MM. TERQUEM et BOUSSINESQ
Professeurs à la Faculté des sciences de Lille.

SUR LA THÉORIE DES BATTEMENTS

— *Séance du 21 août 1874.* —

Ire Partie. — Théorie.

Quand on produit l'un près de l'autre deux sons à peu près égaux en hauteur et ayant la même intensité, on démontre facilement que l'on devra entendre le son dont le nombre de vibrations est la moyenne de ceux des deux sons isolés; de plus, l'intensité de ce son varie périodiquement, d'où résulte le phénomène des battements; le nombre de ces derniers est égal à la différence des nombres des vibrations des deux sons.

En effet, soient :

$$x = a \sin 2\pi nt, \quad x' = a \sin 2\pi n' t$$

les vitesses communiquées par les deux sons à une même molécule d'air, vitesses que nous supposerons, pour plus de simplicité, dirigées dans un même sens; la vitesse résultante, y, sera donnée par la formule

$$y = a \sin 2\pi nt + a \sin 2\pi n' t = 2a \cos \pi (n - n') t \sin 2\pi \frac{n + n'}{2} t.$$

Cette relation est vraie, quels que soient n et n'; mais si n et n' diffèrent peu l'un de l'autre, le facteur $\cos \pi (n - n') t$ a une très-longue période, et comme les deux mouvements vibratoires ébranlent sensiblement les mêmes fibres nerveuses dans l'oreille, on entendra le son correspondant à $\frac{n+n'}{2}$ vibrations par seconde, avec une intensité variable représentée par $4\, a^2 \cos^2 \pi\,(n-n')\,t$; il y aura donc, en une seconde, $n-n'$ maxima et $n-n'$ minima, c'est-à-dire $n-n'$ battements.

Que doit-il se produire, si, les deux sons restant très-voisins l'un de l'autre, leurs intensités ne sont plus les mêmes? L'expérience a fait voir depuis longtemps que le nombre des battements entendus est indépendant de l'intensité relative des deux sons; mais il restait à savoir quel est le son perçu, dont la hauteur doit varier évidemment suivant le son qui prédomine.

Voici comment nous avons résolu par le calcul cette question, non pas d'une manière générale ni tout à fait rigoureuse, mais avec une approximation suffisante, quand on suppose n assez peu différent de n'.

Soient, comme précédemment, mais avec des intensités différentes, proportionnelles aux carrés des deux coefficients a, a',

$$x = a \sin 2\pi nt, \quad x' = a' \sin 2\pi n' t \qquad (1)$$

les vitesses communiquées à la même molécule d'air par les deux corps qui vibrent simultanément; x et x' peuvent être considérés comme les projections des vitesses réelles sur la normale à la surface de la membrane du tympan.

On aura pour la vitesse résultante :

$$y = a \sin 2\pi nt + a' \sin 2\pi n' t. \qquad (2)$$

Posons

$$a = \frac{M+N}{2}, \quad a' = \frac{M-N}{2}, \qquad (3)$$

ou

$$M = a + a', \quad N = a - a'; \qquad (4)$$

on aura

$$y = \frac{M+N}{2} \sin 2\pi nt + \frac{M-N}{2} \sin 2\pi n t, \qquad (5)$$

$$= \frac{M}{2}(\sin 2\pi nt + \sin 2\pi n' t) + \frac{N}{2}(\sin 2\pi nt - \sin 2\pi n' t)$$

ou bien

$$y = M \cos\pi(n-n')\,t \sin\pi(n+n')\,t + N \sin\pi(n-n')\,t \cos\pi(n+n')\,t \qquad (6)$$

Pour transformer cette expression et lui donner la forme habituelle, $a \sin 2\pi n\,(t-\varphi)$, par laquelle on représente un mouvement vibratoire quelconque, posons :

$$M \cos\pi(n-n')\,t = A \cos\alpha,$$
$$N \sin\pi(n-n')\,t = A \sin\alpha; \qquad (7)$$

d'où l'on déduit

$$A^2 = M^2 \cos^2\pi\,(n-n')\,t + N^2 \sin^2\pi\,(n-n')\,t; \qquad (8)$$

et en vertu des relations (4) :

$$A^2 = (a + a')^2 \cos^2 \pi (n - n') t + (a - a')^2 \sin^2 \pi (n - n') t$$
$$= a^2 + a'^2 + 2\, a\, a' \cos 2\pi (n - n') t. \qquad (9)$$

