

BIBLIOTHÈQUE PRATIQUE de l'INGÉNIEUR
LOUBAT

VOLUME I

CINÉMATIQUE

Ed. Bézine

R H ES 11-12

J. LOUBAT
15, Boul. Saint-Martin
PARIS

ATELIERS G.S.P.

Maisons Guillemin Seryot et Pégard réunis

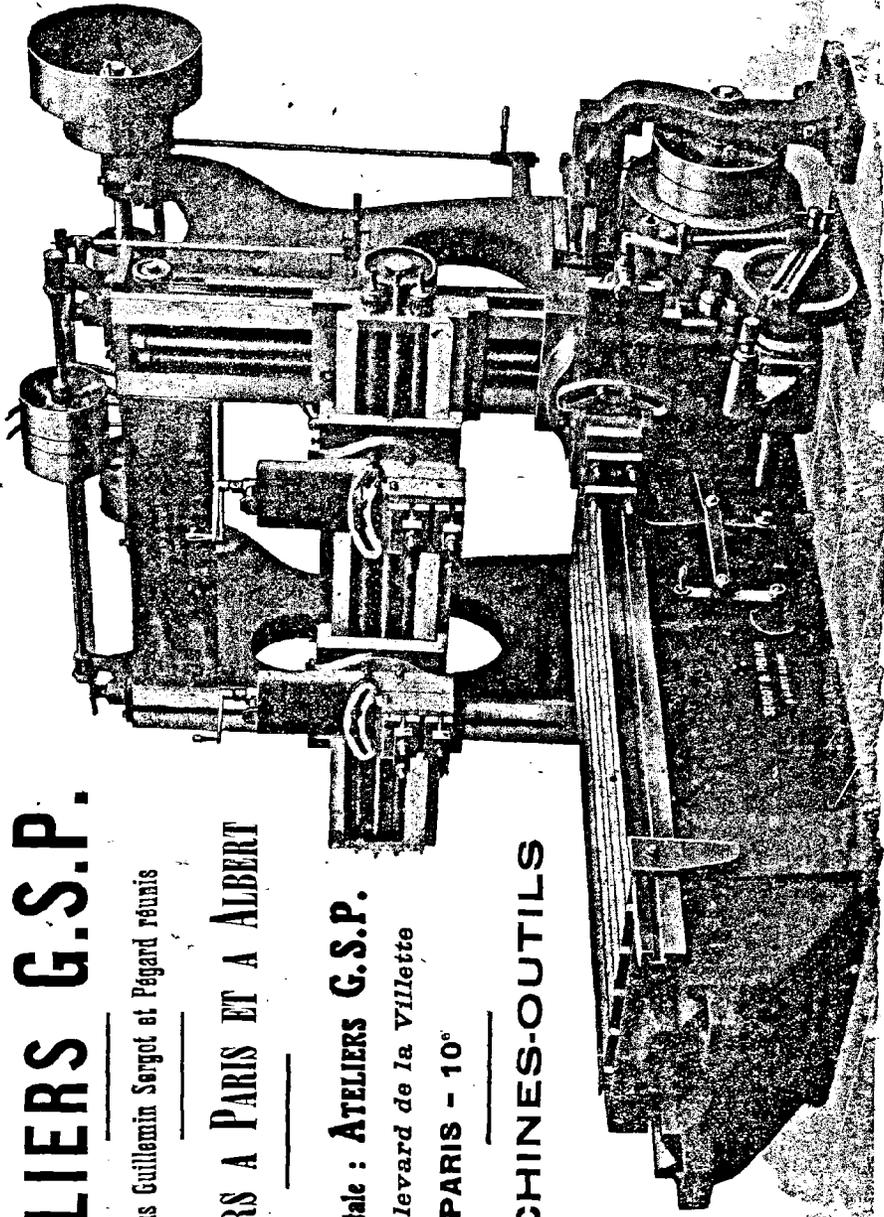
ATELIERS A PARIS ET A ALBERT

Adresse Postale : **ATELIERS G.S.P.**

55, boulevard de la Villette

PARIS - 10^e

MACHINES-OUTILS



ÉLÉMENTS DE CINÉMATIQUE

THÉORIQUE ET APPLIQUÉE

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Cours de Géométrie descriptive, comprenant la *Coupe des pierres*, les *Propulseurs hélicoïdaux*, la *Géométrie cotée*, les *Surfaces topographiques*, des *Notions sur l'établissement des abaques*, etc... J. LOUBAT ET CIE, éditeurs.

Cet ouvrage et les **Éléments de Cinématique** ont été honorés d'une souscription de Monsieur le Ministre du Commerce et de l'Industrie, ainsi que de diverses récompenses aux Expositions internationales de Bruxelles, Turin et Gand.

BIBLIOTHÈQUE PRATIQUE DE L'INGÉNIEUR

ÉLÉMENTS DE CINÉMATIQUE

THÉORIQUE ET APPLIQUÉE

PAR

E. D. BEZINE

PROFESSEUR A L'ÉCOLE D'ARTS ET MÉTIERS DE PARIS



PARIS

J. LOUBAT & C^{ie} ÉDITEURS

15 BOULEVARD SAINT-MARTIN, 15

PREMIÈRE PARTIE

CINÉMATIQUE THÉORIQUE

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES

1. Définitions du mouvement et du repos. — Un corps est *en mouvement* ou *en repos* selon que sa position par rapport à un système de points de repère varie ou reste la même aux divers instants. On lui donne, dans le premier cas, le nom de *mobile*.

Le mouvement d'un corps, comme le repos, peut être *absolu* ou *relatif*; absolu, quand il est observé d'une station fixe, ou rapporté à des points de comparaison fixes; relatif, s'il est observé d'une station en mouvement, ou rapporté à des repères mobiles. Un voyageur, assis dans un wagon de chemin de fer, est en repos par rapport au wagon (repos relatif), et en mouvement par rapport à la voie supposée fixe (mouvement absolu).

Ces définitions font appel à l'idée d'espace et à l'idée de temps. Chacun sait intuitivement ce qu'il faut entendre par l'étendue et la durée. Ces deux choses, que l'on ne peut définir, sont cependant mesurables.

2. Mesure du temps. — On mesure une durée en la comparant à une autre durée arbitrairement choisie, prise comme unité. Dans le système C. G. S., l'unité de temps adoptée est la *seconde de temps moyen*. C'est la 86400^{me} partie du *jour solaire moyen*, ou de la moyenne du temps variable que le Soleil emploie en apparence pour faire le tour de la Terre, et revenir au même méridien.

Pour déterminer le nombre d'unités de temps contenues dans la durée à mesurer, on assure, par des procédés variables, la répétition d'un même phénomène à des intervalles de temps égaux, qui se succèdent sans interruption. Dans les horloges à balancier, ces intervalles égaux sont déterminés par les oscillations d'un pendule. On emploie souvent, en Physique, pour mesurer des durées très courtes, les vibrations d'un diapason.

3. Mesure de l'espace parcouru — Les espaces parcourus par les divers points d'un mobile sont des longueurs. Dans le système C. G. S., l'unité de longueur adoptée est le centimètre. Mais on emploie fréquemment d'autres unités. On dit, par exemple, qu'un train parcourt 60 kilomètres à l'heure, qu'une poulie fait 200 tours par minute, qu'un navire file 18 nœuds. Le nœud est la cent-vingtième partie du mille marin, c'est-à-dire d'un arc d'une minute du méridien terrestre. Il vaut environ 15 m. 43.

4. Corps solide invariable. — Point matériel. — Les corps que l'on rencontre dans la nature sont susceptibles de changer de forme ou de dimensions sous l'influence des agents physiques; ils sont compressibles, dilatables, élastiques, etc. En mécanique, on raisonne sur une abstraction, le *corps solide invariable*, qui se distingue du corps solide naturel en ce qu'il n'est pas susceptible de déformation, quelles que soient la nature et la grandeur des efforts qui s'exercent sur lui. Il est entièrement *rigide* et *inextensible*.

On appelle *point matériel* un corps solide invariable de dimensions infiniment petites. C'est un point géométrique auquel on attribue les propriétés de la matière. Un corps solide invariable peut être considéré comme formé de points matériels, reliés les uns aux autres par des droites rigides et inextensibles.

5. Principe de l'inertie. — Force. — *Un corps ne peut, de lui-même, modifier l'état de repos ou de mouvement dans lequel il se trouve.*

Cette vérité fondamentale, due à l'observation, conduit à la notion de *force*. On appelle *force toute cause capable de produire ou de modifier le repos ou le mouvement d'un corps*. Les efforts musculaires des animaux, le poids des corps, les pressions exercées par les fluides sur les parois qui les renferment, les attractions et les répulsions électriques ou magnétiques, etc., sont des forces.

6. Définition et divisions de la Mécanique. — La mécanique a pour objet l'étude du mouvement et des forces. Elle se divise en trois parties :

I. LA CINÉMATIQUE, qui étudie le mouvement en lui-même, indépendamment des forces qui le produisent.

II. LA DYNAMIQUE, qui étudie les relations entre les mouvements et les forces.

III. LA STATIQUE, qui traite de l'équilibre des forces, c'est-à-dire des conditions dans lesquelles les effets de plusieurs forces agissant sur un corps se neutralisent.

La Cinématique, dont nous nous occuperons exclusivement, se partage elle-même en deux parties :

1° *La Cinématique pure, ou théorique*. C'est une étude des propriétés mathématiques des mouvements. Un corps étant considéré comme formé de points matériels, il est logique d'étudier d'abord le mouvement d'un point, puis ensuite celui d'un système de points. Ces parties de la Cinématique théorique sont appelées respectivement la CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL et la CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS.

2° *La Cinématique appliquée*, dans laquelle on recherche les formes à donner aux organes de machines pour réaliser une transformation de mouvement déterminée.



CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL

CHAPITRE I

ETUDE DU MOUVEMENT SUR LA TRAJECTOIRE

MÉTHODE ANALYTIQUE

7. Généralités. — On appelle *trajectoire* d'un point mobile le lieu géométrique des positions qu'il occupe successivement dans l'espace ; c'est une ligne essentiellement continue, car le point en mouvement ne peut passer d'une position à une autre sans occuper une suite ininterrompue de positions intermédiaires.

Suivant que la trajectoire est une ligne droite ou courbe, on dit que le mouvement est *rectiligne* ou *curviligne*. Le plus répandu des mouvements curvilignes est le mouvement *circulaire*, dans lequel la trajectoire est une circonférence.

Un mouvement est dit *continu* ou *alternatif*, selon que le mobile parcourt sa trajectoire toujours dans le même sens, ou bien alternativement dans un sens et dans l'autre. Le mouvement d'un pendule est alternatif ; celui d'un volant est continu.

Pour que le mouvement d'un point soit complètement déterminé, il ne suffit pas de connaître sa trajectoire ; il faut encore pouvoir marquer sur elle la position occupée par le mobile à un instant quelconque. Dans ce but, on mesure à chaque instant sa distance s à un point fixe o , appelé *origine des espaces*, pris d'une manière arbitraire sur la trajectoire (fig. 1), et on la considère comme une quantité algébrique, positive dans le sens ox par exemple, et négative dans le sens opposé. On choisit ensuite dans la durée une époque arbitraire, appelée *origine des temps*, à partir de laquelle on commence à compter les secondes. Un nombre t de secondes peut être regardé comme positif ou négatif selon qu'il est postérieur ou antérieur à l'origine des temps. A toute valeur de t correspond une valeur de s et une seule ; s est donc fonction de t , et il existe entre ces deux quantités une relation algébrique $s = f(t)$, appelée *loi ou équation des espaces* du mouvement, qui permet de déterminer à chaque instant la position du mobile sur sa trajectoire. En particulier, la valeur de s à l'origine des temps, obtenue en faisant $t = 0$ dans l'équation $s = f(t)$, est $s_0 = f(0)$. Cette distance, positive ou négative, fait connaître la position M_0 qu'avait le point mobile à l'origine des temps ; on l'appelle *l'espace initial*.

La connaissance de l'équation des espaces permet aussi de résoudre le problème inverse : *Trouver à quel instant le mobile occupe une position donnée sur sa trajec-*

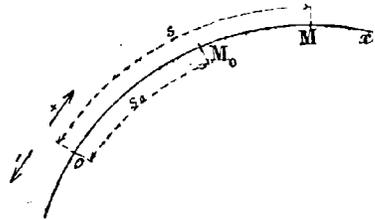


Fig. 1.

toire. Il suffit de résoudre par rapport à t l'équation $s = f(t)$. En particulier, l'instant du passage du mobile à l'origine des espaces est donné par l'équation $0 = f(t)$. Le plus souvent, on prend cette époque pour l'origine des temps. Dans ce cas, l'espace initial s_0 est nul (*).

Un mouvement est *direct* lorsque la trajectoire est parcourue dans le sens positif des espaces, et *rétrograde* dans le cas contraire. Dans le mouvement direct, s croît en même temps que t ; dans le mouvement rétrograde, s décroît quand t croît.

§ I. — *Mouvement uniforme*

8. Définition. — Un point possède un mouvement uniforme quand il parcourt des espaces égaux dans des temps égaux, si petits que soient ces temps.

Il résulte évidemment de cette définition que, dans le mouvement uniforme, l'espace est proportionnel au temps employé à le parcourir. Si M_0, M, M', \dots sont les positions du mobile qui correspondent respectivement à l'instant initial, et à des époques t, t', \dots ,

$$\frac{\text{arc } M_0 M}{t} = \frac{\text{arc } M_0 M'}{t'} = \text{etc.}$$

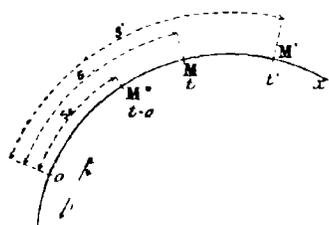


Fig. 2.

Le rapport de l'espace au temps employé à le parcourir est donc constant. On lui donne le nom de *vitesse*, et on le représente par v .

En particulier, soit $\Delta s = \text{arc } MM'$ (fig. 3) l'espace parcouru par le point mobile pendant un temps quelconque Δt succédant à l'époque t à laquelle

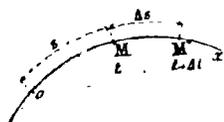


Fig. 3.

le mobile est en M . D'après ce qui précède, $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Si Δt est égal à l'unité de temps, $v = \Delta s$. Donc la vitesse dans le mouvement uniforme est mesurée par l'espace parcouru pendant l'unité de temps. On l'exprime avec la même unité que s , et l'on dit, par exemple, une vitesse de deux mètres par seconde.

Enfin, si l'on fait tendre Δt vers zéro, le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, sans cesser d'être égal à la vitesse, a pour limite la dérivée $\frac{ds}{dt}$ de l'espace par rapport au temps. Nous verrons plus loin (15) que cette relation entre la vitesse et l'espace est vraie quelle que soit la nature du mouvement. Il n'en est pas de même des autres propriétés de la vitesse dans le mouvement uniforme, qui sont spéciales à ce mouvement.

9. Equation des espaces dans le mouvement uniforme. — Soient M_0 et M (fig. 2) les positions du point mobile à l'instant initial et à une époque t , s_0 et s leurs distances à l'origine des espaces, mesurées sur la trajectoire. L'arc $M_0 M$, parcouru pendant le temps t , est exprimé par la différence $s - s_0$, quelle que soit la disposition de la figure. On a donc, en appliquant la définition de la vitesse

$$v = \frac{s - s_0}{t}$$

(*) Il est important d'observer que s ne représente généralement pas l'espace parcouru pendant le temps t ; cet espace égal à $s - s_0$ lorsque, entre l'instant initial et l'instant t , le mouvement ne change pas de sens, ne se réduit à s que si $s_0 = 0$.

d'où

$$s = s_0 + vt \quad (1)$$

C'est l'équation des espaces du mouvement uniforme. Il faut remarquer qu'elle est du premier degré en s et en t .

Réciproquement, toute relation du premier degré entre l'espace et le temps définit un mouvement uniforme. Soit $s = a + bt$ (2).
une telle relation, dans laquelle a et b sont des constantes. En faisant $t = 0$, on a $s = a$. Par suite $s - a$ représente l'espace parcouru entre l'initial et l'instant quelconque t . On tire de (2)

$$\frac{s - a}{t} = b$$

Puisque le rapport de l'espace au temps employé à le parcourir reste constant quel que soit t , le mouvement est uniforme.

10. Remarque. — La loi des espaces $s = s_0 + vt$ est générale si l'on convient de considérer s , s_0 , t et v comme des quantités algébriques. Nous avons déjà exposé les conventions de signe relatives à l'espace et au temps. Quant à la vitesse, son expression

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ montre que, si l'on convient de donner au temps des accroissements positifs,

elle est du signe de Δs . Par suite, la vitesse est positive ou négative selon que s augmente ou diminue quand t croît. Cela revient à dire que la vitesse est regardée comme positive dans un mouvement direct, et comme négative dans un mouvement rétrograde.

11. Cas particulier. — Si $s_0 = 0$, le mobile part de l'origine des espaces à l'origine des temps, et l'équation du mouvement uniforme se réduit à $s = vt$.

12. Problème des courriers. — Deux mobiles parcourent en même temps, et d'un mouvement uniforme, une trajectoire $x'x$. On demande l'heure de la rencontre, et quelle position ils occupent à cet instant sur la trajectoire commune.

Prenons, pour les deux mouvements, même origine des espaces O et même origine des temps. En désignant par s_0 et s'_0 les distances curvilignes des mobiles au point O à l'origine des temps, par v et v' les vitesses, les lois des deux mouvements sont

$$\left\{ \begin{array}{l} s = s_0 + vt \\ s' = s'_0 + v't \end{array} \right.$$

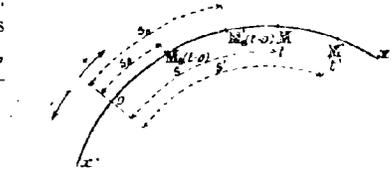


Fig. 4.

À l'instant de la rencontre, $s = s'$. On a donc

$$\begin{aligned} s_0 + vt &= s'_0 + v't \\ (v - v')t &= s'_0 - s_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Cette équation convient à tous les cas, à la condition d'observer les conventions de signes posées précédemment. On en tire, en supposant $v - v' \neq 0$

$$t = \frac{s'_0 - s_0}{v - v'} \quad (2)$$

En portant cette valeur de t dans l'expression de s , on trouve

$$s = \frac{vs'_0 - v's_0}{v - v'} \quad (3)$$

Les formules (2) et (3) font connaître l'instant de la rencontre, et la distance qui sépare, à cet instant, les deux mobiles de l'origine des espaces.

Discussion. — Si $v - v' \neq 0$, il y a rencontre des mobiles, dans l'avenir ou dans le passé suivant que $\frac{s'_0 - s_0}{v - v'}$ est positif ou négatif, sur ox ou sur ox' selon le signe de

$$\frac{vs'_0 - v's_0}{v - v'}$$

Si $v - v' = 0$, les formules (2) et (3) ne sont plus applicables. L'équation (1) se réduit à

$$0 \times t = s'_0 - s_0 \quad (4)$$

et deux cas sont à distinguer :

1° Si $s'_0 - s_0 \neq 0$, aucune valeur finie de t ne satisfait à l'équation (4), et les mobiles ne se rencontrent jamais. Ce résultat s'explique si l'on remarque que leurs vitesses sont égales en grandeur et en signe, et qu'à l'origine des temps ils sont à des distances différentes de l'origine des espaces. La distance $M_0M'_0$ qui les sépare à cet instant reste donc invariable.

2° Si $s'_0 - s_0 = 0$, l'équation (4) est indéterminée, ce qui signifie que les mobiles ne se quittent pas. Dans ce cas, en effet, ils sont confondus à l'origine des temps, et, par suite de l'égalité de leurs vitesses, ils ne se séparent pas.

Les résultats de cette discussion sont résumés dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{l}
 v - v' \neq 0 \\
 \\
 v - v' = 0
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \text{Les mobiles se rencontrent. L'heure de la rencontre et la} \\
 \text{distance du point de rencontre à l'origine des espaces sont dé-} \\
 \text{terminées par les formules :} \\
 \\
 t = \frac{s'_0 - s_0}{v - v'} \qquad s = \frac{vs'_0 - v's_0}{v - v'} \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 s'_0 - s_0 \neq 0 \text{ Les mobiles ne se rencontrent pas,} \\
 s'_0 - s_0 = 0 \text{ Les mobiles sont toujours réunis.}
 \end{array}
 \right\}
 \end{array}$$

12 bis. Mouvement circulaire uniforme. — Soit M un point mobile parcourant la circonférence o , de rayon r , avec la vitesse constante a , en partant de la position M_0 à l'origine des temps (fig. 14). L'arc M_0M , parcouru pendant le temps t , correspond à un angle de rotation $M_0oM = \alpha$, et l'on a

$$r\alpha = at \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{a}{r} \times t$$

Le rapport $\frac{a}{r}$ a reçu le nom de *vitesse angulaire du point M*. On le représente par ω . Pour éviter toute confusion, on donne à a le nom de *vitesse linéaire du point M*. Donc : *La vitesse angulaire d'un point dans le mouvement circulaire uniforme est le rapport de sa vitesse linéaire au rayon de la circonférence.*

La relation

$$\alpha = \frac{a}{r} \times t = \omega t \quad (1)$$

montre que l'angle de rotation entre l'instant initial et l'instant t est égal au produit de la vitesse angulaire par le temps.

Si $t = 1$, $\alpha = \omega$.

Par conséquent : *La vitesse angulaire est égale à l'angle de rotation pendant l'unité de temps.*

Enfin, en prenant les dérivées par rapport à t des deux membres de l'équation (1) on trouve

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega$$

La vitesse angulaire d'un mouvement circulaire uniforme est donc égale à la dérivée de l'angle de rotation par rapport au temps.

§ II. — *Mouvement varié.*

13. **Définition.** — Un mouvement qui n'est pas uniforme est dit *varié*. Dans un tel mouvement, le rapport du chemin au temps employé à le parcourir varie à chaque instant, et l'équation des espaces n'est plus du premier degré en s et t .

14. **Vitesse moyenne pendant un temps donné.** — Supposons que le mobile occupe sur sa trajectoire, aux instants t et t' , les positions M et M' , caractérisées par leurs distances s et s' à l'origine des espaces (fig. 5). L'arc $MM' = s' - s$ est parcouru pendant le temps $t' - t$ (*).

D'après la définition ci-dessus, le rapport $\frac{s' - s}{t' - t}$ qui mesure l'espace moyen parcouru pendant une seconde du temps $t' - t$, dépend à la fois de t et de t' . On lui donne le nom de *vitesse moyenne* du mobile pendant le temps $t' - t$.

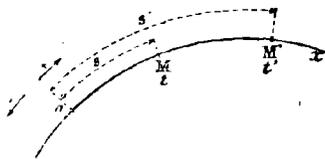


Fig. 5.

Considérons, sur la même trajectoire, un mobile μ , animé d'un mouvement uniforme, qui passe en M et M' aux instants t et t' . Le rapport $\frac{s' - s}{t' - t}$ représente la vitesse de ce second mobile (8). Par conséquent, la *vitesse moyenne d'un mouvement varié entre deux époques données est égale à la vitesse d'un mouvement uniforme qui ferait parcourir au mobile le même espace pendant le même temps.*

On peut donc appliquer à la vitesse moyenne la convention de signe faite au paragraphe 10; elle sera regardée comme positive dans le mouvement direct, et comme négative dans le mouvement rétrograde.

15. **Vitesse du mobile à un instant donné.** — Entre deux instants t et $t + \Delta t$, le mobile parcourt l'arc $MM' = \Delta s$ de sa trajectoire (fig. 3). La vitesse moyenne du mouvement pendant le temps Δt est $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ et sa valeur dépend à la fois de t et de Δt .

Quand Δt tend vers zéro, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ a généralement une limite, que l'on appelle la *vitesse du mobile à l'instant t* , et qui est la dérivée de s par rapport à t . En la désignant par v , on a $v = \frac{ds}{dt}$. Si donc on connaît l'équation des espaces du mouvement, $s = f(t)$, on obtient l'expression de la vitesse, à chaque instant, en calculant la dérivée $v = f'(t)$ de la fonction $f(t)$. Cette relation entre la vitesse et le temps s'appelle la loi ou l'équation des vitesses (**).

$$\text{De } v = \frac{ds}{dt}, \quad \text{on tire} \quad ds = v dt$$

L'espace infiniment petit parcouru par un mobile pendant le temps dt succédant à l'instant t est donc toujours exprimé par le produit $v dt$, quelle que soit la nature du mouvement.

Enfin, la vitesse à l'instant t , comme la vitesse moyenne dont elle est la limite, est regardée comme positive dans le mouvement direct, et comme négative dans le mouvement rétrograde.

(*) Cela suppose que le mouvement ne change pas de sens entre les instants t et t'

(**) La loi des vitesses du mouvement uniforme est $v = \text{Constante}$.

16. Application. — Considérons, par exemple, le mouvement varié dont l'équation des espaces est

$$s = 2 + 5t + 4t^2$$

l'unité de longueur étant le centimètre. Calculons : 1° la vitesse moyenne entre la première et la troisième seconde ; 2° la vitesse à la fin de la troisième seconde.

1° En donnant à t successivement les valeurs 1 et 3, on trouve pour s les valeurs 11 et 53.

La vitesse moyenne entre la première et la troisième seconde est donc $\frac{53 - 11}{3 - 1} = 21$, ce qui signifie que, pendant cet intervalle de temps, le mobile parcourt en moyenne 21 centimètres par seconde.

2° La dérivée de s par rapport à t est

$$\frac{ds}{dt} = v = 5 + 8t$$

D'après ce qui précède, elle donne l'expression de la vitesse à l'instant t . En faisant $t = 3$, on a $v = 29$

Si le mouvement, à partir de cet instant, devenait uniforme, le mobile parcourrait 29 centimètres pendant chaque seconde succédant à la troisième.

17. Représentation géométrique de la vitesse. — L'expression $v = \frac{ds}{dt}$

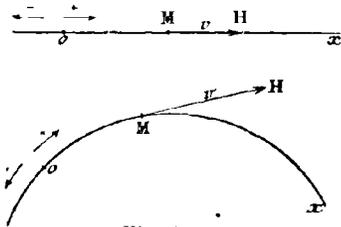


Fig. 7.

conduit à représenter la vitesse par un vecteur MH orienté comme ds , c'est-à-dire tangent à la trajectoire, et dirigé du côté des espaces positifs quand $v > 0$ (mouvement direct), du côté des espaces négatifs quand $v < 0$ (Mouvement rétrograde). La longueur de ce vecteur est proportionnelle à la valeur numérique de la vitesse.

18. Problème. — *Connaissant l'équation des vitesses d'un mouvement, remonter à l'équation des espaces.*

Soit $v = f(t)$ l'équation des vitesses d'un mouvement; on peut écrire

$$\frac{ds}{dt} = f(t) \quad \text{d'où} \quad ds = f(t) dt$$

La recherche de l'équation des espaces, quand on connaît celle des vitesses, revient donc à la détermination d'une fonction dont on connaît la différentielle, c'est-à-dire à une intégration. En intégrant les deux membres entre les limites correspondantes s_0 et s pour l'espace, 0 et t pour le temps, on a

$$s - s_0 = \int_0^t f(t) dt$$

ou

$$s = s_0 + \int_0^t f(t) dt$$

On voit que, pour former cette expression générale de l'équation des espaces, il est indispensable de connaître l'espace initial s_0 .

19. Applications. — 1. Soit proposé de trouver l'équation des espaces du mouvement dans lequel la vitesse est constamment égale à -2 , le mobile étant à une distance $+3$ de l'origine des espaces à l'instant initial (l'unité est le centimètre).

On a, dans ce cas, $s_0 = +3$ et $\frac{ds}{dt} = -2$

En intégrant membre à membre entre les limites 3 et s pour l'espace, 0 et t pour le temps, il vient

$$\int_3^s ds = \int_0^t -2 dt$$

ou $s - 3 = -2t$
 $s = 3 - 2t$

Le mouvement est *uniforme et rétrograde*.

II. Supposons que l'équation des vitesses soit de la forme

$$v = v_0 + \varphi t$$

v_0 et φ désignant des quantités indépendantes du temps. On peut écrire

$$v ds = (v_0 + \varphi t) dt$$

En intégrant membre à membre entre les limites correspondantes s_0 et s , 0 et t , on a

$$s - s_0 = \int_0^t (v_0 + \varphi t) dt$$

ou $s = s_0 + \int_0^t v_0 dt + \int_0^t \varphi t dt$
 $= s_0 + v_0 \int_0^t dt + \varphi \int_0^t t dt$
 $= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \varphi t^2$

20. Mouvement varié accéléré ou retardé. — On dit qu'un mouvement varié est *accéléré* ou *retardé* selon que la valeur absolue de la vitesse augmente ou diminue quand le temps croît. Nous indiquerons plus loin (38) le moyen de reconnaître, à ce point de vue, la nature d'un mouvement varié.

§ III. — Mouvement uniformément varié.

21. Définition. — On dit qu'un point est animé d'un mouvement uniformément varié quand sa vitesse augmente ou diminue de quantités égales dans des temps égaux, quelque petits que soient ces temps.

D'après cette définition, les variations de la vitesse sont proportionnelles aux temps pendant lesquels elles se produisent. Par suite, le rapport de l'accroissement algébrique de la vitesse à l'accroissement correspondant du temps reste constant dans le mouvement uniformément varié. Ce rapport, que nous représenterons par φ , s'appelle l'*accélération tangentielle* du mouvement.

Soient v la vitesse à l'instant t , et Δv sa variation pendant le temps Δt succédant à cet instant. D'après ce qui précède,

$$\varphi = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Si l'on suppose, $\Delta t = 1$ seconde, $\varphi = \Delta v$. L'accélération tangentielle, dans le mouvement uniformément varié, est donc mesurée par la variation de la vitesse du mobile pendant l'unité de temps. On l'exprime avec la même unité que v , et l'on dit, par exemple, une accélération de 9 m. 81 par seconde.

Enfin, si l'on fait tendre Δt vers zéro, le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, sans cesser d'être égal à l'accélération φ , a pour limite la dérivée de v par rapport à t . Puisque la vitesse est elle-même la dérivée de l'espace, on a $\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$. L'accélération tangentielle, dans le mouvement uniformément varié, est donc la dérivée première de la vitesse, et la dérivée seconde de l'espace par rapport au temps. Nous verrons bientôt (37) que ces relations entre φ , v et s sont vraies quelle que soit la nature du mouvement varié. Il n'en est pas de même des autres propriétés de l'accélération tangentielle dans le mouvement uniformément varié.

22. Equation des vitesses dans le mouvement uniformément varié. — Soient v_0 la vitesse du mobile à l'origine des temps (*vitesse initiale*), et v sa vitesse à l'instant t . La variation de la vitesse entre l'instant initial et l'instant t étant toujours représentée, en grandeur et en signe, par $v - v_0$, on a, d'après la définition de l'accélération tangentielle

$$\varphi = \frac{v - v_0}{t}$$

d'où

$$v = v_0 + \varphi t \tag{1}$$

Cette expression algébrique de v en fonction de t est l'équation des vitesses du mouvement uniformément varié. Il faut remarquer qu'elle est du premier degré en v et en t .

Réciproquement, quand l'équation des vitesses d'un mouvement est du premier degré en v et en t , le mouvement est uniformément varié.

Soit
$$v = a + bt \tag{2}$$

une telle relation, dans laquelle a et b sont des constantes. En faisant $t = 0$, on a $v = a$; $v - a$ est donc la variation de la vitesse entre l'instant initial et l'instant t . On tire de (2)

$$\frac{v - a}{t} = b$$

Puisque le rapport de la variation de la vitesse à la variation correspondante du temps reste constant quel que soit t , le mouvement est uniformément varié.

23. Remarque. — La loi des vitesses $v = v_0 + \varphi t$ est absolument générale si l'on considère v , v_0 , φ et t comme des quantités algébriques. Nous n'avons à indiquer ici que ce qui concerne le signe à attribuer à l'accélération tangentielle : Son expression $\varphi = \frac{dv}{dt}$ montre que, si l'on convient de donner au temps des accroissements positifs, elle est du signe de dv . Elle est donc positive ou négative suivant que la vitesse augmente ou diminue quand t croît.

24. Cas particulier. — Si la vitesse initiale du mobile est nulle, l'équation des vitesses se réduit à

$$v = \varphi t$$

Dans ce cas, la vitesse est proportionnelle au temps (et non la variation de vitesse, comme dans le cas général).

De plus, si $t = 1$ seconde, $v = \varphi$, c'est-à-dire que l'accélération tangentielle est mesurée par la vitesse acquise après la première seconde de marche.

25. Représentation géométrique de l'accélération tangentielle. — L'accélération tangentielle, comme la vitesse, peut être représentée par un vecteur tangent à la trajectoire. Nous venons de voir que le signe de φ est le même que celui de dv . Puisque dv est un élément de vitesse, les conventions de signe posées aux paragraphes 40 et 45 lui sont applicables. D'après cela, le vecteur représentatif d'une accélération sera dirigé du côté des espaces positifs, si elle est positive, et du côté des espaces négatifs, si elle est négative.

Observons que, tandis qu'une vitesse positive indique toujours un mouvement direct, une accélération tangentielle positive indique seulement une vitesse croissante, ce qui peut se présenter soit dans le mouvement direct, soit dans le mouvement rétrograde. Même observation pour une accélération tangentielle négative.

26. Mouvement uniformément accéléré ou retardé — L'accélération tangentielle étant la dérivée de la vitesse, celle-ci croît quand $\varphi > 0$, et décroît quand $\varphi < 0$. Supposons qu'à un instant t la vitesse et l'accélération tangentielle soient positives; la vitesse croît à partir d'une valeur positive et sa valeur absolue augmente avec t ; le mouvement est donc accéléré.

Si $v > 0$ et $\varphi < 0$, la vitesse décroît à partir d'une valeur positive et sa valeur absolue diminue; le mouvement est retardé.

Si $v < 0$ et $\varphi > 0$, la vitesse croît à partir d'une valeur négative; sa valeur absolue diminue et le mouvement est encore retardé.

Enfin, si $v < 0$ et $\varphi < 0$, la vitesse décroît à partir d'une valeur négative, sa valeur absolue augmente et le mouvement est accéléré.

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{l}
 v > 0 \left\{ \begin{array}{l} \varphi > 0 \text{ Mouvement accéléré (direct).} \\ \varphi < 0 \text{ Mouvement retardé (direct).} \end{array} \right. \\
 v < 0 \left\{ \begin{array}{l} \varphi > 0 \text{ Mouvement retardé (rétrograde).} \\ \varphi < 0 \text{ Mouvement accéléré (rétrograde).} \end{array} \right.
 \end{array}$$

On voit qu'un mouvement est accéléré ou retardé à un instant t suivant qu'à cet instant la vitesse et l'accélération tangentielle sont de même signe ou de signes contraires.

Soit, par exemple, $v = 2 - 3t$ l'équation des vitesses d'un mouvement uniformément varié; pour $t = \frac{2}{3}$, $v = 0$. Pour toute valeur de t inférieure à $\frac{2}{3}$, v prend une valeur positive; l'accélération tangentielle étant négative ($\varphi = \frac{dv}{dt} = -3$), le mouvement est uniformément retardé; il s'effectue, de plus, dans le sens direct. Pour toute valeur de t supérieure à $\frac{2}{3}$, $v < 0$ et le mouvement est uniformément accéléré dans le sens rétrograde. Ces résultats sont indiqués dans le tableau suivant :

t	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
v	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$\varphi = -3$		$-$		$-$	
Nature	Uniformément retardé			Uniformément accéléré	
du mouvement	direct		Repos	rétrograde	

On voit qu'une même loi de vitesses représente à la fois les deux genres de mouvements uniformément variés. En raisonnant sur l'équation générale $v = v_0 + \varphi t$, on est amené à considérer deux cas :

1° $\varphi > 0$. Depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = -\frac{v_0}{\varphi}$, la vitesse est négative (signe contraire de φ) et le mouvement est *uniformément retardé rétrograde*.

A l'instant $t = -\frac{v_0}{\varphi}$, $v = 0$ et le mobile s'arrête.

Depuis $t = -\frac{v_0}{\varphi}$ jusqu'à $t = +\infty$, la vitesse est positive (signe de φ) et le mouvement est *uniformément accéléré, direct*.

2° $\varphi < 0$. Depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = -\frac{v_0}{\varphi}$, la vitesse est positive (signe contraire de φ), et le mouvement est *uniformément retardé, direct*.

A l'instant $t = -\frac{v_0}{\varphi}$, $v = 0$ et le mobile s'arrête.

Depuis $t = -\frac{v_0}{\varphi}$ jusqu'à $t = +\infty$, la vitesse est négative (signe de φ), et le mouvement est *uniformément accéléré, rétrograde*.

Ces résultats sont indiqués dans les tableaux suivants :

	t	$-\infty$		$-\frac{v_0}{\varphi}$		$+\infty$
$\varphi > 0$	v	$-\infty$	-	0	+	$+\infty$
	φ		+		+	
	Nature du mouvement	Uniformément retardé rétrograde			Repos	Uniformément accéléré direct

	t	$-\infty$		$-\frac{v_0}{\varphi}$		$+\infty$
$\varphi < 0$	v	$+\infty$	+	0	-	$-\infty$
	φ		-		-	
	Nature du mouvement	Uniformément retardé direct			Repos	Uniformément accéléré rétrograde

27. Equation des espaces dans le mouvement uniformément varié. — De l'équation des vitesses $v = v_0 + \varphi t$, on tire

$$ds = (v_0 + \varphi t) dt$$

Il faut intégrer les deux membres de cette relation entre les limites correspondantes s_0 et s , 0 et t . Le calcul, fait précédemment (19. II) donne

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \varphi t^2$$

On voit que l'équation des espaces du mouvement uniformément varié est du second degré en t .

Réciproquement, si l'espace est exprimé par un trinôme du second degré en t , le mouvement est uniformément varié.

Soit $s = a + bt + ct^2$
la loi donnée, dans laquelle a, b, c sont des constantes. L'équation des vitesses du mouvement est

$$v = \frac{ds}{dt} = b + 2ct$$

On sait qu'une telle loi caractérise un mouvement uniformément varié, accéléré ou retardé selon que t est supérieur ou inférieur à $-\frac{b}{2c}$.

28. Cas particuliers. — 1^o Si la vitesse initiale est nulle, l'équation des espaces se réduit à

$$s = s_0 + \frac{1}{2} \varphi t^2$$

L'espace parcouru entre l'instant initial et l'instant t est $s - s_0 = \frac{1}{2} \varphi t^2$. On voit qu'il est proportionnel au carré du temps.

Si l'on fait $t = 1$ seconde, on a $s - s_0 = \frac{1}{2} \varphi$. Par conséquent lorsque la vitesse initiale est nulle, l'accélération tangentielle est égale au double de l'espace parcouru pendant la première seconde de marche.

2^o Si l'on suppose à la fois $v_0 = 0$ et $s_0 = 0$, c'est-à-dire si, à l'origine des temps, le mobile part de l'origine des espaces, sans vitesse initiale, l'équation des espaces prend la forme

$$s = \frac{1}{2} \varphi t^2$$

Dans ce cas et dans le précédent, l'équation des vitesses est $v = \varphi t$.

29. De quelques propriétés du mouvement uniformément varié.

I. *Vitesse moyenne du mobile entre deux époques t_1 et t_2 .* ($t_1 < t_2$). La loi des espaces $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \varphi t^2$ donne, en y remplaçant t successivement par t_1 et t_2

$$s_1 = s_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} \varphi t_1^2$$

$$s_2 = s_0 + v_0 t_2 + \frac{1}{2} \varphi t_2^2$$

La vitesse moyenne pendant l'intervalle de temps $t_2 - t_1$ est.

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_0 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \varphi (t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1}$$

ou

$$v_m = v_0 + \frac{1}{2} \varphi (t_1 + t_2) \tag{1}$$

D'autre part, l'équation des vitesses $v = v_0 + \varphi t$ montre que le second membre de l'expression (1) est la vitesse du mouvement à l'instant $\frac{t_1 + t_2}{2}$. Donc, la vitesse moyenne d'un mouvement uniformément varié entre deux époques données est égale à la vitesse réelle à l'instant milieu.

II. Les vitesses du mobile aux époques t_1 et t_2 sont respectivement

$$v_1 = v_0 + \varphi t_1$$

$$v_2 = v_0 + \varphi t_2$$

d'où
$$v_1 + v_2 = 2v_0 + \varphi (t_1 + t_2)$$

En comparant à l'expression (1), on voit que $v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}$. Par conséquent, la vitesse moyenne d'un mouvement uniformément varié, dans un intervalle de temps donné, est égale à la moyenne arithmétique des vitesses au commencement et à la fin de cet intervalle.

III. Relation entre la vitesse et l'espace. On obtient cette relation en éliminant t entre les deux équations

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \varphi t^2$$

$$v = v_0 + \varphi t$$

La seconde donne, après élévation au carré

$$v^2 - v_0^2 = 2 v_0 \varphi t + \varphi^2 t^2 = 2 \varphi (v_0 t + \frac{1}{2} \varphi t^2)$$

d'où
$$v_0 t + \frac{1}{2} \varphi t^2 = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \varphi}$$

et, en portant dans la première,
$$s = s_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2 \varphi}$$

ce que l'on peut écrire
$$\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = \varphi (s - s_0)$$

Donc :

La demi-variation du carré de la vitesse entre l'instant initial et un instant quelconque est égale au produit de l'accélération par le chemin parcouru. Cette relation constitue un cas particulier du très important théorème des Forces vives, que l'on retrouvera en Dynamique. Elle permet d'évaluer la vitesse en fonction de l'espace parcouru. On en tire en effet

$$v^2 = v_0^2 + 2 \varphi (s - s_0)$$

Dans le cas particulier où $v_0 = 0$ et $s_0 = 0$, cette formule se réduit à

$$v^2 = 2 \varphi s$$

La vitesse est, dans cette hypothèse, moyenne proportionnelle entre l'espace parcouru et le double de l'accélération.

§ IV. — Chute des corps.

30. Lois dans le cas de la chute libre. — On démontre en Physique que les corps pesants tombant en chute libre, sans vitesse initiale, possèdent un mouvement uniformément accéléré. On désigne habituellement par la lettre g l'accélération due

à la pesanteur. Cette quantité, qui varie avec la latitude et l'altitude du lieu, est constante en un même lieu, et vaut approximativement, à Paris, 9 m. 81.

Si l'on prend comme origine des espaces le point de départ du mobile, comme instant initial celui du début de la chute, et comme sens positif des espaces le sens de la verticale descendante (fig. 8), l'accélération terrestre doit être considérée comme positive, et les lois générales du mouvement uniformément varié se réduisent à

$$v = gt \quad h = \frac{1}{2} gt^2$$

h désignant la hauteur de chute. L'élimination de t , entre ces deux relations, donne

$$v = \sqrt{2gh}$$

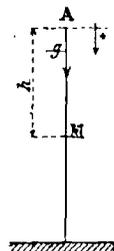


Fig. 8.

31. Théorème. — *Quand un corps tombe en chute libre, les espaces parcourus pendant les secondes successives sont entre eux comme la suite naturelle des nombres impairs.*

L'espace e parcouru pendant la seconde qui suit l'instant t s'obtient en retranchant les deux valeurs de h qui correspondent aux époques t et $t + 1$. Ces valeurs sont

$$h = \frac{1}{2} gt^2 \quad h_1 = \frac{1}{2} g (t + 1)^2$$

d'où

$$e = h_1 - h = \frac{1}{2} g (2t + 1)$$

Si l'on donne à t les valeurs successives 0, 1, 2, 3..., les différentes valeurs de e représentent les espaces parcourus pendant les secondes successives ; ce sont

$$\frac{1}{2} g \times 1, \quad \frac{1}{2} g \times 3, \quad \frac{1}{2} g \times 5 \dots$$

ce qui établit le théorème.

32. Problème. — *Un mobile tombe, sans vitesse initiale, sous l'action de la pesanteur. Au bout d'un temps très court ε , on abandonne du même point un second mobile, sans vitesse initiale. On demande la distance qui sépare les deux mobiles : 1° à un instant quelconque ; 2° quand le premier touche le sol.*

1° Les distances verticales h_1 et h_2 parcourues par les deux mobiles à un instant quelconque t ($t > \varepsilon$) sont

$$h_1 = \frac{1}{2} gt^2$$

$$h_2 = \frac{1}{2} g (t - \varepsilon)^2$$

La distance d qui les sépare à cet instant est donc

$$d = \frac{1}{2} g [t^2 - (t - \varepsilon)^2] = \frac{1}{2} g \varepsilon (2t - \varepsilon) \quad (*)$$

2° Soit H la hauteur du point de départ au-dessus du sol. Le temps employé par le premier mobile pour arriver à terre est donné par l'équation $H = \frac{1}{2} gt^2$, d'où l'on tire

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

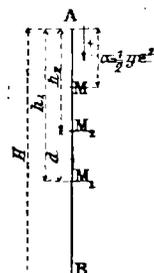


Fig. 9.

(*) Si le temps ε est extrêmement faible par rapport à t , on a sensiblement $d = g t \varepsilon$. Dans ce cas, la distance des deux mobiles varie à peu près proportionnellement au temps.

Pour obtenir la distance D des deux mobiles au moment où le premier touche le sol, il suffit de remplacer t par cette valeur dans l'expression de d . On trouve

$$D = \frac{1}{2} g \varepsilon \left(2 \sqrt{\frac{2H}{g}} - \varepsilon \right)$$

On peut simplifier cette formule par l'introduction de l'espace $AM = \alpha = \frac{1}{2} g \varepsilon^2$ déjà parcouru par le premier mobile à l'instant où l'on abandonne le second. On a

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\alpha}{g}}$$

et par suite

$$D = \frac{1}{2} g \sqrt{\frac{2\alpha}{g}} \left(2 \sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2\alpha}{g}} \right)$$

$$= 2 \sqrt{H\alpha} - \alpha$$

Si, par exemple, on lâche le second mobile quand le premier a déjà parcouru $\frac{1}{100}$ de millimètre, le point de départ étant situé à 40 mètres au-dessus du sol, on a, en prenant le mètre pour unité de longueur

$$D = 2 \sqrt{\frac{40}{10^2}} - \frac{1}{10^2} = \frac{2 \times 2}{10^2} - \frac{1}{10^2} = 0^m,04 \text{ environ.}$$

La distance des deux points, d'abord négligeable, est donc devenue très appréciable. Cela explique pourquoi, dans un jet d'eau, des gouttelettes qui partent du même point sensiblement en même temps, retombent dans le bassin nettement séparées les unes des autres.

33. Lois de la chute des corps dans le cas d'une vitesse initiale dirigée vers le bas. — Le mouvement est encore uniformément accéléré. Prenons l'origine des espaces, l'origine des temps et le sens positif des espaces comme dans le cas particulier déjà étudié (30). La vitesse initiale v_0 , dirigée vers le bas, doit être regardée comme positive ainsi que l'accélération g . Les lois générales du mouvement uniformément varié deviennent donc

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = v_0 + g t$$

L'élimination de t entre ces deux équations donne l'expression de la vitesse en fonction de la hauteur de chute

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

34. Mouvement d'un corps pesant lancé de bas en haut. — Un corps pesant, lancé de bas en haut avec une vitesse initiale v_0 , prend d'abord un mouvement uniformément retardé ; au bout d'un certain temps, il s'arrête, puis descend d'un mouvement uniformément accéléré, sans vitesse initiale. Nous nous proposons d'étudier ce double mouvement,

1° *Lois du mouvement ascendant.* Prenons comme origine des espaces le point de départ A du mobile, comme sens positif celui de la verticale ascendante, et pour origine des temps l'instant du départ. Dans les lois générales du mouvement uniformément varié, il faudra faire $s_0 = 0$. D'autre part, la vitesse initiale v_0 , dirigée vers le haut, est positive, et l'accélération g est négative. En appelant h le chemin parcouru pendant le temps t , on a donc

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

$$v = v_0 - g t \quad (2)$$

L'élimination de t entre ces deux équations donne l'expression de la vitesse v quand le mobile a atteint une hauteur h au-dessus de son point de départ

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \quad (3)$$

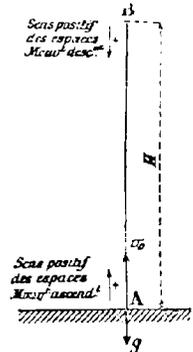


Fig. 10.

2° *Hauteur totale d'ascension.* Le mobile cesse de monter quand sa vitesse devient nulle. A ce moment, on a, d'après la formule (3)

$$h = \frac{v_0^2}{2g} (= H).$$

3° *Durée de l'ascension.* A la fin de la période d'ascension, on a, d'après la formule (2)

$$v_0 - g t = 0$$

$$t = \frac{v_0}{g} (= T).$$

4° *Durée de la chute.* Quand le mobile est parvenu en B au point culminant de sa course, il prend un mouvement descendant uniformément accéléré, sans vitesse initiale, dont les lois sont, en choisissant B comme nouvelle origine des espaces (les espaces positifs étant dirigés vers le bas) et l'instant où commence la descente comme nouvelle origine des temps.

$$h' = \frac{1}{2} g t'^2 \quad (4)$$

$$v = g t' \quad (5)$$

$$v = \sqrt{2gh'} \quad (6)$$

Pour que le mobile revienne à son point de départ, il faut que $h' = H$. On a à cet instant, d'après l'équation (4)

$$\frac{1}{2} g t'^2 = H = \frac{v_0^2}{2g}$$

d'où
$$t = \frac{v_0}{g}$$

On voit que la durée de la chute est égale à celle de l'ascension.

5° *Vitesse à la fin de la chute.* La vitesse finale est, d'après l'équation (5)

$$v = gt - g \times \frac{v_0}{g} = v_0.$$

Elle est dirigée vers le bas. Donc le mobile revient à son point de départ avec une vitesse égale à sa vitesse initiale, mais dirigée en sens contraire.

On peut se demander pourquoi l'on ne trouve pas $-v_0$ pour expression de la vitesse finale. Cela tient à ce que le sens positif des espaces et des vitesses n'est pas le même dans le mouvement ascendant que dans le mouvement de chute.

6° *Vitesse d'ascension en un point quelconque, et vitesse de descente au même point.* Soit M un point quelconque de la verticale AB, situé à une distance h_1 du niveau du sol. Quand le mobile passe en M en montant, sa vitesse v_1 , donnée par l'équation (3), est

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh_1}$$

Quand il repasse en M, il a parcouru, dans le mouvement de descente, un espace

$$H - h_1 = \frac{v_0^2}{2g} - h_1.$$

Sa vitesse v'_1 , donnée par l'équation (6), est

$$v'_1 = \sqrt{2g(H - h_1)} = \sqrt{v_0^2 - 2gh_1}$$

Donc $v'_1 = v_1$. Dans son double mouvement d'ascension et de descente, le mobile reprend la même vitesse quand il repasse au même point.

Il emploie aussi le même temps pour parcourir le même espace, soit en montant, soit en descendant. Le temps nécessaire pour aller de M en B à la montée est

$$T - t_1 = \frac{v_0}{g} - \frac{v_0 - v_1}{g} = \frac{v_1}{g}$$

en désignant par t_1 le temps, donné par la formule (2), nécessaire au mobile pour monter jusqu'en M. Le temps nécessaire pour parcourir ce même espace à la descente est, d'après l'équation (5)

$$t_1 = \frac{v_1}{g} = \frac{v_1}{g}$$

On voit que

$$T - t_1 = t_1$$

Remarque. — Les formes algébriques des lois du mouvement de chute diffèrent de celles du mouvement d'ascension à cause du changement des origines qui a été effectué. En conservant dans la chute les mêmes origines que pour l'ascension, les formules (1) (2) et (3) conviennent aux deux périodes du mouvement. Si, par exemple, on donne à t dans la formule (1) la valeur $T + t'$, t' ayant la même signification que dans les formules (4) (5) et (6), on a

$$h = v_0(T + t') - \frac{1}{2}g(T + t')^2$$

ou, en remplaçant T par sa valeur $\frac{v_0}{g}$

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{2}gt^2 = H - h'$$

ce qui montre que la formule (1) contient la formule (4). De même, si l'on fait la substitution dans (2)

$$v = v_0 - g(T + t) = -gt' = -v'$$

La formule (2) contient donc aussi la formule (5).

35. Problème. — *Un corps pesant est lancé de bas en haut avec une vitesse initiale v_0 . A quel instant se trouve-t-il à une hauteur h au-dessus du sol ?*

Application : $v_0 = 30^m$, $h = 20^m$, $g = 9^m,81$.

La valeur de t qui répond à la question satisfait à l'équation des espaces du mouvement uniformément retardé pris par le mobile :

$$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

On en tire

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} \quad (4)$$

Le problème n'est possible que si

$$v_0^2 - 2gh \geq 0$$

ou

$$h \leq \frac{v_0^2}{2g}$$

Ce résultat pouvait être prévu, $\frac{v_0^2}{2g}$ représentant la hauteur d'ascension due à la vitesse v_0 .

Si $h < \frac{v_0^2}{2g}$, la formule (4) donne deux valeurs distinctes et positives de t . La plus petite

$$t' = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

est moindre que $\frac{v_0}{g}$ (durée de l'ascension) ; elle donne l'instant du passage à la hauteur h , pendant la montée. La plus grande,

$$t'' = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

supérieure à $\frac{v_0}{g}$, donne l'instant du passage au même niveau pendant la descente. On vient de voir, en effet, que l'équation $h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ convient aux deux périodes du mouvement.

Si l'on fait $v_0 = 30^m$ $h = 20^m$ et $g = 9^m,81$, on a

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 19,62 \times 20}}{9,81}$$

$$= \frac{30 \pm 22,52}{9,81}$$

Par conséquent $t' = 0^s,76$
 $t'' = 5^s,35$

§ V. — Accélération tangentielle dans le mouvement varié quelconque.

36. Lorsque le mouvement n'est ni uniforme, ni uniformément varié, la vitesse n'est ni constante, ni représentée par une fonction linéaire du temps. Son expression $v = f(t)$ est plus ou moins compliquée selon la nature du mouvement varié.

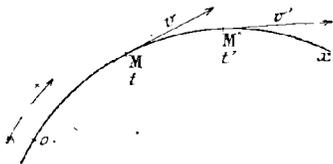


Fig. 12

Soient v et v' les vitesses du mobile aux instants t et t' . Le rapport $\frac{v' - v}{t' - t}$, dont la valeur dépend à la fois de t et de t' , mesure la variation moyenne de la vitesse pendant une seconde, dans l'intervalle $t' - t$. Par analogie avec ce que l'on a vu dans le mouvement uniformément varié, ce rapport est appelé l'accélération tangentielle moyenne du mouvement pendant le temps $t' - t$.

On peut imaginer qu'un second mobile, animé d'un mouvement uniformément varié, passe aux points M et M' aux instants t et t' , avec les vitesses v et v' . Le rapport $\frac{v' - v}{t' - t}$ est l'accélération de ce nouveau mouvement (21). On peut donc dire que l'accélération tangentielle moyenne d'un point en état de mouvement varié quelconque est égale à l'accélération tangentielle du mouvement uniformément varié que devrait avoir le mobile pour parcourir le même espace pendant le même temps.

37. Accélération tangentielle à un instant donné. — Soit v la vitesse du mouvement à un instant quelconque t . Si l'on donne à t un accroissement Δt , auquel correspond un accroissement Δv de la vitesse, l'accélération tangentielle moyenne du mouvement pendant le temps Δt est $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. Quand Δt tend vers zéro, ce rapport a en général une limite, que l'on appelle l'accélération tangentielle du mobile à l'instant t , et qui est la dérivée de la vitesse par rapport au temps. En la désignant par φ , on a $\varphi = \frac{dv}{dt}$.

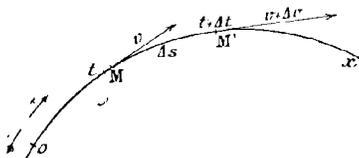


Fig. 13.

Comme, d'autre part, $v = \frac{ds}{dt}$ on a aussi $\varphi = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Dans un mouvement varié quelconque, l'accélération tangentielle est donc égale, à chaque instant, à la dérivée première de la vitesse, et à la dérivée seconde de l'espace par rapport au temps.

Nous avons déjà établi ces propriétés pour le mouvement uniformément varié (21).

Si la loi des espaces est $s = f(t)$, l'accélération tangentielle est donnée par l'expression $\varphi = f''(t)$, que l'on appelle *loi ou équation des accélérations*.

On peut représenter l'accélération tangentielle par un vecteur tangent à la trajectoire. Il n'y a rien à changer à ce qui a été dit, sur ce sujet, dans le cas du mouvement uniformément varié (25).

38. Mouvement varié accéléré ou retardé. — Le raisonnement fait au paragraphe 26 est applicable sans modifications ; par suite : *un mouvement varié quelconque est accéléré ou retardé à un instant t suivant qu'à cet instant la vitesse et l'accélération tangentielle sont de même signe ou de signes contraires.*

39. Problème. — *Connaissant l'équation des accélérations tangentielles d'un mouvement, remonter à l'équation des vitesses.*

Soit $\varphi = f(t)$ l'équation des accélérations tangentielles d'un mouvement. On peut écrire

$$\frac{dv}{dt} = f(t) \quad \text{ou} \quad dv = f(t) dt.$$

En raisonnant comme au paragraphe 18, on est conduit à intégrer les deux membres de cette relation entre les limites correspondantes v_0 et v pour la vitesse, 0 et t pour le temps, ce qui donne

$$v - v_0 = \int_0^t f(t) dt \quad \text{ou} \quad v = v_0 + \int_0^t f(t) dt.$$

On voit que, pour former l'expression générale de v , la connaissance de la relation $\varphi = f(t)$ est insuffisante ; il est indispensable de connaître en outre la vitesse initiale v_0 . Si l'espace initial s_0 est aussi donné, on pourra former la loi des espaces par une nouvelle intégration (18).

Si, par exemple, $\varphi = a$, a étant une constante, on aura successivement

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \int_0^t a dt = v_0 + at. \\ s &= s_0 + \int_0^t (v_0 + at) dt. \\ &= s_0 + \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt. \\ &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{aligned}$$

ce qui montre que tout mouvement dans lequel l'accélération tangentielle reste constante, est uniformément varié.

§ VI. — *Mouvement périodique.*

40. Soient

$$\begin{cases} s = f(t), \\ v = f'(t), \\ \varphi = f''(t). \end{cases}$$

les lois d'un mouvement. On dit que celui-ci est *périodique* si l'on peut trouver un accroissement θ du temps, tel que les valeurs de s , v et φ ne changent pas quand on

remplace t par $t + \theta$, $t + 2\theta$... $t + k\theta$, quelle que soit la valeur attribuée à t . La plus petite valeur de θ satisfaisant à cette condition s'appelle la *période* du mouvement. Ainsi le mouvement dont les lois sont

$$s = \sin t \quad v = \cos t \quad \varphi = -\sin t$$

est périodique, et sa période est 2π . On a en effet, quel que soit t

$$s = \sin t = \sin(t + 2k\pi)$$

$$v = \cos t = \cos(t + 2k\pi)$$

$$\varphi = -\sin t = -\sin(t + 2k\pi)$$

D'après la définition précédente, les lois d'un mouvement périodique sont des fonctions périodiques de t . Si cette périodicité a été constatée pour la relation $s = f(t)$, on peut affirmer qu'elle a lieu pour les deux autres. En effet, si l'on a

$$s = f(t) = f(t + k\theta)$$

quel que soit t , on a aussi, en appliquant le théorème des fonctions de fonctions :

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t) = f'(t + k\theta) \quad (1)$$

et
$$\varphi = \frac{dv}{dt} = f''(t) = f''(t + k\theta) \quad (2)$$

Il résulte de là que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un mouvement soit périodique est que son équation des espaces soit une fonction périodique de t .

Les principaux mouvements périodiques sont ceux dans lesquels les lois sont exprimées au moyen de fonctions trigonométriques du temps. L'un des plus importants, que l'on rencontre en physique dans l'étude de la propagation du son, de la lumière, etc... est le mouvement *harmonique*, dont la loi des espaces est de la forme

$$s = a \sin(bt + c)$$

a , b , c étant des constantes. Pour calculer la période θ de ce mouvement, nous poserons

$$a \sin(bt + c) = a \sin[b(t + \theta) + c]$$

Cette égalité, qui doit avoir lieu quel que soit t , donne

$$bt + c + 2k\pi = b(t + \theta) + c$$

d'où
$$\theta = \frac{2k\pi}{b}$$

La plus petite valeur de θ , qui est la période cherchée, est $\frac{2\pi}{b}$.

Le mouvement étudié au paragraphe 43 est harmonique. La méthode suivie s'applique sans modification au cas général.

§ VII. — *Mouvement périodiquement uniforme.*

41. On vient de voir que, si l'équation des espaces d'un mouvement est une fonction périodique de t , il en est de même pour la loi des vitesses et celle des accélérations. La réciproque n'est pas vraie, et la périodicité de la loi des vitesses, par exemple, n'entraîne pas nécessairement celle de la loi des espaces (*).

(*) Si la loi des vitesses est une fonction périodique du temps, la loi des accélérations en est une aussi. Se reporter aux égalités 1 et 2 du paragraphe 40.

Considérons une équation des vitesses telle que $v = a \cos t + b$, dans laquelle a et b sont des constantes. C'est une fonction périodique de t , dont la période est 2π . On en tire (18)

$$s = s_0 + \int_0^t (a \cos t + b) dt = s_0 + \int_0^t a \cos t dt + \int_0^t b dt$$

$$= s_0 + a \sin t + bt$$

fonction non périodique de t , à cause du terme linéaire bt .

On dit qu'un mouvement est *périodiquement uniforme* lorsque, n'étant pas périodique, sa vitesse reprend les mêmes valeurs après des intervalles de temps égaux. Le mouvement de progression d'une locomotive est de cette nature ; la vitesse reprend en effet, après chaque tour de roue, la valeur qu'elle avait auparavant, et comme l'espace parcouru va toujours en croissant, le mouvement n'est pas périodique.

On trouvera au paragraphe 44 un exemple de discussion d'un mouvement périodiquement uniforme.

§ VIII. — Étude analytique d'un mouvement.

42. **Marche à suivre.** — 1° On forme, s'il est possible, l'équation des espaces, celle des vitesses, et celle des accélérations tangentielles du mouvement.

2° On cherche, s'il y a lieu, entre quelles limites il suffit de faire varier le temps pour obtenir toutes les particularités du mouvement. Cette recherche est toujours possible quand s , v et φ sont exprimées par des fonctions circulaires du temps.

3° On détermine les valeurs de t pour lesquelles le mobile passe à l'origine des espaces, et celles pour lesquelles v ou φ s'annulent ou deviennent infinies.

4° On range les valeurs de t fournies par les paragraphes 2 et 3 dans l'ordre de grandeur croissante, et, dans chacun des intervalles ainsi formés, on étudie les signes de φ , de v et de s . Le signe de φ fait connaître si la vitesse est croissante ou décroissante ; celui de v indique si le mouvement est direct ou rétrograde ; celui de s indique de quel côté se trouve le mobile par rapport à l'origine des espaces. La comparaison des signes de l'accélération et de la vitesse fait connaître en outre si le mouvement est accéléré ou retardé.

Nous allons appliquer ces indications à quelques exemples.

43. **Problème.** — Un point matériel M parcourt une circonférence O , d'un mouvement uniforme dont la vitesse est a , en partant de la position M_0 à l'origine des temps. On demande d'étudier le mouvement de sa projection m sur le diamètre $M_0 M_1$.

Le point m part de la position M_0 à l'origine des temps. En prenant M_0 comme origine des espaces, et la direction $M_0 M_1$ comme direction positive, on tire immédiatement de la figure

$$M_0 m = s = r (1 - \cos \alpha)$$

En désignant par ω la vitesse angulaire du mouvement

on a (12 bis)
$$\alpha = \frac{at}{r} = \omega t$$

et par suite
$$s = r (1 - \cos \omega t) \quad (1)$$

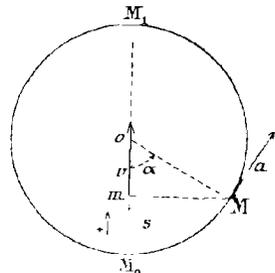


Fig. 14.

C'est l'équation des espaces du mouvement du point m . On en déduit la loi des vitesses et celle des accélérations tangentielles par deux dérivations successives

$$v = \omega r \sin \omega t \tag{2}$$

$$\varphi = \omega^2 r \cos \omega t \tag{3}$$

Le mouvement du point m est évidemment périodique ; pour en avoir toutes les particularités, il suffit de faire varier t entre les limites 0 et $\theta = \frac{2\pi}{\omega}$ (période du mouvement) qui correspondent au commencement et à la fin d'une révolution du point M . Les valeurs remarquables de t entre ces limites sont celles pour lesquelles $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$ prennent les valeurs 0 , $+1$ et -1 .

Quand t croît de 0 à $\frac{\pi}{2\omega}$, ωt croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$; l'accélération tangentielle passe de la valeur $\omega^2 r$ à la valeur 0 en restant positive ; la vitesse croît par valeurs positives depuis 0 jusqu'à a ; s croît de 0 à r et le point m se déplace de M_0 en O d'un mouvement *accélééré direct*.

Quand t croît de $\frac{\pi}{2\omega}$ à $\frac{\pi}{\omega}$, ωt croît de $\frac{\pi}{2}$ à π . L'accélération devient *négative*, et la vitesse décroît de a jusqu'à zéro, en restant positive ; s croît de r à $2r$, et le point m passe de O en M_1 d'un mouvement *retardé direct*.

Quand t croît de $\frac{\pi}{\omega}$ à $\frac{3\pi}{2\omega}$, ωt croît de π à $\frac{3\pi}{2}$. L'accélération demeure négative, et la vitesse décroît, par valeurs négatives, de 0 à $-a$; s décroît depuis $2r$ jusqu'à r . Le mouvement devient *rétrograde*, de M_1 en O ; il est *accélééré*.

Enfin, si t croît de $\frac{3\pi}{2\omega}$ à $\frac{2\pi}{\omega}$, ωt croît de $\frac{3\pi}{2}$ à 2π . L'accélération devient positive, la vitesse croît, par valeurs négatives, de $-a$ à 0 ; s décroît depuis r jusqu'à 0 . Le mouvement, qui s'effectue de O à M_0 , est *retardé rétrograde*.

Tous ces résultats sont indiqués dans le tableau suivant :

t	$\frac{at}{r} = \omega t$	φ	v	s	SENS NATURE	
					du mouvement	
0	0	$\omega^2 r$	0	0	Arrêt	Accélééré
$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{2}$	$+$	croît $+$	croît $+$	Direct	
$\frac{\pi}{\omega}$	π	0	$\omega r = a$	r	Direct	Retardé
$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-$	décroît $+$	croît $+$		
$\frac{2\pi}{\omega}$	2π	$-\omega^2 r$	0	$2r$	Arrêt	Accélééré
$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-$	décroît $-$	décroît $+$	Rétrograde	
$\frac{2\pi}{\omega}$	2π	0	$-a$	r	Rétrograde	Retardé
$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{3\pi}{2}$	$+$	croît $-$	décroît $+$		
0	0	$\omega^2 r$	0	0	Arrêt	

44. Problème. — Un point matériel M parcourt une circonférence O , d'un mouvement uniforme dont la vitesse est a , en partant de la position M_0 à l'origine des temps. Par chacune de ses positions, on trace un segment MP , parallèle à la tangente M_0x , égal à l'arc M_0M . On demande d'étudier le mouvement de la projection p du point P sur la tangente M_0x .

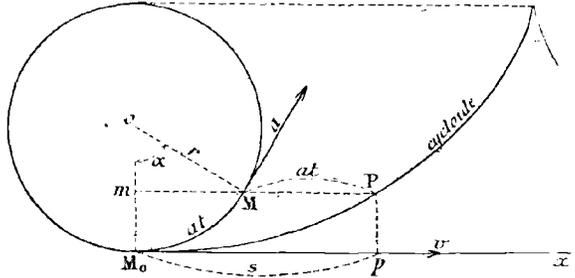


Fig. 15.

Le point p est en M_0 à l'instant initial; en prenant M_0 comme origine des espaces, et M_0x comme direction positive, on a (fig. 15).

$$M_0p = s = mM + MP = r \sin \alpha + M_0M.$$

Mais $\alpha = \omega t$ (43) et $M_0M = \omega r t$. Donc

$$s = r \sin \omega t + \omega r t \tag{1}$$

D'où $v = \omega r (\cos \omega t + 1)$ (2)

et $\varphi = -\omega^2 r \sin \omega t$ (3)

Les relations (1) (2) et (3) sont les lois du mouvement du point p . Les deux dernières seules étant des fonctions périodiques de t , le mouvement est périodiquement uniforme. L'expression de l'accélération tangentielle montre qu'elle est négative tant que l'arc ωt est terminé dans les deux premiers quadrants, et positive lorsqu'il est terminé dans les deux derniers. Celle de la vitesse montre qu'elle est nulle lorsque ωt est un multiple impair de π , et positive pour toutes les autres valeurs de t . Le tableau suivant résume la discussion du mouvement, quand t croît de 0 à $\frac{2\pi}{\omega}$.

t	ωt	φ	v	s	SENS NATURE	
					du mouvement	
0	0	0	$2\omega r = 2a$ décroit+	0 croît+	Direct	Uniforme Retardé
$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\omega^2 r$	$\omega r = a$ décroit+	$r\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$ croît+		
$\frac{\pi}{\omega}$	π	0	0	πr	Arrêt	Retardé
$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{3\pi}{2}$	$+\omega^2 r$	a croît+	$r\left(\frac{3\pi}{2} - 1\right)$ croît+	Direct	Accéléré
$\frac{2\pi}{\omega}$	2π	0	$2a$	$2\pi r$	Direct	Accéléré Uniforme

45. Soit à étudier le mouvement dont l'équation des espaces est

$$s = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 4 \tag{1}$$

pendant les 10 secondes qui suivent l'origine des temps. Les équations des vitesses et des accélérations tangentiellles de ce mouvement sont respectivement

$$v = 6t^2 - 42t + 60 \tag{2}$$

$$\varphi = 12t - 42 \tag{3}$$

L'accélération tangentielle s'annule

pour $t = \frac{42}{12} = 3,5$

Pour toute valeur de $t < 3,5$, φ est négative; elle est positive si $t > 3,5$.

La vitesse s'annule pour $t = 2$ et $t = 5$. Elle est positive pour toute valeur de t inférieure à 2 ou supérieure à 5, et négative si t est compris entre 2 et 5.

Les valeurs de t qui annulent s étant fournies par une équation du 3^e degré, nous

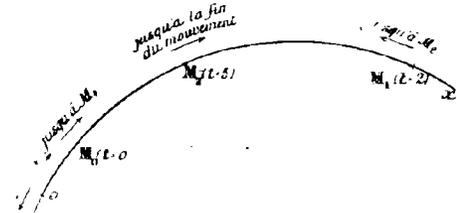


Fig. 16.

ne déterminerons pas les instants de passage du mobile à l'origine des espaces. La discussion du mouvement montre d'ailleurs qu'il n'en existe pas dans l'intervalle de temps considéré.

A l'instant initial, $s = 4$, $v = 60$ et $\varphi = -42$. Le mobile part de M_0 ($o M_0 = 4$) dans le sens *direct*, et son mouvement est *retardé*. Il en est ainsi jusqu'à la fin de la deuxième seconde.

Pour $t = 2$, $v = 0$ et le mobile s'arrête. Il est à ce moment, v au point M_1 , à une distance $s = 56$ de l'origine des espaces.

Depuis $t = 2$ jusqu'à $t = 3,5$, φ et v sont négatives. Le mouvement est donc *rétrograde* et *accélééré*. Le mobile se rapproche de l'origine des espaces.

Pour $t = 3,5$, $\varphi = 0$. Pendant un temps infiniment petit, le mouvement est donc *uniforme*.

Depuis $t = 3,5$ jusqu'à $t = 5$, l'accélération tangentielle est positive, et la vitesse négative. Le mouvement reste donc *rétrograde* mais devient *retardé*. Le mobile continue à se rapprocher de l'origine des espaces.

Pour $t = 5$, $v = 0$. Le mobile s'arrête pour la deuxième fois. Il se trouve en M_2 , à une distance $s = 29$ de l'origine des espaces.

Enfin, depuis $t = 5$ jusqu'à la fin du mouvement, φ et v sont positives. Le mouvement redevient *direct* et *accélééré*. Le mobile s'éloigne de l'origine des espaces. A l'instant final $t = 10$, il en est à une distance $s = 504$.

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant :

t	φ	v	s	SENS NATURE	
				du mouvement	
0	- 42	60	4	Direct	Retardé
2	- 18	0	56		
3.5	-	décroit -	décroit +	Rétrograde	Accélééré
	0	- 13.5	décroit +		
5	+ 18	0	29	Rétrograde	Retardé
	+ 78	croît +	croît +		
10	78	120	504	Direct	Accélééré

CHAPITRE II

ETUDE DU MOUVEMENT SUR LA TRAJECTOIRE

MÉTHODE GRAPHIQUE

§ I. — Courbes représentatives des lois du mouvement.

46. La connaissance de l'équation des espaces $s = f(t)$ permet de trouver, par le calcul, toutes les propriétés d'un mouvement donné. Nous allons étudier un mode de représentation de cette équation, grâce auquel on pourra obtenir les mêmes indications par des procédés purement graphiques.

47. **Courbe des espaces.** — Prenons deux axes de coordonnées rectangulaires ox et oy (fig. 17), puis adoptons deux longueurs arbitraires k et k' pour représenter respectivement l'unité de chemin parcouru et l'unité de temps. (Ces deux longueurs pourraient être égales, mais on est souvent conduit à les prendre différentes, dans le cas de mouvements très lents ou très rapides, pour éviter des dessins de dimensions anormales). Les instants successifs $t, t', t'' \dots$ de la durée sont représentés, sur ox , par une série de points $P, P', P'' \dots$ tels que les longueurs $oP, oP', oP'' \dots$ soient respectivement égales à $k't, k't', k't'' \dots$. En portant sur les ordonnées correspondantes des longueurs $ks, ks', ks'' \dots$, proportionnelles aux distances $s, s', s'' \dots$ qui, aux instants considérés, séparent le mobile de l'origine des espaces, on obtient une suite de points $m, m', m'' \dots$. La courbe qui les unit représente, en coordonnées rectangulaires, avec les échelles adoptées, l'équation $s = f(t)$. On l'appelle *courbe représentative de la loi des espaces* ou encore *diagramme du mouvement*. ox est l'axe des temps, oy l'axe des espaces. Le point o figure l'origine des temps ; l'espace initial s_0 est représenté par l'ordonnée à l'origine $oo' = ks_0$. Si $s_0 = 0$, le point o' se confond avec le point o . Par suite, si l'on prend pour origine des temps l'instant où le mobile passe à l'origine des espaces, la courbe des espaces passe par l'origine des coordonnées.

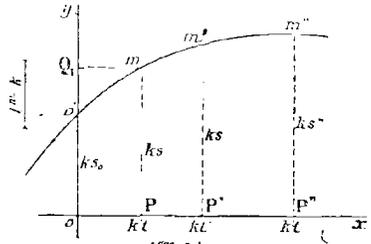


Fig. 17.

La loi graphique des espaces a, sur l'équation $s = f(t)$, l'avantage d'être expressive. Elle indique, suivant que les ordonnées sont croissantes ou décroissantes, si le mouvement est direct ou rétrograde. Elle permet de résoudre graphiquement ces deux problèmes, dont l'équation $s = f(t)$ donne la solution algébrique :

1° Si l'on veut connaître la position occupée par le mobile sur sa trajectoire à un instant quelconque t , on porte, dans le sens convenable, une longueur $oP = k't$ sur

l'axe des temps, et on mesure l'ordonnée correspondante mP . Celle-ci fait connaître en grandeur et en signe, en tenant compte de l'échelle adoptée, la distance $s = \frac{mP}{k}$ qui sépare à ce moment le point mobile de l'origine des espaces sur la trajectoire.

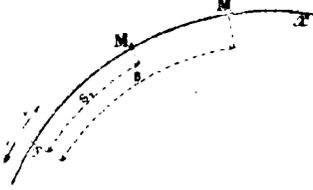


Fig. 18.

2° Si l'on veut savoir à quel instant le mobile occupe une position M_1 sur sa trajectoire, on porte sur oy , dans le sens convenable, une longueur $oQ_1 = ks_1$ représentant, à l'échelle choisie, l'espace $s_1 = oM_1$. On trace ensuite la parallèle Q_1m à l'axe des temps et l'on mesure l'abscisse oP du point m où elle rencontre la courbe des espaces. La valeur cherchée du temps est $t = \frac{oP}{k}$. En particulier, les points de rencontre de l'axe des temps et de la courbe font connaître les époques de passage du mobile à l'origine des espaces.

Nous verrons bientôt que la loi graphique des espaces est susceptible de remplacer complètement l'équation $s = f(t)$.

48. Courbes empiriques. — Il n'est pas nécessaire de connaître la relation $s = f(t)$ pour construire la courbe des espaces ; il suffit de déterminer expérimentalement ou graphiquement les valeurs de s qui correspondent à des valeurs de t assez voisines les unes des autres. Si les observations sont suffisamment rapprochées, on peut, en s'aidant de la continuité du mouvement, tracer la courbe avec exactitude. Elle fournit ensuite des valeurs approchées de s pour toutes les valeurs de t où cette quantité n'a pas été mesurée directement. On effectue ainsi une sorte d'interpolation graphique suffisamment rigoureuse pour les besoins de la pratique.

49. Différence entre la courbe des espaces et la trajectoire du point mobile. — Il importe de ne pas confondre la loi graphique des espaces avec la trajectoire. Pour un mouvement donné, quelle que soit la forme de la trajectoire, la courbe des espaces reste la même. C'est qu'en effet elle est la simple représentation graphique de la relation $s = f(t)$; elle ne dépend donc pas de la trajectoire elle-même, mais seulement de la manière dont celle-ci est parcourue.

50. Détermination de la vitesse au moyen de la courbe des espaces. — Considérons la courbe des espaces d'un mouvement direct, et prenons sur elle des points M et M' (fig. 49) correspondant à des instants t et $t + \Delta t$. La vitesse moyenne entre ces deux instants est $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Traçons la parallèle $M\mu$ à l'axe des temps, et soient, comme précédemment, k et k' les longueurs représentatives de l'unité d'espace et de l'unité de temps. Nous aurons

$$\mu M' = h \cdot \Delta s \quad \text{et} \quad \mu M = k' \cdot \Delta t$$

En divisant membre à membre

$$\frac{\mu M'}{\mu M} = \frac{k \Delta s}{k' \Delta t} = \frac{k}{k'} \times v_m$$

d'où
$$v_m = \frac{k'}{k} \times \frac{\mu M'}{\mu M} = \frac{k'}{k} \cdot \tan \beta'$$

β' désignant l'angle $M'M\mu$.

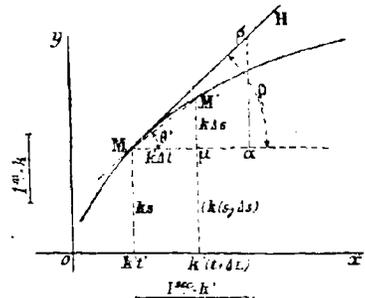


Fig. 19.

Cette expression a été établie en supposant $\Delta s > 0$ en même temps que Δt . Elle est générale si l'on convient de prendre pour l'angle θ' celui qui est formé par le vecteur MM' avec la direction positive de l'axe des temps, mesuré à partir de $M\mu$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. En effet, le produit $\frac{k'}{h} \operatorname{tg} \theta'$ donne, dans tous les cas, la valeur absolue de la vitesse moyenne, et la figure 20, qui se rapporte à un mouvement rétrograde dans lequel v_m est négative, montre qu'il y a concordance pour les signes puisque, avec la convention précédente, $\frac{k'}{h} \operatorname{tg} \theta'$ prend dans ce cas une valeur négative.

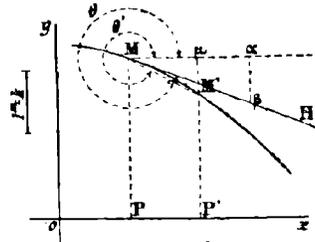


Fig. 20.

Si, laissant le point M fixe, on fait tendre Δt vers zéro, v_m a pour limite la vitesse v du mobile à l'instant t ; le segment MM' prend la direction de la tangente en M à la courbe des espaces, mené dans le sens des temps croissants, et si l'on désigne par θ l'inclinaison de celle-ci sur l'axe des temps, évaluée comme il vient d'être dit, on a

$$v = \lim v_m = \frac{k'}{h} \operatorname{tg} \theta \quad (1)$$

Par conséquent : La vitesse, dans un mouvement quelconque, est à chaque instant proportionnelle à la tangente trigonométrique de l'angle que forme, avec la direction positive de l'axe des temps, la tangente au point correspondant de la courbe des espaces, menée dans le sens des temps croissants.

L'expression (1) conduit à une construction graphique de la vitesse à l'instant t , quand on a tracé la courbe des espaces. On détermine le point M de cette courbe qui correspond à l'instant considéré (fig. 19), et la tangente MH en ce point. On porte sur la parallèle $M\mu$ à la direction positive de l'axe des temps une longueur $M\alpha = k'$, et l'on trace $\alpha\beta$ parallèle à l'axe des temps. Ce segment, mesuré à l'échelle des espaces, représente la vitesse cherchée. On a en effet

$$\alpha\beta = k' \operatorname{tg} \theta = kv \quad \text{d'où} \quad v = \frac{\alpha\beta}{k'}$$

La formule (1) est générale, si l'on tient compte des conventions posées précédemment. La construction graphique qu'on en déduit l'est aussi, à condition de considérer le segment $\alpha\beta$ comme positif quand il est situé au-dessus de $M\mu$, et comme négatif quand il est au-dessous.

Si $h = k'$ $v = \operatorname{tg} \theta$

Dans cette hypothèse, la vitesse du mobile est, à chaque instant, représentée en grandeur et en signe par la tangente trigonométrique de l'angle, mesuré comme on l'a indiqué, que forme la tangente à la courbe des espaces avec l'axe des temps.

51. Etude d'un mouvement défini par la courbe des espaces. — Les considérations précédentes permettent d'étudier un mouvement défini par la courbe des espaces. Il suffit de suivre, sur la figure, les variations de l'angle θ formé par la tangente à cette courbe avec la direction positive de l'axe des temps, et d'en déduire les variations de $\operatorname{tg} \theta$, qui sont proportionnelles à celles de la vitesse.

Dans le cas représenté (fig. 21), on voit que le mobile passe à l'origine des espaces

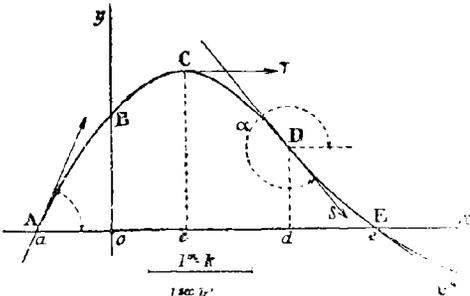


Fig. 21.

à l'instant $-\frac{Oa}{k}$, avant l'origine des temps, avec une vitesse positive. Le mouvement est *direct* (ordonnées croissantes) et *retardé* (vitesse décroissante en valeur absolue). Il en est ainsi jusqu'à l'instant $\frac{OC}{k}$ auquel la vitesse est nulle. Le mouvement devient alors *rétrograde* (ordonnées décroissantes) et *accélééré* (vitesse croissante en valeur absolue), jusqu'à l'instant $\frac{Od}{k}$, qui correspond à un

point d'inflexion D de la courbe des espaces. A partir de cet instant, la valeur

absolue de la vitesse diminue; le mouvement reste *rétrograde*, mais devient *retardé*. Le mobile repasse à l'origine des espaces à l'instant $\frac{Oe}{k}$, et s'en éloigne ensuite du côté des espaces négatifs.

52. Courbe des vitesses. — Supposons qu'on ait construit, au moyen de la loi graphique des espaces, à différents instants t, t', t'' , représentés par les points P, P', P''... de ox (fig. 22.) des segments $\alpha\beta, \alpha'\beta', \alpha''\beta''$... proportionnels aux vitesses v, v', v'' ... à ces instants. Si l'on porte ces segments à partir de P, P', P''... sur les ordonnées correspondantes, dans un sens convenable, on obtient des points m, m', m'' ... qui déterminent une courbe. Puisque $\alpha\beta = kv$, l'unité de vitesse est représentée, sur la figure, par la même longueur k que l'unité d'espace. La courbe m, m', m'' ... présente donc, avec l'équation des vitesses $v = f(t)$, la même relation que la courbe des espaces présente avec l'équation des espaces $s = f(t)$. On l'appelle pour cette raison la *courbe des vitesses*.

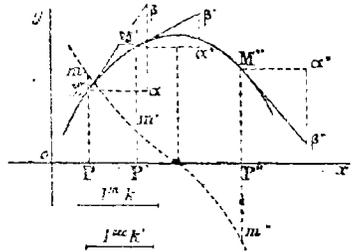


Fig. 22.

Il faut observer que la courbe des vitesses rencontre l'axe des temps aux points qui correspondent aux ordonnées maxima et minima de la courbe des espaces. Pour ces points, en effet, le segment $\alpha\beta$ est nul.

53. Détermination de l'accélération tangentielle au moyen de la courbe des vitesses. — On pourrait faire une étude directe de l'accélération tangentielle au moyen de la courbe des vitesses, en procédant comme au paragraphe 50. Mais il est plus simple de remarquer que, au point de vue algébrique, l'accélération tangentielle étant à la vitesse ce que la vitesse est à l'espace, la construction graphique de l'accélération, déduite de la courbe des vitesses, est identique à celle de la vitesse, déduite de la courbe des espaces.

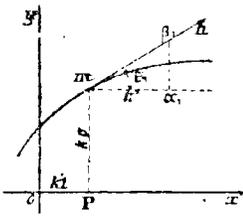


Fig. 23.

Si l'on désigne par θ , l'angle formé par la tangente à la courbe des vitesses au point m qui correspond à un instant t , avec la direction positive de l'axe des temps (θ , étant mesuré

comme précédemment l'angle θ , l'accélération tangentielle à cet instant a pour valeur.

$$\varphi = \frac{k'}{k} \operatorname{tg} \theta_1.$$

Elle est donc proportionnelle à la tangente trigonométrique de l'angle que forme, avec la direction positive de l'axe des temps, la tangente à la courbe des vitesses, menée dans le sens des temps croissants.

Le triangle rectangle $m \alpha_1 \beta_1$, dans lequel $m \alpha_1 = k'$, détermine un segment $\alpha_1 \beta_1 = k' \operatorname{tg} \theta_1 = k \varphi$, qui, mesuré à l'échelle des espaces, fournit la valeur de l'accélération tangentielle à l'instant t ; on doit le considérer comme positif s'il est au-dessus de la parallèle à l'axe des temps, et comme négatif s'il est au-dessous.

Dans le cas particulier où $k = k'$, $\varphi = \operatorname{tg} \theta_1$.

On étudierait les variations de φ au moyen de la courbe des vitesses comme on a étudié précédemment celles de v au moyen de la courbe des espaces (51).

54. Courbe des accélérations. — Supposons qu'on ait construit, au moyen de la courbe des vitesses, des segments $\alpha_1 \beta_1, \alpha'_1 \beta'_1, \alpha''_1 \beta''_1, \dots$ proportionnels aux valeurs $\varphi, \varphi', \varphi'', \dots$ de l'accélération tangentielle à des instants $t, t', t'' \dots$. En portant ces segments sur les ordonnées $Pm, P'm' \dots$ dans le sens convenable, on obtient une suite de points $m_1, m'_1, m''_1 \dots$ qui déterminent une courbe. Puisque $\alpha_1 \beta_1 = k \varphi$, l'unité d'accélération se trouve représentée par la même longueur k que l'unité de vitesse. On peut donc dire que la courbe $m_1 m'_1 m''_1 \dots$ présente avec l'équation des accélérations tangentielles $\varphi = f''(t)$, la même relation que les courbes des vitesses et des espaces présentent avec les lois correspondantes $v = f'(t)$ et $s = f(t)$. Pour cette raison, on l'appelle la *courbe des accélérations*.

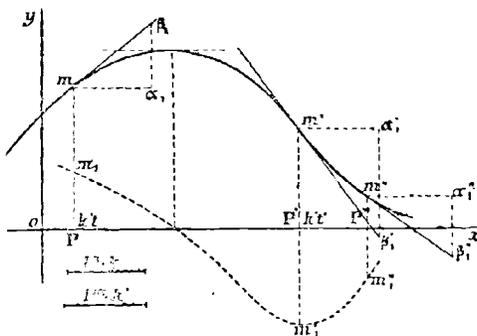


Fig. 24.

55. Particularités des courbes représentatives d'un mouvement. — Ces courbes peuvent affecter des formes très diverses, selon la nature des lois analytiques dont elles traduisent graphiquement les variations. Mais elles possèdent un certain nombre de caractères que l'on retrouve dans tous les cas :

1° Elles ne peuvent avoir qu'un point sur chaque ordonnée. Si, par exemple, la courbe des espaces était rencontrée en deux points par une ordonnée, il en résulterait qu'à un instant déterminé, s'ayant deux valeurs différentes, le mobile occuperait à la fois deux positions sur sa trajectoire, ce qui est absurde.

2° Elles ne peuvent présenter aucun point anguleux. Supposons que la courbe des espaces présente un point anguleux en M (fig. 26). Elle admet en ce point deux tangentes distinctes MT et MT'. Par suite, la vitesse à l'instant correspondant passe brusquement de la valeur $\frac{k'}{k} \operatorname{tg} \theta$ à la valeur $\frac{k'}{k} \operatorname{tg} \theta'$. Cette variation instantanée de la vitesse, qui se produirait par exemple à la suite d'un choc, est inadmissible. Le

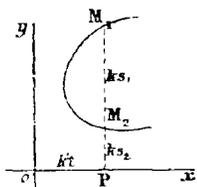


Fig. 25.

Si ce fait se présentait pour la courbe des vitesses, le mobile serait animé, au même moment, de deux vitesses différentes, etc...

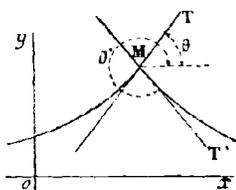


Fig. 26.

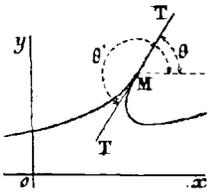


Fig. 27.

même raisonnement s'applique à la courbe des vitesses et à celle des accélérations.

3° Elles ne peuvent présenter aucun point de rebroussement. Si, par exemple, la courbe des espaces avait en M un point de rebroussement (fig. 27), la vitesse à l'instant correspondant passerait brusquement de la valeur

$$v = \frac{k'}{k} \operatorname{tg} \theta$$

à la valeur $v_1 = \frac{k'}{k} \operatorname{tg} \theta' = \frac{k'}{k} \operatorname{tg} (\theta + \pi) = -\frac{k'}{k} \operatorname{tg} \theta = -v$.

Le même raisonnement s'applique encore à la courbe des vitesses et à celle des accélérations.

4° Elles ne peuvent admettre aucune tangente perpendiculaire à l'axe des temps. Une telle tangente à la courbe des espaces correspondrait à une vitesse infinie en valeur absolue ($\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$), ce qui n'a aucun sens au point de vue pratique.

5° Elles ne peuvent admettre aucune asymptote perpendiculaire à l'axe des temps. Si l'on considère une telle asymptote correspondant à l'instant t dans la courbe des vitesses, par exemple (fig. 28), on voit que, pendant un temps très court précédant ou suivant cet instant, la vitesse doit passer d'une valeur finie à une valeur infinie, ou inversement, ce qui est inadmissible.

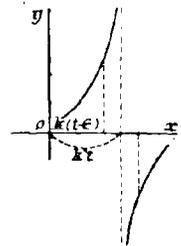


Fig. 28.

56. Relations entre les trois courbes représentatives des lois d'un mouvement. — 1° A chaque ordonnée maximum ou minimum de la courbe des espaces correspond un point de rencontre de la courbe des vitesses avec l'axe des temps. Car, en chacun des points correspondants de la courbe des espaces, la tangente est parallèle à l'axe des temps, et la vitesse du mouvement est nulle ($\theta = 0$).

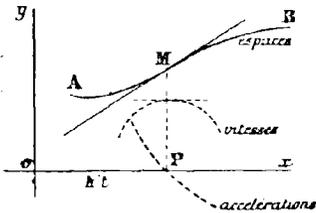


Fig. 29.

De même :

2° A chaque ordonnée maximum ou minimum de la courbe des vitesses correspond un point de rencontre de la courbe des accélérations avec l'axe des temps.

3° A chaque point d'inflexion de la courbe des espaces correspond une ordonnée maximum ou minimum de la courbe des vitesses.

Soit M un point d'inflexion de la courbe des espaces, correspondant à une époque t . Si la disposition de la courbe au voisinage de M est celle de la figure 29, la vitesse croît avant l'instant t , et décroît après, ce qui caractérise un maximum. Si la disposition est celle de la figure 30, la vitesse est d'abord décroissante, puis croissante, et passe par un minimum à l'instant t .

D'après ce qui précède, aux points d'inflexion de la courbe des espaces correspondent des points d'intersection de la courbe des accélérations avec l'axe des temps.

4° A chaque point d'inflexion de la courbe des vitesses correspond une ordonnée maximum ou minimum de la courbe des accélérations.

La démonstration est identique à la précédente.

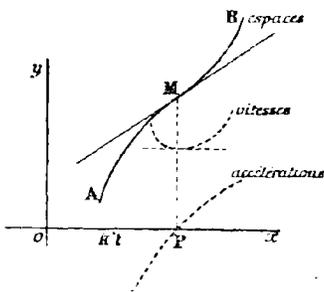


Fig. 30.

57. **Problème.** — *Connaissant la courbe des vitesses d'un mouvement, trouver la courbe des espaces.*

Nous nous proposons d'évaluer, au moyen de la courbe des vitesses A_0A d'un mouvement (fig. 31), la variation $s - s_0$ de s entre l'instant initial et un instant quelconque t , représenté sur ox par le point a tel que $oa = k't$. A cet effet, partageons t et oa en n parties égales.

En posant $\frac{t}{n} = \theta$, chaque segment de ox déterminé par les points de division $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ est égal à $k'\theta$, et les ordonnées $oA_0, a_1 A_1, a_2 A_2 \dots aA$, qui représentent les valeurs successives $v_0, v_1, v_2 \dots v_{n-1}, v$ de la vitesse du mobile, sont respectivement égales à $kv_0, kv_1 \dots kv_{n-1}, kv$.

Si, pendant chacune des périodes successives égales à θ , le mouvement du mobile restait uniforme et conservait la vitesse qu'il a au commencement de cette période, la variation totale de s serait exprimée par la somme $v_0\theta + v_1\theta + v_2\theta + \dots + v_{n-1}\theta$. Le mouvement discontinu que cette hypothèse substitue au mouvement réel, en diffère d'autant moins que les intervalles θ sont plus petits. Si l'on en multiplie le nombre de manière que chacun d'eux tende vers zéro, on a

$$s - s_0 = \lim (v_0\theta + v_1\theta + v_2\theta + \dots + v_{n-1}\theta)_{n \rightarrow \infty}$$

D'après la figure, $v_0\theta = \frac{A_0o}{k} \cdot \theta$, $\theta = \frac{oa_1}{k'}$ et $v_0\theta = \frac{A_0o \times oa_1}{k \times k'}$

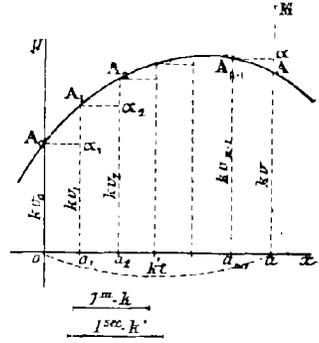


Fig. 31.

Cela signifie que $v_0\theta$ est mesuré par le même nombre que l'aire du rectangle $A_0 o a_1 a_1$, si l'on prend comme unité de surface celle du rectangle de dimensions k et k' . La même interprétation s'applique à tous les termes de la parenthèse. Or, quand θ tend vers zéro, la somme des aires de tous les rectangles tels que $A_0 o a_1 a_1$ a pour limite l'aire $A_0 o a A$ comprise entre la courbe des vitesses, l'axe des temps, et les ordonnées qui correspondent aux deux instants considérés. On peut donc dire que la variation $s - s_0$ de s , entre l'instant initial et l'instant t , est mesurée par le même nombre que l'aire $A_0 o a A$, à la condition de représenter l'unité d'espace et l'unité de vitesse par la même longueur k , et de prendre comme unité de surface l'aire du rectangle ayant pour dimensions les longueurs représentatives de l'unité d'espace et de l'unité de temps.

Afin de simplifier le langage, on dit, d'une façon incorrecte : la variation de s dans un intervalle de temps donné a pour mesure l'aire comprise entre la courbe des vitesses, l'axe des temps, et les ordonnées des deux extrémités de l'intervalle, ce que l'on écrit.

$$s - s_0 = \text{aire } A_0 o a A.$$

Pour que l'on puisse déduire de cette relation la valeur de s , il est indispensable de connaître l'espace initial s_0 . On a vu que la connaissance de cette constante est également nécessaire pour la détermination de l'équation des espaces, en fonction de l'équation des vitesses, au moyen d'une intégration.

L'expression $s = s_0 + \text{aire } A_0 o a A$ permet de construire la courbe des espaces. Il suffit d'évaluer l'aire $A_0 o a A$, et de porter sur l'ordonnée aA une longueur aM proportionnelle à la valeur de s . En opérant de la même manière pour des valeurs de t en nombre suffisant, on obtient autant de points que l'on veut de la courbe des espaces.

Comme, d'autre part, on sait déterminer la courbe des accélérations au moyen de celle des vitesses, on peut étudier complètement le mouvement par la méthode graphique.

58. Remarques. I. — Il se peut que la courbe des vitesses traverse l'axe des temps (fig. 32). Soient t_1 l'époque, où la vitesse s'annule, et s_1 la valeur correspondante de s . La variation de s entre l'instant initial et un instant quelconque t ($t > t_1$) est

$$s - s_0 = (s_1 - s_0) + (s - s_1)$$

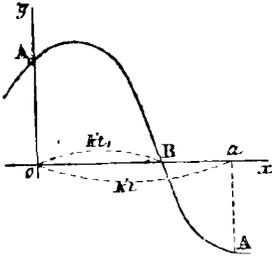


Fig. 32.

D'après ce qui précède, $s_1 - s_0 = \text{aire } A_0B$. Comme la vitesse devient négative après l'instant t_1 , et que le mouvement change de sens (15), les variations de s entre les instants 0 et t_1 d'une part, t_1 et t d'autre part, sont de signes contraires. Il est donc naturel de représenter $s - s_1$ par l'aire AaB , prise négativement. On a alors

$$s - s_0 = \text{aire } A_0B - \text{aire } AaB$$

Par conséquent, la variation de s entre l'instant initial et un instant quelconque est toujours représentée par la somme algébrique des aires limitées par la courbe des vitesses, l'axe des temps, et les ordonnées extrêmes, en considérant, comme positives celles de ces aires qui sont au-dessus de ox , et comme négatives celle qui sont au-dessous.

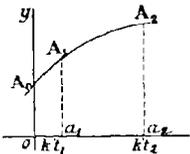


Fig. 33.

II. — On peut se proposer d'évaluer la variation de s entre deux époques quelconques t_1 et t_2 . En appelant s_1 et s_2 les valeurs de s qui correspondent à ces instants, on a

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= (s_2 - s_0) - (s_1 - s_0) = \text{aire } A_0 o a_2 A_2 - \text{aire } A_0 o a_1 A_1 \\ &= \text{aire } A_1 a_1 a_2 A_2 \quad (\text{fig. 33}) \end{aligned}$$

III. — La variation de s entre deux instants déterminés ne représente l'espace parcouru par le mobile pendant le temps correspondant que si, dans l'intervalle considéré, le sens du mouvement n'a pas changé. C'est ce qui a lieu toutes les fois que la courbe des vitesses ne traverse pas l'axe des temps dans cet intervalle.

59. Problème. — *Connaissant la courbe des accélérations d'un mouvement, trouver la courbe des vitesses.*

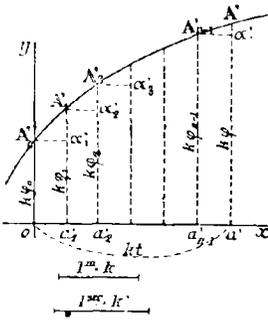


Fig. 34.

Nous nous proposons d'évaluer, au moyen de la courbe des accélérations, la variation de la vitesse d'un mouvement entre l'instant initial et un instant quelconque t , représenté sur ox par le point a' tel que $oa' = kt$. Partageons encore t et oa' en n parties égales à θ ; les ordonnées $oA'_0, a'_1 A'_1, \dots, a'_{n-1} A'_{n-1}, a' A'$ ont respectivement pour valeurs $k\varphi_0, k\varphi_1, k\varphi_2, \dots, k\varphi_{n-1}, k\varphi$. Si, pendant chacune des périodes successives égales à θ , le mouvement du mobile restait uniformément varié, et conservait l'accélération tangentielle qu'il a au commencement de ces périodes, la variation totale de v , soit $v - v_0$, serait exprimée par la somme

$$\varphi_0 \theta + \varphi_1 \theta + \dots + \varphi_{n-1} \theta.$$

Le mouvement discontinu que cette hypothèse substitue au mouvement réel en diffère d'autant moins que θ est plus petit. A la limite, quand θ tend vers zéro, on a

$$v - v_0 = \lim (\varphi_0 \theta + \varphi_1 \theta + \dots + \varphi_{n-1} \theta)$$

En procédant pour la suite comme au paragraphe 54 on établit que la variation de vitesse, entre l'instant initial et l'instant t , est mesurée par le même nombre que l'aire $A'o'o a'A'$, à la condition de représenter l'unité de vitesse et l'unité d'accélération par la même longueur k , et de prendre comme unité de surface l'aire du rectangle ayant pour dimensions les longueurs représentatives de l'unité de vitesse et de l'unité de temps.

Dans le but d'abrégier le langage, on dit d'une manière plus rapide, mais incorrecte, que : la variation de vitesse, pendant un intervalle de temps donné, a pour mesure l'aire comprise entre la courbe des accélérations, l'axe des temps, et les ordonnées des deux extrémités de l'intervalle. On a ainsi

$$v - v_0 = \text{aire } A'o'o a'A'$$

ou
$$v = v_0 + \text{aire } A'o'o a'A'$$

Cette relation ne fournit l'expression même de la vitesse v à l'instant t que si l'on connaît la vitesse initiale v_0 . Nous sommes arrivés à une conclusion analogue quand nous avons déterminé, au moyen d'une intégration, la loi des vitesses en fonction de celle des accélérations tangentielles (39).

L'expression $v = v_0 + \text{aire } A'o'o a'A'$ permet de construire par points la courbe des vitesses. Si l'on connaît en outre l'espace initial s_0 , on pourra remonter ensuite à la courbe des espaces (57), et étudier le mouvement d'une façon complète par la méthode graphique.

60. Remarques. — I. On peut se proposer de déterminer la variation de vitesse entre deux époques quelconques t_1 et t_2 . Elle est mesurée par l'aire comprise entre la courbe des accélérations, l'axe des temps, et les ordonnées correspondant aux époques considérées.

II. Si la courbe des accélérations traverse l'axe des temps, la variation de la vitesse pendant un intervalle de temps donné est représentée par la somme algébrique des aires qu'elle détermine avec l'axe des temps, en regardant comme positives celles de ces aires qui sont au-dessus de ox , et comme négatives celles qui sont au-dessous.

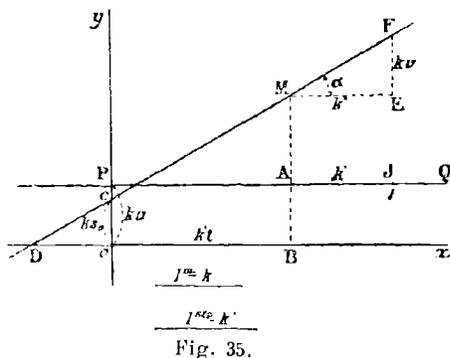
§ II. — Étude graphique du mouvement uniforme.

61. Nous suivrons la même marche que dans la méthode analytique, mais nous établirons les résultats déjà acquis en employant exclusivement la méthode graphique.

Rappelons que, d'après la définition du mouvement uniforme, la vitesse v est égale au rapport constant de l'espace au temps employé à le parcourir. La loi graphique des vitesses est donc une droite PQ , parallèle à l'axe des temps (fig. 35), dont l'ordonnée à l'origine $oP = kv$.

Cherchons la loi graphique des espaces. Soient t une époque quelconque figurée par le point B d'abscisse $oB = k't$, et AB l'ordonnée correspondante de PQ . L'espace $s - s_0$ parcouru entre l'instant initial et l'instant t est donné par l'expression

$$s = s_0 + \text{aire } oPAB,$$



à la condition de représenter l'unité d'espace par la longueur k et de prendre pour unité de surface l'aire du rectangle ayant k et k' pour dimensions (57). D'après cela

$$s = s_0 + \frac{kv \times k't}{kk'}$$

d'où

$$s = s_0 + vt$$

C'est la loi des espaces du mouvement uniforme. Comme elle est du premier degré en s et en t , elle est représentée graphiquement par une droite, dont il suffit de construire deux points. On détermine en général ses points de rencontre avec les axes de coordonnées. L'ordonnée à l'origine $oC = ks_0$ représente l'espace initial ; l'abscisse à l'origine $oD = -\frac{k's_0}{v}$ représente l'heure du passage du mobile à l'origine des espaces, sur la trajectoire. On pourrait d'ailleurs employer deux autres points quelconques, dont on déterminerait les coordonnées en donnant à t deux valeurs arbitraires t_1, t_2 , auxquelles correspondraient des valeurs s_1 et s_2 de s fournies par l'expression $s = s_0 + vt$, ou mesurées directement.

Réciproquement, tout mouvement dans lequel la loi graphique des espaces est une droite est uniforme. Si, en effet, l'on applique à un tel mouvement la construction graphique de la vitesse (50), on obtient un triangle rectangle MEF dont la grandeur est indépendante de t , puisque son côté $ME = k'$ et son angle $EMF = \alpha$ restent invariables. Tous les segments représentatifs de la vitesse, tels que EF, étant égaux entre eux, la vitesse reste constante, et le mouvement est uniforme. La loi graphique des vitesses se déduit de celle des espaces en traçant une parallèle à ox , distante de cette droite d'une longueur $oP = EF$.

La construction graphique de l'accélération tangentielle (53) appliquée à la loi des vitesses PQ, donne à tout instant un segment $IJ = k\varphi$ de longueur nulle. Par suite $\varphi = 0$, et la loi graphique des accélérations se confond avec ox .

62. Problème des courriers. — *Solution graphique.* — Si l'on rapporte les deux mouvements aux mêmes origines des temps et des espaces, leurs lois des espaces sont

$$s = s_0 + vt \quad s' = s'_0 + v't.$$

Elles sont représentées par les droites AB et A'B', que l'on vient d'apprendre à déterminer. Les positions qu'occupent les mobiles sur leur trajectoire commune à un instant quelconque t_1 sont figurées par deux points P et M correspondant à la même abscisse $op = k't_1$. Si les deux mobiles se rencontrent à l'instant t , on aura à ce moment $s = s'$, et les points P et M seront confondus. D'où il suit que l'heure de la rencontre

$(t = \frac{or}{k})$ et sa distance à l'origine des espaces

$(s = \frac{rR}{k})$ sont déterminées par les coordonnées du point R où se coupent AB et A'B'.

Discussion. — On a

$$oA = ks_0 \qquad oB = -\frac{k's_0}{v}$$

$$oA' = ks'_0 \qquad oB' = -\frac{k's'_0}{v'}$$

D'autre part, les tangentes trigonométriques des angles que forment AB et A'B' avec ox sont (50)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{k'} v \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{k}{k'} v'$$

Pour que AB et A'B' se coupent, il faut et il suffit que les angles α et α' soient différents, c'est-à-dire que l'on ait $v \neq v'$. Dans ce cas, les deux mobiles se rencontrent. Si $\alpha = \alpha'$, AB et A'B' ont même direction, et deux cas sont à distinguer, selon que leurs ordonnées à l'origine sont égales ou inégales. Si $oA \neq oA'$, AB et A'B' sont parallèles. Les deux mobiles ne se rencontrent jamais, et la distance qui les sépare est toujours égale à $\frac{AA'}{k}$. Les conditions $\alpha = \alpha'$ et $oA \neq oA'$ reviennent aux suivantes : $v = v'$ et $s_o \neq s'_o$.

Si $\alpha = \alpha'$ et $oA = oA'$, les droites AB et A'B' sont confondues, et les mobiles sont toujours réunis. Ces conditions reviennent aux suivantes : $v = v'$ et $s_o = s'_o$.

Nous retrouvons ainsi tous les résultats déjà établis par la méthode analytique.

63. Problème — *Trouver, par une construction graphique, les heures des rencontres successives des aiguilles d'une montre.*

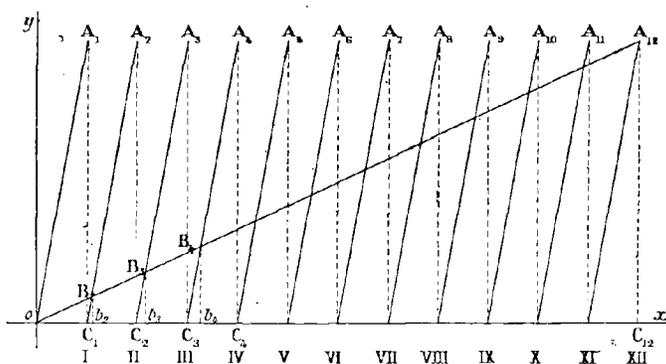


Fig. 37.

Les mouvements des deux aiguilles sont uniformes. Nous allons construire les diagrammes correspondants, qui sont des droites.

1° *Pour la petite aiguille.* Prenons pour origine des temps l'heure de midi, pour origine des espaces la position du nombre XII sur le cadran, et pour sens positif des espaces celui de la rotation. L'espace initial est nul, et la droite qui représente la loi des espaces passe par l'origine des coordonnées. Au bout de douze heures, l'aiguille a fait le tour du cadran ; la droite cherchée passe par le point A_{12} , dont l'abscisse oC_{12} est une longueur arbitraire représentant douze heures, et l'ordonnée $C_{12} A_{12}$ une autre longueur arbitraire figurant le tour du cadran (fig. 37). L'intervalle oC_{12} a été partagé en douze parties égales, dont chacune représente une durée d'une heure.

2° *Pour la grande aiguille.* On considère séparément chacune de ses révolutions complètes. La première s'accomplit de midi à une heure. En prenant les mêmes origines que précédemment, la droite qui figure la loi des espaces du mouvement uni-

forme correspondant passe par l'origine des coordonnées, et par un point A_1 dont l'abscisse $oC_1 = \frac{1}{12} oC_{12}$ représente une heure, et l'ordonnée $C_1 A_1 = C_{12} A_{12}$ le tour du cadran.

Pour la seconde révolution, plaçons l'origine des temps à 1 heure, l'origine des espaces restant la même. A une heure, l'espace parcouru est nul, et à deux heures, il est égal au tour du cadran ; la droite qui représente la loi des espaces du mouvement uniforme correspondant passe donc par le point C_1 de l'axe des temps, et par le point A_2 dont l'abscisse $oC_2 = \frac{2}{12} oC_{12}$ représente deux heures, et l'ordonnée $C_2 A_2 = C_{12} A_{12}$ le tour du cadran.

Les lois graphiques des espaces des mouvements uniformes qui correspondent aux autres révolutions s'obtiennent d'une façon analogue, en plaçant l'origine des temps successivement à 2 heures, 3 heures, etc...

Les heures de rencontre des deux aiguilles sont données par les abscisses ob_2, ob_3, \dots des points d'intersection de oA_{12} avec $oA_1, C_1 A_2, \dots$. Ces dernières droites étant équidistantes deux à deux, on voit aisément que $ob_3 = 2 ob_2, ob_4 = 3 ob_2, \dots$. Il suffit donc de calculer ob_2 . Or

$$\frac{oB_2}{oA_{12}} = \frac{ob_2}{oC_{12}} = \frac{1}{11}$$

Donc $ob_2 = \frac{1}{11} oC_{12} = \frac{1}{11}$ de 12 heures = $1^h \frac{1}{11}$

Les heures des rencontres successives, après celle de midi, sont par conséquent

$$1^h \frac{1}{11}, 2^h \frac{2}{11}, 3^h \frac{3}{11} \dots$$

64. Graphique des trains. — On nomme ainsi une épure sur laquelle sont figurées les lignes représentatives des mouvements de tous les trains qui circulent entre deux stations déterminées.

Le mouvement d'un train n'est pas uniforme ; il est accéléré au départ d'une gare, et retardé au moment de son arrivée à la gare suivante. Les côtes, la résistance de l'air, le frottement, etc... contribuent aussi à faire varier sa vitesse. On lui substitue, pour la représentation graphique, un mouvement uniforme de même vitesse moyenne, de sorte que, entre deux arrêts consécutifs, le diagramme du mouvement est une droite.

Pour établir cette épure, (fig. 38) on porte à la suite les unes des autres, sur un axe horizontal qui sera l'axe des temps, vingt-quatre parties égales représentant les vingt-quatre heures de la journée, et on partage chacune en six parties égales correspondant à des intervalles de 10 minutes. On peut donc lire rigoureusement les heures exprimées par un multiple de 10 minutes ; les heures intermédiaires, telles que $1^h, 5^m$, sont appréciées à l'œil. Sur un axe perpendiculaire au premier, on porte des longueurs proportionnelles aux distances qui séparent les stations successives A, B, C, D, E... Par chaque point de division de l'un des axes, on trace une parallèle à l'autre. On constitue ainsi un quadrillage dans lequel chaque ligne horizontale représente une station, et chaque ligne verticale, une heure déterminée. Les points de rencontre des deux sortes de lignes définissent à la fois une heure, et une station.

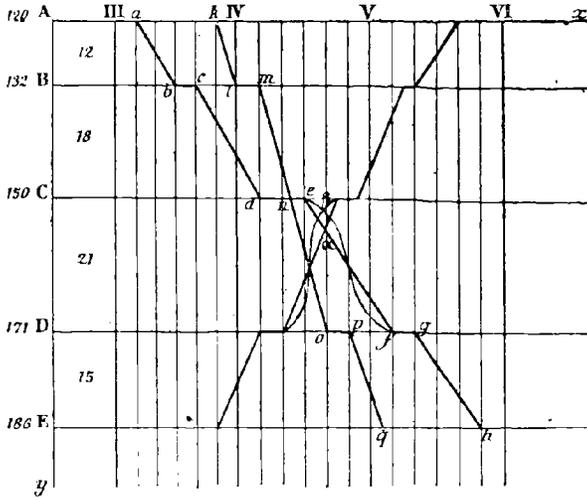


Fig. 38.

Considérons un train parti de A à 3^h,10^m et arrivant en B à 3^h,30^m. Le diagramme de son mouvement, supposé uniforme, est la droite *ab*. Le train stationne 10 minutes en B, d'où il repart à 3^h,40^m, et arrive en C à 4^h,10^m. Cette seconde partie de son mouvement est figurée par la droite *cd*. A la station C, l'arrêt est de 20 minutes ; le départ a lieu à 4^h,30^m, et l'arrivée en D à 5^h,10^m. Le mouvement est représenté par la droite *ef*. Le départ de D ayant lieu à 5^h,20^m, après un arrêt de 10 minutes, et l'arrivée en E se faisant à 5^h,50^m, le mouvement entre les deux stations est représenté par *gh*. On voit que, pour obtenir la ligne représentative du mouvement d'un train entre deux stations, il suffit de joindre par une droite le point qui figure la station et l'heure du départ au point qui figure la station et l'heure de l'arrivée. Les arrêts sont indiqués par une portion d'horizontale, telle que *bc*, comprise entre l'heure de l'arrivée à la station de repos et l'heure du départ. Moins le train emploie de temps pour aller d'une station A à une autre B, et plus la direction de la droite qui figure son mouvement entre A et B se rapproche de la verticale. Sur le graphique, un train d'allure rapide se distingue donc d'un train d'allure lente en ce que le diagramme du premier est moins incliné que celui du second sur la verticale.

Supposons qu'un train rapide, parti de A à 3^h,50^m, arrive en B à 4 heures. Après un arrêt de 10 minutes, il repart, franchit sans arrêt la station C à 4^h,24^m, et arrive en D à 4^h,40^m. Cette deuxième partie de son mouvement est figurée par la droite *mn*. Ce second train, à partir de la station C, a dépassé le premier. Afin d'éviter une collision, il a fallu combiner les horaires de ces deux trains de manière que le plus lent laisse la voie libre au plus rapide. Le graphique montre qu'il en a bien été ainsi. Le premier train est arrivé en C à 4^h,10^m et s'est garé immédiatement, en sorte que le second train, qui arrive en vue de la station C à 4^h,24^m environ, a pu la franchir sans arrêt ; le premier train n'est reparti qu'à 4^h,30^m, après que le second l'a eu dépassé d'une quantité suffisante (6 kilomètres environ) pour assurer leur sécurité commune.

Les trains qui parcourent la voie de A en E ont leur diagramme incliné vers la gauche ; ceux qui la parcourent dans le sens contraire l'ont incliné vers la droite. On a figuré la marche d'un de ces trains qui, parti de E à 3^h,50^m, arrive en D à 4^h,10^m, en repart à 4^h,20^m, pour arriver en C à 4^h,45^m, etc... L'examen du graphique montre que ce train croise le rapide parti de A à 3^h,50^m, à peu près à égale distance des stations

C et D, au point kilométrique 161, environ à 4^h,33^m. Il croise le train parti de A à 3^h,10^m au point kilométrique 155, à 4^h,39^m. Il n'y a pas lieu de ménager un garage en ces points, si la voie est double.

Telles sont les principales indications que peut fournir la lecture d'un graphique des trains. Observons que ces indications ne sont qu'approchées, le mouvement des trains n'étant pas rigoureusement uniforme. Pour prévoir l'heure exacte d'un croisement, il faudrait remplacer chaque droite telle que *ef* par une ligne sinuëuse représentant le mouvement réel du train, accéléré au départ, retardé à l'arrivée. L'heure et le point de croisement indiqués par les coordonnées du point α (4^h,40^m, point 155) doivent être remplacés par ceux qu'indiquent les coordonnées du point β , que l'on ne peut déterminer rigoureusement.

Le graphique des trains donne encore un moyen commode d'établir l'horaire d'un train supplémentaire entre deux stations, sans modifier celui des trains réguliers. Il suffit que les droites qui représentent le mouvement du train supplémentaire ne coupent pas celles qui représentent le mouvement des trains normaux allant dans le même sens que lui, si la voie est double, ou dans les deux sens, si la voie est simple.

§ III. — Étude graphique du mouvement uniformément varié.

65. Nous suivrons le même ordre que dans la méthode analytique (paragraphe 21 et suivants). Rappelons d'abord que, d'après la définition du mouvement uniformément varié, l'accélération tangentielle φ est constante. La loi graphique correspondante est donc une droite PQ parallèle à l'axe des temps (fig.39), dont l'ordonnée à l'origine $oP = k\varphi$, en désignant par k la longueur représentative de l'unité d'accélération.

66. Loi graphique des vitesses. — Pour trouver la loi des vitesses, il faut

évaluer la variation de vitesse $v - v_0$ entre l'instant initial et un instant quelconque t , figuré par le point B, tel que $oB = k't$. On sait que

$$v - v_0 = \text{aire } oPAB$$

à la condition de représenter l'unité de vitesse par la longueur k , et de prendre pour unité d'aire celle du rectangle ayant k et k' pour dimensions. Par conséquent

$$v - v_0 = \frac{k\varphi \times k't}{kk'} = \varphi t$$

d'où $v = v_0 + \varphi t$

Cette loi des vitesses est représentée graphiquement par une droite LM, dont les coordonnées à l'origine sont $oc = kv_0$ et $oD = -\frac{k'v_0}{\varphi}$

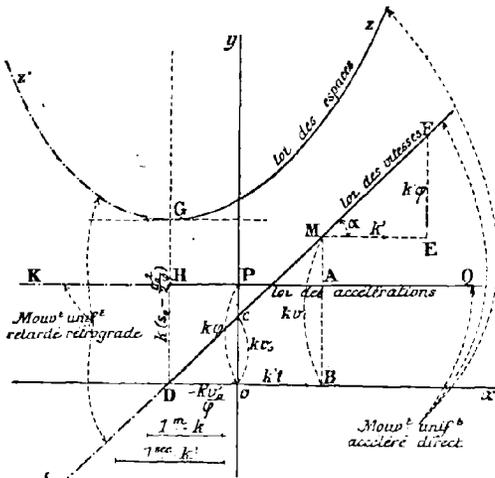


Fig. 39.

Réciproquement, tout mouvement dans lequel la loi graphique des vitesses

est une droite, est uniformément varié. Car si l'on applique à un tel mouvement la construction graphique indiquée au paragraphe 53, on forme un triangle rectangle MEF dont la grandeur est indépendante de t , de sorte que l'accélération tangentielle est représentée par un segment invariable $EF = k \varphi$. Elle reste donc constante, ce qui caractérise un mouvement uniformément varié.

La loi graphique des accélérations se déduit de celle des vitesses en traçant une parallèle à l'axe des temps, ayant pour ordonnée $oP = EF$.

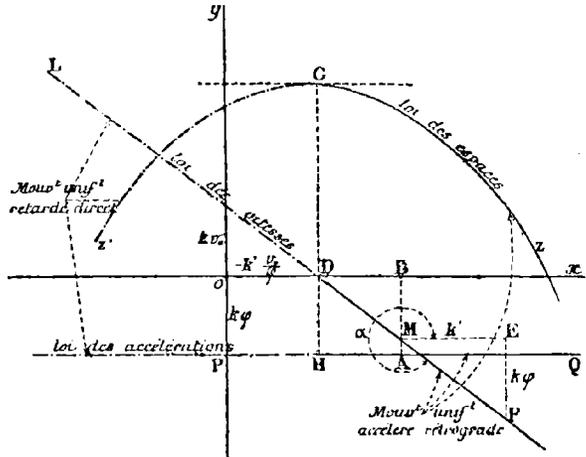


Fig. 40.

67. Courbe des espaces. — On sait que $s - s_0 = \text{aire } ocMB$ (fig. 39) à la condition de représenter l'unité d'espace par la longueur h , et de prendre pour unité de surface l'aire kh' . On a donc

$$s - s_0 = \frac{\frac{oc + BM}{2} \times oB}{kh'} = \frac{\frac{hv_0 + kv}{2} \times kt}{kh'} = \frac{(v_0 + v) t}{2}$$

et, puisque

$$v = v_0 + \varphi t$$

$$s - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2} \varphi t^2$$

d'où

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \varphi t^2$$

C'est la loi des espaces cherchée. Le second membre étant un trinôme du second degré en t , la courbe représentative est une *Parabole*, dont l'axe est parallèle à oy , et dont la concavité est tournée vers le haut ou vers le bas selon que φ est > 0 ou < 0 . Les coordonnées oD et DG (fig. 39) du sommet de cette parabole correspondent au minimum (si $\varphi > 0$) ou au maximum (si $\varphi < 0$) du trinôme. On a donc

$$oD = -\frac{h'v_0}{\varphi} \text{ et } DG = h \left(s_0 - \frac{v_0^2}{2\varphi} \right) (*)$$

On pourrait construire cette parabole par points en donnant à t différentes valeurs $t_1 t_2 t_3 \dots$ et en déterminant les valeurs correspondantes $s_1 s_2 s_3 \dots$ de s , soit au moyen

(*) On sait que le trinôme du second degré $y = ax^2 + bx + c$ présente un maximum (si $a < 0$) ou un minimum (si $a > 0$), égal à $\frac{4ac - b^2}{4a}$, correspondant à la valeur $x = -\frac{b}{2a}$ de la variable indépendante.

de la loi des espaces, soit par des mesures directes. On aurait ainsi les coordonnées $(k't_1, ks_1), (k't_2, ks_2)...$ d'autant de points de la courbe que l'on voudrait. Mais il est plus simple et plus exact de la construire par le procédé suivant.

Prenons comme axes de coordonnées la tangente Ax_1 au sommet de la parabole (parallèle à l'axe des temps) et son axe de symétrie Ay_1 (parallèle à l'axe des espaces) et soient (a, b) les coordonnées d'un point B de la courbe (fig. 41) déterminé directement. Prenons sur AP et sur PB des points Q et N tels que l'on ait

$$AQ = k \times AP = ka$$

$$PN = k \times PB = kb$$

k étant un nombre quelconque ; traçons AN, menons par Q la parallèle à Ay_1 , et cherchons le lieu géométrique du point de rencontre M de ces deux droites lorsque k varie. Les coordonnées de ce point dans le système $x_1 Ay_1$ sont

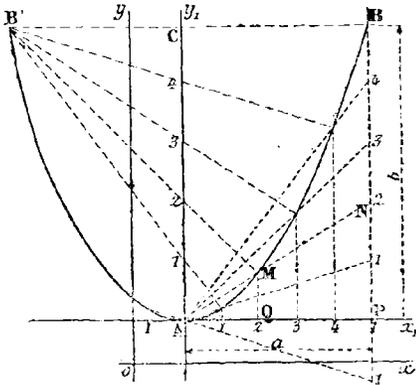


Fig. 41.

$$\begin{cases} x_1 = ka \\ y_1 = \frac{PN \times AQ}{AP} = \frac{kb \times ka}{a} = k^2 b \end{cases}$$

L'équation du lieu, obtenue par l'élimination de k entre les équations précédentes,

est
$$y_1 = \frac{b}{a} x_1^2$$

C'est donc une parabole (*). Elle répond à la question, car la forme de son équation montre qu'elle est tangente à Ax_1 au point A, que Ay_1 est son axe de symétrie, et qu'elle passe par le point B.

On est ainsi conduit à une construction graphique très simple. On partage PA et PB en un même nombre de parties égales, et l'on numérote les points de division en sens inverse à partir de P. On trace des parallèles à Ay_1 par les points situés sur AP, et l'on joint à A les points situés sur PB ; les points d'intersection des droites correspondantes appartiennent à la parabole. On peut prolonger les divisions au-delà des points A, P et B sans que la construction cesse d'être applicable.

On peut démontrer aussi, en procédant d'une façon analogue, que si l'on partage AC en autant de parties égales que AP, et si l'on joint les points de division au point B' symétrique de B par rapport à Ay_1 , les droites obtenues coupent les parallèles à Ay_1 , telles que QM, en des points qui appartiennent à la parabole. Cette construction, comme la précédente, est générale.

Dans le cas particulier où s_0 et v_0 sont nuls, la loi des espaces se réduit à $s = \frac{1}{2} \varphi t^2$.

Le sommet de la parabole est en O ; son axe de symétrie est l'axe des espaces, et sa tangente au sommet l'axe des temps.

(*) La parabole est le lieu des points tels que le carré de l'ordonnée soit proportionnel à l'abscisse correspondante, si l'axe des abscisses est Ax_1 , et l'axe des ordonnées Ay_1 . D'ailleurs, le second membre peut être considéré comme un trinôme du second degré en x_1 , dans un cas particulier.

68. Distinction entre le mouvement uniformément accéléré et le mouvement uniformément retardé. — On a déjà établi (26) qu'à une même équation des vitesses $v = v_0 + \varphi t$ correspondent un mouvement uniformément accéléré et un mouvement uniformément retardé s'effectuant : l'un, depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = -\frac{v_0}{\varphi}$, l'autre depuis $t = -\frac{v_0}{\varphi}$ jusqu'à $t = +\infty$. Les figures 39 et 40 permettent également de constater ce fait, et montrent en outre les formes affectées par les lignes représentatives de ces mouvements dans les différents cas.

Dans la figure 39, correspondant à $\varphi > 0$, l'accélération et la vitesse sont de signes contraires depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = -\frac{v_0}{\varphi}$; le mouvement est uniformément retardé et s'effectue dans le sens rétrograde. Sa courbe des espaces est la demi-parabole $z'G$, située à gauche de l'axe de symétrie DG . Depuis $t = -\frac{v_0}{\varphi}$ jusqu'à $t = +\infty$, φ et v sont de même signe ; le mouvement est uniformément accéléré direct. La courbe des espaces est la demi-parabole Gz .

Dans la figure 40, l'accélération est supposée négative. Depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = -\frac{v_0}{\varphi}$, φ et v sont de signes contraires ; le mouvement est uniformément retardé et s'effectue dans le sens direct. Depuis $t = -\frac{v_0}{\varphi}$ jusqu'à $t = +\infty$, l'accélération et la vitesse sont négatives ; le mouvement est uniformément accéléré, et a lieu dans le sens rétrograde.

On a dessiné en trait mixte les lois graphiques des mouvements antérieurs à l'époque $-\frac{v_0}{\varphi}$, et en trait plein celles qui se rapportent aux mouvements postérieurs à cette époque.

69. Etude graphique du mouvement d'un corps pesant lancé de bas en haut avec une vitesse initiale v_0 . — Les lois du mouvement d'ascension, en prenant les origines indiquées au paragraphe 34, sont

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = v_0 - g t$$

La loi graphique des vitesses est la droite DBP , dont les coordonnées à l'origine sont

$$oD = kv_0 \quad \text{et} \quad oB = \frac{kv_0}{g} \quad (\text{fig. 43}).$$

La courbe des espaces est la parabole oAC , qui passe par l'origine des coordonnées. L'ordonnée AB du sommet est $\frac{kv_0^2}{2g}$. La demi-parabole oMA et le segment DB de la loi des vitesses se rapportent au mouvement uniformément retardé d'ascension,

et le reste de la figure au mouvement uniformément accéléré de chute. La parabole étant symétrique par rapport à AB , on voit immédiatement que la durée de la chute, représentée par BC , est égale à celle de l'ascension, représentée par oB .

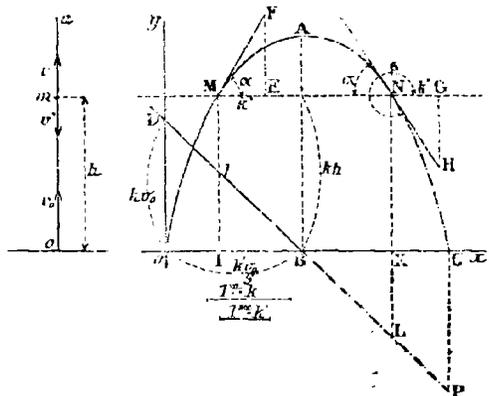


Fig. 42.

Fig. 43.

Soit h la distance du sol à l'un des points de passage m du mobile. En traçant une parallèle à l'axe des temps ayant pour ordonnée $BQ = k \times h$, on détermine deux points M et N de la parabole, dont les abscisses oI et oK montrent que le mobile emploie le même temps $\left(\frac{oI}{k'} = \frac{CK}{k'}\right)$ pour monter jusqu'en m que pour redescendre de m jusqu'au sol.

Les valeurs de la vitesse du mobile à son passage en m sont fournies, soit par les ordonnées IJ et KL de la loi graphique des vitesses, soit par les segments EF et GH obtenus par la construction de la vitesse au moyen de la courbe des espaces (*). On voit que ces vitesses sont égales et de signes contraires. Il en est de même des vitesses au départ et à l'arrivée, figurées par oD et CP . On retrouve ainsi tous les résultats déjà obtenus algébriquement.

§ IV. — *Etude graphique du mouvement périodique.*

70. D'après la définition du mouvement périodique (40), les courbes qui représentent les variations de s , v et φ pendant l'une des périodes se reproduisent sans modification pendant toutes les autres, de sorte qu'il suffit de tracer celles qui se rapportent à la première. Nous prendrons comme exemple le mouvement étudié au paragraphe 43 par la méthode analytique.

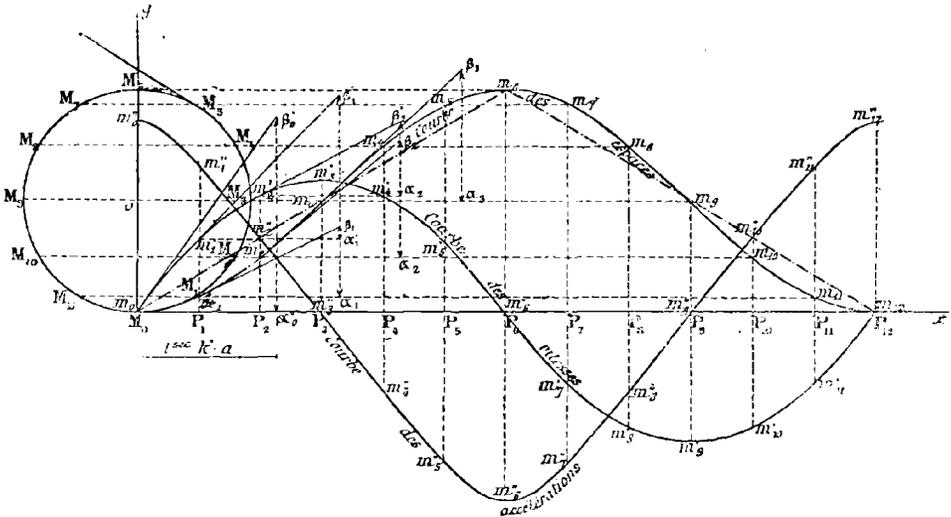


Fig. 44.

Courbe des espaces. On a pris comme axe des temps la tangente $Mo\alpha$ à la circonférence, et comme axe des espaces le diamètre $Mo\gamma$ (fig. 44). La durée $\theta = \frac{2\pi r}{a}$ d'une révolution du point M (période du mouvement) peut être représentée par la longueur de la circonférence o , à laquelle elle est proportionnelle d'après les lois du mouve-

(*) Les vitesses v et v' au passage en M sont données respectivement par les formules $v = EF = k \operatorname{tg} \alpha$, $v' = GH = k' \operatorname{tg} \beta$. Or $\beta = 2\pi - \alpha$ à cause de la symétrie de la parabole par rapport à AB . Donc $v' = -v$.

ment uniforme (*). Pour rectifier la circonférence, on l'a partagée en douze parties égales, et on a marqué sur M_0x les points $P_1 P_2 \dots P_{12}$ qui correspondent aux points de division $M_1 M_2 \dots M_6$. Enfin, les espaces parcourus par le point m à partir de l'origine des espaces M_0 ont été figurés en vraie grandeur. En menant par $M_1 M_2 \dots$ des parallèles à M_0x jusqu'à leur rencontre avec les ordonnées $P_1 m_1, P_2 m_2, \dots$, on a obtenu douze points $m_0 m_1 m_2 \dots$ de la courbe des espaces. D'après le mode de construction suivi, on voit que cette courbe est une *sinusoïde*. Elle est tangente à M_0x en m_0 et m_{12} ; elle présente une ordonnée maximum au point m_6 qui correspond à l'instant $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi r}{a}$, et deux points d'inflexion en m_3 et m_9 , correspondant aux instants

$$\frac{\theta}{4} = \frac{\pi r}{2a} \text{ et } \frac{3\theta}{4} = \frac{3\pi r}{2a}.$$

Enfin, elle est symétrique par rapport à l'ordonnée maximum $P_6 m_6$.

Courbe des vitesses. La symétrie de la courbe des espaces et les propriétés connues de la sinusoïde montrent que les vecteurs représentatifs de la vitesse sont égaux et de même signe pour deux points équidistants d'un point d'inflexion, égaux et de signes contraires pour deux points symétriques par rapport à $P_6 m_6$. Il suffit donc de les construire aux points m_0, m_1, m_2 et m_3 , puis de porter les longueurs obtenues ($0, \alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2, \alpha_3 \beta_3$), dans un sens convenable, sur les ordonnées des points $P_1 P_2 \dots$. On obtient ainsi la courbe des vitesses $m_0 m'_1 m'_2 \dots m_{12}$. C'est encore une sinusoïde, qui traverse l'axe des temps au point m'_6 correspondant à l'instant $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi r}{a}$. La branche $m_0 m'_6$ est symétrique par rapport à l'ordonnée maximum $P_3 m'_3$, et la branche $m'_6 m_{12}$ par rapport à l'ordonnée minimum $P_9 m'_9$.

Courbe des accélérations. On reconnaît, par un raisonnement analogue, qu'il suffit de construire les vecteurs représentatifs de l'accélération tangentielle aux points m_0, m_1, m_2, m_3 de la courbe des vitesses; leurs valeurs respectives $\alpha'_0 \beta'_0, \alpha'_1 \beta'_1, \alpha'_2 \beta'_2$ et 0 , portées sur les ordonnées des points $M_0, P_1 P_2 \dots$ dans un sens convenable, déterminent douze points $m''_0 m''_1 \dots$ de la courbe des accélérations. C'est une sinusoïde qui traverse l'axe des temps aux points m''_3, m''_9 correspondant aux époques

$$\frac{\theta}{4} = \frac{\pi r}{2a} \text{ et } \frac{3\theta}{4} = \frac{3\pi r}{2a}.$$

Elle est symétrique par rapport à son ordonnée minimum $P_6 m''_6$ (**).

Discussion du mouvement. Les indications générales données dans ce chapitre et dans le précédent montrent sans difficulté que :

Depuis l'instant initial jusqu'à l'instant $\frac{\theta}{4} = \frac{\pi r}{2a}$, le mouvement est *accélééré et direct*. Le mobile parcourt un chemin égal au rayon.

Quand le temps croît depuis $\frac{\theta}{4} = \frac{\pi r}{2a}$ jusqu'à $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi r}{a}$, le mouvement est *retardé et direct*; s croît entre les limites r et $2r$.

Quand t croît depuis $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi r}{a}$ jusqu'à $\frac{3\theta}{4} = \frac{3\pi r}{2a}$, le mouvement est *accélééré et rétrograde*; s décroît entre les limites $2r$ et r .

(*) Cela revient à représenter une seconde par une longueur égale à celle du vecteur qui figure la vitesse a du mouvement uniforme.

(**) On obtiendrait les courbes représentatives des lois du mouvement dans les périodes successives en déplaçant les précédentes, parallèlement à M_0x , de quantités égales à $M_0 P_{12}$. Chacune de ces courbes formerait une série indéfinie d'ondulations de part et d'autre de l'axe des temps.

Enfin, quand t croît depuis $\frac{3\theta}{4} = \frac{3\pi r}{2a}$ jusqu'à $\theta = \frac{2\pi r}{a}$, le mouvement est *retardé* et *rétrograde*; s décroît depuis r jusqu'à zéro. On retrouve ainsi tous les résultats qu'avait fournis la méthode analytique.

Les droites $m_0 m_3 m_6$, $m_6 m_9 m_{12}$ peuvent être considérées comme les lois graphiques des espaces de deux mouvements uniformes, l'un direct, l'autre rétrograde; ce sont les *mouvements moyens* du mobile pendant les deux moitiés successives de la période de son mouvement réel.

§ V. — *Étude graphique du mouvement périodiquement uniforme.*

71. Cherchons, par exemple, les courbes représentatives des lois du mouvement déjà étudié au paragraphe 44. Prenons pour axe des espaces la tangente $M_0 y$ à la circonférence o , et comme axe des temps le prolongement $M_0 x$ du rayon oM_0 (fig. 45).

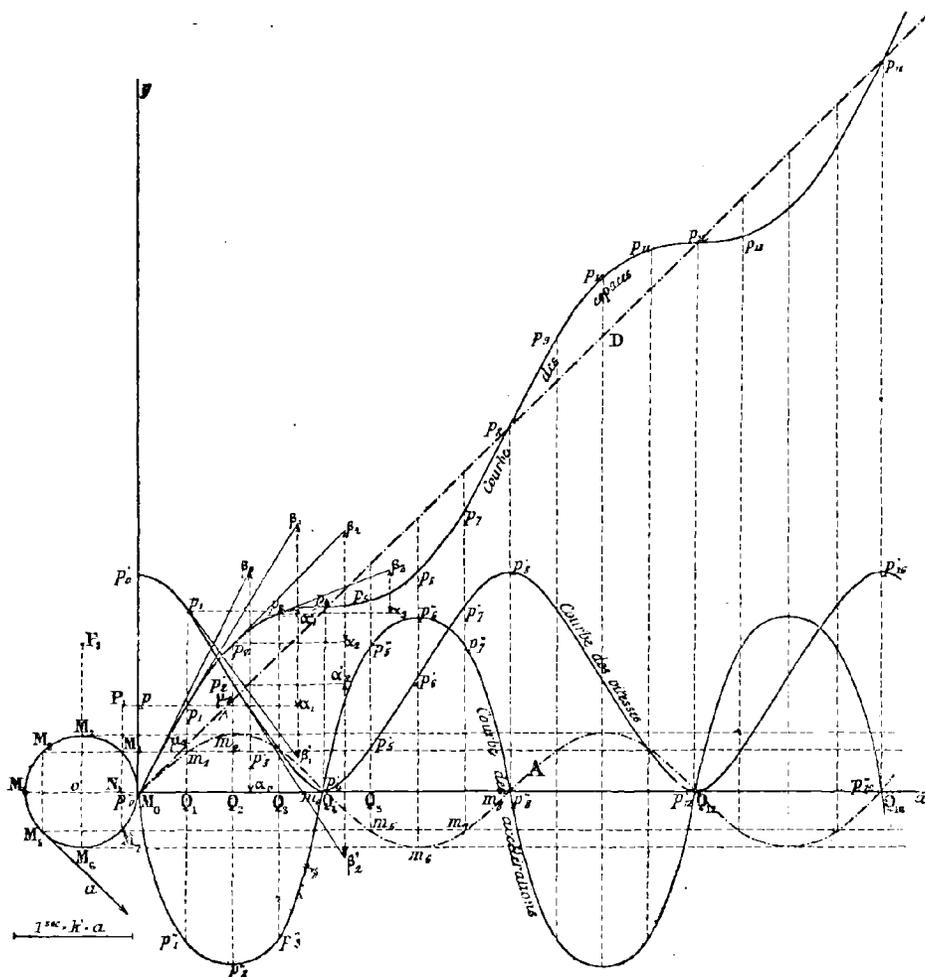


Fig. 45.

Courbe des espaces. La durée $\theta = \frac{2\pi r}{a}$ d'une révolution du point M peut être représentée, comme dans la question précédente, par la longueur de la circonférence o . Celle-ci a été partagée en huit parties égales, et les points de division reportés sur Max en Q_1, Q_2, \dots . Les espaces décrits par le point p à partir de l'origine M_0 sont figurés en vraie grandeur. Les parallèles tracées à l'axe des temps par P_1, P_2, \dots , jusqu'à leur intersection avec les ordonnées des points Q_1, Q_2, \dots , déterminent des points p_1, p_2, \dots de la courbe des espaces. Mais il est plus simple de procéder de la manière suivante.

Chaque ordonnée est la somme de deux vecteurs tels que N_1M_1 et M_1P_1 . Considérons ceux-ci séparément. La ligne dont les ordonnées sont les valeurs successives du vecteur N_1M_1 est une sinusoïde $M_0 m_1 m_2, \dots$ que nous désignerons par A ; celle dont les ordonnées sont les valeurs successives du vecteur $M_1P_1 = \text{arc } M_0M_1$ est une droite $M_0 \mu_1 \mu_2, \dots$, bissectrice de l'angle des axes, car tous les triangles rectangles analogues à $M_0 Q_1 \mu_1$ sont isocèles, puisque $M_0 Q_1 = \text{arc } M_0 M_1$. Nous la désignerons par D. Il suffit d'ajouter algébriquement les ordonnées des lignes A et D qui correspondent à une même abscisse, pour retrouver les points $M_0 p_1, p_2, \dots$ de la courbe des espaces. Une construction analogue permet de déterminer les tangentes. Soient R, R' deux points de la sinusoïde A (fig. 46), r et r' leurs homologues sur la courbe des espaces. RT la tangente en R, t le point de l'ordonnée R'r' tel que $s't = S'T$. Quand R' vient se confondre avec R supposé fixe, RR' et rr' deviennent, à la limite, les tangentes en R et r ; RT tend vers zéro, ainsi que son égal $r't$. Par suite, la position limite de rr' est rt . D où il résulte que, si l'on ajoute algébriquement les ordonnées de la droite D et celles des tangentes à la sinusoïde A, on obtient les tangentes à la courbe des espaces.

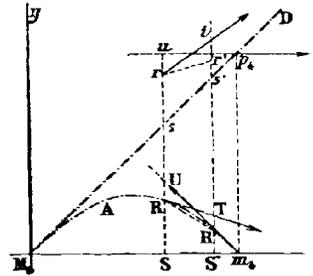


Fig. 46.

On déduit de là plusieurs conséquences utilisées dans le tracé de la courbe des vitesses :

1° Les points $M_0 m_1, m_2, \dots$ où la sinusoïde A rencontre l'axe des temps étant des points d'inflexion, les points correspondants $M_0 p_1, p_2, \dots$ de la courbe des espaces, situés sur la droite D, en sont aussi. Car, d'après la construction suivie, si l'une des courbes est située de part et d'autre de sa tangente, au voisinage du point de contact l'autre l'est nécessairement aussi.

2° Les tangentes aux points p_1, p_2, \dots de la courbe des espaces sont parallèles à l'axe des temps. Car les tangentes en M_0, m_1, \dots à la sinusoïde A, étant inclinées de 45° sur $M_0 x$ (*) si l'on applique à l'une d'elles, $m_1 U$ (fig. 46), la construction indiquée plus haut, on forme deux triangles $m_1 S U, p_1 s u$, dont l'égalité justifie la proposition énoncée.

3° Les tangentes aux points p_2, p_3, p_4, \dots de la courbe des espaces sont parallèles à la droite D. On les obtient en effet en appliquant aux tangentes en m_2, m_3, \dots à la sinusoïde A, lesquelles sont parallèles à l'axe des temps, la même construction que précédemment.

4° La courbe des espaces présente une infinité d'ondulations autour de la droite D. Deux arcs consécutifs sont symétriques par rapport à leur point d'intersection avec D.

Courbes des vitesses. On a construit les vecteurs représentatifs de la vitesse seu-

(*) Cette propriété, pour la tangente en M_0 à A, résulte de ce que $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$ quand x tend vers zéro.

lement aux points M_0, p_1, p_2, p_3 de la courbe des espaces, ce qui suffit d'après les observations ci-dessus. La courbe obtenue, $p'_0 p'_1 p'_2 \dots$, est une sinusoïde, tangente à l'axe des temps aux points $p'_1, p'_2 \dots$; ses ordonnées maxima sont $M_0 p'_0, Q_3 p'_3 \dots$. Elle est entièrement située au-dessus de $M_0 x$.

Courbe des accélérations. On a déterminé seulement deux vecteurs représentatifs de l'accélération tangentielle, en $\alpha'_1 \beta'_1$ et $\alpha'_2 \beta'_2$; la courbe tracée, $M_0 p''_1 p''_2 \dots$ est encore une sinusoïde.

Discussion du mouvement. On reconnaît aisément que le mouvement, toujours direct, est alternativement retardé, puis accéléré, pendant des durées successives égales à la moitié du temps nécessaire au point M pour faire le tour de la circonférence o .

La droite D peut être considérée comme la loi graphique des espaces d'un mouvement uniforme, qui est le mouvement moyen du point mobile.

CHAPITRE III

THÉORIE DU MOUVEMENT PROJETÉ

§ I. — Relation entre la vitesse d'un point et celle de sa projection.

72. Projection du mouvement d'un point sur un plan ou sur un axe. —

Les propriétés des mouvements, étudiées dans les deux chapitres précédents, ont été établies abstraction faite de la nature de la trajectoire. Si l'on fait intervenir cette dernière, il y a lieu de considérer séparément le cas du mouvement rectiligne, et celui du mouvement curviligne, plan ou gauche. La théorie des mouvements projetés a précisément pour but de ramener l'étude des mouvements curvilignes gauches à celle, plus simple, des mouvements curvilignes plans, et, en dernière analyse, à l'étude des mouvements rectilignes.

Soient un plan P et une direction $x'x$ qui ne lui est pas parallèle. A tout point M de l'espace, on peut faire correspondre un autre point m obtenu en menant par M soit une parallèle à $x'x$ jusqu'à son intersection avec le plan P (fig. 47), soit un plan parallèle au plan P coupant $x'x$ en m (fig. 48). Le point m est la projection du point M et se meut avec lui. Son mouvement est appelé la *projection du mouvement de l'espace*, faite, dans le premier cas, sur le plan P parallèlement à un axe $x'x$, et, dans le second, faite sur l'axe $x'x$ parallèlement au plan P.

Dans ces deux genres de projections, on suppose habituellement que l'axe $x'x$ est perpendiculaire au plan P.

Les théorèmes suivants établissent une relation entre la vitesse du point de l'espace et celle de sa projection.

73. **Théorème.** — *Lorsqu'on projette un point M sur un plan P parallèlement à une direction $x'x$, la vitesse de la projection du point est égale, à chaque instant, à la projection de la vitesse du point de l'espace sur le même plan.*

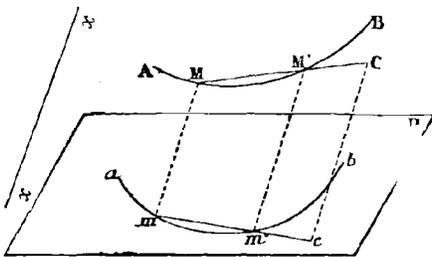


Fig. 47.

Soient M et M' les positions du mobile aux instants t et $t + \Delta t$, m et m' les projections correspondantes,

$$V = \lim \frac{\text{arc } MM'}{\Delta t} \quad \text{et} \quad v = \lim \frac{\text{arc } mm'}{\Delta t} \quad (15)$$

les vitesses de M et m à l'instant t . Il s'agit de démontrer que $v = (V)_P$ (*).

On considère, pour cela, deux mouvements uniformes, ayant pour trajectoires respectives les cordes MM' et mm' , et dont les vitesses V_1 et v_1 soient

telles, que les mobiles qui en sont animés passent, l'un en M et M', l'autre en m et m' , aux instants t et $t + \Delta t$. Dans cette hypothèse, on a

$$V_1 = \frac{\text{corde } MM'}{\Delta t} \quad v_1 = \frac{\text{corde } mm'}{\Delta t}$$

(*) Le symbole $(V)_P$ représente la projection de V sur le plan P.

ou, en représentant ces vitesses par les vecteurs MC et mc

$$\frac{\text{corde } MM'}{\Delta t} = MC \qquad \frac{\text{corde } mm'}{\Delta t} = mc$$

On tire de ces égalités

$$\frac{\text{corde } MM'}{\text{corde } mm'} = \frac{MC}{mc}$$

Cette proportion prouve que Cc est parallèle à x'x, et, par suite que mc est la projection de MC. Donc $v_1 = (V_1)_P$

Or, on peut écrire

$$V_1 = \frac{\text{corde } MM'}{\text{arc } MM'} \times \frac{\text{arc } MM'}{\Delta t} ; \qquad v_1 = \frac{\text{corde } mm'}{\text{arc } mm'} \times \frac{\text{arc } mm'}{\Delta t}$$

d'où, en faisant tendre Δt vers zéro

$$\text{limite } V_1 = \text{limite } \frac{\text{arc } MM'}{\Delta t} = V ; \qquad \text{limite } v_1 = \text{limite } \frac{\text{arc } mm'}{\Delta t} = v (*)$$

Comme v₁ est à tout instant la projection de V₁, on a à la limite

$$v = (V)_P$$

74. Théorème. — *Lorsqu'on projette un point M sur un axe x'x parallèlement à un plan P, la vitesse de la projection de ce point est égale, à chaque instant, à la projection de la vitesse du point de l'espace sur le même axe.*

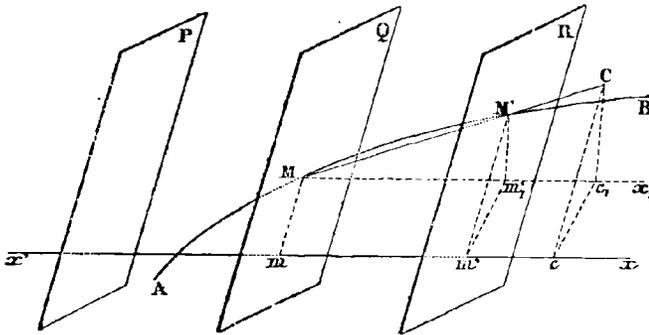


Fig. 48.

Soient, comme précédemment, M et M' les positions du mobile aux instants t et t + Δt, m et m' les projections correspondantes (fig. 48), V et v les vitesses de M et de m à l'instant t. Il faut montrer que

$$v = (V)_P$$

On considère pour cela deux mouvements uniformes, ayant pour trajectoires respectives

la corde MM' et l'axe x'x, et dont les vitesses V₁ et v₁ soient telles, que les mobiles qui en sont animés passent, l'un en M et M', l'autre en m et m', aux instants t et t + Δt. Dans cette hypothèse,

$$V_1 = \frac{\text{corde } MM'}{\Delta t} \quad (1); \qquad v_1 = \frac{mm'}{\Delta t} \quad (2)$$

En représentant V₁ et v₁ par les vecteurs MC et mc, on a

$$\frac{\text{corde } MM'}{\Delta t} = MC ; \qquad \frac{mm'}{\Delta t} = mc$$

(*) On sait que la limite du rapport d'un arc infiniment petit à sa corde est égale à l'unité.

d'où

$$\frac{\text{corde } MM'}{mm'} = \frac{MC}{mc} \quad (3)$$

Menons Mx_1 parallèle à $x'x$, et portons sur cette droite un vecteur Mc_1 égal à mc et de même sens que lui (vecteurs équipollents). A cause du parallélisme de cc_1 et de Mm' , les points c et c_1 sont dans un plan parallèle au plan P . Nous allons montrer que ce plan contient aussi le point C .

Soit m'_1 le point de rencontre de Mx_1 avec le plan projetant du point M' . Les segments Mm_1 et mm' sont égaux, et la proportion (3) devient

$$\frac{\text{corde } MM'}{Mm'_1} = \frac{MC}{Mc_1}$$

ce qui prouve que les droites Cc_1 et $M'm'_1$, situées dans un même plan, sont parallèles, et, par suite, que Cc_1 est parallèle au plan P . Le plan des trois points $Cc_1 c$ est donc aussi parallèle au plan P , et c est la projection de C sur $x'x$.

Par conséquent $v_1 = (V_1)x'x$

On prouverait, comme au paragraphe précédent, que si Δt tend vers zéro, $V_1 a$ pour limite la vitesse V du mobile M à l'instant t . Comme, d'autre part, limite $v_1 = v$ (15); et que v_1 est à tout instant la projection de V_1 , on a à la limite

$$v = (V)x'x$$

75. Applications. — I. *La projection d'un mouvement rectiligne et uniforme sur un plan ou sur un axe est un mouvement rectiligne et uniforme.*

Bien que la proposition énoncée soit générale, nous supposons, pour la démontrer, que les projections soient orthogonales.

Le mouvement du point m est évidemment rectiligne. Il est aussi uniforme. Soient, en effet, V la vitesse constante du mouvement uniforme de l'espace, et α l'angle formé par la trajectoire avec le plan ou avec l'axe sur lequel on projette. L'expression de la vitesse v du point m est, d'après les théorèmes précédents

$$v = V \cos \alpha$$

Donc $v = \text{constante}$.

Si le mouvement de l'espace était curviligne, sa projection ne serait pas nécessairement un mouvement uniforme. Dans ce cas, en effet, l'angle α dépendrait de la position du point M sur sa trajectoire, et v varierait avec t .

II. *La projection d'un mouvement rectiligne et uniformément varié sur un plan ou sur un axe est un mouvement rectiligne et uniformément varié.*

La première partie de la proposition est évidente.

Soit $V = v_0 + \varphi t$ l'équation des vitesses du mobile M . La vitesse de sa projection a pour expression, en conservant les mêmes notations que dans la question précédente.

$$v = V \cos \alpha = v_0 \cos \alpha + (\varphi \cos \alpha) t$$

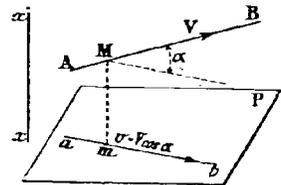


Fig. 49.

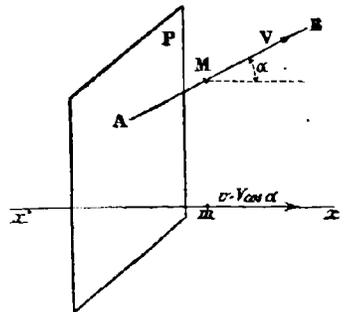


Fig. 50.

Cette relation étant du premier degré en v et en t , le mouvement du point m est uniformément varié. Son accélération tangentielle est $\varphi \cos \alpha$

Remarques. 1° Si la trajectoire n'était pas rectiligne, le mouvement du point m ne serait pas uniformément varié, car α étant dans ce cas fonction du temps, v ne serait plus du premier degré en t .

2° L'accélération tangentielle du point m est égale à la projection de l'accélération tangentielle du mouvement de l'espace. Nous verrons plus loin (77-117-119) qu'il n'en est plus ainsi en général si le mouvement de l'espace n'est pas rectiligne.

§ II. — Étude du mouvement d'un point rapporté à un système de coordonnées rectilignes.

76. Théorème. — Le mouvement d'un point dans l'espace est complètement déterminé quand on connaît les mouvements de ses projections sur trois axes de coordonnées.

Si l'on rapporte le mouvement à un système de trois axes de coordonnées ox, oy, oz formant un trièdre, on peut projeter toutes les positions du point mobile sur chaque axe, parallèlement au plan des deux autres.

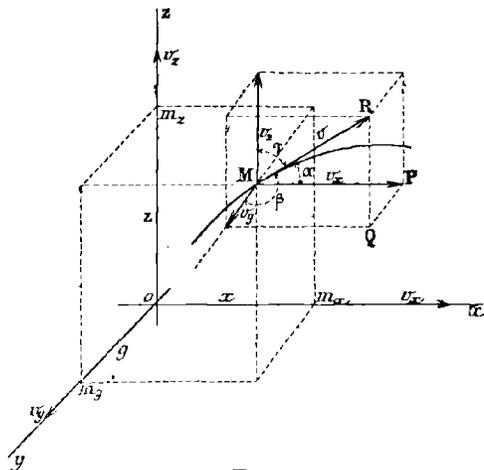


Fig. 51.

A la position M qu'il occupe à l'instant t correspondent ainsi trois projections m_x, m_y, m_z , qui définissent précisément les coordonnées x, y, z , du mobile à cet instant (fig. 51) Soient

$$(1) \quad \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

les équations des espaces des mouvements de ces points, établies en prenant le point o comme origine commune des espaces. Nous nous proposons de démontrer qu'elles suffisent pour déterminer complètement le mouvement du point M .

1° *Détermination de la trajectoire.* A chaque valeur de t correspond un système de valeurs de x, y, z , et par suite une position du point M . La connaissance des trois équations précédentes permet donc de construire la trajectoire par points. Elles la déterminent aussi algébriquement. L'élimination de t , entre les expressions de x, y et z prises deux à deux, donne des équations

$$F_1(x, y) = 0$$

$$F_2(y, z) = 0$$

$$F_3(z, x) = 0$$

qui représentent les cylindres projetants de la trajectoire sur les trois plans coordonnés. Deux d'entre elles suffisent pour la déterminer.

La position du mobile à l'instant initial est définie par ses coordonnées, obtenues en faisant $t = 0$ dans les équations (1)

2^o *Détermination des lois du mouvement.* Le théorème du paragraphe 74 établissant une relation entre la vitesse du point M et celles de ses projections sur les trois axes de coordonnées, il est naturel de rechercher d'abord l'équation des vitesses du mouvement de l'espace.

