\alpha\,\beta + c\,\beta^2),$$

con che la equazione ivi segnata (13) si cangia appunto nella fondamentale

$$a\,r_1\,r_2 + b\,(r_1 + r_2) + c = 0. \qquad (\alpha)$$

Le quadrature indicate nelle formole (14) ibid. ci faranno conoscere una superficie dell'ordinario spazio euclideo coll'elemento lineare

$$d\,s^2 = d\,y_1^2 + d\,y_2^2 + d\,y_3^2 = (a\,d\,\alpha + b\,d\,\beta)^2 + (b\,d\,\alpha + c\,d\,\beta)^2 -$$
$$- [a\,\alpha\,d\,\alpha + b\,(\alpha\,d\,\beta + \beta\,d\,\alpha) + c\,\beta\,d\,\beta]^2.$$

Se, indicando con x, y, z coordinate cartesiane ortogonali, poniamo:

$$x = a\,\alpha + b\,\beta, \quad y = b\,\alpha + c\,\beta, \quad z = \frac{i}{2}(a\,\alpha^2 + 2\,b\,\alpha\,\beta + c\,\beta^2),$$

avremo dunque una quadrica (immaginaria) coll'indicato elemento lineare. Senza nuocere alla generalità, possiamo sostituire alla superficie della classe α) una parallela a curvatura costante. Avremo allora $b = 0$, e l'equazione della quadrica diventa

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{c} = 2\,i\,z,$$

che è appunto il più generale paraboloide a parametri puramente immaginari.

Pedona (Camajore), Luglio 1900.

Sopra alcuni criteri di instabilità (*).

(*Di* T. Levi-Civita, *a Padova.*)

INTRODUZIONE.

Le prime ricerche sistematiche sulla stabilità si devono a Lagrange, il quale nella *Mécanique analytique* espose il metodo delle piccole oscillazioni.

Spetta a Dirichlet il merito di aver introdotto in questo genere di considerazioni il rigore matematico, mostrando come le condizioni, richieste per la stabilità dall'accennato procedimento, sono effettivamente sufficienti, allorchè si tratta di equilibrio sotto l'azione di forze conservative. Se tali condizioni sieno anche necessarie, e più generalmente fin dove arrivi nelle questioni di stabilità la portata del metodo, rimase a lungo inesplorato. Ma, quando le applicazioni andarono moltiplicandosi, la critica del principio si impose.

L'occasione fu offerta al sig. Poincaré dai suoi classici studi sulle curve definite da equazioni differenziali. Nel discutere i caratteri qualitativi delle curve integrali, egli ebbe in particolare ad occuparsi della loro stabilità. Con ciò si trovarono confermati, per i sistemi di secondo e terzo ordine, i criteri di instabilità offerti dal metodo delle piccole oscillazioni.

Poco dopo se ne ebbe conferma, anche per il caso generale, grazie ai lavori del sig. Liapounoff (**).

(*) I risultati del presente lavoro si trovano riassunti in tre Note, presentate all'Accademia di Francia (cfr. *Comptes Rendus* 9, 16 e 23 Luglio 1900).

(**) Cfr. in particolare *Journal de Mathématiques*, 1897.

Il sig. Liapounoff dedicò al problema generale della stabilità del movimento varie memorie, nonchè un intero volume, scritto disgraziatamente in lingua russa. Per quanto mi fu dato rilevare dalle brevi relazioni dell'*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, l'A. distingue la stabilità passata dalla futura e ottiene in quest'ordine di idee risultati di grande interesse. Rimangono fuor della cerchia dei casi discussi quelli, che io ho qui incominciato a studiare, e che, rispetto alle piccole oscillazioni, sarebbero a dirsi stabili, sì nel passato che nel futuro.

Le stesse ricerche di Poincaré mostrarono invece la insufficienza dell'ordinario criterio di stabilità. Ne risultò chiaramente, già nel caso più semplice dei sistemi

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \tag{S}$$

che non contengono t esplicitamente, come, mentre *la instabilità è carattere puramente qualitativo* (che condizioni di diseguaglianza bastano ad assicurare), *la stabilità è insieme carattere quantitativo*, che richiede cioè condizioni vincolanti la natura delle funzioni X, Y. L'instabilità — dice Poincaré — è la regola, la stabilità soltanto eccezione.

Tuttavia, se si suppone $X = \frac{\partial U}{\partial y}$, $Y = -\frac{\partial U}{\partial x}$, la condizione quantitativa è di per sè soddisfatta e i due caratteri di stabilità e di instabilità sono entrambi contraddistinti da condizioni qualitative. Lo stesso avviene (teoremi di Dirichlet e di Liapounoff) per l'equilibrio dei sistemi materiali, soggetti a forze conservative.

Sarà ancora così quando dall'equilibrio si passa al movimento?

Quella certa fiducia nella regolarità dei fenomeni naturali, che è nello spirito della meccanica analitica, ci rende inclini a pensarlo.

E vi siamo confortati dagli esempi tutti, integrati finora (in particolare i moti permanenti), nei quali le cose stanno come nel caso dell'equilibrio.

Suggestiva è del pari una proprietà dei sistemi canonici, secondo cui essi godono necessariamente di una certa forma di stabilità, la stabilità alla Poisson (*).

All'incontro ragioni di analogia matematica (in base specialmente alle circostanze, segnalate dallo stesso sig. Poincaré per i sistemi (S), allorchè i secondi membri dipendono da t) fanno piuttosto ritenere il contrario.

Comunque, la questione riman dubbia a priori; potrebbe anzi apparire probabile che, nei problemi di meccanica celeste, la stabilità assumesse un carattere meno eccezionale di quel che le compete in astratto.

L'esempio concreto, che sarà qui esposto, toglie, a mio credere, ogni speranza in proposito.

Ma, prima di venire a questo esempio, discorriamo brevemente delle considerazioni, che vi conducono e del metodo generale, che io propongo per trattare le questioni di stabilità.

(*) Poincaré, *Mécanique céleste.* Tom. III, Cap. XXVI.

Sia un sistema differenziale

$$\frac{d x_i}{d t} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

dove le X_i sono funzioni periodiche di t; Σ una sua soluzione periodica.

Si dimostra (Cap. III, § 1) che la Σ è sempre stabile od instabile assieme ad una certa trasformazione puntuale Γ:

$$x_i^{(1)} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

biunivoca e regolare nell'intorno dell'origine O, e per cui O è un punto unito. (Stabile è a dirsi una trasformazione puntuale Γ, quando, partendo da un punto qualunque $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, abbastanza vicino ad O, le iterazioni — positive o negative — di Γ non fanno mai uscire da un intorno prefissato di O, comunque piccolo.)

Tutto si trova in tal modo ricondotto allo studio delle trasformazioni puntuali Γ. Ho considerato dapprima il caso generale, in cui non tutti i moltiplicatori (*) della Γ sono in valore assoluto eguali ad uno. Si riconosce facilmente che c'è instabilità. Questo risultato corrisponde al teorema di Liapounoff per i sistemi differenziali e fornisce una nuova dimostrazione del detto teorema.

Il caso, in cui tutti i moltiplicatori hanno modulo eguale ad uno, corrisponde alla stabilità nella prima approssimazione, ed è quello appunto, in cui doveva cimentarsi l'efficacia del metodo.

Trattandosi di un primo tentativo, mi son limitato al caso di $m = 2$.

Le trasformazioni da discutere si riducono all'uno o all'altro dei due tipi seguenti:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + \cdots \quad , \\ y_1 &= y + x + \cdots , \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B)}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \cos \vartheta - y \operatorname{sen} \vartheta + \cdots , \\ y_1 &= x \operatorname{sen} \vartheta + y \cos \vartheta + \cdots , \end{aligned}\right\} \qquad \text{(C)}$$

i termini omessi essendo di dimensione superiore alla prima, rapporto ad x, y.

Ho assegnato un criterio generale di instabilità per il tipo (B); per il (C), che è il più importante, solo introducendo la restrizione che l'angolo ϑ sia commensurabile con 2π.

(*) Chiamo brevemente moltiplicatori le radici della equazione caratteristica spettante alla sostituzione lineare, che si ottiene da Γ, limitando le f_i alle loro parti di prim'ordine.

Comunque, tali criteri di instabilità non sono privi di conseguenze, nei riguardi dei sistemi differenziali.

Essi permettono di constatare la instabilità di certe categorie di soluzioni periodiche, che alla prima approssimazione appariscono stabili.

Questo trova a sua volta applicazione nel problema ristretto dei tre corpi. Ho potuto così dimostrare che le soluzioni periodiche, prossime a movimenti circolari uniformi, sono instabili. A vero dire la dimostrazione non abbraccia tutte assolutamente le soluzioni periodiche in discorso: Quel che risulta da essa in modo indubbio si è che nel piano dei tre corpi esistono infinite zone di instabilità.

È pur significante che venga fatto di accertare la instabilità proprio in un caso, per il quale tutto sembrerebbe giustificare, dal punto di vista astronomico, la presunzione opposta.

Bisogna concluderne che la stabilità naturale va intesa in un senso meno restrittivo (*). Tale è precisamente il concetto, che informa le più recenti indagini del sig. POINCARÉ (**).

Dal punto di vista matematico, la questione della stabilità non è con ciò chiusa e nemmeno sprovvista ormai di interesse.

Sembrami infatti sotto ogni rapporto desiderabile che sia messo in evidenza il carattere generalmente instabile delle Γ, anche quando tutti i moltiplicatori sono in modulo eguali all'unità. Cominciando dal caso più semplice, si tratterà di discutere le trasformazioni (C), per ϑ qualunque. Si incontreranno probabilmente delle difficoltà; ma lo studio non pare addirittura inaccessibile, ond'è mio proposito di provarmici quanto prima.

(*) E ciò senza uscire dall'ambito della meccanica pura. Se poi si considera il movimento dei corpi celesti nei suoi rapporti cogli altri fenomeni fisici, non basta modificare il concetto di stabilità, ma si rende addirittura inattendibile l'ipotesi di una qualsiasi forma di stabilità.

A questa conclusione arrivano, per vie diverse, Lord KELVIN e POINCARÉ. Cfr. W. THOMSON, *On the Maxwell-Boltzmann Doctrine regarding Distribution of Energy*. (Proceedings of the Royal Society of London, vol. L, 1891, pag. 85.)

POINCARÉ, *Sur la stabilité du système solaire*. (Annuaire du Bureau des Longitudes, 1898.)

(**) *Mécanique céleste*, loc. cit.

A questo proposito è fondamentale una osservazione del sig. BOHLIN. Cfr. *Ueber die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme*. (Acta Mathematica, tom. X, 1887.)

Ben altrimenti difficile è la questione, che si presenta come fine ultimo di questo campo di ricerche, la questione cioè di assegnare le condizioni restrittive, che caratterizzano la assoluta stabilità. Non è però il caso di preoccuparsene troppo, dacchè, come abbiam visto, ciò non ha essenziale importanza per la meccanica celeste.

CAPITOLO I.

Nozione di stabilità per le trasformazioni puntuali.

§ 1. — Definizioni ed esempi.

Prendiamo a considerare una generica trasformazione reale

$$x_i^{(1)} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

in m variabili, dove le f_i sono a ritenersi funzioni analitiche (*), regolari nell'intorno del punto $x_i = 0$, o, come diremo brevemente dall'origine O. Supporremo che le f_i si annullino in O e di più che il loro determinante funzionale si mantenga in un certo intorno di O diverso da zero.

La trasformazione (1) è allora biunivoca e continua, almeno in un certo campo C, comprendente l'origine, al quale intenderemo costantemente di riferirci.

Interpretando le x_i e le $x_i^{(1)}$ come coordinate di due punti P e P_1 di uno stesso spazio rappresentativo, le (1) definiscono una corrispondenza Γ (biunivoca e regolare in C), per cui si passa da P a P_1.

Scriveremo brevemente

$$P_1 = \Gamma P. \tag{2}$$

La trasformazione inversa Γ^{-1} rimane definita dalle formule

$$x_i^{(-1)} = \bar{f}_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{1'}$$

(*) Nel presente lavoro ho supposto dappertutto di aver a fare con funzioni analitiche; basterebbero per altro — lo si riconoscerà ovviamente — condizioni assai meno restrittive.

che si traggono risolvendo le (1) rapporto alle x_i (e sostituendo $x_i^{(-1)}$ ad x_i, x_i ad $x_i^{(1)}$). Le (1') si compendiano in

$$P_{-1} = \Gamma^{-1} P, \tag{2'}$$

P_{-1} designando il punto di coordinate $x_i^{(-1)}$.

Come da P si passa a P_1, così, se P_1 è contenuto in C, applicando nuovamente la trasformazione Γ, potremo passare a un nuovo punto P_2; se questo è in C, a P_3, e così di seguito. Convenendo di usare indifferentemente P o P_0, x_i od $x_i^{(0)}$, e ponendo in generale

$$P_n = \Gamma P_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

avremo, per definire le coordinate $x_i^{(n)}$ di P_n, il sistema ricorrente

$$x_i^{(n)} = f_i(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \ldots, x_m^{(n-1)}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ n = 1, 2, \ldots\ldots. \end{pmatrix}. \tag{3}$$

In modo analogo le potenze negative della corrispondenza Γ conducono successivamente ai punti P_{-1}, $P_{-2}, \ldots$, le cui coordinate si hanno prendendo le iterazioni della (1')

$$x_i^{(-n)} = \overline{f}_i(x_1^{(-n+1)}, x_2^{(-n+1)}, \ldots, x_m^{(-n+1)}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ n = 1, 2, \ldots\ldots. \end{pmatrix}. \tag{3'}$$

La Γ e le sue potenze, positive e negative, ammettono l'origine O come punto unito. Se dunque P cade in O, anche ogni P_n coincide con O. La continuità di queste trasformazioni ci assicura che, *per ogni assegnato* n, si può prendere P abbastanza vicino ad O, affinchè P_1, P_{-1}, P_2, $P_{-2}, \ldots$, P_n, P_{-n} risultino pure vicini ad O, quanto ci piace.

Che cosa avviene quando n non è fisso, ma può crescere indefinitamente?

Non è più lecito ragionare nello stesso modo e conviene contemplare le due ipotesi possibili, cioè:

Scelto un numero ε positivo, arbitrariamente piccolo,

1.° ne esiste un altro $\eta > 0$, così fatto che, per tutti i punti P, le cui coordinate x_i sono in valore assoluto minori di η, risulta

$$|x_i^{(n)}| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{4}$$

qualunque sia il numero intero n positivo o negativo.

2.° non esiste un numero η, dotato della detta proprietà, e quindi, non per tutti i punti P, abbastanza vicini all'origine, risultano soddisfatte le (4).

Nel primo caso la trasformazione (1) si dirà *stabile*, nel secondo *instabile*. Possiamo anche dire sotto forma più comoda:

Vi ha stabilità, ogniqualvolta, assegnato un intorno, comunque piccolo E dell'origine, ne esiste un secondo H tale che, per tutti i punti P di H, ogni P_n rimane in E. Vi ha invece instabilità, ogniqualvolta, per quanto piccolo si prenda H, c'è sempre qualche punto P di H, per cui un P_n almeno non è contenuto in E.

È appena necessario osservare che i concetti di stabilità e di instabilità sono indipendenti dalle coordinate di riferimento. Se si fa un generico cambiamento di coordinate (di tipo (1)), sostituendo alle x_i nuove variabili y_i, la trasformazione, relativa alle y, è, insieme colla (1), stabile od instabile. Ciò è del resto messo direttamente in evidenza dalle ultime definizioni, che sono, anche nella forma, indipendenti dal sistema di riferimento.

Indichiamo qualche esempio.

a) Una sostituzione ortogonale

$$x_i^{(1)} = \sum_1^m {}_j \, \alpha_{ij} \, x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

è stabile, poichè ogni P_n dista (*) dall'origine come P.

b) Una trasformazione omografica (reale, si intende)

$$x_i^{(1)} = \omega_i \, x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

è necessariamente instabile, a meno che non sia involutoria ($\omega_i = \pm 1$), o in particolare identica. Basta infatti che vi sia una delle ω diversa da ± 1, ω_1 per es., perchè $x_1^{(n)} = \omega_1^n x_1$, oppure $x_1^{(-n)} = \frac{1}{\omega_1^n} x_1$ crescano indefinitamente con n (per quanto si prenda il punto P vicino all'origine, colla sola avvertenza che la sua coordinata x_1 non sia nulla).

c) La trasformazione in due variabili

$$x_1 = x - y\,(x^2 + y^2)\,,$$
$$y_1 = y + x\,(x^2 + y^2)$$

è instabile, pur essendo stabile la parte di prim'ordine, che si riduce all'i-

(*) Chiamiamo, secondo la consuetudine, distanza di due punti x_i, y_i di una varietà astratta la funzione $\left| \sqrt{\sum_1^m {}_i \, (x_i - y_i)^2} \right|$.

dentità. Per riconoscerlo, designiamo con r la distanza di P dall'origine, e in generale con r_n quella di P_n. Avremo manifestamente

$$r_1^2 = r^2(1 + r^4),$$
$$r_n^2 = r_{n-1}^2(1 + r_{n-1}^4) \qquad (n = 2,\ 3, \ldots),$$

donde apparisce che, per $r > 0$, le r_n costituiscono una successione positiva sempre crescente. Esiste quindi un limite, finito od infinito. Un limite finito l è da escludere, poichè questo l (> 0) dovrebbe verificare l'equazione

$$l^2 = l^2(1 + l^4),$$

il che è impossibile. Ne viene che r_n cresce indefinitamente con n, comunque si prenda piccolo r, purchè diverso da zero. La trasformazione è per conseguenza instabile.

d) Dalla formula di addizione delle funzioni ellittiche si può trarre un elegante esempio di trasformazione stabile.

Riferiamoci alle notazioni di WEIERSTRASS e ricordiamo che, quando gli invarianti g_2, g_3 sono reali e il discriminante $\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2$ è positivo, la curva

$$\eta^2 = 4\,\xi^3 - g_2\,\xi - g_3 = 4\,(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3) \tag{5}$$

(Fig. 1) consta di un ramo infinito e di un ovale, entrambi simmetricamente

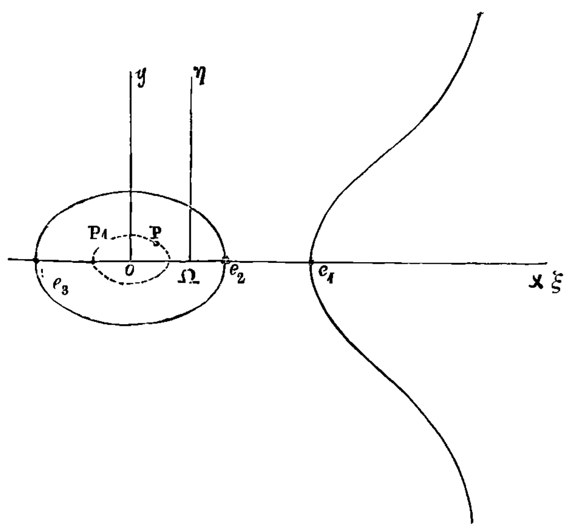

Fig. 1.

disposti rispetto all'asse delle ascisse. L'ovale taglia quest'ultimo nei due punti $\xi = e_2$, $\xi = e_3$.

Attribuiamo a g_2 un valore positivo fisso, riservandoci di far variare g_3. L'ovale, definito dalla equazione (5), che possiamo scrivere (*)

$$\eta^2 = 4\left(\xi + \sqrt{\frac{g_2}{12}}\right)^2\left(\xi - 2\sqrt{\frac{g_2}{12}}\right) + \sqrt{\frac{g_2^3}{27}} - g_3,$$

si riduce, per $g_3 = \sqrt{\frac{g_2^3}{27}}$, al punto O di coordinate $\xi = -\sqrt{\frac{g_2}{12}}$, $\eta = 0$. Facendo decrescere g_3, a partire dal detto valore, avremo una serie di ovali, che si inviluppano mutuamente e tali che ne passa uno per ogni punto appartenente a un certo intorno di O. Collochiamo l'origine in questo punto, sostituendo alle coordinate ξ, η,

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + \sqrt{\frac{g_2}{12}}, \\ y &= \eta. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

La famiglia degli ovali è allora rappresentata dalla equazione

$$y^2 + \sqrt{12\, g_2}\, x^2 - 4\, x^3 = \sqrt{\frac{g_2^3}{27}} - g_3. \tag{5'}$$

Sia $P(x, y)$ un punto generico nell'intorno dell'origine e immaginiamo g_3 definito dalla (5'). In virtù delle (6) e (5'), avremo le identità

$$\left.\begin{aligned} x &= p\, u + \sqrt{\frac{g_2}{12}}, \\ y &= p'\, u. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ciò premesso, ricorriamo alle formule di addizione

$$p\,(u+v) = \frac{1}{4}\left\{\frac{p'\,v - p'\,u}{p\,v - p\,u}\right\}^2 - p\,u - p\,v,$$

$$p'\,(u+v) = \frac{p\,u\,p'\,v - p\,v\,p'\,u - p\,(u+v)\{p'\,v - p'\,u\}}{p\,v - p\,u},$$

e portiamovi per $p\,u$, $p'\,u$ i valori (7), per $p\,v$, $p'\,v$ una coppia arbitraria, i cui elementi sieno legati dalla relazione

$$\overline{p'\,v}^2 = 4\,\overline{p\,v}^3 - g_2\,p\,v - g_3,$$

dove, bene inteso, g_3 ha il valore (5'). Così operando, si passa dal punto P

(*) I radicali si intenderanno tutti presi positivamente.

ad un nuovo punto P_1 di coordinate

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= p(u+v) + \sqrt{\frac{g_2}{12}}, \\ y_1 &= p'(u+v), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

che soddisfanno, come le x, y, alla equazione (5'). Il punto P_1 apparterrà ancora all'ovale, passante per P, se, come noi vogliamo supporre, l'argomento v si sceglie reale. (Infatti $u+v$ risulta allora, come u, del tipo $\omega_3 +$ una quantità reale.)

In queste condizioni la trasformazione, per cui si passa da x, y ad x_1, y_1, è stabile, poichè le sue iterazioni (positive o negative) non fanno mai uscire dall'ovale della famiglia (5'), passante per P. Assegnato quindi un intorno arbitrariamente piccolo E dell'origine, si ha il corrispondente H della definizione generale di stabilità, nell'area racchiusa da un qualsiasi ovale (5'), tutto contenuto in E.

Possiamo costruire esplicitamente le formule di trasformazione, eseguendo le indicate sostituzioni.

Diamo a $p\,v$ un valore costante $a - \sqrt{\frac{g_2}{12}} > e_1$. Siccome, per $g_3 = \sqrt{\frac{g_2^3}{27}}$, è $e_1 = 2\sqrt{\frac{g_2}{12}}$, ed e_1 decresce con g_3, così basterà supporre $a > 3\sqrt{\frac{g_2}{12}}$, ossia $4a > \sqrt{12 g_2}$, per essere certi che $p\,v$ supera e_1. La equazione

$$\overline{p'\,v}^2 = 4\,\overline{p\,v}^3 - g_2\,p\,v - g_3$$

diventa

$$\overline{p'\,v}^2 = (4a - \sqrt{12 g_2})\,a^2 + y^2 + \sqrt{12 g_2}\,x^2 - 4x^3,$$

donde, per essere $4a - \sqrt{12 g_2} > 0$,

$$\pm\, p'\,v = a\sqrt{4a - \sqrt{12 g_2}}\left\{1 + \frac{y^2 + \sqrt{12 g_2}\,x^2 - 4x^3}{a^2(4a - \sqrt{12 g_2})}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

che è una funzione regolare di x, y nell'intorno dell'origine.

Adottiamo per es. il segno $+$ (il che vuol dire v compreso fra 0 ed ω_1) e facciamo per brevità

$$\left.\begin{aligned} f &= a\sqrt{4a - \sqrt{12 g_2}}\left\{1 + \frac{y^2 + \sqrt{12 g_2}\,x^2 - 4x^3}{a^2(4a - \sqrt{12 g_2})}\right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= a\sqrt{4a - \sqrt{12 g_2}}\left\{1 + \frac{1}{2}\,\frac{y^2 + \sqrt{12 g_2}\,x^2}{a^2(4a - \sqrt{12 g_2})} + \cdots\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Avuto riguardo alle (7), (8) e alle

$$p\,v = a - \sqrt{\frac{g_2}{12}},$$
$$p'\,v = f,$$

le formule di addizione si scriveranno

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}\left\{\frac{f-y}{a-x}\right\}^2 - x - a + 3\sqrt{\frac{g_2}{12}}, \\ y_1 &= \frac{\left[\frac{1}{4}\left\{\frac{f-y}{a-x}\right\}^2 - x - a + 4\sqrt{\frac{g_2}{12}}\right](y-f) + x\,f - a\,y}{a-x}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

I secondi membri risultano effettivamente funzioni olomorfe di x, y (per valori abbastanza piccoli di queste variabili) e si annullano in O.