On aura, pour déterminer α, la relation :

$$tg\alpha = \frac{N}{M}\, tg\, \pi (n - n') t; \qquad (10)$$

d'où enfin nous déduirons $\cos^2 \alpha$, dont on a besoin pour les calculs ultérieurs :

$$\cos^2 \alpha = \frac{M^2}{M^2 + N^2\, tg^2\, \pi (n - n') t} = \frac{M^2 \cos^2 \pi (n - n') t}{A^2} \quad (11).$$

On obtient donc pour y, vitesse résultante :

$$y = A \cos \alpha \sin \pi (n + n') t + A \sin \alpha \cos \pi (n + n') t$$
$$= A \sin [\pi (n + n') t + \alpha]. \qquad (12)$$

Le son représenté par cette égalité aurait une intensité égale à A^2 et un nombre de vibrations égal à $\frac{n + n}{2}$, si α était constant; mais α est fonction du temps. Quand n et n' sont très-différents l'un de l'autre, cette expression ne représente rien de plus, au point de vue de la perception, que l'égalité (2), dont elle n'est qu'une transformation; elle est même moins claire. Mais lorsque n et n' diffèrent peu, α varie très-lentement et l'on voit que si l'oreille pouvait percevoir chaque vibration comme un son distinct, ce son aurait une hauteur variable d'un instant à l'autre; cherchons à déterminer la hauteur du son variable, ou plutôt le nombre de vibrations par seconde qui lui correspondrait s'il restait constant. Nous supposerons dans ce qui suit n peu différent de n' et nous négligerons des quantités très-petites.

Soit θ la durée de la vibration du son perçu à un moment quelconque; posons :

$$\varphi = \pi (n + n') t + \alpha = \pi (n + n') t + f(t), \quad (13)$$

avec

$$\alpha = f(t).$$

Si on remplace dans cette expression t par $t + \theta$, φ devra augmenter de 2π; donc :

$$\varphi + 2\pi = \pi (n + n') (t + \theta) + f(t + \theta), \quad (14)$$

et, en retranchant (13) de (14), on obtient :

$$2\pi = \pi (n + n') \theta + f(t + \theta) - f(t). \quad (15)$$

Or, comme α varie très-lentement avec t, on pourra poser :

$$f(t + \theta) - f(t) = \frac{d\alpha}{dt} \theta,$$

et l'égalité (15) devient :

$$2\pi = \left[\pi(n+n') + \frac{dx}{dt}\right]\theta. \quad (16)$$

Soit n_1 le nombre de vibrations par seconde correspondant au son entendu à chaque instant; on a $n_1 = \frac{1}{\theta}$, et par suite :

$$n_1 = \frac{n+n'}{2} + \frac{1}{2\pi}\frac{dx}{dt}. \quad (17)$$

Pour déterminer $\frac{dx}{dt}$, différentions l'équation (10); on aura :

$$\frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{dt} = \frac{N}{M}\pi(n-n') \times \frac{1}{\cos^2 \pi(n-n')t};$$

d'où, remplaçant $\cos^2 x$ par sa valeur (11),

$$\frac{dx}{dt} = \frac{MN\pi(n-n')}{A^2};$$

et, comme $MN = a^2 - a'^2$, en vertu des égalités (4) :

$$n_1 = \frac{n+n}{2} + \frac{a^2-a'^2}{2A^2}(n-n') \quad (17).$$

La valeur de n_1 varie donc continuellement suivant la valeur de A^2; le maximum de $n_1 = \frac{na+n'a'}{a+a'}$, le minimum $= \frac{na-n'a'}{a-a'}$, et la valeur de n_1 correspondant à la valeur intermédiaire de A^2 ou $a^2+a'^2$ est

$$\frac{na^2+n'a'^2}{a^2+a'^2}.$$

Chaque son variable, à cause de sa faible durée, ne peut produire une impression isolée sur l'oreille; celle-ci percevra un certain son moyen, dont la hauteur dépendra des impressions successives. Mais pour trouver ce son, il faudra tenir compte pour chaque ébranlement successif de l'intensité correspondante ; ainsi quand A^2 est minimum, l'ébranlement transmis à l'oreille sera très-faible. Donc, pour trouver le nombre n_2 réel de vibrations que l'oreille entendra, il faudra prendre la moyenne des nombres n_1 calculés précédemment, en affectant chaque n_1 d'un coefficient d'importance proportionnel à l'intensité correspondante A^2.