Soient

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} = f_1(t) \\ v_y = \frac{dy}{dt} = f_2(t) \\ v_z = \frac{dz}{dt} = f_3(t) \end{array} \right. \quad (2)$$

les vitesses connues des points m_x, m_y, m_z , et v celle du point M. De ce que v_x, v_y, v_z sont respectivement les projections de v sur ox, oy, oz faites sur chaque axe parallèlement au plan des deux autres, il résulte que v est la diagonale d'un parallépipède dont les trois arêtes qui aboutissent en M sont équipollentes à v_x, v_y, v_z (fig. 51). Il n'est d'ailleurs pas nécessaire, pour trouver la grandeur et la direction de la vitesse v , de construire complètement ce parallépipède. Il suffit de figurer le contour polygonal MPQR (fig. 52), dont chaque côté est un vecteur équipollent à l'une des vitesses v_x, v_y, v_z , et de tracer la résultante de ce contour.

La même construction détermine également la vitesse initiale en grandeur et en direction. Il suffit de faire $t = 0$ dans les équations (2), et de construire le parallépipède, ou le contour polygonal équivalent, dont les côtés sont équipollents aux vitesses v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} , ainsi trouvées.

Connaissant la position et la vitesse du mobile à l'instant initial, on peut orienter la trajectoire, et, par exemple, choisir comme sens positif celui de la vitesse initiale.

Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, on a

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

et

$$v = \pm \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (3)$$

Le signe du radical doit être choisi de telle sorte que v prenne la valeur v_0 pour $t = 0$.

On peut aussi, en supposant encore les axes rectangulaires, déterminer la direction de la vitesse par ses cosinus directeurs. En appelant α, β, γ , les angles que forme la direction \overline{MR} avec les directions positives des axes de coordonnées, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = v \cos \alpha \\ v_y = v \cos \beta \\ v_z = v \cos \gamma \end{array} \right. \quad (4)$$

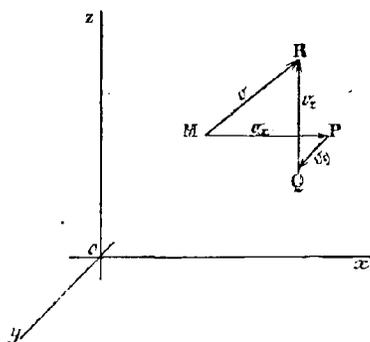


Fig. 52.

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{v_x}{\pm \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \\ \cos \beta = \frac{v_y}{\pm \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \\ \cos \gamma = \frac{v_z}{\pm \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \end{array} \right. \quad (5)$$

les formules (3) et (5) font connaître, à chaque instant, la grandeur et la direction de la vitesse du point M.

La formule (3), quand on y a remplacé v_x, v_y, v_z , par leurs valeurs (2), est l'équation des vitesses du mouvement de l'espace. L'équation des espaces s'en déduit par une intégration, et celle des accélérations tangentielles par une dérivation. La direction de l'accélération tangentielle est d'ailleurs celle de la vitesse, ou la direction opposée, suivant que φ et v sont de même signe ou de signes contraires.

Observons qu'il n'est pas indispensable de former l'équation des espaces. Son rôle est, en effet, de faire connaître les positions du mobile aux divers instants de la durée ; on obtient évidemment des indications équivalentes, d'une manière plus simple, en utilisant les équations (1) (*).

77. Remarque. — Les projections de φ sur les trois axes sont

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi)_{ox} = \varphi \cos \alpha = \frac{dv}{dt} \cos \alpha \\ (\varphi)_{oy} = \varphi \cos \beta = \frac{dv}{dt} \cos \beta \\ (\varphi)_{oz} = \varphi \cos \gamma = \frac{dv}{dt} \cos \gamma \end{array} \right. \quad (6)$$

D'autre part, les accélérations tangentielles des projections m_x, m_y, m_z du point M sont

$$\varphi_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \varphi_y = \frac{dv_y}{dt} \quad \varphi_z = \frac{dv_z}{dt}$$

ou, d'après les formules (4), en remarquant que α, β, γ sont des fonctions de t toutes les fois que la trajectoire du mouvement de l'espace n'est pas rectiligne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_x = \frac{dv}{dt} \cos \alpha - v \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} \\ \varphi_y = \frac{dv}{dt} \cos \beta - v \sin \beta \frac{d\beta}{dt} \\ \varphi_z = \frac{dv}{dt} \cos \gamma - v \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt} \end{array} \right. \quad (7)$$

(*) Les équations $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$ sont appelées *les équations du mouvement en coordonnées rectilignes*. On voit qu'elles permettent d'étudier le mouvement aussi complètement que la loi des espaces $s = f(t)$, et qu'elles font, en outre, connaître la trajectoire.

En comparant les formules (6) et (7), on voit que, si l'on projette le mouvement curviligne d'un point M sur un axe, l'accélération tangentielle de la projection du point n'est généralement pas égale à la projection de l'accélération tangentielle du point de l'espace sur le même axe.

On verra plus loin (119) l'explication de ce fait.

Si le mouvement de l'espace est rectiligne, α , β , γ sont des constantes, et leurs dérivées par rapport à t sont nulles. La comparaison des formules (6) et (7) donne alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_x = \varphi \cos \alpha \\ \varphi_y = \varphi \cos \beta \\ \varphi_z = \varphi \cos \gamma \end{array} \right.$$

Dans ce cas, l'accélération tangentielle de la projection du point mobile sur un axe est égale, à chaque instant, à la projection de l'accélération tangentielle du point de l'espace sur le même axe. On a déjà constaté précédemment qu'il en est ainsi quand on projette un mouvement rectiligne uniformément varié (75).

78. Cas où la trajectoire est plane. — Si la trajectoire est plane, il suffit, pour déterminer le mouvement du mobile, de le rapporter à deux axes de coordonnées pris dans le plan de la courbe. Les projections $m_x m_y$ du point M sont alors faites sur chacun des axes parallèlement à l'autre.

Soient $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ les équations des espaces des mouvements de m_x, m_y , établies en prenant le point o comme origine commune des espaces. Par analogie avec ce qui précède :

1° On obtient l'équation de la trajectoire en éliminant t entre les équations

$$x = f_1(t) \qquad y = f_2(t)$$

Les coordonnées du mobile sont, à l'instant initial, $x_0 = f_1(o)$ $y_0 = f_2(o)$.

2° La vitesse v du mobile M est, à chaque instant, représentée en grandeur et en

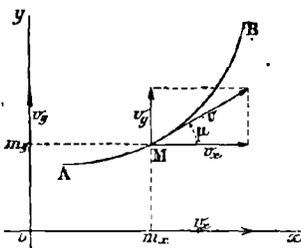


Fig. 53.

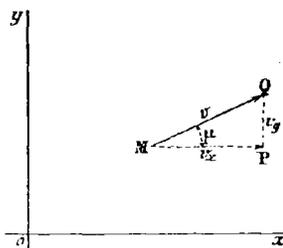


Fig. 54.

direction par la diagonale du parallélogramme dont les deux côtés, qui aboutissent en M, sont équipollents aux vitesses des points m_x, m_y . Ou, ce qui revient au même, elle est la résultante d'un contour triangulaire MPQ dont les côtés sont équipollents aux vitesses des points m_x, m_y . (Fig. 53 et 54).

On construit la vitesse initiale de la même manière, et l'on oriente la trajectoire comme il a été dit précédemment.

Si les coordonnées sont rectangulaires, le parallélogramme devient un rectangle. On a alors :

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

et

$$v = \pm \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (1)$$

L'angle μ formé par la direction \overline{MQ} de la vitesse avec la direction positive de l'axe des x , est donné par la formule

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{v_y}{v_x} \quad (2)$$

Comme $v_x = \frac{dx}{dt} = f_1(t)$ et $v_y = \frac{dy}{dt} = f_2(t)$

les relations (1) et (2) déterminent à chaque instant la grandeur et la direction de la vitesse du mouvement plan considéré. On choisit le signe du second membre, dans la formule (1), de telle sorte que l'expression de v se réduise à la vitesse initiale quand on fait $t = 0$.

3° Les accélérations des mouvements des points $m_x m_y$ ne sont égales aux projections de l'accélération tangentielle du mobile M que si le mouvement donné est rectiligne.

79. Problème. — I. — *Etudier le mouvement d'un point mobile dont les coordonnées rectangulaires sont exprimées, en fonction du temps, par les formules*

$$x = 9 \cos^4 t \quad y = 9 \sin^4 t \quad (1)$$

1° *Equation de la trajectoire.* On a

$$\cos^2 t = \frac{\sqrt{x}}{3} \quad \sin^2 t = \frac{\sqrt{y}}{3}$$

et par conséquent

$$\frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt{y}}{3} = 1.$$

C'est l'équation de la trajectoire. Il convient de la rendre rationnelle par deux élévations au carré successives. On trouve

$$x^2 - 2xy + y^2 - 18x - 18y + 81 = 0$$

Elle représente une *Parabole*, tangente à Ox au point A ($oA = 9$), à Oy au point B ($oB = 9$), et dont l'axe de symétrie est la bissectrice oz de l'angle xoy . Le sommet C est l'intersection de oz et de la parabole. Ses coordonnées sont égales à $\frac{9}{4}$.

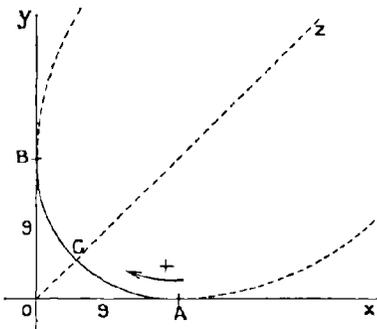


Fig. 55.

2° *Etat initial.* Les coordonnées du mobile sont, à l'instant initial, $x_0 = 9$ $y_0 = 0$. Le mobile part donc du point A. D'autre part, les côtés du rectangle des vitesses sont donnés, en fonction de t , par les formules

$$v_x = -36 \sin t \cos^3 t \quad v_y = 36 \sin^3 t \cos t.$$

Ces expressions s'annulant quand on y fait $t = 0$, la vitesse initiale du mobile est nulle, et l'on ignore le sens de son déplacement à partir du point A. Mais si l'on observe que, pour $t = 0$, $x = 9 \cos^4 t$ prend sa va-

leur maximum, et que celle-ci est égale à 9, on conclut que le mobile se meut dans le sens AB en partant de sa position initiale : ce sera le sens direct ou positif de la trajectoire orientée.

3° *Equations du mouvement.* D'après les valeurs de v_x et v_y trouvées plus haut, on a

$$\begin{aligned} v &= \pm 36 \sin t \cos t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= \pm 36 \sin t \cos t \sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 2 \sin^2 t \cos^2 t} \\ &= \pm 18 \sin 2t \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t} \end{aligned}$$

Cette formule doit donner pour v , au voisinage de l'instant initial, une valeur positive, puisque le mouvement s'effectue tout d'abord dans le sens direct à partir de la position A. On doit donc attribuer le signe + au second membre, et prendre pour valeur définitive de la vitesse à l'instant t l'expression

$$v = 18 \sin 2t \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t} \quad (2)$$

C'est l'équation des vitesses du mouvement. Une dérivation fait connaître l'équation des accélérations tangentielles

$$\begin{aligned} \varphi - \frac{dv}{dt} &= 36 \cos 2t \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t} - \frac{18 \sin^2 2t \cos 2t}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t}} \\ &= \frac{36 \cos^3 2t}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t}} \end{aligned} \quad (3)$$

On a vu précédemment (76) qu'il n'est pas nécessaire de former l'équation des espaces, puisqu'on peut déterminer les positions du mobile sur sa trajectoire, aux divers instants, en calculant ses coordonnées.

4° *Discussion du mouvement.* Le mouvement est périodique, et il suffit, pour en connaître toutes les propriétés, de faire varier $2t$ entre 0 et 2π , ou t entre 0 et π . La durée de la période est π .

L'accélération tangentielle ne devient jamais infinie ; elle s'annule en même temps que $\cos 2t$, c'est-à-dire quand $2t = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$. Son signe est celui de $\cos 2t$.

La vitesse ne devient jamais infinie ; elle s'annule en même temps que $\sin 2t$, c'est-à-dire quand $2t = 0, \pi$ ou 2π . Son signe est celui de $\sin 2t$.

Le tableau suivant indique les particularités du mouvement.

$2t$	0	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π	
t	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π	
φ	36	+	0	-	-36	-	0	+	36
v	0	croît	$g\sqrt{2}$	décroit	0	décroit	$-g\sqrt{2}$	croît	0
		+	Maximum	+		-	Minimum	-	
Positions du mobile	A		C		B		C		A
Nature et sens du mouvement	Repos	Accéléré direct	Uniforme	Retardé direct	Repos	Accéléré rétrograde	Uniforme	Retardé rétrograde	Repos

Le mouvement s'effectue alternativement de A en B, et de B en A, comme celui d'un pendule. Les arcs AC, CB sont parcourus dans le même temps, dans les deux sens.

Problème II. — *Un point mobile M_1 parcourt une circonférence O , de rayon a , d'un mouvement uniforme dont la vitesse est u . Etudier le mouvement de sa projection orthogonale M sur un plan quelconque P . (Fig. 56).*

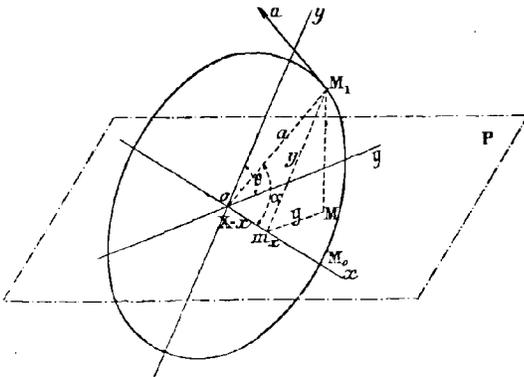


Fig. 56.

On peut supposer que le plan P passe par le centre de la circonférence, qu'il coupe suivant le diamètre ox . Considérons le diamètre oy perpendiculaire au précédent, et soit oy sa projection sur le plan P . Les coordonnées (x, y) du point M dans le système d'axes rectangulaires xoy sont

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y \cos \theta \end{cases}$$

en désignant par (X, Y) celles du point M_1 dans le système xOy , et par θ l'angle des deux plans. Or, on a, en prenant M_0 comme origine des espaces dans le mouvement circulaire uniforme, et l'instant du passage en M_0 comme origine des temps

$$\begin{cases} X = a \cos \alpha \\ Y = a \sin \alpha \end{cases}$$

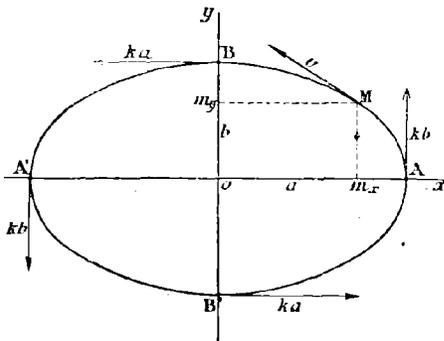


Fig. 56 bis.

D'autre part $\text{arc } M_0 M_1 = ut = \alpha$

d'où
$$\alpha = \frac{ut}{a}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} X = a \cos \frac{ut}{a} \\ Y = a \sin \frac{ut}{a} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x = a \cos \frac{ut}{a} \\ y = a \cos \theta \sin \frac{ut}{a} \end{cases}$$

En posant, pour abrégier, $a \cos \theta = b$ et $\frac{u}{a} = h$, on est ramené à étudier le mouvement d'un point M défini par les équations

$$\begin{cases} x = a \cos ht \\ y = b \sin ht \end{cases} \tag{1}$$

1° *Equation de la trajectoire.* On l'obtient en éliminant t entre les équations (1). Celles-ci peuvent être mises sous la forme

$$\frac{x}{a} = \cos ht \qquad \frac{y}{b} = \sin ht$$

En élevant au carré et en ajoutant membre à membre, on en déduit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La trajectoire est donc une *Ellipse*, dont les axes, dirigés respectivement suivant ox et oy , sont $2a$ et $2b$. (Fig. 56 bis).

2° *Vitesse à l'instant t.* Les vitesses des projections du point M sur les axes sont, à l'instant t

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = -ah \sin ht \\ v_y = \frac{dy}{dt} = bh \cos ht \end{cases} \tag{2}$$

On a donc, v désignant la vitesse du point M

$$v = \pm \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \pm h \sqrt{a^2 \sin^2 ht + b^2 \cos^2 ht}$$

A l'instant initial, $x = a$ et $y = 0$, de sorte que le mobile part du point A. Les projections de la vitesse initiale v_0 sur les axes ox , oy , obtenues en faisant $t = 0$ dans les formules (2), sont $v_{0x} = 0$ et $v_{0y} = bh$

et l'on a $v_0 = v_{0y} = bh$ c'est-à-dire que la vitesse initiale est perpendiculaire à ox , et dirigée dans le sens oy .

Si l'on convient de choisir le sens de A vers B comme sens positif du mouvement sur la trajectoire, on doit prendre pour expression générale de v

$$v = k \sqrt{a^2 \sin^2 kt + b^2 \cos^2 kt}$$

C'est l'équation des vitesses du mouvement.

L'angle μ formé par la direction de la vitesse avec la direction positive de ox , mesuré en allant de ox vers oy , est donné par la formule

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{v_y}{v_x} = - \frac{b}{a} \operatorname{cotg} kt$$

On sait d'ailleurs que cette direction est celle de la tangente à l'ellipse au point M. 3° *Accélération tangentielle à l'instant t.* En la désignant par φ on a

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{k^2 (a^2 - b^2) \sin 2kt}{2 \sqrt{a^2 \sin^2 kt + b^2 \cos^2 kt}}$$

C'est l'équation des accélérations tangentielles du mouvement.

4° *Discussion du mouvement.* Il suffit, pour en avoir toutes les particularités, de faire varier kt entre 0 et 2π , ou t entre 0 et $\theta = \frac{2\pi}{k}$. Le mouvement est donc périodique, et sa période est θ . L'accélération ne devient jamais infinie. Elle s'annule pour

$2kt = 0, \quad 2kt = \pi, \quad 2kt = 2\pi, \quad 2kt = 3\pi, \quad \text{et} \quad 2kt = 4\pi$
c'est-à-dire pour

$$t = 0, \quad t = \frac{\pi}{2k}, \quad t = \frac{\pi}{k}, \quad t = \frac{3\pi}{2k}, \quad \text{et} \quad t = \frac{2\pi}{k}$$

Elle est toujours du signe de $\sin 2kt$.

La vitesse ne devient ni nulle ni infinie, et reste toujours positive.

Le tableau suivant indique toutes les propriétés du mouvement.

t	0	$\frac{\pi}{2k}$	$\frac{\pi}{k}$	$\frac{3\pi}{2k}$	$\frac{2\pi}{k}$
kt	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
φ	0	+	0	-	0
v	kb	croît	ka	décroît	kb
		+		+	+
Nature du mouvement.		Accéléré	Retardé	Accéléré	Retardé
Sens du mouvement.	Uniforme	Uniforme	Uniforme	Uniforme	Uniforme
	Le mobile part de A, et tourne en sens inverse des aiguilles d'une montre. La durée de sa révolution est $\frac{2\pi}{k}$. Chaque quart de l'ellipse est parcouru pendant le même temps $\frac{\pi}{2k}$				

§ III. — *Etude du mouvement plan d'un point rapporté à un système de coordonnées polaires.*

80. **Extension de la signification du mot : vitesse.** — La vitesse d'un mobile à un instant donné est, quelle que soit la nature de son mouvement, exprimée par la dérivée $\frac{ds}{dt}$ de l'espace par rapport au temps. D'une façon plus générale, toutes les fois qu'une quantité variable dépend du temps, on appelle vitesse de cette quantité à un instant quelconque, sa dérivée par rapport à t . Soit, par exemple, un liquide placé dans un vase et s'écoulant par un orifice ; si, pendant un temps Δt succédant à une époque t , il s'écoule un volume ΔV du liquide, on appelle *vitesse d'écoulement* à l'instant t la limite du rapport $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ quand Δt tend vers zéro. Le volume du liquide qui s'écoule pendant un temps donné est évidemment une fonction de ce temps ; la vitesse d'écoulement est la dérivée de cette fonction.

81. On sait que la position d'un point M dans un plan est déterminée si l'on connaît le vecteur $oM = r$, appelé *rayon vecteur*, et l'angle $x oM = \theta$, ou *angle polaire*, que forme oM avec une direction fixe ox du plan (fig. 57). Le point o est le *pôle*. ox est l'*axe polaire* ; les quantités r et θ sont les *coordonnées polaires* du point M. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Le mouvement d'un point dans un plan est complètement déterminé quand on connaît les expressions de ses coordonnées polaires r et θ en fonction du temps.*

1° *Détermination de la trajectoire.* — Soient $r = f_1(t)$, $\theta = f_2(t)$ les relations données. A chaque valeur de t correspond un système de valeurs de r et de θ , et par suite une position du point M. La connaissance des lois précédentes permet donc de construire la trajectoire par points. Elle en donne aussi l'équation en coordonnées polaires, $r = F(\theta)$, obtenue en éliminant t entre les relations $r = f_1(t)$ et $\theta = f_2(t)$.

2° *Détermination des lois du mouvement : Recherche de la vitesse.* — *Méthode directe.* — Soient M et M' les positions du mobile à deux instants voisins t et $t + \Delta t$, r et θ les coordonnées polaires de M, $r + \Delta r$ et $\theta + \Delta \theta$ celles de M' (fig. 57). La vitesse de M à l'instant t est

$$\begin{aligned} v &= \limite \frac{\text{arc } MM'}{\Delta t} \\ &= \limite \frac{\text{arc } MM'}{\text{corde } MM'} \times \limite \frac{\text{corde } MM'}{\Delta t} \\ &= \limite \frac{\text{corde } MM'}{\Delta t} \end{aligned}$$

Evaluons les projections de v sur la direction Mx' du rayon vecteur, et sur la perpendiculaire My' menée dans le sens croissant des angles polaires. Nous aurons

$$(v)_{Mx'} = \lim. \frac{(MM')_{Mx'}}{\Delta t} = \lim. \frac{MH}{\Delta t}$$

et

$$(v)_{My'} = \lim. \frac{(MM')_{My'}}{\Delta t} = \lim. \frac{MK}{\Delta t}$$

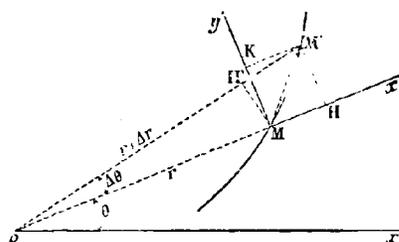


Fig. 57.

Or

$$\begin{aligned} \text{MH} = \text{OH} - \text{OM} &= (r + \Delta r) \cos \Delta\theta - r = \Delta r \cos \Delta\theta - r(1 - \cos \Delta\theta) \\ &= \Delta r \cos \Delta\theta - 2r \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\frac{\text{MH}}{\Delta t} = \frac{\Delta r \cos \Delta\theta - 2r \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t}$$

Δr et $\Delta\theta$ sont infiniment petits en même temps que Δt ; si ce dernier est considéré comme infiniment petit principal, $\Delta r \cos \Delta\theta$ est du premier ordre, et $2r \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2}$ du second ordre. En ne considérant dans chaque terme du rapport que les parties de l'ordre le moins élevé, il reste

$$(v)_{\text{gl}} = \lim. \frac{\Delta r \cos \Delta\theta}{\Delta t} = \lim. \frac{\Delta r}{\Delta t} \lim. \cos \Delta\theta = \frac{dr}{dt}$$

Cette quantité représente la vitesse d'accroissement du rayon vecteur. On l'appelle *vitesse de glissement* du point M, et, si on la désigne par v_g , on a

$$v_g = \frac{dr}{dt} \tag{1}$$

De même

$$\text{MK} = \text{M'H} = (r + \Delta r) \sin \Delta\theta$$

d'où

$$\frac{\text{MK}}{\Delta t} = \frac{(r + \Delta r) \sin \Delta\theta}{\Delta t}$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{\text{MK}}{\Delta t} = (r + \Delta r) \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \times \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

On voit sous cette forme que, quand Δt tend vers zéro, il reste à la limite

$$\lim. \frac{\text{MK}}{\Delta t} \text{ ou } (v)_{\text{cy}} = r \frac{d\theta}{dt} \tag{2}$$

Cette expression s'appelle la *vitesse de circulation* du mobile à l'instant t . On la désigne par w .

Observons que le passage du mobile de M en M' pourrait s'effectuer en lui faisant d'abord parcourir l'arc de cercle $\text{MH}' = r\Delta\theta$ de rayon r , puis la portion de rayon vecteur $\text{H'M}' = \Delta r$. Les quantités $w = \frac{rd\theta}{dt}$ et $v_g = \frac{dr}{dt}$ sont précisément les vitesses de ces deux mouvements (*).

(*) On voit en effet que $w = \lim. \frac{\text{MH}'}{\Delta t}$ et $v_g = \lim. \frac{\text{H'M}'}{\Delta t}$ quand Δt tend vers zéro.

On déduit de cette analyse que : la vitesse d'un mobile dont le mouvement est défini en coordonnées polaires est représentée, à chaque instant, en grandeur et en direction, par la diagonale du rectangle construit sur la vitesse de glissement et la vitesse de circulation comme côtés.

Par conséquent

$$v^2 = v_g^2 + v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (3)$$

En remplaçant r , $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ par leurs valeurs tirées des équations du mouvement $r = f_1(t)$, $\theta = f_2(t)$, on a à chaque instant l'expression de la vitesse en fonction du temps

$$v = \pm \sqrt{[f_1'(t)]^2 + [f_1(t)]^2 [f_2'(t)]^2} \quad (*)$$

C'est l'équation des vitesses du mouvement. L'équation des espaces s'en déduit par une intégration, et celle des accélérations tangentielles par une dérivation.

L'inclinaison i de la direction de la vitesse sur Mx' est donnée par la formule

$$tgi = \frac{w}{v_g} = \frac{r \frac{d\theta}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = \frac{f_1(t) f_2'(t)}{f_1'(t)} \quad (4)$$

La vitesse est donc déterminée à chaque instant en grandeur et en direction. Les formules trouvées sont générales si l'on convient de diriger les axes Mx' et My' de la façon suivante. L'angle polaire θ détermine une demi-droite passant par le pôle ; l'axe Mx' est supposé dirigé dans le sens de cette demi-droite, et l'axe My' dans le sens de la demi-droite qui correspond à un angle polaire $\theta + \frac{\pi}{2}$. Enfin, l'angle i est mesuré à partir de Mx' , dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

L'angle i fait aussi connaître la direction de l'accélération tangentielle, qui est celle de la vitesse ou la direction opposée, suivant que v et φ sont de même signe ou de signes contraires.

L'expression (3) de v aurait pu être obtenue en partant de la formule $v = \frac{ds}{dt}$. On sait que la différentielle d'un arc de courbe plane est, en coordonnées polaires,

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

Par conséquent
$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

Remarquons aussi que la relation (4) peut être mise sous la forme

$$tgi = \frac{r d\theta}{dr}$$

formule établie dans le cours de Calcul différentiel.

(*) Pour le choix du signe de v , se reporter aux indications données dans l'étude du mouvement d'un point rapporté à un système de coordonnées rectilignes.

Autre méthode. — Rapportons provisoirement le mouvement aux axes rectangulaires Ox et Oy , dont le premier coïncide avec l'axe polaire (fig. 59). Les projections de la vitesse v sur ces axes sont

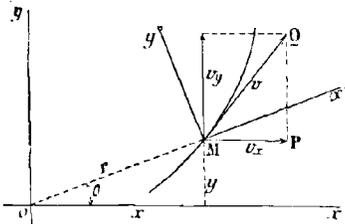


Fig. 59.

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

en désignant par x et y les coordonnées rectangulaires du point M , liées à ses coordonnées polaires par les relations

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (5)$$

En projetant le contour triangulaire MPQ sur les axes Mx' et My' définis précédemment, on a

$$\begin{cases} (v)_{Mx'} = v_x \cos \theta + v_y \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta \\ (v)_{My'} = v_y \cos \theta + v_x \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = v_y \cos \theta - v_x \sin \theta \end{cases} \quad (6)$$

Ces formules résoudre la question si v_x et v_y étaient exprimées en fonction de r et de θ . Or, on tire des relations (5), dans lesquelles r et θ sont des fonctions données de t

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \cos \theta \frac{dr}{dt} - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \sin \theta \frac{dr}{dt} + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

En substituant ensuite dans les formules (6), il vient

$$\begin{cases} (v)_{Mx'} = \frac{dr}{dt} \\ (v)_{My'} = r \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

résultats identiques à ceux qu'a fournis la méthode directe.

3° *Vitesse angulaire de rotation.* — Reprenons l'expression $\omega = r \frac{d\theta}{dt}$ qui définit la vitesse de circulation du mobile. Si l'on se reporte à l'extension que nous avons donnée au sens du mot vitesse, on voit que $\frac{d\theta}{dt}$ peut être considérée comme la vitesse d'accroissement de l'angle polaire θ . On lui donne le nom de *vitesse angulaire de rotation à l'instant t*. Si on la désigne par ω , on a

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{et} \quad \omega = \omega r$$

Cette dernière formule permet de passer de la vitesse de circulation à la vitesse angulaire de rotation, et vice versa.

L'expression de ω en fonction du temps est

$$\omega = f_2'(t)$$

4° *Vitesse aréolaire.* — Lorsque le mobile passe d'une position à une autre, son rayon vecteur décrit une certaine aire, qui est évidemment une fonction du temps. On appelle *vitesse aréolaire* du mobile la dérivée de cette aire par rapport à t . Si l'on désigne par ΔS l'aire comprise entre l'arc de trajectoire et les deux rayons vecteurs qui correspondent aux instants t et $t + \Delta t$ (fig. 60), et par v_a la vitesse aréolaire, on a

$$v_a = \lim. \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

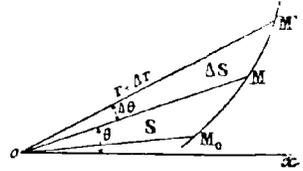


Fig. 60.

On sait que la différentielle d'une aire en coordonnées polaires est donnée par la formule

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Par suite

$$v_a = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

On a aussi

$$v_a = \frac{1}{2} \omega r^2 = \frac{1}{2} \omega r$$

Ces formules définissent les relations qui existent entre la vitesse aréolaire d'une part, la vitesse angulaire de rotation et la vitesse de circulation d'autre part.

L'expression de la vitesse aréolaire en fonction du temps est

$$v_a = \frac{1}{2} [f_1(t)]^2 f_2'(t)$$

82. Application. — *Etudier le mouvement défini par les équations*

$$r = a e^{kt} \quad , \quad \theta = ht$$

a et k représentant des constantes.

1° *Equation de la trajectoire.* — On l'obtient en éliminant t entre les équations du mouvement. Cette équation : $r = a e^{\frac{h}{k}\theta}$ définit une spirale logarithmique. (Fig. 61.)

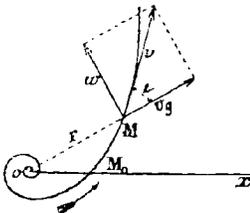


Fig. 61.

2° *Vitesse de glissement.* — *Vitesse de circulation.* — *Vitesse angulaire.* — *Vitesse aréolaire.* — *Vitesse sur la trajectoire.*

En appliquant les formules trouvées précédemment, et en conservant les notations générales, on a

$$v_g = \frac{dr}{dt} = kaekt = kr$$

$$w = r \frac{d\theta}{dt} = kaekt = kr$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = k$$

$$r_a = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} kr^2$$

$$v = \sqrt{v_y^2 + w^2} = kr \sqrt{2}$$

$$lgi = \frac{w}{v_g} = 1$$

On voit que : la vitesse de glissement est proportionnelle à chaque instant au rayon vecteur du point correspondant de la trajectoire.

La vitesse de circulation est égale à la vitesse de glissement.

La vitesse angulaire de rotation est constante, et, par suite, le mouvement du rayon vecteur autour du pôle est uniforme.

La vitesse aréolaire est proportionnelle, à chaque instant, au carré du rayon vecteur du point correspondant de la trajectoire.

La vitesse sur la trajectoire est proportionnelle au rayon vecteur.

La tangente à la trajectoire forme un angle constant de 45° avec le rayon vecteur.

3° Accélération tangentielle. — On a

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = k \sqrt{2} \frac{dr}{dt} = k^2 r \sqrt{2}$$

Elle est proportionnelle au rayon vecteur.

4° Lois du mouvement. — On a déjà

$$\varphi = k^2 r \sqrt{2} = a k^3 \sqrt{2} e^{kt}$$

et

$$v = kr \sqrt{2} = ak \sqrt{2} e^{kt}$$

Il ne reste donc plus à former que l'équation des espaces. Or

$$ds = v dt = ak \sqrt{2} e^{kt} dt$$

et par conséquent

$$s - s_0 = ak \sqrt{2} \int_0^t e^{kt} dt = a \sqrt{2} \int_0^t e^{kt} d(kt) = a \sqrt{2} (e^{kt} - 1)$$

Si l'on prend pour origine des espaces la position M_0 du mobile à l'instant initial, dont les coordonnées sont obtenues en faisant $t = 0$ dans les expressions de r et de θ , $s_0 = 0$ et il reste

$$s = a \sqrt{2} (e^{kt} - 1)$$

ce que l'on peut écrire

$$s = \sqrt{2} (ae^{kt} - a) = \sqrt{2} (oM - oM_0)$$

On voit ainsi que la longueur d'un arc de la trajectoire est égale à la diagonale du carré construit sur la différence des rayons vecteurs de ses extrémités.

5° *Discussion du mouvement.* — Quand t croît de $-\infty$ à $+\infty$, θ et r croissent respectivement de $-\infty$ à $+\infty$ et de zéro à $+\infty$. Le pôle est un *point asymptote de la courbe*. La vitesse v et l'accélération φ partent toutes deux de la valeur zéro, et croissent jusqu'à $+\infty$.

Le point mobile M possède donc un mouvement accéléré, dont la vitesse et l'accélération tangentielle s'accroissent indéfiniment.

CHAPITRE IV

THÉORIE DU MOUVEMENT RELATIF ET DES MOUVEMENTS SIMULTANÉS

§ I. — *Composition des Mouvements.*

83. Définitions. — Rappelons qu'un mouvement est dit *relatif* lorsqu'il est rapporté à un système de comparaison mobile.

Afin de préciser cette définition, imaginons qu'une bille soit lancée sur le plancher d'un wagon en mouvement (fig. 62). Elle y décrit une ligne AB qui est sa *trajectoire relative*. On peut appliquer au mouvement qui s'exécute suivant AB tout ce qui a été dit du mouvement d'un point sur sa trajectoire. Sa vitesse, égale à la dérivée des espaces mesurés sur AB, et son accélération tangentielle, dé-



Fig. 62.

rivée de cette vitesse, sont appelées la *vitesse relative* et l'*accélération tangentielle relative* du mobile; en un mot, tout se passe le long de la trajectoire relative comme si le wagon était en repos.

Mais la ligne AB n'est pas le lieu géométrique des positions successives de la bille. Quand celle-ci arrive en B, le wagon est venu en M', et B en B'. Le chemin parcouru par le mobile est donc une ligne AB'. Si la voie sur laquelle roule le wagon était fixe dans l'espace, AB' serait la *trajectoire absolue*, et le mouvement qui s'effectue sur elle le *mouvement absolu* de la bille.

Le mouvement de la bille par rapport au wagon s'appelle le *mouvement relatif*; le mouvement du wagon par rapport à la voie est le *mouvement d'entraînement*. Dans l'exemple actuel, il existe d'autres mouvements d'entraînement auxquels la bille participe et dont l'observateur ne se rend pas compte; tels sont la rotation diurne de la Terre autour de son axe, le déplacement annuel de celui-ci autour du Soleil, etc... Tous ces mouvements sont appelés *mouvements simultanés*; la bille roulant sur le wagon est considérée comme soumise à chacun d'eux, et le mouvement qu'elle prend sous leur action est dit *mouvement résultant* de tous ces mouvements simultanés. Chacun de ceux-ci est un *mouvement composant*. De même, les vitesses et les accélérations de ces mouvements sont dites *résultantes* ou *composantes*.

Le problème général à résoudre est le suivant :

84. Problème général de la composition des mouvements. — *On connaît le mouvement relatif d'un point M par rapport à un système de comparaison A. Le système A est lui-même mobile dans l'espace, et l'on connaît son mouvement d'entraînement par rapport à un système de comparaison B en repos absolu. Trouver le mouvement absolu du point M (*).*

(*) Ces systèmes de comparaison sont généralement des axes de coordonnées cartésiennes. Nous supposons seulement deux systèmes de comparaison A et B, le premier mobile, le second fixe. Il pourrait y avoir plusieurs systèmes de comparaison mobiles.

Pour résoudre ce problème, on s'appuie sur le principe expérimental de l'Indépendance des mouvements simultanés, dû à Galilée, qui s'énonce ainsi :

Lorsqu'un point est animé de plusieurs mouvements simultanés, tous ces mouvements coexistent, sans se modifier mutuellement, dans le mouvement absolu qui en résulte.

Concevons par exemple un point M (fig. 63) animé de plusieurs mouvements simultanés, et qui, sous l'influence de chacun d'eux considéré séparément, décrit, pendant un temps donné, des segments M a, M a', M a"... Le point mobile, dans son mouvement absolu, viendra se placer à la fin de ce temps à l'extrémité A d'un contour polygonal partant du point M, et formé par une série de segments M a, a A₁, A₁ A..., respectivement égaux et parallèles à M a, M a', M a"... C'est ce qu'on exprime en disant que tous les mouvements simultanés du point M *coexistent sans se modifier mutuellement* dans le mouvement final.

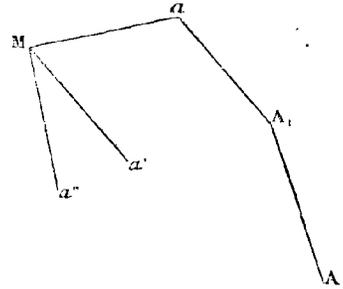


Fig. 63.

Il résulte du principe de Galilée que la position finale prise, au bout d'un certain temps, par un mobile animé de plusieurs mouvements simultanés, est la même que si tous les mouvements s'étaient accomplis les uns après les autres, la durée de chacun d'eux étant égale à celle du mouvement résultant.

Avant de résoudre le problème général, nous examinerons d'abord quelques cas particuliers.

85. Composition de deux mouvements rectilignes et uniformes de même direction. — Un mobile, occupant la position M à l'origine des temps, se meut sur une droite x'x, d'un mouvement uniforme, avec une vitesse v (mouvement relatif). En même temps, cette droite est entraînée dans sa propre direction, d'un mouvement uniforme de vitesse v' (mouvement d'entraînement). Cherchons à caractériser le mouvement absolu du point M.

Supposons, pour fixer les idées, le mouvement d'entraînement de même sens que le mouvement relatif, et prenons pour origine des espaces le point M. Au bout du

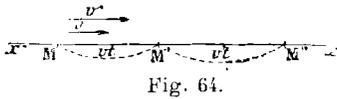


Fig. 64.

temps t , si la droite x'x restait immobile, le point M aurait parcouru un chemin $MM' = vt$. Mais, pendant le même temps, le mouvement d'entraînement a déplacé chacun des points de x'x de la quantité $v't$; d'après le principe de Galilée, le point M est venu en M'', et $M'M'' = v't$. En résumé, le chemin décrit

par le mobile dans le mouvement absolu résultant est

$$MM'' = vt + v't = (v + v') t$$

Cette relation constitue l'équation des espaces du mouvement absolu. Celui-ci est donc uniforme, et sa vitesse est $v + v'$. Le transport des matériaux de construction, au moyen de rouleaux posés sur le sol, est un exemple bien connu de ce problème.

Si le mouvement d'entraînement et le mouvement relatif étaient supposés de sens contraires, un raisonnement identique montrerait que le mouvement résultant est uniforme, et de vitesse $v - v'$. Le treuil différentiel, et les palans différentiels qui en dérivent (paragraphes 445 et suivants) offrent des exemples de ce problème.

D'une façon générale : *Si un point est animé de plusieurs mouvements simultanés uniformes et de même direction, son mouvement absolu est uniforme, et sa vitesse est égale à la somme algébrique des vitesses des mouvements composants.*

Si cette somme algébrique est nulle, le mobile est en repos absolu.

86. **Composition de deux mouvements rectilignes et uniformes de directions différentes.** — Un mobile possède un mouvement uniforme de vitesse v_r , sur une droite ox (*mouvement relatif*). Soit o la position qu'il occupe à l'origine des temps (fig. 65). La droite ox est entraînée parallèlement à elle-même, et son point o décrit, d'un mouvement uniforme de vitesse v_e , une seconde droite oy (*mouvement d'entraînement*). Les origines des espaces dans les deux mouvements composants sont en o . On demande de trouver le mouvement absolu du mobile.

Si la trajectoire relative ox restait fixe, le mobile prendrait, à deux instants t et t' , des positions M' et M'' caractérisées par les relations

$$oM' = v_r t \quad oM'' = v_r t'$$

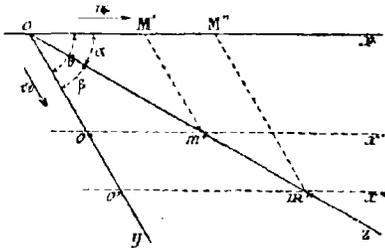


Fig. 65.

Mais, par suite du mouvement d'entraînement, la trajectoire relative occupe, à ces deux instants, des positions $o'x'$ et $o''x''$ telles que l'on ait

$$oo' = v_e t \quad oo'' = v_e t'$$

D'après le principe de Galilée, les positions du mobile aux instants t et t' , dans le mouvement absolu, sont obtenues en portant sur $o'x'$ et $o''x''$, à partir de o' et o'' , des segments $o'm'$ et $o'm''$, respectivement égaux à oM' et à oM'' . La trajectoire absolue est le lieu des points m' m'' ...

1° *Le mouvement absolu est rectiligne.* On a en effet

$$\frac{oo'}{o'm'} = \frac{v_e t}{v_r t} = \frac{v_e}{v_r}$$

$$\frac{oo''}{o''m''} = \frac{v_e t'}{v_r t'} = \frac{v_e}{v_r}$$

Par suite
$$\frac{oo'}{o'm'} = \frac{oo''}{o''m''}$$

Cette proportion prouve la similitude des triangles $oo'm'$, $oo''m''$, et celle-ci entraîne l'égalité de leurs angles en o . La trajectoire absolue est donc une droite oz .

2° *Le mouvement absolu est uniforme.* Les mêmes triangles donnent encore

$$\frac{om'}{om''} = \frac{oM'}{oM''} = \frac{t}{t'}$$

ce qui montre que les espaces parcourus dans le mouvement absolu sont proportionnels aux temps.

3° *Détermination de la vitesse absolue.* Elle est évidemment dirigée suivant oz ;

de plus, elle est égale à l'espace parcouru, dans le mouvement résultant, pendant l'unité de temps (8). Si donc on suppose $t = 1$, $v = om'$. D'autre part, oM' et oo' sont, dans cette même hypothèse, les vitesses v_r et v_e des mouvements composants. La vitesse du mouvement absolu est donc représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses v_r et v_e du mouvement relatif et du mouvement d'entraînement (fig. 66).

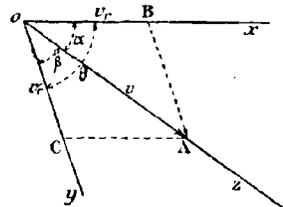


Fig. 66.

Si l'on désigne par α, β et θ les angles xoz, yoz et xoy , on a

et

$$\left\{ \begin{array}{l} = v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos \theta \\ \frac{v_r}{\sin \beta} = \frac{v_e}{\sin \alpha} = \frac{v}{\sin \theta} \end{array} \right. \quad (1)$$

Ces formules permettent de calculer la vitesse v et les angles qu'elle forme avec les directions des mouvements composants, en fonction de v_r, v_e , et de l'angle θ . Elles donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos \theta} \\ \sin \alpha = \frac{v_e \sin \theta}{\sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos \theta}} \\ \sin \beta = \frac{v_r \sin \theta}{\sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos \theta}} \end{array} \right.$$

87. Décomposition d'un mouvement uniforme en deux autres de directions données. — Soit proposé de décomposer le mouvement uniforme de vitesse $\overline{oA} = v$ en deux mouvements uniformes simultanés s'effectuant suivant ox et oy (fig. 66). D'après ce qui précède, les vitesses inconnues v_r et v_e de ces deux mouvements sont les côtés d'un parallélogramme dont oA est la diagonale, et que l'on sait construire. Les vecteurs \overline{oB} et \overline{oC} représentent respectivement v_r et v_e . Les formules (1), dans lesquelles α, β et v sont connus, donnent d'ailleurs les expressions algébriques de ces vitesses :

$$v_r = \frac{v \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \qquad v_e = \frac{v \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

88. Composition d'un nombre quelconque de mouvements rectilignes et uniformes de directions différentes. — **Problème inverse.**

Pour trouver le mouvement absolu résultant de plusieurs mouvements uniformes simultanés, on compose d'abord deux d'entre eux, puis le mouvement obtenu avec un troisième, et ainsi de suite. Chacune de ces compositions successives donne naissance à un mouvement rectiligne

uniforme, dont on sait déterminer la vitesse. Le mouvement absolu est donc lui-même rectiligne et uniforme, et sa vitesse V est la dernière diagonale d'une série de parallélogrammes $oa_1 A_2 a_2, o A_2 A_3 a_3, \dots$ (fig. 67). La construction de tous ces parallélogrammes peut être évitée en menant par l'extrémité du vecteur oa_1 , représentant la vitesse v_1 , un vecteur $a_1 A_2$, équipollent à la vitesse v_2 ; puis, par le point A_2 , un vecteur $A_2 A_3$ équipollent à la vitesse v_3 , etc...

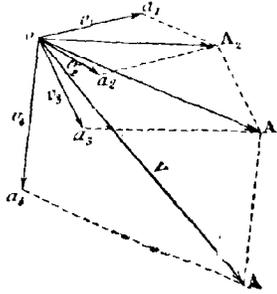


Fig. 67.

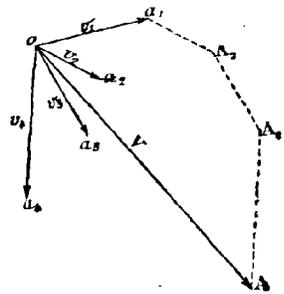


Fig. 68.

fig. 68). Cette construction constitue ce que l'on appelle la règle du polygone des vitesses.

En résumé : *Le mouvement absolu résultant de la composition d'un nombre quelconque de mouvements rectilignes et uniformes simultanés est un mouvement rectiligne et uniforme, dont la vitesse est représentée, en grandeur et en direction, par la résultante du polygone construit sur les vitesses des mouvements composants.*

Si le polygone des vitesses se ferme de lui-même, le point o est en repos absolu.

Inversement, on peut se proposer de décomposer un mouvement rectiligne et uniforme en plusieurs autres mouvements de même nature de directions données. Le problème n'est déterminé que si l'on recherche trois mouvements composants au plus ; il revient alors à la construction d'un parallépipède dont on connaît la diagonale et les directions des arêtes.

89. Composition de deux mouvements rectilignes et uniformément accélérés, sans vitesse initiale.

Un mobile parcourt une droite ox (fig. 69), sur laquelle il occupe la position o à l'instant initial, d'un mouvement uniformément accéléré, sans vitesse initiale, dont l'accélération est φ_r . En même temps, cette droite est entraînée parallèlement à elle-même, et son point o décrit une droite oy d'un mouvement uniformément accéléré, sans vitesse initiale, dont l'accélération est φ_e . Il faut chercher le mouvement absolu du mobile.

Si la trajectoire relative ox restait fixe, le mobile prendrait, aux instants t et t' , les positions M' et M'' telles que l'on ait, o étant pris pour origine des espaces,

$$oM' = \frac{1}{2} \varphi_r t^2 \quad oM'' = \frac{1}{2} \varphi_r t'^2$$

Mais, à ces mêmes instants, la trajectoire relative occupe les positions $o'x'$ et $o''x''$, parallèles à ox , caractérisées par les relations

$$oo' = \frac{1}{2} \varphi_e t^2 \quad oo'' = \frac{1}{2} \varphi_e t'^2$$

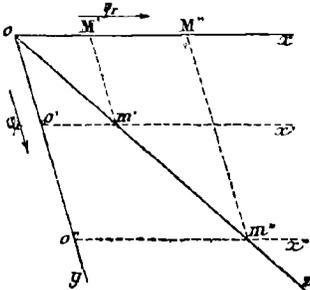


Fig. 69.

D'après le principe de l'Indépendance des mouvements simultanés, les positions réelles du mobile, dans le mouvement absolu, sont obtenues en portant sur $o'x'$ et $o''x''$ des segments $o'm'$, $o''m''$ égaux respectivement à oM' et oM'' .

1° *Le mouvement absolu est rectiligne.* On a en effet

$$\frac{oo'}{o'm'} = \frac{\frac{1}{2} \varphi_e t^2}{\frac{1}{2} \varphi_r t^2} = \frac{\varphi_e}{\varphi_r}$$

$$\frac{oo''}{o''m''} = \frac{\frac{1}{2} \varphi_e t'^2}{\frac{1}{2} \varphi_r t'^2} = \frac{\varphi_e}{\varphi_r}$$

D'où

$$\frac{oo'}{o'm'} = \frac{oo''}{o''m''}$$

Cette proportion, qui prouve la similitude des triangles $oo' m'$, $oo'' m''$, montre que toutes les positions $m' m'' \dots$ du mobile sont sur une droite oz , qui est la trajectoire absolue.

2° *Le mouvement absolu est uniformément accéléré, sans vitesse initiale.* Les mêmes triangles donnent en outre

$$\frac{om'}{om''} = \frac{oo'}{oo''} = \frac{t^2}{t'^2}$$

Les espaces parcourus sont donc proportionnels aux carrés des temps, ce qui caractérise le genre de mouvement indiqué (28).

3° *Détermination de l'accélération absolue.* En la désignant par Φ , on a

$$om' = \frac{1}{2} \Phi t^2$$

De cette relation et des suivantes : $oM' = \frac{1}{2} \varphi_r t^2$, $oo' = \frac{1}{2} \varphi_e t^2$, on tire

$$\frac{1}{2} t^2 = \frac{oM'}{\varphi_r} = \frac{oo'}{\varphi_e} = \frac{om'}{\Phi}$$

Cette suite de rapports égaux montre que les vecteurs représentatifs des accélérations φ_r , φ_e , Φ forment une figure semblable à celle qui est constituée par les segments oM' , oo' , om' . Donc Φ est la diagonale d'un parallélogramme ayant pour côtés les accélérations φ_r et φ_e des mouvements composants.

4° *Détermination de la vitesse absolue.* Soient enfin v_r , v_e et V les trois vitesses à un instant quelconque t . On a

$$v_r = \varphi_r t \qquad v_e = \varphi_e t \qquad V = \Phi t$$

et par suite

$$t = \frac{v_r}{\varphi_r} = \frac{v_e}{\varphi_e} = \frac{V}{\Phi}$$

d'où l'on déduit que les figures formées par les vecteurs représentatifs des vitesses, d'une part, et des accélérations tangentielles, d'autre part, sont semblables. Par conséquent, la vitesse absolue est, à chaque instant, la diagonale d'un parallélogramme ayant pour côtés les vitesses des mouvements composants au même instant.

En résumé : *Deux mouvements rectilignes et uniformément accélérés, sans vitesse initiale, se composent en un mouvement de même nature. L'accélération tangentielle du mouvement résultant est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les accélérations tangentielles des mouvements composants. La même proposition subsiste pour la vitesse à un instant quelconque.*

On étend ce théorème au cas de la composition d'un nombre quelconque de mouvements uniformément accélérés, sans vitesse initiale, en procédant comme au paragraphe 88.

Si l'on désigne par α , β et θ les angles xoz , $yoiz$, noy , on a

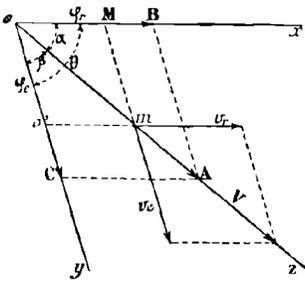


Fig. 70.

$$\left. \begin{aligned} \Phi^2 &= \varphi_r^2 + \varphi_e^2 + 2 \varphi_r \varphi_e \cos \theta \\ \frac{\varphi_r}{\sin \beta} &= \frac{\varphi_e}{\sin \alpha} = \frac{\Phi}{\sin \theta} \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} V^2 &= v_r^2 + v_e^2 + 2 v_r v_e \cos \theta \\ \frac{v_r}{\sin \beta} &= \frac{v_e}{\sin \alpha} = \frac{V}{\sin \theta} \end{aligned} \right\} (2)$$

Ces formules permettent de déterminer par le calcul les valeurs de Φ , V , α et β en fonction de φ_r , φ_e , v_r , v_e et θ .

Le second groupe de formules se déduit d'ailleurs du premier, en observant que v_r , v_e et V sont respectivement égales à $\varphi_r t$, $\varphi_e t$ et Φt .

90. Décomposition d'un mouvement uniformément accéléré, sans vitesse initiale, en deux autres mouvements de même nature, dont les directions sont données.

Le raisonnement est identique à celui qui a été fait dans le cas du mouvement uniforme (87). On obtient les accélérations tangentielles des mouvements composants en construisant le parallélogramme $oBAC$ ayant pour diagonale l'accélération $\Phi = oA$ du mouvement donné. Les formules (1) et (2), dans lesquelles Φ , V , α et β sont connus, donnent φ_r , φ_e , v_r et v_e .

91. Composition de deux mouvements rectilignes, l'un uniforme, l'autre uniformément accéléré, sans vitesse initiale.

Un mobile, situé en o à l'origine des temps, parcourt d'un mouvement uniforme, avec une vitesse v , une droite ox ; celle-ci se déplace parallèlement à elle-même, et son point o décrit une droite oy d'un mouvement uniformément accéléré, sans vitesse initiale, dont l'accélération est φ . L'origine des espaces est prise en o pour les deux mouvements (fig. 71).

Si la trajectoire relative restait fixe, le mobile prendrait sur ox , à un instant quelconque t , une position M donnée par la relation $oM = vt$. Mais, à cet instant, le mouvement d'entraînement a fait passer ox à la position $o'x'$, telle que $oo' = \frac{1}{2} \varphi t^2$. La position du mobile, dans le mouvement absolu, est donc le point m de $o'x'$ défini par l'égalité $o'm = oM$.

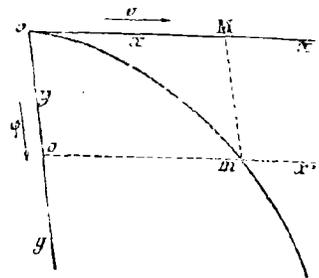


Fig. 71.

En posant $oM = x$, et $oo' = y$, on a

$$x = vt \qquad y = \frac{1}{2} \varphi t^2$$

d'où, en éliminant t

$$x^2 = \frac{2v^2}{\varphi} y$$

Cette équation est celle de la trajectoire absolue dans le système d'axes xoy . Elle représente une parabole passant par l'origine, tangente à ox , et dans laquelle oy est le

diamètre conjugué de la direction ox . L'appareil du général Morin, étudié en physique, offre une démonstration expérimentale de cette composition de mouvements.

92. Problème général. — *Composition de deux mouvements simultanés quelconques.* Un mobile, actuellement en o , possède un mouvement connu sur une trajectoire relative ox (fig. 72); celle-ci est entraînée dans un mouvement également donné et tel que son point o décrive une ligne oy , que l'on appelle sa trajectoire d'entraînement. Nous nous proposons de déterminer la trajectoire et la vitesse du mouvement absolu du point mobile.

1° Construction de la trajectoire absolue. La trajectoire relative occupant, à l'instant t , la position o_1x_1 déterminée par la nature du mouvement d'entraînement, le mobile est venu, au même instant, au point M obtenu en portant sur o_1x_1 un arc o_1M égal au chemin oo' qu'il aurait parcouru sur ox si celle-ci était demeurée fixe. En donnant à t une série de valeurs successives, on détermine ainsi autant de points que l'on veut sur la trajectoire absolue.

2° Détermination de la vitesse absolue. Faisons cette détermination pour l'époque t où le mobile est en M . Le point de la trajectoire relative qui est confondu avec M participe au mouvement d'entraînement de Mx_1 et décrit

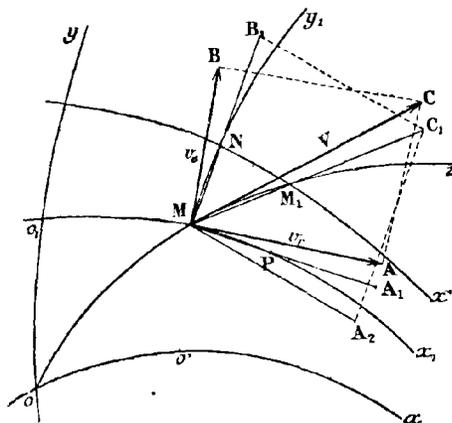


Fig. 72. (*)

ainsi une ligne My_1 . Si ce mouvement d'entraînement n'existait pas, le point M , après un temps très court Δt succédant à l'époque t , prendrait la position P sur Mx_1 ; mais, à l'instant $t + \Delta t$, la trajectoire relative est venue en Nx' , et la position M_1 du point M , dans le mouvement absolu est établie par la relation

$$\text{arc } NM_1 = \text{arc } MP.$$

Portons à partir du point M , sur les cordes MP , MN et MM_1 , des vecteurs MA_1 , MB_1 et MC_1 respectivement égaux à

$$MA_1 = \frac{\text{corde } MP}{\Delta t} = \frac{\text{corde } NM_1}{\Delta t}$$

$$MB_1 = \frac{\text{corde } MN}{\Delta t}$$

$$MC_1 = \frac{\text{corde } MM_1}{\Delta t}$$

puis menons par M le vecteur MA_2 équipollent à B_1C_1 . Les triangles MNM_1 , MB_1C_1 , qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables, et donnent

$$\frac{B_1C_1}{\text{corde } NM_1} = \frac{MB_1}{\text{corde } MN} = \frac{1}{\Delta t}$$

Par conséquent
$$B_1C_1 = MA_2 = \frac{\text{corde } NM_1}{\Delta t} = MA_1$$

(*) Le lecteur est prié de tracer la corde NM_1 .

Quand Δt tend vers zéro, MA_1 , MB_1 et MC_1 ont pour limites respectives les vitesses à l'instant t : $v_r = MA$, $v_e = MB$, $V = MC$ du point mobile dans le mouvement relatif, dans le mouvement d'entraînement et dans le mouvement absolu ; MA_2 et NM_1 ont la même direction limite, qui est celle de la tangente en M à la trajectoire relative. Comme, de plus, $\lim MA_2 = \lim MA_1 = MA$, le parallélogramme $MA_2 C_1 B_1$ vient se confondre à la limite avec le quadrilatère $MACB$. On peut donc énoncer la proposition suivante, appelée *règle du parallélogramme des vitesses* :

Lorsqu'un point mobile est soumis à deux mouvements simultanés quelconques, la vitesse de son mouvement absolu est représentée, à chaque instant, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses des mouvements composants.

La démonstration qui précède ne nécessite aucune hypothèse sur la nature des mouvements simultanés dont il s'agit ; elle est donc générale.

93. Généralisation. — *On connaît le mouvement relatif d'un point M par rapport à un système de comparaison A ; le système A est lui-même en mouvement par rapport à un second système de comparaison B ; le système B possède à son tour un mouvement par rapport à un troisième système de comparaison C , etc... Quel est le mouvement du point M par rapport à un système de comparaison en repos absolu ?*

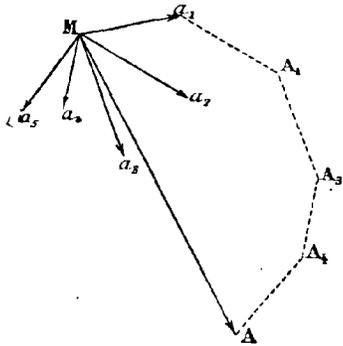


Fig. 73.

Il suffit évidemment de composer les mouvements deux à deux en suivant la règle du parallélogramme des vitesses. On peut remplacer le tracé de tous les parallélogrammes par celui d'un contour polygonal partant de M (fig. 73), et dont les côtés sont équipollents aux vecteurs représentatifs des vitesses des mouvements composants. On généralise ainsi la *règle du polygone des vitesses* (*), déjà établie dans le cas particulier de plusieurs mouvements uniformes simultanés (88).

La vitesse du mouvement absolu résultant de la composition de plusieurs mouvements simultanés quelconques est représentée, à chaque instant, en grandeur et en direction, par la résultante du polygone construit sur les vecteurs qui représentent, au même instant, les vitesses des mouvements composants.

94. Problème. — *Etant données la vitesse absolue V et la vitesse d'entraînement v_e , en grandeur et en direction, trouver la vitesse relative v_r .*

La vitesse absolue V étant la diagonale du parallélogramme construit sur v_r et sur v_e la question revient à construire le côté MA d'un parallélogramme, dont on connaît la diagonale MC et l'autre côté MB . Il suffit de conduire par M un segment MA égal et parallèle à BC . Ce segment représente v_r en grandeur et en direction.

Remarquons que, si l'on prolonge MB d'une longueur égale, soit MD , le quadrilatère $MCAD$ est un parallélogramme dont MA est la diagonale. Par conséquent :

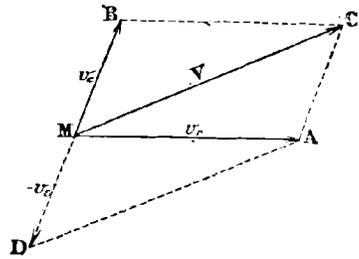


Fig. 74.

(*) Pour trois mouvements dont les vitesses sont dirigées suivant les arêtes d'un trièdre, la vitesse du mouvement absolu est donnée par la diagonale d'un parallépipède, dit *parallépipède des vitesses*.

La vitesse relative est, à chaque instant, la résultante de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement prise en sens contraire.

95. **Problème.** — Etant données la vitesse absolue V et la vitesse relative v_r , en grandeur et en direction, trouver la vitesse d'entraînement v_e .

Un raisonnement analogue au précédent montre que : La vitesse d'entraînement est, à chaque instant, la résultante de la vitesse absolue et de la vitesse relative prise en sens contraire.

96. **Décomposition du mouvement absolu d'un point en trois mouvements simultanés de directions données, ox , oy , oz .**

Soit ab (fig. 74 bis) la trajectoire absolue d'un mobile qui occupe, aux instants t et $t + \Delta t$, les positions M et M' . Traçons le contour $MABM'$ formé par les coordonnées du point M' dans le système d'axes $Mx'y'z'$ mené par M parallèlement à $oxyz$. Le passage du mobile de M en M' pourrait s'effectuer de la manière suivante. Le point M posséderait, sur Mx' , un mouvement relatif l'amenant en A au bout du temps Δt . La droite Mx' serait entraînée parallèlement à elle-même dans le plan $x'My'$, la trajectoire d'entraînement du point M étant My' ; dans ce mouvement, son point A parcourrait la droite AB parallèle à My' , et arriverait en B à l'instant $t + \Delta t$. Enfin, le plan $x'My'$ serait aussi mobile, et se déplacerait parallèlement à lui-même, la trajectoire d'entraînement du point M étant Mz' . Son point B , dans ce mouvement, parcourrait la droite BM' parallèle à Mz' , et occuperait la position M' à l'instant $t + \Delta t$. Cette manière d'envisager le mouvement absolu du point M revient à le considérer comme résultant de trois mouvements rectilignes simultanés : un mouvement relatif suivant une trajectoire parallèle à ox , et deux mouvements d'entraînement, dont l'un est parallèle à oy et l'autre à oz . Or, le point A est évidemment la projection du point M' , faite sur l'axe Mx' , parallèlement au plan $y'Mz'$. Le mouvement relatif parallèle à l'axe ox ne diffère donc pas de la projection, faite sur cet axe, du mouvement absolu du point mobile. On reconnaîtrait de même que les mouvements d'entraînement qui s'effectuent parallèlement à oy et à oz sont identiques aux projections du mouvement de l'espace sur ces mêmes axes. La théorie des mouvements simultanés, appliquée au point M , se ramène donc, en définitive, à celle du mouvement projeté (76) et l'on peut énoncer la conclusion suivante :

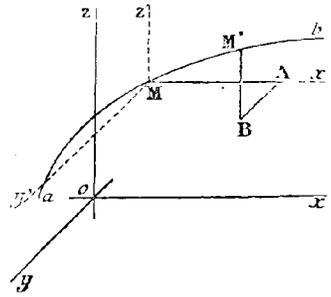


Fig. 74 bis.

Lorsqu'un mouvement, rapporté à un système d'axes de coordonnées rectilignes, est décomposé en mouvements simultanés dans les directions des axes, la vitesse de chacun des mouvements composants est, à tout instant, la projection de la vitesse du mouvement de l'espace sur le même axe.

96 bis. **Problème.** — Un point, rapporté à un système d'axes de coordonnées rectilignes, étant soumis à l'action de plusieurs mouvements simultanés bien définis, étudier son mouvement absolu.

Méthode. — 1° On décompose chacun des mouvements simultanés suivant des directions parallèles aux axes de coordonnées. Le mouvement absolu apparaît alors comme résultant de deux (ou trois) séries de mouvements qui s'exercent tous suivant les axes.

2° L'ensemble des mouvements parallèles à ox , par exemple, ne fait évidemment varier que la coordonnée x , d'où résulte que l'équation des espaces correspondante donne l'expression de l'abscisse du point mobile en fonction du temps, soit $x = f_1(t)$. Par analogie, on trouve l'expression $y = f_2(t)$ de l'ordonnée en formant l'équation des espaces de la série des mouvements parallèles à oy , etc...

3° Le problème est ainsi ramené à l'étude du mouvement d'un point dont les coordonnées rectilignes sont connues en fonction de t (paragraphes 76-77-78-79).

97. Application. — Mouvement des projectiles dans le vide.

Un projectile pesant est lancé du point o (fig. 75), dans une direction oT appelée *ligne de tir*, avec une vitesse v_0 inclinée d'un angle α sur l'horizontale. On se propose d'étudier son mouvement, en faisant abstraction de la résistance de l'air. La droite qui joint la bouche de l'arme au but à atteindre, appelée *ligne de mire*, est supposée l'horizontale.

Si le projectile n'était pas soumis à l'action de la pesanteur, son mouvement, d'après le principe de l'Inertie, serait rectiligne, uniforme, de vitesse v_0 . Décomposons ce mouvement en deux autres, suivant l'horizontale ox et la verticale ascendante oy .

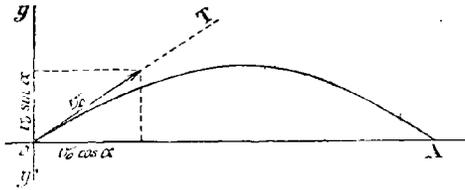


Fig. 75.

En tenant compte du mouvement dû à la pesanteur, le mouvement absolu du projectile peut être considéré comme résultant de trois mouvements simultanés :

Un mouvement uniforme, de vitesse $v_0 \cos \alpha$, suivant ox ;

Un mouvement uniforme, de vitesse $v_0 \sin \alpha$, suivant oy ;

Un mouvement uniformément accéléré, sans vitesse initiale, d'accélération g , suivant oy' .

Si l'on prend comme directions positives des espaces celles des axes ox , oy , les vitesses de ces mouvements à un instant quelconque t sont respectivement, en grandeur et en signe :

$$v_0 \cos \alpha \qquad v_0 \sin \alpha \qquad -gt$$

Les deux derniers mouvements se composent en un mouvement uniformément retardé, de vitesse initiale $v_0 \sin \alpha$, dont la vitesse à l'instant t est $v_0 \sin \alpha - gt$. En appelant x et y les espaces parcourus par le mobile, suivant ox et oy , depuis l'instant initial jusqu'à l'instant t , dans les mouvements composants, v_x et v_y les vitesses de ces mêmes mouvements, on a en définitive

$$v_x = v_0 \cos \alpha \qquad v_y = v_0 \sin \alpha - gt \qquad (1)$$

$$x = v_0 t \cos \alpha \qquad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2 \qquad (2)$$

Ce sont les équations du mouvement absolu du projectile, décomposé suivant les axes ox et oy .

1° *Equation de la trajectoire.* A l'instant t , le projectile occupe, dans le plan des axes, une position dont les coordonnées sont x et y . L'équation de la trajectoire sera donc obtenue en éliminant t entre les équations (2). On trouve ainsi :

$$y = xt \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \qquad (3)$$

C'est l'équation d'une parabole passant par l'origine, et dont l'axe est parallèle à oy .

2° *Amplitude du jet, ou portée.* — C'est la distance oA qui sépare la bouche de l'arme du point où le projectile touche le sol. On l'obtient en faisant $y = 0$ dans l'é-

quation (3), ce qui donne, après suppression de la solution $x=0$ qui correspond au point de départ du projectile :

$$x = \frac{2 v_0^2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2 \alpha}{g} \quad (4)$$

Si, par exemple, $v_0 = 300^m$ et $\alpha = 30^\circ$, on a $x = 7945$ mètres environ.

3° Influence des variations de l'angle de tir sur la portée. La portée atteint son

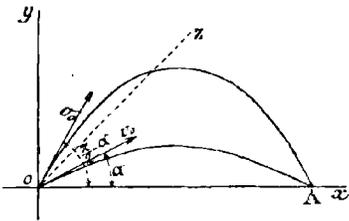


Fig. 76.

maximum pour $2 \alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{4}$; elle est alors

égale à $\frac{v_0^2}{g}$ (9174^m environ avec les données numériques ci-dessus). C'est le double de la hauteur à laquelle se serait élevé le projectile, si on l'avait lancé verticalement avec la vitesse initiale v_0 (34).

L'expression de la portée ne change pas si, la vitesse initiale restant la même, α est remplacé

par $\frac{\pi}{2} - \alpha$. On peut donc atteindre le même point

A de la ligne de mire en donnant à la ligne de tir deux inclinaisons différentes, symétriques par rapport à la bissectrice oz de l'angle des axes (fig. 76). La parabole inférieure est dite *parabole battante*, la supérieure : *parabole écrasante*.

4° Influence des variations de la vitesse initiale sur la portée. — Les portées p et p' qui correspondent au même angle de tir (ou à des angles de tir complémentaires), et à des vitesses initiales différentes v_0 et v'_0 , sont, d'après la formule (4)

$$p = \frac{v_0^2 \sin 2 \alpha}{g}$$

$$p' = \frac{v_0'^2 \sin 2 \alpha}{g}$$

Elles sont proportionnelles aux carrés des vitesses initiales, car on a

$$\frac{p}{p'} = \frac{v_0^2}{v_0'^2}$$

5° Hauteur atteinte par le projectile. — Elle est mesurée par l'ordonnée maximum de la trajectoire ; y étant exprimée par un trinôme du second degré en x dans lequel le coefficient du terme en x^2 est négatif, le maximum a lieu pour (*)

$$x = \frac{v_0^2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2 \alpha}{2 g}$$

et il est égal à $y = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2 g}$ (1147^m environ dans l'exemple numérique déjà cité).

(*) Le trinôme $y = ax^2 + bx + c$, dans lequel a est supposé négatif, atteint son maximum

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ pour } x = -\frac{b}{2a}.$$

On aurait pu déduire ces résultats des équations (1) et (2). Quand le projectile a atteint sa plus grande hauteur, $v_y = 0$. Par conséquent $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$. Il ne reste plus qu'à porter cette valeur de t dans l'expression

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Il faut remarquer que $y = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ est la hauteur qu'atteindrait un mobile pesant, lancé de bas en haut avec la vitesse initiale $v_0 \sin \alpha$ (34); c'est une vérification du principe de l'indépendance des mouvements simultanés.

6° Détermination de la direction à donner à la ligne de tir pour atteindre, avec une vitesse initiale v_0 , un point M de coordonnées x et y .

Il s'agit de déterminer l'angle α de manière que les coordonnées du point M satisfassent à l'équation (3) de la trajectoire. Prenons $\tan \alpha$ pour inconnue, et remplaçons $\cos^2 \alpha$ par $\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$. Nous aurons

$$y = x \tan \alpha - \frac{1 + \tan^2 \alpha}{2 v_0^2} g x^2$$

ou $g x^2 \tan^2 \alpha - 2 v_0^2 x \tan \alpha + g x^2 + 2 v_0^2 y = 0$

Les racines de cette équation sont

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2 v_0^2 g y - g^2 x^2}}{g x} \quad (5)$$

Pour que le problème soit possible, il faut que le discriminant ne soit pas négatif, c'est-à-dire que l'on ait

$$y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 v_0^2} \quad (6)$$

L'équation $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 v_0^2}$

représente une parabole, dont l'axe est oy . Cette parabole coupe oy en un point B

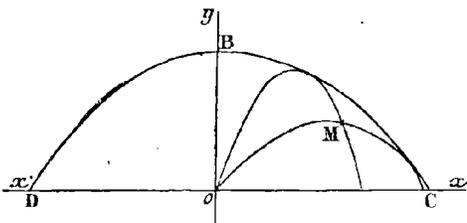


Fig. 77.

(sommet) dont l'ordonnée est $\frac{v_0^2}{2g}$, et ox en deux points C et D dont les abscisses sont $x = \pm \frac{v_0^2}{g}$ (fig. 77).

La condition (6) exprime que le point M ne peut être atteint, quand on tire du point o avec la vitesse initiale v_0 , que s'il ne se trouve pas en dehors de cette parabole. C'est pourquoi l'on donne à cette dernière le nom de *parabole de*

sûreté. Il faut remarquer que le point B est celui qu'atteindrait le projectile, s'il était lancé verticalement avec la vitesse v_0 . Les points C et D correspondent aux valeurs maxima de la portée.

Si la condition (6) est satisfaite, la formule (5) donne deux valeurs pour $tg \alpha$, et il est par conséquent possible d'atteindre le point M en donnant deux inclinaisons différentes à la ligne de tir. La plus petite des valeurs de $tg \alpha$ correspond à une trajectoire battante, et la plus grande à une trajectoire écrasante. Observons que les deux valeurs de α ainsi déterminées ne sont complémentaires que si le point M est sur la ligne de mire (*).

7^o *Grandeur et direction de la vitesse du projectile à un instant quelconque.*

La vitesse v à l'instant t est donnée par la formule

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} \quad (7)$$

* Elle prend sa valeur minimum à l'instant t défini par l'équation

$$v_0 \sin \alpha - gt = 0.$$

A ce moment, v_y étant nulle, le mobile a atteint le point culminant de sa trajectoire.

La vitesse du projectile prend la même valeur à deux époques équidistantes de l'instant $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$. En remplaçant t par $\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \pm \theta$ dans l'expression (7), on trouve en effet

$$v = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + g^2 \theta^2}$$

Cette valeur ne dépend pas du signe de θ . Elle est donc la même aux deux époques

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \theta \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \theta$$

Si l'on donne en particulier à θ la valeur $\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, l'instant t_1 correspond à l'origine du mouvement, et l'instant t_2 à sa fin. D'après la propriété précédente, la vitesse finale est égale à la vitesse initiale v_0 .

L'inclinaison β de la vitesse v sur la direction positive de l'axe est α est donnée à chaque instant par la formule

$$tg \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin \alpha - gt}{v_0 \cos \alpha} \quad (8)$$

Si, comme précédemment, on donne à t deux valeurs

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \theta \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \theta$$

(*) Si les deux valeurs de α étaient complémentaires, le produit de leurs tangentes serait égal à l'unité.

Or, le produit des racines de l'équation en $tg \alpha$ n'est égal à l'unité que si $y = 0$, ce qui correspond à un point situé sur la ligne de mire.

On démontre que toutes les paraboles décrites par les projectiles lancés de o avec la vitesse v_0 , sont tangentes à la parabole de sûreté.

équidistantes de l'époque $\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ où le mobile atteint le point le plus élevé de sa

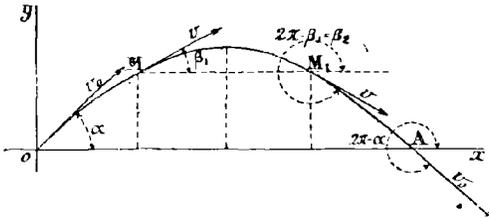


Fig. 78.

trajectoire les valeurs correspondantes de $tg \beta$ seront

$$tg \beta_1 = \frac{g \theta}{v_0 \cos \alpha} \quad (\text{en } M)$$

$$\text{et } tg \beta_2 = \frac{-g \theta}{v_0 \cos \alpha} \quad (\text{en } M_1)$$

Par conséquent $\beta_2 = 2\pi - \beta_1$ (fig. 78).

On sait déjà que le mobile possède la même vitesse à ces deux époques. Si, en particulier, on donne à θ la valeur $\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, de manière que t_1 et t_2 correspondent au commencement et à la fin du mouvement, on aura

$$tg \beta_1 = tg \alpha$$

$$tg \beta_2 = -tg \alpha$$

et par conséquent

$$\beta_1 = \alpha$$

$$\beta_2 = 2\pi - \alpha$$

Tous ces résultats pouvaient être prévus, à cause de la symétrie de la parabole par rapport à son ordonnée maximum, qui correspond, comme on l'a vu, à l'époque

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

§ II. — *Mouvement relatif de deux points.*

98. Soient deux mobiles, parcourant respectivement les trajectoires AB et A'B', sur lesquelles ils occupent à un instant t les positions M et M', et dont les mouvements absolus sont connus (fig. 79). Leurs vitesses à l'instant t sont respectivement $v = \overline{MC}$ et $v' = \overline{M'C'}$. Le mouvement absolu du point M' peut être envisagé comme résultant de la composition de deux mouvements, dont l'un aurait, à chaque instant, la même vitesse $v = \overline{M'D'}$ que le mobile M. La vitesse v'' du second de ces mouvements est représentée par le côté M'E' du parallélogramme MDC'E', que l'on peut construire, puisqu'on connaît sa diagonale et l'un de ses côtés. Si l'on imagine un observateur, entraîné par le point M et participant par suite au mouvement de vitesse v , les choses se passent pour lui comme si le point M' ne possédait, à l'instant considéré, que le mouvement de vitesse v'' , qu'on appelle *le mouvement relatif du point M' par rapport au point M*.

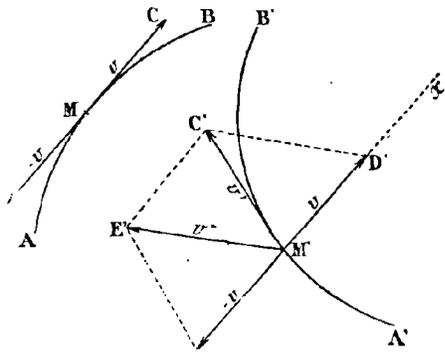


Fig. 79.

Supposons que les mouvements absolus des points M et M' soient rapportés à un système d'axes fixes $oxyz$, dans lequel leurs coordonnées à l'instant t sont respectivement (x, y, z) , (x', y', z') (fig. 80). En menant par M des parallèles aux axes ox, oy, oz , on forme un trièdre $Mx'y'z'$ par rapport auquel les coordonnées du point M' sont, à l'instant t

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = x' - x \\ y'' = y' - y \\ z'' = z' - z \end{array} \right. \quad (1)$$

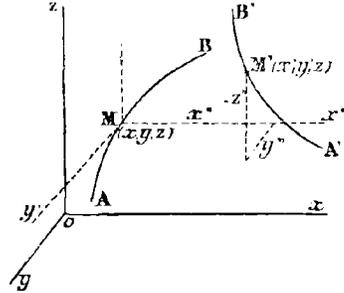


Fig. 80.

D'après ce qui précède, le mouvement relatif de M' par rapport à M n'est pas autre chose que le mouvement de M rapporté au système mobile $Mx'y'z'$; il serait déterminé si l'on connaissait les expressions de x'', y'', z'' en fonction du temps (76).

Or, celles-ci sont données par les formules (1), puisqu'on suppose connus les mouvements absolus des points M et M'. On peut donc calculer les composantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx''}{dt} = \frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy''}{dt} = \frac{dy'}{dt} - \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz''}{dt} = \frac{dz'}{dt} - \frac{dz}{dt} \end{array} \right.$$

de la vitesse du point M' dans son mouvement relatif par rapport au point M.

L'étude du mouvement relatif de deux points est facilitée par le principe expérimental suivant, conséquence du principe de l'Indépendance des mouvements simultanés :

Le mouvement relatif de deux points n'est pas altéré si l'on imprime à leur ensemble un mouvement commun.

D'après cela, si l'on imprime à M et M' un mouvement d'ensemble égal et contraire au mouvement du point M, celui-ci est ramené au repos, et le mouvement relatif du point M' devient un mouvement absolu, observé du point M devenu fixe. La vitesse de ce mouvement est la résultante v'' des deux vitesses simultanées v' et $-v$ du mobile M' (fig. 79). Donc :

Le mouvement relatif du point M' par rapport au point M peut être considéré comme résultant de la composition du mouvement absolu du point M', et d'un mouvement d'entraînement égal et contraire au mouvement absolu du point M.

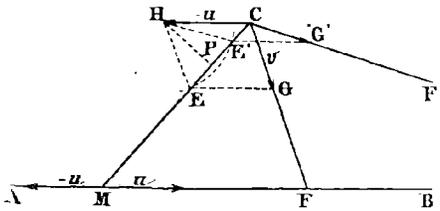


Fig. 81.

99. Exemples. — I. Un mobile M se meut uniformément, avec une vitesse u , sur une trajectoire rectiligne AB. Un autre mobile C se déplace dans le plan CAB, d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse v . On demande la direction que doit prendre le mobile C pour rencontrer le mobile M (fig. 81)

Soit CF la direction cherchée. Si l'on donne aux deux mobiles un mouvement d'entraînement commun, égal et contraire au mouvement connu du point M , le mouvement relatif de C n'est pas changé, et, puisque M est ramené au repos, la trajectoire relative du point C est CM . Mais la vitesse relative, dirigée suivant CM , est la résultante de la vitesse d'entraînement $-u = CH$, et de la vitesse absolue du point C , dont on connaît la grandeur v , mais dont la direction CF est inconnue. On est ainsi ramené à construire un parallélogramme, dans lequel un côté CH est donné en grandeur et en position, une diagonale CM en direction, et un côté CG en grandeur seulement. Il suffit pour cela de décrire de H comme centre, avec le vecteur représentatif de la vitesse v comme rayon, un arc de cercle qui, dans le cas de la figure, rencontre CM en deux points E et E' . Au point E correspond une direction HE répondant à la question; la trajectoire absolue du point C est CGF , parallèle à HE . Le point E' fournit une seconde solution $CG'F'$, parallèle à HE' . La première est préférable, puisqu'elle conduit à un moindre parcours.

Pour que le problème soit possible, il faut :

- 1° Que l'arc de cercle de rayon v , décrit du point H comme centre, rencontre CM ;
- 2° Que le point de rencontre soit du même côté du point C que la trajectoire AB , sans quoi le mouvement correspondant à la direction ainsi déterminée éloignerait les deux mobiles l'un de l'autre.

C'est ce problème que l'on résout instinctivement quand on veut traverser une rue parcourue par une file de voitures. Le point M que le piéton se propose d'atteindre est alors un point de l'intervalle compris entre deux voitures consécutives K et L (fig. 82).

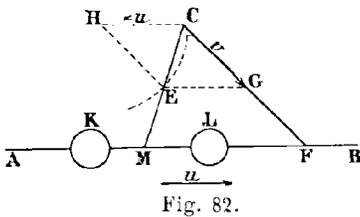


Fig. 82.

Afin de déterminer cette direction, on imprime au navire et aux molécules d'air un mouvement égal et contraire à celui du navire, dont la vitesse v est figurée par le vecteur MD (fig. 83). Le navire est ramené au repos, tandis que la girouette obéit à deux mouvements: celui du vent, de vitesse $u = MB$, et le mouvement d'entraînement de vitesse $-v = MA$. Tout se passe donc comme si, le bateau étant immobile, le vent soufflait dans la direction MC , diagonale du parallélogramme construit sur MA et sur MB . La girouette s'orientera suivant MC .

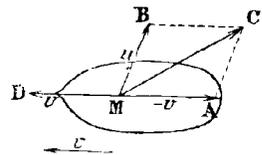


Fig. 83.

On trouvera des applications de la théorie du mouvement relatif dans la Cinématique des systèmes matériels et dans l'étude des Mécanismes.

§ III. — Méthodes de Roberval
pour le tracé des tangentes aux courbes.

100. Toute courbe peut être considérée comme la trajectoire d'un mobile ; la vitesse de celui-ci, au moment où il passe en un point de la courbe, étant dirigée suivant la tangente, le problème de la recherche des tangentes se ramène à une question de Cinématique. Les deux méthodes suivantes, dites de Roberval, sont applicables à un certain nombre de cas particuliers.

Première méthode. — Menons, par le point M de la courbe, deux axes quelconques Mx et My (fig. 84). Si le mouvement du point mobile est défini de telle manière que l'on puisse déterminer à chaque instant les projections orthogonales MA et MB de sa vitesse sur les deux axes, on aura un point T de la tangente en M par l'intersection des perpendiculaires en A et B sur Mx et My. Il n'est pas indispensable de connaître ces projections elles-mêmes ; il suffit de connaître leur rapport. Car, si l'on porte sur Mx et My des longueurs MA' et MB' telles que l'on ait

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{MB}{MB'}$$

les quadrilatères MATB, MA'T'B' sont homothétiques, et les points M, T et T' sont en ligne droite.

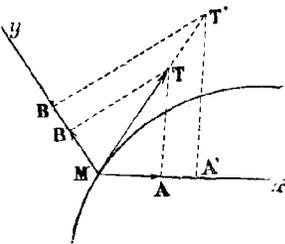


Fig. 84.

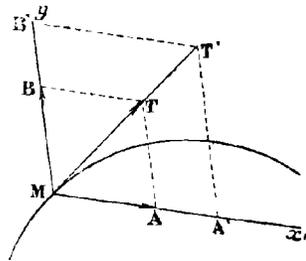


Fig. 85.

Deuxième méthode. — On peut considérer le mouvement du point comme résultant de deux mouvements rectilignes simultanés, de directions Mx et My (fig. 85). Si l'on sait déterminer les vitesses MA et MB de ces mouvements composants à chaque instant, on aura la direction MT de la tangente en M par l'application de la règle du parallélogramme des vitesses. Comme dans la méthode précédente, il suffit de connaître des vecteurs MA' et MB' proportionnels à MA et MB, les deux parallélogrammes MATB, MA'T'B' construits dans cette hypothèse étant homothétiques.

Voici quelques applications de ces deux méthodes.

101. **Première méthode.** — On détermine le rapport des projections orthogonales de la vitesse sur deux axes.

I. **Tangentes aux sections coniques.** — On sait que, si le mouvement d'un point est rapporté à un système de coordonnées polaires, la projection orthogonale de sa vitesse sur le rayon vecteur est, à chaque instant, égale à la vitesse de glissement

$$\frac{dr}{dt} \quad (81).$$

Ceci rappelé, soient M un point d'une ellipse de foyers F et F' (fig. 86), r et r' ses rayons vecteurs, 2a la longueur du grand axe. On a

$$r + r' = 2a \tag{1}$$

Concevons un mobile se déplaçant sur l'ellipse, et soit v sa vitesse lorsqu'il arrive en M. Ce mouvement peut être rapporté, soit au système de coordonnées polaires défini par le pôle F et l'axe Fx, soit au système défini par le pôle F' et l'axe F'x. Dans le premier cas, la projection de v sur FM est $\frac{dr}{dt}$; dans le second, sa projection sur F'M est $\frac{dr'}{dt}$. Ces vitesses sont égales et de signes contraires, car on tire de l'équation (1)

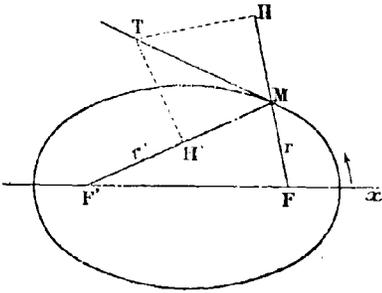


Fig. 86.

$$\frac{dr}{dt} + \frac{dr'}{dt} = 0$$

On peut donc les représenter par deux longueurs égales arbitraires MH et MH', portées dans des sens opposés, à partir de M, sur les deux rayons vecteurs. Les perpendiculaires élevées sur MF et MF' en H et H' déterminent, par leur intersection, un point T de la tangente cherchée.

Le même raisonnement s'applique à l'hyperbole.

II. Tangente à la lemniscate. — La lemniscate est le lieu des points M tels que le produit de leurs distances à deux points fixes F et F', appelés foyers, soit égal au carré de la demi-distance de ces points fixes. En désignant par r et r' les rayons vecteurs du point M (fig. 87), et par 2a la distance FF', on a donc

$$rr' = a^2 \tag{1}$$

Supposons la courbe parcourue par un mobile. Les projections de la vitesse de celui-ci sur MF et MF' sont encore les vitesses de glissement $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{dr'}{dt}$.

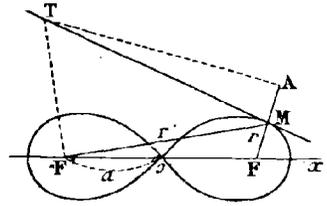


Fig. 87.

Or, on tire de l'équation (1), en prenant les dérivées de ses deux membres par rapport à t

$$r \frac{dr'}{dt} + r' \frac{dr}{dt} = 0$$

d'où
$$\frac{\left(\frac{dr}{dt}\right)}{\left(\frac{dr'}{dt}\right)} = -\frac{r}{r'}$$

Si donc la vitesse de glissement le long de MF est représentée par un vecteur égal à r, la vitesse de glissement le long de MF' sera représentée par un vecteur égal à -r'. Par conséquent, ces deux vitesses peuvent être figurées par les vecteurs MA = MF, et MF'. L'intersection des perpendiculaires élevées sur les rayons vecteurs en A et F' donne un point T de la tangente en M.

102. Deuxième méthode. — On détermine le rapport des composantes de la vitesse suivant deux axes.

I. Tangentes aux cycloïdes. — Le cycloïde est le lieu des positions d'un point mobile entraîné par une circonférence qui roule sans glisser sur une droite fixe appelée base. Elle est *ordinaire* quand le point mobile est situé sur la circonférence, *allongée* quand il est en dehors, *raccourcie* quand il est à l'intérieur. Le raisonnement étant identique pour les trois genres, nous prendrons comme exemple la cycloïde allongée.

Imaginons qu'un mobile la parcoure, en partant de M_0 à l'instant initial, pour arriver en M à un instant quelconque t . Soient o et o' les positions correspondantes de la circonférence roulante. Menons le segment oM_1 égal et parallèle à $o'M$. Le mouvement du point M peut être considéré comme résultant de la coexistence de deux mouvements *uniformes* simultanés, l'un, circulaire, qui lui fait décrire pendant le temps t l'arc M_0M_1 , l'autre rectiligne et parallèle à la base, qui amène le point mobile de M_1 en M pendant le même temps. La vitesse v_1 du premier mouvement est représentée, à l'instant t , par un vecteur perpendiculaire au rayon oM_1 . D'après le principe de Galilée, l'une des composantes de la vitesse absolue du mobile à l'instant t est égale et parallèle à v_1 . Elle est figurée par le vecteur MD perpendiculaire à oM . La vitesse v_2 du second mouvement est représentée par un vecteur MC parallèle à la base xx' . Le rapport de ces deux vitesses est égal à celui des chemins parcourus pendant le temps t , dans les deux mouvements simultanés, puisque ceux-ci sont uniformes. On a donc

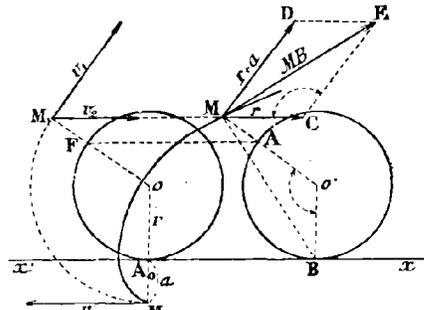


Fig. 88.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\text{arc } M_0M_1}{M_1M} = \frac{\text{arc } M_0M_1}{A_0B}$$

et, comme $A_0B = \text{arc } AB$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\text{arc } M_0M_1}{\text{arc } AB} = \frac{r + a}{r} = \frac{o'M}{o'B}$$

Par conséquent, si l'on attribue aux vecteurs MD et MC les longueurs respectives

$$MD = o'M \qquad MC = o'B$$

la tangente en M à la cycloïde sera dirigée suivant la diagonale ME du parallélogramme $MCED$.

Les angles en C et en o' des triangles MCE , $Mo'B$, sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires. Puisque, d'autre part, $MC = o'B$ et $CE = o'M$, ME est aussi perpendiculaire et égale à MB . La droite MB est donc normale en M à la cycloïde. Par conséquent :

La normale en un point d'une cycloïde est la droite qui le joint au point de contact de la circonférence mobile avec la base.

Dans le cas d'une cycloïde ordinaire, ME passe par le point de la circonférence mobile qui est diamétralement opposé à B .

II. **Tangentes aux conchoïdes.** — Etant donné un point fixe o , une courbe C , et une longueur constante a , on appelle *conchoïde* de la courbe C par rapport au point o , une nouvelle courbe C' obtenue en prolongeant chaque rayon vecteur de la première d'une quantité égale à a . Nous nous proposons de montrer que, si l'on sait construire la tangente en un point M de la courbe C , on peut déterminer la tangente au point correspondant M' de sa conchoïde.

Considérons les courbes C et C' comme les trajectoires de deux mobiles se mouvant de telle manière qu'ils soient à chaque instant en ligne droite avec le point o

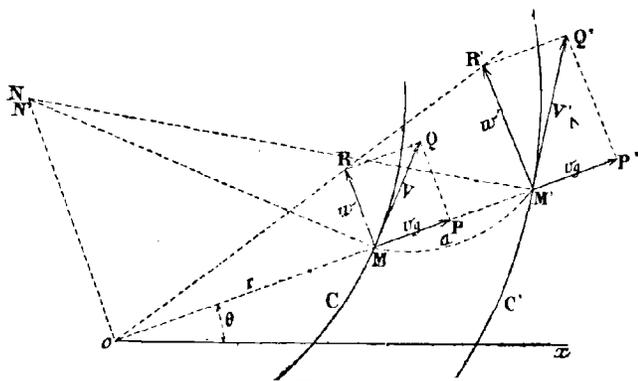


Fig. 89.

(fig. 89). Il est naturel de rapporter ces deux mouvements à un système de coordonnées polaires défini par le pôle o et un axe polaire quelconque ox . Soient r et θ les coordonnées du point M dans ce système, $r + a = r'$ et θ celles du point M' . On peut décomposer les vitesses V et V' des points M et M' suivant le rayon vecteur et les directions perpendiculaires MR , $M'R'$; les composantes sont les vitesses de glissement et de circulation des deux mobiles (81). En désignant par v_g et w celles qui se rapportent au point M , par v'_g et w' celles qui se rapportent au point M' , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} v_g = \frac{dr}{dt} \\ w = \frac{rd\theta}{dt} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} v'_g = \frac{dr'}{dt} \\ w' = \frac{r'd\theta}{dt} \end{array} \right.$$

Comme $r' = r + a$

on voit que $v_g = v'_g$

et que $\frac{w}{w'} = \frac{r}{r + a}$

Il suffit donc de déterminer des quantités proportionnelles aux composantes de la vitesse du point M pour avoir, en même temps, des quantités proportionnelles aux composantes de la vitesse du point M' , et tracer la tangente à la conchoïde.

Or, si l'on prend sur la tangente en M une longueur quelconque MQ , les côtés MP et MR du rectangle $MPQR$ peuvent être considérés comme représentant respectivement v_g et w . En portant à partir de M' sur oM' un vecteur $M'P' = MP$, puis en traçant oR' jusqu'à sa rencontre en R' avec la perpendiculaire $M'R'$ à oM' , on aura représenté v'_g et w' , car $v'_g = v_g$, et les triangles semblables OMR , $oM'R'$ donnent la relation

$$\frac{w}{M'R'} = \frac{r}{r + a}$$

ce qui montre que $M'R'$ est égal à w' . La tangente en M' est donc dirigée suivant la diagonale $M'Q'$ du rectangle $M'P'Q'R'$.

103. Théorème. — *Les normales en deux points correspondants d'une courbe et de sa conchoïde se coupent en un point situé sur la perpendiculaire élevée au rayon vecteur par le pôle.*

Soit N le point de rencontre de la perpendiculaire oN au rayon vecteur avec la normale à la courbe C au point M (fig. 89). Les triangles MoN et MRQ , dont les côtés sont perpendiculaires, sont semblables, et donnent

$$\frac{oN}{oM} = \frac{RQ}{MR}$$

d'où
$$oN = \frac{oM \times RQ}{MR}$$

Soit de même N' le point de rencontre de oN avec la normale à la courbe C' au point M' . Les triangles $M'oN'$ et $M'R'Q'$ sont aussi semblables, et donnent

$$oN' = \frac{oM' \times R'Q'}{M'R'}$$

Mais
$$RQ = R'Q'$$

et
$$\frac{oM}{MR} = \frac{oM'}{M'R'}$$

On a donc
$$oN = oN'$$

ce qui établit le théorème.

La longueur oN est appelée la sous-normale polaire des courbes C et C' . Le théorème qui précède peut donc être énoncé de la façon suivante :

Une courbe et sa conchoïde ont même sous-normale polaire en deux points correspondants.

Il donne une nouvelle construction de la tangente en un point d'une conchoïde C' . On détermine la sous-normale polaire oN de la courbe C , et l'on élève la perpendiculaire $M'Q'$ à MN . Cette méthode nécessite, comme la première, que l'on sache construire la tangente en chaque point de la courbe C .

CHAPITRE V

DE L'ACCELÉRATION TOTALE

§ I. — Détermination de l'accélération totale sur la trajectoire

104. Soient M et $v = \overline{MA}$ (fig. 93) la position et la vitesse, à l'instant t , d'un mobile qui parcourt une trajectoire curviligne. D'après le principe de l'Inertie, ce mobile étant incapable de changer, de lui-même, la grandeur et la direction de sa vitesse, devrait prendre, à partir de l'instant t , un mouvement rectiligne uniforme, de vitesse v , sur la tangente à sa trajectoire. Puisqu'il n'en est pas ainsi et que sa vitesse, à l'instant $t + \Delta t$, devient, par exemple, $v + \Delta v = \overline{M'A'}$, c'est qu'une cause intervient à chaque instant pour modifier la vitesse du mouvement antérieurement acquis, aussi bien en direction qu'en grandeur. La notion d'accélération tangentielle a été acquise en ne considérant que les variations de grandeur de la vitesse (37). Nous nous proposons de compléter cette notion en tenant compte aussi des variations de sa direction. Nous donnerons d'abord quelques définitions.

105. **Plan osculateur.** — Soit M, M', M'' trois points d'une courbe gauche (fig. 90) et P leur plan. Lorsque M' et M'' se rapprochent indéfiniment de M supposé fixe, le plan P tend généralement vers une position limite que l'on appelle *plan osculateur* à la courbe au point M . (*)

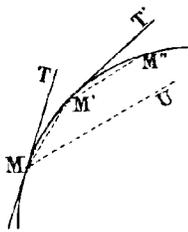


Fig. 90.

Le déplacement des points M' et M'' peut se faire d'une façon quelconque, pourvu qu'ils viennent se confondre à la limite avec le point M . Supposons que M' vienne d'abord seul se réunir au point M . La position limite de la droite MM' du plan P est la tangente en M à la courbe gauche. Par conséquent : *le plan osculateur en un point contient la tangente en ce point*, et l'on peut le définir : *la position limite du plan mené par la tangente MT et le point M'' , quand ce dernier se rapproche indéfiniment du point M .*

La parallèle MU à la corde $M'M''$ est contenue dans le plan P . Supposons que le point M'' se rapproche indéfiniment du point M' , tous deux restant distincts du point M . La droite MU , et par suite le plan P , deviennent, à la limite, parallèles à la tangente MT' en M' . Donc : *le plan osculateur en un point d'une courbe gauche est la position limite du plan mené, par la tangente en ce point, parallèlement à la tangente au point infiniment voisin.*

106. **Angle de contingence.** — C'est l'angle formé par les tangentes en deux points infiniment voisins M et M' . Dans le cas d'une courbe gauche, ces tangentes ne se rencontrent pas, puisque l'une est dans le plan osculateur, et que l'autre est seulement parallèle à ce plan.

107. **Plan normal. — Normale principale.** — On appelle *plan normal* en M le plan perpendiculaire à la tangente en ce point. Toute droite menée par M dans ce plan est *normale* à la courbe. L'intersection du plan normal et du plan osculateur est la *normale principale*.

108. **Cercle de courbure. — Rayon et centre de courbure.** — Les trois points M, M', M'' déterminent une circonférence C' ; lorsque M' et M'' se rapprochent

(*) Le plan osculateur en un point d'une courbe plane se confond avec le plan de la courbe.

indéfiniment de M, cette circonférence tend vers une position limite, située dans le plan osculateur en M, et tangente à la courbe en ce point. Mais son point de contact présente cette particularité qu'il provient de la réunion de trois points en un seul. On exprime ce fait en disant que ce cercle présente avec la courbe un contact du second ordre. On lui donne le nom de *cercle osculateur*, ou *cercle de courbure* au point M.

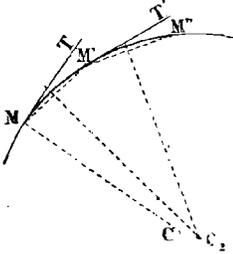


Fig. 91.

Tant que les points M, M', M'' sont distincts, le centre de ce cercle se trouve à la rencontre des perpendiculaires élevées, dans le plan P, aux milieux des cordes MM' et M'M''. Si les points M' et M'' se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre et du point M, ces perpendiculaires tendent vers des directions limites, qui sont celles des normales principales en M et en M'. Le centre C du cercle de courbure se trouve donc, dans le plan osculateur, à la rencontre de deux normales principales infiniment voisines.

On appelle respectivement *rayon* et *centre de courbure* d'une courbe en un point M le rayon et le centre de son cercle de courbure en ce point. Ces définitions et les précédentes s'appliquent aux courbes planes, avec cette seule modification, que les constructions indiquées dans le plan osculateur s'effectuent dans le plan de la courbe.

Supposons les points M et M' infiniment voisins sur la courbe gauche, et soient C et ρ le centre et le rayon de courbure en M (fig. 92), ds et $d\alpha$ l'arc infiniment petit MM' et l'angle de contingence. L'angle MCM' est évidemment égal à $d\alpha$, et l'on a, en considérant le secteur MCM' du cercle de courbure

$$ds = \rho d\alpha$$

d'où

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$$

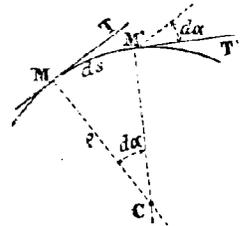


Fig. 92.

Cette expression du rayon de courbure convient encore aux courbes planes.

109. Accélération totale dans le mouvement varié. — Soient M et M' (fig. 93)

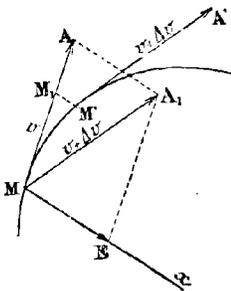


Fig. 93.

les positions d'un mobile sur sa trajectoire, aux instants t et $t + \Delta t$, v et $v + \Delta v$ les vitesses correspondantes, représentées par les vecteurs \overline{MA} et $\overline{M'A'}$. Le vecteur $\overline{M'A'}$, équivalent à $\overline{M'A'}$, peut être regardé comme résultant de la composition des deux vecteurs \overline{MA} et $\overline{AA_1}$, d'après la règle du parallélogramme. Cela revient à envisager le mouvement du mobile comme résultant de deux mouvements simultanés : un mouvement relatif de vitesse v suivant la tangente MA à la trajectoire, composé avec un mouvement d'entraînement qui déplacerait cette tangente parallèlement à elle-même, la trajectoire Mx du point M étant parallèle à AA_1 . La vitesse de ce second mouvement est représentée, en grandeur et en direction, par le vecteur infiniment petit $\overline{MB} = \overline{AA_1}$, auquel on donne le nom de *vitesse acquise élémentaire* pendant le temps Δt (*) ; le rapport

vitesse acquise élémentaire pendant le temps Δt (*) ; le rapport

$$\frac{\overline{AA_1}}{\Delta t} \text{ ou } \frac{\overline{MB}}{\Delta t} = \Phi_m,$$

(*) Ce vecteur représente la variation géométrique de la vitesse pendant le temps Δt , puisque c'est lui qu'on doit composer avec v pour obtenir la vitesse $v + \Delta v$ à l'instant $t + \Delta t$.

qui est l'accélération moyenne du mouvement d'entraînement, s'appelle *l'accélération totale moyenne* du mouvement résultant pendant le temps Δt . Sa limite Φ , quand Δt tend vers zéro, est *l'accélération totale du mouvement à l'instant t* .

En même temps que Δt tend vers zéro, le point M' se rapproche indéfiniment du point M , et la direction Mx se déplace, ainsi que le plan AMx . La position limite de ce plan, qui contient MA en même temps qu'il est parallèle à $M'A'$, est le plan osculateur en M à la trajectoire. L'accélération totale à l'instant t , dirigée suivant la position limite prise par Mx , est donc contenue dans le plan osculateur en M ; elle est en outre orientée vers la concavité de la trajectoire.

110. Autre définition de l'accélération totale. — Déviation élémentaire du mobile. Si le mouvement relatif sur la tangente existait seul, le mobile prendrait, à l'instant $t + \Delta t$, une position M_1 déterminée par la relation $\overline{MM_1} = v \Delta t$ (fig. 93). Le vecteur $\overline{M_1M'}$ mesure donc le chemin parcouru par le mobile dans son mouvement d'entraînement suivant la direction Mx , de sorte que, si l'on désigne par Φ_m l'accélération moyenne de ce mouvement pendant le temps Δt , on a

$$\overline{M_1M'} = \frac{1}{2} \Phi_m \Delta t^2 \quad (*)$$

d'où

$$\Phi_m = \frac{2\overline{M_1M'}}{\Delta t^2}$$

$\overline{M_1M'}$ est la *déviation élémentaire du mobile* pendant le temps Δt . Quand Δt tend vers zéro, Φ_m a généralement une limite, qui est l'accélération totale à l'instant t , dont l'expression est

$$\Phi = \lim. \frac{2\overline{M_1M'}}{\Delta t^2}$$

L'accélération totale, ainsi définie, ne diffère pas de celle dont nous avons donné l'expression au paragraphe précédent, puisque les vecteurs $\overline{AA_1}$ et $\overline{M_1M'}$ représentent, l'un la vitesse acquise, l'autre l'espace parcouru pendant le temps Δt , dans le même mouvement d'entraînement suivant Mx . Par conséquent, les directions limites des vecteurs $\overline{AA_1}$ et $\overline{M_1M'}$ sont parallèles.

111. Décomposition de l'accélération totale suivant la normale principale et la tangente à la trajectoire. — Décomposons le vecteur \overline{MB} , qui représente la vitesse acquise élémentaire, en deux autres \overline{MC} et \overline{MD} , dirigés respectivement suivant la tangente MT et la normale MN élevée en M dans le plan AMx (fig. 94). Quand M' se rapproche indéfiniment de M supposé fixe, MN devient, à la limite, la normale principale en M à la trajectoire. L'accélération totale à l'instant t étant la valeur limite du rapport $\frac{\overline{MB}}{\Delta t}$

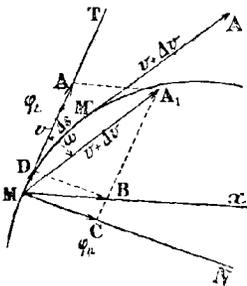


Fig. 94.

quand Δt tend vers zéro, ses composantes φ_t et φ_n suivant la tangente et la normale principale en M sont les limites des rapports $\frac{\overline{MD}}{\Delta t}$ et $\frac{\overline{MC}}{\Delta t}$. De plus, les vecteurs \overline{MC} et

\overline{MD} étant les projections de \overline{MB} sur MN et sur MT , sont égaux aux sommes algébriques des projections des côtés du contour MA_1B sur les mêmes directions. Par conséquent

$$\overline{MC} = (v + \Delta v) \sin \omega \quad (1)$$

$$\overline{MD} = (v + \Delta v) \cos \omega - v \quad (2)$$

(*) La vitesse initiale de ce mouvement d'entraînement est nulle, puisque à l'instant $t + \Delta t$ elle est représentée par le vecteur infiniment petit \overline{MB} .

en désignant par ω l'angle \overline{AMA}_1 formé par les directions de la vitesse aux instants t et $t + \Delta t$.

1° *Calcul de la composante normale.* — On tire de l'égalité (1)

$$\frac{\overline{MC}}{\Delta t} = \frac{(v + \Delta v) \sin \omega}{\Delta t}$$

ce qu'on peut écrire, en posant $\text{arc } \overline{MM'} = \Delta s$

$$\frac{\overline{MC}}{\Delta t} = (v + \Delta v) \frac{\sin \omega}{\omega} \times \frac{\omega}{\Delta s} \times \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Quand Δt tend vers zéro, les rapports $\frac{\sin \omega}{\omega}$, $\frac{\omega}{\Delta s}$, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ont pour limites respectives 1, $\frac{1}{\rho}$ et v , ρ désignant le rayon de courbure de la trajectoire en M, et v la vitesse du mobile à l'instant t . On a donc

$$\varphi_n = \lim \frac{\overline{MC}}{\Delta t} = \frac{v^2}{\rho} \quad (3)$$

Cette composante, appelée *accélération centripète*, est représentée par un vecteur porté par la normale principale, et dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire.

2° *Calcul de la composante tangentielle.* — L'égalité (2) donne

$$\overline{MD} = \Delta v \cos \omega - 2v \sin^2 \frac{\omega}{2}$$

et par conséquent

$$\frac{\overline{MD}}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cos \omega - \frac{2v \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\Delta t}$$

Le dernier rapport du second membre est infiniment petit, car $\sin^2 \frac{\omega}{2}$ est du second ordre par rapport à Δt . On a donc à la limite

$$\varphi_t = \lim \frac{\overline{MD}}{\Delta t} = \lim \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \cos \omega \right) = \frac{dv}{dt} \quad (4)$$

Cette expression montre que la composante tangentielle de l'accélération totale ne diffère pas de l'accélération tangentielle étudiée dans le mouvement d'un point sur la trajectoire (37).

3° *Grandeur et direction de l'accélération totale.* — On a évidemment, en désignant par Φ l'accélération totale à l'instant t , et par i son inclinaison sur la normale principale :

$$\Phi^2 = \varphi_t^2 + \varphi_n^2 = \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}$$

$$\text{tg } i = \frac{\varphi_t}{\varphi_n} = \frac{\left(\frac{dv}{dt} \right)}{\left(\frac{v^2}{\rho} \right)}$$

112. Remarque. — L'accélération tangentielle n'a d'autre effet que de modifier à chaque instant la grandeur de la vitesse ; si elle existait seule, le mouvement serait nécessairement rectiligne. L'accélération centripète a pour effet, au contraire, de modifier la direction de la vitesse ; elle est donc intimement liée à la forme même de la trajectoire, ce que montre d'ailleurs l'expression (3), dans laquelle intervient le rayon de courbure.

113. Applications. — I. *Accélération totale dans un mouvement rectiligne.*

L'angle de contingence d'une droite est nul, et son rayon de courbure est infini. L'accélération centripète d'un mouvement rectiligne quelconque est donc toujours nulle. L'accélération totale se réduit dans ce cas à sa composante tangentielle

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

II. *Accélération totale dans un mouvement circulaire uniforme.*

Soient v la valeur constante de la vitesse, et r le rayon de la circonférence. L'accélération tangentielle $a_t = \frac{dv}{dt}$ est toujours nulle. L'accélération totale se réduit donc à sa composante centripète $a_n = \frac{v^2}{r}$; elle est constante, et dirigée vers le centre de la circonférence.

III. *Accélération totale dans un mouvement uniforme quelconque.*

Comme dans le cas précédent, l'accélération totale se réduit à sa composante normale $a_n = \frac{v^2}{\rho}$; mais elle n'est plus constante ; ses variations sont inversement proportionnelles à celles du rayon de courbure de la trajectoire.

Réciproquement, tout mouvement dans lequel l'accélération totale se réduit à sa composante centripète est uniforme ; car, dans cette hypothèse, $a_t = 0$ et la vitesse v est constante.

114. Courbe indicatrice des accélérations totales. — Un mobile M occupe sur la trajectoire AB , aux instants $t, t + \Delta t, t + 2\Delta t, \dots$, les positions $M, M', M'' \dots$ (fig. 95).

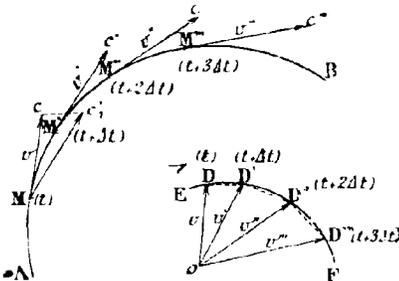


Fig. 95.

Soient $v = \overline{Mc}$, $v' = \overline{M'c'}$, $v'' = \overline{M''c''} \dots$ les vitesses correspondantes. Menons par un point quelconque o des vecteurs $oD, oD', oD'' \dots$ respectivement équipollents à $Mc, M'c', M''c'' \dots$ et considérons la courbe EF , lieu géométrique de leurs extrémités. Nous pouvons imaginer que EF soit parcourue par un mobile μ qui passe aux points $D, D', D'' \dots$ aux instants $t, t + \Delta t, t + 2\Delta t, \dots$, et dont la vitesse v_1 à l'instant t serait

$$v_1 = \lim \frac{\text{arc } DD'}{\Delta t} = \lim \frac{\text{corde } DD'}{\Delta t}$$

Mais $\overline{DD'}$ est, d'après la construction employée, équipollent à la vitesse acquise élémentaire $\overline{cc'}$, du mobile M . On a donc, en grandeur et en direction

$$v_1 = \lim \frac{\overline{cc'}}{\Delta t} = \Phi$$

La courbe EF jouit donc, vis-à-vis de la trajectoire AB, des propriétés suivantes :
 1° Ses rayons vecteurs issus de o sont, à chaque instant, équipollents aux vecteurs représentatifs de la vitesse du mobile M.

2° Ses éléments successifs DD', D'D''... sont équipollents aux vecteurs représentatifs des vitesses acquises élémentaires.

3° La vitesse du mobile auxiliaire μ qui la parcourt est, à chaque instant, égale et parallèle à l'accélération totale du mobile M.

C'est cette dernière propriété qui a fait donner à EF le nom de *courbe indicatrice des accélérations totales*. On voit que la considération de cette courbe ramène la notion d'accélération totale à celle de vitesse.

115. Remarques. — Si la trajectoire est plane, la courbe indicatrice des accélérations totales l'est aussi.

Si la trajectoire est gauche, le lieu géométrique des rayons vecteurs oD, oD', oD''... est le cône directeur de la surface développable formée par les tangentes successives à cette courbe gauche.

Quand le mouvement donné est uniforme, tous les rayons vecteurs oD, oD'... sont égaux. Si la trajectoire est plane, EF est une circonférence. Si la trajectoire est gauche, l'indicatrice est une section droite du cône directeur de la surface développable circonscrite à AB, déterminée par une sphère ayant pour centre le sommet o de ce cône, et pour rayon le vecteur représentatif de la vitesse constante du mouvement.

§ II. — De l'accélération totale dans le mouvement projeté.

116. Nous nous proposons de chercher les relations qui lient l'accélération totale d'un mouvement à celle de sa projection sur un plan ou sur un axe.

Théorème. — *Lorsqu'on projette le mouvement d'un point sur un plan parallèlement à un axe, l'accélération totale de la projection du point est égale, à chaque instant, à la projection de l'accélération totale du point de l'espace sur le même plan.*

Soient M et M' (fig. 96) les positions du mobile aux instants t et $t + \Delta t$, $V = \overline{MC}$ et $V + \Delta V = \overline{M'C'}$ les vitesses correspondantes, m et m' les projections du mobile sur le plan P à ces mêmes instants, $v = \overline{mc}$ et $v + \Delta v = \overline{m'c'}$ leurs vitesses. Nous savons déjà que \overline{mc} et $\overline{m'c'}$ sont les projections respectives de \overline{MC} et $\overline{M'C'}$ (73).

Menons par M et m les vecteurs $\overline{MC_1}$ et $\overline{mc_1}$ respectivement équipollents à $\overline{M'C'}$ et $\overline{m'c'}$. Les vecteurs $\overline{CC_1}$ et $\overline{cc_1}$ mesurent les vitesses acquises élémentaires de M et de sa projection, et les rapports $\frac{\overline{CC_1}}{\Delta t}$, $\frac{\overline{cc_1}}{\Delta t}$ sont leurs accélérations totales moyennes Φ_m et Φ'_m pendant le temps Δt . Soient

\overline{CD} et \overline{cd} les vecteurs représentatifs de ces accélérations :

$$\Phi_m = \frac{\overline{CC_1}}{\Delta t} = \overline{CD}$$

$$\Phi'_m = \frac{\overline{cc_1}}{\Delta t} = \overline{cd}$$

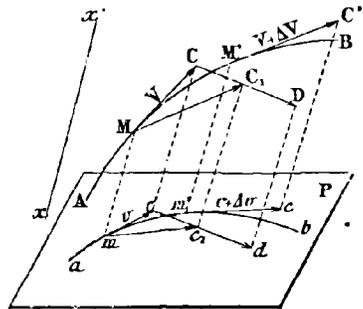


Fig. 96.

Quand le vecteur $\overline{MC'}$ a été transporté parallèlement à lui-même en $\overline{MC_1}$, sa projection sur le plan P, qui est restée égale et parallèle à $\overline{m'c'}$, est devenue $\overline{mc_1}$; $\overline{cc_1}$ est donc la projection de $\overline{CC_1}$, et par suite \overline{cd} est aussi la projection de \overline{CD} (*). On en conclut que

$$\Phi'_m = (\Phi_m)_P$$

Quand Δt tend vers zéro, Φ_m et Φ'_m ont pour limites respectives les accélérations totales réelles Φ et Φ' du point M et de sa projection à l'instant t. La relation précédente, vraie si petit que soit Δt , devient

$$\Phi' = (\Phi)_P$$

117. Remarque. — Décomposons Φ suivant la tangente et la normale principale à la trajectoire (fig. 97). Le rectangle MEFG se projette sur le plan P suivant un parallélogramme $mefg$, dont le côté mg est bien, en général, dirigé suivant la tangente à la courbe ab , mais dont le côté me n'est pas normal à cette courbe. Il résulte de cette observation que les projections des accélérations tangentielle et centripète d'un point de l'espace ne sont pas, le plus souvent, les accélérations tangentielle et centripète de sa projection.

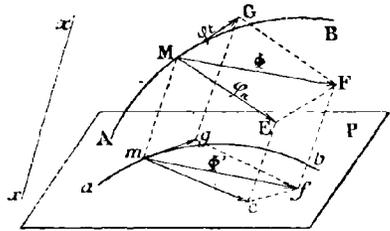


Fig. 97.

Il en est autrement dans deux cas :

1° Si la figure $mefg$ est un rectangle. — Cela ne peut se présenter, en projections orthogonales, que si l'un des côtés au moins du rectangle MEFG est parallèle au plan P.

2° Si la trajectoire AB est rectiligne. — Car les accélérations totales Φ et Φ' , dont l'une est la projection de l'autre, se réduisent alors à leurs composantes tangentielles.

118. Théorème. — Lorsqu'on projette le mouvement d'un point sur un axe parallèlement à un plan, l'accélération totale de la projection du point est égale, à chaque instant, à la projection de l'accélération totale du point de l'espace sur le même axe.

Soient M et M' (fig. 98) les positions du mobile aux instants t et t + Δt , $V = \overline{MC}$ et $V + \Delta V = \overline{M'C'}$ les vitesses correspondantes, m et m' les projections de M et M' sur l'axe $x'x$ parallèlement au plan P; les vitesses de ces points sont figurées par les vecteurs \overline{mc} et $\overline{m'c'}$, projections respectives de \overline{MC} et $\overline{M'C'}$.

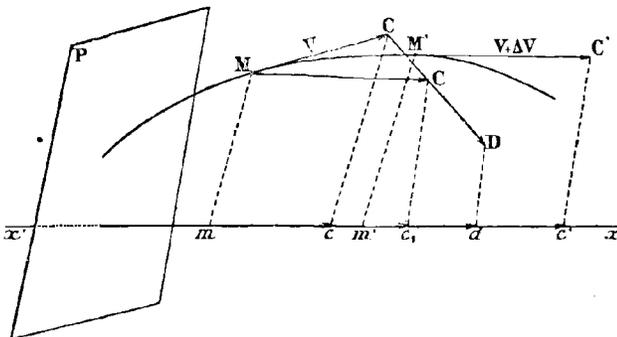


Fig. 98.

Menons par M un vecteur $\overline{MC_1}$ équipollent à $\overline{M'C'}$ et par m un vecteur $\overline{mc_1}$ égal à $\overline{m'c'}$. $\overline{CC_1}$ et $\overline{cc_1}$ mesurent les vitesses acquises élémentaires dans le mouvement de l'espace et dans sa projection, et les rapports $\frac{\overline{CC_1}}{\Delta t}$, $\frac{\overline{cc_1}}{\Delta t}$ sont les accélérations totales moyennes

(*) On a en effet $\frac{\overline{CC_1}}{\overline{CD}} = \frac{cc_1}{cd} = \Delta t$, ce qui prouve le parallélisme de \overline{Dd} et de \overline{Cc} .

Φ_m et Φ'_m , pendant le temps Δt , des points M et m. En les représentant par les vecteurs \overline{CD} et \overline{cd} , on a

$$\Phi_m = \frac{\overline{CC_1}}{\Delta t} = \overline{CD}$$

$$\Phi'_m = \frac{\overline{cc_1}}{\Delta t} = \overline{cd}$$

Mais, quand on a transporté $\overline{MC'}$ en $\overline{MC_1}$, sa projection est restée égale à $\overline{m'c'}$; elle est donc figurée par $\overline{mc_1}$. Il en résulte que $\overline{cc_1}$ est la projection de $\overline{CC_1}$, et que par suite \overline{cd} est la projection de \overline{CD} (*). Donc

$$\Phi'_m = (\Phi_m)_{xx}$$

Si l'on fait tendre Δt vers zéro Φ_m et Φ'_m ont pour limites respectives les accélérations totales réelles Φ et Φ' du mobile M et de sa projection, à l'instant t. La relation précédente devient

$$\Phi' = (\Phi)_{xx}$$

119. Remarque. — Le mouvement du point m étant rectiligne, son accélération totale se réduit à sa composante tangentielle. Pas plus que dans la projection du mouvement sur un plan, les accélérations tangentielle et centripète du mouvement de l'espace ne donnent donc naissance aux accélérations correspondantes du mouvement projeté. Il n'y a d'exception que si le mouvement de l'espace est lui-même rectiligne, car alors les composantes centripètes disparaissent tant dans l'espace qu'en projection, et l'accélération tangentielle du point m est la projection de celle du point M. Nous étions déjà arrivés à ce résultat en étudiant le mouvement d'un point en coordonnées rectilignes (77).

Applications. — I. *Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné.* — *Théorèmes de Galilée.*

120. Un point M (fig. 99), posé sur un plan P qui forme un angle α avec le plan horizontal H, est soumis à l'action de la pesanteur. L'accélération terrestre, $g = \overline{MA}$, peut être décomposée en deux autres, \overline{MC} et \overline{MB} , l'une normale au plan P, l'autre contenue dans ce plan. L'effet de la première est détruit par la résistance du plan; la seconde, dont la valeur constante est $\overline{MB} = g \sin \alpha$, produit seule le mouvement. Le plan \overline{AMC} étant perpendiculaire à la fois aux plans P et H, \overline{MB} est dirigée suivant une ligne de plus grande pente du plan P. On peut conclure de ce qui précède que le point M va prendre, suivant cette droite, un mouvement uniformément accéléré. Ce mouvement s'effectue dans le plan mené perpendiculairement à xy par la position initiale du mobile; nous le prendrons pour plan de la figure.

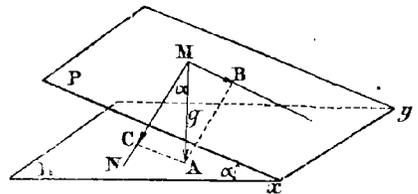


Fig. 99.

La partie \overline{SQ} (fig. 100) de la ligne de plus grande pente, comprise entre le point de départ du mobile et le plan horizontal, s'appelle la *longueur* du plan; sa projection horizontale \overline{RQ} est la *base*; enfin, la cote du point S est la

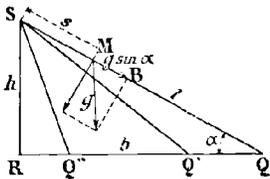


Fig. 100.

La partie \overline{SQ} (fig. 100) de la ligne de plus grande pente, comprise entre le point de départ du mobile et le plan horizontal, s'appelle la *longueur* du plan; sa projection horizontale \overline{RQ} est la *base*; enfin, la cote du point S est la

(*) La démonstration serait analogue à celle qui, au paragraphe 74, établit que \overline{mc} est la projection de \overline{MC} .

hauteur du plan. Nous désignerons ces quantités respectivement par l , b , et h .

En prenant S et SQ comme origine et comme sens positif des espaces, l'instant où le mobile est abandonné à lui-même comme origine des temps, les équations du mouvement du point M sont

$$v = g \sin \alpha \times t$$

$$s = \frac{1}{2} g \sin \alpha \times t^2$$

L'élimination de t entre ces deux équations donne une relation entre la vitesse et l'espace parcouru

$$v^2 = 2gs \sin \alpha.$$

121. Premier théorème. — *Si l'on mène tous les plans inclinés passant par un même point et limités au même plan horizontal, des mobiles partant, sans vitesse initiale, du point commun à tous ces plans, arrivent au plan horizontal avec la même vitesse.*

Il suffit de prouver que la vitesse acquise par le mobile ne dépend que de la hauteur du plan parcouru. En faisant $s = l$, on a en effet

$$v^2 = 2gl \sin \alpha$$

Mais

$$l \sin \alpha = h$$

Donc

$$v^2 = 2gh \quad \text{et} \quad v = \sqrt{2gh}$$

Cette expression démontre le théorème. Elle établit en outre que le mobile acquiert la même vitesse que s'il était tombé librement de la hauteur h (30). Donc, si l'on considère une série de plans inclinés SQ, SQ', SQ''... de même hauteur h (fig. 400), la vitesse du mobile prend, au bas de chacun d'eux, la même valeur, égale à celle qu'il aurait acquise en tombant verticalement de S en R.

122. Deuxième théorème. — *Si l'on mène par un même point une infinité de plans inclinés, et si l'on abandonne sur chacun d'eux un mobile partant de leur point commun, sans vitesse initiale, le lieu géométrique des positions de ces mobiles, à un même instant t , est une sphère.*

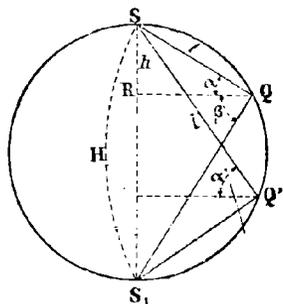


Fig. 401.

On peut considérer seulement ceux de ces plans qui sont menés par le point S perpendiculairement au plan de la figure (fig. 401). Pour trouver le temps qu'emploie un mobile à parcourir une portion SQ de longueur l sur l'un d'entre eux, il suffit de faire $s = l$ dans l'équation des espaces et de résoudre par rapport à t .

On trouve ainsi

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}} \quad (1)$$

Soit, dans le plan de la figure, la perpendiculaire QS₁ menée sur SQ jusqu'à sa rencontre en S₁ avec la verticale du point S. Le triangle rectangle SQS₁ donne

$$SS_1 = H = \frac{l}{\sin \alpha}$$

Par conséquent

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

La durée de la descente ne dépend donc que de H. Il en résulte que toutes les droites, menées par le point S, et aboutissant à la circonférence décrite sur SS_1 comme diamètre, sont parcourues pendant le même temps t par un mobile partant de S sans vitesse initiale. Le lieu des positions prises, à l'instant t , par tous les mobiles abandonnés de S dans les conditions supposées, est donc une sphère engendrée par cette circonférence en tournant autour de SS_1 .

La formule $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ montre en outre que le temps employé par chacun de ces mobiles est le même que s'il était tombé librement de la hauteur H, sous l'action de la pesanteur.

123. Définition. — Chacune des cordes SQ , QS_1 définit un plan incliné perpendiculaire au plan de la figure. On peut convenir, en raison de la position de ces cordes dans la circonférence, de dire que le second plan est *supplémentaire* du premier.

124. Troisième théorème. — *Deux plans supplémentaires sont parcourus pendant le même temps par des mobiles abandonnés, en haut de chacun d'eux, sans vitesse initiale.*

Soient β l'inclinaison du plan QS_1 sur le plan horizontal, et t' le temps employé, pour parcourir ce plan, par un mobile abandonné au point Q, sans vitesse initiale. La formule (1) donne

$$t' = \sqrt{\frac{2QS_1}{g \sin \beta}}$$

Mais, dans le triangle rectangle SQS_1 , $QS_1 = H \sin \beta$

Donc
$$t' = \sqrt{\frac{2H}{g}} = t$$

Généralisations du premier théorème de Galilée.

125. Première généralisation. — *Si l'on mène tous les plans inclinés passant par un même point et limités au même plan horizontal, des mobiles, lancés avec une même vitesse initiale v_0 du point commun à tous ces plans, arrivent au plan horizontal avec la même vitesse.*

Les équations du mouvement du point M se déplaçant dans ces conditions sur le plan SQ à partir du point S (fig. 100) sont

$$v = v_0 + gt \sin \alpha$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha$$

L'élimination du temps entre ces deux relations donne

$$v^2 = v_0^2 + 2gs \sin \alpha$$

En faisant $s = l$, cette formule détermine la vitesse du mobile à son arrivée au plan horizontal ; on a ainsi

$$v^2 = v_0^2 + 2gl \sin \alpha = v_0^2 + 2gh$$

On voit que la vitesse acquise ne dépend que de h ; elle est donc la même, que soit le plan mené par S et terminé au plan horizontal QR . C'est aussi la vitesse que prendrait un mobile en tombant verticalement de la hauteur h , avec la vitesse initiale v_0 , sous l'action de la pesanteur (33).

126. Deuxième généralisation. — Si plusieurs mobiles sont lancés d'un même point, avec la même vitesse initiale, sur des trajectoires absolument quelconques, ils arrivent au même plan horizontal avec des vitesses égales.

Soit SQ (fig. 102) l'une de ces trajectoires. Partageons-la en éléments successifs $SA_1, A_1A_2, A_2A_3 \dots A_{n-1}Q$ assez petits pour que l'on puisse les regarder comme rectilignes, et soient $h_1, h_2 \dots h_n$ les différences de niveau des points de division consécutifs. Soient encore v_0 la vitesse initiale donnée, $v_1, v_2 \dots v_{n-1}$ et v les vitesses acquises par le mobile quand il passe en $A_1, A_2 \dots A_{n-1}, Q$. Le théorème précédent donne la série d'égalités

$$v_1^2 = v_0^2 + 2gh_1$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh_2$$

$$v^2 = v_{n-1}^2 + 2gh_n$$

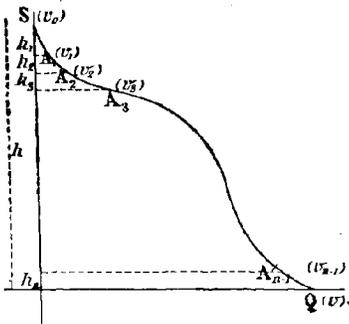


Fig. 102.

En ajoutant membre à membre, on a

$$v^2 = v_0^2 + 2g (h_1 + h_2 \dots + h_n) = v_0^2 + 2gh$$

h étant la différence de niveau du point de départ et du point d'arrivée. Cette expression montre que la vitesse finale ne dépend que de h ; elle est donc la même quelle que soit la forme de la trajectoire.

Application. — II. *Théorie du pendule simple.*

127. Le pendule simple est constitué par un point matériel pesant, suspendu en A par un fil sans poids de longueur l (fig. 103). Si ce système était abandonné à lui-même, il resterait en repos dans la direction verticale Ao . Mais quand on l'écarte d'un angle α_0 de sa position d'équilibre, il prend dans le plan M_0Ao , un mouvement oscillatoire dont on va étudier les lois.

La trajectoire du point M est un arc de circonférence de rayon l . Prenons le point o comme origine des espaces, dont le sens positif sera oM_0 par exemple, et comme instant initial celui auquel le pendule, amené en AM_0 , va commencer son mouvement. La position du système, à un instant quelconque t , est caractérisée par l'angle $oAM = \alpha$, auquel correspond l'arc s de la trajectoire. Ces deux variables sont liées par la relation

$$l\alpha = s$$

L'accélération totale du point M , à l'instant t , est $g = \overline{MB}$. Les composantes tangentielle et normale, représentées par

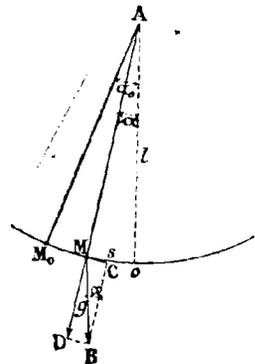


Fig. 103.

les vecteurs \overline{MC} et \overline{MD} , ont pour valeurs absolues respectives $g \sin \alpha$ et $g \cos \alpha$. La seconde est détruite par la résistance du fil, qui empêche tout mouvement dans la direction AM. La composante tangentielle, dirigée vers o , doit être considérée comme négative (37), et, si on la représente par φ , on a

$$\varphi = -g \sin \alpha$$

Supposons que l'angle d'écart initial α_0 soit assez petit pour qu'on puisse le confondre avec son sinus. Le même fait subsistant pour l'angle α , nous pourrions écrire

$$\varphi = -g \alpha = -\frac{g}{l} s$$

ou

$$dv = -\frac{g}{l} s dt$$

et en multipliant les deux membres de cette équation par la vitesse v à l'instant t

$$v dv = -\frac{g}{l} s v dt = -\frac{g}{l} s ds$$

Soit s_0 la longueur de l'arc oM_0 ; à l'instant initial, le point M part de M_0 avec une vitesse nulle. On peut donc intégrer les deux membres de l'égalité précédente entre les limites correspondantes o et v , s_0 et s , ce qui donne :

$$\int_0^v v dv = -\frac{g}{l} \int_{s_0}^s s ds$$

ou

$$v^2 = \frac{g}{l} (s_0^2 - s^2)$$

et enfin

$$v = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{s_0^2 - s^2}$$

Quand le mobile passe en M pour la première fois, sa vitesse, dirigée vers o , est négative (17). On doit donc rejeter le signe + dans l'expression ci-dessus ; en remplaçant v par $\frac{ds}{dt}$, on a

$$\frac{-ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt$$

d'où

$$\int_{s_0}^s \frac{-ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^t dt = \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

ce qu'on peut écrire successivement

$$\int_{s_0}^s \frac{-ds}{s_0 \sqrt{1 - \left(\frac{s}{s_0}\right)^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

$$\int_{s_0}^s \frac{-d\left(\frac{s}{s_0}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{s}{s_0}\right)^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

c'est-à-dire

$$\text{arc cos } \frac{s}{s_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

et enfin
$$s = s_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (1)$$

C'est l'équation des espaces du mouvement pendulaire. On en déduit l'équation des vitesses et celle des accélérations tangentielles par deux dérivations successives :

$$v = -s_0 \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (2)$$

$$\varphi = -s_0 \frac{g}{l} \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (3)$$

La durée T de l'oscillation simple est le temps nécessaire pour que s passe de la valeur s_0 à la valeur $-s_0$. L'expression (1) montre que, pour qu'il en soit ainsi, l'arc $\sqrt{\frac{g}{l}} t$ doit croître de 0 à π . On a donc

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

128. Remarque. -- On peut faire une comparaison intéressante entre les lois du mouvement pendulaire et celles de la projection du mouvement circulaire uniforme d'un point M sur le diamètre M_0M_1 qui passe par sa position initiale (fig. 104). Dans ce but, cherchons les lois de ce dernier mouvement en prenant le point o comme origine des espaces, et oM_0 comme direction des espaces positifs. La vitesse a du point M est, à chaque instant, tangente à la circonférence, et son accélération totale $\Phi = \frac{a^2}{r}$ est dirigée vers le centre (113).

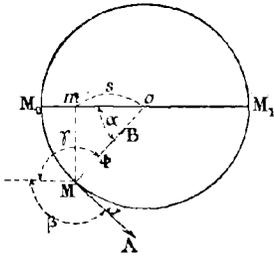


Fig. 104.

On a, à l'instant t :

$$s = r \cos \alpha = r \cos \frac{at}{r} \quad (4)$$

$$v = (\overline{M\Lambda}) = a \cos \beta = a \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -a \sin \alpha = -a \sin \frac{at}{r} \quad (5)$$

$$\varphi = (\overline{M\text{B}}) = \frac{a^2}{r} \cos \gamma = \frac{a^2}{r} \cos (\pi - \alpha) = -\frac{a^2}{r} \cos \alpha = -\frac{a^2}{r} \cos \frac{at}{r} \quad (6)$$

Ces équations ne diffèrent de celles du mouvement pendulaire que par la nature des constantes. Il suffit, pour les rendre absolument identiques, de poser

$$r = s_0 \quad \text{et} \quad \frac{a}{r} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{ou} \quad a = s_0 \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Cette analogie peut être interprétée de la façon suivante. Soit M_0M_1 (fig. 105), l'amplitude d'une oscillation simple du pendule. Dans le cas des oscillations infiniment petites où nous nous sommes placés, l'arc M_0M_1 peut être considéré comme rectiligne. Décrivons une circonférence de centre o avec $oM_0 = s_0$ pour rayon, et imaginons un mobile μ la parcourant à partir du point M_0 , d'un mouvement uniforme de vitesse $a = s_0 \sqrt{\frac{g}{l}}$. Le mouvement du pendule est identique à celui de la projection du mobile μ sur le diamètre M_0M_1 .

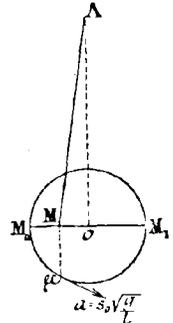


Fig. 105.

§ III. — *Accélération totale d'un point dont le mouvement est rapporté à un système de coordonnées rectilignes ou polaires.*

129. *Coordonnées rectilignes.* — Soient

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{array} \right. \quad (1)$$

les équations du mouvement d'un point M rapporté à trois axes de coordonnées, ox , oy , oz (fig. 106). Les accélérations totales des projections m_x , m_y , m_z du point M sur ces trois axes sont respectivement

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_x = \frac{d^2x}{dt^2} = f''_1(t) \\ \varphi_y = \frac{d^2y}{dt^2} = f''_2(t) \\ \varphi_z = \frac{d^2z}{dt^2} = f''_3(t) \end{array} \right. \quad (2)$$

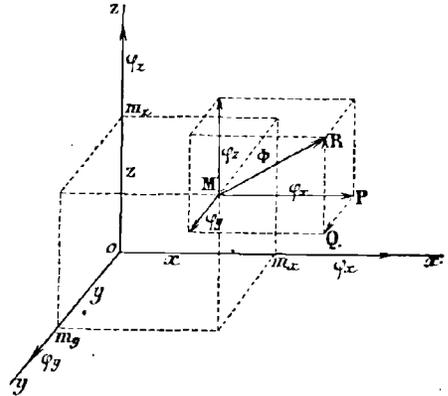


Fig. 106.

Mais φ_x , φ_y , φ_z sont les projections, sur ces mêmes axes, de l'accélération totale Φ du mouvement de l'espace. Donc

Théorème. — *L'accélération totale du point M est représentée, à chaque instant, par la diagonale du parallépipède dont les trois arêtes qui aboutissent en M sont équipollentes aux accélérations totales des projections du mobile sur les axes de coordonnées.*

Si les axes sont rectangulaires, on a

$$\Phi^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2$$

d'où

$$\Phi = \pm \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2} \quad (3)$$

On peut, dans la même hypothèse, déterminer la direction de Φ par ses cosinus directeurs.

Si l'on désigne par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les angles que forme le vecteur \overline{MR} avec les directions positives des axes, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_x = \Phi \cos \alpha_1 \\ \varphi_y = \Phi \cos \beta_1 \\ \varphi_z = \Phi \cos \gamma_1 \end{array} \right. \quad (4)$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_1 = \frac{\varphi_x}{\pm \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}} \\ \cos \beta_1 = \frac{\varphi_y}{\pm \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}} \\ \cos \gamma_1 = \frac{\varphi_z}{\pm \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}} \end{array} \right. \quad (5)$$

Si l'on remplace $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ par leurs expressions tirées des formules (2), les formules (3) et (5) font connaître, à chaque instant, la grandeur et la direction de l'accélération totale du point M.

130. Cas où la trajectoire est plane. — Il suffit alors de rapporter le mouvement à deux axes de coordonnées situés dans le plan de la trajectoire.

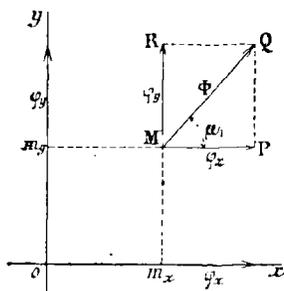


Fig. 107.

Soient $\left\{ \begin{array}{l} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{array} \right.$

les équations du mouvement du point. Un raisonnement analogue au précédent montre que l'accélération totale du point M est représentée, à chaque instant, par la diagonale du parallélogramme construit sur les accélérations totales des projections du point sur les deux axes.

Si les axes sont rectangulaires, on a

$$\Phi = \pm \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\varphi_y}{\varphi_x}$$

en adoptant les notations indiquées sur la fig. 107.

131. Coordonnées polaires. — Supposons maintenant un mobile M dont le mouvement, rapporté à un système de coordonnées polaires, est défini par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} r = f_1(t) \\ \theta = f_2(t) \end{array} \right.$$

Nous nous proposons de chercher les projections de son accélération totale suivant

les axes $M_{x'}$ et $M_{y'}$ (fig. 108), dont les directions correspondent à des angles polaires θ et $\theta + \frac{\pi}{2}$ (81). Les projections de Φ sur ox et oy sont respectivement

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_x = \frac{d^2x}{dt^2} \\ \varphi_y = \frac{d^2y}{dt^2} \end{array} \right.$$

x et y étant les coordonnées rectangulaires du point M dans le système d'axes xoy , liées aux coordonnées polaires r et θ du même point par les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right. \quad (1)$$

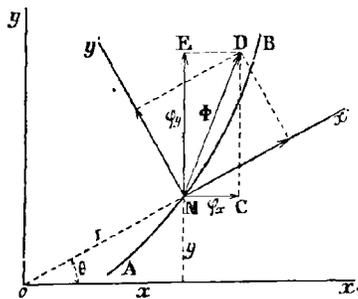


Fig. 108.

On a, en projetant le contour MCD , dont la résultante est Φ , sur les axes $M_{x'}$ et $M_{y'}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Phi)_{M_{x'}} = \varphi_x \cos \theta + \varphi_y \sin \theta \\ (\Phi)_{M_{y'}} = \varphi_y \cos \theta - \varphi_x \sin \theta \end{array} \right. \quad (2)$$

Ces formules résoudre la question si φ_x et φ_y étaient exprimées en fonction des coordonnées polaires r et θ du point M . Or, les formules (1) donnent par deux dérivations successives

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \cos \theta \frac{dr}{dt} - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = \sin \theta \frac{dr}{dt} + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = \cos \theta \frac{d^2r}{dt^2} - 2 \sin \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \sin \theta \frac{d^2r}{dt^2} + 2 \cos \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{array} \right.$$

En appliquant ensuite les formules (2), il vient, après réductions

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Phi)_{M_{x'}} = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ (\Phi)_{M_{y'}} = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{array} \right.$$

132. Remarque. — Le mouvement du point M peut être considéré comme résultant de deux mouvements simultanés (81) :

1° Un mouvement relatif sur le rayon vecteur, dont la vitesse est $v_g = \frac{dr}{dt}$ (vitesse de glissement) ;

2° Un mouvement d'entraînement du rayon vecteur autour du pôle, dont la vitesse est $w = \frac{rd\theta}{dt}$ (vitesse de circulation).

Cherchons les accélérations totales de ces deux mouvements :

1° Le mouvement relatif est rectiligne ; son accélération totale, réduite à la composante tangentielle (113), est $\frac{d^2r}{dt^2}$ (111). Cette *accélération de glissement* est dirigée suivant le rayon vecteur (fig. 109). Elle se trouve dans l'expression de $(\Phi)_{Mx'}$;

2° Le mouvement d'entraînement est circulaire. La composante tangentielle de son accélération totale, égale à la dérivée de w par rapport au temps, est $r \frac{d^2\theta}{dt^2}$ (r est une constante dans le mouvement de circulation). Elle est dirigée suivant My' .

La composante centripète, dont la valeur absolue est $\frac{w^2}{r} = r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ (113), est dirigée vers le pôle (centre de la trajectoire d'entraînement) ; elle doit donc être considérée comme négative.

Ces deux composantes de l'*accélération totale de circulation* se trouvent encore dans les expressions de $(\Phi)_{Mx}$ et de $(\Phi)_{My'}$.

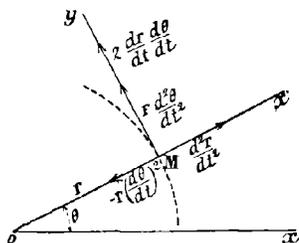


Fig. 109.

Mais il existe dans $(\Phi)_{My'}$ un terme, $2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}$, qui ne provient ni de l'accélération totale dans le mouvement relatif, ni de l'accélération totale dans le mouvement d'entraînement. Ce terme représente donc une *accélération complémentaire*, qui résulte de ce que les

axes Mx' et My' , entraînés dans le mouvement de circulation, changent de direction à chaque instant. Cette nouvelle accélération sera étudiée plus loin, dans la Cinématique des systèmes matériels, avec le théorème de *Coriolis*. Mais on peut conclure, dès maintenant, que l'accélération totale d'un point, dont le mouvement est rapporté à un système de coordonnées polaires, n'est pas la résultante des accélérations totales des mouvements composants.

Fin de la Cinématique du Point Matériel.

CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

CHAPITRE I

ÉTUDE DES MOUVEMENTS DES SYSTÈMES INVARIABLES

Nous ne nous occuperons que des *systèmes invariables*. Rappelons que l'on peut envisager ceux-ci comme un ensemble de points matériels, reliés les uns aux autres par des droites rigides et inextensibles, de telle sorte que leurs positions relatives ne peuvent être changées, quels que soient les efforts qui s'exercent sur eux.

La Cinématique des Systèmes Matériels repose sur trois théorèmes généraux.

133. Théorème. — *Le mouvement d'un système invariable, qui se déplace d'une manière quelconque dans l'espace, est complètement déterminé dès que l'on connaît les mouvements de trois de ses points, non en ligne droite.*

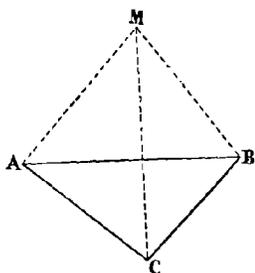


Fig. 110.

Soient ABC trois points quelconques du système, non en ligne droite. Tout autre point M du système forme avec les précédents un tétraèdre, dont les six arêtes restent invariables. Pour chaque position du triangle ABC, on sait construire ce tétraèdre, ce qui détermine la position correspondante du point M, et, par analogie, celle de tous les autres points du système. L'étude du mouvement d'un système invariable se ramène donc, dans le cas le plus général, à celle du mouvement d'un triangle indéformable.

134. Théorème. — *Le mouvement d'une figure invariable plane, qui se déplace dans son plan, est complètement déterminé dès que l'on connaît les mouvements de deux quelconques de ses points.*

Soient A, B deux points quelconques du système. Tout autre point M du système forme avec eux un triangle dont les côtés restent invariables. Pour chaque position de AB, on sait construire ce triangle dans le plan du mouvement, ce qui détermine la position correspondante du point M, et, d'une manière analogue, celle de tout autre point de la figure. L'étude du mouvement plan d'un système invariable plan se ramène donc à celle du mouvement d'une droite AB de longueur constante.

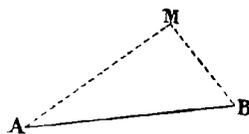


Fig. 111.

135. Théorème. — *Le mouvement d'une figure sphérique invariable, qui se déplace sur la sphère à laquelle elle appartient, est complètement déterminé dès que l'on connaît les mouvements de deux de ses points.*

Soient A, B et M trois points du système ; ils déterminent un triangle sphérique indéformable, puisque les distances rectilignes AB, BM, AM ne varient pas. Si la position du côté AB à un instant quelconque était connue, on pourrait donc repérer, au même instant, la position du point M, et, d'une manière analogue, celle de tout autre point de la figure. L'étude du mouvement d'une figure sphérique indéformable se ramène donc à celle du mouvement d'un arc de grand cercle AB, de longueur constante.

§ I. — *Mouvement de translation.*

136. **Définition.** — On dit qu'un système invariable est animé d'un *mouvement de translation* quand tous ses points décrivent des éléments de trajectoire égaux et parallèles pendant des temps égaux, quelque petits que soient ces temps,

Pour justifier cette définition nous allons montrer qu'un pareil mouvement peut s'accomplir sans que les distances qui séparent les points du système pris deux à deux soient modifiées.

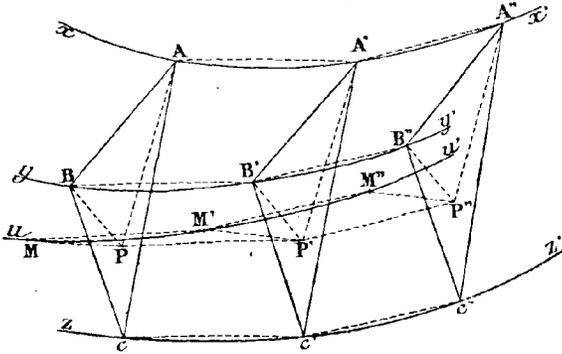


Fig. 112.

à AB, puis A'B', A''B''... égales et parallèles à Ac, on forme des triangles A'B'C', A''B''C''... égaux au triangle ABC, et situés dans des plans parallèles au sien. On peut ainsi construire par points les trajectoires des points B et c. On a évidemment :

$$\left. \begin{array}{l} \text{corde } AA' = \text{corde } BB' = \text{corde } cc' \\ \text{corde } A'A'' = \text{corde } B'B'' = \text{corde } c'c'' \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\}$$

et de plus les cordes d'une même série sont parallèles entre elles. Les lignes polygonales AA'A''... BB'B''... cc'c''... ayant leurs côtés correspondants égaux et parallèles, si nombreuses et si rapprochées que l'on suppose les époques t, t', t''..., les trajectoires xx', yy', zz', qui en sont les limites, sont égales et peuvent être considérées comme résultant du déplacement de l'une d'elles parallèlement à elle-même. Enfin, la manière dont ces lignes polygonales ont été construites montre que des arcs égaux, tels que AA', BB', cc', des trajectoires, sont parcourus dans des temps égaux.

2° *Tout autre point M du système décrit une trajectoire identique aux précédentes, et parcourue de la même manière.*

Soient M, M', M''... les positions de ce point aux instants t, t', t''..., MP, M'P', M''P''... les perpendiculaires aux plans ABC, A'B'C', A''B''C''... A cause de l'indéformabilité du système, ces perpendiculaires sont égales entre elles ; elles sont de plus parallèles, et leurs pieds occupent les mêmes positions relatives dans les triangles ABC, A'B'C', A''B''C''... On conclut de là les égalités suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \text{corde } BB' = \text{corde } PP' = \text{corde } MM' \\ \text{corde } B'B'' = \text{corde } P'P'' = \text{corde } M'M'' \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\}$$

Les lignes polygonales MM'M''... BB'B'' ont donc leurs côtés correspondants égaux et parallèles ; elles ont pour limites respectives les trajectoires yy', uu' des points B

et M quand les époques t, t' deviennent infiniment nombreuses et rapprochées. Par conséquent, ces trajectoires sont superposables et parallèles; de plus, leurs éléments égaux, tels que BB' et MM', sont parcourus dans des temps égaux.

137. Vitesse et accélération totale des différents points du système.

1° *Vitesse.* — Les vitesses v_a, v_b, v_c, v_m des points ABCM à l'instant t sont égales comme valeurs limites des rapports égaux $\frac{\text{arc AA}'}{t'-t}, \frac{\text{arc BB}'}{t'-t}, \frac{\text{arc cc}'}{t'-t}, \frac{\text{arc MM}'}{t'-t}$ quand t' tend vers t ; elles sont parallèles comme directions limites des cordes parallèles AA', BB', cc' et MM'.

2° *Accélération totale.* — Il résulte de cette égalité et de ce parallélisme constant des vitesses correspondant à un même instant t , que les vitesses acquises élémentaires pendant le temps Δt qui succède à l'instant t sont égales et parallèles pour tous les points du système. Les accélérations totales des différents points, exprimées par les limites des rapports

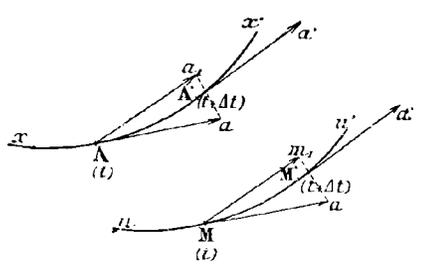


Fig. 113.

$$\frac{aa_1}{\Delta t}, \frac{mm_1}{\Delta t} \dots$$

(fig. 113) sont donc égales et parallèles.

En résumé : *Dans le mouvement de translation d'un système invariable, les vitesses et les accélérations totales de tous les points, au*

même instant, sont égales et parallèles.

L'étude du mouvement de translation d'un système invariable se ramène par conséquent à celle du mouvement d'un seul de ses points, et l'on peut dire que la vitesse et l'accélération totale de celui-ci sont, à chaque instant, celles du système tout entier.

§ II. — Mouvement de rotation.

138. *Définition.* — On dit qu'un système invariable est animé d'un mouvement de rotation simple autour d'un axe défini par deux points fixes P et Q, lorsque chacun de ses points reste à la même distance de P et Q pendant toute la durée du mouvement.

1° *Un pareil mouvement est possible pour le triangle de comparaison ABC.*

On peut, en effet, choisir celui-ci de manière que son plan contienne PQ, ce qui rend cette possibilité évidente.

2° *Tout point M invariablement relié à ABC reste, dans le mouvement de ce triangle, à des distances constantes de P et de Q.*

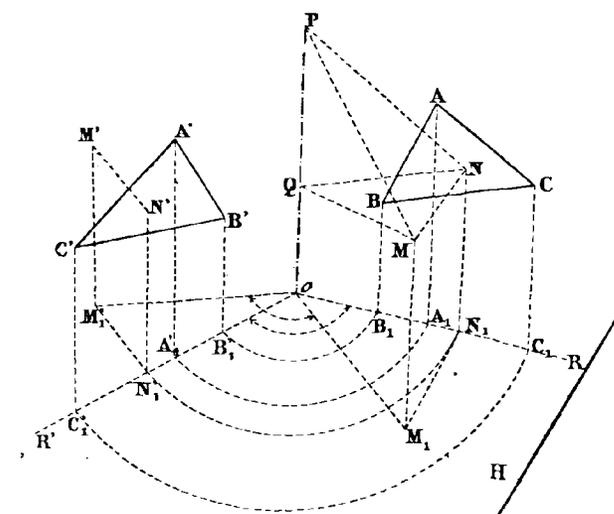


Fig. 114.

Soit MN (fig. 114) la perpendiculaire au plan ABC. A cause de l'indéformabilité

du système, son pied N ne change pas de position par rapport aux points A, B, C pendant le mouvement, et les longueurs NP, NQ, MN restent constantes. Les triangles PNM, QNM sont donc invariables, ainsi que leurs côtés PM et QM. Il résulte de là que le mouvement de rotation autour de l'axe PQ peut s'exécuter, tel qu'il a été défini, sans déformation du système. Chaque point décrit évidemment une circonférence, dont le plan est perpendiculaire à l'axe, et dont le centre est sur cet axe.

139. Théorème. — *Les arcs de circonférence décrits, pendant le même temps, par tous les points du système, correspondent à des angles au centre égaux.*

Soient ABC, A'B'C' (fig. 114) les positions du triangle de comparaison à deux instants t et t' ; les plans de ces triangles, qui, par hypothèse, contiennent PQ, sont déterminés par leurs traces R et R' sur un plan H perpendiculaire à l'axe. Les points A, B, C ont décrit dans l'espace des arcs de circonférence, projetés sur H en vraie grandeur, correspondant à un angle au centre égal à RoR'. Le point N est venu en N' dans le plan A'B'C', et MN a pris la position M'N'. Les droites MN et M'N' se projettent sur H en vraie grandeur, perpendiculairement aux traces R et R', et l'angle de rotation du point M est $M_1oM'_1$. L'égalité des triangles rectangles M_1N_1o , $M'_1N'_1o$ montre que l'on a

$$\text{angle RoR}' = \text{angle } M_1oM'_1$$

Il résulte de cette étude les conséquences suivantes :

140. 1° *Les chemins décrits simultanément par les différents points du système sont proportionnels à leurs distances à l'axe de rotation ;*

2° *Deux points situés à la même distance de l'axe décrivent, pendant le même temps, des chemins égaux.*

141. Théorème. — *Les vitesses des différents points du système, au même instant, sont proportionnelles à leurs distances à l'axe, et perpendiculaires aux plans qu'ils déterminent avec l'axe.*

Deux points du système, dont les positions sont M et M_1 à l'instant t , sont venus en M' et M'_1 à l'instant $t + \Delta t$; leurs distances à l'axe de rotation sont r et r_1 . A cause de l'égalité des angles $M_\mu M'$, $M_1\mu_1 M'_1$, on a

$$\frac{\text{arc } MM'}{\text{arc } M_1M'_1} = \frac{r}{r_1}$$

$$\left(\frac{\text{arc } MM'}{\Delta t} \right) = \frac{r}{r_1} \left(\frac{\text{arc } M_1M'_1}{\Delta t} \right)$$

d'où

Quand Δt tend vers zéro, les deux termes du premier rapport ont respectivement pour limites les vitesses v et v_1 des points M et M_1 . Par conséquent

$$\frac{v}{v_1} = \frac{r}{r_1}$$

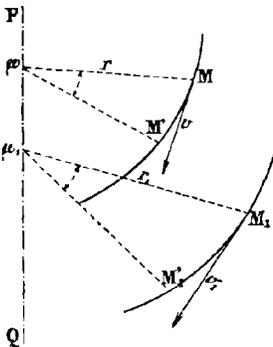


Fig. 115.

De plus, les directions de ces vitesses, tangentes en M et M_1 aux circonférences MM' , $M_1M'_1$, sont respectivement perpendiculaires aux plans PQM, PQM₁.

142. Remarque. — Supposons les points M et M_1 situés dans un même plan passant par l'axe; si celui-ci s'éloigne indéfiniment en restant parallèle à lui-même, le rapport $\frac{r}{r_1}$ tend vers l'unité, et les vitesses v et v_1 tendent vers des limites égales. Elles sont de plus parallèles. Cette observation s'applique en particulier aux trois sommets du triangle de comparaison, de sorte que ceux-ci décrivent, pendant un temps infiniment petit, des

chemins égaux et parallèles. Le mouvement du système est donc *une translation*. Par conséquent, tout mouvement de translation peut être assimilé, à chaque instant, à une rotation autour d'un axe indéfiniment éloigné.