È forse superfluo aggiungere che si potrebbe verificare con calcolo diretto che la trasformazione (10) lascia invariante ogni curva della famiglia (5′), constatando che dalle (10) segue identicamente

$$y_1^2 + \sqrt{12\,g_2}\,x_1^2 - 4\,x_1^3 = y^2 + \sqrt{12\,g_2}\,x^2 - 4\,x^3,$$

donde la stabilità della trasformazione.

§ 2. — Instabilità delle trasformazioni, che ammettono almeno un moltiplicatore di modulo diverso da uno.

La trasformazione (1), mettendone in evidenza i termini di prim'ordine, può essere scritta

$$x_i^{(1)} = c_{i1}\,x_1 + c_{i2}\,x_2 + \cdots + c_{im}\,x_m + f'_i(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m) \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ m),$$

dove le f'_i cominciano con termini di secondo grado nelle x_i.

Moltiplicatori della trasformazione si chiameranno le radici della equazione

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} c_{11} - \omega & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} - \omega & \ldots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mm} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Potremmo addirittura supporre le variabili scelte in modo che la parte di prim'ordine possegga la sua forma canonica.

Ma, per lo scopo nostro, ci basterà richiamare (*) dalla teoria delle sostituzioni lineari che le variabili si possono sempre (e in infiniti modi) scegliere in guisa che ogni $c_{ij}\,(i>j)$ si annulli. La equazione $D(\omega)=0$ si riduce allora a

$$(c_{11}-\omega)(c_{22}-\omega)\ldots(c_{mm}-\omega)=0,$$

donde apparisce che le c_{ii} coincidono coi moltiplicatori ω della sostituzione. Nessuno di essi può essere eguale a zero, poichè altrimenti si annullerebbe in O il determinante funzionale delle $x_i^{(1)}$ rapporto alle x_i, il che è stato escluso.

Immaginando eseguito il cambiamento di variabili, per cui la parte di prim'ordine assume la forma anzidetta ($c_{ij}=0$, per $i<j$), la trasformazione si presenta sotto l'aspetto

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(1)}=\omega_1 x_1+f'_1, \\ x_2^{(1)}=c_{21}x_1+\omega_2 x_2+f'_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_m^{(1)}=c_{m1}x_1+c_{m2}x_2+\cdots+\omega_m x_m+f'_m. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Le ω si intenderanno ordinate in guisa che $|\omega_1|\geqq|\omega_2|\geqq\cdots\geqq|\omega_m|$. Potrò poi supporre (intendendo di riferirmi al caso generale, in cui non tutti i moltiplicatori hanno modulo eguale ad 1) $|\omega_1|>1$, poichè, qualora tutte le $|\omega|$ fossero $\leqq 1$, sarebbe necessariamente <1 il loro minimo modulo $|\omega_m|$ e allora prenderei invece a considerare la trasformazione inversa Γ^{-1}, che ha per moltiplicatori le $\dfrac{1}{\omega_i}$.

1.° *Moltiplicatori reali.*

Facciamo dapprima l'ipotesi che le ω_i sieno tutte reali. La trasformazione assegnata (1) si riduce allora alla forma (11) mediante un cambiamento di variabile *reale*. Reale è dunque la trasformazione (11) e si tratta di provarne la instabilità.

(*) Cfr. p. es. Picard, *Traité d'analyse*, tom. III, pag. 259-260.

Cominciamo perciò dall'osservare che, le f'_i essendo almeno di secondo grado nelle x_i, se si pone

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2,$$

si può assegnare un numero positivo M tale che, per tutti i valori delle x_i, che appartengono al campo C (di regolarità delle (1)), si abbia

$$|f'_i| \leqq M R^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Scegliendo poi M abbastanza grande, risulterà altresì

$$|c_{ij}| < M \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j < i).$$

Eseguiamo il cambiamento di variabili definito dalle formule

$$y_i = \lambda^{i-1} x_i,$$
$$y_i^{(1)} = \lambda^{i-1} x_i^{(1)},$$

dove λ rappresenta un numero positivo < 1, del cui valore ci riserviamo di disporre più innanzi.

Ponendo per brevità

$$\begin{aligned} L_1 &= 0, \\ L_2 &= c_{21} y_1, \\ L_3 &= c_{31} \lambda y_1 + c_{32} y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_m &= c_{m1} \lambda^{m-2} y_1 + c_{m2} \lambda^{m-3} y_2 + \cdots + c_{mm-1} y_{m-1} \end{aligned}$$

e designando con f''_i ciò che diviene la funzione f'_i, quando si sostituiscono le y alle x, le (11) assumono l'aspetto

$$y_i^{(1)} = \omega_i y_i + \lambda L_i + \lambda^{i-1} f''_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{12}$$

Se si rappresenta con r^2 la somma dei quadrati delle y, si ha chiaramente, in virtù delle formule di trasformazione,

$$R^2 \leqq \frac{1}{\lambda^{2m-2}} r^2;$$

osservando le $|f'_i| \leqq M R^2$, si traggono le disuguaglianze

$$|f''_i| \leqq \frac{M}{\lambda^{2m-2}} r^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{13}$$

per tutti i valori delle y appartenenti al campo C.

Dalle $|c_{ij}| < M$, $|y_i| \leqq r$ segue inoltre

$$|L_1| = 0 \leqq \frac{Mr}{1-\lambda},$$

$$|L_2| \leqq |c_{21}||y_1| \leqq Mr \leqq \frac{Mr}{1-\lambda},$$

$$|L_3| \leqq \lambda |c_{31}||y_1| + |c_{32}||y_2| \leqq Mr(\lambda+1) \leqq \frac{Mr}{1-\lambda},$$

. . . .

. . . .

$$|L_m| \leqq \lambda^{m-2}|c_{m1}||y_1| + \lambda^{m-3}|c_{m2}||y_2| + \cdots + |c_{mm-1}||y_{m-1}| \leqq$$
$$\leqq Mr(\lambda^{m-2} + \lambda^{m-3} + \cdots + 1) \leqq \frac{Mr}{1-\lambda},$$

le quali si riassumono in

$$|L_i| \leqq \frac{Mr}{1-\lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{14}$$

Ciò posto, distribuiamo le variabili y_i in due gruppi, attribuendo al primo gruppo y_1 e tutte quelle y (se ve n'ha) d'indice $i > 1$, per cui la ω_i corrispondente fosse, in valore assoluto, eguale ad ω_1. Avendosi per es.

$$|\omega_1| = |\omega_2| = \cdots = |\omega_\mu| > |\omega_{\mu+1}|,$$

apparterranno al primo gruppo

$$y_1, y_2, \ldots, y_\mu;$$

al secondo

$$y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \ldots, y_m.$$

Poniamo

$$\rho^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_\mu^2.$$

Dico che, per r abbastanza piccolo, se le y sono tali che

$$\frac{\rho^2}{r^2} > \frac{1}{2},$$

risulta ancora, in seguito alla trasformazione (12),

$$\frac{\rho_1^2}{r_1^2} > \frac{1}{2},$$

il significato di r_1, ρ_1 (e in generale di r_n, ρ_n) essendo manifesto.

Le (12) porgono

$$\rho_1^2 = \omega_1^2 \rho^2 + \lambda \sum_1^{\mu} {}_i (2\,\omega_i\, y_i\, L_i + \lambda\, L_i^2) +$$

$$+ \sum_1^{\mu} {}_i (\lambda^{2i-2} f''^2_i + 2\,\omega_i\, y_i\, \lambda^{i-1} f''_i + 2\,\lambda^i L_i\, f''_i),$$

$$r_1^2 = \omega_1^2 \rho^2 + \sum_{\mu+1}^{m} {}_i\, \omega_i^2\, y_i^2 + \lambda \sum_1^{m} {}_i (2\,\omega_i\, y_i\, L_i + \lambda\, L_i^2) +$$

$$+ \sum_1^{m} {}_i (\lambda^{2i-2} f''^2_i + 2\,\omega_i\, y_i\, \lambda^{i-1} f''_i + 2\,\lambda^i L_i\, f''_i).$$

Avendo riguardo alle (13) e (14), otteniamo agevolmente

$$\left| \sum_1^{m} {}_i \left(2\,\omega_i\, y_i\, L_i + \lambda\, L_i^2\right) \right| \leqq m \left\{ \frac{2\,|\,\omega_1\,|\,M}{1-\lambda} + \frac{M^2 \lambda}{(1-\lambda)^2} \right\} r^2,$$

$$\left| \sum_1^{m} {}_i \left(\lambda^{2i-2} f''^2_i + 2\,\omega_i\, y_i\, \lambda^{i-1} f''_i + 2\,\lambda^i L_i\, f''_i\right) \right| \leqq$$

$$\leqq m \left\{ \frac{M^2}{\lambda^{4m-4}}\, r + 2\,|\,\omega_1\,|\, \frac{M}{\lambda^{2m-2}} + \frac{2\,M^2}{\lambda^{2m-2}(1-\lambda)} \right\} r^3.$$

Siccome, supponendo $\lambda < \frac{1}{2}$ ed $r < 1$, si ha (m essendo almeno uguale ad 1)

$$\frac{1}{1-\lambda} < 2, \quad \frac{\lambda}{1-\lambda} < 1, \quad r\,\lambda^3 < \frac{1}{8}, \quad 2\,\lambda^{2m+1} < \frac{1}{4}, \quad \frac{2\,\lambda^{2m+1}}{1-\lambda} < \frac{1}{2},$$

$$\frac{2\,|\,\omega_1\,|\,M}{1-\lambda} + \frac{M^2 \lambda}{(1-\lambda)^2} < 4\,|\,\omega_1\,|\,M + 2\,M^2,$$

$$\frac{M^2}{\lambda^{4m-4}}\, r + 2\,|\,\omega_1\,|\, \frac{M}{\lambda^{2m-2}} + \frac{2\,M^2}{\lambda^{2m-2}(1-\lambda)} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{4m-1}} \left\{ M^2\, r\, \lambda^3 + 2\,|\,\omega_1\,|\,M\,\lambda^{2m+1} + 2\,M^2 \frac{\lambda^{2m+1}}{1-\lambda} \right\} <$$

$$< \frac{1}{\lambda^{4m-1}} \left\{ \frac{1}{4}\,|\,\omega_1\,|\,M + \frac{5}{8}\,M^2 \right\} < \frac{1}{\lambda^{4m-1}} \left\{ 4\,|\,\omega_1\,|\,M + 2\,M^2 \right\},$$

così, designando con $\omega_1^2 N$ la costante (indipendente da λ) $m\,\{4\,|\,\omega_1\,|\,M + 2\,M^2\}$, potremo ritenere

$$\left| \sum_1^{m} {}_i \left(2\,\omega_i\, y_i\, L_i + \lambda\, L_i^2\right) \right| \leqq \omega_1^2\, N\, r^2,$$

$$\left| \sum_1^{m} {}_i \left(\lambda^{2i-2} f''^2_i + 2\,\omega_i\, y_i\, \lambda^{i-1} f''_i + 2\,\lambda^i L_i\, f''_i\right) \right| \leqq \frac{\omega_1^2\, N\, r^3}{\lambda^{4m-1}}.$$

Lo stesso procedimento mostra che si ha a fortiori

$$\left|\sum_1^\mu {}_i\left(2\,\omega_i\, y_i\, L_i + \lambda\, L_i^2\right)\right| \leqq \omega_1^2\, N r^3,$$

$$\left|\sum_1^\mu {}_i\left(\lambda^{2i-2} f''^2_i + 2\,\omega_i\, y_i\, \lambda^{i-1} f''_i + 2\,\lambda^i\, L_i\, f''_i\right)\right| \leqq \frac{\omega_1^2\, N r^3}{\lambda^{4m-1}}.$$

Ne deduciamo

$$\frac{\rho_1^2}{r_1^2} \geqq \frac{\omega_1^2\, \rho^2 - \omega_1^2\, N\lambda\left(1+\frac{r}{\lambda^{4m}}\right) r^2}{\omega_1^2\, \rho^2 + \sum_{\mu+1}^m {}_i\, \omega_i^2\, y_i^2 + \omega_1^2\, N\lambda\left(1+\frac{r}{\lambda^{4m}}\right) r^2}.$$

Ma, dall'essere $\omega_{\mu+1}^2 \geqq \omega_{\mu+2}^2 \geqq \cdots \geqq \omega_m^2$, ricordando la ipotesi $\frac{\rho^2}{r^2} > \frac{1}{2}$, si trae evidentemente

$$\sum_{\mu+1}^m {}_i\, \omega_i^2\, y_i^2 \leqq \omega_{\mu+1}^2 (y_{\mu+1}^2 + y_{\mu+2}^2 + \cdots + y_m^2) = \omega_{\mu+1}^2 (r^2 - \rho^2) \leqq \omega_{\mu+1}^2\, \rho^2,$$

e perciò, dividendo per $\omega_1^2\, r^2$ sopra e sotto,

$$\frac{\rho_1^2}{r_1^2} \geqq \frac{\frac{\rho^2}{r^2} - N\lambda\left(1+\frac{r}{\lambda^{4m}}\right)}{(2-\sigma)\frac{\rho^2}{r^2} + N\lambda\left(1+\frac{r}{\lambda^{4m}}\right)},$$

dove, per brevità, si è scritto σ al posto di $1 - \frac{\omega_{\mu+1}^2}{\omega_1^2}$, che è, teniamolo presente, una frazione propria essenzialmente maggiore di zero (*).

Attribuiamo a λ un valore determinato inferiore ad $\frac{1}{2}$, a $\frac{\sigma}{12\,N}$, e tale che

$$\omega_1^2 (1 - 2\,N\lambda) = \tau$$

risulti maggiore dell'unità (la qual cosa, per essere $\omega_1^2 > 1$, è certo possibile, purchè si prenda λ abbastanza piccolo).

(*) Questa osservazione, e quindi il successivo ragionamento, cadrebbero in difetto, qualora, per essere ogni $|\omega_i|$ eguale ad $|\omega_1|$, venissero a mancare le variabili del secondo gruppo. Ma in tal caso ρ coincide con r e quindi senz'altro $\frac{\rho_1^2}{r_1^2} = 1 > \frac{1}{2}$.

Supposto $r < \lambda^{4m}$, sarà soddisfatta la disuguaglianza

$$N\lambda\left(1 + \frac{r}{\lambda^{4m}}\right) < \frac{\sigma}{12} \cdot 2 < \frac{\sigma}{3}\frac{\rho^2}{r^2},$$

talchè

$$\frac{\rho_1^2}{r_1^2} > \frac{\frac{\rho^2}{r^2}\left(1 - \frac{\sigma}{3}\right)}{\frac{\rho^2}{r^2}\,2\left(1 - \frac{\sigma}{3}\right)} > \frac{1}{2}.$$

C. D. D.

Appoggiandosi sopra questo lemma, si dimostra subito la instabilità della nostra trasformazione.

Dalla espressione di ρ_1^2 e dalle precedenti disuguaglianze segue

$$\rho_1^2 \geqq \omega_1^2 \rho^2 - \omega_1^2 r^2 N\lambda\left(1 + \frac{r}{\lambda^{4m}}\right).$$

Dacchè $r^2 < 2\rho^2$ e la differenza $\omega_1^2(1 - 2N\lambda)$ s'è chiamata $\tau\,(> 1)$, avremo ancora

$$\rho_1^2 \geqq \tau\rho^2 - \frac{\sqrt{8}\,N\omega_1^2}{\lambda^{4m-1}}\rho^3.$$

Delimitiamo un intorno E dell'origine, contenuto, si intende in C, per cui sia ad un tempo

$$r < 1,$$

$$r < \lambda^{4m},$$

$$r < \frac{\lambda^{4m-1}}{\sqrt{8}\,N\omega_1^2}(\tau - \tau'),$$

τ' designando un numero positivo minore di τ, ma maggiore dell'unità.

Se, si parte da un punto P di E, tale che $\frac{\rho^2}{r^2} > \frac{1}{2}$, ma del resto vicino ad O quanto si vuole, la iterazione della (11) fa necessariamente uscire da E. Si ha infatti

$$\rho_1^2 \geqq \rho^2\left(\tau - \frac{\sqrt{8}\,N\omega_1^2\rho}{\lambda^{4m-1}}\right) \geqq \rho^2\left(\tau - \frac{\sqrt{8}\,N\omega_1^2 r}{\lambda^{4m-1}}\right),$$

ma $\tau - \frac{\sqrt{8}\,N\omega_1^2 r}{\lambda^{4m-1}} > \tau'$, dunque (il segno di eguaglianza rimanendo escluso, perchè si suppone r_1 e quindi $\rho_1 > 0$)

$$\rho_1^2 > \tau' \rho^2.$$

Qualora ogni P_n appartenesse ad E, sarebbe altresì, per il lemma testè dimostrato,

$$\rho_n^2 > \tau' \rho_{n-1}^2 \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

donde

$$\rho_n^2 > \tau'^n \rho^2,$$

e quindi ρ_n crescerebbe indefinitamente con n, il che implica contraddizione.

Moltiplicatori qualunque.

Partiamoci ancora dalle formule (11), operando però in guisa da far sparire gli elementi immaginari.

Per ipotesi, le (11) stesse provengono da una trasformazione (1) essenzialmente reale; i moltiplicatori ω complessi sono dunque due a due coniugati. Li supporremo ordinati in guisa che, pur essendo rispettate le disuguaglianze

$$|\omega_1| \leqq |\omega_2| \leqq \cdots \leqq |\omega_m|,$$

due moltiplicatori coniugati occupino posti contigui. Essendo ω_q, ω_{q+1} una tal coppia di moltiplicatori coniugati, $|\omega_q|$ il modulo, ϑ_q l'argomento di ω_q, avremo

$$\omega_q = |\omega_q| (\cos \vartheta_q + i \operatorname{sen} \vartheta_q),$$
$$\omega_{q+1} = |\omega_q| (\cos \vartheta_q - i \operatorname{sen} \vartheta_q).$$

Al campo reale della trasformazione (1) originariamente proposta corrispondono, nella (11), valori complessi coniugati per ogni coppia di variabili x_q, x_{q+1} (e così $x_q^{(1)}$, $x_{q+1}^{(1)}$); valori reali per le altre variabili x_p ($x_p^{(1)}$) (*).

Se dunque si pone

$$x_q = \xi_q + i\,\xi_{q+1},$$
$$x_{q+1} = \xi_q - i\,\xi_{q+1},$$

per ogni coppia di indici q, $q+1$, riferentisi a moltiplicatori complessi,

$$x_p = \xi_p,$$

per ogni valore dell'indice p spettante ad un moltiplicatore reale; ed analo-

(*) È facile rendersene conto, pensando alle relazioni tra le radici della equazione caratteristica $D(\omega) = 0$ e i sistemi di variabili, atti ad attribuire alla (1) la forma (11).

gamente

$$x_q^{(1)} = \xi_q^{(1)} + i\,\xi_{q+1}^{(1)},$$
$$x_{q+1}^{(1)} = \xi_q^{(1)} - i\,\xi_{q+1}^{(1)},$$
$$x_p^{(1)} = \xi_p^{(1)},$$

la trasformazione (11) fra le x_i e le $x_i^{(1)}$ darà luogo ad una trasformazione *essenzialmente reale* fra le ξ_i e le $\xi_i^{(1)}$ definita da formule dei tipi seguenti

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_p^{(1)} = \bar{c}_{p1}\,\xi_1 + \bar{c}_{p2}\,\xi_2 + \cdots + \omega_p\,\xi_p + \bar{f}_p, && (11'_a)\\
&\left.\begin{aligned}
\xi_q^{(1)} &= \bar{c}_{q1}\,\xi_1 + \bar{c}_{q2}\,\xi_2 + \cdots + \bar{c}_{qq-1}\,\xi_{q-1} + \\
&\quad + |\omega_q|\,(\xi_q \cos\vartheta_q - \xi_{q+1}\,\text{sen}\,\vartheta_q) + \bar{f}_q,\\
\xi_{q+1}^{(1)} &= \bar{c}_{q+1\,1}\,\xi_1 + \bar{c}_{q+1\,2}\,\xi_2 + \cdots + \bar{c}_{q+1\,q-1}\,\xi_{q-1} + \\
&\quad + |\omega_q|\,(\xi_q\,\text{sen}\,\vartheta_q + \xi_{q+1}\cos\vartheta_q) + \bar{f}_{q+1}\ (*),
\end{aligned}\right\} && (11'_b)
\end{aligned}\right\}\quad (11')$$

designando le $\bar{c}$ costanti reali e le $\bar{f}$ funzioni pure reali delle ξ, di second'ordine almeno nelle ξ stesse.

Questa trasformazione (11′) equivale evidentemente (a meno di un cambiamento lineare reale di variabili) alla primitiva (1). Per dimostrarne la instabilità, basterà porre

$$\eta_p = \lambda^{p-1}\,\xi_p; \quad \eta_q = \lambda^q\,\xi_q, \quad \eta_{q+1} = \lambda^q\,\xi_{q+1}$$

(e corrispondentemente

$$\eta_p^{(1)} = \lambda^{p-1}\,\xi_p^{(1)}; \quad \eta_q^{(1)} = \lambda^q\,\xi_q^{(1)}, \quad \eta_{q+1}^{(1)} = \lambda^q\,\xi_{q+1}^{(1)}),$$

procedendo poi in modo perfettamente analogo a quello tenuto nel caso dei moltiplicatori tutti reali.

Rimane così dimostrata la proposizione generale: *Le trasformazioni puntuali sono certamente instabili, allorchè non tutti i moltiplicatori hanno moduli eguali all'unità.*

Vedremo tra poco che anche quest'ultima circostanza è ben lungi dall'assicurare la stabilità.

(*) Le $(11'_b)$ seguono da:

$$x_q^{(1)} = c_{q1}\,x_1 + c_{q2}\,x_2 + \ldots + \omega_q\,x_q + f'_q,$$

separando la parte reale dalla immaginaria.

CAPITOLO II.

Trasformazioni binarie a moltiplicatori eguali all'unità.

§ 1. — Tipi non contemplati nel precedente capitolo di trasformazioni a due variabili.

Suppongasi $m = 2$. I due moltiplicatori ω_1, ω_2 hanno entrambi modulo eguale all'unità nei seguenti casi:

$$\omega_1 = \pm 1, \quad \omega_2 = \mp 1;$$
$$\omega_1 = \pm 1, \quad \omega_2 = \pm 1;$$
$$\omega_1 = e^{i\vartheta}, \quad \omega_2 = e^{-i\vartheta},$$

designando ϑ un argomento reale.

Nel primo caso le formule corrispondenti alle (11) del precedente capitolo

$$x_1^{(1)} = \omega_1 x_1 + f'_1(x_1, x_2),$$
$$x_2^{(1)} = c_{21} x_1 + \omega_2 x_2 + f'_2(x_1, x_2),$$

iterate una volta, danno

$$x_1^{(2)} = \omega_1 x_1^{(1)} + f'_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = x_1 + f(x_1, x_2),$$
$$x_2^{(2)} = c_{21} x_1^{(1)} + \omega_2 x_2^{(1)} + f'_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = c_{21}(\omega_1 + \omega_2) x_1 + x_2 + g(x_1, x_2) =$$
$$= x_2 + g(x_1, x_2),$$

f e g essendo, si intende, d'ordine superiore al primo. Questa trasformazione a moltiplicatori unità, ponendo per maggior comodo x, y in luogo di x_1, x_2; x_1, y_1 in luogo di $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, si scriverà

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + f(x, y), \\ y_1 &= y + g(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Alle stesse formule si perviene nel secondo caso, quando $c_{21} = 0$. Ma se $c_{21} \gtrless 0$, allora ponendo

$$x_1 = \frac{x}{c_{21}(\omega_1 + \omega_2)}, \quad x_2 = y;$$

$$x_1^{(2)} = \frac{x_1}{c_{21}(\omega_1 + \omega_2)}, \quad x_2^{(2)} = y_1,$$

si è invece condotti al tipo

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + f(x, y), \\ y_1 &= y + x + g(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

Nel caso dei moltiplicatori complessi le $(11'_b)$ del precedente capitolo, con semplice scambio di notazioni, danno

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \cos \vartheta - y \operatorname{sen} \vartheta + f(x, y), \\ y_1 &= x \operatorname{sen} \vartheta + y \cos \vartheta + g(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

La (A) vi rientra come caso particolare, per $\vartheta = 0$. Giova tuttavia considerarla a parte, perchè essa si può trattare con procedimenti, che non mi è finora riescito di estendere alla (C).