Soit T la durée d'un battement, très-longue par rapport à celle de chacun des sons isolés, on aura :

$$n_2 = \frac{\int_0^T n_1 A^2 dt}{\int_0^T A^2 dt} = \frac{\int_0^T n_1 A^2 \frac{dt}{T}}{\int_0^T A^2 \frac{dt}{T}}. \quad (18)$$

On a, d'après (17), $n_1 A^2 = \frac{n+n'}{2} A^2 + \frac{a^2 - a'^2}{2}(n - n')$

et par suite :

$$\int_0^T n_1 A^2 \frac{dt}{T} = \frac{n+n'}{2} \int_0^T A^2 \frac{dt}{T} + \frac{a^2 - a'^2}{2}(n - n').$$

D'autre part, vu la valeur de A^2 (9), on a :

$$\int_0^T A^2 \frac{dt}{T} = a^2 + a'^2.$$

On aura donc pour n_2 :

$$n_2 = \frac{a+a'}{2} + \frac{(a^2 - a'^2)(n - n')}{2(a^2 + a'^2)} = \frac{n a^2 + n' a'^2}{a^2 + a'^2} \ (19).$$

On pouvait penser que telle devait être la formule qui représenterait le nombre de vibrations du son entendu; on ne pouvait cependant *a priori* se contenter d'écrire que le nombre moyen de vibrations du son entendu devait être tel que son produit par l'intensité moyenne $a^2 + a'^2$ égale la somme des produits des intensités respectives a^2 et a'^2 des sons composants par leurs nombres correspondants de vibrations n et n'; on ne le pouvait du moins en s'appuyant sur le principe des forces vives, vu que les produits na^2, na'^2 et $n^2(a^2 + a'^2)$ ne représentent nullement les forces vives moyennes correspondant aux divers sons.

On reconnaît facilement que si a ou a' est égal à o, n_2 deviendra égal à n' ou à n, et si $a = a'$, on a : $n_2 = \frac{n+n'}{2}$.

Deuxième Partie. — Vérification expérimentale.

L'appareil qui a été employé, se composait de deux diapasons A B et A' B' (fig. 18), munis de curseurs, dont le mouvement était entretenu à l'aide d'un courant électrique; vis-à-vis les extrémités libres des branches sont placés deux résonnateurs R et R', à tirage; un des diapasons A B, avec son résonnateur R, est placé dans l'intérieur d'une grande caisse, afin d'étouffer le son, et empêcher que l'ébranlement se communique au second résonnateur R′ par les vibrations de l'air; des précautions minutieuses avaient été prises pour que cette même communication ne puisse se faire par les supports des diapasons et la table qui supporte l'appareil. Aux résonnateurs sont fixés des tubes de caoutchouc C D, et C′ D′, de mêmes longueurs et sections, qui aboutissent à une pièce

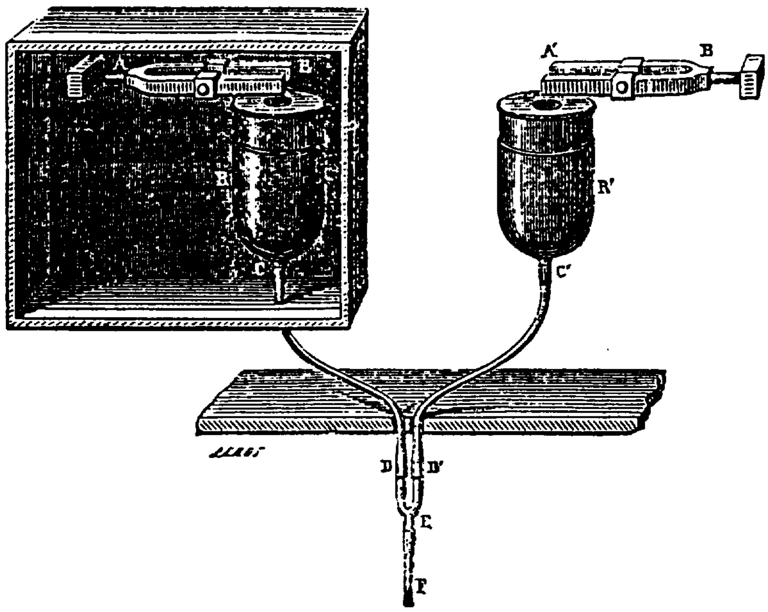

Fig. 18.