143. Vitesse angulaire du système. — Vitesse linéaire d'un point.

La proportion $\frac{v}{v_1} = \frac{r}{r_1}$

peut s'écrire $\frac{v}{r} = \frac{v_1}{r_1}$

On voit ainsi que : *le rapport de la vitesse d'un point à sa distance à l'axe est constant, à chaque instant, pour tous les points du système.*

Ce rapport constant, que nous désignerons par ω , est appelé la *vitesse angulaire de rotation du système* à l'instant considéré. On a donc

$$\frac{v}{r} = \omega$$

ou $v = \omega r$

Afin d'éviter toute confusion, on dit que v est la *vitesse linéaire* du point M.

Les égalités précédentes permettent d'exprimer la vitesse angulaire du système en fonction de la vitesse linéaire de l'un de ses points, ou vice versa. On voit que :

La vitesse linéaire d'un point, à un instant quelconque, est égale au produit de la vitesse angulaire à ce même instant, par la distance du point considéré à l'axe de rotation.

Il faut observer que la vitesse d'un point de l'axe est nulle à chaque instant ; aucun autre point du système ne jouit de cette propriété.

La formule $\frac{v}{r} = \omega$

donne $v = \omega$ si $r = 1$.

Par conséquent : *La vitesse angulaire de rotation est égale, à chaque instant, à la vitesse linéaire d'un point situé à l'unité de distance de l'axe.*

Enfin, la vitesse angulaire ω est encore la dérivée de l'angle de rotation du système, prise par rapport au temps. Soient, en effet, θ l'angle dont le système a tourné jusqu'à l'instant t , et $\Delta\theta$ son accroissement pendant le temps Δt . L'arc correspondant décrit par un point situé à la distance r de l'axe est $r \Delta\theta$, et la vitesse linéaire de ce point à l'instant t est exprimée par la limite $r \frac{d\theta}{dt}$ du rapport $r \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ quand Δt tend vers zéro (15). Comme cette vitesse est aussi ωr , on a

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Cette égalité justifie le nom de vitesse angulaire de rotation donné à ω (81).

144. Théorème. — Les accélérations tangentielles et centripètes des différents points du système sont, à chaque instant, proportionnelles aux distances de ces points à l'axe de rotation.

Soient, à l'instant t ,

$$v = \omega r$$

$$v' = \omega r'$$

les vitesses linéaires de deux points M et M' du système, situés à des distances r et r' de l'axe PQ (fig. 116). Si l'on désigne par φ_t et φ'_t , φ_n et φ'_n les accélérations tangentielles et centripètes respectives de ces points, à l'instant t , on a (111)

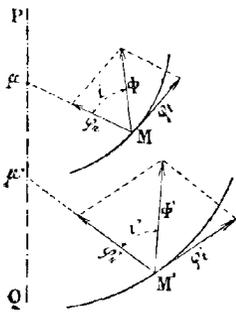


Fig. 116.

d'où

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_t &= \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} \\ \varphi_n &= \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi'_t &= \frac{dv'}{dt} = r' \frac{d\omega}{dt} \\ \varphi'_n &= \frac{v'^2}{r'} = \omega^2 r' \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\varphi_t}{\varphi'_t} = \frac{r}{r'}$$

et

$$\frac{\varphi_n}{\varphi'_n} = \frac{r}{r'}$$

145. Corollaire. — Les accélérations totales des différents points du système, sont, à chaque instant, proportionnelles à leurs distances à l'axe de rotation. Elles font des angles égaux avec les plans menés par l'axe et les points considérés.

Les accélérations totales Φ et Φ' des points M et M' sont

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi &= \sqrt{\varphi_t^2 + \varphi_n^2} = r \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2} \\ \Phi' &= \sqrt{\varphi'_t{}^2 + \varphi'_n{}^2} = r' \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2} \end{aligned} \right.$$

D'où

$$\frac{\Phi}{\Phi'} = \frac{r}{r'}$$

Les angles i et i' que forment les directions de Φ et Φ' avec les plans PQM et PQM sont donnés par les formules

$$\operatorname{tg} i = \frac{\varphi_t}{\varphi_n} = \frac{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)}{\omega^2}$$

$$\operatorname{tg} i' = \frac{\varphi'_t}{\varphi'_n} = \frac{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)}{\omega^2}$$

d'où il résulte que $i = i'$.

146. Remarque. — Si le mouvement de rotation est uniforme on a

$$\varphi_t = 0$$

$$\varphi_n = \Phi = \omega^2 r$$

et

$$tg \ i = 0$$

L'accélération totale de chaque point est alors dirigée vers le centre de la circonférence qu'il décrit.

En résumé, le mouvement de rotation d'un système invariable autour d'un axe est complètement connu dès que l'on a établi les lois du mouvement d'un seul de ses points.

147. Expression de la vitesse angulaire d'un mouvement de rotation uniforme en fonction du nombre de tours.

Quand le mouvement de rotation est uniforme, la vitesse angulaire est égale au chemin parcouru, pendant l'unité de temps, par un point situé à l'unité de distance de l'axe (8 — 143). Soit N le nombre de tours effectués en une minute par le mobile ; le chemin parcouru par le point en question, pendant une minute, est $2\pi N$. On a donc si l'on prend la seconde pour unité de temps

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{\pi N}{30}$$

et, si l'on prend la minute

$$\omega = 2\pi N.$$

Si, par exemple, une poulie de rayon $R = 30$ c/m. tourne à raison de 100 tours par minute, sa vitesse circonférentielle, rapportée au centimètre comme unité de longueur et à la seconde comme unité de temps ; est

$$v = \omega R = \frac{\pi N}{30} \times R = \frac{100\pi}{30} \times 30 = 100\pi = 314 \text{ c/m à la seconde.}$$

En considérant un second mouvement de rotation de vitesse angulaire $\omega' = \frac{\pi N'}{30}$, on a

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N'}{N}$$

Par conséquent : *le rapport des vitesses angulaires de deux arbres est égal au rapport des nombres de tours qu'ils effectuent dans le même temps.*

§ III. — Mouvement épicycloïdal plan.

148. Définitions — Deux courbes planes S et S', tangentes en I, étant données, on dit que S *roule sans glissement* sur S' supposée fixe quand le point de contact décrit simultanément des chemins égaux sur les deux courbes. Le mouvement de la courbe S est aussi appelé *mouvement de roulement simple*, ou encore *mouvement épicycloïdal*. Il s'effectue de telle sorte que des éléments égaux des deux courbes se mettent successivement en contact.

On dit que le mouvement de S sur S' est un *glissement simple* quand le point de contact reste fixe sur la courbe S'. Tous les éléments de S viennent successivement en contact avec le même élément de S'.

Enfin, le mouvement de S est un *mouvement mixte de roulement et de glissement* quand il y a à la fois déplacement du point I sur les deux courbes, sans que les chemins qu'il parcourt sur l'une et sur l'autre soient égaux entre eux.

Nous nous proposons d'étudier le mouvement de roulement simple.

149. Théorème. — *Le mouvement de roulement simple d'une courbe plane sur*

une autre revient à une succession de rotations infiniment petites qui s'exécutent, à chaque instant, autour du point de contact des deux courbes.

Inscrivons dans S et S' (fig. 117), en partant du point de contact, des lignes polygonales s et s' dont les côtés correspondants soient égaux chacun à chacun. Quand s roule sur s', ses côtés $II_1, I_1 I_2 \dots$ viennent successivement s'appliquer sur les côtés $II', I' I'' \dots$ de s'.

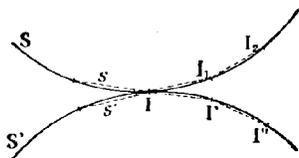


Fig. 117.

Le mouvement qui amène II_1 en coïncidence avec II' est une rotation autour du point I, à la fin de laquelle I_1 est confondu avec I' . Le mouvement qui amène ensuite $I_1 I_2$ à se superposer à $I' I''$ est une rotation autour du point I' , etc... Le roulement de s sur s' se compose donc d'une suite de rotations autour des sommets $II' I'' \dots$ du polygone fixe, avec lesquels les sommets du polygone mobile viennent successivement se confondre.

Le même fait a lieu, si nombreux et si petits que soient les côtés des deux polygones, pourvu qu'ils soient toujours égaux chacun à chacun. A la limite, les rotations, qui sont devenues infiniment petites, s'effectuent autour des positions successives $I, I', I'' \dots$ du point de contact des deux courbes.

Pour cette raison, on donne au point I le nom de *centre instantané de rotation*. La courbe fixe S' s'appelle la *base*, et la courbe mobile S la *roulante*. Un point M invariablement relié à la roulante décrit, dans son plan, une courbe xy appelée *roulette* ou *courbe épicycloïdale*.

150. Applications géométriques. — Tangentes et normales aux courbes épicycloïdales.

Théorème. — La normale en un point d'une courbe épicycloïdale est la droite qui joint ce point au contact correspondant de la roulante avec la base.

Il résulte, en effet, du théorème précédent et de la proposition démontrée au paragraphe 141, que la vitesse de tout point M invariablement relié à la roulante est, à l'instant considéré, perpendiculaire à IM (fig. 118). Comme la direction de la vitesse est celle de la tangente à la trajectoire, IM est normale en M à la courbe xy.

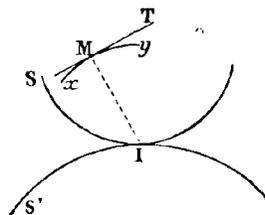


Fig. 118.

Ce théorème donne le moyen de tracer les normales et les tangentes à toutes les courbes que l'on peut considérer comme engendrées de la manière précédente. On

retrouve, en particulier, la construction indiquée au paragraphe 102 pour les diverses cycloïdes, comme conséquence de la théorie des mouvements simultanés. Voici d'autres applications.

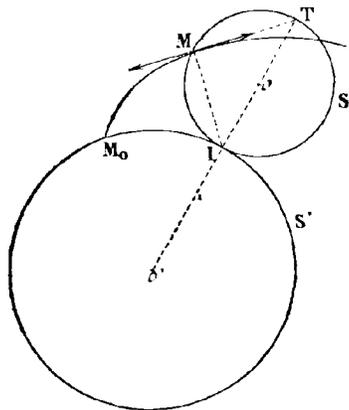


Fig. 119.

151. Tangente et normale en un point d'une épicycloïde. — L'épicycloïde est le lieu géométrique des positions prises par un point M, invariablement lié à une circonférence o qui roule sans glisser sur une autre circonférence o' (fig. 119). L'épicycloïde est dite *ordinaire*, quand le point M est sur la circonférence mobile, *allongée* ou *racourcie* selon qu'il lui est extérieur ou intérieur. Enfin, si les circonférences o et o' sont tangentes intérieurement, le lieu du point M est une *hypocycloïde*.

D'après le théorème précédent, la normale au point M est IM. Il s'en suit que :
La tangente en un point d'une épicycloïde ordinaire (ou d'une hypocycloïde) passe par le point de la circonférence mobile qui est diamétralement opposé à son contact avec la base.

152. Tangente et normale en un point d'une développante de cercle. —
 Lorsqu'une droite $x'x$ roule sans glisser sur une circonférence o , chacun de ses points décrit une *développante de cercle* (fig. 120). Cette courbe est la limite d'une épicycloïde, dans laquelle le rayon de la roulante croîtrait indéfiniment.

D'après le théorème du paragraphe 150, MI est la normale en M à la développante; la tangente correspondante est donc parallèle à oI . Au point origine M_o , la tangente est oM_o .

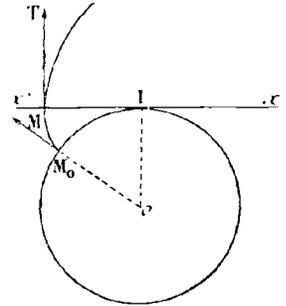


Fig. 120.

153. Propriétés du mouvement épicycloïdal.

1° *Vitesse angulaire de la rotation instantanée.* —
Vitesse linéaire d'un point invariablement relié à la roulante.

Soient $II_1 = II' = \Delta s$ (fig. 121) les arcs égaux parcourus par le point I pendant un temps Δt succédant à l'instant t . A l'instant $t + \Delta t$, le contact de la roulante avec la base a lieu en I' , et la tangente I_1A_1 à S se confond avec $I'A'$. L'angle $\Delta\beta$ de ces deux droites mesure donc l'amplitude de la rotation qui s'exécute pendant le temps Δt . En appelant ω la vitesse angulaire de ce mouvement à l'instant t , on a (143)

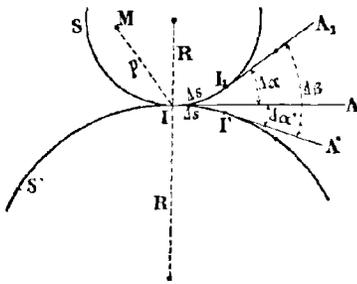


Fig. 121.

$$\omega = \lim \frac{\Delta\beta}{\Delta t}$$

Soient $\Delta\alpha$ et $\Delta\alpha'$ les parties dans lesquelles IA partage l'angle $\Delta\beta$. Dans le cas de la figure

$$\Delta\beta = \Delta\alpha + \Delta\alpha'$$

et l'on peut écrire

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} + \frac{\Delta\alpha'}{\Delta s} \right) \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Si l'on désigne par R et R' les rayons de courbure de la roulante et de la base au point I , et par v la vitesse avec laquelle ce point se déplace sur les deux courbes, on a (108)

$$\frac{1}{R} = \lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

$$\frac{1}{R'} = \lim \frac{\Delta\alpha'}{\Delta s}$$

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

Donc
$$\omega = v \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \tag{1}$$

Cette formule est générale si l'on fait des conventions convenables sur les signes des rayons de courbure et des vitesses.

La vitesse linéaire v_1 d'un point M invariablement relié à la roulante, est, en désignant par p sa distance au centre instantané de rotation à l'époque t

$$v_1 = \omega p = vp \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad (2)$$

2° Rayon de courbure de la courbe épicycloïdale lieu du point M. — Formule et construction de Savary.

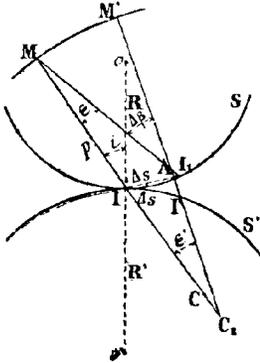


Fig. 122.

A l'instant $t + \Delta t$, le point M occupe la position M' , et le centre instantané de rotation s'est déplacé, sur la roulante et sur la base, des quantités égales $II_1 = I'I' = \Delta s$ (fig. 122). La droite MI' est normale en M' à la courbe MM' (150), et le centre de courbure de celle-ci au point M est la position limite C du point C_1 . Enfin, lorsque le contact de S' et de S se fait en I' , MI_1 vient se confondre avec $I'M'$, de sorte que l'angle MAM' mesure la rotation $\Delta\beta$ de la figure mobile pendant le temps Δt . En désignant par ε et ε' les angles infiniment petits en M et C_1 du triangle MAC_1 , on a

$$\Delta\beta = \varepsilon + \varepsilon'$$

ou
$$\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \left(\frac{\varepsilon}{\Delta s} + \frac{\varepsilon'}{\Delta s} \right) \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

et quand Δt tend vers zéro

$$\lim \frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \omega = v \left(\lim \frac{\varepsilon}{\Delta s} + \lim \frac{\varepsilon'}{\Delta s} \right)$$

En remplaçant ω par sa valeur donnée par la formule (1), il vient

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \lim \frac{\varepsilon}{\Delta s} + \lim \frac{\varepsilon'}{\Delta s} \quad (3)$$

Or, les triangles MI_1I et $C_1I'I$ donnent respectivement

$$\frac{\sin \varepsilon}{\text{corde } II_1} = \frac{\sin MI_1I}{MI}$$

et

$$\frac{\sin \varepsilon'}{\text{corde } I'I'} = \frac{\sin C_1I'I}{C_1I}$$

ou, en passant à la limite

$$\lim \frac{\sin \varepsilon}{\text{corde } II_1} = \lim \frac{\varepsilon}{\Delta s} \quad (*) = \frac{\lim \sin MI_1I}{MI} = \frac{\cos i}{MI}$$

$$\lim \frac{\sin \varepsilon'}{\text{corde } I'I'} = \lim \frac{\varepsilon'}{\Delta s} = \frac{\lim \sin C_1I'I}{\lim C_1I} = \frac{\cos i}{CI}$$

La relation (3) devient donc

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{\cos i}{MI} + \frac{\cos i}{CI}$$

(*) On sait que $\sin \varepsilon$ et ε d'une part, corde II_1 et Δs d'autre part, sont des infiniment petits équivalents.

ou, en désignant par ρ le rayon de courbure CM de la courbe épicycloïdale lieu du point M , et en transposant convenablement les termes

$$\frac{1}{R} - \frac{\cos i}{p} = \frac{\cos i}{\rho - p} - \frac{1}{R'}$$

Cette relation remarquable, appelée *formule de Savary*, conduit à une construction très simple de ρ . Soient o et o' les centres de courbure de la roulante et de la base au point I , situés sur la normale commune à ces deux courbes. Joignons MI et Mo , puis prolongeons cette dernière droite jusqu'au point N où elle rencontre la perpendiculaire IN à MI . Joignons enfin No' . Le point d'intersection C de cette droite avec MI est le centre de courbure cherché.

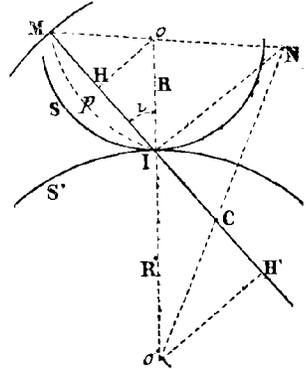


Fig. 123.

D'abord, ce point est situé sur la normale en M à la courbe épicycloïdale. De plus les perpendiculaires oH et $o'H'$ à MI déterminent des triangles MoH , $Co'H'$ respectivement semblables à MIN , CIN , qui donnent les proportions

$$\begin{aligned} \frac{MH}{oH} &= \frac{MI}{IN} \\ \frac{CH'}{o'H'} &= \frac{CI}{IN} \end{aligned}$$

D'où l'on tire, en égalant les valeurs de $\frac{1}{IN}$

$$\frac{MH}{oH \times MI} = \frac{CH'}{o'H' \times CI}$$

Mais

$$\begin{aligned} MH &= MI - IH = p - R \cos i \\ oH &= R \sin i \\ MI &= p \\ CH' &= IH' - IC = R' \cos i - IC \\ o'H' &= R' \sin i \end{aligned}$$

La proportion précédente devient donc

$$\frac{p - R \cos i}{p R \sin i} = \frac{R' \cos i - IC}{R' \times IC \sin i}$$

En effectuant les divisions, et en multipliant les deux membres par $\sin i$, on trouve

$$\frac{1}{R} - \frac{\cos i}{p} = \frac{\cos i}{CI} - \frac{1}{R'}$$

Comparée avec la formule de Savary, cette relation montre que

$$CI = \rho - p.$$

Par conséquent $\rho = p + CI = CM$, ce qui justifie la construction indiquée.

154. Applications. — I. Cycloïde.

Dans le cas particulier de la cycloïde, R est une constante, et R' est infini. La formule de Savary devient :

$$\frac{1}{R} - \frac{\cos i}{\rho} = \frac{\cos i}{\rho - p}$$

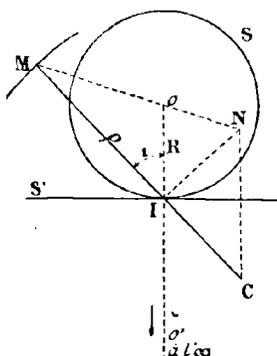


Fig. 124.

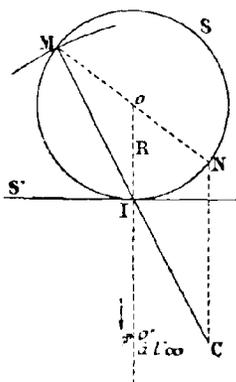


Fig. 125.

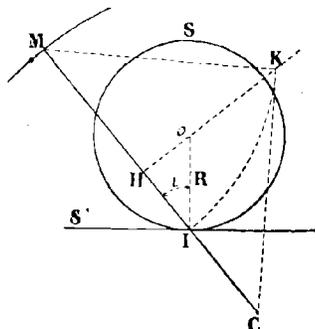


Fig. 126.

et donne

$$\rho = \frac{p^2}{p - R \cos i} \quad (5)$$

La construction générale du centre de courbure en M reste applicable, avec cette particularité que le point o' étant rejeté à l'infini sur oI, la droite No' est parallèle à oIo' (fig. 124). Pour une cycloïde ordinaire, le point N est en outre sur la circonférence roulante (fig. 125). On a par conséquent

$$MN = 2Mo$$

et

$$MC = 2MI$$

On retrouve ainsi cette propriété connue de la cycloïde : le rayon de courbure en un point est double de la portion de normale comprise entre ce point et la base.

La longueur ρ donnée par la formule (5) peut être construite différemment, en observant (fig. 126) que

$$p - R \cos i = MH$$

Par suite

$$\rho = \frac{p^2}{p - R \cos i} = \frac{\overline{MI}^2}{MH}$$

Cette expression montre que le rayon de courbure en M est une troisième proportionnelle entre MI et MH. Décrivons un arc de cercle de centre M et de rayon MI jusqu'à sa rencontre en K avec oH, puis élevons KC perpendiculaire sur MK. Le triangle rectangle MKC donne

$$\overline{MK}^2 = MC \times MH$$

d'où l'on tire, en tenant compte de $MK = MI$

$$MC = \frac{\overline{MI}^2}{\overline{MH}} = \rho$$

II. *Développante de cercle.*

Le point mobile M est situé sur la roulante S , qui est une droite, dont le centre de courbure o est rejeté à l'infini sur le rayon oI de la base. La construction de Savary montre que le centre de courbure en M de la développante est confondu avec le point I (fig. 127). D'ailleurs, la formule de Savary devient, en faisant $R = \infty$

$$-\frac{\cos i}{p} = \frac{\cos i}{\rho - p} - \frac{1}{R}$$

On en tire
$$\rho = \frac{p^2}{p - R' \cos i}$$

Mais $i = \frac{\pi}{2}$. Donc $\rho = p$.

155. **Cercle de roulement.** — Reprenons la relation générale.

$$\frac{1}{R} - \frac{\cos i}{p} = \frac{\cos i}{\rho - p} - \frac{1}{R'}$$

En posant, pour simplifier

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{r} \tag{6}$$

il vient
$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\rho - p} \right) \cos i = \frac{\rho \cos i}{p(\rho - p)}$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{p}{r \cos i} = \frac{\rho}{\rho - p}$$

et, en appliquant une propriété connue des proportions

$$\frac{p}{p - r \cos i} = \frac{\rho}{p}$$

d'où enfin

$$\rho = \frac{p^2}{p - r \cos i} \tag{7}$$

L'analogie de cette expression avec la formule (5) montre que *le rayon de courbure de la courbe épicycloïdale décrite par un point M invariablement relié à la roulante, est égal au rayon de courbure de la cycloïde engendrée par le même point,*

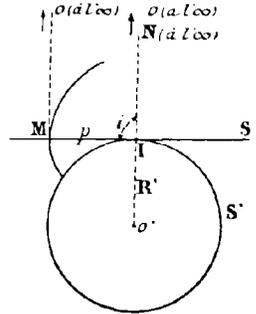


Fig. 127.

considéré comme invariablement relié à un cercle de rayon r , roulant sur la tangente commune à la roulante et à la base.

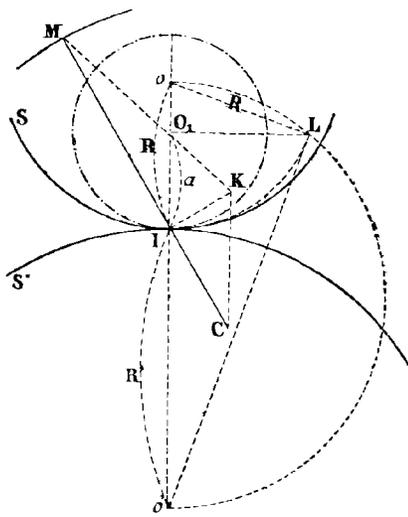


Fig. 128.

Réciproquement, si l'on a trouvé le point C par la construction générale de Savary, on peut déterminer le centre du cercle de roulement en effectuant des tracés inverses.

Le rayon du cercle de roulement varie avec la position de la roulante, si S et S' sont des courbes quelconques, car, dans ce cas, R et R' dépendent de la position du point I; il reste invariable si S et S' sont des circonférences.

Le cercle de rayon r est appelé *cercle de roulement*. On a, d'après la relation (6)

$$r = \frac{RR'}{R+R'} = \frac{R(R+R'-R)}{R+R'} = R - \frac{R^2}{R+R'}$$

Le terme $\frac{R^2}{R+R'}$ est une troisième proportionnelle entre R et $R+R'$. Il est représenté par oO_1 , (fig. 128) dans le triangle rectangle oLo' , dont le côté $oL = R$. Par suite, $IO_1 = a$. Le point o_1 est donc le centre du cercle de roulement.

Ce cercle étant connu, on peut, pour déterminer le centre de courbure en M de la courbe épicycloïdale décrite par ce point dans le roulement de S sur S', employer l'une ou l'autre des deux constructions données plus haut pour la cycloïde. Il suffit, par exemple, de prendre l'intersection K de MO_1 avec la perpendiculaire IK sur ML, puis de mener par K la parallèle à O_1I jusqu'à sa rencontre en C avec MI (fig. 128).

§ IV. — *Mouvement d'une figure plane invariable*

qui se déplace dans son plan.

156. On sait (134) que l'étude du mouvement d'une figure plane invariable, qui se déplace dans son plan, se ramène à celle du mouvement de la droite de longueur constante qui joint deux quelconques de ses points.

Dans un but de simplification, on étudie d'abord le *mouvement élémentaire* de la figure, c'est-à-dire celui qui s'exécute pendant un temps infiniment petit, puis le *mouvement fini*, ou *continu*, composé d'une suite de mouvements élémentaires.

Mouvement élémentaire d'une figure plane invariable qui se déplace dans son plan.

157. **Théorème de Chasles.** — *Lorsqu'une figure plane invariable se meut dans son plan, on peut l'amener d'une position à une autre infiniment voisine par*

une rotation autour d'un point situé à l'intersection des normales élevées aux trajectoires de deux de ses points.

Soient AB et A'B' (fig. 129) les positions, à deux époques quelconques t et t' , de la droite mobile à laquelle on rattache, à chaque instant, la position de la figure.

Les perpendiculaires $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, élevées sur les cordes AA' et BB' en leurs milieux, se coupent en I_1 , et les triangles I_1AB , $I_1A'B'$ sont égaux. En faisant tourner le triangle I_1AB , dans son plan, autour du point I_1 , on peut donc l'amener en coïncidence avec $I_1A'B'$. Si maintenant on suppose les droites AB et A'B' infiniment voisines, AA' et BB' deviennent, à la limite, tangentes en A et B aux trajectoires xx' et yy' , en même temps que $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ viennent se confondre avec les normales correspondantes. Le déplacement élémentaire de AB peut donc être envisagé comme une rotation infiniment petite autour du point de rencontre I de ces deux normales (*).

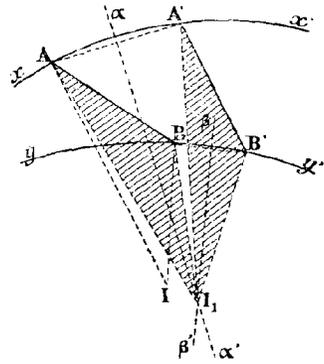


Fig. 129.

Le point I est appelé le *centre instantané de rotation* de la figure à l'époque t .

Conséquences du théorème de Chasles.

158. Théorème. — *Les normales élevées aux trajectoires de tous les points de la figure, par les positions qu'ils occupent à un même instant, se coupent au centre instantané de rotation correspondant.*

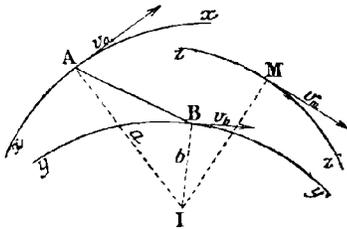


Fig. 130.

Puisque le déplacement élémentaire de la figure mobile, pendant le temps dt , revient à une rotation infiniment petite autour du point I, la vitesse de tout point M qui lui est invariablement relié est, à l'instant considéré, perpendiculaire à IM (fig. 130). La normale en M à la courbe $z z'$ passe donc par le point I.

Il résulte de ce théorème un procédé pour construire les normales et les tangentes aux courbes que l'on peut considérer comme engendrées par un point invariablement relié à une figure mobile indéformable.

159. Théorème. — *Les vitesses des différents points de la figure mobile à un instant t , et les éléments de chemin qu'ils parcourent pendant un temps infiniment petit dt , sont proportionnels à leurs distances au centre instantané de rotation.*

Cette proposition n'est qu'une application des propriétés du mouvement de rotation, établies aux paragraphes 140 et 141.

160. Problème — *Connaissant le centre instantané de rotation et la vitesse linéaire d'un point du système à un instant quelconque, trouver les vitesses linéaires de tous les autres, et la vitesse angulaire de la rotation instantanée du système au même instant.*

Soient v_a et v_b les vitesses linéaires, à un instant quelconque, de deux points A et B du système, dont le centre instantané de rotation est I (fig. 130). En supposant v_a donnée, il s'agit de déterminer v_b .

(*) Si les tangentes en A et B sont parallèles, le mouvement élémentaire de la figure est une translation (136). Le point I est alors rejeté à l'infini, ce qui confirme l'identité, établie au paragraphe 142, entre une translation et une rotation dont l'axe (mené ici par le point I perpendiculairement au plan de la figure) est infiniment éloigné.

On a

$$\frac{v_a}{v_b} = \frac{a}{b}$$

d'où

$$v_b = \frac{v_a}{a} \times b$$

La vitesse angulaire de rotation du système, à l'instant considéré, est (143)

$$\omega = \frac{v_a}{a}$$

On trouvera de nombreuses applications de ce problème dans la théorie des Mécanismes (système bielle et manivelle, par exemple).

161. Applications géométriques. — *Construction des tangentes à certaines courbes.*

I. *Tangente à la conchoïde.*

Soient O le point fixe, et C la courbe directrice (fig. 131). La droite de longueur constante MM' constitue un système invariable en mouvement dans le plan de la figure. Cherchons son centre instantané de rotation. Il se trouve en premier lieu sur la normale en M à la courbe C. Considérons en outre le point P de cette droite qui, à l'instant actuel, est confondu avec le pôle O, et supposons-le invariablement relié à MM'. Il décrit, pendant un temps infiniment petit, un élément de chemin PP₁, dont la direction se confond à la limite avec celle de PMM'. La normale correspondante est OI, perpendiculaire à MM', et le point

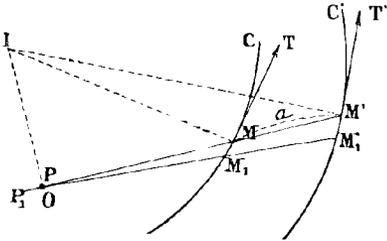


Fig. 131.

I est le centre instantané cherché.

Il résulte de là que IM' est normale à la courbe C'. On obtient donc la tangente en M' à la conchoïde en menant M'T' perpendiculaire à IM'. On retrouve ainsi la construction déduite de la méthode de Roberval (102).

II. *Tangente à la courbe de Watt.*

Deux droites égales et parallèles oA₁ et o'B₁ (fig. 132) oscillent autour de deux points fixes o et o'; leurs extrémités sont reliées par une droite A₁B₁ de longueur constante, dont le milieu M₁ décrit une courbe allongée, en forme de huit, appelée *courbe de Watt*.

La droite A₁B₁ et le point M₁ constituent un système invariable, en mouvement dans le plan oA₁B₁o'. Soit ABM sa position à un instant déterminé; le centre instantané de rotation correspondant se trouve à l'intersection I des rayons oA et o'B. La droite MI est donc normale à la courbe de Watt; elle fait connaître la tangente MT au point M.

Lorsque le système occupe la position oA₁B₁o', le centre instantané de rotation est rejeté à l'infini; la tangente en M₁ à l'une des branches de la courbe qui se croisent en ce point est donc perpendiculaire à la direction commune des rayons

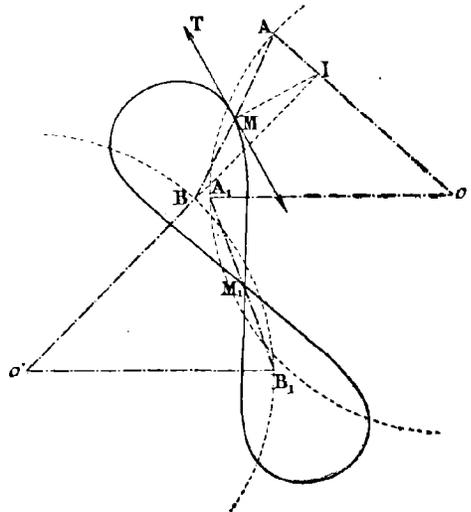


Fig. 132.

oA_1 et oB_1 . Nous compléterons plus tard l'étude de cette courbe importante, dont les propriétés sont appliquées dans le mécanisme appelé *parallélogramme de Watt*.

III. *Tangente à l'ellipse tracée par le procédé de la bande de papier.*

On sait que si une droite AB, de longueur constante, se déplace de telle manière que ses deux extrémités parcourent les côtés d'un angle droit xoy , l'un quelconque de ses points, soit M, situé à des distances invariables de A et de B, décrit une ellipse dont les deux demi-axes sont MA et MB.

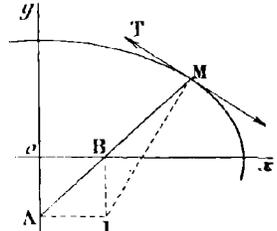


Fig. 133.

La droite ABM constitue un système invariable auquel le théorème de Chasles est applicable. Le centre instantané de rotation se trouve à l'intersection I des normales en A et B aux trajectoires Ox, Oy de ces points. Par conséquent, MI est la normale à l'ellipse, et la tangente correspondante est MT perpendiculaire à MI.

Mouvement continu d'une figure plane invariable, qui se déplace dans son plan.

162. D'après le théorème de Chasles, le mouvement élémentaire d'une figure plane invariable, qui se déplace dans son plan, est une rotation autour du centre instantané I ; le mouvement continu se ramène donc à une suite de rotations infiniment petites, autour de centres successifs $I''I''' \dots$ infiniment voisins, dont la position dans le plan peut être déterminée à chaque instant.

Le lieu géométrique des points $I''I''' \dots$ est une certaine courbe S'. Nous nous proposons de montrer que le mouvement continu de la figure peut être reproduit par le roulement sans glissement d'une courbe S, convenablement déterminée, sur S'.

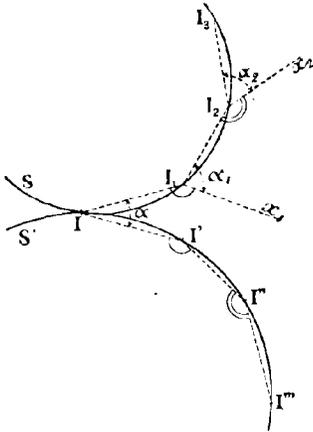


Fig. 134.

Joignons les positions successives du centre instantané de rotation par des droites $I'', I''', I'''' \dots$ (fig. 134). Supposons que les rotations élémentaires qui s'effectuent autour de ces points aient pour effets de faire tourner la figure d'angles infiniment petits $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$, et considérons l'instant où elle tourne autour du point I. Quand cette première rotation est accomplie, un certain point du système mobile est venu coïncider avec I'. Pour déterminer sa position actuelle, il suffit de construire un angle $I''I_1$ égal à α , et de porter $I_1 = I'$.

Si l'on fait maintenant tourner la figure de l'angle α_1 autour du point I', l'un de ses points vient se superposer à I''. Pour déterminer la place qu'il occupe sur la position initiale du système mobile, il suffit de construire un angle $I_1 x_1$ égal à $I''I_1$, puis un angle $x_1 I_1 I_2$ égal à α_1 , et enfin de porter $I_1 I_2 = I''$. La première rotation d'angle α , qui s'accomplit autour du point I, amène en effet la direction $I_1 x_1$ à coïncider avec I'' , et la seconde rotation d'angle α_1 autour du point I' fait passer I_2 en I''.

La figure mobile tournant maintenant de l'angle α_2 autour de I'', l'un de ses points est amené par cette nouvelle rotation en I'''. On voit de la même manière que, pour déterminer sa place sur la position initiale du système, il suffit de construire les angles $I_2 I_3 x_2$ et $x_2 I_2 I_3$ respectivement égaux à $I''I_2$ et à α_2 , et de porter $I_2 I_3 = I'''$, et ainsi de suite.

Imaginons que le contour polygonal $I_1 I_2 I_3 \dots$ soit invariablement relié au sys-

tème en mouvement. Son roulement sur la ligne polygonale fixe $II'I''\dots$ a pour effet de faire tourner la figure mobile d'angles successifs $\alpha_1 \alpha_2 \dots$ autour des points $II'I''\dots$ absolument comme dans le mouvement réel. A la limite, ces contours polygonaux dégèrent en deux courbes S et S' sans que la propriété qui les caractérise cesse d'être vraie. Par conséquent, le mouvement continu du système est identiquement reproduit par le roulement sans glissement de la courbe mobile S , à laquelle elle est invariablement reliée, sur la courbe fixe S' . De là cette conclusion importante :

Le mouvement continu d'une figure plane invariable, qui se déplace dans son plan, est un mouvement épicycloïdal.

On peut donc lui appliquer tous les résultats établis précédemment pour ce dernier genre de mouvement.

163. Détermination de la roulante et de la base.

Pour concevoir plus clairement le mode de génération de la roulante et de la base, on peut imaginer que la figure mobile entraîne avec elle un plan P superposé au plan fixe P' dans lequel s'effectue le mouvement. Il résulte de l'étude précédente que :

La base S' est le lieu géométrique des centres instantanés de rotation, dans le plan fixe.

La roulante S est le lieu géométrique des centres instantanés de rotation dans le plan mobile, c'est-à-dire le lieu géométrique des points invariablement reliés à la figure mobile qui, dans son déplacement, viennent successivement coïncider avec les centres instantanés de rotation dans le plan fixe.

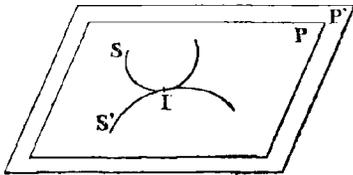


Fig. 135.

invariablement reliés à la figure mobile qui, dans son déplacement, viennent successivement coïncider avec les centres instantanés de rotation dans le plan fixe.

164. Application à l'ellipse.

Nous nous proposons de déterminer les courbes qui, dans le tracé de l'ellipse par le procédé de la bande de papier, sont susceptibles de reproduire, en roulant l'une sur l'autre, le déplacement continu de la droite ABM (fig. 136).

Le quadrilatère $oAIB$ est un rectangle, et $oI = AB$. La base S' , lieu des centres instantanés de rotation dans le plan fixe, (c'est-à-dire, ici, dans le plan rattaché aux axes fixes ox, oy) est donc la circonférence de centre o et de rayon oI . D'autre part, le point I , considéré comme appartenant au plan mobile, (c'est-à-dire au plan rattaché à la bande de papier ABM) se trouve à chaque instant sur une

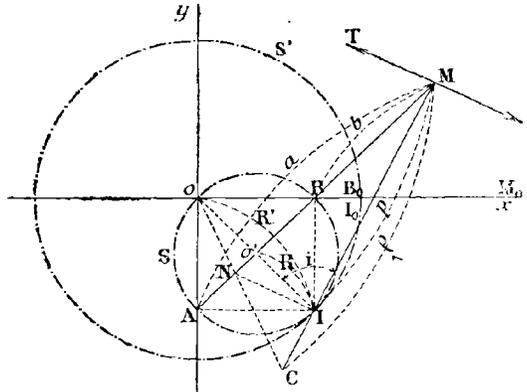


Fig. 136.

circonférence S ayant AB pour diamètre. Cette seconde circonférence est la roulante. On peut, par conséquent, considérer l'ellipse lieu du point M comme une courbe épicycloïdale, et son centre de courbure en M est donné par la construction de Savary. Il suffit de joindre Mo' jusqu'à sa rencontre N avec la perpendiculaire IN à MI , puis de tracer oN . L'intersection C de cette droite avec MI est le point cherché.

Ce tracé n'est plus applicable si le point M est l'un des sommets de l'ellipse, parce qu'alors les droites MA, MI, oI sont confondues. Cherchons directement, dans

ce cas, l'expression du rayon de courbure au moyen de la formule de Savary :

$$\frac{1}{R} - \frac{\cos i}{p} = \frac{\cos i}{\rho - p} - \frac{1}{R'}$$

Si, par exemple, M est à l'extrémité droite du grand axe, A et B sont respectivement devenus o et B_0 , et le centre instantané de rotation se confond avec B_0 . Les quantités qui figurent dans la formule ci-dessus ont pour valeurs

$$R = \frac{a - b}{2}$$

$$R' = -(a - b) \text{ (*)}$$

$$i = \pi$$

$$p = I_o M_o = b$$

Par suite

$$\frac{2}{a - b} + \frac{1}{b} = \frac{-1}{\rho - b} + \frac{1}{a - b}$$

d'où $\rho = \frac{b^2}{a}$

On trouverait de la même manière l'expression du rayon de courbure à une extrémité du petit axe

$$\rho_1 = \frac{a^2}{b}$$

Pour construire ρ et ρ_1 , on forme un rectangle sur les deux demi-axes oA et oB (fig. 137), puis on abaisse de son sommet C la perpendiculaire sur la diagonale AB . Les longueurs AD et BE sont respectivement ρ et ρ_1 . Les triangles rectangles ACD , BCE sont en effet semblables à ABC , et donnent

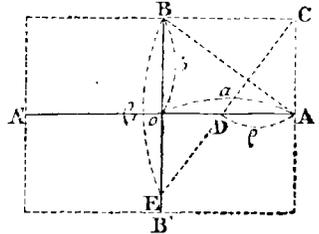


Fig. 137.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AC}$$

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

d'où

$$AD = \frac{AC^2}{BC} = \frac{b^2}{a} = \rho$$

$$BE = \frac{BC^2}{AC} = \frac{a^2}{b} = \rho_1$$

165. Généralisation. — Quand les extrémités d'une droite AB , de longueur constante, glissent sur deux droites fixes quelconques Ox, Oy , tout point M invariablement relié à AB dans le plan xOy décrit une ellipse.

(*) La formule de Savary a été établie en supposant que la roulante et la base sont tangentes extérieurement. Pour passer du cas de la figure 122 à celui de la figure 136, il faut attribuer à R' une valeur négative.

Le centre instantané de rotation de la figure plane invariable ABM est à l'intersection I des perpendiculaires élevées en A et B aux axes fixes Ox, Oy (fig. 138). Le quadrilatère OAIB est inscrit dans la circonférence décrite sur OI comme diamètre. Or, on a

$$\frac{AB}{\sin AOB} = OI \quad (*)$$

La longueur OI est donc constante. Il résulte de là que le lieu des centres instantanés de rotation dans le plan fixe (rattaché aux axes ox, oy) est une circonférence S' de centre O et de rayon OI.

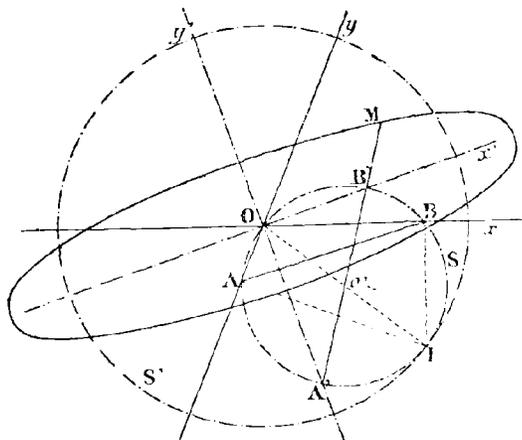


Fig. 138.

D'autre part, l'angle AIB étant constant, le point I, considéré comme appartenant au plan mobile, (rattaché à la figure mobile ABM), se trouve à chaque instant sur une circonférence S, passant par A et B, capable de l'angle $\pi - AOB$. Cette seconde circonférence, qui est la roulante, est décrite sur OI comme diamètre. Par conséquent, le mouvement continu du point M peut être reproduit par le roulement sans glissement de S sur S'.

On peut supposer que le diamètre MB'O'A' de la roulante soit invariablement relié à la figure mobile (qui serait alors constituée

par le système de points ABMA'B'). D'après le théorème de La Hire (**), les points A' et B' décrivent les diamètres fixes OB'x', A'Oy' de la base. Ces diamètres sont perpendiculaires, et la longueur A'B' = OI est invariable. En considérant le point M comme entraîné par la droite A'B', on voit qu'il décrit une ellipse, dont les axes, dirigés suivant Ox' et Oy', ont pour demi-longueurs respectives MA' et MB'.

Courbes enveloppes.

166. Définitions. — Lorsqu'une ligne plane se déplace dans son plan d'après une loi continue, les points d'intersection de ses positions successives forment, à la limite, une autre ligne que l'on appelle l'enveloppe de la première. La ligne mobile peut être constante ou variable de forme comme de grandeur; il importe seulement que son mouvement soit continu. Ses différentes positions sont appelées les enveloppées.

Soit l_1 un point commun à deux enveloppées successives L et L_1 (fig. 139). Lorsque L_1 se rapproche indéfiniment de L supposée fixe, l_1 prend sur L une position limite l que l'on appelle le point limite relatif à l'enveloppée L. Si l'on rapproche cette définition de celle de l'enveloppe, on voit que l'enveloppe est le lieu géométrique des points limites relatifs aux positions successives de l'enveloppée mobile.

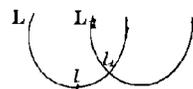


Fig. 139.

167. Théorème. — L'enveloppe est tangente à chaque enveloppée au point limite correspondant.

(*) On sait que, dans un triangle, le rapport d'un côté au sinus de l'angle opposé est constant, et égal au diamètre du cercle circonscrit.

(**) Lorsqu'une circonférence roule sans glisser sur une circonférence fixe de rayon double à laquelle elle est tangente intérieurement, chacun de ses points décrit un diamètre de la circonférence fixe.

Soient trois enveloppées successives L_1L_2 (fig. 140). L'enveloppée L rencontre

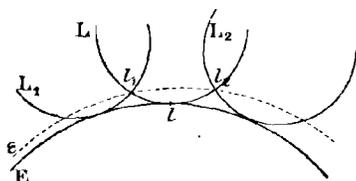


Fig. 140.

celle qui la précède au point l_1 et celle qui la suit au point l_2 . Les enveloppées mobiles en nombre infini donnent une infinité de points tels que l_1 et l_2 , situés sur une courbe ϵ , dont la position limite est, par définition, l'enveloppe E .

Supposons que L_1 et L_2 se rapprochent indéfiniment de L , celle-ci restant fixe ; les points l_1 et l_2 se déplacent sur L , et tendent vers la même position l , qui est le point limite relatif à l'enveloppée L . Au moment où cette confusion des points l_1 et l_2 se produit, la courbe ϵ est devenue l'enveloppe. Celle-ci est donc tangente à l'enveloppée L au point l .

168. Application. — Une circonférence de rayon constant R se meut dans son plan, de telle manière que son centre décrive une ligne xy . Cherchons son enveloppe (fig. 141) en déterminant les points limites relatifs à une position quelconque de l'enveloppée.

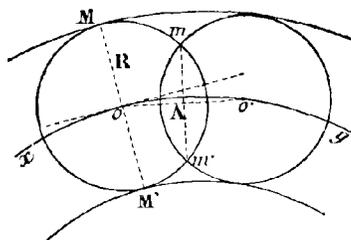


Fig. 141.

Soient o et o' deux points de xy suffisamment voisins pour que les circonférences de rayon R , décrites de ces points comme centres, se coupent. Les droites oo' , mm' sont perpendiculaires l'une sur l'autre en leur milieu commun A . Quand le point o' se rapproche indéfiniment de o supposé fixe, mm' devient la normale en o à xy . Les points limites relatifs à l'enveloppée o sont donc M et M' . L'enveloppe cherchée est le lieu de ces points ; elle se compose de deux courbes distinctes, associées à xy de telle manière que les tangentes en des points correspondants M , o , M' sont parallèles.

On trouvera des applications de ce tracé dans l'étude des Mécanismes (Engrenage à lanterne — Cames Grisson — etc...)

169. Etude des courbes enveloppes dans le mouvement épicycloïdal. — Si l'enveloppée mobile est une figure invariable, son mouvement peut être reproduit par le roulement sans glissement d'une courbe S , à laquelle elle serait invariablement liée, sur une courbe fixe S' . Cette manière d'envisager la question permet d'établir des propriétés nouvelles des courbes enveloppes, dont on trouvera l'application dans la théorie des engrenages cylindriques.

170. Théorème. — La normale commune à l'enveloppée mobile et à son enveloppe passe, à chaque instant, par le centre instantané de rotation.

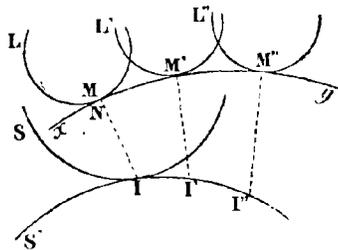


Fig. 142.

Soient M le point de contact de l'enveloppée mobile et de son enveloppe à une époque quelconque, et I le centre instantané de rotation correspondant (fig. 142). Considérons le point N invariablement relié à L qui, à l'instant considéré, est confondu avec M (*). Sa vitesse est représentée par un vecteur perpendiculaire à MI (150) qui, d'autre part, est tangent à xy , puisque cette courbe est le lieu du point M (166) avec lequel N reste confondu pendant

un temps infiniment petit. MI est donc normale à xy , et par suite à L .

(*) Le point M n'est pas invariablement relié à l'enveloppée, car le contact de celle-ci avec son enveloppe se fait en un point généralement mobile sur les deux courbes. Voir, à ce sujet, les paragraphes 173 et 176.

171. Conséquence. — Il résulte de là que, si l'on conduit par le centre instantané de rotation une normale sur l'enveloppée, son pied M appartient à l'enveloppe. On peut donc tracer par points l'enveloppe d'une ligne mobile, en menant par les positions successives II'... du centre instantané de rotation les normales IM, I'M', I''M''... aux positions correspondantes de l'enveloppée. On trouvera, dans la Cinématique appliquée, l'indication de moyens propres à simplifier les tracés (méthode de Poncelet, etc...)

172. Application. — *Enveloppe d'une droite de longueur constante, dont les deux extrémités glissent sur deux droites rectangulaires.*

Soit I le centre instantané de rotation correspondant à la position AB de la droite mobile ; le pied M de la perpendiculaire abaissée de I sur AB est situé sur l'enveloppe inconnue. Pour déterminer la nature de celle-ci, décrivons du point o comme centre une circonférence de rayon oI ; prenons l'intersection C de oI avec AB, et traçons une seconde circonférence o' de diamètre CI. Elle est tangente en I à la première et passe par le point M. De plus, les arcs MoI et IM ont même longueur, car si l'on désigne

par α l'angle AoI, on a

$$\text{angle } ACI = 2\alpha$$

$$\text{angle } Mo'I = 4\alpha$$

et par conséquent

$$\text{arc } MoI = oI \times \alpha$$

$$\text{arc } MI = o'I \times 4\alpha$$

$$= \frac{oI}{4} \times 4\alpha = oI \times \alpha$$

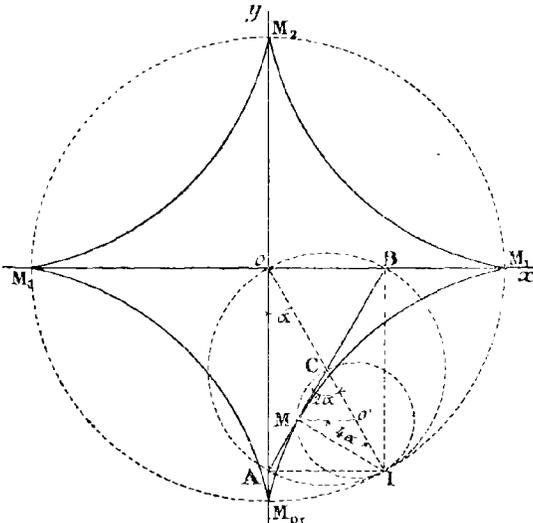


Fig. 143.

Les mêmes faits se reproduisant pour toute position de AB, l'enveloppe cherchée se confond avec la courbe que décrirait le point M, considéré comme invariablement lié à la circonférence o' quand celle-ci roule sans glisser

sur la circonférence o. C'est donc une hypocycloïde. Enfin, comme la longueur totale de la circonférence o' équivaut seulement à un quadrant de la circonférence o, cette hypocycloïde a quatre points de rebroussement, situés aux extrémités des diamètres ox et oy.

173. Remarque. — On a démontré, au paragraphe 164, que le mouvement continu de la droite AB peut être reproduit par le roulement sans glissement de la circonférence C, décrite sur CI comme diamètre, sur la circonférence o. Ce résultat n'est pas en contradiction avec le précédent, car le roulement de la circonférence C reproduit bien le mouvement de AB, mais non pas celui du point M, attendu que ce point n'est pas invariablement lié à AB. Il parcourt, en effet, toute la longueur de cette droite quand elle passe, par exemple, de la position oM₀ à la position oM₁.

174. Relation entre les rayons de courbure de l'enveloppée et de l'enveloppée à leur point de contact.

Soient L et L' les positions de l'enveloppée mobile à deux époques voisines t et $t + \Delta t$; elles touchent l'enveloppe xy en M et M' (fig. 144). Les droites IM, I'M',

qui joignent ces points aux centres instantanés de rotation correspondants I et I', sont normales à xy (170) et leur intersection C₁ prend sur IM, quand Δt tend vers zéro, une position limite C, qui est le centre de courbure de l'enveloppe au point M. Portons sur la roulante, à partir du point I et dans le sens du mouvement, un arc II₁ = II', et abaissons de I₁ la normale I₁M₁ sur L. Elle rencontre IM en un point γ₁ dont la position limite est, comme précédemment, le centre de courbure γ de L au point M. Nous nous proposons de trouver une relation géométrique entre les positions des points γ et C.

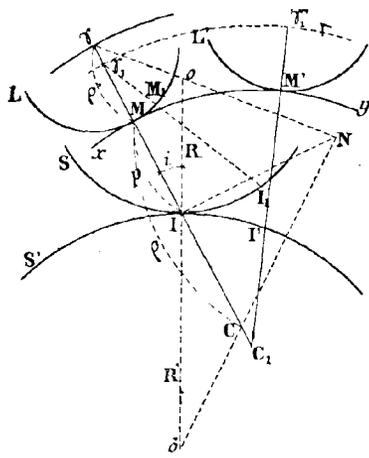


Fig. 111

Supposons que la droite I₁M₁ et le point γ₁ soient invariablement liés à la figure mobile. Dans cette hypothèse, I₁M₁, qui reste normale à l'enveloppée, et qui vient passer à l'époque t + Δt par le centre instantané de rotation I', se confond à ce moment avec I'M', et le point γ₁ décrit une courbe épicycloïdale γ₁ γ'₁ normale à IM et I'M' (150). Quand Δt tend vers zéro, cette courbe est décrite par le point γ lui-même; d'après ce qui précède, son centre de courbure en γ est la position limite du point C₁. Donc :

Si l'on suppose le centre de courbure γ de l'enveloppée L invariablement lié à la figure mobile, il décrit une courbe épicycloïdale, dont le centre de courbure se confond avec celui de l'enveloppe en son point de contact avec L.

175. Conséquences. — 1^o On peut déterminer le centre de courbure de xy au point M en appliquant au point γ la construction de Savary (153).

On peut se demander pourquoi cette construction ne s'applique pas au point M lui-même. C'est que ce point ne reste pas fixe sur L, puisqu'il parcourt sur cette courbe, pendant le temps Δt, l'arc MM₁. On ne peut donc pas considérer l'enveloppe xy comme engendrée par un point invariablement relié à la roulante, et l'on ne se trouve pas, par conséquent, dans les conditions pour lesquelles la construction de Savary a été établie.

2^o Soient ρ = CM et ρ' = γM les rayons de courbure de l'enveloppe et de l'enveloppée en leur point de contact M. En désignant, comme au paragraphe 153, par R et R' les rayons de courbure de la roulante et de la base au point I, par p la distance MI, et par i l'angle Mio, la formule de Savary, appliquée à la courbe épicycloïdale décrite par le point γ, donne

$$\frac{1}{R} - \frac{\cos i}{p + \rho'} = \frac{\cos i}{\rho - p} - \frac{1}{R'}$$

176. Nature du mouvement de l'enveloppée sur l'enveloppe.

Le point M parcourt, dans le même temps, des arcs généralement inégaux MM' et MM₁ sur l'enveloppe et sur l'enveloppée. Afin de mettre ce fait en évidence, nous calculerons les parties principales de ces arcs lorsque les deux positions considérées de la figure mobile sont infiniment voisines.

Les triangles C_1MM' , C_1II' donnent les proportions suivantes :

$$\frac{\text{corde } MM'}{\sin \varepsilon} = \frac{C_1M}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\text{corde } II'}{\sin \varepsilon} = \frac{C_1I}{\sin \beta}$$

d'où, en divisant membre à membre

$$\frac{\text{corde } MM'}{\text{corde } II'} = \frac{C_1M}{C_1I} \times \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

et, en passant à la limite

$$\lim \frac{\text{corde } MM'}{\text{corde } II'} = \lim \frac{C_1M}{C_1I} \times \lim \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\rho \cos i}{\rho - p}$$

En désignant par ds et ds_1 les parties principales respectives des arcs II' et MM' quand Δt tend vers zéro, on a,

$$\lim \frac{\text{corde } MM'}{\text{corde } II'} = \frac{ds_1}{ds}$$

Donc
$$ds_1 = \frac{\rho \cos i}{\rho - p} \times ds$$

Les triangles $\gamma_1 MM_1$, $\gamma_1 II_1$ donnent de même

$$\frac{\text{corde } MM_1}{\sin \varepsilon'} = \frac{\gamma_1 M}{\sin \alpha'}$$

$$\frac{\text{corde } II_1}{\sin \varepsilon'} = \frac{\gamma_1 I}{\sin \beta'}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\text{corde } MM_1}{\text{corde } II_1} = \frac{\gamma_1 M}{\gamma_1 I} \times \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha'}$$

En passant à la limite, et en désignant par ds_2 la partie principale de l'arc MM_1 quand Δt tend vers zéro, il vient

$$\lim \frac{\text{corde } MM_1}{\text{corde } II_1} = \frac{ds_2}{ds} = \lim \frac{\gamma_1 M}{\gamma_1 I} \times \lim \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha'} = \frac{\rho' \cos i}{\rho' + p}$$

d'où
$$ds_1 = \frac{\rho' \cos i}{\rho' + p} \times ds$$

Pour que $ds_1 = ds_2$, il faudrait que l'on eût

$$\frac{\rho}{\rho - p} = \frac{\rho'}{\rho' + p} = \frac{\rho + \rho'}{\rho - p + \rho' + p} = 1$$

ce qui ne peut avoir lieu que si $p = 0$. Dans ce cas, l'enveloppée mobile passe par le centre instantané de rotation,

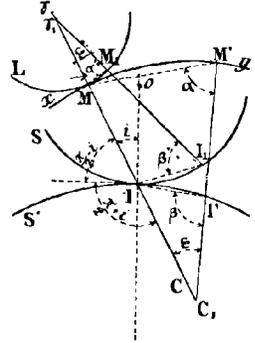


Fig. 145.

L'enveloppée mobile prend donc en général, par rapport à son enveloppe, un mouvement mixte de roulement et de glissement. L'étendue du glissement, pendant le temps dt , est exprimée par la différence

$$\begin{aligned} dg &= ds_1 - ds_2 = \left(\frac{\rho}{\rho - p} - \frac{\rho'}{\rho' + p} \right) \times ds \cos i \\ &= \left[\frac{(\rho - p) + p}{\rho - p} - \frac{(\rho' + p) - p}{\rho' + p} \right] ds \cos i \\ &= \left(\frac{p}{\rho - p} + \frac{p}{\rho' + p} \right) ds \cos i \\ &= \left(\frac{\cos i}{\rho - p} + \frac{\cos i}{\rho' + p} \right) p ds \end{aligned}$$

Mais, d'après la formule de Savary posée au paragraphe précédent

$$\frac{\cos i}{\rho - p} + \frac{\cos i}{\rho' + p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$$

Si l'on remplace en outre ds par son expression $v dt$ en fonction de la vitesse v du point I sur la roulante et sur la base, il vient

$$dg = vp dt \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

Nous retrouverons ce résultat, par une autre méthode, dans la théorie des engrenages.

§ V. — **Mouvement d'un système invariable qui se déplace parallèlement à un plan fixe.**

177. On dit qu'un système invariable se déplace parallèlement à un plan fixe P, quand chacun de ses points reste constamment à la même distance du plan.

Théorème. — *Un tel mouvement est complètement connu dès que l'on a déterminé le mouvement d'une section plane faite, dans le système, parallèlement au plan fixe.*

Soit une section plane C (fig. 146) faite dans le corps en mouvement par un plan Q, parallèle au plan P. D'après la définition précédente, la courbe C, supposée invariablement liée au système, se déplace dans son propre plan, et sa forme reste invariable. Si l'on connaît la position qu'elle occupe à un instant quelconque, on peut déterminer celle de tout autre point M du système au même instant,

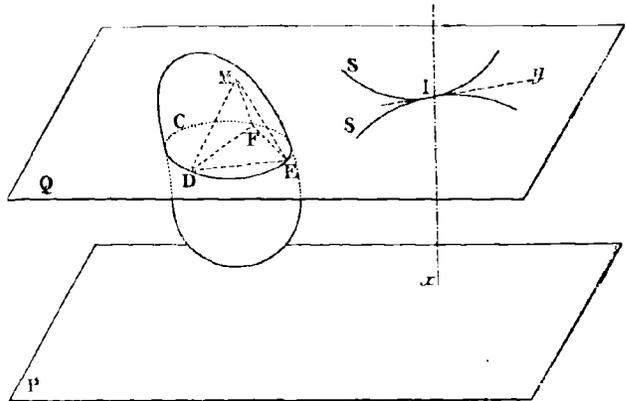


Fig. 146.

en construisant un tétraèdre égal à celui que ce point forme avec trois points arbitraires de C. La position du système tout entier est donc connue.

Il résulte de là les conséquences suivantes.

178. *Le mouvement élémentaire d'un système invariable, qui se déplace parallèlement à un plan fixe, est une rotation instantanée autour d'un axe perpendiculaire à ce plan.*

Le mouvement élémentaire de la courbe C revient, à l'instant actuel, à une rotation infiniment petite autour d'un point I du plan Q (157). On peut dire aussi que cette rotation s'effectue autour de l'axe Ix, perpendiculaire au plan Q. Elle reproduit le mouvement élémentaire du système, d'après le théorème précédent.

La droite Ix est appelée l'axe instantané de rotation..

179. **Théorème.** — *Le mouvement continu d'un système invariable, qui se déplace parallèlement à un plan fixe, peut être reproduit par le roulement sans glissement d'un cylindre mobile sur un cylindre fixe.*

Le mouvement continu de C dans le plan Q peut être reproduit par le roulement sans glissement d'une courbe S sur une autre courbe S' supposée fixe (162). Ces courbes sont les directrices de deux cylindres droits, tangents au plan $x\ y$. Il est clair que, si l'on suppose le système mobile invariablement lié au cylindre S, le roulement sans glissement de celui-ci sur le cylindre S' reproduit le mouvement considéré.

Observons que, par analogie avec ce qui a été dit au paragraphe 163 :

Le cylindre fixe est le lieu géométrique des axes instantanés de rotation dans l'espace fixe.

Le cylindre mobile est le lieu géométrique des droites, invariablement reliées à la figure mobile, qui viennent successivement coïncider avec les axes instantanés de rotation dans l'espace fixe.

§ IV. — **Mouvement épicycloïdal sphérique.**

180. Deux courbes S et S', l'une fixe, l'autre mobile, étant tracées sur une sphère de centre o, et supposées tangentes en I (fig. 147), on dit que S roule sans glissement sur S' si le point I parcourt simultanément des chemins égaux sur les deux courbes. Ce mouvement, analogue à celui dont l'étude a fait l'objet du § III, est aussi appelé, pour cette raison, *mouvement épicycloïdal sphérique.*

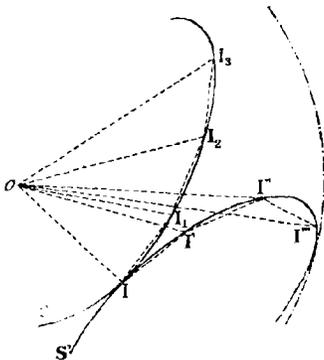


Fig. 147.

Théorème. — *Le mouvement épicycloïdal sphérique revient à une succession de rotations infiniment petites s'exécutant, à chaque instant, autour du rayon de la sphère qui passe par le point de contact des deux courbes.*

Inscrivons dans S et S', en partant du point I, des lignes polygonales II'I'... II₁I₂I₃... ayant pour côtés des arcs de grand cercle de la sphère, et telles que deux côtés de même rang soient égaux entre eux, puis joignons les points de division au centre

o. Les courbes S et S' sont les directrices de deux cônes de sommet o, tangents tout le long de la génératrice oI; les lignes polygonales précédentes déterminent deux pyramides P et P' inscrites dans ces cônes, ayant une arête commune oI, et dont les

faces correspondantes sont égales entre elles. Quand on fait rouler P sur P' supposée fixe, les faces de la première pyramide viennent successivement se superposer à celles de la seconde, en même temps que les côtés de la ligne polygonale $I_1I_2I_3\dots$ s'appliquent l'un après l'autre sur les côtés égaux de $I'I''I'''\dots$. La première phase du mouvement est une rotation autour de oI , à la suite de laquelle oI_1 vient prendre la position oI' . Le mouvement qui s'effectue ensuite est une rotation autour de oI' , dont l'effet est d'amener oI_2 en coïncidence avec oI' , etc... Le roulement de $I_1I_2I_3\dots$ sur $I'I''I'''\dots$ revient donc à une suite de rotations autour des arêtes de la pyramide fixe, avec lesquelles les arêtes de la pyramide mobile viennent successivement se confondre.

Le même fait a lieu si nombreux et si petits que soient les côtés des deux lignes polygonales sphériques; si l'on se place à la limite, on peut donc dire que le mouvement épicycloïdal sphérique revient à une suite de rotations infiniment petites, s'exécutant à chaque instant autour de la génératrice de contact des deux cônes oS et oS' .

Cette génératrice est l'axe instantané de rotation, et son extrémité I le pôle instantané de rotation.

181. Tangentes et normales aux courbes épicycloïdales sphériques. — Un point M, invariablement relié à la roulante S, décrit une courbe épicycloïdale xy située sur la sphère o . D'après le théorème précédent, sa vitesse à l'instant considéré est perpendiculaire au plan oIM (141). Comme la vitesse est dirigée suivant la tangente à la trajectoire, chaque tangente à xy est normale au plan que son point de contact détermine avec l'axe instantané de rotation correspondant.

On peut dire aussi, en considérant l'arc de grand cercle IM situé dans ce plan, que la courbe épicycloïdale sphérique décrite par le point M est, à chaque instant, normale à l'arc de grand cercle qui joint ce point au pôle instantané de rotation. On remarquera l'analogie de cette proposition avec celle du paragraphe 150, relative au mouvement épicycloïdal plan.

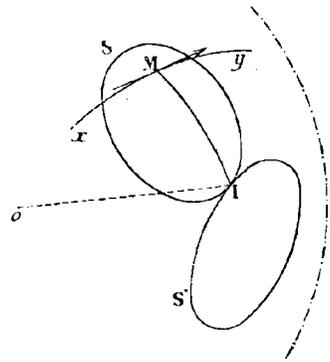


Fig. 148.

§ VII. — Mouvement d'une figure sphérique invariable se déplaçant sur une sphère.

182. La position d'une figure sphérique invariable, en mouvement sur une sphère, est complètement déterminée dès que l'on connaît celle de l'arc de grand cercle qui joint deux quelconques de ses points (135). Nous sommes donc ramenés à étudier le mouvement, sur la sphère, d'un arc de grand cercle de longueur constante, invariablement relié à la figure mobile.

Mouvement élémentaire de la figure.

183. Théorème. — *Lorsqu'une figure sphérique invariable se meut sur une*

sphère, on peut l'amener d'une position à une autre infiniment voisine par une rotation autour d'un diamètre de la sphère, déterminé par l'intersection des grands cercles normaux aux trajectoires de deux de ses points.

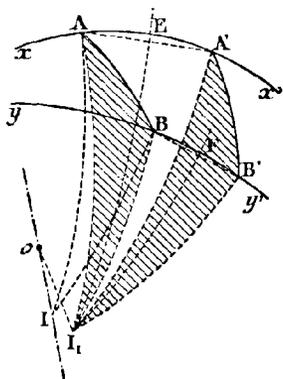


Fig. 149.

Soient AB et $A'B'$ les positions, à deux époques quelconques t et t' , de l'arc de grand cercle auquel on rattache la figure mobile. Les plans perpendiculaires aux cordes AA' , BB' , en leurs milieux respectifs, déterminent, sur la surface de la sphère, deux grands cercles qui se coupent en I_1 , et les triangles sphériques I_1AB , $I_1A'B'$ sont égaux. On peut donc amener le premier en coïncidence avec le second par une rotation autour du diamètre OI_1 . Or, quand $A'B'$ se rapproche indéfiniment de AB , les plans des grands cercles EI_1 , FI_1 , deviennent normaux en A et B aux trajectoires xx' , yy' , et le diamètre oI_1 prend la position limite oI . Le déplacement infiniment petit de AB peut donc être envisagé comme une rotation autour de oI , que l'on appelle, pour cette

raison, l'axe instantané de rotation à l'époque t . Le point I est le pôle instantané de rotation correspondant.

Ce théorème comporte des conséquences analogues à celles du théorème de Chasles (158-159-160). En particulier :

184. Les plans des grands cercles normaux aux trajectoires de tous les points de la figure mobile, menés par les positions qu'ils occupent à un même instant, se coupent suivant l'axe instantané de rotation correspondant.

185. Mouvement continu de la figure.

Il se ramène, d'après ce qui précède, à une suite de rotations infiniment petites autour d'axes infiniment voisins oI , oI' , oI'' ... dont la position peut être déterminée à chaque instant. Le lieu géométrique de ces axes est un cône fixe, ayant pour sommet o , et pour directrice sur la surface de la sphère une courbe S' , lieu des pôles instantanés de rotation. I , I' , I'' ... Nous nous proposons de montrer que le mouvement continu de la figure peut être reproduit par le roulement sans glissement d'un second cône, convenablement déterminé, sur le premier, et nous chercherons la directrice sphérique de ce cône mobile.

Joignons les positions successives du pôle instantané de rotation par des arcs de grand cercle II' , $I'I''$, $I''I'''$... Supposons que les rotations élémentaires qui s'effectuent autour de oI , oI' , oI'' ... aient pour effets de faire tourner la figure d'angles infiniment petits α , α_1 , α_2 ..., et considérons l'instant où elle tourne autour de oI . Quand cette première rotation est accomplie, un certain point du système mobile est venu coïncider avec I' ; on obtient sa position actuelle en construisant un arc de grand cercle formant avec II' l'angle α , et en portant $II_1 = II'$.

En raisonnant comme au paragraphe 162, on voit aisément que, si l'on trace un arc de grand cercle I_1x_1 faisant avec II_1 un angle égal à $I'I''$, puis un arc $I_1I_2 = I'I''$ faisant avec le précédent l'angle α_1 , on obtient un point I_2 qui, si on le suppose invariablement relié au système mobile, vient coïncider avec I'' après que les rotations d'angles α et α_1 se sont effectuées respectivement autour de oI et de oI' , etc... Cette construction fait correspondre au polygone sphérique fixe $II'I''$... un polygone sphérique mo-

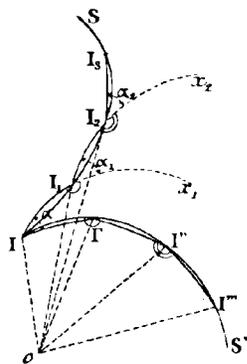


Fig. 150.

bile $II_1I_2I_3\dots$ dont le roulement sur le premier, identique à celui de la pyramide mobile $oII_1I_2\dots$ sur la pyramide fixe $oII'I''\dots$, reproduit la série de rotations d'amplitudes $\alpha\alpha_1\alpha_2\dots$. A la limite, ces pyramides dégénèrent en deux cônes, oS et oS' , sans que la propriété précédente cesse d'être vraie. Par conséquent, le mouvement continu d'une figure sphérique invariable qui se déplace sur une sphère est un mouvement épicycloïdal, sphérique.

On voit en outre que : *Le cône fixe oS' est le lieu géométrique des axes instantanés de rotation dans l'espace fixe.*

Le cône mobile oS est le lieu géométrique des droites, invariablement reliées à la figure mobile, qui viennent successivement coïncider avec les axes instantanés de rotation dans l'espace fixe.

Surfaces enveloppes.

186. Définitions. — Lorsqu'une surface L , appelée *enveloppée mobile*, se déplace d'après une loi continue, les lignes d'intersection de ses positions successives forment à la limite, une surface que l'on appelle *l'enveloppe* de la première.

Soit C_1 l'intersection de deux enveloppées voisines L et L_1 (fig. 151). Lorsque L_1 se rapproche indéfiniment de L supposée fixe, C_1 prend sur L une position limite C , que l'on appelle la *caractéristique* relative à l'enveloppée L . L'enveloppe est donc le lieu géométrique des caractéristiques.

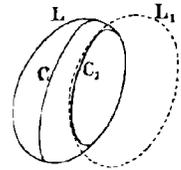


Fig. 151.

187. Lemme. — *Lorsque deux surfaces S_1 et T_1 , dont l'intersection se compose de deux courbes distinctes C_1 et C_2 , se déplacent d'après une loi continue, de manière que C_1 et C_2 viennent se confondre suivant C , elles sont, dans cette nouvelle position, tangentes en tous les points de C .*

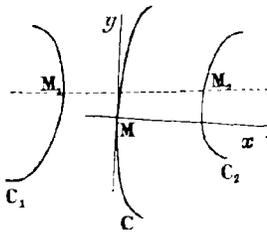


Fig. 152.

Soient S et T les positions des surfaces S_1 et T_1 au moment où leurs lignes d'intersection C_1 et C_2 viennent se confondre. Tout point M de C provient de la superposition d'un point M_1 de C_1 et d'un point M_2 de C_2 . La droite M_1M_2 , qui est une sécante commune aux surfaces S_1 et T_1 , devient, dans sa position limite Mx (fig. 152), une tangente commune aux surfaces S et T . Celles-ci admettent donc en M le même plan tangent xMy , déterminé par Mx et par la tangente My à la courbe C .

188. Théorème. — *L'enveloppe est tangente à chaque enveloppée tout le long de la caractéristique correspondante.*

Soient L_1, L, L_2 trois enveloppées consécutives. L'enveloppée L rencontre celle qui la précède suivant une courbe C_1 , et celle qui la suit suivant une courbe C_2 . Les enveloppées mobiles en nombre infini donnent une infinité de courbes analogues, situées sur une surface ϵ dont la limite est, par définition, l'enveloppe E . Or, si L_1 et L_2 se rapprochent indéfiniment de L supposée fixe, C_1 et C_2 viennent se confondre avec la caractéristique C relative à l'enveloppée L . Au moment où cette confusion se produit, la surface ϵ est devenue l'enveloppe. Celle-ci est donc tangente à L tout le long de la courbe C , par application du lemme.

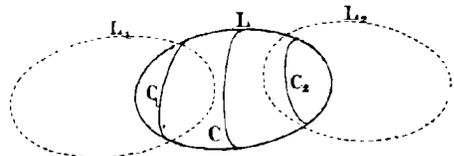


Fig. 153.

189. Enveloppe d'une surface conique entraînée dans un mouvement épicycloïdal sphérique.

Considérons un cône mobile autour de son sommet o . Une sphère de centre o et de rayon arbitraire le coupe suivant une courbe L , dont le mouvement peut être reproduit par le roulement sans glissement d'un cône mobile oS , à laquelle elle serait invariablement reliée, sur un cône fixe oS' . Les positions successives du cône oL se coupant deux à deux suivant des génératrices rectilignes, son enveloppe est un autre cône de même sommet, qui serait déterminé si l'on connaissait son intersection xy avec la sphère de comparaison. Or, les cônes oL et oxy sont tangents suivant une génératrice oM ; les lignes L et xy sont donc tangentes en M (*). Comme le même fait se reproduit pour chaque position de l'enveloppée mobile, il s'en suit que xy est l'enveloppe de L .

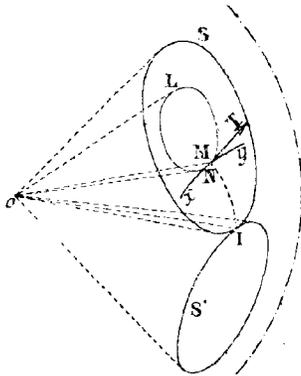


Fig. 151.

Donc : *L'enveloppe d'un cône mobile autour de son sommet est un autre cône du même sommet, et la directrice sphérique du second est l'enveloppe de celle*

du premier.

190. Théorème. — *Le plan normal à l'enveloppée mobile et à son enveloppe, mené par leur génératrice de contact, contient l'axe instantané de rotation correspondant.*

Le cône enveloppe oxy est le lieu géométrique de la caractéristique oM relative à l'enveloppée mobile. Considérons le point N invariablement relié à L qui, à l'instant considéré, se confond avec M . Sa vitesse MT , perpendiculaire au plan oIM , est aussi tangente à xy puisque cette courbe est le lieu du point M avec lequel N reste confondu pendant un temps infiniment petit. Le plan oMT est donc à la fois normal au plan oIM , et tangent aux cônes oxy et oL , ce qui démontre le théorème.

Le grand cercle IM suivant lequel le plan oIM coupe la sphère est, d'après cela, normal aux deux courbes L et xy . On peut donc dire que :

Si l'on considère la directrice sphérique L de l'enveloppée mobile, et son enveloppe xy , l'arc de grand cercle normal à ces deux courbes en leur point de contact passe par le pôle instantané de rotation.

Ces résultats seront utilisés dans la théorie des engrenages coniques.

VIII. — Mouvement de pivotement d'un système invariable autour d'un point fixe.

191. Le mouvement de pivotement autour d'un point fixe o est celui que possède un corps dont chaque point reste constamment à la même distance du point fixe.

Une sphère de centre o détermine dans le système une section invariable C (fig. 155). Si on la suppose invariablement liée à la figure mobile, elle se déplace sur la sphère auxiliaire, et si sa position à un instant donné est connue, celle du système tout entier l'est aussi (**). Par conséquent :

(*) C'est une application de théorème des surfaces inscrites, démontré en Géométrie descriptive : *lorsque l'on coupe deux surfaces inscrites par une troisième, les courbes d'intersection rencontrent la ligne de raccordement aux mêmes points, et sont tangentes en ces points.*

(**) On le démontrerait par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 177.

L'étude du mouvement de pivotement d'un système invariable autour d'un point fixe se ramène à celle du mouvement d'une figure sphérique invariable sur une sphère.

Les résultats établis aux paragraphes 183, 184, 185 sont donc applicables. En particulier :

Le mouvement élémentaire de pivotement autour d'un point fixe o est une rotation instantanée autour d'un axe passant par ce point (183).

Le mouvement continu de pivotement peut être reproduit par le roulement sans glissement d'un cône mobile oS, auquel la figure serait invariablement reliée, sur un cône fixe oS' (185).

Le mouvement d'un système invariable qui se déplace parallèlement à un plan fixe n'est qu'un cas particulier du pivotement autour d'un point fixe. Si le point o s'éloigne indéfiniment dans la direction Io, le mouvement de pivotement dégénère en un mouvement plan perpendiculaire à cette direction. La courbe C devient une section plane du système mobile, et les cônes oS et oS' se transforment en deux cylindres, dont S et S' sont les sections droites. On retrouve ainsi les résultats établis précédemment par une méthode directe.

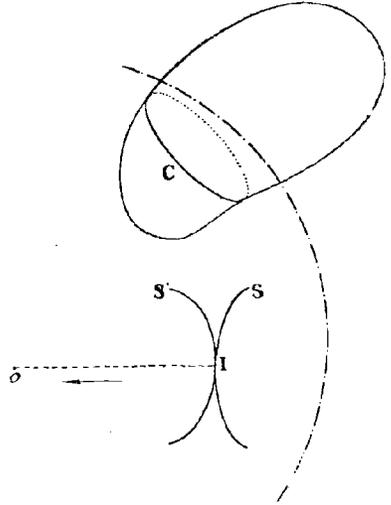


Fig. 155.

§ IX. — *Mouvement le plus général d'une figure plane invariable.*

192. Théorème. — *Une figure plane invariable, qui se déplace librement dans l'espace, peut être amenée d'une position à une autre quelconque au moyen de deux rotations successives, qui s'effectuent : l'une autour de l'intersection des plans de la figure dans ses deux positions, l'autre autour d'un axe perpendiculaire à l'un de ces plans.*

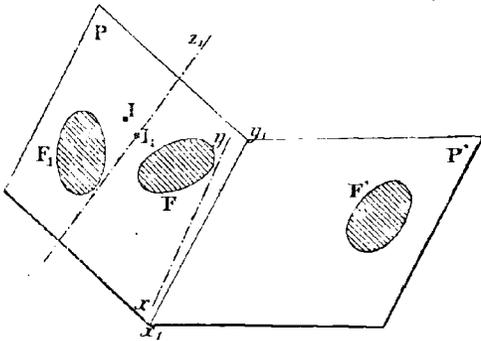


Fig. 156.

Soient F et F' (fig. 156) les positions initiale et finale de la figure mobile, situées respectivement dans les plans P et P'. En général, ceux-ci se coupent suivant une droite x_1y_1 . Le rabattement du plan P' sur le plan P, autour de x_1y_1 comme charnière, fait prendre à F' la position F₁. On peut d'abord amener F' en coïncidence avec F₁ par une rotation autour d'un point

I_1 du plan P, ou, ce qui revient au même, autour d'un axe I_1z_1 perpendiculaire à ce plan. Une rotation du plan P autour de x_1y_1 transporte ensuite la figure mobile de F₁ en F'.

193. Mouvement élémentaire de la figure F.

Le théorème précédent reste vrai si voisins que soient l'un de l'autre les plans P et P'. Si on les suppose infiniment rapprochés, chacune des rotations devient infiniment petite ; par conséquent :

Le mouvement élémentaire le plus général d'une figure plane invariable résulte de la coexistence de deux rotations instantanées, qui s'effectuent : l'une autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, l'autre autour d'un axe situé dans ce plan.

L'axe de la première rotation instantanée perce le plan P en un point I, appelé *foyer*, qui est la position limite du point I₁. L'axe de la seconde est l'intersection de deux positions du plan de la figure, supposées infiniment voisines ; c'est donc la *caractéristique xy* du plan P, considéré comme une enveloppée mobile (186).

194. Remarque. — On a admis, dans ce qui précède, que les positions successives du plan P se coupent deux à deux. Dans le cas contraire, la caractéristique passe à l'infini, et la rotation instantanée qui s'effectue autour d'elle dégénère en une translation perpendiculaire au plan P (142). Le mouvement élémentaire de la figure résulte alors de la coexistence d'une rotation instantanée, qui s'effectue autour d'un axe perpendiculaire au plan mobile, et d'une translation parallèle à cet axe. Ce mouvement, comparable à celui d'un écrou autour d'une vis fixe, est *hélicoïdal*. On verra, dans la Théorie des mouvements simultanés (223-224), que le mouvement élémentaire de la figure, dans le cas général, se ramène à celui-là.

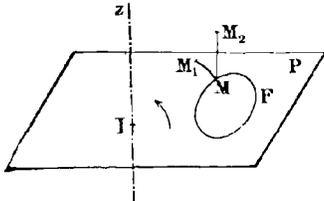


Fig. 157

195. Théorème. — *Tous les plans normaux aux trajectoires des différents points de la figure passent par le foyer.*

Soient Iz et xy (fig. 158) les axes autour desquels s'effectuent les rotations instantanées dont la coexistence reproduit le mouvement élémentaire de la figure à un instant t, et M un point quelconque de celle-ci. Pendant un temps infiniment petit dt succédant à l'instant t, le point M parcourt un élément de trajectoire MM'. Il s'agit de démontrer que le plan qui lui est normal en M passe par le point I.

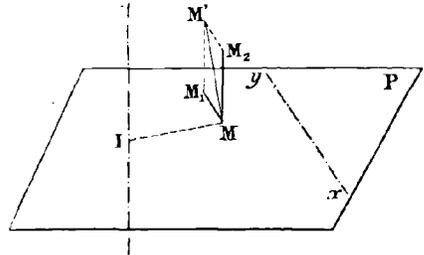


Fig. 158.

Si la rotation instantanée autour de Iz existait seule, le point M parcourrait pendant le temps dt, dans le plan P, un chemin infiniment petit MM₁ perpendiculaire au plan zIM. Dans la rotation autour de xy considérée isolément, il décrirait, pendant le même temps, l'élément MM₂ perpendiculaire au plan P. D'après le principe de l'Indépendance des mouvements simultanés, l'élément MM' est la diagonale du rectangle MM₁M'M₂. Or, le plan de celui-ci est perpendiculaire à IM. Le plan Q, mené par M perpendiculairement à MM', passe donc par le point I.

196. Remarque. — Ce théorème et sa démonstration subsistent quand la caractéristique xy du plan P est rejetée à l'infini. Dans ce cas, en effet, la rotation autour de xy est remplacée par une translation perpendiculaire au plan P, et la direction du plan MM₁M'M₂ n'est pas modifiée.

197. Théorème. — *La trajectoire du foyer, considéré comme invariablement lié à la figure mobile, est normale au plan P.*

Le foyer, étant situé sur l'axe Iz, ne participe en effet qu'à la rotation qui s'effectue

autour de xy (ou à la translation qui la remplace). Le chemin infinitésimal qu'il décrit pendant le temps dt est donc perpendiculaire au plan P . Il est d'ailleurs le seul point de la figure qui jouisse de cette propriété, car le chemin élémentaire MM' parcouru, pendant le même temps, par un point quelconque du système, est la diagonale d'un rectangle dont un côté est dans le plan P et un autre perpendiculaire à ce plan. Il est donc nécessairement oblique au plan de la figure.

La propriété que nous venons de démontrer est donc caractéristique du foyer. Sa réciproque est vraie.

198. Mouvement continu de la figure.

Il peut être considéré comme résultant de deux mouvements simultanés, dont l'un entraîne le plan P dans l'espace, pendant que l'autre déplace la figure dans ce plan.

1^o La caractéristique xy reste à distance finie.

Dans le mouvement continu de la figure, le plan P enveloppe une surface développable A , lieu géométrique des positions successives de xy . L'une des deux rotations instantanées auxquelles revient à chaque instant le mouvement élémentaire, s'effectue donc autour des génératrices successives de A .

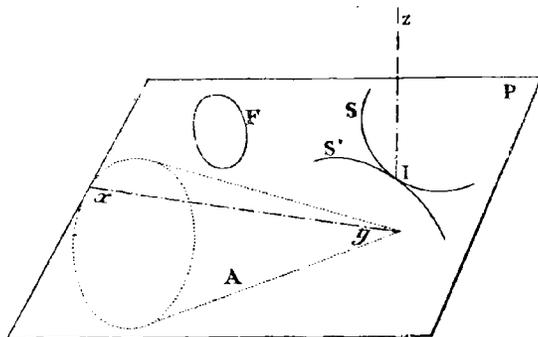


Fig. 159.

Pendant que le plan P roule sur A , la figure se meut dans ce plan, et son mouvement peut être reproduit par le roulement sans glissement d'une courbe mobile S sur une courbe fixe S' , ou, ce qui revient au même, de deux cylindres ayant S et S' pour directrices, et pour génératrices des perpendiculaires au plan P . La courbe S' est le lieu géométrique du foyer I . En définitive, le mouvement continu de F dans l'espace peut être considéré comme produit par le roulement sans glissement d'un cylindre S , qui lui serait invariablement relié, sur un cylindre S' invariablement relié au plan P , tous deux étant entraînés par celui-ci dans son roulement sur une surface développable A . (Dans la figure 159 la surface A est un cône).

2^o La caractéristique xy est rejetée à l'infini.

Le mouvement continu revient, à chaque instant, à une rotation instantanée autour d'un axe Iz perpendiculaire au plan P , composée avec une translation parallèle à Iz ; il peut être reproduit par un roulement du cylindre S , auquel la figure est invariablement reliée, sur le cylindre S' , accompagné d'un glissement du premier sur le second, le long de la génératrice variable suivant laquelle a lieu leur contact.

§ X. — Mouvement le plus général d'un système invariable.

199. Mouvement élémentaire du système.

On peut l'envisager de deux manières différentes, qui se réduisent l'une à l'autre comme on l'établira dans la Théorie des mouvements simultanés des systèmes matériels.

Première manière. — Théorème. — *L'étude du mouvement le plus général d'un système invariable se ramène, d'une infinité de manières, à celle du mouvement le plus général d'une figure plane invariable.*

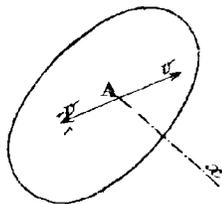
Cela résulte du théorème démontré au paragraphe 133.

200. — Théorème. — *Le mouvement élémentaire le plus général d'un système invariable peut être ramené, d'une infinité de manières, à deux rotations simultanées infiniment petites, autour d'axes perpendiculaires.*

Le mouvement élémentaire du triangle de comparaison résulte, en effet, de la coexistence de deux rotations instantanées s'effectuant, l'une autour de la caractéristique de son plan, l'autre autour de la perpendiculaire à ce plan menée par le foyer (193). Cette décomposition dépend du triangle de comparaison ; elle est donc possible d'une infinité de manières.

201. Deuxième manière. — Théorème. — *Le mouvement élémentaire le plus général d'un système invariable peut être ramené, d'une infinité de manières, à une rotation instantanée combinée avec une translation.*

Première démonstration. — Soit v la vitesse d'un point quelconque A du système à un instant quelconque t (fig. 160)



Si l'on imprime à cet instant, à tout le système, un mouvement de translation de vitesse $-v$, A est ramené au repos (*), et le mouvement de la figure consiste en un pivotement, qui revient lui-même, à l'instant considéré, à une rotation autour d'un axe Ax passant par le point fixe (191). Le mouvement élémentaire du système résulte donc de la coexistence d'une rotation instantanée autour de Ax , et d'une translation de vitesse v . Cette décomposition dépend du choix du point A ; elle est donc possible d'une infinité de manières.

Deuxième démonstration. — Méthode de Poncalet. — L'étude du mouvement du système se ramène à celle du mouvement du triangle ABC formé par trois quelconques de ses points (134).

Soient $AD = v_a$, $BE = v_b$, $CF = v_c$

les vitesses de ces points à un instant quelconque t (fig. 161). Les vecteurs AD , BE , CF , transportés parallèlement à eux-mêmes en oa , ob , oc , forment un trièdre (**). Joignons un point quelconque d , pris dans le plan abc , aux points o , a , b , et c , puis traçons les vecteurs :

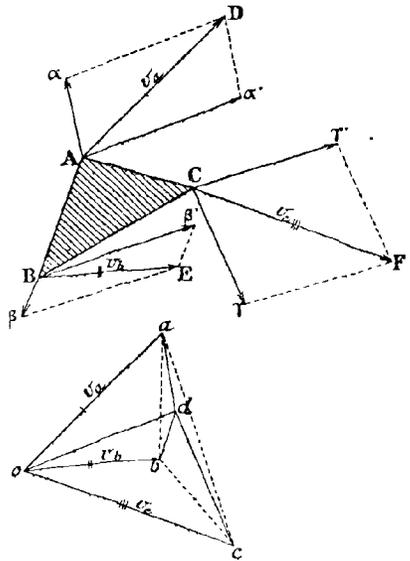


Fig. 161.

(*) Le point A n'est pas le seul du système qui soit ramené au repos après l'addition du mouvement de translation de vitesse $-v$; tous les points de Ax le sont également. Mais aucun point extérieur à Ax n'est ramené au repos, sans quoi un triangle invariablement relié au système serait rendu immobile, ainsi que la figure tout entière. Le mouvement de celle-ci à l'instant t consisterait donc en une translation de vitesse v , et ne serait pas le plus général possible.

(**) Pour qu'il en soit autrement, il faudrait que les droites oa , ob , oc soient dans un même plan ou confondues. Dans le premier cas, les vitesses v_a , v_b , v_c seraient parallèles au plan abc ; le mouvement du triangle ABC , ainsi que celui du système, serait donc parallèle à ce plan. Dans le second cas, les vitesses v_a , v_b , v_c seraient parallèles, ce qui correspondrait, soit à un mouvement de rotation autour d'un axe situé dans le plan ABC (vitesses inégales), soit à une translation de vitesse égale et parallèle à v_a (vitesses égales). Dans aucun de ces cas, le mouvement du système ne serait le plus général. Ils sont donc en dehors de l'hypothèse.

$Ax', B\beta', C\gamma'$ équipollents à od ;

$Az, B\beta, C\gamma$ respectivement équipollents à da, db, dc .

Les quadrilatères formés en A, B, C sont des parallélogrammes, dont AD, BE, CF sont les diagonales. Cela revient à décomposer les mouvements des points A, B, C, à l'instant t , chacun en deux mouvements simultanés, dont l'un a, pour les trois points, une vitesse égale et parallèle à od . C'est donc un mouvement de translation, dans lequel la vitesse de chaque point est représentée, à l'instant considéré, par un vecteur équipollent à od . Les vitesses $Az, B\beta, C\gamma$ des autres mouvements simultanés sont parallèles au plan abc . Elles indiquent que le triangle de comparaison prend, pendant un temps infiniment petit, un mouvement élémentaire parallèle au plan abc , lequel revient à une rotation instantanée autour d'un axe perpendiculaire à ce plan (178). En définitive, le mouvement élémentaire du triangle ABC, et par conséquent celui de tout le système, revient à une translation de vitesse égale et parallèle à od , combinée avec une rotation perpendiculaire au plan abc .

Cette décomposition, dont un élément au moins (la translation) varie avec la position du point d dans le plan abc , est possible d'une infinité de manières.

202. La direction de l'axe de la rotation instantanée reste la même quel que soit le point d ; elle ne dépend en effet que du plan abc , c'est-à-dire, en dernière analyse, des points ABC du système qui ont été choisis pour former le triangle de comparaison. On peut se demander si cette direction est modifiée lorsqu'on forme ce dernier au moyen d'autres points du système.

Théorème. — De quelque manière qu'on décompose le mouvement élémentaire du système en une rotation et une translation simultanées, l'axe de la rotation conserve une direction constante, et la vitesse angulaire de la rotation instantanée reste toujours la même.

Deux modes de décomposition du mouvement élémentaire conduisent à le considérer comme résultant, à l'époque t , soit d'une rotation instantanée de vitesse angulaire ω autour d'un axe Ax , et d'un mouvement de translation de vitesse $v = Aa$ (fig. 162), soit d'une rotation instantanée de vitesse angulaire ω' autour de Bx' , et d'une translation de vitesse $v' = Bb$.

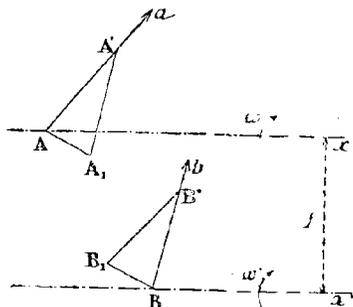


Fig. 162.

1° Les axes Ax et Bx' sont dans un même plan.

Supposons qu'un point A du premier axe et un point B du second soient invariablement liés au système. Dans le premier mode de décomposition du mouvement élémentaire, le point A ne participe qu'au mouvement de translation; il prend donc, après un temps infiniment petit dt succédant à l'instant considéré, une position A' sur Aa , et l'on a

$$AA' = v dt$$

Il en est de même du point B qui, dans le second mode de décomposition, vient occuper à l'instant $t + dt$, sur Bb , la position B' donnée par la relation

$$BB' = v' dt$$

Soient $\overline{A_1A'}$ et $\overline{B_1B'}$ des vecteurs respectivement équipollents à \overline{Bb} et \overline{Aa} . On peut imaginer que le point A passe en A' en parcourant successivement les segments AA_1 et A_1A' . Comme $\overline{A_1A'}$ est le chemin que parcourrait A_1 , pendant le temps dt , dans le mouvement de translation de vitesse v' , $\overline{AA_1}$ est, d'après le principe de l'indépen-

dance des mouvements simultanés, le chemin parcouru dans le même temps par le point A dans la rotation autour de Bx' ; AA₁ est donc perpendiculaire au plan x'BA. Un raisonnement identique montre que BB₁ est parcouru par le point B dans le mouvement de rotation autour de Ax, et qu'il est perpendiculaire au plan xAB.

On voit aisément par la comparaison des triangles infinitésimaux AA₁A' et BB₁B' que AA₁ est égal et parallèle à BB₁. Les plans xAB et x'BA sont donc confondus, ce qui établit la première partie du théorème.

2^o Les axes Ax et Bx' ne se rencontrent pas.

Supposons qu'ils se coupent, et que leur point d'intersection K soit invariablement lié au système (fig. 163). Sa vitesse absolue à l'instant t est v ou v', selon qu'on le considère comme situé sur Ax ou sur Bx'. Cela est impossible si les deux modes de décomposition du mouvement élémentaire que nous avons considérés sont différents.



Fig. 163.

3^o Les vitesses angulaires ω et ω' sont égales.

Soit p la distance des deux axes ; d'après ce qui précède, les segments AA₁ et BB₁ ont pour valeurs respectives

$$AA_1 = \omega' p dt \qquad BB_1 = \omega p dt$$

Comme AA₁ = BB₁, $\omega = \omega'$

203. Corollaire. — Si l'on mène, par un point de l'espace, des vecteurs équipollents aux vitesses des différents points du système à l'instant t, les extrémités de ces vecteurs sont dans un même plan.

Dans chacune des décompositions du mouvement élémentaire en une rotation et une translation simultanées, l'axe de la rotation est perpendiculaire au plan formé par les extrémités de trois des vecteurs en question. Pour que sa direction soit invariable, il est nécessaire que ce plan contienne les extrémités de tous les autres vecteurs.

204. Théorème. — Parmi tous les modes de décomposition du mouvement élémentaire en une rotation et une translation simultanées, il en est un seul pour lequel la direction de la translation est parallèle à l'axe de la rotation.

En supposant que la réduction du mouvement élémentaire ait été faite d'après la seconde méthode indiquée au paragraphe 201, on peut placer le point d au pied H de la perpendiculaire abaissée de o sur le plan abc, et décomposer les vitesses v_a, v_b, v_c suivant les directions oH, Ha, Hb, Hc. D'après ce qui précède, le mouvement élémentaire du système résulte alors de la coexistence d'une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan abc, et d'une translation parallèle à cet axe, dont la vitesse est représentée, en grandeur et en direction, par le vecteur oH. Ce mode de décomposition n'est possible que d'une seule manière, puisque le plan abc est unique et qu'on ne peut abaisser sur lui, du point o, qu'une seule perpendiculaire.

On a de plus oH < od, ce qui montre que la vitesse de la translation est moindre dans ce mode de réduction que dans tous les autres.

205. Ce théorème permet de conclure que le mouvement élémentaire le plus général d'un système invariable est un mouvement hélicoïdal, puisque, à un instant quelconque t, la figure tourne autour d'un axe Lx en même temps qu'elle se déplace dans une direction parallèle. Lx est appelé l'axe instantané de rotation et de glissement du système à l'époque t. On dit plus simplement, l'axe instantané glissant, ou encore l'axe central du mouvement.

236. Détermination de l'axe instantané glissant. — *Construction de Poncelet.*

Supposons que les vitesses $v_a = AD$, $v_b = BE$, $v_c = CF$ des sommets du triangle de comparaison à l'instant t (fig. 164) aient été décomposées en plaçant le point d au pied de la perpendiculaire oH au plan abc ; soient Ax et Ax' , $B\beta$ et $B\beta'$, $C\gamma$ et $C\gamma'$ leurs composantes respectives. Les vecteurs Ax , $B\beta$ et $C\gamma$, parallèles au plan abc , représentent les vitesses des points A B C dans le mouvement de rotation autour de l'axe instantané glissant inconnu Ix . Ils sont donc respectivement perpendiculaires aux plans AIx , BIx , CIx (141). Inversement Ix est l'intersection des plans menés par A , B et C perpendiculairement à Ax , $B\beta$ et $C\gamma$. On peut, puisqu'on connaît sa direction, se borner à en déterminer un point.

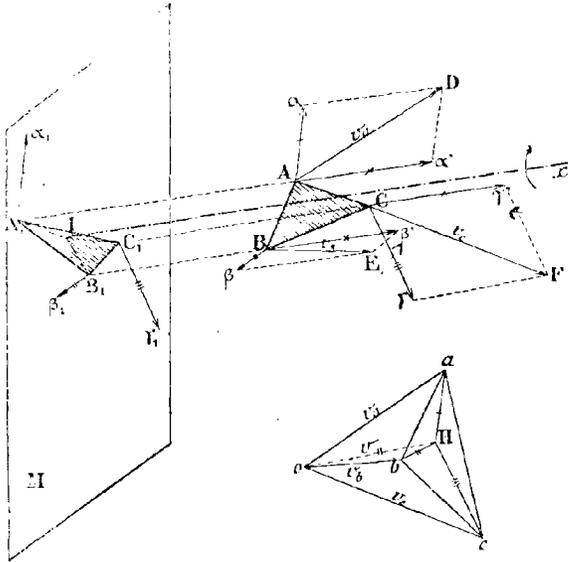


Fig. 164.

Soit M un plan parallèle au plan abc : les projections de Ax , $B\beta$, $C\gamma$ sur ce plan sont des droites A_1x_1 , $B_1\beta_1$, $C_1\gamma_1$ respectivement égales et parallèles à celles de l'espace, et par conséquent perpendiculaires aux plans AIx , BIx , CIx . Il s'en suit que le pied I de l'axe instantané glissant sur le plan M est l'intersection des perpendiculaires élevées en A_1 B_1 C_1 à A_1x_1 , $B_1\beta_1$ et $C_1\gamma_1$.

L'axe lui-même est la perpendiculaire Ix au plan M .

237. Détermination de la vitesse angulaire ω de la rotation instantanée, et de la vitesse absolue d'un point du système.

On a en appliquant les résultats établis au paragraphe 143

$$\omega = \frac{Ax}{IA_1} = \frac{B\beta}{IB_1} = \frac{C\gamma}{IC_1}$$

Connaissant ω , il est facile d'exprimer la vitesse absolue V d'un point quelconque M du système à l'instant t , en fonction de sa distance p à l'axe instantané

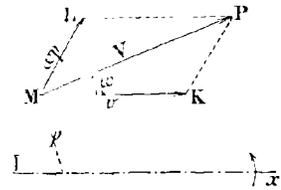


Fig. 165.

glissant correspondant; V est, en effet, la résultante de la vitesse de translation v commune à tous les points de la figure, et de la vitesse linéaire ωp du point M dans la rotation autour de Ix . Ces deux composantes sont d'ailleurs perpendiculaires. Par conséquent

$$V = \sqrt{v^2 + \omega^2 p^2}$$

De plus, le plan KML des deux vitesses composantes est à la fois parallèle à l'axe instantané glissant, et perpendiculaire au plan xIM . La vitesse V fait dans ce plan, avec la direction Ix , un angle μ donné par la relation

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\omega p}{v}$$

qui est situé, par rapport à MK , du côté où la rotation instantanée tend à entraîner le point M .

208. Mouvement continu du système.

On peut se représenter ce mouvement de deux manières différentes :

1° Il se ramène à une suite de mouvements élémentaires hélicoïdaux, composés chacun d'une rotation autour d'un axe Ix , et d'une translation parallèle à cet axe. Le lieu géométrique des axes instantanés glissants est une surface réglée S' généralement gauche (fig. 166). D'autre part, il existe à chaque instant une droite, invariablement reliée à la figure mobile, qui vient coïncider avec l'axe instantané glissant correspondant. Toutes ces droites dessinent dans la figure immobile une seconde surface réglée S qui, d'après sa définition, a constamment une génératrice commune avec la première. En raison de la nature du mouvement élémentaire du système, son mouvement continu peut être reproduit par un roulement et un glissement simultanés de la surface S , qu'on lui suppose invariablement reliée, sur la surface S' . Dans ce double mouvement, la surface mobile vient appliquer successivement toutes ses génératrices rectilignes sur celles de la surface fixe. en même temps qu'elle éprouve un certain glissement le long de chaque génératrice de

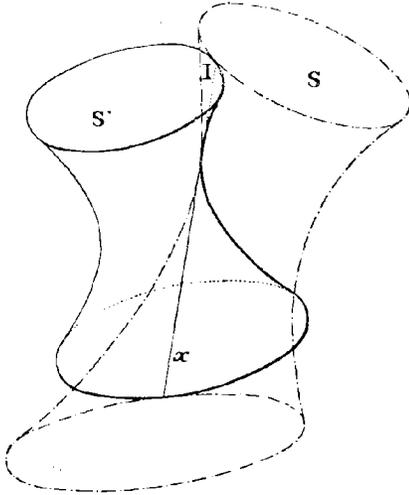


Fig. 166.

contact.

2° Si l'on imagine un observateur entraîné par un point quelconque A du système, le mouvement consiste pour lui en un pivotement autour de ce point ; il peut être reproduit par le roulement d'un cône mobile, invariablement relié à la figure, sur un cône fixe (191). Pour reconstituer de cette manière le mouvement absolu du système, il suffit d'imprimer à l'ensemble des deux cônes un mouvement de translation dont la vitesse serait à chaque instant, en grandeur et en direction, celle du point A .

Observons que ce mode de représentation est réalisable d'une infinité de manières, puisqu'il dépend du point A ; le premier, au contraire, est unique.

CHAPITRE II

THÉORIE DES MOUVEMENTS SIMULTANÉS D'UN SYSTÈME INVARIABLE

209. Nous venons de voir que le mouvement d'un système invariable revient, à chaque instant, dans le cas le plus général, à une rotation et à une translation simultanées. Nous nous proposons d'étudier la nature du mouvement absolu d'un système animé de deux ou plusieurs mouvements simultanés, en essayant de le ramener, comme chacun des mouvements composants, à la coexistence de translations et de rotations convenablement choisies.

Le problème général à résoudre est le suivant :

Un système invariable S possède un mouvement connu par rapport à un système de comparaison A. Le système A possède lui-même un mouvement connu, par rapport à un second système de comparaison B, etc... On demande de trouver le mouvement absolu de S, par rapport à un système de comparaison fixe.

Nous ferons usage du principe de l'Indépendance des mouvements simultanés, déjà appliqué dans la Cinématique du point matériel (84). Les raisonnements seront facilités par une représentation géométrique des mouvements dont voici l'exposé.

210. Représentation d'un mouvement de translation par un vecteur.

Le mouvement de translation d'un système invariable est parfaitement déterminé si l'on connaît, à chaque instant, la vitesse d'un de ses points, puisque les vitesses de tous les autres points, au même instant, sont égales et parallèles à celle-là (157). Par conséquent, un vecteur \overline{AB} suffit pour représenter complètement, à un instant donné, un mouvement de translation. On saura, en effet, que pendant un temps infiniment petit à partir de cet instant, un point quelconque M du système décrit, avec une vitesse équipollente à \overline{AB} , un élément de trajectoire MM' parallèle à AB . Le vecteur AB peut d'ailleurs être transporté parallèlement à lui-même, pourvu que sa grandeur et son sens soient conservés.

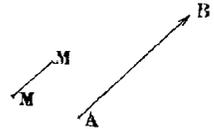


Fig. 167.

211. Représentation d'un mouvement de rotation par un vecteur.

Un mouvement de rotation est parfaitement déterminé si l'on connaît, à chaque instant, son axe ox , sa vitesse angulaire ω , et le sens dans lequel il s'effectue. Portons sur ox , à partir d'un point quelconque, un vecteur \overline{oR} représente ω à une échelle convenue, et dans un sens tel qu'un observateur ayant les pieds en o et la tête en R voie la rotation s'accomplir dans le sens des aiguilles d'une montre. Ce vecteur détermine complètement le mouvement de rotation puisqu'il fait connaître tous les éléments qui le caractérisent à l'instant considéré. Observons qu'il ne peut être déplacé que sur l'axe x .

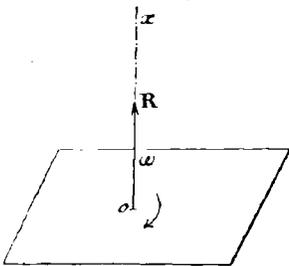


Fig. 168.

Avant de résoudre le problème général posé plus haut, nous examinerons d'abord quelques cas particuliers.

§ I. — *Composition des translations.*

212. Une figure invariable est animée d'un mouvement de translation, représenté, à l'instant t , par le vecteur AB (fig. 169), dans un système de comparaison qui possède

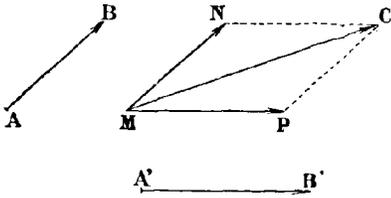


Fig. 169.

lui-même, par rapport à un second système de comparaison en repos absolu, un mouvement de translation figuré, au même instant, par le vecteur $A'B'$. Pour déterminer le mouvement absolu de la figure, observons que la vitesse MC d'un quelconque de ses points, à l'instant t , est la résultante de deux vitesses simultanées MN et MP , respectivement équipollentes à AB et $A'B'$. Il est évident que le parallélogramme $MNCP$ ne ferait que se transporter

parallèlement à lui-même, si on le construisait pour un autre point de la figure. Tous les points de celle-ci ont donc, à l'instant considéré, une vitesse égale et parallèle à MC . Il en résulte que :

Le mouvement absolu résultant de deux translations simultanées est une translation, dont le vecteur représentatif est la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs représentatifs des translations composantes.

Le mouvement d'un bateau qui traverse une rivière, l'élevation des fardeaux au moyen des palans différentiels réalisent la composition de deux translations.

La longueur du vecteur MC et les angles qu'il forme avec les directions MN et MP , sont donnés par des formules analogues à celles du paragraphe 86.

Réciproquement, on peut décomposer un mouvement de translation donné MC en deux autres de directions données MN et MP , à la condition que le plan NMP contienne MC . Il suffit de construire un parallélogramme connaissant une diagonale et les directions des côtés. Les vecteurs composants sont exprimés par des formules analogues à celles du n° 87.

213. **Généralisation.** — *Composition d'un nombre quelconque de translations.*

En composant de proche en proche, suivant la règle du parallélogramme, toutes les translations données, on obtient aisément la proposition suivante :

Le mouvement absolu résultant de plusieurs translations simultanées est une translation, représentée à chaque instant, en grandeur et en direction, par la résultante du polygone construit sur les vecteurs représentatifs des translations composantes.

§ II. — *Composition des rotations dont les axes sont parallèles.*

Nous considérerons d'abord le cas de deux rotations de même sens (*).

214. **Composition de deux rotations parallèles et de même sens.**

Les axes sont supposés perpendiculaires au plan P de la figure, qu'ils percent respectivement en o et o' (fig. 170).

(*) On trouvera des réalisations matérielles de compositions de rotations en étudiant les Trains épicycloïdaux.

Un système invariable tourne, avec une vitesse angulaire ω , autour de l'axe projeté en o , pendant que celui-ci est entraîné dans un mouvement de rotation, de vitesse angulaire ω' , autour de l'axe fixe projeté en o' . Les sens des mouvements sont indiqués par des flèches. Puisque chacun des mouvements composants, agissant comme s'il était seul, déplacerait le système parallèlement au plan P, le mouvement absolu est aussi parallèle à ce plan; il revient donc, à chaque instant, à une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan P (177), et le problème sera entièrement résolu quand nous aurons trouvé cet axe et la vitesse angulaire Ω de la rotation qui s'effectue autour de lui.

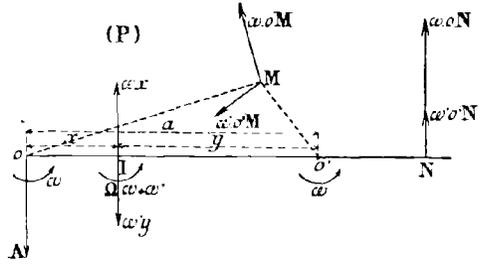


Fig 170.

1° En supposant que l'axe cherché soit invariablement relié à la figure mobile, la vitesse absolue de chacun de ses points, et en particulier celle de son pied I sur le plan P, est nulle à l'instant considéré. Pour qu'il en soit ainsi, le point I doit être nécessairement sur oo' , entre o et o' , car pour tout point tel que M extérieur à cette droite, les composantes de la vitesse absolue sont perpendiculaires à deux directions différentes oM et $o'M$, et pour tout point tel que N situé sur l'un des prolongements de oo' , ces composantes ont même direction. Dans aucun de ces cas, leur résultante ne saurait être nulle.

Posons

$$oI = x, \quad o'I = y \quad \text{et } oo' = a$$

L'égalité nécessaire des vitesses simultanées du point I donne la relation.

$$\omega N = \omega' y$$

d'où
$$\frac{\omega'}{x} = \frac{\omega}{y} \tag{1}$$

Cette proportion montre que le point I partage oo' en segments additifs inversement proportionnels à ω et ω' .

D'autre part
$$x + y = oo' = a$$

On a donc
$$\frac{\omega'}{x} = \frac{\omega}{y} = \frac{\omega + \omega'}{a} \tag{2}$$

d'où
$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a\omega'}{\omega + \omega'} \\ y &= \frac{a\omega}{\omega + \omega'} \end{aligned} \right. \tag{3}$$

L'axe de la rotation résultante est ainsi connu, puisque les formules (3) déterminent son pied I, et qu'il est d'autre part perpendiculaire au plan P.

2° La vitesse absolue du point o , supposé invariablement relié au système mobile, est perpendiculaire à oo' dans le plan P. Elle a pour expression Ωy , et résulte de

la composition de deux vitesses simultanées dont l'une, due à la rotation ω , est nulle, et dont l'autre, qui provient de la rotation ω' , est

$$\omega'a = \overline{oA}$$

Par conséquent

$$\Omega x = \text{résultante de } \begin{cases} 0 \\ \omega'a = \overline{oA} \end{cases}$$

On doit donc avoir, en grandeur et en signe, $\Omega x = \omega'a = \overline{oA}$

Il en résulte déjà que Ω est du même sens que ω' . De plus

$$\Omega = \frac{\omega'a}{x}$$

ou, en remplaçant x par sa valeur (3).

$$\Omega = \omega + \omega' \tag{4}$$

En résumé : *Le mouvement absolu résultant de deux rotations parallèles et de même sens est, à chaque instant, une rotation parallèle et de même sens, égale à leur somme : son axe partage la droite qui joint deux points des axes des premières en segments additifs, inversement proportionnels aux vitesses angulaires composantes.*

On déduit des relations (2) et (4)

$$\frac{\omega}{y} = \frac{\omega'}{x} = \frac{\Omega}{a} \tag{5}$$

c'est-à-dire que : *Le rapport de la vitesse angulaire de chaque rotation à la distance des axes des deux autres est constant.*

215. Problème inverse. — *Décomposer une rotation donnée Ω , d'axe I , en deux autres rotations parallèles, de même sens qu'elle, s'effectuant autour d'axes donnés o et o' .*

Observons d'abord que, d'après ce qui précède, le point I doit être situé sur la droite oo' , entre les points o et o' .

Si cette condition de possibilité est remplie, on tire des égalités (4), dans lesquelles Ω , x , y et a sont connus

$$\begin{cases} \omega = \frac{\Omega y}{a} \\ \omega' = \frac{\Omega x}{a} \end{cases}$$

216. Composition de deux rotations parallèles et de sens contraires.

Soient ω et ω' ($\omega > \omega'$) les rotations composantes, de sens contraires, dont les axes, supposés perpendiculaires au plan de la figure, sont projetés en o et o' (*) (fig. 171). On pourrait suivre une marche analogue à celle du cas précédent, mais il est plus rapide de raisonner de la façon suivante.

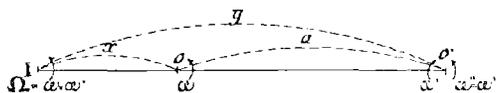


Fig. 171.

La rotation ω peut être décomposée, d'une infinité de manières, en deux autres,

(*) L'énoncé rigoureux de la question est analogue à celui qui est donné au début du n° 214, pour le cas de deux rotations parallèles et de même sens. Cette observation s'applique aussi aux questions n°s 218 et 219.

Ω et ω'' , s'exécutant autour d'axes parallèles situés de part et d'autre du point o . Supposons que cette décomposition ait été faite de telle manière que ω'' soit égale à ω' en valeur absolue, et s'effectue autour du même axe. L'axe de la rotation Ω passera par un point I situé, par rapport au point o , du côté opposé à celui du point o' , et l'on aura, d'après les formules (5)

$$\frac{\Omega}{oo'} = \frac{\omega'' \text{ ou } \omega'}{oI} = \frac{\omega}{o'I}$$

ou
$$\frac{\Omega}{a} = \frac{\omega'' \text{ ou } \omega'}{x} = \frac{\omega}{y} \quad (6)$$

De plus
$$\Omega + \omega'' = \omega$$

ou
$$\Omega = \omega - \omega'' = \omega - \omega' \quad (7)$$

Récapitulons maintenant les divers mouvements simultanés que possède le système mobile. La rotation ω a été remplacée par Ω et ω'' ; les rotations égales et contraires ω' et ω'' , dont l'axe est le même, se détruisent mutuellement. Il ne reste donc plus que la rotation Ω autour de l'axe projeté en I , et c'est à celle-ci que se réduit le mouvement absolu du système. On voit, d'après les relations (6), que

$$\frac{\omega'}{x} = \frac{\omega}{y}$$

Par conséquent : *Le mouvement absolu résultant de deux rotations simultanées parallèles et de sens contraires est, à chaque instant, une rotation parallèle, égale à leur différence, et de même sens que la plus grande. L'axe de cette rotation partage la droite qui joint deux points des axes des premières en segments soustractifs, inversement proportionnels aux vitesses angulaires composantes. Il est situé du côté de l'axe de la plus grande des deux rotations composantes.*

La suite de rapports égaux

$$\frac{\Omega}{a} = \frac{\omega'}{x} = \frac{\omega}{y} \quad (6)$$

montre en outre que : *Le rapport de la vitesse angulaire de chaque rotation à la distance des axes des deux autres est constant.*

En tenant compte de la formule (7), on a

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a\omega'}{\omega - \omega'} \\ y = \frac{a\omega}{\omega - \omega'} \end{array} \right. \quad (8)$$

217. Problème inverse. — *Décomposer une rotation donnée Ω , d'axe I , en deux autres rotations parallèles, l'une de même sens qu'elle, l'autre de sens contraire, s'effectuant autour d'axes donnés o et o' .*

D'après ce qui précède, le problème n'est possible que si le point I est situé sur l'un des prolongements du segment oo' .

Quand cette condition est remplie, on tire des égalités (6), dans lesquelles Ω , a , x et y sont connus :

$$\omega = \frac{\Omega y}{a} \quad \omega' = \frac{\Omega x}{a}$$

Si le point I est situé du même côté de o' que le point o , la rotation ω est plus grande que ω' ; son sens est le même que celui de la rotation Ω . C'est le contraire qui a lieu quand le point I est situé du même côté de o que le point o' .

248. Cas particulier de deux rotations parallèles, égales et de sens contraires. Couple de rotations.

Les formules (6) (7) et (8) ont été établies dans l'hypothèse $\omega > \omega'$. Si l'on suppose que ω' aille en croissant, tout en restant inférieure à ω , Ω diminue, et le point I s'éloigne de plus en plus vers la gauche. A la limite, quand $\omega = \omega'$, $\Omega = 0$ et I est rejeté à l'infini.

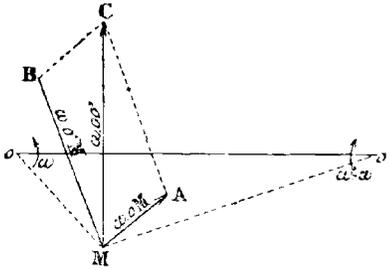


Fig. 172.

Un corps soumis à l'action de deux rotations simultanées égales, parallèles et de sens contraires (on donne à cet ensemble le nom de *couple de rotations*) n'est cependant pas en repos. En se reportant au n° 142, on peut prévoir que son mouvement absolu est une translation perpendiculaire au plan des axes des deux rotations du couple. Nous allons

montrer qu'il en est bien ainsi.

Prenons un point quelconque M dans un plan P perpendiculaire aux axes, et supposons-le invariablement lié au système mobile (fig. 172). A l'instant actuel, ses vitesses simultanées, représentées par les vecteurs $\overline{MA} = \omega \times oM$ et $\overline{MB} = \omega' \times o'M$, sont situées dans le plan P (141) et perpendiculaires respectivement à oM et $o'M$. La vitesse absolue du point M à ce même instant est donc située aussi dans le plan P. Soit \overline{MC} son vecteur représentatif, obtenu d'après la règle du parallélogramme. Les angles $\angle MAC, \angle oM o'$ sont égaux, et les rapports $\frac{AM}{oM}, \frac{AC}{o'M}$ des côtés qui les comprennent ont pour valeur commune ω . Les triangles $oM o', MCA$ sont donc semblables. Par conséquent MC est perpendiculaire à oo' , et aussi au plan des axes. De plus

$$\frac{MC}{oo'} = \frac{AM}{oM} = \omega$$

d'où l'on déduit

$$MC = \omega \times oo' = \text{constante.}$$

Les vitesses absolues de tous les points du système sont donc égales et parallèles, ce qui caractérise le mouvement de translation. Observons de plus que leur valeur commune est $\omega \times oo'$, et qu'elles sont perpendiculaires au plan des axes. En résumé :

Un couple de rotations équivaut à une translation dont la vitesse est, à chaque instant, perpendiculaire au plan des axes, égale au produit de leur distance par la vitesse angulaire commune des deux rotations du couple, et dirigée dans le sens où chacune de ces rotations tend à faire tourner l'axe de l'autre.

Inversement, une translation de vitesse V peut toujours être remplacée, d'une infinité de manières, par un couple de rotations. Il suffit :

1° Que le plan des axes soit perpendiculaire à la direction de la vitesse V de la translation ;

2° Que la distance a des axes soit liée à la vitesse angulaire ω des deux rotations par la relation $\omega a = V$;

3° Que les sens des deux rotations soient tellement choisis que chacune d'elles tende à faire tourner l'axe de l'autre dans le sens de la translation.

249. Composition d'un nombre quelconque de rotations parallèles.

1° Toutes les rotations sont de même sens.

Soient O, O', O'', O''' ... les pieds de leurs axes sur un plan P perpendiculaire à leur direction commune, et $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$... leurs vitesses angulaires; en composant les rotations données de proche en proche, on reconnaît aisément que le mouvement absolu est une rotation parallèle aux rotations composantes, de même sens qu'elles, dont la vitesse angulaire Ω est égale à $\omega + \omega' + \omega'' + \omega'''$... Le problème serait résolu si nous pouvions déterminer le point I où son axe rencontre le plan P. Nous calculerons ses coordonnées (X, Y) par rapport à un système d'axes rectangulaires xoy situé dans ce plan (fig. 173).

Désignons par $(x, y), (x', y'), (x'', y''), (x''', y''')$... les coordonnées des points O, O', O'', O''' . Les rotations ω et ω' se composent en une rotation Ω_1 , égale à leur somme, dont l'axe est projeté sur le plan P en un point I_1 de OO' déterminé par la relation

$$\frac{I_1O}{I_1O'} = \frac{\omega'}{\omega}$$

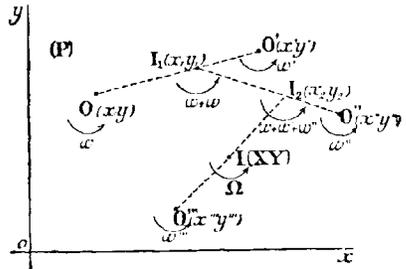


Fig. 173.

En appliquant des formules connues de Géométrie analytique, on trouve que les coordonnées (x_1, y_1) de I_1 sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{\omega x + \omega' x'}{\omega + \omega'} \\ y_1 = \frac{\omega y + \omega' y'}{\omega + \omega'} \end{array} \right.$$

Les rotations Ω_1 et ω'' se composent à leur tour en une rotation Ω_2 égale à leur somme, et les coordonnées (x_2, y_2) de son pied I_2 sur le plan P sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{\Omega_1 x_1 + \omega'' x''}{\Omega_1 + \omega''} = \frac{\omega x + \omega' x' + \omega'' x''}{\omega + \omega' + \omega''} \\ y_2 = \frac{\Omega_1 y_1 + \omega'' y''}{\Omega_1 + \omega''} = \frac{\omega y + \omega' y' + \omega'' y''}{\omega + \omega' + \omega''} \end{array} \right.$$

et ainsi de suite. Les coordonnées du point I seront, par analogie

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{\omega x + \omega' x' + \omega'' x'' + \omega''' x''' + \dots}{\omega + \omega' + \omega'' + \omega''' + \dots} = \frac{\Sigma \omega x}{\Sigma \omega} \\ Y = \frac{\omega y + \omega' y' + \omega'' y'' + \omega''' y''' + \dots}{\omega + \omega' + \omega'' + \omega''' + \dots} = \frac{\Sigma \omega y}{\Sigma \omega} \end{array} \right.$$

2° Les rotations composantes ne sont pas toutes de même sens.

On compose d'abord toutes les rotations d'un même sens en une seule égale à leur somme. On obtient ainsi deux rotations, de vitesses angulaires $\Sigma\omega_1$ et $\Sigma\omega_1'$, s'effectuant en sens contraires autour des axes projetés en I_1 et I_1' sur le plan de la figure. Les coordonnées (X_1, Y_1) , (X_1', Y_1') de ces points sont données par les formules du cas précédent, et l'on est ramené à la composition de deux rotations parallèles et de sens contraires.

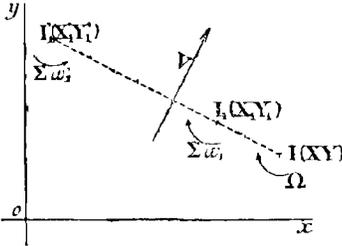


Fig. 174.

Si $\Sigma\omega_1 \neq \Sigma\omega_1'$, le mouvement résultant est une rotation, dont le sens est celui de la plus grande des deux sommes, s'effectuant autour d'un axe dont la projection I sur le plan de la figure partage $I_1 I_2$ en segments soustractifs inversement proportionnels à $\Sigma\omega_1$ et $\Sigma\omega_1'$. Les coordonnées (X, Y) du point I sont

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \frac{X_1 \Sigma\omega_1 - X_1' \Sigma\omega_1'}{\Sigma\omega_1 - \Sigma\omega_1'} \\ Y &= \frac{Y_1 \Sigma\omega_1 - Y_1' \Sigma\omega_1'}{\Sigma\omega_1 - \Sigma\omega_1'} \end{aligned} \right.$$

Si $\Sigma\omega_1 = \Sigma\omega_1'$, le mouvement résultant est une translation perpendiculaire au plan des axes I_1 et I_1' , dont la vitesse a pour expression $V = I_1 I_1' \times \Sigma\omega_1$, et dont le sens est indiqué sur la figure. Le problème est donc complètement résolu.

§ III. — Composition d'une rotation et d'une translation perpendiculaire à l'axe de la rotation.

220. Un système invariable possède, à l'instant quelconque t , un mouvement de rotation, de vitesse angulaire ω , autour de l'axe projeté en o sur un plan P auquel il est perpendiculaire (fig. 175). Cet axe et tout le système sont entraînés dans un mouvement de translation, dont la vitesse V est représentée par un vecteur \overline{AB} situé dans le plan P. Proposons-nous de déterminer le mouvement absolu du système.

Chacun des mouvements composants étant parallèle au plan P, le mouvement absolu est aussi parallèle à ce plan. Il revient donc, à l'instant t , à une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, dont le pied I est caractérisé par cette propriété que, si on le suppose invariablement relié au système mobile, sa vitesse absolue est nulle. Le point I se trouve nécessairement sur la perpendiculaire oz à AB et, d'après les directions respectives de ω et de V , à gauche du point o , car les points ainsi placés sont les seuls auxquels le mouvement de rotation imprime une vitesse parallèle à V , et de sens contraire. La distance oI est déterminée par la relation

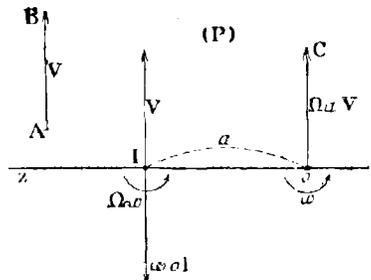


Fig. 175.

$$\omega \times oI = V$$

qui exprime l'égalité des deux vitesses simultanées du point I. On a donc

$$oI = a = \frac{V}{\omega} \quad (*)$$

La connaissance de oI fixe la position de l'axe de la rotation résultante.

Soit Ω la vitesse angulaire de cette rotation. En considérant le point o comme invariablement relié au système mobile, sa vitesse absolue, perpendiculaire à oz , a pour expression Ωa , et résulte de la composition de deux vitesses simultanées dont l'une, due à la rotation ω , est nulle, et dont l'autre, qui provient du mouvement de translation, est $V = \overline{oC}$. On a donc

$$\Omega a = \text{résultante de } \begin{cases} 0 \\ V = \overline{oC} \end{cases}$$

d'où, en grandeur et en signe

$$\Omega a = V = \overline{oC}$$

Il en résulte d'abord que les rotations Ω et ω sont de même sens. De plus

$$\Omega = \frac{V}{a}$$

et puisque

$$a = \frac{V}{\omega}$$

$$\Omega = \omega$$

Par conséquent : *Le mouvement absolu, résultant d'une rotation ω et d'une translation V perpendiculaire à l'axe de la rotation, est une rotation, égale à la première et de même sens qu'elle. L'axe s'est déplacé parallèlement à lui-même d'une quantité $a = \frac{V}{\omega}$, dans un plan perpendiculaire à V , et dans un sens tel, que la nouvelle rotation imprime à l'axe de l'ancienne une vitesse parallèle à celle de la translation.*

(*) Dans les applications de cette formule, il faut bien observer que ω , V et a doivent être rapportés à des unités correspondantes de longueur et de temps. Si, par exemple, $V = 10$ centimètres par seconde, et si ω correspond à 50 tours par minute, on devra, en prenant la minute et le centimètre pour unités, remplacer V par 600 c/m et ω par 100π , ce qui donne :

$$a = \frac{600}{100 \pi} = \frac{6}{\pi} \text{ c/m.}$$

En prenant pour unités le mètre et la seconde, on aurait

$$V = 0,1 \text{ m}; \quad \omega = \frac{50 \pi}{30} = \frac{\pi}{3}$$

et
$$a = \frac{3 \times 0,1}{5 \pi} = \frac{0,3}{5 \pi} \text{ mètres} = \frac{30}{5 \pi} \text{ centimètres} = \frac{6 \text{ c/m}}{\pi}.$$

On peut encore arriver à ce résultat en remplaçant la translation par un couple de rotations tel que le plan des deux axes soit perpendiculaire à V (218), que l'une des rotations du couple s'effectue autour de l'axe o , et que la vitesse angulaire soit égale à ω , mais dirigée en sens contraire. On sait que la distance $oI = a$ des axes doit être telle que $\omega a = V$, et que chacune des rotations du couple doit tendre à faire tourner l'axe de l'autre dans le sens de V . Cette transformation étant effectuée (fig. 176), récapitulons les divers mouvements simultanés que possède le système mobile. La translation V a été remplacée par le couple de rotations ($\omega - \omega$) autour des axes I et o . Les deux rotations ω et $-\omega$ qui s'exécutent autour de l'axe o se détruisent mutuellement. La rotation ω autour de l'axe I subsiste seule, et représente le mouvement absolu. La conclusion est la même que par la méthode directe.

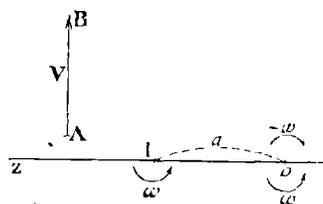


Fig. 176.

Réciproquement, la rotation ω qui s'effectue autour de l'axe I peut être remplacée par une rotation égale, autour de l'axe o , composée avec la translation V . On peut énoncer cette réciproque de la façon suivante :

Une rotation ω s'effectuant autour d'un axe I peut être transportée parallèlement à elle-même autour d'un axe o , à la condition de lui ajouter une translation $V = \omega \times oI$ perpendiculaire au plan des deux axes, et dirigée dans le sens où la première rotation tend à faire tourner l'axe de la seconde.

§ IV. — Composition des rotations concourantes.

221. Un système invariable tourne, à un instant quelconque t , avec une vitesse angulaire ω , autour d'un axe ox , en même temps que cet axe et tout le système sont entraînés dans un mouvement de rotation, de vitesse angulaire ω' , autour d'un axe oy qui rencontre le premier. Nous nous proposons de déterminer le mouvement absolu du système.

Prenons pour plan de la figure celui des vecteurs représentatifs \overline{oA} et \overline{oB} (fig. 177) des deux rotations simultanées. Le point o restant fixe dans chacun des mouvements

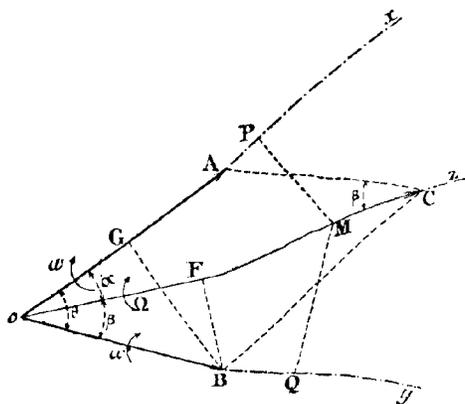


Fig. 177.

vitesse simultanées perpendiculaires au plan xoy . Celle qui est due à la rotation

composants, le mouvement absolu ne peut être qu'un pivotement autour de ce point, et revient, à l'instant t , à une rotation autour d'un certain axe oz (191). Nous allons démontrer que le vecteur représentatif de cette rotation est \overline{oC} , diagonale du parallélogramme construit sur \overline{oA} et sur \overline{oB} .

1^o La droite indéfinie oC est l'axe de la rotation résultante.

Il suffit, pour l'établir, de prouver que tous les points de oC , considérés comme invariablement reliés au système en mouvement, ont une vitesse nulle, et qu'ils sont les seuls à jouir de cette propriété.

La vitesse absolue d'un point quelconque M de oC est la résultante de deux

$\omega = \overline{oA}$ est dirigée en avant du plan, et sa valeur est $\omega \times MP$; l'autre, due à la rotation $\omega' = \overline{oB}$, est dirigée en arrière du plan xoy , et sa valeur est $\omega' \times MQ$. Or, on a

$$MP = oM \sin \alpha$$

$$MQ = oM \sin \beta$$

et par conséquent

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AC}{oA} = \frac{\omega'}{\omega}$$

d'où l'on tire

$$\omega \times MP = \omega' \times MQ.$$

Il résulte de là que, à l'instant considéré, la vitesse absolue du point M, ainsi que celle de tout autre point de oC , est nulle. Aucun autre point de l'espace, hors de oC , ne jouit de cette propriété au même instant. Car, si le point M était extérieur au plan xoy , les composantes de sa vitesse absolue, respectivement perpendiculaires aux plans xoM et yoM , feraient entre elles un certain angle, et si ce point était pris dans le plan des axes, mais à l'extérieur de l'angle xoy ou de son opposé par le sommet, les composantes de sa vitesse auraient même sens. Dans aucun de ces cas, la vitesse absolue du point M ne saurait être nulle. La direction de l'axe de la rotation résultante est donc bien oC .

2° \overline{oC} est le vecteur représentatif de la rotation résultante.

Soit Ω la vitesse angulaire de cette rotation; pour la déterminer, remarquons que la vitesse absolue $\Omega \times BF$ du point B, considéré comme invariablement lié au système mobile, est la résultante de deux vitesses simultanées dont l'une, due à la rotation ω , est dirigée en avant du plan xoy , et a pour expression $\omega \times BG$, tandis que l'autre, due à la rotation ω' , est nulle :

$$\Omega \times BF = \text{résultante de } \begin{cases} \omega \times BG \text{ perpendiculaire au plan } xoy, \text{ vers l'avant} \\ 0 \end{cases}$$

On doit donc avoir, en grandeur et en direction

$$\Omega \times BF = \omega \times BG$$

Il est nécessaire, pour cela, que la rotation Ω entraîne le point B en avant du plan xoy , c'est-à-dire que son vecteur représentatif soit dirigé dans le sens \overline{oC} . De plus, l'égalité précédente donne

$$\Omega = \frac{\omega \times BG}{BF} = \frac{oA \times BG}{BF} = \frac{\text{aire } oACB}{BF} = \omega'$$

En résumé : *Le mouvement absolu résultant de deux rotations concourantes est une rotation, dont le vecteur représentatif est la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs représentatifs des rotations composantes.*

Inversement, on peut décomposer une rotation en deux autres dont les axes sont deux droites concourantes données, à condition que leur point de rencontre soit situé sur l'axe de la rotation primitive, et que le plan qu'elles forment contienne cet axe. On est ramené à la construction d'un parallélogramme, dans lequel on connaît une diagonale et les directions des côtés. Ce problème et le précédent sont résolus par des formules algébriques analogues à celles des nos 86 et 87.

222. Composition d'un nombre quelconque de rotations concourantes.

On établit facilement, en composant les rotations données de proche en proche, que : *Le mouvement absolu résultant de plusieurs rotations simultanées dont les axes concourent en un point o, est une rotation autour d'un axe passant par ce point, dont le vecteur représentatif est la résultante du polygone construit sur les vecteurs représentatifs des rotations composantes.*

§ V. — *Composition de deux rotations dont les axes ne sont pas situés dans un même plan.*

223. Soient $\overline{oA} = \omega$ et $\overline{o'B} = \omega'$ les vecteurs représentatifs des deux rotations données (*). Menons par o' le vecteur $\overline{o'A'}$, égal en valeur absolue et parallèle à \overline{oA} (fig. 178), mais dirigé en sens contraire, et décomposons la rotation $\overline{o'B}$ en deux autres, $\overline{o'A'}$ et $\overline{o'C}$, en construisant le parallélogramme $o'A'BC$. Le couple constitué par les rotations \overline{oA} et $\overline{o'A'}$ équivaut à une translation perpendiculaire au plan $oA o'A'$, dont la vitesse V , dirigée dans le sens de la flèche, est égale à ωa , en désignant par a la distance DE des deux axes (218). La question est ainsi ramenée à la composition d'une rotation Ω , représentée par le vecteur $\overline{o'C}$, avec une translation V , dont la direction est

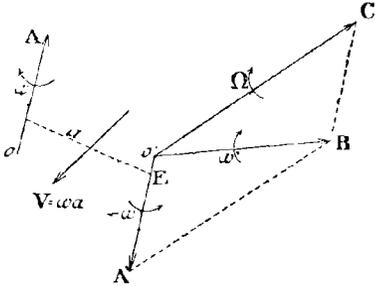


Fig. 178.

quelconque par rapport à l'axe de la rotation (**).

Cherchons à résoudre ce nouveau problème.

§ VI. — *Composition d'une rotation et d'une translation dont la direction est quelconque par rapport à l'axe de la rotation.*

224. Soient $\Omega = \overline{o'C}$ et $V = \overline{MN}$ (fig. 179) la rotation et la translation données (***) . Nous pouvons toujours supposer que le vecteur \overline{MN} ait son origine dans le plan R mené par o' perpendiculairement à la direction $\overline{o'C}$ (210). Menons MS parallèle à $\overline{o'C}$, déterminons la trace ML du plan SMN sur le plan R , et décomposons la translation V en deux autres $V_1 = \overline{MP}$, $V_2 = \overline{MQ}$ dirigées respectivement suivant ML et MS . La translation V_1 , qui est perpendiculaire à l'axe de la rotation $\Omega = \overline{o'C}$, se compose avec elle en donnant une rotation égale, dont l'axe $\overline{o''C'}$, parallèle à $\overline{o'C}$, a son pied o'' sur la perpendiculaire $\overline{o'U}$ à ML . La distance $o'o'' = a$ est déterminée par la relation $a = \frac{V_1}{\Omega}$, et le sens dans lequel elle est

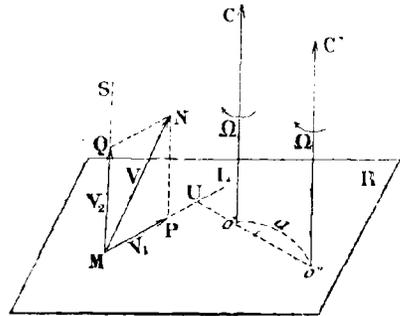


Fig. 179.

portée sur $o'V$ est tel que la rotation $\overline{o''C'}$ tende à faire tourner le point o' dans la direction V_1 (220). Les mouvements qui agissent sur le système mobile se réduisent alors à une

(*) L'énoncé rigoureux de la question est analogue à celui du n° 221.

(**) Les directions V et $\overline{o'C}$ ne sont pas perpendiculaires, sans quoi $o''C'$ serait dans le plan $oA o'A'$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Le problème ne se ramène donc pas au cas traité au n° 220.

(***) L'énoncé rigoureux de la question est analogue à celui du n° 220.

rotation Ω autour de l'axe $o''C'$, combinée avec une translation V_2 parallèle à cet axe. Une telle association de mouvements est irréductible. Le mouvement absolu qui en résulte est *hélicoïdal*, et la droite $o''C'$ est l'axe instantané glissant du système à l'instant considéré.

225. Remarque. — Cette question et la précédente montrent que les deux modes de décomposition du mouvement élémentaire le plus général d'un système invariable, qui ont été étudiés aux nos 200 et 204, se ramènent l'un à l'autre.

§ VII. — Problème général de la composition des mouvements simultanés.

226. Un système invariable S possède, par rapport à un système de comparaison A , un mouvement relatif qui revient, à l'instant t considéré, à une translation $v = \overline{MN}$ et à une rotation $\omega = \overline{MP}$ (fig. 180). A est entraîné relativement à un second système de comparaison B , et son mouvement revient, à l'instant t , à une translation $v' = \overline{M'N'}$ et à une rotation $\omega' = \overline{M'P'}$, etc... On se propose de déterminer le mouvement de S , à l'instant t , par rapport à un système de comparaison entièrement fixe.

Soit o un point quelconque de l'espace. La rotation $\omega = \overline{MP}$ peut être transportée parallèlement à elle-même en op , à la condition de lui ajouter une translation v , de grandeur et de direction parfaitement définies. En procédant de même pour les rotations $\omega' = \overline{M'P'}$, $\omega'' = \overline{M''P''}$... on voit que le mouvement absolu de S à l'instant t résulte de la coexistence :

1° D'une série de rotations concourantes $\omega = \overline{op}$, $\omega' = \overline{o'p'}$, $\omega'' = \overline{o''p''}$... qui se composent en une seule, $\Omega = \overline{o\alpha}$, d'après la règle du polygone.

2° D'une série de translations $v, v', v'', \dots v_1, v_2, v_3, \dots$ dont on peut transporter les vecteurs représentatifs, parallèlement à eux-mêmes, en un point quelconque o_1 . Elles se composent alors en une seule, $V = \overline{o_1\beta}$.

Tout se passe donc en réalité comme si S était animé à l'instant t , dans le système de comparaison fixe, de la translation V et de la rotation Ω . Le mouvement absolu est, par conséquent, hélicoïdal, et son axe instantané glissant s'obtient comme on l'a indiqué au n° 224.

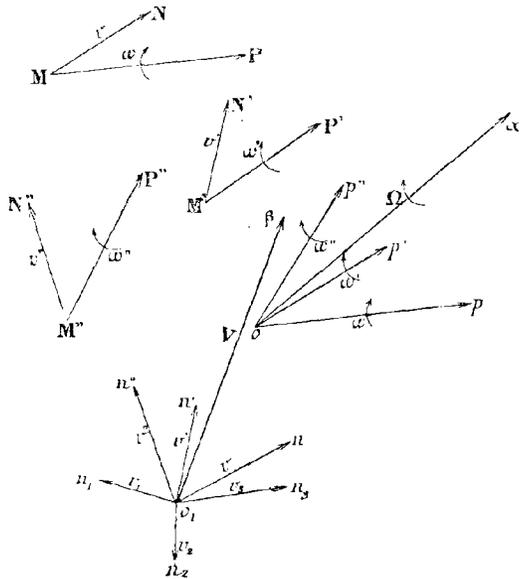


Fig. 180.

MOUVEMENT RELATIF DE DEUX SYSTÈMES INVARIABLES

227. Deux figures invariables S et S' étant en mouvement dans l'espace, supposons qu'un système de coordonnées $oxyz$ soit invariablement relié à l'une d'elles, S par exemple ; le mouvement de S dans ce système de comparaison mobile est appelé *mouvement relatif de S' par rapport à S* . C'est celui qu'apercevrait un observateur entraîné par S et regardant S' .

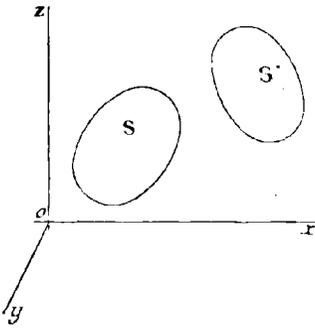


Fig. 181.

On facilite l'étude du mouvement relatif en appliquant le principe suivant, déjà utilisé dans la Cinématique du point matériel :

Le mouvement relatif de deux systèmes n'est pas altéré lorsqu'on imprime à leur ensemble un mouvement d'entraînement commun.

Le mouvement absolu de S revient, à un instant quelconque t , dans le cas le plus général, à une translation et à une rotation simultanées, représentées

par les vecteurs $v = \overline{oA}$ et $\omega = \overline{oB}$. Celui de S' revient, au même instant, à une translation et à une rotation simultanées, représentées par les vecteurs $v' = \overline{o'A'}$ et $\omega' = \overline{o'B'}$. Si l'on imprime à l'ensemble des deux figures un mouvement additionnel égal et contraire au mouvement absolu de la figure S , cette dernière est ramenée au repos, ainsi que le système d'axes $oxyz$, et le mouvement de la figure S' par rapport à ce système résulte de la composition des mouvements simultanés, représentés par les deux groupes de vecteurs : $\overline{oA_1} = -v$, $\overline{oB_1} = -\omega$ d'une part, $\overline{o'A'} = v'$, $\overline{o'B'} = \omega'$ d'autre part. Il se ramène (226) à une translation $V = \overline{o\alpha}$, $\Omega = \overline{o'\beta}$, et constitue le mouvement relatif cherché.

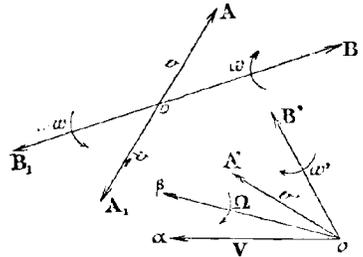


Fig. 182.

Par conséquent : *Le mouvement relatif d'une figure S' par rapport à une figure S peut être considéré comme résultant de la composition du mouvement absolu de S' et d'un mouvement d'entraînement égal et contraire au mouvement absolu de S .*

223. **Des diverses formes que peut prendre le mouvement relatif de deux systèmes invariables.** — Il y a lieu de distinguer deux cas, selon que les systèmes ont un seul point commun, ou plusieurs.

a) Supposons d'abord que S et S' soient, à un instant t , tangents en un point unique I . Après l'addition d'un mouvement d'entraînement commun égal et contraire au mouvement absolu de S , ce corps est ramené au repos, et le mouvement relatif de S' par rapport à S rentre dans l'une des formes suivantes :

1° C'est un *pivotement* autour du point I , si celui-ci reste fixe sur les deux corps. Le mouvement relatif de S' par rapport à S revient, à chaque instant, à une rotation autour de la normale commune aux deux surfaces en contact. (Exemple : Mouvement relatif du croisillon du joint de Cardan par rapport à chaque axe).

2° C'est un *glissement simple* si le point I reste immobile sur l'une des surfaces, et décrit sur l'autre une ligne C (fig. 183). Le mouvement relatif de S' par rapport à S se ramène, à chaque instant, à une rotation autour d'un axe passant par I , combinée avec une translation dont la direction est celle de la tangente en I à la courbe C . C'est donc un mouvement hélicoïdal. (Exemple : Mouvement relatif de l'outil d'un tour par rapport à la pièce).

3° C'est un *roulement simple* si le point I parcourt sur chaque figure des chemins égaux. Ses positions successives forment sur S et S' des courbes C et C' tangentes en I , et, dans le mouvement de S' , la courbe C' roule sans glisser sur la courbe C (fig. 184). A chaque instant, le mouvement relatif de S' par rapport à S revient à une rotation autour d'un axe Ix situé dans le plan tangent commun, et normal à la fois aux courbes C et C' . (Exemple : Mouvement relatif de deux circonférences tangentes, tournant autour de leurs centres, avec des vitesses angulaires inversement proportionnelles à leurs rayons).

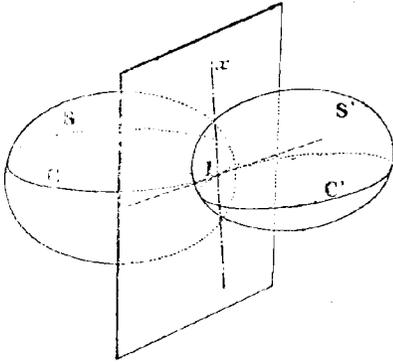


Fig. 183.

4° C'est un *mouvement mixte de roulement et de glissement* si le point I se déplace sur les deux corps, mais ne parcourt pas sur chacun d'eux des chemins égaux. Ses positions successives forment encore sur S et S' , des courbes C et C' . On dit que le glissement mixte est *tangentiel* quand les tangentes à C et C' en I sont confondues, et qu'il est *angulaire* si ces tangentes sont distinctes.

Dans chacun de ces cas, le mouvement relatif de S' par rapport à S est, à chaque instant, composé d'une rotation et d'une translation simultanées, dont la première produit le roulement et l'autre le glissement. Les profils des dents de deux roues d'engrenage en offrent un exemple.

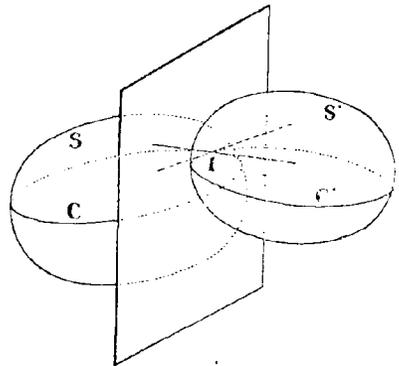


Fig. 185.

b) Si les deux systèmes ont plusieurs points de contact, on peut appliquer les considérations qui précèdent en envisageant chacun d'eux en particulier. Mais la nature du mouvement relatif varie généralement quand on passe d'un point de contact à un autre. Il en est ainsi, par exemple, dans le système de meules, utilisé pour le broyage des corps, qui est constitué par une cuvette plane S, sur laquelle roulent deux cylindres S' et S₁, mobiles autour de leur axe commun yy'. Ce système est employé de deux façons différentes, selon que la cuvette est fixe ou mobile. Dans le premier cas, l'axe xx' qui la traverse est solidaire de celui des meules (fig. 186), de sorte que ces dernières tournent autour de leur axe yy' pendant que celui-ci est entraîné

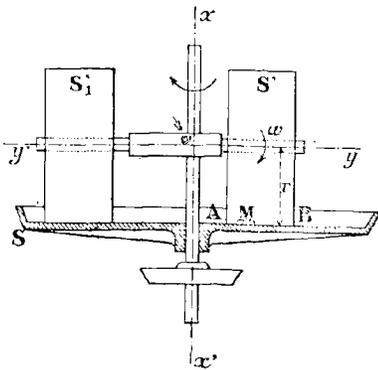


Fig. 186.

dans un mouvement de rotation autour de xx'. Dans le second cas, l'axe xx' communique son mouvement à la cuvette, et une disposition particulière l'empêche d'entraîner avec lui l'axe des meules. Le frottement qui s'exerce entre celles-ci et la surface de la cuvette les contraint à tourner autour de yy'. Dans la recherche du mouvement relatif des meules par rapport à la cuvette, il n'y a d'ailleurs pas lieu de distinguer ces deux cas l'un de l'autre, puisqu'on peut ramener le second au premier en communiquant à tout le système un mouvement égal et contraire à celui de S autour de xx'.

Considérons en particulier la meule S', et soit AB sa génératrice de contact avec la cuvette supposée fixe. Les vitesses des divers

points de AB sont égales. Par conséquent, si au point M de cette droite le mouvement relatif de S' par rapport à S est un roulement simple, il sera nécessairement compliqué de glissement partout ailleurs. Pour un point de AB situé à droite de M, l'espace parcouru sur la meule est moindre que celui qui est parcouru sur la cuvette ; c'est le contraire pour un point situé à gauche de M. Cette propriété aide au bon fonctionnement de l'appareil, parce qu'elle produit un mélange de la matière qui lui est offerte.

229. Remarque. — Cherchons à quelles conditions il y a roulement simple en tout point de contact des deux solides. Si l'on envisage un de ces points en particulier, le mouvement relatif du système mobile S' revient, pendant un temps infiniment petit, à une rotation instantanée autour d'une droite passant par ce point. Cette droite étant l'axe instantané de rotation de tout le système à l'instant considéré, doit rester invariable quand on passe d'un point de contact à un autre ; cela ne peut évidemment avoir lieu que si elle les contient tous. Donc, pour que le mouvement relatif de S' par rapport à S puisse être un roulement simple sur S, il est nécessaire, (mais pas suffisant, comme le montre l'exemple précédent), que les deux surfaces en contact soient réglées. C'est ce qui a lieu, par exemple, quand un cylindre roule sur un autre cylindre à génératrices parallèles ; ou quand un cône roule sur un autre cône de même sommet.

230. Exemples. I. — *Mouvement relatif du chariot d'un tour à fileter, par rapport à la pièce à façonner.*

Le mouvement absolu de la pièce S est une rotation, de vitesse angulaire ω , autour de l'axe Z déterminé par les pointes du tour ; celui du chariot S' est une translation, de vitesse V, parallèle à Z. Imprimons aux deux corps un mouvement égal et contraire au mouvement absolu de la pièce, afin de ramener celle-ci au repos. Le mouvement relatif du chariot se compose alors :

1° D'une rotation autour de l'axe Z, de vitesse angulaire ω_1 égale à ω , mais orientée en sens contraire (Mouvement additionnel).

2° D'une translation V parallèle à Z (Mouvement absolu du chariot).

Cette combinaison, déjà rencontrée à la fin du paragraphe 224, ne peut se ramener à aucune autre plus simple. Elle produit un *mouvement hélicoïdal*. Le pas H des hélices tracées à la surface de la pièce est égal au chemin parcouru par le chariot, sous l'influence de la translation, pendant que la pièce fait un tour soit

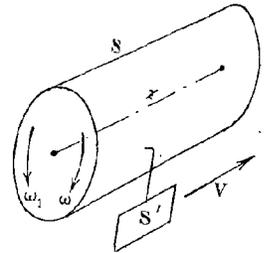


Fig. 187.

$$H = V \times \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \times \frac{V}{\omega}$$

Il ne dépend pas du rayon de la pièce, mais seulement du rapport $\frac{V}{\omega}$.

II. — Principe relatif à la détermination de la forme des aubes, dans les roues hydrauliques et les turbines.

Le mouvement absolu de la roue S est une rotation, de vitesse angulaire ω , autour

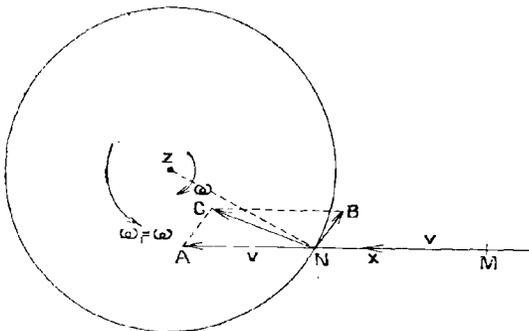


Fig. 187 bis.

de l'axe horizontal Z, perpendiculaire au plan de la figure. Une molécule d'eau parcourt, avec la vitesse v du courant, la trajectoire rectiligne Mx. Nous nous proposons de déterminer quelle direction il faut donner aux aubes pour que, à son arrivée en N, la molécule d'eau pénètre dans la roue sans choc.

Observons d'abord que, si la roue restait immobile, cette direction serait évidemment celle de la vitesse $v = \overline{NA}$. Imprimons maintenant à la roue

et à la molécule située en N un mouvement égal et contraire à celui de la roue, qui est ainsi ramenée au repos. La molécule d'eau possède alors deux vitesses simultanées :

1° La vitesse absolue $v = \overline{NA}$.

2° La vitesse due au mouvement additionnel ; elle est représentée par le vecteur $\overline{NB} = \omega \times \overline{ZN}$, perpendiculaire à ZN, dans le sens où la rotation ω_1 tend à entraîner le point N.

La résultante de ces deux vitesses est $v_r = \overline{NC}$.

Au moment de l'entrée de la molécule d'eau dans la roue, les choses se passent donc comme si, la roue étant immobile, la molécule se présentait devant elle avec la vitesse v_r dans le sens \overline{NC} . Par conséquent, le premier élément de l'aube doit être orienté suivant NC pour que l'eau entre sans choc.

III. — Mouvement relatif de deux cylindres.

Deux cylindres de révolution o et o' , tangents le long de la génératrice Ix (fig. 187 ter), tournent autour de leurs axes respectifs oy , $o'y'$, supposés fixes, avec des vitesses angulaires ω et ω' telles qu'il ne se produise aucun glissement. On se propose de chercher la nature du mouvement relatif du cylindre o par rapport au cylindre o' .

Puisqu'il n'y a pas glissement mutuel des deux surfaces, la vitesse linéaire du point I est la même sur chacune d'elles, et, en la désignant par v , on a

$$v = \omega R = \omega' R'$$

d'où $\omega = \frac{v}{R}$ et $\omega' = \frac{v}{R'}$

Communiquons aux deux cylindres un mouvement égal et contraire à celui du cylindre o' , qui est ainsi ramené au repos. Le mouvement que prend le cylindre o résulte de la coexistence :

1° D'une rotation de vitesse angulaire ω autour de l'axe oy (mouvement absolu de o).

2° D'une rotation autour de l'axe $o'y'$, dont la vitesse angulaire ω'' , égale en valeur absolue à ω' , est de sens contraire (mouvement additionnel).