Vien qui a proposito di osservare che, oltre al caso $\vartheta = 0$, anche per ogni valore di ϑ commensurabile con 2π, lo studio della stabilità della (C) si riconduce all'identica questione per una trasformazione di tipo (A). Supposto infatti $\vartheta = \frac{2h\pi}{k}$ (h e k numeri interi primi tra loro) e detta Γ la corrispondente trasformazione (C), si riconosce immediatamente che la potenza Γ^k di Γ rientra nel tipo (A). Ora Γ e Γ^k sono insieme stabili od instabili.

§ 2. — Forma ridotta del tipo (A). — Caratteri invariantivi. — Interpretazione proiettiva.

Le trasformazioni

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + f(x, y), \\ y_1 &= y + g(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

conservano evidentemente il medesimo aspetto comunque si cambino le variabili.

Consideriamo in particolare le sostituzioni lineari

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y, \\ \eta &= \gamma x + \delta y, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \alpha x_1 + \beta y_1, \\ \eta_1 &= \gamma x_1 + \delta y_1, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

e serviamocene per far assumere una forma opportuna alle parti di secondo grado φ e ψ di f e g.

Posto

$$D = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

la risoluzione delle (1) e (2) porge

$$\left.\begin{aligned} Dx &= \delta\xi - \beta\eta, \\ Dy &= -\gamma\xi + \alpha\eta, \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

$$\left.\begin{aligned} Dx_1 &= \delta\xi_1 - \beta\eta_1, \\ Dy_1 &= -\gamma\xi_1 + \alpha\eta_1 \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

e la (A) nelle nuove variabili si scriverà

$$\begin{aligned} \xi_1 = \xi &+ \frac{\alpha}{D^2}\varphi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta) + \\ &+ \frac{\beta}{D^2}\psi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta) + \cdots, \\ \eta_1 = \eta &+ \frac{\gamma}{D^2}\varphi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta) + \\ &+ \frac{\delta}{D^2}\psi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta) + \cdots, \end{aligned}$$

i termini omessi essendo di dimensione superiore alla seconda.

Disponiamo dei coefficienti γ, δ in modo che la parte di secondo grado nella espressione di η_1

$$\frac{\gamma}{D^2}\varphi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta) + \frac{\delta}{D^2}\psi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta)$$

contenga η a fattore. Basterà rendere nullo il coefficiente di ξ^2, ossia

$$\gamma\varphi(\delta, -\gamma) + \delta\psi(\delta, -\gamma) = 0. \tag{3}$$

Questa relazione ci fornisce per il rapporto $\frac{\gamma}{\delta}$ *almeno un valore reale* Designiamolo con $\frac{\gamma'}{\delta'}$ e poniamo

$$\gamma = \lambda\gamma',$$
$$\delta = \lambda\delta',$$

lasciando per un momento indeterminato il moltiplicatore λ (non nullo). Prendiamo ancora

$$\alpha = \lambda \alpha',$$
$$\beta = \lambda \beta',$$

dove α' e β' sono arbitrari colla sola condizione che il determinante

$$D' = \alpha' \delta' - \beta' \gamma'$$

sia diverso da zero.

La nostra trasformazione diverrà, se riscriviamo x, y; x_1, y_1 al posto di ξ, η; ξ_1, η_1,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + \frac{1}{\lambda}(a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2) + \cdots, \\ y_1 &= y + \frac{y}{\lambda}(2 b_{12} x + b_{22} y) + \cdots, \end{aligned}\right\} \qquad (A')$$

dove le a e le b hanno valori numerici perfettamente determinati. La (A′) è a risguardarsi come una *forma ridotta* della nostra trasformazione.

In generale a_{11} sarà diverso da zero. Si può allora prendere $\lambda = a_{11}$ e, col porre

$$\frac{2 a_{12}}{a_{11}} = a, \quad \frac{a_{22}}{a_{11}} = b, \quad \frac{2 b_{12}}{a_{11}} = c, \quad \frac{b_{22}}{a_{11}} = d,$$

la (A′) assume l'aspetto

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + x^2 + y(a x + b y) + \cdots, \\ y_1 &= y + y(c x + d y) + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (A'_1)$$

A questo tipo è riducibile ogni trasformazione (A), *per cui le due forme quadratiche* φ *e* ψ (parti di secondo grado in f e g) *non hanno fattori comuni* (*). Per convincersene basta osservare che non può in tale ipotesi annullarsi l'a_{11} della corrispondente ridotta (A′), poichè allora le due combinazioni $\frac{1}{D^2}(\alpha \varphi + \beta \psi)$, $\frac{1}{D^2}(\gamma \varphi + \delta \psi)$, che compaiono (salvo la notazione) in (A′), ammetterebbero un fattore comune, e lo stesso dovrebbe aver luogo per φ e ψ.

Rispetto alle possibili riduzioni di una generica trasformazione (A), è bene rilevare che le proprietà proiettive del sistema delle due forme binarie φ e ψ (o, se si vuole, della involuzione quadratica $\psi - \mu \varphi = 0$) hanno carat-

(*) Per la discussione del paragrafo seguente non si avrebbe alcun sostanziale vantaggio particolarizzando ulteriormente la scelta delle variabili.

tere invariantivo di fronte a qualsiasi cambiamento di variabili biunivoco nell'intorno dell'origine.

Infatti, per le sostituzioni lineari, ciò risulta dalla osservazione fatta che φ e ψ vengono rimpiazzate dalle due forme $\frac{1}{D^2}(\alpha\varphi + \beta\psi)$, $\frac{1}{D^2}(\gamma\varphi + \delta\psi)$, che appartengono pure alla involuzione $\psi - \mu\varphi = 0$; per cambiamenti

$$\xi = x + \mathfrak{P}(x, y),$$
$$\eta = y + \mathfrak{Q}(x, y)$$

(con $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{Q}$ di second'ordine almeno), la cosa è pure evidente, poichè le parti di secondo grado φ e ψ rimangono addirittura inalterate. Ora ogni altro cambiamento di variabili si ottiene componendone due di questi. L'asserto è dunque provato.

Possiamo fare un passo più innanzi in quest'ordine di idee, notando che gli invarianti (in senso geometrico) del sistema delle due involuzioni proiettive

$$y - \mu x = 0, \qquad \mathrm{I}_1)$$
$$\psi - \mu\varphi = 0 \qquad \mathrm{I}_2)$$

sono tutti invarianti assoluti della trasformazione (A).

Ciò risulta dal fatto che, quando si cambian le variabili, le parti di primo e quelle di secondo ordine subiscono, a meno del fattore $\frac{1}{D^2}$, la stessa sostituzione lineare.

Tra gli infiniti elementi della involuzione I_1) ve ne ha tre, che coincidono con uno dei due della coppia corrispondente I_2); essi corrispondono alle radici della forma cubica

$$x\psi - y\varphi = 0,$$

e i rispettivi parametri $\mu = \frac{y}{x}$ rimangono definiti dalla equazione

$$\psi(1, \mu) - \mu\varphi(1, \mu) = 0, \qquad (3')$$

che è la (3), in cui si sia posto $-\frac{\gamma}{\delta} = \mu$.

Cambiare variabili in (A) significa, rispetto alle nostre involuzioni proiettive I_1), I_2), cambiare i punti fondamentali. Quando si mutan questi, mutano in generale i parametri degli elementi uniti, dunque la equazione (3'), o, ciò che è lo stesso, la (3), non è di per se stessa invariante. (Così per es.

la particolarità della forma ridotta (A′) consiste, possiam dire, in ciò che la corrispondente equazione (3′) ammette la radice $\mu = 0$.) *Rimangono però invarianti, qualunque sieno le variabili* (reali), *nelle quali si presenta una trasformazione* (A), *i caratteri di molteplicità e di realità delle radici delle corrispondenti* (3′); in quanto esprimono proprietà proiettive degli elementi uniti. Lo stesso è a dirsi evidentemente per la equazione (3) nel rapporto $-\frac{\gamma}{\delta} = \mu$.

§ 3. — Instabilità del caso generale.

Ogni trasformazione (A), per cui le parti di secondo ordine sono prive di fattori comuni, è riducibile, come abbiamo visto, alla forma

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + x^2 + y(ax + by) + U(x, y), \\ y_1 &= y + y(cx + dy) + V(x, y), \end{aligned}\right\} \qquad (A'_1)$$

raccogliendosi in U e V i termini di ordine superiore al secondo. Si noti che deve ritenersi

$$d^2 - c(ad - bc) \gtrless 0, \qquad (4)$$

altrimenti le due forme $x^2 + y(ax + by)$, $y(cx + dy)$ ammetterebbero il fattore comune $cx + dy$.

Vogliamo dimostrare che queste trasformazioni sono necessariamente instabili.

È opportuno distinguere tre casi: $c < 1$, $c > 1$, $c = 1$.

1.° ($c < 1$).

Se $V(x, y)$ non è divisibile per y, sia γx^p $(p > 2)$ il termine di dimensione minima, che non contiene y a fattore.

È lecito supporre $\gamma > 0$, poichè si è sempre ricondotti a questo caso, scambiando all'occorrenza y e y_1 in $-y$, $-y_1$ (ciò, che non altera il coefficiente c).

La curva (Fig. 2)

$$y_1 = y(1 + cx + dy) + V(x, y) = 0,$$

che è tangente nell'origine all'asse delle ascisse, rimane per x positivo e abbastanza piccolo, al disotto di quest'asse.

Infatti le derivate della funzione y di x (definita dalla precedente equazione), d'ordine inferiore a p, si annullano in O e la derivata p^{esima} vale $-p!\gamma$; lo sviluppo dell'ordinata dei punti della curva in funzione dell'ascissa comincia quindi col termine $-\gamma x^p$.

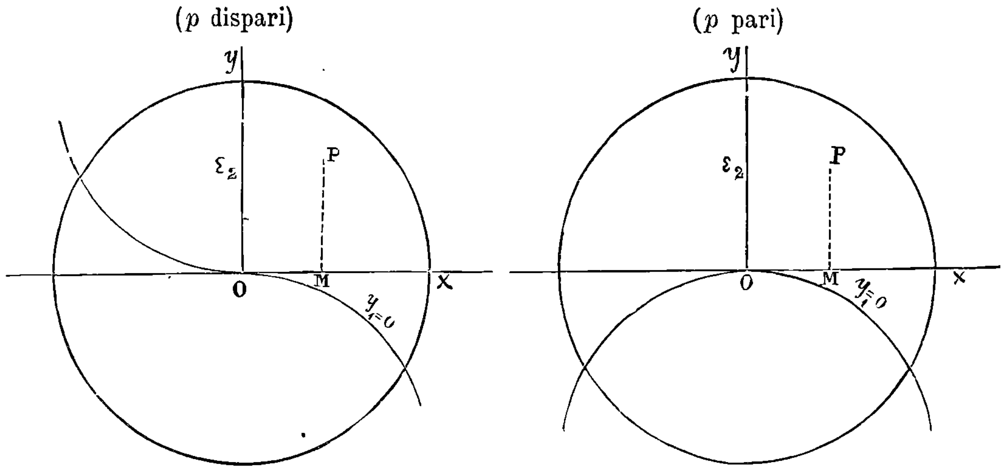

Fig. 2.

La y è dunque negativa per x positivo e non superiore a un certo limite ε_1. In modo analogo, dacchè lo sviluppo di $V(x, 0)$ comincia col termine γx^p, sarà $V(x, 0) \geqq 0$ per $x \geqq 0$ e $\leqq$ ad un certo ε_2, che posso sempre supporre $\leqq \varepsilon_1$.

Per tutti i punti, appartenenti al primo quadrante di un cerchio di centro O e raggio ε_2, risulta necessariamente

$$y_1 \geqq 0. \tag{5}$$

(Qualora infatti in un punto P del quadrante fosse $y_1 < 0$, la perpendicolare PM, abbassata da P sull'asse delle ascisse, dovrebbe incontrare la curva $y_1 = 0$. Questo è impossibile, poichè nel quadrante non vi sono punti della curva.)

Se poi $V(x, y) = yV'(x, y)$ (con $V'(x, y)$ funzione regolare di secondo ordine almeno in x, y), il coefficiente di y in y_1, cioè $1 + cx + dy + V'(x, y)$, è essenzialmente positivo per x, y abbastanza piccoli, e la (5) risulta, come sopra, soddisfatta per tutti i punti del primo quadrante di un cerchio di raggio conveniente, che designeremo ancora con ε_2.

Poniamo

$$y = xz.$$

Le due funzioni $U(x, z)$, $V(x, z)$, espresse per x e z, conterranno x^3 a fattore e si potrà scrivere

$$U(x, y) = x^3\, U_1(x, z),$$
$$V(x, y) = x^3\, V_1(x, z),$$

U_1 e V_1 mantenendosi finite per x, z abbastanza piccoli, inferiori per es. in valore assoluto ad $\varepsilon_3 \leqq \varepsilon_2$ e $\operatorname{tg} \alpha_1$ rispettivamente.

Intenderemo questi limiti fissati in modo che risulti ulteriormente

$$| a z + b z^2 + x\, U_1(x, z) | < \frac{1}{2},$$

il che implica

$$| y (a x + b y) + U(x, y) | \leqq \frac{1}{2} x^2,$$

e per conseguenza

$$x_1 \geqq x + \frac{1}{2} x^2, \tag{6}$$

per tutti i punti del settore (terminato inferiormente all'asse delle ascisse) di raggio ε_3 e ampiezza α_1.

Dividendo membro a membro le (A'_1), si ha

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y (1 + c x + d y) + V(x, y)}{x + x^2 + y (a x + b y) + U(x, y)} = \frac{z (1 + c x + d x z) + x^2 V_1(x, z)}{1 + x + x z (a + b z) + x^2 U_1(x, z)} =$$
$$\{ z (1 + c x + d x z) + x^2 V_1(x, z) \} \{ 1 + x (1 + a z + b z^2) + x^2 U_1(x, z) \}^{-1},$$

donde evidentemente (per x inferiore in valore assoluto ad un nuovo limite $\varepsilon_4 \leqq \varepsilon_3$)

$$\frac{y_1}{x_1} = z - (1 - c) x z + \{ (d - a) z - b z^2 \} x z + x^2 W(x, z) \tag{7}$$

con $W(x, z)$ funzione finita nel settore $(\varepsilon_4, \alpha_1)$. (Il significato di questa notazione è ovvio.)

Dacchè $c < 1$, la differenza $1 - c$ ha valore essenzialmente positivo, e basterà prendere z abbastanza piccolo perchè risulti

$$(d - a) z - b z^2 < \frac{1 - c}{2}. \tag{8}$$

Designo con α, che ho cura di scegliere non superiore ad α_1, un arco tale che, per $0 \leqq z \leqq \operatorname{tg} \alpha$, la (8) rimanga soddisfatta.

Detto M un numero positivo, maggiore di uno qualunque dei valori assunti da $W(x, z)$ in (ε_1, α), prendo infine un numero positivo ε, inferiore ad un tempo ad ε_1, a $\frac{1-c}{2M} \operatorname{tg} \alpha$ e a $\frac{2}{1-c}$, e considero il settore (ε, α), che designerò con S (Fig. 3).

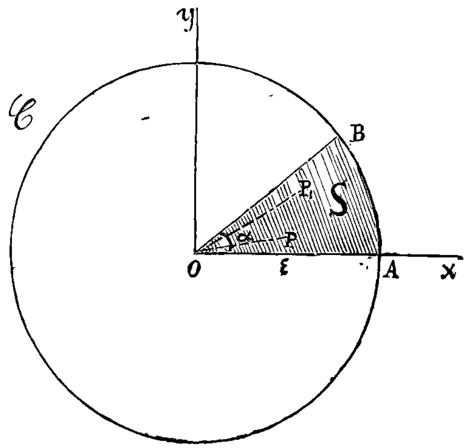

Fig. 3.

Per ogni punto P di S varranno evidentemente le (5), (6), (7), (8),

$$xW < \frac{1-c}{2} \operatorname{tg} \alpha, \tag{9}$$

e

$$1 - \frac{1-c}{2} x > 0. \tag{10}$$

Dalla (7), considerando che x e z sono in S positivi (o nulli) e avendo riguardo alle (8), (9), si trae

$$\frac{y_1}{x_1} \leqq z - (1-c) x z + \frac{1-c}{2} x z + x \frac{1-c}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

che può anche essere scritta

$$\frac{y_1}{x_1} \leqq \operatorname{tg} \alpha - \left(1 - \frac{1-c}{2} x\right)(\operatorname{tg} \alpha - z).$$

In causa della (10), ne viene

$$\frac{y_1}{x_1} \leqq \operatorname{tg} \alpha. \tag{11}$$

Siccome, per le (5) e (6), sappiamo già che il punto $P_1(x_1, y_1)$ appartiene al primo quadrante, la (11) ci mostra che esso è interno all'angolo al centro $A\widehat{O}B$ del settore S. Il settore gode dunque della proprietà che, applicando ai suoi punti la trasformazione (A'_1), non si esce mai attraverso ai lati; o si rimane entro S, o si va addirittura fuori del cerchio C, cui il settore stesso appartiene.

Ciò posto, è assai facile dimostrare la instabilità della trasformazione (A'_1) (per il caso $c < 1$, qui contemplato).

Infatti, se vi fosse stabilità, prendendo P in S abbastanza vicino all'origine, dovrebbero tutti i P_n rimanere indefinitamente entro C, e quindi in S. Assieme alla (6), sarebbero allora soddisfatte le disuguaglianze

$$x_n \geqq x_{n-1} + \frac{1}{2} x_{n-1}^2 \quad (n = 2, 3, \ldots);$$

la successione (mai decrescente) x_n ammetterebbe un limite finito l (> 0, per P diverso da O), e si arriverebbe alla contraddizione

$$l \geqq l + \frac{1}{2} l^2.$$

2.° ($c > 1$).

Dalla risoluzione delle (A'_1), raccogliendo in $\overline{U}$ e $\overline{V}$ i termini d'ordine superiore al secondo e cambiando anche la designazione delle variabili, otteniamo

$$\left.\begin{aligned} x_{-1} &= x - x^2 - y\,(a\,x + b\,y) + \overline{U}(x, y), \\ y_{-1} &= y - y\,(c\,x + d\,y) + \overline{V}(x, y), \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

le quali ci definiscono la trasformazione inversa (*).

(*) A giustificazione di queste formole, si noti in generale che, se si hanno i due gruppi equivalenti:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= x + \mathfrak{P}(x, y), \\ y_1 &= y + \mathfrak{Q}(x, y), \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_1 + \overline{\mathfrak{P}}(x_1, y_1), \\ y &= y_1 + \overline{\mathfrak{Q}}(x_1, y_1), \end{aligned}\right.$$

(con $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ e quindi $\overline{\mathfrak{P}}$, $\overline{\mathfrak{Q}}$ di grado superiore al primo in x, y), le parti di secondo ordine $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{Q}_2$; $\overline{\mathfrak{P}}_2$, $\overline{\mathfrak{Q}}_2$ sono legate dalle relazioni:

$$\overline{\mathfrak{P}}_2(x, y) = -\mathfrak{P}_2(x, y),$$
$$\overline{\mathfrak{Q}}_2(x, y) = -\mathfrak{Q}_2(x, y).$$

Infatti le formule del secondo gruppo devono cambiarsi in identità, quando si sostituiscono

Possiamo, come nel caso precedente, scambiando al bisogno y e y_{-1} in $-y$, $-y_{-1}$ (ciò, che non altera c) ritenere

$$y_{-1} \geqq 0, \tag{5'}$$

per tutti i punti appartenenti al primo quadrante di un cerchio di centro O e raggio abbastanza piccolo.

Ragionando nello stesso modo, potremo definire un nuovo settore S (Fig. 4) di raggio ε e apertura α abbastanza piccoli, perchè si abbia ad un tempo per tutti i suoi punti

$$x < \frac{2}{3},$$

$$|-y(ax+by)+\overline{U}(x, y)| \leqq \frac{1}{2}x^2,$$

$$\frac{y_{-1}}{x_{-1}} = z-(c-1)xz+\{(a-d)z+bz^2\}xz+x^2\overline{W}(x, z) \tag{7'}$$

($\overline{W}(x, z)$ designando una funzione finita),

$$(a-d)z+bz^2 < \frac{c-1}{2}, \tag{8'}$$

$$x\overline{W} < \frac{c-1}{2}\operatorname{tg}\alpha, \tag{9'}$$

$$1-\frac{c-1}{2}x > 0. \tag{10'}$$

Avendo riguardo alle prime due di queste disuguaglianze, la prima delle (12) mostra che

$$x_{-1} \leqq x - \frac{1}{2}x^2 \leqq x, \tag{6'}$$

$$x_{-1} \geqq x - \frac{3}{2}x^2 \geqq 0. \tag{13}$$

---

nel secondo membro $x+\mathfrak{P}(x, y)$, $y+\mathfrak{Q}(x, y)$ al posto di x_1, y_1. Ne viene:

$$x \equiv x+\mathfrak{P}(x, y)+\overline{\mathfrak{P}}\{x+\mathfrak{P}(x, y), y+\mathfrak{Q}(x, y)\},$$
$$y \equiv y+\mathfrak{Q}(x, y)+\mathfrak{Q}\{x+\mathfrak{P}(x, y), y+\mathfrak{Q}(x. y)\},$$

e il confronto dei termini quadratici fornisce in particolare le relazioni indicate.

La (7′) ci dà subito, tenendo conto delle (8′) e (9′),

$$\frac{y_{-1}}{x_{-1}} \leqq \operatorname{tg}\alpha - \left(1 - \frac{c-1}{2}\,x\right)(\operatorname{tg}\alpha - z),$$

donde, per la (10′),

$$\frac{y_{-1}}{x_{-1}} \leqq \operatorname{tg}\alpha. \qquad (11')$$

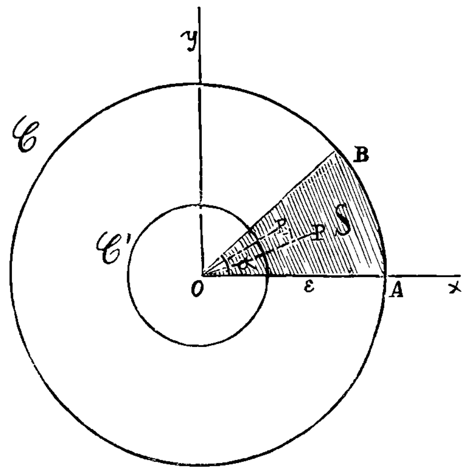

Fig. 4.

Ogni punto P di S si cambia, per effetto della trasformazione, in un punto P_{-1}, che appartiene ancora ad S. Infatti, per le (5′) e (13), il punto P_{-1} è situato nel primo quadrante; sotto tale condizione, la (11′) implica che il punto sia interno all'angolo $A\widehat{O}B$. Ma, per la (6′), esso cade a sinistra della parallela all'asse delle ordinate, condotta per P; dunque P_{-1} è ancora in S.

Lo stesso sarà a dirsi dei punti $P_{-2}, P_{-3}, \ldots$, che si ottengono successivamente per iterazione della (12).

Avremo in generale, per $n = 2, 3, \ldots$,

$$x_{-n} \geqq 0,$$
$$x_{-n} \leqq x_{-n+1} - \frac{1}{2}\,x_{-n+1}^2 \leqq x_{-n+1},$$

donde apparisce che le x_{-n} costituiscono una successione positiva mai crescente. Esiste pertanto un limite l finito; ma esso deve soddisfare alla disuguaglianza

$$l \leq l - \frac{1}{2} l^2,$$

dunque $l = 0$.

Siccome poi

$$\frac{y_{-n}}{x_{-n}} \leq \operatorname{tg} \alpha,$$

anche le ordinate convergono a zero, e i punti P_{-1}, P_{-2}, $P_{-3}, \ldots$ si avvicinano indefinitamente all'origine.

Sia C' un qualunque cerchio fisso di centro O e raggio $< \varepsilon$, P un punto di S compreso fra C e C'.

Per quanto s'è detto, i punti P_{-n} convergono ad O. La trasformazione proposta (A'_1), ripetuta n volte, fa passare da P_{-n} a P. In altri termini, per iterazione di (A'_1), si finisce necessariamente coll'uscire da C' qualunque sia il punto della successione P_{-1}, P_{-2}, $P_{-3}, \ldots$, da cui si parte. Ma di questi punti ve n'ha vicini all'origine quanto si vuole: L'instabilità è dunque manifesta.

3.° $(c = 1)$.

L'equazione (3') diviene in questo caso

$$(d - a)\mu^2 - b\mu^3 = 0$$

ed ammette per conseguenza $\mu = 0$ come radice doppia.