voisine de celle où se trouvent les diapasons. En D et D′ les tubes sont réunis par un tube de laiton D D′ E, à trois branches appartenant à l'appareil de M. Kœnig pour l'interférence des sons; en E est fixé un petit tube de caoutchouc, dont on place l'extrémité F contre l'ouverture de l'oreille. Un peu en avant des extrémités D et D′ des tubes de caoutchouc, sont placées deux petites presses munies de ressorts, omises dans le dessin, et qui servent à comprimer l'un ou l'autre des tubes; on peut ainsi intercepter à volonté partiellement ou totalement l'arrivée de l'un ou l'autre son à l'oreille. Le diapason A B, dont le son était fixe rendait le son ut_2, faisant par suite 128 vibrations doubles par seconde, ou 256 simples; le curseur du second diapason a été déplacé progressivement, de manière à produire des sons de plus en plus différents du premier; ce second diapason a été aussi remplacé par un autre pouvant permettre d'obtenir des intervalles allant jusqu'à une tierce majeure et une quarte.

Voici quel a été le résultat de nos observations :

1° *Sons concomitants* — ut$_2$ *(256 v. s.) et un son inférieur à* ré$_2$ *(288 v. s.). — De 0 à 16 battements par seconde.*

Quand les deux sons diffèrent peu, et qu'il y a au plus de 8 à 10 battements par seconde, on perçoit très-nettement ces derniers. Supposons que l'un des deux sons soit d'abord complétement intercepté, le son supérieur par exemple; dès qu'en desserrant légèrement la presse qui comprime le tube de caoutchouc correspondant, le ton supérieur vient se combiner avec l'autre, on cesse d'entendre ce dernier; on n'entend plus que le son intermédiaire, qui éprouve les variations d'intensités caractérisées par les battements, et que pour abréger, nous nommerons désormais *le son des battements*. Celui-ci, en même temps monte ou descend sensiblement, suivant qu'en comprimant l'un ou l'autre caoutchouc, on laisse prédominer l'un ou l'autre des deux sons. Si, au contraire, on enlève le tube de cuivre D D' E, et que l'on rapproche l'extrémité D d'une oreille et D' de l'autre, de manière à entendre chaque son isolément par une oreille, la combinaison des mouvements vibratoires ne peut plus s'opérer, et l'on n'entend plus que les deux sons isolés, sans aucune espèce de battements; la sensation de la dissonnance au contraire est très-forte et très-désagréable.

Si le nombre de battements dépasse 10, ils commencent à former cette espèce de roulement, que l'on continue à entendre, même quand ils sont si nombreux, que l'on n'a plus la sensation de chaque battement. Mais on constate aussi qu'à mesure que les deux sons concomitants s'éloignent l'un de l'autre, si l'un d'eux existe seul d'abord, l'autre peut acquérir une certaine intensité sans que l'on en ait la sensation; puis tout à coup, on cesse d'entendre le premier son, et à la place on entend le son des battements, qui diffère notablement du premier en hauteur, quand les deux sons ont à peu près la même intensité; les mêmes faits se produisent en sens inverse, quand on fait prédominer l'autre son; de plus le son des battements change moins de hauteur, et cesse brusquement de se produire, comme il a pris naissance.

Avec la perception séparée des deux oreilles, on entend les deux sons sans aucun battement, comme précédemment.

Si l'on écoute les deux sons de loin, en se plaçant vis-à-vis de l'ouverture des résonnateurs, la sensation est très-confuse; cela tient en réalité à ce que l'on entend trois sons à la fois, les deux sons isolés et celui des battements; c'est ce qui explique la sensation si désagréable de discordance que l'on éprouve dans ce cas; si les sons se trouvent très-rapprochés, comme on n'entend que le son des battements seul, la sensation est donc bien moins désagréable. C'est le premier fait qui a conduit M. Helmholtz à admettre que la dissonnance était due uniquement à la présence des battements, tandis qu'il résulte de nos expériences que la discordance est due en réalité aux sensations inégales perçues par les deux oreilles.