Les deux rotations ω et ω'' sont parallèles et de même sens ; elles se composent en une seule, égale à leur somme

$$\Omega = \omega + \omega'' = v \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

s'effectuant autour d'un axe dont le pied I_1 partage oo' en segments additifs, inversement proportionnels aux vitesses angulaires composantes (214). Par conséquent

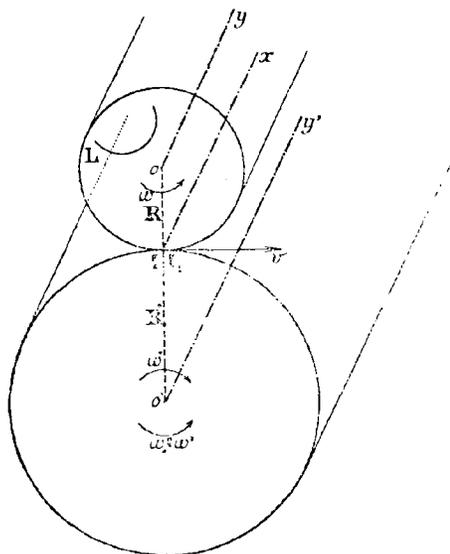


Fig. 187 ter.

$$\frac{o'I_1}{oI_1} = \frac{\omega}{\omega''} = \frac{\left(\frac{v}{R}\right)}{\left(\frac{v}{R'}\right)} = \frac{R'}{R}$$

ce qui prouve que les points I_1 et I sont confondus. Tout se passe donc, à chaque instant, comme si, le cylindre o' restant fixe, le cylindre o tournait autour de la génératrice commune. De là résulte que le mouvement relatif du cylindre o par rapport au cylindre o' est un roulement du premier sur le second, s'effectuant à chaque instant autour de la génératrice de contact, et dont la vitesse angulaire est

$$\Omega = v \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)^{(*)}$$

231. Remarque. — Si la circonférence o est supposée invariablement reliée à une courbe L située dans son plan, le mouvement relatif de celle-ci par rapport à la circonférence o' est, d'après ce qui précède, le même que si, o' restant fixe, o roulait sur elle sans glisser. On peut par conséquent appliquer à L , dans son mouvement relatif, les propriétés démontrées dans l'étude du mouvement épicycloïdal plan d'une courbe invariablement reliée à la roulante (170 et suivants). Cette observation sera utilisée dans la théorie des engrenages.

(*) Cette expression est identique à celle que nous avons établie pour le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe (153).

CHAPITRE IV

DE L'ACCÉLÉRATION TOTALE DANS LA THÉORIE DES MOUVEMENTS SIMULTANÉS

232. La vitesse absolue d'un point animé de deux mouvements simultanés est représentée, dans tous les cas, par la diagonale du parallélogramme construit sur la vitesse relative et la vitesse d'entraînement. Nous allons démontrer que cette propriété ne s'étend à l'accélération totale que si le mouvement d'entraînement de la trajectoire relative est une translation, et que, dans le cas général, l'accélération totale du mouvement absolu n'est pas la résultante des accélérations totales relative et d'entraînement.

Nous distinguerons deux cas.

233. **Premier cas.** — *Le mouvement d'entraînement de la trajectoire relative est une translation.*

Pendant que le point mobile décrit la trajectoire relative AB, sur laquelle il occupe la position M à l'instant t , celle-ci se déplace par un mouvement de translation,

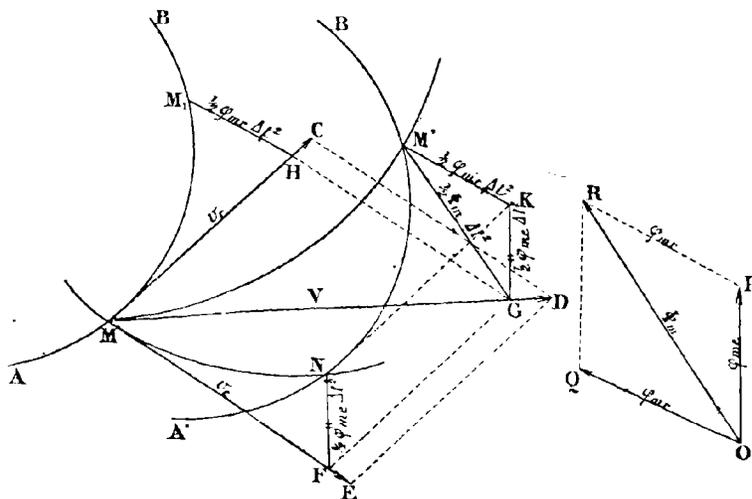


Fig. 188.

de telle manière que la trajectoire d'entraînement du point M soit MN (fig. 188). Si le mouvement d'entraînement n'existait pas, le point mobile prendrait sur AB, à l'instant $t + \Delta t$, une position M_1 ; mais comme, à cet instant, la trajectoire relative est en $A'B'$, la position réelle du mobile est le point M' obtenu en portant l'arc NM' égal à l'arc MM_1 (84). De plus, la vitesse absolue $V = \overline{MD}$ du point M à l'instant t est la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses $v_r = \overline{MC}$, $v_e = \overline{ME}$ des deux mouvements simultanés.

Portons sur \overline{MD} , \overline{MC} , \overline{ME} des vecteurs \overline{MG} , \overline{MI} , \overline{MF} respectivement égaux à $\overline{V} \times \Delta t$, $\overline{v_r} \times \Delta t$ et $\overline{v_e} \times \Delta t$. Le quadrilatère \overline{MIIGF} ainsi formé est un parallélogramme, et les vecteurs \overline{GM} , \overline{HM} , \overline{FN} , mesurent les déviations élémentaires éprouvées par le mobile dans le mouvement absolu et dans les mouvements composants (110). Puisque N est, sur $A'B'$, l'homologue de M sur AB , et que le mouvement d'entraînement est une translation, la tangente en N à $A'B'$ est parallèle à MC . En portant sur cette tangente un vecteur \overline{NK} équipollent à \overline{MI} , on détermine deux vecteurs \overline{KM} et \overline{GK} dont le premier est équipollent à \overline{HM} , puisqu'il représente la déviation élémentaire dans le mouvement relatif, obtenue au moyen de la position $A'B'$ de la trajectoire relative, et dont le second est équipollent à \overline{FN} . Les côtés \overline{GM} , \overline{GK} et \overline{KM} du triangle \overline{GKM} , parcourus dans l'ordre des lettres, sont donc, en grandeur et en direction, les déviations élémentaires du mobile dans le mouvement absolu et dans les mouvements composants.

Soient maintenant

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{mr} &= \frac{2 \overline{KM}}{\Delta t^2} \\ \varphi_{me} &= \frac{2 \overline{GK}}{\Delta t^2} \\ \Phi_m &= \frac{2 \overline{GM}}{\Delta t^2} \end{aligned} \right\}$$

les accélérations totales moyennes de ces trois mouvements pendant le temps Δt . En représentant chacune de ces quantités par un vecteur dirigé dans le sens de la déviation élémentaire correspondante, on forme un triangle \overline{OPR} semblable à \overline{GKM} ,

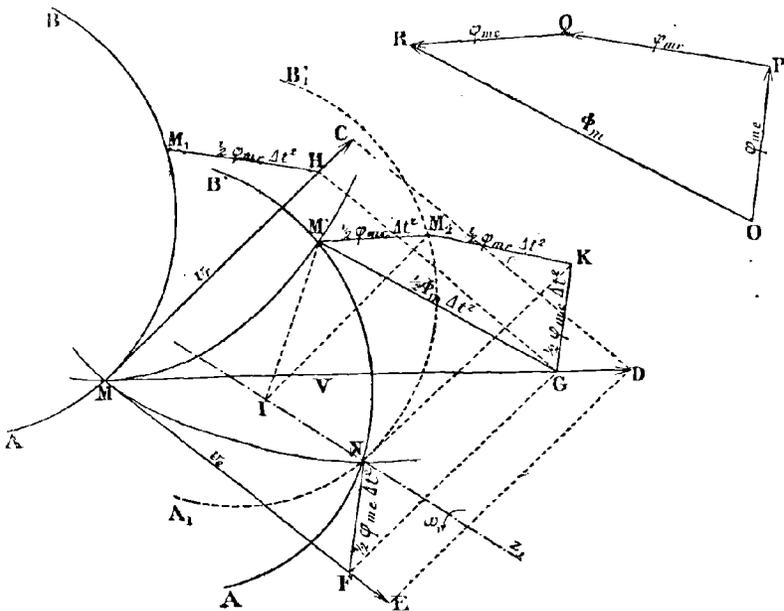


Fig. 189

puisque le rapport des côtés homologues a pour valeur constante $\frac{2}{\Delta t^2}$; Φ_m est donc

la résultante de φ_{mr} et de φ_{mc} . Si l'on fait tendre Δt vers zéro, cette propriété subsiste, mais φ_{mr} , φ_{mc} et Φ_m ont respectivement pour limites les accélérations totales réelles dans les mouvements relatif, d'entraînement et absolu à l'instant t . Par conséquent : *Si le mouvement d'entraînement de la trajectoire relative est une translation, l'accélération totale dans le mouvement absolu est, à chaque instant, la résultante des accélérations totales relative et d'entraînement.*

234. Deuxième cas. — *Le mouvement d'entraînement de la trajectoire relative est quelconque. — Théorème de Coriolis.*

Soient, comme dans le cas précédent. M et M' les positions du point mobile aux instants t et $t + \Delta t$ sur la trajectoire relative qui s'est déplacée de AB en A'B', MCDE le parallélogramme des vitesses à l'instant t , \overline{GM} , $\overline{HM_1}$ et \overline{FN} les vecteurs qui mesurent les déviations élémentaires, pendant le temps Δt , dans le mouvement absolu et dans les mouvements composés.

Puisque le mouvement d'entraînement est quelconque, il revient à chaque instant à une translation et à une rotation simultanées (201). On peut donc imaginer que la trajectoire relative, pour venir de AB en A'B', subisse d'abord une translation, qui l'amène dans la position intermédiaire A_1B_1 , puis une rotation autour d'un axe Nz_1 , convenablement choisi, qui la fait passer de A_1B_1 en A'B'. A la suite de la translation seule, le point M aurait occupé sur A_1B_1 , à l'instant $t + \Delta t$, la position M_2 déterminée par la relation

$$\text{arc } NM_2 = \text{arc } MM_1 = \text{arc } NM'$$

La tangente en N à A_1B_1 est d'ailleurs parallèle à MC, et si l'on porte sur elle un vecteur NK équipollent à \overline{MH} , on obtient, comme dans le premier cas, des vecteurs \overline{GK} et $\overline{KM_2}$ respectivement équipollents à \overline{FN} et $\overline{HM_1}$. Pour amener le mobile à sa position réelle, il reste à le faire tourner autour de Nz_1 avec la trajectoire relative, ce qui lui fait parcourir un arc de cercle M_2M' , dont la tangente en M_2 est normale au plan M_2Nz_1 .

Désignons par φ_{mc} l'accélération totale moyenne qu'aurait un mobile parcourant la corde M_2M' pendant le temps Δt

$$\varphi_{mc} = \frac{2\overline{M_2M'}}{\Delta t^2}$$

et soient comme précédemment

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{mr} = \frac{2\overline{KM_2}}{\Delta t^2} \\ \varphi_{me} = \frac{2\overline{GK}}{\Delta t^2} \\ \Phi_m = \frac{2\overline{GM'}}{\Delta t^2} \end{array} \right.$$

les accélérations totales moyennes, pendant le même temps, dans les mouvements relatif, d'entraînement et absolu. En représentant chacune des quantités φ_{mc} , φ_{mr} , φ_{me} et Φ_m par un vecteur dirigé, pour la première, dans le sens $\overline{M_2M'}$, et, pour les trois autres, dans le sens de la déviation élémentaire correspondante, on forme un polygone OPQR semblable au polygone GKM_2M' , puisque les angles sont conservés, et que le

rapport des côtés homologues a pour valeur constante $\frac{2}{\Delta t^2}$. Φ_m est donc la résultante de φ_{mr} , φ_{me} , φ_{mc} . Si l'on fait tendre Δt vers zéro, φ_{mc} tend vers une limite φ_c qu'on appelle l'accélération complémentaire à l'instant t , tandis que φ_{mr} , φ_{me} et Φ_m deviennent respectivement l'accélération totale relative, d'entraînement et absolue à ce même instant, et la propriété précédente subsiste. Par conséquent : *Lorsque le mouvement d'entraînement de la trajectoire relative est quelconque, l'accélération totale dans le mouvement absolu est, à chaque instant, la résultante des trois accélérations totale relative, d'entraînement et complémentaire, composées suivant la règle du polygone.*

Cette proposition importante constitue le théorème de Coriolis.

235. Grandeur et direction de l'accélération complémentaire.

Puisque, par définition,

$$\varphi_c = \lim \varphi_{mc} = \lim \frac{2 \overline{M_2 M'}}{\Delta t^2}$$

on a aussi

$$\varphi_c = \lim \frac{2 \text{arc } M_2 M'}{\Delta t^2}$$

Soient ω_1 la vitesse angulaire moyenne, pendant le temps Δt , de la rotation qui s'exécute autour de Nz_1 , et $M_2 I$ la distance du point M_2 à cet axe (fig. 190.) On peut écrire

$$\text{arc } M_2 M' = \omega_1 \times IM_2 \times \Delta t$$

D'autre part

$$IM_2 = NM_2 \sin INM_2$$

Par conséquent

$$\text{arc } M_2 M' = \omega_1 \times NM_2 \times \Delta t \times \sin INM_2$$

Et

$$\varphi_c = 2 \lim \frac{\omega_1 \times NM_2 \times \sin INM_2}{\Delta t}$$

$$= 2 \lim \omega_1 \times \lim \frac{NM_2}{\Delta t} \times \lim \sin INM_2$$

Or, quand Δt tend vers zéro, $A_1 B_1$ vient se confondre avec AB , et les points N et M se superposent. La position limite de Nz_1 est l'axe instantané de rotation Mz de la trajectoire relative à l'instant t , dans le mouvement d'entraînement, et la valeur limite de ω_1 est la vitesse angulaire ω de cette rotation ; la

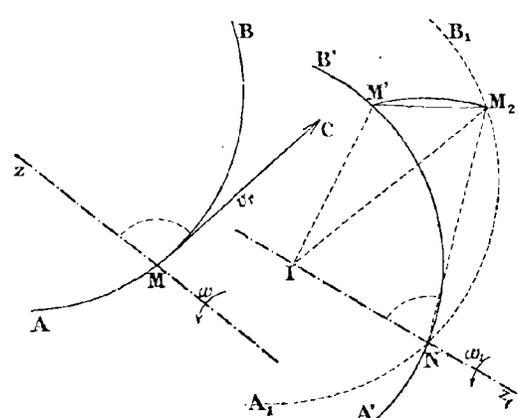


Fig. 190.

limite du rapport $\frac{NM_2}{\Delta t}$ est la vitesse relative $v_r = \overline{MC}$ à l'instant t , et celle de l'angle INM_2 est l'angle (ω, v_r) formé par les directions MC et Mz . On a donc

$$\varphi_c = 2 \omega v_r \sin (\omega, v_r)$$

De plus, la direction de φ_c est la direction limite du vecteur $\overline{M_2 M'}$; elle est donc perpendiculaire à la position limite du plan $M_2 Nz_1$, c'est-à-dire au plan CMz . En résumé :

L'accélération complémentaire est égale, à chaque instant, au double produit de la vitesse relative par la vitesse angulaire de la rotation instantanée du mouvement d'entraînement, et par le sinus de l'angle que forment l'axe de cette rotation et la vitesse relative. Elle est perpendiculaire au plan de cet angle, et dirigée dans le sens où la rotation d'entraînement tend à déplacer la trajectoire relative.

236. L'accélération complémentaire ne peut être nulle que dans les trois cas suivants :

1° Si $\omega = 0$. — Le mouvement d'entraînement se réduit alors, à l'instant t , à une translation. Nous avons montré directement qu'il n'y a pas, dans ce cas, d'accélération complémentaire.

2° Si $v_r = 0$. — A l'instant considéré, le mobile est en repos sur sa trajectoire relative (*), et son mouvement absolu se réduit au seul mouvement d'entraînement.

3° Si $\sin(\omega, v_r) = 0$, c'est-à-dire si l'axe instantané de la rotation d'entraînement est dirigé suivant la tangente à la trajectoire relative.

Dans ces divers cas particuliers, l'accélération totale du mouvement absolu est la résultante des accélérations totales dans le mouvement relatif et dans le mouvement d'entraînement.

237. **Application.** — Accélération totale d'un mouvement plan rapporté à un système de coordonnées polaires.

Le mouvement d'un point, rapporté à un système de coordonnées polaires, peut être considéré comme résultant de la coexistence

d'un mouvement relatif de vitesse $\frac{dr}{dt}$, qui s'effectue sur le rayon vecteur, et d'une rotation d'entraînement autour du pôle, dont la vitesse angulaire est $\frac{d\theta}{dt}$ (81). L'axe de cette rotation est perpendiculaire au plan de la trajectoire, de sorte que l'accélération complémentaire se réduit à

$$\varphi_c = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}$$

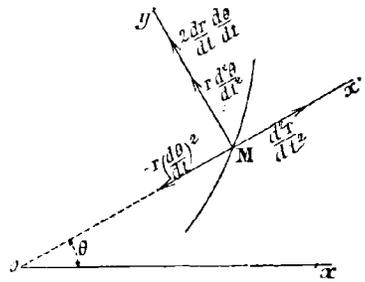


Fig. 191.

Elle est dirigée suivant la perpendiculaire My' au rayon vecteur. Si l'on calcule en outre l'accélération totale dans le mouvement relatif et dans le mouvement d'entraînement, en appliquant les formules du n° 111, on retrouve les composantes de l'accélération totale dans le mouvement absolu, déjà obtenues au n° 131 par une méthode directe.

Fin de la Cinématique théorique

(*) Cela ne signifie pas que l'accélération totale relative est nulle. L'accélération d'un corps pesant, lancé de bas en haut, est toujours g même à l'instant où son mouvement d'ascension s'arrête.

DÉUXIÈME PARTIE

CINÉMATIQUE APPLIQUÉE

GÉNÉRALITÉS

CLASSIFICATION DES MACHINES

238. Définitions. — Considérée au point de vue cinématique, une machine est un instrument destiné à établir entre les mouvements simultanés de deux corps une relation géométrique donnée (Edm. BOUR).

Elle se compose généralement de trois parties distinctes :

1° D'un *récepteur*, sur lequel s'exercent les forces mises en jeu (le piston d'une machine à vapeur, la chaîne d'un palan, la manivelle d'un treuil, etc...)

2° D'un *outil*, qui effectue le travail pour lequel la machine a été conçue (bédane d'une machine à mortaiser, mèche d'une perceuse, etc...)

3° De la *transmission de mouvement*, formée par un ensemble d'organes (engrenages, poulies et courroies, bielles, etc...) partant du récepteur pour aboutir à l'outil, déterminés de manière à donner à celui-ci le genre de mouvement qui convient à l'exécution de son travail. Ces organes constituent la *chaîne cinématique* de la machine. Ils sont assujettis à des *liaisons* (points fixes, axes fixes...) réalisées par l'emploi de pièces appelées *guides de mouvement*, que l'on étudie en technologie. On dit que ces liaisons sont *complètes*, parce qu'elles fixent sans ambiguïté la trajectoire de chaque partie de la chaîne cinématique, et obligent celle-ci à se mouvoir tout entière dès qu'un de ses points entre en mouvement.

Grâce à cette nature des liaisons, il suffit de connaître le mouvement d'un point de la chaîne cinématique pour pouvoir déterminer celui de tous les autres. On peut donc se proposer le problème général suivant.

239. Problème. — La vitesse d'un point de la chaîne cinématique étant donnée, à un instant quelconque, en grandeur et en direction, trouver celle d'un autre point, au même instant.

Ce problème peut être résolu par trois méthodes différentes.

1° **Méthode du déplacement infiniment petit.** — Elle consiste à imprimer à tous les points de la chaîne, à partir de leur position à l'instant considéré t , un déplacement infiniment petit compatible avec les liaisons. Chacun d'eux parcourt, pendant le temps dt , un arc infinitésimal de sa trajectoire, proportionnel à sa vitesse et dans la direction de celle-ci. En appelant v_a la vitesse donnée du point A, v_m la vitesse inconnue du point M, AA' et MM' les arcs décrits par ces points pendant le temps dt , on a

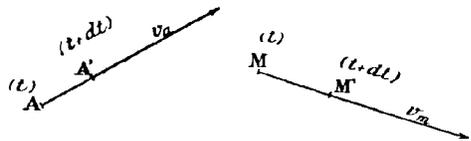


Fig. 192.

$$AA' = v_a dt$$

$$MM' = v_m dt$$

d'où
$$v_m = v_a \times \frac{MM'}{AA'}$$

Or, en raison de l'existence des liaisons, des constructions géométriques variables avec la composition du mécanisme permettent de déterminer MM' en fonction de AA'.

On conçoit donc la possibilité d'évaluer le rapport $\frac{MM'}{AA'}$, ce qui fera connaître v_m (*).

2° **Méthode du déplacement fini.** — On donne à toute la chaîne, à partir d'une position quelconque, un déplacement fini compatible avec les liaisons. Il existe nécessairement entre les espaces $A_oA = s_a$, $M_oM = s_m$ ainsi parcourus par les points A et M (fig. 193) une relation $s_m = f(s_a)$ qui dépend de la constitution du mécanisme. En supposant qu'on ait su la déterminer, que les positions A_o et M_o correspondent à l'instant initial, et les positions A, M à l'époque t , on a, d'après le théorème des fonctions de fonctions :

$$\frac{ds_m}{dt} = f'(s_a) \frac{ds_a}{dt}$$

ou
$$v_m = f'(s_a) v_a$$

Cette égalité donne la grandeur de v_m . Comme sa direction, tangente en M à la trajectoire M_oM , est connue, le problème est entièrement résolu (**).

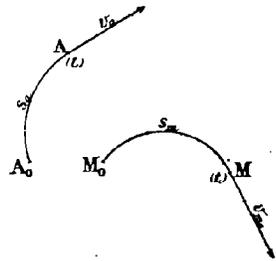


Fig. 193.

3° **Méthode du centre instantané de rotation.** — Il peut arriver que les points considérés appartiennent à une pièce rigide indéformable (une bielle par exemple) en mouvement dans un plan. D'après le théorème de Chasles, le mouvement infiniment petit qui s'exécute à partir de l'instant considéré t revient à une rotation instantanée autour d'un certain point I de ce plan. La vitesse v_m est perpendiculaire à IM, et l'on a

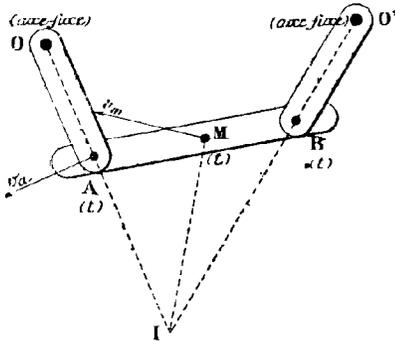


Fig. 194.

$$\frac{v_m}{v_a} = \frac{IM}{IA}$$

d'où
$$v_m = v_a \times \frac{IM}{IA}$$

La liaison entre A et M peut être plus complexe. En la supposant constituée comme sur la figure 195, on cherche d'abord le centre instantané de rotation I de AB, et l'on a

$$\frac{v_b}{v_a} = \frac{IB}{IA} \quad (1)$$

$$\frac{v_c}{v_b} = \frac{c'C}{c'B} \quad (2)$$

En déterminant ensuite le centre instantané de rotation I' de CM, on peut écrire

$$\frac{v_m}{v_c} = \frac{I'M}{I'C} \quad (3)$$

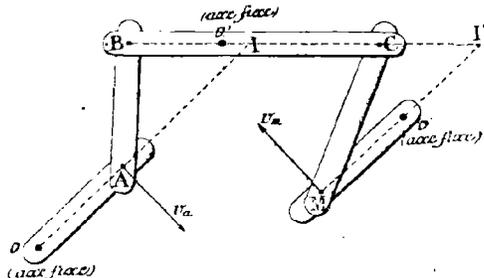


Fig. 195.

(*) Cette méthode s'applique commodément aux mécanismes du premier et du troisième genres. (Voir la Classification des machines).

(**) Nous appliquerons cette méthode dans l'étude cinématique du joint universel.

La multiplication des égalités (1) (2) et (3) donne, après simplifications

$$\frac{v_m}{v_a} = \frac{IB}{IA} \times \frac{o'C}{o'B} \times \frac{IM}{IC}$$

ce qui fait connaître v_m , dont la direction est perpendiculaire à IM (*)

240. Classification des machines, d'après Monge. — Les mouvements les plus divers réalisés dans les machines, considérés d'après la nature de la trajectoire, sont *rectilignes*, ou *circulaires*, ou *curvilignes quelconques*. Chacun d'eux peut être en outre *continu* ou *alternatif*. Si l'on envisage seulement, dans la chaîne cinématique, les mouvements des parties qui sont à ses deux extrémités, on peut dire que l'effet de la machine est de transformer l'un des mouvements fondamentaux en un autre. A ce point de vue, il y a autant de classes de mécanismes qu'il est possible de faire de combinaisons différentes entre les six sortes de mouvements fondamentaux pris deux à deux. En voici la nomenclature :

Transformation du mouvement rectiligne continu en.....	}	rectiligne continu ..	1 ^{re} classe.
		rectiligne alternatif..	2 ^e —
		circulaire continu ..	3 ^e —
		circulaire alternatif .	4 ^e —
		curviligne continu... .	5 ^e —
		curviligne alternatif .	6 ^e —
Transformation du mouvement rectiligne alternatif en.....	}	<i>rectiligne continu</i> ..	déjà cité.
		rectiligne alternatif..	7 ^e —
		circulaire continu... .	8 ^e —
		circulaire alternatif..	9 ^e —
		curviligne continu ..	10 ^e —
		curviligne alternatif .	11 ^e —
Transformation du mouvement circulaire continu en.....	}	<i>rectiligne continu</i>	déjà cité.
		<i>rectiligne alternatif</i> .	—
		circulaire continu... .	12 ^e classe.
		circulaire alternatif .	13 ^e —
		curviligne continu... .	14 ^e —
		curviligne alternatif .	15 ^e —
Transformation du mouvement circulaire alternatif en.....	}	<i>rectiligne continu</i>	déjà cité.
		<i>rectiligne alternatif</i> .	—
		<i>circulaire continu</i>	—
		circulaire alternatif .	16 ^e classe.
		curviligne continu... .	17 ^e —
		curviligne alternatif .	18 ^e —
Transformation du mouvement curviligne continu en.....	}	<i>rectiligne continu</i> ..	déjà cité.
		<i>rectiligne alternatif</i> .	—
		<i>circulaire continu</i> .	—
		<i>circulaire alternatif</i> .	—
		curviligne continu... .	19 ^e classe.
		curviligne alternatif .	20 ^e —

(*) Cette méthode s'applique aux mécanismes du second genre.

Transformation du mouvement curviligne alternatif en.	}	<i>rectiligne continu...</i> déjà cité.
		<i>rectiligne alternatif.</i> —
		<i>circulaire continu...</i> —
		<i>circulaire alternatif.</i> —
		<i>curviligne continu...</i> —
		<i>curviligne alternatif.</i> 21 ^e classe.

Cette classification très simple est généralement abandonnée aujourd'hui. On lui reproche, en particulier, de réunir dans une même classe les mécanismes les plus dissemblables (le pignon et la crémaillère, par exemple, servent, comme le treuil, à la transformation d'un mouvement circulaire continu en rectiligne continu). Nous suivrons dans cet ouvrage la classification de Robert Willis, avec les modifications qu'y a apportées Edm. Bour (*). Elle repose sur les considérations suivantes :

244. Classification des machines, d'après Willis.

1^o Un premier groupement résulte de la distinction entre les mouvements qui, au point de vue géométrique, sont susceptibles de s'exécuter indéfiniment dans le même sens, et ceux dont l'amplitude est géométriquement limitée.

Cette distinction est tout à fait différente de celle qui consiste à séparer les uns des autres les mouvements continus et les mouvements alternatifs. Le mouvement alternatif du pendule, par exemple, n'est pas géométriquement limité ; celui de la tige d'un excentrique à cadre l'est au contraire.

2^o Chacune des catégories ainsi déterminées est dédoublée en deux autres, suivant que le rapport des vitesses à un instant donné est constant ou variable.

3^o Enfin, chaque classe résultant de l'application des deux sortes de considérations précédentes se décompose en trois genres, suivant la nature de l'agent qui assure la liaison des vitesses (contact direct, lien rigide ou lien flexible).

Ces principes, appliqués dans l'ordre que nous venons d'exposer, permettent de résumer la classification des machines de la façon suivante :

Mouvements qui, au point de vue géométrique, peuvent se poursuivre indéfiniment dans le même sens.	}	<i>Rapport constant des vitesses</i> (I ^{re} classe)	{	1 ^o Contact direct 1 ^{er} Genre
				2 ^o Lien rigide . 2 ^e Genre
				3 ^o Lien flexible . 3 ^e Genre
	}	<i>Rapport variable des vitesses</i> (II ^e classe)	{	1 ^o Contact direct 1 ^{er} Genre
				2 ^o Lien rigide .. 2 ^e Genre
				3 ^o Lien flexible 3 ^e Genre
Mouvements dont l'amplitude est géométriquement limitée, l'un d'eux au moins changeant de sens périodiquement.	}	<i>Rapport constant des vitesses</i>	{	1 ^o Contact direct 1 ^{er} Genre
				2 ^o Lien rigide .. 2 ^e Genre
				3 ^o Lien flexible. 3 ^e Genre
	}	<i>Rapport variable des vitesses</i>	{	1 ^o Contact direct 1 ^{er} Genre
				2 ^o Lien rigide .. 2 ^e Genre
				3 ^o Lien flexible. 3 ^e Genre

En raison de ce que les mouvements d'étendue géométriquement limitée qui s'effectuent avec rapport constant des vitesses sont très rares (Came en cœur), il n'y a pas

(*) Cours de mécanique et machines, professé à l'École polytechnique. Gauthier-Villars, éditeur.

lieu de les séparer des autres ; on est ainsi ramené à distinguer trois classes générales de mécanismes, et dans chacune d'elles trois genres. Le tableau synoptique suivant renferme un certain nombre d'exemples que nous étudierons dans la suite.

	LE SENS DE LA TRANSMISSION reste CONSTANT		LE SENS DE LA TRANSMISSION varie PÉRIODIQUEMENT
	I ^e CLASSE Rapport des vitesses constant	II ^e CLASSE Rapport des vitesses variable	III ^e CLASSE Rapport des vitesses constant ou variable
I ^{er} GENRE Transmission par contact direct	Engrenages cylindriques. Engrenages coniques. Engrenages hélicoïdaux. Engrenages hyperboloïdes. Trains de roues dentées. Pignon et crémaillère. Roue et vis sans fin. Vis de Prony. Cames Grisson.	Courbes roulantes. Engrenage elliptique. Spirales logarithmiques. Roues excentrées. Roues de Roemer. Roues d'Huyghens. Manivelle à coulisse. Etc...	Cames du mouvement uni- forme. Came Morin. Roues à double denture. Excentriques à cadre ou à rainure. Etc...
II ^e GENRE Transmission par lien rigide	Roues couplées. Joint de Oldham. Joint Clémens.	Manivelles anti-rotatives. Bielle et manivelles iné- gales à rotations conti- nues. Joint universel. Joint de Hooke.	Bielle et manivelles à rota- tions discontinues. Bielle des machines à vapeur Parallélogramme de Watt. Balancier d'Evans. Losange de Peaucellier, etc. Roues à rochet. Mouvements alternatifs à retour rapide.
III ^e GENRE Transmission par lien flexible	Poulies et courroies. Poulie fixe ou mobile. Treuils des divers genres. Mouffles et palans. Pignons et chaînes.	Poulies non circulaires. Treuils à tambour conique. Bobines.	Sans utilisation.

MÉCANISMES A CONTACT DIRECT

DANS LESQUELS

LE SENS DE LA TRANSMISSION EST INVARIABLE
AINSI QUE LE RAPPORT DES VITESSES

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS

SUR LES ENGRENAGES CYLINDRIQUES DROITS (*)

§ I. — *Principe fondamental.*

242. Définition. — Les engrenages cylindriques droits ont pour but, étant donnés deux axes parallèles, de transmettre un mouvement de rotation de l'un à l'autre par l'emploi de deux corps en contact, déterminés de telle manière que le rapport des vitesses angulaires reste constant.

243. Principe général sur lequel s'appuie ce mode de transmission. —

Théorème. Lorsque deux corps cylindriques, mobiles autour d'axes parallèles à la direction commune de leurs génératrices, agissent l'un sur l'autre par contact direct :

1° Leurs mouvements de rotation s'accomplissent dans le même sens ou en sens contraires, selon que la normale commune aux deux profils partage la ligne des centres en segments soustractifs ou en segments additifs :

2° Le rapport des vitesses angulaires est égal au rapport inverse des segments déterminés sur la ligne des centres par la normale commune aux deux profils :

3° La vitesse relative de glissement est égale au produit de la différence ou de la somme des vitesses angulaires par la longueur de la normale commune, suivant que les rotations ont lieu dans le même sens ou en sens contraires.

Coupons les corps en mouvement par un plan perpendiculaire à la direction commune de leurs axes ; soient S et S' les courbes d'intersection, qui sont tangentes en M

et I le point de rencontre de leur normale commune avec la ligne des centres oo' prolongée s'il y a lieu.

(*) Les engrenages dont nous allons nous occuper, dans lesquels les dents forment des surfaces cylindriques à génératrices parallèles aux axes de rotation, sont appelés *droits* par opposition avec les engrenages cylindriques à dents courbes (hélicoïdales), dont il sera parlé aux chapitres VII et IX.

Supposons que le premier corps soit moteur, et tourne dans le sens de la flèche f . En faisant abstraction du frottement, son action sur le second s'exerce dans le sens de la normale commune. Si, comme dans la figure 196, le point I se trouve entre o et o' , l'effort auquel est soumis le corps S' le fait évidemment tourner en sens inverse de S . Il tourne dans le même sens si (fig. 197) I est situé sur le prolongement de oo' .

2° Soient ω et ω' les vitesses angulaires de rotation autour des axes o et o' à l'instant actuel t . Donnons au système un déplacement très petit pendant un temps Δt , à la suite duquel S et S' viennent occuper les positions voisines S_1 et S'_1 , (fig. 198). Suivant qu'on le considère comme appartenant à S ou S' , le point M a pour vitesse soit $\omega \times oM = \overline{MA}$, soit $\omega' \times o'M = \overline{MB}$, et se place en m_1 sur S_1 ou en m'_1 sur S'_1 , après avoir décrit des arcs de cercle autour de o et o' comme centres. Quand Δt tend vers zéro, les cordes $M_1 m_1$ et $M_1 m'_1$ se confondent à la limite avec la tangente commune en M à S et S' , de même que la droite $m_1 m'_1$.

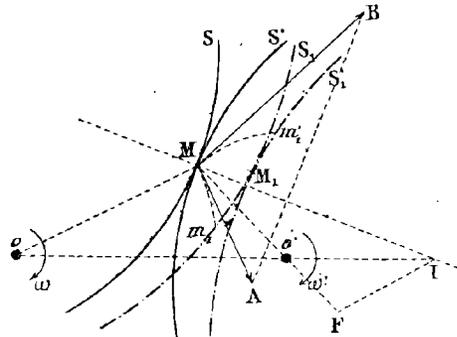


Fig. 198.

Mais celle-ci est en outre parallèle à AB , puisque, quand Δt est infiniment petit, Mm_1 et Mm'_1 sont respectivement dirigés suivant MA et MB , et égaux à $MA \times dt$ et $MB \times dt$. AB est donc perpendiculaire à MI .

Menons IF parallèle à Mo . Les triangles MAB , MIF , dont les côtés sont perpendiculaires, sont semblables, et donnent

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MF}{IF}$$

ou
$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{oM}{o'M} \times \frac{MF}{IF} = \frac{oM}{IF} \times \frac{MF}{o'M} = \frac{o'M}{o'F} \times \frac{MF}{o'M} = \frac{MF}{o'F} = \frac{oI}{o'I}$$

3° Supposons, pour fixer les idées, que les deux rotations soient de sens contraires. Pour trouver l'expression de la vitesse de glissement, nous étudierons le mouvement relatif de S' par rapport à S , en imprimant aux deux corps un mouvement d'ensemble égal et contraire au mouvement absolu de S . Le mouvement cherché résulte de la composition de la rotation ω' autour de o' avec la rotation ω_1 , égale à ω en valeur absolue, s'exécutant autour du même axe o , mais en sens

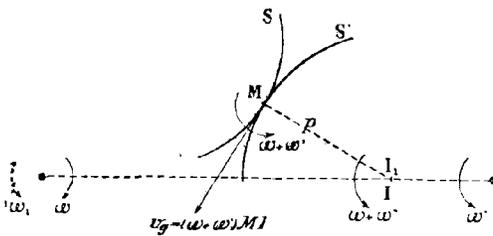


Fig. 199.

contraire. C'est donc une rotation égale à $\omega + \omega'$, de même sens que ω' , dont l'axe rencontre oo' au point I_1 déterminé par la relation

$$\frac{\omega'}{\omega_1 \text{ ou } \omega} = \frac{oI_1}{o'I_1}$$

Cette proportion prouve que I_1 est confondu avec I .

La rotation $\omega + \omega'$ autour de I peut être transportée parallèlement à elle-même au point M (220), à la condition de lui ajouter une translation $v_g = (\omega + \omega') MI$, perpendiculaire à MI et dirigée comme l'indique la figure. Le mouvement relatif de S' par

rapport à S se compose alors d'une rotation $\omega + \omega'$ autour de M, qui produit le roulement de S' sur S, et d'une translation v_g dans le sens de la tangente commune, qui produit le glissement. En posant $MI = p$, on a

$$v_g = (\omega + \omega') p$$

Un raisonnement analogue prouverait que, dans le cas des rotations de même sens

$$v_g = (\omega' - \omega) p$$

244. Remarques. — I. L'expression $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{oI}{oI}$ montre que :

Pour que le rapport des vitesses angulaires de deux corps cylindriques, mobiles autour d'axes parallèles à leurs génératrices et agissant l'un sur l'autre par contact direct, reste constant, il faut et il suffit que la normale commune aux deux profils coupe la ligne des centres en un point fixe.

II. L'expression $v_g = (\omega' + \omega) p$ montre que la vitesse relative de glissement est nulle :

1° Quand $p = 0$, c'est-à-dire quand le contact des deux profils a lieu sur la ligne des centres.

2° Quand les deux profils tournent dans le même sens, avec des vitesses angulaires égales.

Si l'une ou l'autre de ces conditions est réalisée à chaque instant, le mouvement relatif des deux solides est un roulement sans glissement.

245. Cas particulier où l'un des axes est rejeté à l'infini. — Supposons que

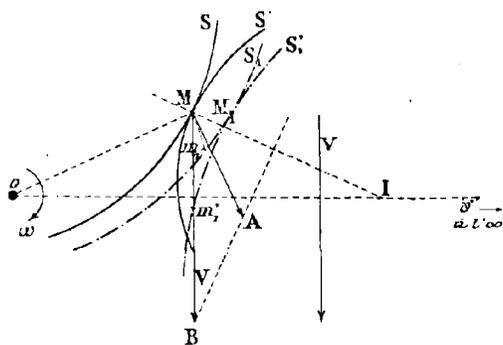


Fig. 200.

S', par exemple, soit animé d'un mouvement de translation parallèle au plan de la figure, de vitesse V, dans une direction perpendiculaire à oo'. Cela revient à imaginer que o' s'est éloigné à l'infini dans la direction oo', ω' tendant vers zéro (142). Imprimons encore au système un déplacement très petit, qui amène S et S' en S₁ et S'₁. Suivant qu'on le considère comme appartenant à S ou à S', le point M décrit des éléments de chemin Mm₁ ou Mm'₁, l'un de centre o, l'autre parallèle à V, et sa vitesse à l'in-

stant considéré t est $\omega \times oM = \overline{MA}$ ou $V = \overline{MB}$. En raisonnant comme plus haut, on établit que AB est perpendiculaire à MI. Les triangles semblables MAB, MOI donnent (fig. 200).

$$\frac{MA}{MB} = \frac{oM}{oI}$$

d'où, en remplaçant MA et MB par leurs valeurs

$$V = \omega \times oI$$

Enfin, le mouvement relatif de S' par rapport à S résulte de la composition de la translation V avec une rotation autour de l'axe o, de vitesse angulaire ω_1 égale à ω ,

mais dirigée en sens contraire (fig. 201). Ces deux mouvements se composent en une rotation ω (220) égale à la première, dont l'axe rencontre oI en un point I_1 qui est confondu avec I , puisqu'il est déterminé par la relation $oI_1 = \frac{V}{\omega_1} = OI$.

On peut transporter cette rotation parallèlement à elle-même en M , à la condition de lui ajouter une translation $v_g = \omega_1 \times MI$ normale à MI , qui représente, comme dans le cas général, la vitesse relative de glissement de S' par rapport à S . Son expression est, en posant $MI = p$

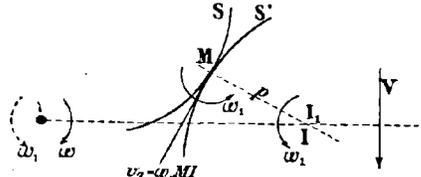


Fig. 201.

$$v_g = \omega \times MI = \omega p$$

246. Remarques. — I. L'expression $V = \omega \times oI$ montre que : pour qu'il y ait rapport constant entre la vitesse angulaire de la rotation et la vitesse de la translation, il faut et il suffit que la normale commune aux deux profils rencontre en un point fixe la perpendiculaire abaissée du centre de la rotation sur la direction de la translation.

II. L'expression $v_g = \omega p$ montre que la vitesse de glissement est nulle quand le contact des deux profils a lieu sur la perpendiculaire abaissée du point o sur la direction de la translation.

Si cette condition est réalisée à chaque instant, le mouvement relatif des deux solides est un roulement simple.

§ II. — Cylindres de friction.

247. Problème général des engrenages cylindriques. — Première solution au moyen des cylindres de friction. — Le problème général à résoudre est le suivant :

Soyent deux axes parallèles, perpendiculaires au plan de la figure, sur lequel ils sont projetés en o et o' . Un mouvement de rotation, de vitesse angulaire ω , ayant lieu autour de l'axe o , on propose de déterminer deux cylindres S et S' , invariablement reliés à o et o' , tels que la vitesse angulaire ω' du second soit liée à celle du premier par la relation

$$\frac{\omega'}{\omega} = k, \text{ k étant un nombre constant donné.}$$

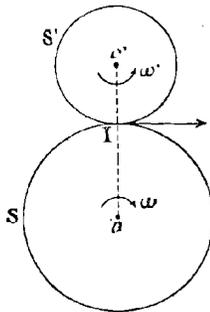


Fig. 202.

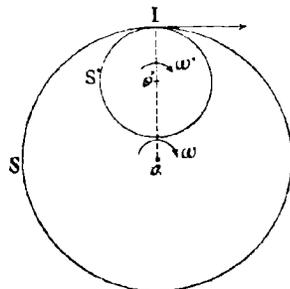


Fig. 203

Premier cas. — Les deux arbres doivent tourner en sens contraires. — Quel que soit k , il existe toujours, entre o et o' , un point I qui partage oo' (fig. 202) en segments additifs tels que l'on ait

$$\frac{oI}{o'I} = k.$$

Les circonférences décrites de o et o' comme centres, avec oI et $o'I$ pour rayons,

définissent deux cylindres droits, tangents tout le long de la génératrice du point I. Quand le cylindre S se met en mouvement, son adhérence avec le cylindre S' contraint celui-ci à tourner, et si l'on suppose que l'entraînement a lieu sans glissement, les vitesses linéaires du point I sont les mêmes sur les deux corps. Or, leurs expressions respectives sont $\omega \times oI$ et $\omega' \times o'I$. On a donc

$$\omega \times oI = \omega' \times o'I$$

ou

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{oI}{o'I} = k.$$

De plus, les deux rotations sont évidemment de sens contraires.

Deuxième Cas. — *Les deux arbres doivent tourner dans le même sens.* — Quel que soit k , il existe sur oo' un point I qui partage cette droite en segments sous-inactifs tels que l'on ait $\frac{oI}{o'I} = k$ (fig. 203). On établirait comme précédemment que, si les cylindres droits définis par les circonférences oI et $o'I$ s'entraînent sans glissement, le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ de leurs vitesses angulaires est à chaque instant égal à k . De plus, les deux rotations s'effectuent dans le même sens.

248. Avantages et inconvénients des cylindres de friction. — Cette solution très simple du problème présente un avantage. Lorsque le cylindre moteur se met en mouvement, il s'exerce un certain frottement entre sa surface et celle du cylindre conduit, d'où résulte l'entraînement de ce dernier si la résistance qui lui est offerte n'est pas trop considérable. On démontre en Dynamique que le travail du frottement, dépensé en pure perte par la machine motrice, est une fonction du glissement relatif des deux surfaces en contact, et augmente avec lui. Comme il n'y a pas de glissement dans le cas actuel, le travail absorbé par le frottement est nul (*).

Les cylindres de friction ne sont généralement utilisables que pour transmettre des efforts assez faibles. Quand la résistance à vaincre est considérable, il faut augmenter l'adhérence, soit en exerçant une pression convenable sur les axes (**), soit en recouvrant les surfaces roulantes de substances rugueuses (cuir, caoutchouc...).

D'après Reuleaux, il convient de donner aux roues des garnitures différentes, celle du cylindre moteur en bois (tilleul, érable, sapin...) à fibres disposées dans le sens circonférentiel, l'autre en fer. Mais il arrive toujours un moment où, par suite de l'usure et du polissage, le mouvement n'est plus continu, et où il se produit de nombreux glissements. Aussi les cylindres de friction ne peuvent-ils être employés comme organes de transmission que si ces glissements n'offrent pas d'inconvénients sérieux dans la marche de la machine.

249. Monte-sacs des moulins. — Appareils de pilonnage. — On trouve dans

(*) Il subsiste cependant un frottement de roulement, beaucoup moindre que le frottement de glissement, dont on trouve des exemples dans les roulements à billes des bicyclettes, dans la machine d'Atwood, etc...

(**) Les roues de locomotives constituent une application des cylindres de friction, en considérant le rail comme une roue de rayon infini. La pression qu'elles exercent est considérable : (14 tonnes dans les machines Crampton); on l'appelle le *poids adhérent*.

les moulins des monte-sacs composés de deux cylindres de friction C et C' (fig. 204), le premier solidaire d'une poulie P dont il reçoit le mouvement, le second du tam-

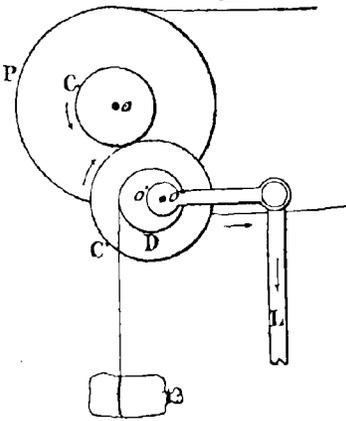


Fig. 204.

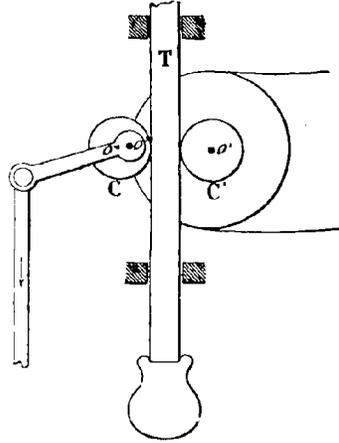


Fig. 205.

bour D d'un treuil sur lequel s'enroule une corde qui porte le fardeau à soulever. L'axe o. de la poulie et du cylindre C est fixe ; l'axe o' du cylindre C' est porté par un excentrique qui peut tourner autour de l'axe o' sous l'action d'un levier L. En agissant sur ce dernier, on approche C' de C et le mouvement de l'axe o se transmet à C' et au tambour du treuil. Dès qu'on abandonne le levier, le fardeau cesse de s'élever.

Une disposition analogue est employée pour le soulèvement des pilons (fig. 205). La tige T, en bois, est comprise entre deux cylindres de friction dont l'un reçoit le mouvement d'une poulie et d'une courroie. L'axe de C peut être déplacé par un levier, afin de le rapprocher ou de l'écarter de la tige du pilon, dont on fait ainsi varier l'adhérence avec C', ce qui permet de soulever l'appareil et de l'abandonner à lui-même quand on le veut.

250. **Mécanisme employé dans les essoreuses.** — Une commande par cylindres de friction se rencontre aussi dans les essoreuses. Un galet en cuir comprimé G, de rayon r, est placé entre deux plateaux égaux C et C' dont les axes sont dans le prolongement l'un de l'autre (fig. 206), et dont les vitesses angulaires sont égales et de sens contraires.

Les points de contact A et A' reçoivent des plateaux des vitesses égales $\omega \times oA$, qui tendent à faire tourner le galet dans le même sens. S'il n'y a pas glissement, on a, en appelant ω' la vitesse angulaire du galet autour de son axe

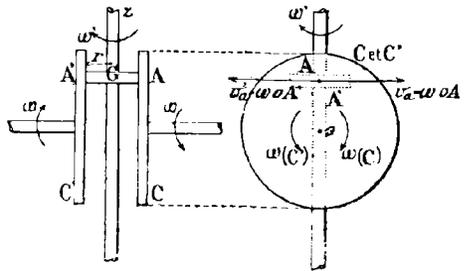


Fig. 206.

$$\omega' r = \omega \times oA$$

d'où

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{oA}{r}$$

Le rapport des vitesses, constant pour chaque position du galet, peut prendre toutes les valeurs comprises entre zéro et $\frac{R}{r}$, lorsqu'on déplace G par rapport à o.

251. Mécanisme employé dans les scieries. — MM. Guilliet, constructeurs à Auxerre, ont appliqué une disposition analogue dans la commande de leurs chariots de scies à ruban pour le débit des bois en grume, afin d'obtenir à volonté de grandes variations dans la vitesse d'avancement, pendant la marche même de la machine. Le principe de leur appareil repose sur l'emploi de deux plateaux d'entraînement égaux, C et C', calés sur des axes parallèles z et z'. L'un de ces plateaux, soit C, est commandé par poulies et courroies, et tourne d'un mouvement uniforme; il communique son mouvement à l'autre par l'intermédiaire du galet G, dont l'axe z₁ est perpendiculaire aux précédents. En admettant qu'il n'y ait pas de glissement, les vitesses des points A et A' des deux plateaux sont égales, et l'on a, en adoptant les notations indiquées sur la figure

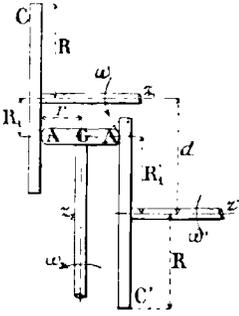


Fig. 207.

$$\omega R_1 = \omega' R'_1$$

d'où

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R_1}{R'_1}$$

Le rapport des vitesses, constant pour chaque position du galet, croît à mesure que celui-ci se rapproche de la périphérie du plateau C. Son minimum, qui se produit quand le point A' est sur la circonférence du plateau C', a pour valeur $\frac{d-R}{R}$, d représentant la distance des axes; son maximum est $\frac{R}{d-R}$. Les deux rotations sont évidemment de même sens.

L'axe z' du plateau mené est relié au chariot de la scie; dans les machines construites par MM. Guilliet, sa vitesse varie, suivant la position du galet, de 25 à 621 tours par minute pour 175 tours du plateau menant. La vitesse d'avancement du chariot est comprise entre 1 mètre et 25 m. 70 par minute.

252. Engrenage à coin, de Minotto. — Cet engrenage offre un nouvel exemple de la transmission d'un mouvement de rotation entre deux axes parallèles par simple contact. On monte sur les axes deux tambours C et C' (fig. 208). La gorge de l'un a pour section méridienne un trapèze isocèle, dont les côtés obliques font entre eux un angle d'environ 30°. La surface extérieure de l'autre présente la même disposition, en relief. Une faible pression exercée sur les axes fait naître une très grande adhérence entre les surfaces en contact, de sorte que la transmission peut s'effectuer même si la résistance à vaincre est considérable.

Les surfaces des tambours se touchent suivant deux segments de droites d'une certaine étendue, situés dans le plan des axes. Soient r et r' les distances d'un point de contact M aux axes z et z', ω et ω' les vitesses angulaires des deux tambours. Les vitesses linéaires du point M sur C et sur C' sont respectivement ωr et ω'r'. Quand ce point se rapproche de l'un des axes, sa vitesse sur le tambour correspondant diminue, en même temps que sa

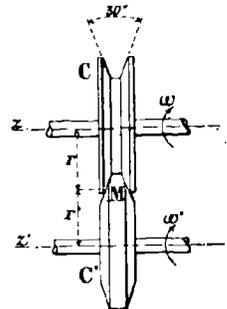


Fig. 208.

vitesse sur l'autre augmente, de sorte que ωr ne peut être égal à $\omega' r'$ que pour un seul système de valeurs de r et r' . Cela signifie que s'il y a roulement simple pour les circonférences déterminées, dans les tambours, par le plan mené par M perpendiculairement aux axes, toutes les autres circonférences analogues ont un mouvement mixte de roulement et de glissement. Il en résulte une usure inégale des surfaces en contact.

Au bout d'un certain temps cette usure peut être telle que l'adhérence ne soit plus suffisante ; il faut donc rapprocher graduellement les axes. On peut remédier à cet inconvénient en calant sur ceux-ci deux roues C et C' à gorge trapézoïdale, dont la somme des rayons soit un peu inférieure à la distance des centres (fig. 209), entre lesquelles on place une roue à coin C'' folle sur son axe, et maintenue par un contre-poids P. Si la roue menante C tourne dans le sens indiqué, l'effet de la rotation tend à enfoncer C'' entre les deux gorges, et à faire naître une adhérence plus considérable. Aussi le poids P peut-il être relativement minime.

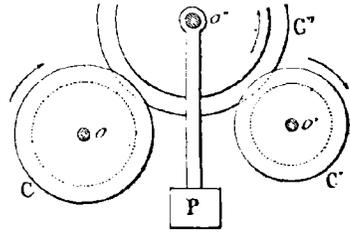


Fig. 209.

Il faut observer que les roues C et C' tournent dans le même sens.

On peut employer des roues à coins multiples, comme celles qui sont représentées en coupe par la figure 210. L'adhérence augmente avec le nombre des coins.

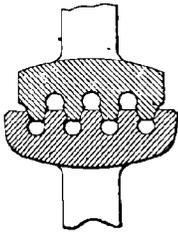


Fig. 210.

tours par minute.

Les roues à coins sont utilisées pour la commande des moulins, des machines élévatoires, des treuils dans les navires, etc... Dans son ouvrage *le Constructeur*, Reuleaux cite une application à la manœuvre de pompes centrifuges tournant à raison de 700

§ III. — Méthodes générales pour la détermination des profils des dents.

253. Pour s'opposer au glissement toujours possible dans la transmission par cylindres de friction, on garnit ceux-ci de dentures dont les profils doivent satisfaire aux conditions suivantes :

Première condition. — Si les deux cylindres, en se commandant mutuellement, assurent une valeur déterminée k au rapport des vitesses angulaires, la transmission par l'action des dents doit lui assigner la même valeur.

Deuxième condition. — Il doit exister à tout instant au moins deux dents en prise. Car, dans le cas contraire, le système serait momentanément réduit aux cylindres de friction, et les glissements pourraient se produire.

On peut exprimer cette condition, en disant que la transmission du mouvement par les dentures doit être continue.

Troisième condition. — Chacun des cylindres de friction peut être conduit par l'autre dans les deux sens (*), la même propriété doit subsister lorsqu'on fait intervenir les dents. On exprime ce fait en disant que l'engrenage doit être réciproque.

(*) Dans les roues à coins de Minotto, l'expérience a montré que le point M (fig. 208) pour lequel il n'y a pas de glissement se trouve sur la partie des surfaces en contact qui est la plus éloignée de la roue menante. Le rapport des vitesses angulaires $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{r}{r'}$ change donc quand la menée devient menante.

254. Réalisation de la première condition. — Théorème. — Pour que deux courbes xy et $x'y'$, invariablement liées aux sections droites S et S' des cylindres de friction, donnent le même rapport de vitesses angulaires que ceux-ci, il faut et il suffit que $x'y'$ soit l'enveloppe de xy quand S roule sur S' sans glisser (c'est-à-dire dans le mouvement relatif de S par rapport à S').

Rappelons d'abord les propriétés caractéristiques des courbes enveloppes dans le mouvement épicycloïdal :

1° La normale commune à l'enveloppée mobile et à son enveloppe passe, à chaque instant, par le centre instantané de rotation ;

2° Le centre de courbure de l'enveloppée, supposé invariablement relié à la roullante, décrit une courbe épicycloïdale dont le centre de courbure se confond avec celui de l'enveloppe, en son point de contact avec l'enveloppée mobile.

Les réciproques de ces propositions sont vraies. De plus, ces propriétés sont applicables à des courbes invariablement liées aux cylindres de friction, puisqu'il a été démontré que le mouvement relatif de l'un de ceux-ci par rapport à l'autre est un roulement simple (*Cinématique théorique* — 234).

Ceci posé, observons que les courbes xy et $x'y'$, se touchent nécessairement en leur point commun, car si l'une d'elles présentait un point anguleux par exemple, l'usure l'effacerait jusqu'à la rendre tangente à l'autre.

Soient donc M le point de contact des deux profils à l'instant considéré (fig. 211) et $\frac{\omega'}{\omega} = k = \frac{oI}{o'I'}$ le rapport constant des vitesses angulaires obtenu par l'action des cylindres de friction. D'après le principe général démontré au paragraphe 243, pour que la transmission par les courbes xy et $x'y'$ s'effectue avec la même valeur du rap-

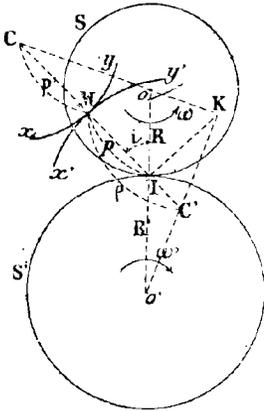


Fig. 211.

port $\frac{\omega'}{\omega}$, il faut et il suffit que leur normale commune en M passe par le point I . Comme ce point est précisément le centre instantané de rotation de S dans son roulement sur S' , $x'y'$ est l'enveloppe de xy .

255. Remarques. — I. Un raisonnement analogue prouverait que xy est l'enveloppe du profil $x'y'$, quand celui-ci est entraîné dans le roulement sans glissement de S' sur S supposée fixe. Les deux profils sont donc conjugués, c'est-à-dire qu'ils jouissent l'un par rapport à l'autre des mêmes propriétés. Il en résulte que si S , armée du profil xy , conduit S' en assurant au rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ une valeur déterminée k , S' peut aussi conduire S en assurant à ce même rapport la valeur k .

II. La démonstration précédente, faite en supposant deux rotations de sens contraires, subsiste dans le cas de deux rotations de même sens, ainsi que dans celui d'une rotation et d'une translation perpendiculaire à l'axe de la rotation.

256. Conséquences du théorème précédent. — La formule de Savary, qui donne une relation entre le rayon de courbure d'une courbe et celui de son enveloppe, est applicable aux profils conjugués xy et $x'y'$. En désignant par R et R' les rayons des circonférences S et S' (fig. 211), par ρ et ρ' les rayons de courbure en M des deux profils, par i l'inclinaison de la normale commune sur la ligne des centres, et par p la longueur MI , on a donc

$$\frac{1}{R} - \frac{\cos i}{\rho' + p} = \frac{\cos i}{\rho - p} - \frac{1}{R'}$$

De plus, l'un des profils étant donné, on obtiendra son conjugué en cherchant l'enveloppe du premier dans le roulement sans glissement de la circonférence à laquelle il est invariablement relié, sur l'autre supposée fixe.

On peut construire cette enveloppe de plusieurs manières. Nous en indiquerons trois :

- 1° La méthode de **Poncelet**.
- 2° La méthode de **Reuleaux**.
- 3° La méthode des **roulettes**.

257. Méthode de Poncelet. — Elle est basée sur ce fait que la normale commune à l'enveloppe et à l'enveloppée passe, à chaque instant, par le centre instantané de rotation.

Pour l'exposer, nous supposerons qu'il s'agit de construire l'enveloppe du profil $x'y'$ invariablement lié à la circonférence S' , quand celle-ci roule sur S .

Soient $I\ 1\ 2\ 3\dots$ (fig. 212) des positions successives, assez rapprochées les unes des autres, du centre instantané de rotation sur la circonférence S . $1\ 1'\ 2'\ 3'\dots$ les points correspondants de S' . Puisque celle-ci roule sans glisser sur S , on a
 $\text{arc } 1\ 1' = \text{arc } 1\ 1'$
 $\text{arc } 1\ 2' = \text{arc } 1'\ 2'\dots$

Pour la facilité de la construction, il convient de donner à tous ces arcs la même longueur.

Menons de $1'\ 2'\ 3'\dots$ les normales $1'a', 2'b', 3'c'$ sur $x'y'$. Quand le centre instantané de rotation est en 1 sur la circonférence fixe S , la droite $1'a'$ est devenue la normale commune au profil $x'y'$ et à son enveloppe, de sorte que la circonférence décrite de 1 comme centre, avec $1'a'$ pour rayon, est tangente au profil inconnu xy . En opérant de même avec les normales $2'b', 3'c'\dots$ on obtient de nouvelles circonférences, également tangentes à xy , qui permettent de tracer cette courbe avec autant d'approximation que l'on veut.

Remarquons que xy et $x'y'$ sont tangentes en I .

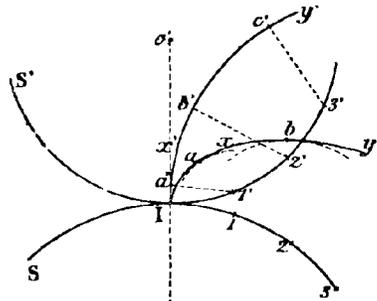


Fig. 212.

258. Application. — *Dispositif employé dans les pompes rotatives.*

Soient S et S' (fig. 213) deux circonférences égales, tangentes en I . AC et BD , $A'C'$ et $B'D'$ deux couples de diamètres perpendiculaires inclinés de 45° sur la ligne des centres, et $A'MB'$ une demi-circonférence de diamètre $A'B'$, que nous supposerons invariablement reliée à S' . En traçant son enveloppe par la méthode de Poncelet, on obtient une courbe AMB qui, invariablement liée à S , transmettra le mouvement entre les axes o et o' pendant un quart de tour, comme le feraient des cylindres de friction construits sur S et S' , c'est-à-dire avec des vitesses angulaires égales et de sens contraires. En reportant le profil AMB dans les quadrants CD , $B'C'$ et $A'D'$, et le profil $A'MB'$ dans tous les autres, on détermine des cames (*) Δ et Δ' qui assurent la liaison des deux axes d'une façon continue.

Ces organes sont employés dans certaines pompes rotatives. Ils sont alors ren-

(*) On appelle cames des corps généralement cylindriques, mobiles autour d'axes parallèles à leurs génératrices, qui réalisent une transmission de mouvement par contact, sans denture. (Chapitre XVIII).

fermés dans une enveloppe V , limitée latéralement par des surfaces cylindriques de révolution autour de o et o' (fig. 214), et communiquant au-dessous du plan oo' avec le conduit d'aspiration T , au-dessus avec le conduit d'écoulement T' . Chaque came touche constamment l'enveloppe par au moins une extrémité de son grand axe, de

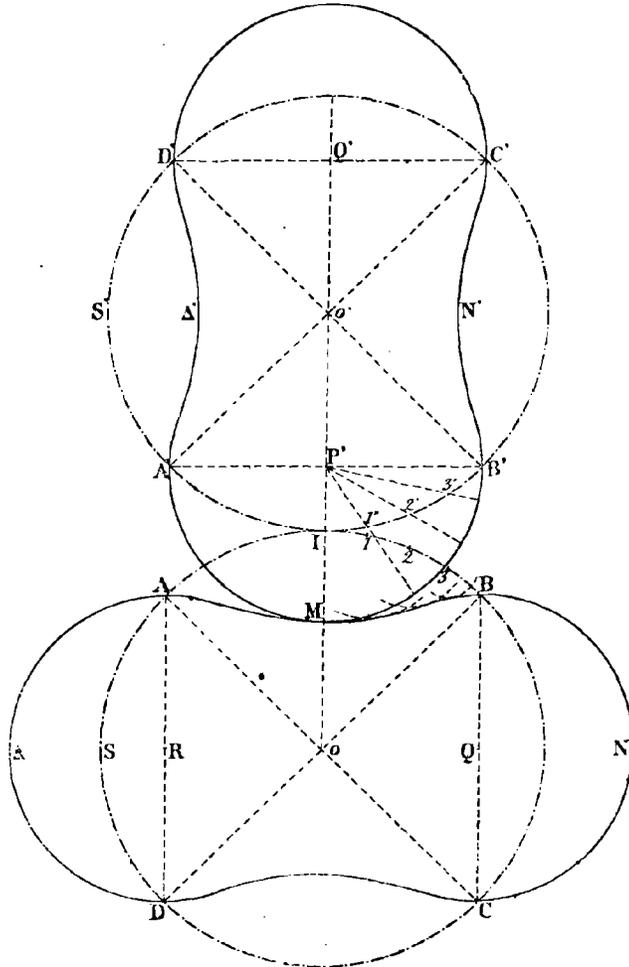


Fig. 213.

sorte que la communication entre les conduits T et T' n'est jamais libre. Pour étudier le fonctionnement du système, supposons que la came de droite, d'abord au repos dans la position Δ_1 , tourne dans le sens f . L'espace E compris entre elle et la paroi de l'enveloppe est ouvert à ce moment vers le conduit d'aspiration ; il s'en sépare dès que la came a pris la position Δ , et l'air qu'il renferme est entraîné par l'effet de la rotation vers le conduit d'écoulement. Comme il en est de même à chaque demi-révolution, le vide se fait dans le tube T , et le niveau du liquide s'élève ; lorsqu'il atteint les comes, la pompe est amorcée. A partir de cet instant, le conduit T' rejette, à chaque

tour des **comes**, un volume d'eau égal à quatre fois le produit de la surface E par la largeur de l'enveloppe, mesurée parallèlement aux axes o et o' . (*)

259. Méthode de Reuleaux. — La méthode de Reuleaux, basée sur le même principe que celle de Poncelet, est plus précise, en ce qu'elle permet de trouver les points de contact des circonférences de centres 1, 2, 3... avec la courbe xy .

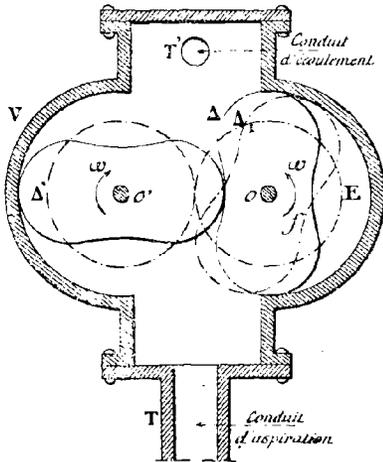


Fig. 214.

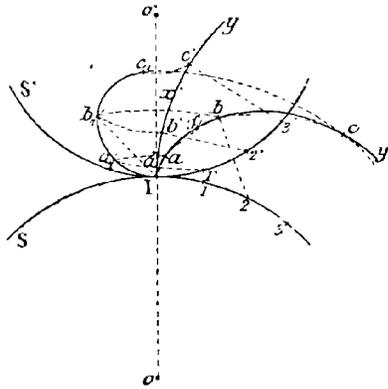


Fig. 215.

Supposons pour un instant que l'enveloppe soit connue ; traçons-lui une normale $2b$ (fig. 215), puis imaginons que S conduise S' en appuyant sur le profil $x'y'$ qui lui est invariablement relié. D'après le théorème 254, les deux circonférences roulent l'une sur l'autre sans glisser, de sorte que les points 2 et 2' viennent à un moment donné se superposer sur la ligne des centres. Lorsque ce fait se produit, les droites $2b$ et $2'b'$ sont confondues ainsi que les points b et b' . Comme ceux-ci sont restés sur des circonférences de centres o et o' , leur position commune b_1 , qui est le contact des profils xy et $x'y'$ à l'instant considéré, vérifie les relations

$$o'b_1 = o'b', \quad ob_1 = ob, \quad Ib_1 = 2b = 2'b'$$

Deux de ces trois conditions suffisent à déterminer b_1 , qui se trouve à la rencontre des circonférences décrites de o' et I comme centres, avec des rayons respectifs $o'b'$ et $2'b'$. On obtient ensuite le point b par l'intersection de deux circonférences ayant o et 2 comme centres, et ob_1 , $2'b'$ pour rayons. La dernière d'entre elles est précisément celle que l'on est conduit à tracer dans la méthode de Poncelet ; son point de contact avec xy est b . Il suffit, pour construire l'enveloppe, de répéter les mêmes opérations pour divers couples de points $11'$, $22'$, $33'$... des circonférences S et S' .

Cette méthode fait connaître en outre le lieu $I a_1 b_1 c_1 \dots$ du point de contact des profils pendant leur action mutuelle : on l'appelle *la ligne d'engrènement*.

260. Méthode des roulettes. — Elle s'appuie sur le théorème suivant :

Théorème. — *Trois courbes S , S' et S'' , tangentes en I , étant données, on fait rouler la dernière, sans glisser, successivement sur les deux autres. Un point M ,*

(*) On peut construire des comes à saillies multiples en partageant les circonférences primitives en un nombre pair de parties égales, supérieur à quatre.

invariablement relié à S'_1 , décrit ainsi une courbe xy quand S'_1 roule sur S , et une courbe $x'y'$ quand S'_1 roule sur S' . Si S' roule ensuite sans glisser sur S , en entraînant $x'y'$, l'enveloppe de cette courbe est xy (fig. 216).

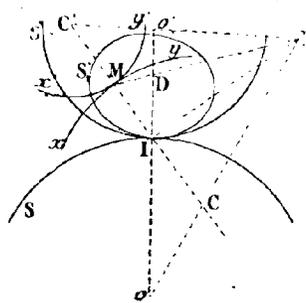


Fig. 216.

Supposons qu'en même temps que S' roule sur S , S'_1 roule sur S' de manière que les trois courbes restent toujours tangentes. Le point M décrit xy dans le mouvement relatif de S'_1 par rapport à S , et $x'y'$ dans le mouvement relatif de S'_1 par rapport à S' . Donc $x'y'$ et xy ont, à chaque instant, un point commun M lorsque S' roule sur S . Ces deux courbes sont de plus tangentes en M , car chacune d'elles est normale à la droite IM (*Cinématique théorique* — 450). Comme le point I est, à l'instant considéré, le centre instantané de rotation, dans le roulement de S' sur S , xy est, dans ce même mouvement, l'enveloppe de $x'y'$ (254).

Autre démonstration. — Soient o, o' et D les centres de courbure en I des courbes S , S' et S'_1 . Quand S' roule sur S supposée fixe, le point M décrit la ligne xy dont le centre de courbure en M , d'après la construction de Savary, est C . Quand S'_1 roule sur S supposée fixe, le même point décrit la ligne $x'y'$, dont le centre de courbure en M est C' . Mais C est aussi le centre de courbure de la courbe épicycloïdale que décrirait C' entraîné dans le roulement de S' sur S . Cela suffit pour que l'on puisse affirmer que xy est l'enveloppe de $x'y'$ (254).

261. De ce théorème résulte une construction du profil conjugué d'un profil donné $x'y'$, invariablement lié à la circonférence S' . On regarde ce profil comme engendré par un point M invariablement lié à une courbe S'_1 roulant sans glisser sur S' , puis on fait rouler S'_1 sur S . Le point M décrit une nouvelle courbe xy qui répond à la question.

Si l'on donne, au contraire, le profil xy invariablement relié à la circonférence S , on le considère comme engendré par un point M invariablement relié à une courbe S'_1 roulant sans glisser sur S , et l'on cherche la courbe $x'y'$ décrite par ce point quand on fait rouler S'_1 sur S' .

262. **Remarque.** — La recherche des profils des dents d'un engrenage est un problème indéterminé, puisque l'on peut se donner l'un d'eux à volonté, et qu'on a des méthodes pour tracer l'autre. Toutefois, deux profils conjugués, quoique satisfaisant aux conditions imposées par la théorie, peuvent être inadmissibles au point de vue pratique, parce qu'ils conduiraient à des formes de dents peu solides ou trop compliquées. On n'emploie, en fait, que des droites et leurs enveloppes, des arcs de circonférence, des épicycloïdes, des hypocycloïdes et des développantes de cercle.

263. **Définitions générales.** — **Réalisation des conditions de continuité et de réciprocité imposées aux dentures** (253). — Les sections droites S et S' des cylindres de friction s'appellent les *circonférences primitives* de l'engrenage. Rappelons que les profils des dents sont déterminés de telle sorte, qu'ils transmettent le mouvement avec le même rapport de vitesses angulaires que les circonférences primitives se conduisant par simple contact :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R}{R'}$$

La plus petite de deux roues conjuguées se nomme le *pignon* ; la plus grande est la roue proprement dite ou simplement la *roue*. Celle qui donne le mouvement est la *roue menante*, et celle qui le reçoit la *roue menée*.

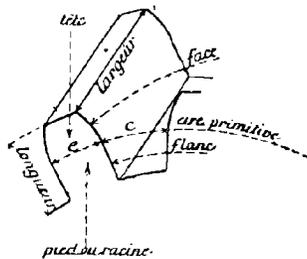


Fig. 217.

On appelle *épaisseur* d'une dent la portion e de circonférence primitive dont elle occupe la place ; *creux* l'intervalle c de deux dents, mesuré sur la circonférence primitive. Le creux est souvent un peu plus grand que l'épaisseur, et la différence j constitue le *jeu*. On a donc

$$c = e + j$$

On nomme *pas circonférentiel* d'un engrenage la partie de circonférence primitive comprise dans un plein et un creux consécutifs. En le désignant par P , on a

$$P = e + c = 2e + j$$

En pratique, le jeu ne dépasse pas $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{20}$ du pas. Les progrès de la construction, et surtout l'emploi des fraises à profil constant après affûtage, permettent aujourd'hui de tailler des engrenages sans jeu, fonctionnant d'une manière parfaite. En supposant le jeu égal à $\frac{1}{20} P$, on tire des égalités ci-dessus

$$e = \frac{19}{40} P \quad c = \frac{21}{40} P.$$

Dans les engrenages sans jeu, $e = c = \frac{P}{2}$

On appelle *module* d'un engrenage le rapport de son pas circonférentiel au nombre π , soit $M = \frac{P}{\pi}$ (*).

Le pas circonférentiel et le module sont les mêmes sur deux roues qui se conduisent. En effet, lorsque la menante a tourné de l'angle correspondant à son pas, les profils AMB et CND (fig. 218), qui sont actuellement en prise, sont respectivement remplacés par $A'M'B'$ et $C'N'D'$. La roue menée a donc tourné, pendant le même temps, d'un angle égal à son propre pas. Puisque, sous l'action des dents, les circonférences primitives roulent l'une sur l'autre sans glisser, les arcs MM' et NN' , qui mesurent les pas circonférentiels des deux roues, sont égaux, ce qui entraîne l'égalité des modules.

Il ne s'en suit pas nécessairement que les épaisseurs et les creux sur l'une des roues soient les mêmes que sur l'autre. L'épaisseur est, en effet, calculée d'après l'effort à transmettre, au moyen de formules tirées de la Résistance des Matériaux ; elle n'est la même sur les deux roues que si celles-ci sont formées de substances identiques, ce qui est le cas général.

La partie de la dent qui est du même côté de la circonférence primitive que la masse de la roue est appelée la *racine*, ou le *pied*, et les profils qui la limitent sont les *flancs*. Le reste de la dent, situé par rapport à la circonférence primitive du côté opposé à la masse de la roue, est la *tête* ; les pro-

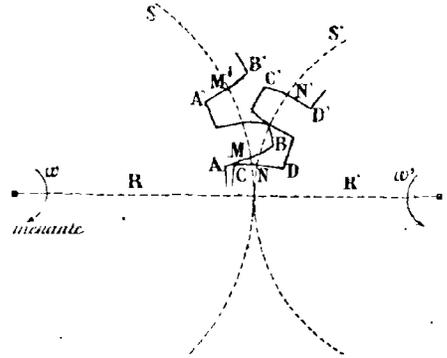


Fig. 218.

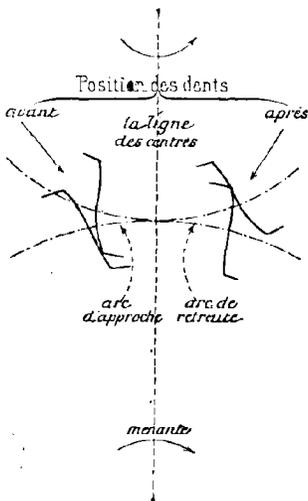


Fig. 219.

(*) Voir, pour l'étude du module, le Chapitre V.

flans qui limitent la tête sont les *faces* de la dent. Nous verrons plus loin que les *faces de la menante conduisent les flancs de la menée après le passage du point de contact des dents sur la ligne des centres* et que les *flancs de la menante conduisent les faces de la menée avant ce même passage* (fig. 219). Cette propriété s'applique à toutes les sortes d'engrenages, et peut être adoptée pour définition des faces et des flancs. Si nous la considérons momentanément comme démontrée, nous pouvons concevoir comment sera remplie la condition de réciprocité imposée aux dentures (3^e condition-253). Il suffira évidemment de donner des faces et des flancs à toutes les dents, pour que chaque roue puisse commander l'autre dans les deux sens.

Considérons sur les roues un seul couple de dents en prise. Entre l'instant où elles commencent à se toucher et celui où elles se quittent, le point de contact des circonférences primitives se déplace sur chacune d'elles d'une même longueur, que l'on appelle *arc de conduite*. La partie de cet arc qui est parcourue avant le passage du point de contact des dents sur la ligne des centres est l'*arc d'approche*; celle qui est parcourue après est l'*arc de retraite*. L'arc de conduite est évidemment la somme des arcs d'approche et de retraite. Pour que l'action de la menante sur la menée ne cesse à aucun moment de s'exercer, il est nécessaire que l'arc de conduite soit au moins égal à un pas; dans ces conditions, en effet, lorsque deux dents sont sur le point de se quitter, celles qui les précèdent immédiatement sont déjà entrées en contact, de sorte que la transmission a lieu par l'action d'un couple de dents pendant un pas, et par celle de deux couples pendant l'excès de l'arc de conduite sur le pas. Si l'arc de conduite est égal ou supérieur à deux pas, il y a au moins deux couples de dents en prise à chaque instant, et ainsi de suite. L'accroissement de l'arc de conduite a donc pour effet d'assurer la continuité de la transmission par les dents, et de réduire en même temps les risques de rupture, puisque l'effort total qu'elles transmettent est réparti sur les différents couples en contact.

Or, si l'on augmente la longueur des faces, les points de contact de deux dents au commencement et à la fin de leur action s'écartent de la ligne des centres (fig. 219). L'arc de conduite croît donc avec la longueur des faces. Cette observation permet de prévoir comment la deuxième condition (*condition de continuité*) imposée aux dentures (253) sera satisfaite. Il suffira de donner aux faces une longueur telle que l'arc de conduite dépasse un pas. Les dimensions adoptées dans la pratique sont les suivantes :

Engrenages calculés au pas circonférentiel	}	Longueur des faces	$f = 0,3 P$.
		— flancs	$f = 0,4 P$.
Engrenages calculés au module	}	Longueur des faces	$f = M$
		— flancs	$f = \frac{7}{6} M$

Ces longueurs sont mesurées sur les rayons de la circonférence primitive.

264. Théorème. — *Le rapport des vitesses angulaires de deux roues cylindriques droites est égal :*

1^o *Au rapport inverse de leurs rayons :*

2^o *Au rapport inverse de leurs nombres de dents .*

3^o *Au rapport direct des nombres de tours qu'elles effectuent dans le même temps.*

La première partie résulte du mode de détermination des cylindres de friction (247) et de la condition imposée aux profils des dents (253).

2^o Soient R et R' les rayons des circonférences primitives, n et n' leurs nombres de dents, N et N' les nombres de tours qu'elles effectuent dans un temps donné, ω et ω' leurs vitesses angulaires, et P le pas de l'engrenage. On a évidemment

$$2 \pi R = n P$$

$$2 \pi R' = n' P$$

d'où
$$\frac{R}{R'} = \frac{n}{n'}$$

D'autre part
$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R}{R'}$$

Donc
$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'}$$

3° Les chemins parcourus par le point de contact des circonférences primitives pendant qu'elles accomplissent les nombres de tours N et N' étant égaux, on a

$$2\pi RN = 2\pi R'N'$$

d'où
$$\frac{R}{R'} = \frac{N'}{N}$$

Par conséquent

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N'}{N}$$

C. Q. F. D.

265. Calcul des engrenages cylindriques droits, au pas circonférentiel.

Le calcul des engrenages se présente, en pratique, de deux manières différentes, soit que le constructeur ait pour but de réaliser un rapport de vitesses angulaires bien déterminé, comme, par exemple, dans les Harnais d'engrenages (Chapitre X), les Trains épicycloïdaux (Chapitre XI), etc..., soit qu'il se propose, comme dans les Tours, de doter une machine d'un assortiment de roues de rechange. La différence entre les deux cas consiste en ce que les nombres de dents sont inconnus dans le premier, et donnés dans le second. Nous allons traiter successivement ces deux sortes de problèmes.

Les quantités nécessaires à l'exécution mécanique d'une roue cylindrique droite sont :

- 1° Son pas circonférentiel P , ou son module M (*) ;
- 2° Son diamètre primitif D ;
- 3° Son diamètre extérieur D_1 ; c'est le diamètre de la circonférence d'échanfrinement, passant par les extrémités des têtes ; il est égal au diamètre primitif augmenté de deux fois la longueur d'une face : $D_1 = D + 2F$.
- 4° Le nombre de dents z de la roue, soit n ;
- 5° La longueur, ou hauteur h de la dent ; elle est égale à la somme des longueurs respectives d'une face et d'un flanc, et fait connaître la profondeur du fraisage

$$h = F + f ;$$

6° Ajoutons à ces quantités la distance d des axes de deux roues engrenant ensemble. La largeur de la denture (épaisseur de la jante) (fig. 219) égale à la distance des bases dans chacun des cylindres de friction, est tout à fait indifférente au point de vue du fonctionnement géométrique ; elle est généralement comprise entre 1,5 P et 3 P ou 5 M et 10 M . Enfin, l'épaisseur de la couronne qui supporte les dents est d'environ 0,6 P , soit 1,8 à 2 M .

(*) Nous ne traiterons ici que le calcul des engrenages cylindriques droits, au pas circonférentiel. Pour le calcul au module, voir le Chapitre V.

PREMIER PROBLÈME. — Calcul d'un engrenage cylindrique droit, connaissant le rapport des vitesses angulaires (ou, ce qui revient au même, le rapport des nombres de dents).

Nous avons dit précédemment que l'épaisseur des dents est déterminée à la fois par la nature de la matière de la roue, et par la grandeur de l'effort à transmettre. Elle ne peut pas descendre au-dessous d'un minimum e fixé, dans chaque cas particulier, par les formules de résistance des matériaux, et nous la considérerons comme une donnée de la question. Le pas circonférentiel minimum P est donc aussi connu. Nous l'appellerons *pas provisoire*, car nous verrons tout à l'heure que le calcul conduit généralement à le modifier.

<i>Données</i>	}	L'épaisseur minimum e , ou le pas provisoire P ; La distance d des axes ; Le rapport des vitesses angulaires, évalué en fonction des nombres de tours N et N' que les deux roues doivent effectuer dans le même temps : $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N'}{N}$;
<i>Inconnues</i>	}	Le pas définitif P_1 ; Les nombres de dents n et n' ; Les diamètres primitifs D et D' ; Les diamètres d'échanfrinement D_1 et D'_1 ; La profondeur du fraisage h ; Epaisseur de la jante ; Epaisseur de la couronne.

Diamètres primitifs. — D'après le théorème 264 :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R}{R'} \left(\text{ou } \frac{D}{D'} \right) = \frac{n}{n'} = \frac{N'}{N}$$

En remplaçant $\frac{N'}{N}$ par la fraction irréductible équivalente $\frac{N'_1}{N_1}$, on peut écrire :

$$\frac{D}{N_1} = \frac{D'}{N'_1} = \frac{D + D'}{N_1 + N'_1} \text{ ou } \frac{2d}{N_1 + N'_1}$$

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{2d N'_1}{N_1 + N'_1} \\ D' &= \frac{2d N_1}{N_1 + N'_1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

d'où

Nombres de dents. — D'autre part :

$$\frac{n}{n'} = \frac{N'_1}{N_1}$$

Les nombres de dents inconnus sont donc des équimultiples de N_1 et N'_1 , et l'on peut poser, en désignant par λ un entier à déterminer :

$$\left. \begin{aligned} n &= \lambda N_1 \\ n' &= \lambda N'_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

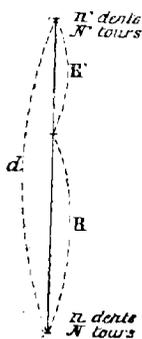


Fig. 220.

Pour calculer λ , on exprime de deux manières différentes la longueur d'une des circonférences primitives. L'égalité $2 \pi R$ ou $\pi D = n P$ donne l'équation

$$\frac{2 \pi d N'_1}{N_1 + N'_1} = \lambda N'_1 P$$

d'où l'on tire :

$$\lambda = \frac{2 \pi d}{P (N_1 + N'_1)} \quad (3)$$

Si $2 \pi d$ est un multiple de $P (N_1 + N'_1)$, le problème est résolu. Si non, on donne à λ la valeur λ_1 du quotient de $2 \pi d$ par $P (N_1 + N'_1)$ à moins d'une unité près par défaut. Les formules (2) font connaître n et n' .

Pas définitif. — La modification supportée par λ conduit à substituer au pas provisoire P un autre pas P_1 , dit *définitif*, déterminé par l'équation

$$\lambda_1 = \frac{2 \pi d}{P_1 (N_1 + N'_1)}$$

d'où l'on tire

$$P_1 = \frac{2 \pi d}{\lambda_1 (N_1 + N'_1)} \quad (4)$$

Puisque $\lambda_1 \ll \lambda$, P_1 est égal ou supérieur à P . La nouvelle épaisseur des dents, déduite de P_1 , sera donc égale ou supérieure à e , et le minimum reconnu nécessaire pour la sécurité de la transmission sera atteint ou dépassé.

Diamètres d'échanfrinement. $D_1 = D \div 2 f = D \div 0,6 P_1 \quad (5)$

$$D'_1 = D' \div 2 F = D' \div 0,6 P_1 \quad (6)$$

Profondeur du fraisage. $h = F + f = 0,7 P_1 \quad (7)$

Épaisseur de la jante. $l = 1,5 P_1 \text{ à } 3 P_1$

Épaisseur de la couronne. $c = 0,6 P_1$

Application numérique. — Soit $e_{min} = 6\%5$, $d = 250\%$, $N = 150$ tours.
 $N' = 120$ tours.

On a
$$\frac{N'}{N} = \frac{120}{150} = \frac{4}{5}$$

Par conséquent $N_1 = 5$ et $N'_1 = 4$

Si l'engrenage est construit sans jeu, $P_{min} = 13\%$. S'il y a un jeu j , on calcule le pas minimum d'après la relation $P = 2 e + j$. Prenons $P_{min} = 13\%$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Les formules (1) donnent} \\ D = \frac{500\% \times 4}{9} = 222\%22 \\ D' = \frac{500\% \times 5}{9} = 277\%78 \end{array} \right\}$$

D'après la formule (3) $\lambda = \frac{500 \pi}{13 \times 9} = 13,4$ environ. En prenant $\lambda_1 = 13$, on tire des formules (2)

$$\begin{cases} n = 13 \times 4 = 52 \\ n' = 13 \times 5 = 65. \end{cases}$$

Le pas définitif (formule 4) est

$$P_1 = \frac{500 \pi}{13 \times 9} = 13\%,43$$

$$\text{Diamètres d'échanfrinement} \begin{cases} D_1 = 222\%,22 + 13\%,43 \times 0,3 = 226\%,25 \\ D'_1 = 277\%,78 + 13\%,43 \times 0,3 = 281\%,81 \end{cases}$$

$$\text{Profondeur du fraisage} \quad h = 13\%,43 \times 0,7 = 9\%,40$$

$$\text{Épaisseur des jantes} \quad de \quad 20\%,15 \text{ à } 40\%,29 \text{ soit de } 20 \text{ à } 40\%$$

$$\text{Épaisseur des couronnes} \quad 0,6 P_1, \text{ soit de } 8 \text{ à } 9\%.$$

DEUXIÈME PROBLÈME. — Calcul d'une roue cylindrique droite, dont le nombre de dents est connu.

On peut prendre pour pas définitif le pas minimum déduit des formules de résistance, car la correction que l'on a fait subir à P dans le cas précédent provenait du calcul des nombres de dents, et ne se présentera certainement pas.

$$\text{Les formules à appliquer sont} \quad D = \frac{nP}{\pi}$$

$$D_1 = D + 0,6 P$$

$$h = 0,7 P.$$

Si la roue doit être associée à une autre calculée de la même manière, la distance des arbres sera

$$d = \frac{D + D'}{2}.$$

Application numérique. — Calcul d'une roue de 63 dents, dont l'épaisseur est 5%. Jeu = $\frac{P}{10}$

$$\text{On a} \quad P = 2e + j = 2e + \frac{P}{10}$$

ou $\frac{9P}{10} = 2e$

$$P = \frac{20e}{9} = \frac{100\%}{9} = 11\%,41$$

$$D = \frac{nP}{\pi} = \frac{60 \times 100}{9\pi} = 212\%,21$$

$$D_1 = 212\%,21 + 11\%,41 \times 0,6 = 218\%,88$$

$$h = 0,7P = 7\%,78$$

Epaisseur de la jante : de 16 à 33%.

Epaisseur de la couronne : 7% environ.

Nous allons maintenant passer en revue les principaux tracés d'engrenages employés ; nous parlerons en premier lieu des *Engrenages extérieurs*, qui assurent la liaison de deux rotations de sens contraires. Dans le but de faire une étude théorique de leurs propriétés, nous déterminerons d'abord les parties utiles des profils propres à assurer à l'arc de conduite une valeur fixée d'avance, qui ne pourra jamais être inférieure à un pas. Nous montrerons ensuite que les dimensions adoptées en pratique réalisent, dans tous les cas, un arc de conduite supérieur à ce minimum.

CHAPITRE II

LIAISON DE DEUX ROTATIONS PARALLÈLES ET DE SENS CONTRAIRES

ENGRENAGES CYLINDRIQUES EXTÉRIEURS

§ I. — Engrenage à lanterne.

266. L'engrenage à lanterne est celui dans lequel le profil des dents de l'une des roues est un cercle de petit rayon, ayant son centre en un point de la circonférence primitive correspondante. Pour fixer les idées, nous supposerons que ce fait ait lieu pour la menée.

Soient S et S' les circonférences primitives de l'engrenage ; imaginons d'abord que chaque dent de la menée soit réduite à un seul point, et considérons celle qui est actuellement en I (fig. 221). Dans le mouvement relatif de la menée par rapport à la menante, — qui consiste, comme on l'a vu (230), en un roulement sans glissement de

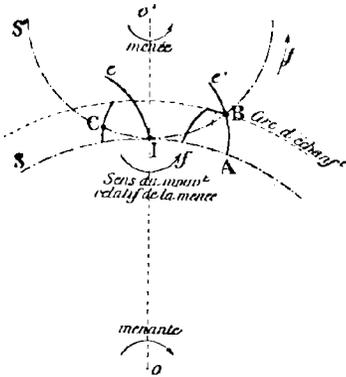


Fig. 221.

S' sur S dans le sens de la flèche f — le point I, assimilé à une circonférence de rayon nul, décrit une épicycloïde e que l'on peut considérer comme son enveloppe. D'après le théorème 254, ces deux profils assurent donc la transmission avec un rapport constant de vitesses angulaires égal au rapport inverse des rayons.

Il est facile, d'ailleurs, de montrer directement que la conduite, en supposant la roue o menante, est réalisée seulement après la ligne des centres. Portons sur la circonférence S', à partir du point I et en retraite, un arc quelconque IB. Dans le mouvement relatif de la menée par rapport à la menante, le point B décrit une épicycloïde e' identique à e , dont le point d'intersection A avec la circonférence S vérifie la relation

$$\text{arc IA} = \text{arc IB}.$$

Le point B et l'épicycloïde Ae' peuvent être considérés comme des positions respectives du point I et de l'épicycloïde Ie après le passage de la ligne des centres, et l'on voit que l'action mutuelle de ces profils a eu pour effet de faire parcourir aux deux circonférences primitives les arcs égaux IA et IB, comme elles l'auraient fait en roulant sans glisser l'une sur l'autre.

Ces profils ne peuvent pas se conduire avant la ligne des centres (*). En effet, si l'on veut répéter pour un point C de S', situé en approche par rapport à I, le même raisonnement que pour le point B, on trouve qu'il décrit bien encore un arc d'épicycloïde, mais celui-ci, orienté en sens opposé de Ie , ne peut pas être regardé comme une position de cette courbe avant le passage du point de contact des dents sur la ligne des centres.

(*) Bien entendu, si le pignon o' devient menant, la conduite n'a lieu, au contraire, qu'avant la ligne des centres.

En résumé : le lieu du point de contact des dents est un arc de la circonférence S' , porté en retraite, et égal à l'arc dont chacune des circonférences primitives a tourné pendant le même temps.

L'égalité des arcs IA et IB donne le moyen d'assurer à l'engrenage un arc de retraite déterminé b . Il suffit de porter celui-ci — qui doit être au moins égal à un pas pour qu'il y ait toujours une paire de dents en prise — de I en B (fig. 221) sur S' , puis de limiter les dents de la roue o à une circonférence de rayon oB . La portion Be' de l'épicycloïde e' étant supprimée, l'action de la dent Ae' sur le profil B du pignon cesse évidemment de s'exercer dès que ces deux éléments dépassent leur position actuelle. La circonférence de rayon oB est appelée la *circonférence d'échanfrinement* des dents de la roue. On voit que ces dents n'ont que des faces, et pas de flancs

Si la menante devait toujours tourner dans le même sens, on pourrait, théoriquement, limiter ses dents, du côté opposé à celui par lequel elles agissent sur le pignon, par un profil quelconque. Dans la pratique, ce profil est symétrique du premier, de sorte que le mécanisme peut fonctionner quand on renverse le sens des mouvements, la menante restant la même.

267. Tracé pratique. — Dans la pratique, les profils des dents du pignon sont constitués par des circonférences de centres

I, B... (fig. 222) et de rayon $r = \frac{49}{80} P$. Le profil réel des dents de la roue est l'enveloppe $\varepsilon\gamma\beta\delta$ d'une série de circonférences de rayon r , ayant pour centres les différents points du profil théorique IPMA. Les faces $\gamma\varepsilon$, $\beta\delta$ sont des courbes parallèles aux épicycloïdes primitives AM et IP. Par suite de cette substitution, les propriétés géométriques de l'engrenage sont un peu modifiées de la façon suivante.

Pour construire l'enveloppe E de la circonférence de rayon r (fig. 223), il suffit de porter, sur chaque normale BI à l'épicycloïde AB, une longueur $B\beta = r$ (168). Tant que $BI > r$, le point β obtenu est extérieur à la circonférence primitive de la roue ; il passe à l'intérieur lorsque la normale à AB, comme IC, est plus courte que r . Enfin, le point A_1 de l'enveloppe, qui correspond à A, est extérieur à la circonférence primitive de la roue, puisque la normale en A à l'épicycloïde est tangente à S. La

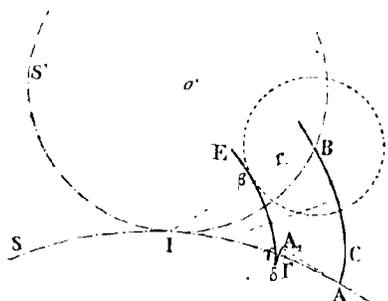


Fig. 223.

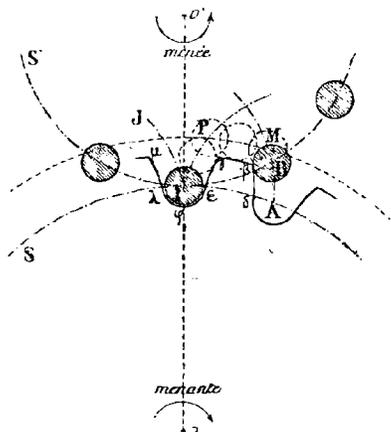


Fig. 222.

normale en A à l'épicycloïde est tangente à S. La courbe E présente donc, intérieurement à S, un point de rebroussement δ , et sa portion δA_1 est inutilisable. Quand le contact des circonférences primitives a lieu en I, par exemple, le profil de la roue touche celui du pignon au point γ , qui se trouve à ce moment avant la ligne des centres. Par conséquent, la conduite a lieu pendant une courte période d'approche, correspondant à l'action de la partie du profil E intérieure à S, ce qui n'avait pas lieu quand la dent du pignon était réduite à un simple point.

Deux faces consécutives telles que $\varepsilon\gamma$ et $\lambda\mu$ (fig. 222) ne se rejoignent plus au même point, comme le faisaient tout d'abord les faces correspondantes IP' et IJ du profil théorique.

On les raccorde au moyen d'une ligne arbitraire $\lambda\varphi\alpha$, dite *courbe d'écartement*, dans le creux de laquelle la dent du pignon vient se loger au moment où elle traverse la ligne des centres. La figure suppose un arc de retraite égal au pas.

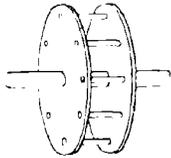


Fig. 224

Dans l'engrenage à lanterne. le pignon est formé de deux plateaux égaux, ou *tourteaux*, traversés par l'axe, et de rayon un peu plus grand que celui de la circonférence primitive. Les dents sont formées par des cylindres de révolution en bois ou en fer, encastrés dans les tourteaux, ou mobiles autour d'axes qui les traversent. A cause de son apparence, cet ensemble est appelé la *lanterne* (fig. 224). La roue, ou *rouet*, pénètre dans l'écartement des tourteaux; ses dents, appelées *alluchons*, généralement en bois, sont implantées sur la jante et peuvent être remplacées facilement en cas d'usage ou de rupture.

268. **Remarques.** — 1^o On reconnaît aisément que, pendant le fonctionnement de l'engrenage, le point de contact de deux profils décrit toute la longueur des dents sur la roue, et seulement un petit arc sur chaque fuseau. Il en résulte que l'usure est localisée en une seule région sur ceux-ci, et qu'ils perdent rapidement leur forme géométrique. C'est pour remédier à cet inconvénient qu'on les rend parfois mobiles autour de leurs axes, comme dans les chaînes à rouleaux.

2^o La courbure des dents du rouet dépend du rayon de la circonférence primitive de la lanterne. Un rouet donné ne peut donc conduire qu'une seule lanterne. Au contraire, une même lanterne peut être conduite par plusieurs rouets inégaux construits pour elle, à la condition, bien entendu, qu'ils aient même pas.

3^o En faisant abstraction de la courte période d'approche dont nous avons signalé l'existence, le rouet ne conduit la lanterne qu'en retraite. Inversement, la lanterne ne conduit le rouet qu'en approche. Or, l'expérience montre que, dans tous les engrenages, les frottements sont beaucoup plus durs quand le point de contact des dents s'approche de la ligne des centres que quand il s'en éloigne. Il résulte de là que, *pratiquement, l'engrenage à lanterne n'est pas réciproque.*

§ II. — Engrenage à flancs droits, non réciproque.

269. Soit S la circonférence primitive de la menante, et S' celle de la menée, tangente en I à la première (fig. 225). Considérons la circonférence S'_1 de diamètre oI , et faisons-la rouler sans glissement, d'abord à l'intérieur de S' , puis à l'extérieur de S , dans le sens du mouvement relatif de la menée par rapport à la menante, indiqué par les flèches f . Le point I décrit ainsi le rayon oI (théorème de la Hire) et l'épicycloïde e . D'après le principe de la méthode des roulettes (260), le second profil est l'enveloppe du premier quand S' roule sur S ; leur action mutuelle assure donc la transmission du mouvement entre les axes o et o' , avec un rapport constant de vitesses angulaires égal au rapport inverse des rayons des circonférences primitives (254).

Nous allons d'ailleurs montrer directement que, la roue o étant supposée menante, la conduite a lieu seulement après le passage du point de contact de ces profils sur la ligne des centres. Portons sur S'_1 , à partir de I et en retraite, un arc IM de longueur arbitraire, et traçons les lieux géométriques $o'MB$, AMe' du point M dans le double mouvement imprimé précédemment à S'_1 . Les pieds B et A du rayon oM et de l'épicycloïde e' sur les circonférences primitives sont déterminés par les relations

$$\text{arc } IM = \text{arc } IB$$

$$\text{arc } IM = \text{arc } IA$$

On a donc aussi

$$\text{arc } IA = \text{arc } IB.$$

Mais les profils $o'MB$, AMe' , qui sont tangents en M d'après une propriété connue de l'épicycloïde, peuvent être considérés comme des positions occupées par $o'I$ et Ie après que S et S' ont tourné autour de leurs centres des quantités IA et IB . L'égalité de ces arcs démontre que l'action de l'épicycloïde e sur le rayon $o'I$ fait rouler les circonférences primitives l'une sur l'autre sans glisser, comme si l'on avait conservé les cylindres de friction. On peut donc prendre ces lignes respectivement pour faces de la menante et pour flancs de la menée.

Elles ne peuvent pas se conduire avant la ligne des centres. En effet, si l'on veut répéter pour un point N de S'_1 , situé en approche, le même raisonnement que pour le point M , on constate bien encore qu'il décrit un rayon $o'NP$ et une épicycloïde QN tangents en N , mais cette dernière ne peut pas être considérée comme une position du profil Ie avant le passage du point de contact des dents sur la ligne des centres, puisqu'elle est orientée en sens inverse.

En résumé : le lieu du point de contact des dents est un arc de la circonférence S'_1 , porté en retraite, et égal à l'arc dont chacune des circonférences primitives a tourné pendant le même temps.

Cette propriété donne le moyen d'assurer à l'engrenage un arc de retraite déterminé b . Il suffit de porter celui-ci de I en M sur S'_1 , et d'échanfriner les dents de la menante à la circonférence de rayon oM . La portion Me' du profil épicycloïdal étant supprimée, son action sur le rayon $o'M$ cesse de s'exercer dès que les dents en prise dépassent leur position actuelle.

Les creux de la menée doivent être assez profonds pour loger les pleins de la menante. On les limite à une circonférence de centre o' , appelée *circonférence d'évidement*, presque tangente à la circonférence d'échanfrinement de la menante. L'écartement qui est égal à $\frac{P}{10}$, dans le calcul des engrenages au pas circonférentiel, et à $\frac{M}{6}$ dans le calcul au module, a pour but de laisser un certain jeu au fond des creux. Pour la même raison, on prolonge les faces de la menante un peu à l'intérieur de la circonférence primitive, et on limite les creux à une circonférence concentrique. Afin que l'engrenage puisse fonctionner quand on reverse le sens du mouvement, la menante restant la même, les deux profils d'une même dent sont symétriques par rapport au rayon qui aboutit au milieu de son épaisseur.

La figure suppose un arc de retraite égal au pas.

270. Remarques. — 1° L'épaisseur des dents du pignon est plus grande au sommet qu'à la racine, ce qui est mauvais au point de vue de la solidité. Or, l'examen de la figure montre que la portion MC du flanc qui aboutit à la circonférence d'évidement n'intervient pas dans la conduite. Afin de diminuer les chances de rupture, on peut donc renforcer les racines, au voisinage du point C , par de petits cônes. Nous indi-

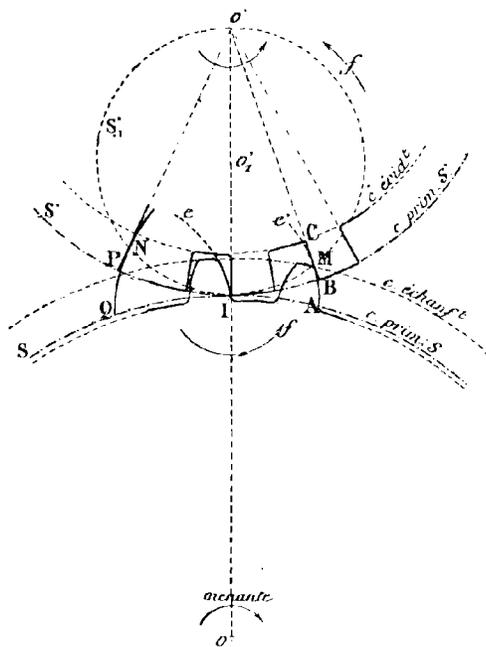


Fig. 235.

querons plus loin (274) les précautions à prendre pour qu'ils ne gênent pas les faces de la roue.

2° En prenant o comme menante, la conduite n'a lieu qu'en retraite; elle se produirait seulement en approche si la menante était o' . Nous avons déjà indiqué les conséquences de ce fait au point de vue du frottement (268). De plus, dans ces conditions, il est à craindre que les dents du pignon, terminées par des arêtes vives, ne viennent buter contre les faces correspondantes de la roue, ce qui arrête le mouvement, ou casse la dent, ou bien enfin provoque un arrachement de la matière (*). Pour ces deux raisons, il n'est pas possible de mener en toute sécurité la roue par le pignon; l'engrenage n'est donc pas réciproque.

3° On a donné les faces à la plus grande roue et les flancs à la plus petite. On peut faire l'inverse, mais à cause des frottements plus durs en approche qu'en retraite, la roue qui porte les faces doit toujours être prise comme menante, afin que la conduite ait lieu après la ligne des centres.

§ III. — Engrenage réciproque à flancs droits, ou engrenage à flancs droits et à faces épicycloïdales.

271. La réciprocité des engrenages est indispensable dans la plupart des machines,

par suite de cette circonstance que leur vitesse, commandée par la transmission générale de l'atelier, reste généralement constante, tandis que la résistance qui leur est offerte change à chaque instant. Cette variation de la résistance est cause que les roues sont alternativement menante et menée; de plus, beaucoup de machines sont à changement de marche; il est donc important de tracer les dentures de telle manière que chacune d'elles puisse conduire l'autre des deux côtés de la ligne des centres.

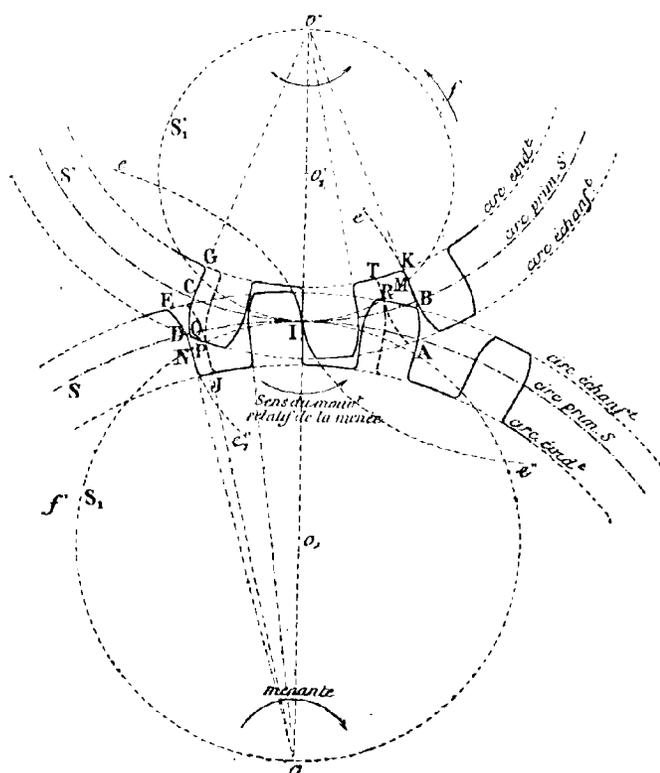


Fig. 226.

du mouvement relatif de la menée indiqué par la flèche f' , intérieurement à S et

(*) On donne à ce phénomène le nom d'*arc-boutement*. Il peut se produire même entre des dents parfaitement régulières et bien polies, sous la seule action du frottement. Voir à ce sujet le paragraphe 326.

extérieurement à S' (fig. 226). Le point I décrit, dans ce double mouvement, un rayon oI et une épicycloïde e' qui, d'après le principe de la méthode des roulettes (260), satisfont aux conditions de la transmission avec rapport constant des vitesses angulaires. On peut d'ailleurs montrer directement, par un raisonnement identique à celui du paragraphe 269, que, en supposant la roue o menante, l'action mutuelle de ces profils assure la conduite avant le passage de leur point de contact sur la ligne des centres. Il suffit de porter sur S_1 , à partir du point I et en approche, un arc quelconque IN , puis de considérer le rayon oND et l'épicycloïde Ce_1 décrits par le point N dans le double roulement de S_1 . On établit facilement l'égalité

$$\text{arc } IN = \text{arc } IC = \text{arc } ID$$

En résumé : *Le lieu du point de contact des dents est, en approche, un arc de la circonférence S_1 égal à l'arc d'approche, et, en retraite, un arc de la circonférence S_1 égal à l'arc de retraite.*

Cette propriété donne le moyen d'assurer à l'engrenage des arcs d'approche et de retraite déterminés a et b . On porte l'arc d'approche en IP sur S_1 , et l'on échanfrine les dents de la menée à la circonférence de rayon oP . La portion Qe_1 du profil épicycloïdal étant ainsi supprimée, l'action du rayon oND commence seulement quand il a pris la position oJP , et se termine quand il est venu en oI . A partir de cet instant, la face DE de la menante presse le flanc oGC de la menée pendant la période de retraite. Enfin, pour que les têtes des dents de la menée puissent se loger dans les creux de la menante, on limite ceux-ci à une circonférence d'évidement de centre o , presque tangente à la circonférence d'échanfrinement du pignon.

Pour réaliser un arc de retraite $b = IR$, on procède comme il a été indiqué au paragraphe 269. Afin d'avoir toujours une paire de dents de prise, il est nécessaire que l'arc total de conduite soit de un pas au moins.

272. Remarques. — 1° Les dents des deux roues sont moins épaisses à la base qu'à la circonférence primitive. On pare aux dangers de rupture qui résultent de ce fait en remarquant que les portions PJ et RT des flancs ne sont pas utilisées dans la transmission, et peuvent être remplacées, au voisinage des circonférences d'évidement, par des congés.

2° Les deux roues d'un pareil engrenage sont faites l'une pour l'autre, puisque les faces de chacune d'elles dépendent du rayon de sa conjuguée. On ne peut donc pas associer deux roues quelconques, de même pas et de même longueur de dents, construites d'après ce tracé.

§ IV. — Engrenage à faces et à flancs épicycloïdaux.

273. Cet engrenage diffère du précédent en ce que les profils des flancs sont constitués, sur les deux roues, par des arcs d'hypocycloïdes. On réalise cette modification en donnant aux circonférences S_1 et S'_1 des diamètres respectivement inférieurs à oI et $o'I$. Lorsqu'on les fait rouler sur S et S' dans le sens du mouvement relatif de la menée (la roue o est encore supposée menante), le point I décrit deux couples des courbes (e, h) , (e', h') (fig. 227), formés chacun d'une épicycloïde et d'une hypocycloïde, qui, d'après la méthode des roulettes, assurent la transmission avec un rapport constant de vitesses angulaires, égal au rapport inverse des rayons des circonférences primitives.

Le couple (e, h) , engendré par le roulement de S'_1 , réalise la conduite après la ligne des centres. Les courbes (e_1, h_1) , décrites par un point M de S'_1 situé en retraite, peuvent, en effet, être considérées comme des positions de (e, h) après que les

circonférences primitives ont tourné autour de leurs centres des quantités IA et IB, et les égalités évidentes

$$\text{arc IM} = \text{arc IA} = \text{arc IB}$$

montrent que l'action de e sur h communique aux circonférences primitives un mouvement de roulement simple, dont l'étendue est mesurée par l'arc IM. De plus, e_1 et h_1 sont normales à IM , et par suite tangentes en M.

On prouve de la même manière, en faisant intervenir les lieux géométriques

(e'_1, h'_1) d'un point N de S_1 situé en approche, que le couple (e', h') assure la conduite avant la ligne des centres, sur une étendue égale à l'arc IN.

En résumé : Le lieu du point de contact des dents est, en approche, un arc de la circonférence S_1 égal à l'arc d'approche, et, en retraite, un arc de la circonférence S'_1 , égal à l'arc de retraite.

Ces propriétés donnent le moyen de réaliser des arcs d'approche et de retraite déterminés a et b . On procède comme il a été indiqué aux paragraphes 269 et 271. La fig. 228 suppose

$$a = \frac{3}{4} P \text{ et } b = \frac{5}{8} P. \text{ La somme } a + b = \frac{11}{8} P \text{ étant}$$

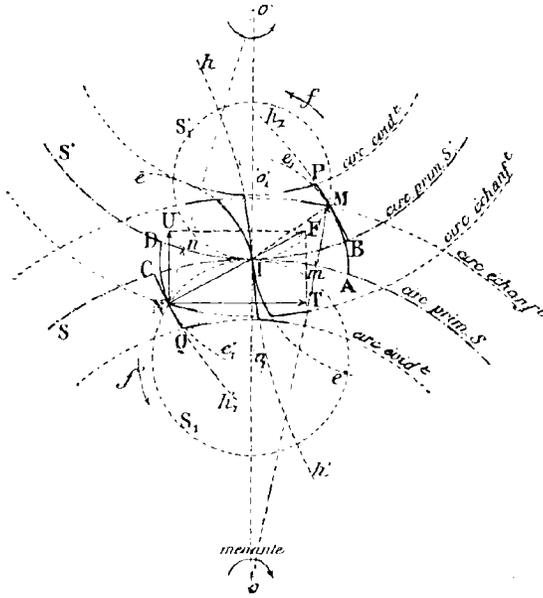


Fig. 227.

supérieure au pas, il y a toujours au moins une paire de dents en prise.

On a représenté les profils conjugués dans les positions qu'ils occupent en M et en N, au commencement et à la fin de la conduite. On voit que les portions NP et MQ des flancs n'interviennent pas dans la transmission. Cette remarque sera utilisée au paragraphe suivant.

274. Influence de la variation des rayons des cercles générateurs S_1 et S'_1 sur la forme des profils.

Les diamètres des circonférences S_1 et S'_1 ont été supposés respectivement inférieurs aux rayons des circonférences primitives. Dans ces conditions, les hypocycloïdes symétriques, telles que h et H (fig. 229), qui forment les flancs d'une même dent, s'écartent l'une de l'autre à mesure qu'on se rapproche de la base, ce qui augmente l'épaisseur des dents à la racine, et diminue les chances de rupture. Mais plus les diamètres des cercles générateurs sont petits, plus les épicycloïdes (e, E) , (e', E') se couchent sur les circonférences primitives correspondantes, circonstance qui tend à affaiblir les têtes des dents. Il peut même arriver que la convergence des deux épicycloïdes symétriques qui forment les faces d'une même dent soit assez rapide pour que l'on ne puisse pas échanfriner de manière à assurer à l'engrenage un arc de conduite suffisant de chaque côté de la ligne des centres. Les diamètres des

cercles générateurs ne peuvent donc pas tomber au-dessous d'un certain minimum.

Si, au contraire, ces diamètres dépassent respectivement oI et $o'I$, les hypocycloïdes symétriques (h, H), (h', H') (fig. 230), qui forment les flancs d'une même dent, tendent à se couper, de sorte que les dents sont étranglées à la racine. Dans les mêmes conditions, les épicycloïdes (e, E) (e', E'), qui forment les faces, se relèvent, et le sommet des dents s'élargit. Ces deux faits se présentent déjà, mais à un moindre degré, dans l'engrenage réciproque à flancs droits. Il n'est donc pas prudent, au point de vue de la solidité des dents, de donner aux diamètres des cercles générateurs des valeurs supérieures aux rayons des circonférences primitives correspondantes. Nous indiquerons au paragraphe 227 les dimensions adoptées dans la pratique.

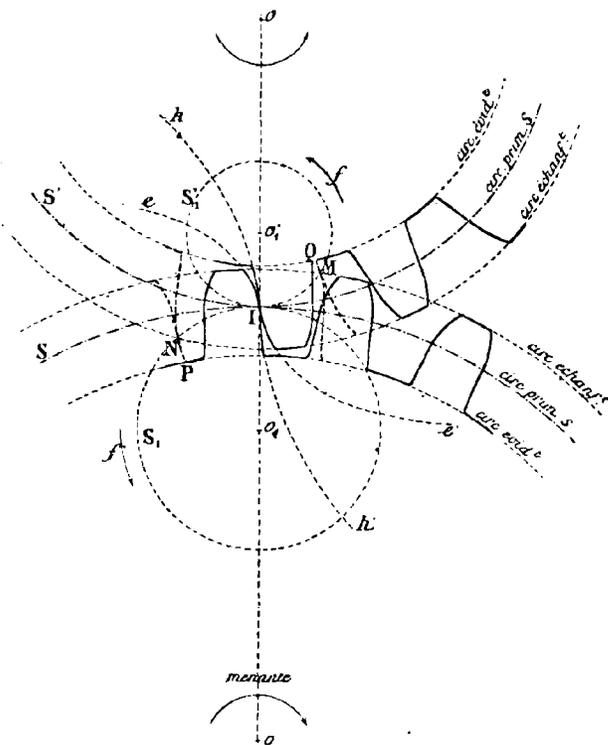


Fig. 228.

Il est possible toutefois de dépasser ces limites en remplaçant par de forts congés les parties des flancs qui ne sont pas utilisées dans la transmission. Supposons, par exemple, que le diamètre de S'_1 soit plus grand que $o'I$, celui de S_1 restant inférieur à oI (fig. 231). Soient Ih et Ch_1 les flancs d'une dent du pignon qui, dans l'hypothèse considérée, convergent l'un vers l'autre, et donnent un étranglement inadmissible à la racine. Dans le mouvement relatif de la menante par rapport à la menée, qui consiste en un roulement sans glissement dans le sens f_1 , la trajectoire relative du point A est une épicycloïde allongée Aa, que l'on peut construire par la méthode de Poncelet (257), en la regardant comme l'enveloppe d'une circonférence de rayon nul. Il suffit de prendre sur les circonférences primitives, à partir du point I, des arcs égaux $I1, I2, I3... I1', I2', I3'...$ puis de tracer l'enveloppe des circonférences décrites de $I', 2', 3'...$ comme centres avec $1A, 2A, 3A...$ comme rayons. La partie inutile des flancs peut être remplacée par une courbe quelconque extérieure à l'épicycloïde Aa, puisque cette substitution laisse le passage libre à l'extrémité A de la dent menante. Les profils IB, CD, qui forment ainsi les nouveaux flancs du pignon, assurent à ses dents une solidité suffisante.

On verra plus loin que l'on a été conduit à employer, pour tous les engrenages de même pas, les mêmes cercles générateurs S_1 et S'_1 . L'artifice que l'on vient d'étudier permet donc de réduire beaucoup le diamètre du pignon, et par suite le nombre de ses dents. Il est employé dans les engrenages pour crics, où le nombre des dents descend jusqu'à quatre.

275. Cas limite. — Quand les cercles générateurs se confondent respectivement

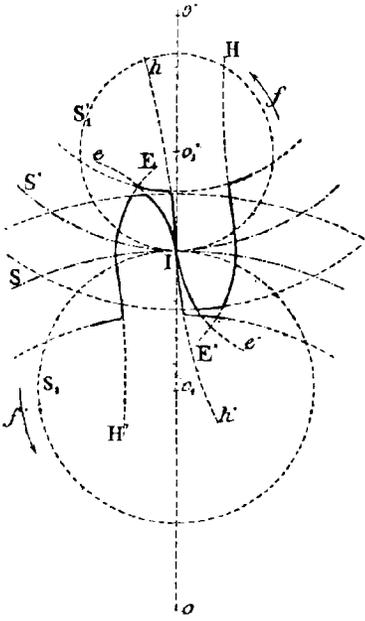


Fig. 229.

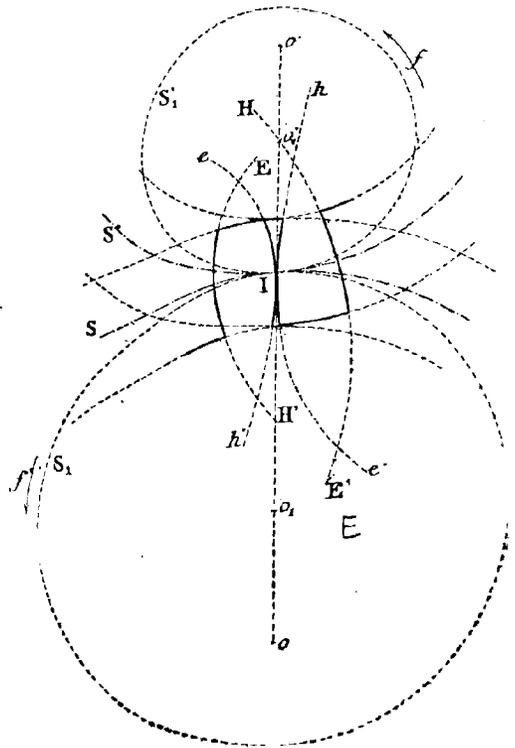


Fig. 230.

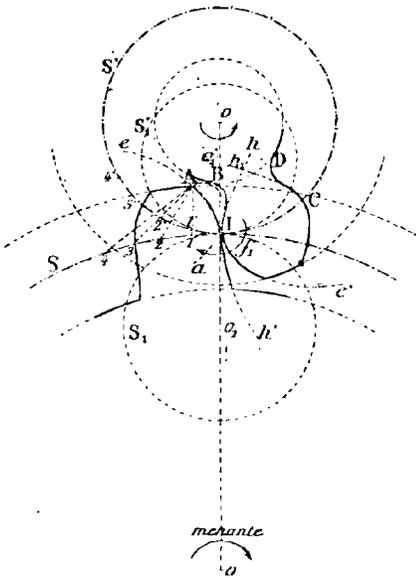


Fig. 231.

avec les circonférences primitives, les profils (h', e') du cas général qui conduisent en approche se réduisent au point I, et à l'épicycloïde Ie' qu'il engendre dans le roulement de S sur S' (fig. 232). Les profils de retraite (e, h) se réduisent de même au point I, et à l'épicycloïde Ie qu'il décrit dans le roulement de S' sur S. Il s'en suit que, théoriquement, les dents sont limitées seulement par les arcs d'épicycloïdes IA et IB, et que les flancs, réduits chacun à un point unique, ne pénètrent pas à l'intérieur des circonférences primitives. En supposant la roue o menante dans le sens de la flèche, le point I de IA pousse IB tant qu'il se trouve à gauche de la ligne des centres, après quoi l'arc IA pousse le point I de IB jusqu'à ce que les dents se quittent. L'engrenage est réciproque, puisque la conduite

s'effectue en approche et en retraite.

Pratiquement, il est nécessaire de ménager des creux sur chaque roue pour loger les pleins de l'autre. Les courbes IC et ID qui les limitent, ne devant pas

intervenir dans la transmission, sont assujetties à la seule condition de laisser le passage libre aux extrémités A et B de deux dents conjuguées. Comme dans le cas précédent, on les trace extérieurement aux épicycloïdes allongées Aa, Bb que décrivent les points A et B, pendant que la roue à laquelle chacun d'eux appartient roule sur l'autre supposée fixe.

Ce genre d'engrenages se rencontre dans les crics.

276. Direction de l'effort transmis par une dent de la menante. — Si l'on ne tient pas compte du frottement, l'action d'une dent de la menée qu'elle conduit se traduit par une force F (fig. 227) dirigée suivant la normale commune à leurs profils. De ce que le lieu du point de contact des dents est, pendant l'approche, l'arc NI de la circonférence S_1 , et, pendant la retraite, l'arc IM de S'_1 , on conclut déjà que la direction de l'effort transmis est perpendiculaire à la ligne des centres au moment où le point de contact des dents la franchit, et oblique sur cette ligne à tout autre instant. De plus, pour deux roues données, les directions extrêmes de F sont d'autant plus écartées de la perpendiculaire à la ligne des centres que les arcs d'approche et de retraite sont plus étendus. Ces caractères sont communs à tous les engrenages épicycloïdaux. Nous en développerons plus loin (287) les conséquences.

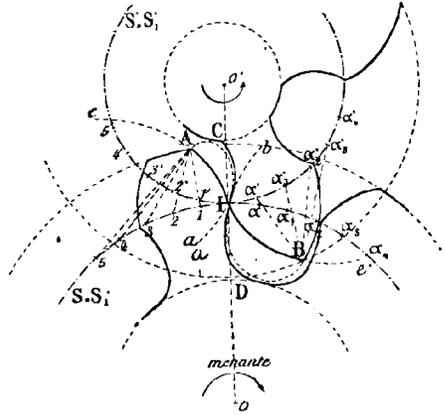


Fig. 232.

277. Roues d'assortiment. — Dans un grand nombre de machines-outils (dans le tour à fileter par exemple), il est nécessaire de pouvoir changer le rapport des vitesses angulaires de deux arbres, dont l'un conduit l'autre par l'intermédiaire d'engrenages. Pour cela, on établit une collection de roues à nombres de dents différents, composée de telle sorte que deux éléments pris arbitrairement dans la série puissent être associés. C'est ce qu'on appelle des *roues d'assortiment*, ou de *série*.

Pour que des roues constituent un assortiment, il est nécessaire et suffisant :

1° Que les profils des dents de chacune d'elles soient les enveloppes des profils de toutes les autres, quand les circonférences primitives correspondantes roulent l'une sur l'autre sans glisser (254) ;

2° Que les longueurs de toutes les faces soient égales, ainsi que celles de tous les flancs. (Ces longueurs sont, par convention, les différences entre les rayons des circonférences primitives et ceux des circonférences d'échanfournement et d'évidement correspondantes).

Théoriquement, les faces d'une roue ont, en effet, même longueur que les flancs de sa conjuguée ; les inégalités qui existent dans la pratique, destinées à laisser un certain jeu au fond des creux, ne sont aucunement nécessaires à la transmission du mouvement.

3° Que toutes les roues aient le même pas circonférentiel et le même module (263).

Le tracé par faces et flancs épicycloïdaux se prête à la constitution de roues d'assortiment. En prenant le même pas, ou le même module, et les mêmes cercles générateurs pour toute la série, la première et la troisième conditions sont immédiatement satisfaites. Pour réaliser la seconde, il faut renoncer à déterminer les rayons des cir-

conférences d'échanfrinement et d'évidement en vue d'assurer à deux roues données des arcs d'approche et de retraite fixés d'avance. Les longueurs Mm et Nn des faces (fig. 227) dépendent, en effet, à la fois des longueurs attribuées aux arcs IM et IN , et des rayons des circonférences primitives; elles varieraient d'une roue à l'autre si l'on imposait à tout l'assortiment les mêmes arcs d'approche et de retraite. Aussi donne-t-on aux faces une longueur invariable, choisie de telle sorte que, dans les conditions les plus défavorables, l'arc total de conduite soit au moins égal à un pas. Voici les dimensions indiquées par Reuleaux.

En désignant par P le pas de l'engrenage, le rayon commun des cercles générateurs est

$$r = \frac{7}{8} P = 0,875 P$$

La longueur des faces est $F = 0,3 P$

et celle des flancs $f = 0,4 P$

Le jeu au fond des creux est $0,1 P$

Dans les tracés au module, on substitue à ces dimensions les suivantes :

$$r = 2,75 M \quad F = M \quad f = \frac{7}{6} M$$

Nous calculerons plus loin (Chap. V) l'arc de conduite minimum qui en résulte.

278. Nombre minimum des dents d'une roue de la série. — Dans les roues d'assortiment à profils épicycloïdaux, on ne descend jamais au-dessous des flancs droits, de sorte que le rayon R de l'une quelconque des circonférences primitives est au moins égal à $2r$. On a donc, en supposant les dimensions rapportées au pas circonférentiel

$$R \geq 2r \text{ ou } 1,75 P$$

d'où $2 \pi R \geq 3,50 \pi P$

Mais en désignant par n le nombre des dents de cette roue, on a aussi

$$2 \pi R = nP$$

Et par suite $n \geq 3,50 \pi (= 10,995)$

Si les dimensions sont rapportées au module, la condition $R \geq 2r$ devient

$$R \geq 5,50 M \text{ ou } 5,50 \frac{P}{\pi}$$

D'où $2 \pi R$ ou $nP \geq 11 P$ et enfin $n \geq 11$

Dans les deux cas, et sous la condition de ne pas accepter de dents étranglées à la racine, chaque roue de la série doit avoir au moins onze dents.

§ V. — Engrenage à développantes de cercle.

279. Menons par le point de contact I des circonférences primitives une droite xy (fig. 233) faisant avec la tangente commune $A_1 B_1$, dans le sens du mouvement relatif de la menée, un angle aigu $B_1 Iy$ provisoirement arbitraire, et traçons les circonférences S_1 et S'_1 , de centres o et o' , tangentes à cette droite. Quand xy roule successivement sur S_1 et sur S'_1 , chacun de ses points décrit deux développantes de cercle qui, comme nous allons le montrer, se conduisent mutuellement de part et d'autre de la ligne des centres, avec un rapport constant de vitesses angulaires égal au rapport inverse des rayons des circonférences primitives.

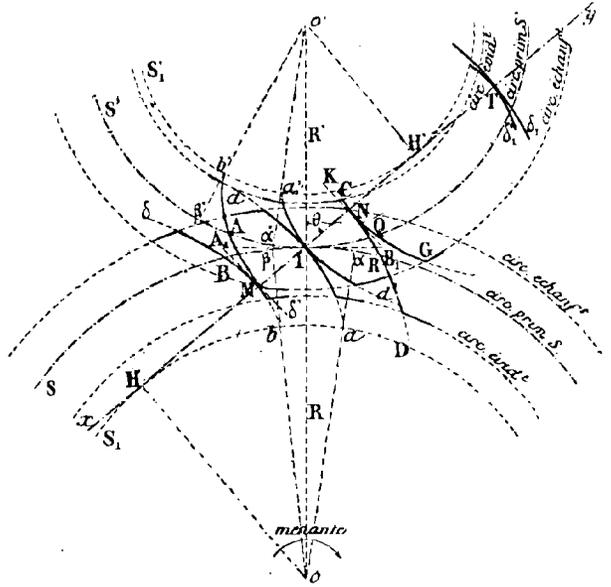


Fig. 233.

Considérons, pour cela, les développantes $bM\delta$, $b'M\delta'$ engendrées par un point quelconque M de xy . D'après une propriété connue de ces courbes, la droite MI

leur est normale commune en M. Si on les suppose invariablement liées aux circonférences primitives, elles conduisent celles-ci avec un rapport de vitesses angulaires égal à chaque instant à $\frac{o'I}{o'I}$ (243). Comme le point I est fixe sur oo' , ce rapport est constant ; de plus sa valeur est la même que si l'on avait conservé les cylindres de friction.

280. Afin d'établir une relation entre le déplacement du point de contact des profils et l'arc de conduite, nous allons prouver directement que les développantes $bM\delta$, $b'M\delta'$ assurent la transmission des deux côtés de la ligne des centres. Soient A et B leurs points d'intersection avec les circonférences primitives correspondantes, aId et $a'Id'$ les développantes, identiques aux précédentes, décrites par le point I dans le roulement de xy sur les circonférences S_1 et S'_1 . Le couple de courbes ($bM\delta$, $b'M\delta'$) vient se superposer au couple (aId , $a'Id'$) après que les circonférences primitives ont parcouru, en tournant autour de leurs centres, les arcs IA et IB ; la question revient à démontrer l'égalité de ces arcs. Or, les triangles mixtilignes $bB\beta$, $aI\alpha$, qui coïncident en même temps que les développantes δ et d , donnent la relation

$$\text{arc } B\beta = \text{arc } I\alpha$$

d'où l'on déduit, à cause de la partie commune $I\beta$

$$\text{arc } IB = \text{arc } \alpha\beta$$

La comparaison des arcs ab et $\alpha\beta$ donne ensuite la proportion

$$\frac{\text{arc } \alpha\beta}{\text{arc } ab} = \frac{o\alpha}{oa} = \frac{oI}{oH}$$

On en tire $\text{arc } IB = \text{arc } \alpha\beta = \text{arc } ab \times \frac{oI}{oH}$

Mais, d'après la définition de la développante de cercle

$$HM = \text{arc } Hb$$

$$HI = \text{arc } Ha$$

et, par conséquent, $IM = \text{arc } ab$

Il vient donc

$$\text{arc } IB = IM \times \frac{oI}{oH} = \frac{IM}{\sin \theta} \quad (1)$$

en désignant par θ l'angle de xy avec la ligne des centres.

On établirait de la même manière que

$$\text{arc } IA = \frac{IM}{\sin \theta} \quad (2)$$

Les égalités (1) et (2) montrent que $\text{arc } IA = \text{arc } IB$.

Un raisonnement identique prouverait, en considérant les positions CNG, DNK des développantes δ et δ' à un instant quelconque de la retraite, et leurs points de rencontre Q et R avec les circonférences primitives, que les arcs IQ et IR sont égaux.

Par analogie avec ce qui précède, leur valeur commune est $\frac{IN}{\sin \theta}$. En résumé :

Le lieu du point de contact des dents est, en approche, un segment MI de xy égal à $a \sin \theta$, et, en retraite, un autre segment IN de la même droite, égal à $b \sin \theta$, a et b désignant les arcs d'approche et de retraite.

Ces propriétés permettent d'obtenir un arc de conduite déterminé de chaque côté de la ligne des centres. On porte les arcs d'approche et de retraite en IA_1 et IB_1 sur la tangente commune aux circonférences primitives, puis l'on abaisse les perpendiculaires A_1M et B_1N sur xy . En échanfrinant les dents de la menée au cercle de rayon $o'M$ (fig. 233) et celles de la menante au cercle de rayon oN , les parties $M\delta'$, NK des développantes sont supprimées, et la conduite n'a lieu qu'entre les positions extrêmes ($bM\delta$, $b'M\delta'$) et (CNG, DNK) des profils. Les arcs d'approche et de retraite ainsi réalisés ont pour valeurs respectives

$$a = \frac{IM}{\sin \theta} = \frac{IA_1 \sin \theta}{\sin \theta} = IA_1$$

$$b = \frac{IN}{\sin \theta} = \frac{IB_1 \sin \theta}{\sin \theta} = IB_1$$

comme on se l'était proposé.

La figure 234 représente un engrenage extérieur à développantes, dans lequel les arcs d'approche et de retraite sont égaux aux $\frac{3}{4}$ du pas. Il faut remarquer que les

cercles d'évidement sont ici intérieurs aux circonférences S_1 et S'_1 , sur lesquelles se trouvent les origines v et z des développantes (*) ; on est donc obligé de prolonger celles-ci jusqu'aux circonférences d'évidement par des profils vv' , zz' que l'on pourrait déterminer comme au paragraphe 273, de manière qu'ils ne gênent pas la transmission. Mais, dans la pratique, on emploie généralement des portions de rayons, terminées par un petit congé ; il arrive alors parfois que ces profils supplémentaires interviennent dans la transmission. Nous chercherons plus loin à quelles conditions ce fait se produit, et les moyens de s'y opposer (286).

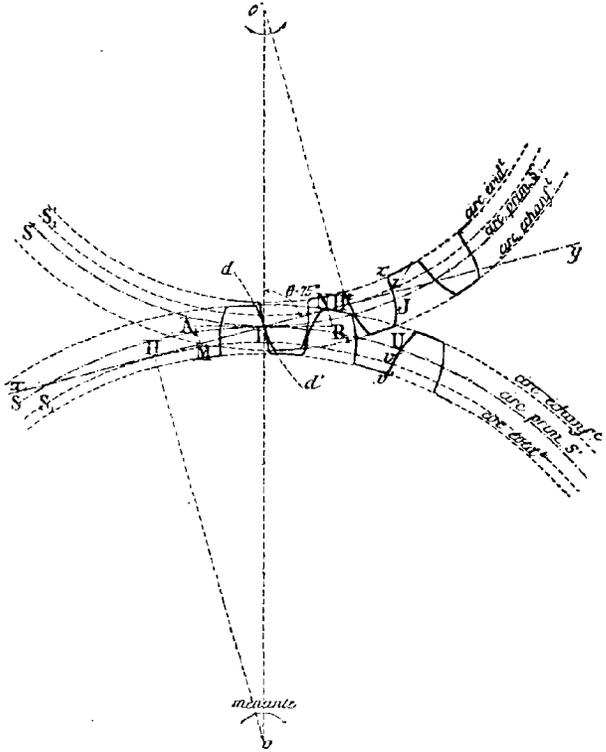


Fig. 234.

281. Maximum des arcs d'approche et de retraite. — Le raisonnement par lequel on a établi que les développantes décrites par le point M

(fig. 233) assurent la conduite des deux côtés de la ligne des centres, suppose ce point compris entre II et II', car pour un point T de xy situé hors de cette région, les développantes tournent leur concavité vers I, et il est impossible au profil $T\delta_1$, relatif à la roue o supposée menante, de conduire le profil $T\delta'_1$ de la menée.

Il résulte de là que le point de contact de deux dents ne peut se déplacer qu'entre H et H'. Comme les arcs d'approche et de retraite qui correspondent à un contact dont le début est en M et la fin en N sont respectivement

$$a = \frac{IM}{\sin \theta} \quad \text{et} \quad b = \frac{IN}{\sin \theta}$$

chacun d'eux a un maximum dont la valeur est, pour le premier

$$a_1 = \frac{IH}{\sin \theta} = \frac{R \cos \theta}{\sin \theta} = R \cotg \theta$$

(*) Ce fait ne se produit pas nécessairement. Il n'a pas lieu pour la menante dans la figure 233. Voir à ce sujet le paragraphe (286).

et, pour le second
$$b_1 = \frac{IH'}{\sin \theta} = R' \cotg \theta$$

R et R' désignant les rayons des circonférences primitives. Ces expressions montrent :

1° Que, pour des rayons donnés, les maxima des arcs d'approche et de retraite sont d'autant plus grands que θ est plus petit.

2° Que, pour une valeur donnée de θ , le maximum de l'arc d'approche est proportionnel au rayon de la menante, et celui de l'arc de retraite proportionnel au rayon de la menée.

232. Influence de la variation de l'angle θ sur la forme des profils. — Dans la pratique, l'inclinaison de xy sur la ligne des centres ne reste pas arbitraire. Pour en fixer les limites, observons que :

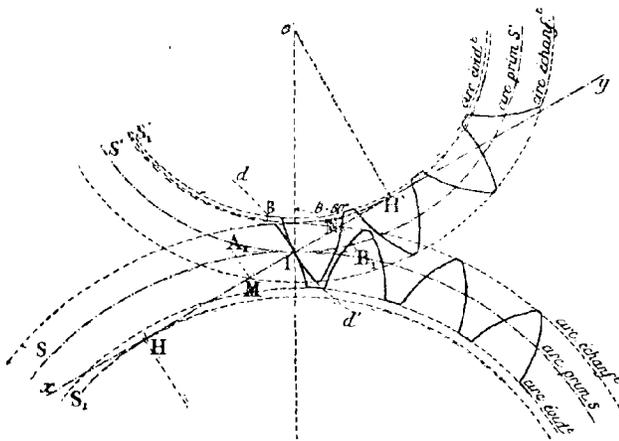


Fig. 235.

1° L'angle θ ne peut pas être trop aigu. La comparaison des figures 234 et 235 montre en effet que, quand cet angle décroît, les développantes symétriques qui forment les profils d'une même dent se couchent davantage sur les circonférences primitives, de manière à arriver plus rapidement à leur point de rencontre. Il en résulte d'abord un amincissement des dents au sommet, dangereux pour leur solidité. De plus, il peut arriver que cette conver-

gence des profils se produise assez vite pour que l'on ne puisse pas échauffer les dents de manière à assurer à l'engrenage un arc de conduite suffisant de part et d'autre de la ligne des centres.

2° L'angle θ ne peut pas atteindre un droit. Car, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, les valeurs maxima des arcs d'approche et de retraite s'annulent ; la conduite avec rapport constant des vitesses angulaires n'a donc lieu, dans ce cas, qu'à l'instant où le point de contact des dents se trouve sur la ligne des centres.

L'expérience a montré que les meilleurs résultats sont obtenus quand xy est inclinée de 75° sur la ligne des centres (*).

283. Direction de l'effort transmis par une dent de la menante. — La normale commune aux profils de deux dents en prise est constamment xy ; la direction de la pression exercée par une dent de la menante sur celle de la menée qu'elle conduit est donc invariable pendant toute la durée de leur action.

284. Roues d'assortiment. — Le tracé par développantes se prête à la constitution de roues d'assortiment. Les profils des dents d'une roue ne dépendent, en effet,

(*) On trouvera aux paragraphes 287 et 328 d'autres raisons qui justifient le choix de cette inclinaison.

aucunement de sa conjuguée, mais seulement de l'angle θ . Deux roues à développantes pourront donc toujours se conduire, quels que soient leurs nombres de dents, pourvu qu'elles aient été construites avec une même valeur de θ qu'elles aient même pas, ou même module, et mêmes longueurs de faces et de flancs (277). Comme dans le cas des roues à profils épicycloïdaux et pour une raison analogue, on ne peut réaliser cette dernière condition qu'en renonçant à déterminer les rayons des circonférences d'échanfrinement et d'évidement d'après les arcs d'approche et de retraite que l'on désire obtenir. En pratique, on donne aux faces et aux flancs les longueurs invariables $F = 0.3 P$, $f = 0.4 P$ dans les tracés au pas circonférentiel, et les longueurs $F = M$, $f = \frac{7}{6} M$ dans les tracés au module. Nous calculerons au chapitre V l'arc de conduite qui résulte de ces dimensions.

285. Nombre minimum des dents d'une roue de la série. — L'arc total de conduite ne doit pas être inférieur à un pas, afin d'avoir toujours au moins une paire de dents en prise. Pour qu'il puisse en être ainsi, il est nécessaire que la somme

$$a_1 + b_1 = (R + R') \cotg \theta$$

des arcs d'approche et de retraite maxima soit égale ou supérieure à P . Cette somme prend évidemment sa plus petite valeur en même temps que $R + R'$, c'est-à-dire quand le plus petit pignon de la série engrène avec lui-même. Si donc la condition $a_1 + b_1 \geq P$ est satisfaite pour lui, elle le sera a fortiori pour deux roues quelconques de l'assortiment. En désignant par R_0 son rayon, et par n_0 son nombre de dents, on devra donc avoir

$$a_1 + b_1 = 2R_0 \cotg \theta \geq P$$

ou, en multipliant les deux membres par π , et en tenant compte de l'égalité $2\pi R_0 = n_0 P$

$$n_0 \cotg \theta \geq \pi$$

d'où enfin

$$n_0 \geq \pi \operatorname{tg} \theta$$

Si $\theta = 75^\circ$, $\operatorname{tg} \theta = 3.732$ et $\pi \operatorname{tg} \theta = 11.73$. Le plus petit pignon de la série doit donc avoir au moins 12 dents.

Bien entendu, l'arc de conduite effectif sera égal au pas que si les faces ont des longueurs convenables.

Nous verrons plus loin (chap. V) que les dimensions adoptées suffisent dans tous les cas.

286. Influence des profils auxiliaires d'évidement. — On a vu précé-

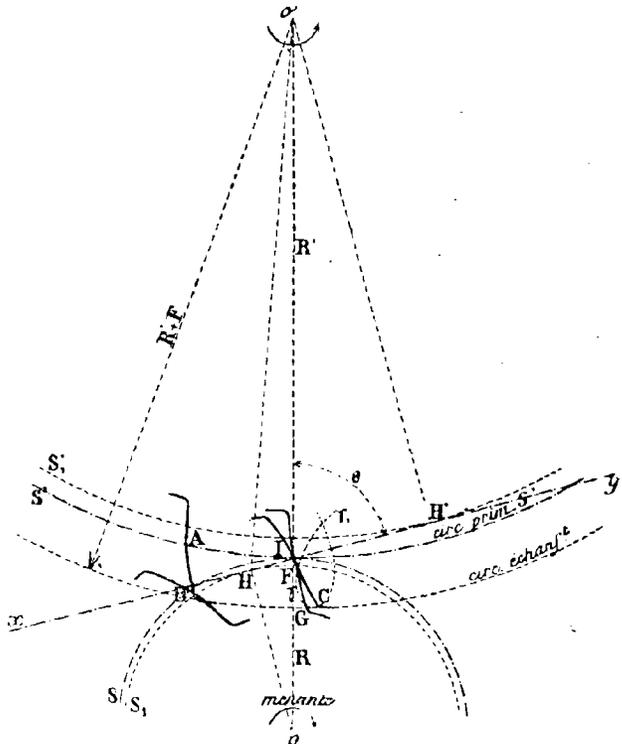


Fig. 236.

demment (fig. 234) que, dans certains cas, les circonférences d'évidement sont intérieures aux circonférences S_1 et S'_1 qui renferment les origines des développantes, de sorte qu'on est obligé de prolonger celles-ci par des profils auxiliaires qui sont, le plus souvent, des portions de rayons. Pour que ce fait se produise pour la menante o par exemple (fig. 236), il suffit que le cercle d'échanfrinement de la menée coupe la circonférence S_1 , c'est-à-dire que l'on ait

$$R + R' < oH + (R' + F)$$

oH étant égal à $R \sin \theta$, cette inégalité, résolue par rapport à R , devient

$$R < \frac{F}{1 - \sin \theta}$$

En multipliant les deux membres par 2π afin d'introduire le nombre n de dents de la menante et le pas P , on a

$$nP < \frac{2\pi F}{1 - \sin \theta}$$

ou, en remplaçant F par sa valeur $M = \frac{P}{\pi}$ dans le tracé au module

$$n < \frac{2}{1 - \sin \theta}$$

Si $\theta = 75^\circ$, $\sin \theta = 0.966$ et l'on trouve $n \ll 58$.

Par conséquent, à partir de 59 dents à la roue, son cercle d'évidement est extérieur à S_1 quel que soit le pignon associé, et les profils des dents sont constitués seulement par des développantes (*).

Au-dessous de cette limite, les profils auxiliaires d'évidement tels que FG sont inévitables. Ils doivent, bien entendu, être tels que l'arête C de la menée puisse se mouvoir librement pendant toute la conduite, c'est-à-dire être extérieurs à l'épicycloïde allongée $C\gamma\gamma_1$ que décrit le point C dans le mouvement relatif de la menée, sans quoi les profils tendraient à se pénétrer à un certain moment de l'approche (fig. 236). La longueur des faces n'étant plus déterminée en vue d'assurer un arc de conduite fixé d'avance, il peut se faire, en effet, qu'elle soit assez grande pour que l'arc d'approche dépasse son maximum théorique $\frac{IH}{\sin \theta} = R \cotg \theta$. Dans ce cas, le profil auxiliaire FG entre en action avec la face de la menée. Ce fait, nuisible à la régularité du mouvement transmis, peut provoquer des arcs-boutements. Il se produit quand le rayon de la circonférence d'échanfrinement de la menée dépasse la valeur $o'H$ (**). Il cesse d'être à craindre dès que

$$o'H \gg R' + F \tag{1}$$

Mais on a, dans le triangle $o'IH$

$$\begin{aligned} \overline{o'H}^2 &= \overline{o'I}^2 + \overline{IH}^2 + 2o'I \times IH \cos \theta \\ &= R'^2 + R^2 \cos^2 \theta + 2RR' \cos^2 \theta \end{aligned}$$

(*) Dans le tracé au pas circonférentiel, $F = 0.3 P$ et le calcul donne $n \ll 55$. La conclusion s'applique à partir de 56 dents.

(**) Parce que le point d'intersection de cette circonférence avec xy marque la position du point de contact des dents au commencement de l'approche.

En élevant au carré les deux membres de l'inégalité (1), et en remplaçant, il vient

$$R^2 \cos^2 \theta + 2RR' \cos^2 \theta - F(2R' + F) \geq 0$$

Les racines du premier membre, considéré comme un trinôme du second degré en R, sont toujours réelles et de signes contraires. L'inégalité ne peut être satisfaite que si R dépasse la racine positive, ce qui donne

$$R \geq \frac{-R' \cos^2 \theta + \sqrt{R'^2 \cos^4 \theta + F \cos^2 \theta (2R' + F)}}{\cos^2 \theta}$$

ou

$$R \geq \sqrt{R'^2 + \frac{2R'F}{\cos^2 \theta} + \frac{F^2}{\cos^2 \theta}} - R'$$

et en multipliant les deux membres par 2π pour introduire les nombres de dents n et n' des deux roues

$$nP \geq \sqrt{n'^2 P^2 + \frac{4n'P \cdot \pi F}{\cos^2 \theta} + \frac{4\pi^2 F^2}{\cos^2 \theta}} - n'P$$

Mais, dans le tracé au module, $F = M = \frac{P}{\pi}$. On a donc, après simplifications,

$$n \geq \sqrt{\left(n' + \frac{2}{\cos^2 \theta}\right)^2 - \frac{4 \operatorname{tg}^2 \theta}{\cos^2 \theta}} - n' \tag{2}$$

La suppression du dernier terme sous le radical augmente évidemment le second membre, et si l'inégalité ainsi simplifiée est satisfaite, l'inégalité (2) l'est a fortiori. Il reste ainsi

$$n \geq \frac{2}{\cos^2 \theta}$$

et si $\theta = 75^\circ$

$$n \geq 30$$

L'effet des profils auxiliaires d'évidement ne peut donc se manifester que quand le nombre des dents de la menante est inférieur à 30 (*). Quand $\theta = 67^\circ 1/2$, on peut descendre jusqu'à 14 dents. Cette limite tombe à 9 si, comme dans les crémaillères, on arrondit l'extrémité des dents de la menée (fig. 269).

287. Comparaison entre les engrenages épicycloïdaux et les engrenages à développantes.

1° *Au point de vue de la pression exercée, suivant la normale, par une dent de la menante sur celle de la menée.*

(*) Dans le tracé au pas circonférentiel, $F = 0.3 P$ et l'inégalité (2) est remplacée par celle-ci

$$n \geq \sqrt{\left(n' + \frac{0.6 \pi}{\cos^2 \theta}\right)^2 - \frac{0.36 \pi^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{\cos^2 \theta}} - n'$$

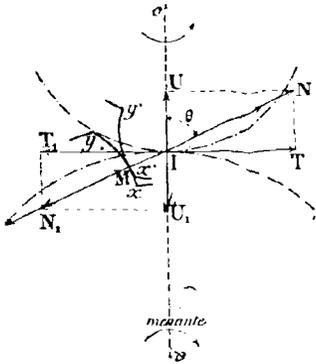
On en déduit, par un raisonnement analogue

$$n \geq \frac{0.6 \pi}{\cos^2 \theta}$$

et si $\theta = 75^\circ$

$$n \geq 29.$$

Soient xy et $x'y'$ (fig. 237) les profils, tangents en M , de deux dents en prise, et MI leur normale commune. La pression du premier sur le second développe une certaine force N , qui, abstraction faite du frottement, est dirigée suivant MI , et une réaction N_1 de la menée, égale et opposée à N . Chacune de ces forces peut être transportée au point I et décomposée en deux autres $T = T_1$, $U = U_1$, respectivement dirigées suivant la tangente aux circonférences primitives et suivant la ligne des centres. En désignant par θ l'angle de MI avec oo' , on a



$$T = N \sin \theta$$

d'où

$$N = \frac{T}{\sin \theta}$$

Fig. 237.

Or, lorsqu'un engrenage est en mouvement régulier, l'effort tangentiel T exercé par la menante est sensiblement constant. Par conséquent : *l'effort normal des dents en contact est inversement proportionnel au sinus de l'angle que forme leur normale commune avec la ligne des centres*. Cette proposition est vraie pour tous les tracés.

Dans les engrenages épicycloïdaux, l'angle θ augmente jusqu'à un droit pendant l'approche, et diminue pendant la retraite. Il s'en suit que la pression normale de la dent menante sur la dent menée diminue pendant l'approche et augmente pendant la retraite. Elle atteint son minimum T au moment où le point de contact des dents est sur la ligne des centres.

Dans les engrenages à développantes, l'angle θ étant invariable, la pression normale reste constante ; sa valeur, en fonction de l'effort tangentiel, est $\frac{T}{\sin 75^\circ}$. Nous montrerons un peu plus loin que, dans les engrenages épicycloïdaux, θ est inférieur à 75° au commencement et à la fin de la conduite. Les pressions normales correspondantes sont donc plus grandes dans ces engrenages que dans ceux à développantes.

2° Au point de vue des pressions exercées sur les paliers.

Les forces U et U_1 , dont l'expression est $U = U_1 = T \cotg \theta$, pressent les arbres de rotation sur les coussinets des paliers qui les supportent. Dans les engrenages à profils épicycloïdaux, ces forces décroissent pendant l'approche, croissent pendant la retraite, et s'annulent au moment où le point de contact des dents passe la ligne des centres. Dans les engrenages à développantes, elles restent constantes pendant toute la durée de la conduite. Dans les deux cas, elles sont, toutes autres choses égales d'ailleurs, d'autant plus petites que l'angle θ est plus voisin d'un droit. C'est une raison de faire en sorte que, quel que soit le tracé suivi, θ ne descende pas au-dessous d'une certaine limite.

Cette condition est facile à réaliser dans les engrenages à développantes, puisqu'on dispose de l'inclinaison de xy sur la ligne des centres ; on prend généralement $\theta = 75^\circ$. Mais dans les assortiments de roues à profils épicycloïdaux, avec les dimensions indiquées au paragraphe 277, θ prend des valeurs inférieures à 75° au commencement et à la fin de la conduite. Soit, pour fixer les idées, N le point

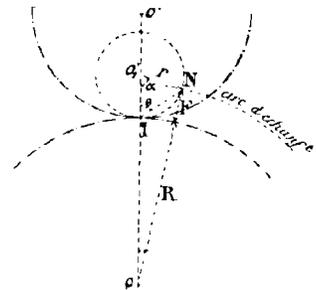


Fig. 238.

de contact des dents à la fin de la retraite (fig. 238). On a dans le triangle oo', N

$$(R + F)^2 = (R + r)^2 + r^2 - 2r(R + r) \cos \alpha$$

d'où

$$\cos \alpha = \frac{(R + r)^2 + r^2 - (R + F)^2}{2r(R + r)} = \frac{2r(R + r) - F(2R + F)}{2r(R + r)}$$

$$= 1 - \frac{F}{r} \times \frac{2R + F}{2R + 2r}$$

Cette expression montre que $\cos \alpha$ diminue quand R croît, car la fraction $\frac{2R + F}{2R + 2r}$, moindre que l'unité, augmente avec R . L'angle α varie donc dans le même sens que R , et l'angle $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ varie en sens contraire. Par conséquent, le maximum de θ au commencement ou à la fin de la conduite a lieu quand le plus petit pignon de la série engrène avec lui-même. Son rayon étant égal à $2r$ (278) on a, pour le tracé au module :

$$\cos \alpha = 1 - \frac{M}{2,75M} \times \frac{4 \times 2,75M + M}{4 \times 2,75M + 2 \times 2,75M} = 1 - \frac{1}{2,75} \times \frac{12}{16,50} = 0,736$$

d'où $\alpha = 43^\circ$ environ et $\theta = 68^\circ 30'$ (*).

Avec le tracé au pas circonférentiel ($F = 0,3P$, $r = 0,875P$), on trouve

$$\cos \alpha = 0,752 \quad \alpha = 41^\circ \text{ environ} \quad \text{et } \theta = 69^\circ 30'$$

Ce calcul montre que la pression sur les paliers, au début de l'approche et à la fin de la retraite, est plus grande avec les engrenages épicycloïdaux qu'avec ceux à développantes. De plus, sa variation pendant la conduite provoque des vibrations des arbres, qui ne se présentent pas avec les engrenages à développantes.

3° Au point de vue de l'usure des dents.

L'usure des dents dépend à la fois, en les supposant formées d'une même substance, de la pression normale qu'elles exercent l'une sur l'autre, et de leur vitesse relative de glissement. Nous avons étudié précédemment les variations de la pression normale; analysons maintenant celles de la vitesse de glissement.

Son expression générale, pour les engrenages extérieurs, est

$$v_g = p(\omega + \omega')$$

p désignant la longueur de la normale commune aux deux profils. Les vitesses angulaires restent constantes quand le mécanisme est en mouvement régulier, on voit que dans tout système d'engrenages où la conduite a lieu des deux côtés de la ligne des

(*) $\cos \alpha$ atteint son minimum, $1 - \frac{F}{r}$, quand R est infini, ce qui correspond à une crémaillère. Dans le tracé au module, on trouve $\cos \alpha = 0,636$, ce qui correspond à $\alpha = 50^\circ 30'$ et à $\theta = 64^\circ 45'$. Dans le tracé au pas circonférentiel, les résultats sont $\cos \alpha = 0,657$ $\alpha = 49^\circ 15'$ et $\theta = 65^\circ 22'$.

centres, la vitesse de glissement diminue pendant l'approche, et augmente pendant la retraite. Elle est nulle quand le point de contact des dents est sur la ligne des centres.

Remarquons que le point de contact des dents se trouve, au début de l'approche, à l'extrémité d'une face sur la menée, et au voisinage du fond sur la menante. Au moment où il franchit la ligne des centres, il se trouve sur les circonférences primitives. A la fin de la retraite, il est situé au voisinage du fond de la menée, et à l'extrémité d'une face de la menante. On peut donc dire aussi que la vitesse de glissement diminue quand le point de contact des dents se rapproche des circonférences primitives, et augmente quand il s'en éloigne.

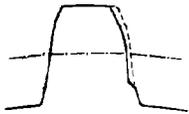


Fig. 239.

Il résulte de là que, dans les engrenages à profils épicycloïdaux, la pression normale et la vitesse de glissement varient dans le même sens ; les deux causes ajoutent donc leurs effets, et, pour cette double raison, l'usure des dents est plus rapide à la base et au sommet que vers les circonférences primitives. Les profils affectent au bout d'un certain temps une forme analogue à celle de la figure 239, et l'engrenage ferraille.

Dans les roues à développantes, l'usure n'est pas non plus régulière, mais comme une seule des deux causes provoque cette irrégularité, elle est plus lente à produire son effet. Toutes choses égales d'ailleurs, un pareil engrenage fonctionne mieux et pendant plus longtemps qu'avec les profils épicycloïdaux.

4° Au point de vue de la solidité des dents.

Dans le tracé par développantes, la forme des dents est plus voisine de celle du solide d'égalle résistance (limité par deux arcs de parabole) que dans le tracé par épicycloïdes. Cet avantage est compensé en partie par ce fait que l'épaisseur des dents au sommet est généralement moindre dans le premier cas que dans le second.

5 Au point de vue du déplacement des axes.

Dans les engrenages à profils épicycloïdaux, s'il arrive que, par suite d'un défaut de montage par exemple, la distance des axes soit un peu trop grande ou trop petite, la transmission s'effectue mal et le rapport des vitesses angulaires réalisé n'est pas égal à celui que donneraient les cylindres de friction. Un avantage considérable des engrenages à développantes consiste en ce que, dans les mêmes conditions, le fonctionnement reste parfait, avec le même rapport de vitesses angulaires que si les axes occupaient leurs positions normales.