La terza radice $\frac{d-a}{b}$ è dunque reale e diversa da zero, a meno che non sia $d = a$, nel qual caso la equazione (3') ammette tre radici coincidenti.

Prescindiamo per un momento da questa eventualità ed eseguiamo una sostituzione lineare di variabili (1), (2), prendendo per $-\frac{\gamma}{\delta}$ il valore μ non nullo.

Procedendo come a § 1, veniamo a determinare una seconda ridotta reale della (A'_1), per la quale $\eta = \gamma x + \delta y = 0$ è l'elemento unito *semplice* delle due involuzioni proiettive $I_1)$, $I_2)$.

Il nuovo coefficiente c risulta allora $\gtrless 1$ (perchè il valore $c = 1$ implica una radice multipla della (3'), cioè un elemento unito *multiplo* della accennata corrispondenza). Possiamo quindi riportarci, per la dimostrazione della instabilità, ad uno dei due casi precedentemente discussi.

Rimane da vedere ciò che avviene per $d = a$. La (A'_1) è in questo caso

$$x_1 = x + x(x + a\,y) + b\,y^2 + U(x, y),$$
$$y_1 = y + y\,(x + a\,y) + V(x, y).$$

In causa della (4), $b \gtrless 0$ (senza di che le parti di secondo grado ammetterebbero il fattore comune $x + a\,y$).

Se $b > 0$, la dimostrazione della instabilità si fa in modo analogo a quello tenuto per $c < 1$.

Osservato che lo scambio di y, y_1 in $-y$, $-y_1$ non altera il valore di b, si vede subito potersi assegnare un settore S (limitato, si intende, inferiormente dall'asse x) di raggio ε e ampiezza α abbastanza piccoli, perchè si abbia in ogni suo punto

$$y_1 \geqq 0, \tag{5''}$$

$$x_1 \geqq x + \frac{1}{2}\,x^2, \tag{6''}$$

$$\frac{y_1}{x_1} = z - b\,x\,z^3 + x^2\,W(x, z), \tag{7''}$$

$$x\,W < b \operatorname{tg}^3 \alpha, \tag{9''}$$

$$1 - 3\,b\,x \operatorname{tg}^2 \alpha > 0. \tag{10''}$$

La (7''), confrontata colla (9''), dà luogo alla disuguaglianza

$$\frac{y_1}{x_1} \leqq z - b\,x\,z^3 + b\,x \operatorname{tg}^3 \alpha,$$

la quale può anche scriversi

$$\frac{y_1}{x_1} \leqq \operatorname{tg} \alpha - (\operatorname{tg} \alpha - z) \left\{ 1 - b\,x (\operatorname{tg}^2 \alpha + z \operatorname{tg} \alpha + z^2) \right\}.$$

Siccome evidentemente

$$z \leqq \operatorname{tg} \alpha,$$
$$1 - b\,x (\operatorname{tg}^2 \alpha + z \operatorname{tg} \alpha + z^2) \geqq 1 - 3\,b\,x \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

e quest'ultima, per la (10''), è una quantità positiva, così ne concludiamo

$$\frac{y_1}{x_1} \leqq \operatorname{tg} \alpha\,; \tag{11''}$$

dopodichè la dimostrazione si completa come sub 1.°.

Se $b < 0$, si procede in sostanza come sub 2.°, delimitando un settore S, in cui

$$y_{-1} \geqq 0, \tag{5'''}$$

$$x_{-1} \leqq x - \frac{1}{2} x^2 \leqq x, \tag{6'''}$$

$$x_{-1} \geqq x - \frac{3}{2} x^2 \geqq 0, \tag{13'}$$

$$\frac{y_{-1}}{x_{-1}} = z + b\, x\, z^3 + x^2\, W(x, z), \tag{7'''}$$

$$x\, W < -b \operatorname{tg}^3 \alpha, \tag{9'''}$$

$$1 + 3\, b\, x \operatorname{tg}^2 \alpha > 0\,; \tag{10'''}$$

e per conseguenza

$$\frac{y_{-1}}{x_{-1}} \leqq \operatorname{tg} \alpha.$$

A questo punto si ripetono identicamente le considerazioni del caso indicato.

§ 4. — Proprietà delle trasformazioni (B). Caso generale — Instabilità.

Sia la trasformazione

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + f(x, y), \\ y_1 &= y + x + g(x, y)\,; \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

$\varphi = a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, x\, y + a_{22}\, y^2$ l'insieme dei termini in secondo grado in $f(x, y)$.

Mi propongo di far vedere che il coefficiente a_{22} è un invariante della (B), di fronte a un generico cambiamento di variabili

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + \mathfrak{P}(x, y), \\ \eta &= y + \mathfrak{Q}(x, y)\,; \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + \mathfrak{P}(x_1, y_1), \\ \eta_1 &= y_1 + \mathfrak{Q}(x_1, y_1), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

regolare nell'intorno dell'origine e per il quale la parte di prim'ordine si riduce all'identità. (Sono questi d'altronde gli unici cambiamenti che importi considerare, possedendo già la parte lineare di (B) forma canonica).

Le (14) e (15), risolute rapporto alle antiche variabili, danno

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + \overline{\mathfrak{P}}(\xi, \eta), \\ y &= \eta + \overline{\mathfrak{Q}}(\xi, \eta); \end{aligned}\right\} \tag{14'}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + \overline{\mathfrak{P}}(\xi_1, \eta_1), \\ y_1 &= \eta_1 + \overline{\mathfrak{Q}}(\xi_1, \eta_1), \end{aligned}\right\} \tag{15'}$$

le parti di second'ordine $\overline{\mathfrak{P}}_2$, $\overline{\mathfrak{Q}}_2$ essendo legate a $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{Q}_2$ (cfr. la nota a pag. 249) dalle relazioni

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathfrak{P}}_2(x, y) &= -\mathfrak{P}_2(x, y), \\ \overline{\mathfrak{Q}}_2(x, y) &= -\mathfrak{Q}_2(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Per avere la forma delle (B), relativamente alle nuove variabili, partiamoci dalle (15), sostituendo successivamente nei secondi membri i valori (B) e (14').

Otteniamo dopo la prima operazione

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= x + f(x, y) + \mathfrak{P}\,|\, x + f(x, y),\ y + x + g(x, y)\,|, \\ \eta_1 &= y + x + g(x, y) + \mathfrak{Q}\,|\, x + f(x, y),\ y + x + g(x, y)\,|. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Dalle (14') e (16) segue evidentemente

$$x = \xi - \mathfrak{P}_2(\xi, \eta) + \cdots$$

$$f(x, y) = \varphi(\xi, \eta) + \cdots,$$

$$\mathfrak{P}\,|\, x + f(x, y),\ y + x + g(x, y)\,| = \mathfrak{P}_2(\xi, \eta + \xi) + \cdots,$$

i termini omessi essendo di terz'ordine almeno in ξ, η.

Con ciò la prima delle (17) porge

$$\xi_1 = \xi - \mathfrak{P}_2(\xi, \eta) + \varphi(\xi, \eta) + \mathfrak{P}_2(\xi, \eta + \xi) + \cdots$$

Siccome la differenza $\mathfrak{P}_2(\xi, \eta + \xi) - \mathfrak{P}_2(\xi, \eta)$ non contiene termine in η^2, così il coefficiente di η^2 è ancora a_{22}. C. D. D.

Disponendo opportunamente delle due funzioni indeterminate $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{Q}$ (di ordine non inferiore al secondo), che compaiono nelle (14), (15), possiamo attribuire alla trasformazione (B) una forma più semplice. Prendiamo per ciò

$$\mathfrak{P}(x, y) = g(x, y),$$
$$\mathfrak{Q}(x, y) = 0.$$

Le (17), avuto riguardo alle (14), danno

$$\xi_1 = \xi + f'(\xi, \eta),$$
$$\eta_1 = \eta + \xi,$$

dove $f'(\xi, \eta)$ non è che

$$-g(x, y) + f(x, y) + g\{x + f(x, y), y + x + g(x, y)\},$$

espressa per ξ, η.

Ogni trasformazione (B) è dunque suscettibile di una forma ridotta

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + f(x, y), \\ y_1 &= y + x, \end{aligned}\right\} \qquad (B')$$

per la quale la funzione g della seconda formula è identicamente nulla.

Usufruendo di questo tipo, *potremo facilmente accertare l'instabilità della* (B), *almeno per il caso generale, in cui il coefficiente* a_{22} (del quale si è testè riconosciuto il carattere invariantivo) *sia diverso da zero.*

In primo luogo è lecito supporre $a_{22} > 0$, poichè l'ipotesi opposta si riconduce a questa cambiando il segno delle variabili x, y (e conseguentemente x_1, y_1).

Ciò posto (veggasi il precedente paragrafo), si potrà tracciare un cerchio C, col centro nell'origine, di raggio ε abbastanza piccolo perchè, in ogni punto del primo quadrante Q di C, risulti

$$x_1 = x + f(x, y) \geqq 0,$$

essendo inoltre

$$f(0, y) > 0,$$

per $y > 0$ e $\leqq \varepsilon$.

Evidentemente la (B′) fa corrispondere ai punti di Q punti del primo quadrante.

Proviamoci a supporre che vi sia stabilità. Partendo dai punti P di Q, abbastanza vicini all'origine, tutti i P_n rimangono indefinitamente entro Q. Avendosi in generale

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_n &= y_{n-1} + x_{n-1} \end{aligned} \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

e le x_n essendo positive (purchè soltanto si intenda la posizione iniziale P diversa da O), ogni y_n risulta $> y_{n-1}$. Siccome nessuna y supera ε, la successione y_n ammette un limite $l \leq \varepsilon$ e > 0.

Dalla

$$y_n = y_{n-1} + x_{n-1}$$

segue, passando al limite,

$$\lim_{n=\infty} x_n = 0.$$

Con ciò la

$$x_n = x_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

passando pure al limite, porge

$$f(0, l) = 0,$$

dove l non è zero, nè supéra ε.

Ma questo contraddice alla definizione del cerchio C. È dunque inammissibile l'ipotesi della stabilità; e ciò dimostra l'asserto.

§ 5. — Considerazioni relative al caso d'eccezione. Sottocasi possibili.

Venendo al caso escluso $a_{21} = 0$, sia per la forma ridotta (B′), γy^p i termine (indipendente da x) di dimensione minima contenuto in $f(x, y)$. *Se p è pari, o se, p essendo dispari, $\gamma > 0$, lo stesso ragionamento, che ci ha servito testè, prova la instabilità della trasformazione.*

Per p dispari e γ negativo, la cosa non è così semplice. Le difficoltà, che si incontrano nella discussione, sono analoghe a quelle, che presenta il tipo (C), ond'io ho qui lasciato d'occuparmene, riservandomi di farne insieme lo studio in altra occasione. Tali difficoltà provengono, a mio credere, essenzialmente dal fatto che non si può — come or ora e come s'è visto esser possibile pel tipo (A) — delimitare un conveniente angolo col vertice in O, tale che, per ogni suo punto P abbastanza vicino ad O, il corrispondente P_1 rimanga ancora compreso in quell'angolo.

Ma torniamo alla classificazione delle trasformazioni (B).

Tra le eventualità possibili c'è anche la ipotesi, non contemplata finora ($p = \infty$, si potrebbe dire), che la funzione $f(x, y)$ contenga x a fattore:

$$f(x, y) = x f_1(x, y).$$

Qui è di nuovo assai facile constatare la instabilità.

Se $f_1(0, y)$ non si annulla identicamente, sia γy^p il termine di dimensione minima. Giova mostrare in primo luogo che è sempre lecito supporre $\gamma > 0$, cambiando eventualmente segno alle variabili o ricorrendo alla trasformazione inversa.

Sia infatti proposta una trasformazione, per cui $\gamma < 0$. Per p dispari, basta cambiare ordinatamente x, y; x_1, y_1 in $-\xi, -\eta$; $-\xi_1, -\eta_1$ e ci si trova ricondotti al caso del coefficiente positivo.

Se invece p è pari, allora si prende a considerare la trasformazione inversa.

Essendo

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\{1 + f_1(x, y)\}, \\ y_1 &= y + x \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

la (B′) proposta, la inversa si potrà rappresentare mediante le formule

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1\{1 + \bar{f}_1(x_1, y_1)\}, \\ y &= y_1 - x = y_1 - x_1\{1 + \bar{f}_1(x_1, y_1)\}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

dove $\bar{f}_1$ è, al pari di f_1, una funzione regolare (nulla nell'origine).

Importa determinare il termine di grado minimo in $\bar{f}_1(0, y_1)$.

A questo scopo, immaginiamo di portare i valori (19) nella prima delle (18), togliendo il fattore comune x_1 e ponendo poi $x_1 = 0$. Se si bada che y_1 coincide allora con y, avremo la identità

$$1 = \{1 + \bar{f}_1(0, y_1)\}\{1 + f_1(0, y_1)\},$$

donde risulta che il termine di grado minimo in $\bar{f}_1(0, y_1)$ (eguale ed opposto all'analogo di f_1) è $-\gamma y_1^p$.

Ma la (19) non ha ancora la forma (B′). Per ricondurvela, eseguiamo il cambiamento di variabili

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x_1\{1 + \bar{f}_1(x_1, y_1)\} = x, \\ \eta &= -y_1, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

e corrispondentemente

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= x\,|\,1+\bar{f}_1(x,\ y)\,|\\ \eta_1 &= -y\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

La trasformazione fra ξ, η; ξ_1, η_1 vien definita dalle formule

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= \xi\,|\,1+\bar{f}_1(x,\ y)\,|,\\ \eta_1 &= -y = -y_1 + x = \eta + \xi,\end{aligned}\right\} \tag{19'}$$

dovendosi beninteso $\bar{f}_1(x,\ y)$ ritenere espresso per ξ, η.

La prima delle (20) (riferendosi ad un intorno abbastanza piccolo dell'origine) mostra che, per $\xi = 0$, anche $x_1 = 0$. Per la prima delle (19) e prima delle (21) anche x, ξ_1 si annullano. Ma allora $y = y_1 = -\eta$. I termini indipendenti da ξ in $\bar{f}_1(x,\ y)$ si otterranno semplicemente col porre $x = 0$, $y = -\eta$; p essendo pari, il termine di grado minimo sarà in particolare $-\gamma\,\eta^p$.

La (19'), che è stabile od instabile assieme alla (18), ha dunque il coefficiente positivo $-\gamma$.

Ritenuto ormai nella (18) $\gamma > 0$, oppure $f_1(0,\ y) \equiv 0$, scriviamo la funzione $f_1(x,\ y)$ sotto la forma

$$f_1(x,\ y) = x\,f_2(x,\ y) + f_1(0,\ y).$$

Potremo in ogni caso asserire che $f_1(0,\ y)$ non è negativo per y positivo e abbastanza piccolo. Scegliamo, come è possibile in infiniti modi, un cerchio C col centro nell'origine, nel cui primo quadrante Q sia ad un tempo

$$|\,f_2(x,\ y)\,| < M,$$
$$f_1(0,\ y) \geqq 0,$$
$$x < \frac{1}{M},$$

M designando un conveniente numero positivo.

Per i punti di Q si ha evidentemente

$$x_1 = x + x^2 f_2(x,\ y) + x\,f_1(0,\ y) \geqq x\,(1 - M\,x) \geqq 0.$$

Poniamo

$$x'_1 = x\,(1 - M\,x)$$

e in generale

$$x'_n = x'_{n-1}\,(1 - M\,x'_{n-1}) \quad (n = 2,\ 3, \ldots).$$

A partire da un x positivo e $< \frac{1}{M}$, x'_1 è pure positivo e più piccolo di x. La successione x'_n è dunque indefinitamente decrescente e converge verso un limite ≥ 0.

Questo limite soddisfa all'equazione

$$l = l(1 - Ml),$$

ond'è identicamente nullo.

Giova osservare che, pur convergendo le x'_n a zero, la serie a termini positivi $\sum_1^\infty {}_n x'_n$ è divergente.

Infatti, moltiplicando membro a membro le equazioni

$$x'_n = x'_{n-1}(1 - Mx'_{n-1})$$

da $n = 2$ fino ad $n = m$, si trae

$$x'_m = x'_1 \prod_1^{m-1} {}_n (1 - Mx'_n),$$

e, qualora la serie $\sum_1^\infty {}_n x'_n$ convergesse, lo stesso seguirebbe, come si sa, per il prodotto infinito $\prod_1^\infty {}_n (1 - Mx'_n)$ (che avrebbe quindi valore diverso da zero). Ma allora sarebbe altresì

$$\lim_{m=\infty} x'_m = x'_1 \prod_1^\infty {}_n (1 - Mx'_n)$$

e quindi il primo membro diverso da zero, il che non è.

Confrontiamo ora gli elementi della successione x'_n con quelli, che si generano per iterazione della (18).

La posizione iniziale essendo in Q, e x non nullo, si ha, per quanto abbiam visto (rimanendo inoltre esclusa l'eguaglianza),

$$x_1 > x'_1.$$

L'ordinata $y_1 = y + x$ è pure positiva, talchè anche P_1 appartiene al primo quadrante. Lo stesso è a dirsi di P_2, se P_1 non è già fuori di C; ecc.

Si rimane dunque in Q, o si esce da C.

Finchè si è in Q,

$$x_n \geq x_{n-1}(1 - Mx_{n-1});$$

supponendo $x_{n-1} > x'_{n-1}$, siccome il secondo membro della precedente disuguaglianza cresce o decresce con x_{n-1}, segue a fortiori

$$x_n > x'_{n-1}(1 - M\, x'_{n-1}) > x'_n \,.$$

Stando così le cose, la ripetuta applicazione della (18) fa necessariamente uscire da C, per quanto si prenda vicina all'origine la posizione iniziale (purchè in Q e $x > 0$).

Infatti, dacchè

$$y_n = y_{n-1} + x_{n-1} \quad (n = 2,\ 3, \ldots),$$

si ha anche

$$y_m = y_1 + \sum_1^{m-1}{}_n\, x_n \quad (m = 2,\ 3, \ldots).$$

Qualora non si uscisse da C, ogni x_n risulterebbe superiore ad x'_n e per conseguenza

$$y_m > y_1 + \sum_1^{m-1}{}_n\, x'_n$$

crescerebbe indefinitamente con m, il che implica contraddizione.

Si ha dunque instabilità.

CAPITOLO III.

La questione della stabilità delle soluzioni periodiche.

§ 1. — Posizione del problema dal punto di vista della precedente teoria.

Sia un sistema differenziale

$$\frac{d\,x_i}{d\,t} = X_i(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m;\ t) \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ m), \tag{1}$$

dove le X_i si intendono funzioni reali, regolari rapporto alle x_i nel campo, che si avrà a considerare, e periodiche rispetto a t di periodo T.

Sia

$$x_i = \varphi_i(t) \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ m)$$

una soluzione particolare del sistema (1) periodica (collo stesso periodo T).

È sempre lecito, senza pregiudizio della generalità, supporre che le φ_i sieno identicamente nulle, cioè che la soluzione particolare, di cui si tratta, si riduca a

$$x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Basta a tal uopo immaginare effettuato un cambiamento di variabili

$$y_i = x_i - \varphi_i(t),$$

con che non si altera la natura del sistema differenziale (1).

Riferiamoci pertanto alla forma (2), osservando prima di tutto che i secondi membri X_i delle (1), si annullano per qualunque valore di t, quando tutte le x_i si pongono eguali a zero. È una conseguenza immediata della ipotesi che $x_i = 0$ soddisfa il sistema.

La soluzione $x_i = 0$ sarà a dirsi *stabile* (con ovvio linguaggio cinematico; interpretando cioè le (1) come le equazioni di definizione del movimento di un punto nello spazio $x_1, x_2, \ldots, x_m$) allora e solo allora che, per ogni intorno comunque piccolo E dell'origine, ne esiste un secondo H tale che, prendendo in H la posizione iniziale del mobile, questo rimane in E, per qualunque valore positivo o negativo di t.

Vi è *instabilità* nel caso opposto, ossia se non esiste un H dotato della anzidetta proprietà; o in altri termini se, vicino quanto si vuole all'origine, esiste sempre qualche posizione iniziale P_0, a partire dalla quale il mobile si trova, in un istante almeno, fuori di E.

Premesse queste definizioni, è facile mostrare che una soluzione periodica è sempre stabile od instabile assieme ad una certa trasformazione Γ.

Prendiamo a considerare l'integrale generale del sistema (1)

$$x_i = F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}; t) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{3}$$

i valori iniziali $x_i^{(0)}$ riferendosi per es. all'istante $t = 0$. Le F_i si riducono identicamente ad $x_i^{(0)}$, per $t = 0$, e si annullano nell'origine qualunque sia t.

Una nota proposizione ci assicura poi che esse sono funzioni regolari delle $x_i^{(0)}$, in un intorno abbastanza piccolo dell'origine, per qualsiasi valore reale finito di t (*). (Il difficile è stabilire ciò che accade, quando t cresce indefinitamente.)

(*) Poincaré, *Mécanique céleste*, tom. I, n.° 27; oppure
Niccoletti, *Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, considerati come funzioni dei loro valori iniziali*, (Rendiconti dei Lincei, 15 dicembre 1895);
Picard, *Traité d'analyse*, tom. III, Cap. VIII, pag. 157-162.

In causa della periodicità dei secondi membri delle (1), le F_i posseggono ancora una importante proprietà funzionale.

Dicansi $x_i^{(n)}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ i valori degli integrali x_i per $t = n\,T$.

Accanto alle formule (3) (che definiscono gli integrali mediante i loro valori per $t = 0$), possiamo costruirne altre, che definiscano gli stessi integrali, ma in base ai loro valori per $t = n\,T$. Per stabilire queste nuove formule, basta osservare che, ponendo $\tau = t - n\,T$, il sistema (1), per la periodicità delle X_i, diviene

$$\frac{d x_i}{d \tau} = X_i (x_1, x_2, \ldots, x_m; \tau) \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

il quale coincide collo stesso (1), salvo lo scambio materiale di t in τ.

Ora, in virtù delle (3), gli integrali di questo sistema, che, per $\tau = 0$, assumono i valori $x_i^{(n)}$, sono definiti da

$$x_i = F_i (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}; \tau) = F_i (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}; t - n\,T).$$

Il confronto colle (3) stesse porge le annunziate equazioni funzionali

$$\left. \begin{array}{c} F_i (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}; t) = F_i (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}; t - n\,T) \\ \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{pmatrix}, \end{array} \right\} \tag{4}$$

essendo bene inteso

$$x_i^{(n)} = F_i (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}; n\,T).$$

Designiamo in particolare con $f_i (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ le espressioni delle funzioni F_i per $t = T$, e facciamo nelle ultime formule $n = 1$.

Avremo

$$x_i^{(1)} = f_i (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{5}$$

D'altronde la (4) ci dà, per qualsiasi valore di n,

$$F_i (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}; t - n\,T) = F_i (x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \ldots, x_m^{(n-1)}; t - (n-1)\,T),$$

e, ponendo $t = n\,T$,

$$x_i^{(n)} = f_i (x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \ldots, x_m^{(n-1)}) \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Le (5) e (6) mostrano che le posizioni P_n, occupate dal mobile per $t = n\,T$, si ottengono dalla posizione iniziale P_0 per iterazione della trasformazione (5).

È chiaro che, ogniqualvolta la (5) è instabile, lo stesso avviene per la soluzione periodica (2). Se la trasformazione è stabile, lo è del pari la (2), ma una qualche spiegazione si rende necessaria.

E per verità dalla stabilità della (5) segue bensì che, per $t = n\,T$, il mobile (anche al crescere indefinito di n) rimane in E, ma nulla si sa a priori della traiettoria, compresa fra due P_n consecutivi. Ad eliminare il dubbio, si osservi in primo luogo che, dato un intorno comunque piccolo E dell'origine, e un qualsiasi intervallo *finito* di valori di t (in particolare l'intervallo $0, T$), si può sempre assegnare un intorno E', tale che, per P_0 in E', P non esce da E, finchè t rimane nell'intervallo. È questa una conseguenza immediata di quanto s'è osservato circa i secondi membri delle (3).

Ciò posto, si prenda a considerare, facendo appello alla supposta stabilità della (5), quell'intorno H, che corrisponde ad E' (secondo la definizione di stabilità). Dico che lo stesso H, rispetto all'E arbitrariamente prescelto, si trova nella condizione voluta per la stabilità della nostra soluzione periodica.

Infatti qualsiasi posizione iniziale, situata in H, dà intanto luogo a punti P_n di E' (e quindi di E). Sia poi P una generica posizione del mobile corrispondente ad un istante t compreso fra $n\,T$ e $(n+1)\,T$.