2° — *Sons concomitants* ut_2 *(256 v. s.) et un son compris entre* $\mathrm{ré}_2$ *(288 v. s.) et* $\mathrm{mi}_{\flat 2}$ *(307 v. s.). — De 16 à 25,6 battements par seconde*

Mêmes effets que précédemment, et variant dans le même sens.

3° — *Sons concomitants* ut_2 *(256 v. s.) et un son compris entre* mi_{b2} *(307, 2 v. s.) et* mi_2 *(320 v. s.).—De 25,6 à 32 battements par seconde.*

Le son des battements est encore entendu seul, quand les deux sons ont la même intensité, mais cesse plus vite que précédemment quand cette égalité cesse d'exister; on commence à entendre les deux sons isolés avec une oreille, quand ils sont très-inégaux en intensité; en même temps que le son des battements, on entend un son beaucoup plus grave que les précédents avec un fort roulement. Ce dernier son est peut-être un son résultant, ou bien il est dû aux battements eux-mêmes. Il n'est pas démontré en effet, que des battements assez nombreux ne puissent donner naissance à des sons.

4° — *Sons concomitants* ut_2 *(256 v. s.) et* mi_2 *(320).* — On n'entend plus le son de battement, mais seulement un son très-grave avec le roulement particulier qui accompagne la perception des sons dont le nombre des vibrations est inférieur à 40; ce qui peut être attribué à l'extinction rapide des ébranlements communiqués aux parties de l'oreille, qui doivent vibrer à l'unisson du son perçu. Si l'on entend les deux sons avec une seule oreille, la sensation de l'accord et de l'intervalle est loin d'avoir la même netteté que quand on écoute chaque son avec une oreille différente.

5° — *Sons concomitants* ut_2 *(256 v. s.) et un son compris entre* mi_2 *(320 v. s.) et* fa_2 *(341, 1/3 v. s.).*

Avec une seule oreille, l'intervalle est difficile à apprécier, et l'on entend un son très-grave.

6° — *Sons concomitants* ut_2 *(256 v. s.) et* fa_2 *(341 1/3 v. s.)*

L'intervalle devient parfaitement perceptible avec une oreille, quoiqu'on entende encore un son très-grave.

Conclusions.

Un son quelconque ébranle, comme l'on sait, dans l'oreille un certain nombre de fibres, avec une intensité décroissante de part et d'autre des fibres dont l'ébranlement est maximum. Si donc deux sons, de hauteurs peu différentes coexistent, il y aura un certain nombre de fibres communes ébranlées par les deux sons; on ne pourra donc avoir une sensation nette de leur intervalle, et l'expérience nous a fait voir que, partant de ut_2, cette limite dépasse mi_2.

Il se produit ici un phénomène analogue à celui que l'on observe dans la vision, quand l'œil reçoit les impressions émanant de deux points très-rapprochés; les surfaces de la rétine qui sont ébranlées se superposent en partie, et l'on ne peut apercevoir nettement ces deux points; si les deux lumières, homogènes chacune, sont différemment colorées, on aura une sensation due au mélange des deux premières. De même, dans l'audition avec une seule oreille, on entend un son intermédiaire entre les deux sons isolés, qui se rapproche plus ou moins l'un de l'autre suivant leurs intensités individuelles. Il y a peut-être aussi des battements dans les vibrations lumineuses, mais à cause de leur rapidité, on ne peut en avoir la perception.

Si les deux sons ont des hauteurs très-peu différentes, les vibrations des fibres communes sont tellement intenses, que les sons isolés cessent d'être perçus et la période de ces vibrations change suivant le son qui domine. Si les deux sons diffèrent notablement, les fibres communes ébranlées par les deux sons le sont très-peu par chacun d'eux, et il leur faut à chacun sensiblement la même égalité, pour que l'on entende le son intermédiaire, que nous avons appelé son des battements.

Contrairement à ce qui a lieu pour la vision, les sensations apportées au cerveau par les deux oreilles restent complétement indépendantes, et par conséquent, deux sons même très-voisins, perçus chacun par une oreille, ne donnent plus de battements; mais l'on éprouve la sensation très-nette de l'intervalle concordant ou discordant, par suite de la comparaison que l'on peut faire entre les deux sensations simultanées.

L'impression produite par les accords concordants ou discordants ne saurait donc être attribuée, comme l'avait supposé M. Helmholtz, à la présence des battements, puisque l'impression est la plus nette possible en l'absence de tout battement, et disparaît, quand les battements se produisent.