Soient en effet S et S' (240) les circonférences primitives tangentes en I, et xy la génératrice des développantes. Le rapport des vitesses angulaires a pour valeur

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{OI}{OI} = \frac{OI}{OI}$$

Quand l'axe O' est déplacé jus-
qu'en o', la circonférence S', de rayon

O'H', vient occuper la position s', et sa tangente commune avec la circonférence S₁ est x'y'. Cette droite, qui coupe la ligne des centres au point I', est encore normale

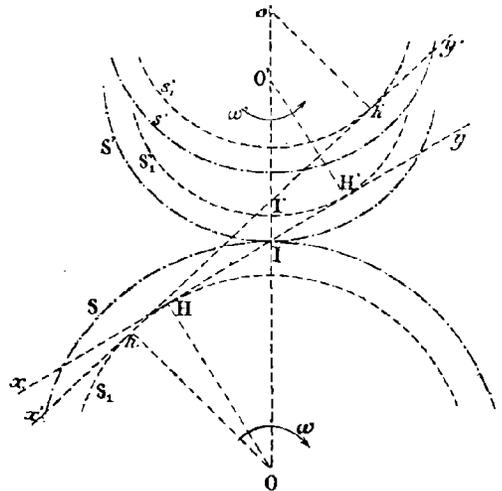


Fig. 240.

aux deux profils en prise, et si l'on désigne par ω_1 et ω'_1 les nouvelles vitesses angulaires, on a

$$\frac{\omega'_1}{\omega_1} = \frac{OI'}{OI} = \frac{Oh}{o'h'}$$

Mais $Oh = OH$ et $o'h' = O'I'$. Par conséquent

$$\frac{\omega'_1}{\omega_1} = \frac{\omega'}{\omega}$$

On peut s'assurer que l'arc de conduite diminue du fait de l'écartement des axes.

Ajoutons enfin que, dans le tracé par développantes, la forme simple des dents, dont chaque côté est limité par une seule courbe, conduit à des fraises plus faciles à exécuter que dans le tracé par épicycloïdes. Pour ces diverses raisons, et d'autres que nous indiquerons au chapitre V, les engrenages à développantes sont actuellement les plus répandus.

§ VI. — Engrenage à cames.

288. On désigne sous ce nom un engrenage dans lequel les tracés par épicycloïdes et par développantes sont combinés, chacun d'eux fournissant la face et le flanc d'une dent situés d'un même côté de celle-ci (fig. 241). De pareils engrenages sont parfaitement admissibles, car la symétrie admise, jusqu'ici, entre les deux côtés d'une dent, n'a d'autre but que de permettre à chaque roue de conduire l'autre dans les deux sens, et cette propriété est évidemment conservée avec la denture à cames.

Mieux que les artifices indiqués aux paragraphes 274 et 275, l'engrenage à cames permet d'appliquer le tracé par épicycloïdes à des roues dont le nombre de dents est inférieur à 11, tout en conservant une grande résistance à la racine. On se rend compte de ce fait en comparant les figures 231 et 241, dans lesquelles les circonférences primitives et les nombres

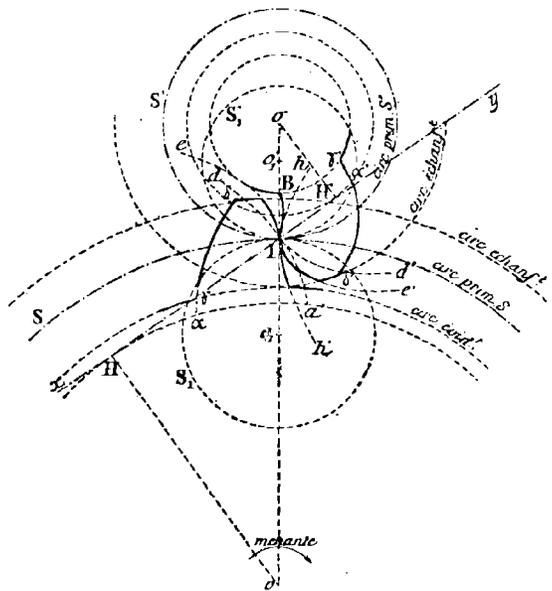


Fig. 241.

de dents sont les mêmes. Les profils tangents en I sont identiques dans les deux cas. Ce système est parfois employé dans les crics et les appareils analogues,

§ VII. — *Engrenage à flancs rectilignes divergents.*

289. Ce tracé, peu employé aujourd'hui, avait été imaginé dans le but de profiter des facilités que présente la construction des engrenages à flancs droits, tout en évitant l'étranglement des dents à la base. Les flancs rectilignes, au lieu d'être constitués par des portions de rayons comme au paragraphe 271, sont légèrement inclinés sur

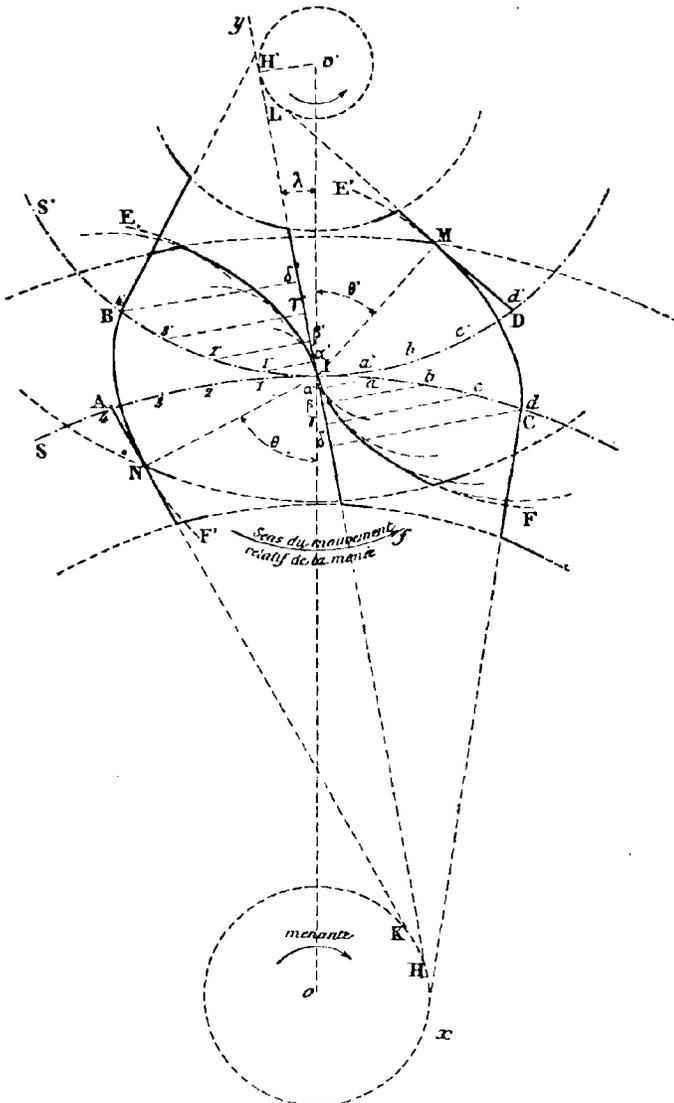


Fig. 242.

ceux-ci, de sorte que l'épaisseur des dents s'accroît à mesure qu'on se rapproche de la base.

On mène par le point de contact des circonférences primitives une droite xy (fig. 242), faisant avec la ligne des centres, dans le sens du mouvement relatif de la menée, un

angle aigu λ provisoirement arbitraire, et l'on prend les demi-droites I_x et I_y pour flancs des deux roues. Il s'agit de déterminer les faces correspondantes.

La face de la menante est l'enveloppe du flanc I_y de la menée (254) quand S' roule sur S supposée fixe dans le sens de son mouvement relatif indiqué par la flèche f . Soient $1', 2', 3', 4'$ des points équidistants les uns des autres sur S' , $1, 2, 3, 4$ les points de S avec lesquels les précédents viennent respectivement se confondre, et $1' \alpha', 2' \beta', 3' \gamma', 4' \delta'$ les perpendiculaires à I_y . D'après la méthode de Poncelet (257), les circonférences de centres $1, 2, 3, 4$ et de rayons $1' \alpha', 2' \beta', 3' \gamma', 4' \delta'$ sont tangentes à la courbe cherchée IE . De même, la face de la menée est l'enveloppe du flanc I_x de la menante quand S roule, dans le sens f , sur S' supposée fixe. Si donc on prend sur S' des points $a' b' c' d'$ équidistants les uns des autres, et sur S les points $a b c d$ qui viennent se superposer à ceux-là, que, de ces derniers, l'on abaisse les perpendiculaires $a \alpha, b \beta, c \gamma, d \delta$ sur I_x , puis enfin que, de $a' b' c' d'$ comme centres, avec ces perpendiculaires pour rayons, on décrive des circonférences, chacune d'elles est tangente à la face inconnue IF . Les profils des dents sont donc déterminés sur les deux roues.

Il reste à les limiter de manière à réaliser des arcs d'approche et de retraite donnés. Soit, par exemple, $IA = IB$ l'arc d'approche. Le flanc AK qui passe par le point A est tangent à la circonférence de rayon oH décrite de o comme centre ; si la face conjuguée BF' était tracée, et son point de contact N avec AK connu, il suffirait d'échanfriner la menée à la circonférence de rayon $o'N$ pour que l'arc d'approche soit égal à IB , car la portion NF' du profil BF' étant supprimée, son action sur le flanc ne pourrait commencer avant que les deux profils aient atteint les positions AN, BN . Or, leur normale commune en N passe par le centre instantané de rotation I ; on peut donc déterminer le point N en abaissant de I la perpendiculaire sur AK . Le cercle d'échanfrinement de la menée étant tracé, on en déduit le cercle d'évidement de la menante.

Une construction analogue est applicable à l'arc de retraite. Soit $IC = ID$ sa valeur. Le flanc DL de la menée, qui passe par le point D , est tangent à la circonférence de rayon $o'H'$ décrite du point o' comme centre. Son point de contact avec la face conjuguée CE' se trouve au pied de la normale abaissée du centre instantané de rotation sur DL dont la position est connue. Le cercle d'échanfrinement de la menante a pour rayon oM ; il détermine le cercle d'évidement de la menée.

La figure (243) suppose les arcs d'approche et de retraite égaux aux $\frac{5}{8}$ du pas.

290. Influence de la direction de xy sur la forme des profils.

Les constructions effectuées (fig. 242) montrent que, si l'angle λ que forme xy avec la ligne des centres va en augmentant, les autres éléments de la figure restant les mêmes, les rayons $1' \alpha', 2' \beta' \dots a \alpha, b \beta \dots$ des circonférences qui servent au tracé des

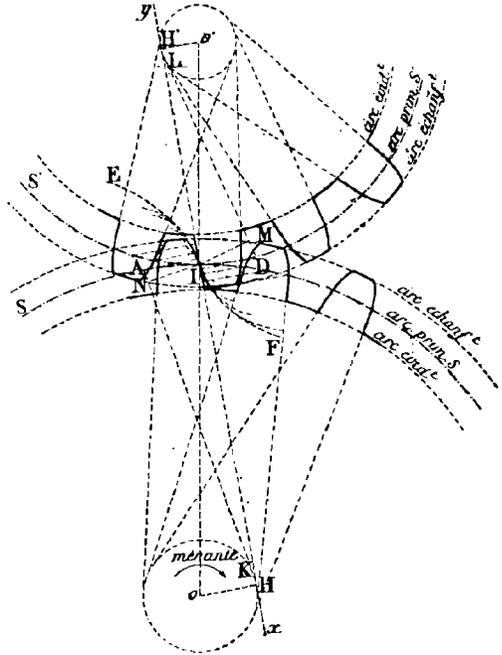


Fig. 243.

faces diminuent, de sorte que les profils IE, IF se couchent de plus en plus sur les circonférences primitives correspondantes, et que les dents s'amincissent à leur extrémité. Il peut même arriver que la convergence des faces d'une même dent soit assez rapide pour qu'il soit impossible de réaliser un arc de conduite suffisant. Pratiquement, λ ne peut donc pas dépasser un certain maximum.

D'autre part, on voit par la figure 243 que les flancs cessent d'être divergents sur la plus petite roue dès que le diamètre de la circonférence $o'H'$ est inférieur à l'épaisseur des dents. Si l'on ne veut pas admettre de dents étranglées à la base, il est donc indispensable de ne pas donner à λ une valeur trop petite.

Des tracés nombreux ont montré qu'on arrive à de bons résultats en déterminant oH et oH' par les proportions

$$\frac{oH}{oI} = \frac{o'H'}{o'I} = \frac{1}{10}$$

ou par les suivantes

$$\frac{oH}{oI} = \frac{o'H'}{o'I} = \frac{1}{6}$$

L'angle λ vaut $4^{\circ}40'$ dans le premier cas, et $9^{\circ}30'$ dans le second.

291. Remarque. — L'engrenage à flancs droits et à faces épicycloïdales est un cas particulier du précédent, correspondant au cas où xy est confondue avec la ligne des centres.

292. Nombre minimum de dents. — Pour que les flancs soient divergents sur une roue de rayon R et de n dents, il faut, d'après ce qui précède, que l'on ait

$$e \ll 2 kR$$

e désignant l'épaisseur d'une dent et k le nombre $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{10}$. Or, en admettant, par exemple, un jeu de $\frac{1}{20}P$, $e = \frac{19}{40}P$; d'autre part, $R = \frac{nP}{2\pi}$; la relation ci-dessus devient donc

$$\frac{19}{40}P \ll \frac{knP}{\pi}$$

On en tire

$$n \ll \frac{19\pi}{40k}$$

Si $k = \frac{1}{6}$, on trouve

$$n \gg \frac{57\pi}{20} \text{ ou } n \gg 9$$

et si $k = \frac{1}{10}$

$$n \gg \frac{19\pi}{4} \text{ ou } n \gg 15$$

293. Roues d'assortiment. — Il est impossible de constituer des assortiments de roues à flancs rectilignes divergents. Les rayons des circonférences dont l'enveloppe donne la face E des dents d'une roue dépendent, en effet, des points 1', 2', 3'...

(fig. 242) pris sur la circonférence primitive de la roue qui engrène avec elle. Chaque roue est donc construite pour sa conjuguée.

Dans ce système, il n'y aurait donc pas lieu de renoncer à déterminer les circonférences d'échanfrinement et d'évidement d'après les arcs d'approche et de retraite. On donne néanmoins aux dents la même longueur uniforme que dans les autres procédés ; l'arc de conduite ainsi réalisé est toujours supérieur au pas (323).

294. Direction de l'effort transmis. — Variations de la pression normalee — Pression sur les paliers.

La pression N exercée par la dent conductrice est normale au flanc de la menant, pendant l'approche, et au flanc de la menée pendant la retraite. L'angle que forme sa direction avec la ligne des centres croît donc de θ à $\frac{\pi}{2} - \lambda$ (fig. 242) dans le premier cas, et décroît de $\frac{\pi}{2} - \lambda$ à θ' dans le second. L'expression générale de N établie au paragraphe 287 montre que la pression normale diminue en approche entre les limites $\frac{T}{\sin \theta}$ et $\frac{T}{\cos \lambda}$, puis augmente en retraite jusqu'à la valeur $\frac{T}{\sin \theta'}$. Ses variations produisent, au point de vue de l'usure des dents, les mêmes résultats que dans les engrenages épicycloïdaux.

La pression sur les paliers décroît, pendant l'approche, entre les limites $T \cotg \theta$ et $T \tg \lambda$; elle croît en retraite jusqu'à la valeur $T \cotg \theta'$. Ses variations occasionnent des vibrations des arbres, déjà constatées à propos des engrenages épicycloïdaux.

§ VIII. — Tracés approximatifs des engrenages.

295. Principe de la méthode. — Les courbes qui forment le contour d'une dent sont toujours de longueur assez faible pour qu'on puisse les remplacer par des arcs de cercle. La difficulté consiste à déterminer ceux-ci de manière que le fonctionnement de l'engrenage reste satisfaisant, malgré la substitution des profils approchés aux profils théoriques. Voici le principe de la méthode.

Soient deux circonférences S et S' tangentes en I . Supposons que la seconde roule sans glisser sur la première, en entraînant une autre circonférence L' de centre C' (fig. 244). Le point de contact de celle-ci avec son enveloppe est le pied M de la normale commune IC' , et le centre de courbure de l'enveloppe au point M , qui se confond avec celui de l'épicycloïde décrite par le point C' dans le roulement de S' sur S (174), se trouve, d'après la construction de Savary, en C . Dans leur position actuelle, les deux cercles L et L' , de centres C et C' , jouissent donc de toutes les propriétés des courbes enveloppes ; d'après le théorème 254, ils assurent la transmission de mouvement entre les axes o et o' avec un rapport de vitesses angulaires égal au rapport inverse des rayons des circonférences primitives, pour un déplacement infiniment petit du système à partir de la position figurée.

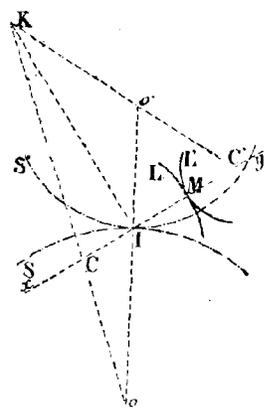


Fig. 244.

Observons que le rayon de L' n'a pas été employé dans la construction du point C ; par conséquent, deux circonférences tangentes quelconques, décrites de C et C' comme centres, peuvent être employées comme profils conjugués.

Enfin, d'après la construction de Savary, IK est perpendiculaire à CC' . Pour obtenir un couple de points conjugués tel que (C, C') , il suffit donc de mener par I une droite quelconque xy et sa perpendiculaire IK , puis de joindre à o et o' un point arbitraire de IK . Les droites Ko, Ko' coupent xy en deux points qui répondent à la question. Toutefois, xy étant la normale commune aux profils L et L' à l'instant où l'un d'eux est le cercle de courbure de l'enveloppe de l'autre, il est convenable, pour des raisons déjà indiquées (287), que sa direction ne fasse pas avec la ligne des centres un angle trop aigu. On lui donne généralement l'inclinaison de 75° .

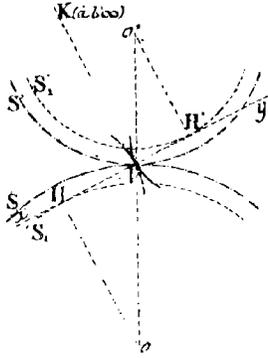


Fig. 245.

Les centres des circonférences susceptibles de remplacer les profils exacts viennent se placer, dans cette hypothèse, aux pieds H et H' des perpendicu-

296. Tracé Willis par un seul arc de cercle.

Soient S et S' les circonférences primitives (fig. 245) et xy une droite, passant par leur point de contact, inclinée de 75° sur la ligne des centres. Supposons que le point désigné par K dans l'exposé du principe soit

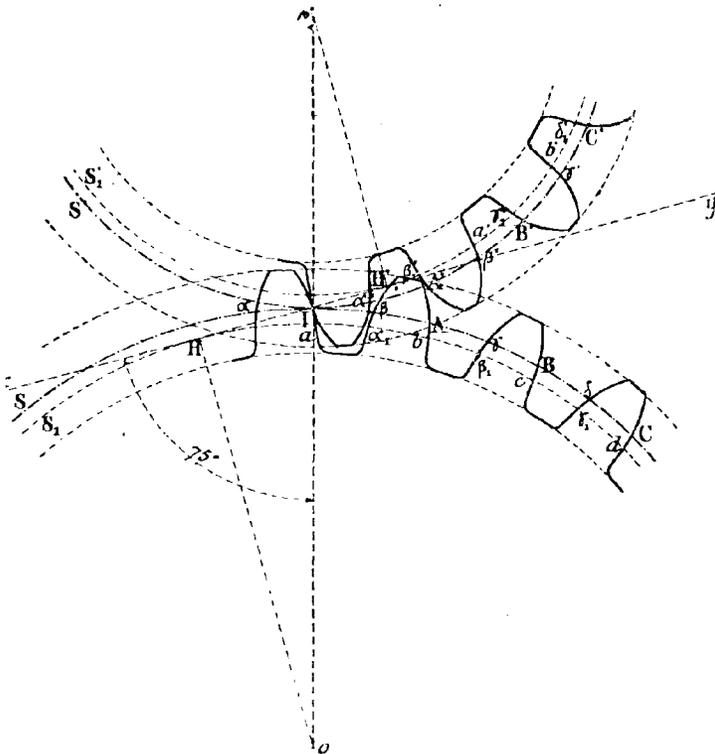


Fig. 246.

lares abaissées de o et o' sur xy , et, d'après ce qui précède, les arcs de cercle décrits de H et H' comme centres, avec HI et $H'I$ pour rayons, assurent la trans-

mission avec un rapport à peu près constant des vitesses angulaires, pour un faible déplacement de part et d'autre de la ligne des centres.

On peut justifier autrement cette construction, en la comparant au tracé par développantes. Les points H et H' sont, en effet, les centres de courbure en I des deux développantes qu'engendreraient ce point dans le roulement de xy sur les circonférences S_1 et S'_1 . Comme ces dernières donnent une solution rigoureuse du problème, on conçoit que leurs cercles de courbure en I puissent approximativement les remplacer.

Pour tracer rapidement une roue o par ce procédé, on marque d'abord, sur la circonférence primitive, des points de division α I β A γ B δ C... (fig. 246) correspondant aux pleins et aux creux consécutifs, puis on trace la circonférence S_1 de rayon oH . On décrit ensuite de IABC... comme centres, avec un rayon égal à IH, des arcs de cercle qui coupent S_1 en H abc... Ces points sont les centres des faces qui passent respectivement par IABC.... On construit de même les centres $\alpha_1\beta_1\gamma_1$... des faces symétriques par des arcs de cercle de rayon IH et de centres $\alpha\beta\gamma$... décrits en sens inverse des précédents. Enfin, on limite les profils à des circonférences d'échanfrinement et d'évidement, que l'on détermine en donnant aux faces et aux flancs les mêmes longueurs que dans les autres tracés.

Les profils de chaque roue étant indépendants de sa conjuguée, on peut construire des assortiments, qui jouissent à peu près des mêmes propriétés que les engrenages à développantes.

Remarquons que la conservation rigoureuse du rapport des vitesses angulaires n'a lieu qu'à l'instant où le point de contact des dents est sur la ligne des centres, puisque c'est alors seulement que les profils approchés sont les cercles de courbure des profils exacts. Il est évidemment préférable, pour l'uniformité de la transmission, de faire en sorte que les profils approchés conservent le rapport des vitesses, une première fois un peu avant la ligne des centres, et une seconde fois un peu après. C'est ce qui a lieu dans le tracé suivant.

297. Tracé Willis par deux arcs de cercle.

Il se propose de substituer aux flancs et aux faces théoriques de deux dents conjuguées, des arcs de cercle, déterminés par la condition que le point d'action de deux d'entre eux soit placé un demi-pas avant la ligne des centres, et celui des deux autres un demi-pas après, de manière à assurer la conduite en approche et en retraite. Il ne faut pas entendre par là que l'action des deux profils conjugués s'effectue seulement pendant un demi pas, mais que le rapport des vitesses angulaires est rigoureusement conservé un demi-pas avant et un demi-pas après la ligne des centres. A tout autre instant, ce rapport différera de sa valeur théorique, mais on conçoit que, grâce à la faible longueur de l'arc de conduite, il ne pourra jamais s'en écarter sensiblement.

Les points désignés par C et C', dans l'exposé du principe, sont liés respectivement aux circonférences S et S'. Portons sur S (fig. 247) à partir du point I et en retraite, un arc Im égal à un demi-pas. Les arcs de cercle $m\mu$, $m'\mu'$ décrits de C et C' comme centres, le premier avec le rayon Cm, le second tangent au précédent, assureront la conduite pendant la période de retraite, avec conservation rigoureuse du rapport des vitesses

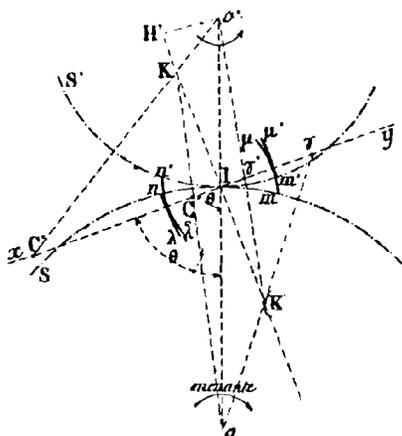


Fig. 247.

angulaires, un demi-pas après la ligne des centres (295). L'arc $m\mu$ formera une face de la menante, et l'arc $m'\mu'$ un flanc de la menée. Pour réaliser la conduite en approche, prolongeons IK d'une longueur égale IK' , puis traçons oK' et $o'K'$. Ces droites rencontrent xy en des points γ et γ' qui jouissent des mêmes propriétés que C et C' . Portons maintenant sur S , à partir de I et en approche, un arc In égal à un demi-pas. Les arcs de cercle tangents $n\lambda$, $n\lambda'$, de centres respectifs γ et γ' , se conduiront avec conservation rigoureuse du rapport des vitesses angulaires un demi-pas avant la ligne des centres et constitueront, le premier, un flanc de la menante, et le second une face de la menée. Le problème est ainsi complètement résolu.

On peut justifier ces constructions par un raisonnement tout différent qui permet, mieux que le précédent, de se rendre un compte exact des propriétés de l'engrenage. Soient S_1 et S'_1 (fig. 248) deux cercles égaux, tangents en I aux circonférences primitives, M et N leurs points d'intersection avec xy . Le point M , entraîné dans le roulement sans glissement de S'_1 sur S et sur S'_1 , décrit une épicycloïde et une hypocycloïde qui satisfont aux conditions théoriques de la transmission pendant toute la période de retraite (273). D'après la construction de Savary, les centres de courbure de ces deux lignes, en leur point de contact M , sont précisément les points C et C' employés dans le tracé Willis. On conçoit donc que les arcs de cercles tangents en M , décrits de C et C' comme centres, arcs qui appartiennent aux cercles de courbure

des profils exacts, puissent remplacer ceux-ci sans erreur sensible pour un déplacement suffisamment petit. Un raisonnement analogue montre que les points γ et γ' du tracé Willis sont les centres de courbure en N de l'épicycloïde et de l'hypocycloïde engendrées par ce point dans le roulement de S_1 sur S et S'_1 , et justifie l'emploi des arcs de cercle tangents en N , décrits de γ et γ' comme centres, pour la conduite en approche.

On conclut en outre que les propriétés de l'engrenage Willis à deux arcs de cercle seront, à peu de chose près, les mêmes que celles de l'engrenage à doubles profils épicycloïdaux dont il dérive.

298. Pour des circonférences primitives données, les rayons des profils de Willis dépendent uniquement des positions des points (C, C') , (γ, γ') . La forme des dents est donc une fonction de la

direction donnée à xy , et de la longueur attribuée à IK . Nous allons étudier séparément l'influence de ces deux éléments.

1° Influence de la variation de xy sur la forme des profils.

L'angle θ , théoriquement arbitraire, que forme xy avec la ligne des centres (fig. 247), ne peut varier pratiquement qu'entre certaines limites. Si, par exemple, on le suppose égal à zéro, les centres C et γ des profils de la roue S se superposent en o et les points C' et γ' en o' (fig. 249). Les arcs $m\mu$, $m'\mu'$, $n\lambda$, $n'\lambda'$ du cas général se confondent avec les circonférences primitives; et l'engrenage se réduit aux cylindres de friction. Si l'on suppose $\theta = \frac{\pi}{2}$, les points K

et K' sont situés sur la ligne des centres, et les points (C, C') (γ, γ') se confondent

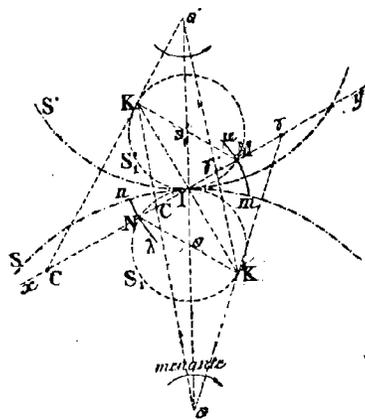


Fig. 248.

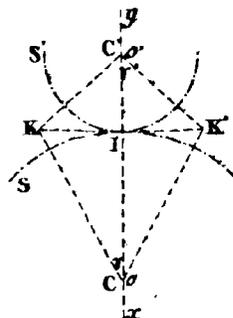


Fig. 249.

en I. L'arc de cercle qui forme une face a le même rayon que le flanc conjugué, et s'applique sur lui au lieu de le toucher en un seul point. Les frottements exagérés qui en résultent rendent ce fait inadmissible.

On conclut de là que, pour assurer aux dents une forme satisfaisante, il faut choisir convenablement l'angle θ , et qu'une valeur voisine de 90° vaut mieux qu'un angle trop aigu. La valeur $\theta = 75^\circ$ est généralement adoptée.

2° Influence de la variation de IK sur la forme des profils.

Soit IH' la projection de o' sur KK' (fig. 247). Tant que IK est inférieur à IH' , le point C' est à gauche de I sur xy , et les flancs de S' sont concaves vers les creux, ce qui correspond à des dents plus épaisses à la base que sur la circonférence primitive. Quand $IK = IH'$, le point C' est rejeté à l'infini, et les flancs correspondants sont rectilignes. Enfin quand $IK > IH'$, le point C' passe à droite de I et les flancs de S' sont convexes vers les creux, ce qui a pour effet d'étrangler les dents à la racine. Pour éviter cet inconvénient, la longueur de IK doit être inférieure ou au plus égale à IH' .

299. Roues d'assortiment. — Les centres C et γ des profils de la roue o ne dépendent en aucune façon de sa conjuguée, mais seulement de l'angle θ et de la longueur $IK = IK'$. Si donc on donne à ces éléments des valeurs invariables, deux roues tracées par le procédé de Willis pourront toujours être associées, si toutefois elles ont même pas ou même module, et mêmes longueurs de faces et de flancs.

Nous avons dit déjà que, dans la pratique, on fait $\theta = 75^\circ$. Quant à IK , sa longueur doit satisfaire à la condition $IK \leq IH'$ pour toutes les roues de l'assortiment. Il en sera ainsi évidemment si l'on donne à IK la valeur que prend IH' pour le plus petit pignon de la série. En désignant par R_0 le rayon de celui-ci, on aura donc

$$IK = R_0 \sin \theta.$$

Dans ces conditions, le plus petit pignon aura des flancs droits, et toutes les autres roues des flancs concaves vers les creux.

Enfin, on donne aux faces et aux flancs les longueurs respectives

$$F = 0,3 P \quad f = 0,4 P$$

ou encore les suivantes

$$F = M \quad f = \frac{7 M}{6}$$

comme dans les autres tracés.

300. Opérations graphiques pour le tracé d'une roue. — L'angle θ et la longueur IK étant choisis, on peut dessiner les roues de l'assortiment indépendamment les unes des autres. On trace d'abord la circonférence primitive S , puis les circonférences α et α' de rayons oC et $o\gamma$ (fig. 250) sur lesquelles se trouvent les centres de ses profils. On porte ensuite sur S des arcs $Im, m_1I_1, I_1m_1, m_1I_2, \dots$ égaux aux pleins et aux creux successifs fs . Enfin, de I, I_1, I_2, \dots comme centres, avec des rayons égaux à IC et $I\gamma$, on décrit, dans le sens de ces segments, des arcs de cercle qui déterminent les centres $CC_1, C_2, \dots, \gamma\gamma_1, \gamma_2, \dots$ des faces et des flancs de toutes les dents. On répète la même opération en partant des points de division m, m_1, m_2, \dots , mais en sens inverse. Il ne reste plus qu'à décrire de tous les points $CC_1, C_2, \dots, DD_1, \dots$ des arcs de rayon Cm , compris

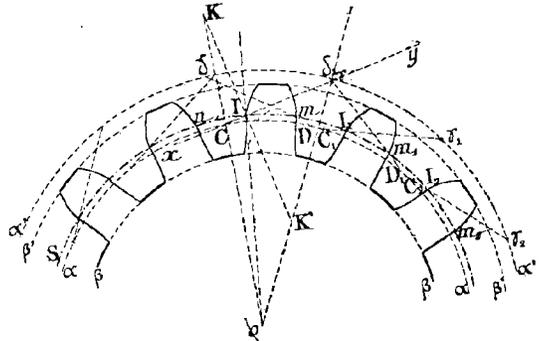


Fig. 250.

entre la circonférence primitive et le cercle d'échanfrinement β' , puis, de tous les points $\gamma_1 \gamma_2 \dots \delta \delta_1 \dots$ des arcs de rayon γn , compris entre S et la circonférence d'évidement β .

La figure 251 représente une paire de roues Willis dans le cas où $\theta = 75^\circ$.

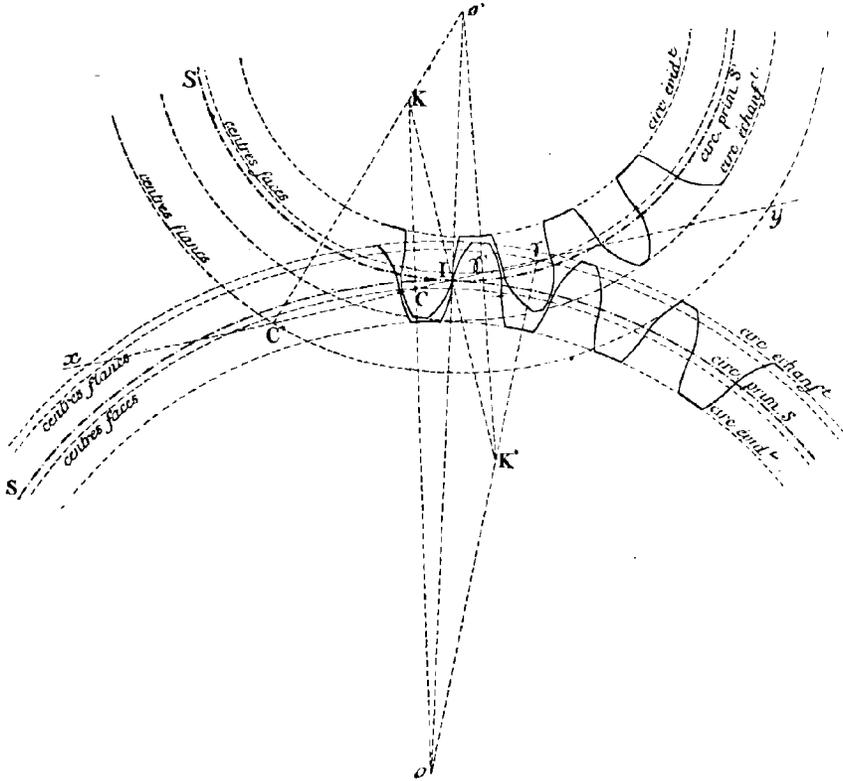


Fig. 251.

301. Calcul des distances CI et γI en fonction de IK. — Principe de l'odontographe.

Soit oH la perpendiculaire abaissée de o sur xy (fig. 252). Les triangles semblables oCH, KCI donnent la proportion

$$\frac{CI}{CH} = \frac{IK}{oH}$$

d'où l'on déduit la suivante

$$\frac{CI}{CI + CH} = \frac{IK}{IK + oH}$$

$$\text{Mais } CI + CH = IH = R \cos \theta$$

$$oH = R \sin \theta$$

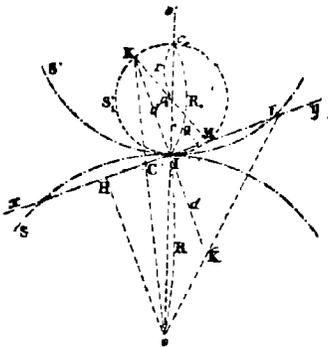


Fig. 252.

en désignant par R le rayon de la roue S. Si l'on représente en outre par d la longueur IK = IK', il vient donc

$$CI = \frac{R d \cos \theta}{R \sin \theta + d}$$

La comparaison des triangles $\sigma\gamma H$, $K'\gamma I$ donnerait de même

$$\gamma I = \frac{R d \cos \theta}{R \sin \theta - d}$$

On a vu plus haut que, dans les engrenages de série, on fait $d = R_0 \sin \theta$, R_0 représentant le rayon du plus petit pignon du système. De plus, le tracé Willis n'étant qu'une approximation du tracé à doubles profils épicycloïdaux, $R_0 = 1,75 P$ ou $5,50 M$ (278). On a par conséquent

$$\left\{ \begin{array}{l} CI = \frac{R \times 1,75 P \cos \theta}{R + 1,75 P} \\ \gamma I = \frac{R \times 1,75 P \cos \theta}{R - 1,75 P} \end{array} \right.$$

Pour rendre l'emploi de ces formules plus pratique, il convient de les modifier en introduisant le nombre des dents de la roue à la place du rayon de sa circonférence primitive. En multipliant par 2π chaque terme des seconds membres, et en tenant compte de la relation $2\pi R = n P$, il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} CI = \frac{n P \times 1,75 P \cos \theta}{n P + 3,50 \pi P} = \frac{n}{n + 3,50 \pi} \times 1,75 P \cos \theta \\ \gamma I = \frac{n}{n - 3,50 \pi} \times 1,75 P \cos \theta \end{array} \right.$$

Mais $3,50 \pi$ est très sensiblement égal à 11, et, si $\theta = 75^\circ$, $1,75 \cos \theta = 0,45$. Il reste donc en définitive

$$\left\{ \begin{array}{l} CI = \frac{n}{n + 11} \times 0,45 P \\ \gamma I = \frac{n}{n - 11} \times 0,45 P \end{array} \right.$$

Dans le calcul au module, on remplacerait le facteur $0,45 P$ par $1,41 M$.

Ces formules (*) permettent de calculer à l'avance les quantités CI et γI , et de dresser des tables qui dispensent de faire un tracé complet pour chaque cas. L'appli-

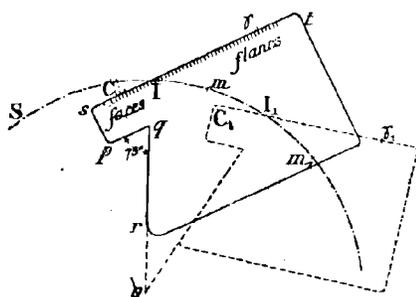


Fig. 253.

cation de la méthode est alors beaucoup simplifiée par l'emploi de l'odontographe. On appelle ainsi une sorte de rapporteur rectangulaire, qui porte le long d'un de ses côtés une échancrure pqr (fig. 253) dont le bord qr fait un angle de 75° avec le côté suivant st . Le prolongement de qr rencontre st en un point I qui est l'origine d'une double graduation en millimètres.

Pour se servir de l'odontographe, on applique sur le dessin en faisant coïncider le point I avec un des points de division de la circonférence primitive, et la droite qr avec le rayon correspondant; dans ces conditions, le côté st donne la direction de la droite xy . On lit sur la table les longueurs CI et γI qui conviennent à la roue que l'on veut construire, puis on porte la première dans le sens Is et la seconde dans le sens It . On marque ainsi sur l'épure les centres de toutes les faces et de tous les flancs, et le tracé ne présente aucune difficulté.

Les tables suivantes donnent, en millimètres, les valeurs de CI et de γI .

(*) On peut les établir différemment. Le point C étant le centre de la courbure de l'épicycloïde décrite par le point M dans le roulement de S_1 sur S , on a, d'après la formule de Savary

$$\frac{1}{r} - \frac{\cos \theta}{IM} = \frac{\cos \theta}{CI} - \frac{1}{R}$$

r étant le rayon d'une circonférence tangente en I à S et passant par le point K . Mais $IM = 2r \cos \theta$. Il vient donc

$$\frac{1}{2r} + \frac{1}{R} = \frac{\cos \theta}{CI}$$

d'où

$$CI = \frac{2Rr \cos \theta}{R + 2r}$$

et, puisque $r = 0,875 P$ dans le tracé par épicycloïdes

$$CI = \frac{R \times 1,75 P \cos \theta}{R + 1,75 P}$$

Cette expression est identique à celle qu'a fournie la première méthode. On terminerait le calcul de la même manière

Tableau des valeurs de CI (Centres des faces).

NOMBRE de DENTS	PAS (en centimètres)												
	1	1.25	1.50	1.75	2	2.25	2.50	3	4	5	6	7	8
12	2.5	3	3.5	4.5	5	5.5	6	7	10	12	15	17	20
15	2.5	3.5	4	5	5.5	6	7	8	11	14	17	19	22
20	3	4	4.5	5.5	6	7	8	9	12	15	18	22	25
30	3.5	4.5	5	6	7	8	9	10	14	18	21	25	28
40	4	4.5	5.5	6.5	8	8.5	9.5	11	15	19	23	27	30
60	4	5	6	7	8.5	9	10	12	16	20	25	29	33
80	4.5	5.5	6.5	7.5	9	9.5	11	13	17	21	26	30	34
100	4.5	5.5	6.5	7.5	9	10	11	13.5	18	22	27	31	35
150	4.5	5.5	7	8	9.5	10.5	11.5	14	19	23	28	32	37
Crémaillère..	5	6	7.5	8.5	10	11	12	15	20	25	30	35	40

Tableau des valeurs de γI (Centres des flancs).

NOMBRE de DENTS	PAS (en centimètres)												
	1	1.25	1.50	1.75	2	2.25	2.50	3	4	5	6	7	8
13	64	80	96	112	129	144	160	193	257	321	386	450	514
14	33	43	52	60	69	78	87	104	139	173	208	242	277
15	24	31	37	43	49	55	62	74	99	123	148	173	199
16	20	25	29	34	40	44	50	59	79	99	119	138	158
17	17	21	25	29	34	37	42	50	67	84	101	118	134
18	15	18	22	26	30	33	37	45	59	74	89	104	119
20	12	15	18	21	25	28	31	37	49	62	74	87	99
22	11	13	16	19	22	24	27	33	43	54	65	76	87
24	10	12	15	17	20	22	25	30	40	49	59	69	79
26	9	11	13	16	18	20	23	27	37	46	55	64	73
30	8	10	12	14	17	18	21	25	33	41	49	58	66
40	7	9	11	12	15	16	18	21	28	35	42	49	57
60	6	8	10	11	13	14	15	19	25	31	37	43	49
80	6	7	9	10	12	13	14	17	23	29	35	41	47
100	5	7	8	10	11	12	14	17	22	28	34	39	45
150	5	6	8	9	10	12	13	16	21	27	32	38	43
Crémaillère..	5	6	7	8	10	11	12	15	20	25	30	35	40

Pour les pas supérieurs à 8 et les nombres de dents supérieurs à 12, qui ne figurent pas dans ces tableaux, on calcule les éléments CI et γI par interpolation. Pour les nombres de dents inférieurs à 12, les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} CI = \frac{n}{n+11} \times 0,45 P \\ \gamma I = \frac{n}{n-11} \times 0,45 P \end{array} \right.$$

cessent d'être applicables, à cause du changement de signe de γI . Il faut alors recourir à un tracé direct.

LIAISON DE DEUX ROTATIONS PARALLÈLES ET DE MÊME SENS

ENGRENAGES CYLINDRIQUES INTÉRIEURS

302. **Emploi d'une roue parasite.** — Pour transmettre un mouvement de rotation entre deux axes parallèles o et o' qui doivent tourner dans le même sens, on intercale habituellement entre la menante et la menée une roue intermédiaire o'' , appelée *roue parasite* (fig. 254). Pour étudier l'effet de cette disposition, désignons par R, R', R'' les rayons des trois roues, par n, n', n'' leurs nombres de dents et par $\omega, \omega', \omega''$ leurs vitesses angulaires. Les deux couples d'engrenages extérieurs (o, o'') , (o'', o') donnent les proportions

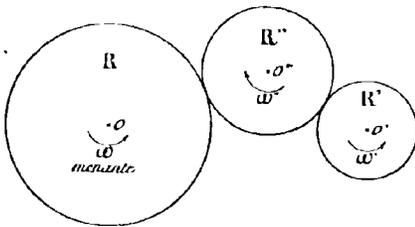


Fig. 254.

$$\frac{\omega''}{\omega} = \frac{R}{R''} = \frac{n}{n''}$$

$$\frac{\omega'}{\omega''} = \frac{R''}{R'} = \frac{n''}{n'}$$

d'où l'on tire en multipliant membre à membre

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R}{R'} = \frac{n}{n'}$$

On conclut de là que la présence de la roue o'' ne change pas le rapport des vitesses angulaires que se communiqueraient o et o' , si elles se commandaient directement. Seulement, comme deux roues consécutives tournent en sens contraires, les rotations extrêmes sont de même sens.

Les rayons R, R', R'' sont assujettis aux conditions suivantes

$$R + R' < oo' \quad \text{ou} \quad D + D' < 2oo' \quad (1)$$

$$2R'' \geq oo' - (R + R') \quad \text{ou} \quad D'' \geq oo' - \frac{D + D'}{2} \quad (2)$$

EXEMPLE. — Calculer, au pas circonférentiel, les éléments des roues o, o', o'' , en supposant $oo' = d = 300 \text{ mm}$, $e_{\min} = 4 \text{ mm}$, les arbres o et o' devant faire respectivement 60 tours et 150 tours pendant le même temps.

On peut prendre pour pas définitif le pas minimum $P = 8 \text{ mm}$.

Soient n, D, D_1, h le nombre de dents, le diamètre primitif, le diamètre d'échancrinement et la hauteur des dents de la roue $o, n', D', \dots, n'', D'', \dots$ les quantités correspondantes pour les roues o' et o'' .

Nombres de dents des roues o et o'. — D'après les données, $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n}{n'} = \frac{150}{60} = \frac{5}{2}$,
 n et n' sont donc des équimultiples de 5 et de 2, et l'on peut poser, λ désignant un
 nombre entier à déterminer

$$\left. \begin{array}{l} n = 5\lambda \\ n' = 2\lambda \end{array} \right\}$$

Les diamètres primitifs correspondants seraient respectivement

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{nP}{\pi} = \frac{40\lambda}{\pi} \\ D' = \frac{n'P}{\pi} = \frac{16\lambda}{\pi} \end{array} \right.$$

D'après la relation (1), on doit avoir

$$\frac{56\lambda}{\pi} < 600, \text{ d'où } \lambda < \frac{75\pi}{7} \text{ ou } 33,66$$

soit $\lambda \leq 33$

D'autre part, λ doit être du moins égal à 6, pour que n' ne soit pas trop petit.
 En prenant, par exemple, $\lambda = 20$, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 5\lambda = 100 \\ n' = 2\lambda = 40 \end{array} \right.$$

Dimensions des roues o et o'

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{nP}{\pi} = \frac{800}{\pi} = 254 \text{ } \frac{5}{8} \\ D' = \frac{n'P}{\pi} = \frac{320}{\pi} = 101 \text{ } \frac{8}{8} \\ \left\{ \begin{array}{l} D_1 = D + 0,6 P = 259 \text{ } \frac{5}{8} \\ D'_1 = D' + 0,6 P = 106 \text{ } \frac{8}{8} \end{array} \right. \\ h = 0,7 P = 5 \text{ } \frac{6}{8} \end{array} \right.$$

Nombre de dents et dimensions de la roue parasite. — D'après la relation (2),

$$D'' \geq 300 - \frac{356,51}{2} \text{ ou } 121 \text{ } \frac{75}{8}$$

d'où l'on tire $n'' = \frac{\pi D''}{P} \geq \frac{121,75\pi}{8} \text{ ou } 47,8\dots$

soit $n'' \geq 48$

Nous prendrons, par exemple, $n' = 50$. Par conséquent

$$\left\{ \begin{array}{l} D'' = \frac{n'P}{\pi} = \frac{400}{\pi} = 127 \text{ } \frac{32}{100} \\ D'_1 = D'' + 0.6P = 132 \text{ } \frac{12}{100} \end{array} \right.$$

Distance des axes oo''. — Elle est égale à $\frac{D + D''}{2}$, soit 190 $\frac{98}{100}$.

Distance des axes o' o''. — Elle est égale à $\frac{D' + D''}{2}$, soit 114 $\frac{59}{100}$.

Epaisseur des jantes (pour les trois roues) de 1,5 à 3 P, soit de 12 $\frac{00}{100}$ à 24 $\frac{00}{100}$.

Epaisseur des couronnes (id.) 0,6 P, soit 4 $\frac{00}{100}$.

302 bis. Solution directe. — Calcul d'un engrenage intérieur au pas circconférentiel. — La solution qui précède est généralement adoptée. Elle n'est toutefois admissible que si la distance des axes o et o' n'est pas trop petite. Dans le cas contraire, on est obligé de recourir à des engrenages intérieurs, dans lesquels les circonférences primitives, déterminées comme au paragraphe 247, sont tangentes intérieurement. La plus grande roue présente la forme d'une couronne, dont la denture est tournée vers le centre. La marche à suivre pour calculer les dimensions nécessaires à l'exécution aux ateliers est analogue à celle qui a été exposée au paragraphe 265. Il suffit d'observer :

1° Que la distance des axes est égale à la différence des rayons primitifs ;

2° Que l'on doit retrancher la longueur des faces du rayon primitif de la roue creuse, pour obtenir le rayon de la circonférence d'échanfrinement. Le diamètre de cette dernière est donc $D_1 = D - 2 F$.

EXEMPLE. — Supposons que la roue creuse doive faire 80 tours pendant que le pignon en fait 130 ; que la distance des axes soit $d = 80 \text{ } \frac{00}{100}$, et que l'épaisseur minimum des dents, fixée par les formules de résistance, soit $e_{min} = 7 \text{ } \frac{00}{100}$.

$$\text{Données} \left\{ \begin{array}{l} e_{min} = 7 \text{ } \frac{00}{100} \text{ ou Pas provisoire} = 15 \text{ } \frac{00}{100} \\ d = 80 \text{ } \frac{00}{100} \\ \frac{\omega'}{\omega} = \frac{130}{80} = \frac{13}{8} \text{ (pignon)} \\ \hspace{10em} \text{(roue creuse)} \end{array} \right.$$

$$\text{Inconnues} \left\{ \begin{array}{l} \text{Pas définitif } P ; \\ \text{Nombre de dents} \left\{ \begin{array}{l} n \text{ roue creuse} \\ n' \text{ pignon} \end{array} \right. \\ \text{Diamètres primitifs } D, D' ; \\ \text{Diamètres d'échanfrinement } D_1, D'_1 ; \\ \text{Hauteur des dents } h ; \\ \text{Epaisseur des jantes } 1,5 \text{ à } 3 P ; \\ \text{Epaisseur des couronnes } 0,6 P ; \end{array} \right.$$

Diamètres primitifs. — On a $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{D}{D'} = \frac{13}{8}$

d'où $\frac{D}{13} = \frac{D'}{8} = \frac{D - D' \text{ ou } 2d}{5} = 160$

Par conséquent

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{160 \text{ } \frac{\%}{5} \times 13}{5} = 416 \text{ } \frac{\%}{5}, \\ D' = \frac{160 \text{ } \frac{\%}{5} \times 8}{5} = 256 \text{ } \frac{\%}{5}. \end{array} \right.$$

Nombres de dents. — La relation $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'} = \frac{13}{8}$ montre que n et n' sont des équimultiples de 13 et de 8, soit

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 13\lambda \\ n' = 8\lambda \end{array} \right.$$

λ désignant un nombre entier à déterminer. En égalant la longueur πD de l'une des circonférences primitives au produit nP , on obtient l'équation

$$\frac{160 \times 13 \pi}{5} = 13 \times 15\lambda$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \frac{160 \pi}{15 \times 5} = \frac{32\pi}{15} = 6,7\dots$$

Ce nombre n'étant pas entier, on donne à λ la valeur du quotient à moins d'une unité par défaut, soit 6. Par conséquent

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 13 \times 6 = 78 \\ n' = 8 \times 6 = 48 \end{array} \right.$$

Pas définitif. — L'égalité $\pi D = nP$ donne maintenant

$$\frac{160 \times 13 \pi}{5} = 78 P$$

On a donc

$$P = \frac{160 \times 13 \pi}{5 \times 78} = 16 \text{ } \frac{\%}{75}$$

Diamètres d'échanfrinement. — Roue creuse $D_1 = D - 0,6 P = 405 \text{ } \frac{\%}{95}$

Pignon $D'_1 = D' + 0,6 P = 266 \text{ } \frac{\%}{05}$

Hauteur des dents : $h = 0,7 P = 11 \text{ } \frac{\%}{72}$.

Épaisseur des jantes : de 25 à 50 %.

Épaisseur des couronnes : 10 % environ.

Envisagée au point de vue géométrique, la théorie des engrenages intérieurs ne diffère pas de celle des engrenages extérieurs, et les tracés déjà étudiés s'appliquent sans modifications essentielles. Nous les passerons en revue successivement.

§ I. — *Engrenage intérieur à lanterne.*

303. Il peut être réalisé de deux façons différentes, selon que les fuseaux sont portés par le pignon ou par la roue creuse. Cet engrenage n'est jamais réciproque, et la conduite n'a lieu qu'en retraite, en supposant que la roue qui porte les dents soit prise pour menante.

1° **Les fuseaux sont à la roue creuse.**

En supposant que, sur la roue creuse, le profil d'une dent se réduise au point I de la circonférence primitive S (fig. 255), on reconnaît comme au paragraphe 266 que le profil conjugué du pignon est une épicycloïde Ie, engendrée par le point I quand S

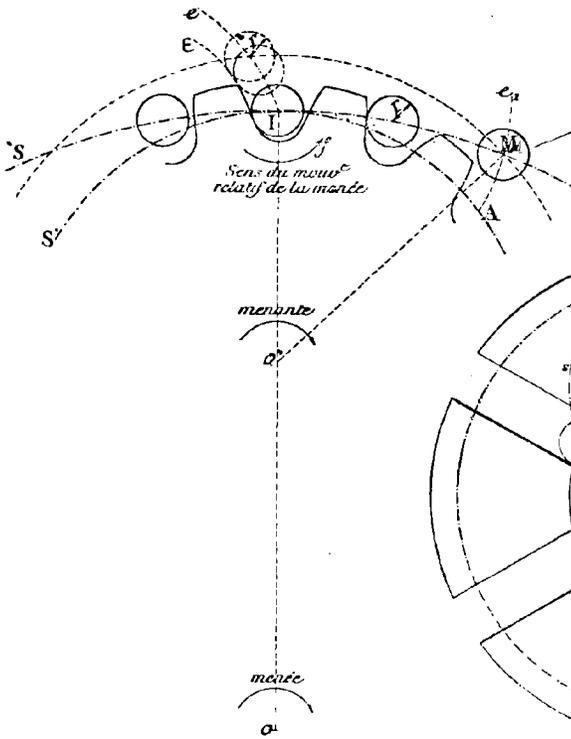


Fig. 255.

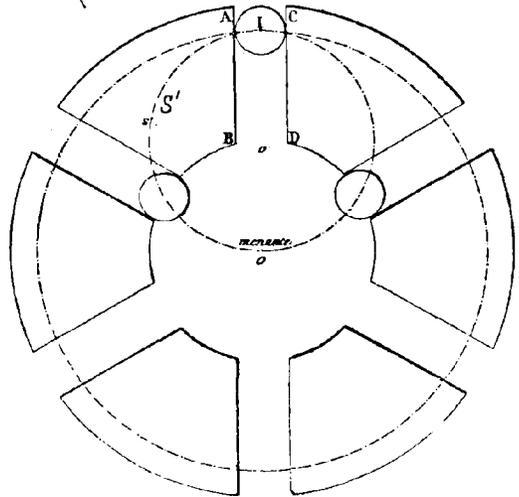


Fig. 256.

roule sans glisser sur S', dans le sens f de son mouvement relatif. La conduite n'a lieu qu'après la ligne des centres si le pignon mène la roue, et l'on obtient le rayon oM du cercle d'échanfrinement du pignon en portant sur S, à partir de I, une longueur IM égale à l'arc de retraite.

Dans la pratique, on donne aux fuseaux un rayon r égal aux $\frac{19}{80}$ du pas. Chaque profil sur le pignon est alors constitué par une courbe telle que ϵ , enveloppe d'une circonférence de rayon r dont le centre parcourt l'épicycloïde e . Deux profils consécutifs sont raccordés par une courbe d'évidement quelconque, astreinte à la seule condition de laisser au fuseau une place suffisante.

2° Les fuseaux sont au pignon.

Les profils des dents sont formés, sur la roue creuse, par des courbes parallèles à l'hypocycloïde que décrirait le point I, entraîné par la circonférence primitive S' du pignon roulant sans glisser à l'intérieur de S . La roue mène le pignon, et la conduite n'a lieu qu'en retraite.

Un cas particulier intéressant est celui où le diamètre du pignon est égal au rayon de la roue. L'hypocycloïde lieu du point I se réduit au rayon oI (fig. 256) et les creux de la roue sont limités par des droites AB et CD parallèles à oI .

Dans le cas général, la roue doit affecter la forme d'une couronne complètement évidée, afin de ménager une place au pignon. Elle se trouve placée en porte à faux à l'extrémité de son arbre, ce qui la rend plus sensible aux ébranlements. Cette remarque, qui s'applique à tous les tracés d'engrenages intérieurs, justifie leur remplacement par la combinaison du paragraphe 302, toutes les fois que l'on dispose d'une place suffisante.

§ II. — Engrenage intérieur à flancs droits.

304. Soient S et S' (fig. 257) les circonférences primitives, et S_1 une circonférence qui leur est tangente intérieurement en I , à laquelle nous attribuerons provisoirement un diamètre inférieur à oI . Supposons que la roue creuse soit menante, et faisons rouler S_1 successivement sur S et sur S' , dans le sens du mouvement relatif de la menée indiqué par la flèche f . Le point I décrit dans ce double mouvement deux hypocycloïdes Ih , Ih' . Dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, la première, invariablement liée à S , peut pousser la seconde, et transmettre le mouvement après la ligne des centres, avec le même rapport de vitesses angulaires que les cylindres de friction. Car, si l'on considère les profils Ah_1 et Bh'_1 engendrés par un point M de S_1 situé en retraite, on démontre aisément qu'ils sont tangents en M , et que les arcs IA et IB sont égaux, ce qui prouve que leur action a pour effet d'imprimer aux circonférences primitives un mouvement de roulement sans glissement. L'hypocycloïde Ih constitue donc une face de la roue creuse, et l'hypocycloïde Ih' un flanc du pignon.

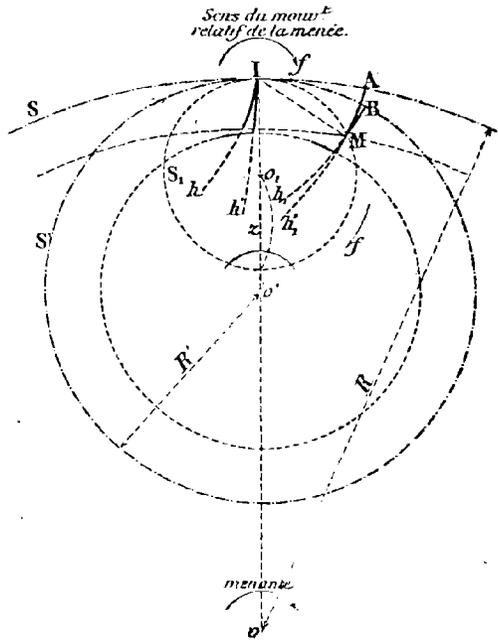


Fig. 257.

Dans la figure, les dents de la menée ont été échanfrinées au cercle de rayon oM , ce qui correspond à un arc de retraite égal à IM . L'appareil ne conduit pas en approche, si la roue o est supposée menante.

Ces conclusions sont indépendantes du diamètre attribué au cercle générateur S_1 . Pour en déduire les conséquences, nous distinguerons deux cas :

1° Le diamètre $2R'$ du pignon est inférieur ou au plus égal au rayon R de la roue.

Tant que le diamètre $2r$ du cercle générateur est inférieur à R' , les deux profils Ih et Ih' sont des hypocycloïdes proprement dites (fig. 257).

Si $r = \frac{R'}{2}$, Ih' se confond avec $o'I$; le pignon a des flancs droits, et les faces de la roue sont hypocycloïdales.

Quand $\frac{R'}{2} < r < R'$, les flancs du pignon redeviennent hypocycloïdaux, mais leur courbure change de sens, le profil Ih' passant à droite du rayon $o'I$. Les dents du pignon sont étranglées à la racine.

Quand $r = R'$, les flancs du pignon se réduisent à des points de sa circonférence primitive, et le système se ramène à l'engrenage à lanterne théorique (2° cas).

Enfin, si $r > R'$, les profils du pignon deviennent des épicycloïdes, qui se placent

extérieurement à sa circonférence primitive, ceux de la roue restant des hypocycloïdes intérieures à S . Il ne saurait donc y avoir contact entre eux, sauf au passage de la ligne des centres, et l'engrenage est impossible.

2° Le diamètre $2R'$ du pignon est supérieur au rayon de la roue.

Les résultats généraux de la discussion sont identiques à ceux du cas précédent. Seulement, quand le diamètre $2r$ du cercle générateur est égal au rayon R de la roue, les faces de celle-ci sont des portions de rayon telles que Ih (fig. 258), et les flancs du pignon sont des hypocycloïdes Ih' correspondant à des dents étranglées à la racine. Il est inexact de dire dans ce cas particulier, comme on le fait parfois, que les

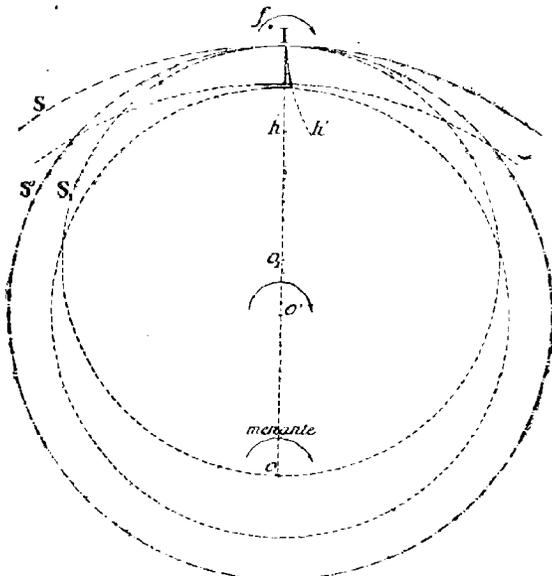


Fig. 258.

flancs droits sont à la roue ; les profils Ih sont, en effet, de véritables faces, qui conduisent le pignon en retraite comme dans le cas général.

Il résulte de cette étude que, dans l'engrenage intérieur, il est impossible de donner des flancs droits aux deux roues. En outre, l'engrenage n'est réciproque pour aucune des dispositions étudiées.

§ III. — Engrenage intérieur à doubles profils épicycloïdaux.

305. Pour obtenir un engrenage intérieur réciproque, on détermine d'abord une face Ih de la roue et un flanc Ih' du pignon, au moyen du cercle générateur S_1 de rayon $o_1I \leq \frac{o'I}{2}$, tangent intérieurement aux circonférences primitives (fig. 259) ; ces deux profils sont des hypocycloïdes qui, comme on vient de le voir, assurent la conduite en retraite, lorsque la roue o est supposée menante.

Il est impossible d'engendrer les flancs de la roue et les faces du pignon par le roulement d'un cercle disposé comme S_1 par rapport à S et S_1 , car les profils qu'un tel cercle ferait décrire au point I seraient, de même que les précédents, intérieurs aux circonférences primitives, et ne pourraient subsister en même temps qu'eux. Considérons donc une circonférence S_1' , de rayon arbitraire, tangente extérieurement en I à S et S' . Lorsqu'elle roule sur les circonférences primitives dans le sens du mouvement relatif de la menée indiqué par la flèche f , le point I décrit deux épicycloïdes Ie , Ie' . La première forme les flancs de la roue creuse, et la seconde, les faces du pignon. On établit facilement, par un raisonnement déjà reproduit plusieurs fois que ces profils assurent la conduite avant le passage de leur point de contact sur la ligne des centres.

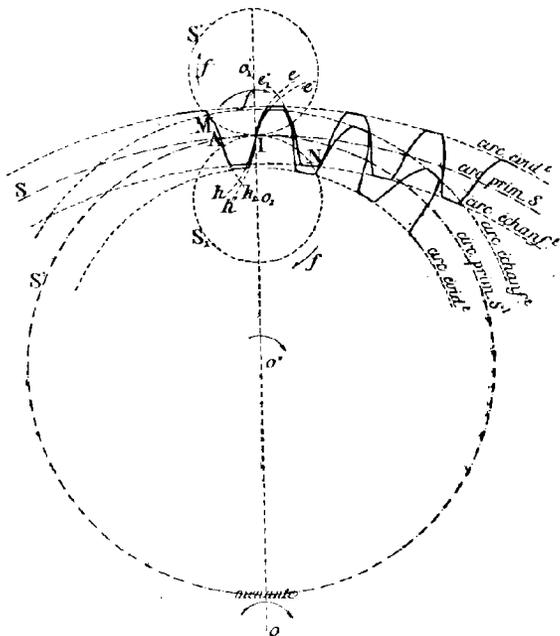


Fig. 259.

Comme dans l'engrenage extérieur correspondant : le lieu du point de contact des dents est, en approche, un arc MI de la circonférence S_1 , égal à l'arc d'approche, et, en retraite, un arc IN de la circonférence S_1 , égal à l'arc de retraite.

Cette propriété permet de réaliser des arcs d'approche et de retraite déterminés a et b . Ceux-ci étant portés respectivement en IM et IN , on échanfre les dents du pignon au cercle de rayon $o'M$, et celles de la roue au cercle de rayon $o''N$. On trace ensuite les cercles d'évidement en laissant un petit jeu au fond des creux. Dans la figure, a et b sont égaux au pas.

336. Influence des rayons des cercles générateurs sur la forme des profils.

On a déjà étudié l'effet de la variation du rayon de S_1 (304). Son augmentation cause un affaiblissement graduel des racines sur le pignon, et si l'on admet pour celui-ci, comme extrême limite, des dents à flancs droits, le rayon de S_1 ne peut pas dépasser $\frac{o'I}{2}$. Sa diminution produit une divergence de plus en plus rapide des deux hypocycloïdes symétriques, telles que Ih et Ah_1 , qui forment les faces d'une dent de la roue. Il en résulte un amincissement des sommets, et, à partir d'une certaine limite, l'impossibilité d'échanfriner la roue de manière à donner au mécanisme un arc de retraite suffisant.

A mesure que le rayon de la circonférence S_1' croît, les arcs d'épicycloïde Ie , Ie' se rapprochent de Io' ; ce fait, sans inconvénient pour la roue, augmente l'épaisseur des dents du pignon à leur extrémité. Si, au contraire, le rayon de S_1' décroît, les dents du pignon s'amincissent à la tête, et la convergence des épicycloïdes symétriques (e' , e'') qui les limitent peut arriver à se faire assez vite pour qu'il soit impossible de réaliser un arc d'approche suffisamment étendu.

En pratique, on donne aux cercles générateurs, aux faces et aux flancs, les mêmes dimensions que dans l'engrenage extérieur à profils épicycloïdaux :

$$r = 0,875 P \quad F = 0,3 P \quad f = 0,4 P$$

ou encore $r = 2,75 M \quad F = M \quad f = \frac{7M}{6}$

Ces dispositions rendent possible la construction d'assortiments, dans lesquels chaque roue creuse peut engrener avec un pignon quelconque de même pas et de diamètre plus petit.

307. **Remarques.** — Il est important d'observer :

1° Que les profils des dents du pignon sont absolument les mêmes que si ce pignon devait engrener extérieurement. Les fraises à employer sont donc identiques dans les deux cas.

2° Que les pleins de la roue creuse sont identiques aux creux de la roue d'engrenage extérieur de même pas, construite sur la même circonférence primitive, et inversement. Il faut donc employer des outils spéciaux pour la taille des roues creuses.

Ces observations s'appliquent à tous les tracés des engrenages intérieurs.

§ IV. — Engrenage intérieur à développantes.

308. Menons par le point de contact des circonférences primitives une droite xy , faisant avec la tangente commune, dans le sens du mouvement relatif de la menée,

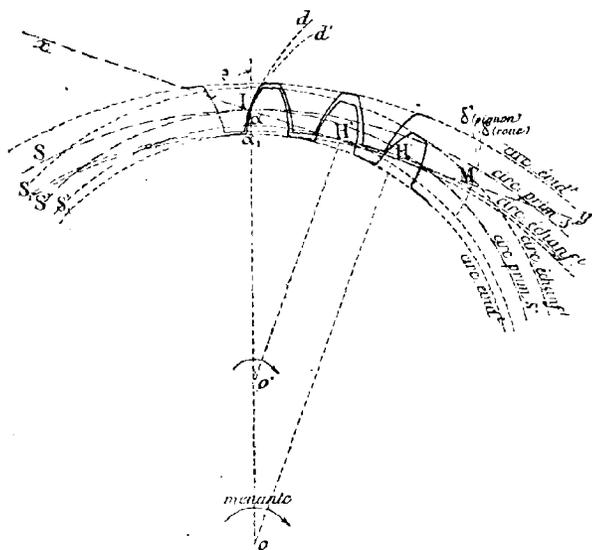


Fig. 260.

un angle aigu quelconque, et traçons les circonférences S_1 et S_1' , de centres o et o' , qui lui sont tangentes (fig. 260). Quand xy roule successivement sur S_1 et S_1' , le point I décrit deux développantes de cercle (d, d') qui assurent la transmission de part et d'autre de la ligne des centres. Comme dans l'engrenage extérieur correspondant, l'inclinaison de xy sur oo' est de 75° . Les observations relatives à la détermination des cercles d'échanfrinement, à la pression normale des dents, à l'écartement possible des axes et aux roues d'assortiment, subsistent sans modifica-

tions.

En considérant les développantes ($M\hat{o}, M\hat{o}'$) décrites par un point de xy situé sur la partie $H'y$, on reconnaît que, la roue o étant menante, la conduite ne peut plus avoir lieu dès que le point de contact des profils (d, d') atteint la position H' , à cause du changement de sens qui devrait se produire dans leur courbure. Il résulte de là que

§ VI. — *Tracé Willis à un ou deux arcs de cercle.*

310. La théorie exposée pour l'engrenage extérieur subsiste intégralement. La

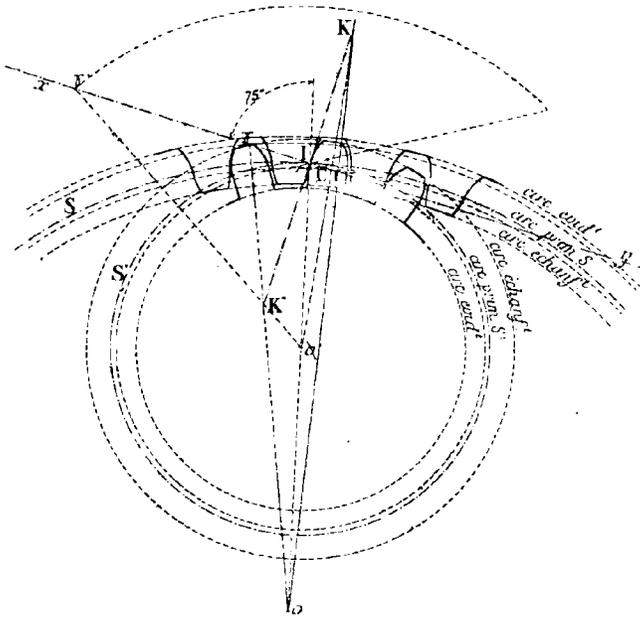


Fig. 262.

forme des dents, dans le cas du tracé par deux arcs de cercle, est représentée par la figure 262.

LIAISON D'UNE ROTATION ET D'UNE TRANSLATION PERPENDICULAIRE A SON AXE

PIGNONS ET CRÉMAILLÈRES

341. Rouleaux et galets. — Pour assurer la liaison entre une rotation et une translation perpendiculaire à l'axe de rotation, avec rapport constant des vitesses, on peut faire usage d'une combinaison analogue aux cylindres de friction, dont les rouleaux employés dans les chantiers pour le déplacement des matériaux offrent un exemple. Ceux-ci sont constitués par des cylindres égaux o et o' (fig. 263), placés sur le sol parallèlement l'un à l'autre, et sur lesquels s'appuie le corps à transporter MM' . Supposons que les roulements de toutes les parties mobiles se fassent sans glissement. Le mouvement absolu de chaque rouleau revenant, à chaque instant, à une rotation infiniment

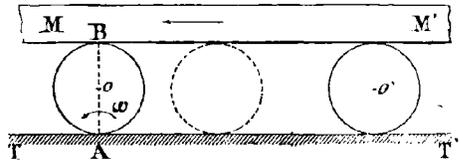


Fig. 263.

petite autour de sa ligne de contact avec le sol, la vitesse linéaire du point B est double de celle du point o . Il résulte de là que le chemin parcouru pendant un temps donné est deux fois plus grand pour le corps MM' que pour les rouleaux qui le supportent. C'est pourquoi le rouleau d'arrière finit par s'échapper ; on le reporte vers l'avant afin d'assurer la continuité du mouvement.

Les pignons et crémaillères, qui produisent la même transformation de mouvement (table des raboteuses), peuvent être considérés comme les limites d'engrenages extérieurs ou intérieurs dans lesquels le rayon d'une des circonférences primitives aurait augmenté indéfiniment. Le principe établi au paragraphe 254 restant vrai dans ces conditions, les tracés qui s'en déduisent sont applicables au cas particulier qui nous occupe. Avant de les passer en revue, rappelons que si V désigne la vitesse de translation de la crémaillère, ω la vitesse angulaire du pignon, et R son rayon, la relation entre les vitesses est

$$V = \omega R$$

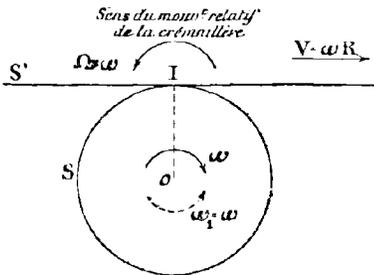


Fig. 264.

Enfin, le mouvement relatif de la crémaillère par rapport au pignon résulte à chaque instant de la composition de son mouvement absolu (translation V) et d'une rotation d'entraînement, de vitesse angulaire $\omega_1 = \omega$, s'effectuant autour de l'axe o en sens inverse de ω (fig. 264).

C'est donc une rotation autour d'un axe projeté en I, dont le sens est contraire à celui de la rotation du pignon, et dont la vitesse angulaire $\Omega = \omega$ (220).

341 bis. Problème I. Calcul d'un système pignon et crémaillère au pas circonférentiel. — La table d'une raboteuse est entraînée par un système pignon et crémaillère. Déterminer ce système de telle manière que, le pignon tournant à raison de $N = 15$ tours par minute, la vitesse de translation de la table soit voisine de $V = 6$ mètres par minute. L'épaisseur minimum des dentures est 9%; la course maximum de la table est de 1 m.

On peut prendre pour pas circonférentiel le double de l'épaisseur minimum, soit $P = 18\%$.

Nombre de dents du pignon. — La relation $V = \omega R$ peut s'écrire, en introduisant le nombre inconnu n des dents du pignon

$$V = \omega \times \frac{nP}{2\pi}$$

Il faut avoir soin d'exprimer V , ω et P en unités correspondantes de longueur et de temps, soit, par exemple, le % et la seconde. Dans ces conditions

$$V = \frac{6000\%}{60} = 100\% \quad \omega = \frac{\pi N}{30} = \frac{\pi}{2} \quad P = 18\%$$

et l'égalité précédente devient
$$100 = \frac{\pi}{2} \times \frac{n \times 18}{2\pi} = \frac{9n}{2}$$

d'où
$$n = \frac{200}{9} = 22,22\dots$$

On donnera donc au pignon 22 ou 23 dents. La vitesse de translation de la table sera un peu plus petite que 6 m. par minute dans le premier cas, et un peu plus grande dans le second. En prenant $n = 22$,

$$V = \omega \times \frac{nP}{2\pi} = \frac{\pi}{2} \times \frac{22 \times 18}{2\pi} = 99\% \text{ par seconde, soit } 5^m,94 \text{ par minute.}$$

<i>Dimensions du pignon</i>	}	Pas	$P = 18\%$;
		Nombre des dents	$n = 22$;
		Diam. prim.	$D = \frac{nP}{\pi} = 126\%05$;
		Diam. d'échanf.	$D_1 = D + 0.6 P = 136\%85$;
		Hauteur des dents	$h = 0.7 P = 12\%60$;
		Epaisseur des jantes de 27 à 54%	
		Epaisseur de la couronne	11% environ :
<i>Dimensions de la crémaillère</i>	}	Longueur (supérieure à la course maximum)	$l = 1^m,10$ par exemple.
		Pas	$P = 18\%$;
		Nombre de dents	$n' = \frac{l}{P} = 61$.
		Hauteur	$h = 12\%60$;

Distance de l'axe du pignon à la ligne d'échanfrinement de la crémaillère

$$d = R - F = R - 0.3 P = 57.63.$$

Problème II. — Quelle vitesse angulaire, exprimée en nombre de tours par minute, faudrait-il donner à un pignon de 18 dents, au pas circonférentiel $P = 18.85$ (module 6), pour que la vitesse de la crémaillère soit voisine de $V = 6m,50$ par minute?

Soit N le nombre de tours inconnu. L'égalité $V = \omega \times \frac{nP}{2\pi}$ devient, lorsqu'on y remplace les quantités par leurs valeurs, rapportées, par exemple, au millimètre et à la minute ($V = 6500m$, $\omega = 2\pi N$)

$$6500 = 2\pi N \times \frac{18 \times 18.85}{2\pi} = 18 \times 18.85 N$$

d'où
$$N = \frac{6500}{18 \times 18.85} = \frac{50}{9 \times 0.29} = 19 \text{ tours par minute, environ.}$$

§ I. — Pignon et crémaillère à flancs droits.

312. Soient S et S' (fig. 265) les lignes primitives du pignon et de la crémaillère. Traçons la circonférence S_1 , de diamètre oI , et faisons-la rouler sans glisser sur S et sur S' , dans le sens du mouvement relatif de la crémaillère indiqué par la flèche f . Le point I décrit, dans ce double mouvement, le rayon oI et la cycloïde Ic qui, d'après la méthode des roulettes, assurent la conduite, en supposant le pignon menant, avant le passage de leur point de contact sur oI , avec un rapport constant des vitesses. On peut d'ailleurs s'assurer directement de ce fait, en considérant les profils

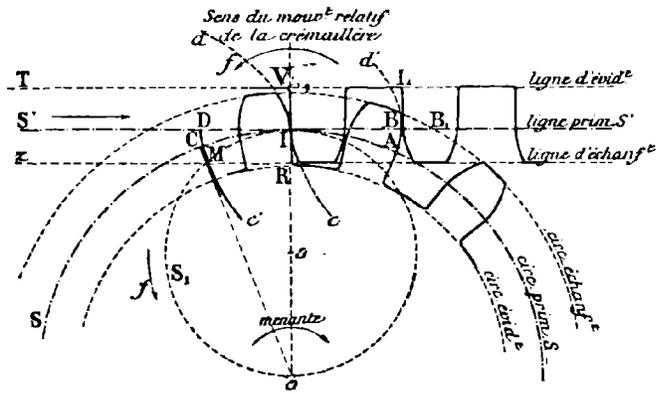


Fig. 265.

CMo , DMc' , identiques aux précédents et tangents en M , engendrés par un point quelconque de S_1 situé en approche. L'égalité évidente

$$\text{arc } IC = ID = \text{arc } IM$$

montre que le lieu du point de contact des dents est, en approche, un arc MI de la circonférence S_1 , égal à l'arc d'approche. Par conséquent, on réalisera un arc d'approche d'étendue donnée a en le portant de I en M sur S_1 , et en échanfrinant les dents de la crémaillère suivant Mz ; cette construction fait connaître en outre le cercle d'évidement du pignon.

Pour assurer la conduite en retraite, faisons rouler la droite S' sur S dans le sens du mouvement relatif de la crémaillère. Le point I décrit ainsi une développante de cercle $I'd$, tangente au prolongement IV de oI . Ces deux lignes assurent la conduite

après le passage de leur point de contact sur oI , car on peut les considérer respectivement comme les limites des profils Io' , Ie (fig. 226) de l'engrenage extérieur à flancs droits, quand le rayon de la menée croît indéfiniment. Mais on peut aussi l'établir en traçant la développante ABd' , engendrée par un point quelconque B de S' situé en retraite ; la perpendiculaire BL à S' lui est en effet tangente en B , et l'on a

$$\text{arc } IA = IB$$

ce qui montre que la poussée de Id sur IV fait parcourir aux lignes primitives S et S' des chemins égaux, comme si elles se commandaient directement. Donc : *Le lieu du point de contact des dents est, en retraite, un segment de S' égal à l'arc de retraite.*

Cette propriété donne le moyen de réaliser un arc de retraite déterminé b . On

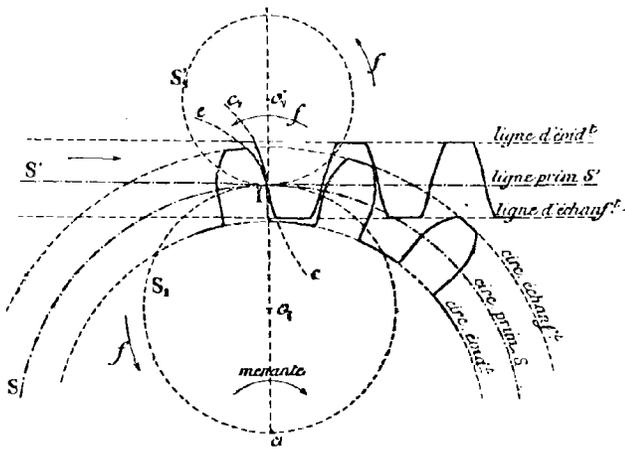


Fig. 266.

porte celui-ci en IB_1 sur S' , et l'on échanfre les dents du pignon au cercle de rayon oB_1 . On trace ensuite la ligne d'évidence VT de la crémaillère.

Il est important d'observer que, pendant toute la retraite, la face AB du pignon agit sur le même point du flanc conjugué BL . Aussi les dents de la crémaillère s'usent-elles très rapidement dans le voisinage de sa ligne primitive. On peut remédier à cet inconvénient en renonçant aux

flancs droits pour la crémaillère, et en déterminant les profils de retraite par le roulement d'un cercle S_1 placé, par rapport à S' , du côté opposé à S (fig. 266). Le point I décrit ainsi une épicycloïde Ie et une cycloïde Ic_1 que l'on substitue respectivement à la développante Id et au flanc rectiligne IV (fig. 265).

Ce tracé et le précédent présentent l'inconvénient, commun à tous les engrenages épicycloïdaux à flancs droits, de donner, pour le pignon, des dents étranglées à la racine.

§ II. — *Pignon et crémaillère à doubles profils épicycloïdaux.*

313. Ce tracé ne diffère de celui de la figure 266 qu'en ce que le diamètre de la circonférence S_1 est inférieur au rayon oI de la circonférence primitive du pignon. Les flancs sont alors constitués sur celui-ci par des arcs d'hypocycloïde tels que lh (fig. 267). La substitution des flancs hypocycloïdaux aux flancs rectilignes donne aux dents du pignon une plus grande épaisseur à la racine. Dans la pratique, les circonférences S et S_1 sont égales, et leur rayon $r = 0,875P$ ou $2,75M$. On détermine les lignes d'échanfrinement et d'évidement en donnant aux faces et aux flancs les longueurs respectives

$$F = 0,3 P \qquad f = 0,4 P$$

dans les tracés au pas circonférentiel,

ou
$$F = M \qquad f = \frac{7}{6} M$$

dans les tracés au module.

Les modifications apportées aux flancs théoriques, dans les figures 231 et 232, sont appliquées aux pignons et crémaillères, et permettent de descendre jusqu'à quatre dents pour le pignon.

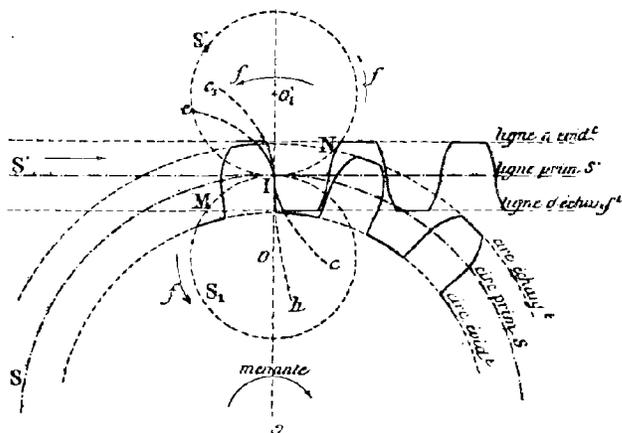


Fig. 267.

Le même raisonnement s'applique quelle que soit la position du point M sur la demi-droite Hy. Mais pour un point P pris sur Hx, la courbure de la développante change de sens, et son action ne peut s'exercer sur MB, le pignon étant moteur, que si l'on change le sens du mouvement. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Le lieu du point de contact des dents est, en approche, un segment NI de xy, égal à $a \sin \theta$, et, en retraite, un autre segment IM de la même droite, égal à $b \sin \theta$, a et b étant les arcs d'approche et de retraite.

Ces propriétés permettent d'obtenir des arcs d'approche et de retraite déterminés. On porte ceux-ci en IE et IB sur S', puis on abaisse les perpendiculaires EN et BM sur xy. On échanfrine ensuite les dents du pignon à la circonférence de rayon oM, et celles de la crémaillère à la droite Nz parallèle à S'. Les arcs d'approche et de retraite réalisés sont respectivement

$$a = \frac{IN}{\sin \theta} = \frac{IE \sin \theta}{\sin \theta} = IE$$

$$b = \frac{IM}{\sin \theta} = \frac{IB \sin \theta}{\sin \theta} = IB$$

comme on se l'était proposé. On trace les lignes d'évidement en laissant un petit jeu au fond des creux. Quand celle du pignon est intérieure à la circonférence S_1 , on prolonge les développantes, au-delà de leurs origines, par des portions de rayons dont l'influence a été étudiée au paragraphe 286.

Dans les tracés pratiques, on fait abstraction de l'arc de conduite, et l'on détermine les lignes d'échanfrinement et d'évidement en donnant aux faces et aux flancs les longueurs $F = 0.3 P$ ou M , $f = 0.4 P$ ou $\frac{7}{6} M$ selon les cas. L'angle θ est généralement égal à 75° ,

Il est important d'observer que les profils de la crémaillère sont rectilignes.

315. Maximum de l'arc d'approche. — D'après ce qui précède, le point de contact des dents ne peut pas pénétrer dans la région Hx. La plus grande valeur que puisse atteindre l'arc d'approche est donc

$$\frac{IH}{\sin \theta} = R \cotg \theta$$

R désignant le rayon de la circonférence primitive du pignon.

Il résulte de là que, théoriquement, la ligne d'échanfrinement de la crémaillère ne doit pas passer au-dessous du point H.

Si le contraire se produit, les segments de rayons qui prolongent les développantes interviennent dans la transmission, et celle-ci, pendant un certain temps, ne se fait plus comme si les corps de friction existaient seuls. On obvie à cet inconvénient, qui peut provoquer des arcs-boutements, soit en diminuant l'angle θ , ce qui abaisse le point H, soit en remplaçant les arêtes des dents de la crémaillère par des arrondis. C'est ce qui a été fait dans la figure 269.

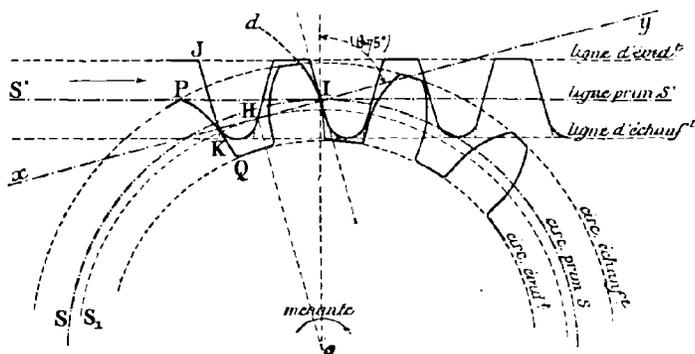


Fig. 269.

§ IV. — *Tracé à flancs rectilignes divergents. — Tracés Willis.*

316. Ces tracés, appliqués aux pignons et crémaillères, n'apportent aucune modification géométrique aux propriétés étudiées pour le cas des engrenages extérieurs.

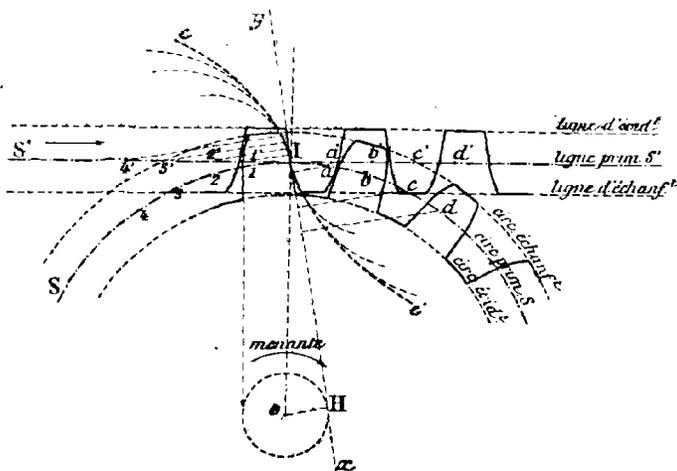


Fig. 270. — *Pignon et Crémaillère à flancs rectilignes divergents.* $oH = \frac{oI}{6}$.

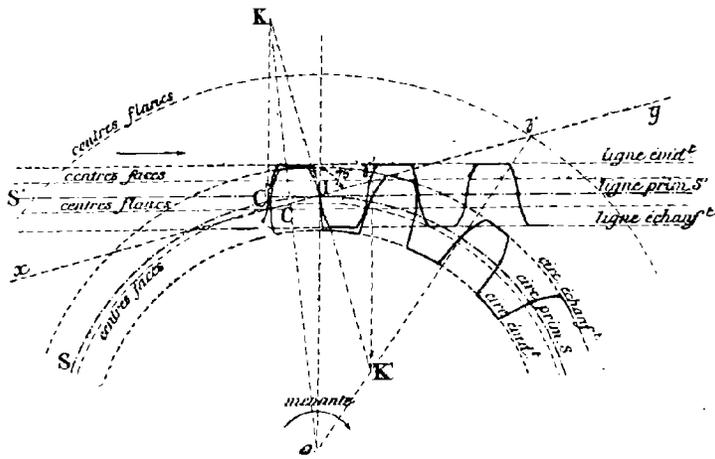


Fig. 271. — *Pignon et Crémaillère. — Tracé Willis à deux arcs de cercle.*

316^{bis}. Remarques. — En rapprochant les tracés des pignons et crémaillères de ceux des engrenages extérieurs correspondants, on peut observer :

1^o Que les profils des dents du pignon sont absolument les mêmes que si ce pignon devait engrener extérieurement. Les fraises à employer sont donc identiques dans les deux cas.

2^o Que les profils des dents de la crémaillère sont, au contraire, différents de ceux que donnerait le même tracé pour une roue de rayon fini. Il est donc nécessaire, pour obtenir des crémaillères taillées correctement, d'employer des fraises spéciales, ce qu'on ne fait pas toujours en pratique lorsqu'une approximation est admissible. (Voir le paragraphe 318).

CHAPITRE V

CALCUL DES ENGRENAGES DROITS AU MODULE

§ I. — Généralités.

317. Définitions et conventions préliminaires.

Nous avons vu (paragraphe 265, prob. I) que, quand un engrenage cylindrique droit est destiné à établir entre deux arbres une relation de vitesses déterminée, son pas circonférentiel *définitif* ne peut pas être fixé d'avance, puisqu'il résulte d'une modification apportée par le calcul, et variable dans chaque cas particulier, au pas *provisoire* minimum déduit des formules de Résistance. Chaque paire de roues calculée par ce procédé nécessite donc la construction de fraises spéciales, qui ne peuvent servir que pour elle. Aussi les constructeurs se sont-ils efforcés, afin de réduire leurs frais d'outillage, d'introduire une certaine uniformité dans les pas. C'est à ces considérations d'ordre pratique que l'on doit l'introduction, dans le calcul des engrenages, de la quantité appelée *module* ou *pas diamétral*.

Le module d'un engrenage, que nous désignerons par M , est le quotient du pas circonférentiel P , évalué en millimètres, par le nombre π (3,1416).

$$M = \frac{P}{\pi}$$

On a encore, en multipliant par le nombre de dents n les deux termes de la fraction du second membre :

$$M = \frac{nP}{n\pi} = \frac{\pi D}{n\pi} = \frac{D}{n}$$

Le module est donc aussi le quotient du diamètre primitif D , évalué en millimètres, par le nombre des dents de la roue. C'est de là que vient le nom de *pas diamétral*, souvent donné au module (*).

Chacune des définitions précédentes montre que le module est exprimé en millimètres. La première permet de passer du pas circonférentiel au module, ou inversement.

(*) Les constructeurs des diverses nationalités n'attachent pas la même signification à l'expression *pas diamétral*. Les Américains et les Anglais, qui l'ont très probablement introduite dans le langage technique, appellent ainsi le rapport du nombre de dents au diamètre primitif, évalué en pouces anglais. Etant donné que cette unité de longueur équivaut à 25,4 environ, une roue dont le pas diamétral américain (diametral pitch) est 3 correspond à un pas circulaire de 1 pouce 017 = 26,594, défini par la relation $3 = \frac{\pi}{P(\text{en pouces})}$ (fig. 272) ; une roue de module 3 (pas diamétral français) correspond à un pas circulaire de 9,5425, défini par la relation $3 = \frac{P(\text{en } \frac{m}{m})}{\pi}$ (fig. 273).

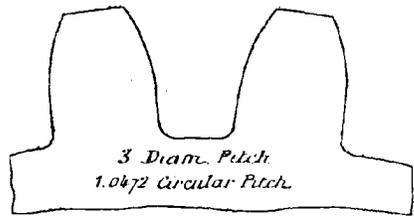


Fig. 272.

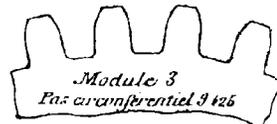


Fig. 273.

Il existe entre le diametral pitch et le module les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Diam. pitch} &= \frac{\pi}{P(\text{en pouces})} = \frac{25,4 \pi}{P(\text{en } \frac{m}{m})} = \frac{25,4}{\text{Module}} \\ \text{Module} &= \frac{P(\text{en } \frac{m}{m})}{\pi} = \frac{25,4 P(\text{en pouces})}{\pi} = \frac{25,4}{\text{Diam. pitch}} \end{aligned}$$

Pour éviter toute ambiguïté nous emploierons exclusivement l'expression *module*. On dit aussi : *pas diamétral métrique*.

On a adopté en outre les conventions suivantes :

(a) La longueur des faces, qui mesure la saillie des dents hors de la circonférence primitive, est, pour tous les engrenages, égale au module ($F = M$).

(b) La longueur des flancs est égale aux $\frac{7}{6}$ du module ($f = \frac{7}{6} M$), et, par conséquent, la hauteur totale d'une dent hors du cercle d'évidement, qui mesure la profondeur du fraisage pour les roues taillées, est égale au produit du module par 2, $\frac{1}{6}$ ($h = 2 \frac{1}{6} M = \frac{13}{6} M$). Certains constructeurs emploient une longueur de flancs égale à $M + \frac{e}{10}$.

(c) Dans les engrenages taillés, l'épaisseur des dents, mesurée sur la circonférence primitive, est égale à la moitié du pas circulaire, c'est-à-dire au produit du module par $\frac{\pi}{2}$ ou 1,57 ($e = 1,57 M$).

Ces engrenages sont donc construits sans jeu (*).

Les deux premières conventions conduisent à des longueurs de dents qui diffèrent peu de celles que nous avons indiquées pour les roues d'assortiment, dans les tracés au pas circonférentiel. On a en effet

$$F = M = \frac{P}{\pi} = 0,3183 P \text{ (au lieu de } 0,3 P)$$

$$f = \frac{7}{6} M = 0,3713 P \text{ (au lieu de } 0,4 P)$$

Ces conventions permettent de formuler des règles très simples pour le calcul des engrenages :

Engrenages extérieurs. — 1^{re} RÈGLE. *Le diamètre primitif d'une roue, évalué en millimètres, est égal au produit du module par le nombre des dents.*

De la relation $M = \frac{D}{n}$, on déduit en effet

$$D = Mn$$

Inversement : *le nombre des dents est égal au quotient du diamètre primitif, évalué en millimètres, par le module.*

$$n = \frac{D}{M}$$

2^e RÈGLE. *Le diamètre d'échanfrinement d'une roue, évalué en millimètres, est égal au produit du module par le nombre de dents plus 2.*

En désignant ce diamètre par D_1 , on a en effet

$$D_1 = 2(R + F) = D + 2F = Mn + 2M = M(n + 2)$$

(*) Dans le tracé par développantes, on peut toujours donner un peu de jeu en écartant légèrement les axes (287).

Les roues brutes sont construites avec un jeu de $\frac{P}{20}$ ou $\frac{P}{10}$, pour faciliter l'engrènement.

3^e RÉGLE. La distance, évaluée en millimètres, des axes de deux roues qui engrenent extérieurement, est égale au produit du module par la demi-somme des nombres de dents.

Deux roues ne peuvent engrener ensemble que si elles ont même pas circonférentiel et, par suite, même module. Si l'on désigne par d la distance de leurs axes, par D et D' leurs diamètres primitifs, par n et n' leurs nombres de dents, et par M le module commun, on a

$$d = \frac{D + D'}{2} = \frac{Mn + Mn'}{2} = M \times \frac{n + n'}{2}$$

Engrenages intérieurs. — a) Pignon. Les deux premières règles ci-dessus sont applicables.

b) Roue creuse. 1^{re} RÉGLE. Le diamètre primitif est égal au produit du module par le nombre des dents. Inversement, le nombre des dents est égal au quotient du diamètre primitif par le module.

2^e RÉGLE. Le diamètre d'échanfrinement de la roue creuse est égal au produit du module par le nombre de dents moins 2.

$$D_1 = D - 2M = Mn - 2M = M(n - 2)$$

3^e RÉGLE. La distance des axes de deux roues d'engrenage intérieur est égale au produit du module par la demi-différence des nombres de dents.

$$d = \frac{D - D'}{2} = M \times \frac{n - n'}{2}$$

Pignons et crémaillères. — Les deux premières règles énoncées pour les engrenages extérieurs sont applicables au pignon.

La distance d de l'axe du pignon à la ligne primitive de la crémaillère est égale au rayon primitif du pignon, soit $d = \frac{Mn}{2}$. Si l'on rapporte la position de cet axe à la ligne d'échanfrinement de la crémaillère, ce qui est d'une vérification plus facile, on a

$$d_1 = d - M = \frac{M(n - 2)}{2}$$

318. Réduction du nombre des fraises. — Les conventions qui précèdent ne suffiraient pas à produire la réduction de l'outillage que les constructeurs se sont proposée comme but si le module, comme le pas circonférentiel dont il dérive, restait indéterminé. Aussi a-t-on en outre décidé, comme répondant à tous les besoins de la pratique, d'établir une échelle de modules variant de 0 mm 25 depuis le module 1 (pas circonférentiel 3 mm 14) jusqu'au module 5.50 inclus (pas circonférentiel 17 mm 28) puis de 1 mm à partir du module 6 (pas circonférentiel 18 mm 85) jusqu'au module 16 inclus (pas circonférentiel 50 mm 27) qui est rarement dépassé. Par suite de cette convention nouvelle :

1^o Le diamètre d'échanfrinement d'une roue, donné par la formule $D_1 = M(n + 2)$, est toujours exprimé soit par un nombre entier de millimètres, soit, dans les cas les plus défavorables, en quarts de millimètres (*).

(*) Ces conclusions sont également applicables aux engrenages intérieurs et aux pignons de crémaillères.

Ces mesures étant faciles à vérifier, l'ouvrier peut tourner les disques ou roues brutes de fonte bien plus exactement que si le diamètre était exprimé en fractions décimales illimitées, ce qui arrive généralement pour un engrenage calculé d'après le pas circonférentiel (Voir l'exemple de calcul donné au § 265).

2° La distance des axes, dans le calcul d'un engrenage au module, n'est plus donnée ; elle résulte du choix du module, et des nombres de dents propres à fournir le rapport de vitesses que l'on désire. Son expression $d = M \times \frac{n+n'}{2}$ montre que, dans les cas les plus défavorables, elle est exprimée en huitièmes de millimètre, ce qui est encore d'une vérification facile (*).

Il n'y a, d'ailleurs, pas lieu de se préoccuper outre mesure de réaliser rigoureusement cette distance si, comme on le fait presque toujours aujourd'hui, on adopte le tracé par développantes. Nous avons vu, en effet, qu'une petite variation dans la distance des axes ne change pas le rapport des vitesses angulaires.

L'adoption du tracé par développantes donne lieu, d'autre part, à une simplification nouvelle, dont l'importance pratique est considérable. La courbure des profils sur une roue dépend seulement, comme on l'a vu, du rayon de la circonférence primitive, et, par suite, du nombre des dents, (si, bien entendu, on donne aux génératrices des développantes une inclinaison uniforme de 75°). Il s'en suit que, théoriquement, les profils changent avec les nombres de dents sur les roues d'un même module. Mais, si l'on se reporte à la figure 274 qui donne les profils des creux des roues de 12 dents et de 135 dents pour le module 8 on voit que, si les nombres de dents sont assez voisins, le changement de forme est peu prononcé. On conçoit donc qu'une même fraise puisse tailler des roues dont les nombres de dents sont compris entre des limites peu écartées. La pratique a démontré, en effet, qu'avec un nombre restreint de fraises, on pouvait tailler toutes les roues du même module (**), soit 8 fraises pour chaque module égal ou inférieur à 10, et 14 pour chaque module supérieur. Cet avantage, sans être particulier au tracé par développantes, n'existe pas au même degré pour les roues à profils épicycloïdaux, dans lesquelles le nombre nécessaire des fraises est de 24 par module. On trouve donc là une raison nouvelle pour justifier la préférence actuellement accordée par les constructeurs aux engrenages à développantes.

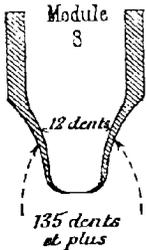


Fig. 274 (**).

En résumé :

1° L'adoption de modules conventionnels variant de 1/4 de millimètre jusqu'au module 5.50 inclus, puis de 1 millimètre jusqu'au module 16, a permis, en limitant le nombre des pas, une première réduction du nombre des fraises qui, sans cela, eût été illimité.

2° L'adoption du tracé par développantes a permis une nouvelle réduction, provenant de ce fait, établi par l'expérience, qu'un petit nombre de fraises suffit pour tailler toutes les roues d'un même module, quel que soit leur nombre de dents.

En résumé :

1° L'adoption de modules conventionnels variant de 1/4 de millimètre jusqu'au module 5.50 inclus, puis de 1 millimètre jusqu'au module 16, a permis, en limitant le nombre des pas, une première réduction du nombre des fraises qui, sans cela, eût été illimité.

2° L'adoption du tracé par développantes a permis une nouvelle réduction, provenant de ce fait, établi par l'expérience, qu'un petit nombre de fraises suffit pour tailler toutes les roues d'un même module, quel que soit leur nombre de dents.

Les tableaux ci-après donnent les dimensions des dents calculées par modules, et la composition des séries de fraises.

(*) Ces conclusions sont applicables aux engrenages intérieurs et aux pignons de crémaillères.

(**) Dans les engrenages de précision, il est indispensable d'avoir une fraise spéciale pour chaque nombre de dents.

(***) Intervertir les indications : 12 dents et 135 dents.

TABLEAU I. — Dimensions des dents (en millimètres).

MODULES	PAS	ÉPAISSEUR	LONGUEUR	HAUTEUR TOTALE	
	CIRCONFÉRENTIELS correspondants				DES DENTS
SÉRIE DE 8 FRAISES PAR MODULE	1	3.44	4.57	1	2.47
	1.25	3.93	4.96	1.25	2.71
	1.50	4.71	5.35	1.50	3.25
	1.75	5.50	5.75	1.75	3.79
	2	6.28	6.14	2	4.33
	2.25	7.06	6.53	2.25	4.87
	2.50	7.84	6.92	2.50	5.42
	2.75	8.63	7.32	2.75	5.96
	3	9.42	7.71	3	6.50
	3.25	10.20	8.10	3.25	7.04
	3.50	11	8.50	3.50	7.58
	3.75	11.78	8.89	3.75	8.12
	4	12.57	9.28	4	8.66
	4.25	13.35	9.67	4.25	9.20
	4.50	14.13	10.07	4.50	9.75
	4.75	14.92	10.46	4.75	10.29
5	15.70	10.85	5	10.83	
5.25	16.49	11.25	5.25	11.37	
5.50	17.28	11.64	5.50	11.91	
6	18.06	12.03	6	12.45	
7	22	14.42	7	15.16	
8	25.43	17.81	8	17.87	
9	28.84	21.20	9	20.58	
10	32.25	24.59	10	23.29	
SÉRIE DE 14 FRAISES PAR MODULE	11	35.66	27.98	11	26.00
	12	37.71	29.65	12	27.99
	13	40.85	32.42	13	29.16
	14	43	35.19	14	30.32
	15	47.13	38.56	15	32.49
	16	50.26	41.93	16	34.65

TABLEAU II. — Série de huit fraises par module, jusqu'à 10 inclus (Brown et Sharpe).
(Tracé par développantes.)

N ^{os} DES FRAISES	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de dents des roues qu'elles taillent.	De 135 à la cremailière.	55 à 134	35 à 54	26 à 34	21 à 25	17 à 20	14 à 16	12 à 13

TABLEAU III. — Série de quatorze fraises par module au-dessus de 10 (Brown et Sharpe.)
(Tracé par développantes.)

N° DES FRAISES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Nombres de dents des roues qu'elles taillent.	De 135 à la Crémaillère.	81 à 134	53 à 80	42 à 52	34 à 41	29 à 33	25 à 28	21 à 24	19 à 20	17 à 18	15 à 16	14	13	12

TABLEAU IV. — Série de vingt-quatre fraises par module (Brown et Sharpe.)
(Pour roues épicycloïdales.)

DÉSIGNATION DES FRAISES	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Nombres de dents des roues qu'elles taillent.	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21 à 22	23 à 24	25 à 26
DÉSIGNATION DES FRAISES	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Nombres de dents des roues qu'elles taillent.	27 à 29	30 à 33	34 à 37	38 à 42	43 à 49	50 à 59	60 à 74	75 à 99	100 à 149	150 à 249	250 à crém.	Crém.

Chaque fraise est toujours établie pour tailler rigoureusement la roue du plus petit nombre de dents auquel elle se rapporte. Quant aux crémaillères, bien que la première fraise de chaque jeu (tableaux II et III) puisse servir, il est préférable d'employer des fraises spéciales, faisant les dents théoriquement exactes.

349. Exemples de calculs des Engrenages au module.

I. Engrenages extérieurs. — Soient : d la distance approximative des axes (fixée par la place dont on dispose dans la machine à construire), N et N' les nombres de tours que la menante et la menée doivent effectuer dans le même temps, n et n' leurs nombres de dents respectifs, e l'épaisseur minimum des dents, donnée par des formules tirées de l'étude de la résistance des matériaux, et $\frac{N_1}{N_1'}$ la fraction irréductible équivalente à $\frac{N}{N'}$. On sait (264) que

$$\frac{N}{N'} = \frac{N_1}{N_1'} = \frac{n'}{n}$$

Détermination du module.

Il suffit de lire, dans le tableau I, le module M qui correspond à l'épaisseur la plus rapprochée de e , par excès. On peut donc le considérer comme connu. A défaut du tableau I, on calcule le quotient $\frac{2e}{\pi}$, et l'on prend, dans la série des modules conventionnels, le nombre immédiatement supérieur.

Calcul des nombres de dents.

Puisque $\frac{N_1}{N'_1} = \frac{n'}{n}$, n et n' seront des équimultiples de N'_1 et de N_1 et l'on aura, λ représentant un entier à déterminer :

$$\begin{cases} n = \lambda N'_1 \\ n' = \lambda N_1 \end{cases} \quad (1)$$

D'après la relation $d = M \times \frac{n + n'}{2}$ qui donne la distance des axes en fonction du module et des nombres de dents, on doit avoir en outre

$$d = \frac{M \lambda (N_1 + N'_1)}{2}$$

d'où
$$\lambda = \frac{2 d}{M (N_1 + N'_1)} \quad (2)$$

Si $2 d$ est un multiple de $M (N_1 + N'_1)$, le problème est résolu. Dans le cas contraire, on donne à λ la valeur entière la plus rapprochée du quotient exact de $2 d$ par $M (N_1 + N'_1)$. Le quotient par défaut correspond à une distance réelle des axes un peu moindre que la distance approximative donnée, et le quotient par excès à une distance réelle un peu supérieure. Le choix que nous indiquons réduit donc à son minimum la modification apportée à la distance approximative donnée d .

La connaissance de λ entraîne celle de n et n' (formules 1).

Distance réelle des axes : Elle est donnée par la formule $d = \frac{M (n + n')}{2}$, dans laquelle on remplace M , n et n' par leurs valeurs calculées précédemment.

Diamètres primitifs : $D = Mn$
 $D' = Mn'$

Diamètres d'échanfrinement : $D_1 = D + 2M = M (n + 2)$
 $D'_1 = D' + 2M = M (n' + 2)$

Hauteur des dents : $h = \frac{13}{6} M$

Épaisseur des jantes : de 5 à 10 M .

Épaisseur des couronnes : de 1,8 à 2 M .

APPLICATION NUMÉRIQUE. — Soit $e_{min.} = 6 \text{ m/m}$ $d_{approximatif} = 250 \text{ m/m}$.

$N = 150$ tours $N' = 120$ tours

On a
$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N'}{N} = \frac{120}{150} = \frac{4}{5}$$

Par conséquent $N_1 = 5$ et $N'_1 = 4$

Module : On choisira le module 4, qui donne une épaisseur de 6 m/m 28 (Tableau I).

Nombres de dents : La formule (2) donne

$$\lambda = \frac{250 \times 2}{4 \times 9} = \frac{125}{9} = 13,88$$

Le quotient par excès étant le plus rapproché du quotient exact, on prendra $\lambda = 14$; les nombres de dents seront, d'après les formules (1).

$$\begin{cases} n = 14 \times 4 = 56 \\ n' = 14 \times 5 = 70 \end{cases}$$

Distance réelle des axes : $d_{\text{exacte}} = \frac{M(n \times n')}{2} = \frac{4 \times 126}{2} = 252 \text{ m/m.}$

Diamètres primitifs :

$$\begin{cases} D = Mn = 4 \times 56 = 224 \text{ m/m.} \\ D' = Mn' = 4 \times 70 = 280 \text{ m/m.} \end{cases}$$

Diamètres d'échanfrinement :

$$\begin{cases} D_1 = D + 2M = 232 \text{ m/m.} \\ D'_1 = D' + 2M = 288 \text{ m/m.} \end{cases}$$

Hauteur des dents : $h = \frac{13M}{6} = \frac{26}{3} = 8 \text{ m/m } 67$

Épaisseur des jantes : de 20 à 40 m/m.

Épaisseur des couronnes : 8 m/m environ.

II. Engrenages intérieurs. — La marche à suivre est analogue à celle que nous venons d'exposer. Il suffit de tenir compte des modifications indiquées au paragraphe 317, relativement au calcul de la distance des axes et du diamètre d'échanfrinement de la roue creuse.

APPLICATION NUMÉRIQUE. — Supposons que la roue creuse doive faire 80 tours pendant que le pignon conjugué en fait 130 ; que la distance approximative des axes soit $d_{\text{app}} = 80 \text{ m/m}$, et que l'épaisseur minimum des dents soit $e_{\text{min}} = 7 \text{ m/m } 5$.

Choix du module. — Le module minimum est $M_{\text{min}} = \frac{2e}{\pi} = \frac{45}{\pi} = 14,77$

On prendra, dans la série des modules conventionnels, $M = 5$.

Nombres de dents. — Les nombres de dents étant inversement proportionnels aux nombres de tours, on a, si n est le nombre de dents de la roue creuse :

$$\frac{n}{n'} = \frac{130}{80} = \frac{13}{8}$$

d'où l'on déduit, λ désignant un entier à déterminer

$$\begin{cases} n = 13 \lambda \\ n' = 8 \lambda \end{cases}$$

Mais, d'après l'expression de la distance des axes $\left(d = M \times \frac{n+n'}{2} \right)$

$$\frac{5 \times 5 \lambda}{2} = 80$$

d'où

$$\lambda = \frac{160}{25} = 6,4$$

En prenant la valeur entière la plus voisine du quotient exact, soit 6, on trouve

$$\begin{cases} n = 13 \times 6 = 78 \\ n' = 8 \times 6 = 48 \end{cases}$$

Distance réelle des axes.

$$d_{ax} = 5 \times \frac{78 - 48}{2} = 75 \text{ m/m.}$$

Diamètres primitifs.

$$\text{Roue creuse : } D = Mn = 390 \text{ m/m.}$$

$$\text{Pignon : } D' = Mn' = 240 \text{ m/m.}$$

Diamètres d'échanfrinement.

$$\text{Roue creuse : } D_1 = D - 2M = 380 \text{ m/m.}$$

$$\text{Pignon : } D_1 = D' + 2M = 250 \text{ m/m.}$$

$$\text{Hauteur des dents : } h = \frac{13M}{6} = 10 \text{ m/m } 83.$$

$$\text{Épaisseur des jantes : } \text{de } 25 \text{ à } 50 \text{ m/m.}$$

$$\text{Épaisseur des couronnes : } \text{de } 9 \text{ à } 10 \text{ m/m.}$$

Emploi d'une roue parasite. — On a vu (302) que l'engrenage intérieur peut être remplacé, toutes les fois que la distance des axes n'est pas trop petite, par une combinaison de trois roues $oo'o''$ (fig. 254) dont la dernière, dite *roue parasite*, engrène extérieurement avec les deux autres. En adoptant les notations du paragraphe 302, les nombres de dents doivent satisfaire aux conditions suivantes :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'} \quad (1)$$

$$D + D' < 2oo' \quad \text{ou} \quad M(n + n') < 2oo' \quad (2)$$

$$D'' \geq oo' - \frac{D + D'}{2} \quad \text{ou} \quad Mn'' \geq oo' - \frac{M(n + n')}{2} \quad (3)$$

APPLICATION NUMÉRIQUE. — Calculer, au module $M = 3$, les dimensions des roues $oo'o''$, en supposant $oo' = d = 390$ m/m, les arbres o et o' devant faire respectivement 60 tours et 150 tours pendant le même temps.

Soient n, D, D_1, h le nombre de dents, le diamètre primitif, le diamètre d'échancrinement et la hauteur des dents de la roue $o, n', D' \dots n'' D'' \dots$ les quantités correspondantes pour les roues o' et o'' .

Nombres de dents des roues o et o' .

$$\text{On doit avoir} \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'} = \frac{150}{60} = \frac{5}{2};$$

n et n' sont donc des équimultiples de 5 et de 2, et l'on peut poser, λ désignant un nombre entier à déterminer :

$$\begin{cases} n = 5\lambda \\ n' = 2\lambda \end{cases}$$

Mais, d'après la relation (2) :

$$3 \times 7\lambda < 600 \quad \text{d'où} \quad \lambda < 28,6$$

soit

$$\lambda \leq 28$$

D'autre part, λ doit être au moins égal à 6 pour que n' ne descende pas au-dessous du minimum pratique 11 ou 12. En prenant, par exemple, $\lambda = 15$, on trouve

$$\begin{cases} n = 5\lambda = 75 \\ n' = 2\lambda = 30 \end{cases}$$

Dimensions des roues o et o' .

$$\begin{cases} D = Mn = 325 \text{ m/m.} \\ D' = Mn' = 90 \text{ m/m.} \\ D_1 = D + 2M = 231 \text{ m/m.} \\ D'_1 = D' + 2M = 96 \text{ m/m.} \end{cases}$$

$$h = \frac{13}{6} M = 6 \text{ m/m } 50$$

Nombre de dents et dimensions de la roue parasite. — D'après la relation (3)

$$3n'' \geq 300 - \frac{3 \times 105}{2}$$

On déduit de là

$$n'' \geq 47,5 \quad \text{ou} \quad n'' \geq 48$$

Nous prendrons, par exemple $n'' = 60$. Dans ces conditions

$$D'' = Mn'' = 180 \text{ m/m.}$$

$$D''_1 = D'' + 2M = 186 \text{ m/m.}$$

Distance des axes oo'. Elle est égale à $\frac{M(n+n')}{2}$, soit 202 m/m 50.

Distance des axes o'o''. Elle est égale à $\frac{M(n'+n'')}{2}$, soit 135 m/m.

Épaisseur des jantes (pour les 3 roues) : de 5 à 10M, soit de 15 à 30 m/m.

Épaisseur des couronnes (id.) : de 1.8 à 2M, soit 6 m/m environ.

III. Pignons et crémaillères. — Voir le paragraphe 317.

APPLICATION NUMÉRIQUE. — Nous traiterons par la notation diamétrale le problème I déjà résolu au paragraphe 311 bis.

Choix du module. On choisira le module 6, qui donne une épaisseur de $9^{m/m} 43$ (Tableau I).

Nombre de dents du pignon. La relation $V = \omega R$ peut s'écrire, en fonction du module et du nombre de dents n du pignon :

$$V = \frac{\omega Mn}{2}$$

ou, en prenant la seconde pour unité de temps, et le millimètre pour unité de longueur

$$100 = \frac{\pi}{2} \times 6 \times \frac{n}{2} = \frac{3\pi n}{2}$$

D'où l'on tire
$$n = \frac{200}{3\pi} = 21,22\dots$$

On donnera donc au pignon 21 ou 22 dents. Si, par exemple, $n = 22$, la vitesse de translation de la table sera un peu plus grande que la valeur assignée, soit

$$V = \frac{\omega Mn}{2} = \frac{\pi}{2} \times 6 \times \frac{22}{2} = 33\pi = 103^{m/m} 67 \text{ par seconde}$$

ou $6^{m/m} 22$ par minute.

Autres dimensions du pignon.

Diamètre primitif : $D = 6 \times 22 = 132^{m/m}$.

Diamètre d'échanfrinement : $D_1 = D + 2M = 144^{m/m}$.

Hauteur des dents : $h = 13^{m/m}$.

Épaisseur de la jante : de 30 à 60 m/m.

Épaisseur de la couronne : de 10 à 12 m/m.

Dimensions de la crémaillère.

Longueur (supérieure à la course maximum) $l = 4^m, 10$ par exemple.

Nombre de dents (module 6) $n' = \frac{l}{P} = \frac{l}{M\pi} = 58$.

Les autres dimensions sont identiques à celles du pignon.

Distance de l'axe du pignon à la ligne d'échanfrinement de la crémaillère.

$$d = \frac{D}{2} - M = 60^m/m.$$

§ II. — *Calcul des arcs de conduite.*

320. Les longueurs attribuées aux dents n'étant pas déterminées d'après l'arc de conduite, il est important de s'assurer que celui-ci n'est jamais inférieur à un pas, afin que la transmission soit constamment assurée par une paire de dents au moins. On peut supposer, dans cette question, que les faces et les flancs ont mêmes longueurs, puisque leur inégalité, dont le but est de laisser un certain jeu au fond des creux, n'influe pas sur les propriétés de la transmission. Soient $F = M$ leur longueur commune, R et R' les rayons des circonférences primitives, D et D' leurs diamètres, n et n' les nombres de dents respectifs des deux roues, P et M le pas et le module communs ; on considérera en outre la roue de rayon R comme la menante.

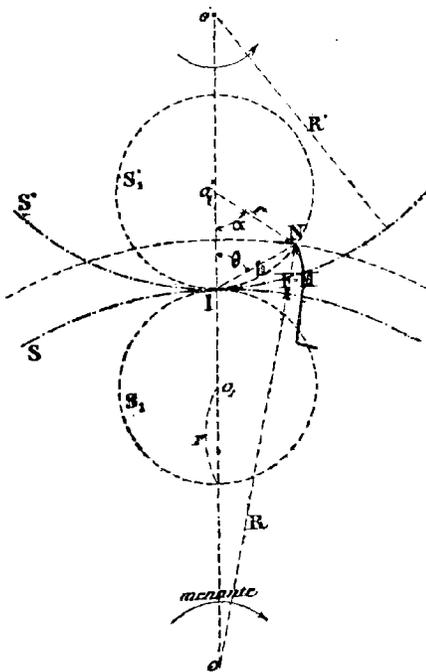


Fig. 275.

321. **Engrenages à profils épicycloïdaux.** — Soit $r = 0.875 P = 2.75 M$ le rayon commun des circonférences S_1 et S'_1 génératrices des profils. La circonférence de centre o et de rayon $oN = R + M$ coupe S'_1 en un point N qui est l'extrémité d'une face de la menante à la fin de la période de retraite, dont l'étendue b est mesurée par l'arc IN (273). En désignant par α l'angle Io_1N , on a donc

$$b = \text{arc } IN = r \alpha$$

et la question revient à calculer α . Or, le triangle oo_1N donne la relation.

$$\overline{oN}^2 = \overline{oo_1}^2 + \overline{oN}^2 - 2oo_1 \times oN \cos \alpha$$

ou

$$(R + M)^2 = (R + r)^2 + r^2 - 2r(R + r) \cos \alpha$$

d'où l'on tire

$$\cos \alpha = \frac{(R + r)^2 + r^2 - (R + M)^2}{2r(R + r)}$$

et

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2r(R+r) - (R+r)^2 - r^2 + R+M^2}{2r(R+r)}$$

$$= \frac{2RM + M^2}{2r(R+r)} = \frac{M}{r} \times \frac{2R+M}{2R+2r}$$

ou, en remplaçant r par sa valeur $2,75 M$, et $2R$ par Mn ,

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2,75} \times \frac{n+1}{n+5,50}$$

Cette formule permet de calculer α , par logarithmes, pour chaque valeur particulière de n , et d'en déduire l'arc de retraite $b = r\alpha = \alpha \times 2,75 M$. (La valeur de α est exprimée en radians).

On peut, en se bornant à une approximation, confondre l'arc avec son sinus. Il reste alors

$$\alpha^2 = \frac{2M}{r} \times \frac{2R+M}{2R+2r} = \frac{2}{2,75} \times \frac{n+1}{n+5,50}$$

et

$$b = r\alpha = \sqrt{2Mr \times \frac{2R+M}{2R+2r}} (1) = \sqrt{5,50 \times \frac{n+1}{n+5,50}} \times M = \sqrt{\frac{n+1}{n+5,50}} \times 2,345 M (*)$$

On aurait de même

$$a = \sqrt{2Mr \times \frac{2R'+M}{2R'+2r}} (2) = \sqrt{\frac{n'+1}{n'+5,50}} \times 2,345 M$$

a désignant l'arc d'approche, R' et n' le rayon primitif et le nombre des dents de la menée. En fonction du pas circonférentiel, les expressions précédentes deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \sqrt{\frac{n'+1}{n'+5,50}} \times 2,345 M = \sqrt{\frac{n'+1}{n'+5,50}} \times 0,75 P \\ b = \sqrt{\frac{n+1}{n+5,50}} \times 2,345 M = \sqrt{\frac{n+1}{n+5,50}} \times 0,75 P \end{array} \right.$$

(*) L'expression de $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ montre que α croît avec n (la fraction $\frac{n+1}{n+5,50}$ étant inférieure à l'unité. Sa plus petite valeur correspond à $n=11$ (pignon à flanes droits), et sa plus grande à $n = \infty$ (crémaillère). Elles sont respectivement de $42^{\circ}30'$ et $50^{\circ}30'$ environ. On est donc bien loin des conditions dans lesquelles l'arc et le sinus peuvent être pris l'un pour l'autre sans erreur sensible. Mais il faut observer que l'approximation à laquelle nous nous tenons conduit à une valeur trop faible de l'arc de retraite. On a en effet

$$\frac{\alpha}{2} > \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{et, par suite,} \quad b > \sqrt{5,50 \times \frac{n+1}{n+5,50}} \times M$$

Les arcs de conduite que nous allons calculer sont donc inférieurs à ceux qui existent en réalité, de sorte que, s'ils dépassent un pas, nous pourrions affirmer qu'il en est de même a fortiori dans la pratique.

Les fractions $\frac{n+1}{n+5,50}$, $\frac{n'+1}{n'+5,50}$, étant moindres que l'unité, croissent avec n et n' . Par conséquent, toutes choses égales d'ailleurs :

L'arc d'approche augmente avec le nombre de dents de la menée, et l'arc de retraite avec le nombre de dents de la menante.

Il résulte de là que, dans un assortiment de roues à profils épicycloïdaux, les minima des arcs d'approche et de retraite se produisent quand le plus petit pignon engrène avec lui-même. On a vu (278) que son nombre de dents est au moins égal à onze. Dans cette hypothèse

$$a = b = \sqrt{\frac{12}{16,50}} \times 2,345 M = 2M$$

L'arc de conduite total est donc $4M = 1,27 P$ environ, et, par conséquent, la transmission a lieu dans des conditions satisfaisantes pour deux roues quelconques de la série.

Avec une longueur de faces $F = 0,3 P$, les minima des arcs d'approche et de retraite, obtenus, par des calculs analogues aux précédents, en faisant

$$R = 2r = 1,75 P$$

et en remplaçant M par $0,3 P$ dans les formules (1) et (2), sont égaux à

$$a = b = \sqrt{1,75 \times 0,3 P^2 \frac{3,50 P + 0,3 P}{3,50 P + 1,75 P}} = \sqrt{0,38 P^2} = 0,62 P$$

ce qui correspond à un arc de conduite total de $1,24 P$.

322. Engrenages à développantes. — L'extrémité N d'une face de la menante se trouve, à la fin de la retraite, à l'intersection du cercle d'échanfrinement, de rayon $oN = R + M$, avec la génératrice xy des développantes (fig. 276). L'arc de retraite correspondant est (280)

$$b = IB = \frac{IN}{\sin \theta}$$

à condition toutefois que la valeur ainsi déterminée satisfasse à la relation (281)

$$b \ll \frac{IH'}{\sin \theta} (= R' \cotg \theta)$$

Le triangle INo donne l'égalité

$$\begin{aligned} IN &= oN \cos INo - oI \cos \theta \\ &= (R + M) \cos INo - R \cos \theta \end{aligned}$$

Mais d'autre part

$$\frac{\sin INo}{R} = \frac{\sin \theta}{R + M}$$

d'où
$$\sin INo = \frac{R \sin \theta}{R + M}$$

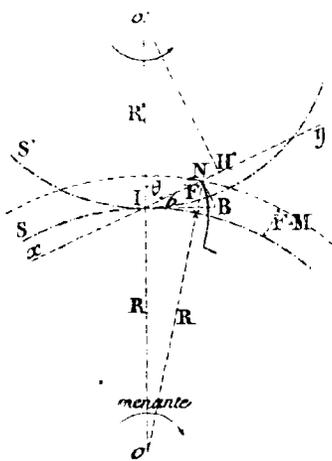


Fig. 276.

et $\cos INo = \sqrt{1 - \frac{R^2 \sin^2 \theta}{(R+M)^2}} = \frac{\sqrt{(R+M)^2 - R^2 \sin^2 \theta}}{R+M}$

Par conséquent

$$\begin{aligned} IN &= \sqrt{(R+M)^2 - R^2 \sin^2 \theta} - R \cos \theta \\ b &= \sqrt{\left(\frac{R+M}{\sin \theta}\right)^2 - R^2} - R \cotg \theta \\ &= \sqrt{\left(\frac{D+2M}{2 \sin \theta}\right)^2 - \frac{D^2}{4}} - \frac{D}{2} \cotg \theta \\ &= \sqrt{\left(\frac{nM+2M}{2 \sin \theta}\right)^2 - \frac{n^2 M^2}{4}} - \frac{nM}{2} \cotg \theta \\ &= \frac{M}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{n+2}{\sin \theta}\right)^2 - n^2} - n \cotg \theta \right] \end{aligned} \tag{1}$$

D'après ce qui précède, cette formule n'est applicable que si $b \ll R' \cotg \theta$, c'est-à-dire, en remplaçant R' par $\frac{D'}{2} = \frac{n'M}{2}$ et en supprimant le facteur commun $\frac{M}{2}$,

$$\sqrt{\left(\frac{n+2}{\sin \theta}\right)^2 - n^2} - n \cotg \theta \ll n' \cotg \theta$$

Cette inégalité équivaut à la suivante, obtenue par une élévation au carré après avoir isolé le radical

$$\left(\frac{n+2}{\sin \theta}\right)^2 - n^2 \ll (n+n')^2 \cotg^2 \theta$$

ou $(n+2)^2 - n^2 \sin^2 \theta \ll (n+n')^2 \cos^2 \theta$

ou enfin, en ordonnant par rapport à n'

$$n'^2 \cos^2 \theta + 2nn' \cos^2 \theta - 4(n+1) \gg 0$$

Le trinôme du premier membre a ses racines réelles et de signes contraires. L'inégalité ne peut donc être satisfaite que si n' est au moins égal à la racine positive, ce qui donne

$$n' \gg \frac{-n \cos^2 \theta + \sqrt{n^2 \cos^4 \theta + 4(n+1) \cos^2 \theta}}{\cos^2 \theta}$$

ou, après simplifications

$$n \gg \sqrt{\left(n + \frac{2}{\cos^2 \theta}\right)^2 - \frac{4 \operatorname{tg}^2 \theta}{\cos^2 \theta}} - n$$

Cette condition, déjà trouvée par une autre méthode au § 286, est, comme on l'a vu, satisfaite si

$$n' \gg 30$$

en supposant $\theta = 75^\circ$. On trouverait de même pour expression de l'arc d'approche

$$a = \frac{M}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{n'+2}{\sin \theta}\right)^2 - n'^2} - n' \cotg \theta \right] \quad (2)$$

formule applicable seulement si la valeur qu'elle donne pour a ne dépasse pas

$$R \cotg \theta = \frac{1}{2} nM \cotg \theta$$

c'est-à-dire, par analogie avec la discussion ci-dessus, si

$$n \gg 30$$

Cette analyse nous conduit à distinguer trois cas pour l'évaluation de l'arc de conduite total.

4° *Chacune des deux roues a au moins 30 dents.*

On reconnaît aisément que, toutes choses égales d'ailleurs, a et b croissent respectivement avec les nombres de dents des deux roues. Le point N peut être considéré, en effet, comme le centre d'une circonférence de rayon M tangente à S . Il est dès lors évident que, si I reste fixe pendant que o s'éloigne sur oI vers le bas de la figure, N se déplace sur xy en s'écartant du point I . La longueur IN , ainsi que l'arc de retraite qui lui est proportionnel, croît donc avec R , et, par suite, avec n . Un raisonnement analogue montrerait que l'arc d'approche croît avec n' , et l'on peut conclure que :

Dans un assortiment de roues à développantes ayant au moins 30 dents, le plus petit arc de conduite est réalisé quand les roues de 30 dents engrènent ensemble.

Dans ce cas, les valeurs de a et de b sont égales, et leur valeur commune est

$$a = b = \frac{M}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{32}{\sin \theta}\right)^2 - 30^2} - 30 \cotg \theta \right]$$

On trouve, pour $\theta = 75^\circ$,

$$a = b = 3 M$$

ce qui correspond à un arc de conduite total de $6M = 4.91 P$ (*).

(*) Pour deux roues de 30 dents à profils épicycloïdaux, on a

$$a = b = \sqrt{\frac{n+1}{n+5.5}} \times 2.345 M = 2.16 M$$

ce qui correspond à un arc de conduite total de $4.32 M = 1.38 P$, bien inférieur au précédent.

Chacune des quantités a , b prend sa valeur maximum lorsque le nombre de dents qui figure dans la formule est infini, ce qui correspond à l'engrènement d'une roue et d'une crémaillère. On a donc

$$\begin{aligned}
 a_{max} = b_{max} &= \frac{M}{2} \times \limite \text{ de } \left[\frac{\left(\frac{n+2}{\sin \theta}\right)^2 - n^2 - n^2 \cotg^2 \theta}{\sqrt{\left(\frac{n+2}{\sin \theta}\right)^2 - n^2 + n \cotg \theta}} \right] \text{ pour } n = \infty \\
 &= \frac{M}{\sin \theta} \lim \left[\frac{2n+2}{\sqrt{(n+2)^2 - n^2 \sin^2 \theta + n \cos \theta}} \right]^{n = \infty} \\
 &= \frac{M}{\sin \theta} \lim \left[\frac{2 + \frac{2}{n}}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 - \sin^2 \theta + \cos \theta}} \right]^{n = \infty} \\
 &= \frac{2M}{\sin 2\theta} = 4M
 \end{aligned}$$

2° Chacune des deux roues a moins de 30 dents.

Les valeurs données pour a et b par les formules (1) et (2) dépassent alors les maxima théoriques qui, pour les plus petites roues de la série, dont le nombre de dents est douze (285), sont égaux à

$$\frac{1}{2} nM \cotg \theta = 6M \cotg \theta = 1.61 M = 0.51 P$$

alors que les formules donnent

$$a = b = \frac{2}{M} \left[\sqrt{\left(\frac{14}{\sin \theta}\right)^2 - 12^2 - 12^2 \cotg^2 \theta} \right] = 2.46 M = 0.78 P$$

On a vu d'autre part (286) que, pour les roues de moins de 59 dents, les développantes sont prolongées jusqu'aux cercles d'évidement par des portions de rayons. Tandis que, pour les nombres de dents supérieurs à 30, ces profils auxiliaires, lorsqu'ils existent, n'interviennent pas dans la conduite, ils se mettent ici en action au début de l'approche, et l'engrenage fonctionne mal. Il arrive même, ainsi que nous l'avons établi, que le profil de la dent menée tend à entailler le flanc de la menante. Le même fait se reproduit à la fin de la retraite. On pourrait remédier à cet inconvénient en diminuant θ — ce qui augmente les maxima théoriques des arcs d'approche et de retraite, proportionnels à $\cotg \theta$ — si cet angle ne devait pas conserver une valeur constante pour toutes les roues d'un assortiment. Le seul moyen praticable — sauf pour les pignons et crémaillères qui ne constituent pas des séries — est d'arrondir un peu les extrémités des dents (fig. 269), ou bien de remplacer les développantes, au voisinage des cercles d'échanfrinement, par des courbes un peu intérieures aux profils exacts.

A mesure que le nombre des dents croît à partir de 12, l'effet que nous venons de signaler diminue d'intensité, puis cesse de se produire à partir de 30 dents. L'arc de conduite varie entre $3.22 M = 1.02 P$ (maximum théorique pour deux roues de 12 dents engrénant ensemble) et $6 M = 1.91 P$ (arc de conduite relatif à deux roues de 30 dents).

3° Les nombres de dents des deux roues sont l'un supérieur à 30, l'autre inférieur.

Si la menante a plus de 30 dents, on se trouve dans les conditions du premier cas pendant l'approche, la formule (2) étant applicable, et dans celles du second pendant la retraite. Il faut donc modifier les profils des dents de la menante au voisinage de leur sommet, afin qu'elles n'aient pas tendance à couper les flancs de la menée en les conduisant après la ligne des centres. L'arc de conduite réalisé est au moins égal à la somme

$$2.46 M + 1.61 M = 4.07 M = 1.28 P$$

de l'arc d'approche 2.46 M donné par la formule (2) pour une menée de 12 dents et du maximum théorique 1.61 M de l'arc de retraite relatif au même pignon. Il est au plus égal à

$$4 M + 1.61 M = 5.61 M = 1.78 P$$

valeur qui correspond à une crémaillère menant un pignon de 12 dents.

323. Engrenage à flancs droits divergents.

Bien que les roues tracées par ce procédé ne soient pas susceptibles de constituer des assortiments, nous allons montrer que l'arc total de conduite dépasse toujours un pas, même pour les plus petites roues, lorsqu'on donne aux faces une longueur égale au module.

Soit BK (fig. 277) le flanc de la menée à la fin de la période de retraite, dont l'étendue est mesurée par l'arc IB = b. L'extrémité N de la dent menante est, à cet instant, au pied de la perpendiculaire abaissée de I sur BK. Rappelons que tous les flancs de la menée sont tangents à une circonférence de rayon $r' = o'H' = hR'$; ils forment avec les rayons un angle constant β , déterminé par la relation

$$\sin \beta = \frac{r'}{R'} = h$$

Enfin, nous désignerons par α l'angle au centre Io B, et par θ l'angle de IN avec la ligne des centres. Ceci posé, le triangle oIN donne la relation

$$(R + F)^2 = R^2 + N^2 + 2R \times IN \cos \theta$$

D'autre part

$$IN = IN_1 - r' = R' \cos \theta - hR' = R' (\cos \theta - h)$$

On a donc

$$(R + F)^2 = R^2 + R'^2 (\cos \theta - h)^2 + 2RR' \cos \theta (\cos \theta - h)$$

d'où

$$\begin{aligned} 2RF + F^2 &= (R^2 + 2RR') \cos^2 \theta - 2hR'(R + R') \cos \theta + h^2 R'^2 \\ &= (R + R')^2 \cos^2 \theta - 2hR'(R + R') \cos \theta + h^2 R'^2 - R^2 \cos^2 \theta \\ &= \left[(R + R') \cos \theta - hR' \right]^2 - R^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

En introduisant le module et les nombres de dents par les formules de substitution

$$R = \frac{Mn}{2} \quad R' = \frac{Mn'}{2} \quad R + R' = M + \frac{n + n'}{2}$$

il vient

$$nMF + F^2 = \left[M \frac{n + n'}{2} \cos \theta - \frac{kn'M}{2} \right]^2 - \frac{n^2 M^2}{4} \cos^2 \theta$$

ou

$$4F^2 + 4nMF - M^2 \left[(n + n') \cos \theta - kn' \right]^2 + n^2 M^2 \cos^2 \theta = 0$$

Cette équation donne l'expression de F en fonction de θ , dont la valeur est évidemment liée à l'arc de retraite :

$$F = -n \frac{M}{2} \pm \frac{M}{2} \sqrt{n^2 \sin^2 \theta + \left[(n + n') \cos \theta - kn' \right]^2}$$

Le discriminant étant essentiellement positif, les valeurs de F sont réelles. Le signe de leur produit est celui de la quantité

$$n^2 \cos^2 \theta - \left[(n + n') \cos \theta - kn' \right]^2 = \left[2n \cos \theta + n' (\cos \theta - k) \right] (k - \cos \theta) n' \quad (1)$$

Or, $\theta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$. Comme $\sin \alpha = k$, et que $\alpha + \beta$ est un angle aigu, on a

$$\cos \theta = \sin (\alpha + \beta) > k.$$

Les deux facteurs du second membre de l'égalité (1) sont donc de signes contraires, et le produit des racines de l'équation en F est négatif. En écartant la racine négative, il reste

$$F = \frac{M}{2} \left\{ \sqrt{n^2 \sin^2 \theta + \left[(n + n') \cos \theta - kn' \right]^2} - n \right\}$$

Appliquons cette formule à la recherche de la longueur des faces susceptible d'assurer à l'engrenage un arc de retraite de un demi-pas au moins, et faisons le calcul pour le plus petit pignon engrenant avec lui-même. Celui-ci ayant au moins 9 dents si $k = \frac{1}{6}$ (292), nous aurons

$$F = \frac{M}{2} \left[\sqrt{81 \sin^2 \theta + \left(18 \cos \theta - \frac{3}{2} \right)^2} - 9 \right]$$

Or

$$\beta = \arcsin \frac{1}{6} = 9^\circ 30' \text{ environ}$$

$$\alpha = \frac{b}{R} = \frac{P}{2R} = \frac{M\pi}{9M} = \frac{\pi}{9} = 20^\circ$$

et par suite

$$\theta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) = 60^\circ 30'$$

En substituant sous le radical, il reste, toutes opérations faites

$$F = 0.87 M.$$

Deux roues de 9 dents se conduisent donc pendant un pas, avec une longueur de faces égale à $0.87 M$; l'engrenage fonctionnera a fortiori dans des conditions satisfaisantes si $F = M$.

324. Engrenages Willis à un ou deux arcs de cercle.

Ce sont des approximations des engrenages à développantes ou des engrenages épicycloïdaux. Les résultats établis aux paragraphes 321 et 322 leur sont donc à peu près exactement applicables.

CHAPITRE VI

DE L'ARC-BOUTEMENT

325. Notions élémentaires sur le frottement. — Nous admettrons le principe suivant, qui sera démontré en Statique :

Lorsque plusieurs forces se font équilibre, l'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.

Soit un corps pesant A, posé sur un plan horizontal S (fig. 278). Lorsqu'aucune force autre que son poids P n'agit sur lui, la résistance du plan provoque une réaction P_1 qui, d'après le principe de Newton (*), est égale et directement opposée à P. Si les deux surfaces en contact étaient parfaitement polies, une force parallèle à S, si petite qu'elle soit, produirait le glissement de A dans sa propre direction. L'observation montre qu'il n'en est pas ainsi, et que le mouvement n'a lieu qu'à si l'intensité de la force dépasse une certaine limite F. A l'instant où le mouvement est

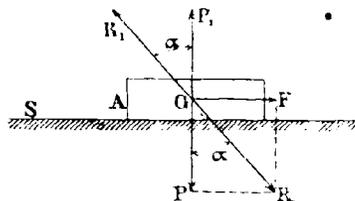


Fig. 278.

sur le point de se produire, A est en équilibre sous l'action de trois forces : P, F, et la réaction du plan S. Cette dernière n'est donc plus représentée par P_1 , mais par une force R_1 égale et directement opposée à la résultante R de P et de F. On conclut de là que :

*L'existence du frottement a pour effet d'incliner la réaction du plan S, par rapport à la normale commune aux surfaces en contact, d'un certain angle α , appelé angle de frottement, porté en sens inverse du glissement qui va se produire (**).*

On a supposé que l'un des corps frottants restait fixe. Pour étendre la conclusion qui précède au cas de deux corps mobiles, il suffit de ramener l'un d'eux au repos. et de considérer le mouvement relatif de l'autre par rapport à celui-là.

326. Arc-boutement dans les engrenages. — Soit MI la normale commune à deux dents d'un engrenage extérieur, considérées à un instant quelconque de l'approche (fig. 279). Le mouvement relatif de la menée revient à une rotation, de vitesse angulaire $\omega + \omega'$ et de même sens que ω' , qui s'effectue autour du point de contact des circonférences primitives, mais qui peut être transportée parallèlement à elle-même au point M, à la condition de lui adjoindre une translation de vitesse $v_g = (\omega + \omega') MI$, perpendiculaire à MI, qui représente le glissement relatif de la menée (243). Dans ce mouvement, la surface de la dent menante joue, vis-à-vis de celle de la dent menée, le rôle du plan S par rapport au corps A de la question précédente. L'action du profil menant sur son conjugué se manifeste donc par une force MN_1 qui, au lieu d'être dirigée suivant MI, forme avec cette droite l'angle de frottement α , du côté opposé à v_g . S'il arrive que, pour des proportions particulières de la figure, α soit égal à l'angle

(*) Principe de Newton, ou de l'égalité entre l'action et la réaction : Si A agit sur B en développant une certaine force P, B exerce sur A une réaction égale et contraire à P.

(**) L'angle de frottement est déterminé par la relation $\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{P}$. L'expérience montre qu'il dépend seulement de la nature des matières frottantes et que, dans le cas actuel, il reste le même quel que soit le poids P du corps A. En posant $\operatorname{tg} \alpha = f$ (coefficient de frottement), on a $F = f P$: f est une quantité numérique qui, d'après Reuleaux, varie de 0,1 à 0,2 dans les engrenages.

IMo' , l'action de la menante est détruite par la résistance de l'axe o' ; si $\alpha > IMo'$, la menée est sollicitée de tourner dans le sens contraire de ω' . Dans les deux cas, la transmission est rendue impossible, et le mécanisme s'arrête, à moins que la pression exercée ne soit assez forte pour provoquer la rupture des dents. Ce phénomène, auquel on donne le nom d'*arc-boutement*, n'est pas à craindre en retraite, car la vitesse relative de glissement est alors orientée comme l'indique la figure 280, et l'action MN_1 du profil menant est inclinée sur MI du côté opposé à celui où se trouve le point o' .

Pour éviter que l'arc-boutement puisse se produire, il faut faire en sorte que l'angle IMo' (fig. 279) reste toujours supérieur à l'angle de frottement α relatif aux

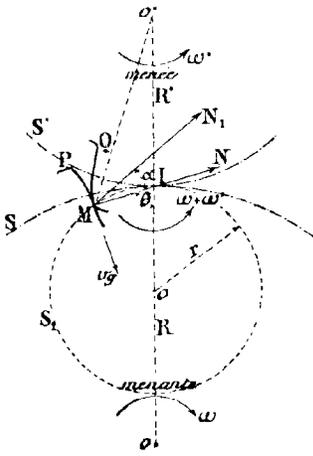


Fig. 279.

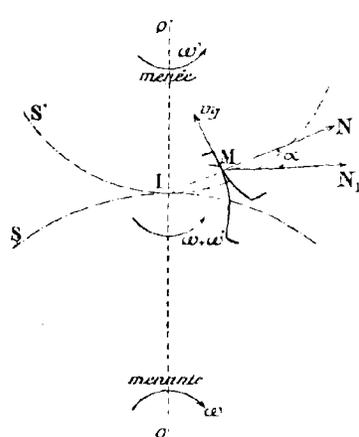


Fig. 280.

matières employées dans la construction de l'engrenage. Or, on reconnaît aisément, en considérant le lieu du point de contact des dents pendant l'approche dans les divers tracés, que l'angle IMo' croît à mesure que le point M se rapproche de la ligne des centres (*). Il suffit donc de déterminer sa valeur au début de la conduite et, si elle est plus grande que α , il en sera de même a fortiori pendant toute l'approche.

327. Engrenages à profils épicycloïdaux. — Soient S_1 le cercle générateur des profils d'approche, r son rayon, $IM = a$ l'arc d'approche, et θ l'angle MIo de la normale commune avec la ligne des centres (fig. 279).

1° L'angle θ étant inscrit dans la circonférence S_1 , on a

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2r}$$

d'où l'on déduit que, pour une valeur donnée de a , θ croît avec r ; mais, d'autre part, pour une roue S' donnée, l'angle IMo' croît évidemment avec θ , et par suite avec r . La condition $IMo' > \alpha$ impose donc de ne pas diminuer le rayon du cercle générateur au-delà d'une certaine limite. Nous étions déjà arrivés à une conclusion analogue par des considérations tirées de la forme de la denture (274). Dans la pratique, $r = 0.875 P$ ou $2.75 M$.

2° Pour des valeurs données de r et de R' , l'angle IMo' augmente quand a diminue, et inversement. Comme l'arc d'approche croît avec la longueur des faces, on a intérêt à ne pas échanfriner les dents trop loin de la circonférence primitive.

3° Afin de nous rendre compte du fonctionnement de l'engrenage au point de vue de

(*) Il suit de là qu'on diminue les risques d'arc-boutement en réduisant l'arc d'approche.

l'arc-boutement, cherchons à exprimer l'angle IMo' . Le triangle IMo' donne la proportion

$$\frac{\sin IMo'}{o'I} = \frac{\sin o'IM}{o'M}$$

d'où l'on tire

$$\sin IMo' = \frac{o'I \times \sin o'IM}{o'M} = \frac{R' \sin \theta}{R' + F}$$

R' étant le rayon de la menée, et F la longueur de ses faces. Mais, dans le tracé au module, $R' = \frac{1}{2} Mn'$ et $F = M$; il vient donc

$$\sin IMo' = \frac{n'M \sin \theta}{n'M + 2M} = \frac{n' \sin \theta}{n' + 2}$$

Pour le plus petit pignon d'une série, $n' = 11$ et $\theta = 69^{\circ}30'$ environ (287).

Tous calculs faits, on trouve $IMo' = 53^{\circ}30'$.

La valeur de α qui correspond à un coefficient de frottement $f = 0.15$ est $8^{\circ}30'$. La condition $IMo' > \alpha$ est donc largement satisfaite, et l'arc-boutement n'est pas à craindre.

Quand la menée est une crémaillère, $IMo' = \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2r}$. Mais, dans ce cas, $a = 2.345 M$ (321). Par conséquent

$$IMo' = \frac{\pi}{2} - \frac{2.345}{5.50} = 1.1444$$

ou, en convertissant en degrés $IMo' = 65^{\circ}34'$.

L'arc-boutement n'a donc encore aucune chance de se produire. La condition $IMo' > \alpha$ étant satisfaite pour les nombres de dents extrêmes qu'il est possible d'attribuer à la menée, l'est aussi pour tous les nombres intermédiaires.

328. Engrenages à développantes.

1° La figure 281 montre que, pour une valeur donnée de IM , l'angle IMo' augmente quand θ croît de o à $\frac{\pi}{2}$. Il y a donc lieu de ne pas attribuer à θ une valeur trop petite, ce qui justifie une fois de plus le choix de l'inclinaison de 75° adoptée dans la pratique.

2° Pour des valeurs données de θ et de R' , l'angle IMo' est d'autant plus grand que IM est plus petit. Comme la longueur de IM décroît avec celle des faces de la menée, on est conduit, ici encore, à ne pas échanfriner trop loin de la circonférence primitive.

3° L'expression

$$\sin IMo' = \frac{n' \sin \theta}{n' + 2}$$

établie indépendamment de toute hypothèse sur le tracé, montre que l'angle IMo' croît avec n' pour chaque valeur de θ . Si donc on calcule cet angle pour le plus petit pignon, on aura une limite inférieure de sa valeur pour deux roues quelconques associées. Dans ce cas, $n' = 12$, et il vient, en supposant $\theta = 75^{\circ}$

$$\sin IMo' = \frac{6}{7} \sin \theta = 0.828$$

ce qui donne $IMo' = 56^{\circ}$ environ. L'arc-boutement n'a donc aucune chance de se produire.

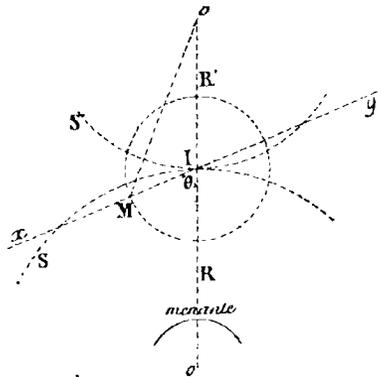


Fig. 281.

CHAPITRE VII

ENGRENAGE HELICOÏDAL DE WHITE

329. Glissement des dents d'un engrenage cylindrique droit. — On sait que, quand deux corps cylindriques tangents se conduisent en tournant autour d'axes parallèles à leur génératrice de contact, leur vitesse relative de glissement a pour expression $v_g = p (\omega' - \omega)$ si les rotations sont de même sens, et $v_g = p (\omega + \omega')$ si les rotations sont de sens contraires, p désignant, dans les deux cas, la longueur de la normale commune aux sections droites, comprise entre leur point de contact et la ligne des centres (243). Ces formules sont applicables à deux dents d'un engrenage cylindrique droit pendant toute la durée de leur action ; cherchons à en déduire la valeur de leur glissement relatif, en considérant, pour fixer les idées, le cas de l'engrenage extérieur.

Depuis le commencement de la retraite jusqu'à l'instant t où les dents se touchent en M (fig. 282), les circonférences primitives ont parcouru des chemins égaux $\text{arc IA} = \text{arc IB} = s$. Soit $v = \frac{ds}{dt} = \omega R = \omega' R'$ la vitesse linéaire du point I sur les deux roues ; l'expression de la vitesse de glissement devient

$$v_g = p (\omega + \omega') = p \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \frac{ds}{dt}$$

L'arc élémentaire de glissement pendant un temps infiniment petit dt est donc

$$dg = v_g dt = p \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) ds$$

et le glissement total G_b des dents pendant la période de retraite b est

$$G_b = \int_0^b p \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) ds = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \int_0^b p ds$$

Pour effectuer l'intégration, il faudrait remplacer p par sa valeur en fonction de s , et examiner séparément les divers tracés en usage. Mais, si l'on observe que l'arc de retraite ne représente qu'une faible partie des circonférences primitives, et que le point de contact des dents est toujours voisin du point B, on conçoit que p diffère peu de s , dont il est approché par défaut. En substituant s à p dans l'expression de G_b , on trouvera donc une valeur du glissement relatif approchée par excès, et peu différente de la réalité. Le calcul donne

$$G_b = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \int_0^b s ds = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \frac{b^2}{2}$$

De même, le glissement relatif pendant l'approche est

$$G_a = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \frac{a^2}{2}$$

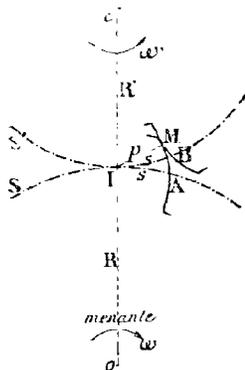


Fig. 282.

L'expression approximative du glissement total correspondant à toute la conduite est donc, quel que soit le tracé

$$G = G_a + G_b = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Le calcul des arcs de conduite fait au chapitre V a montré que, pour des nombres de dents donnés, a et b sont des fractions constantes αP , βP du pas. On a donc

$$G = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \frac{(\alpha^2 + \beta^2) P^2}{2} \quad (1)$$

On conclut de cette formule que le glissement relatif de deux dents en prise est nul dans les trois cas suivants :

1° Si $P = 0$. Le système se réduit alors aux cylindres de friction.

2° Si $\alpha = \beta = 0$. Dans ce cas, deux dents n'assureraient la conduite qu'au moment du passage de leur point de contact sur la ligne des centres, ce qui est inadmissible.

3° Si R et R' sont infinis. L'engrenage se compose de deux crémaillères égales, dont les profils sont superposés à chaque instant ; cette combinaison n'est d'aucune utilité pratique.

Dans tous les autres cas, le glissement relatif n'est pas nul.

330. Variations du glissement relatif avec le module, pour deux roues de rayons donnés.

Pour fixer les idées, nous ferons le calcul dans le cas de roues à profils épicycloïdaux. En remplaçant a^2 et b^2 par leurs valeurs tirées des formules (1) et (2) du paragraphe 321, l'expression de G devient

$$G = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) 2Mr \left(\frac{2R + M}{2R + 2r} + \frac{2R' + M}{2R' + 2r} \right) \\ = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) 5,50 M^2 \left(\frac{2R + M}{2R + 5,50M} + \frac{2R' + M}{2R' + 5,50M} \right)$$

Ses variations sont proportionnelles à celles de la fonction z de M

$$z = M^2 \left(\frac{2R + M}{2R + 5,50M} + \frac{2R' + M}{2R' + 5,50M} \right)$$

La dérivée de z par rapport à M est

$$\frac{dz}{dM} = 2M \left(\frac{2R + M}{2R + 5,50M} + \frac{2R' + M}{2R' + 5,50M} \right) + M^2 \left[\frac{2R + 5,50M - 5,50(2R + M)}{(2R + 5,50M)^2} \right. \\ \left. + \frac{2R' + 5,50M - 5,50(2R' + M)}{(2R' + 5,50M)^2} \right] \\ = 2M \left(\frac{2R + M}{2R + 5,50M} + \frac{2R' + M}{2R' + 5,50M} \right) - 9M^2 \left[\frac{R}{(2R + 5,50M)^2} + \frac{R'}{(2R' + 5,50M)^2} \right] \\ = \frac{8MR^2 + 17M^2R + 11M^3}{(2R + 5,50M)^2} + \frac{8MR'^2 + 17M^2R' + 11M^3}{(2R' + 5,50M)^2}$$

Cette quantité étant essentiellement positive, z et G croissent avec M . D'où il suit qu'on amoindrit le glissement des dents, pour deux roues de rayons donnés, en diminuant le module (*), c'est-à-dire en augmentant les nombres de dents. Mais cette augmentation entraîne une réduction de l'épaisseur, inadmissible au-delà d'une certaine limite fixée par la résistance à vaincre. Il est donc important de rechercher des moyens de diminuer le glissement, tout en conservant aux dents la même épaisseur. Les deux dispositions suivantes ont été imaginées dans ce but.

331. Engrenages échelonnés de Hooke. — Imaginons que les cylindres primitifs d'un engrenage soient partagés en un certain nombre de disques d'égale épaisseur, trois par exemple, pourvus de dentures identiques, obtenues pour chacun d'eux de la façon suivante. Après avoir donné aux dents les mêmes dimensions que s'il s'agissait de roues ordinaires, on détermine, sur l'épure, les cercles d'échanfrinement et d'évidement qui correspondraient à un arc total de conduite égal à $\frac{P}{3}$ (quotient du pas par le nombre des disques), et l'on ne conserve que les portions MM' , NN' des profils théoriques comprises entre ces cercles, en remplaçant les autres par des lignes arbi-

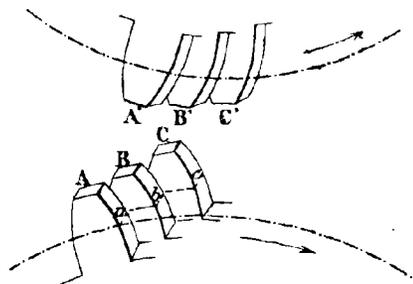


Fig. 283.

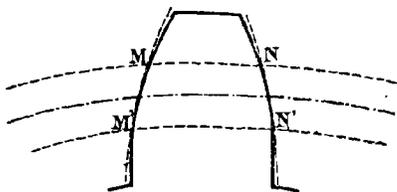


Fig. 284.

traires situées un peu en dedans (fig. 284). On réunit ensuite ces disques trois à trois pour reconstituer les roues, mais de telle manière que les dents de chacun d'eux soient en avance de $\frac{P}{3}$ sur celles du disque qui le précède (fig. 283). Grâce à cette disposition, et à la modification apportée aux profils, les dents C et C' des disques d'arrière entrent d'abord en contact, et se mènent pendant $1/3$ de pas ; elles sont remplacées par les dents B et B' , puis celles-ci par les dents A et A' , chacun de ces couples assurant la transmission pendant $1/3$ de pas, après quoi les disques d'arrière entrent de nouveau en action, et ainsi de suite. Avant la modification des profils, le glissement total de deux dents eût été

$$G = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \frac{a^2 + b^2}{2}$$

a et b désignant les arcs d'approche et de retraite correspondant aux dimensions des dentures. Par suite de cette modification, les arcs d'approche et de retraite sont seulement $a_1 < a$ et $b_1 < b$, ce qui correspond à un glissement total

$$G_1 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \frac{a_1^2 + b_1^2}{2} < G$$

(*) Il semble, au premier abord, qu'on pourrait arriver à ce résultat, plus simplement, par la formule (1) du § 329. Mais il faut observer que α et β augmentent avec les nombres de dents (321), de sorte que les deux facteurs du produit $(\alpha^2 + \beta^2) P^2$ varient en sens contraire. Il n'est donc pas évident que G décroisse avec P pour deux roues de rayons donnés.

Le glissement relatif est donc diminué sans que, grâce au mode d'assemblage des disques, la transmission cesse d'être assurée d'une façon continue, malgré la réduction de l'arc de conduite. Cet effet s'accroît à mesure que le nombre des disques devient plus considérable (*). De plus, l'épaisseur des dents n'est pas amoindrie.

On trouve des applications de ce genre d'engrenages dans certains tours, dans des raboteuses (systèmes Collier — Shanks).

332. Engrenages hélicoïdaux de White.

Rien, dans la théorie précédente, ne limite le nombre des disques, et l'on peut en supposer une infinité d'infiniment minces. Chacun d'eux se réduit alors à une section droite S ou S' (fig. 285) de la roue correspondante par un plan perpendiculaire à son axe, et conduit son conjugué pendant un temps infiniment petit, de sorte que le point de contact de deux dents se trouve toujours sur la ligne des centres. Les dents forment sur chaque roue des filets continus, coupés par les cylindres primitifs suivant des courbes L et L' . Soient M et M' les points d'intersection de ces courbes avec les circonférences S et S' , et MT , $M'T'$ les tangentes correspondantes. Au moment où les

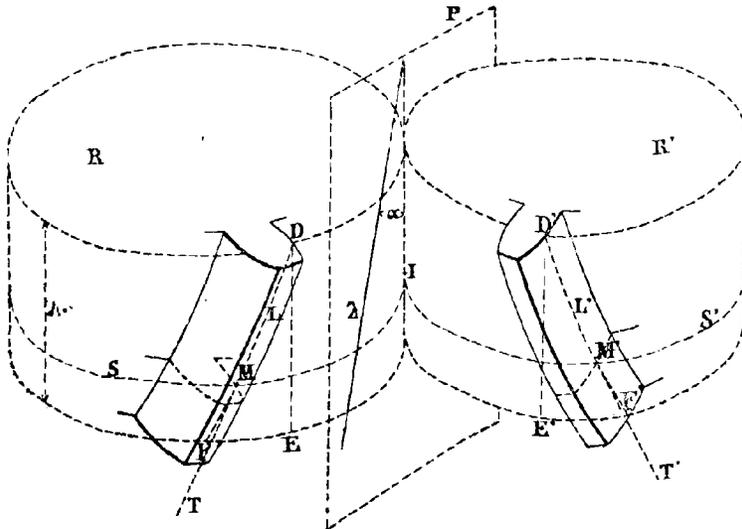


Fig. 285.

profils situés dans le plan SS' entrent en contact, M et M' se superposent en I , et, pour que les surfaces des dents soient tangentes en ce point, il est nécessaire que MT et $M'T'$ soient confondues. Il résulte évidemment de là que, si l'on développe les surfaces des cylindres primitifs sur leur plan tangent commun P , L et L' donnent naissance à la même transformée λ . Par conséquent, pour obtenir deux pareilles courbes, il suffit de tracer dans le plan P une ligne quelconque, et d'effectuer les opérations inverses.