Per le (3) e (4), le coordinate x_i di P si possono rappresentare mediante le funzioni

$$F_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)};\ t - n\,T);$$

gli argomenti $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}$ sono compresi in E', $t - n\,T$ fra 0 e T; il punto P è dunque in E. C. D. D.

Dacchè una soluzione periodica (2) è sempre stabile od instabile assieme alla (5), si può dire, fino ad un certo punto, che la questione della stabilità delle soluzioni periodiche si riduce a quella delle trasformazioni puntuali. Quand'anche però quest'ultima fosse completamente risoluta, rimarrebbe, rispetto al primo problema, un ulteriore passo da compiere: Mettere in relazione, quanto possibile diretta, i criteri di stabilità o di instabilità, relativi alla (5), coi dati del problema, cioè coi secondi membri X_i delle equazioni differenziali proposte.

È questo l'oggetto dei paragrafi seguenti, dove si faranno appunto valere i caratteri di instabilità delle trasformazioni puntuali, finora acquisiti.

§ 2. — Il teorema di Liapounoff.

I secondi membri X_i delle equazioni (1) si annullano nell'origine, qualunque sia t; potremo dunque porre

$$X_i = \sum_1^m {}_j\, a_{ij}\, x_j + \cdots,$$

dove le a sono funzioni periodiche di t e i termini omessi d'ordine superiore al primo rapporto alle x. Le equazioni lineari, a coefficienti periodici,

$$\frac{d x_i}{d t} = \sum_1^m {}_j\, a_{ij}\, x_j \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ m) \tag{7}$$

(che si ottengono dalle (1) arrestandone i secondi membri alle parti di primo ordine), si dicono, col sig. Poincaré, *equazioni alle variazioni del sistema* (1), rispetto alla soluzione periodica considerata.

Sia $\xi_{i,j}(t)$ un generico sistema fondamentale di integrali delle (7). Per essere queste a coefficienti periodici, anche le $\xi_{i,j}(t+T)$ costituiscono un nuovo sistema fondamentale, ed esiste per conseguenza una sostituzione lineare a coefficienti costanti, atta a far passare dalle $\xi_{i,j}(t)$ alle $\xi_{i,j}(t+T)$. Questa sostituzione lineare ammette sempre m moltiplicatori (reali o complessi, distinti o coincidenti, ma finiti e non nulli), che potremo rappresentare con $e^{\alpha_1 T}$, $e^{\alpha_2 T}, \ldots, e^{\alpha_m T}$.

Se si suppone in particolare che il sistema fondamentale $\xi_{i,j}(t)$ sia costituito dagli integrali principali, relativi al punto $t = 0$ ($\xi_{i,j}(0) = 0$, per $i \quad j$; $\xi_{i,i}(0) = 1$), i coefficienti c_{jl} della sostituzione

$$\xi_{i,j}(t+T) = \sum_1^m {}_l\, c_{jl}\, \xi_{i,j}(t)$$

valgono $\xi_{j,l}(T)$ (come si vede facendo $t = 0$) e le $e^{\alpha T}$ rimangono definite quali radici della equazione

$$\Xi(\omega) = \begin{vmatrix} \xi_{1,1}(T) - \omega & \xi_{1,2}(T) & \ldots & \xi_{1,m}(T) \\ \xi_{2,1}(T) & \xi_{2,2}(T) - \omega & \ldots & \xi_{2,m}(T) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{m,1}(T) & \xi_{m,2}(T) & \ldots & \xi_{m,m}(T) - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Dalle cose dette segue, come si sa, la esistenza di un sistema fondamentale di soluzioni della forma

$$x_i = e^{\alpha_j t} \sigma_{i,j}(t) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m),$$

dove le σ sono funzioni di t in generale periodiche (o alla peggio, nel caso che le α non sieno tutte distinte, del tipo $\tau_0 t^\mu + \tau_1 t^{\mu-1} + \cdots + \tau_\mu$, colle τ periodiche e $\mu < m$).

Le costanti α si chiamano gli *esponenti caratteristici* della data soluzione periodica. Nel caso particolare, in cui i coefficienti a_{ij} delle (7) si riducono a costanti, gli esponenti caratteristici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sono, come è ben noto, le radici della equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - \omega & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} - \omega \end{vmatrix} = 0;$$

in generale la dipendenza loro dai coefficienti a_{ij} del sistema (7) è più complicata. Comunque essi rimangono individuati dai termini di prim'ordine delle (1).

Si prova facilmente che $e^{\alpha_1 T}, e^{\alpha_2 T}, \ldots, e^{\alpha_m T}$ *sono i moltiplicatori della trasformazione* (5).

Partiamoci infatti dalla espressione (3) dell'integral generale, ricordando che i secondi membri sono sviluppabili in serie di potenze delle $x_i^{(0)}$ e si annullano per $x_i^{(0)} = 0$.

Designiamo con

$$\xi_i = \sum_1^m{}_j \, \xi_{i,j}(t) \, x_j^{(0)}$$

le parti di prim'ordine, e sostituiamo nelle equazioni differenziali (1), eguagliando le parti di prim'ordine. Si vede così che le ξ_i soddisfanno alle equazioni alle variazioni; devono anzi essere separatamente integrali i singoli coefficienti $\xi_{i,j}(t)$ d'ogni $x_j^{(0)}$; talchè il loro insieme (per essere $x_i^{(0)}$ i valori iniziali degli integrali x_i) costituisce precisamente il sistema degli integrali principali delle (7), relativo a $t = 0$. Ora, per definizione,

$$x^{(1)} = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) = F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}; T) =$$
$$= \sum_1^m{}_j \, \xi_{i,j}(T) \, x_j^{(0)} + \cdots;$$

dunque i moltiplicatori della (5) non sono altro che le radici della equazione

$$\Xi(\omega) = 0. \qquad \text{C. D. D.}$$

Nel Capitolo I abbiamo dimostrato il teorema:

Una trasformazione puntuale è instabile, se uno almeno dei moltiplicatori ha modulo diverso dall'unità.

Dacchè la soluzione periodica (2) è stabile od instabile assieme alla (5) e che d'altra parte i moltiplicatori $e^{\alpha_j T}$ di quest'ultima sono in modulo eguali all'unità allora e solo allora che gli esponenti caratteristici α_j sono puramente immaginari, otteniamo la importante proposizione dovuta al sig. Liapounoff (*):

Una soluzione periodica è instabile, se uno almeno dei suoi esponenti caratteristici possiede parte reale non nulla.

§ 3. — Sistemi di secondo ordine.
Caratteri di instabilità in due casi particolari.

Supponiamo nelle (1) $m = 2$ e di più le X_i prive di termini di primo ordine. Il sistema si potrà scrivere

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X_2 + \cdots, \\ \frac{dy}{dt} &= Y_2 + \cdots, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

dove $X_2(x, y)$, $Y_2(x, y)$ sono forme quadratiche in x, y, a coefficienti periodici rispetto alla variabile t e i termini omessi di dimensione superiore

(*) Cfr. *Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction de forces n'est pas maximum,* (Journal de Mathématiques, 1897); che è la Memoria, già citata nell'Introduzione. Il teorema è quivi dimostrato per il caso particolare, in cui le X_i sieno indipendenti da t. L'A. però ha stabilito la proposizione in generale in un lavoro anteriormente pubblicato (in lingua russa):

Il problema generale della stabilità del movimento, Kharkow, 1892.

alla seconda. I valori medi

$$[X_2] = \frac{\int_0^T X_2\,dt}{T}, \qquad [Y_2] = \frac{\int_0^T Y_2\,dt}{T}$$

costituiscono due nuove forme a coefficienti costanti.

Se $[X_2]$, $[Y_2]$ sono prive di fattori comuni, la soluzione periodica $x = 0$, $y = 0$ è instabile.

Designino x_0, y_0 i valori iniziali di x, y. Come abbiamo ricordato a § 1, le espressioni di x, y sono della forma

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum_1^\infty{}_i\, P_i, \\ y &= \sum_1^\infty{}_i\, Q_i \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

con P_i, Q_i polinomi in x_0, y_0 (a coefficienti funzioni di t) di grado designato dall'indice.

Portiamo queste espressioni nelle (a) ed eguagliamo i termini dei primi due gradi.

Avremo chiaramente

$$\frac{dP_1}{dt} = 0, \qquad \frac{dQ_1}{dt} = 0;$$

$$\frac{dP_2}{dt} = X_2(P_1,\ Q_1), \qquad \frac{dQ_2}{dt} = Y_2(P_2,\ Q_2).$$

Dacchè x, y devono ridursi, per $t = 0$, ad x_0, y_0, così saranno appunto x_0, y_0 i valori iniziali di P_1, Q_1, mentre ogni altro P_i, Q_i si annulla.

Ne viene

$$P_1 = x_0, \qquad Q_1 = y_0,$$

$$P_2 = \int_0^t X_2\,dt, \qquad Q_2 = \int_0^t Y_2\,dt.$$

Per $t = T$, dicendo x_1, y_1 i corrispondenti valori di x, y, le (3′) danno

$$x_1 = x_0 + T\,.\,[X_2(x_0,\ y_0)] + \cdots,$$

$$y_1 = y_0 + T\,.\,[Y_2(x_0,\ y_0)] + \cdots,$$

la quale trasformazione fa riscontro alla (5) del caso generale.

Per ipotesi, le due forme $T.[X_2(x_0, y_0)]$, $T.[Y_2(x_0, y_0)]$ non ammettono fattori comuni.

La trasformazione è instabile (cfr. § 3 del cap. precedente); lo è dunque la nostra soluzione periodica.

Consideriamo ora il sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X_2 + \cdots, \\ \frac{dy}{dt} &= x + Y_2 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Procedendo come sopra, si ha senz'altro

$$\frac{dP_1}{dt} = 0, \qquad \frac{dQ_1}{dt} = P_1;$$

$$\frac{dP_2}{dt} = X_2(P_1, Q_1);$$

da cui

$$P_1 = x_0, \qquad Q_1 = t x_0 + y_0;$$

$$P_2 = \int_0^t X_2(x_0, t x_0 + y_0)\, dt,$$

e, per $t = T$,

$$x_1 = x_0 + (P_2)_{t=T} + \cdots,$$

$$y_1 = y_0 + T x_0 + \cdots,$$

i termini omessi essendo rispettivamente di terzo e di secondo ordine almeno.

Sappiamo dal capitolo precedente (§ 4) che una trasformazione di questo tipo è certamente instabile, se il coefficiente di y_0^2 nell'espressione di x_1 non si annulla. Il termine in y_0^2 proviene ora da $(P_2)_{t=T}$ e il suo coefficiente non è altro (a prescindere dal fattore T) che il valore medio del coefficiente di y^2 in $X_2(x, y)$.

Possiamo dunque concludere:

La soluzione $x = 0$, $y = 0$ di un sistema (b) è instabile, se non si annulla il valor medio del coefficiente di y^2 in $X_2(x, y)$.

§ 4. — Casi riducibili all'uno o all'altro dei due anzidetti.

Sia in generale un sistema

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= X = X_1 + X_2 + \cdots,\\ \frac{dy}{dt} &= Y = Y_1 + Y_2 + \cdots\end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

colla soluzione $x = 0$, $y = 0$.

Per il teorema di Liapounoff, la soluzione è instabile, se degli esponenti caratteristici α_1, α_2 uno almeno ha parte reale diversa da zero. Rimane l'ipotesi opposta di esponenti entrambi puramente immaginari (e coniugati, trattandosi sempre in queste ricerche di equazioni reali), cioè $\alpha_1 = -\alpha_2 = i\alpha$ (α quantità reale). Che anche a questo caso abbiamo di regola a corrispondere soluzioni instabili, non mi par dubbio. Però non mi è ora possibile dimostrarlo se non ammettendo che α sia commensurabile con $\frac{2\pi}{T}$.

Sotto tale restrizione il sistema (1′) equivale ad un sistema (*a*), ovvero ad un sistema (*b*), ed è quindi in generale instabile.

Innanzi tutto, per la supposta commensurabilità, potremo mettere α sotto la forma $\frac{2h\pi}{kT}$, dove h e k designano interi primi tra loro.

Se α non è nullo, le equazioni alle variazioni

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= X_1(x, y),\\ \frac{dy}{dt} &= Y_1(x, y)\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

ammettono due soluzioni indipendenti u_1, v_1; u_2, v_2 della forma

$$u_1 = e^{i\alpha t}(\sigma_1 + i\sigma_2), \qquad v_1 = e^{i\alpha t}(\tau_1 + i\tau_2);$$
$$u_2 = e^{-i\alpha t}(\sigma_1 - i\sigma_2), \qquad v_2 = e^{-i\alpha t}(\tau_1 - i\tau_2),$$

periodiche entrambe col periodo kT. (Infatti, quando t aumenta di kT, non solo le σ e τ, che ammettono già il periodo T, ma anche gli esponenziali riprendono il medesimo valore.)

Poniamo

$$c_{11} = \frac{u_1 + u_2}{2} = \sigma_1 \cos\alpha\, t - \sigma_2 \operatorname{sen}\alpha\, t,$$

$$c_{21} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \tau_1 \cos\alpha\, t - \tau_2 \operatorname{sen}\alpha\, t;$$

$$c_{12} = \frac{u_1 - u_2}{2i} = \sigma_1 \operatorname{sen}\alpha\, t + \sigma_2 \cos\alpha\, t,$$

$$c_{22} = \frac{v_1 - v_2}{2i} = \tau_1 \operatorname{sen}\alpha\, t + \tau_2 \cos\alpha\, t,$$

con che c_{11}, c_{21}; c_{12}, c_{22} costituiscono un nuovo sistema fondamentale di soluzioni delle (7′).

Si operi sul sistema proposto il cambiamento di variabili

$$\left.\begin{aligned} x &= c_{11}\xi + c_{12}\eta, \\ y &= c_{21}\xi + c_{22}\eta. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

La materiale sostituzione di questi valori in (1′) dà, tenendo conto della linearità di X_1, Y_1,

$$c_{11}\frac{d\xi}{dt} + c_{12}\frac{d\eta}{dt} + \left\{ \xi\frac{dc_{11}}{dt} + \eta\frac{dc_{12}}{dt} \right\} =$$

$$= \left\{ \xi X_1(c_{11}, c_{21}) + \eta Y_1(c_{12}, c_{22}) \right\} + X_2 + \cdots,$$

$$c_{21}\frac{d\xi}{dt} + c_{22}\frac{d\eta}{dt} + \left\{ \xi\frac{dc_{21}}{dt} + \eta\frac{dc_{22}}{dt} \right\} =$$

$$= \left\{ \xi X_1(c_{11}, c_{21}) + \eta Y_1(c_{12}, c_{22}) \right\} + Y_2 + \cdots;$$

X_2, Y_2, e così i termini successivi, conservano nelle nuove variabili ξ, η lo stesso grado e rimangono funzioni periodiche di t (col periodo kT). Le quantità in parentesi nei due membri si elidono, poichè, per definizione, c_{11}, c_{21}; c_{12}, c_{22} verificano le (7′).

Risolvendo rispetto a $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, si è evidentemente ricondotti alla forma (a).

Si noti che il determinante

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

non può annullarsi per alcun valore finito di t. Esso soddisfa infatti, come è ben noto e come del resto si verifica immediatamente, alla equazione

$$\frac{dD}{dt} = D\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y}\right);$$

il coefficiente $\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y}$ è funzione regolare di t sopra l'asse reale e perciò D non può annullarsi in un punto senza annullarsi identicamente. Questo poi è escluso dall'essere le c soluzioni indipendenti delle (7').

A legittimare la trasformazione (8), conviene ancora osservare che essa non altera la stabilità o la instabilità di una soluzione $x(t)$, $y(t)$. Infatti i coefficienti c della (8), e così D, sono funzioni periodiche; finite quindi e l'ultima diversa da zero, anche al crescere indefinito di t.

Se mai α è nullo, le (7') non posseggono più in generale due soluzioni indipendenti della forma considerata, ma si ha invece un sistema fondamentale del tipo

$$u_1 = \sigma_1, \qquad v_1 = \sigma_2;$$

$$u_2 = \tau_1 t, \qquad v_2 = \tau_2 t,$$

le σ e τ essendo, bene inteso, funzioni periodiche reali.

Fatte le posizioni

$$c_{11} = \sigma_1, \qquad c_{21} = \sigma_2;$$

$$c_{12} = \tau_1, \qquad c_{22} = \tau_2,$$

si noti che, mentre c_{11}, c_{21} costituiscono, come nel caso precedente, una soluzione delle (7'), c_{12}, c_{22} verificano invece le equazioni

$$\frac{dc_{12}}{dt} = X_1(c_{12}, c_{22}) - c_{11},$$

$$\frac{dc_{22}}{dt} = Y_1(c_{12}, c_{22}) - c_{21}.$$

La sostituzione (8) cangia allora, come si vede subito, il sistema (1') in uno di tipo (b).

Equazioni, che non contengono t esplicitamente. Se i secondi membri X, Y delle (1') non contengono t esplicitamente, le considerazioni precedenti sono applicabili senza alcuna restrizione circa il valore di α. Infatti, nel caso attuale, qualunque numero può essere risguardato come periodo T di X, Y; in particolare si può supporre T tale che α e $\frac{2\pi}{T}$ sieno commensurabili.

Le (8) si riducono a

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha t - \eta \operatorname{sen} \alpha t, \\ y &= \xi \operatorname{sen} \alpha t + \eta \cos \alpha t. \end{aligned}\right\} \qquad (8')$$

Supposto α non nullo, nel sistema trasformato a mezzo delle (8'), la variabile t entra soltanto pel tramite degli argomenti $\cos \alpha t$, $\operatorname{sen} \alpha t$, talchè il periodo vale $\frac{2\pi}{\alpha}$. Se poi α è nullo, la (8') si riduce all'identità e il sistema proposto cade già esso nel tipo (a), ovvero nel (b).

Nel primo caso la (8') conduce bensì al tipo (a), ma si inceppa necessariamente — come è facile riconoscere — nella circostanza eccezionale che il valor medio delle parti di secondo grado è nullo (nè si può quindi applicare il nostro criterio di instabilità).

Si noti del resto che, per questo caso, la questione della stabilità è già stata brillantemente trattata dal sig. Poincaré nelle già ricordate classiche ricerche: *Sur les courbes définies par des équations différentielles* (*).

Per quanto concerne il secondo caso, i nostri due criteri possono effettivamente riescire; ma nulla sostanzialmente offrono di nuovo, potendo senza difficoltà venir desunti da un'importante Memoria del sig. Bendixson (**), dove è fatto in modo esauriente lo studio del comportamento delle curve integrali nei casi non contemplati dal sig. Poincaré.

Riassumendo, per le equazioni, che non contengono t esplicitamente, nulla ci vien fatto di aggiungere ai risultati dei sigg. Poincaré e Bendixson, che si addentrano nello studio delle proprietà delle soluzioni ben oltre la semplice discussione della loro stabilità.

(*) *Journal de Mathématiques*, 1881, 1882, 1885, 1886. Cfr. in particolare le pagine 172-196 della terza Memoria.

(**) *Sur les courbes définies par des équations différentielles.* Acta Mathematica, tom. 24, 1900.

Seguiamo per es. la discussione, che l'A. ci presenta a pag. 71, dei sistemi della forma (22) (il nostro tipo (b)). Risulta da essa che, se un certo $\psi(0, 0)$ non si annulla, vi hanno caratteristiche passanti per l'origine con tangenti determinate, e quindi necessariamente instabilità. Ora $\psi(0, 0)$ non è altro (colle nostre notazioni) che il coefficiente di y^2 nell'X del sistema (b). Ecco ritrovato il nostro criterio di instabilità.

§ 5. — Equazioni canoniche.

Il sig. Poincaré ha notato (*) che ogni soluzione periodica di un sistema canonico

$$\frac{d p_i}{d t} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \qquad (i = 1,\ 2) \tag{9}$$

(in cui F non dipende da t) si può, scegliendo opportunamente le variabili, supporre definita dalle equazioni

$$p_1 = p_2 = q_2 = 0, \quad q_1 = \chi(t), \tag{10}$$

dove q_1 varia sempre nel medesimo senso e aumenta di 2π, mentre t cresce di T.

La funzione F è a ritenersi, rispetto a q_1, periodica di periodo 2π, e regolare, rispetto alle altre variabili, nell'intorno del valore zero.

Dacchè le equazioni (9) sono soddisfatte dai valori (10), le tre derivate $\frac{\partial F}{\partial q_1}, \frac{\partial F}{\partial q_2}, \frac{\partial F}{\partial p_2}$ debbono annullarsi per $p_1 = p_2 = q_2 = 0$, $q_1 = \chi(t)$, qualunque sia il valore di t. Questo equivale a dire che $\frac{\partial F}{\partial q_1}, \frac{\partial F}{\partial q_2}, \frac{\partial F}{\partial p_2}$ si annullano, indipentemente dal valore di q_1, per $p_1 = p_2 = q_2 = 0$. Invece $\frac{\partial F}{\partial p_1}$ non si annulla per alcun valore di q_1 (p_1, p_2, q_2 essendo abbastanza piccoli): Infatti, quando p_1, p_2 e q_2 si pongono tutti eguali a zero, $\frac{\partial F}{\partial p_1} = \frac{d q_1}{d t}$ e q_1 varia per ipotesi sempre nello stesso senso.

Stando così le cose, lo sviluppo di F in serie di potenze di p_1, p_2, q_2 mancherà dei termini lineari in p_2, q_2 e sarà quindi della forma

$$C + a_1 p_1 + \frac{1}{2}(a_{11} p_2^2 + 2 a_{12} p_2 q_2 + a_{22} q_2^2) + \cdots;$$

i termini omessi essendo di terz'ordine almeno (rispetto agli argomenti p_1, p_2, q_2), ovvero anche di secondo, ma con p_1 a fattore. I coefficienti a_1, a_{11}, ecc.

(*) *Mécanique céleste*, tom. II, n.° 208.

sono funzioni periodiche di q_1; C è una pura costante, poichè $\frac{dC}{dq_1}$ non è altro che $\frac{\partial F}{\partial q_1}$, in cui si faccia $p_1 = p_2 = q_2 = 0$, e deve quindi annullarsi.

Per valori abbastanza piccoli di p_1, p_2, q_2, $\frac{\partial F}{\partial p_1}$ non si annulla, come abbiamo testè osservato. Questo ci permette di eliminare t dal sistema proposto, assumendo q_1 come variabile indipendente.

Avremo le equazioni

$$\frac{dp_1}{dq_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial q_1}}{\frac{\partial F}{\partial p_1}}, \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_2}{dq_1} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial q_2}}{\frac{\partial F}{\partial p_1}}, \\ \frac{dq_2}{dq_1} &= \frac{\frac{\partial F}{\partial p_2}}{\frac{\partial F}{\partial p_1}}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

le quali definiscono, come si suol dire, le traiettorie del sistema (9).

Ciò che interessa dal punto di vista della stabilità è per lo più il comportamento delle traiettorie.

Ad ogni soluzione periodica del sistema (9) fa riscontro un' orbita chiusa (*). L'importante è di sapere se il moto perturbato avviene indefinitamente in prossimità di quest'orbita, ovvero se ne scosta di una quantità finita, per quanto poco si varino le condizioni iniziali.

Interesserà in generale assai meno di sapere se anche le posizioni, corrispondenti ad un medesimo istante, sull'orbita primitiva e sulla perturbata, seguitano a rimanere vicinissime, o se si avranno alla lunga delle differenze finite tra le fasi dei due movimenti. D'altronde non c'è ragione di porre la

(*) Dal punto di vista astratto basta per ciò interpretare p_1, p_2, q_2 come coordinate generiche, q_1 come coordinata ciclica di uno spazio a quattro dimensioni. Quando però il sistema canonico (9) proviene da un problema di meccanica celeste, si ha effettivamente un'orbita, nel senso astronomico della parola, i cui elementi determinativi sono forniti dalle espressioni di p_1, p_2, q_2 in termini di q_1.

seconda questione se non dopo risoluta la prima e constatata la stabilità dell'orbita.

Queste osservazioni mostrano come alla indagine della stabilità di una soluzione periodica (10) si sia naturalmente condotti a sostituire la ricerca analoga, relativa alla soluzione

$$p_1 = p_2 = q_2 = 0 \tag{10'}$$

del sistema più semplice (11), (12).

La instabilità (se non la stabilità) della (10′) trae seco necessariamente quella della soluzione proposta.

Ciò posto, rivolgiamoci al sistema (11), (12). Esso ammette l'integrale

$$F = \text{cost.}$$

Potremo sostituire questa equazione in termini finiti alla (11). Il valore della costante, che corrisponde alla soluzione (10′) è evidentemente C. Ci limiteremo a considerare quelle soluzioni del sistema, per cui

$$F = C.$$

Sotto l'aspetto dinamico questa limitazione corrisponde alle perturbazioni conservative.