La solution la plus simple est celle qui consiste à prendre une droite dans le plan P ; L et L' sont alors des hélices, inclinées du même angle α sur les génératrices des

(*) Théoriquement, il suffirait, pour des roues de n disques, de conserver les parties des profils exacts qui correspondent à un arc de conduite égal à $\frac{P}{n}$. Pratiquement, on en conservera un peu plus, afin de prévenir les effets de l'usure et d'avoir un arc de conduite total supérieur au pas.

deux cylindres, mais en sens contraires. Leurs pas H et H' sont exprimés en fonction des rayons primitifs R et R' par les formules

$$H = 2\pi R \cotg \alpha$$

$$H' = 2\pi R' \cotg \alpha$$

Pas apparent et pas normal. Modules correspondants. — Soient L et L_1 , (fig. 286) les hélices directrices de deux dents consécutives; elles rencontrent la circonférence de base du cylindre primitif aux points A et A_1 , dont la distance, arc $AA_1 = P$, qui correspond au pas circonférentiel des roues droites, est appelée *pas frontal* ou *pas apparent*.

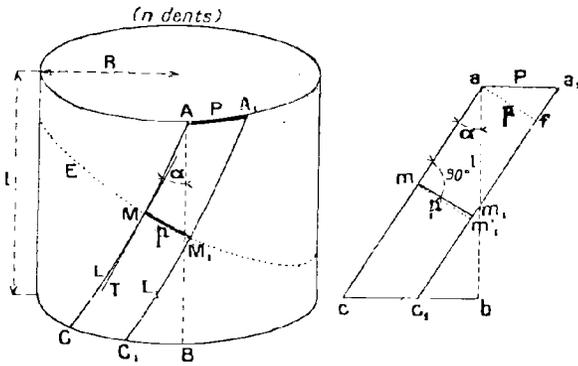


Fig. 286.

D'autre part, un plan normal en M à l'hélice L coupe le cylindre primitif suivant une ellipse E , sur laquelle les hélices L, L_1 interceptent un arc $MM_1 = p$, appelé *pas normal* de la roue.

Théorème. — *Le pas normal d'une roue hélicoïdale est la projection orthogonale de son pas apparent, sur un plan normal à l'hélice directrice.*

Lorsqu'on développe la surface du cylindre primitif sur un plan, le quadrilatère curviligne $AA_1 MM_1$ donne naissance à la figure $aa_1 mm_1$ composée :

- 1° D'un segment rectiligne $aa_1 = P$ (transformée de la section droite du cylindre);
- 2° De deux droites parallèles $amc, a_1m_1c_1$, inclinées sur les perpendiculaires à aa_1 , telles que ab , d'un angle α égal à celui que forment les hélices LL_1 avec l'axe du cylindre primitif (transformées des hélices);
- 3° D'un arc de courbe $mm_1 = p$, normal en m à ac . (Transformée de l'arc d'ellipse MM_1). A cause de sa faible longueur, cet arc peut être confondu avec le segment rectiligne mm_1 , perpendiculaire à ac et à a_1c_1 .

On a alors évidemment

$$p = af = P \cos \alpha$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — Si m et M désignent les modules qui correspondent respectivement aux pas p et P , on a

$$m = \text{module normal} = \frac{p}{\pi}$$

$$M = \text{module apparent} = \frac{P}{\pi}$$

En raison de l'égalité $p = P \cos \alpha$, on a aussi

$$m = M \cos \alpha$$

Par conséquent : *Le module normal d'une roue hélicoïdale est la projection orthogonale de son module apparent, sur un plan normal à l'hélice directrice.*

En considérant les roues hélicoïdales comme des limites des engrenages échelonnés, il est évident que les pas et les modules apparents doivent être les mêmes sur les deux roues pour que la transmission puisse avoir lieu. *Cette égalité entraîne celle des pas et des modules normaux correspondants.*

L'épaisseur des dents, fournie par la Résistance des matériaux, doit être mesurée dans le sens de l'effort transmis, c'est-à-dire perpendiculairement aux surfaces en contact, autrement dit, dans le plan normal à l'hélice directrice de la denture. D'autre part, on emploie, pour tailler les roues hélicoïdales, les mêmes séries de fraises que pour la taille des roues droites, en ayant soin de les disposer de manière que leur plan moyen soit parallèle à la tangente à l'hélice directrice (voir paragraphe 602). Les dimensions des dents de la fraise sont donc reproduites dans le plan normal à cette hélice. Pour ces deux raisons, *les quantités nécessaires à l'exécution mécanique des roues hélicoïdales sont évaluées en fonction du pas ou du module normal.* Ce dernier doit être l'un des modules conventionnels indiqués au paragraphe 318.

Nous donnerons seulement les formules à employer dans le calcul au module.

Diamètre primitif d'une roue. — C'est celui d'une roue droite de n dents, dont les profils seraient dessinés dans les plans de base du cylindre primitif. En fonction du module apparent, on aurait donc (317).

$$D = Mn$$

ou, d'après la relation

$$m = M \cos \alpha$$

$$D = \frac{mn}{\cos \alpha}$$

Diamètre d'échanfrinement. — Il est égal au diamètre primitif, augmenté du double de la longueur d'une face, soit

$$D_1 = D + 2m = m \left(\frac{n}{\cos \alpha} + 2 \right)$$

Hauteur des dents. — $h = \frac{13}{6} m$. Elle fait connaître la profondeur du fraisage.

Distance des axes de deux roues qui engrènent ensemble. — Elle est égale à la demi-somme des diamètres primitifs, soit

$$d = \frac{D + D'}{2} = \frac{m}{2 \cos \alpha} (n + n')$$

332 bis. Choix de l'inclinaison des hélices. — Relation entre l'angle α et l'épaisseur des jantes l . — Pendant l'action d'une dent sur sa conjuguée, le point de contact parcourt les arcs d'hélices LL' dans toute leur longueur (fig. 285). Il est donc indispensable, pour la continuité de la transmission, que l'arc BC de la circonférence de base (fig. 286) soit au moins égal au pas apparent P , afin que, quand le contact cesse de se produire entre un couple de dents, il ait déjà commencé sur le couple suivant. Or, on a, après avoir développé la surface du cylindre primitif

$$bc = BC = l \operatorname{tg} \alpha.$$

L'angle α et l'épaisseur l des jantes doivent donc vérifier la relation

$$l \operatorname{tg} \alpha \gg P$$

ou

$$l \operatorname{tg} \alpha \gg \frac{m\pi}{\cos \alpha}$$

ou enfin

$$l \sin \alpha \gg m\pi$$

333. Profils des dentures dans un plan normal à l'hélice directrice. Détermination des roues droites fictives servant au choix des fraises.

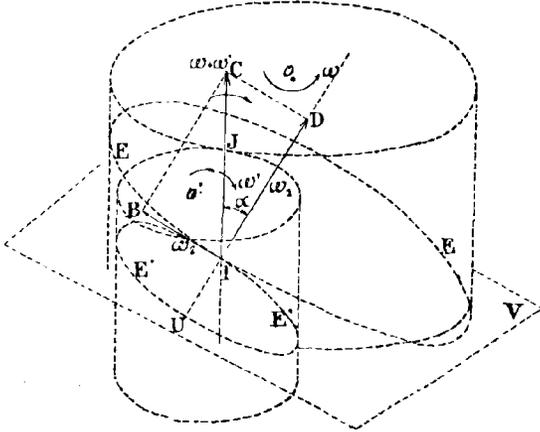


Fig. 287.

Lorsque les points M et M' de la fig. 285 sont venus se superposer, ainsi que les tangentes MT et M'T' aux hélices L et L', un plan V, perpendiculaire à la tangente commune IU (fig. 287) aux hélices ainsi disposées, coupe les surfaces des dents suivant des profils normaux, dont les creux représentent précisément les sections méridiennes des fraises à employer pour l'exécution de l'engrenage. Le plan V coupe, d'autre part, les cylindres primitifs suivant des ellipses E, E', tangentes en I à une même droite IB (intersection du plan V et du plan tangent commun aux deux cylindres). Le mouvement

relatif du cylindre σ' revient, à l'instant considéré, à une rotation autour de la génératrice commune (230-III), représentée par le vecteur $IC = \omega + \omega'$, que l'on peut décomposer en deux autres, $\omega_1 = ID$, $\omega_2 = IB$, suivant les directions perpendiculaires IU et IB. La rotation ω_1 , dont l'axe est perpendiculaire au plan V, produit un roulement sans glissement de l'ellipse E' sur E, (149) tandis que la rotation ω_2 , dont l'axe est tangent à ces deux courbes, incline le plan de E' sur celui de E, sans modifier l'effet de la première (*) Il résulte de là que les profils des dents de l'engrenage hélicoïdal dans le plan V sont ceux d'un engrenage elliptique, construit sur E et E' comme lignes primitives. En se bornant à une approximation, on peut d'ailleurs remplacer les ellipses EE' par leurs cercles de courbure en I. Or, le point I est, pour chaque ellipse, un sommet appartenant au petit axe, car on démontre en Géométrie descriptive que, dans les sections planes du cylindre de révolution, les plans tangents menés au cylindre par les extrémités du petit axe de la section sont perpendiculaires au plan sécant, et cette condition est évidemment remplie par le plan JID (fig. 287). Rappelons que le petit axe est égal au diamètre du cylindre, et que le rayon de courbure à ses extrémités est donné par la formule $\rho = \frac{a^2}{b}$ ($a = \frac{1}{2}$ grand axe ; $b = \frac{1}{2}$ petit axe) (164).

(*) Le fait qui se produit est analogue au suivant. Deux circonférences de rayons R et R' sont les bases d'un couple de cylindres, ou d'un couple de cônes de même sommet, tangents le long d'une génératrice. Leur mouvement relatif est un roulement simple quand les deux corps de chaque couple roulent l'un sur l'autre sans glisser.

En résumé : Les profils normaux d'une roue d'engrenage hélicoïdal sont les mêmes que ceux d'une roue cylindrique ordinaire, dont le module serait égal au module normal, et dont la circonférence primitive serait le cercle de courbure, à l'extrémité du petit axe, de l'ellipse déterminée dans le cylindre primitif correspondant par un plan normal à l'hélice directrice de la denture.

Il suit de là que, si l'on veut tailler une roue hélicoïdale de n dents sur un cylindre primitif de rayon R , il ne faut pas employer la fraise qui servirait à tailler une roue droite de n dents sur ce même cylindre, mais celle qui devrait être utilisée pour tailler une roue droite de rayon primitif $\rho = \frac{a^2}{b}$, au module normal m .

Comme la fraise doit être choisie d'après le nombre de dents de la roue à exécuter (318-Tableaux II-III-IV) nous sommes conduits à calculer le nombre de dents de cette roue droite fictive de rayon ρ , soit (317)

$$n_1 = \frac{2\rho}{m}$$

Il faut d'abord déterminer ρ et, pour cela, le demi-grand axe de l'ellipse E par exemple.

Rapportons les deux cylindres à un système de plans de projection caractérisé par une ligne de terre parallèle aux axes, et un plan horizontal parallèle au plan des axes (fig. 288). La droite IU , située dans le plan tangent commun F , est frontale, et l'angle α se projette en vraie grandeur sur le plan vertical suivant $u'i'j'$. Le plan normal aux hélices directrices (plan V de la figure 287) est donc de bout, et sa trace verticale $i'x'_1$, qui suffit à le définir, est perpendiculaire à $i'u'$. Les demi-grands axes des ellipses sont respectivement $i'\alpha'_1$ et $i'\alpha'_2$. En considérant $i'\alpha'_1$, par exemple, on a, R désignant le rayon du cylindre correspondant

$$a = i'\alpha'_1 = \frac{R}{\cos \alpha}$$

$$b = R$$

et
$$\rho = \frac{a^2}{b} = \frac{R}{\cos^2 \alpha}$$

Le nombre des dents de la roue droite fictive relative à ce cylindre est, par conséquent

$$n_1 = \frac{2\rho}{m} = \frac{2R}{m \cos^2 \alpha}$$

et, puisque

$$2R = D = \frac{mn}{\cos \alpha}$$

$$n_1 = \frac{n}{\cos^3 \alpha}$$

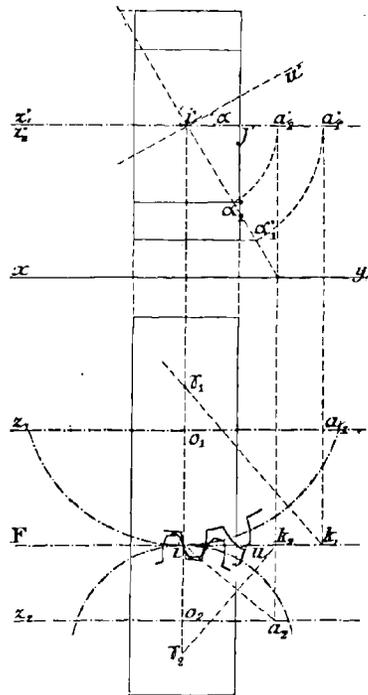


Fig. 288.

On aurait, par analogie, pour la seconde roue du système

$$n'_1 = \frac{n'}{\cos^3 \alpha}$$

Ces formules montrent que n_1 et n'_1 sont respectivement plus grands que n et n' , et qu'une paire de roues hélicoïdales ne sera généralement pas taillée avec les mêmes fraises que la paire de roues droites de même module et de mêmes nombres de dents.

On peut d'ailleurs déterminer, sur l'épure, les profils des fraises nécessaires. Il suffit de rabattre le plan de bout $i' a'_1$ sur le plan horizontal $i' a'_1$, et de construire en $\gamma_1 i$ et $\gamma_2 i$ les rayons de courbure des ellipses précédemment considérées (164). En traçant, au module m , des dentures sur les circonférences de rayons $\gamma_1 i$ et $\gamma_2 i$, on connaîtrait les profils normaux des deux roues de l'engrenage hélicoïdal.

334. Remarque relative au glissement des dents. — En considérant l'engrenage hélicoïdal de White comme la limite d'un engrenage à dents échelonnés dans lequel le nombre des disques serait infini, on est conduit à penser que le glissement total de deux dents est nul pendant toute la durée de leur action, ce qui équivaut à dire que l'appareil fonctionne sans frottement de glissement. Une analyse plus approfondie montre qu'il n'en est pas ainsi en réalité. Le principe (243), duquel on a tiré l'expression de la vitesse relative de glissement, n'est en effet plus applicable, puisqu'il suppose des corps cylindriques tournant autour d'axes parallèles à leur génératrice de contact, et que cette condition n'est pas remplie par les surfaces de deux dents en prise.

Afin de montrer que le glissement subsiste, il suffit de décomposer la rotation $\Omega = \omega + \omega'$ (fig. 287), qui représente le mouvement relatif de la roue σ' , en deux autres analogues à ω_1 et ω_2 , mais dirigées, l'une dans le plan tangent commun en I aux surfaces des dents, l'autre normalement à ce plan. La première produit un roulement sans glissement de la dent menée sur la menante; la seconde donne lieu à un pivotement, pendant lequel les surfaces des dents glissent l'une sur l'autre. Le frottement de glissement n'est donc pas supprimé, mais seulement atténué dans une grande proportion.

335. Roues à chevrons. — Par suite de l'inclinaison des dents sur les génératrices, la pression P qui s'exerce normalement à leur surface n'est pas dirigée dans un plan de section droite du cylindre primitif. On peut la décomposer en deux autres Q et R (fig. 289), l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à l'axe de rotation. La première occasionne une poussée latérale

des arbres contre leurs supports, inconvénient auquel on peut remédier en accolant l'une à l'autre deux roues égales, dont les hélices sont inclinées en sens contraires. Les dents ont alors la forme d'un V très ouvert (fig. 290). Grâce à cette disposition, les deux composantes Q parallèles à l'axe, qui résultent de l'action des moitiés de chaque roue, sont égales et opposées, de sorte que la poussée latérale s'annule.

L'emploi des roues chevronnées présente encore un autre avantage. La

théorie de l'engrenage hélicoïdal montre que deux dents n'ont, à chaque instant, qu'un seul point de contact, ce qui les rend impropres à la transmission d'efforts considé-

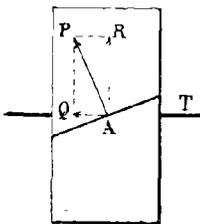


Fig. 289.

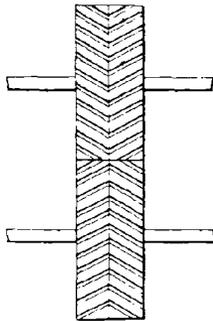


Fig. 290.

rables. Avec les roues chevronnées, il y a toujours deux points de contact par chevron. Dans les roues à chevrons multiples, dont l'usage est assez fréquent aujourd'hui, le nombre des points de contact est plus considérable.

335 bis. **Calcul des éléments d'un système de roues hélicoïdales.** — On peut avoir à déterminer les éléments nécessaires à l'exécution mécanique des roues hélicoïdales dans trois conditions différentes :

1^o Calcul de roues isolées, dont le nombre et l'inclinaison des dents sont connus (cas des pignons de vis sans fin, par exemple).

2^o Calcul de deux roues hélicoïdales destinées à établir un rapport donné de vitesses angulaires entre deux arbres parallèles, l'inclinaison des dentures étant déterminée par d'autres conditions (Exemple : Harnais de tour à roues hélicoïdales équilibrant les poussées latérales. — 396). La distance exacte des arbres est inconnue.

3^o Calcul de deux roues hélicoïdales destinées à établir un rapport donné de vitesses angulaires entre deux arbres parallèles, dont la distance est déjà déterminée par d'autres conditions. (Exemple : Harnais de tour à roues hélicoïdales, sans équilibre des poussées latérales — 396.) L'inclinaison exacte des dentures est inconnue.

EXEMPLE DU PREMIER CAS. — Calculer les éléments d'une roue de vis sans fin de 80 dents, au module normal $m = 6$, l'inclinaison des hélices sur l'axe étant de 25°

$$\text{Diamètre primitif: } D = \frac{m n}{\cos \alpha} = \frac{6 \times 80}{\cos 25^\circ} = \frac{480}{\cos 25^\circ}$$

$$\begin{array}{r} \log D = \log 480 \qquad \qquad 2,68124 \\ + \operatorname{colog} \cos 25^\circ \qquad \qquad 0,04272 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 2,72396 \end{array}$$

$$D = 529 \text{ m}/\text{m } 61$$

$$\text{Diamètre d'échanfrinement: } D_1 = D + 2m = 541 \text{ m}/\text{m } 61$$

$$\text{Hauteur des dents: } h = \frac{13m}{6} = 13 \text{ m}/$$

Nombre de dents de la roue droite fictive :

$$n_1 = \frac{n}{\cos^3 \alpha} = \frac{80}{\cos^3 25^\circ}$$

$$\begin{array}{r} \log n_1 = \log 80 \qquad \qquad 1,90309 \\ + 3 \operatorname{colog} \cos 25^\circ \qquad \qquad 0,12816 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 2,03125 \end{array}$$

$$n_1 = 108 \text{ dents}$$

Épaisseur minimum de la jante :

$$l \gg \frac{m \pi}{\sin \alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{6 \pi}{\sin 25^\circ}$$

$$\begin{array}{r} \log l \gg \log 6 \qquad \qquad 0,77815 \\ + \log \pi \qquad \qquad 0,49715 \\ + \operatorname{colog} \sin 25^\circ \qquad \qquad 0,37405 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 1,64935 \end{array}$$

$$l \gg 44 \text{ m}/\text{m } 6$$

On pourra donner à l une valeur comprise entre 5 et 10 fois le module normal, (de 30 à 60 m/m) pourvu qu'elle soit supérieure à 44 m/m , soit, par exemple, 50 m/m .

Épaisseur de la couronne : de 1.8 à 2 m , soit 12 m/m .

EXEMPLE DU SECOND CAS. — Calculer, au module normal $m=3$, deux roues hélicoïdales dont les vitesses angulaires, évaluées en nombres de tours par minute, doivent être respectivement $N=80$, $N'=100$. La distance approximative des arbres $d_{app}=200$ m/m , et l'inclinaison exacte des dentures $\alpha_{ex}=24^{\circ}18'$.

Données	$\left\{ \begin{array}{l} m = 3 \\ \frac{\omega'}{\omega} = \frac{N'}{N} = \frac{100}{80} \\ d_{app} = 200 \text{ } m/m \\ \alpha_{ex} = 24^{\circ}18' \end{array} \right.$	Inconnues	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nombres de dents : } n, n' \\ \text{Diamètres primitifs : } D, D' \\ \text{Diamètres d'échanfrinement : } D_1, D'_1 \\ \text{Distance exacte des axes : } d_{ex}. \\ \text{Nombres de dents des roues droites} \\ \text{fictives : } n_1, n'_1. \\ \text{Hauteur des dents : } h \\ \text{Épaisseur minimum des jantes : } l \\ \text{Épaisseur des couronnes.} \end{array} \right.$
---------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Nombres de dents. — La relation $\frac{n}{n'} = \frac{N'}{N} = \frac{100}{80} = \frac{5}{4}$ montre que n et n' sont des équimultiples de 5 et de 4. En appelant λ un multiplicateur entier à déterminer,

on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 5\lambda \\ n' = 4\lambda \end{array} \right.$$

En remplaçant les quantités connues par leurs valeurs dans la formule

$$d = \frac{m}{2 \cos \alpha} (n + n')$$

il vient

$$200 = \frac{3 \times 9 \lambda}{2 \cos 24^{\circ}18'}$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \frac{400 \cos 24^{\circ}18'}{27} = 13,6 \text{ environ}$$

On attribue à λ la valeur entière la plus voisine du quotient exact, soit 14. (Le quotient exact n'ayant pas besoin d'être connu avec une grande précision, on peut employer la règle à calcul, ou les tables de lignes naturelles de Dupuis). Les nombres de dents cherchés sont

$$n = 5 \times 14 = 70 \text{ dents}$$

$$n' = 4 \times 14 = 56 \text{ dents}$$

Distance exacte des axes. $d_{ex} = \frac{n}{2 \cos \alpha} \times (n + n') = \frac{189}{\cos \alpha}$

$$\begin{array}{r} \log d_{ex} = \log 189 \quad 2,27646 \\ + \operatorname{colog} \cos \alpha \quad 0,04029 \\ \hline 2,31675 \end{array}$$

$d_{ex} = 207 \text{ m}'_{m} 37$

Diamètres primitifs.

$$D = \frac{mn}{\cos \alpha} = \frac{210}{\cos \alpha} \qquad D' = \frac{mn'}{\cos \alpha} = \frac{168}{\cos \alpha}$$

$$\begin{array}{r} \log D = \log 210 \quad 2,32232 \\ + \operatorname{colog} \cos \alpha \quad 0,04029 \\ \hline 2,36251 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \log D' = \log 168 \quad 2,22531 \\ + \operatorname{colog} \cos \alpha \quad 0,04029 \\ \hline 2,26560 \end{array}$$

$D = 230 \text{ m}'_{m} 41$

$D' = 184 \text{ m}'_{m} 33$

Diamètres d'échanfrinement.

$D_1 = D + 2m = 236 \text{ m}'_{m} 41$

$D'_1 = D' + 2m = 190 \text{ m}'_{m} 33$

Hauteur des dents. $h = \frac{13m}{6} = 6 \text{ m}'_{m} 50$

Nombres de dents des roues droites fictives.

$$n_1 = \frac{n}{\cos^3 \alpha} \qquad n'_1 = \frac{n'}{\cos^3 \alpha}$$

$$\begin{array}{r} \log n_1 = \log n \quad 1,84510 \\ + 3 \operatorname{colog} \cos \alpha \quad 0,12087 \\ \hline 1,96597 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \log n'_1 = \log n' \quad 1,74819 \\ + 3 \operatorname{colog} \cos \alpha \quad 0,12087 \\ \hline 1,86906 \end{array}$$

$n_1 = 93$

$n'_1 = 74$

Epaisseur minimum des jantes.

$$l \geq \frac{m\pi}{\sin \alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{\sin \alpha}$$

$$\begin{array}{r} \log l \geq \log 3 \quad 0,47712 \\ + \log \pi \quad 0,49715 \\ + \operatorname{colog} \sin \alpha \quad 0,38562 \\ \hline 1,35989 \end{array}$$

$l \geq 22 \text{ m}'_{m} 9$

On pourra prendre $l = 10m$, soit $30 \text{ m}'_{m}$.

Epaisseur des couronnes de $1,8$ à $2m$, soit $6 \text{ m}'_{m}$.

EXEMPLE DU TROISIÈME CAS. — Calculer, au module normal $m=4$, deux roues hélicoïdales dont les vitesses angulaires, évaluées en nombres de tours par minute, doivent être respectivement $N=60$, $N'=90$. La distance exacte des arbres est $d_{ex}=220\text{ m/m}$, et l'inclinaison approximative des dentures $\alpha_{app}=30^\circ$.

Données	}	$\begin{cases} m=4 \\ \frac{\omega'}{\omega} = \frac{N'}{N} = \frac{90}{60} \\ d_{ex} = 220\text{ m/m} \\ \alpha_{app} = 30^\circ \end{cases}$	Inconnues	}	<p>Nombres de dents : n, n' Diamètres primitifs : D, D' Diamètres d'échanfrinement : D_1, D'_1 Inclinaison exacte des hélices : α_{ex} Nombres de dents des roues droites fictives : n_1, n'_1 Hauteur des dents Épaisseur minimum des jantes Épaisseur des couronnes</p>
---------	---	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------	---	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Nombres de dents. — De la relation $\frac{n}{n'} = \frac{N'}{N} = \frac{90}{60} = \frac{3}{2}$

on déduit comme précédemment $\begin{cases} n = 3\lambda \\ n' = 2\lambda \end{cases}$

En remplaçant les quantités connues par leurs valeurs dans la formule

$$d = \frac{m}{2 \cos \alpha} (n + n')$$

il vient $220 = \frac{20\lambda}{\sqrt{3}}$

d'où $\lambda = 11\sqrt{3}$, soit 19, en prenant la valeur entière la plus rapprochée du nombre exact.

Par conséquent $\begin{cases} n = 3 \times 19 = 57 \\ n' = 2 \times 19 = 38 \end{cases}$

Inclinaison exacte des hélices. — La formule

$$d = \frac{m}{2 \cos \alpha} (n + n')$$

donne $\cos \alpha = \frac{m(n + n')}{2d} = \frac{4 \times 95}{2 \times 220} = \frac{19}{22}$

d'où $\begin{aligned} \log \cos \alpha &= \log 19 - \log 22 \\ &= 1,27875 - 1,34242 \\ &= -0,06367 \end{aligned}$

Il suffit de lire dans la Table, sans interpolation, l'angle dont le log cos est le plus rapproché de $-0,06367$, soit

$$\alpha_{ex} = 30^\circ 16' \text{ à moins d'une demi-minute, par excès.}$$

Diamètres primitifs, etc... On calcule ces diverses quantités comme précédemment.

CHAPITRE VIII

LIAISON DE DEUX ROTATIONS CONCOURANTES

ENGRENAGES CONIQUES

§ I. — Principe fondamental.

336. Les engrenages coniques ont pour but, deux axes concourants étant donnés, de transmettre un mouvement de rotation de l'un à l'autre, par l'emploi de deux corps en contact, déterminés de telle manière que le rapport des vitesses angulaires reste constant. Ce mode de transmission est basé sur le principe suivant :

Théorème. — *Lorsque deux cônes de même sommet, mobiles autour d'axes passant par leur sommet commun, agissent l'un sur l'autre par contact, leurs vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux sinus des angles que forme, avec les axes, l'intersection de leur plan et du plan normal commun mené, par leur génératrice de contact, aux deux cônes qui se conduisent.*

Soient deux cônes de sommet o , tangents le long d'une génératrice oM , et mobiles autour des axes oz , oz' (fig. 291); supposons-les déterminés par leurs lignes d'intersection S et S' avec une sphère auxiliaire de centre o , et considérons le premier comme menant. Nous nous proposons d'évaluer le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ de leurs vitesses angulaires.

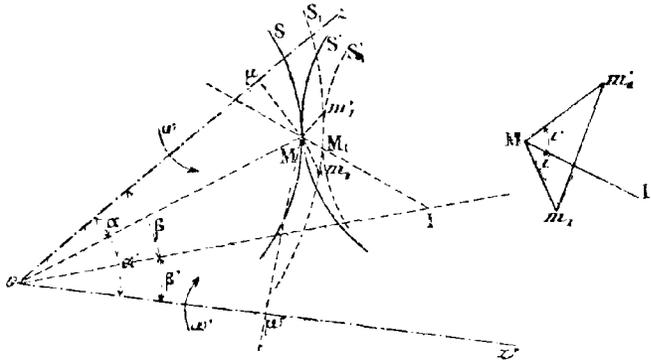


Fig. 291.

Pour cela, imprimons au cône oS un déplacement infiniment petit, à la suite duquel S et S' viennent respectivement en S_1 et S'_1 . Le point M , considéré comme appartenant à S , décrit, perpendiculairement au plan Moz , un élément de droite

$$Mm_1 = \omega \times M\mu \, dt = \omega \times oM \sin \alpha \, dt,$$

et se place en m_1 sur S_1 . Ce même point, considéré comme appartenant à S' , parcourt un élément de droite

$$Mm'_1 = \omega' \times M\mu' \, dt = \omega' \times oM \sin \alpha' \, dt$$

perpendiculaire au plan Moz' , et vient se placer en m'_1 sur S'_1 . Le plan $m_1 M m'_1$ est donc perpendiculaire à oM ; de plus, m_1 et m'_1 étant infiniment voisins, l'un sur S_1 , l'autre sur S'_1 , du point de contact M_1 de ces deux lignes, la direction limite de la droite $m_1 m'_1$ est parallèle à la tangente commune en M à S' . Il résulte de là que le

plan normal commun aux cônes oS , oS' le long de oM coupe le plan $m_1 Mm'_1$, suivant une droite MI , perpendiculaire à la direction limite de $m_1 m'_1$. En désignant par i et i' les angles $m_1 MI$ et $m'_1 MI$, on a donc

$$Mm_1 \cos i = Mm'_1 \cos i'$$

ou
$$\omega \times oM \sin \alpha \cos i \, dt = \omega' \times oM \sin \alpha' \cos i' \, dt$$

d'où enfin

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin \alpha \cos i}{\sin \alpha' \cos i'} \quad (I)$$

Soit o l'intersection du plan normal commun aux deux cônes avec le plan des axes. Considérons le trièdre $ozMI$, et soit MN la demi-droite élevée perpendiculairement à la face MoI , du même côté de cette face que l'axe oz (fig. 292). L'angle NMI

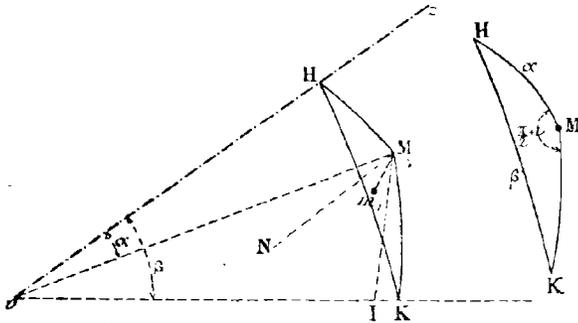


Fig. 292.

étant droit, $NMm_1 = \frac{\pi}{2} - i$; l'angle plan du dièdre oM , qui est le supplément de NMm_1 , est donc égal à $\frac{\pi}{2} + i$.

La sphère de rayon oM détermine dans le trièdre $ozMI$ un triangle sphérique MHK , dans lequel la proportionnalité des sinus des côtés aux

sinus des angles opposés donne la relation

$$\frac{\sin HM}{\sin (\text{dièdre } oI)} = \frac{\sin HK}{\sin (\text{dièdre } oM)}$$

ou, en désignant par β l'angle zoI

$$\frac{\sin \alpha}{\sin (\text{dièdre } oI)} = \frac{\sin \beta}{\cos i}$$

Par conséquent

$$\sin \alpha \cos i = \sin \beta \sin (\text{dièdre } oI)$$

On aurait de même, dans le trièdre $oz'MI$, en désignant par β' l'angle $Io z'$

$$\sin \alpha' \cos i' = \sin \beta' \sin (\pi - \text{dièdre } oI) = \sin \beta' \sin (\text{dièdre } oI)$$

En portant ces valeurs dans l'égalité (I), il vient

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin \beta}{\sin \beta'} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

337. Corollaire. — Pour que l'action de l'un des cônes sur l'autre transmette le mouvement entre les axes oz , oz' avec rapport constant des vitesses angulaires, il faut et il suffit que le plan normal commun aux deux cônes coupe le plan des axes suivant une droite fixe.

338. Expression de la vitesse relative de glissement. — Le segment $m_1m'_1$ mesure le glissement élémentaire des courbes S et S' pendant le temps dt . En représentant par v_g la vitesse relative de glissement à l'instant où le contact a lieu en M , on a donc

$$m_1m'_1 = v_g dt$$

D'autre part, le triangle $m_1Mm'_1$ donne la relation (fig. 291)

$$m_1m'_1 = m_1M \sin i + m'_1M \sin i'$$

d'où l'on tire $v_g = oM (\omega \sin \alpha \sin i + \omega' \sin \alpha' \sin i')$

et, en tenant compte de l'égalité (1)

$$v_g = \frac{\omega \sin \alpha \sin (i + i')}{\cos i'}$$

On voit ainsi que la vitesse relative de glissement n'est nulle que si l'on a $i + i' = 0$ ou π . Ce fait ne peut se produire que si les plans Moz , Moz' sont confondus. Dans ce cas, la génératrice de contact des cônes mobiles est dans le plan des axes, et leur mouvement relatif est un roulement simple.

§ II. — Cônes de friction.

339. Problème général des engrenages coniques. — **Première solution au moyen des cônes de friction.** — Deux axes concourants étant donnés, on se propose de les relier par deux cônes tangents, de manière que la rotation de l'un commande celle de l'autre, et que le rapport des vitesses angulaires conserve une valeur constante donnée

$$\frac{\omega'}{\omega} = h.$$

Soient oz et oz' les deux axes donnés (fig. 293); portons à partir de leur point de rencontre des longueurs oA , oA' , satisfaisant à la relation

$$\frac{oA'}{oA} = h$$

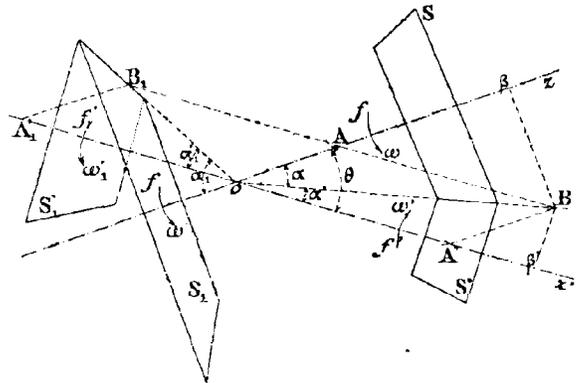


Fig. 293.

et construisons le parallélogramme $oABA'$. La droite oB , en tournant successivement autour de oz et oz' , engendre deux cônes de révolution oS , oS' , tangents au plan conduit par oB perpendiculairement au plan des axes. Supposons ces cônes assez fortement pressés pour s'entraîner sans glissement. Les vitesses linéaires du point B autour de oz et oz' seront égales, et nous aurons

$$\omega \times B\beta = \omega' \times B\beta'$$

ou

$$\omega \times oB \sin \alpha = \omega' \times oB \sin \alpha'$$

d'où enfin

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$$

Mais, d'autre part, le triangle oAB donne la relation

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{AB}{oA} = \frac{oA'}{oA} = k$$

Le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ aura donc bien la valeur k . Les sens des mouvements de rotation sont indiqués par les flèches f et f' .

On aurait une autre solution en remplaçant oA' par une longueur égale, soit oA'_1 , portée en sens contraire de la première. Il peut arriver, comme dans la figure, (mais cette disposition ne se rencontre pas toujours) que cette seconde solution détermine des cônes oS_1 , oS'_1 tangents intérieurement. Les sens des rotations sont indiqués par les flèches f et f'_1 ; on voit que, pour un même sens attribué à ω , les deux combinaisons font tourner l'axe z' en sens inverse. Ce fait, qui est général, est analogue à celui qui se produit dans le cas des axes parallèles, reliés par des engrenages intérieurs ou extérieurs.

339 bis. Remarques. I. — Le rapport des vitesses angulaires à réaliser est habituellement exprimé en fonction des nombres de tours N et N' que les deux arbres doivent effectuer dans le même temps

$$\frac{\omega'}{\omega} = k = \frac{N'}{N} = \frac{oA'}{oA}$$

On déterminera donc la génératrice oB (fig. 293) en portant, sur chaque axe, une longueur proportionnelle au nombre de tours qu'il doit effectuer dans un temps donné.

II. — Nous verrons plus loin (352) que les vitesses angulaires de deux roues coniques sont inversement proportionnelles aux nombres de dents dont elles sont armées

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N'}{N} = \frac{n}{n'} = \frac{oA'}{oA}$$

On pourra donc déterminer les cônes de friction correspondants en portant, sur chaque axe, une longueur proportionnelle au nombre de dents de la roue qui doit être montée sur l'autre axe.

III. — La détermination des cônes primitifs montre qu'il est impossible d'établir des assortiments de roues coniques tels que deux roues quelconques de la série puissent se conduire. D'après la remarque précédente, on conçoit, en effet, que le

cône primitif d'une roue de n dents dépendra du nombre de dents n' de la roue qui doit lui être associée, et variera avec n' . Deux roues coniques sont donc construites l'une pour l'autre.

340. Cas particulier. — Il peut arriver, dans le second cas de figure, que la génératrice oB_1 , commune aux deux cônes, soit perpendiculaire à l'un des axes. Si, par exemple, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, le système se réduit à une roue plane oS_1 , montée perpendiculairement à l'axe oz , et à une roue conique oS'_1 invariablement liée à oz' . Dans ce cas, le rapport des vitesses angulaires est

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha'_1} = \frac{1}{\cos \theta}$$

θ désignant l'angle des axes. Ce dispositif se rencontre dans certaines machines à tailler les engrenages coniques (système Monneret — système Bilgram), où la roue plane sert d'outil pour déterminer, par engrenement, les profils des dents de toutes les roues que l'on veut exécuter.

341. Galets coniques. — Les plaques tournantes des chemins de fer sont supportées à leur centre par un pivot A qui tourne dans une crapaudine, et, à leur périphérie, par une ou plusieurs couronnes de galets coniques B, C, mobiles autour d'axes x et y qui font corps avec le pivot (fig. 294). On constate aisément, par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 311, que la couronne de galets fait un tour seulement pendant que la plaque en fait deux.

La forme conique des galets leur permet de conduire la plaque P sans glissement,

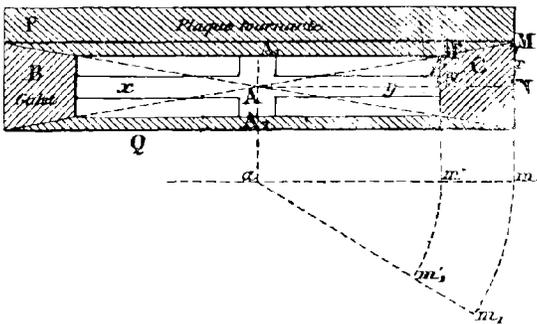


Fig. 294.

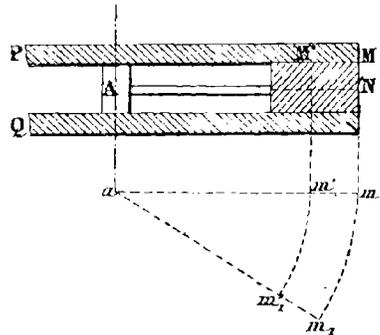


Fig. 295.

ce qui ne serait pas possible avec des galets cylindriques (fig. 295). Supposons, en effet, que le mouvement relatif de la plaque soit, au point M, un roulement simple; la circonférence de rayon MN se développe sur un arc de même longueur de la circonférence AM, représenté en mm_1 . Quand le galet a fait un tour sur lui-même, le point M est venu en m_1 , et la génératrice correspondante occupe la position am_1 . Un second point M' de cette génératrice a parcouru sur le galet le même chemin que M, et, sur la plaque tournante, un arc $m'm'_1 < mm_1$. Il y a donc eu glissement. Le même fait se reproduit au contact du galet et de l'appui fixe Q qui supporte le pivot de la couronne.

Il n'en est plus de même avec des galets coniques ayant pour sommet commun un point A de l'axe du pivot, si toutefois la plaque d'appui et la plaque tournante sont limitées par des surfaces coniques de sommet A. Supposons, pour le démontrer, que la circonférence MN du galet se développe sans glissement sur l'arc $mm_1 = 2\pi r$ (fig. 294),

Après un tour complet du galet sur lui-même, un autre point M' de la génératrice AM a parcouru sur la plaque P l'arc $m'm'_1$; or, on a

$$\frac{\text{arc } m'm'_1}{\text{arc } mm_1} = \frac{am'}{am} = \frac{AN'}{AN} = \frac{r'}{r}$$

d'où
$$\text{arc } m'm'_1 = \text{arc } mm_1 \times \frac{r'}{r} = 2\pi r \times \frac{r'}{r} = 2\pi r'$$

Les chemins parcourus par le point M' sur le galet et sur la plaque tournante étant égaux, aucun glissement ne se produit.

Il faut observer que, si le sommet commun des cônes est à l'intersection A_1 de l'axe du pivot et de la plaque tournante, celle-ci est limitée inférieurement par une face plane; cette particularité se présente au contraire pour l'appui fixe quand le sommet des cônes est en A_1 .

342. Cônes de friction. — Les cônes de friction déterminés plus haut (339) peuvent être employés comme surfaces primitives d'un engrenage. Pour éviter la rencontre des axes au point o , on réduit ces cônes à deux troncs, engendrés par la révolution d'un même segment de oB successivement autour de oz et oz' . Habituellement, les axes sont perpendiculaires; dans ce cas, le rapport des vitesses angulaires prend la forme

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N'}{N} = \text{tg } \alpha$$

α désignant le demi-angle au sommet du cône S .

L'emploi des cônes de friction présente les avantages et les inconvénients déjà signalés au paragraphe 248. Pour éviter les glissements, on les garnit de dents dont les profils sont déterminés de telle sorte que la transmission se fasse avec le même rapport constant des vitesses que si les cônes primitifs se commandaient directement. On obtient ainsi des *engrenages coniques*, ou *roues d'angle*, dont la théorie est tout à fait analogue à celle des engrenages cylindriques.

343. Mouvement relatif de l'un des cônes par rapport à l'autre. — Soient

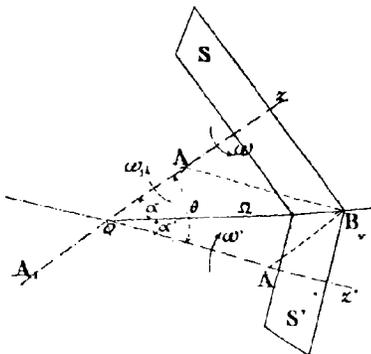


Fig. 296.

oS et oS' (fig. 296) les cônes primitifs propres à assurer la transmission avec un rapport de vitesses angulaires $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{oA'}{oA} = k$. Leurs mouvements absolus pouvant être représentés par les vecteurs $\overline{oA'}$ et $\overline{oA} = oA$ (214), le mouvement relatif du cône S' résulte, à chaque instant, de la composition de la rotation $\omega' = \overline{oA'}$ avec une rotation $\omega_1 = -\omega = \overline{oA}$, égale et contraire au mouvement absolu du cône S . Il consiste donc en une rotation $\Omega = \overline{oB}$ autour de la génératrice commune, résultat analogue à celui auquel on est arrivé dans l'étude des engrenages cylindriques.

On a

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega'^2 + 2\omega\omega' \cos \theta}$$

Quand les axes sont rectangulaires cette formule se réduit à

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega'^2}$$

§ III. — Méthodes générales pour la détermination des profils des dents.

344. Les profils des dents de roues coniques doivent satisfaire aux trois conditions indiquées précédemment dans l'étude des roues cylindriques (253). Nous ne nous occuperons ici que de la relation qui doit exister entre les formes de ces profils pour assurer la conservation du rapport des vitesses angulaires que donneraient les cônes de friction.

Théorème. — Pour que deux cônes oxy , $ox'y'$, invariablement liés aux cônes primitifs oS et oS' , assurent la transmission de mouvement avec le même rapport de vitesses angulaires que ceux-ci, il faut et il suffit que $ox'y'$ soit l'enveloppe de oxy quand S roule sur S' sans glisser (c'est-à-dire dans le mouvement relatif de S par rapport à S').

Tout d'abord, les deux cônes oxy , $ox'y'$ ne peuvent agir l'un sur l'autre que s'ils ont un point commun, et, par conséquent, une génératrice commune oM (fig. 297). Ils sont nécessairement tangents le long de oM , car si l'un d'eux présentait une arête vive, l'usure ne tarderait pas à l'effacer.

Pour démontrer le théorème, il suffit donc d'établir que le plan normal commun aux cônes oxy , $ox'y'$ contient l'axe instantané oI de la rotation qui constitue le mouvement relatif de oS par rapport à oS' . Soit oI , l'intersection de ce plan avec le plan des axes. Le rapport des vitesses angulaires résultant de l'action de oxy sur $ox'y'$ a pour valeur (336)

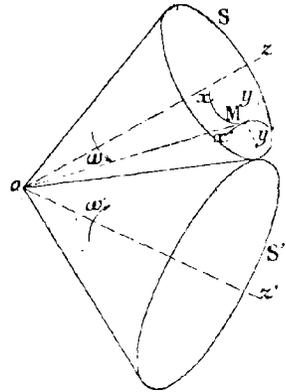


Fig. 297.

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin I_1 oz}{\sin I_1 o'z'}$$

Puisque, par hypothèse, ces cônes se conduisent avec le même rapport de vitesses que les cônes primitifs, on a aussi

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin Io'z'}{\sin Io'z'}$$

ce qui prouve que les droites oI et oI_1 coïncident. Le cône $ox'y'$ est donc l'enveloppe du cône oxy quand S roule sans glisser sur S' .

Un raisonnement analogue prouverait que oxy est l'enveloppe de $ox'y'$ dans le roulement sans glissement de oS' sur oS supposé fixe. On dit que ces deux surfaces sont conjuguées, c'est-à-dire qu'elles jouissent l'une par rapport à l'autre des mêmes propriétés. Il en résulte que, si oxy conduit $ox'y'$ en assurant au rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ une valeur déterminée k , $ox'y'$ peut aussi conduire oxy en assurant à ce même rapport la valeur k .

345. **Remarque.** — Une sphère quelconque de centre o coupe les cônes primitifs suivant deux circonférences S et S' , dont le point de contact I est, pour la position actuelle du système, le pôle instantané de rotation dans le mouvement relatif de l'un des cônes par rapport à l'autre. Cette même sphère coupe les cônes oxy , $ox'y'$ suivant deux courbes xy et $x'y'$ qui sont l'enveloppe l'une de l'autre, et telles, par con-

séquent, que l'arc de grand cercle qui leur est normal en M passe par le point I (190).

L'une de ces courbes étant donnée, on obtiendra sa conjuguée en cherchant l'enveloppe de la première dans le roulement sans glissement du cône primitif, auquel elle est invariablement reliée, sur le second supposé fixe, ou, ce qui revient au même, dans le mouvement épicycloïdal sphérique de S sur S'. Les cônes oxy , $ox'y'$ seront ainsi parfaitement déterminés.

On peut tracer l'enveloppe du profil mobile de plusieurs manières. Nous exposerons :

1° La méthode de Poncelet.

2° La méthode des roulettes.

346. Méthode de Poncelet.

Elle est basée sur ce que le *grand cercle normal à l'enveloppe et à l'enveloppée* passe, à chaque instant, par le pôle instantané de rotation (190).

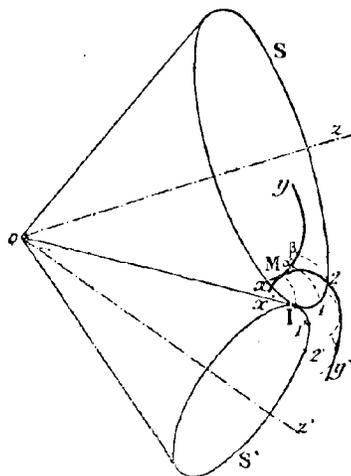


Fig. 298.

Soit xy le profil donné, que l'on suppose invariablement lié à S roulant sur S'. Marquons sur S' des positions successives I, I', I'',... du pôle instantané de rotation, et sur S les points I, I, I'',... qui viennent se superposer aux précédents ; traçons enfin les arcs de grand cercle IM, I'x, I''x',... normaux à l'enveloppée mobile. A l'instant considéré, celle-ci touche l'enveloppe inconnue au point M ; quand le pôle instantané de rotation est en I' sur la circonférence fixe S', l'arc I'x devient normal à l'enveloppe, de sorte que le petit cercle décrit de I' comme pôle, avec I'x pour rayon sphérique, est tangent à la courbe cherchée x'y'. En opérant de même avec les arcs I''x',... on obtient de nouvelles circonférences tangentes à x'y', et l'on peut tracer cette courbe sur la sphère avec autant d'approximation que l'on veut.

347. Méthode des roulettes.

Elle s'appuie sur le théorème suivant :

Théorème. — *Trois courbes S, S' et S₁, situées sur une même sphère o et tangentes en I, étant données, on imprime à la dernière un mouvement épicycloïdal sphérique successivement sur les deux autres. Un point M de la sphère, invariablement relié à S₁, décrit ainsi une courbe xy dans le roulement sur S et une courbe x'y' dans le roulement sur S'. Si S prend ensuite un mouvement épicycloïdal sphérique sur S' en entraînant xy, l'enveloppe de cette courbe est x'y' (fig. 299).*

Supposons qu'en même temps que S roule sur S', S₁ roule sur S de telle manière que les trois courbes restent toujours tangentes. Le point M décrit xy dans le mouvement relatif de S₁ par rapport à S, et x'y' dans le mouvement relatif de S₁ par rapport à S' ; les deux profils xy et x'y' ont donc toujours un point commun quand S roule sur S'. Ils sont de plus tangents, car chacun d'eux est normal à l'arc de grand cercle IM. Comme I est le pôle instantané de rotation à l'instant considéré, x'y' est l'enveloppe de xy entraînée dans le roulement de S sur S'.

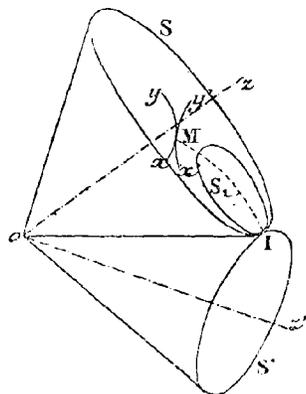


Fig. 299.

De ce théorème résulte un moyen de construire $x'y'$ quand on connaît xy . On regarde le profil donné comme engendré par un point M de la sphère auxiliaire, invariablement relié à une courbe S_1 roulant sur S , puis on fait rouler S_1 sur S' . Le nouveau lieu géométrique du point M répond à la question.

348. Remarque. — Comme on peut se donner arbitrairement l'un des profils, il existe une infinité de couples de courbes conjuguées propres à conduire les cônes primitifs sans modifier le rapport de leurs vitesses angulaires. De là résultent un certain nombre de tracés complètement analogues à ceux dont l'étude a été développée au chapitre II. Pour des raisons que nous donnerons plus loin, ces tracés rigoureux n'ont pas d'utilité pratique. Aussi nous bornerons-nous à quelques indications sommaires.

349. Engrenages coniques à profils épicycloïdaux.

Soient S_1 et S'_1 deux circonférences tracées sur la sphère auxiliaire, et tangentes en I aux circonférences S et S' (fig. 300). Le cône oS étant supposé moteur dans le sens de la flèche, considérons l'épicycloïde sphérique FME et l'hypocycloïde sphérique EMh , décrites dans le roulement sans glissement de S'_1 sur S et S' , par un point quelconque M de ce cercle, situé en retraite. D'après la méthode des roulettes, ces deux profils sont l'enveloppe l'un de l'autre, et l'action du second sur le premier assure la transmission avec le même rapport de vitesses angulaires que si les cônes primitifs se conduisaient directement. Ils sont d'ailleurs tangents en M , et l'on a

$$\text{arc IF} = \text{arc IE} = \text{arc IM}$$

ce qui prouve que le lieu du point de contact des profils est, en retraite, un arc IM de la circonférence S'_1 , égal à l'arc de retraite.

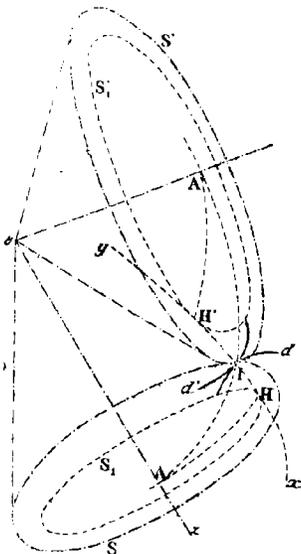


Fig. 301.

auxiliaire et du plan des axes, xIy un grand cercle incliné sur le précédent d'un

On démontrerait de même, en considérant les courbes GNh' , LNc' décrites par un point N de S_1 , situé en approche, dans le roulement sans glissement de ce cercle sur S et S' ; que le lieu du point de contact des profils est, en approche, un arc IN de la circonférence S_1 , égal à l'arc d'approche.

Ces propriétés permettent d'échanfriner les dents de manière à assurer au mécanisme des arcs d'approche et de retraite déterminés a et b . On porte le premier en IN sur S_1 et le second en IM sur S'_1 , puis on échanfrine la menante suivant le cône de sommet o et d'axe z , qui a pour base le petit cercle de la sphère passant par M , et la menée suivant le cône de sommet o et d'axe z' , dont la base est le petit cercle de la sphère qui passe par N . Les cônes d'évidement se déduisent des précédents, en laissant un petit jeu au fond des creux.

350. Engrenages coniques à développantes

Soient AIA' (fig. 301) l'intersection de la sphère

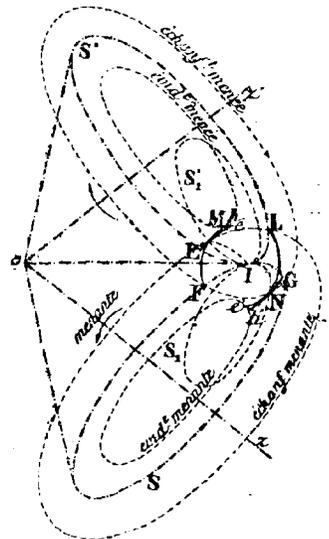


Fig. 300.

angle quelconque θ , et S_1, S'_1 deux petits cercles tangents à xy , ayant les mêmes poles respectifs que S et S' . Quand xy roule sans glisser sur S_1 et S'_1 , chacun de ses points compris entre H et H' décrit deux développantes sphériques qui sont l'enveloppe l'une de l'autre dans le roulement de S' sur S , puisque le grand cercle xy , normal à chacune d'elles, passe par le pôle instantané de rotation I . Les surfaces coniques de sommet o , définies par ces deux courbes, satisfont donc aux conditions générales de la transmission avec rapport constant des vitesses angulaires, et se conduisent des deux côtés du plan des axes.

351. Tracé approximatif de Tredgold.

Dans les deux méthodes précédentes, les surfaces des dents sont déterminées au moyen de courbes gauches, tracées sur une sphère auxiliaire de centre o . La sphère n'étant pas une surface développable, les constructions nécessaires ne peuvent pas être effectuées en vraie grandeur sur le papier, et donnent lieu à des épures extrêmement compliquées. Aussi ne cherche-t-on pas, dans la pratique, à réaliser des roues d'angle théoriquement exactes ; on se contente d'un tracé approché, dont le principe a été indiqué par Tredgold.

Les parties utiles des profils étant comprises, pour chaque roue, dans une zone de faible hauteur limitée par les cercles d'échanfrinement et d'évidement, on peut admettre, avec une approximation suffisante, qu'ils sont situés sur les surfaces des cônes circonscrits à la sphère auxiliaire le long des circonférences S et S' . Les sommets E, E' de ces cônes sont les points de rencontre des axes et de la perpendiculaire menée à oI dans leur plan. Pendant le fonctionnement du système, toutes les génératrices du cône ES viennent successivement occuper la position EI , et toutes celles du cône $E'S'$ la position $E'I$. Tout paraît donc se passer, pour un observateur qui re-

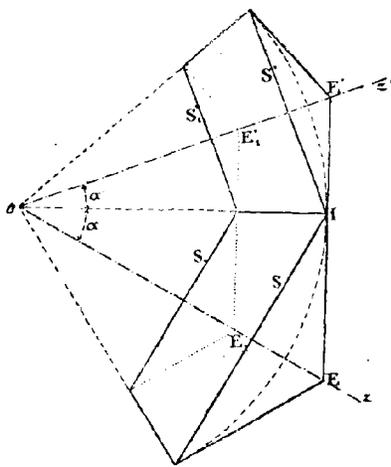


Fig. 302.

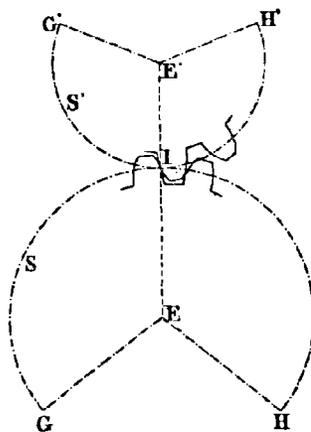


Fig. 303.

garderait les profils au moment où leur point de contact vient en I , comme si deux circonférences de rayons $EI, E'I$, et de centres E, E' , situées dans le plan tangent commun aux cônes de tête extérieurs $ES, E'S'$, roulaient l'une sur l'autre (*). Cette

(*) S'il en était rigoureusement ainsi, le rapport des vitesses serait le même dans l'engrenage conique que dans l'engrenage cylindrique construit sur les circonférences primitives de rayons $EI, E'I$, c'est-à-dire

$$\frac{EI}{E'I} = \frac{oI \operatorname{tg} \alpha'}{oI \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'}$$

ce qui n'a pas lieu, puisque $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$.

remarque ramène le tracé des profils de deux roues d'angle à celui des profils d'un engrenage cylindrique. On développe sur un plan les surfaces des cônes de tête, et, par l'un des procédés exposés au chapitre II, on trace la denture d'un engrenage ayant pour lignes primitives les arcs $G'II$, $G'II'$ (fig. 303) des secteurs circulaires obtenus ; pour déterminer les surfaces des dents, il suffit d'enrouler le dessin sur les cônes de tête, et d'imaginer une droite mobile passant par o et s'appuyant sur les profils précédents. On limite les roues à deux cônes de têtes intérieurs $E_1 S_1$, $E'_1 S'_1$ déterminés comme les premiers ; leur développement donne deux nouveaux secteurs circulaires, respectivement semblables à ceux de la figure 303, dont la denture fournirait, pour chaque roue, un second gabarit sur lequel devrait s'appuyer la droite mobile qui engendre les surfaces des dents (*).

Il résulte évidemment de ces constructions que, dans deux roues coniques qui se conduisent, les pas et les modules, mesurés sur les circonférences S et S' , sont égaux.

352. Théorème. — *Le rapport des vitesses angulaires de deux roues coniques est égal au rapport inverse des nombres de dents dont elles sont armées.*

Soient, en effet, ω , ω' les vitesses angulaires des deux roues, N , N' les nombres de tours qu'elles effectuent dans le même temps, n , n' leurs nombres de dents respectifs, R et R' les rayons de base des cônes primitifs, et P le pas commun mesuré sur les circonférences S et S' . On a (fig. 304).

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{R}{R'} = \frac{2 \pi R}{2 \pi R'} = \frac{nP}{n'P} = \frac{n}{n'}$$

On pourrait établir cette relation en observant que les nombres de dents qui passent au point I dans un temps donné sont égaux pour les deux roues. Par conséquent

$$Nn = N'n'$$

d'où

$$\frac{n}{n'} = \frac{N'}{N} = \frac{\omega'}{\omega}$$

353. Calcul des éléments d'un système de roues coniques droites. — Les dents des roues coniques sont évidemment de moins en moins épaisses à mesure qu'on se rapproche du sommet. Le pas circonférentiel et le module, qui dérivent de l'épaisseur, n'exprimeraient donc rien de précis si l'on n'ajoutait pas à quelle distance du sommet on les a déterminés. Il est d'usage, en pratique, de rapporter toutes les dimensions d'une roue au cône de tête extérieur, et l'on définit celui-ci par la longueur $oI = d$ (fig. 304) de la génératrice du cône primitif.

Le module (sur le cône de tête extérieur) doit être choisi dans la série conventionnelle définie au paragraphe 318.

Premier cas. — *Calculer les éléments nécessaires à l'exécution de deux roues coniques, connaissant les nombres de dents n et n' , l'angle θ des axes, et le module M , mesuré sur le cône de tête extérieur.*

Données	}	$\left. \begin{array}{l} n, n' \\ \theta \\ M \end{array} \right\}$	Inconnues	}	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Angles des cônes primitifs : } \alpha, \alpha' \\ \text{Longueur de génératrice : } d \\ \text{Diamètres primitifs : } D, D' \\ \text{Diamètres d'échanfrinement : } D_1, D'_1 \\ \text{Angle de tête : } \beta \\ \text{Angle de pied : } \gamma \\ \text{Épaisseur des jantes : } 5 M \text{ à } 10 M \\ \text{Épaisseur des couronnes : } 1.8 M \text{ à } 2 M. \end{array} \right.$
---------	---	---------------------------------------------------------------------	-----------	---	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

(*) Les engrenages coniques ainsi définis sont appelés droits, parce que la surface de chaque dent rencontre celle du cône primitif correspondant suivant une ligne droite. Nous parlerons un peu plus loin des engrenages coniques hélicoïdaux (354).

Demi-angles au sommet des cônes primitifs. — Soient oz et oz' les axes, dont le premier doit supporter la roue de n dents, par exemple. En construisant le parallélogramme $oEGF$ (fig. 304), dont les côtés OE et OF sont respectivement proportionnels à n' et à n (339 bis II), on détermine la génératrice commune OG' des deux cônes primitifs. Les angles cherchés sont

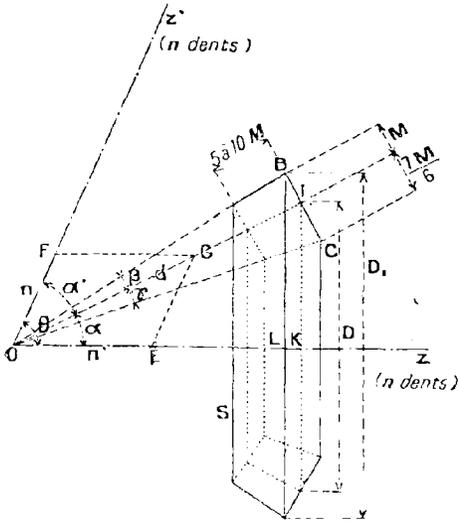


Fig. 304.

$$EOG = \alpha, FOG = \alpha'.$$

Dans le triangle OEG , on a

$$\frac{\sin \alpha}{EG} = \frac{\sin \alpha'}{OE} = \frac{\sin (\pi - \theta)}{OG}$$

ou

$$\frac{\sin \alpha}{n} = \frac{\sin \alpha'}{n'} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{n^2 + n'^2 + 2nn' \cos \theta}}$$

Par conséquent

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{n \sin \theta}{\sqrt{n^2 + n'^2 + 2nn' \cos \theta}} \\ \sin \alpha' = \frac{n' \sin \theta}{\sqrt{n^2 + n'^2 + 2nn' \cos \theta}} \end{array} \right. \quad (1)$$

Diamètres primitifs. Ce sont les diamètres des circonférences communes aux cônes primitifs et aux cônes de tête extérieurs. Leurs dentures étant au module M , on a, comme dans les engrenages cylindriques droits

$$\left\{ \begin{array}{l} D = Mn \\ D' = Mn' \end{array} \right. \quad (2)$$

Diamètres d'échanfrinement. La longueur des faces, égale au module M , est portée sur la génératrice IB du cône de tête extérieur. Le diamètre d'échanfrinement de la roue S (fig. 304) est

$$D_1 = 2 BL = 2 IK + 2 BI \cos \alpha$$

c'est-à-dire $D_1 = D + 2 M \cos \alpha = M (n + 2 \cos \alpha)$

Par analogie $D'_1 = D' + 2 M \cos \alpha' = M (n' + 2 \cos \alpha')$ (3)

Longueur de génératrice des cônes primitifs. Le triangle rectangle OIK donne

la relation $oI = d = \frac{IK}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \alpha}$

ou $d = \frac{Mn}{2 \sin \alpha} = \frac{M \sqrt{n^2 + n'^2 + 2nn' \cos \theta}}{2 \sin \theta}$ (4)

Angles de tête et de pied. On appelle *angle de tête* l'angle sous lequel on aperçoit, du sommet du cône primitif, la tête d'une dent, soit $IoB = \beta$ (fig. 304). L'angle de tête est le même pour deux roues associées. On a, dans le triangle IoB :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{IB}{oI} = \frac{M}{d} = \frac{2 \sin \alpha}{n} \quad (5)$$

On appelle *angle de pied* l'angle sous lequel on aperçoit, du sommet, le pied d'une dent, soit $IoC = \gamma$ (fig. 304). Il est le même pour deux roues conjuguées ; en supposant une longueur de pied égale à $\frac{7M}{6}$ (*), on a

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{IC}{oI} = \frac{7M}{6d} = \frac{7 \sin \alpha}{3n} \quad (6)$$

L'angle de tête doit être ajouté au demi-angle au sommet de chaque cône primitif ; la somme est le demi-angle au sommet du cône d'échanfrinement correspondant, indispensable à connaître pour qu'on puisse tourner les blocs à tailler au calibre voulu. Enfin, la somme $\beta + \gamma$ des angles de tête et de pied sert au réglage de la raboteuse, afin que les creux des dents soient amenés à la profondeur convenable.

Cas particulier où les axes sont rectangulaires. — Il suffit de remplacer θ par $\frac{\pi}{2}$ dans les formules précédentes, qui deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n'^2}} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{n}{n'} \\ \sin \alpha' = \frac{n'}{\sqrt{n^2 + n'^2}} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{n'}{n} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D = Mn \\ D' = Mn' \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = D + 2M \cos \alpha = M(n + 2 \cos \alpha) \\ D'_1 = D' + 2M \cos \alpha' = M(n' + 2 \cos \alpha') \end{array} \right. \quad (3)$$

$$d = \frac{M}{2} \sqrt{n^2 + n'^2} \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M}{d} = \frac{2}{\sqrt{n^2 + n'^2}} \quad (5')$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{7M}{6D} = \frac{7}{3\sqrt{n^2 + n'^2}} \quad (6')$$

On appelle souvent *roues coniques normales* celles dont les axes sont rectangulaires.

(*) Une étude de la machine Wilgram à raboter les roues coniques, publiée dans l'*Engineering* du 21 mars 1902, indique une longueur de pied égale à $1,1236 M$, qui équivaut au module, augmenté des huit centièmes de l'épaisseur des dents. Nous conservons ici les dimensions employées dans le calcul des roues cylindriques droites au module.

Application numérique. — Calculer les éléments de deux roues coniques normales, au module 6 sur le cône de tête extérieur, sachant que leurs nombres de dents sont $n = 20$ $n' = 30$.

Demi-angles au sommet des cônes primitifs (Formules 1')

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} \quad \alpha = 33^{\circ}41' \quad (*)$$

$$\alpha' = 90^{\circ} - \alpha = 56^{\circ}19'$$

Diamètres primitifs (Formules 2') $D = Mn = 120 \text{ m/m.}$

$$D' = Mn' = 180 \text{ m/m.}$$

Diamètres d'échanfrinement (Formules 3') $2M \cos \alpha = 12 \cos \alpha = 9 \text{ m/m } 98$

$$2M \cos \alpha' = 12 \cos \alpha' = 6 \text{ m/m } 65$$

$$D_1 = D + 2M \cos \alpha = 129 \text{ m/m } 98$$

$$D'_1 = D' + 2M \cos \alpha' = 186 \text{ m/m } 65$$

Longueur de génératrice (Formule 4')

$$d = \frac{M}{2} \sqrt{n'^2 + n^2} = 30 \sqrt{13} = 108^{\text{m}} 16$$

Angle de tête (Formule 5')

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{\sqrt{n'^2 + n^2}} = \frac{1}{5\sqrt{13}} \quad \beta = 3^{\circ}10'$$

Angle de pied (Formule 6')

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{7}{3\sqrt{n'^2 + n^2}} = \frac{7}{30\sqrt{13}} \quad \gamma = 3^{\circ}41'$$

Demi-angles au sommet des cônes d'échanfrinement

$$\alpha_1 = \alpha + \beta = 36^{\circ}51'$$

$$\alpha'_1 = \alpha' + \beta = 59^{\circ}29'$$

Hauteur des dents (évaluée en angle) : $\beta + \gamma = 6^{\circ}51'$

Épaisseur des jantes : de 30 à 60 m/m

Épaisseur des couronnes : de 11 à 12 m/m.

(*) Nous cessons de reproduire les opérations logarithmiques. Pour la disposition des calculs, on se reportera au paragraphe 355 bis.

353 bis. DEUXIÈME CAS. — Calcul des éléments d'un système de roues coniques droites, destinées à réaliser un rapport de vitesses angulaires déterminé.

- | | | |
|--------------------------------------------|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Données. | } | Module M (sur le cône de tête extérieur). |
| | | Rapport de vitesses angulaires : $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N'}{N}$ (évalué en fonction des nombres de tours). |
| | | Angle des axes : θ |
| | | Longueur approximative de la génératrice commune : d_{app} . |
| Inconnues. | } | Demi-angles au sommet des cônes primitifs : α, α' |
| | | Nombres de dents : n, n' |
| | | Longueur exacte de la génératrice commune : d_{ex} . |
| | | Diamètres primitifs : D, D' |
| | | Diamètres d'échanfrinement ; D_1, D'_1 |
| | | Angle de tête : β |
| | | Angle de pied : γ |
| Epaisseur des jantes : de 5 M à 10 M | | |
| Epaisseur des couronnes : de 1, 8 M à 2 M. | | |

Demi-angles au sommet des cônes primitifs. — On les détermine comme au paragraphe 339, en portant sur les axes des longueurs oA, oA' respectivement proportionnelles aux nombres de tours N et N', et en construisant le parallélogramme $oABA'$ (fig. 304 bis). On peut, sans rien changer aux résultats, remplacer $\frac{N'}{N}$ par la fraction irréductible équivalente, soit $\frac{N'_1}{N_1}$, et poser $oA = N_1$, $oA' = N'_1$. On a alors, dans le triangle oAB

$$\frac{\sin \alpha}{AB} = \frac{\sin \alpha'}{oA} = \frac{\sin (\pi - \theta)}{oB}$$

ou
$$\frac{\sin \alpha}{N'_1} = \frac{\sin \alpha'}{N_1} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{N_1^2 + N'_1{}^2 + 2 N_1 N'_1 \cos \theta}}$$

d'où l'on tire

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{N'_1 \sin \theta}{\sqrt{N_1^2 + N'_1{}^2 + 2 N_1 N'_1 \cos \theta}} \\ \sin \alpha' = \frac{N_1 \sin \theta}{\sqrt{N_1^2 + N'_1{}^2 + 2 N_1 N'_1 \cos \theta}} \end{array} \right. \quad (7)$$

Nombres de dents. — D'après le théorème 352

$$\frac{n}{n'} = \frac{N'}{N} = \frac{N'_1}{N_1}$$

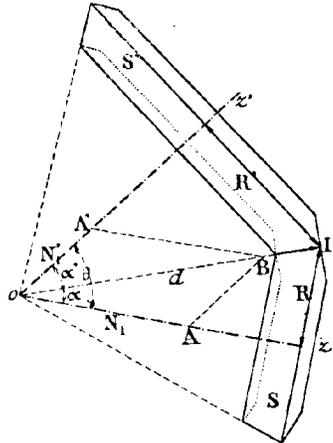


Fig. 304 bis.

n et n' sont donc des équimultiples de N'_1 et N_1 , et l'on peut poser, λ désignant un nombre entier à déterminer

$$\left. \begin{array}{l} n = \lambda N'_1 \\ n' = \lambda N_1 \end{array} \right\} \quad (8)$$

D'autre part, le diamètre primitif Mn de la roue S est aussi égal à $2 o I \sin \alpha$.

On a donc
$$M \lambda N'_1 = 2 d_{app} \times \frac{N'_1 \sin \theta}{\sqrt{N_1^2 + N_1'^2 + 2 N_1 N_1' \cos \theta}} \quad (9)$$

et
$$\lambda = \frac{2 d_{app} \sin \theta}{M \sqrt{N_1^2 + N_1'^2 + 2 N_1 N_1' \cos \theta}} \quad (10)$$

En général, la division indiquée au second membre ne se fait pas exactement. On attribue alors à λ la valeur entière la plus voisine du quotient exact, et les formules (8) font connaître n et n' .

Longueur exacte de la génératrice commune. -- L'égalité (9) n'est évidemment pas satisfaite, puisqu'on a été conduit à remplacer λ par un nombre un peu différent du nombre exact. Il est donc nécessaire de modifier la longueur d_{app} de la génératrice commune. Sa longueur exacte est donnée par l'équation

$$2 d_{ex} \sin \alpha = Mn$$

d'où l'on tire
$$d_{ex} = \frac{Mn}{2 \sin \alpha} \quad (11)$$

Diamètres primitifs. — Diamètres d'échanfrinement. — Angle de tête, etc... On calcule toutes ces quantités comme dans le premier cas (353) en ayant soin, bien entendu, d'employer d_{ex} pour l'évaluation des angles de tête et de pied.

Cas particulier où les axes sont rectangulaires. — Il suffit de remplacer θ par $\frac{\pi}{2}$ dans les formules précédentes, qui deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sin \alpha = \frac{N'_1}{\sqrt{N_1^2 + N_1'^2}} & \text{ou } \operatorname{tg} \alpha = \frac{N'_1}{N_1} \\ \sin \alpha' = \frac{N_1}{\sqrt{N_1^2 + N_1'^2}} & \text{ou } \operatorname{tg} \alpha' = \frac{N_1}{N'_1} \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\lambda = \frac{2 d_{app}}{M \sqrt{N_1^2 + N_1'^2}} \quad (10')$$

La marche à suivre pour calculer les nombres de dents, d_{ex} , les diamètres primitifs, etc... n'est pas modifiée.

Application numérique. — Calculer, au module 4 sur le cône de tête extérieur, deux roues coniques normales donnant un rapport de vitesses angulaires $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{3}{4}$; la longueur de génératrice commune est approximativement $d_{app} = 145 \text{ m}$.

Demi-angles au sommet des cônes primitifs :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \quad \alpha = 36^{\circ}52$$

$$\alpha' = 90^{\circ} - \alpha = 53^{\circ}8$$

Nombres de dents : $\frac{n}{n'} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{3}{4}$

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 3 \lambda \\ n' = 4 \lambda \end{array} \right.$$

D'après la formule (10') $\lambda = \frac{290}{4 \sqrt{9+16}} = \frac{290}{20} = 14,5$

En prenant, par exemple $\lambda = 14,$

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 42 \\ n' = 56 \end{array} \right.$$

Longueur exacte de la génératrice commune (formule 11) :

$$d_{ex} = \frac{Mn}{2 \sin \alpha} = \frac{4 \times 42 \times 5}{2 \times 3} = 140 \text{ m/m}$$

Diamètres primitifs (formules 2') :

$$D = Mn = 4 \times 42 = 168 \text{ m/m.}$$

$$D' = Mn' = 4 \times 56 = 224 \text{ m/m.}$$

Diamètres d'échanfrement (formules 3') :

$$2M \cos \alpha = 8 \cos \alpha = 6 \text{ m/m } 40$$

$$2M \cos \alpha' = 8 \cos \alpha' = 4 \text{ m/m } 80$$

$$D_1 = D + 2M \cos \alpha = 174 \text{ m/m } 40$$

$$D'_1 = D' + 2M \cos \alpha' = 228 \text{ m/m } 80$$

Angle de tête : $\operatorname{tg} \beta = \frac{M}{d_{ex}} = \frac{1}{35} \quad \beta = 1^{\circ}38$

Angle de pied : $\operatorname{tg} \gamma = \frac{7}{6} \frac{M}{d_{ex}} = \frac{1}{30} \quad \gamma = 1^{\circ}55$

Demi-angles au sommet des cônes d'échanfrinement

$$\alpha_1 = \alpha + \beta = 33\ 30$$

$$\alpha'_1 = \alpha' + \beta = 54^{\circ}46$$

Hauteur des dents (évaluée en angle) :

$$\beta + \gamma = 3^{\circ}33$$

Épaisseur des jantes : de 20 à 40 /m.

Épaisseur des couronnes : 7 à 8 m/m.

§ VI. — Engrenages coniques hélicoïdaux.

354. Engrenages coniques échelonnés. — Le raisonnement qui justifie le tracé de Tredgold conduit à penser que, au point de vue du glissement total des dents, un engrenage conique se comporte à peu près comme l'engrenage cylindrique qui lui a donné naissance. Il est donc naturel de chercher à diminuer le glissement par une disposition analogue à celle de Hooke. Les cônes primitifs étant partagés en autant de cônes partiels que l'on désire d'échelons, trois par exemple, on donne à chacun de ces derniers une denture identique à celle qu'il devrait avoir dans l'engrenage ordinaire, sauf en ce que les profils exacts sont remplacés, sur une certaine étendue, par des courbes un peu intérieures. Puis on assemble les divers cônes dentés en donnant aux profils de chacun d'eux une avance de un tiers de pas sur ceux du cône qui le précède. Cette disposition donne des engrenages coniques échelonnés, dans lesquels la réduction du glissement est d'autant plus grande que le nombre des échelons est plus considérable.

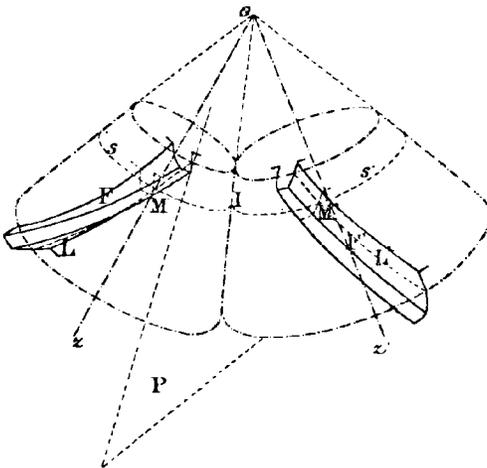


Fig. 305.

355. Engrenages coniques hélicoïdaux.

Quand le nombre des échelons croît indéfiniment, les dents arrivent à former sur chaque roue des filets continus, tels que F, F', coupés par les cônes primitifs suivant des courbes L et L' (fig. 305). Soient M et M' deux points de ces courbes, situés sur les parallèles s et s' engendrés par un point I de la génératrice commune aux cônes primitifs. Quand F et F' sont en action, il arrive un moment où M et M' se superposent en I, et, pour que les surfaces des dents soient tangentes en ce point, il faut que les tangentes en L et L' soient confondues. Il résulte de là que les courbes L, L' donnent la même transformée λ

quand on développe les surfaces des cônes primitifs sur leur plan tangent commun P. Par conséquent, pour obtenir deux pareilles courbes, il suffit de tracer dans le plan P

une ligne λ quelconque, et d'effectuer les opérations inverses. On choisit λ de telle manière que L et L' présentent des propriétés analogues à celle de l'hélice cylindrique.

Pour obtenir des courbes dans lesquelles le rapport de l'ordonnée à l'abscisse curviligne reste constant, on doit tracer dans le plan tangent une spirale d'Archimède. Soient, en effet, M un point de L (fig. 306) et M_1 le point correspondant de λ . Les longueurs M_1B_1 et AB_1 étant respectivement égales à MB et AB , on a, par hypothèse

$$\frac{M_1 B_1}{\text{arc } AB_1} = \frac{MB}{\text{arc } AB} = k$$

Ou, en désignant par r et θ les coordonnées du point M_1 dans le système de coordonnées polaires défini par le pôle o et l'axe oA , et par a la longueur oA

$$\frac{a - r}{a \theta} = k$$

L'équation de λ est donc

$$r = a - ak \theta$$

ce qui caractérise une spirale d'Archimède.

Dans le taillage des roues coniques, l'outil, analogue à celui d'un étai-limeur, est porté par un coulisseau animé d'un mouvement rectiligne alternatif dont la trajectoire passe par le sommet du cône primitif (chapitre XXVI). Pour réaliser le résultat précédent, il faudrait que le bloc conique tourne sur lui-même d'un mouvement uniforme, en même temps que le coulisseau avance vers le sommet d'un mouvement également uniforme. Cette condition n'est généralement pas remplie en ce qui concerne le coulisseau, auquel le mouvement est donné soit par bielle et manivelle (535), soit par manivelle et coulisse rectiligne (493), soit par l'un des dispositifs employés dans les étaux-limeurs (530-534). Pour qu'il n'en résulte aucun inconvénient, il suffit que le mouvement alternatif de l'outil reste le même pendant le taillage de deux roues conjuguées, car les lignes λ tracées dans le plan tangent commun sont alors identiques, et les courbes L et L' satisfont à la relation géométrique nécessaire trouvée précédemment.

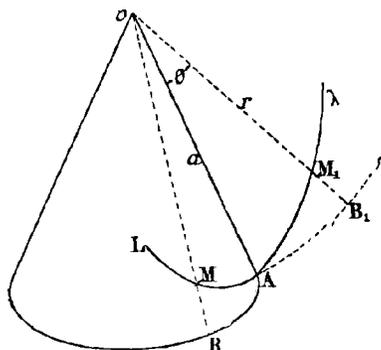


Fig. 306.

CHAPITRE IX

LIAISON DE DEUX ROTATIONS DONT LES AXES NE SONT PAS DANS UN MÊME PLAN

§ I. — *Emploi de roues cylindriques ou coniques.*

356. Le problème général à résoudre est le suivant : *Etant donnés deux axes de rotation z et z' non situés dans un même plan, on se propose de les lier l'un à l'autre par un système de corps en contact direct, de telle manière que le rapport des vitesses angulaires des mouvements qui s'effectuent autour d'eux ait une valeur constante donnée $\frac{\omega'}{\omega} = k$.*

Nous indiquerons d'abord des solutions indirectes, résultant de l'emploi de roues coniques ou cylindriques.

357. **Emploi de deux paires de roues coniques.**

Cette solution consiste à relier les deux axes donnés à un axe intermédiaire z_1 qui les rencontre et qui, dans la pratique, est généralement dirigé suivant leur perpen-

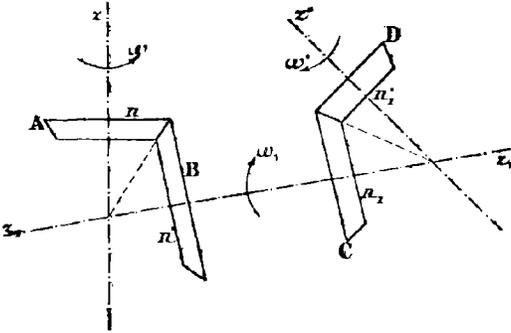


Fig. 308.

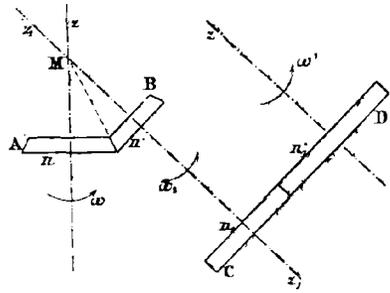


Fig. 309.

diculaire commune. Deux roues coniques A et B permettent de transformer la rotation ω autour de z en une rotation ω_1 autour de z_1 ; un second couple C, D de roues coniques transmet ensuite le mouvement à l'axe z' . En désignant par n, n', n_1, n'_1 , les nombres de dents respectifs de ces roues, on a successivement

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{n}{n'}$$

$$\frac{\omega'}{\omega_1} = \frac{n_1}{n'_1}$$

et par conséquent

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{nn_1}{n'n'_1}$$

Pour que le rapport de vitesses voulu soit réalisé, il suffit de choisir les nombres de dents de manière qu'ils satisfassent à la relation $\frac{nn_1}{n'n'_1} = k$. Nous apprendrons plus loin à résoudre ce nouveau problème (390).

358. Emploi d'une paire de roues coniques et d'une paire de roues cylindriques.

On mène par un point M de l'axe z un axe intermédiaire z_1 parallèle à z. La transformation de la rotation ω en une rotation ω_1 autour de z_1 s'effectue, comme dans le cas précédent, par un engrenage conique (A, B). Le mouvement est ensuite donné à l'axe z' par un engrenage cylindrique (C, D). En conservant les mêmes notations que plus haut, on a encore

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{nn_1}{n'n'_1}$$

359. Solutions directes. — La transmission directe du mouvement entre deux axes de rotation qui ne sont pas dans un même plan peut être réalisée de plusieurs façons :

- 1° Par l'emploi du système *roue et vis sans fin* ;
 - 2° Par les *engrenages hélicoïdaux* ;
 - 3° Par les *engrenages hyperboloïdes*.
- Nous étudierons successivement ces trois sortes de mécanismes.

§ II. — Engrenage d'une roue et d'une vis sans fin.

Nous examinerons d'abord un cas particulier.

Cas où les axes sont rectangulaires, l'un d'eux étant rejeté à l'infini.

360. Quand un axe de rotation se déplace parallèlement à lui-même dans un plan P, le mouvement qui s'effectue autour de lui dégénère, à la limite, en une translation V perpendiculaire à ce plan. Le but du problème est donc de trouver un mode de liaison par contact direct, qui permette de transformer la rotation ω , qui s'exécute autour de l'axe z situé à distance finie, en une translation V parallèle à cet axe, et de telle manière que le rapport $\frac{\omega}{V}$ reste constant.

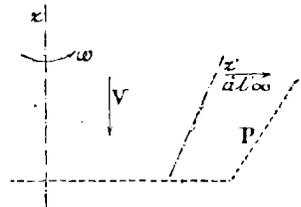


Fig. 310.

361. Cylindre à rainure conduisant une tige à bouton.

Dans ce mécanisme, l'axe z est invariablement relié à un cylindre de révolution de rayon R, sur lequel est tracée une rainure hélicoïdale AMB de pas H (fig. 311). Une droite z', parallèle à z, est maintenue par des guides qui lui laissent la possibilité de se déplacer dans sa propre direction. Cette droite est solidaire d'une tige CM, terminée par un bouton qui s'engage dans la rainure. Il est évident que, grâce à cette disposition, la rotation du cylindre provoquera une translation de la tige guidée.

Pour trouver la relation qui existe entre les vitesses, imprimons à tout le système un déplacement infiniment petit correspondant à un accroissement dt du temps. D'après la définition de l'hélice, le chemin ds parcouru par le point M dans le sens des génératrices du cylindre est proportionnel à l'angle de rotation correspondant, qui est ωdt . On a donc

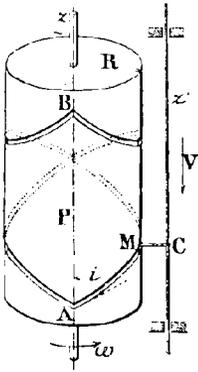


Fig. 311.

$$\frac{ds}{H} = \frac{\omega dt}{2\pi}$$

d'où
$$ds = \frac{H \omega dt}{2\pi}$$

Mais, d'autre part,
$$ds = V dt$$

Par conséquent
$$\frac{H \omega dt}{2\pi} = V dt$$

d'où
$$\frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{H}$$

On peut donner à cette relation une autre forme, en exprimant H au moyen de l'angle i que forme l'hélice avec les génératrices du cylindre. Il vient

$$\frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{2\pi R \cotg i} = \frac{1}{R \cotg i}$$

Cette expression montre que le rapport $\frac{\omega}{V}$ est fonction des deux variables indépendantes R et i . Pour lui donner une valeur déterminée h , on peut fixer arbitrairement la valeur d'une de ces variables, et calculer l'autre par la relation

$$\frac{1}{R \cotg i} = h$$

Le pas de la rainure est, dans tous les cas

$$H = 2\pi R \cotg i = \frac{2\pi}{h}$$

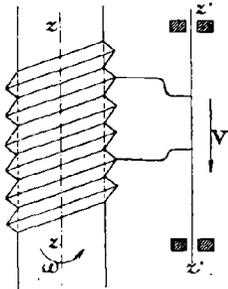


Fig. 312.

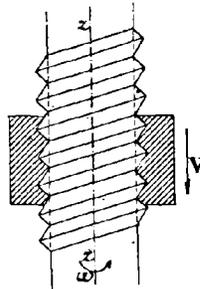


Fig. 313.

Avec une seule hélice tracée sur le cylindre, le mouvement de la droite z' s'effectuerait indéfiniment dans le même sens, aucune raison géométrique n'en limitant l'am-

plitude. En disposant une seconde rainure, de même pas que la première, mais inclinée en sens inverse, le mouvement de translation devient alternatif, avec changement brusque du sens de la vitesse à chaque extrémité de la course. Cet appareil est souvent employé dans les filatures, pour la confection des pelotes de fil ou de laine.

362. Transmission par vis et peigne — par vis et écrou.

Au lieu de tracer une rainure sur le cylindre menant, on peut le considérer comme le noyau d'une vis de pas H . Il faut alors remplacer le bouton de la tige guidée par un peigne (fig. 312), dont le profil est déterminé par l'intersection de la vis et d'un plan conduit par l'axe. L'expression du rapport des vitesses est la même que dans le mécanisme ci-dessus.

On peut enfin remplacer le peigne par un écrou (fig. 313) : le contact plus intime avec la vis permet d'appliquer l'appareil à la transmission d'efforts considérables. En supposant le mécanisme tellement combiné que la vis puisse seulement tourner autour de son axe, et l'écrou se déplacer dans un mouvement de translation, le rapport des vitesses est encore

$$\frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{H} = \frac{1}{R \cotg i}$$

Cette disposition est fréquemment employée dans les machines (Ex. : commande d'un chariot de tour).

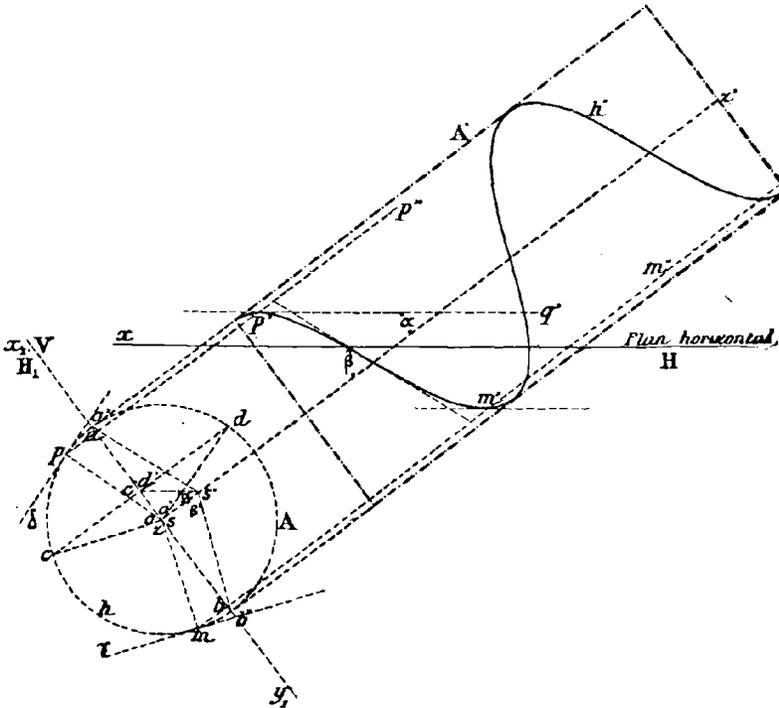


Fig. 314.

Le système vis et écrou peut encore être utilisé de deux autres manières :

1° La vis peut être entièrement fixe ; l'écrou prend alors un mouvement hélicoïdal, dû à la coexistence de la rotation ω et de la translation V . C'est ce qui se présente dans

les écrous de serrage, dans certains pressesoirs, où le mouvement d'un écrou, provoqué par la manœuvre de leviers, produit une pression sur un plateau auquel la vis sert de guide.

2° L'écrou peut être entièrement fixe ; dans ce cas, c'est la vis qui possède le mouvement hélicoïdal, comme dans les presses à copier, les serre-joints, les vis micro-métriques, etc...

363. Vis d'Archimède.

Si l'on donne à un tube la forme d'une hélice cylindrique, et si l'on y introduit ensuite un petit corps pesant, une bille par exemple, on constate par l'expérience que, si l'axe est convenablement incliné, un mouvement de rotation du cylindre finit par faire apparaître la bille à l'extrémité du tube. C'est sur cette observation qu'est basé l'emploi de la vis d'Archimède pour l'épuisement des eaux, le transport de la farine dans les moulins, etc...

Pour analyser cette expérience, considérons un cylindre de révolution (A, A') (fig. 314) incliné d'un angle α sur l'horizon, supportant une hélice (h, h') dont les tangentes forment un angle constant β avec la direction (z, z') de l'axe. (Les projections sont faites dans un système (H_1, V) formé du plan vertical passant par l'axe, et d'un plan H_1 perpendiculaire à cet axe, dans lequel la ligne de terre est x_1, y_1 . On a en outre indiqué la trace II du plan horizontal sur le plan V). Proposons-nous de mener à l'hélice (h, h') des tangentes horizontales.

Remarquons pour cela que le lieu des parallèles menées aux tangentes à l'hélice par un point quelconque de l'espace est un cône de révolution, dont le demi-angle au sommet est β . Soit ($sab, s'a'b'$) celui de ces cônes dont la base, dans le plan H_1 , se confond avec celle du cylindre. Ses génératrices horizontales ($sc, s'c'$), ($sd, s'd'$) sont parallèles aux tangentes cherchées. Celles-ci déterminent d'autre part, avec les génératrices du cylindre qui passent par leur point de contact, des plans tangents respectivement parallèles aux plans ($sco, s'c'o'$), ($sdo, s'd'o'$). Les traces de ces plans tangents sur le plan H_1 sont γm et δp . Les points cherchés se trouvent donc à la rencontre de l'hélice avec les génératrices du cylindre menées par m et p ; ils sont projetés en (m, m') et (p, p'). Les constructions qui les donnent ne sont possibles que si $\alpha < \beta$.

Imaginons maintenant que, le cylindre tournant autour de son axe avec une vitesse angulaire ω , un point matériel soit assujéti à rester sur l'hélice (h, h'). L'action de la pesanteur tend à le placer constamment au point le plus bas de l'arc d'hélice sur lequel il se trouve, soit (m, m'), dans la figure. Comme les positions successives de l'hélice peuvent être obtenues en imprimant à l'une d'elles un mouvement de translation parallèle à l'axe (z, z'), on voit que l'effet du mécanisme est d'élever le point mobile en lui faisant parcourir la génératrice ($m, m'm''$). Chaque tour du cylindre correspond à une élévation du point pesant égale à $P \sin \alpha$, P désignant le pas de l'hélice.

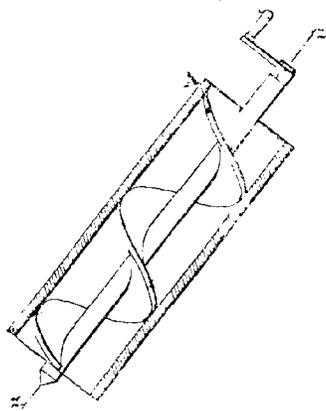


Fig. 315.

Le même fait se produirait encore si, revenant au tube que nous avons considéré tout d'abord, les choses étaient disposées pour que son extrémité inférieure plonge dans un liquide. Les molécules de celui-ci joueraient le rôle du point pesant, et rempliraient l'espace $p'm'q'$ compris entre les plans horizontaux menés par les points (p, p') et (m, m') déterminés tout à l'heure. Après un certain temps, le déversement se produirait à la partie supérieure du tube. Il faut remarquer, toutefois, que les extré-

mités de la colonne liquide ainsi enfermée ne peuvent être dans un même plan horizontal que si elles supportent des pressions égales. Il suffit, pour qu'il en soit ainsi, de régler la position du système de telle manière que l'extrémité inférieure du tube se trouve alternativement dans l'eau et dans l'air. Les différentes colonnes liquides enfermées dans le tube sont alors séparées les unes des autres par des colonnes d'air à la pression atmosphérique. L'arc $p'm'q'$ est appelé l'arc *hydrophore*.

Dans la pratique, l'appareil n'est pas constitué par un tube enroulé en hélice. On construit d'abord un noyau cylindrique sur lequel on trace une rainure hélicoïdale, qui définit soit un *hélicoïde développable*, soit un hélicoïde normal (surface de la vis à filets carrés). On conserve la portion de cette surface qui est comprise entre le noyau et un cylindre concentrique A (fig. 315) ; elle détermine, dans l'intérieur du cylindre, une sorte de canal qui remplace le tube de la théorie précédente.

364. Cas où les deux axes sont rectangulaires et à distance finie. — Roue et vis sans fin.

Pour réaliser la liaison de deux rotations non concourantes, dont les axes z et z' sont perpendiculaires et à distance finie, on emploie fréquemment le système *roue et vis sans fin*. Ce mécanisme est constitué de la façon suivante.

Supposons l'axe z dans le plan de la figure, et l'axe z' perpendiculaire à ce plan, sur lequel il se projette au point o' (fig. 316). Décrivons de o' comme centre, avec un rayon R' inférieur à la plus courte distance des axes, une circonférence S' , et menons-lui une tangente S parallèle à z . Regardons S et S' comme les lignes primitives d'un pignon et d'une crémaillère sans épaisseur, puis, la denture étant tracée par l'un quelconque des procédés étudiés au chapitre IV, servons-nous de la crémaillère pour engendrer une vis de pas H autour de l'axe z . Toutes les sections d'une vis par des plans méridiens pouvant être superposées les unes aux autres à la suite d'une rotation et d'une translation simultanées, la vis, en tournant autour de z avec une vitesse angulaire ω , agit sur le pignon comme l'auraient fait les positions successives de la crémaillère supposée menante, et lui imprime un mouvement de rotation continu de vitesse angulaire ω' .

Pour évaluer le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, observons que le déplacement du point I dans le sens de l'axe z est le même sur la vis et sur la roue, puisque l'action de la première sur la seconde produit le même effet que la crémaillère idéale considérée tout d'abord. En procédant comme au paragraphe 361 pour calculer le chemin parcouru par ce point sur la vis pendant un temps infiniment petit dt , on a l'égalité

$$\frac{\omega H dt}{2\pi} = \omega' R' dt$$

d'où l'on tire (1)

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{H}{2\pi R'}$$

Soit i l'angle que forment, avec l'axe z , les tangentes à l'hélice décrite par le point I de la vis. On sait que

$$H = 2\pi R \cotg i$$

Par conséquent

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R \cotg i}{R'}$$

Si l'on veut que ce rapport ait une valeur donnée k , il faut que R , R' et i satisfassent aux équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R \cotg i}{R'} = k \\ R + R' = d \end{array} \right.$$

d représentant la plus courte distance des axes. Le nombre des inconnues étant supérieur à celui des équations, le problème est indéterminé. Nous indiquerons plus loin

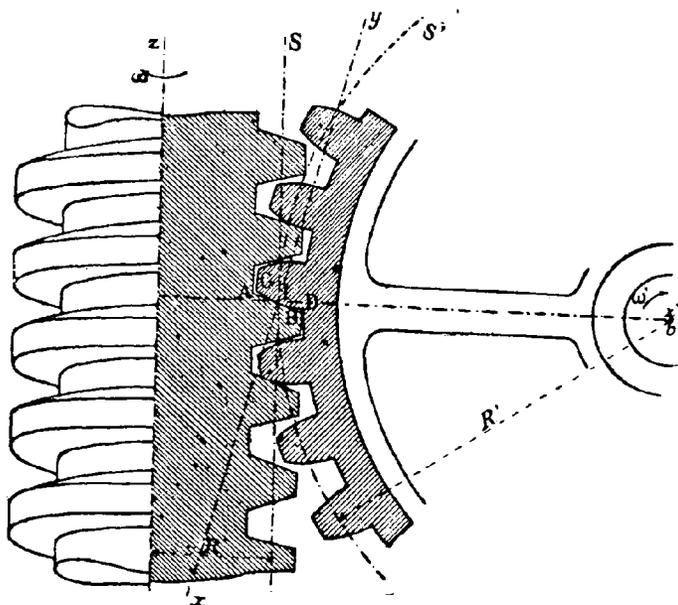


Fig. 316

(369) comment on procède dans les divers cas. Remarquons que, pour des valeurs fixes données à R et R' , le rapport des vitesses angulaires dépend de l'angle i ; des vis et des pignons de mêmes rayons ne se communiquent donc pas nécessairement le même mouvement. Il y a là une différence importante avec les engrenages cylindriques droits.

365. Théorème. — *Le rapport des vitesses angulaires d'une roue et d'une vis sans fin est égal au rapport inverse du nombre des filets de la vis par pas et du nombre de dents de la roue.*

Soient P' le pas apparent de la roue, n' le nombre de ses dents, et n le nombre des filets de la vis contenus dans un pas H . Un plein et un creux consécutifs de la vis correspondant à un pas de la roue, on a

$$H = n P'$$

D'autre part

$$2 \pi R' = n' P'$$

L'expression (1) du rapport des vitesses angulaires devient donc

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n P'}{n' P'} = \frac{n}{n'}$$

Si l'on assimile chaque filet de vis par pas à une dent, on peut dire aussi que :
Dans le mécanisme roue et vis sans fin, le rapport des vitesses angulaire est égal au rapport inverse des nombres de dents. Une relation analogue a déjà été établie pour les engrenages cylindriques et coniques.

366. Corollaire. — Si, comme c'est le cas le plus général, la vis n'a qu'un filet, on a

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{n'}$$

Chaque tour de vis fait alors avancer la roue d'une seule dent.

367. Nature des surfaces des filets de la vis et des dents de la roue.

La roue ne peut évidemment pas se réduire à un disque sans épaisseur, comme la théorie qui précède le suppose. Aussi faut-il incliner ses dents sur l'axe z' , afin que la pénétration des filets de vis dans les creux se fasse sans difficulté. Cette modification apportée à l'engrenage théorique ne doit rien changer à la manière dont la transmission s'effectue dans le plan conduit par l'axe de la vis perpendiculairement à celui de la roue, lequel renferme les profils sans épaisseur considérés tout d'abord. Il ne peut en être ainsi que si la surface des dents de la roue est convenablement déterminée par rapport à celle des filets de la vis.

Supposons, comme on le fait en général dans la pratique, que la section méridienne de la vis soit une crémaillère à développantes. Les surfaces des filets de vis sont alors des nappes d'hélicoïdes aigus, comprises entre les cylindres décrits autour de z par les lignes d'échauffinement et d'évidement de la crémaillère. La surface d'une dent de la roue doit être telle qu'elle ait constamment, avec la face hélicoïdale de la vis sur laquelle elle s'appuie, un plan tangent commun, au point où se toucheraient, au même instant, les profils du pignon et de la crémaillère sans épaisseur. Soit I ce point au moment où le contact des dents se trouve dans le plan mené par l'axe de la roue perpendiculairement à celui de la vis. Le plan tangent en I au filet de la vis est déterminé par la génératrice AB de l'hélicoïde et par la tangente IT à l'hélice de pas P qui passe par le point I (fig. 317). Pour que ce plan soit aussi tangent à la surface de la dent de la roue, il suffit que celle-ci contienne IT . On est amené ainsi à limiter la dent de la roue par une surface réglée, ayant pour directrice le profil CD de la dent, et pour génératrices les positions occupées par les tangentes aux diverses hélices engendrées par les points de AB , au moment où ceux-ci viennent se placer sur CD . Toutes ces hélices ont même pas ; mais comme, dans le système pignon et crémaillère à développantes, le lieu du point de contact des profils est un segment de la droite xy inclinée de 75° sur $z'I$, elles sont tracées sur des cylindres de rayons inégaux, et les angles que forment leurs tangentes avec l'axe z sont variables. Il résulte de là que la surface réglée qui limite une dent de la roue n'est pas un cylindre, puisque ses génératrices ne sont pas parallèles. Les sections des dents de la roue par une série de plans perpendiculaires à son axe ne sont donc pas identiques.

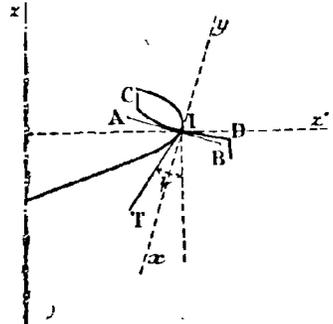


Fig. 317.

On peut se contenter d'une approximation, et admettre que les surfaces des dents de la roue sont engendrées par le profil CD , qui se déplacerait parallèlement au plan de la figure, en s'appuyant sur l'hélice que produit, par son enroulement sur le cylindre primitif S' , la tangente IT à l'hélice du point I . Dans cette hypothèse, toutes les

sections perpendiculaires à l'axe de la roue sont superposables, et, en particulier, la denture présente dans les plans de tête les mêmes profils que dans le plan de la figure.

On peut déterminer les sections droites des dents de la roue au point I en coupant la figure par un plan perpendiculaire à IT. Les constructions à effectuer sont exposées au paragraphe 375.

Nous avons pris comme exemple d'engrenage de roue et vis sans fin celui qui correspond au système pignon et crémaillère à développantes. Les surfaces des dents varient naturellement avec le tracé adopté ; on les déterminerait d'une manière analogue.

368. Condition de réciprocité de la vis sans fin.

En désignant par φ l'angle de frottement qui se rapporte aux matières de la vis et de la roue, et par i l'inclinaison des filets de la vis sur l'axe z , on démontre que :

1° Si $i \ll \varphi$, la roue conduit la vis sans réciprocité. L'angle φ étant toujours petit, le pas de la vis, dont l'expression est $H = 2\pi R \cotg i$, est très allongé, de sorte qu'elle est nécessairement à plusieurs filets. C'est ce qui se présente, par exemple, dans le régulateur à ailettes que l'on adjoint à l'appareil du général Morin pour uniformiser le mouvement de rotation du cylindre enregistreur (voir les Traités de physique) ;

2° Si $\varphi < i < \frac{\pi}{2} - \varphi$, la transmission est réciproque : c'est le cas le plus fréquent en pratique ;

3° Si $i \geq \frac{\pi}{2} - \varphi$, la vis conduit la roue sans réciprocité. On utilise cette propriété dans certains appareils élévateurs des fardeaux (palans à vis), dans la manœuvre des vannes, etc.. Le système peut être abandonné à lui-même dans une position quelconque, sans craindre de le voir prendre le mouvement inverse.

Toutefois, ces résultats, obtenus en assimilant la surface de la vis à un plan incliné, sur une étendue infiniment petite, ne sont qu'approchés, et les limites réelles entre lesquelles doit être compris l'angle i pour que la transmission soit réciproque sont plus resserrées que celles indiquées plus haut. En pratique, on ne s'écarte pas beaucoup, dans ces circonstances, de la valeur $i = 45^\circ$.

369. Calcul des éléments d'un engrenage roue et vis sans fin au module normal.

Formules à employer. — Il n'existe pas de différence essentielle entre les vis et les roues hélicoïdales. D'après leur définition géométrique (332-367), ces dernières ne sont, en effet, pas autre chose que des vis, dont le pas, très allongé, contient un assez grand nombre de filets, tandis que les vis proprement dites ont, au contraire, un pas plus court, et admettent peu de filets par pas. On peut donc déterminer les dimensions nécessaires à l'exécution mécanique d'un système pignon et vis sans fin par des formules analogues à celles qui ont été établies § 332, et appliquées § 335 bis. (Premier cas) pour le calcul des éléments d'une roue hélicoïdale isolée. Le nombre des filets de la vis par pas doit être considéré comme une donnée de la question ; la connaissance du rapport des vitesses angulaires entraîne celle du nombre de dents de la roue.

- Soient :
- n le nombre des filets de la vis par pas ;
 - i l'inclinaison des hélices primitives sur l'axe de la vis ;
 - m le module normal ;
 - D le diamètre primitif de la vis ;
 - D_1 son diamètre d'échanfrinement ;
 - h la hauteur des dents ;
 - n' le nombre de dents du pignon ;
 - $\frac{\pi}{2} - i$ l'inclinaison des dents du pignon sur son axe ;
 - D' le diamètre primitif du pignon ;

- D_1' son diamètre d'échanfrinement ;
- h la hauteur de ses dents ;
- n_1' le nombre des dents de la roue droite fictive servant au choix de la fraise pour le taillage du pignon ;
- d la distance des axes du pignon et de la vis ;

on a, par application des formules du § 332

$$\text{VIS} \left\{ \begin{array}{l} D = \frac{mn}{\cos i} \\ D_1 = D + 2m \\ h = \frac{13m}{6} \end{array} \right. \quad \text{PIGNON} \left\{ \begin{array}{l} D' = \frac{mn'}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right)} = \frac{mn'}{\sin i} \\ D_1' = D' + 2m \\ h = \frac{13m}{6} \\ n_1' = \frac{n'}{\cos^3\left(\frac{\pi}{2} - i\right)} = \frac{n'}{\sin^3 i} \end{array} \right.$$

$$d = \frac{D + D'}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{n}{\cos i} + \frac{n'}{\sin i} \right)$$

La vis devant être exécutée au tour, il est nécessaire de connaître en outre son pas H mesuré dans le sens de l'axe (397), soit

$$H = 2\pi R \cotg i = \pi D \cotg i = \frac{mn\pi}{\sin i}$$

L'inclinaison i des filets est choisie d'après les indications données au § 368.

Exemple I. — Calculer les éléments nécessaires à l'exécution d'un système roue et vis sans fin, au module normal $m = 5$, sachant :

- 1° Que la vis a 2 filets par pas ;
- 2° Qu'elle doit mener la roue sans réciprocité, avec un rapport de vitesses angulaires $1/50$;
- 3° Que le coefficient de frottement est 0,12, ce qui correspond à un angle de frottement $\varphi = 7^\circ$ environ.

Vis. — Inclinaison des filets. On doit avoir $i \geq \frac{\pi}{2} - \varphi$ ou $i \geq 83^\circ$.

On prendra $i = 85^\circ$, par exemple.

Diamètre primitif :

$$D = \frac{mn}{\cos i} = \frac{10}{\cos 85^\circ} = 117^m, m 44$$

Diamètre d'échanfrinement :

$$D_1 = D + 2m = 127^m, m 44$$

Hauteur des dents :

$$h = \frac{13m}{6} = 10^m, m 83$$

Pas suivant l'axe :

$$H = \frac{mn\pi}{\sin i} = \frac{10\pi}{\sin i} = 31 \text{ m/m } 54$$

(Voir, § 397, la marche à suivre pour déterminer l'équipage de roues dentées à employer dans l'exécution de la vis au tour).

ROUE. — *Inclinaison des dents sur l'axe :*

$$\frac{\pi}{2} - i = 5^\circ$$

Nombre de dents :

$$\frac{n}{n'} = \frac{1}{50} \quad \text{d'où} \quad n' = 50n = 100 \text{ dents}$$

Diamètre primitif :

$$D' = \frac{mn'}{\sin i} = \frac{500}{\sin 85^\circ} = 502 \text{ m/m } 91$$

Diamètre d'échanfrinement :

$$D_1 = D' + 2m = 512 \text{ m/m } 91$$

Hauteur des dents :

$$h = \frac{13m}{6} = 10 \text{ m/m } 83$$

Nombre de dents de la roue droite fictive :

$$n_1' = \frac{n'}{\sin^3 i} = \frac{100}{\sin^3 85^\circ} = 109 \text{ dents.}$$

Épaisseur de la jante : de 5 à 10 m., soit 25 à 50 m/m.

Distance des axes de la vis et de la roue :

$$d = \frac{D + D'}{2} = 310 \text{ m/m } 18$$

Exemple II. — *Calculer toutes les quantités nécessaires à l'exécution d'un système roue et vis sans fin, au module normal $m = 7$. La vis a quatre filets par pas, son diamètre extérieur $D_1 = 114 \text{ m/m}$. Le rapport des vitesses angulaires est égal à 1/30.*

Vis. *Diamètre primitif :* $D = D_1 - 2m = 100 \text{ m/m}$.

Hauteur des dents : $h = \frac{13m}{6} = 15 \text{ m/m } 17$

Inclinaison des filets. Pas suivant l'axe. Le pas est donné par la formule

$$H = \frac{mn\pi}{\sin i}$$

Pour calculer l'angle i , on se reporte à l'expression du diamètre primitif de vis, $D = \frac{mn}{\cos i}$, d'où l'on tire

$$\cos i = \frac{mn}{D} = \frac{28}{100} \quad i = 73^{\circ} 44' 23''$$

Cette valeur de i doit être déterminée avec beaucoup de précision, afin que l'erreur absolue de H soit aussi faible que possible. Il ne faut pas oublier, en effet, que l'exécution de la vis au tour oblige souvent à remplacer H par une valeur approchée ; l'erreur totale doit rester assez petite pour que le bon fonctionnement du mécanisme ne soit pas compromis.

On a maintenant
$$H = \frac{mn\pi}{\sin i} = \frac{28\pi}{\sin i} = 91 \text{ m/m } 63.$$

ROUE. — *Nombre de dents* : Puisque la vis a 4 filets, et que le rapport des vitesses angulaires est $\frac{1}{30}$, le nombre des dents du pignon est

$$n' = 4 \times 30 = 120 \text{ dents.}$$

Diamètre primitif :

$$D' = \frac{mn'}{\sin i} = \frac{840}{\sin 73^{\circ} 44'} = 875 \text{ m/m } 00$$

Diamètre d'échanfrinement :

$$D_1' = D' + 2m = 889 \text{ m/m } 00$$

Hauteur des dents :

$$h = \frac{13m}{6} = 15 \text{ m, m, } 17$$

Nombre de dents de la roue droite fictive :

$$n_1' = \frac{n'}{\sin^3 i} = 136 \text{ dents.}$$

Epaisseur de la jante : de 5 à 10 m., soit de 35 à 70 m/m.

Distance des axes de la vis et de la roue :

$$d = \frac{D + D'}{2} = 487 \text{ m/m } 59$$

370. Vis tangente.

Dans le mécanisme que l'on vient d'étudier, le contact d'un filet de la vis et d'une dent de la roue n'a lieu, à chaque instant, qu'en un seul point, situé dans le plan moyen de la roue, et qui serait précisément le point de contact de la crémaillère et du pignon infiniment minces que nous avons considérés. Pour éviter cet inconvénient, on

adopte souvent une autre disposition, dans laquelle la surface extérieure de la roue est creusée en forme de tore, de manière à embrasser la vis (fig. 318). Les dents de la roue sont alors limitées par les surfaces enveloppes de celles qui constituent les filets

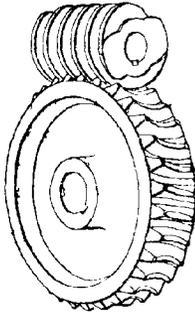


Fig. 318.

de la vis. Elles se raccordent donc à chaque instant suivant une ligne, qui est la caractéristique relative à la position correspondante du filet de vis. Grâce à l'intimité du contact qui résulte de cette modification, on peut transmettre des efforts plus considérables sans craindre une usure trop rapide. De plus, ces mécanismes étant construits sans jeu, chaque partie mobile est bloquée par l'autre; cette propriété est souvent utilisée en pratique, dans les diviseurs pour roues d'engrenage, par exemple.

Dans la vis sans fin ordinaire, où nous avons admis que les dents de la roue sont limitées par des surfaces cylindriques, toutes les sections faites dans la roue par des plans perpendiculaires à son axe sont identiques. Il n'en est plus de même dans la vis tangente. En effet, chacune de ces sections constitue, avec la section correspondante de la vis, un engrenage que l'on peut assimiler à un pignon et à une crémaillère infiniment minces. Les profils déterminés par un plan perpendiculaire à l'axe de la roue doivent donc être l'enveloppe l'un de l'autre dans le mouvement relatif des deux parties du système. Comme ceux de ces profils qui se rapportent à la vis varient avec la position du plan sécant, ceux qui se rapportent à la roue varient nécessairement aussi.

On calcule les dimensions d'exécution comme dans le cas ordinaire des vis sans fin. Toutefois, en raison de la forme particulière de la roue, son plus grand diamètre doit être mesuré sur la figure.

371. Vis à filets convergents, ou Vis globiques.

On construit aujourd'hui, surtout pour les machines destinées à l'élévation des fardeaux, des vis tangentes d'une nature particulière dont voici le principe.

Soit (fig. 319) un axe vertical (z, z') et, dans le plan de front F qui le contient, une circonférence (μ, μ') de centre, (z_1, z_1'). Un point mobile qui, partant de la position (a, a'), se déplacerait d'un mouvement uniforme sur cette circonférence, en même temps que le plan F tournerait autour de (z, z') d'un mouvement également uniforme, décrirait, sur le tore engendré par (μ, μ'), une courbe à laquelle on donne le nom d'hélice globique, à cause de l'analogie évidente de sa définition avec celle de l'hélice cylindrique. Le chemin $a' b' = H$, parcouru par le point mobile pendant que le plan F fait un tour complet, est appelé le pas de l'hélice globique.

D'après cette définition, si le plan F accomplit seulement une fraction de tour $\frac{m}{n}$ qui l'amène dans la position P , le point (a, a') parcourt une fraction correspondante du pas, $a' 4'' = \frac{m}{n} \times a' b'$. Il se trouve donc à l'intersection du plan P et du parallèle déterminé dans le tore par le plan horizontal du point $4''$, soit dans la position ($4, 4'$). On peut ainsi tracer très facilement les projections de l'hélice globique. Il suffit de marquer, par exemple, douze positions équidistantes du plan F , correspondant aux douzièmes de tours successifs, et de diviser le pas $a' b' = H$ en douze parties égales. Les parallèles décrits sur le tore par les points de division $1'' 2'' 3'' \dots$ rencontrent les positions correspondantes I, II, III... du plan F aux points ($1, 1'$), ($2, 2'$), ($3, 3'$)... qui appartiennent à l'hélice globique. On joint ces points par un trait continu. La fig. 319 représente une spire et demie d'une hélice globique à droite.

Supposons maintenant que l'on rattache au point (a, a') une figure quelconque $a' \beta' \gamma' \delta'$, tournant d'un mouvement uniforme autour du centre (z_1, z_1') de la circon-

férence (μ, μ'), de manière à faire parcourir au point (a, a') un pas de l'hélice globique pendant que le plan F accomplit une révolution complète autour de l'axe (z, z'). Cette figure engendre un filet de vis de pas II. En pratique, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ est une sorte de trapèze, dont les bases sont des arcs de cercle $\alpha'\delta', \beta'\gamma'$ concentriques à la circonférence (μ, μ'), et les deux autres côtés des droites $\alpha'\beta', \gamma'\delta'$ symétriques par rapport au rayon

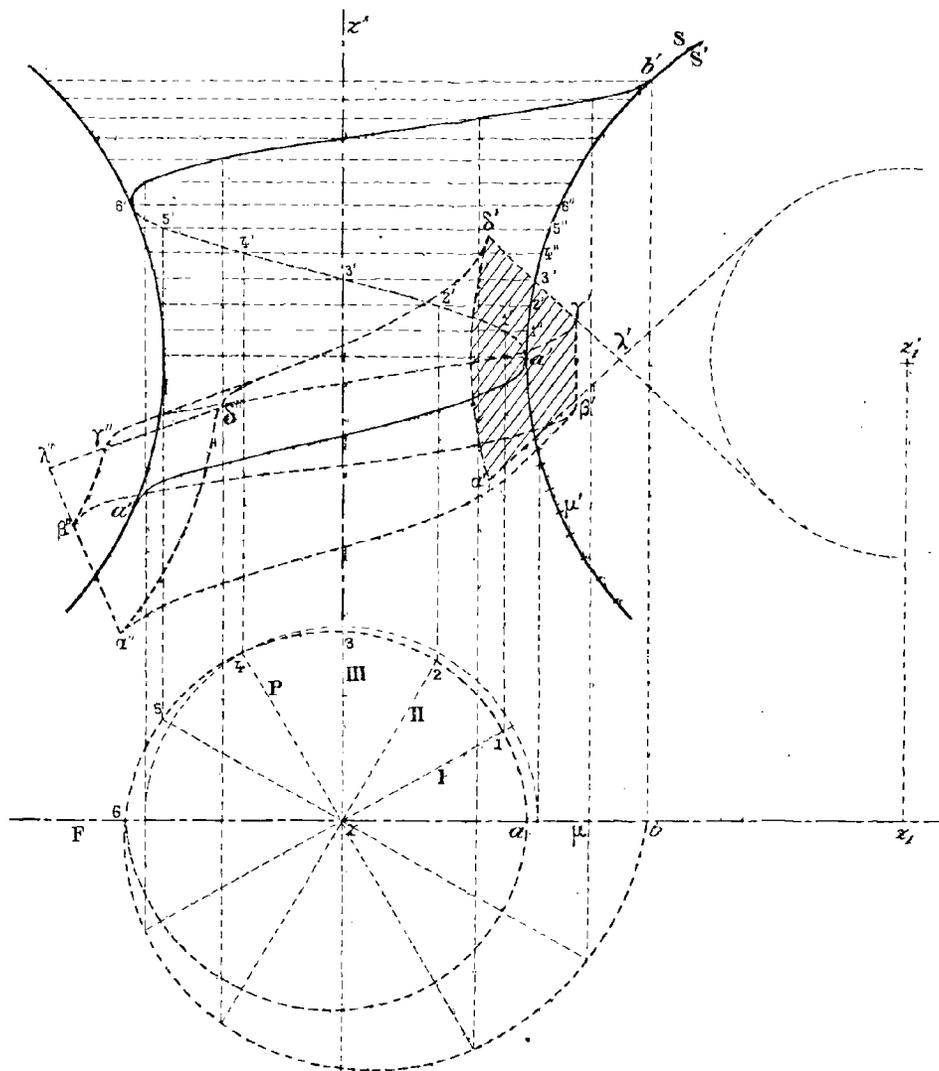


Fig. 319.

$z_1 a'$. Les quatre sommets décrivent des hélices globiques $\alpha'a'', \beta'\beta'', \gamma'\gamma'', \delta'\delta''$ sur deux tores de même axe que le premier ; $\alpha'a'', \delta'\delta''$ sont les arêtes rentrantes du filet de vis ; $\beta'\beta'', \gamma'\gamma''$ sont les arêtes saillantes. On pourrait placer plusieurs figures identiques à $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ dans l'étendue d'un pas de l'hélice, et les considérer comme formant avec la première un système indéformable. On obtiendrait ainsi une vis globique à filets multiples.

Imaginons que cette vis soit construite, et donnons-lui un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω , autour de son axe. Les sections méridiennes d'un filet, toutes identiques, viennent successivement se placer dans le plan F, où elles se comportent comme la figure $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ dans la définition précédente, c'est-à-dire qu'elles tournent d'un mouvement uniforme continu autour du centre (z_1, z'_1) de la circonférence (μ, μ') , en faisant parcourir au point (a, a') un pas de l'hélice globique pendant que la vis fait un tour. Soit ω' la vitesse angulaire de ce dernier mouvement. Pendant un temps infiniment petit dt , l'angle de rotation de la vis est ωdt , correspondant à un déplacement $ds = \frac{H\omega dt}{2\pi}$ du point (a, a') sur la circonférence (μ, μ') ; d'autre part, $ds = \omega'R'dt$, en appelant R' le rayon de cette circonférence. On a donc

$$\frac{H\omega dt}{2\pi} = \omega'R'dt$$

d'où l'on tire

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{H}{2\pi R'}$$

formule identique à celle que nous avons trouvée pour la vis sans fin ordinaire (364).

Il nous reste à indiquer comment on peut déduire de ces généralités un mécanisme capable d'assurer la liaison de deux rotations autour d'axes perpendiculaires, avec rapport constant des vitesses angulaires. Traçons dans le plan F (fig. 319 et 319 bis) deux roues d'engrenage intérieur infiniment minces, dont les circonférences primitives S et S' soient confondues avec la circonférence (μ, μ') de la théorie précédente. La circonférence S (roue creuse) et sa denture $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ définissant, comme ci-dessus, une vis globique de pas H autour de l'axe (z, z') , la rotation de cette vis amène successivement dans le plan F toutes les sections méridiennes, qui paraissent tourner autour de z'_1 , et agissent sur le pignon S' de l'engrenage intérieur comme le ferait la roue creuse S elle-même. Ce pignon étant invariablement lié à l'axe z'_1 , le mécanisme réalise un rapport de vitesses angulaires

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{H}{2\pi R'}$$

Soient : n le nombre de filets de la vis par pas H ;
 n' le nombre des dents du pignon ;
 P' son pas circonférentiel.

On a $H = n P'$ $2\pi R' = n' P'$

et par conséquent

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'}$$

Choix des profils. — Dans la figure 319 bis, les pleins $\alpha\beta\gamma\delta$ du pignon S' sont identiques aux creux de la roue intérieure fictive S qui engrène avec lui. Cette condition n'est pas indispensable : il suffirait, en effet, que le profil $\alpha\beta\gamma\delta$ soit tangent aux deux faces du creux dans lequel il pénètre. Mais, quand elle est remplie, les profils de la vis et du pignon dans le plan F se confondent théoriquement, ce qui permet d'employer l'appareil à la transmission d'efforts considérables.

La hauteur de la vis et les directions des droites $\alpha\beta, \gamma\delta$, qui limitent les dents de l'engrenage intérieur fictif, ne sont pas arbitraires. Ces éléments sont déterminés d'après le nombre des dents du pignon que l'on veut engager, soit quatre par exemple, correspondant à l'arc CD de la circonférence primitive (fig. 319 bis). Après avoir placé cet arc de telle manière que ses extrémités soient symétriques par rapport au plan

H' mené par l'axe du pignon perpendiculairement à celui de la vis, on trace CT et DU perpendiculaires à z' , puis l'on décrit, de z'_1 comme centre, une circonférence S'_1 tangente à ces deux droites. Par les points de division des circonférences SS' correspondant aux pleins et aux creux consécutifs, on mène enfin des tangentes $\gamma\delta, \alpha\beta, \gamma'\delta'$ à la circonférence S'_1 . Ces profils sont limités à des cercles d'échanfrinement et d'évidement laissant aux faces et aux flancs les longueurs habituelles $0,3P$ et $0,4P$.

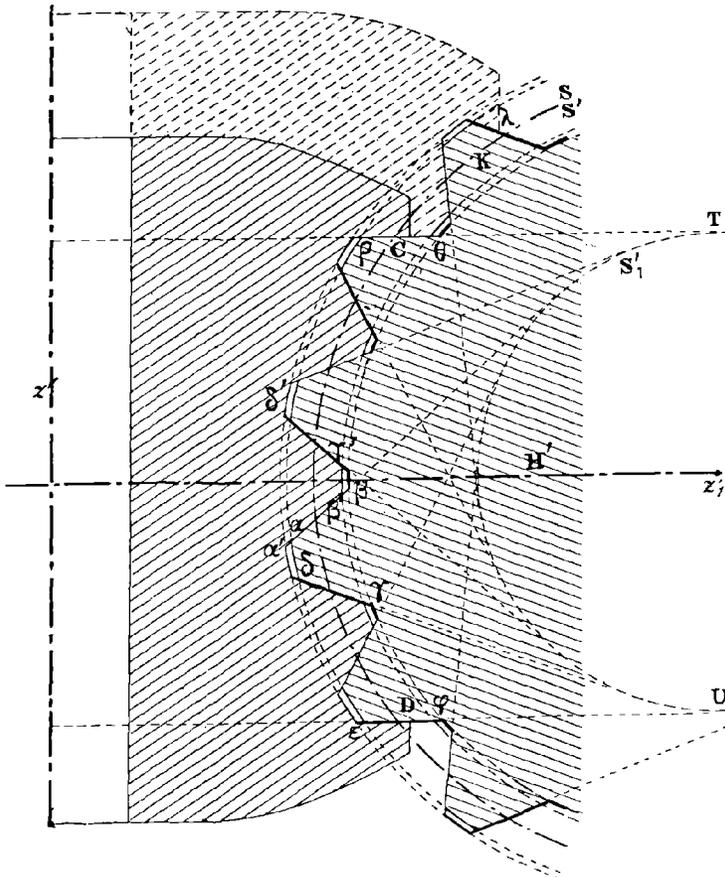


Fig. 319 bis.

La figure 319 bis montre que le montage est possible dans ces conditions, pourvu que l'on n'engage que quatre dents au plus (*). Le pignon étant en place, on fait glisser les profils CT et DU des filets de vis sur leurs homologues $\varphi\theta$ et $\varepsilon\varphi$ du pignon jusqu'à ce que les axes z' et z'_1 soient à la distance voulue.

On pourrait évidemment diminuer la hauteur de la vis pour n'engager que deux ou trois dents. Mais, si l'on augmentait cette hauteur pour engager une cinquième dent, K par exemple, l'arête λ de la vis empêcherait l'entrée de K dans le creux du filet correspondant, et le montage serait impossible.

(*) Le montage avec quatre dents engagées serait encore possible si l'on remplaçait S'_1 par une circonférence de plus grand rayon.

§ III. — Engrenages cylindriques hélicoïdaux
entre axes quelconques.

372. Les roues à dents hélicoïdales, dont l'engrenage de White constitue un cas particulier, peuvent être employées à la transmission de mouvement entre deux axes de rotation absolument quelconques. Pour étudier géométriquement ce nouveau mécanisme, prenons un plan vertical de projection parallèle aux axes (XX') , (YY') (fig. 320 et 321), et supposons l'un d'eux, XX' par exemple, parallèle à la ligne de terre. Leur perpendiculaire commune AB est une droite de bout, projetée en $(ab, a'b')$.

Soit I un point quelconque de AB . Les cylindres de révolution S et S' , décrits autour de (XX') , (YY') , avec des rayons respectivement égaux à $R = AI$ et $R' = BI$,

admettent en I un plan tangent commun F , qui est parallèle au plan vertical. Traçons dans ce plan une droite IZ , provisoirement arbitraire, et soient α et α' les angles, projetés verticalement en vraie grandeur, qu'elle forme avec les axes. Quand on enroule le plan F sur les deux cylindres, la droite IZ détermine des hélices, projetées en h, h' et tangentes en I ; si on les suppose matérialisées, elles pourraient transmettre un mouvement de rotation d'un cylindre à l'autre, avec un rapport de vitesses angulaires que nous allons évaluer.

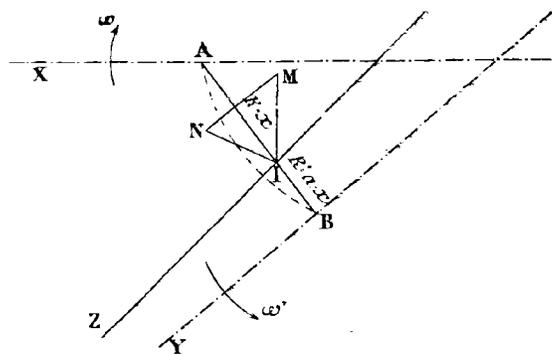


Fig. 320.

Pendant un temps infiniment petit dt succédant à l'époque où le système occupe la position figurée, le point I , considéré comme appartenant au cylindre S , décrit un élément de droite $IM = \omega R dt$, perpendiculaire au plan horizontal XAI , et dont la projection verticale $i'm'$, égale et parallèle à IM , est perpendiculaire à X' . Ce même point, considéré comme appartenant au cylindre S' , décrit un élément de droite $IN = \omega' R' dt$, perpendiculaire au plan de bout YBI , et dont la projection verticale $i'n'$, égale et parallèle à IN , est perpendiculaire à Y' . Le segment infiniment petit MN mesure la distance qui sépare, après le temps dt , deux points du système actuellement confondus; c'est donc l'arc élémentaire de glissement du point I . Comme deux courbes tangentes ne peuvent évidemment glisser l'une sur l'autre que suivant leur tangente commune, MN est parallèle à IZ ; ce parallélisme subsiste d'ailleurs en projection verticale. Si donc on fait tourner le triangle infinitésimal $i'm'n'$ d'un angle droit autour de son sommet i' , il prendra une nouvelle position $i'm'_1n'_1$, dans laquelle le côté $m'n'$ viendra se placer en $m'_1n'_1$, perpendiculairement à Z' , tandis que les deux autres se superposeront respectivement à $i'X'$, $i'Y'$. On aura donc

$$i'm'_1 \cos \alpha = i'n'_1 \cos \alpha'$$

ou

$$\omega R \cos \alpha dt = \omega' R' \cos \alpha' dt$$

d'où enfin

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R \cos \alpha}{R' \cos \alpha'} \quad (*)$$

(*) La même méthode est applicable à la recherche du rapport des vitesses dans le système roue et vis sans fin.

On voit que, contrairement à ce qui se passe dans les engrenages cylindriques entre axes parallèles, les vitesses angulaires ne sont pas inversement proportionnelles aux rayons des cylindres primitifs ; leur rapport dépend, en outre, de la direction attribuée

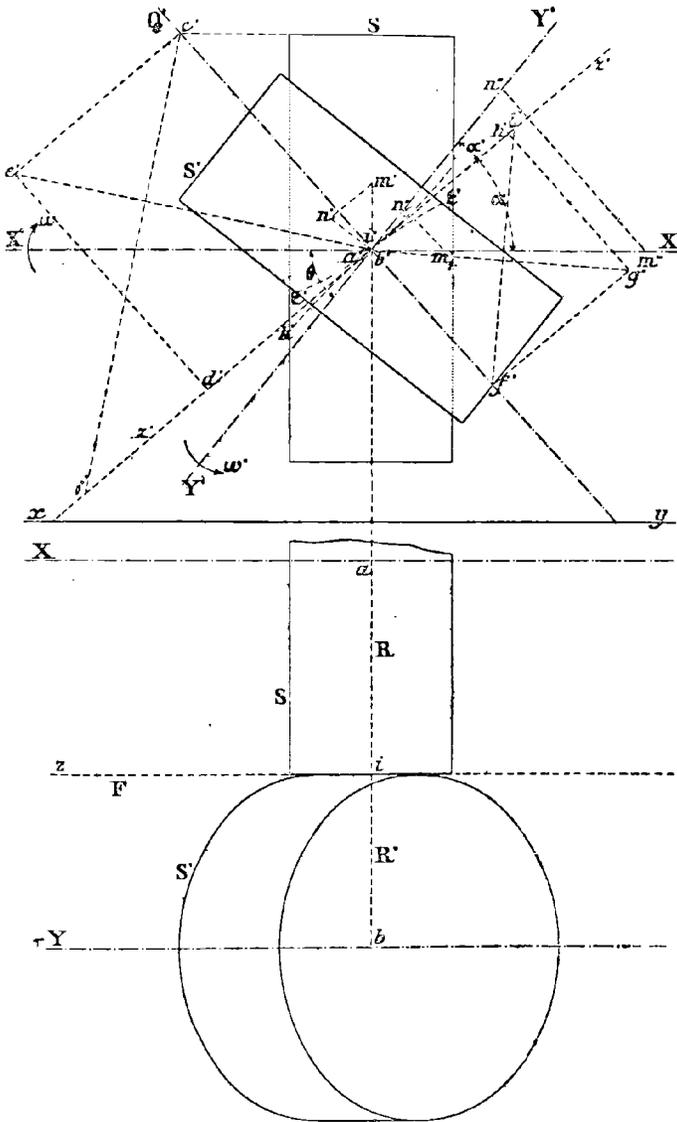


Fig. 321.

à (z, z') . On peut donc, sans changer les dimensions des cylindres primitifs, réaliser des engrenages hélicoïdaux assurant au rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ des valeurs diverses.

REMARQUES I. — Nous avons supposé que la projection verticale z' de la génératrice des hélices était intérieure à l'angle aigu $X'Y'$, formé par les projections ver-

ticales des axes. Les deux roues hélicoïdales S et S' ainsi définies sont à gauche, et les inclinaisons α, α' de leurs dentures sont liées à l'angle aigu θ des axes par la relation $\alpha + \alpha' = \theta$.

Sans rien changer au raisonnement qui précède, on peut modifier la direction de $i'z'$ et obtenir :

Une roue S à gauche et une roue S' à droite (fig. 322. II) correspondant à la re-

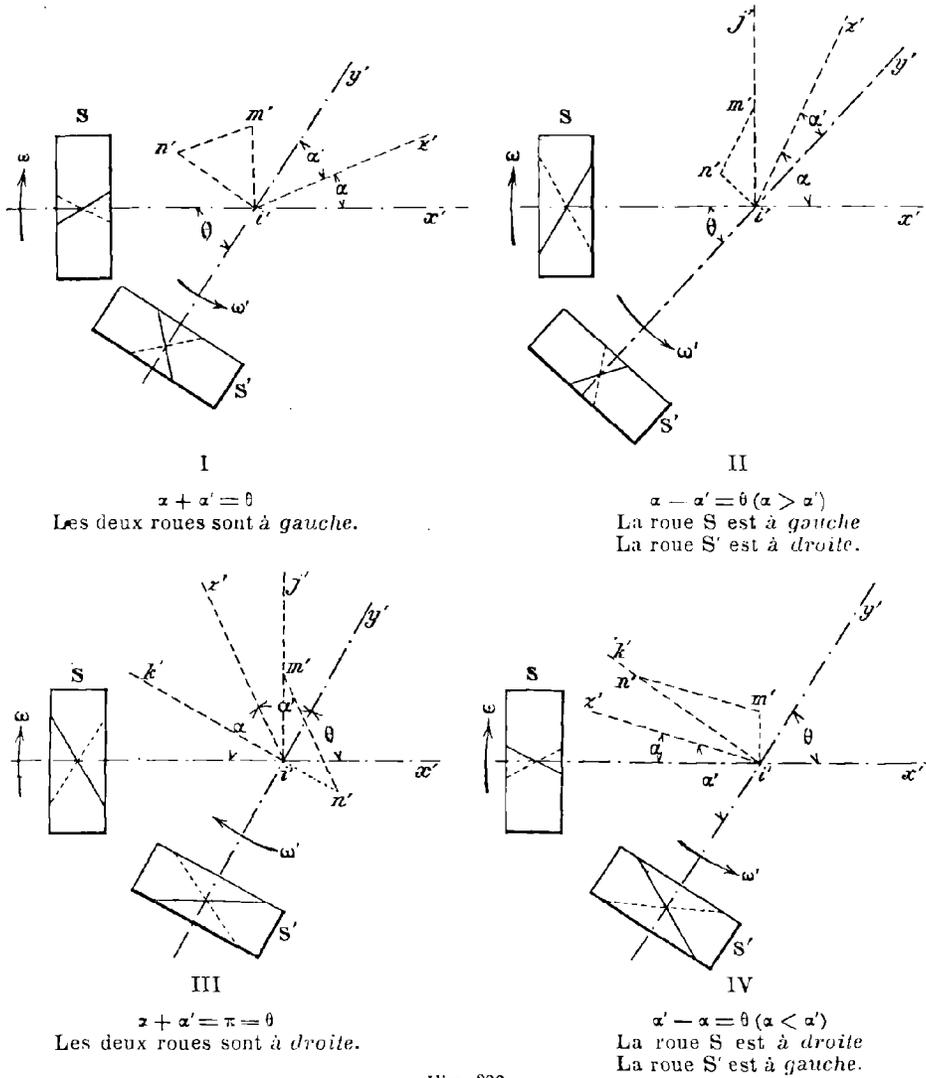


Fig. 322.

lation $\alpha - \alpha' = \theta$. La droite $i'z'$ est intérieure à l'angle aigu formé par l'axe y' avec la perpendiculaire $i'j'$ à l'axe x' .

Deux roues S et S' à droite (fig. 322. III) correspondant à la relation $\alpha + \alpha' = \pi - \theta$. La droite $i'z'$ est intérieure à l'angle aigu formé par les perpendiculaires $i'j', i'k'$ aux axes.

Une roue S à droite et une roue S' à gauche (fig. 322. IV) correspondant à la re-

lacion $\alpha' - \alpha = 0$. La droite $i'z'$ est intérieure à l'angle aigu formé par l'axe x' avec la perpendiculaire $i'k'$ à l'axe y' .

Dans ces diverses formules, θ désigne l'angle aigu des axes, et α, α' les angles aigus formés par les hélices directrices des dentures avec les axes des roues correspondantes.

Quand les axes sont rectangulaires, les roues S et S' sont toutes deux à gauche, ou toutes deux à droite (fig. 322 bis). Les inclinaisons des dentures sont complémentaires.

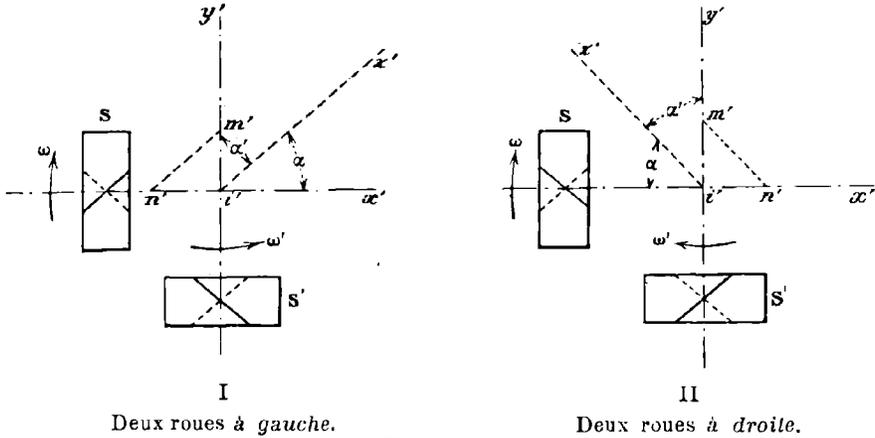


Fig. 322 bis.

II. Conditions de réciprocité. Nous avons déjà dit qu'il n'existe aucune différence géométrique entre les vis sans fin et les roues hélicoïdales proprement dites. Les conditions de réciprocité d'un système de deux roues hélicoïdales peuvent donc être déduites des indications données au paragraphe 368.

a) Les axes sont rectangulaires.

1° Si α est égal ou inférieur à l'angle de frottement φ , la roue S' conduit la roue S, sans réciprocité ;

2° Si α et α' sont compris entre l'angle de frottement et son complément, l'engrenage est réciproque ;

3° Si α est égal ou supérieur au complément de l'angle de frottement, la roue S conduit la roue S', sans réciprocité.

On peut résumer la 1^{re} et la 3^e parties de cet énoncé en disant que, si l'inclinaison des dentures est, sur l'une des roues, égale ou inférieure à l'angle de frottement, cette roue ne peut pas conduire l'autre, mais peut être conduite par elle.

b) Les axes sont quelconques.

Les résultats sont analogues aux précédents.

373. Théorème. — Le rapport des vitesses angulaires de deux roues hélicoïdales est égal au rapport inverse des nombres de dents dont elles sont armées.

Théoriquement, il suffirait, pour provoquer la transmission, d'établir sur la surface des cylindres primitifs de petites stries, dirigées suivant les hélices déterminées par la droite IZ dans l'enroulement du plan tangent. Mais comme il est indispensable de donner aux dents des dimensions suffisantes pour assurer leur solidité, on est conduit, de même que dans l'engrenage de White, à les considérer comme des filets de

vis, engendrés par des profils tracés sur les sections droites des cylindres primitifs, et se déplaçant d'une base à l'autre en s'appuyant sur les hélices précédentes (fig. 323).

Soient n et n' les nombres de dents des deux roues. Chaque plein correspondant à un creux, les nombres de dents qui passent au point I dans un temps donné sont égaux.

On a donc

$$Nn = N'n'$$

d'où

$$\frac{n}{n'} = \frac{N'}{N} = \frac{\omega'}{\omega}$$

C. Q. F. D.

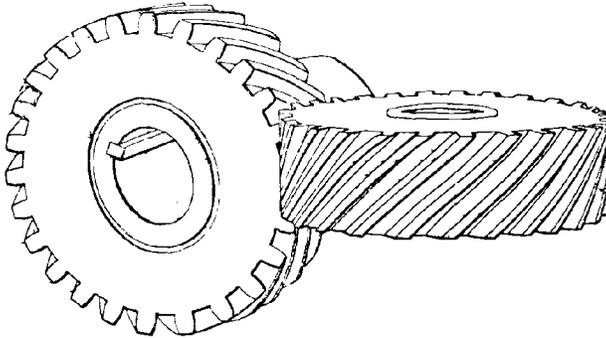


Fig. 323.

374. Relation entre les pas apparents des deux roues. — Pas normal. — Module normal.

Soient P et P' les pas apparents des deux dentures, mesurés sur les circonférences de base des cylindres primitifs. Il résulte de ce qui précède que

$$\frac{n}{n'} = \frac{R \cos \alpha}{R' \cos \alpha'}$$

ou, en multipliant les deux termes du second rapport par 2π

$$\frac{n}{n'} = \frac{2\pi R \cos \alpha}{2\pi R' \cos \alpha'} = \frac{nP \cos \alpha}{n'P' \cos \alpha'}$$

Par conséquent

$$P \cos \alpha = P' \cos \alpha'$$

Les pas apparents P et P' , ainsi que les modules apparents qui en dérivent, sont donc généralement inégaux, propriété qui distingue essentiellement les engrenages actuels des autres engrenages cylindriques. L'égalité des pas apparents n'a lieu que si l'on a

$$\cos \alpha = \cos \alpha'$$

Ce fait se produit, soit si $\alpha = \alpha'$, soit si $\alpha = 2\pi - \alpha'$. Dans le premier cas, l'inclinaison des filets sur les génératrices est la même pour les deux roues ; dans le second les axes sont parallèles, et le mécanisme est identique à l'engrenage de White étudié précédemment.

Chacune des roues de l'engrenage dont nous nous occupons ayant la même définition géométrique qu'une roue hélicoïdale de White, les relations établies aux §§ 332 et 333 sont applicables. Par conséquent :

1° L'égalité $P \cos \alpha = P' \cos \alpha'$ exprime que les pas normaux sont les mêmes sur les deux roues. Leur valeur commune est $p = P \cos \alpha = P' \cos \alpha'$. Les modules nor-

maux sont aussi les mêmes ; leur valeur commune est $m = M \cos \alpha = M' \cos \alpha'$, M et M' désignant les modules apparents correspondant aux pas P et P' .

2° Toutes les dimensions d'exécution sont rapportées au module normal. Aux raisons indiquées § 332 s'ajoute la suivante : puisque les modules apparents ne sont pas les mêmes pour les deux roues, des longueurs de faces et de flancs évaluées en fonction de ces modules ne seraient pas concordantes, et la pénétration des pleins dans les creux serait impossible.

375. Profils des dentures dans un plan normal aux hélices directrices. Détermination des roues droites fictives servant au choix des fraises.

Puisque les pas et les modules normaux sont identiques sur les deux roues, les profils des dents dans le plan Q' (fig. 324), normal aux hélices directrices, sont ceux d'un engrenage elliptique, dont les lignes primitives seraient les ellipses E, E' , intersections des cylindres S, S' et du plan Q' . Par analogie avec ce que nous avons démontré au paragraphe 333 :

Les profils normaux de chaque roue d'engrenage hélicoïdal sont les mêmes que ceux d'une roue cylindrique ordinaire, ayant pour module le module normal, et pour circonférence primitive le cercle de courbure, à l'extrémité du petit axe, de l'ellipse déterminée dans le cylindre primitif correspondant par un plan normal à l'hélice directrice de la denture.

Les nombres de dents des roues droites fictives servant au choix des fraises sont respectivement

$$n_1 = \frac{n}{\cos^3 \alpha}$$

$$n'_1 = \frac{n'}{\cos^3 \alpha'}$$

On peut d'ailleurs déduire de l'épure les profils des fraises nécessaires. Il suffit de construire les rayons de courbure $\gamma' i', \delta' i'$ des ellipses EE' au point (i, i') (fig. 321), et de tracer, au module m , des dentures sur les circonférences s et s' de rayons $\gamma' i', \delta' i'$. (fig. 324).

376. Remarque. — Ce tracé, consacré par la pratique, n'est pas exact au point de vue théorique. Il suppose, en effet, que les ellipses E, E' roulent sans glisser l'une sur l'autre. Or, il n'en est pas ainsi en réalité, car le mouvement relatif du cylindre S par rapport à son conjugué résulte de la composition de sa rotation absolue ω autour de l'axe X , avec une rotation égale et contraire à ω' , s'effectuant autour de l'axe Y . Il revient donc, à chaque instant, à une rotation et à une translation simultanées. La translation, qui produit le glissement des hélices engendrées par IZ , est nécessairement parallèle à cette droite (on peut s'en assurer en composant les deux rotations ω et $-\omega'$) ; elle déplace donc le cylindre S et l'ellipse E dans une direction perpendiculaire au plan Q' , et empêche le roulement de cette courbe sur E' , qui reste fixe dans le plan Q' . D'ailleurs, si le roulement sans glissement avait lieu, le rapport

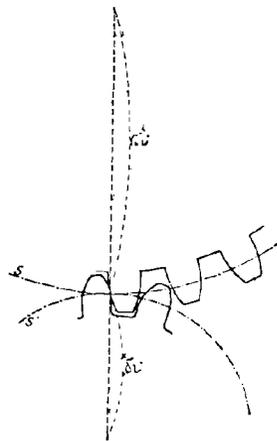


Fig. 324.

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R \cos \alpha}{R' \cos \alpha'}$$

serait égal à $\frac{\gamma' i'}{\delta' i'}$. Or, on a

$$\gamma' i' = \frac{R}{\cos^2 \alpha}$$

$$\delta' i' = \frac{R'}{\cos^2 \alpha'}$$

et par conséquent

$$\frac{\gamma' i'}{\delta' i'} = \frac{R \cos^2 \alpha'}{R' \cos^2 \alpha}$$

valeur généralement différente de

$$\frac{R \cos \alpha}{R' \cos \alpha'}$$

377. Calcul des éléments d'un système de roues hélicoïdales, dont le module normal, les nombres et les inclinaisons des dents sont connus.

Nous nous bornerons à indiquer les formules à employer, analogues à celles des nos 332, 335 bis, et 369.

Données	{	Module normal : m Nombres de dents : n, n' Sens des hélices { à droite sur S à gauche sur S' Inclinaisons : α, α'	Inconnues	{	Diamètres primitifs : D, D' Diamètres d'échanfrinement : D_1, D'_1 Angle des axes : θ Plus courte distance des axes : d Hauteur des dents : h Nombres de dents des roues droites fictives : n_1, n'_1 Épaisseur des jantes Épaisseur des couronnes.
---------	---	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------	---	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Diamètres primitifs :

$$D = \frac{mn}{\cos \alpha} \quad D' = \frac{mn'}{\cos \alpha'} \quad (1)$$

Diamètres d'échanfrinement :

$$D_1 = D + 2m \quad D'_1 = D' + 2m \quad (2)$$

Angle des axes. D'après les données, la disposition des roues est celle de la figure 322-IV.

Par conséquent $\theta = \alpha' - \alpha$ ($\alpha' > \alpha$)

On devra, dans chaque cas particulier, se reporter au tableau des figures 322.

Plus courte distance des axes :

$$d = \frac{D + D'}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{n}{\cos \alpha} + \frac{n'}{\cos \alpha'} \right) \quad (3)$$

Hauteur des dents : $h = \frac{13m}{6}$

Nombres des dents des roues droites fictives :

$$n_1 = \frac{n}{\cos^3 \alpha} \quad n'_1 = \frac{n'}{\cos^3 \alpha'} \quad (4)$$

Épaisseur des jantes : de 5 m à 10 m ,

Épaisseur des couronnes : de 1.8 m à 2 m .

Cas où les axes sont rectangulaires. Les angles α et α' étant alors complémentaires, on remplace $\cos \alpha'$ par $\sin \alpha$ dans les formules (1) (2) (3) et (4).

377 bis. Calcul des éléments d'un système de roues hélicoïdales, destinées à réaliser un rapport de vitesses angulaires déterminé.

Nous supposons connu le module normal m , qui est choisi dans la série conventionnelle d'après l'effort à transmettre. Soient, en outre, N et N' les nombres de tours que doivent effectuer les deux arbres dans le même temps, d leur plus courte distance, et θ l'angle aigu qu'ils forment.

Les rayons primitifs R, R' , et les inclinaisons α, α' des hélices sont inconnus. Or, ces quatre quantités sont liées seulement par trois équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\omega'}{\omega} - \right) \frac{R \cos \alpha}{R' \cos \alpha'} = \frac{N'}{N} \\ R + R' = d \\ \alpha + \alpha' = \theta \quad (*) \end{array} \right.$$

Théoriquement, il existe donc une infinité de groupes de deux roues hélicoïdales capables de réaliser, entre deux axes donnés, un rapport de vitesses angulaires déterminé.

Pour lever l'indétermination, on procède, en pratique, de deux façons différentes.

a) *On se donne les inclinaisons exactes des hélices.* En raison de la correction que nécessite tout calcul d'engrenage au module, la distance des axes ne pourra être donnée, au début de la question, que d'une manière approximative.

b) *On se donne la distance exacte des axes; les inclinaisons des hélices ne sont connues, au début du problème, que d'une façon approximative.*

Voici des exemples de ces deux genres de calculs.

Premier cas. — *Calculer les éléments de deux roues hélicoïdales, connaissant le rapport des vitesses, les inclinaisons exactes des hélices, et la distance approximative des axes.*

Données	Module normal : m Rapport des vitesses : $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N'}{N}$ Inclinaisons exactes des hélices : α, α' Angle des axes : θ Distance approximative des axes : d_{app}	Inconnues	Nombres de dents : n, n' Distance exacte des axes : d_{ex} Diamètres primitifs : D, D' Diamètres d'échanfrinement : D_1, D'_1 Nombres des dents des roues droites fictives : n_1, n'_1 Hauteur des dents : h Épaisseurs des jantes et des couronnes.
---------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Nombres de dents. Soit $\frac{N_1}{N}$ la fraction irréductible équivalente à $\frac{N'}{N}$. D'après la relation

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N'}{N} = \frac{N_1}{N} = \frac{n}{n'}$$

n et n' sont des équimultiples de N_1 et de N_1 . On a donc, λ désignant un nombre entier à déterminer.

$$\left\{ \begin{array}{l} n = \lambda N_1 \\ n' = \lambda N_1 \end{array} \right. \quad (5)$$

(*) Cette équation suppose que les roues auront la disposition (I) de la figure 322. Elle devra donc être remplacée, suivant les cas, par celle qui correspond à l'une des dispositions (II) (III) (IV).

En remplaçant les quantités connues par leurs valeurs dans la formule (3) (§ 377) donnant la distance des axes, il vient

$$d_{app} = \frac{m \lambda}{2} \left(\frac{N'_1}{\cos \alpha} + \frac{N_1}{\cos \alpha'} \right) \quad (6)$$

d'où

$$\lambda = \frac{2 d_{app}}{m \left(\frac{N'_1}{\cos \alpha} + \frac{N_1}{\cos \alpha'} \right)} \quad (7)$$

Si le quotient n'est pas un nombre entier, on attribue à λ la valeur entière la plus voisine du quotient exact. Les formules (5) font alors connaître n et n' . Mais comme, en raison de la modification apportée à λ , l'équation (6) ne serait pas vérifiée, il est nécessaire de corriger la distance des axes.

Distance exacte des axes. Elle est donnée par la formule (3) (§ 377).

$$d = \frac{m}{2} \left(\frac{n}{\cos \alpha} + \frac{n'}{\cos \alpha'} \right)$$

Diamètres primitifs, d'échafonnement, etc... Les formules ont été données paragraphe 377.

Applications numériques I. — Calculer, au module normal $m = 4$, les dimensions d'un engrenage hélicoïdal assurant un rapport de vitesses $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{3}{5}$ entre deux axes qui font un angle de 60° , et dont la distance approximative est 300 m/m . La menante (dont la vitesse angulaire est ω) est une roue à droite; ses dents font avec l'axe correspondant un angle $\alpha = 45^\circ$.

Inclinaison des dents sur la menée. L'engrenage doit nécessairement présenter l'une des dispositions III ou IV de la figure 322. La disposition IV donnerait

$$\alpha' = \alpha + \theta = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ, \text{ ce qui est impossible.}$$

Avec la disposition III, $\alpha' = \pi - (\theta + \alpha) = 75^\circ$. L'engrenage se composera donc de deux roues à droite.

Nombres de dents. De la relation $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'} = \frac{3}{5}$, on tire $\begin{cases} n = 3\lambda \\ n' = 5\lambda \end{cases}$

En remplaçant dans la formule (7) les quantités connues par leurs valeurs ($d = 300 \text{ m/m}$; $m = 4$; $\cos \alpha = \cos 45^\circ = 0,707$; $\cos \alpha' = \cos 75^\circ = 0,259$; $N_1 = 5$; $N'_1 = 3$), il vient

$$\lambda = \frac{150}{3 \frac{5}{0,707} + \frac{5}{0,259}} = 6,37 \quad (\text{Emploi de la règle à calcul}).$$

On prendra donc $\lambda = 6$; par suite

$$n = 3 \times \lambda = 18 \text{ dents}$$

$$n' = 5 \times \lambda = 30 \text{ dents}$$

Distance exacte des axes.

$$\begin{aligned} d_{ex} &= \frac{m}{2} \left(\frac{n}{\cos \alpha} + \frac{n'}{\cos \alpha'} \right) = \frac{36}{\cos 45^\circ} + \frac{60}{\cos 75^\circ} \\ &= 282 \text{ m/m } 73 \quad (\text{Emploi des logarithmes}) \end{aligned}$$

Diamètres primitifs :

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{mn}{\cos \alpha} = \frac{72}{\cos 45^\circ} = 101 \text{ m/m } 82 \\ D' = \frac{mn'}{\cos \alpha'} = \frac{120}{\cos 75^\circ} = 463 \text{ m/m } 64 \end{array} \right. \quad (\text{Emploi des logarithmes})$$

Diamètres d'échanfrinement :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = D + 2m = 109 \text{ m/m } 82 \\ D'_1 = D' + 2m = 471 \text{ m/m } 64 \end{array} \right.$$

Nombres de dents des roues droites fictives :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 = \frac{n}{\cos^3 \alpha} = \frac{18}{\cos^3 45^\circ} = 51 \text{ dents} \\ n'_1 = \frac{n'}{\cos^3 \alpha'} = \frac{30}{\cos^3 75^\circ} = 1730 \text{ dents} \end{array} \right. \quad (\text{Emploi des logarithmes})$$

La valeur considérable de n'_1 indique qu'on devra employer, pour tailler la roue de 30 dents, la fraise servant à tailler les roues droites de 135 dents jusqu'à la crémaillère (paragraphe 318. Tableau II).

Hauteur des dents : $h = \frac{13m}{6} = \frac{26 \text{ m/m}}{3} = 8 \text{ m/m } 67$

Épaisseur des jantes : de 20 à 40 m/m.

Épaisseur des couronnes : de 7 à 8 m/m.

II. — Deux axes rectangulaires sont reliés par des roues hélicoïdales au module 3 ; le rapport des nombres de dents est 3/5 ($\frac{n}{n'} = \frac{3}{5}$). La distance approximative des axes est 250 m/m ; l'inclinaison des hélices sur la première roue (n dents) est $\alpha = 35^\circ$ (Dispositions I et II fig. 322 bis).

L'inclinaison des dents sur la deuxième roue est $\alpha' = 90^\circ - \alpha = 55^\circ$.

Nombres de dents. Ce sont des équimultiples de 3 et de 5.

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 3 \lambda \\ n' = 5 \lambda \end{array} \right.$$

L'expression de la distance des axes, qui est dans ce cas $d = \frac{m}{2} \left(\frac{n}{\cos \alpha} + \frac{n'}{\sin \alpha} \right)$ donne, en remplaçant les quantités par leurs valeurs :

$$250 = \frac{3\lambda}{2} \left(\frac{3}{\cos 35^\circ} + \frac{5}{\sin 35^\circ} \right) = \frac{3\lambda}{2} \left(\frac{3}{0.819} + \frac{5}{0.574} \right)$$

On a donc

$$\lambda = \frac{500}{3 \left(\frac{3}{0.819} + \frac{5}{0.574} \right)} = 13.47 \quad (\text{Emploi de la règle à calcul}).$$

En prenant $\lambda = 13$, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 3 \times 13 = 39 \text{ dents} \\ n' = 5 \times 13 = 65 \text{ dents} \end{array} \right.$$

Distance exacte des axes.

$$d_{ex} = \frac{3}{2} \left(\frac{39}{\cos 35^\circ} + \frac{65}{\sin 35^\circ} \right)$$

$$= \frac{117}{2 \cos 35^\circ} + \frac{195}{2 \sin 35^\circ} = 241^m/m 40 \text{ (Emploi des logarithmes).}$$

Diamètres primitifs.

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{mn}{\cos \alpha} = \frac{117}{\cos 35^\circ} = 142^m/m 83 \\ D' = \frac{mn'}{\sin \alpha} = \frac{195}{\sin 35^\circ} = 339^m/m 97 \end{array} \right. \text{ (Emploi des logarithmes).}$$

Diamètres d'échanfrinement.

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = D + 2m = 148^m/m 83 \\ D'_1 = D' + 2m = 345^m/m 97 \end{array} \right.$$

Nombres de dents des roues droites fictives.

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 = \frac{n}{\cos^3 \alpha} = \frac{39}{\cos^3 35^\circ} = 71 \text{ dents} \\ n'_1 = \frac{n'}{\sin^3 \alpha} = \frac{65}{\sin^3 35^\circ} = 345 \text{ dents.} \end{array} \right. \text{ (Emploi des logarithmes).}$$

Hauteur des dents $h = \frac{13m}{6} = 6^m/m 50$

Épaisseur des jantes de 15 à 30^m/m.

Épaisseur des couronnes 6^m/m.

REMARQUE. — Ces résultats conviennent indifféremment à des roues à gauche ou à des roues à droite, les formules étant les mêmes dans les deux cas.

Deuxième cas. — Calculer les éléments de deux roues hélicoïdales, connaissant le rapport des vitesses, les inclinaisons approximatives des hélices, et la distance exacte des axes.

Données	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Module normal : } m \\ \text{Rapport des vitesses : } \frac{\omega'}{\omega} = \frac{N'}{N} \\ \text{Angle des axes : } \theta \\ \text{Inclinaisons approximatives} \\ \text{des hélices : } \alpha_{app}, \alpha'_{app}. \\ \text{Distance exacte des axes : } d_{ex}. \end{array} \right.$	Inconnues	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nombres de dents : } n, n' \\ \text{Inclinaisons exactes des hélices : } \alpha_{ex}, \alpha'_{ex}. \\ \text{Diamètres primitifs : } D, D' \\ \text{Diamètres d'échanfrinement : } D_1, D'_1 \\ \text{Nombres de dents des roues} \\ \text{droites fictives : } n_1, n'_1 \\ \text{Hauteur des dents : } h \\ \text{Épaisseurs des jantes et des} \\ \text{couronnes.} \end{array} \right.$
---------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

On procède comme dans le premier cas pour calculer les nombres de dents. En appelant $\frac{N'_1}{N_1}$ la fraction irréductible équivalente à $\frac{N'}{N}$, on a

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N'}{N} = \frac{N'_1}{N_1} = \frac{n}{n'}$$

d'où il suit que n et n' sont respectivement des équimultiples de N'_1 et de N_1

$$\begin{cases} n = \lambda N'_1 \\ n' = \lambda N_1 \end{cases}$$

Pour déterminer le nombre entier λ , on emploie encore la formule (3) (§ 377)

$$d = \frac{m}{2} \left(\frac{n}{\cos \alpha} + \frac{n'}{\cos \alpha'} \right) - \frac{m \lambda}{2} \left(\frac{N'_1}{\cos \alpha} + \frac{N_1}{\cos \alpha'} \right) \quad (8)$$

D'où

$$\lambda = \frac{2d}{m \left(\frac{N'_1}{\cos \alpha} + \frac{N_1}{\cos \alpha'} \right)} \quad (9)$$

On attribue à λ la valeur entière la plus voisine du quotient exact, ce qui fait connaître n et n' . Mais comme l'équation (8) ne serait pas satisfaite, il faut modifier un peu les angles α et α' . Ceux-ci étant liés à l'angle θ des axes par l'une des relations indiquées § 372 et fig. 322, le problème revient à résoudre, par rapport à α et α' , l'un des systèmes d'équations

$$\begin{cases} d = \frac{m}{2} \left(\frac{n}{\cos \alpha} + \frac{n'}{\cos \alpha'} \right) & \text{Disposition (I) fig. 322} \\ \alpha + \alpha' = \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = \frac{m}{2} \left(\frac{n}{\cos \alpha} + \frac{n'}{\cos \alpha'} \right) & \text{Disposition (II) id.} \\ \alpha - \alpha' = \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = \frac{m}{2} \left(\frac{n}{\cos \alpha} + \frac{n'}{\cos \alpha'} \right) & \text{Disposition (III) id.} \\ \alpha + \alpha' = \pi - \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = \frac{m}{2} \left(\frac{n}{\cos \alpha} + \frac{n'}{\cos \alpha'} \right) & \text{Disposition (IV) id.} \\ \alpha' - \alpha = \theta \end{cases}$$

La résolution directe étant très compliquée, on emploie la méthode des approximations successives. Nous allons exposer la marche à suivre sur deux exemples numériques.

EXEMPLE I. — Calculer les éléments de deux roues hélicoïdales connaissant : l'angle des axes : $\theta = 90^\circ$.

Leur distance exacte : $d_{ex} = 180^m/m$.

Les inclinaisons approximatives des hélices :

$$\alpha_{app} = 35^\circ \quad \alpha'_{app} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ.$$

Le rapport des vitesses angulaires : $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{3}{5}$

Le module normal : $m = 5$. (Disposition II, fig. 322 bis).

Nombres de dents : — On a, d'après l'équation (9) ci-dessus

$$\lambda = \frac{2 \times 180}{5 \left(\frac{3}{\cos 35^\circ} + \frac{5}{\sin 35^\circ} \right)} = \frac{72}{0,819 + \frac{5}{0,574}} = 5,82 \left(\begin{array}{l} \text{Emploi de la règle} \\ \text{à calcul.} \end{array} \right)$$

En donnant à λ la valeur la plus rapprochée du quotient exact, soit 6, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 3 \lambda = 18 \text{ dents} \\ n' = 5 \lambda = 30 \text{ dents} \end{array} \right.$$

Inclinaisons exactes des hélices. — L'expression de la distance des axes est, en fonction des nombres de dents ci-dessus

$$180 = \frac{5}{2} \left(\frac{18}{\cos \alpha} + \frac{30}{\sin \alpha} \right) = \frac{45}{\cos \alpha} + \frac{75}{\sin \alpha}$$

La valeur exacte de l'angle α est une solution de cette équation. Considérons le second membre comme une fonction z de α

$$z = \frac{45}{\cos \alpha} + \frac{75}{\sin \alpha}$$

et substituons à α une série de valeurs successives, en commençant par $\alpha_{app} = 35^\circ$, jusqu'à ce que nous trouvions deux valeurs de z comprenant entre elles le nombre 180, distance exacte des axes.

$$\begin{array}{ll} \text{Pour } \alpha = 35^\circ & z = \frac{45}{\cos 35^\circ} + \frac{75}{\sin 35^\circ} = 54,935 + 130,76 = 185,69 \\ \text{Pour } \alpha = 36^\circ & z = \frac{45}{\cos 36^\circ} + \frac{75}{\sin 36^\circ} = 55,623 + 127,60 = 183,22 \\ \text{Pour } \alpha = 37^\circ & z = \frac{45}{\cos 37^\circ} + \frac{75}{\sin 37^\circ} = 56,346 + 124,63 = 180,98 \\ \text{Pour } \alpha = 37^\circ 30' & z = \phantom{\frac{45}{\cos 37^\circ} + \frac{75}{\sin 37^\circ}} = 56,721 + 123,20 = 179,92 \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Emploi des} \\ \text{logarithmes} \end{array} \right)$$

Les deux dernières substitutions montrent que la valeur exacte de α est comprise entre 37° et $37^\circ 30'$, soit $37^\circ \alpha'$. Pour calculer α' , admettons que, quand α varie entre 37° et $37^\circ 30'$, la variation de z soit proportionnelle à celle de α . Nous aurons, dans cette hypothèse,

$$\frac{37^\circ \alpha' - 37^\circ}{180,98 - 180} = \frac{37^\circ 30' - 37^\circ}{180,98 - 179,92}$$

$$\text{ou} \quad \frac{\alpha'}{0,98} = \frac{30}{1,06}$$

$$\text{et, par conséquent} \quad \alpha' = \frac{30 \times 0,98}{1,06} = 28 \text{ minutes par excès.}$$

Mais comme, en réalité, les variations de z et celles de α ne sont pas proportionnelles, la valeur $\alpha = 37^\circ 28'$, déduite du calcul précédent, peut ne pas être suffisam-

ment approchée. Il faut s'en assurer en calculant la valeur correspondante de z . On trouve

$$z = \frac{45}{\cos 37^{\circ}28'} + \frac{75}{\sin 37^{\circ}28'} = 56,695 + 123,30 = 179,995$$

soit, à très peu près, 180^m/m. L'approximation obtenue est donc suffisante, et les inclinaisons exactes des dentures sont :

$$\begin{cases} \alpha = 37^{\circ}28' \\ \alpha' = 52^{\circ}32' \end{cases}$$

Si, pour $\alpha = 37^{\circ}28'$, la valeur de z différait sensiblement de 180, il faudrait, de nouveau, remplacer α par une série de valeurs successives, en partant cette fois de $37^{\circ}28'$, jusqu'à ce qu'on obtienne deux valeurs de z comprenant 180, et effectuer une nouvelle interpolation analogue à la précédente.

Diamètres primitifs, diamètres d'échanfrinement, etc... — On procède comme dans l'application numérique II traitée plus haut.

EXEMPLE II. — Calculer les éléments de deux roues hélicoïdales, l'une à gauche, l'autre à droite, connaissant :

L'angle des axes : $\theta = 60^{\circ}$.

Leur distance exacte : $d_{ex} = 200^m/m$.

Les inclinaisons approximatives des hélices :

$$\begin{cases} \alpha = 70^{\circ} \text{ (à gauche)} \\ \alpha' = 10^{\circ} \text{ (à droite)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(Disposition II, fig. 322)} \\ \alpha - \alpha' = \theta \end{array}$$

Le rapport des vitesses angulaires : $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{2}{7}$.

Le module normal : $m = 3$.

Nombres de dents :

$$\text{On a } \frac{n}{n'} = \frac{2}{7} \quad \text{d'où } \begin{cases} n = 2\lambda \\ n' = 7\lambda \end{cases}$$

D'après l'équation (9)

$$\lambda = \frac{400}{3 \left(\frac{2}{\cos 70^{\circ}} + \frac{7}{\cos 10^{\circ}} \right)} = \frac{400}{0,342 + 0,985} = 10,3$$

En prenant $\lambda = 10$, les nombres de dents sont

$$\begin{cases} n = 2 \times 10 = 20 \text{ dents} \\ n' = 7 \times 10 = 70 \text{ dents} \end{cases}$$

Inclinaisons exactes des hélices. — L'expression de la distance des axes conduit à l'équation

$$200 = \frac{3}{2} \left(\frac{20}{\cos \alpha} + \frac{70}{\cos \alpha'} \right) = \frac{30}{\cos \alpha} + \frac{105}{\cos \alpha'}$$

D'autre part, on sait (372) que $\alpha - \alpha' = \theta = 60^{\circ}$

Pour trouver, par la méthode des approximations successives, des solutions de ces équations, posons, comme précédemment,

$$z = \frac{30}{\cos \alpha} + \frac{105}{\cos \alpha'}$$

et substituons à α et α' une série de valeurs successives, liées par la relation $\alpha - \alpha' = 60^\circ$, en commençant par $\alpha = 70^\circ$ et $\alpha' = 10^\circ$, jusqu'à ce que nous trouvions pour z deux valeurs comprenant dans leur intervalle le nombre 200.

Pour $\alpha = 70^\circ$ et $\alpha' = 10^\circ$ $z = \frac{30}{\cos 70^\circ} + \frac{105}{\cos 10^\circ} = 87.715 + 106.62 = 194.33$

Pour $\alpha = 71^\circ$ et $\alpha' = 11^\circ$ $z = \frac{30}{\cos 71^\circ} + \frac{105}{\cos 11^\circ} = 92.147 + 106.96 = 199.11$

Pour $\alpha = 71^\circ 30'$ et $\alpha' = 11^\circ 30'$ $z = 94.546 + 107.15 = 201.70$

Les deux derniers résultats étant, l'un supérieur, l'autre inférieur à 200, la valeur exacte de α est comprise entre 71° et $71^\circ 30'$, soit $71^\circ \alpha'$. En admettant que, dans cet intervalle, z varie proportionnellement à α , on peut écrire :

$$\frac{71^\circ \alpha' - 71^\circ}{200 - 199.11} = \frac{71^\circ 30' - 71^\circ}{201.70 - 199.11}$$

ou $\frac{\alpha}{0.89} = \frac{30}{2.59}$

d'où l'on tire $\alpha = \frac{30 \times 0.89}{2.59} = 10$ minutes par défaut.

Les valeurs correspondantes de α et α' sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 71^\circ 10' \\ \alpha' = 11^\circ 10' \end{array} \right.$$

Il faut s'assurer qu'elles sont suffisamment approchées en calculant la valeur correspondante de z . On trouve :

Pour $\alpha = 71^\circ 10'$ et $\alpha' = 11^\circ 10'$

$$z = \frac{30}{\cos 71^\circ 10'} + \frac{105}{\cos 11^\circ 10'} = 92.931 + 107.03 = 199.96$$

L'erreur, égale à $0^m/04$ environ, est insignifiante.

En prenant pour α la valeur par excès, soit $11'$, on aurait

Pour $\alpha = 71^\circ 11'$ et $\alpha' = 11^\circ 11'$

$$z = \frac{30}{\cos 71^\circ 11'} + \frac{105}{\cos 11^\circ 11'} = 93.013 + 107.03 = 200.04$$

L'erreur commise est la même que dans le premier cas, mais en sens contraire.

Il n'y a pas lieu de faire une nouvelle interpolation pour obtenir des valeurs plus exactes de α et α' . Elles conduiraient, en effet, à évaluer ces angles à une fraction de minute près, ce qui n'a pas d'utilité pratique.

Diamètres primitifs, etc... On procède comme dans l'application numérique I du premier cas.

378. Détermination des éléments d'un engrenage hélicoïdal, en vue d'assurer au glissement relatif des dents sa valeur minimum, et au rapport des vitesses une valeur donnée.

Nous étudierons successivement les quatre dispositions différentes des roues, signalées au paragraphe 372 (fig. 322).

1° Cas de deux roues à gauche. — Le glissement élémentaire des hélices en contact est mesuré par le segment infiniment petit $MN = m' n'$ (fig. 320 et 321). L'angle $\widehat{MIN} = m' i' n'$ est toujours égal à l'angle des axes, quelle que soit la position du point I sur AB. Mais comme $IM = i' m' = \omega R dt$, et $IN = i' n' = \omega' R' dt$ dépendent de R et R', le glissement relatif varie avec les rayons des cylindres primitifs.

Puisque l'angle $\widehat{MIN} = \theta$ est invariable, il est impossible de déterminer le point I de manière à annuler le glissement. Nous nous proposons de rechercher la disposition du système pour laquelle il prend sa plus petite valeur. Posons à cet effet $AB = d$ et $AI = x$. Nous aurons :

$$\begin{aligned} IM &= \omega x dt \\ IN &= \omega' (d - x) dt \end{aligned}$$

D'autre part, le triangle MIN donne la relation

$$\begin{aligned} \overline{MN}^2 &= \overline{IM}^2 + \overline{IN}^2 - 2IM \times IN \cos \theta \\ &= \left[\omega^2 x^2 + \omega'^2 (d - x)^2 - 2\omega\omega'x (d - x) \cos \theta \right] dt^2 \end{aligned}$$

Le minimum de MN, pour une valeur donnée de dt , a lieu en même temps que celui de la fonction

$$y = \omega^2 x^2 + \omega'^2 (d - x)^2 - 2\omega\omega'x (d - x) \cos \theta$$

dont la dérivée par rapport à x est

$$\begin{aligned} y' &= 2\omega^2 x - 2\omega'^2 (d - x) - 2\omega\omega' (d - x) \cos \theta + 2\omega\omega'x \cos \theta \\ &= 2 \left[\omega x (\omega + \omega' \cos \theta) - \omega' (d - x) (\omega' + \omega \cos \theta) \right] \end{aligned}$$

Cette dérivée s'annule quand

$$\frac{x}{d - x} \left(\text{ou } \frac{R}{R'} \right) = \frac{\omega'}{\omega} \times \frac{\omega' + \omega \cos \theta}{\omega + \omega' \cos \theta} \quad (1)$$

En représentant le second membre de cette équation par h , pour simplifier l'écriture, l'expression précédente de y' devient

$$y' = 2 [x - h (d - x)]$$

On reconnaît aisément que, si l'on fait croître x de zéro à d , $\frac{x}{d - x}$ croît en même temps, et que la dérivée y' , négative tant que $\frac{x}{d - x} < h$, devient positive quand $\frac{x}{d - x} > h$. La valeur de x , tirée de l'équation (1), correspond donc à un minimum de y , et, par suite, du glissement MN.

On sait que le rapport des vitesses angulaires de deux roues hélicoïdales est donné par la formule

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R \cos \alpha}{R' \cos \alpha'}$$

D'après cela, l'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{R}{R'} = \frac{R \cos \alpha}{R' \cos \alpha'} \times \frac{R \cos \alpha + R' \cos \alpha' \cos \theta}{R' \cos \alpha' + R \cos \alpha \cos \theta}$$

d'où l'on déduit

$$R \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \alpha' \cos \theta) = R' \cos \alpha' (\cos \alpha - \cos \alpha \cos \theta) \quad (2)$$

Mais, dans le cas de deux roues à gauche, $\alpha + \alpha' = \theta$, et

$$\cos \theta = \cos (\alpha + \alpha') = \cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha'$$

L'équation (2) devient donc

$$\begin{aligned} R \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \alpha \cos^2 \alpha' + \sin \alpha \sin \alpha' \cos \alpha') = \\ R' \cos \alpha' (\cos \alpha' - \cos \alpha' \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha') \end{aligned}$$

ou

$$R \cos \alpha (\cos \alpha \sin^2 \alpha' + \sin \alpha \sin \alpha' \cos \alpha') = R' \cos \alpha' (\cos \alpha' \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha')$$

$$R \cos \alpha \sin \alpha' \sin (\alpha + \alpha') = R' \sin \alpha \cos \alpha' \sin (\alpha + \alpha')$$

c'est-à-dire enfin

$$R \cotg \alpha = R' \cotg \alpha' \quad (3)$$

Soit $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N'_1}{N_1}$ le rapport des vitesses angulaires à réaliser, mis sous forme de fraction ordinaire irréductible. Les éléments des deux roues à gauche assurant au glissement relatif la plus petite valeur possible doivent satisfaire aux conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{N'_1}{N_1} = \frac{R \cos \alpha}{R' \cos \alpha'} \\ R \cotg \alpha = R' \cotg \alpha' \\ R + R' = d \\ \alpha + \alpha' = \theta \end{array} \right. \quad (4)$$

Pour des valeurs données de $\frac{N'_1}{N_1}$, d et θ , ces équations n'admettent qu'un système unique de solutions, et l'indétermination signalée au paragraphe 377 bis n'a plus lieu.

Donc : Deux arbres étant donnés, il n'existe qu'une seule paire de roues hélicoïdales à gauche capable de transmettre le mouvement de l'un à l'autre, en assurant au rapport des vitesses une valeur donnée, et au glissement relatif la plus petite valeur possible.

En multipliant membre à membre les deux premières équations du système (4), on trouve

$$N_1 \sin \alpha = N'_1 \sin \alpha' \quad (5)$$

Les angles α et α' sont donc déterminés par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 \sin \alpha = N'_1 \sin \alpha' \\ \alpha + \alpha' = \theta \end{array} \right. \quad (6)$$

On en déduit :

$$\frac{\sin \alpha}{N'_1} = \frac{\sin \alpha'}{N_1} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha - \alpha'}{2}}{N_1 + N'_1} = \frac{2 \sin \frac{\alpha - \alpha'}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{N_1 - N'_1}$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{N'_1 - N_1}{N_1 + N'_1} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ \alpha + \alpha' = \theta \end{array} \right. \quad (7)$$

Ces équations, dont la résolution n'offre aucune difficulté, montrent que *les angles α et α' correspondant au glissement minimum ne dépendent pas de la distance des axes*. Pour calculer les éléments nécessaires à l'exécution des deux roues, on devra donc déterminer les valeurs exactes de α et α' d'après les équations (7), considérer la distance d comme une donnée approximative, et procéder ensuite au § 377 bis (PREMIER CAS). Nous traiterons plus loin une application numérique.

Construction géométrique des angles α et α' . — Soit c' (fig. 325) un point de la projection verticale de la génératrice des hélices, dans le système de plans de projections déjà employé au paragraphe 372, et $c'd'$, $c'e'$ les distances de c' aux projections des axes ; on a

$$c'd' = i'c' \sin \alpha ; \quad c'e' = i'c' \sin \alpha'$$

d'où $c'e' \sin \alpha = c'd' \sin \alpha'$

En comparant cette relation à l'équation (5), on voit que

$$\frac{c'e'}{N_1} = \frac{c'd'}{N'_1}$$

Par conséquent, z' est le lieu géométrique des points dont les distances aux projections $i'X'$ et $i'Y'$ des axes sont inversement proportionnelles aux vitesses angulaires. Pour construire un point du lieu, on élève sur $i'X'$ et $i'Y'$ des perpendiculaires fg' , kl' respectivement proportionnelles, pour chaque axe, au nombre de tours qui s'effectue-

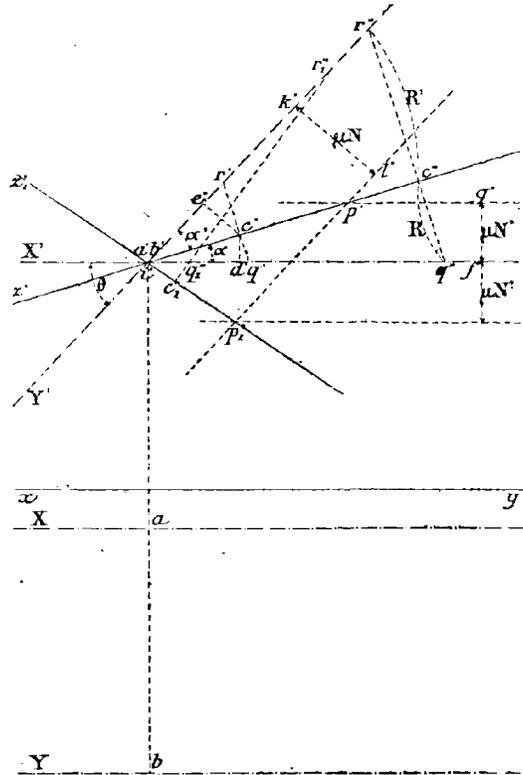


Fig. 325.

tuent autour de l'autre, puis on mène $g'p'$ parallèle à X' et $l'p'$ parallèle à Y' . Le point p' appartient au lieu cherché, qui est ainsi $z'ip'$ (*).

Cette méthode graphique permet de mesurer les angles α et α' sur la figure, et d'éviter la résolution des équations (6), si l'on ne désire pas une grande exactitude.

Remarque. — On peut également construire les rayons des cylindres primitifs de l'engrenage. Soit $q'c'r'$ une perpendiculaire à z' . On a

$$c'q' = i'c' \operatorname{tg} \alpha \qquad c'r' = i'c' \operatorname{tg} \alpha'$$

$$\text{d'où} \qquad c'q' \operatorname{cotg} \alpha = c'r' \operatorname{cotg} \alpha'$$

En comparant cette relation à l'équation (3), on voit que

$$\frac{c'q'}{R} = \frac{c'r'}{R'} = \frac{q'r'}{d}$$

On est ainsi ramené à partager la plus courte distance des axes en parties proportionnelles à $c'q'$ et $c'r'$. Il suffit, pour cela, de tracer entre X' et Y' une droite $q'r''$, égale à d et perpendiculaire à z' . On a, en effet,

$$\frac{c''q''}{c'q'} = \frac{c''r''}{c'r'} = \frac{q''r''}{q'r'}$$

$$\text{et, par conséquent} \qquad \frac{c''q''}{R} = \frac{c''r''}{R'} = \frac{q''r''}{d}$$

Puisque $q''r'' = d$, on a aussi $c''q'' = R$ et $c''r'' = R'$

Cette construction et la précédente pourraient suffire si les éléments des deux roues devaient être déterminées en fonction du pas normal. Mais la distance d devant être modifiée ultérieurement en raison de l'emploi, dans le calcul de l'engrenage, d'un module normal de la série conventionnelle, $c''q''$ et $c''r''$ ne sont également que des valeurs approximatives des rayons primitifs, dont la connaissance n'est pas nécessaire.

2° Cas d'une roue à droite et d'une roue à gauche. — (Dispositions II et IV fig. 322).

Le triangle infinitésimal $i'm'n'$ étant placé comme dans le cas de deux roues à gauche, tous les calculs faits précédemment restent vrais jusqu'à l'équation (2) inclusivement

$$R \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \alpha' \cos \theta) = R' \cos \alpha' (\cos \alpha' - \cos \alpha \cos \theta) \qquad (2)$$

Mais $\alpha - \alpha' = \theta$ (disposition II) ou $\alpha' - \alpha = \theta$ (disposition IV); par suite

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha \sin \alpha'$$

L'équation (2) devient donc

$$R \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \alpha \cos^2 \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha' \cos \alpha') - R' \cos \alpha' (\cos \alpha' - \cos \alpha' \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha')$$

$$\text{ou} \quad R \cos \alpha (\cos \alpha \sin^2 \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha' \cos \alpha') = R' \cos \alpha' (\cos \alpha' \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha')$$

$$R \cos \alpha \sin \alpha' \sin (\alpha' - \alpha) = R' \cos \alpha' \sin \alpha \sin (\alpha - \alpha')$$

(*) Le lieu des points dont les distances à X' et Y' sont inversement proportionnelles aux vitesses angulaires se compose, en réalité, de deux droites z' et z_1 . Mais z_1 , qui est située dans l'angle obtus des axes, ne correspond pas au cas de deux roues à gauche (372), et doit être rejetée.

c'est-à-dire enfin, puisque $\sin(\gamma - \alpha')$ n'est pas nul

$$R \cotg \alpha = - R' \cotg \alpha'$$

Cette solution montre que, avec les dispositions de roues qui nous occupent, le glissement minimum serait réalisé par un engrenage intérieur. On arrive également à cette conclusion en construisant les rayons primitifs $c''_1, q''_1, c''_1, r''_1$ qui correspondraient, dans la figure 325, à l'emploi de la droite $i'z'_1$ comme génératrice des hélices. Ces roues hélicoïdales intérieures n'ont pas d'applications pratiques.

3° **Cas de deux roues à droite.** (Disposition III, fig. 322). L'angle i du triangle infinitésimal $i'm'n'$ étant égal au supplément de l'angle des axes, on doit remplacer θ par $\pi - \theta$ dans l'équation (2) qui devient :

$$R \cos \alpha (\cos \alpha + \cos \alpha' \cos \theta) = R' \cos \alpha' (\cos \alpha' + \cos \alpha \cos \theta) \quad (2')$$

Mais $\alpha + \alpha' = \pi - \theta$ (disposition III) et, par suite,

$$\cos \theta = - \cos(\gamma - \alpha') = \sin \alpha \sin \alpha' - \cos \alpha \cos \alpha'$$

L'équation (2') devient donc

$$R \cos \alpha (\cos \alpha - \cos \alpha \cos^2 \alpha' + \sin \alpha \sin \alpha' \cos \alpha') = R' \cos \alpha' (\cos \alpha' - \cos \alpha' \cos^2 \alpha + \sin \alpha \sin \alpha' \cos \alpha)$$

ou
$$R \cos \alpha \sin \alpha' \sin(\alpha + \alpha') = R' \sin \alpha \cos \alpha' \sin(\alpha + \alpha')$$

ou enfin
$$R \cotg \alpha = R' \cotg \alpha'$$

relation identique à celle que nous avons trouvée dans le premier cas. On en déduit des conséquences analogues : *Il n'existe qu'une paire de roues hélicoïdales à droite capable de transmettre le mouvement entre deux axes donnés, en assurant au rapport des vitesses une valeur donnée, et au glissement relatif la plus petite valeur possible.*

Les éléments de ces roues satisfont aux équations suivantes (analogues aux équations 4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{N'_1}{N_1} = \frac{R \cos \alpha}{R' \cos \alpha'} \\ R \cotg \alpha = R' \cotg \alpha' \\ R + R' = d \\ \alpha + \alpha' = \pi - \theta \end{array} \right. \quad (8)$$

Les angles α et α' sont déterminées par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 \sin \alpha = N'_1 \sin \alpha' \\ \alpha + \alpha' = \pi - \theta \end{array} \right. \quad (9)$$

analogues aux équations (6). On en déduit

$$\frac{\sin \alpha}{N_1} = \frac{\sin \alpha'}{N'_1} = \frac{2 \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha - \alpha'}{2}}{N_1 + N'_1} = \frac{2 \sin \frac{\pi - \alpha'}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{N'_1 - N_1}$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{N'_1 - N_1}{N_1 + N'_1} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \\ \alpha + \alpha' = \pi - \theta \end{array} \right. \quad (10)$$

Comme dans le premier cas, les angles α et α' sont indépendants de la distance des axes. Les constructions graphiques indiquées précédemment sont encore applicables.

4° **Cas où les axes sont rectangulaires.** — Les roues étant toutes deux à gauche ou toutes deux à droite, il suffit de remplacer θ par $\frac{\pi}{2}$ et $\cos \alpha'$ par $\sin \alpha$ dans les équations (4) ou (8). On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{N'_1}{N_1} = \frac{R \operatorname{cotg} \alpha}{R'} \\ R \operatorname{cotg} \alpha = R' \operatorname{tg} \alpha \\ R + R' = d \\ \alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (11)$$

D'après les deux premières équations de ce système

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{N'_1}{N_1} \quad (12)$$

Il est donc facile de déterminer les directions des hélices qui correspondent au glissement minimum. En considérant la distance d comme une donnée approximative, on procédera comme au § 377 bis (premier cas) pour calculer les dimensions nécessaires à l'exécution des roues.

378 bis. **Applications numériques.** — I. **Les axes sont obliques, et les deux roues sont à gauche.**

<i>Données.</i>	{	Module normal : $m = 4$ Rapport des vitesses : $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N_1}{N'_1} = \frac{3}{5}$ Angle des axes : $\theta = 60^\circ$ Distance approximative des axes : $d_{app} = 300 \text{ m/m.}$	<i>Inconnues</i>	{	Inclinaisons des hélices (à gauche) correspondant au glissement minimum : α, α' Nombres de dents : n, n' Distance exacte des axes : d_{ex} Diamètres primitifs, etc....
-----------------	---	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------	---	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Calcul des angles α, α' . On a, d'après les équations (7).

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{3 - 5}{3 + 5} \operatorname{tg} 30^\circ \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha' - \alpha}{2} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} 30^\circ. \\ \frac{\alpha + \alpha'}{2} = 30^\circ. \end{array} \right.$$

On tire de la première $\frac{\alpha' - \alpha}{2} = 8^\circ 13'$ (Emploi des logarithmes)

En ajoutant et en retranchant membre à membre avec la seconde, il vient :

$$\begin{cases} \alpha = 21^{\circ}47' \\ \alpha' = 38^{\circ}13' \end{cases}$$

Calcul des nombres de dents. — Ce sont des équimultiples de 3 et de 5

$$\begin{cases} n = 3 \lambda \\ n' = 5 \lambda \end{cases}$$

En remplaçant les quantités par leurs valeurs dans l'expression de la distance des axes, on trouve

$$300 = \frac{4 \lambda}{2} \left(\frac{3}{\cos 21^{\circ}47'} + \frac{5}{\cos 38^{\circ}13'} \right) = 2 \lambda \left(\frac{3}{0.928} + \frac{5}{0.786} \right)$$

d'où
$$\lambda = \frac{150}{\frac{3}{0.928} + \frac{5}{0.786}} = 15.6 \quad (\text{Emploi de la règle à calcul})$$

On prendra $\lambda = 16$, ce qui entraîne :

$$\begin{cases} n = 3 \times 16 = 48 \text{ dents} \\ n' = 5 \times 16 = 80 \text{ dents.} \end{cases}$$

Calcul de la distance exacte des axes. — On a

$$d_{ex} = \frac{m}{2} \left(\frac{n}{\cos \alpha} + \frac{n'}{\cos \alpha'} \right) = \frac{96}{\cos 21^{\circ}47'} + \frac{160}{\cos 38^{\circ}13'} = 307 \text{ m/m } 03 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Emploi des} \\ \text{logarithmes} \end{array} \right)$$

Diamètres primitifs, d'échanfrinement, etc.... — Comme dans le cas général.

II. Les axes sont obliques, et les deux roues sont à droite.

Données.	{	Module normal : $m = 4$ Rapport des vitesses : $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N_1}{N_1'} = \frac{3}{5}$ Angle des axes : $\theta = 60^{\circ}$ Distance approximative des axes : $d_{app} = 300 \text{ m/m}$.	Inconnues	{	Inclinaisons des hélices (à droite) correspondant au glissement minimum : α, α' Nombres de dents : n, n' Distance exacte des axes : d_{ex} Diamètres primitifs, etc....
----------	---	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------	---	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Calcul des angles α, α' . — En remplaçant les quantités par leurs valeurs dans les équations (10), on a :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{3 - 5}{3 + 5} \operatorname{cotg} 30^{\circ} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha' - \alpha}{2} = \frac{1}{4} \operatorname{cotg} 30^{\circ} \\ \frac{\alpha + \alpha'}{2} = 60^{\circ} \end{cases}$$

On déduit de la première $\frac{\alpha' - \alpha}{2} = 23^{\circ}25'$
 et en combinant avec la seconde

$$\begin{cases} \alpha = 36^{\circ}35' \\ \alpha' = 83^{\circ}25' \end{cases}$$

Calcul des nombres de dents. — En procédant comme ci-dessus, on trouve

$$\lambda = \frac{150}{\frac{3}{0.805} + \frac{5}{0.115}} = 3,2$$

soit $\lambda = 3$. Par conséquent $n = 3 \times 3 = 9$ dents
 $n' = 3 \times 5 = 15$ dents.

Calcul de la distance exacte des axes.

$$d_{ex} = \frac{m}{2} \left(\frac{n}{\cos \alpha} + \frac{n'}{\cos \alpha'} \right) = \frac{18}{\cos 36^{\circ}35'} + \frac{30}{\cos 83^{\circ}25'} = 281 \text{ m/m } 31$$

Diamètres primitifs, etc.... Comme dans le cas général.

III. — Les axes sont rectangulaires.

Il n'est pas nécessaire de distinguer deux cas, les mêmes formules convenant indistinctement aux roues à gauche et aux roues à droite.

Données.	{	Module normal : $m = 3$ Rapport des vitesses : $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N_1}{N_1'} = \frac{3}{5}$ Angle des axes : $\theta = 90^{\circ}$ Distance approximative : $d_{app} = 250 \text{ m/m}$	Inconnues	{	Inclinaisons des hélices correspondant au glissement minimum : $\alpha, \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ Nombres de dents : n, n' Distance exacte des axes : d_{ex} . Diamètres primitifs, etc....
----------	---	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------	---	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Calcul des angles α, α' . — On a, d'après l'équation (12)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{d'où} \quad \alpha = 30^{\circ}58' \quad \text{et} \quad \alpha' = 59^{\circ}2'$$

Calcul des nombres de dents.

$$\begin{cases} n = 3\lambda \\ n' = 5\lambda \end{cases}$$

En remplaçant les quantités par leurs valeurs dans l'expression de la distance des axes, qui est

$$d = \frac{m}{2} \left(\frac{n}{\cos \alpha} + \frac{n'}{\sin \alpha} \right)$$

on trouve $250 = \frac{3\lambda}{2} \left(\frac{3}{0.857} + \frac{5}{0.515} \right)$ d'où $\lambda = 12.6$

Prenons $\lambda = 13$. Les nombres de dents cherchés sont

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 39 \text{ dents} \\ n' = 65 \text{ dents} \end{array} \right.$$

Calcul de la distance exacte des axes.

$$d_{ax} = \frac{3}{2} \left(\frac{39}{\cos 30^{\circ}58'} + \frac{65}{\sin 30^{\circ}58'} \right) = 262 \text{ m/m } 12.$$

Diamètres primitifs, etc..... Comme dans le cas général.

379. Roue et vis sans fin, liant deux rotations dont les axes ne sont pas perpendiculaires.

Il n'existe aucune différence essentielle entre l'engrenage cylindrique à dents hélicoïdales étudié au paragraphe 372, et le système roue et vis sans fin : il suffit que le nombre des dents soit très petit sur l'une des roues pour qu'elle soit transformée en vis. Le mécanisme obtenu, qui généralise celui du paragraphe 364, assure la liaison de deux rotations autour d'axes obliques, non situés dans un même plan. Mais il faut observer que si, dans le cas des axes rectangulaires, la vis et la roue sont nécessairement toutes deux à droite, ou toutes deux à gauche, elles peuvent, au contraire, présenter les quatre dispositions différentes indiquées dans la figure 322, lorsque les axes sont obliques.

La marche à suivre pour calculer les quantités nécessaires à l'exécution du mécanisme est analogue à celle que nous avons développée au paragraphe 369. Mais il faut tenir compte des relations particulières entre les inclinaisons des dentures (372 — Remarque 1).

380. Pignon et crémaillère liant une rotation et une translation oblique à l'axe de la rotation.

Ce mécanisme peut être considéré comme la limite du système de deux roues à dents hélicoïdales, quand l'un des rayons croît indéfiniment.

Considérons, en effet, deux axes de rotation X, Y, formant un angle quelconque θ_1 , et le plan P conduit par Y et la perpendiculaire commune AB (fig. 326). Quand l'axe Y s'éloigne indéfiniment dans le plan P en restant parallèle à lui-même, la rotation qui s'exécute autour de lui dégénère en une translation V, perpendiculaire au plan P, et dont la direction fait, avec l'axe X resté fixe, un angle $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta_1$. On peut donc appliquer à ce cas particulier la méthode suivie au paragraphe 372.

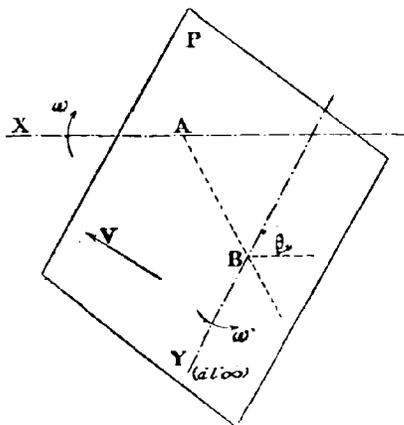


Fig. 326.

Prenons un plan vertical de projection parallèle à l'axe (X, X') et à la direction (Δ, Δ') de la translation (fig. 327), et un plan horizontal parallèle à (X, X'). Sur une droite de bout ($ai, a'i'$) rencontrant l'axe, prenons un point quelconque (i, i'), puis considérons le système formé par un cylindre de révolution S, de rayon $ai = R$, invariablement lié à (X, X'), et

par le plan de front F qui lui est tangent en (i, i') . Traçons dans ce dernier une droite $(iz, i'z')$, provisoirement arbitraire, qui forme avec les directions (X, X') et (Δ, Δ') des angles α, α' , projetés verticalement en vraie grandeur. Enroulons enfin le plan F sur le cylindre S . Dans ce mouvement, la droite (z, z') engendre une hélice à laquelle elle est tangente en (i, i') , et, si l'on suppose tracées sur le cylindre S et le plan F des stries infiniment minces respectivement dirigées suivant cette hélice et la droite (z, z') , leur action mutuelle pourra transformer une rotation ω , imprimée à S autour

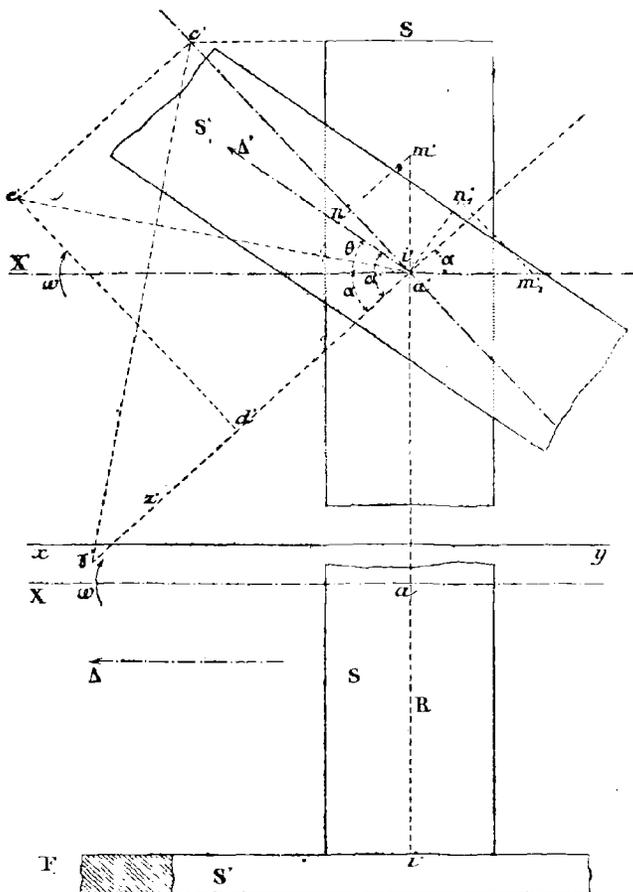


Fig. 327.

de (X, X') , en une translation V du plan F parallèlement à (Δ, Δ') , à la condition de guider convenablement celui-ci.

Pour calculer le rapport des vitesses, on procède comme au paragraphe 372, en considérant les éléments de droites $i'm', i'n'$ parcourus, pendant un temps infiniment petit dt , par le point (i, i') considéré comme appartenant successivement au cylindre S et au plan F . On a

$$i'm' = \omega R dt \qquad i'n' = V dt$$

et l'on établit le parallélisme de $m'n'$ et de iz' . Quand on fait tourner le triangle $i'm'n'$

de 90° autour de son sommet i' , de manière à l'amener en $i'n'_1n'_1$, $m'_1n'_1$ est perpendiculaire à z' . Il en résulte que

$$i'm'_1 \cos \alpha = i'n'_1 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha' \right) = i'n'_1 \sin \alpha'$$

ou $\omega R dt \cos \alpha = V dt \sin \alpha'$

d'où enfin $\frac{\omega}{V} = \frac{\sin \alpha'}{R \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha'}{mn}$

m désignant le module normal, et n le nombre de dents du pignon.

On voit que, contrairement à ce qui se passe dans le système pignon et crémaillère à dents droites d'un module donné, le rapport $\frac{\omega}{V}$ ne dépend pas exclusivement du rayon du pignon ou de son nombre de dents ; pour des valeurs données de R ou de n , il varie avec la direction de la droite (z, z').

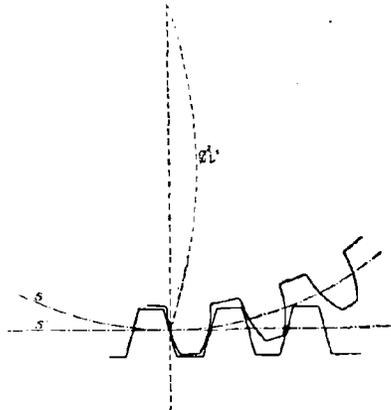


Fig. 327 bis.

On calcule les dimensions d'exécution du pignon comme dans le cas général (377). La figure 327 bis représente les profils des dentures dans un plan de section droite.

381. Engrenage de deux crémaillères.

Soient X et Y deux axes de rotation, non situés dans le même plan, θ leur angle, et P, P' les plans que chacun d'eux forme avec la perpendiculaire commune AB (fig. 328). Si l'on suppose que ces axes s'éloignent indéfiniment dans les plans P et P' , tout en restant parallèles à leurs directions primitives, les rotations qui s'exécutent

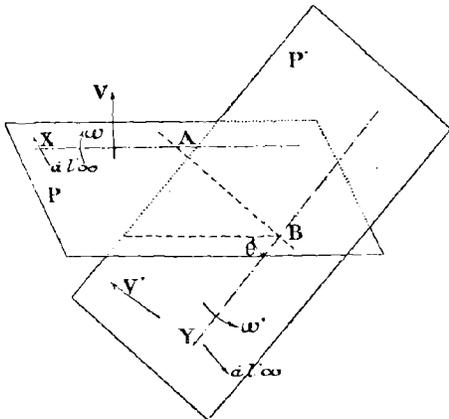


Fig. 328.

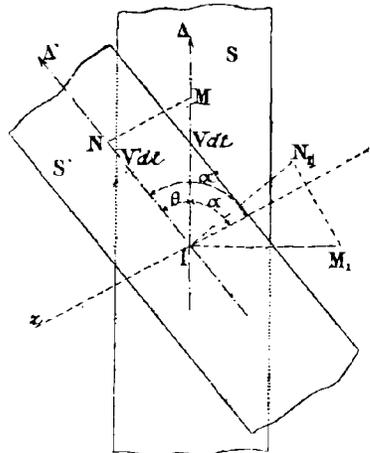


Fig. 329.

autour d'eux dégèrent en translations respectivement perpendiculaires aux plans P et P' , faisant entre elles l'angle θ . L'engrenage cylindrique à dents hélicoïdales fournit donc, à la limite, un mécanisme capable d'assurer la liaison de deux translations non parallèles.

Traçons, dans un plan parallèle aux deux translations Δ et Δ' , une droite z provi-

soirement arbitraire, qui forme avec Δ et Δ' des angles α et α' (fig. 329). Imaginons qu'on ait détaché de ce plan deux bandes S et S', libres de se mouvoir dans les seules directions Δ , Δ' , et que l'on ait tracé sur chacune d'elles des stries parallèles à z. Un mouvement communiqué à S se transmet ainsi à S', avec un rapport de vitesses dont on détermine la valeur en considérant les éléments de droite $IM = Vdt$, $I' = V'dt$ parcourus, pendant un temps infiniment petit dt , par un point quelconque I de z, entraîné successivement par S et S'. Le segment infiniment petit MN, qui mesure le glissement élémentaire des stries en contact suivant z, est parallèle à cette droite. Si l'on fait tourner le triangle IMN de 90° autour du point I, le côté MN prend la position M_1N_1 perpendiculaire à z, et l'on a

$$IM_1 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = IN_1 \cos \left(\alpha' - \frac{\pi}{2} \right)$$

ou
$$V dt \sin \alpha = V' dt \sin \alpha'$$

d'où enfin
$$\frac{V'}{V} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$$

On voit que ce rapport dépend de la direction attribuée à z. On détermine facilement celle-ci de manière que $\frac{V'}{V}$ prenne une valeur donnée.

Par analogie avec ce qu'on a établi dans le cas général, les pas des deux crémaillères, mesurés dans un plan perpendiculaire à z, sont égaux. Les profils dans ce plan sont donc identiques, et les dents sont limitées par des surfaces prismatiques de même section droite, dont les génératrices sont, sur chaque crémaillère, parallèles à z.

§ IV. — Engrenages hyperboloïdes.

332. Soient (X, X') , (Y, Y') (fig. 530), deux axes de rotation quelconques, disposés par rapport aux plans de projection comme on l'a supposé dans l'engrenage hélicoïdal, et $(ab, a'b')$ leur perpendiculaire commune. Menons par un point (i, i') de cette droite une frontale $(iz, i'z')$ de direction arbitraire, qui forme avec les axes des angles α et α' projetés verticalement en vraie grandeur. Lorsque cette droite tourne successivement autour de (X, X') , (Y, Y') , elle engendre deux hyperboloïdes à une nappe S et S', dont les cercles de gorge sont décrits par le point (i, i') , et qui admettent une génératrice commune (z, z') . En supposant que ces surfaces soient rendues solidaires des axes, et présentent des stries dirigées suivant des génératrices du même système que (z, z') , prises à égale distance les unes des autres, le mouvement de rotation de l'une d'elles se transmettra à l'autre avec un rapport de vitesses angulaires dont la valeur

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R \cos \alpha}{R' \cos \alpha'}$$

pourrait être établie par un raisonnement identique à celui du paragraphe 372, R et R' désignant ici les rayons ia et ib des cercles de gorge. Comme dans l'engrenage hélicoïdal, le glissement relatif, mesuré pendant un temps infiniment petit par le segment $m'n'$, dépend à la fois du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ et des quantités R et R'.

La détermination des éléments du système propres à réduire ce glissement au minimum nécessite un calcul qui a été développé au paragraphe 378, et dont on a déduit la relation

$$R \cotg \alpha = R' \cotg \alpha'$$

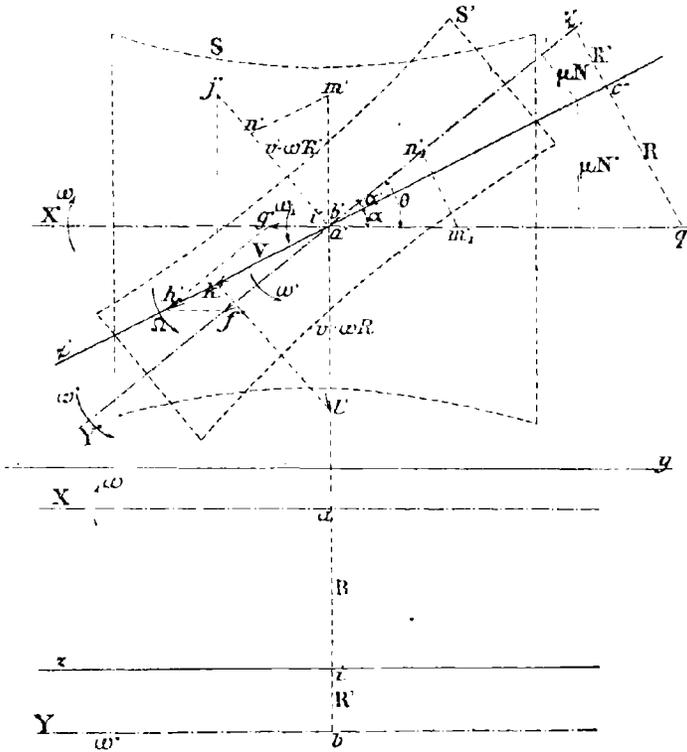


Fig. 330.

Nous supposons que les hyperboloïdes figurés réalisent le glissement minimum pour un rapport de vitesse $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{N'}{N}$, et nous chercherons, dans cette hypothèse, la nature de leur mouvement relatif.

383. Mouvement relatif de S' par rapport à S.

Le mouvement relatif de l'hyperboloïde S' résulte, à chaque instant, de la composition de sa rotation absolue ω' , autour de (Y, Y'), avec une rotation ω_1 , égale à ω mais de sens contraire, s'effectuant autour de (X, X'). Afin de déterminer les éléments du mouvement résultant, qui revient à une rotation et une translation simultanées, nous transporterons ω_1 et ω' parallèlement à elles-mêmes en (i, i'), où elles seront représentées par les vecteurs $i'g' = \omega_1$ et $i'f = \omega'$, en leur ajoutant des translations

$$v = i'l = \omega_1 R = \omega R$$

et

$$v' = i'j' = \omega' R'$$

respectivement perpendiculaires aux plans de bout $X'i$, $Y'i'$, et dirigées dans le sens

où la rotation correspondante tend à entraîner le point i' (220). Les deux rotations $i'g'$ et $i'f'$ se composent en une seule $i'h'$, et l'on a

$$\frac{i'f' \text{ ou } \omega'}{\sin h'i'g'} = \frac{i'g' \text{ ou } \omega}{\sin h'i'f'}$$

Mais, d'autre part

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega'}{\omega} = \frac{R \cos \alpha}{R' \cos \alpha'} \\ R \cotg \alpha = R' \cotg \alpha' \end{array} \right.$$

On tire de ces relations

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} \times \frac{\cotg \alpha'}{\cotg \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$$

ou

$$\frac{\omega'}{\sin \alpha} = \frac{\omega}{\sin \alpha'}$$

Par conséquent

$$\frac{\sin \alpha}{\sin h'i'g'} = \frac{\sin \alpha'}{\sin h'i'f'}$$

et comme

$$\alpha + \alpha' = h'i'g' + h'i'f' = \theta$$

on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = h'i'g' \\ \alpha' = h'i'f' \end{array} \right.$$

L'axe de la rotation instantanée, dans le mouvement relatif élémentaire de S' , se confond donc avec la droite $(iz, i'z')$.

Les translations $i'j'$ et $i'l'$ se composent en une seule, $V = i'k'$, et l'on a

$$\frac{i'j'}{\sin k'i'l'} = \frac{i'l'}{\sin k'i'j'}$$

ou

$$\frac{\omega' R'}{\cos h'i'g'} = \frac{\omega R}{\cos h'i'f'}$$

Mais, de la proportion

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R \cos \alpha}{R' \cos \alpha'}$$

on déduit

$$\frac{\omega' R'}{\cos \alpha} = \frac{\omega R}{\cos \alpha'}$$

Par conséquent

$$\frac{\cos \alpha}{\cos h'i'g'} = \frac{\cos \alpha'}{\cos h'i'f'}$$

Il s'en suit, comme précédemment, que $\alpha = h'i'g'$ et $\alpha' = h'i'f'$, ce qui montre que la translation instantanée, dans le mouvement relatif élémentaire de S' , est parallèle à $(iz, i'z')$. Ce résultat pouvait être prévu, puisque cette translation produit le glissement relatif, et que celui-ci s'effectue parallèlement à $(iz, i'z')$.

On conclut de ce qui précède que $(iz, i'z')$ est l'axe instantané glissant du système à l'instant considéré, et que le mouvement relatif continu de S' par rapport à S , qui se compose d'une suite de mouvements élémentaires analogues à celui dont on

vient de déterminer la nature, revient à un roulement accompagné de glissements, le long des génératrices rectilignes de ces deux surfaces qui viennent successivement en contact.

384. Puisque les hyperboloïdes S et S' roulent l'un sur l'autre, on peut conclure qu'ils admettent le même plan tangent en chaque point de leur génératrice commune. Nous allons montrer qu'il en est effectivement ainsi. Rappelons d'abord que l'angle θ , formé par le plan tangent ZMT en un point M d'une surface réglée avec le plan central ZMU relatif à la génératrice correspondante Z , est donné par la formule

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{p}$$

x désignant la distance du point de contact au point central o de la génératrice Z , et p le paramètre de distribution des plans tangents aux divers points de Z . Pour déduire de cette formule que les plans tangents aux deux hyperboloïdes, en un point quelconque de leur génératrice commune, sont confondus, il suffit de prouver :

- 1° Que le plan central relatif à la génératrice (z, z') (fig. 330) est le même suivant qu'on la considère comme appartenant à S ou à S' .
- 2° Que le point central relatif à cette génératrice est aussi le même sur les deux surfaces.
- 3° Que le paramètre de distribution des plans tangents aux divers points de (z, z') a la même valeur sur S et sur S' .

Nous déterminerons pour cela ces divers éléments sur l'hyperboloïde S par exemple.

a) **Plan central relatif à la génératrice Z sur l'hyperboloïde S .**

On établit en géométrie descriptive que :

Le plan central et le plan asymptotique, relatifs à la même génératrice d'une surface réglée, sont perpendiculaires (cela résulte de ce que $\operatorname{tg} \theta$ devient infini en même temps que x).

Les plans asymptotiques relatifs aux diverses génératrices d'un hyperboloïde de révolution passent par le centre du cercle de gorge.

Il résulte de là que, A étant le centre du cercle de gorge et IT la tangente en I (fig. 332), le plan asymptotique relatif à la génératrice Z est ZIA , et le plan central est ZIT . Comme ce dernier est perpendiculaire au plan du cercle de gorge, on peut le déterminer aussi par la génératrice Z et la parallèle IX_1 menée à l'axe AX par le point I .

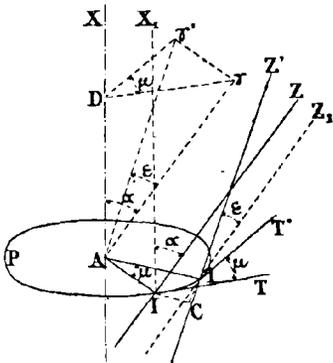


Fig. 332.

b) **Point central relatif à la génératrice Z sur l'hyperboloïde S .**

C'est le point de contact du plan central avec la surface. D'après une propriété connue des surfaces de révolution, il est déterminé par l'intersection de la génératrice Z et du plan méridien XAI perpendiculaire au plan tangent. C'est donc le point I lui-même, de sorte que le cercle de gorge, lieu géométrique des points centraux, constitue la ligne de striction de la surface.

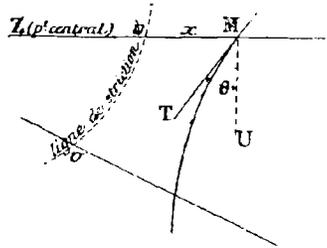


Fig. 331.

c) **Paramètre de distribution des plans tangents relatifs à la génératrice Z, sur l'hyperboloïde S.**

On sait que, si l'on désigne par δ et ε la plus courte distance et l'angle de deux génératrices infiniment voisines, on a

$$p = \lim \frac{\delta}{\varepsilon}$$

Soient $I'Z'$ une génératrice de S infiniment voisine de IZ et $I'Z_1$ la parallèle à IZ (fig. 332). La perpendiculaire IC au plan $Z_1I'Z'$ est égale à la plus courte distance des génératrices Z et Z' . Quand Z' se rapproche indéfiniment de Z supposée fixe, la droite IC vient, à la limite, dans le plan central relatif à Z . Si l'on admet que l'arc infiniment petit $I'I'$ du cercle de gorge se confond avec IT , les deux angles CII' , X_1IZ sont contenus dans le plan central, et leurs côtés sont respectivement perpendiculaires. Si donc on désigne par α l'angle de Z avec l'axe X , on a, à la limite

$$\text{angle } CII' = \alpha$$

Mais le triangle ICI' étant rectangle en C , on a aussi

$$IC = \delta = I'I' \cos CII' = I'I' \cos \alpha$$

et, si R désigne le rayon du cercle de gorge et μ l'angle IAI'

$$\delta = R \mu \cos \alpha$$

Pour évaluer l'angle $ZI'Z_1 = \varepsilon$, menons, par le centre du cercle de gorge, les parallèles $A_\gamma, A_{\gamma'}$ à Z et Z' . Ces droites, dont l'angle est ε sont des génératrices du cône asymptote de l'hyperboloïde. Coupons ce dernier par un plan $D_\gamma D_{\gamma'}$ perpendiculaire à son axe, ce qui détermine des segments $D_\gamma = D_{\gamma'}$ et $A_\gamma = A_{\gamma'}$. Le plan DA_γ étant parallèle au plan central X_1IZ de la génératrice Z , la droite D_γ suivant laquelle il coupe le plan $D_\gamma D_{\gamma'}$ est parallèle à IT . De même, pour une raison analogue, $D_{\gamma'}$ est parallèle à $I'T'$. Les deux angles γD_γ et IAI' , qui sont dans des plans parallèles et dont les côtés sont respectivement perpendiculaires, sont donc égaux, et l'on a

$$\text{angle } \gamma D_\gamma = \mu$$

Les triangles infinitésimaux $A_\gamma \gamma'$ et $D_\gamma \gamma'$ donnent les relations

$$2 A_\gamma \sin \frac{\varepsilon}{2} = 2 D_\gamma \sin \frac{\mu}{2} = \gamma \gamma'$$

et comme

$$D_\gamma = A_\gamma \sin \alpha$$

il vient

$$A_\gamma \sin \frac{\varepsilon}{2} = A_\gamma \sin \alpha \sin \frac{\mu}{2}$$

ou

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sin \alpha \sin \frac{\mu}{2}$$

En égalant les parties principales des deux membres, il reste, ε et μ étant infiniment petits

$$\varepsilon = \mu \sin \alpha$$

Par conséquent

$$p = \lim \frac{\delta}{\varepsilon} = \lim \frac{R \mu \cos \alpha}{\mu \sin \alpha} = R \cotg \alpha$$

d) **Conséquences.**

Revenons maintenant aux hyperboloïdes S et S' . Les plans centraux relatifs, sur chacun d'eux, à la génératrice Z , étant perpendiculaires, d'après ce qui précède, l'un sur AI et l'autre sur BI (fig. 333), sont confondus. Il en est de même des points centraux qui, dans les deux cas, sont en I . Enfin, la relation $R \cotg \alpha = R' \cotg \alpha'$, établie précédemment, montre que les deux paramètres de distribution relatifs à la génératrice Z sont égaux. Les deux hyperboloïdes se raccordent donc à chaque instant suivant leur génératrice commune.

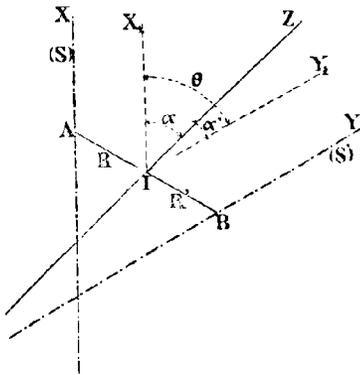


Fig. 333.

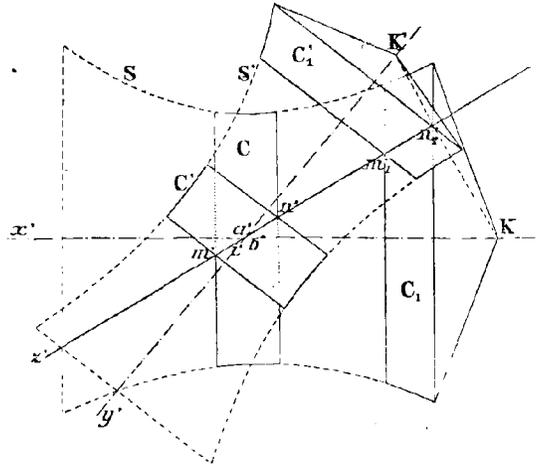


Fig. 334.

385. Les hyperboloïdes S et S' constituent les surfaces primitives d'un engrenage. Fortement pressés l'un contre l'autre, ils peuvent se conduire à cause de leur adhérence mutuelle, si l'effort à transmettre n'est pas trop considérable. Dans le cas contraire, il est nécessaire de les armer de dents qui, sur chacun d'eux, sont dirigées suivant les génératrices du même système que Z . La détermination rigoureuse des surfaces à employer pour limiter les dents constitue un problème très compliqué, auquel nous ne nous arrêterons pas à cause de son inutilité pratique.

Dans les cas très rares où l'on emploie ces engrenages, on utilise seulement les zones des hyperboloïdes primitifs qui sont engendrées par un même segment de leur génératrice commune (fig. 334). Si la distance des axes n'est pas trop petite, on donne à ce segment une position $m'n'$ telle que le point i' soit situé en son milieu. Les zones C et C' contiennent alors les cercles de gorge. Dans le cas contraire, les zones utilisées C_1 et C'_1 , engendrées par le segment $m'_1 n'_1$, sont prises assez loin des cercles de gorge pour que les deux roues aient des dimensions convenables. On construit ensuite des cônes de tête normaux aux hyperboloïdes primitifs, et l'on détermine leurs sommets K, K' par l'intersection des axes et du plan perpendiculaire à z' au point n'_1 . (On n'a représenté sur la figure 334 que les projections verticales). Il ne reste plus qu'à développer les cônes de tête, ce qui donne naissance à deux secteurs circulaires sur lesquels on trace les profils.

Dans la pratique, on remplace généralement les zones utiles des hyperboloïdes primitifs par des cylindres ou par des troncs de cône, selon qu'elles contiennent les cercles de gorge, comme C et C' , ou qu'elles sont rejetées à une certaine distance, comme C_1 et C'_1 . Ajoutons qu'à cause de son exécution difficile, l'engrenage hyperboloïde est très peu employé.

386. Calcul d'un engrenage hyperboloïde.

Les relations auxquelles doivent satisfaire les rayons des cercles de gorge et les angles α , α' étant les mêmes que pour l'engrenage cylindrique à dents hélicoïdales, les propriétés établies aux paragraphes 373 et 374 sont applicables à deux roues hyperboloïdes.

On déterminerait les sections droites des dents comme au paragraphe 375, en remarquant, toutefois, que les résultats varient avec la position donnée au plan perpendiculaire à la génératrice Z .



ÉQUIPAGES DE ROUES DENTÉES

387. L'étude des divers systèmes d'engrenages a montré que, dans tous les cas, le rapport des vitesses angulaires de deux roues qui se commandent est inverse du rapport de leurs nombres de dents. Ceux-ci, qui sont nécessairement entiers, ne peuvent pas descendre au-dessous d'un minimum variable avec le tracé adopté, et qui, dans les roues d'assortiment, est de 11 (engrenages épicycloïdaux) ou 12 (engrenages à développantes) (*). Enfin, exception faite de la crémaillère, on taille rarement des roues dont le nombre de dents dépasse 300. Il résulte de là que le rapport des vitesses angulaires d'arbres reliés par un engrenage de deux roues est commensurable, et compris entre des limites que, pour fixer les idées, nous poserons égales à $\frac{12}{300}$ et $\frac{300}{12}$.

Des considérations d'un autre ordre font encore resserrer ces limites. On a constaté que pour une roue donnée de rayon R, le glissement augmente à mesure que diminue le rayon R' de la roue conjuguée. Dans le but de réduire l'effet des résistances passives, on est conduit à ne pas donner au rapport $\frac{R}{R'} = \frac{n}{n'}$ une valeur trop considérable. Habituellement, on ne fait engrener directement deux roues que si le rapport de leurs nombres de dents (le cas de la vis sans fin excepté) est compris entre 10 et $\frac{1}{10}$ par exemple.

Pour réaliser un rapport commensurable de vitesses extérieur à ces limites, on peut employer des combinaisons analogues à la suivante. Soit $z, z_1, z_2 \dots z'$ (fig. 335) une suite d'axes parallèles reposant sur des coussinets fixes ; le premier conduit le second par l'engrenage AA' ; une roue B, solidaire de z_1 comme A', conduit le pignon B' monté sur le troisième arbre. Celui-ci entraîne dans sa rotation une roue C qui engrène avec C' solidaire d'un quatrième axe z' , et ainsi de suite. Supposons, pour fixer les idées, que cet axe soit le dernier de la série. Il est évident qu'une rotation imprimée à l'axe z se communique de proche en proche à chacun des suivants, jusqu'au dernier. Soient $\omega, \omega_1, \omega_2 \dots \omega'$ les vitesses angulaires de ces divers mouvements ; nous nous proposons de calculer le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ des deux vitesses extrêmes. Convenons, à cet effet :

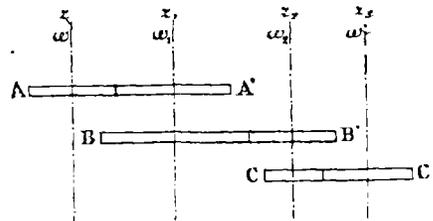


Fig. 335.

1° De désigner par la même lettre une roue quelconque de la suite et le nombre de dents qu'elle porte ;

(*) Dans des rouages d'horlogerie, qui ne constituent pas des assortiments, on descend jusqu'au pignon de six ailes.

2° D'écrire le rapport des vitesses angulaires de deux arbres en plaçant au numérateur la vitesse de l'arbre mené, et au dénominateur celle de l'arbre menant ;

3° De regarder ce rapport comme positif ou négatif, selon que les rotations correspondantes sont de même sens ou de sens contraires.

D'après cela, nous aurons, z étant considéré comme l'axe menant, et *tous les engrenages étant supposés droits et extérieurs* :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_1}{\omega} &= - \frac{A}{A'} \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} &= - \frac{B}{B'} \\ \frac{\omega'}{\omega_2} &= - \frac{C}{C'} \end{aligned} \right\}$$

d'où, en multipliant membre à membre

$$\frac{\omega'}{\omega} = (-1)^3 \frac{A B C}{A' B' C'}$$

Cette relation montre que : *la valeur absolue du rapport des vitesses angulaires des arbres extrêmes est égale au quotient du produit des nombres de dents des menantes par le produit des nombres de dents des menées.* Le signe du second membre indique que, dans le cas particulier considéré, les arbres extrêmes tournent en sens contraires.

Une telle combinaison constitue un équipage ou *train de roues dentées* ; on peut la définir : *un ensemble de rouages montés sur des axes fixes et engrenant deux à deux, de manière que la rotation du premier arbre de la série entraîne celle du dernier.*

388. Calcul de la raison. — On appelle *raison* d'un équipage de roues dentées : *le rapport de la vitesse angulaire du dernier arbre à celle du premier, affecté du signe + ou du signe - suivant que les rotations extrêmes sont de même sens ou de sens contraires.*

Le calcul précédent donne l'expression de la raison dans un cas particulier ; pour en généraliser les résultats, nous distinguerons entre la valeur absolue et le signe.

a) Valeur absolue de la raison.

Elle est toujours égale au quotient du produit des nombres de dents des roues menantes par le produit des nombres de dents des roues menées, car le rapport des vitesses angulaires de deux arbres reliés par un engrenage est toujours inverse du rapport des nombres de dents des roues, que celles-ci soient cylindriques, coniques, ou hélicoïdales...

b) Signe de la raison.

Nous distinguerons quatre cas :

1° *Les axes sont parallèles, et l'équipage ne renferme que des engrenages extérieurs.*

En appliquant à un nombre quelconque d'axes, que nous désignerons par n , le raisonnement suivi dans le cas particulier qui précède, on trouve sans difficulté

$$\frac{\omega'}{\omega} = (-1)^{n-1} \frac{A B C \dots}{A' B' C' \dots}$$

Cette expression montre que la raison est positive quand le nombre total d'axes est impair, et négative quand il est pair.

2° Les axes sont parallèles, et l'équipage ne renferme que des engrenages intérieurs.

Le rapport des vitesses angulaires de deux arbres consécutifs étant toujours positif dans cette hypothèse, la raison est elle-même positive.

3° Les axes sont parallèles, et l'équipage renferme à la fois des engrenages extérieurs et des engrenages intérieurs.

Ce cas est une combinaison des deux précédents ; le signe de la raison ne dépend que du nombre des axes qui portent des engrenages extérieurs. Il est + si ce nombre est impair, — s'il est pair.

4° Les axes sont quelconques.

L'équipage peut alors renfermer toutes les sortes de roues ; il n'y a lieu d'attribuer un signe à la raison que si les deux axes extrêmes sont parallèles. Mais il est impossible de fixer une règle générale ; on conçoit en effet que, un pignon et une vis sans fin, par exemple, étant donnés, le pignon tourne dans un sens ou dans l'autre pour un même mouvement de la vis, suivant que celle-ci est à gauche ou à droite.

Nous représenterons la raison d'un équipage de roues dentées par ϵ .

389. Influence d'une roue parasite.

On appelle ainsi une roue D (fig. 336), montée sur un axe intermédiaire, et engrenant à la fois avec une roue C de l'arbre qui précède et une roue C' de celui qui suit. La roue parasite joue le rôle de menante par rapport à C', et celui de menée par rapport à C ; sa présence ne change pas la valeur absolue de la raison, puisque son nombre de dents figure au numérateur et au dénominateur, et disparaît par simplification. Mais elle en modifie le signe, car le nombre total d'axes, augmentant d'une unité, change nécessairement de parité.

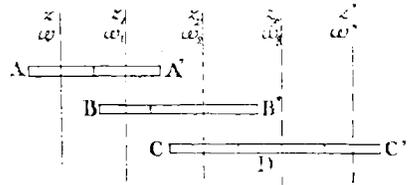


Fig. 336.

Une roue parasite, intercalée dans un équipage de roues dentées, ne produit donc qu'un changement dans le sens de la rotation finale. Cette propriété permet, quand on veut réaliser un équipage de raison déterminée, de ne pas s'occuper du signe, puisqu'on sera toujours maître de modifier le sens du mouvement du dernier arbre mené.

390. Problème inverse. — *Connaissant la raison ϵ d'un équipage de roues dentées, trouver les nombres des dents de toutes les roues qui le composent.*

Méthode. — Il faut essayer de mettre la raison donnée sous la forme d'une fraction $\frac{ABC \dots}{A'B'C' \dots}$ dont les deux termes soient des produits d'un nombre égal de facteurs, entiers, et compris entre des limites convenables (12 et 300 par exemple). Lorsqu'on y est parvenu, les facteurs du numérateur font connaître les nombres de dents des roues menantes, et ceux du dénominateur les nombres de dents des roues menées. On peut d'ailleurs intervertir les menantes entre elles, de même que les menées. Enfin, il faut autant d'axes qu'il y a de facteurs dans chaque terme de la fraction, plus un.

La transformation de la raison est impossible dans deux cas :

1° Si elle est incommensurable. Il n'existe, en effet, aucune fraction à termes entiers qui lui soit équivalente.

2° Si, tout en étant commensurable, il entre dans son expression, mise sous forme de fraction ordinaire irréductible, un ou plusieurs facteurs premiers dépassant le nombre adopté comme limite supérieure du nombre de dents d'une roue.

Dans ces deux circonstances, il est nécessaire, ou de se contenter d'une approximation, ou d'avoir recours à d'autres mécanismes. Nous allons traiter quelques exemples.

391. Applications. Problème I. — *Établir un équipage de roues dentées susceptible de relier, dans une horloge, l'aiguille des secondes, supposée menante, à l'aiguille des minutes.*

L'aiguille des secondes faisant soixante tours par heure, et l'aiguille des minutes un tour seulement, la valeur absolue de la raison est $\frac{1}{60}$; comme l'usage est de faire mouvoir les aiguilles dans le même sens, on a

$$\varepsilon = + \frac{1}{60}$$

Pour relier directement les deux arbres, il faudrait employer un engrenage intérieur, dont les roues auraient des nombres de dents proportionnels à 1 et 60 ; avec 8 dents seulement pour la menante, la menée devrait avoir 480 dents, ce qui est inadmissible. Il est donc nécessaire d'employer au moins un axe intermédiaire, et, par suite, de chercher une fraction équivalente à ε , dont chaque terme soit un produit de deux facteurs. On peut écrire

$$\varepsilon = \frac{1 \times 1}{10 \times 6}$$

ou, en multipliant le numérateur et le dénominateur par 8×8 .

$$\varepsilon = \frac{8 \times 8}{80 \times 48}$$

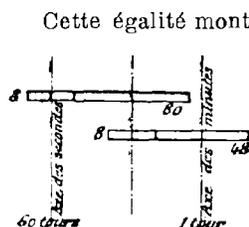


Fig. 337.

Cette égalité montre que deux menantes de 8 dents, associées à deux menées de 80 et 48 dents, répondent à la question. La première menante, montée sur l'axe des secondes, engrène avec la menée de 80 dents placée sur un axe intermédiaire, qui entraîne avec lui la deuxième menante. Celle-ci conduit enfin la roue de 48 dents calée sur l'axe des minutes (fig. 337). La raison de cet équipage est positive, de sorte que les aiguilles tournent dans le même sens.

Pour représenter schématiquement un équipage de roues dentées, on inscrit en regard l'un de l'autre, dans un tableau, les nombres de dents des roues qui engrènent ensemble, et au-dessous l'un de l'autre les nombres de dents des roues qui sont calées sur le même arbre. Cette convention conduit au diagramme suivant :

<i>Axe des secondes</i>	<i>Axe des minutes</i>
8	80
	8
	48

Pour mettre la raison $\frac{1}{60}$ sous la forme définitive $\frac{8 \times 8}{80 \times 48}$, on a multiplié ses deux termes par 8×8 , afin de ne pas donner moins de 8 dents aux menantes. Tout autre multiplicateur supérieur à 8×8 eût été acceptable, sous la réserve de ne pas donner au dénominateur des facteurs trop grands. Avec 12×15 par exemple, on a

$$\varepsilon = \frac{12 \times 15}{120 \times 90}$$

ce qui conduit à employer l'équipage suivant :

Axe des secondes	Axe des minutes	
12	90	
	15	120

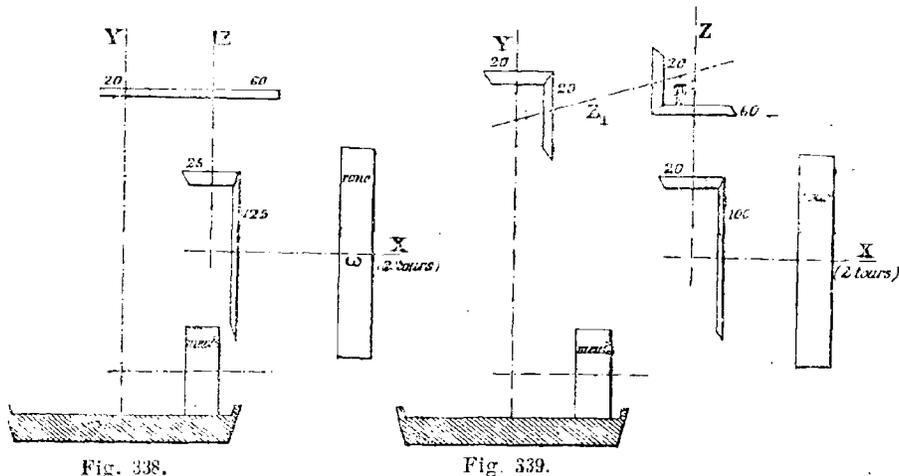
Le problème admet donc un grand nombre de solutions.

Problème II. — Établir un équipage de roues dentées susceptible de relier l'arbre horizontal X d'une roue hydraulique, faisant deux tours par minute, à l'axe vertical Y d'une meule à broyer, faisant trente tours dans le même temps.

La raison de l'équipage à réaliser est

$$\varepsilon = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{30}{2} = \frac{15}{1}$$

Comme les axes X et Y ne sont généralement pas dans un même plan, nous appliquerons l'une des solutions indirectes étudiées aux paragraphes 357 et 358. la seconde par exemple. Soit donc Z (fig. 338) un axe intermédiaire parallèle à Y et rencontrant X.



La transmission employant deux paires de roues, nous sommes conduits à transformer la raison de telle manière que chacun de ses termes soit un produit de deux facteurs. Posons

$$\varepsilon = \frac{15}{1} = \frac{5 \times 3}{1 \times 1}$$

En multipliant les deux termes du second membre par 25×20 , par exemple, il vient

$$\epsilon = \frac{125 \times 60}{25 \times 20}$$

L'équipage correspondant sera composé de deux roues d'angle, ayant respectivement 125 et 25 dents, montées sur les axes X et Z. Ce dernier entraînera en outre une roue droite de 60 dents, commandant une menée de 20 dents calée sur l'axe Y.

Cette solution suppose que les axes X et Y ne sont pas trop écartés, sans quoi il ne serait pas possible de transmettre le mouvement entre Y et Z par un engrenage de deux roues. S'il n'en est pas ainsi, il faut introduire un axe de plus, et adopter une disposition analogue à celle de la figure 339, nécessitant l'emploi de trois paires de roues coniques. On doit, dans ce cas, mettre la raison sous la forme d'une fraction dont chaque terme soit un produit de trois facteurs, et écrire

$$\epsilon = \frac{5 \times 3 \times 1}{1 \times 1 \times 1} = \frac{100 \times 60 \times 20}{20 \times 20 \times 20}$$

en employant, par exemple, le multiplicateur $20 \times 20 \times 20$. Les menantes auraient respectivement 100, 60 et 20 dents, et les menées uniformément 20 dents.

392. Cas où il existe dans les termes de la raison, rendue irréductible, des facteurs premiers considérables (*).

Soit proposé de relier, sur une horloge, l'aiguille des heures, supposée menante, à une aiguille marquant l'âge de la lune.

La durée d'une lunaison étant 29 j. 12 h. 44 m. = 42524 minutes, l'aiguille lunaire fait, en une minute, $\frac{1}{42524}$ de tour; celle des heures fait, dans le même temps, $\frac{1}{720}$ de tour; la raison de l'équipage à employer, qui doit être positive pour que les aiguilles tournent dans le même sens, est par conséquent

$$\epsilon = + \frac{720}{42524} = + \frac{180}{10631}$$

Or 10631 est un nombre premier; il n'est donc pas possible de procéder comme dans les exemples précédents, et l'on doit se contenter d'une approximation. Des méthodes rigoureuses, telle que celle indiquée au paragraphe suivant, permettent de réduire l'erreur au minimum; mais, à leur défaut, on peut chercher par tâtonnements une fraction voisine de ϵ qui ne présente pas le même inconvénient. Ajoutons, par exemple, une unité au dénominateur 42524 du premier rapport, et cherchons à réaliser un équipage dont la raison soit $\epsilon' = \frac{720}{42525}$; nous aurons

$$\epsilon' = \frac{2^4 \times 3^2 \times 5}{3^3 \times 5^2 \times 7} = \frac{2^4}{3^3 \times 5 \times 7} = \frac{8 \times 2}{27 \times 35}$$

ou, en multipliant les deux termes par 4, pour ne pas avoir au numérateur de facteur inférieur à 8

$$\epsilon' = \frac{8 \times 8}{54 \times 70}$$

(*) Nous entendons par là que ces facteurs premiers dépassent le plus grand nombre de dents qu'il est possible de donner à une roue.

L'équipage correspondant est figuré par le diagramme

<i>Axe des heures</i>	<i>Axe lunaire</i>
8	54
	8
	70

Il réalise la transmission demandée avec une erreur d'une minute par lunaison.

393. Méthode des fractions continues.

Elle consiste à décomposer la raison, mise sous forme de fraction ordinaire irréductible, en fraction continue, et à lui substituer, pour le calcul de l'équipage, une réduite qui se prête bien à l'application de la méthode suivie au paragraphe 391.

Reprenons l'exemple précédent, et décomposons $\varepsilon = \frac{180}{10631}$ en fraction continue. Cherchons, pour cela, le plus grand commun diviseur de 10631 et 180. Le tableau suivant résume les opérations

	59	16	2	1	3
10631	180	11	4	3	1
11	4	3	1	0	

La décomposition donne

$$\varepsilon = \frac{180}{10631} = \frac{1}{59 + \frac{1}{16 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}}$$

Les réduites successives sont

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{59} \\ r_2 &= \frac{1}{59 + \frac{1}{16}} = \frac{16}{945} \\ r_3 &= \frac{1}{59 + \frac{1}{16 + \frac{1}{2}}} = \frac{33}{1949} \\ r_4 &= \frac{1}{59 + \frac{1}{16 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}} = \frac{49}{2894} \\ r_5 &= \frac{1}{59 + \frac{1}{16 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}} = \varepsilon = \frac{180}{10631} \end{aligned}$$

On démontre que les réduites jouissent des propriétés suivantes :

- 1° Elles sont irréductibles ;
- 2° Les réduites d'indice impair sont plus grandes que la fraction décomposée, et décroissent à mesure que leur indice augmente ;
- 3° Les réduites d'indice pair sont plus petites que la fraction décomposée, et croissent à mesure que leur indice augmente ;
- 4° Il résulte de ces dernières propriétés que deux réduites consécutives comprennent entre elles la fraction décomposée ;
- 5° Une réduite se rapproche d'autant plus de la fraction décomposée que son indice est plus élevé ;
- 6° Toute fraction dont les termes sont inférieurs à ceux d'une réduite donnée, est moins approchée de la fraction décomposée que cette réduite elle-même.

Il découle de là que, si l'on substitue à la raison une de ses réduites, l'erreur commise est moindre que si l'on emploie une autre fraction quelconque à termes plus petits ; l'approximation, meilleure à mesure que la réduite est d'ordre plus élevé, est par excès pour une réduite d'indice impair, par défaut pour une réduite d'indice pair. Dans le cas actuel, on ne peut s'adresser qu'à l'une des deux premières réduites, car le dénominateur de la troisième est premier, et celui de la quatrième renferme le facteur premier 1447. La seconde réduite, $\frac{16}{945}$, donne, après décomposition en facteurs premiers, $\frac{2^4}{3^3 \times 5 \times 7}$. C'est précisément la valeur approchée que nous avons substituée tout à l'heure à la valeur exacte de la raison. Il n'y a là qu'une simple coïncidence.

394. Remarques. —.I. On peut aussi intercaler une fraction intermédiaire entre deux réduites consécutives, en les ajoutant terme à terme (*). En opérant ainsi pour la troisième et la quatrième, on obtient la fraction $\frac{82}{4843}$ dont les termes, décomposés en facteurs premiers, donnent $\frac{2 \times 41}{29 \times 167}$. En employant le multiplicateur 4 pour donner 8 dents à la première menante, on trouve la fraction $\frac{8 \times 41}{116 \times 167}$. L'équipage correspondant est figuré par le diagramme

Axe des heures	Axe lunaire	
8	116	
	41	167

Pour évaluer l'erreur commise, rappelons que la raison exacte de l'équipage à réaliser est $\varepsilon = \frac{720}{42524}$, fraction dans laquelle le dénominateur représente la durée d'une lunaison, évaluée en minutes. Inversement, $42524^m = \frac{720}{\varepsilon}$; de sorte que, si l'on remplace ε par une valeur approchée ε' , on substitue à la durée exacte de la lunaison une valeur $x = \frac{720}{\varepsilon'}$, approchée par défaut si $\varepsilon' > \varepsilon$, et par excès dans le cas contraire.

(*) On sait que la fraction ainsi obtenue est comprise entre les deux proposées.

En prenant $\varepsilon' = \frac{8^2}{4843}$, on trouve

$$x = \frac{720 \times 4843}{8^2} = 42523^m 54^s \frac{6}{41}$$

soit un écart, par défaut, d'un peu moins de six secondes par lunaison.

Avec $\varepsilon' = \frac{16}{945}$ $x = 42525^m$

L'écart, par excès, est d'une minute par lunaison

II. En raison même de leur loi de formation, les réduites sont inférieures à l'unité. Si donc la fraction à décomposer en fraction continue est plus grande que 1, il faut avoir soin d'inverser toutes les réduites. La fraction $\frac{10631}{180}$, par exemple, donnerait naissance aux réduites suivantes :

$$r_1 = \frac{59}{1} \quad r_2 = \frac{945}{16} \quad r_3 = \frac{1949}{33} \quad r_4 = \frac{2894}{49} \quad r_5 = \frac{10631}{180}$$

Ne pas faire l'inversion des réduites dans ce cas équivaldrait à prendre les roues menées comme menantes, et vice-versa.

III. CALCUL DES RÉDUITES. — Après avoir calculé r_1 et r_2 d'après leur définition, on peut obtenir rapidement toutes les autres réduites de la manière suivante. r_3 correspond au troisième quotient trouvé dans la recherche du P. G. C. D, soit 2. On multiplie par 2 les termes de r_2 , et l'on ajoute les produits terme à terme avec r_1 . On a, en effet

$$r_1 = \frac{1}{59} \quad r_2 = \frac{1}{59 + \frac{1}{16}} = \frac{16}{945} = \frac{16 \times 2}{945 \times 2}$$

En ajoutant terme à terme, il vient

$$\frac{16 \times 2 + 1}{945 \times 2 + 59} = \frac{33}{1949} = r_3$$

De même, r_4 correspond au quatrième quotient trouvé dans la recherche du P. G. C. D, soit 1. On multiplie les termes de r_3 par 1, et l'on ajoute terme à terme avec r_2 , ce qui donne

$$\frac{33 \times 1 + 16}{1949 \times 1 + 945} = \frac{49}{2894} = r_4$$

et ainsi de suite. En résumé :

Pour calculer une réduite correspondant au quotient q obtenu dans la recherche du P. G. C. D, on multiplie par q les termes de la dernière réduite trouvée, et l'on ajoute terme à terme avec l'avant-dernière.

395. Harnais d'engrenages. — Une machine reçoit généralement son mouvement d'un arbre moteur dont la vitesse de rotation est constante, de sorte qu'il est souvent nécessaire de pouvoir changer le rapport des vitesses entre l'arbre de commande et l'outil. On arrive à ce résultat par divers moyens, dont l'un consiste à intercaler, dans la chaîne cinématique qui relie ces deux organes, un équipage de roues dentées dont on modifie la composition à volonté. Quand cet équipage est installé à demeure sur la machine, on lui donne habituellement le nom de *harnais d'engrenages*. Des dispositions variables permettent de l'embrayer en totalité ou en partie, ou d'en supprimer com-

plètement l'effet, et chaque combinaison correspond à une vitesse différente de l'arbre mené. D'autres fois, au contraire, l'équipage est porté par un organe indépendant, appelé *tête de cheval*. C'est ce qui arrive dans le tour à fileter, par exemple. Ces deux systèmes sont, d'ailleurs, souvent réunis sur la même machine.

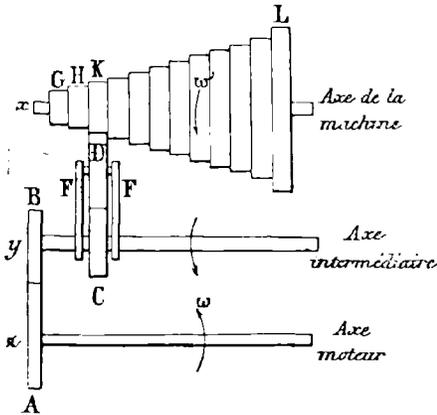


Fig. 340.

Le harnais Norton (fig. 340) donne un jeu de 12 vitesses par la simple manœuvre d'un levier. L'axe x de la machine est solidaire de 12 roues de même pas G, H, K, \dots, L dont chacune porte un nombre de dents différent. Il reçoit son mouvement d'un arbre intermédiaire y , commandé lui-même par l'axe moteur z au moyen de l'engrenage fixe AB . Une roue C est calée à rainure sur l'axe y , de manière à pouvoir glisser longitudinalement sur lui sans cesser d'être entraînée. Elle engrène avec une roue folle D , dont l'axe est porté par une fourche F , mobile autour de y , que l'on peut manœuvrer par un levier non représenté sur la figure. Si la commande de la machine a lieu par la roue K par exemple,

le rapport des vitesses angulaires des axes x est z est

$$\frac{\omega'}{\omega} = - \frac{AC}{BK}$$

On a donc

$$\omega' = - \omega \frac{AC}{BK}$$

Cette expression montre que, pour une même vitesse de l'arbre moteur, la rotation de l'axe x est d'autant plus rapide que la roue K est plus petite. Il suffit de déplacer le levier qui actionne la fourche F pour changer la vitesse ; ce levier, dont les diverses positions possibles sont repérées sur le bâti de la machine, peut être fixé dans chacune d'elles au moyen d'encoches pratiquées dans une coulisse graduée.

La figure 341 représente un harnais d'engrenages employé dans les étaux-limeurs Smith et Mills. L'arbre de commande Z reçoit un mouvement de rotation uniforme qu'il doit transmettre à l'axe parallèle Z' . Dans ce but, on cale sur Z un long pignon E , et sur Z' plusieurs roues A de différents diamètres. Pour assurer la liaison entre ces axes, on a disposé sur un plateau tournant B des pignons C , placés de telle manière que chacun d'eux puisse venir engrèner avec E et l'une des roues A . Le rapport des vitesses angulaires des arbres Z et Z' est le même que si le pignon E et la roue A considérée engrénaient directement (389).

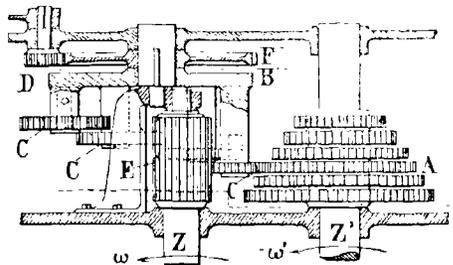
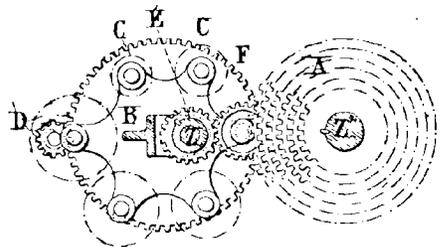


Fig. 341

La rotation du plateau B, commandée par une manivelle et le système de roues dentées DF, permet donc de donner à l'arbre mené, pour une valeur constante de la vitesse motrice, autant de vitesses différentes qu'il y a de roues A. Le changement de vitesses peut se faire pendant la marche.

396. Calcul d'un harnais ordinaire, à denture droite.

Un dispositif de changement de vitesse fréquemment employé dans les machines-outils consiste en deux paires de roues AB, CD, à denture droite ou hélicoïdale, montées comme l'indique le croquis 342. Dans les tours, par exemple, la roue A est solidaire du cône de commande et tourne librement avec lui sur l'arbre x , auquel la roue D et le plateau du tour sont invariablement liés. Les deux roues B et C sont calées sur le même axe y , qui peut être soulevé ou abaissé par la manœuvre d'un levier, de sorte que l'on peut, à volonté, produire ou supprimer l'engrènement des roues B et C avec les roues A et D. Quand le couple de roues (B, C) n'engrène pas avec le couple (A, D), la roue D est solidement fixée au cône S par des boulons, et la vitesse angulaire du plateau est égale à celle du cône de commande (*marche à la volée*). Au contraire, quand le couple (B, C) engrène avec le couple (A, D), la roue D est indépendante du cône, et le mouvement lui est communiqué par l'intermédiaire des roues A, B, C (*marche au harnais*). La vitesse angulaire ω' du plateau est alors liée à celle du cône de commande, soit ω , par la relation :

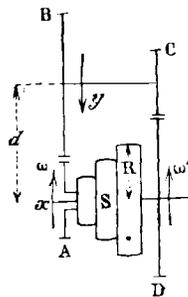


Fig. 342.

$$\frac{\omega'}{\omega} = \varepsilon = \frac{AC}{BD}$$

Il résulte évidemment de là que l'emploi du harnais double le nombre des vitesses qu'il est possible de donner au plateau du tour.

Raison du harnais. — Supposons, pour fixer les idées, que le cône soit à trois étages. Les six vitesses différentes résultant de l'emploi combiné du cône et du harnais forment habituellement une progression géométrique, dont le plus petit terme est obtenu quand le harnais est engagé, la courroie se trouvant sur le grand étage du cône, et dont le plus grand terme correspond à la marche à la volée, la courroie étant placée sur le petit étage du cône. Ces deux termes extrêmes sont connus, en fonction de la vitesse constante du renvoi, de la vitesse de coupe, et des rayons maximum et minimum des pièces que l'on pourra travailler sur la machine (voir au Chapitre XIII). Évaluons-les en nombres de tours par minute, et soit N le plus grand, N' le plus petit. Les diverses vitesses réalisables, rangées par ordre décroissant, sont alors

Volée	Harnais	Volée	Harnais	Volée	Harnais
N	$N \varepsilon$	$N \varepsilon^2$	$N \varepsilon^3$	$N \varepsilon^4$	$N \varepsilon^5 = N'$

On a donc
$$\varepsilon = \sqrt[5]{\frac{N'}{N}}$$

Cette formule fait connaître la raison du harnais. Comme $\frac{N'}{N}$ n'est généralement pas une puissance cinquième parfaite, on se contente d'une approximation. Si, par exemple,

$$N = 200 \text{ et } N' = 15$$

ou a
$$\varepsilon = 0,5957, \text{ soit, approximativement, } \frac{60}{100}.$$

Calcul des nombres de dents. — Les quatre roues du harnais sont habituellement du même module M . Les nombres de dents doivent satisfaire à trois conditions, savoir :

1° Une condition provenant du rapport de vitesses à réaliser

$$\varepsilon = \frac{AC}{BD} \quad (1)$$

2° Une condition exprimant le parallélisme nécessaire des axes x et y

$$d = \frac{M(A+B)}{2} = \frac{M(C+D)}{2}$$

ou
$$A + B = C + D \quad (2)$$

3° Une condition de montage ; la distance d doit être supérieure au rayon R du plus grand étage du cône S , ce qui donne

$$\frac{M(A+B)}{2} > R. \quad (3)$$

EXEMPLES, I — Supposons $M=2$, $\varepsilon = \frac{AC}{BD} = \frac{60}{100}$, $R=85$ m/m.

On décompose la raison ε , ou toute autre fraction équivalente, en un produit de deux fractions irréductibles, soit ici

$$\varepsilon = \frac{60}{100} = \frac{12}{20} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$$

Pour que la condition (1) soit satisfaite, il suffit que l'on ait

$$\frac{A}{B} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \frac{C}{D} = \frac{4}{5}$$

d'où il suit que A et B sont des équimultiples de 3 et 4, et C , D des équimultiples de 4 et 5. On peut donc poser, λ et μ désignant des nombres entiers à déterminer

$$\left. \begin{array}{l} A = 3\lambda \\ B = 4\lambda \\ C = 4\mu \\ D = 5\mu \end{array} \right\} \quad (4)$$

La condition (2), exprimant le parallélisme des axes, donne

$$7\lambda = 9\mu \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{9}{7}$$

ce qui montre que λ et μ doivent être des équimultiples de 9 et 7, soit, en désignant par k un nombre entier à déterminer

$$\lambda = 9k \quad \mu = 7k$$

En portant ces valeurs dans les équations (4) on trouve

$$\left. \begin{aligned} A &= 27k \\ B &= 36k \\ C &= 38k \\ D &= 35k \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Quelle que soit la valeur entière donnée à k , les nombres de dents tirés des équations (5) vérifient les relations (1) et (2). Il ne reste plus qu'à tenir compte de la relation (3), qui devient

$$\frac{M(A+B)}{2} = 63k > 85 \quad \text{ou} \quad k \geq 2.$$

En prenant $k=2$, on a

$$\left. \begin{aligned} A &= 54 \\ B &= 72 \\ C &= 56 \\ D &= 70 \end{aligned} \right\}$$

La distance réelle des axes x et y est $\frac{M(A+B)}{2} = 126\%$, supérieure de 41% au rayon du plus grand étage du cône.

II. En pratique, les roues du couple (A, B) sont habituellement égales aux roues du couple (C, D), c'est-à-dire que $A=C$ et $B=D$. La relation (1) prend la forme

$$\varepsilon = \frac{A^2}{B^2} = \frac{60}{100}$$

Comme $\frac{60}{100}$ n'est pas un carré parfait, une nouvelle approximation est nécessaire. On extrait la racine carrée avec une ou deux décimales, en arrondissant au besoin le résultat, ce qui donne ici

$$\frac{A}{B} = 0,76 \text{ ou, en fraction ordinaire irréductible, } \frac{A}{B} = \frac{19}{25}$$

On a donc, λ désignant un nombre entier à déterminer

$$\left. \begin{aligned} A &= 19\lambda \\ B &= 25\lambda \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

La condition (2) est évidemment satisfaite, puisque $A=C$, $B=D$. D'après la condition (3), qui devient $\frac{M(A+B)}{2} = 44\lambda > 85$.

λ doit être égal ou supérieur à 2. Avec $\lambda=2$, les nombres de dents sont $A=38$, $B=50$, et la distance réelle des axes xy , 88% , n'est pas suffisamment supérieure à 85% pour laisser libre passage au cône. On prendra donc $\lambda=3$, d'où

$$A=C=57 \quad B=D=75 \quad d=132\%.$$

396 bis. Calcul d'un harnais, à denture hélicoïdale.

Lorsque les roues du harnais sont à denture hélicoïdale, les pressions normales qu'elles se transmettent sont obliques aux axes de rotation, et comme le montrent les figures 343 et 343 bis, peuvent se décomposer chacune en deux forces, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à l'axe. Les composantes parallèles à l'axe occasionnent des poussées latérales, déjà signalées dans l'étude des roues hélicoïdales. Il convient de choisir les inclinaisons des dentures, dans les deux groupes (A, B), (C, D), de manière à équilibrer les poussées latérales qui se produisent sur les paliers de l'arbre mobile y .

En premier lieu, les dentures des roues B et C doivent être inclinées dans le même sens. Si l'on suppose, en effet, que la menante A tourne dans le sens de la flèche, son action sur une dent de B se traduit par une force P, normale à la direction IJ des hélices, et donne naissance à une poussée latérale $Q = P \sin \alpha$, α désignant l'inclinaison des dents du groupe (AB) rapportée aux axes. Mais la roue C, entraînée par la rotation de B, joue le rôle de menante par rapport à D, et supporte, de ce fait, une réaction P', normale à la direction I'J' de ses hélices, qui produit, à son tour, une poussée axiale $Q' = P' \sin \alpha'$. Dans le cas où, comme dans la figure 343, les dentures

IJ et I'J' sont inclinées en sens inverses, les poussées axiales Q et Q' s'ajoutent. Elles se retranchent, au contraire, si, comme dans la figure 343 bis, les dentures IJ et I'J' sont inclinées dans le même sens.

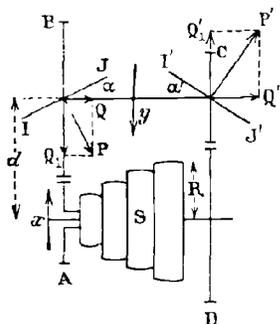


Fig. 343.

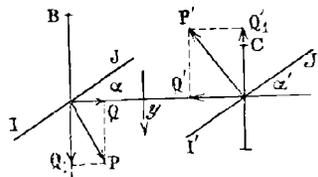


Fig. 343 bis.

D'après cela, pour équilibrer les poussées axiales qui s'exercent sur l'arbre y , il faut donner aux dentures des roues B et C, comme dans la figure 343 bis, des inclinaisons α , α' de même sens, et vérifiant la relation

$$P \sin \alpha = P' \sin \alpha' \tag{7}$$

Calcul des éléments A, B, C, D, α , α' du harnais. — Les quatre roues sont habituellement du même module normal m . Les nombres de dents et les angles α , α' doivent satisfaire à quatre conditions, savoir :

1° Une condition résultant du rapport des vitesses à réaliser.

$$\varepsilon = \frac{AC}{BD} \tag{8}$$

2° Une condition exprimant le parallélisme des arbres x et y .

$$d = \frac{m(A+B)}{2 \cos \alpha} = \frac{m(C+D)}{2 \cos \alpha'}$$

d'où

$$\frac{A+B}{\cos \alpha} = \frac{C+D}{\cos \alpha'} \tag{9}$$

3° Une condition exprimant l'équilibre des poussées axiales sur l'arbre y . Nous la trouverons en transformant l'équation (7), de manière à y introduire les nombres de dents des roues. Soient R_b et R_c les rayons primitifs des roues B et C; les moments des forces P et P' par rapport à l'axe y étant évidemment égaux en valeur absolue, on a, en appelant Q_1 et Q'_1 les composantes de ces forces dans des plans perpendiculaires à y

$$Q_1 \times R_b = Q'_1 \times R_c$$

ou

$$P \times R_b \cos \alpha = P' \times R_c \cos \alpha'$$

relation qui, comparée à (7), donne par division

$$\frac{R_b \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{R_c \cos \alpha'}{\sin \alpha'}$$

ou, en tenant compte de $R_b = \frac{mB}{2 \cos \alpha}$, $R_c = \frac{mC}{2 \cos \alpha'}$ et en simplifiant

$$\frac{B}{\sin \alpha} = \frac{C}{\sin \alpha'} \quad (10)$$

4° Une condition de montage, exprimant que la distance d des axes x et y est supérieure au rayon R du plus grand étage du cône, soit

$$\frac{m(A+B)}{2 \cos \alpha} > R \quad (11)$$

En résumé, les nombres de dents A, B, C, D et les angles α , α' doivent, pour réaliser un rapport de réduction donné $\frac{\omega'}{\omega} = \varepsilon$ et assurer l'équilibre des poussées axiales sur l'arbre y , vérifier les quatre relations

$$\varepsilon = \frac{AC}{BD} \quad (8)$$

$$\frac{A+B}{\cos \alpha} = \frac{C+D}{\cos \alpha'} \quad (9)$$

$$\frac{B}{\sin \alpha} = \frac{C}{\sin \alpha'} \quad (10)$$

$$\frac{m(A+B)}{2 \cos \alpha} > R \quad (11)$$

Nous supposons provisoirement connus des nombres de dents satisfaisant à l'équation (8), et nous calculerons les angles α , α' d'après les équations (9) et (10), en appliquant les propriétés des rapports égaux et les formules de transformation

$$\sin \alpha + \sin \alpha' = 2 \sin \frac{\alpha + \alpha'}{2} \cos \frac{\alpha - \alpha'}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \alpha' = 2 \sin \frac{\alpha - \alpha'}{2} \cos \frac{\alpha + \alpha'}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \alpha' = 2 \cos \frac{\alpha + \alpha'}{2} \cos \frac{\alpha - \alpha'}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \alpha' = -2 \sin \frac{\alpha + \alpha'}{2} \sin \frac{\alpha - \alpha'}{2}$$

On déduit de l'équation (9)

$$\frac{A+B}{\cos \alpha} = \frac{C+D}{\cos \alpha'} = \frac{A+B+C+D}{2 \cos \frac{\alpha+\alpha'}{2} \cos \frac{\alpha-\alpha'}{2}} = \frac{(C+D) - (A+B)}{2 \sin \frac{\alpha+\alpha'}{2} \sin \frac{\alpha-\alpha'}{2}}$$

d'où
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha+\alpha'}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha-\alpha'}{2} = \frac{(C+D) - (A+B)}{A+B+C+D} \quad (12)$$

L'équation (10) donne ensuite

$$\frac{B}{\sin \alpha} = \frac{C}{\sin \alpha'} = \frac{B+C}{2 \sin \frac{\alpha+\alpha'}{2} \cos \frac{\alpha-\alpha'}{2}} = \frac{B-C}{2 \sin \frac{\alpha-\alpha'}{2} \cos \frac{\alpha+\alpha'}{2}}$$

d'où
$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\alpha'}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\alpha'}{2}} = \frac{B-C}{B+C} \quad (13)$$

En multipliant, puis en divisant membre à membre les équations (12) et (13) on trouve

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha-\alpha'}{2} = \frac{(B-C) [(C+D) - (A+B)]}{(B+C) (A+B+C+D)} \quad (14)$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha+\alpha'}{2} = \frac{(B+C) [(C+D) - (A+B)]}{(B-C) (A+B+C+D)} \quad (15)$$

Ces formules font connaître $\frac{\alpha-\alpha'}{2}$ et $\frac{\alpha+\alpha'}{2}$. On en déduit, par addition et soustraction, α et α' . Mais il faut observer que les nombres mis à la place de A, B, C, D doivent rendre positifs les seconds membres des équations (14 et 15). Il faut et il suffit, pour cela, que l'on ait

$$(B-C) [(C+D) - (A+B)] > 0 \quad (16)$$

EXEMPLE. — Supposons $m=2$, $\varepsilon = \frac{AC}{BD} = \frac{60}{100}$, $R=85$ m/m.

1° *Calcul des nombres de dents.* — On emploie les relations (8), (11) et (16). Pour utiliser la relation 8, on décompose la raison ε , ou toute autre fraction ordinaire équivalente, en un produit de deux fractions irréductibles, comme dans le cas du harnais à denture droite, soit ici

$$\varepsilon = \frac{60}{100} = \frac{12}{20} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{AC}{BD} = \frac{A}{B} \times \frac{C}{D}$$

En posant $\frac{A}{B} = \frac{3}{4}$, $\frac{C}{D} = \frac{4}{5}$, cette équation sera satisfaite. On aura donc, λ et μ désignant des nombres entiers à déterminer,

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 3\lambda \\ B = 4\lambda \\ C = 4\mu \\ D = 5\mu \end{array} \right. \quad (17)$$

D'autre part, l'inégalité (16) devient

$$4 (\lambda - \mu) (9 \mu - 7 \lambda) > 0$$

En considérant son premier membre comme un trinôme du second degré en μ , on voit que μ ne pourra recevoir que des valeurs intérieures aux racines, λ et $\frac{7 \lambda}{9}$,

soit
$$\frac{7 \lambda}{9} < \mu < \lambda \tag{18}$$

Il reste à tenir compte de la relation (11), qui donne,

$$\frac{7 \lambda}{\cos \alpha} > 85 \quad \text{ou} \quad \lambda > \frac{85 \cos \alpha}{7}$$

Or, α est inconnu ; mais son cosinus étant inférieur à l'unité, il suffit que l'on ait $\lambda > \frac{85}{7}$ ou 12, 14. Afin de ne pas donner à la distance $d = \frac{M(A+B)}{2 \cos \alpha}$ des axes x et y une valeur exagérée, il convient d'attribuer à λ une valeur assez voisine du quotient $\frac{85}{7} = 12,14$. Prenons, par exemple, $\lambda = 13$. Les inégalités (18) donnent alors

$$\frac{91}{9} < \mu < 13$$

ou
$$10,11 < \mu < 13$$

soit $\mu = 11$ ou 12. En prenant $\mu = 11$, les nombres de dents à employer sont, d'après les équations (17)

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 3 \lambda = 39 \\ B = 4 \lambda = 52 \\ C = 4 \mu = 44 \\ D = 5 \mu = 55 \end{array} \right.$$

2° *Calcul des angles α, α' .* On emploie les formules (14) et (15), qui deviennent en remplaçant les quantités par leurs valeurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{1}{270} \\ \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \alpha'}{2} = \frac{8}{15} \end{array} \right.$$

On en déduit (par logarithmes),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha - \alpha'}{2} = 3^{\circ} 29' \\ \frac{\alpha + \alpha'}{2} = 36^{\circ} 8' \end{array} \right.$$

puis

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 39^{\circ} 37' \\ \alpha' = 32^{\circ} 39' \end{array} \right.$$

La distance des axes x, y correspondant à ces résultats est

$$d = \frac{m(\Lambda + B)}{2 \cos \alpha} = \frac{91}{\cos 39^{\circ} 37'} = 118 \text{ m/m } 13$$

supérieure de 33 m/m environ au rayon du plus grand étage du cône.

397. Tour à fileter.

Dans le tour à fileter, le mouvement de rotation communiqué par les poulies étagées K à l'axe xx' de la poupée fixe et à la pièce à travailler C (fig. 344), est transmis par un équipage de roues dentées à une vis V, de pas donné P, appelée *vis-mère*, située sous le banc du tour, et traversant un écrou E, solidaire du chariot porte-outil. Grâce à cette disposition, l'outil se déplace parallèlement à xx' et trace, sur le cylindre C, une hélice, dont il est facile d'exprimer le pas P' en fonction des nombres de tours N et N' que la pièce et la vis-mère effectuent pendant le même temps.

Le déplacement du chariot pour N' tours de vis est $N'P$; pour N tours de la pièce, il est égal à NP' . On a donc

$$N'P = NP'$$

ou

$$\frac{N'}{N} = \frac{P'}{P}$$

Or, $\frac{N'}{N}$ est le rapport des vitesses angulaires de l'axe de la vis-mère et de l'axe du tour, c'est-à-dire, au signe près, la raison de l'équipage de roues dentées qui transmet le mouvement du second, considéré comme menant, au premier. Par conséquent, construire une vis de pas donné revient à réaliser un équipage de roues dentées connaissant sa raison, égale, en valeur absolue, au rapport $\frac{P'}{P}$. La première roue est fixée sur l'arbre menant, et la dernière sur l'axe de la vis.

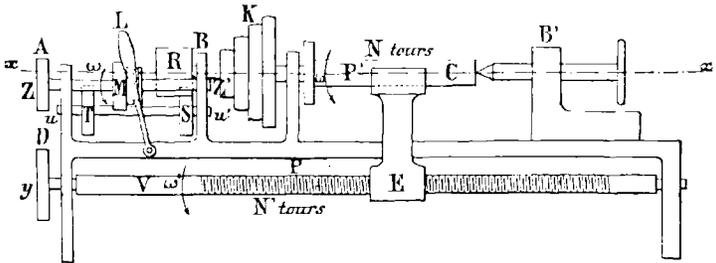


Fig. 344.

Il est donc indispensable de pouvoir former un très grand nombre d'équipages de raisons différentes ; à cet effet, chaque tour est muni d'un assortiment de roues, plus ou moins complet suivant les cas, mais dans la composition duquel il faut faire figurer des nombres de dents multiples de la plupart des facteurs premiers inférieurs à 100, si l'on veut que la présence de l'un de ces facteurs dans la raison $\frac{P'}{P}$ ne soit pas un obstacle à l'exécution rigoureuse de la vis. Dans les petits tours, l'assortiment est souvent formé de roues dont les nombres de dents sont des multiples de 5.

Il faut, presque toujours, introduire dans la composition de l'équipage des axes intermédiaires. Pour les porter, on dispose à l'extrémité du banc de tour, du côté de la poupée fixe, une pièce appelée *tête de cheval* (fig. 345). La partie circulaire M est placée concentriquement à la vis-mère ; la partie N est percée de rainures a dans lesquelles on introduit les axes intermédiaires ; ceux-ci peuvent être rendus solidaires de N au moyen d'écrous. Enfin, lorsque la tête de cheval a reçu la position convenable, on la fixe sur le bâti du tour par des boulons pénétrant dans les rainures b.

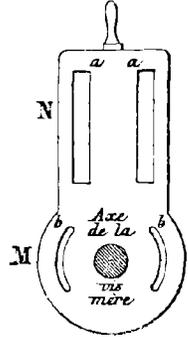


Fig. 345

Il importe de pouvoir changer à volonté le sens de la rotation de la vis-mère par rapport à celui de l'axe du tour, d'une part, afin de ramener l'outil à sa première position lorsqu'il a parcouru toute la longueur de la pièce C, d'autre part, afin de pouvoir exécuter des vis indifféremment à droite ou à gauche avec une même vis-mère, supposée à droite par exemple. Il existe pour cela des dispositifs très nombreux dont l'effet est toujours de faire tourner un axe zz' (fig. 344), parallèle à l'axe du tour, avec la même vitesse que celui-ci et, suivant les besoins, dans le même sens ou en sens contraire. Celui qui est représenté se compose de quatre pignons égaux RSTM. Le premier est calé sur l'axe des poupées, les deux suivants sur un axe parallèle uv' , et le quatrième est calé à rainure sur l'axe zz' , qu'il peut parcourir sous l'action du levier L, de manière à venir engrener soit avec R, soit avec T. Les pignons R et S engrenent à demeure. Quand M engrène avec R, les axes xv' , zz' tournent en sens contraires, et le système ST n'intervient pas dans la transmission. Quand M engrène avec T, le mouvement de R se transmet à M par l'intermédiaire des pignons S et T, de sorte que les axes xv' , zz' tournent dans le même sens. Dans les deux circonstances, les vitesses angulaires de ces axes sont les mêmes, à cause de l'égalité des pignons RSTM. C'est sur l'axe z que l'on fixe la première roue A du train propre à assurer l'exécution de la vis voulue, la dernière D étant portée par la vis-mère. Les roues intermédiaires n'ont pas été figurées.

Afin de donner des exemples, supposons que le pas de la vis-mère soit de 40 millimètres, et que l'assortiment de roues soit composé de la façon suivante :

Nombres de dents			
15	27	45	70
17	30	50	80
19	33	55	100
20	35	57	120
22	38	60	130
25	40	65	150

Nous distinguerons trois cas :

Premier cas. — Il existe, dans l'assortiment, deux roues dont les nombres de dents sont équimultiples des pas de la vis à exécuter et de la vis-mère.

En supposant $P' = 4m/m$, on a

$$\frac{P'}{P} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

La question revient à former un équipage de roues dentées dont la raison soit $\frac{2}{5}$.

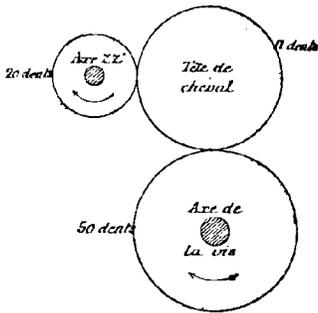


Fig. 346.

Il suffit d'une menante et d'une menée, dont les nombres de dents respectifs soient des équimultiples de 2 et 5. Plusieurs couples de roues de la série satisfont à cette condition, celles de 20 et 50 dents par exemple. La menante de 20 dents sera calée sur l'axe zz' , et la menée de 50 dents sur l'axe de la vis. Comme elles n'engrèneront généralement pas ensemble à cause de la distance des axes, on placera sur un axe intermédiaire, porté par la tête de cheval, une roue parasite d'un nombre quelconque de dents, qui transmettra le mouvement de la première à la seconde (fig. 346). On sait que l'emploi de cette roue ne change pas le rapport des vitesses angulaires des arbres extrêmes (389).

Par suite de cette disposition, la vis-mère et l'axe zz' tournent dans le même sens. Si la vis à exécuter doit être à droite comme la vis-mère, l'axe des poupées doit tourner dans le même sens que zz' , et il faut embrayer les pignons M et T; on embrayerait au contraire M et S pour faire une vis à gauche.

Deuxième cas. — *L'assortiment ne renferme pas de roues dont les nombres de dents soient équimultiples des pas de la vis à exécuter et de la vis-mère; mais le rapport $\frac{P'}{P}$ est décomposable en un produit de deux ou trois autres, tels que les termes de chacun d'eux ont des équimultiples parmi les nombres de dents des roues de l'assortiment.*

En supposant $P' = 12 m/m 1/4$, on a $\frac{P'}{P} = \frac{49}{40}$. Comme il n'existe pas, dans la série, deux roues dont les nombres de dents soient proportionnels à 49 et 40, on écrit

$$\frac{P'}{P} = \frac{49}{40} = \frac{7}{8} \times \frac{7}{5}$$

Or, l'assortiment renferme deux roues (celles de 70 et 80 dents) dont les nombres de dents sont dans le rapport $\frac{7}{8}$, et deux autres (celles de 35 et 25 dents) dont les nombres de dents sont dans le rapport $\frac{7}{5}$. En mettant $\frac{P'}{P}$ sous la forme

$$\frac{P'}{P} = \frac{7}{8} \times \frac{7}{5} = \frac{70 \times 35}{80 \times 25}$$

on est conduit à employer deux menantes de 70 et 35 dents, et deux menées de 80 et 25 dents. La roue de 70 dents étant placée sur l'axe zz' , commandera celle de 25 dents portée par la tête de cheval. Sur le même axe auxiliaire que la précédente sera calée la roue de 35 dents, qui entraînera la roue de 80 dents solidaire de la vis-mère (fig. 347). Comme dans le cas précédent, l'axe zz' et la vis-mère tourneront dans le même sens.

Il est parfois nécessaire de décomposer le rapport $\frac{P'}{P}$ en un produit de trois autres, pour trouver des termes ayant des équimultiples parmi les nombres de dents des roues de l'assortiment. Si, par exemple, $P' = 13m_{in}09$, on a

$$\begin{aligned} \frac{P'}{P} &= \frac{1309}{4000} = \frac{7 \times 11 \times 17}{8 \times 5 \times 25} \\ &= \frac{70 \times 33 \times 17}{80 \times 15 \times 25} \end{aligned}$$

Il faut alors fixer sur la tête de cheval deux axes intermédiaires ; la disposition des roues est indiquée sur la figure 348. Dans ce cas, la vis et l'axe zz' tournent en sens contraires.

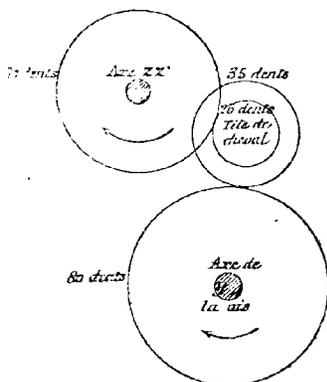


Fig. 347.

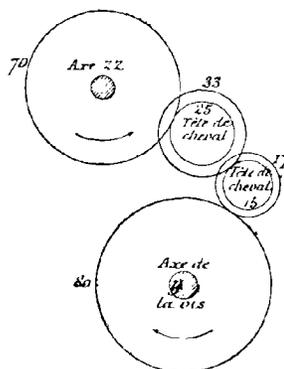


Fig. 348.

On pourrait, théoriquement, appliquer la même méthode quand $\frac{P'}{P}$ est décomposable en un produit de quatre, cinq... fractions dont les termes ont des équimultiples dans les nombres de dents des roues de l'assortiment. Mais ceci ne présente aucune utilité pratique, les dimensions de la tête de cheval ne permettant pas de lui faire supporter plus de deux axes intermédiaires.

Remarque. — On sait que la raison d'un équipage de roues dentées ne change pas si, conservant les menantes et les menées, on intervertit l'ordre des unes ou des autres. On pourra donc user de cette propriété dans les tours, mais *il est essentiel d'observer que, dans certains cas, le montage devient impossible.* Supposons, pour fixer les idées, un train de filetage à quatre roues, A, B, C, D, disposées de la manière suivante

AXE zz'	TÊTE DE CHEVAL	VIS-MÈRE
A	B	
	C	D

En désignant par M le module commun, la distance d'axes entre C et D est $\frac{M(C+D)}{2}$; le rayon primitif de B est $\frac{MB}{2}$; on doit donc avoir

$$\frac{M(C+D)}{2} > \frac{MB}{2}$$

ou $C + D > B$. D'une manière générale, si l'on compte les nombres de dents des roues du train dans l'ordre d'engrènement, la somme des nombres de dents de deux roues consécutives qui se mènent doit être supérieure au nombre de dents de la roue suivante. Ainsi, dans la figure 347, l'ordre d'engrènement donne les nombres successifs

$$\begin{array}{ccc} 70 & 25 & \\ & 35 & 80 \end{array}$$

et le montage est possible ($80 + 35 > 25$). Si l'on adoptait l'ordre

$$\begin{array}{ccc} 70 & 80 & \\ & 35 & 25 \end{array}$$

le montage serait impossible ($25 + 35 < 80$).

Troisième cas. — *On ne se trouve dans aucun des cas précédents.*

Soit $P' = 7^m/m1$. On a $\frac{P'}{P} = \frac{71}{100}$. La fraction $\frac{71}{100}$ est irréductible, et le nombre 71 est premier. Comme l'assortiment ne renferme aucune roue dont le nombre de dents soit multiple de 71, il faut se contenter d'une approximation, et chercher une combinaison de roues qui réduise l'erreur au minimum. On peut procéder pour cela de plusieurs manières :

1° On décompose le rapport $\frac{P'}{P}$ en fraction continue, et on lui substitue l'une de ses réduites.

En effectuant sur les nombres 71 et 100 les opérations relatives à la recherche du P. G. C. D., on trouve

	1	2	2	4	3
100	71	29	13	3	1
29	13	3	1	0	

Par conséquent

$$\frac{P'}{P} = \frac{71}{100} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}}}}$$

Les réduites successives sont

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1} && = 1 \\ r_2 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} && = \frac{2}{3} \\ r_3 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} && = \frac{5}{7} \\ r_4 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}} && = \frac{22}{31} \\ r_5 &= r && = \frac{71}{100} \end{aligned}$$

Eu remplaçant $\frac{71}{100}$ par sa valeur approchée r_4 , on a

$$r_4 = \frac{22}{31} = \frac{2 \times 11}{31 \times 1} = \frac{20 \times 55}{31 \times 50}$$

ce qui conduit à employer deux menantes de 20 et 55 dents, et deux menées de 31 et 50 dents, disposées comme dans la figure 347. Le pas P'_1 de la vis exécutée est donné par

la relation
$$\frac{P'_1}{P} = \frac{22}{31}.$$

L'erreur commise est

$$P' - P'_1 = \frac{71 P}{100} - \frac{22 P}{31} = \frac{P}{3100} = \frac{1m/m}{310}$$

Le pas P'_1 est approché par défaut.

2° On peut intercaler une fraction entre deux réduites consécutives, en les ajoutant terme à terme (394).

En procédant ainsi pour r_3 et r_4 , on substitue à $\frac{71}{100}$ la valeur approchée

$$r' = \frac{22 + 5}{31 + 7} = \frac{27}{38}.$$

Comme il existe dans la série des roues de 27 et 38 dents, l'on est ramené au premier cas (fig. 346). Le pas de la vis exécutée est $P'_2 = \frac{27}{38} P$. L'erreur commise est de

$$\frac{27 P}{38} - \frac{71 P}{100} = \frac{P}{1900} = \frac{1m/m}{190} \text{ par excès.}$$

3° Enfin, on peut procéder par tâtonnements, en cherchant à mettre $\frac{P'}{P}$ sous la forme d'un produit de deux facteurs, dont l'un est pris arbitrairement parmi ceux que deux roues de l'assortiment permettent d'obtenir, et dont l'autre est modifié de manière à devenir réalisable. Posons par exemple

$$\frac{P'}{P} = \frac{71}{100} = \frac{1}{8} \times \frac{x}{y}$$

ce qui donne

$$\frac{x}{y} = \frac{71 \times 8}{100} = \frac{568}{100}$$

et par suite

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{8} \times \frac{568}{100}$$

En remplaçant $\frac{568}{100}$ par la valeur approchée $\frac{570}{100}$ ou $\frac{57}{10}$, on peut construire une vis dont le pas P_3 est déterminé par la relation

$$\frac{P_3}{P} = \frac{1}{8} \times \frac{57}{10} = \frac{57}{80}$$

Il suffit d'une menante de 57 dents, et d'une menée de 80 dents, réunies par une roue parasite portée par la tête de cheval. L'erreur commise est

$$\frac{57 P}{80} - \frac{71 P}{100} = \frac{P}{400} = \frac{1\text{m/m}}{40} \text{ par excès.}$$

Elle est plus considérable qu'avec les autres méthodes. On peut souvent la diminuer en remplaçant le rapport initial $\frac{1}{8}$ par un autre convenablement choisi. En posant, par exemple,

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{6} \times \frac{x}{y}$$

on trouve

$$\frac{x}{y} = \frac{426}{100}$$

et par suite

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{6} \times \frac{426}{100}$$

En remplaçant $\frac{426}{100}$ par $\frac{425}{100}$, on construira une vis de pas P_4 ,

$$P_4 = \frac{1}{6} \times \frac{425}{100} = \frac{17}{24} = \frac{17 \times 1}{4 \times 6} = \frac{34 \times 25}{40 \times 30}$$

avec deux menantes de 34 et 25 dents et deux menées de 40 et 30 dents disposées comme dans la figure 347. L'erreur commise est

$$\frac{71 P}{100} - \frac{17 P}{24} = \frac{P}{600} = \frac{1\text{m/m}}{60} \text{ par défaut.}$$

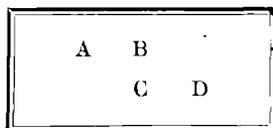
398. Problème. — *L'arbre d'un tour à fileter est mené par un harnais d'engrenages du type représenté dans la figure 342, dont les nombres de dents sont respectivement A = 30 B = 50 C = 20 D = 60. Les poulies S tournent à raison de quinze tours par minute. Calculer :*

1° Les vitesses de l'arbre du tour ;

2° Les vitesses circonférentielles correspondantes d'une pièce de deux centimètres de rayon ;

3° Les vitesses de translation du chariot, quand le pas de la vis à exécuter est $12\text{m/m} \frac{1}{4}$, et celui de la vis-mère 10m/m .

L'arbre du tour prend sa plus grande vitesse quand il est mené directement par les poulies S ; elle est de quinze tours par minute ; la vitesse minimum est réalisée quand le mouvement est commandé par l'intermédiaire du harnais



Évaluée en nombre de tours, elle est de $15 \times \frac{AC}{BD} = \frac{15 \times 30 \times 20}{50 \times 60} = 3$ tours par minute.

En désignant par ω_1 et ω_2 les vitesses angulaires de la pièce dans ces conditions, les vitesses circonférentielles correspondantes sont, en millimètres par seconde

$$v_1 = \omega_1 R = \frac{\pi N_1}{30} \times 20 = \frac{15 \pi \times 20}{30} = 10 \pi = 31^m/m41$$

$$v_2 = \omega_2 R = \frac{\pi N_2}{30} \times 20 = \frac{3 \pi \times 20}{30} = 2 \pi = 6^m/m28$$

Enfin, la raison de l'équipage à employer pour exécuter la vis demandée est $\frac{12.1/4}{40} = \frac{49}{40}$ (397 — deuxième cas). C'est aussi le rapport des nombres de tours que font la vis-mère et la pièce pendant le même temps. Par suite, les nombres de tours faits en une minute par la vis-mère sont, dans les deux cas considérés,

$$15 \times \frac{49}{40} = 18 \text{ tours } \frac{3}{8}$$

et $3 \times \frac{49}{40} = 3 \text{ tours } \frac{27}{40}$

Comme le chariot se déplace, à chaque tour de la vis mère, d'une quantité égale au pas de cette dernière, les vitesses de translation correspondantes sont, en millimètres par seconde

$$18.3/8 \times \frac{40}{60} = 3^m/m06$$

$$3.27/40 \times \frac{40}{60} = 0^m/m61$$

TRAINS ÉPICYCLOÏDAUX

399. **Définition.** — Les trains épicycloïdaux sont des combinaisons de roues dentées dans lesquelles l'un des axes au moins est entraîné dans une rotation autour d'un axe fixe. Les axes mobiles sont portés par un châssis, appelé *bras porte-train*, qui tourne autour de l'axe fixe. Le nom donné à ces mécanismes vient de ce que chaque point d'une roue portée par un axe mobile décrit une épicycloïde : plane, lorsque les axes de rotation sont parallèles, ou sphérique, lorsqu'ils sont concourants.

400. **Formule de Willis.**

Supposons, pour fixer les idées, que le système soit composé de la façon suivante : Le châssis oA (fig. 349) tourne autour de l'axe fixe z avec une vitesse angulaire ω ; une

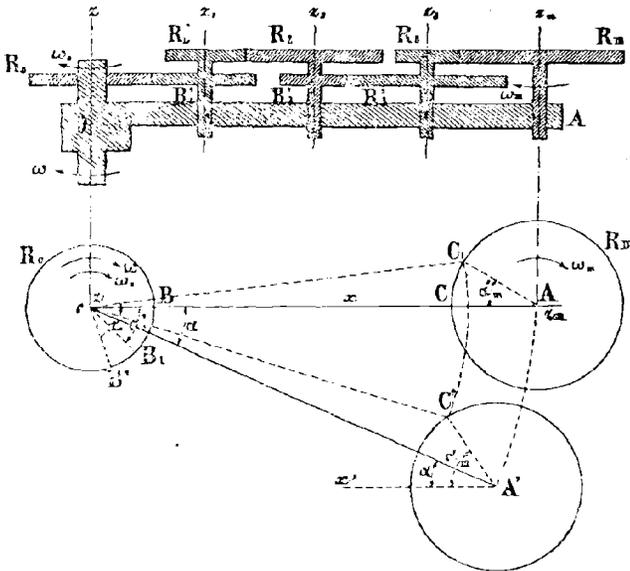


Fig. 349.

roue R_0 , folle sur cet axe, reçoit un mouvement de rotation de vitesse angulaire absolue ω_0 , indépendant du mouvement de oA . La roue R_0 est la première d'un équipage dont les axes $z_1 z_2 z_3 \dots z_m$ sont portés par le châssis. Sous l'influence des rotations ω_0 et ω , chaque roue de cet équipage se met en mouvement ; soit ω_m la vitesse angulaire absolue de la dernière roue, évaluée en rapportant sa rotation à une droite de direction invariable passant par son centre. Un déplacement infiniment petit du système amène le bras porte-train dans la position oA' ,

correspondant à un angle de rotation $\alpha = \omega dt$, et les points BC des roues extrêmes en $B'C'$, correspondant à des angles de rotation $BoB' = \alpha_0 = \omega_0 dt$, $A'A'C' = \alpha_m = \omega_m dt$. Imprimons maintenant à tout le mécanisme un mouvement de rotation de vitesse angulaire $-\omega$ autour de l'axe z ; les mouvements relatifs de ses diverses parties ne sont pas changés, et, après le même temps dt , oA' revient en oA , tandis que B' et C' prennent des positions B_1 et C_1 qui, rapportées à la position primitive de la figure, correspondent à des angles de rotation

$$BoB_1 = \alpha'_0 = \alpha_0 - \alpha = (\omega_0 - \omega) dt$$

$$A'A_1C_1 = \alpha'_m = \alpha_m - \alpha = (\omega_m - \omega) dt$$

Tout se passe donc comme si, le bras porte-train restant immobile, les roues extrêmes tournaient autour de leurs axes respectifs avec des vitesses angulaires égales à $\omega_o - \omega$ et $\omega_m - \omega$. Mais, dans ces conditions, le système fonctionne comme un équipage de roues dentées à axes fixes, dans lequel la raison ε est égale au rapport de la vitesse angulaire de la dernière roue à celle de la première. On a donc

$$\varepsilon = \frac{\omega_m - \omega}{\omega_o - \omega}$$

Cette formule, due à Willis, est générale (*). Afin de prévenir des erreurs dans son application, nous insisterons particulièrement sur les points suivants :

1° La raison ε est calculée en supposant le châssis immobile ; elle est exprimée numériquement par le rapport du produit des nombres de dents des menantes au produit du nombre de dents des menées, affecté du signe + ou du signe - selon que, le système fonctionnant comme un équipage de roues dentées à axes fixes, les rotations extrêmes sont de même sens ou de sens contraires. C'est donc une constante pour un train donné.

2° La première roue d'un train épicycloïdal est toujours concentrique au châssis ; c'est elle qu'il faut considérer comme la première menante dans le calcul de la raison. Lorsque le train est composé de telle sorte que deux roues soient concentriques au châssis, on peut prendre, indifféremment, l'une ou l'autre comme la première du système.

3° La rotation de la dernière roue est rapportée à une droite de direction invariable menée par son centre, dans son plan ; les vitesses angulaires ω , ω_o , ω_m sont positives si elles sont dirigées dans un sens convenu, tel que celui des aiguilles d'une montre, pour un observateur debout sur le plan du mouvement, et négatives dans le sens contraire.

401. Remarques. I. — La formule de Willis, appliquée à un train donné, contient trois indéterminées ω , ω_o et ω_m , dont deux doivent être connues pour que l'on puisse calculer la troisième. De là découlent deux manières différentes d'utiliser un train épicycloïdal.

1° On peut donner les vitesses des deux roues extrêmes ω_o et ω_m ; l'inconnue est alors la vitesse angulaire ω du porte-train. Il faut nécessairement, dans ce cas, que les roues extrêmes soient montées sur des axes fixes, afin que le mouvement puisse leur être communiqué de l'extérieur par les procédés ordinaires. Il ne peut en être ainsi que si ces roues sont toutes deux concentriques au châssis.

Les trains épicycloïdaux étudiés aux paragraphes 409, 410 et 411 rentrent dans cette catégorie.

2° On peut donner la vitesse ω du châssis et celle de l'une des roues extrêmes (soit ω_o ou ω_m), laquelle est nécessairement concentrique au châssis. L'inconnue est alors la vitesse de l'autre roue. Le mécanisme de Fergusson (404), le différentiel de Pequeur (406) sont dans ce cas.

II. — Les trains épicycloïdaux réalisent les compositions de mouvements de rotation étudiées au Chapitre II (Cinématique appliquée).

Supposons pour fixer les idées, que ω_o et ω_m soient données en grandeur et en

(*) Il est toutefois indispensable que les axes z et z_m soient parallèles, sans quoi la rotation qui résulte de la composition du mouvement absolu de la dernière roue (rotation ω_m) et du mouvement additionnel (rotation $-\omega$) n'aurait pas une vitesse angulaire égale à $\omega_m - \omega$.

signe, ainsi que la raison ε du train. D'après la formule de Willis, le châssis prend un mouvement de rotation, dont la vitesse angulaire est

$$\omega = \frac{\omega_m - \omega_o \varepsilon}{1 - \varepsilon} \quad (1)$$

Nous allons montrer que cette valeur de ω est la somme algébrique des vitesses angulaires que prendrait le porte-train si l'on faisait agir séparément les rotations données ω_o et ω_m .

Quand la rotation ω_o agit seule, $\omega_m = 0$, le porte-train prend un mouvement de vitesse ω' , et la formule de Willis se réduit à

$$\varepsilon = \frac{-\omega'}{\omega_o - \omega'}$$

On en déduit

$$\omega' = \frac{-\omega_o \varepsilon}{1 - \varepsilon} \quad (2)$$

Quand, au contraire, la rotation de vitesse angulaire ω_m agit seule, $\omega_o = 0$, le porte-train prend un mouvement de vitesse ω'' , et la formule de Willis devient

$$\varepsilon = \frac{\omega_m - \omega''}{-\omega''}$$

d'où

$$\omega'' = \frac{\omega_m}{1 - \varepsilon} \quad (3)$$

La comparaison des formules (1) (2) et (3) montre que

$$\omega = \omega' + \omega''$$

On ferait aisément des vérifications analogues, en supposant connues soit ω_o et ω , soit ω_m et ω .

Suivant la composition du train, ω' et ω'' peuvent être de mêmes signes ou de signes contraires. Dans le second cas, la valeur absolue de ω est la différence des valeurs absolues de ω' et ω'' ; le mouvement réalisé est un mouvement différentiel, et le mécanisme qui le produit est appelé un différentiel.

402. Usages des trains épicycloïdaux. — Les trains épicycloïdaux sont employés :

1^o Pour produire un mouvement épicycloïdal. Exemples : Tracé des épicycloïdes (404) — Engrenage de Lahire (405).

2^o Pour produire un mouvement différentiel. Exemples : Différentiel de la fraiseuse Prétot (408) — Trains épicycloïdaux sphériques étudiés aux paragraphes 409 et 410 — Commande de la fraise dans la machine Biernatzki (Chapitre XXV).

3^o Pour établir entre deux axes fixes un rapport de vitesses dans les termes duquel figurent des facteurs premiers considérables. Exemple : Horloge lunaire de Pecqueur (406). On sait que, dans ce cas, il est impossible de résoudre rigoureusement le problème par un équipage de roues dentées à axes fixes.

Un train épicycloïdal est dit plan lorsque tous les axes sont parallèles, et sphérique s'il renferme des roues d'angle. Nous étudierons d'abord quelques trains épicycloïdaux plans.

403. Engrenage planétaire de Watt.

Dans les machines à vapeur de Watt, le balancier AB, mobile autour de son milieu O, reçoit de la tige du piston P (fig. 350), par l'intermédiaire du parallélogramme articulé AGHKL, un mouvement circulaire alternatif, que l'on doit transformer en une rotation continue du volant autour de son arbre D. A cet effet, l'extrémité B du balancier est articulée à une bielle BC, dont le mouvement se communique à l'arbre du volant par une manivelle (543). A l'origine, cette manivelle était remplacée par un train épicycloïdal formé de deux roues égales E, F, respectivement solidaires de la bielle et du volant, maintenues à distance invariable l'une de l'autre par une tige CD, folle en C et D sur les axes des deux roues. La roue F, concentrique au châssis CD, est la première du train; soit ω_0 sa vitesse angulaire, égale à celle du

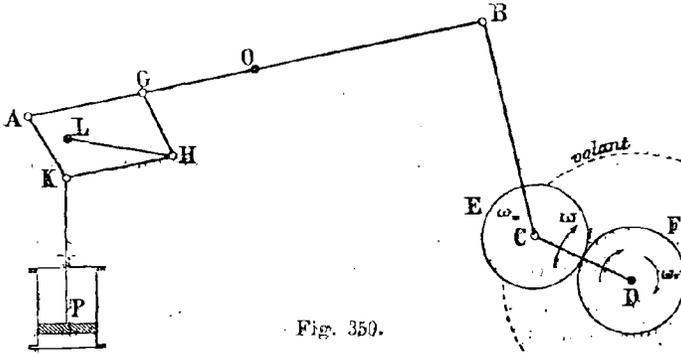


Fig. 350.

volant. La dernière roue E prend le même mouvement que la bielle. Or, à cause de la grande longueur de celle-ci, on peut admettre qu'elle reste parallèle à elle-même dans toutes ses positions, et que son mouvement est une translation, bien qu'il n'en soit rigoureusement ainsi que pour une bielle de longueur infinie. Dans cette hypothèse, la quantité désignée par ω_m dans la formule de Willis est nulle. D'autre part, quand le porte-train est immobile, le couple EF forme un équipage de roues dentées dont la raison $\varepsilon = -1$. On a donc

$$-1 = \frac{-\omega}{\omega_0 - \omega}$$

d'où

$$\omega_0 = 2\omega$$

ce qui prouve que la roue F et le volant qui en est solidaire tournent deux fois plus vite que la tige CD, et dans le même sens qu'elle.

404. Engrenage intérieur de La Hire.

Soient o et C deux circonférences tangentes intérieurement en A (fig. 351), et dont les rayons sont dans le rapport de 1 à 2. On sait que, si la plus petite roule sans glisser sur la plus grande supposée fixe, chacun de ses points décrit un diamètre de la circonférence fixe. D'après cela, une tige AD, articulée en A et guidée de manière à rester dans le prolongement de AB,

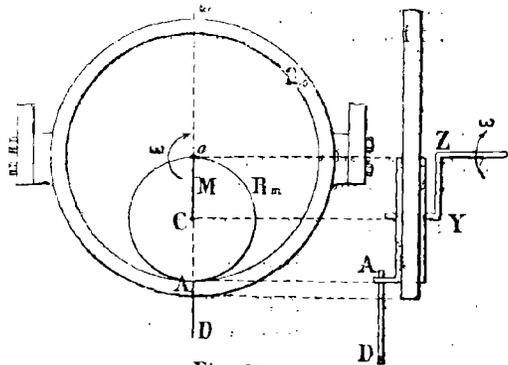


Fig. 351.

prend un mouvement rectiligne alternatif, dont l'amplitude est égale à AB.

Pour réaliser cette transformation de mouvement, on construit un engrenage intérieur sur les circonférences primitives o et C , et l'on maintient fixe à l'aide de supports la couronne dentée oA . Le pignon est fou sur le bouton Y d'une manivelle dont l'axe Z coïncide avec celui de la couronne, et dont le bras est égal à oC . Enfin, dans la région du point A , le pignon porte un pivot auquel s'articule la tige à conduire AD . Lorsque la manivelle reçoit un mouvement de rotation ω , le pignon roule à l'intérieur de la couronne, et le mouvement alternatif de AD se produit.

Les deux roues dentées forment un train épicycloïdal, dans lequel le châssis est constitué par la manivelle YZ . La vitesse angulaire ω_o de la première roue o est nulle. Quand le porte-train est immobile, et que le système fonctionne comme un équipage à axes fixes, la raison est égale à $+2$. On a donc

$$2 = \frac{\omega_m - \omega}{-\omega}$$

d'où

$$\omega_m = -\omega$$

ce qui montre que le pignon tourne avec la même vitesse que la manivelle, mais en sens inverse.

404 bis. Généralisation. Train épicycloïdal plan, formé de deux roues engrenant extérieurement ou intérieurement.

1° *Engrenage extérieur.* Soient A et B les deux roues du train (fig. 351 bis). Le châssis est réduit schématiquement à un levier L , mobile autour de l'axe z , et supportant l'axe z_1 . La roue A est folle sur z , et la roue B folle sur z_1 . La raison, calculée en sup-

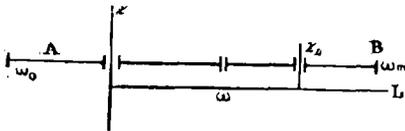


Fig. 351 bis.

posant le porte-train immobile, est $\varepsilon = -\frac{A}{B}$.

Soient, conformément aux notations générales adoptées, ω_o la vitesse angulaire de la première roue (A), ω_m celle de la dernière (B)

et ω celle du porte-train L . On a, d'après la formule de Willis

$$-\frac{A}{B} = \frac{\omega_m - \omega}{\omega_o - \omega}$$

d'où

$$(A + B)\omega = A\omega_o + B\omega_m. \tag{1}$$

En faisant $A = B$ et $\omega_m = 0$ on trouve $\omega_o = 2\omega$. Le mécanisme se réduit alors évidemment à l'engrenage planétaire de Watt que nous avons décrit ci-dessus.

Si l'on immobilise la roue A , $\omega_o = 0$, et l'on a

$$\omega = \frac{B}{A + B} \omega_m$$

Cette disposition est employée pour la commande du tambour enregistreur, dans l'Indicateur de marche Richard (583).

2° *Engrenage intérieur.* Ce cas se déduit du précédent par un simple changement de signe de la raison, qui serait, en effet, $\varepsilon = +\frac{A}{B}$, puisque, si le porte-train restait immobile, les deux roues tourneraient dans le même sens. En remplaçant, par exemple, B par $-B$ dans la formule (1), il vient

$$(A - B)\omega = A\omega_o - B\omega_m.$$

L'engrenage de Lahire est un cas particulier des mécanismes dont nous nous occupons. En faisant $A = 2B$ et $\omega_0 = 0$ dans la formule ci-dessus, on trouve $\omega_m = -\omega$, résultat déjà obtenu directement (404).

405. Paradoxe de Fergusson.

Un levier MN, qui peut tourner autour d'un axe fixe Z solide du pied de l'appareil (fig. 352), porte deux axes Z₁ et Z' parallèles au premier. Sur l'axe Z est montée une roue A, indépendante de MN et complètement immobile. L'axe Z₁ porte un pignon fou B, engrenant d'une part avec A, d'autre part avec trois roues CDE de même diamètre que A et folles sur l'axe Z'. Si n désigne le nombre de dents de A, les rou-

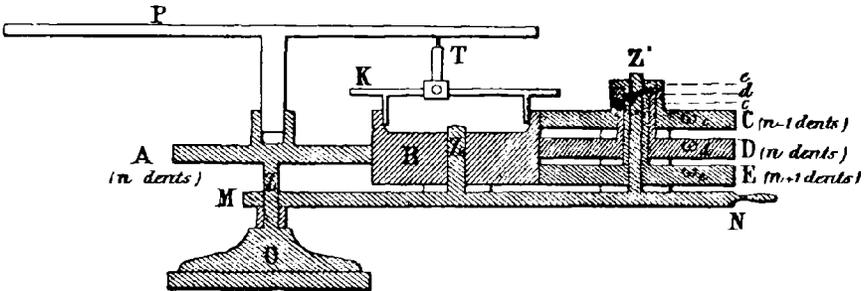


Fig. 352.

CDE ont respectivement $n - 1$, n et $n + 1$ dents. Le nombre de dents du pignon B est indifférent. Proposons-nous de déterminer les vitesses angulaires absolues ω_c , ω_d , ω_e des roues CDE, lorsque MN tourne avec une vitesse angulaire connue ω .

Les systèmes (A, B, C), (A, B, D), (A, B, E) constituent trois trains épicycloïdaux, dans chacun desquels la première roue est A, et dont le châssis commun est MN. Leurs raisons respectives sont

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= + \frac{AB}{BC} = \frac{n}{n-1} \\ \varepsilon_d &= + \frac{AB}{BD} = +1 \\ \varepsilon_e &= + \frac{AB}{BE} = + \frac{n}{n+1} \quad (*) \end{aligned}$$

En appliquant à chacun d'eux la formule de Willis, on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Pour (A, B, C) :} \quad & \frac{n}{n-1} = \frac{\omega_c - \omega}{-\omega} \quad \text{d'où} \quad \omega_c = \frac{-\omega}{n-1} \\ \text{Pour (A, B, D) :} \quad & 1 = \frac{\omega_d - \omega}{-\omega} \quad \text{d'où} \quad \omega_d = 0 \\ \text{Pour (A, B, E) :} \quad & \frac{n}{n+1} = \frac{\omega_e - \omega}{-\omega} \quad \text{d'où} \quad \omega_e = \frac{\omega}{n+1} \end{aligned}$$

ω_c est du signe de ω et ω_e du signe contraire ; par conséquent, dans le mouvement du système, la roue C tourne en sens inverse du levier MN, la roue E dans le même sens,

(*) On voit que le nombre de dents de B ne figure pas dans ces expressions ; il est donc bien arbitraire.

et la roue D se transporte parallèlement à elle-même dans un mouvement de translation circulaire. Ces divers mouvements sont indiqués par des aiguilles *cde* solidaires des roues correspondantes. Or, quand le porte-train reste immobile, et que le mécanisme, mis en mouvement par la roue A, fonctionne comme un équipage à axes fixes, les trois roues CDE tournent dans le même sens que A. Il n'en est plus ainsi quand le châssis est en mouvement : c'est en cela que consiste le paradoxe.

Ce mécanisme peut être complété de manière à lui faire tracer des épicycloïdes. A cet effet, on fixe un chevalet K, portant un crayon T, sur un évidement pratiqué à la partie supérieure du pignon B. Ce crayon, dont le support coulisse sur K, appuie sur la face inférieure d'un plateau P solidaire de A, et sa pointe décrit une épicycloïde.

406. Train épicycloïdal de Pecqueur. — Ce mécanisme, représenté schématiquement dans la figure 353, se compose de quatre roues B, C, D, E reliées les unes aux autres de la manière suivante. E est solidaire d'un axe *z*, autour duquel tourne librement le porte-train L. Celui-ci supporte un axe *y*, parallèle au premier, et solidaire des roues C, D. B est folle sur l'axe *z*. Enfin, C engrène avec B, et D avec E. L'ensemble forme un train épicycloïdal, dans lequel B et E sont concentriques au châssis L ; on peut donc indifféremment considérer l'une ou l'autre de ces roues comme la première du système, soit B

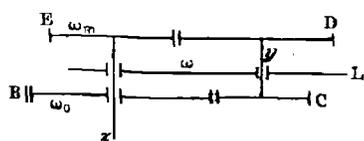


Fig. 353.

par exemple. La raison, calculée en supposant le porte-train immobile, est alors $\epsilon = + \frac{BD}{CE}$, et la formule de Willis devient

$$\frac{BD}{CE} = \frac{\omega_m - \omega}{\omega_0 - \omega}$$

d'où l'on tire

$$CE \omega_m - BD \omega_0 = (CE - BD) \omega \tag{1}$$

ω_0 désignant la vitesse angulaire de la première roue (B), ω_m celle de la dernière (E) et ω celle du châssis (L).

Dans les applications, l'une des roues extrêmes est généralement immobilisée. En supposant, par exemple, que B soit fixe, $\omega_0 = 0$, et la formule (1) se réduit à

$$CE \omega_m = (CE - BD) \omega \tag{2}$$

d'où

$$\omega_m = \left(1 - \frac{BD}{CE} \right) \omega$$

L'expression de ω_m montre que le mouvement absolu de E peut être envisagé comme résultant de la composition de deux rotations de sens contraires, dont les vitesses angulaires respectives sont ω et $-\frac{BD}{CE} \omega$. La première est le mouvement d'entraînement du porte-train autour de l'axe *z* ; quant à la seconde, remarquons que $-\omega$ étant la vitesse angulaire relative de la roue B par rapport au châssis mobile L, $-\frac{BD}{CE} \omega$ est, de même, la vitesse angulaire relative de la roue E. Le train épicycloïdal de Pecqueur, dont l'effet est de composer ces rotations de sens contraires, constitue donc un *mécanisme différentiel*.

Si $\frac{BD}{CE} > 1$, ω_m et ω sont de signes contraires, et les rotations de E et de L autour de *z* s'effectuent en sens contraires.

Si $\frac{BD}{CE} = 1$, $\omega_m = 0$, et la roue E reste immobile quel que soit le mouvement donné au porte-train.

Enfin, si $\frac{BD}{CE} < 1$, ω_m et ω sont de même signe ; le châssis et la roue E tournent dans le même sens, E plus lentement que L ($\omega_m < \omega$).

Remarque. — Les résultats ne sont pas modifiés si les roues (B, C), (D, E) engrènent intérieurement, la raison du train étant, dans tous les cas, égale à $+\frac{BD}{CE}$.

407. Applications I. — On donne $B = 25$, $C = 40$, $D = 30$, $E = 35$. La roue B fait 50 tours pendant que la roue E fait 25 tours dans le même sens. Déterminer le mouvement du châssis L.

On peut, dans la formule (1), remplacer les vitesses angulaires par les nombres de tours N_m , N_o , N qui leur sont proportionnels, ce qui donne

$$CE \cdot N_m - BD \cdot N_o = (CE - BD) N$$

En considérant comme positif le sens commun des rotations des roues B, E, on doit remplacer N_m par $+ 25$ et N_o par $+ 50$. On trouve

$$N = -\frac{50}{13} = -3, \frac{11}{13}$$

Ce résultat montre que, si les roues B, E font respectivement 50 et 25 tours dans un certain sens, le porte-train fait, en même temps, 3 tours $\frac{11}{13}$ dans le sens contraire.

II. — Calculer les nombres de dents B, C, D, E sachant :

1° Que la roue B restant immobile, le porte-train fait 5 tours dans un sens, pendant que la roue E fait 3 tours dans le sens contraire ;

2° Que toutes les roues sont droites, et au module $M = 3$;

3° Que l'espace, mesuré à partir de l'axe z, dans lequel doit évoluer le mécanisme, ne peut pas dépasser 250 mm.

Nous emploierons la formule (2), en substituant aux vitesses angulaires ω et ω_m les nombres de tours N et N_m qui leur sont proportionnels.

$$N_m = \left(1 - \frac{BD}{CE}\right) N$$

Si l'on convient de regarder comme positif le sens de la rotation du porte-train, $N = +5$ et $N_m = -3$. On a donc :

$$-3 = \left(1 - \frac{BD}{CE}\right) \times 5$$

d'où
$$\frac{BD}{CE} = \frac{8}{5}$$

Le problème est maintenant analogue au calcul d'un harnais à denture droite (396-1).

On peut écrire
$$\frac{BD}{CE} = \frac{2}{1} \times \frac{4}{5}$$

D'où l'on déduit, λ et μ désignant des nombres entiers à déterminer :

$$\left\{ \begin{array}{l} B = 2\lambda \\ C = \lambda \\ D = 4\mu \\ E = 5\mu \end{array} \right.$$

Le parallélisme des arbres z et z_1 , exprimé par la relation $B + C = D + E$, donne $\lambda = 3\mu$. Par conséquent

$$\left\{ \begin{array}{l} B = 6\mu \\ C = 3\mu \\ D = 4\mu \\ E = 5\mu \end{array} \right. \quad (3)$$

Enfin, pour que le mécanisme puisse évoluer autour de z , il faut un espace libre dont le rayon soit supérieur à la plus grande des deux sommes

$$\text{Rayon de } E + \text{Diamètre de } D = \frac{ME}{2} + MD = \frac{15\mu}{2} + 12\mu = \frac{39\mu}{2}$$

$$\text{Rayon de } B + \text{Diamètre de } C = \frac{MB}{2} + MC = 9\mu + 9\mu = 18\mu$$

Ces conditions sont remplies, d'après les données, si

$$\frac{39\mu}{2} < 250, \text{ ou } \mu \leq 12.$$

En prenant, par exemple, $\mu = 10$, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} B = 60 \\ C = 30 \\ D = 40 \\ E = 50 \end{array} \right.$$

Avec ces nombres, la somme $\frac{ME}{2} + MD$ est égale à 195 m/m , alors qu'on dispose de 250 m/m dans tous les sens autour de z . Le mécanisme pourra donc fonctionner.

408. Différentiel de la fraiseuse universelle Prétot.

Dans la fraiseuse Prétot, une poulie A (fig. 354), folle sur l'axe Z du porte-outil, est traversée par un arbre Y sur lequel sont calés deux pignons C et D, engrenant respectivement avec deux roues E et B, dont la première est solidaire de l'axe Z, et dont la seconde, folle sur ce même axe, peut être invariablement reliée au bâti de la machine par des goupilles. Le système est identique au train épicycloïdal de Pecqueur (les parties correspondantes des deux figures sont désignées par les

mêmes lettres). Lorsque la poulie se met en mouvement avec une vitesse angulaire ω , la roue E et l'outil prennent une vitesse angulaire ω_m qui, d'après ce qui précède, est donnée par la formule

$$\omega_m = \omega \left(1 - \frac{BD}{CE} \right)$$

Les nombres de dents des diverses roues étant respectivement

$$B = 25 \quad C = 25 \quad D = 19 \quad E = 31$$

on a

$$\omega_m = \frac{12}{31} \omega$$

Le mécanisme fonctionne donc comme un réducteur de vitesse. Pour calculer les nombres de dents propres à assurer au rapport $\frac{\omega_m}{\omega}$ une valeur déterminée, on procéderait comme au paragraphe 407-II.

Dans la marche à la volée, on rend l'axe de l'outil solidaire de la poulie par des cliquets, (non figurés sur le dessin), qui se rabattent sur E, et s'engagent dans l'intervalle des dents. Il faut alors enlever les goupilles qui fixent B au bâti de la machine. Pour nous rendre compte du mouvement de B, remarquons que le système fonctionne, dans ce cas, comme un train épicycloïdal dans lequel $\omega_m = \omega$, et la formule de Willis donne

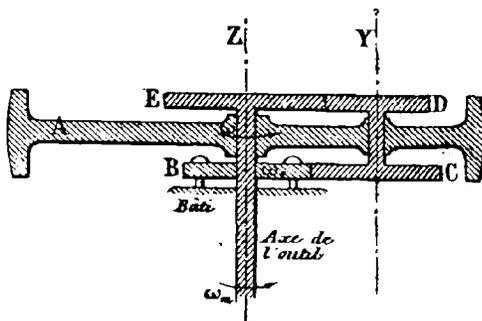


Fig. 354.

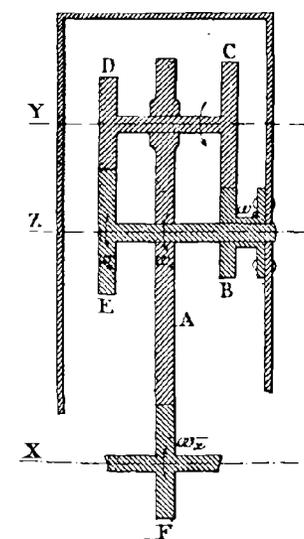


Fig. 354 bis.

$$\varepsilon = \frac{BD}{CE} = \frac{\omega}{\omega_0 - \omega}$$

ce qui montre que $\omega_0 = \omega$. La roue B pourrait donc être rendue solidaire de la poulie motrice en même temps que E.

408 bis. Emploi du train épicycloïdal de Pecqueur dans l'horlogerie et dans les compteurs.