Si noterà che, accertata la instabilità quando il valore della costante si suppone fisso, essa rimane provata in generale; ma, quanto alla stabilità, la cosa andrebbe diversamente, potendo benissimo avvenire che una stabilità conservativa non sia più tale rispetto all'intero sistema (11), (12).

Eliminiamo p_1 dalle nostre equazioni, ricavandone il valore in funzione di q_1, p_2, q_2, dalla equazione $F = C$, ossia da

$$a_1 p_1 + \frac{1}{2}(a_{11} p_2^2 + 2\, a_{12}\, p_2\, q_2 + a_{22}\, q_2^2) + \cdots = 0. \tag{13}$$

Questa equazione è soddisfatta per $p_1 = p_2 = q_2 = 0$ e si può risolvere rapporto a p_1, perchè $\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right)_{p_1=p_2=q_2=0}$, cioè a_1, non si annulla, comunque vari q_1. Siccome $\left(\frac{\partial F}{\partial p_2}\right)_{p_1=p_2=q_2=0}$, $\left(\frac{\partial F}{\partial q_2}\right)_{p_1=p_2=q_2=0}$ sono nulli, così lo sviluppo di p_1 comincierà da termini di secondo grado in p_2, q_2. Designiamone l'insieme con K e determiniamo K, portando nella (13), per p_1, una espressione del tipo

$$p_1 = K + H$$

(con H almeno di terz'ordine in p_2, q_2).

Ricordiamo che i termini non scritti nella (13), o erano di terzo grado per lo meno in p_2, q_2, oppure, essendo complessivamente di secondo almeno in p_1, p_2, q_2, contenevano p_1 a fattore. Dopo la sostituzione di $K+H$ a p_1, quei termini acquistano tutti una dimensione superiore alla seconda in p_2, q_2. La parte di secondo grado nel primo membro della (13) è dunque

$$a_1 K + \frac{1}{2}(a_{11} p_2^2 + 2\, a_{12} p_2 q_2 + a_{22} q_2^2),$$

e, dovendo essa annullarsi identicamente, risulta

$$K = -\frac{1}{2} \frac{a_{11} p_2^2 + 2\, a_{12} p_2 q_2 + a_{22} q_2^2}{a_1}.$$

Ritenendo p_1 definito dalla equazione $F = C$ (ossia $p_1 = K + H$), abbiamo

$$\frac{\partial p_1}{\partial p_2} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial p_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial q_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}},$$

e le (12), libere ormai da p_1, diverranno

$$\frac{d p_2}{d q_1} = \frac{\partial (K+H)}{\partial q_2}, \quad \frac{d q_2}{d q_1} = -\frac{\partial (K+H)}{\partial p_2}. \tag{14}$$

I secondi membri sono funzioni periodiche di q_1, che si annullano per $p_2 = q_2 = 0$; i termini, provenienti da H, sono di secondo ordine almeno, rapporto a p_2, q_2.

Ecco un sistema analogo all'(1') del precedente paragrafo.

Vediamo di adattare ad esso il criterio di instabilità, che abbiamo ivi indicato. In primo luogo gli esponenti caratteristici β_1, β_2 della soluzione $p_2 = q_2 = 0$ (supposti privi di parte reale, e quindi della forma $\pm \beta \sqrt{-1}$) dovranno corrispondere ad un valore di β razionale $\left(\text{commensurabile con } \frac{2\pi}{T}\text{, il } T \text{ del caso generale essendo qui } 2\pi\right)$.

Se si richiama la proprietà delle soluzioni periodiche dei sistemi canonici (9) di ammettere due esponenti caratteristici nulli e due altri α e $-\alpha$ eguali e di segno opposto (*), e si osserva che $\beta_1 \frac{2\pi}{T}$, $\beta_2 \frac{2\pi}{T}$ sono in ogni

(*) Poincaré, *Mécanique céleste*, tom. I, n.i 69, 70.

caso esponenti caratteristici della (10) (*), riconosciamo intanto che il criterio di instabilità si trasporterà a quelle soluzioni periodiche (10), per cui $\frac{\alpha}{\sqrt{-1}}$ è commensurabile col *moto medio* $\frac{2\pi}{T}$. (Si dice in generale *moto medio*, per una soluzione periodica (10), l'aumento, che subirebbe nell'unità di tempo la coordinata ciclica q_1, qualora essa variasse in modo uniforme.)

Proseguendo poi come a § 3, si dovrà immaginare eseguita sulle variabili p_2, q_2 una sostituzione lineare

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= c_{11}\,x + c_{12}\,y, \\ q_2 &= c_{21}\,x + c_{22}\,y, \end{aligned}\right\} \tag{8''}$$

i cui coefficienti (supposto α non nullo e quindi i due esponenti caratteristici distinti) sono gli integrali delle equazioni alle variazioni.

Per la circostanza particolare che le equazioni (14), e così le loro equazioni alle variazioni

$$\frac{d\,p_2}{d\,q_1} = \frac{\partial K}{\partial q_2}, \qquad \frac{d\,q_2}{d\,q_1} = -\frac{\partial K}{\partial p_2}, \tag{7''}$$

(*) Infatti le equazioni alle variazioni delle (10), osservando la espressione di F, si possono scrivere:

$$\frac{d\,p_1}{d\,t} = -\frac{d\,a_1}{d\,q_1}\,p_1, \qquad \frac{d\,q_1}{d\,t} = a_1;$$

$$\frac{d\,p_2}{d\,t} = a_1\frac{\partial K}{\partial q_2}, \qquad \frac{d\,q_2}{d\,t} = -a_1\frac{\partial K}{\partial p_2}.$$

La prima serve a definire p_1; eliminando t dal secondo gruppo, a mezzo della seconda, troviamo le equazioni alle variazioni del sistema (14):

$$\frac{d\,p_2}{d\,q_1} = \frac{\partial K}{\partial q_2}, \qquad \frac{d\,q_2}{d\,q_1} = -\frac{\partial K}{\partial p_2}.$$

Reciprocamente si passa da queste alle due anzidette, sostituendo a q_1 una variabile t, definita da $\frac{d\,q_1}{d\,t} = a_1$. Con questo cambiamento di variabili gli esponenti β_1, β_2 (cfr. Poincaré, loco citato, n.° 70) vengono moltiplicati per $\frac{2\pi}{T}$. Dunque $\beta_1\frac{2\pi}{T}$, $\beta_2\frac{2\pi}{T}$ sono esponenti caratteristici delle equazioni alle variazioni del dato sistema canonico.

sono canoniche, il cambiamento di variabili (8″) dà luogo al sistema (*)

$$\frac{dx}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{14'}$$

che è ancora canonico e rientra nel tipo (a). Si intende che la funzione H è qui a ritenersi espressa per le x, y a mezzo delle (8″).

Sia H_3 la forma costituita dai termini di terzo grado e $[H_3]$ il suo valor medio (rapporto a q_1). A norma del § 3, condizione sufficiente per l'instabilità della (14′) si è che le due forme $\frac{\partial [H_3]}{\partial x}$, $\frac{\partial [H_3]}{\partial y}$ non ammettano fattori comuni, o, ciò che è lo stesso, che la $[H_3]$ sia priva di fattori multipli. Concludiamo pertanto:

(*) Immaginiamo infatti, come è sempre lecito, scelte le costanti di integrazione in modo che il valore iniziale di

$$D = c_{11}\, c_{22} - c_{12}\, c_{21}$$

sia eguale all'unità. Avendosi, per la forma canonica delle (7″), $\frac{dD}{dt} = 0$, sarà $D = 1$ per qualsiasi valore di t. Ne consegue, in virtù delle (8″),

$$c_{11} = \frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial q_2}, \qquad c_{12} = \frac{\partial p_2}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial q_2},$$

$$c_{21} = \frac{\partial q_2}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial p_2}, \qquad c_{22} = \frac{\partial q_2}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial p_2};$$

valgono dunque le relazioni di Jacobi e quindi x, y sono costanti canoniche. Donde senz'altro le (14′). (Cfr. per es. Tisserand, *Mécanique céleste*, tom. I, n.° 59.) Del resto nel caso presente la verifica diretta è immediata. Basta notare che la sostituzione (8″) in (14) dà

$$c_{11}\frac{dx}{dq_1} + c_{12}\frac{dy}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial q_2},$$

$$c_{21}\frac{dx}{dq_1} + c_{22}\frac{dy}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial p_2}$$

e queste, risolute, divengono

$$\frac{dx}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial q_2}c_{22} + \frac{\partial H}{\partial p_2}c_{12} = \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{dy}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}c_{21} - \frac{\partial H}{\partial p_2}c_{11} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

C. D. D.

Le soluzioni periodiche (10), *per cui* $\frac{\alpha}{\sqrt{-1}} (\gtrless 0)$ *è commensurabile col moto medio, sono instabili, purchè soltanto sia priva di fattori multipli una forma cubica* $[H_3]$ (il cui calcolo dipende, nel modo detto, dai coefficienti della funzione caratteristica F fino al terzo ordine al più).

Si vedrebbe in modo analogo (cfr. pag. 272) che, se $\alpha = 0$, la condizione, che assicura l'instabilità, è ancora la medesima, oppure $\frac{\partial^3 [H_3]}{\partial y^3} \gtrless 0$.

C'è da avvertire che le c sono in quest'ultimo caso definite in modo alquanto diverso, le altre lettere conservando però lo stesso significato. Il sistema, cui si perviene da ultimo, non è più il (14'), sibbene

$$\frac{dx}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dq_1} = x - \frac{\partial H}{\partial x},$$

che non ha forma canonica.

§ 6. — Osservazione generale concernente la stabilità delle soluzioni periodiche, che dipendono da un parametro.

Torniamo per un momento sulla definizione di stabilità di una soluzione periodica. In quella data a § 1, ci siamo riferiti, per maggior comodo, ad un sistema particolare di variabili. Volendo ora attribuirle una forma valida per qualunque sistema di variabili, basterà evidentemente (col solito linguaggio cinematico) enunciarla come segue:

Sia Π_0 la posizione iniziale del mobile, corrispondente ad una soluzione periodica Σ, Π_t la posizione nell'istante t; P_0 e P_t abbiano analogo significato per una soluzione generica S.

La soluzione Σ sarà a dirsi stabile se, scelto un numero positivo ε arbitrariamente piccolo, ne esiste un secondo η, tale che la distanza $\overline{P_t \Pi_t}$ si mantiene, per qualsiasi valore di t, inferiore ad ε, ogniqualvolta la posizione iniziale P_0 dista da Π_0 meno di η.

La Σ è instabile nel caso opposto, vale a dire se, fissato ε abbastanza piccolo, tra le posizioni iniziali P_0 corrispondenti alle S, ve n'ha di vicine quanto si vuole a P_0, per cui la distanza $\overline{P_t \Pi_t}$ finisce col diventare, per qualche valore di t, $\geqq \varepsilon$.

Intesi su ciò, prendiamo a considerare un generico sistema differenziale (1) e supponiamo che il sistema ammetta una serie ∞^1 di soluzioni periodiche Σ_μ, dipendenti da un parametro μ; i valori iniziali $x_i^{(0)}$, corrispondenti a queste soluzioni, essendo funzioni continue del parametro μ (per es. in un intorno C di $\mu = 0$).

Si fissi in un modo qualunque un insieme di valori μ' del parametro μ, tale che l'insieme derivato comprenda tutti i punti dell'intervallo C (per es. l'insieme costituito dai punti razionali di C). Si ha il teorema:

Le soluzioni Σ_μ sono stabili od instabili assieme alle $\Sigma_{\mu'}$ (supposto che, per tutti i valori μ' dell'insieme, quest'ultime si comportino nello stesso modo).

Sieno per es. le soluzioni $\Sigma_{\mu'}$ tutte stabili. Si tratta di far vedere che una generica Σ_{μ_0} (dove μ_0 appartiene a C) è pure stabile.

In primo luogo si può trovare una $\Sigma_{\mu'}$ vicina a Σ_{μ_0} quanto ci piace. Precisiamo questa asserzione. Dicasi Π_0 la posizione iniziale corrispondente a Σ_{μ_0} e Π'_0 le posizioni iniziali, corrispondenti alle $\Sigma_{\mu'}$. L'ipotesi fatta circa l'insieme μ' ci assicura che, in ogni intorno comunque piccolo di Π_0, cadono punti Π'_0; ora è sempre possibile, scegliendo la distanza iniziale $\overline{\Pi'_0 \Pi_0}$ abbastanza piccola, fare in modo che $\overline{\Pi'_t \Pi_t}$ si mantenga inferiore ad un limite prefissato η, per un intervallo finito di tempo; il periodo T per es. Immaginiamo Π'_0 (ossia μ') fissato in tal guisa. Le due soluzioni Σ_{μ_0}, $\Sigma_{\mu'}$ essendo entrambe periodiche (collo stesso periodo T), potremo concludere

$$\overline{\Pi'_t \Pi_t} < \eta, \tag{15}$$

per qualsiasi valore di t.

Dacchè la soluzione $\Sigma_{\mu'}$ è stabile, scelto arbitrariamente $\frac{2}{3}\varepsilon$, avremo

$$\overline{P_t \Pi'_t} < \frac{2}{3}\varepsilon, \tag{16}$$

per ogni S, la cui posizione iniziale P_0 dista da Π'_0 meno di un certo limite, che rappresenterò con 2η $\left(\text{e che evidentemente non supera } \frac{2}{3}\varepsilon\right)$. Dalla (15) (dove si intende scelto per η questo valore) e dalla (16) segue agevolmente la dimostrazione della proprietà enunciata. Infatti, dato ε, prendiamo η nel modo testè detto e consideriamo un generico P_0, per cui

$$\overline{P_0 \Pi_0} < \eta.$$

La (15), per $t = 0$, dà

$$\overline{\Pi'_0 \Pi_0} < \eta,$$

quindi

$$\overline{P_0 \Pi'_0} < 2\,\eta,$$

con che la (16) rimane soddisfatta per ogni valore di t.

Confrontando colla (15) e tenendo presente che $\eta \leq \frac{1}{3}\varepsilon$, si ricava

$$\overline{P_t \Pi_t} < \varepsilon,$$

che è la condizione di stabilità della Σ_{μ_0}.

Nel caso invece, in cui le $\Sigma_{\mu'}$ sono instabili, si trova, vicino quanto si vuole a Π'_0, un qualche P_0, per cui $\overline{P_t \Pi'_t}$ finisce coll'assumere, in un istante almeno, un valore fisso; $2\,\varepsilon$ per es.

D'altra parte $\overline{\Pi_t \Pi'_t}$ si può ritenere (scelto opportunamente μ') piccolo a piacere, per qualsiasi valore di t. Esistono dunque posizioni P_0, per le quali $\overline{P_t \Pi_t}$ raggiunge valori, vicini a $2\,\varepsilon$, pure quanto si vuole; in particolare quindi superiori ad ε.

Il teorema è così completamente dimostrato.

È chiaro che una proprietà analoga sussiste per due o più parametri.

Così per es., se un sistema ammette una duplice infinità di soluzioni periodiche $\Sigma_{\mu\nu}$, corrispondenti ai valori μ, ν di un certo campo C, e si ha in C un insieme di punti (μ', ν'), il cui derivato sia denso in C (comprenda cioè tutti i punti di C), *le* $\Sigma_{\mu\nu}$ *sono stabili od instabili assieme alle* $\Sigma_{\mu'\nu'}$; ecc.

CAPITOLO IV.

Applicazione al problema dei tre corpi.

§ 1. — Equazioni del problema ristretto (*).

Si suol chiamare *ristretto* quel caso particolare del problema dei tre corpi (punti materiali, che si attraggono secondo la legge di Newton), in cui il movimento è piano, uno dei corpi ha massa trascurabile e gli altri due descrivono orbite circolari attorno al comune centro di gravità.

(*) Cfr. Poincaré, *Mécanique céleste*, tom. I, n.° 9.

Sieno S, J, P (Sole, Giove, Pianeta) i tre corpi; $1-\mu$, μ, 0 le rispettive masse.

Si suppone, come s'è detto, che il moto kepleriano (non perturbato, per essere nulla la massa di P) dei due corpi S, J sia il più semplice possibile, cioè che essi si muovano di moto circolare uniforme attorno al loro centro di gravità O: La distanza SJ rimane allora costante.

Per semplificare, conviene assumere SJ come unità di lunghezza e disporre dell'unità di tempo in modo che la costante f di GAUSS si riduca all'unità.

Riesce così eguale ad 1 la velocità angolare costante, con cui la retta SJ ruota attorno ad O (*).

Riferiamoci ad un sistema di assi mobili ξ, η, coll'origine in O e l'asse ξ coincidente con SJ, la direzione positiva essendo per es. OJ (Fig. 5).

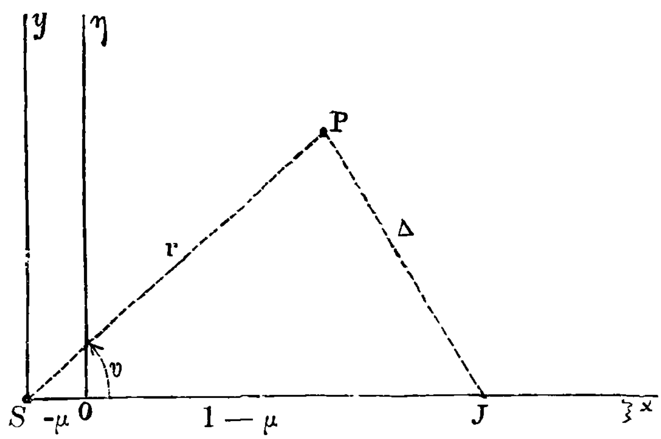

Fig. 5.

Le coordinate ξ, η di S sono $-\mu$, 0; quelle di J, $1-\mu$, 0. Designeremo con r, Δ le distanze $\overline{PS}$, $\overline{PJ}$, con v l'angolo $P\widehat{S}J$ (contato nel verso $\xi \to \eta$).

(*) Infatti questa velocità angolare (o moto medio) compete altresì al moto relativo di J rispetto ad S. Ora, fra il moto medio n, la somma delle masse m_1+m_2 di due corpi l'asse maggiore a dell'orbita e la costante f, si ha la relazione fondamentale

$$n=\sqrt{\frac{f\,(m_1+m_2)}{a^3}}.$$

Essendosi qui assunti m_1+m_2, SJ cioè a, ed f eguali all'unità, risulta $n=1$, giusta l'asserto.

La forza, che sollecita P, deriva dal potenziale

$$\frac{1-\mu}{r}+\frac{\mu}{\Delta},$$

e le equazioni del movimento sono

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}-\frac{d\eta}{dt}-\xi=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1-\mu}{r}+\frac{\mu}{\Delta}\right),$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{d\xi}{dt}-\eta=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1-\mu}{r}+\frac{\mu}{\Delta}\right).$$

Passando dagli assi ξ, η ad un sistema parallelo x, y coll'origine in S, si ha

$$\xi=x-\mu,\quad \eta=y,$$

e per conseguenza

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-x&=-\mu+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-\mu}{r}+\frac{\mu}{\Delta}\right)=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\mu\frac{\partial U}{\partial x},\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-y&=\qquad\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-\mu}{r}+\frac{\mu}{\Delta}\right)=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\mu\frac{\partial U}{\partial y},\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

essendosi posto

$$U=\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{r}-x=\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{r}-r\cos v.\quad(2)$$

Consideriamo per un momento il moto non perturbato del corpo P, quello cioè, che corrisponderebbe a $\mu=0$. Esso è evidentemente kepleriano e può essere definito (rispetto a un sistema eliocentrico di direzione invariabile) dai suoi elementi ellittici a (semiasse maggiore), e (eccentricità), ζ (anomalia media), ϖ' (longitudine del perielio). Il moto relativo rispetto ai nostri assi x, y possiede ancora gli elementi a, e, ζ; solo la longitudine del perielio non è più ϖ', ma $\varpi=\varpi'-t$, dacchè l'asse x ha esso stesso la longitudine t.

Le espressioni di x, y, in funzione di questi elementi ellittici *relativi* a, e, ζ, ϖ, sono senz'altro quelle ben note, relative alle coordinate eliocentriche; la loro sostituzione in U dà luogo ai classici sviluppi della funzione perturbatrice.

Teniamo presente questo e notiamo d'altra parte che il moto eliocentrico, definito dalle (1), è dovuto al potenziale $\frac{1}{r}+\mu U$.

Ponendo

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a(1-e^2)}, \quad y_1 = \zeta, \quad y'_2 = \varpi',$$

le equazioni (1) equivalgono, come si sa, al sistema canonico

$$\frac{d x_1}{d t} = -\frac{\partial F'}{\partial y_1}, \quad \frac{d y'_1}{d t} = \frac{\partial F'}{\partial x_1},$$

$$\frac{d x_2}{d t} = -\frac{\partial F'}{\partial y_2}, \quad \frac{d y'_2}{d t} = \frac{\partial F'}{\partial x_2},$$

il quale hà per funzione caratteristica (quella corrispondente al moto non perturbato — che è la costante delle forze vive $-\frac{1}{2\,x_1^2}$ — più la energia potenziale delle forze perturbatrici $-\mu\,U$; dunque)

$$F = F' - x_2 = -\frac{1}{2\,x_1^2} - \mu\,U.$$

Introduciamo, al posto di y'_2, la variabile $y_2 = \varpi = y'_2 - t$. Le equazioni rimangono canoniche, purchè si sostituisca ad F'

$$F = -\frac{1}{2\,x_1^2} - x_2 - \mu\,U.$$

Per quanto s'è osservato, quest'ultima funzione dipende soltanto dagli argomenti x_1, x_2, y_1, y_2 (non esplicitamente da t).

Dovendo in seguito considerare valori dell'eccentricità vicini a zero, la scelta delle variabili precedenti non è opportuna, perchè la funzione F cessa di essere olomorfa, quando $x_1 = x_2$.

Si gira la difficoltà, adottando le variabili

$$p_1 = x_1, \qquad q_1 = y_1 + y_2;$$

$$p_2 = \sqrt{2(x_1 - x_2)}\cos y_2, \qquad q_2 = -\sqrt{2(x_1 - x_2)}\operatorname{sen} y_2,$$

colla quale sostituzione non si altera la forma canonica, mentre F diviene funzione regolare dei nuovi argomenti.

Avremo in definitiva le equazioni

$$\frac{d p_i}{d t} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad (i = 1,\ 2), \tag{1'}$$

dove

$$F = -\frac{1}{2\,p_1^2} - p_1 + \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) - \mu\,U,$$

la funzione U, definita dalla (2), dovendosi, bene inteso, ritenere espressa per le p_i, q_i.

L'effettivo calcolo di questa espressione (della quale ci occorreranno più innanzi i primi termini) si farà ricorrendo ai noti sviluppi di $\frac{1}{r}$, $r\cos v$, $\frac{1}{\Delta}$ in funzione degli argomenti a, e, ζ, ϖ, e passando poi alle nostre variabili mediante le relazioni

$$\left.\begin{array}{ll} p_1 = \sqrt{a}, & q_1 = \varpi + \zeta, \\ p_2 = \eta\cos\varpi, & q_2 = -\eta\,\mathrm{sen}\,\varpi, \end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\eta = \left\{ 2\left(\sqrt{a} - \sqrt{a(1-e^2)}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

che si raccolgono immediatamente da quanto precede. (I radicali, non occorre dirlo, si intendono presi in valore assoluto.)

Si noti che η è funzione regolare di e nell'intorno di $e=0$ e si annulla con e. Infatti

$$\eta = \left\{ 2\left(\sqrt{a} - \sqrt{a(1-e^2)}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= a^{\frac{1}{4}}\left\{ 2\left[1-(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} e\left(1 + \frac{e^2}{8} + \cdots\right).$$

Si può anche dire che η è la radice positiva dell'equazione

$$\frac{\eta^4}{4a} - \frac{\eta^2}{\sqrt{a}} + e^2 = 0, \tag{5'}$$

che si annulla con e.

§ 2. — Soluzioni periodiche prossime ad un movimento circolare uniforme.

Per $\mu = 0$, l'integral generale delle (1') è

$$p_1 = p_1^0, \quad q_1 = (n-1)t + q_1^0 \quad \left(n = p_1^{0\,-\frac{3}{2}}\right),$$

$$p_2 = p_2^0\cos t - q_2^0\,\mathrm{sen}\,t, \quad q_2 = p_2^0\,\mathrm{sen}\,t + q_2^0\cos t.$$

Le ∞^4 soluzioni, in esso contenute, corrispondono ai movimenti kepleriani di P (nel piano dell'orbita di Giove). È appena necessario osservare che, essendo $q_1 = \varpi + \zeta$ la longitudine media rispetto ad SJ, $n - 1$ rappresenta il moto medio relativo, talchè $n = p_1^{0\,-\frac{3}{2}}$ designa, come d'abitudine, il moto medio assoluto.

Consideriamo in particolare le ∞^1 soluzioni

$$p_1 = \sqrt{R}, \quad q_1 = (n-1)\,t, \quad p_2 = q_2 = 0, \tag{6}$$

che si ottengono prendendo $p_2^0 = 0$, $q_2^0 = 0$, $q_1^0 = 0$ (la qual ultima condizione affatto inessenziale equivale a scegliere l'epoca di una congiunzione per origine del tempo), e scrivendo $\sqrt{R}$ per p_1^0.

Le (6), che sono evidentemente soluzioni periodiche di periodo $\frac{2\pi}{n-1}$, definiscono movimenti circolari uniformi: Basta notare che, dall'annullarsi di p_2, q_2, segue $e = 0$, e quindi l'ellisse kepleriana di semiasse maggiore $(p_1^0)^2$ si riduce al cerchio di raggio R.

Dalla superiore espressione dell'integrale generale segue immediatamente che i due esponenti caratteristici non nulli di una generica (6) sono $\pm\sqrt{-1}$.

Per μ positivo e abbastanza piccolo, il sistema (1′) possiede soluzioni periodiche Σ_μ, vicine ad una qualsiasi (6), almeno se $\frac{1}{n-1}$ non è un numero intero.

Rappresentiamo infatti con

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \varphi_i(t;\ p_1^0,\ p_2^0,\ q_1^0,\ q_2^0;\ \mu), \\ q_i &= \psi_i(t;\ p_1^0,\ p_2^0,\ q_1^0,\ q_2^0;\ \mu) \end{aligned}\right. \qquad (i = 1,\ 2),$$

l'integral generale del sistema (1′) e notiamo che le soluzioni periodiche di periodo $\frac{2\pi}{n-1} + \tau$ sono caratterizzate dalle equazioni

$$\begin{aligned}
&\varphi_1\left(\frac{2\pi}{n-1} + \tau;\ p_1^0,\ p_2^0,\ q_1^0,\ q_2^0;\ \mu\right) - p_1^0 = 0, \\
&\qquad\qquad \psi_1\left(\frac{2\pi}{n-1} + \tau;\ p_1^0,\ p_2^0,\ q_1^0,\ q_2^0;\ \mu\right) - q_1^0 - 2\pi = 0, \\
&\varphi_2\left(\frac{2\pi}{n-1} + \tau;\ p_1^0,\ p_2^0,\ q_1^0,\ q_2^0;\ \mu\right) - p_2^0 = 0, \\
&\qquad\qquad \psi_2\left(\frac{2\pi}{n-1} + \tau;\ p_1^0,\ p_2^0,\ q_1^0,\ q_2^0;\ \mu\right) - q_2^0 = 0.
\end{aligned}$$

I primi membri delle due ultime equazioni si riducono, per $\mu = \tau = 0$, a

$$p_2^0\left(\cos\frac{2\pi}{n-1} - 1\right) - q_2^0 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n-1},$$
$$p_2^0 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n-1} \qquad + q_2^0\left(\cos\frac{2\pi}{n-1} - 1\right);$$

quindi il loro determinante funzionale, rispetto alle variabili p_2^0, q_2^0, vale $2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n-1}\right) = 4 \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n-1} > 0$, dacchè si esclude che $\frac{1}{n-1}$ sia un numero intero.

Codesto determinante funzionale, che è funzione continua del parametro, rimane diverso da zero per μ abbastanza piccolo, talchè le dette equazioni si possono risolvere rapporto a p_2^0, q_2^0.

Portiamo le espressioni, che così si ottengono per p_2^0, q_2^0 (in funzione di p_1^0, q_1^0, τ, μ), nella seconda equazione

$$\psi_1 - q_1^0 - 2\pi = 0.$$

Potremo risolvere rispetto a τ, poichè non si annulla la derivata del primo membro dell'equazione rapporto a questa variabile $\left(\text{per } \mu = 0,\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} = n - 1\right)$.

Delle equazioni di condizione rimane oramai soltanto la prima,

$$\varphi_1 - p_1^0 = 0,$$

e questa, coi valori trovati per p_2^0, q_2^0, τ, risulterà identicamente soddisfatta.

Infatti il sistema (1′) ammette l'integrale

$$F = -C$$

(la C si suol chiamare costante di Jacobi) e la equazione $F = -C$ si può risolvere rapporto a p_1, per μ abbastanza piccolo (cfr. § 5 del capitolo antecedente).

Siam così fatti certi che p_1 riprende il valore iniziale, ogniqualvolta ciò accade per le altre tre variabili p_2, q_2, q_1 (quest'ultima a meno di un multiplo di 2π). La condizione $\varphi_1 - p_1^0 = 0$ è dunque una conseguenza delle altre, giusta l'asserto.

Questa discussione ci apprende non soltanto che esistono per il sistema (1′) soluzioni periodiche Σ_μ vicine ad ogni (6) $\left(\text{ritenuto } \frac{1}{n-1} \text{ non intero}\right)$; ma più precisamente che ve n'ha ∞^2 (*), essendo lecito scegliere arbitrariamente i valori iniziali di q_1^0, p_1^0 (quest'ultimo in prossimità a $\sqrt{R}$), cioè, potremmo anche dire, il momento di una congiunzione e la costante di JACOBI. $\left(\text{Il valore di tale costante per una soluzione (6) è evidentemente } \frac{1}{2R} + \sqrt{R}.\right)$

Se si suppone $R < 1$, alle Σ_μ vicine competono orbite chiuse, interne al cerchio di raggio 1 (orbita di Giove); si tratterà quindi, con linguaggio astronomico, di un pianeta inferiore; per $R > 1$, si avranno evidentemente pianeti superiori.

Abbiamo osservato più sopra che gli esponenti caratteristici (non nulli) d'una generica (6) sono $\pm\sqrt{-1}$; quelli d'una Σ_μ, per i piccoli valori di μ, saranno vicini a $\pm\sqrt{-1}$ ed essi pure, si intende, puramente immaginari, perchè devono essere ad un tempo coniugati e di segno opposto. Riconosciamo di qua che, tenendo conto soltanto della prima approssimazione, le soluzioni Σ_μ appariscono stabili. Però, appoggiandoci ai precedenti capitoli, ci verrà fatto di dimostrare con tutto rigore che una parte almeno di esse è certamente instabile.

§ 3. — INSTABILITÀ DI QUESTE SOLUZIONI.

Attribuiamo nelle (6) al raggio R un valore della forma $\left(1 + \frac{3}{h}\right)^{-\frac{2}{3}}$, h designando un intero, positivo o negativo, primo con 3 $\left(\text{e diverso da } -1, -2, \text{ per modo che } 1 + \frac{3}{h} > 0\right)$.

Sarà

$$n = R^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{h},$$

(*) Cfr. POINCARÉ, *Mécanique céleste*, tom. I, n.° 43. L'A. si riferisce alle variabili x_i, y_i del paragrafo precedente. Siccome le (6) corrispondono a valori x_i, y_i, per i quali la F delle equazioni differenziali (1') non è regolare, così non sarebbe stato a priori giustificato richiamarsi senz'altro al risultato del sig. POINCARÉ.

e quindi

$$\frac{1}{n-1}=\frac{h}{3}. \tag{7}$$

Intesi che R abbia un siffatto valore, prendiamo in esame le soluzioni periodiche, vicine alla corrispondente (6). Dal paragrafo precedente siamo fatti certi della loro esistenza, poichè $\frac{1}{n-1}$ non è intero. Ponendo

$$p_1^0=\sqrt{R}+\nu=\left(1+\frac{3}{h}\right)^{-\frac{1}{3}}+\nu,$$

possiamo anzi ritenere che ad ogni coppia arbitrariamente prefissata di valori di μ e ν (purchè abbastanza piccoli) e ad ogni h corrisponde *una* soluzione periodica $\Sigma_{\mu\nu}^h$ del sistema (1′). (Dico una, e non ∞^1, convenendo di prescindere dall'arbitrarietà di q_1^0, coll'assumere per es. $q_1^0=0$.)

Le traiettoríe del sistema (1′) sono definite (§ 5 del capitolo precedente) dalle equazioni

$$\frac{d p_2}{d q_1}=\frac{\partial H}{\partial q_2}, \qquad \frac{d q_2}{d q_1}=-\frac{\partial H}{\partial p_2}, \tag{8}$$

dove H designa la espressione di p_1 in funzione di p_2, q_2, q_1, che si ottiene risolvendo la equazione

$$F=-C.$$

Ad ogni soluzione periodica $\Sigma_{\mu\nu}^h$ del sistema (1′) fa riscontro una soluzione, pure periodica, $\Omega_{\mu\nu}^h$ delle (8).

Per provare la instabilità delle $\Sigma_{\mu\nu}^h$, ci basterà accertare quella delle $\Omega_{\mu\nu}^h$, rispetto alle traiettorie, cui compete *lo stesso valore*

$$\frac{1}{2(\sqrt{R}+\nu)^2}+\sqrt{R}+\nu$$

di C. È necessario perciò studiare la funzione H. Essa viene, come s'è detto, definita da

$$F+C=-\frac{1}{2p_1^2}-p_1+\frac{1}{2}(p_2^2+q_2^2)-\mu U+\frac{1}{2(\sqrt{R}+\nu)^2}+\sqrt{R}+\nu=0,$$

ed è precisamente quella radice p_1, che si riduce a $\sqrt{R}$ per $\mu=\nu=p_2=q_2=0$.

Si riconosce senza difficoltà che, quando $\mu = 0$, l'espressione di p_1 si può presentare sotto la forma

$$\sqrt{R} + \nu\, \mathfrak{P}_1(\nu) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n-1} \left\{ 1 + \nu\, \mathfrak{P}_2(\nu) \right\} \eta^2 + \eta^4\, \mathfrak{Q}(\eta^2, \nu),$$

dove, a norma delle (4), η^2 sta per $p_2^2 + q_2^2$, n ha il valore costante (7), e $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{Q}$ designano serie di potenze degli argomenti indicati.

Immaginiamo di sviluppare H per potenze ascendenti di μ e poniamo

$$H = H^{(0)} + \mu\, H^{(1)} + \cdots$$

Avremo chiaramente

$$H^{(0)} = (p_1)_{\mu=0} = \sqrt{R} + \nu\, \mathfrak{P}_1(\nu) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n-1} \left\{ 1 + \nu\, \mathfrak{P}_2(\nu) \right\} \eta^2 + \eta^4\, \mathfrak{H}(\eta^2, \nu),$$

$$H^{(1)} = - \left\{ \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \mu}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}} \right\}_{\mu=0} = \left\{ \frac{U}{p_1^{-3} - 1} \right\}_{p_1 - H^{(0)}}$$

Per $\mu = \nu = 0$, l'espressione di H

$$\sqrt{R} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n-1}(p_2^2 + q_2^2) + \cdots$$

mostra che gli esponenti caratteristici dell'orbita circolare Ω_{00}^h sono $\dfrac{\pm\sqrt{-1}}{n-1}$. (Questo del resto potevasi prevedere, ricordando in generale che, se T e $\pm\,\alpha$ sono periodo ed esponenti caratteristici di una soluzione periodica del sistema (1'), $\dfrac{\pm\,\alpha\, T}{2\,\pi}$ sono gli esponenti caratteristici per la corrispondente soluzione del sistema (8).)

Ciò posto, la trasformazione (corrispondente alla (8) del paragrafo antecedente), atta a far passare dal sistema (8) ad uno di tipo (a), è (per $\mu = \nu = 0$)

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= x \cos \frac{q_1}{n-1} - y \operatorname{sen} \frac{q_1}{n-1} = x \cos \frac{h\, q_1}{3} - y \operatorname{sen} \frac{h\, q_1}{3}\,. \\ q_2 &= x \operatorname{sen} \frac{q_1}{n-1} + y \cos \frac{q_1}{n-1} = x \operatorname{sen} \frac{h\, q_1}{3} + y \cos \frac{h\, q_1}{3}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

In generale essa si potrà rappresentare con

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= x\left\{\cos\frac{h q_1}{3}+c_{11}\right\}-y\left\{\operatorname{sen}\frac{h q_1}{3}-c_{12}\right\}+\mu\varphi, \\ q_2 &= x\left\{\operatorname{sen}\frac{h q_1}{3}+c_{21}\right\}+y\left\{\cos\frac{h q_1}{3}+c_{22}\right\}+\mu\psi, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

le c essendo funzioni di q_1, che si annullano per $\mu=\nu=0$; $\mu\varphi$, $\mu\psi$ le espressioni di p_2, q_2 nella soluzione periodica $\Omega^h_{\mu\nu}$.

Immaginiamo di attribuire ai parametri μ, ν dei valori μ', ν', pei quali gli esponenti caratteristici della $\Omega^h_{\mu'\nu'}$ sieno della forma $\dfrac{k'\sqrt{-1}}{k}$, con k' e k numeri interi.

L'insieme, costituito da questi valori μ', ν', è tale — notiamolo bene — che il suo derivato contiene tutti i valori reali abbastanza piccoli di μ e ν.

Conveniamo, per maggior chiarezza, di designare con $\mathfrak{H}$ il risultato della sostituzione (10) in H; con $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$ ecc. i coefficienti dello sviluppo di $\mathfrak{H}$ in serie di potenze di μ; infine con $\mathfrak{H}_3$, $\mathfrak{H}_3^{(0)}$, $\mathfrak{H}_3^{(1)}$,... l'insieme dei termini di $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$,... di terzo grado rapporto ad x, y.

A tenore del precedente capitolo, una $\Sigma^h_{\mu'\nu'}$ sarà instabile se il valor medio di $\mathfrak{H}_3$ non ha fattori multipli. Questo valor medio si riferisce evidentemente alla variabile q_1, di cui $\mathfrak{H}$ è, al pari di H, funzione periodica: Il periodo non è però in generale 2π, come nella H, sibbene soltanto $2k\pi$. Lo sarà $6k\pi$ (*) a più forte ragione e a noi basterà verificare che non ha fattori multipli la forma

$$\frac{1}{6k\pi}\int_0^{6k\pi}\mathfrak{H}_3\,d\,q_1.$$

Si ha

$$\mathfrak{H}_3=\mathfrak{H}_3^{(0)}+\mu\,\mathfrak{H}_3^{(1)}+\cdots,$$

ma $\mathfrak{H}_3^{(0)}$ è identicamente nullo.

Infatti i termini indipendenti da μ in $\mathfrak{H}$ provengono da $H^{(0)}$ mercè la sostituzione (10), in cui, bene inteso, si ponga $\mu=0$, sostituzione, che risulta con ciò lineare ed omogenea. Ora $H^{(0)}$ è funzione soltanto di $\eta^2=p_2^2+q_2^2$.

(*) Si è triplicato il periodo, per poter senz'altro risguardare funzioni periodiche anche $\operatorname{sen}\frac{q_1}{3}$, $\cos\frac{q_1}{3}$; la quale circostanza, come vedremo nel seguente paragrafo, semplifica alquanto i calcoli.

Quindi $\mathfrak{H}^{(0)}$ non contiene termini di grado dispari in x, y, e in particolare $\mathfrak{H}_3^{(0)} = 0$.

La funzione $\mathfrak{H}_3^{(1)}$ è a sua volta sviluppabile in serie di potenze di ν: Sia $\mathfrak{H}'^{(1)}_3$ il termine indipendente da ν. Per μ e ν abbastanza piccoli, la condizione che sia privo di fattori multipli il valor medio di $\mathfrak{H}_3$ si troverà evidentemente verificata, qualora ciò accada per il valor medio di $\mathfrak{H}'^{(1)}_3$.

Dimostreremo nel paragrafo seguente che

$$[\mathfrak{H}'^{(1)}_3] = \Theta \cdot (x^3 - 3\,x\,y^2),$$

dove Θ è una funzione della sola R, che non si annulla per i valori di R, che qui si considerano.

La forma cubica

$$x^3 - 3\,x\,y^2 = x\,(x + \sqrt{3}\,y)\,(x - \sqrt{3}\,y)$$

non possiede evidentemente fattori multipli; di qua risulta la instabilità delle soluzioni $\Sigma^h_{\mu'\nu'}$ (purchè soltanto μ', ν' sieno abbastanza piccoli).

L'insieme (μ', ν') è tale, come s'è osservato, che il suo derivato comprende tutti i valori reali (appartenenti ad un certo intorno di $\mu = 0$, $\nu = 0$); dunque:

Per μ e ν abbastanza piccoli, ogni soluzione periodica $\Sigma^h_{\mu\nu}$ è necessariamente instabile.

Si pone ora la questione: Queste $\Sigma^h_{\mu\nu}$ di accertata instabilità esauriscono tutte le soluzioni periodiche prossime a movimenti circolari uniformi, o ne rimangono escluse, e quali?

Dal paragrafo antecedente risulta che (a prescindere dalla inessenziale arbitrarietà di q_1^0, e supponendo che il parametro μ abbia un valore fisso abbastanza piccolo) vi hanno ∞^1 di tali soluzioni, le quali rimangono univocamente determinate dal valore p_1^0 della variabile p_1.

Per rispondere alla domanda, testè formulata, basta evidentemente esaminare quale sia l'insieme dei valori di p_1^0, che corrispondono alle nostre $\Sigma^h_{\mu\nu}$. Per una generica di esse, si ha

$$p_1^0 = \left(1 + \frac{3}{h}\right)^{-\frac{1}{3}} + \nu.$$

Se non vi fosse la limitazione del ν *abbastanza piccolo*, fissato ad arbitrio un valore di h (primo con 3, e non -1, nè -2), se ne trarrebbe, facendo variare ν, l'intera categoria delle soluzioni periodiche prossime a movimenti circolari uniformi. In fatto però la nostra dimostrazione implica che ν non superi (in valore assoluto) un certo limite, variabile in generale con h, che rappresenterò con δ_h. A rigore dunque rimane provata la instabilità di quelle soluzioni periodiche soltanto, il cui p_1^0 cade entro un qualche intervallo

$$\left(1+\frac{3}{h}\right)^{-\frac{1}{3}}-\delta_h, \quad \left(1+\frac{3}{h}\right)^{-\frac{1}{3}}+\delta_h.$$

Il massimo di $\left(1+\frac{3}{h}\right)^{-\frac{1}{3}}$ si ha per $h=-4$, il minimo per $h=1$; al crescere indefinito di h, per valori positivi o negativi, i punti $\left(1+\frac{3}{h}\right)^{-\frac{1}{3}}$ convergono, dalla sinistra o dalla destra, al valore 1.

Riferendoci al caso limite $\mu=0$, le orbite circolari, per cui p_1^0 si trova compreso nei detti intervalli, ricoprono tante piccole corone Z_n di raggio medio $\left(1+\frac{3}{h}\right)^{-\frac{2}{3}}$ e di ampiezza

$$\delta'_h\left(=\left\{\left(1+\frac{3}{h}\right)^{-\frac{1}{3}}+\delta_h\right\}^2-\left\{\left(1+\frac{3}{h}\right)^{-\frac{1}{3}}-\delta_h\right\}^2\right).$$

Per quanto precede, noi siamo in grado di affermare che sono instabili le soluzioni periodiche vicine ad ognuna di queste (*) circonferenze.

(*) Possiamo caratterizzarle, dicendo che il loro moto medio è *vicino* ad un numero della forma $1+\frac{3}{h}$. A questo proposito cade in acconcio la seguente osservazione.

Nella Nota *Sur le problème restreint des trois corps* (Comptes Rendus, 23 luglio 1900) le soluzioni periodiche, di cui si può rigorosamente provare la instabilità, sono designate come *vicine alle orbite circolari aventi per moto medio un numero della forma* $1+\frac{3}{h}$. Se si bada alla circostanza che queste soluzioni vicine dipendono, oltre che da μ, dall'altro parametro p_1^0, apparisce chiaramente che le soluzioni periodiche *vicine ad un dato cerchio* (riducentesi cioè ad esso per variazione continua dei parametri) possono dirsi con egual ragione *vicine ad ogni altro cerchio di una zona abbastanza piccola attorno al primo.*

I due modi di dire sono dunque equivalenti: Quello qui adottato mi pare preferibile, perchè i valori $1+\frac{3}{h}$ non vengono (sia pure nell'enunciato soltanto) ad assumere posizione particolare rispetto ai valori contigui. Che un carattere aritmetico non abbia relazioni essenziali con proprietà d'indole qualitativa è cosa del resto ben naturale. E se il successo della presente ricerca sembra dovuto a certa ipotesi di commensurabilità, ciò dipende puramente dell'artifizio dimostrativo, cui sono ricorso, in mancanza di metodi più diretti ed efficaci.

In definitiva vien messa in luce *la esistenza di zone di instabilità, le quali si addensano intorno all'orbita di Giove.*

È ben probabile che le soluzioni periodiche del nostro problema sieno tutte instabili, o, in altri termini, che la regione di instabilità occupi l'intero piano. Ma le considerazioni, istituite finora, non ci autorizzano ad affermarlo: Nemmeno possiam trarne alcun ragguaglio sull'ampiezza degl'intervalli δ_h. Questo solo si sa, che sono diversi da zero.

Esempi. Dalle tabelle del sig. J. Mascart (*) si rileva che i tre asteroidi **167** Urda, **243** Ida, **396** posseggono un moto medio vicino a due volte e mezzo quello di Giove, mentre tanto le eccentricità, quanto le inclinazioni sono assai piccole.

Per ognuno di questi pianeti, si potranno scegliere μ e ν in modo che la corrispondente soluzione periodica $\Sigma^2_{\mu\nu}$ abbia carattere di *orbita intermediaria.*

La accertata instabilità delle $\Sigma^2_{\mu\nu}$ fa presumere quella del movimento reale dei pianeti.

Anche il pianeta **188** Menippo ha un moto medio assai vicino a $\frac{5}{2}$, ma la sua eccentricità e la sua inclinazione sono forse un po' troppo forti, perchè le precedenti considerazioni si possano ritenere senz'altro applicabili.

§ 4. — Sviluppo del calcolo, su cui riposa la precedente dimostrazione.

Avviamoci a calcolare effettivamente il valor medio $[\mathfrak{H}'^{(1)}_3]$.

In primo luogo è da osservare che i termini di $\mathfrak{H}'^{(1)}_3$ sono di duplice provenienza: da $H^{(0)}$ e da $H^{(1)}$.

Chiamiamo M la somma dei primi, N quella dei secondi e poniamo in conformità

$$\mathfrak{H}'^{(1)}_3 = M + N.$$

Calcolo di [M].

Pongasi nelle (10) $\nu = 0$.

(*) *Les orbites des petites planètes rapportées à l'orbite de Jupiter.* (Bulletin Astronomique. Tom. XVI, 1899.)

Le c_{11}, c_{12},.., quando si fa $\nu = 0$, contengono μ a fattore. Diciamo $\bar{c}_{11}$, $\bar{c}_{12}$,... i coefficienti della prima potenza di μ; del pari designiamo con $\bar{\varphi}$ e $\bar{\psi}$ i termini indipendenti da μ e ν, in φ, ψ.

Avremo, mettendo in evidenza soltanto i termini indipendenti da μ e quelli di primo grado in μ,

$$p_2 = x \cos \frac{h q_1}{3} - y \operatorname{sen} \frac{h q_1}{3} + \mu \left\{ \bar{c}_{11} x + \bar{c}_{12} y \right\} + \mu \bar{\varphi} + \cdots,$$

$$q_2 = x \operatorname{sen} \frac{h q_1}{3} + y \cos \frac{h q_1}{3} + \mu \left\{ \bar{c}_{21} x + \bar{c}_{22} y \right\} + \mu \bar{\psi} + \cdots,$$

e di qua, quadrando e sommando,

$$\left.\begin{aligned} \eta^2 = x^2 + y^2 + 2 \mu \chi + \\ + 2 \mu \left\{ \cos \frac{h q_1}{3} (x \bar{\varphi} + y \bar{\psi}) + \operatorname{sen} \frac{h q_1}{3} (x \bar{\psi} - y \bar{\varphi}) \right\} + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

dove χ è una forma di secondo grado in x, y.

Dacchè

$$(p_1)_{\mu=\nu=0} = H'^{(0)} = \sqrt{R} - \frac{1}{2} \frac{1}{n-1} \eta^2 + \eta^4 \Omega (\eta^2, 0) \tag{12}$$

è l'espressione di $H^{(0)}$ per $\nu = 0$, quando si eseguisce la sostituzione (10) e si immagina di sviluppare per potenze di μ, il coefficiente della prima potenza di μ vale, in virtù della (11),

$$\left(\frac{d H'^{(0)}}{d \eta^2}\right)_{\eta^2 = x^2 + y^2} \cdot 2 \left\{ \chi + \cos \frac{h q_1}{3} (x \bar{\varphi} + y \bar{\psi}) + \operatorname{sen} \frac{h q_1}{3} (x \bar{\psi} - y \bar{\varphi}) \right\}.$$

Il primo fattore contiene soltanto potenze pari di x, y. I termini di terzo grado del prodotto provengono tutti dal moltiplicare la parte quadratica del primo fattore per la parte lineare del secondo. Risulta così

$$M = 4 \Omega (0, 0) (x^2 + y^2) \left\{ \cos \frac{h q_1}{3} (x \bar{\varphi} + y \bar{\psi}) + \operatorname{sen} \frac{h q_1}{3} (x \bar{\psi} - y \bar{\varphi}) \right\}.$$

Se si tien presente che $\bar{\varphi}$ e $\bar{\psi}$ sono funzioni periodiche di q_1, *di periodo* 2π, si vede subito che lo sviluppo di M in serie trigonometrica dell'argomento $\frac{q_1}{3}$ non contiene termine indipendente da $\frac{q_1}{3}$ (*) e quindi

$$[M] = \frac{1}{6\,k\,\pi} \int_0^{6k\pi} M\, d\, q_1 = 0.$$

Calcolo di [N]. Per definizione, N è l'insieme dei termini di terzo grado, che provengono da $H^{(1)}$, quando vi si faccia $\nu = 0$, e si eseguisca la sostituzione (9).

$H^{(1)}$ dipende dalla funzione perturbatrice U, di cui noi non possediamo ancora la espressione in coordinate p_1, p_2, q_1, q_2, ma soltanto (e questo diciamo pensando alla (2) e agli sviluppi classici, che richiameremo ben presto) per mezzo degli elementi ellittici, a, e, ϖ, ζ.

Quali sono, in base alle (4), (5), (9), (12), i valori di a, e, ϖ, ζ da introdursi in U, per averne la espressione in termini di x, y, q_1?

In primo luogo le (9) danno

$$p_2^2 + q_2^2 = \eta^2 = x^2 + y^2,$$

quindi, per essere $\sqrt{a} = p_1$, basterà porre, in p_1, $\mu = \nu = 0$, con che risulta, in virtù della (12),

$$\sqrt{a} = \sqrt{R} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n-1}\,\eta^2 + \eta^4\,\mathfrak{Q}(\eta^2,\ 0). \tag{12'}$$

La (5'), che può essere scritta

$$e^2 = \frac{\eta^2}{\sqrt{a}} \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{4\sqrt{a}} \right\},$$

ove si sostituisca per $\sqrt{a}$ questo valore, porge

$$e = R^{-\frac{1}{4}}\,\eta \left\{ 1 + \eta^2\,\mathfrak{P}(\eta^2) \right\}, \tag{13}$$

$\mathfrak{P}$ designando al solito una serie di potenze.

(*) Infatti, essendo un termine generico dello sviluppo di $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ della forma $\frac{\text{sen}}{\cos} m\, q_1$ (con m intero), i prodotti $\frac{\text{sen}}{\cos}\frac{h\,q_1}{3}\,\frac{\text{sen}}{\cos} m\,q_1$ dan luogo a somme di seni e coseni degli argomenti $\left(m \pm \frac{h}{3}\right) q_1$; e $\frac{h}{3}$ non è mai eguale ad un numero intero.

Per il nostro scopo non occorrono separatamente le espressioni di ϖ e ζ, ma bastano quelle della somma $\varpi + \zeta$, che non è altro che q_1, e delle combinazioni

$$e^m \cos m\,\zeta, \quad e^m \operatorname{sen} m\,\zeta,$$

dove m designa un intero positivo.

Partiamoci dalla identità

$$e^m (\cos m\,\zeta + i \operatorname{sen} m\,\zeta) = (e\,E^{i\zeta})^m$$

(per evitare ambiguità, si designa con E la base dei logaritmi naturali), e scriviamo nel secondo membro $q_1 - \varpi$ al posto di ζ, sostituendo per e il valore (13). Verrà

$$e^m (\cos m\,\zeta + i \operatorname{sen} m\,\zeta) = R^{-\frac{m}{4}} \{ 1 + \eta^2\,\mathfrak{P}(\eta^2) \}^m\, E^{imq_1} (\eta\, E^{-i\varpi})^m.$$

In virtù delle (4) e (9),

$$\eta\, E^{-i\varpi} = p_2 + i\,q_2 = (x + i\,y)\, E^{\frac{ihq_1}{3}};$$

per conseguenza

$$\left.\begin{aligned} e^m \cos m\,\zeta + i\, e^m \operatorname{sen} m\,\zeta = R^{-\frac{m}{4}} \{ 1 + \eta^2\,\mathfrak{P}(\eta^2) \}^m \times \\ \times \left\{ \cos m\left(1 + \frac{h}{3}\right) q_1 + i \operatorname{sen} m \left(1 + \frac{h}{3}\right) q_1 \right\} (x + i\,y)^m, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

da cui si traggono le relazioni cercate, scindendo il reale dall'immaginario.

Ciò posto, prendiamo a considerare la funzione perturbatrice, incominciando dal termine principale

$$\frac{1}{\Delta} = \{ 1 + r^2 - 2\,r \cos v \}^{-\frac{1}{2}}.$$

Supponendo r diverso da 1, si ha lo sviluppo (*)

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_j\, A_j^{(0)}(r) \cos j\,v,$$

in cui

$$A_j^{(0)}(r) = A_{-j}^{(0)}(r).$$

(*) Circa le proprietà di queste funzioni $A_j^{(0)}$, cfr. Tisserand, *Mécanique céleste*. Tom. I, Cap. XVII.

Ponendo

$$r = a(1 + x),$$

$$v = q_1 + y,$$

$$A_j^{(p)}(a) = \frac{a^p}{p!} \frac{d^p A_j^{(0)}(a)}{d a^p} \quad \begin{pmatrix} j = 0, \pm 1, \dots \\ p = 0, 1, \dots \end{pmatrix}, \tag{15}$$

troviamo subito

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{2} \sum_0^\infty{}_p \sum_{-\infty}^\infty{}_j A_j^{(p)}(a)\, x^p \cos j(q_1 + y) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_0^\infty{}_p \sum_{-\infty}^\infty{}_j A_j^{(p)}(a) \left\{ \cos j\, q_1\, x^p \cos j\, y - \operatorname{sen} j\, q_1\, x^p \operatorname{sen} j\, y \right\},$$

$$-\frac{1}{r} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1 + x},$$

$$-r \cos v = -a(1 + x)(\cos q_1 \cos y - \operatorname{sen} q_1 \operatorname{sen} y).$$

Si sa bene che, nelle espressioni di $x^p \cos j\, y$, $x^p \operatorname{sen} j\, y$, $\frac{1}{1+x}$, per e e ζ, un termine generico è del tipo

$$c\, e^{m'} \begin{matrix} \cos \\ \operatorname{sen} \end{matrix} m\, \zeta,$$

dove c è un coefficiente numerico, $m' = |m| +$ un numero pari positivo (*).

Dacchè

$$H^{(1)} = \frac{\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{r} - r \cos v}{a^{-\frac{3}{2}} - 1},$$

e, in virtù della (12') e della (7),

$$\frac{1}{a^{-\frac{3}{2}} - 1} = \frac{1}{R^{-\frac{3}{2}} - 1} + \eta^2 \mathfrak{Q}_1(\eta^2) = \frac{h}{3} + \eta^2 \mathfrak{D}_1(\eta^2)$$

(con $\mathfrak{Q}_1$ serie di potenze), le sostituzioni (12'), (13), (14) in $H^{(1)}$ potranno dar luogo a termini di terzo grado in x, y, solo quando si eseguiscano sopra termini di primo o terzo grado, rispetto ad e, i quali vanno cercati nelle

(*) Ibidem. Tom. I, n.° 93.

combinazioni

$$e \cos\zeta, \qquad e \operatorname{sen}\zeta;$$
$$e^3 \cos\zeta, \qquad e^3 \operatorname{sen}\zeta;$$
$$e^3 \cos 3\zeta, \qquad e^3 \operatorname{sen} 3\zeta.$$

Dai primi due gruppi, come appare dalle (13) e (14), possono bensì provenire termini di terzo grado in x, y; ma questi necessariamente contengono $\eta^2 = x^2 + y^2$ a fattore, e il loro valor medio risulta identicamente nullo. (Per la stessa ragione, per cui s' è trovato $[M] = 0$.)

Rimangono i termini in $e^3 \cos 3\zeta$, $e^3 \operatorname{sen} 3\zeta$. Vediamo come entrano in U, esaminando dapprima l'addendo $\frac{1}{r}$ · Lo sviluppo di questa funzione, e così di $\dfrac{\frac{1}{r}}{a^{-\frac{2}{3}} - 1}$, contiene soltanto termini della forma: funzione di $a \times e^{m'} \times \cos m\zeta$.

Per $m = 3$, il cambiamento di variabili (12'), (13), (14) dà evidentemente luogo ad espressioni di valor medio nullo.

Lo stesso non avviene per gli altri due addendi di U; ci è d'uopo analizzarne la struttura alquanto più addentro.

Dagli *Annales de l'Observatoire de Paris*, Tom. I, 1855, pag. 346-347, desumiamo che

$$\cos j\,\textsc{y} = \frac{5}{4} j^2 e^3 \cos 3\zeta + \cdots,$$

$$\operatorname{sen} j\,\textsc{y} = \frac{26j + 8j^3}{24} e^3 \operatorname{sen} 3\zeta + \cdots,$$

$$\textsc{x} \cos j\,\textsc{y} = -\frac{3 + 4j^2}{8} e^3 \cos 3\zeta + \cdots,$$

$$\textsc{x} \operatorname{sen} j\,\textsc{y} = -\frac{9}{8} j\, e^3 \operatorname{sen} 3\zeta + \cdots,$$

$$\textsc{x}^2 \cos j\,\textsc{y} = \frac{1}{2} e^3 \cos 3\zeta + \cdots, \qquad (j = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots),$$

$$\textsc{x}^2 \operatorname{sen} j\,\textsc{y} = \frac{1}{2} j\, e^3 \operatorname{sen} 3\zeta + \cdots,$$

$$\textsc{x}^3 \cos j\,\textsc{y} = -\frac{1}{4} e^3 \cos 3\zeta + \cdots,$$

$$\textsc{x}^p \cos j\,\textsc{y} = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (p > 3),$$

$$\textsc{x}^p \operatorname{sen} j\,\textsc{y} = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (p > 2)$$

essendosi messi in evidenza soltanto i termini della forma $e^3 \cos 3\zeta$, $e^3 \operatorname{sen} 3\zeta$.

Usufruendo di queste formule, quelle, che esprimono $\frac{1}{\Delta}$, $-r\cos v$, danno

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{2}e^3\cos 3\zeta\sum_{-\infty}^{\infty}{}_j\cos jq_1\left\{\frac{5}{4}j^2A_j^{(0)}(a)-\right.$$
$$\left.-\frac{3+4j^2}{8}A_j^{(1)}(a)+\frac{1}{2}A_j^{(2)}(a)-\frac{1}{4}A_j^{(3)}(a)\right\}$$
$$-\frac{1}{2}e^3\operatorname{sen} 3\zeta\sum_{-\infty}^{\infty}{}_j\operatorname{sen} jq_1\left\{\frac{26j+8j^3}{24}A_j^{(0)}(a)-\right.$$
$$\left.-\frac{9}{8}jA_j^{(1)}(a)+\frac{1}{2}jA_j^{(2)}(a)\right\}+\cdots,$$
$$-r\cos v=-\frac{3}{8}ae^3\cos 3\zeta\cos q_1+\frac{7}{24}ae^3\operatorname{sen} 3\zeta\operatorname{sen} q_1+\cdots,$$

i termini omessi non potendo recare contributo alcuno al nostro $[N]$.

Dalle (12′) e (14) segue che dobbiam porre

$$a=R, \tag{12''}$$
$$\left.\begin{aligned} e^3\cos 3\zeta &= R^{-\frac{3}{4}}\{(x^3-3xy^2)\cos(3+h)q_1-\\ &\quad -(3yx^2-y^3)\operatorname{sen}(3+h)q_1\},\\ e^3\operatorname{sen} 3\zeta &= R^{-\frac{3}{4}}\{(x^3-3xy^2)\operatorname{sen}(3+h)q_1+\\ &\quad +(3yx^2-y^3)\cos(3+h)q_1\}.\end{aligned}\right\} \tag{14'}$$

$[N]$ si presenta pertanto come il valore medio di $\dfrac{\frac{1}{\Delta}-r\cos v}{a^{-\frac{3}{2}}-1}$, dove beninteso $\frac{1}{\Delta}$, $-r\cos v$ si riducono alla parte testè scritta, mentre a, $e^3\cos 3\zeta$, $e^3\operatorname{sen} 3\zeta$ hanno i valori (12″), (14′).

Dopo ciò troviamo immediatamente

$$[N]=\frac{R^{-\frac{3}{4}}}{2(n-1)}\left[\left\{\frac{5}{4}s^2-\frac{26s+8s^3}{24}\right\}A_s^{(0)}(R)+\right.$$
$$+\left\{-\frac{3+4s^2}{8}+\frac{9}{8}s\right\}A_s^{(1)}(R)+\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right\}A_s^{(2)}(R)-$$
$$\left.-\frac{1}{4}A_s^{(3)}(R)+B_s\right](x^3-3xy^2),$$

dove s sta per $3+h$ e B_s è nullo, se s non è eguale a ± 1, mentre

$$B_1 = \left(-\frac{3}{8}+\frac{7}{24}\right)R = -\frac{1}{12}R,$$

$$B_{-1} = \left(-\frac{3}{8}-\frac{7}{24}\right)R = -\frac{2}{3}R.$$

Espressione di $[\mathfrak{H}'^{(1)}_3]$. Ponendo per brevità

$$c_0 = \frac{5}{4}s^2 - \frac{26\,s+8\,s^3}{24}, \quad c_1 = -\frac{3+4\,s^2}{8}+\frac{9}{8}s,$$

$$c_2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}s, \quad c_3 = -\frac{1}{4};$$

$$\Theta(R) = \frac{R^{-\frac{3}{4}}}{2(n-1)}\left\{c_0 A_s^{(0)}(R) + c_1 A_s^{(1)}(R) + c_2 A_s^{(2)}(R) + c_3 A_s^{(3)}(R) + B_s\right\},$$

si ha in definitiva

$$[\mathfrak{H}'^{(1)}_3] = \Theta(R)\,.\,(x^3 - 3\,x\,y^2).$$

Studio della funzione Θ. Si tratta di dimostrare che la funzione Θ di R non si annulla, quando R ha un valore del tipo $\left(1+\frac{3}{h}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{s}{s-3}\right)^{-\frac{2}{3}}$, dove s è, come h, un numero intero primo con 3, positivo o negativo. (Sono soltanto da escludersi i valori $s=1$, $s=2$, corrispondenti a $h=-1$, $h=-2$, per cui risulterebbe $n=\frac{s}{s-3}<0$.)

Cominciamo coll'osservare che, per definizione, $A_s^{(0)}(R)$ $(s>0)$ è il coefficiente di $\cos s\,v$ nello sviluppo in serie trigonometrica di $\frac{1}{\sqrt{1+R^2-2\,R\cos v}}$.

La identità

$$\frac{1}{\sqrt{1+R^2-2\,R\cos v}} = \frac{1}{R}\,\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{R}\right)^2-2\,\frac{1}{R}\cos v}},$$

eguagliando i coefficienti di $\cos s\,v$ nei due membri, porge

$$A_s^{(0)}(R) = \frac{1}{R}\,A_s^{(0)}\left(\frac{1}{R}\right),$$

o, ponendo per brevità

$$\frac{1}{R} = \rho,$$

$$A_s^{(0)}(R) = \rho\, A_s^{(0)}(\rho),$$

con che i valori delle $A_s^{(0)}(R)$, per $R > 1$, sono espressi mediante quelli delle stesse funzioni, per valori dell'argomento minori dell'unità.

Si ha dalle (15) la formula ricorrente

$$A_s^{(p)}(R) = \frac{R^p}{p!}\frac{d^p A_s^{(0)}}{d R^p} = \frac{R}{p}\frac{d}{d R}\left\{\frac{R^{p-1}}{(p-1)!}\frac{d^{p-1} A_s^{(0)}}{d R^{p-1}}\right\} - \frac{p-1}{p}\frac{R^{p-1}}{(p-1)!}\frac{d^{p-1} A_s^{(0)}}{d R^{p-1}} =$$

$$-\frac{1}{p}\left\{\rho\frac{d}{d\rho}(A_s^{(p-1)}(R)) + (p-1)A_s^{(p-1)}(R)\right\},$$

che permette di esprimere ogni $A_s^{(p)}(R)$ per funzioni dell'argomento ρ, quando ciò si sappia fare per $A_s^{(p-1)}(R)$.

Ponendo in questa formula $p = 1$, abbiamo

$$A_s^{(1)}(R) = -\rho\frac{d}{d\rho}\{\rho\, A_s^{(0)}(\rho)\} = -\rho\{A_s^{(1)}(\rho) + A_s^{(0)}(\rho)\};$$

in generale si trova

$$\left.\begin{aligned} A_s^{(p)}(R) = (-1)^p \rho \Big\{ A_s^{(p)}(\rho) + p\, A_s^{(p-1)}(\rho) + \\ + \frac{p(p-1)}{2} A_s^{(p-2)}(\rho) + \cdots + A^{(0)}(\rho) \Big\}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

come si può ovviamente verificare.

Per $R < 1$, la funzione $A_s^{(0)}(R)$ ammette lo sviluppo convergente (*)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} A_s^{(0)}(R) = \frac{1.3\ldots(2s-1)}{2.4\ldots 2s} R^s \Big\{ 1 + \frac{1}{2}\frac{2s+1}{2s+2} R^2 + \\ + \frac{1.3}{2.4}\frac{(2s+1)(2s+3)}{(2s+2)(2s+4)} R^4 + \cdots \Big\} \quad (s = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

I coefficienti essendo tutti positivi, $A_s^{(0)}(R)$ ha pure valore positivo, finchè R non supera l'unità; in causa delle (15), lo stesso ha luogo per ogni $A_s^{(p)}(R)$.

(*) Cfr. Tisserand, loc. cit., Tom. I, pag. 272.
Si tratta della funzione ivi designata con $b^{(i)}(\alpha)$. Ponendovi $\alpha = R$, $i = s$, si ha la (17).

Ciò premesso, consideriamo i valori di s, per cui risulta

$$R = \left(\frac{s}{s-3}\right)^{-\frac{2}{3}} < 1.$$

Dovrà essere s positivo, e quindi (rimanendo esclusi i multipli di 3 e i valori 1 e 2) almeno eguale a 4.

I coefficienti c_0, c_1, c_2, c_3 della precedente espressione di Θ sono tutti negativi, per $s \geqq 4$, quindi, essendo le $A_s^{(p)}(R)$ positive, $n > 1$ e $B_s = 0$, anche $\Theta(R) < 0$.

Supponiamo adesso $R > 1$ e quindi s negativo.

Sostituendo in $\Theta(R)$, per le $A_s^{(p)}(R)$ $(p = 0, 1, 2, 3)$, i valori (16), otteniamo

$$\Theta(R) = \frac{\rho^{\frac{7}{4}}}{2(n-1)} \left\{ c'_0 A_s^{(0)}(\rho) + c'_1 A_s^{(1)}(\rho) + c'_2 A_s^{(2)}(\rho) + c'_3 A_s^{(3)}(\rho) + \frac{1}{\rho} B_s \right\},$$

dove si è posto

$$\begin{aligned}
c'_0 &= c_0 - c_1 + c_2 - c_3 = \frac{9}{8} - \frac{65}{24}s + \frac{7}{4}s^2 - \frac{1}{3}s^3, \\
c'_1 &= \quad\; - c_1 + 2c_2 - 3c_3 = \frac{17}{8} - \frac{17}{8}s + \frac{1}{2}s^2, \\
c'_2 &= \qquad\qquad c_2 - 3c_3 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}s, \\
c'_3 &= \qquad\qquad\quad\; - c_3 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Questi coefficienti sono tutti positivi, per $s < 0$; positive sono pure, a tenore delle (15) e (17), le $A_s^{(p)}(\rho) = A_{-s}^{(p)}(\rho)$; B_s è nullo, se $s < -1$. Anche ora dunque risulta $\Theta(R)$ negativo, essendo $n < 1$.

Rimane il valore $s = -1$. Si ha

$$\rho = \left(\frac{-1}{-4}\right)^{\frac{2}{3}} = 4^{-\frac{2}{3}},$$

donde

$$\frac{1}{\rho^3} = 16;$$

$$c'_0 = \frac{71}{12}, \quad c'_1 = \frac{19}{4}, \quad c'_2 = \frac{7}{4}, \quad c'_3 = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{\rho} B_{-1} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\rho^3}\rho = -\frac{32}{3}\rho.$$

Con ciò la espressione di $\Theta(R)$ diviene

$$\Theta(R) = \frac{\rho^{\frac{7}{4}}}{2(n-1)} \left\{ \frac{71}{12} A_1^{(0)}(\rho) + \frac{19}{4} A_1^{(1)}(\rho) + \frac{7}{4} A_1^{(2)}(\rho) + \frac{1}{4} A_1^{(3)}(\rho) - \frac{32}{3}\rho \right\}.$$

Si rileva dalla (17) che il coefficiente di ρ in $A_1^{(0)}(\rho)$ è 1; in causa della relazione $A_s^{(1)}(\rho) = \rho \dfrac{d A_s^{(0)}(\rho)}{d\rho}$, è pure eguale all'unità il coefficiente di ρ in $A_s^{(1)}(\rho)$.

Ne deduciamo

$$\frac{71}{12} A_1^{(0)}(\rho) + \frac{19}{4} A_1^{(1)}(\rho) > \left(\frac{71}{12} + \frac{19}{4}\right)\rho = \frac{32}{3}\rho,$$

talchè la quantità in parentesi nell'espressione di $\Theta(R)$ è maggiore di

$$\frac{7}{4} A_1^{(2)}(\rho) + \frac{1}{4} A_1^{(3)}(\rho),$$

e quindi positiva; $\Theta(R)$ risulta, come sopra, < 0.

Riassumendo, possiamo concludere: La funzione $\Theta(R)$ è costantemente negativa per valori dell'argomento della forma considerata.

Padova, Ottobre 1900.

SOMMARIO.

Introduzione . . . . Pag. 221

CAPITOLO I.

Nozione di stabilità per le trasformazioni puntuali.

§ 1. — Definizioni ed esempi . . . . Pag. 225
§ 2. — Instabilità delle trasformazioni, che ammettono almeno un moltiplicatore di modulo diverso da uno . . . . » 231

CAPITOLO II.

Trasformazioni binarie a moltiplicatori eguali all'unità.

§ 1. — Tipi non contemplati nel precedente capitolo di trasformazioni a due variabili . . . . Pag. 240
§ 2. — Forma ridotta dal tipo *(A)*. — Caratteri invariantivi. — Interpretazione proiettiva . . . . » 241
§ 3. — Instabilità del caso generale . . . . » 245
§ 4. — Proprietà delle trasformazioni *(B)*. — Caso generale. — Instabilità . » 254
§ 5. — Considerazioni relative al caso d'eccezione. — Sottocasi possibili . . » 257

CAPITOLO III.

La questione della stabilità delle soluzioni periodiche.

§ 1. — Posizione del problema dal punto di vista della precedente teoria . Pag. 261
§ 2. — Il teorema di Liapounoff . . . . » 265
§ 3. — Sistemi di secondo ordine. — Caratteri di instabilità in due casi particolari . . . . » 267
§ 4. — Casi riducibili all'uno e all'altro dei due anzidetti . . . . » 270
§ 5. — Equazioni canoniche . . . . » 274
§ 6. — Osservazione generale concernente la stabilità delle soluzioni periodiche, che dipendono da un parametro . . . . » 280

CAPITOLO IV.

Applicazione al problema dei tre corpi.

§ 1. — Equazioni del problema ristretto . . . . Pag. 282
§ 2. — Soluzioni periodiche prossime ad un movimento circolare uniforme . » 286
§ 3. — Instabilità di queste soluzioni . . . . » 289
§ 4. — Sviluppo del calcolo, su cui riposa la precedente dimostrazione . . » 295