I. Horloge lunaire. — Soit B, C, D, E un train épicycloïdal de Pecqueur (fig. 354 bis), dans lequel la première roue, B, est immobilisée. Le porte-train est constitué par une roue A, folle sur l'axe Z de B, E. L'un des bras de A porte un bossage, qui sert de palier à l'arbre Y des roues C, D. A est commandée par une roue F, calée sur un axe X qui mène une aiguille indiquant le jour de la semaine. Enfin, l'axe Z, solidaire de E, mène une seconde aiguille indiquant l'âge de la lune. En désignant, comme précédemment, par ω_m et ω les vitesses angulaires respectives de la roue E et du porte-train, on a

$$\omega_m = \left(1 - \frac{BD}{BE} \right) \omega$$

D'autre part, si ω_x est la vitesse angulaire de la roue F

$$\omega = - \frac{F}{A} \omega_x$$

Par conséquent
$$\omega_{01} = \frac{F}{A} \left(\frac{BD}{CE} - 1 \right) \omega_x$$

La valeur absolue du rapport $\frac{\omega_{01}}{\omega_x}$ doit être égale, par hypothèse, au rapport des durées de la semaine et de la lunaison, dont nous nous donnerons la valeur, soit $\frac{44609}{188190}$. Les nombres de dents des roues du système doivent donc être tels que l'on ait

$$\frac{F}{A} \left(\frac{BD}{CE} - 1 \right) = \pm \frac{44609}{188190}$$

Avec le signe +, les deux aiguilles tourneront dans le même sens, et, avec le signe —, elles tourneront en sens contraires.

a)
$$\frac{F}{A} \left(\frac{BD}{CE} - 1 \right) = + \frac{44609}{188190}$$

La décomposition de 44609 et de 188190 en facteurs premiers donne

$$\frac{44609}{188190} = \frac{31 \times 1439}{2 \times 3^3 \times 5 \times 17 \times 41} = \frac{31}{85} \times \frac{1439}{2 \times 3^3 \times 41} \quad (*)$$

On peut poser $F = 31$, $A = 85$. Il reste alors à déterminer des nombres entiers BCDE satisfaisant à la relation

$$\frac{BD}{CE} - 1 = \frac{1439}{2 \times 3^3 \times 41}$$

ou

$$\frac{BD}{CE} = \frac{1439 + 2214}{2 \times 3^3 \times 41} = \frac{13 \times 281}{2 \times 3^3 \times 41}$$

Le nombre 281 est premier ; il est donc nécessaire d'employer une roue de 281 dents, soit B par exemple. En groupant les facteurs de la manière suivante

$$\begin{array}{cc} D & B \\ \frac{13 \times 281}{6 \times 246} & \\ C & E \end{array}$$

on pourra poser $B = 281$ $E = 246$ $D = 13\lambda$ $C = 6\lambda$

λ désignant un nombre entier qu'il convient de déterminer de façon à assurer, s'il est possible, l'égalité des sommes $B + C$, $D + E$, ce qui permettrait de construire toutes les roues au même module. La relation $B + C = D + E$ donne

$$281 + 6\lambda = 246 + 13\lambda \quad \text{d'où} \quad \lambda = 5.$$

(*) Il serait impossible de réaliser rigoureusement ce rapport de vitesses par un équipement de roues dentées solidaires d'axes fixes, le nombre 1439 étant premier.

Les nombres de dents définitifs sont donc

$$A = 85 \quad F = 31 \quad B = 281 \quad E = 246 \quad D = 65 \quad C = 30$$

$$b) \quad \frac{F}{A} \left(\frac{BD}{CE} - 1 \right) = - \frac{44609}{188190}$$

(Solution de Pecqueur). — En utilisant la décomposition en facteurs premiers faite plus haut, on écrit

$$\frac{F}{A} \left(1 - \frac{BD}{CE} \right) = \frac{31}{54} \times \frac{1439}{85 \times 41}$$

Si l'on pose $F = 31$, $A = 54$, il reste à trouver des nombres entiers BCDE tels que l'on ait

$$1 - \frac{BD}{CE} = \frac{1439}{85 \times 41}$$

$$\text{ou} \quad \frac{BD}{CE} = \frac{85 \times 41 - 1439}{85 \times 41} = \frac{33 \times 62}{85 \times 41}$$

Les nombres de dents $B = 33$, $C = 85$, $D = 62$, $E = 41$ assurent au rapport des vitesses angulaires la valeur voulue; mais les sommes $B + C$, $D + E$ sont inégales, et les groupes (B, C), (D, E) doivent être construits à des modules différents.

II. Compteur kilométrique. — Ce mécanisme ne diffère pas, au fond, du précédent. L'axe X est commandé par l'essieu de la voiture, de manière à tourner avec la même vitesse angulaire que lui; l'axe z porte l'aiguille indicatrice du compteur, et doit faire, par exemple, un tour par kilomètre parcouru. La relation précédente,

$$\omega_z = \frac{F}{A} \left(\frac{BD}{CE} - 1 \right) \omega_x$$

devient, en remplaçant les vitesses angulaires par les nombres de tours N_m , N_x qui leur sont proportionnels

$$N_m = \frac{F}{A} \left(\frac{BD}{CE} - 1 \right) N_x$$

Soient : a le nombre de kilomètres parcouru par la voiture;

Δ le diamètre des roues motrices, évalué en mètres.

$$\text{On a} \quad N_x = \frac{1000 a}{\pi \Delta}$$

$$\text{et} \quad N_m = \frac{F}{A} \left(\frac{BD}{CE} - 1 \right) \times \frac{1000 a}{\pi \Delta}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{F}{A} \left(\frac{BD}{CE} - 1 \right) = \frac{\pi \Delta N_m}{1000 a}$$

Supposons que $\Delta = 0^m,75$; si, quand la voiture a parcouru 1 km, ($a = 1$) l'aiguille a fait un tour ($N_m = 1$), la relation précédente devient, en faisant $\pi = 3,1416$

$$\frac{F}{A} \left(\frac{BD}{CE} - 1 \right) = \frac{\pi \Delta}{1000} = \frac{0,75 \pi}{1000} = \frac{11781}{5000000}$$

La fraction du second nombre, convertie en fraction continue, donne les réduites suivantes

$$\begin{array}{ll}
 r_1 = \frac{1}{424} & r_6 = \frac{131}{55598} \\
 r_2 = \frac{2}{849} & r_7 = \frac{279}{118411} \\
 r_3 = \frac{5}{2122} & r_8 = \frac{4247}{529242} \\
 r_4 = \frac{12}{5093} & r_9 = \frac{5267}{2235379} \\
 r_5 = \frac{17}{7215} & r_{10} = \frac{11781}{5000000}
 \end{array}$$

Afin de ne pas donner aux roues des nombres de dents trop considérables, nous ferons les calculs avec la cinquième réduite, en cherchant, toutefois, si l'erreur commise est admissible.

Soit donc
$$\frac{F}{A} \left(\frac{BD}{CE} - 1 \right) = \frac{17}{7215} = \frac{17}{3 \times 5 \times 13 \times 37} = \frac{17}{111} \times \frac{1}{65}$$

En posant $F = 17$, $A = 111$, il reste à déterminer BCDE de telle manière que l'on ait

$$\frac{BD}{CE} = 1 + \frac{1}{65} = \frac{66}{65} = \frac{6 \times 11}{5 \times 13}$$

Dans la pratique on emploie fréquemment pour les couples (B, C), (D, E) des roues engrénant intérieurement. Aussi distinguerons-nous deux cas.

a) *Les roues (B, C), (D, E) engrènent extérieurement.* Il faut grouper les facteurs de telle manière que l'emploi d'équimultiples permette d'égaliser les sommes $B + C$, $D + E$. En posant, par exemple

$$\frac{B}{C} = \frac{6}{5} \quad \frac{D}{E} = \frac{11}{13}$$

nous aurons

$$\begin{array}{ll}
 B = 6 \lambda & D = 11 \mu \\
 C = 5 \lambda & E = 13 \mu
 \end{array}$$

L'égalité $B + C = D + E$ donne

$$11 \lambda = 24 \mu \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{11}$$

λ et μ devant être des équimultiples de 24 et de 11, on peut prendre $\lambda = 24$, $\mu = 11$. Les nombres de dents des roues du système sont, dans ce cas,

$$F = 17, \quad A = 111, \quad B = 144, \quad C = 120, \quad D = 121, \quad E = 143$$

b) *Les roues (B, C), (D, E) engrènent intérieurement.* Le groupement des facteurs doit permettre d'égaliser les différences $B - C$, $E - D$, ce qui suppose $B > C$, $E > D$. On posera donc

$$\frac{B}{C} = \frac{11}{5} \quad \frac{D}{E} = \frac{6}{13}$$

d'où

$$\begin{array}{ll}
 B = 11 \lambda & D = 6 \mu \\
 C = 5 \lambda & E = 13 \mu
 \end{array}$$

L'égalité $B - C = E - D$ donne

$$6\lambda = 7\mu \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{7}{6}$$

En prenant $\lambda = 7$ et $\mu = 6$, les nombres de dents des roues sont

$$F = 17 \quad A = 111 \quad B = 77 \quad C = 35 \quad D = 36 \quad E = 78$$

Erreur commise. Si les nombres de dents des roues du système vérifiaient exactement la relation

$$\frac{F}{A} \left(\frac{BD}{CE} - 1 \right) = \frac{\pi\Delta}{1000}$$

la formule

$$N_m = \frac{F}{A} \left(\frac{BD}{CE} - 1 \right) \times \frac{1000 a}{\pi\Delta}$$

montre que l'on aurait $N_m = a$, quel que soit le chemin parcouru. On peut donc évaluer l'erreur commise en calculant N_m pour une valeur particulière de a , soit 1000 km, par exemple. Si l'on remplace a par 1000, Δ par 0^m,75, π par 3,1416, et $\frac{F}{A} \left(\frac{BD}{CE} - 1 \right)$ par $\frac{17}{7215}$ (valeur de la réduite employée), on trouve

$$N_m = \frac{17}{7215} \times \frac{1000000}{3,1416 \times 0,75} = \frac{17000000}{16999,983} = 1000,001$$

L'erreur commise est donc de 1 m. environ, par excès, pour 1000 km. parcourus.

409. Train épicycloïdal sphérique.

La disposition suivante, employée dans certains compteurs, permet de réaliser un rapport de vitesses angulaires très petit.

Un axe fixe X (fig. 355), dont la vitesse angulaire est ω_x , entraîne dans sa rotation les roues coniques A et B . La première commande un groupe de deux pignons solidaires (C, D), fou sur un axe fixe Y , perpendiculaire au précédent. La seconde commande un groupe analogue (E, F), également fou sur l'axe Y . Ce dernier, qui peut tourner librement dans deux coussinets placés à ses extrémités, forme un coude dont la branche Z sert d'axe à un dernier groupe (G, H) de deux pignons solidaires, dont l'un engrène avec D et l'autre avec F .

Supposons un instant que l'arbre coudé YZ reste immobile ; la rotation ω_x de l'arbre moteur se transmet séparément aux roues G et H qui, sous l'action des équipages

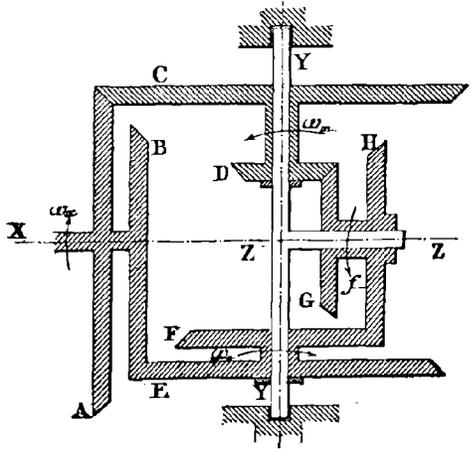
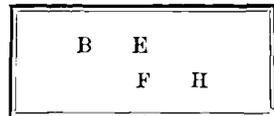
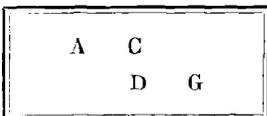


Fig. 355.



tendent à tourner dans le même sens f , avec des vitesses angulaires

$$\omega_g = \omega_x \times \frac{AD}{CG}, \quad \omega_h = \omega_x \times \frac{BF}{EH}$$

généralement différentes. Le mouvement du système est donc impossible. Mais si, au contraire, l'arbre YZ peut se mouvoir autour de Y, l'inégalité de ω_g et ω_h a pour effet de l'entraîner avec une vitesse angulaire ω que nous allons calculer.

Les roues FHGD forment un train épicycloïdal sphérique dont le châssis est l'arbre coudé YZ, et dont les roues extrêmes sont F et D. Considérons F comme la première du système, et soit ω_o sa vitesse angulaire, ω_m celle de D. La raison ϵ du train, calculée en supposant tous les axes fixes, a pour valeur absolue $\frac{FG}{DH}$; elle est négative, puisque, dans cette hypothèse, F et D tournent en sens contraires. La formule de Willis donne donc

$$-\frac{FG}{DH} = \frac{\omega_m - \omega}{\omega_o - \omega}$$

d'où, en résolvant par rapport à ω

$$\omega = \frac{DH \omega_m + FG \omega_o}{DH + FG} \tag{1}$$

Mais les valeurs absolues de ω_o et ω_m sont respectivement $\omega_x \times \frac{B}{E}$ et $\omega_x \times \frac{A}{C}$. Comme ces rotations sont de sens contraires, on doit affecter leurs vitesses angulaires de signes différents. En posant, par exemple

$$\omega_o = \omega_x \times \frac{B}{E} \quad \text{et} \quad \omega_m = -\omega_x \times \frac{A}{C}$$

l'expression de ω devient

$$\omega = \frac{\frac{FGB}{E} - \frac{DHA}{C}}{DH + FG} \times \omega_x$$

ou

$$\omega = \frac{FGBC - DHAE}{(DH + FG)CE} \times \omega_x$$

On voit que, conformément à ce qui précède, le bras porte-train reste immobile quand les nombres de dents des roues satisfont à la relation

$$FGBC = DHAE$$

ou

$$\frac{AD}{CG} = \frac{BF}{EH}$$

c'est-à-dire si

$$\omega_g = \omega_h$$

Ce dispositif offre un nouvel exemple de la réalisation d'un mouvement différentiel par les trains épicycloïdaux. Supposons, en effet, que le groupe (E, F) de pignons soit rendu fixe ; la formule de Willis donne, en faisant $\omega_o = 0$, et en désignant par ω_1 la vitesse angulaire du châssis dans cette hypothèse

$$-\frac{FG}{DH} = \frac{\omega_m - \omega_1}{-\omega_1}$$

d'où

$$\omega_1 = \frac{DH \omega_m}{DH + FG}$$

En fixant au contraire le groupe (C, D), le châssis prendrait une vitesse angulaire ω_2 donnée par la relation

$$-\frac{FG}{DH} = \frac{-\omega_2}{\omega_0 - \omega_2}$$

d'où

$$\omega_2 = \frac{FG \omega_0}{DH + FG}$$

A cause des signes différents de ω_0 et ω_m , les rotations ω_1 et ω_2 sont de sens contraires. L'expression (4) de ω montre d'autre part que $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Le mouvement absolu du châssis, qui résulte ainsi de la composition de deux rotations opposées, est donc bien un mouvement différentiel.

Le mouvement du porte-train est d'autant plus lent que la différence $FGBC = DHAE$ est plus petite en valeur absolue. Avec les nombres de dents suivants

A = 79	B = 47	C = 65	D = 20
E = 58	F = 40	G = 30	H = 40

ou a
$$\omega = \frac{\omega_r}{18850}$$

Il faudrait 18850 tours de l'arbre moteur pour en produire un du châssis.

40. Compteur employé pour mesurer la différence des vitesses de deux arbres.

Un mécanisme analogue au précédent est employé pour mesurer la différence des vitesses de deux arbres, tels que ceux des machines bâbord et tribord d'un navire. Les deux groupes (C, D) et (E, F), fous sur l'axe Y (fig. 356), sont identiques, et leurs parties D, F sont reliées par une seule roue G, folle sur le coude Z. Deux roues égales A et B engrenent respectivement avec C et E; leurs axes Z_1 et Z_2 traversent la boîte de l'appareil et sont reliés, par des trains d'engrenages non figurés, dont les raisons sont égales et de signes contraires, avec les roues D et F qui font l'objet de l'observation. Il résulte de cette disposition que les roues D et F reçoivent des mouvements de rotation de sens contraires, dont les vitesses angulaires ω_m et ω_0 sont dans le même rapport que celles des arbres moteurs. La formule de Willis, appliquée au train épicycloïdal

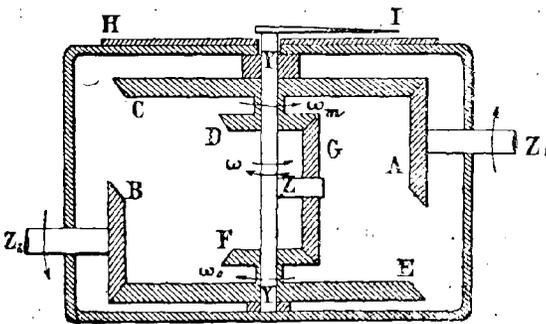


Fig. 356.

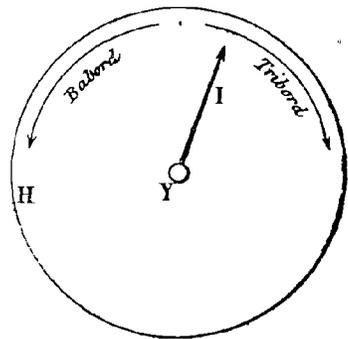


Fig. 357.

A et B engrenent respectivement avec C et E; leurs axes Z_1 et Z_2 traversent la boîte de l'appareil et sont reliés, par des trains d'engrenages non figurés, dont les raisons sont égales et de signes contraires, avec les roues D et F qui font l'objet de l'observation. Il résulte de cette disposition que les roues D et F reçoivent des mouvements de rotation de sens contraires, dont les vitesses angulaires ω_m et ω_0 sont dans le même rapport que celles des arbres moteurs. La formule de Willis, appliquée au train épicycloïdal

sphérique FGD, donne, en désignant par ω la vitesse angulaire de l'axe coudé YZ:

$$-f = \frac{\omega_m - \omega}{\omega_o - \omega}$$

d'où l'on tire

$$\omega = \frac{\omega_o + \omega_m}{2}$$

résultat que l'on aurait pu déduire immédiatement de la formule (1) du paragraphe précédent. Les quantités ω_o et ω_m étant de signes contraires, on voit que l'arbre coudé YZ tourne avec une vitesse angulaire égale à la demi-différence de celles des roues D et F, et dans le même sens que la roue dont la vitesse est la plus grande en valeur absolue. Une aiguille I, solidaire de l'axe Y, se meut devant un cadran H fixé à la boîte de l'instrument. Le sens de son déplacement indique celui des deux arbres moteurs qui tourne le plus vite.

Soient N_1 et N_2 les nombres de tours que ceux-ci effectuent respectivement par minute. En considérant, par exemple, ω_o comme positive, il vient

$$\omega = \frac{k\pi}{60} (N_1 - N_2)$$

Le nombre de tours de l'aiguille I par minute est donc

$$N = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{h}{2} (N_1 - N_2)$$

Le coefficient h , égal au produit de la raison des équipages intercalés entre les axes Z_1 Z_2 et les arbres moteurs en expérience, par le rapport $\frac{A}{C} = \frac{B}{E}$, étant connu, la différence $N_1 - N_2$ peut être facilement calculée. Si, par exemple, $h = \frac{1}{60}$ et que l'aiguille I ait fait f tour $\frac{1}{4}$ par minute, la différence des vitesses des arbres moteurs est de

$$N \times \frac{2}{h} = \frac{5}{4} \times 120 = 150$$

tours par minute.

441. Train épicycloïdal d'Houldsworth.

Ce train est employé dans les filatures de coton pour donner le mouvement aux bobines sur lesquelles se renvide le fil, après que les bancs à broches lui ont communiqué une torsion destinée à accroître sa résistance. Il se compose (fig. 358) d'un engrenage cylindrique extérieur AB, calé sur des axes fixes X et Z. Autour d'un bras de la roue B tourne une roue conique D, qui engrène avec deux pignons égaux C, E, dont les axes coïncident géométriquement avec l'axe Z de B, mais n'ont aucune solidarité avec lui. Les roues A et C reçoivent séparément des mouvements de rotation de vitesses angulaires respectives ω_x et ω_o , dont l'effet se concentre sur E. Nous nous proposons de calculer la vitesse angulaire absolue ω_m de cette roue.

Le système CDE constitue un train épicycloïdal sphérique dans lequel la roue B joue le rôle de bras porte-train. Si l'on considère C comme roue initiale, la raison, calculée en supposant B immobile, a pour valeur absolue $\frac{CD}{DE} = 1$; elle est, de plus,

négative, car, dans cette hypothèse, C et E tourneraient en sens contraires. La formule de Willis donne par conséquent

$$-1 = \frac{\omega_m - \omega}{\omega_o - \omega}$$

d'où

$$\omega_m = 2\omega - \omega_o$$

Mais, d'autre part

$$\frac{\omega}{\omega_x} = -\frac{A}{B}$$

ou

$$\omega = -\frac{A}{B} \times \omega_x$$

On a donc, en définitive

$$\omega_m = -2 \frac{A}{B} \omega_x - \omega_o$$

Si, comme dans la figure, les rotations ω et ω_o sont de même sens, le mécanisme communique à la roue E un mouvement différentiel de vitesse $2\omega - \omega_o$, dans le sens de ω ou en sens contraire suivant que ω est plus grand ou plus petit que $\frac{\omega_o}{2}$.

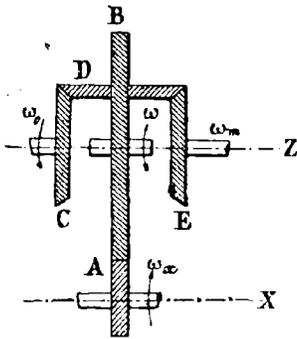


Fig. 358.

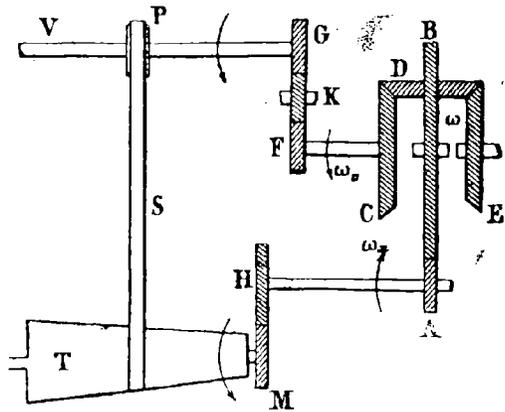


Fig. 359.

La roue E commande le mouvement de la bobine sur laquelle s'enroule le fil. La tension de celui-ci devant rester constante pour éviter les chances de rupture, il est évidemment nécessaire que sa vitesse d'enroulement diminue à mesure que le diamètre de la bobine augmente. Si, par exemple, la vitesse ω_o reste invariable, il faut que ω et par suite ω_x aillent en décroissant. Pour réaliser cette condition, les roues C et A reçoivent le mouvement par l'intermédiaire d'une poulie P et d'un tambour tronc-conique T (fig. 359) sur lesquels s'enroule une courroie S. La poulie P, qui tourne d'un mouvement uniforme, transmet une rotation de même nature à la roue C par l'équipage GKF; le tambour T commande A par l'engrenage MG. On verra plus loin (424) que, grâce à cette combinaison, ω_x varie avec la position de la courroie sur le tambour T.

412. Train épicycloïdal de Humpage.

Ce mécanisme, employé dans les automobiles, dans les commandes par dynamos,

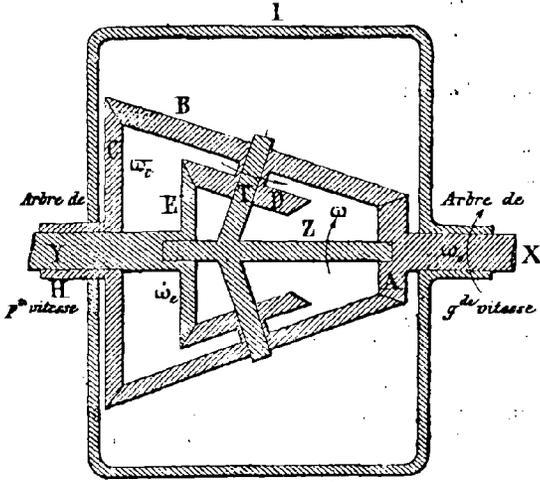


Fig. 360.

et dans un grand nombre de machines-outils, tours, etc., permet d'obtenir à la fois un embrayage progressif et une réduction de vitesse entre deux axes placés dans le prolongement l'un de l'autre. Nous le décrirons en supposant qu'il relie l'arbre de grande vitesse X d'une automobile à l'axe de la petite vitesse Y (fig. 360).

Entre X et Y est disposé un axe coudé ZT, indépendant des précédents, et mobile dans des coussinets portés par leurs extrémités. Sur l'axe X de la grande vitesse est calé un pignon conique A, qui commande un groupe de deux roues solidaires (B, D), folles sur le

coudé T. La roue D engrène avec un pignon E calé sur l'arbre de la petite vitesse. Enfin, B commande une roue C, qui est folle sur Y, et que nous supposons provisoirement immobilisée. Le tout est logé dans le carter I qui protège le mécanisme contre la poussière. Le système forme deux trains épicycloïdaux sphériques constitués, l'un par ABC, l'autre par ABDE, dans lesquels l'axe coudé ZT joue le rôle de bras porte-train. Appliquons à chacun d'eux la formule de Willis, en considérant A comme la roue initiale, ω_o représentant la vitesse angulaire de l'arbre X, ω celle du châssis, ω_c et ω_e celles des roues extrêmes C et E. La raison du premier train est

$-\frac{A}{C}$ et $\omega_c = 0$. Par conséquent

$$-\frac{A}{C} = \frac{-\omega}{\omega_o - \omega}$$

d'où

$$(A + C) \omega = A \omega_o$$

La raison du second train est $-\frac{AD}{BE}$. Donc

$$-\frac{AD}{BE} = \frac{\omega_e - \omega}{\omega_o - \omega}$$

et, en résolvant par rapport à ω_e

$$\omega_e = \frac{AD + BE}{BE} \omega - \frac{AD}{BE} \omega_o$$

Cette expression devient, en tenant compte de (1)

$$\omega_e = \frac{A(AD + BE)}{BE(A + C)} \omega_o - \frac{AD}{BE} \omega_o$$

ou enfin

$$\omega_e = \frac{A}{A + C} \left(1 - \frac{CD}{BE} \right) \omega_o$$

On voit que la réduction de vitesse est d'autant plus grande que le rapport $\frac{CD}{BE}$ est plus voisin de l'unité ; de plus, les axes X et Y tournent dans le même sens ou en sens contraires selon que l'on a

$$\frac{CD}{BE} < \text{ou} > 1$$

En prenant $A = 20, \quad B = 50, \quad C = 80, \quad D = 19, \quad E = 32$

on trouve
$$\omega_e = \frac{20}{100} \left(1 - \frac{80 \times 19}{50 \times 32} \right) \omega_o = \frac{\omega_o}{10}$$

L'arbre Y tourne, dans cette hypothèse, cent fois moins vite que X.

On a supposé la roue C entièrement fixe. En réalité, elle est indépendante de l'axe Y et du carter, et peut tourner librement. Le train épicycloïdal est alors sans effet. Un frein qui entoure la partie H permet de passer graduellement de l'immobilité absolue à la liberté complète, et de réaliser ainsi des embrayages et des débrayages progressifs.

L'axe Z est doublement coudé, et le mécanisme se compose de deux parties symétriques de celle qui a été décrite. Cette disposition a pour but d'équilibrer le système, et d'annuler les effets de la force centrifuge. Lorsque le train de Humpage est employé dans les machines-outils, il est logé dans le cône de commande, qui remplace le carter I.

APPAREILS A LIEN RIGIDE

DANS LESQUELS

LE SENS DE LA TRANSMISSION EST CONSTANT
AINSI QUE LE RAPPORT DES VITESSES

CHAPITRE XII

413. Principe général sur lequel s'appuie ce mode de transmission

Considérons deux corps S et S' (fig. 361), mobiles autour d'axes parallèles projetés en o, o' sur le plan de la figure, auquel ils sont perpendiculaires, et supposons-les reliés par une barre rigide AA', articulée en A et A'.

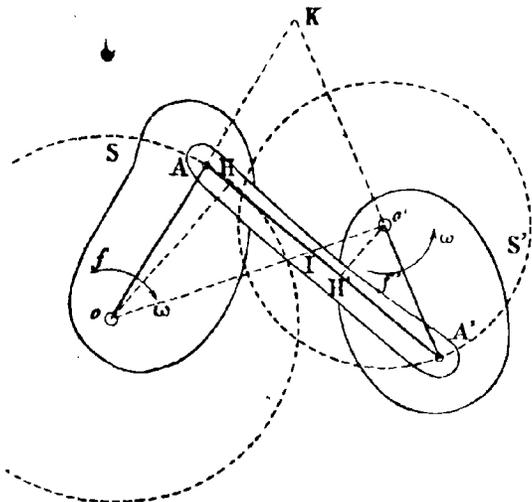


Fig. 361.

Les distances des articulations aux axes restant invariables, le mécanisme peut être réduit, au point de vue géométrique, à trois droites oA , $o'A$, et AA' dont les deux premières, appelées *manivelles*, tournent autour des points fixes o , o' , et dont la troisième, appelée *bielle*, est articulée par ses extrémités à celles des deux autres. Le tout forme un système plan dont chaque partie, prise séparément, est indéformable.

Théorème. — Lorsque deux manivelles tournant autour d'axes parallèles o et o' sont reliées par une bielle invariable :

- 1° Les rotations des manivelles ont lieu dans le même sens quand la bielle partage la ligne des centres en segments soustractifs, et en sens contraires quand elle la partage en segments additifs ;
- 2° Les vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux segments déterminés par la bielle sur la ligne des centres ;
- 3° Elles sont aussi inversement proportionnelles aux perpendiculaires abaissées des centres sur la direction de la bielle.

On voit par la figure que, l'axe o étant moteur dans le sens de la flèche f , l'action de la bielle entraîne la manivelle $o'A$ dans le sens f' contraire de f . Avec une bielle

rencontrant la ligne des centres sur son prolongement, les deux rotations s'accompliraient dans le même sens.

La droite AA' forme un système invariable auquel le théorème de Chasles est applicable ; son centre instantané de rotation K est le point de rencontre de oA et $o'A'$. En désignant par v, v' les vitesses linéaires des points A et A' dans les mouvements de rotation des manivelles, dont les vitesses angulaires sont ω et ω' , on a

$$\frac{v'}{v} = \frac{KA'}{KA}$$

Mais $v = \omega \times oA$ et $v' = \omega' \times o'A'$

Par conséquent $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{oA \times KA'}{o'A' \times KA}$

Le théorème de Ménélaüs, appliqué au triangle oKo' coupé par la transversale AA' , donne la relation

$$\frac{oI}{o'I} \times \frac{o'A'}{KA'} \times \frac{KA}{oA} = 1$$

d'où $\frac{oA \times KA'}{o'A' \times KA} = \frac{oI}{o'I}$

On a donc enfin

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{oI}{o'I}$$

De plus, si l'on trace les perpendiculaires $oH, o'H'$ à AA' , on a aussi

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{oI}{o'I} = \frac{oH}{o'H'} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

414. Condition à laquelle doit satisfaire le système pour que le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ reste constant.

Pour que le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ conserve une valeur constante k , il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que la bielle coupe la ligne des centres en un point fixe, déterminé par la relation $\frac{oI}{o'I} = k$. Pour que cela soit possible, il faudrait que toutes les droites passant par I , et limitées aux circonférences décrites par les boutons A et A' des manivelles, soient égales. Comme il n'en est pas ainsi, il est impossible de réaliser, par la combinaison de deux manivelles et d'une bielle de longueurs invariables, une transmission de mouvement telle que le rapport des vitesses angulaires ait une valeur constante donnée quelconque k .

Il n'y a à cette impossibilité qu'une seule exception. Si $k = 1$, la relation $\frac{oI}{o'I} = k$ détermine sur oo' deux points, dont l'un est au milieu de ce segment, et l'autre rejeté à l'infini. Pour la même raison que dans le cas général, le premier conduit à une combinaison irréalisable. Le second correspond à un système dans lequel la bielle resterait constamment parallèle à la ligne des centres. Ce résultat est atteint avec deux manivelles égales et parallèles, reliées par une bielle égale à la distance des centres. Dans ces conditions, en effet, le quadrilatère $oA A'o'$ est un parallélogramme, et les arbres o, o' tournent dans le même sens avec des vitesses angulaires égales.

Toutes les autres combinaisons de bielles et manivelles donnent des mécanismes dans lesquels le rapport des vitesses angulaires est variable. Nous les étudierons ultérieurement.

415. Roues couplées des locomotives.

Le mode de liaison que nous venons d'indiquer est utilisé dans les locomotives. Le mouvement rectiligne alternatif du piston est transformé en mouvement de rotation continu de l'essieu moteur par un mécanisme que nous étudierons plus loin, et l'adhérence des roues motrices sur les rails détermine l'entraînement du convoi. Dans le but d'augmenter cette adhérence, de laquelle dépend le poids maximum qu'une locomotive donnée est capable d'entraîner, on établit une liaison entre les mouvements d'une ou plusieurs paires de roues portantes et celui des roues motrices par des *bielles d'accouplement* AA' , égales et parallèles à la distance des axes (fig. 362).

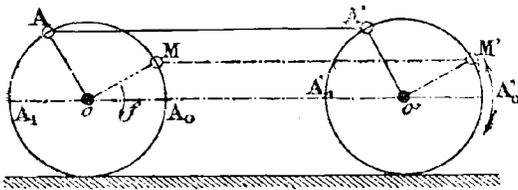


Fig. 362

Une particularité intéressante se produit lorsque, au moment de la mise en marche, les deux manivelles sont appliquées sur la ligne des centres, en oA_0 , $o'A_0$ par exemple. Aucune raison géométrique n'oblige, en effet, la manivelle conduite à tourner dans le même sens que la manivelle menante, plutôt qu'en

sens contraire. Pour provoquer des rotations de même sens, on donne aux manivelles (oA, oM) , $(o'A, o'M)$ des deux bielles d'accouplement qui relient, à droite et à gauche de la voie, les essieux o et o' , des directions perpendiculaires. L'une des bielles au moins assure le démarrage, quelle que soit la position des roues au moment où la locomotive s'arrête.

Le même fait a lieu quand les manivelles passent en oA_1 , $o'A_1$. Les couples de points A_0A_0 , A_1A_1 sont appelés des *points morts*.

416. Joint d'Oldham.

Deux arbres parallèles très rapprochés, soient Z et Z' , sont terminés par des fourches demi-circulaires égales F, F' (fig. 363), munies, à leurs extrémités, d'œilletons A, B, A', B' , percés dans le sens du diamètre de la fourche correspondante. La disposition du système est telle que les lignes d'axes de ces œillets sont situés dans un plan P perpendiculaire à Z et Z' . La liaison entre les deux arbres est assurée par un croisillon rectangulaire rigide, dont les branches coulisent dans les œillets.

En supposant que l'axe Z soit moteur dans le sens de la flèche, son action se transmet à l'axe Z' par l'intermédiaire des fourches et du croisillon. Les points $AB, A'B'$ décrivent, dans le plan P , des circonférences égales, dont les centres sont les pieds o et o' des axes sur ce plan, et la position $AB, A'B'$ du système à un instant quelconque t est caractérisée par l'angle α que forme l'une des branches du croisillon, AB par exemple, avec la direction fixe oo' (fig. 364). A l'instant $t + \Delta t$, l'axe moteur et la branche AB qui en est solidaire ont tourné d'un angle $AoA_1 = \Delta\alpha$, et la branche $A'B'$ est venue en A_1B_1 . A cause de la rigidité du système, son angle de rotation $A'o'A_1$ est aussi $\Delta\alpha$. Les vitesses angulaires des deux arbres, dont chacune est égale à la limite du rapport $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ quand Δt tend vers zéro, sont donc, à chaque instant, égales et de même sens.

Le point de rencontre I des branches du croisillon décrit une circonférence de

diamètre $oo' = d$. Pendant que la branche AIB se transporte en $A_1I_1B_1$, elle glisse dans sa propre direction d'une quantité

$$\Delta g = I_1A_1 - IA = oI - oI_1$$

Mais $oI = d \cos \alpha$, et $oI_1 = d \cos (\alpha + \Delta \alpha)$

Par conséquent

$$\Delta g = d \left[\cos \alpha - \cos (\alpha + \Delta \alpha) \right] = 2 d \sin \left(\alpha + \frac{\Delta \alpha}{2} \right) \sin \frac{\Delta \alpha}{2}$$

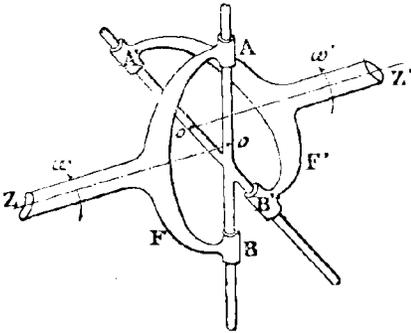


Fig. 363.

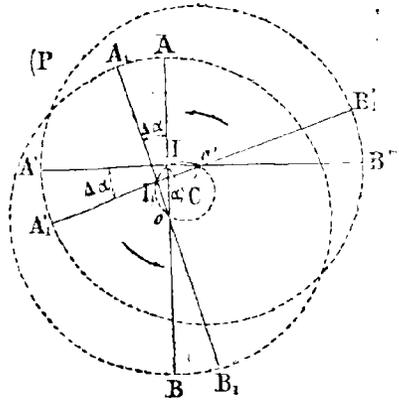


Fig. 364.

La vitesse relative de glissement de la branche AB dans la ligne d'œillets correspondante est donc, à l'instant t

$$v_g = \lim \frac{\Delta g}{\Delta t} = 2 d \lim \frac{\sin \frac{\Delta \alpha}{2}}{\Delta t} \lim \sin \left(\alpha + \frac{\Delta \alpha}{2} \right)$$

En remplaçant $\sin \frac{\Delta \alpha}{2}$ par sa partie principale $\frac{\Delta \alpha}{2}$, et en tenant compte de ce que $\omega = \lim \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$, il vient

$$v_g = \omega d \sin \alpha$$

Un calcul analogue détermine la vitesse relative de glissement

$$v'_g = \omega d \cos \alpha$$

de la branche A'B dans sa ligne d'œillets. On voit que le glissement n'est nul pour une branche du croisillon qu'à l'instant où elle passe dans le plan des axes; il est alors maximum pour l'autre branche. De plus, on a

$$v_g^2 + v'_g{}^2 = \omega^2 d^2 = \text{constante,}$$

ce qui montre que, si l'une des vitesses de glissement augmente en valeur absolue, l'autre diminue.

Enfin, soit C le milieu de oo' ; l'angle ICo étant égal à 2α , la vitesse angulaire du point I autour du point C est 2ω . Il parcourt donc deux fois la circonférence de diamètre oo pendant que les fourches font un tour.

417. Application aux tours elliptiques.

Le joint de Oldham est utilisé dans les tours elliptiques pour donner le mouvement au plateau porte-pièce F . Une disposition fréquemment adoptée est représentée schématiquement par la figure 365. Le plateau F porte, sur une de ses faces, deux rainures perpendiculaires $\beta\beta$ et $\epsilon\epsilon$. Dans la première pénètre une pièce rectangulaire B , solidaire de l'arbre moteur z ; deux pièces analogues EE , venues de fonte en des points diamétralement opposés d'un anneau circulaire D , s'engagent dans la rainure $\epsilon\epsilon$. L'anneau D glisse sur un anneau concentrique C , qui lui sert de guide, et qui est maintenu dans une position fixe par des vis de pression V s'appuyant sur le bâti A .

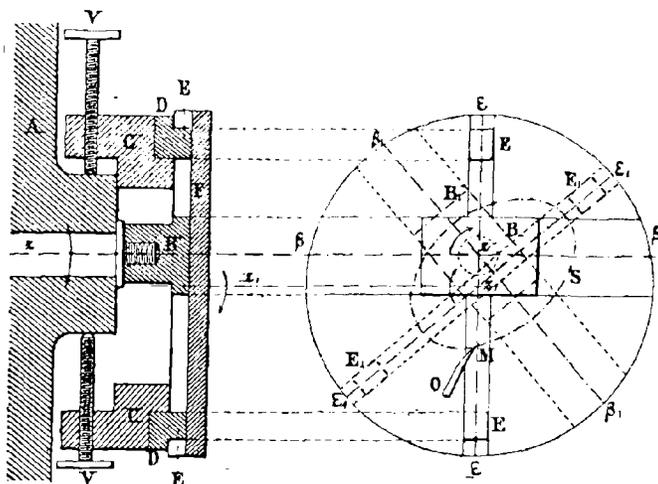


Fig. 365.

L'axe z_1 du système CD est parallèle à l'arbre z du tour. L'ensemble constitue évidemment un joint de Oldham, dans lequel le plateau F et ses deux rainures jouent le rôle du croisillon à branches perpendiculaires décrit précédemment. Si, par conséquent, un mouvement de rotation est donné à l'arbre z , l'anneau D tournera autour de z_1 , dans le même sens et avec la même vitesse angulaire.

Considérons maintenant un outil O , maintenu dans une position telle que son arête tranchante M soit dans le plan zz_1 . Les distances zM et z_1M restant invariables, la trajectoire du point M dans le plan du plateau F est une ellipse S , identique à celle que décrirait ce même point si, le plateau restant fixe, la droite zz_1M glissait en appuyant ses points z et z_1 sur les lignes d'axes $\beta\beta$ et $\epsilon\epsilon$ des deux rainures. Une barre de métal solidaire du plateau F sera donc tournée suivant l'ellipse S , dont les demi-axes sont respectivement égaux à zM et z_1M . Ces longueurs peuvent être modifiées en déplaçant l'arête de l'outil dans le plan zz_1 ; mais, pour une position donnée du système CD , leur différence reste égale à la distance des axes z et z_1 . On peut faire varier cette dernière en déplaçant l'anneau C au moyen des vis V , et obtenir ainsi des formes diverses pour l'ellipse S .

MÉCANISMES A LIEN FLEXIBLE

DANS LESQUELS

LE SENS DE LA TRANSMISSION EST CONSTANT
AINSI QUE LE RAPPORT DES VITESSES

CHAPITRE XIII

§ I. — Poulies et Courroies.

418. Principe général sur lequel s'appuie ce mode de transmission.

Soient deux corps cylindriques S et S', mobiles autour d'axes o et o' parallèles à la direction commune de leurs génératrices, reliés par une courroie AA' flexible, inextensible, et maintenue constamment tendue. Considérons seulement les sections des divers éléments du système par un plan perpendiculaire aux axes, qui sera, par exemple, celui de la figure. Pendant un temps infiniment petit, le mouvement relatif de AA' rapporté à S est un roulement sans glissement, qui revient à une rotation instantanée autour du point A.

Le mouvement de la courroie rapporté à S' revient de même à une rotation instantanée autour du point A'. Comme la courroie reste tendue et que, pour un déplacement infiniment petit, sa longueur reste constante, la transmission se fait, à l'instant considéré, comme si la liaison entre les axes était établie par les manivelles oA , $o'A'$, reliées par une bielle rigide AA'. Par conséquent :

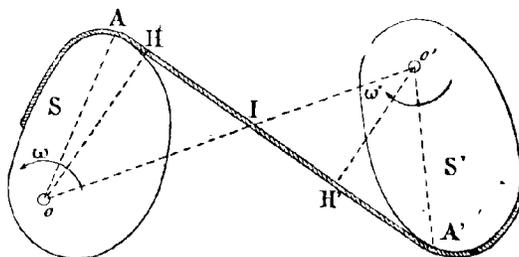


Fig. 366.

Le mouvement de la courroie rapporté à S' revient de même à une rotation instantanée autour du point A'. Comme la courroie reste tendue et que, pour un déplacement infiniment petit, sa longueur reste constante, la transmission se fait, à l'instant considéré, comme si la liaison entre les axes était établie par les manivelles oA , $o'A'$, reliées par une bielle rigide AA'. Par conséquent :

Théorème. — *Quand deux corps cylindriques, mobiles autour d'axes parallèles entre eux et aux génératrices, sont reliés par un lien flexible et inextensible maintenu constamment tendu :*

1° *Leurs rotations sont de sens contraires si la partie rectiligne de la courroie passe entre les axes, et de même sens si elle reste en dehors des axes ;*

2° *Leurs vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux segments déterminés, sur la ligne des centres, par la partie rectiligne de la courroie ;*

3° *Elles sont aussi inversement proportionnelles aux distances des centres à la partie rectiligne de la courroie.*

419. Condition à laquelle doit satisfaire le système pour que le rapport des vitesses angulaires reste constant.

D'après le théorème précédent, le rapport des vitesses angulaires ne peut être constant que si la partie rectiligne de la courroie coupe la ligne des centres en un point fixe. Cette condition est réalisée par l'emploi de tambours cylindriques de révolution, ou *poulies*, calés sur les arbres o et o' qui coïncident avec leurs axes géométriques (*). Le brin rectiligne AA' , prolongé s'il est nécessaire, passe alors constamment par l'un des centres de similitude des circonférences de section droite S et S' de ces poulies. Les vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux rayons :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R}{R'}$$

et les rotations sont de même sens ou de sens contraires, suivant que la courroie est tangente extérieurement ou intérieurement aux surfaces des deux tambours.

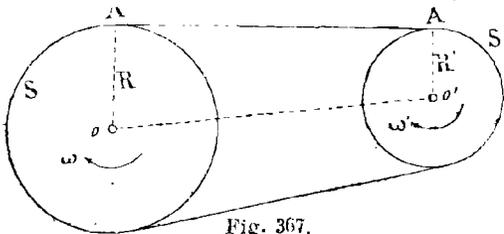


Fig. 367.

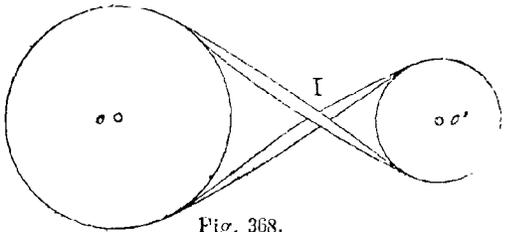


Fig. 368.

Pour assurer la continuité de la transmission, la courroie, après être allée de la poulie motrice à la poulie conduite, revient à la première ; ses deux extrémités sont rattachées l'une à l'autre de manière à former *courroie sans fin*. Le brin qui s'enroule sur la poulie motrice est appelé *brin conducteur* ou *menant* ; celui qui se déroule est le *brin mené* ou *conduit*. La courroie est *droite* quand elle est disposée suivant les tangentes communes extérieures aux deux poulies (fig. 367) et *croisée* quand elle suit les tangentes communes intérieures (fig. 368). Dans ce dernier cas, il est d'usage de la retourner de 180° dans son trajet d'un axe à l'autre, de manière que la même face soit appliquée sur les tambours, et que les brins se présentent à plat au point I où leurs directions se coupent. Cette disposition permet de placer le côté rugueux du cuir en contact avec les deux poulies, ce qui augmente l'adhérence, et évite les poussées latérales, susceptibles de faire tomber la courroie, qui se produiraient en I si les deux brins se touchaient par leurs bords.

420. Tendeurs pour courroies. Enrouleurs.

On peut employer les poulies et courroies comme organes d'embrayage en observant que la transmission de mouvement, due à l'adhérence de la courroie et au frottement considérable qu'elle détermine, cesse nécessairement si cette adhérence tombe au-dessous d'une certaine limite. Si donc on emploie une courroie lâche, com-

(*) Il n'y a pas contradiction entre cette conclusion et celle du paragraphe 414. La transmission par poulies et courroies est assimilable à un système bielle et manivelles $oA A'o'$ dont les éléments changent à chaque instant. Avec des tambours cylindriques, ce système reste immobile malgré la rotation des axes, de sorte que la direction de la bielle coupe la ligne des centres en un point fixe, résultat impossible à obtenir par l'emploi d'une combinaison unique de manivelles réunies par une bielle.

binée avec un dispositif permettant d'en faire varier la tension, on pourra à volonté provoquer l'entraînement ou l'arrêt de l'arbre conduit.

A cet effet, on appuie sur l'un des brins le galet G d'un *tendeur* (fig. 369) constitué par un levier à trois branches mobile autour d'un axe fixe o'' ; la seconde branche porte un poids P et la troisième sert à la manœuvre. Quand on écarte le levier de manière que le galet cesse d'appuyer sur la courroie, la poulie conduite s'arrête. Une disposition analogue est employée, sous le nom d'*enrouleur*, pour augmenter la longueur de l'arc embrassé par la courroie. Le galet G est alors complètement fixe. Cette combinaison permet de relier deux arbres rapprochés, dont l'un supporte une poulie de petit rayon.

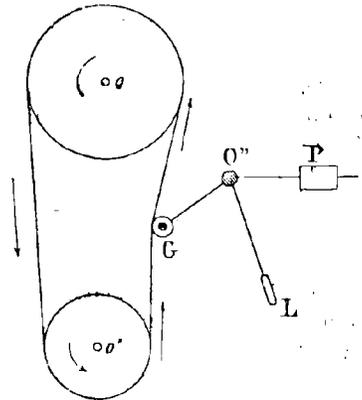


Fig. 369.

421. Forme bombée donnée aux poulies.

La surface extérieure des poulies est légèrement bombée, dans le but de mettre obstacle aux déplacements latéraux de la courroie qui risqueraient de la faire tomber. On a observé, en effet, qu'une courroie passant d'une poulie cylindrique à une poulie tronc-conique se rapprochait de la plus grande base (fig. 370). Cela tient à ce que, ses deux bords ayant des vitesses linéaires différentes, la courroie tend à se placer obliquement, comme l'indique la figure, ce qui l'entraîne vers des rayons de plus en plus grands.

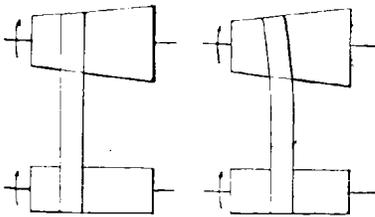


Fig. 370.

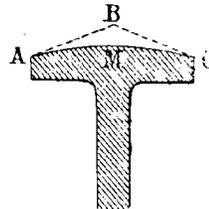


Fig. 371.

Il résulte de là que, si l'on forme une poulie par deux troncs de cône à grandes bases superposées, la courroie se maintient d'elle-même dans la région médiane. Dans la pratique, on substitue aux génératrices ABC (fig. 371), suivant lesquelles les deux troncs de cône sont coupés par un plan méridien, un arc de cercle tangent AMC, dont la rotation autour de l'axe engendre la surface extérieure de la poulie. L'expérience conduit à donner à la flèche de cet arc une longueur égale au 1/20 de la largeur de la courroie.

422. Longueur d'une courroie. — Nous distinguerons deux cas :

1° Cas d'une courroie droite.

Soient R et R' les rayons des poulies, a la distance des axes, et α l'angle que forme la ligne des centres avec les rayons $oA, o'A'$ qui aboutissent aux points de contact A, A'. La demi-longueur de la courroie est

$$\begin{aligned}
 l &= \text{arc MA} + \text{arc M'A'} + AA' \\
 &= a \sin \alpha + (\pi - \alpha) R + \alpha R' \\
 &= a \sin \alpha + \pi R - (R - R') \alpha
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

L'angle α est déterminé par la relation, tirée du triangle rectangle oCo

$$\cos \alpha = \frac{R - R'}{a} \quad (2)$$

Ces formules permettent de calculer l en fonction de a , R et R' . Dans la pratique, on substitue souvent à la première la formule approchée qui s'en déduit en faisant $\alpha = \frac{\pi}{2}$, soit

$$l = a + \frac{\pi}{2} (R + R') \quad (3)$$

Toutefois, l'approximation n'est suffisante que si la distance des axes est assez grande, comparativement à R et R' , pour que la valeur exacte de α diffère peu d'un angle droit.

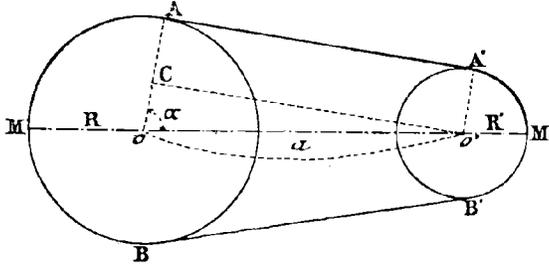


Fig. 372.

Application. — En supposant $a = 3$ mètres $R = 50$ c/m $R' = 30$ c/m, la formule approchée (3) donne, en centimètres

$$l = 300 + 1.5708 \times 80 = 425 \text{ c/m } 66$$

soit 8^m,51 pour longueur totale de la courroie.

La formule (2) donne

$$\cos \alpha = \frac{20}{300} = \frac{1}{15}$$

D'où $\alpha = 85^{\circ}33'$

et, en prenant pour unité l'angle au centre qui intercepte entre ses côtés un arc égal au rayon

$$\alpha = 1.504$$

D'autre part $\sin \alpha = 0.997$. On tire donc de la formule (1)

$$l = 300 \times 0.997 + 50 \pi - 20 \times 1.504 = 426 \text{ c/m } 10$$

soit 8^m,52 pour longueur totale de la courroie. On voit que, dans ce cas particulier, le résultat fourni par la formule approchée est très suffisamment exact.

2° Cas d'une courroie croisée.

On a, en conservant les notations précédentes

$$\begin{aligned}
 l &= \text{arc MA} + \text{arc M'A} + \text{AA} \\
 &= a \sin \alpha + (\pi - \alpha) R + (\pi - \alpha) R' \\
 &= a \sin \alpha + (\pi - \alpha)(R + R')
 \end{aligned} \tag{4}$$

l'angle α étant déterminé par la relation, tirée du triangle rectangle oCo'

$$\cos \alpha = \frac{R + R'}{a} \tag{5}$$

Application. — En supposant $a = 3$ mètres, $R = 50$ cm , $R' = 30$ cm , on trouve

$$\cos \alpha = \frac{50 + 30}{300} = \frac{4}{15}$$

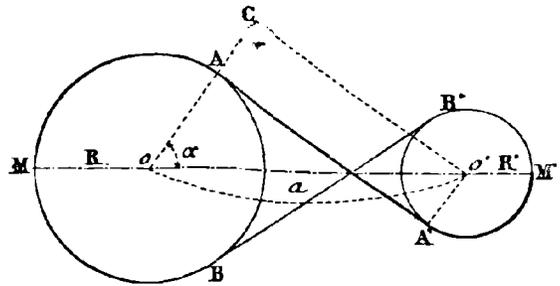


Fig. 373.

d'où $\alpha = 74^{\circ}30'$ et $\sin \alpha = 0.964$

En prenant pour unité l'angle au centre qui intercepte entre ses côtés un arc égal au rayon $\alpha = 1.3$ Il vient donc

$$l = 300 \times 0.964 + (50 + 30) \times 1.8416 = 436 \text{ cm } 53$$

soit $8^{\text{m}},73$ pour la longueur totale de la courroie.

423. Condition pour que la longueur d'une courroie ne change pas quand on fait varier les rayons des poulies, la distance des axes restant constante. — Poulies étagées.

1° Cas d'une courroie croisée.

Les formules (4) et (5) montrent que, pour une distance d'axes donnée, la longueur de la courroie ne dépend que de la somme $R + R'$. On peut donc faire passer une même courroie sur des assortiments de poulies, constitués de telle sorte que la somme des rayons de deux poulies accouplées reste invariable.

2° Cas d'une courroie droite. Solution approchée.

Si l'on se trouve dans des conditions telles que la formule 3 (422) soit applicable, la condition d'invariabilité pour la longueur de la courroie est encore $R + R' = \text{constante}$.

Applications. I. — Si, par exemple, les rayons respectifs de deux poulies conjuguées sont $R = 200\%$ et $R' = 120\%$, correspondant à un rapport de vitesses angulaires $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R}{R'} = \frac{5}{3}$, et qu'on veuille obtenir de nouveaux rapports de vitesses $\frac{4}{3}$

1 et 2/3, les rayons des couples suivants seront déterminés par les relations

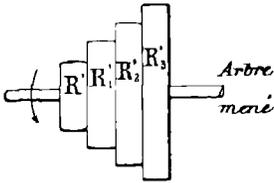
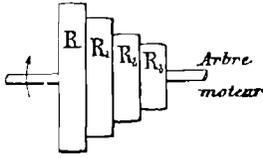


Fig. 374.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 + R'_1 = R + R' = 320 \text{ m/m} \\ \frac{R_1}{R'_1} = \frac{4}{3} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R_2 + R'_2 = 320 \text{ m/m} \\ \frac{R_2}{R'_2} = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R_3 + R'_3 = 320 \text{ m/m} \\ \frac{R_3}{R'_3} = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} R_1 &= 182 \text{ m/m} & R'_1 &= 137 \text{ m/m} \\ R_2 &= R'_2 = 160 \text{ m/m} \\ R_3 &= 128 \text{ m/m} & R'_3 &= 192 \text{ m/m} \end{aligned}$$

En réalité, ces résultats doivent être un peu modifiés, tant à cause de la forme bombée donnée aux poulies, qu'à cause de l'influence de l'allongement de la courroie sur le rapport des vitesses (427). Les poulies de rayons R, R_1, R_2, R_3 d'une part, celles de rayons R', R'_1, R'_2, R'_3 d'autre part, forment deux blocs, calés l'un sur l'arbre moteur, l'autre sur l'arbre mené (fig. 374), auxquels on donne le nom de cônes ou de poulies étagées.

II. — Calculer les rayons des poulies de deux cônes à trois étages, conduisant un tour pourvu d'un harnais ordinaire (396), connaissant :

1° Les rayons maximum et minimum des pièces à travailler, soient 100 m/m et 10 m/m , ainsi que la vitesse moyenne de coupe, soit 9 mètres par minute :

2° La vitesse constante de l'arbre du renvoi, soit $N = 60$ tours par minute :

3° Le rayon moyen du cône moteur, soit $R_1 = 80 \text{ m/m}$. (Nous employons les notations indiquées figure 374, dans les trois étages de gauche).

On sait, de plus, que les vitesses obtenues par l'emploi combiné des cônes et du harnais forment une progression géométrique.

Calcul des vitesses du cône mené. — Soient N' et N'' les vitesses angulaires, évaluées en nombres de tours par minute, qui conviennent pour le travail des pièces de plus grand et de plus petit rayon. En égalant les vitesses circonférentielles correspondantes à la vitesse de coupe, on a, si l'on prend le millimètre pour unité de longueur et la minute pour unité de temps

$$2\pi N' \times 100 = 9000 \quad \text{d'où} \quad N' = \frac{45}{\pi} = 14.3, \text{ soit } 15 \text{ tours environ}$$

$$2\pi N'' \times 10 = 9000 \quad \text{d'où} \quad N'' = \frac{450}{\pi} = 143.2, \text{ soit } 150 \text{ tours environ.}$$

Appelons ϵ la raison du harnais. Les termes de la progression géométrique formée par les six vitesses résultant de l'emploi combiné du cône et du harnais sont

Volée	Harnais	Volée	Harnais	Volée	Harnais
150	150ϵ	$150 \epsilon^2$	$150 \epsilon^3$	$150 \epsilon^4$	$150 \epsilon^5 = 15$

Par conséquent $\varepsilon^3 = \frac{1}{10}$ et $\varepsilon = 0,63$ environ.

Les vitesses du cône mené, quand la courroie passe du plus petit étage au plus grand, sont donc

$$N' = 150 \text{ tours} \quad N'_1 = 150 \varepsilon^2 = 59,7 \text{ ou } 60 \text{ tours}$$

$$N'_2 = 150 \varepsilon^4 = 23,8 \text{ ou } 24 \text{ tours.}$$

Calcul des rayons. — Nous calculerons d'abord le rayon de l'étage moyen du cône mené, puisque le rayon de l'étage correspondant du cône moteur est connu. La proportion $\frac{R_1}{R'_1} = \frac{N'_1}{N}$ donne

$$R'_1 = \frac{R_1 \times N}{N'_1} = \frac{80 \times 60}{60} = 80 \text{ m/m.}$$

Pour que la courroie puisse être placée successivement sur tous les étages, la somme des rayons doit, d'après ce qui précède, être constamment égale à $R_1 + R'_1 = 160 \text{ m/m.}$

Les rayons R et R' vérifient les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} R + R' = 160 \text{ m/m.} \\ \frac{R}{R'} = \frac{150}{60} \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit $\frac{R}{150} = \frac{R'}{60} = \frac{R + R' \text{ ou } 160}{210}$

et, par conséquent $\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{160 \times 150}{210} = 114 \text{ m/m} \\ R' = \frac{160 \times 60}{210} = 45 \text{ m/m} \end{array} \right.$

On a, de même $\left\{ \begin{array}{l} R_2 + R'_2 = 160 \text{ m/m} \\ \frac{R_2}{R'_2} = \frac{24}{60} \end{array} \right.$

d'où $\frac{R_2}{24} = \frac{R'_2}{60} = \frac{R_2 + R'_2 \text{ ou } 160}{84}$

et $\left\{ \begin{array}{l} R_2 = \frac{160 \times 24}{84} = 45 \text{ m/m} \\ R'_2 = \frac{160 \times 60}{84} = 114 \text{ m/m} \end{array} \right.$

423 bis. Cas d'une courroie droite. — Solution rigoureuse.

Il s'agit de déterminer les rayons des poulies conjuguées de telle sorte que la même courroie, de longueur connue $2l$, puisse passer d'un couple à l'autre, et que le

rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ prene une valeur donnée pour chaque couple. Cela revient à résoudre par rapport à R et R' le système d'équations simultanées

$$\left\{ \begin{array}{l} l = a \sin \alpha + (\pi - \alpha) R + \alpha R' \\ \cos \alpha = \frac{R - R'}{a} \\ k = \frac{R}{R'} \end{array} \right.$$

Nous chercherons d'abord les valeurs de R et R' convenant aux deux premières. Ajoutons et retranchons $\frac{\pi R'}{2}$ à l'expression de l; en supposant R > R', il vient successivement

$$\begin{aligned} l &= a \sin \alpha + \frac{\pi}{2} R + \frac{\pi}{2} R' + \frac{\pi}{2} R - \frac{\pi}{2} R' - R\alpha + R'\alpha \\ &= a \sin \alpha + \frac{\pi}{2} (R + R') + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) (R - R') \\ &= a \sin \alpha + \frac{\pi}{2} (R + R') + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) a \cos \alpha \end{aligned}$$

On tire

$$\frac{\pi}{2} (R + R') = l - a \sin \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) a \cos \alpha$$

d'où

$$\frac{R + R'}{2} = \frac{l}{\pi} - \frac{a}{\pi} \left[\sin \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \alpha \right]$$

D'autre part

$$\frac{R - R'}{2} = \frac{a}{2} \cos \alpha$$

Ces deux dernières équations forment un système qu'il est impossible de résoudre rigoureusement par des formules algébriques, puisque α est une fonction de R - R'. Nous tournerons la difficulté en considérant R et R' comme des fonctions de α , et nous représenterons graphiquement les variations de $\frac{R + R'}{2}$ et de $\frac{R - R'}{2}$.

a) *Représentation graphique des variations de $\frac{R + R'}{2}$*

On construit d'abord les longueurs $\frac{l}{\pi}$ et $\frac{a}{\pi}$. Pour cela, on trace un rectangle VXUY (fig. 375) dont les côtés sont respectivement d et πd , d étant une longueur arbitraire. En menant la diagonale VU, on obtient une échelle qui permet de réduire une longueur quelconque dans le rapport de 2 à π . Si, par exemple, on porte sur le côté VY une longueur VT = l, on a

$$\frac{TZ}{l} = \frac{d}{\pi d} = \frac{1}{\pi}$$

d'où $TZ = \frac{l}{\pi}$. En portant ensuite ZA = a, on a de même $AB = \frac{a}{\pi}$

Traçons le quart de cercle BB_1 de centre A , et soit $B_1AC = \alpha$ un angle quelconque ; portons sur la tangente CE au point C une longueur

$$CE = \text{arc } CB = AB \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{a}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

Menons enfin l'ordonnée DCG et sa perpendiculaire EF . La figure donne

$$CD = AC \sin \alpha = \frac{a}{\pi} \sin \alpha$$

$$CF = CE \cos \alpha = \frac{a}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \alpha$$

et par suite

$$DF = CD + CF = \frac{a}{\pi} \left[\sin \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \alpha \right]$$

Donc enfin, à cause de $DG = \frac{l}{\pi}$

$$GF = GD - DF = \frac{l}{\pi} - \frac{a}{\pi} \left[\sin \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \alpha \right] = \frac{R + R'}{2}$$

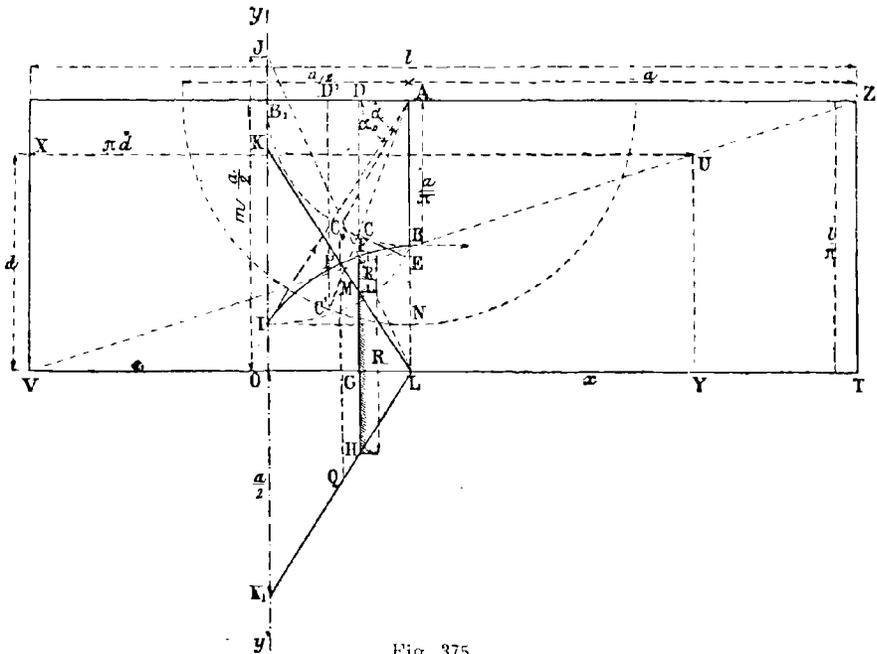


Fig. 375.

Les seules valeurs de α que l'on ait à considérer étant comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, la construction précédente, appliquée à des positions suffisamment nombreuses du point C sur l'arc B_1B , donne une courbe $I'E'B$ qui représente, dans le système d'axes rectangulaires xOy , les variations de $\frac{R + R'}{2}$ pour $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. On facilite les opérations en remarquant que le lieu du point E est un arc de développante de cercle BEI que

l'on peut tracer. Il suffit ensuite de mener diverses tangentes à BB_1 , telles que CE , jusqu'à leur intersection avec cette développante, puis la parallèle EF à Ox jusqu'à sa rencontre avec l'ordonnée du point C (*).

b) Représentation graphique des variations de $\frac{R - R'}{2}$

L'expression de cette quantité est $\frac{R - R'}{2} = \frac{a}{2} \cos \alpha$

Décrivons du point A comme centre une circonférence de rayon $AN = \frac{a}{2}$, prolongeons AC jusqu'en C' et menons l'ordonnée $C'D'$. Nous aurons ainsi

$$AD' = \frac{a}{2} \cos \alpha = \frac{R - R'}{2}$$

En portant cette longueur suivant GM , et en répétant la même construction pour des valeurs suffisamment nombreuses de α , on obtient une ligne LMK qui représente les variations de $\frac{R - R'}{2}$ dans le système xOy . Or, on a

$$GM = \frac{a}{2} \cos \alpha$$

$$LG = AD = \frac{a}{\pi} \cos \alpha$$

et par conséquent

$$\frac{GM}{LG} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{\pi}} = \frac{\pi}{2} = \text{constante}$$

Il résulte de là que tous les triangles rectangles analogues à LMG sont semblables, et que le lieu du point M est une droite. Pour la construire, il suffit d'observer que $OK = \frac{a}{2}$, puisque le point K est la position que prend le point M quand $\alpha = 0$.

(*) La courbe IFB est tangente en B à la parallèle à Ox , et en I à la droite IA . On a en effet, en posant $\frac{R + R'}{2} = GF = y$, $oG = \frac{a}{\pi} - \frac{a}{\pi} \cos \alpha = x$, et en différentiant par rapport à α

$$\begin{cases} dy = \frac{a}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \alpha d\alpha \\ dx = \frac{a}{\pi} \sin \alpha d\alpha \end{cases}$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

expression qui se réduit à zéro pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (point B de la courbe IFB), et à $\frac{\pi}{2}$ pour $\alpha = 0$

(point I de la courbe). Comme $\frac{AN}{IN} = \frac{B_1I}{IN} = \frac{\frac{\pi}{2} \times \frac{a}{\pi}}{\frac{a}{\pi}} = \frac{\pi}{2}$, IA est la tangente en I .

En donnant à α , pour la construction de IFB , des valeurs $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \dots$, on construit aisément la tangente en chaque point F déterminé.

c) Détermination de R et R'.

Il est maintenant facile de construire les valeurs de R et R' qui correspondent à une valeur donnée de α . En traçant LK_1 symétrique de LK par rapport à Ox, on a

$$R = \frac{R + R'}{2} + \frac{R - R'}{2} = FG + GM = FG + GH = FH$$

$$R' = \frac{R + R'}{2} - \frac{R - R'}{2} = FG - GM = FM$$

Il reste à montrer comment on peut déterminer ces rayons de manière à réaliser un rapport donné $\frac{\omega'}{\omega} = k$ de vitesses angulaires. La question revient à trouver le point F.

De la relation
$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R}{R'} = k$$

on tire, en supposant $R > R'$ (d'où $\omega' > \omega$ et $k > 1$)

$$\frac{\omega' + \omega}{\omega' - \omega} = \frac{R + R'}{R - R'} = \frac{\frac{R + R'}{2}}{\frac{R - R'}{2}} = \frac{FG}{MG} = \frac{k + 1}{k - 1}$$

Le rapport $\frac{k + 1}{k - 1}$ est connu par hypothèse; soit m sa valeur. La position du point F sur IB doit donc satisfaire à la relation

$$\frac{FG}{GM} = m$$

Si l'on suppose le problème résolu, et si l'on prolonge LF jusqu'en J, on a

$$\frac{OJ}{OK} = \frac{FG}{MG} = m$$

et par conséquent

$$OJ = m \times OK = m \frac{a}{2}$$

La valeur de OJ étant ainsi connue, on peut déterminer le point J, et par suite le point F. On obtient ensuite R et R' comme plus haut.

Il faut observer que le point F ne peut pas passer à gauche du point P où LK rencontre IB, sans quoi le segment $R' = FM$ changerait de signe. Cela provient de ce que pour une longueur donnée de courroie, l'angle α ne peut pas tomber au-dessous d'un certain minimum, correspondant au cas où $R' = 0$, et donné par la formule

$$\cos \alpha_0 = \frac{R}{a}$$

Ce minimum est, dans la figure, l'angle B_1AC_0 qui correspond au point de rencontre de l'ordonnée PC_0 du point P avec le quart de cercle B_1B .

d) Dispositions pratiques.

La figure 376 montre comment on peut disposer les choses pour rendre pratique l'emploi de l'échelle de proportions que nous venons d'apprendre à construire. Obser-

vons que, quels que soient l et a , les directions LK et LK_1 sont invariables puisque

$$\frac{OK}{OL} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{\pi}} = \frac{\pi}{2} = \text{constante.}$$

Seule, la position du point L dépend de l , à cause des relations $AL = \frac{l}{\pi}$ et $BL = \frac{l-a}{\pi}$. On peut donc procéder de la façon suivante.

Après avoir tracé la courbe IB aussi exactement que possible, on construit un rectangle $zabc$ dont les côtés $zc = \delta$ et $za = \frac{2\delta}{\pi}$ sont dans le rapport de 1 à $\frac{\pi}{2}$ (δ représentant une longueur arbitraire). Les diagonales ac et zb sont respectivement parallèles à LK et LK_1 . On porte ensuite $BL = \frac{l-a}{\pi}$, et l'on trace LK , LK_1 . Pour évi-

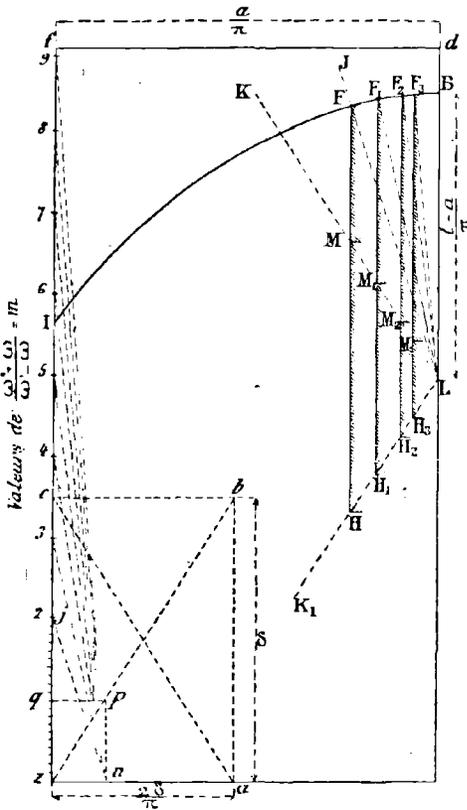


Fig. 376.

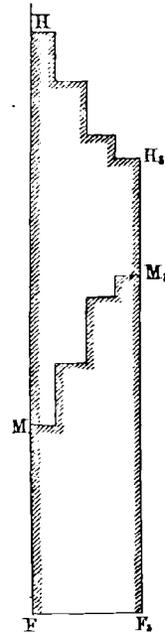


Fig. 377.

ter d'avoir à déterminer chaque fois les directions, telles que LFJ , qui correspondent à une valeur donnée k du rapport des vitesses angulaires, on gradue le côté zf du cadre comme il suit. On trace un rectangle $znpg$ semblable à $zabc$, de dimensions assez petites pour que son côté zq soit contenu un grand nombre de fois dans zf . En portant zq successivement en q^2, q^3, q^4, \dots et en joignant les points de division à n , on

obtient des droites, telles que nj , respectivement parallèles aux directions de la droite LFJ pour les valeurs $m = 2, 3, 4 \dots$ du rapport $\frac{\omega' + \omega}{\omega' - \omega}$. En effet,

$$\frac{zj}{zn} = m \times \frac{zq}{zn} = m \times \frac{ab}{za} = m \frac{\pi}{2}$$

D'autre part (fig. 375)

$$\frac{OJ}{OL} = \frac{m \frac{a}{2}}{\frac{a}{\pi}} = m \frac{\pi}{2}$$

Donc nj est parallèle à LJ.

Il n'est pas nécessaire de faire une figure pour chaque valeur de a . Il suffit de réduire $\frac{a}{\pi}$ dans un rapport tel que cette longueur soit représentée par df (fig. 376). On réduit ensuite $\frac{l-a}{\pi}$ dans le même rapport, pour déterminer le point L. Si, par exemple, il s'agit de déterminer R et R' pour une distance d'axes $a = 2$ mètres, et une demi-longueur de courroie $l = 3^m 50$, en supposant $df = 120^m/m$, on cherche un rapport de réduction $\frac{1}{n}$ tel que $\frac{1}{n} \times \frac{a}{\pi} = 120^m/m$. On trouve

$$\frac{1}{n} = 120 \times \frac{\pi}{2000} = \frac{3 \pi}{50}$$

On calcule ensuite la longueur qui, à la même échelle, représente $\frac{l-a}{\pi}$, soit

$$\frac{1}{n} \times \frac{l-a}{\pi} = \frac{3 \pi}{50} \times \frac{3500 - 2000}{\pi} = 90^m/m.$$

C'est cette longueur que l'on porte en BL. Les rayons $R = FH$ et $R' = FM$ ainsi construits sont représentés à l'échelle $\frac{1}{n}$. Leurs vraies longueurs sont donc

$$R = FH \times n = FH \times \frac{50}{3 \pi} \qquad R' = FM \times n = FM \times \frac{50}{3 \pi}$$

On a représenté (fig. 376-377) les rayons de deux cônes à quatre étages, correspondant à des valeurs $k = 3, 2, 3/2, 4/3$ du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$.

424. Cônes complémentaires.

Ce mécanisme, qu'on peut considérer comme la disposition limite de poulies étagées dans lesquelles le nombre des étages croît indéfiniment, en même temps que la différence de deux rayons consécutifs tend vers zéro, permet de faire varier graduellement le rapport des vitesses angulaires de deux axes parallèles. Il se compose de deux troncs de cônes, de même angle générateur α , montés en sens inverse sur les deux arbres (fig. 378). Le plan moyen de la courroie, dont la trace sur le plan de la figure est AB, coupe les tambours suivant deux circonférences de rayons R et R'.

Pour que la courroie puisse parcourir les poulies dans toute leur étendue, il faut et il suffit, en adoptant pour exprimer sa longueur la formule approchée

$$l = a + \frac{\pi}{2} (R + R')$$

que l'on ait $R + R' = \text{constante}$. Cette condition est bien remplie, car si AB se déplace parallèlement à elle-même jusqu'en A'B', R augmente de A'C, tandis que R' diminue de BD. A cause de l'égalité des angles générateurs α , on a évidemment $A'C = BD$.

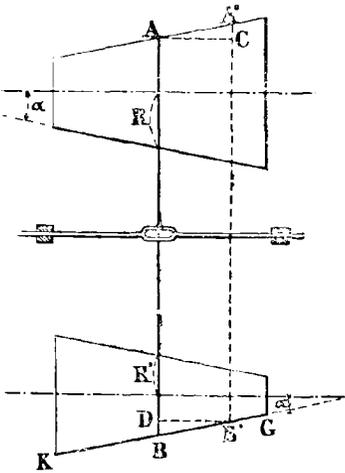


Fig. 378.

Pour réaliser une plus grande précision, on associe à l'une des poulies tronc-coniques un tambour, dont on détermine la section méridienne curviligne par points, en construisant un nombre convenable de rayons par l'échelle de proportions établie précédemment.

On a déjà signalé l'emploi d'une poulie conique dans les bancs à broches, pour la commande du train épicycloïdal d'Houldsworth (411). On trouve aussi les cônes complémentaires dans quelques machines outils, où la vitesse de l'arbre mené doit varier d'une façon continue. C'est ce qui se présente dans les machines à tronçonner Pratt et Whitney, où la broche reçoit un mouvement de rotation accéléré pendant que l'outil se rapproche du centre de la barre, afin que la vitesse circonférentielle de coupe à l'outil reste constante. La translation de la courroie est

assurée par vis et écrou. Tandis que le tronçonnement d'une barre d'acier de 76^m/m de diamètre demande 7 minutes quand la broche tourne d'un mouvement uniforme, il s'effectue en 2 minutes 1/2 avec une machine pourvue des cônes accélérateurs.

Une modification importante a récemment été apportée à l'emploi des cônes complémentaires. Les flexions que subit la courroie obligent à en réduire la largeur, ce qui restreint l'emploi de l'appareil à la transmission d'efforts assez faibles. Pour éviter cet inconvénient, la Société américaine Moore et White a imaginé d'employer des courroies secondaires, dites *transformatrices*, intercalées entre la courroie menante et chacune des poulies-cônes. Ces courroies transformatrices sont formées de blocs de cuir prismatiques, empilés de manière à constituer des files analogues à celle qui est représentée dans la figure 382. Les dimensions des

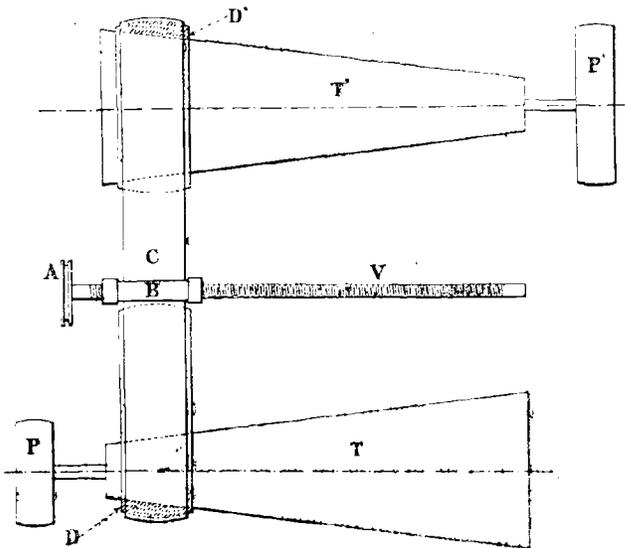


Fig. 379.

bloes dans les files consécutives sont calculées de telle sorte que la courroie secondaire rachète l'angle du cône sur lequel elle s'enroule, comme il est montré en D et D' dans la figure 379. La courroie principale C est ainsi placée sur des parties cylindriques, et peut recevoir telle largeur que l'on veut.

Le changement du rapport des vitesses est obtenu par le transfert de la courroie C et des courroies secondaires D et D'. La courroie C est prise dans une fourchette, solidaire d'un écrou B que l'on peut faire mouvoir en agissant sur la vis V par une chaîne enroulée sur la poulie A.

425. Poulies extensibles Foullaron.

La variation dans le rapport des vitesses peut aussi être obtenue en employant deux poulies extensibles, combinées de telle sorte que la somme de leurs rayons reste constante. M. Foullaron, constructeur à Levallois-Perret, a imaginé un dispositif très ingénieux, qu'il a appliqué au changement de vitesse dans les automobiles.

Chaque poulie est constituée par deux cônes identiques, montés sur le même arbre en sens inverse l'un de l'autre. Ces cônes sont creux, et leurs surfaces latérales sont percées d'entailles trapézoïdales (fig. 380), comprises entre des génératrices à

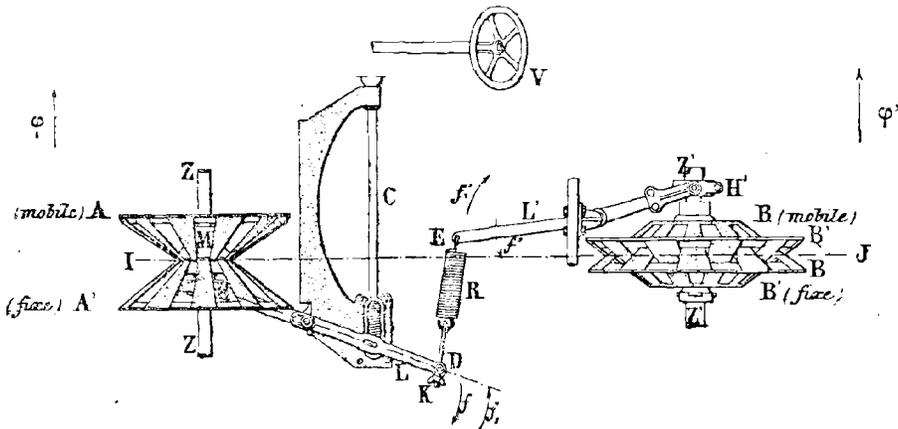


Fig. 380.

peu près équidistantes. Les parties pleines étant légèrement plus étroites que les parties creuses, les pleins de l'un des troncs de cône peuvent s'engager dans les creux de son conjugué ; l'ensemble de deux cônes jumeaux forme une sorte de poulie, dont le diamètre varie évidemment avec l'écartement de ses parties.

Deux de ces poulies sont employées à la transmission du mouvement dans les voitures système Foullaron. L'une d'elles, AA', dite poulie motrice, est montée sur l'arbre Z du moteur, et participe à sa rotation. L'autre, BB', dite poulie réceptrice, est montée sur un arbre Z', dont la rotation se transmet, au moyen de pignons et de chaînes aux roues arrière du véhicule. Le cône A' de la poulie motrice est calé à demeure sur l'arbre Z ; le cône A est porté par un manchon à rainures qui lui permet, tout en participant à la rotation de l'arbre Z, de se déplacer longitudinalement sous l'action d'un levier LH. De même, le cône B' de la poulie réceptrice est fixe sur l'arbre Z', et le cône B peut glisser le long de cet arbre sous l'action du levier L'H'. Les bras L et L' des deux leviers sont reliés par un puissant ressort R. Le mouvement du levier LH est produit par une vis sans fin C, commandée elle-même, au moyen d'engrenages non figurés sur le croquis, par un petit volant V placé au-dessous du grand

volant de direction. Enfin, les deux cônes mobiles A et B sont orientés en sens inverse l'un de l'autre.

Supposons que, sous l'action du volant V, le bras L du levier LH soit entraîné, dans la direction f . Le cône mobile A de la poulie motrice se déplace dans la direction φ , et le rayon de cette poulie diminue. Le mouvement est transmis au levier L'I' par le ressort R, et le cône mobile B est entraîné dans la direction φ' , ce qui accroît le rayon de la poulie réceptrice. Comme la vitesse angulaire de l'arbre moteur reste sensiblement constante, le résultat obtenu est un ralentissement de l'arbre Z et des roues arrière de la voiture. Le déplacement des leviers dans le sens des flèches f_1 et f'_1 produit l'effet contraire.

Il faut toutefois montrer que ce changement dans les positions relatives des diverses parties du système peut s'accomplir sans qu'il soit nécessaire de faire varier la longueur de la courroie. Pour cela, considérons seulement la poulie motrice et supposons que son cône mobile soit passé de la position A_1 à la position A (fig. 381). Le rayon de la poulie motrice a diminué de la différence $c_1d_1 - cd$. Or, si l'on désigne par α le demi-angle au sommet des cônes jumeaux, et par e le déplacement longitudinal du cône mobile, on a :

$$c_1d_1 - cd = \frac{ab_1}{2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{ab}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{ab_1 - ab}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{e}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

De même, à un déplacement longitudinal e' du cône mobile B de la poulie réceptrice correspond une augmentation de rayon égale à $\frac{e'}{2} \operatorname{tg} \alpha$. Pour que la même longueur de courroie puisse convenir dans les deux positions du système, il suffit que la

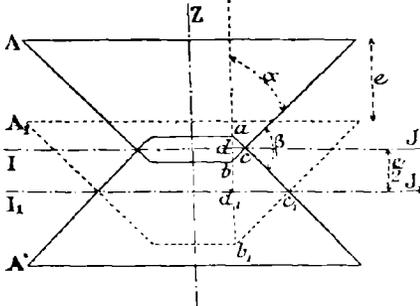


Fig. 381.

somme des rayons des poulies reste constante, ce qui a lieu si $e = e'$. Les dimensions des leviers doivent être telles que cette égalité soit satisfaite. En supposant qu'il en soit ainsi, et que chaque levier soit mobile autour de son milieu, les déplacements des points D et E sur les circonférences qu'ils décrivent seront aussi égaux. Mais la distance DE, dans ces conditions, ne demeure pas constante. C'est pourquoi les deux leviers ne sont pas reliés par une tige rigide. Au moyen de l'écrou K, on règle le système de manière que le ressort R soit légèrement tendu quand la distance DE est minimum;

l'appareil fonctionne d'une façon satisfaisante dans toutes les autres positions, à cause de l'élasticité de R. De plus, l'action du ressort tend constamment à rapprocher les points D et E, c'est-à-dire à augmenter simultanément les rayons des deux poulies, ce qui assure à la courroie une tension convenable dans tous les cas.

La courroie est composée de blocs de cuir découpés en forme de trapèze isocèle (fig. 382). L'angle β des deux côtés égaux est égal à celui que forment entre

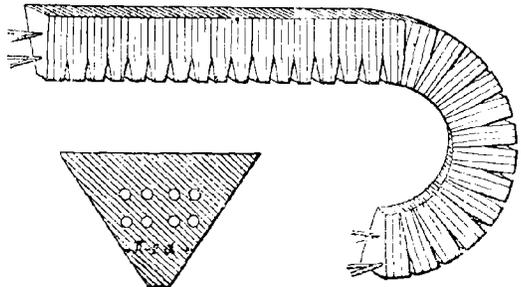


Fig. 382.

elles, sur les cônes jumeaux, deux génératrices situées dans un même plan méridien. On a donc $\beta = \pi - 2\alpha$. Les blocs de cuir sont percés de trous dans lesquels pénètrent des cordes à boyau qui donnent à l'ensemble de la courroie beaucoup de souplesse et de solidité.

Pendant le fonctionnement du système, le plan moyen de la courroie se meut parallèlement à lui-même. Soient IJ et I₁J₁ (fig. 381) les positions de ce plan qui correspondent aux positions (A₁, A') et (A, A') de la poulie motrice. On a évidemment

$$dd_1 = \frac{ab_1}{2} - \frac{ab}{2} = \frac{e}{2}$$

Comme le déplacement e' de la poulie réceptrice est égal à e , et de même sens, on conclut que, si les cônes mobiles se transportent dans un certain sens d'une quantité e , le plan moyen de la courroie se transporte dans le même sens d'une quantité $\frac{e}{2}$ (*).

Les poulies extensibles Fouillaron peuvent remplacer les poulies étagées dans les transmissions de mouvement industrielles.

426. Poulies folles.

Lorsque plusieurs machines reçoivent le mouvement d'un même arbre moteur, il importe de pouvoir arrêter ou mettre en marche chacune d'elles, sans avoir à se préoccuper des autres. On arrive à ce résultat en plaçant sur l'un des arbres, à côté de la poulie de commande P, une poulie égale P', dite *poulie folle*, qui tourne sans entraîner son axe (fig. 383). En agissant sur une fourchette F, placée au voisinage du groupe PP', on peut faire passer la courroie à volonté de P sur P', ou inversement, ce qui provoque l'arrêt de la machine dans le premier cas, et son entraînement dans le second.

La fourchette doit être disposée de manière à embrasser le brin de courroie qui s'enroule sur la poulie motrice. Nous verrons plus loin (429) l'explication de ce fait.

427. Influence de l'allongement des courroies sur le rapport des vitesses.

Lorsqu'on veut soulever un corps pesant par le moyen d'une corde ou d'une courroie passant sur une poulie, l'effort à exercer dépasse toujours le poids du fardeau, parce qu'une partie de la puissance motrice est absorbée par le frottement qui se développe entre la jante de la poulie et le lien, ou sert à vaincre la raideur de la courroie qui oppose une certaine résistance à la flexion. En d'autres termes, *la tension T du brin conducteur DA est plus grande que la tension T' du brin conduit BC*. Cette observation est applicable dans la transmission par poulies et courroies, la résistance opposée par la poulie menée jouant le rôle du poids à soulever.

Comme la courroie, formée d'une matière élastique, s'allonge proportionnellement à la tension qu'elle supporte, les longueurs de ses deux brins varient inégalement, et il en résulte pour la transmission une perturbation, dont l'effet a été étudié pour la première fois par M. Kretz, dans les *Annales des Mines*.

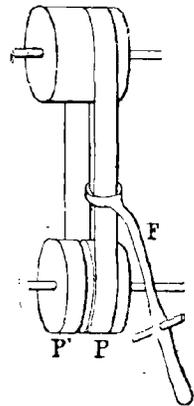


Fig. 383.

(*) Ce fait est important, car, s'il n'avait pas lieu, la formule $l = a + \frac{\pi}{2}(R + R')$, sur laquelle s'appuie le raisonnement, serait inapplicable, puisque la courroie ne serait pas contenue dans un plan perpendiculaire à la direction des axes.

Désignons par α le coefficient d'allongement de la courroie, c'est-à-dire la variation de l'unité de longueur pour une tension égale à l'unité de force. Une longueur infiniment petite ds , prise à l'état naturel, devient $ds (1 + \alpha T)$ quand elle passe sur le brin menant, et $ds (1 + \alpha T')$ quand elle est sur le brin conduit. Ces longueurs inégales emploient le même temps dt pour s'enrouler, la première sur la poulie motrice, la seconde sur la poulie menée, car s'il n'en était pas ainsi, la quantité de matière,

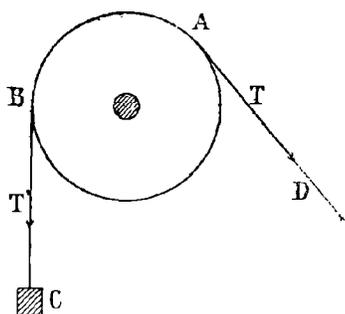


Fig. 384.

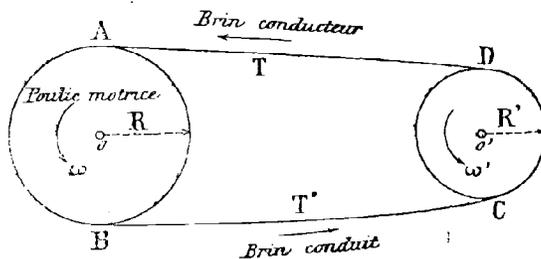


Fig. 385.

prise à l'état naturel, qui arrive sur un des brins, ne serait pas égale à celle qui le quitte pendant le même temps, de sorte que toute la courroie s'accumulerait sur un des brins au détriment de l'autre. On a donc

$$\omega R dt = ds (1 + \alpha T)$$

$$\omega' R' dt = ds (1 + \alpha T')$$

d'où

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R}{R'} \times \frac{1 + \alpha T'}{1 + \alpha T}$$

Pour une même vitesse ω de l'arbre moteur, la vitesse angulaire théorique ω'_t de la poulie menée est déterminée par la relation

$$\frac{\omega'_t}{\omega} = \frac{R}{R'}$$

Puisque $T' < T$, on a

$$\frac{\omega'}{\omega} < \frac{\omega'_t}{\omega}$$

et

$$\omega' < \omega'_t$$

On conclut de là que l'allongement de la courroie produit un ralentissement de l'arbre mené, dont la valeur, établie par l'expérience, est en moyenne de deux tours pour cent. Pour réaliser un rapport de vitesses angulaires donné en tenant compte de cette circonstance, il faut augmenter de $\frac{1}{50}$ le rayon théorique des poulies motrices, ou diminuer dans la même proportion le rayon des poulies conduites.

Application. — Soit proposé de calculer les rayons de deux poulies telles que l'arbre mené fasse 60 tours par minute et l'arbre moteur 200 tours.

En désignant par R et R' les rayons théoriques de ces poulies, on a

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R}{R'} = \frac{60}{200} = \frac{3}{10}$$

R et R' doivent donc être des équimultiples de 3 et 10, soient, par exemple, R = 90 m/m et R' = 300 m/m.

Pour tenir compte de l'allongement de la courroie, nous substituerons à R la valeur suivante

$$R_1 = \frac{51}{50} R = \frac{51 \times 90}{50} = 91,8 \text{ m/m}$$

Le rapport théorique des vitesses angulaires correspondantes sera alors

$$\frac{R_1}{R'} = \frac{91,8}{300} = \frac{x}{200}$$

en désignant par x le nombre de tours de l'arbre mené qui, dans ces conditions, correspondrait à 200 tours de l'arbre menant. On tire de ces proportions

$$x = \frac{200 \times 91,8}{300} = 61,2 \text{ tours}$$

Mais le ralentissement de l'arbre mené, égal à 2 tours pour 100, cause une perte de

$$\frac{61,2 \times 2}{100} = 1,224 \text{ tour}$$

La poulie conduite fera donc en réalité

$$61,2 - 1,224 = 59,976 \text{ tours}$$

c'est-à-dire à très peu de chose près les 60 tours que l'on voulait obtenir.

Ce sont les valeurs R₁ et R' qui doivent être employées dans le calcul de la longueur de la courroie, par les formules établies au paragraphe 422.

428. Transmission de Hirn.

Avant l'introduction de l'énergie électrique dans la pratique, les frères Hirn avaient imaginé une disposition permettant de transmettre la force motrice à des distances considérables de son lieu de production. Elle consiste dans l'emploi de câbles *téléodynamiques*, passant sur des poulies de trois à quatre mètres de diamètre, placées en moyenne à 100 mètres les unes des autres. Pour assurer à ces câbles une solidité suffisante, on les forme par l'enroulement de plusieurs câbles, ou *torons*, plus petits, composés de fil de fer souple tordu en hélice autour d'une âme en chanvre. Aussi sont-ils très pesants, et, pour éviter leur rupture, on est obligé de donner aux poulies une très grande vitesse, qui peut atteindre 30 mètres par seconde à la circonférence ; cette limite, qui correspond à 450 tours environ par minute, ne doit pas être dépassée, sans quoi les poulies risqueraient de se briser sous l'action de la force centrifuge. En raison de la forme cylindrique des câbles, la janté des poulies présente une gorge trapézoïdale PMP' (fig. 386) ; le fond du creux est garni en M d'une armature de cuir comprimé qui augmente l'adhérence.

Le câble est maintenu lâche entre deux poulies consé-

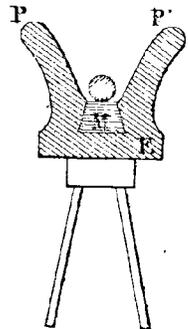


Fig. 386.

tives ; son poids considérable suffit à lui donner la tension nécessaire. Le fonctionnement de ces mécanismes est identique à celui des poulies et courroies ordinaires.

429. Transmission par poulies et courroies entre deux arbres non parallèles.

Les rotations de deux arbres non parallèles peuvent être liées par des poulies et courroies dont la disposition est déterminée par le principe expérimental suivant :

Pour qu'une courroie puisse conduire une poulie, il suffit que le brin qui s'enroule arrive dans le plan de la poulie ; le brin qui se déroule peut s'échapper dans une direction quelconque ().*

Nous distinguerons deux cas :

Premier cas. — *La transmission doit pouvoir se faire dans les deux sens.*

D'après le principe précédent, les deux brins de courroie qui aboutissent à une poulie doivent être situés dans son plan.

Soit $\frac{\omega'}{\omega} = k$ le rapport de vitesses à réaliser ; considérons deux plans P et P' (fig. 387), respectivement perpendiculaires aux axes ZZ' en des points quelconques o et o', et déterminons leur intersection xy. Traçons, dans ces plans, des circonférences de centres o et o', dont les rayons soient dans le rapport $\frac{R}{R'} = k$,

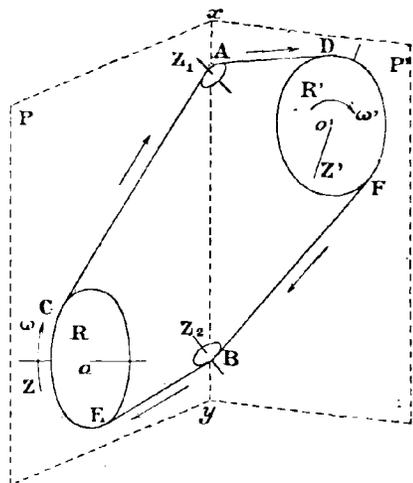


Fig. 387.

et, par deux points quelconques AB de xy, menons des tangentes AC, AD, BE, BF à ces circonférences. Disposons enfin, tangentielllement aux côtés des angles CAD, EBF, des galets de renvoi, mobiles autour d'axes Z₁ et Z₂. Une courroie sans fin, disposée suivant le contour ACEBFDA, assure la transmission dans les deux sens, puisque les brins qui aboutissent à chaque poulie sont situés dans son plan. De plus, si l'on fait abstraction du ralentissement causé par l'allongement de la courroie, les vitesses linéaires de deux points de celle-ci, C et D par exemple, sont nécessairement égales, et l'on a :

$$\omega R = \omega' R'$$

d'où

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R}{R'} = k$$

La transmission est donc bien assurée avec le rapport de vitesses voulu. Les galets de renvoi n'ont pas d'autre effet que de changer la direction des brins de courroie ; ils sont sans influence sur le rapport des vitesses, dont l'expression reste la même que dans le cas où les axes sont parallèles.

Deuxième cas. — *La transmission n'est assurée que dans un sens.*

On peut alors supprimer les galets de renvoi, et relier directement les deux arbres. Soient P et P' deux plans perpendiculaires aux axes z z' en o et o', et xy leur intersection. Traçons, dans ces plans, des circonférences de centres o et o', tangentes à xy en A et B (fig. 388), et imaginons qu'un fil s'enroule sur elles en suivant le contour

(*) C'est pour cette raison que, lorsqu'on veut déplacer une courroie par une fourchette (426), celle-ci doit s'attaquer au brin qui s'enroule sur la poulie, et non à celui qui la quitte.

ACBD. Si le mouvement s'effectue dans le sens f , la transmission est possible, puisque le brin AC, qui s'enroule sur o , est contenu dans le plan P, et que le brin BD, qui s'enroule sur o' , est contenu dans le plan P'. Mais, si l'on essaie de commander le mouvement en sens contraire, la courroie tombe immédiatement, le brin qui s'enroule sur une poulie étant situé cette fois dans le plan de l'autre.

Les rayons R et R', qui doivent satisfaire à la relation $\frac{R}{R'} = \frac{\omega'}{\omega} = k$, peuvent

être calculés, et nous les supposons donnés. Il faut donc déterminer les plans P et P'. Observons pour cela que la direction Δ de leur intersection est connue, car elle est parallèle à la plus courte distance des axes. Menons par A et B les parallèles $A\alpha$ et $B\beta$ à z et z' ; les plans $xB\beta$, $yA\alpha$, qui sont parallèles à Δ et tangents à deux cylindres de révolution d'axes z et z' et de rayons R et R', peuvent être construits par les procédés de la géométrie descriptive. Leur intersection fait connaître la droite xy , et, par conséquent, les plans P et P'.

Il faut remarquer que les points de contact de la courroie avec les poulies ne sont pas rigoureusement A et B; aussi ce mode de transmission ne s'applique-t-il commodément, sauf dans certains cas particuliers, que si la plus courte distance des axes n'est pas trop petite par rapport aux rayons R et R'.

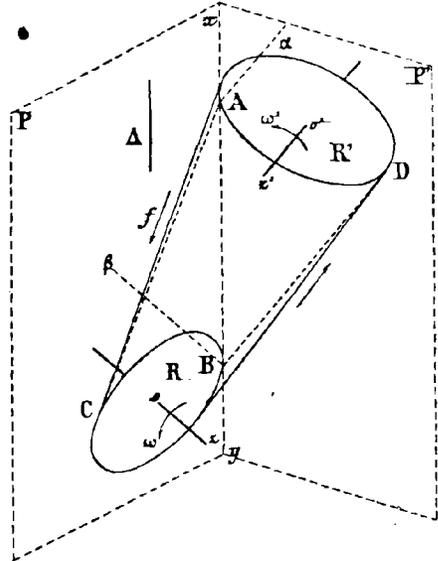


Fig. 388.

430. Equipages de poulies.

On appelle ainsi des combinaisons de poulies montées sur des axes fixes, qui jouent un rôle analogue à celui des équipages de roues dentées. Deux arbres Z et Z₁ (fig. 389) sont reliés par une courroie passant sur des poulies AA' de rayons R et R'. Sur l'axe Z₁ est montée une seconde poulie, de rayon R₁, qui communique le mouvement à un troisième arbre Z₂ par l'intermédiaire d'une courroie et d'une poulie de rayon R'₁, et ainsi de suite. Soient $\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega'$ les vitesses angulaires des arbres successifs. En considérant le rapport de deux d'entre elles comme positif ou négatif selon que les rotations correspondantes sont de même sens ou de sens contraires, on a

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \pm \frac{R}{R'}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \pm \frac{R_1}{R'_1}$$

$$\frac{\omega'}{\omega_2} = \pm \frac{R_2}{R'_2}$$

D'où, en multipliant membre à membre

$$\varepsilon = \frac{\omega'}{\omega} = \pm \frac{R R_1 R_2}{R' R'_1 R'_2}$$

Par analogie avec les résultats établis aux paragraphes 387 et 388, cette expression est appelée la *raison* de l'équipage. Elle est égale, en valeur absolue, au rapport du produit des rayons des poulies menantes au produit des rayons des poulies menées. Elle est positive dans le cas de la figure, et, d'une façon générale, quand toutes les courroies sont droites, ou que le nombre des courroies croisées est pair. Elle est au

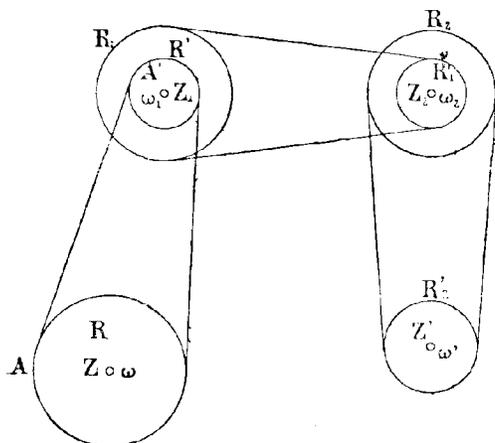


Fig. 389.

contraire négative si le nombre des courroies croisées est impair, quel que soit d'ailleurs celui des courroies droites. Les poulies de renvoi, s'il y en a, n'ont aucune influence ni sur le signe, ni sur la valeur absolue de la raison.

On peut se proposer de déterminer les éléments d'un équipage de poulies, connaissant sa raison. Cette question n'offre aucune des difficultés qui se présentent dans les équipages de roues dentées, car on peut toujours réaliser deux poulies dont les rayons soient dans un rapport donné, ce qui n'a pas lieu quand il s'agit de roues d'engrenages. Observons toutefois qu'il est nécessaire de tenir compte, dans le calcul des pou-

lies, du ralentissement des arbres successifs produit par l'allongement des diverses courroies. Voici d'ailleurs un exemple de calcul.

Application. — Soit proposé de trouver les rayons des poulies d'un équipage, composé de trois menantes et de trois menées, et tel que le premier arbre fasse 50 tours pendant que le dernier en fait 800.

a) *Calcul des rayons théoriques.*

On doit avoir, en conservant les notations précédentes

$$\epsilon = \frac{R R_1 R_2}{R' R'_1 R'_2} = \frac{800}{50} = \frac{16}{1} = \frac{4}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{1}$$

Les rayons R et R' devant être des équimultiples de 4 et 1, et R₁, R'₁, R₂, R'₂ des équimultiples de 2 et de 1, on pourra prendre, par exemple

R = 300%	R ₁ = 200%	R ₂ = 200%
R' = 75%	R' ₁ = 100%	R' ₂ = 100%

b) *Rayons modifiés pour tenir compte du ralentissement des arbres menés.*

On a vu qu'il suffit, pour contrebalancer l'influence de l'allongement des courroies sur le rapport des vitesses, d'augmenter de $\frac{1}{50}$ les rayons théoriques des poulies menantes. En désignant les nouvelles valeurs de ceux-ci par les symboles (R), (R₁), (R₂), on aura ainsi

$$\begin{aligned} (R) &= \frac{51}{50} R = 306\% \\ (R_1) &= \frac{51}{50} R_1 = 204\% \\ (R_2) &= \frac{51}{50} R_2 = 204\% \end{aligned}$$

Les rayons R R_1 R_2 des poulies conduites conserveront leurs valeurs calculées précédemment. Pour vérifier si le résultat cherché est bien atteint, calculons le nombre de tours x réellement effectués par le dernier arbre mené, pour 50 tours du premier arbre menant. L'allongement des courroies réduisant le rapport des vitesses de deux arbres consécutifs aux $\frac{98}{100}$ de sa valeur théorique, la raison de l'équipage sera

$$\frac{306 \times 204 \times 204}{75 \times 100 \times 100} \times \left(\frac{98}{100}\right)^3 = \frac{x}{50}$$

d'où l'on tire

$$x = 799 \text{ tours environ}$$

soit une perte totale d'à peu près un tour. Si les rayons des poulies menantes n'avaient pas été modifiés, le nombre de tours x' du dernier arbre mené eût été donné par la relation

$$\frac{300 \times 200 \times 200}{75 \times 100 \times 100} \times \left(\frac{98}{100}\right)^3 = \frac{x'}{50}$$

On trouve

$$x' = 753 \text{ tours environ}$$

résultat très différent de celui qu'on voulait atteindre.

Ce sont les valeurs (R) (R_1) (R_2) , R' R'_1 R'_2 qu'il faut porter dans les formules établies au paragraphe 422 pour calculer les longueurs des courroies successives.

§ II. — Poulie fixe et Poulie mobile.

431. Poulie fixe.

La poulie fixe est formée d'un disque cylindrique dont la surface, creusée en gorge à section méridienne demi-circulaire, reçoit une corde ou une chaîne (fig. 390). Une pièce M , appelée *chape*, porte un tourillon autour duquel la poulie tourne librement,

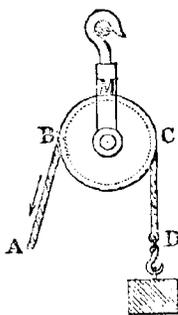


Fig. 390.

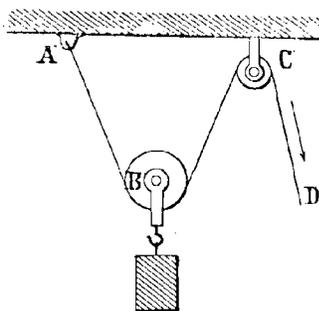


Fig. 391.

et un crochet qui sert à suspendre tout le système à un point fixe. Le brin AB , sur lequel s'exerce l'effort moteur, est appelé *garant*; l'autre brin, appelé *courant*, supporte la résistance à vaincre, qui sera, par exemple, une masse pesante. En supposant la corde inextensible, la vitesse du garant est évidemment égale à celle du courant. L'effet de la poulie fixe est donc seulement, dans cette hypothèse, de changer la direction d'un mouvement ou d'une force.

432. Poulie mobile.

Ce mécanisme est identique au précédent dans toutes ses parties, mais il n'est pas disposé de la même manière. La chape est renversée, et son crochet supporte le fardeau à soulever (fig. 391). La corde, suspendue à un point fixe A, passe d'abord sous la poulie B, puis remonte généralement sur une poulie de renvoi C. C'est sur le brin C qui s'échappe de cette dernière qu'agit la puissance motrice. Cherchons à établir une relation entre la vitesse d'élévation du fardeau et celle du moteur ; nous distinguerons deux cas :

Premier cas. — *Les brins sont parallèles* (fig. 392).

L'élévation ds du fardeau pendant un temps infiniment petit dt est liée à sa vitesse v' par la relation

$$v' dt = ds$$

Le brin moteur parcourt, pendant le même temps, l'espace $2 ds$ avec la vitesse v , et l'on a

$$v dt = 2 ds$$

d'où $v = 2 v'$

On voit que : *dans la poulie mobile à brins parallèles, la vitesse du moteur est double de celle du fardeau.*

Deuxième cas. — *Les brins ne sont pas parallèles* (fig. 393).

Nous supposons, pour simplifier, que la poulie mobile et la poulie de renvoi sont réduites à de simples points. Soient ABC et AB₁C les positions du système à

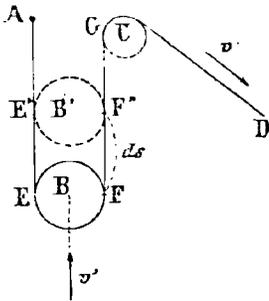


Fig. 392.

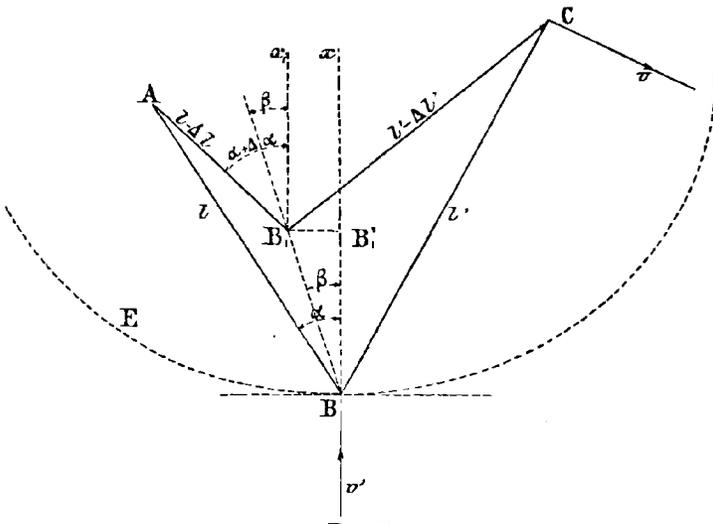


Fig. 393.

deux époques voisines t et $t + \Delta t$, auxquelles correspondent des longueurs de corde $AB = l$, $BC = l'$, $AB_1 = l - \Delta l$, $B_1C = l' - \Delta l'$ comprises entre la poulie mobile d'une part, le point fixe et la poulie de renvoi d'autre part. La verticale du point B est, à chaque instant, bissectrice de l'angle formé par les brins de corde qui y aboutissent ; car si l'on considère, par exemple, la position ABC, le centre de la poulie mobile

tend à se placer, sous l'action de la pesanteur, au point le plus bas d'une ellipse E dont A et C sont les foyers, et dont le grand axe est égal à AB + BC. La tangente à l'ellipse en ce point étant horizontale, la normale Bx, qui est située dans le plan ABC, est verticale. Le même fait a lieu pour la position AB₁C, où la verticale B₁x₁ est bissectrice de l'angle AB₁C. Généralement, les droites BB₁, Bx, B₁x₁ sont distinctes, car, s'il en était autrement, les triangles BB₁A, BB₁C, qui auraient un côté commun adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, seraient égaux, et les points A et C seraient situés dans un même plan horizontal. Sauf dans ce cas particulier, la trajectoire du centre de la poulie mobile n'est donc pas la verticale qui passe par sa position initiale.

Soit BB'₁ = BB₁ cos β l'élevation du fardeau pendant le temps Δt ; sa vitesse v', mesurée dans le sens vertical, a pour expression

$$v' = \lim \frac{BB'_1}{\Delta t} = \lim \frac{BB_1 \cos \beta}{\Delta t} \quad (*)$$

Celle du moteur est, d'autre part,

$$v = \lim \frac{\Delta l + \Delta l'}{\Delta t}$$

On est ainsi conduit à exprimer Δl et Δl' en fonction BB₁ et de β. Le triangle ABB₁ donne les relations

$$\frac{AB}{\sin AB_1B} = \frac{AB_1}{\sin ABB_1} = \frac{BB_1}{\sin BAB_1} = \frac{AB - AB_1}{\sin AB_1B - \sin ABB_1}$$

ou, en posant, pour simplifier, ABx = α et AB₁x = α + Δx

$$\frac{l}{\sin (\alpha + \Delta x - \beta)} = \frac{l - \Delta l}{\sin (\alpha - \beta)} = \frac{BB_1}{\sin \Delta x} = \frac{\Delta l}{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(\alpha - \beta + \frac{\Delta x}{2} \right)}$$

On a donc

$$\Delta l = \frac{2BB_1 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(\alpha - \beta + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\sin \Delta x} = \frac{BB_1 \cos \left(\alpha - \beta + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\cos \frac{\Delta x}{2}} = \frac{BB'_1 \cos \left(\alpha - \beta + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\cos \beta \cos \frac{\Delta x}{2}}$$

Le triangle CBB₁ donnerait, par analogie,

$$\Delta l' = \frac{BB'_1 \cos \left(\alpha + \beta + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\cos \beta \cos \frac{\Delta x}{2}}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \Delta l + \Delta l' &= BB'_1 \times \frac{\cos \left(\alpha - \beta + \frac{\Delta x}{2} \right) + \cos \left(\alpha + \beta + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\cos \beta \cos \frac{\Delta x}{2}} \\ &= BB'_1 \times \frac{2 \cos \left(\alpha + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\cos \frac{\Delta x}{2}} \end{aligned}$$

(*) Il faut remarquer que v' n'est pas la vitesse du point B sur sa trajectoire ; celle-ci a pour expression $\lim \frac{BB_1}{\Delta t}$, et sa direction est celle que prend le segment BB₁ quand le point B₁ vient se confondre avec le point B.

En divisant les deux membres par Δt et en passant à la limite, il vient.

$$v = \lim \frac{\Delta l + \Delta l'}{\Delta t} = v' \times 2 \cos \alpha$$

d'où
$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{2 \cos \alpha}$$

Quand $\alpha = 0$, les brins de corde sont parallèles, et l'on a $v = 2v'$, résultat déjà établi directement.

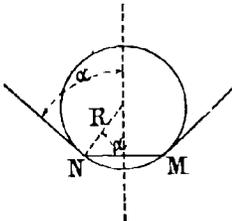


Fig. 394.

L'expression $\frac{v'}{v} = \frac{1}{2 \cos \alpha}$ conduit à une interprétation géométrique très simple. Soit MN la corde qui sous-tend l'arc de la poulie mobile embrassé par les brins (fig. 394). On a

$$MN = 2R \cos \alpha$$

et par suite
$$2 \cos \alpha = \frac{MN}{R}$$

On peut donc écrire
$$\frac{v'}{v} = \frac{R}{MN}$$

ce qui montre que : *la vitesse verticale du fardeau est à la vitesse du moteur dans le même rapport que le rayon de la poulie mobile est à la corde de l'arc embrassé par les deux brins qui y aboutissent.*

Quand les brins sont parallèles, $MN = 2R$, et l'on retrouve encore $v = v'$.

§ III. — Treuil ordinaire.

433. Le treuil ordinaire est constitué par un cylindre de révolution appelé *tambour*, en un point duquel est rattachée une corde, dont l'extrémité libre D supporte le fardeau à soulever. Le tambour est mobile autour de son axe géométrique; sa rotation est habituellement commandée par une manivelle AB, sur laquelle s'exerce la puissance motrice (fig. 395).

Soient ω la vitesse angulaire du treuil, v la vitesse linéaire du bouton de la manivelle, v' celle du fardeau, R et r les rayons respectifs de la manivelle et du tambour. Il est clair que, si l'on néglige l'épaisseur de la corde, v' mesure à chaque instant la vitesse du tambour à sa circonférence. On a donc

$$v' = \omega r$$

et comme, d'autre part,

$$v = \omega R$$

il vient

$$\frac{v'}{v} = \frac{r}{R}$$

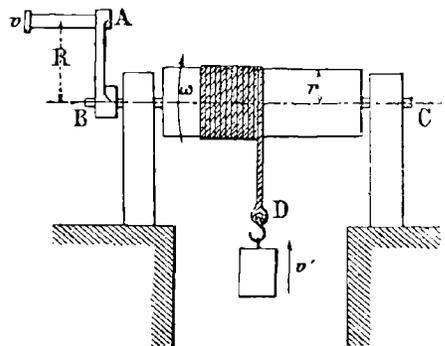


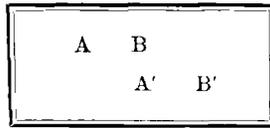
Fig. 395.

Par conséquent : *la vitesse du fardeau est à celle du moteur comme le rayon du tambour est à la longueur de la manivelle,*

Dans le treuil des puits, l'axe du tambour est horizontal ; il est, au contraire, vertical dans les cabestans des navires. Enfin, la manivelle est souvent remplacée par des leviers introduits dans des trous creusés sur le tambour, ce qui permet de lui donner une plus grande longueur (treuil des chèvres et sapines).

§ IV. — Treuil à engrenages.

434. Le treuil à engrenages diffère du précédent en ce que le mouvement, au lieu d'être donné directement au tambour, lui est transmis par l'intermédiaire d'un équipage de roues dentées, tel que



(fig. 396), dont la première roue est solidaire de la manivelle, et dont la dernière est calée sur l'axe du tambour. En désignant par ω et ω' les vitesses angulaires respectives de la manivelle et du tambour, par R et r leurs rayons, par v et v' les vitesses du moteur et du fardeau, on a

$$v = \omega R$$

$$v' = \omega' r$$

et par conséquent

$$\frac{v'}{v} = \frac{r}{R} \times \frac{\omega'}{\omega}$$

Mais $\frac{\omega'}{\omega}$ est la raison de l'équipage intercalé entre la manivelle motrice et le tambour.

En lui substituant sa valeur $\frac{AA'}{BB'}$, il vient

$$\frac{v'}{v} = \frac{r}{R} \times \frac{AA'}{BB'}$$

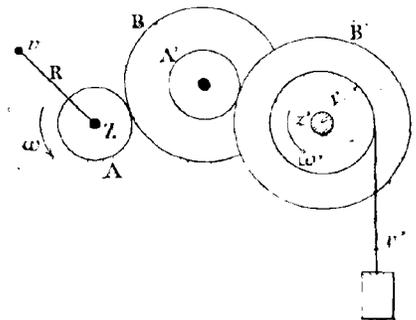


Fig. 396.

Donc : La vitesse du fardeau est à celle du moteur dans le même rapport que le produit du rayon du tambour par les nombres de dents des menantes au produit de la longueur de la manivelle par les nombres de dents des menées.

Si, par exemple, $r = 15$ c/m, $R = 35$ c/m, $A = 15$, $B = 60$, $A' = 20$, $B' = 100$, on a

$$\frac{v'}{v} = \frac{15}{35} \times \frac{15 \times 20}{60 \times 100} = \frac{3}{140}$$

Sans engrenages, ce rapport eût été égal à $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$. Pour une même vitesse de la manivelle, le fardeau monte donc vingt fois moins vite dans le premier cas que dans le second. Si l'on admet, comme cela est démontré en Statique (principe des vitesses virtuelles), que les intensités des forces susceptibles de se faire équilibre dans une machine sont en raison inverse des vitesses que prennent les organes auxquels elles

s'appliquent (*), on voit que, dans l'exemple numérique ci-dessus, il faut, pour soulever un même fardeau, une puissance motrice vingt fois plus grande avec le treuil simple qu'avec le treuil à engrenages. En revanche, le temps nécessaire pour élever le fardeau à une hauteur donnée est vingt fois moindre dans le premier cas que dans le second.

Généralement, les treuils à engrenages sont disposés de telle sorte que l'on puisse faire entrer en jeu toutes les roues de l'équipage, ou bien seulement une partie. De cette façon, le fardeau peut s'élever plus ou moins rapidement, pour une même valeur de la vitesse motrice. On fait usage des combinaisons les plus lentes pour soulever les corps les plus pesants. Voici, par exemple, la disposition employée dans les grues des chemins de fer. Le tambour T du treuil (fig. 337) est solidaire d'une roue A,

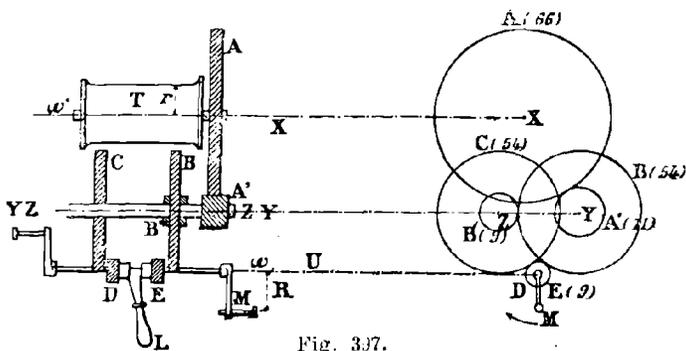
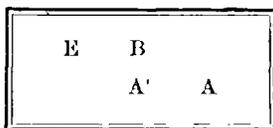
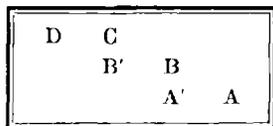


Fig. 337.

qui reçoit son mouvement d'un pignon A'. Sur l'axe Y de celui-ci est calée une roue B, engrenant avec un pignon B' dont l'axe Z, parallèle au précédent, porte en outre une roue C égale à B. (Sur la vue de face, les axes Y et Z paraissent confondus). Enfin, l'arbre U des manivelles porte deux pignons égaux D et E (confondus sur la vue de profil) qui, dans la position figurée à gauche, n'engrènent avec aucune des roues B et C; mais, au moyen d'un levier L, on peut à volonté amener en contact, soit le pignon E avec la roue B, soit le pignon D avec la roue C. Dans le premier cas, le mouvement des manivelles est communiqué au tambour par l'équipage



et les roues B'CD tournent à vide. Dans le second cas, la transmission est assurée par l'équipage



et toutes les roues sont employées, sauf E. En appliquant la relation générale

$$\frac{v'}{v} = \frac{r}{R} \times \frac{\omega'}{\omega}$$

(*) C'est ce principe que les techniciens énoncent ainsi : *Ce qu'on gagne en force, on le perd en vitesse, et inversement.*

établie plus haut, on trouve

$$\frac{v'}{v} = \frac{r}{R} \times \frac{EA'}{AB}$$

quand la commande est faite par le pignon E; le tambour et les manivelles tournent alors dans le même sens. Quand la commande s'effectue par le pignon D, on a

$$\frac{v'}{v} = \frac{r}{R} \times \frac{DB'A'}{ABC}$$

et le tambour tourne en sens contraire des manivelles.

En supposant que les nombres de dents soient respectivement

$$A = 66 \quad B = C = 54 \quad A' = 11 \quad B' = 9 \quad D = E = 9$$

et que la longueur de chaque manivelle soit égale à trois fois le rayon du tambour, on trouve les deux valeurs suivantes du rapport $\frac{v'}{v}$:

$$\frac{v'}{v} = \frac{9 \times 11 \times 1}{54 \times 66 \times 3} = \frac{1}{108} \quad (\text{pignon E})$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{9 \times 9 \times 11 \times 1}{54 \times 54 \times 66 \times 3} = \frac{1}{648} \quad (\text{pignon D})$$

Une force de 1 kilog. équilibre un poids de 108 kilog. dans le premier cas, et de 648 kilog. dans le second.

§ V. — *Moufles et Palans.*

435. Définitions. — On appelle *moufle* un mécanisme composé de plusieurs poulies montées dans une même chape. Le plus souvent, la chape porte un axe unique autour duquel les poulies peuvent tourner indépendamment les unes des autres; elles sont alors égales, et le système constitue une *moufle ordinaire*. Dans la *moufle plate*, au contraire, les poulies sont montées sur des axes distincts; elles sont alors inégales, afin que les brins de corde puissent passer de l'une à l'autre sans se gêner mutuellement.

Un *palan* est constitué par deux moufles, dont l'une, suspendue à un point fixe, joue le rôle de poulie fixe et dont l'autre, qui supporte le fardeau, joue le rôle de poulie mobile (fig. 398). Une corde, attachée à l'une des moufles, passe alternativement sur une poulie fixe et sur une poulie mobile; son brin libre, appelé *garant*, reçoit la puissance motrice. Les autres brins, ou *courants*, sont approximativement parallèles, et nous raisonnerons comme s'ils l'étaient rigoureusement.

Pour calculer le rapport des vitesses, nous distinguerons deux cas.

Premier cas. — *La corde est attachée à la moufle fixe.*

L'élévation ds du fardeau pendant le temps infiniment petit dt est liée à sa vitesse v' par la relation

$$v' dt = ds$$

Tous les courants, supposés parallèles, se raccourcissent pendant le même temps de la quantité ds ; en désignant par n le nombre des poulies de chaque moufle, le raccourcissement total de la corde, qui exprime le chemin parcouru pendant le temps dt , est $2n ds$. Si l'on représente par v la vitesse du moteur, on a donc

$$v dt = 2n ds = 2n v' dt$$

d'où

$$v = \frac{v'}{2n}$$

On voit ainsi que : la vitesse du fardeau est égale au quotient de la vitesse du moteur par le nombre des brins courants, ou, ce qui revient au même, par le nombre total des poulies.

Deuxième cas. — La corde est attachée à la moufle mobile.

La figure 399 montre que, dans ce cas, la corde est dirigée vers le haut quand elle quitte la moufle mobile pour la dernière fois ; il est donc nécessaire de la faire

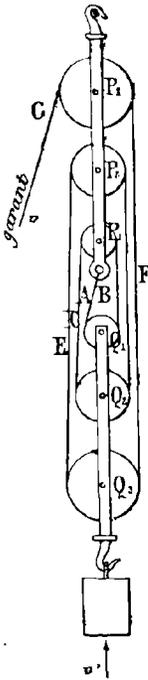


Fig. 398.

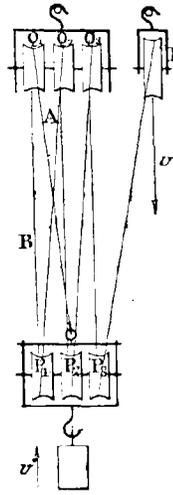
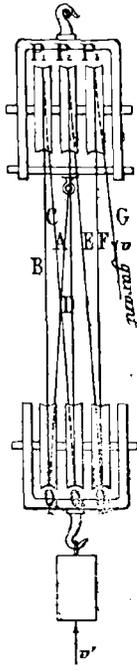


Fig. 399.

passer sur une poulie de renvoi R, à moins que la moufle fixe ne contienne une poulie de plus que la moufle mobile. Un raisonnement identique à celui qui précède donne pour expression de la vitesse du fardeau

$$v' = \frac{v}{2n + 1}$$

Comme le nombre total des poulies du système, y compris la poulie de renvoi, est précisément $2n + 1$, ce résultat rentre dans celui du premier cas.

Aucune hypothèse n'ayant été faite sur la nature des mouffes, il n'y a rien à changer dans ce qui précède quand le palan est composé de mouffes plates.

436. Remarque. — Il est intéressant d'observer que les vitesses linéaires, mesurées aux circonférences des diverses poulies du système, sont inégales. Ainsi, l'espace parcouru par un point de la circonférence de la poulie Q_1 pendant le temps dt , est égal au raccourcissement ds du brin A pendant le même temps ; sa vitesse linéaire est donc égale à celle du fardeau. Un point de la circonférence de P_1 parcourt, pendant le temps dt , un espace $2 ds$, somme des raccourcissements des brins A et B, et sa vitesse linéaire est $2 v'$, etc... D'une façon générale :

La vitesse linéaire de l'une des poulies du système, à sa circonférence, est égale au produit de la vitesse du fardeau par le nombre de brins compris entre cette poulie et le point d'attache de la corde.

Si toutes les poulies sont égales, leurs vitesses angulaires de rotation sont dans le même rapport que leurs vitesses circonférentielles. C'est ce qui explique pourquoi les poulies d'une moufle ordinaire sont folles sur leur axe commun.

437. Moufle de White.

Cet appareil diffère du précédent en ce que les poulies de chaque moufle sont solidaires les unes des autres. Pour que leurs vitesses circonférentielles satisfassent à la relation que l'on vient d'établir, il est alors indispensable de donner aux poulies des rayons différents ; on les détermine de la façon suivante.

Soient $r_1 r_2 r_3$ les rayons des poulies de la moufle fixe, à laquelle nous supposons rattachée l'extrémité de la corde, ω leur vitesse angulaire commune, $r'_1 r'_2 r'_3$ et ω' les rayons et la vitesse angulaire des poulies de la moufle mobile, v' et v les vitesses respectives du fardeau et du moteur. En écrivant que la vitesse linéaire de chaque poulie à sa circonférence est égale au produit de la vitesse du fardeau par le nombre de courants qui la séparent du point d'attache de la corde, on a

$$\begin{aligned} \text{pour la moufle fixe} & \left\{ \begin{aligned} \omega r_1 &= 2 v' \\ \omega r_2 &= 4 v' \\ \omega r_3 &= 6 v' \end{aligned} \right. \\ \text{pour la moufle mobile} & \left\{ \begin{aligned} \omega' r'_1 &= v' \\ \omega' r'_2 &= 3 v' \\ \omega' r'_3 &= 5 v' \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

On tire de ces égalités

$$\frac{r_1}{1} = \frac{r_2}{2} = \frac{r_3}{3} \left(= \frac{2 v'}{\omega} \right)$$

et
$$\frac{r'_1}{1} = \frac{r'_2}{3} = \frac{r'_3}{5} \left(= \frac{v'}{\omega'} \right)$$

D'où il résulte que :

Les rayons des poulies de la moufle mobile doivent être proportionnels aux nombres impairs successifs 1, 3, 5.... et ceux des poulies de la moufle fixe proportionnels aux nombres entiers consécutifs 1, 2, 3....

Dans ces conditions, le système fonctionne sans glissement de la corde sur les jantes des poulies. Ces résultats devraient être intervertis si la corde était rattachée à la moufle mobile.

La relation entre les vitesses du fardeau et du moteur est la même que dans les palans ordinaires.

438. Equipages de palans, ou palans conjugués.

On peut associer des palans de manière que la puissance motrice agisse sur l'un d'eux, et la résistance à vaincre sur un autre. La combinaison obtenue, qui constitue un *équipement de palans*, peut renfermer un nombre quelconque de ces mécanismes ; nous supposons d'abord qu'elle en comprenne seulement deux. Soient v et v' les vitesses respectives du garant et de la moufle mobile dans le premier, n le nombre de

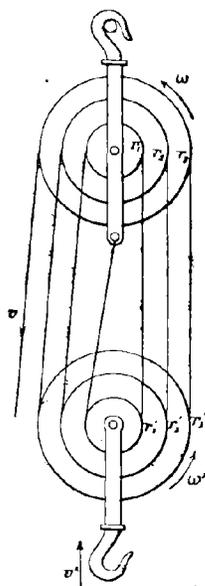


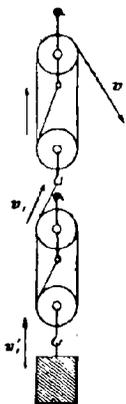
Fig. 400.

brins courants, et v_1 , v'_1 , n_1 les quantités correspondantes dans le second. On sait que

$$v = nv' \quad \text{et} \quad v_1 = n_1 v'_1$$

Pour trouver la relation entre la vitesse du fardeau et celle du garant moteur, il faut distinguer deux cas, selon le mode de liaison des deux palans.

Premier cas. — *Le garant du second palan est relié à la moufle mobile du premier.*



Chaque palan est alors suspendu à un point fixe (fig. 401); avec le mode de liaison supposé, on a évidemment $v_1 = v'$. Les relations $v = nv'$ et $v_1 = n_1 v'_1$ donnent, en les multipliant membre à membre pour éliminer la quantité commune :

$$v = nn_1 v'_1$$

ou

$$v'_1 = \frac{v}{nn_1}$$

Par conséquent : la vitesse d'élévation du fardeau est égale au quotient de la vitesse du moteur par le produit des nombres des courants (ou des poulies) des deux palans.

Avec deux palans égaux de six poulies chacun, on a

$$v'_1 = \frac{v}{36}$$

Fig. 401.

de sorte que la puissance motrice nécessaire pour équilibrer un poids donné est égale au $\frac{1}{36}$ de ce poids ; elle serait de $\frac{1}{6}$ pour chaque palan employé seul.

Deuxième cas. — *Les deux palans sont reliés par leurs moufles mobiles.*

Chaque palan est encore suspendu à un point fixe, et les moufles mobiles sont reliées par une corde passant sur une poulie de renvoi (fig. 402). Le fardeau à soulever est suspendu à l'un des garants, et la puissance motrice s'exerce sur l'autre. Dans ces conditions, $v' = v'_1$. En divisant membre à membre les équations

$$v = nv' \quad v_1 = n_1 v'_1$$

on a

$$\frac{v_1}{v} = \frac{n_1 v'_1}{nv'} = \frac{n_1}{n}$$

Par conséquent : les vitesses du fardeau et du moteur sont proportionnelles aux nombres des courants (ou des poulies) des palans correspondants.

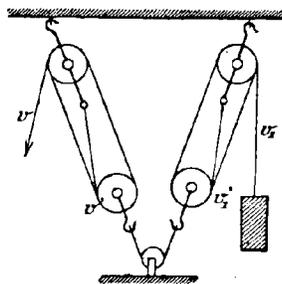


Fig. 402.

439. Equipages de palans présentant la première disposition.

On peut imaginer une série de palans dont chacun soit relié au suivant d'après le premier mode. En conservant les notations précédentes, on a la série d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} v = nv' \\ v_1 = n_1 v'_1 \\ v_2 = n_2 v'_2 \\ \dots \\ v_p = n_p v'_p \end{array} \right.$$

d'où l'on tire, en multipliant membre à membre

$$vv_1v_2 \dots v_p = nn_1n_2 \dots n_p \times v'v'_1v'_2 \dots v'_p$$

Mais, à cause des liaisons supposées entre les palans consécutifs

$$\begin{aligned} v' &= v_1 \\ v'_1 &= v_2 \\ v'_2 &= v_3 \\ &\dots \\ v'_{p-1} &= v_p \end{aligned}$$

Par conséquent $v = nn_1n_2 \dots n_p \times v'_p$

ou
$$v'_p = \frac{v}{nn_1n_2 \dots n_p}$$

Si toutes les mouffes sont égales, cette expression se réduit à

$$v'_p = \frac{v}{n^p}$$

§ VI. — Pignons et chaînes.

440. Les pignons et chaînes, très employés actuellement dans les automobiles, les bicyclettes, et de nombreuses machines-outils, paraissent, au premier abord, absolument comparables aux engrenages. Le brin de chaîne qui s'enroule sur le pignon moteur reste, en effet, constamment tendu, et il semble qu'on puisse l'assimiler à une crémaillère qui, grâce à sa souplesse, serait indéfiniment ramenée sur les deux pignons qu'elle relie. En réalité, la transmission s'effectue surtout, et parfois exclusivement, à cause de la solidarité du pignon avec la chaîne qui résulte de la pénétration de leurs profils. Nous nous occuperons en premier lieu des chaînes à rouleaux.

441. Chaînes à rouleaux. — Profils du pignon.

Les dents de la chaîne sont constituées par des cylindres, appelés *rouleaux*, mobiles autour de leurs axes.

Cherchons d'abord quels devraient être les profils sur la roue pour que le système fonctionne comme un engrenage à crémaillère. En supposant que le pignon S soit moteur (fig. 403) et que chaque rouleau soit réduit à son centre I, le profil conjugué, par analogie, avec ce qu'on a vu au paragraphe 266, serait obtenu en imprimant à la droite T, dans le sens du mouvement relatif de la

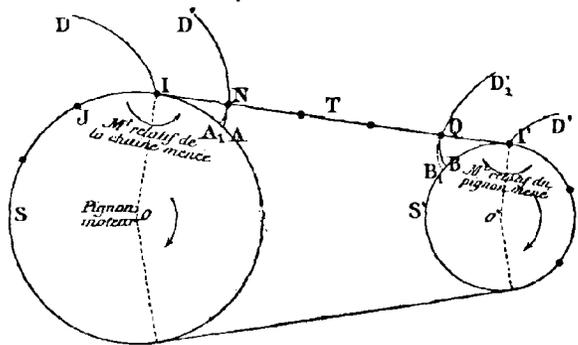


Fig. 403.

menée (qui est ici la chaîne), un roulement sans glissement sur S. Ce serait donc une développante de cercle D, dont l'action, comme on le reconnaît en traçant le profil

D_1A_1 , engendré par le point N, ne s'exercerait sur la chaîne qu'en retraite. Les profils du second pignon seraient également des développantes de cercle, identiques à celle que le point I' décrit quand on fait rouler la droite T sur la circonférence S' dans le sens du mouvement relatif de la menée (qui est ici le pignon) ; mais la conduite n'aurait lieu qu'en approche, la chaîne étant cette fois la menante.

En réalité, le mécanisme ainsi constitué ne fonctionnerait pas d'une façon satisfaisante. Deux rouleaux consécutifs sont, en effet, reliés par un maillon rigide, qui passe successivement de la partie enroulée de la chaîne sur la partie rectiligne, ou inversement. Pendant que ce fait se produit pour le maillon IN par exemple (fig. 403), la trajectoire relative du point N, par rapport au pignon o, est un arc de cercle NA de centre I, qu'il est nécessaire de substituer au segment NA_1 de la développante, afin que le rouleau

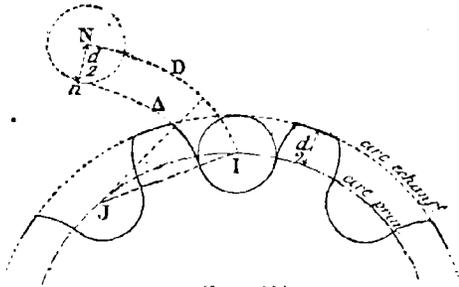


Fig. 404.

s'appuie sur lui pendant son passage sur la droite T. La transmission ne pourrait donc avoir lieu par le même procédé que dans les engrenages qu'au delà du point N, c'est-à-dire quand le rouleau se serait déplacé d'un pas après avoir quitté le pignon. Si l'on remarque, de plus, que le cercle de rayon IN est osculateur en N à la développante D_1 , on peut, en se bornant à une approximation, l'adopter pour profil complet de la face du pignon.

Dans la pratique, les rouleaux ont un certain diamètre d , qui varie avec le pas de la chaîne. On doit alors substituer aux profils théoriques que l'on vient d'étudier, des courbes parallèles telles que Δ (fig. 404), obtenues en traçant l'enveloppe d'une circonférence de rayon $\frac{d}{2}$ dont le centre parcourt D ; puisque D est un arc de cercle de centre J et de rayon IJ égal au pas de la chaîne, Δ est un arc de cercle concentrique, de rayon $P - \frac{d}{2}$. L'épure d'une roue est ainsi extrêmement simple. Les longueurs des dents ne sont pas déterminées d'après l'arc de conduite ; on donne aux cercles d'échanfrinement et d'évidement des rayons respectivement égaux à celui du cercle primitif, augmenté ou diminué de $\frac{d}{2}$. La figure se rapporte à une chaîne à simples rouleaux.

442. Calcul du diamètre primitif d'un pignon en fonction du nombre de dents qu'il porte et du pas de la chaîne.

Les pignons de chaînes constituent de véritables assortiments, de telle sorte que le possesseur d'une bicyclette, par exemple, peut changer à volonté ceux de sa machine, en conservant la chaîne, et obtenir le rapport de vitesses (ou la multiplication) qu'il désire. Il importe donc de savoir déterminer les dimensions d'un pignon dont le nombre de dents est donné, en fonction de celles de la chaîne qui doit lui être associée. Nous distinguerons deux cas.

Premier cas. — La chaîne est à simples rouleaux.

La question revient au calcul du diamètre d'une circonférence, circonscrite à un polygone régulier dont le nombre et la longueur des côtés sont connus.

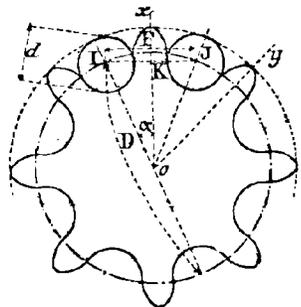


Fig. 405.

Soient P le pas de la chaîne, c'est-à-dire la distance IJ des axes de deux rouleaux consécutifs (fig. 405), d le diamètre des rouleaux, n le nombre des dents du pignon, et D son diamètre primitif. Le triangle rectangle oIK donne la relation

$$IK = oI \sin \alpha$$

d'où

$$D = \frac{P}{\sin \alpha}$$

Mais, d'autre part

$$\alpha = \frac{\text{angle } \alpha O \gamma}{2} = \frac{180^\circ}{n}$$

Par conséquent

$$D = \frac{P}{\sin \frac{180^\circ}{n}}$$

Le diamètre extérieur du pignon est égal à $D + d$, et le diamètre au fond des creux à $D - d$.

Pour nous rendre un compte exact du fonctionnement du mécanisme, calculons l'arc de conduite qui résulterait de ces dimensions, en assimilant la chaîne à une crémaillère. L'arc de retraite IN (fig. 403) est donné par la relation

$$IN = b = \sqrt{oN^2 - oI^2} = \sqrt{\left(R + \frac{d}{2}\right)^2 - R^2} = \sqrt{dR + \frac{d^2}{4}}$$

ou, en remplaçant R par sa valeur calculée ci-dessus

$$b = \sqrt{\frac{dP}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} + \frac{d^2}{4}}$$

Dans les chaînes de bicyclette, $d = 6^m/m$ et $P = 25^m/m$ 4; on trouve, pour un pignon de 20 dents

$$b = 22^m/m$$
 3.

Ce résultat étant inférieur au pas, on en conclut que la transmission n'a jamais lieu par le même procédé que dans les engrenages; elle est due uniquement à l'adhérence de la chaîne et du pignon qui résulte de l'encastrement des rouleaux dans les creux.

Deuxième cas. — *La chaîne est à doubles rouleaux.*

Dans ces chaînes, les rouleaux sont montés par paires aux deux extrémités IM d'un maillon (fig. 406); deux groupes consécutifs de rouleaux jumeaux, analogues au groupe IM , sont reliés par un maillon plus court IJ , et les dents du pignon viennent se loger entre deux rouleaux M et I au moment de l'engrènement; elles ne pénètrent pas entre I et J .

Désignons par A la distance d'axes des trous de la joue IM , par B celle des rouleaux IJ , par α et β les angles LoK , LoM , et conservons pour le reste les notations précédentes. Les triangles rectangles MoL , KoJ donnent les relations

$$\begin{cases} A = D \sin \beta \\ B = D \sin (\alpha - \beta) \end{cases} \quad (1)$$

D'autre part $\alpha = \frac{\alpha O \gamma}{2} = \frac{180^\circ}{n}$

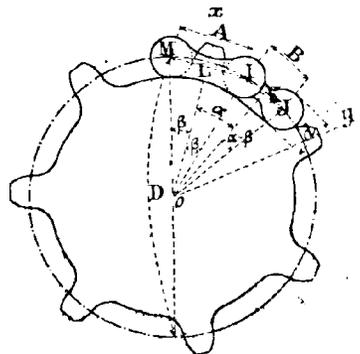


Fig. 406.

Les équations (1) forment un système qui permettrait de calculer D si β était connu. Or, on a en divisant membre à membre

$$\frac{B}{A} \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta}$$

d'où

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\frac{B}{A} + \cos \alpha} \quad (2)$$

L'angle β étant ainsi déterminé, on tire de la première des équations (1)

$$D = \frac{A}{\sin \beta}$$

Le diamètre extérieur et le diamètre au fond des dents sont respectivement $D + d$ et $D - d$. C'est surtout ce dernier qu'il importe de réaliser rigoureusement au taillage, car, s'il est trop grand, la chaîne prend du jeu, et, s'il est trop petit, les dents du pignon pénètrent entre les rouleaux à la façon d'un coin, ce qui occasionne des frottements considérables.

443. Chaînes silencieuses Varietur.

Ces mécanismes diffèrent des précédents en ce que le profil d'une dent de la roue n'est plus l'enveloppe de son conjugué sur la chaîne; il n'existe donc plus d'arc

de conduite, au sens que l'on attache à cette expression dans la théorie des engrenages, et la transmission s'effectue, comme dans les poulies et courroies, seulement à cause de la solidarité des roues et des parties de chaîne qui les embrassent.

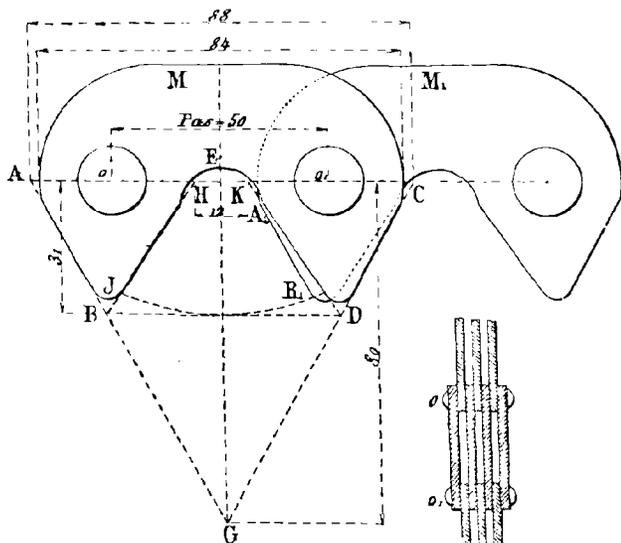


Fig. 408.

Fig. 407.

perçés près des extrémités, sont traversés par de petits axes qui assemblent les maillons consécutifs. La distance oo_1 est le pas de la chaîne.

Les dents sont à profil rectiligne. Chaque lame en porte deux (fig. 408), qui affectent la forme d'un triangle ABH , arrondi par un arc de cercle J au voisinage du sommet B . L'inclinaison du côté intérieur BH sur la droite oo_1 est un peu moindre que celle du côté extérieur AB , de sorte que, quand la chaîne est tendue, les dents d'un maillon ne se superposent pas avec celles du maillon adjacent; cet effet s'accroît par l'enroulement de la chaîne. Le tracé de chaque lamelle nécessite seulement

la construction des trois triangles AGC, ABH, KDC, dont le premier est isocèle (AG = GC) et les deux autres égaux entre eux. Leurs dimensions, théoriquement quelconques, sont indiquées sur la figure pour un maillon du pas de 50 m/m; elles sont déterminées par des épures, pour chaque valeur du pas, de manière que les dents de la roue ne soient ni trop épaisses, ni trop minces à la base, et que le dégagement ou l'engagement des dents de la chaîne dans les creux de la roue se fasse sans difficulté.

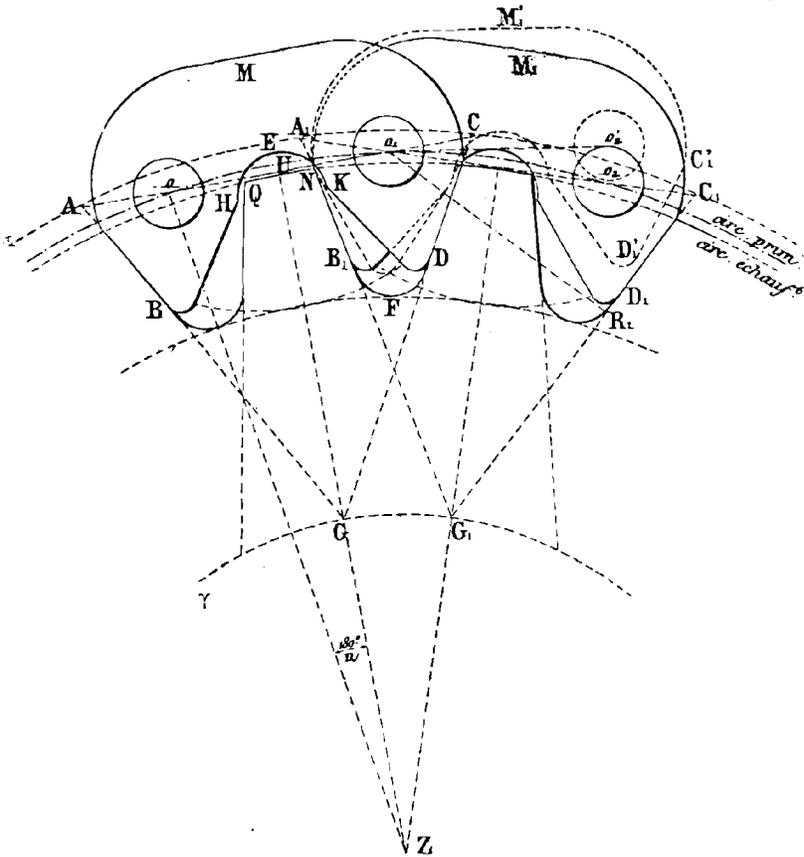


Fig. 409.

Afin que l'on puisse associer à une chaîne donnée toute une série de pignons, chacun de ceux-ci est construit de telle manière que, quand la chaîne en fait le tour, les axes $oo_1o_2 \dots$ (fig. 409), des maillons se trouvent sur sa circonférence primitive. Il résulte de là que, pour un pignon de n dents, les points $oo_1o_2 \dots$ forment un polygone régulier inscrit de n côtés. En désignant par D le diamètre primitif de ce pignon, et par P le pas de la chaîne, on a donc, en considérant le triangle rectangle oUZ :

$$P = oo_1 = 2oZ \sin \frac{180^\circ}{n} = D \sin \frac{180^\circ}{n}$$

d'où

$$D = \frac{P}{\sin \frac{180^\circ}{n}}$$

Le diamètre primitif du pignon de n dents étant ainsi calculé, on trace la denture de la façon suivante. Après avoir inscrit dans la circonférence primitive un polygone régulier de n côtés, on construit les triangles isocèles $AGC, A_1G_1C_1, \dots$ égaux à ceux qui ont servi au tracé d'un maillon. On abrège les opérations en remarquant que les sommets $GG_1 \dots$ sont régulièrement répartis sur une circonférence γ , et les sommets $AA_1 \dots CC_1 \dots$ sur une circonférence α . On limite ensuite chaque creux du pignon aux côtés CG, A_1G_1 de deux triangles isocèles consécutifs. Comme ces côtés constituent déjà les profils extérieurs des dents d'un maillon, la chaîne forme, en quelque sorte, un bloc avec la roue sur laquelle elle s'enroule, ce qui assure une transmission très douce, sans chocs, et silencieuse. La circonférence d'échanfrinement du pignon et les arcs d'évidement tels que F ne sont pas déterminés par des considérations géométriques ; on cherche simplement à ce qu'il n'y ait aucun risque d'arc-boutement.

On a représenté (fig. 409) deux maillons consécutifs, d'abord en MM_1 , quand ils sont situés sur la partie enroulée de la chaîne, puis en MM'_1 , quand le second est venu sur la partie rectiligne. Le mouvement relatif du maillon M_1 , pendant son passage à la position M'_1 , est une rotation, dans laquelle chacun de ses points décrit un arc de cercle de centre o_1 . Pour qu'il n'y ait pas arc-boutement, il est nécessaire et suffisant que la portion C_1D_1 du profil de la dent du pignon soit située au-dessus du pied R_1 de la perpendiculaire abaissée de o_1 sur C_1D_1 . On donne aux triangles ABH, KDC (fig. 408) des dimensions telles que cette condition soit réalisée. Grâce à cette disposition, dès qu'un maillon pénètre dans la partie rectiligne de la chaîne, les profils extérieurs de ses dents quittent immédiatement les faces de la roue sur lesquelles ils étaient appliqués auparavant ; la transmission ne se fait donc, à aucun moment, de la même manière que dans les engrenages.

MOUVEMENTS DIFFÉRENTIELS

444. On sait qu'un mouvement différentiel résulte de la coexistence de deux mouvements simultanés dont les vitesses sont, à chaque instant, dirigées en sens contraires. Plusieurs mécanismes réalisant de tels mouvements ont déjà été étudiés dans la théorie des trains épicycloïdaux. Voici quelques dispositions nouvelles.

445. Treuil différentiel.

Le treuil différentiel se compose de deux cylindres inégaux, dont nous désignons les rayons par r et r' , invariablement reliés l'un à l'autre, et commandés par une manivelle de longueur R . Une corde, enroulée en sens inverse sur les deux parties du treuil, supporte une poulie mobile à la chape de laquelle est suspendu le fardeau à soulever. Il résulte de cette disposition que la corde s'enroule sur l'un des tambours en même temps qu'elle se déroule sur l'autre.

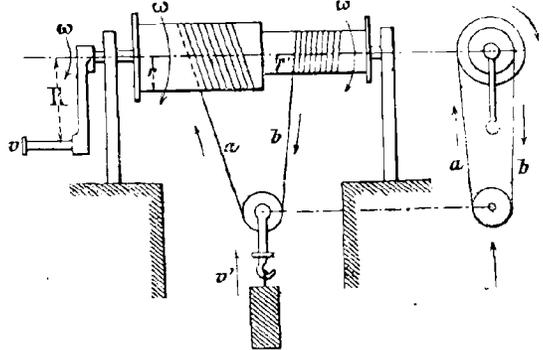


Fig. 410.

Soient ω la vitesse angulaire motrice, supposée dirigée dans un sens tel que l'enroulement ait lieu sur le plus gros cylindre, et le déroulement sur le plus petit; v la vitesse du moteur, mesurée sur la

circonférence décrite par le bouton de la manivelle, v' celle du fardeau, et $ds = v' dt$ son déplacement dans le sens vertical pendant un temps infiniment petit dt . La rotation du gros tambour raccourcit le brin de corde a d'une quantité $\omega r dt$, et celle du petit allonge le brin b de $\omega r' dt$. Le raccourcissement total de la corde, égal à $2ds$ en supposant les brins parallèles, est donc

$$\omega r dt - \omega r' dt = 2ds = 2v' dt$$

d'où

$$v' = \frac{\omega (r - r')}{2}$$

Mais, d'autre part, $v = \omega R$; il vient donc, en divisant membre à membre

$$\frac{v'}{v} = \frac{r - r'}{2R}$$

On voit que : la vitesse du fardeau est à celle du moteur comme la différence des rayons des tambours est au double de la longueur de la manivelle.

La comparaison de cette relation avec celle qui a été établie au paragraphe 433, montre que le treuil différentiel produit le même effet qu'un treuil ordinaire de rayon $\frac{r - r'}{2}$. Mais tandis que, dans le treuil ordinaire, le rayon du tambour ne peut pas, en raison du poids du fardeau, diminuer au delà d'une certaine limite, on peut rendre la différence des rayons d'un treuil différentiel aussi petite que l'on veut, et appliquer une faible force motrice à l'élévation de fardeaux considérables.

446. Calcul de la longueur de corde nécessaire pour faire parcourir au fardeau un espace H.

Pendant la descente du fardeau, la corde s'enroule sur le petit tambour et se déroule sur le grand. A l'instant où la poulie mobile arrive au bas de sa course, la longueur de la corde se compose :

- 1° Des brins qui vont de la poulie mobile aux deux tambours ; leur longueur est $2 H$;
- 2° De la partie encore enroulée sur le gros cylindre, soit l ;
- 3° De la partie enroulée sur le petit cylindre, soit l' .

La seconde de ces parties ne serait utilisée que pour atteindre une profondeur supérieure à H ; la longueur totale de corde nécessaire pour atteindre à la profondeur H , soit L , doit donc satisfaire à l'inégalité

$$L \geq 2 H + l$$

Pour calculer l' , remarquons que, pour chaque tour de la manivelle motrice dans le sens convenable, une longueur de corde $2 \pi r'$ se déroule du petit tambour, en même temps que le fardeau s'élève de la quantité $\pi (r - r')$. Pour une élévation H , la longueur déroulée du petit tambour sera

$$2 \pi r' \times \frac{H}{\pi (r - r')} = \frac{2 r' H}{r - r'}$$

On a donc

$$l' \geq \frac{2 r' H}{r - r'}$$

et par conséquent

$$L \geq 2 H + \frac{2 r' H}{r - r'} \quad \text{ou} \quad \frac{2 r H}{r - r'}$$

Si $H = 50$ mètres, $r = 0^m,15$, $r' = 0^m,10$, on trouve

$$L \geq 300 \text{ mètres}$$

447. Palan différentiel de Wilson.

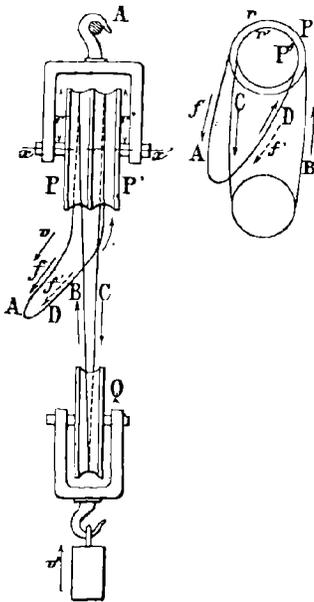


Fig. 411.

La moufle fixe de ce palan comprend deux poulies solidaires P et P' (fig. 411), dont les rayons r et r' sont peu différents. La moufle mobile est constituée par une seule poulie, qui supporte le fardeau à soulever. La chaîne, dont la disposition est indiquée par la figure, passe de la poulie P à la poulie mobile, puis remonte à la poulie P' . Les brins libres A et D sont réunis de manière à former une chaîne sans fin. Généralement, les gorges des poulies sont creusées d'empreintes, dans lesquelles les maillons de la chaîne s'engagent pendant le mouvement du système.

On retrouve évidemment dans ce mécanisme tous les éléments du treuil différentiel. Les poulies P et P' remplacent les deux tambours, et celle qui reçoit le brin de chaîne sur lequel s'exerce la puissance motrice joue en outre le rôle de manivelle. Quand le moteur agit sur le brin A dans le sens de la flèche f , le fardeau s'élève, et le rapport de sa vitesse v' à celle du moteur est

$$\frac{v'}{v} = \frac{r - r'}{2 r}$$

la poulie P faisant alors fonction de manivelle. Quand, au contraire, le moteur agit sur le brin D dans le sens f' avec la même vitesse v , le fardeau descend, et sa vitesse v' est donnée par la formule

$$\frac{v''}{v} = \frac{r - r'}{2r}$$

Comme $r' < r$, on voit que, pour une même vitesse du moteur, la vitesse du fardeau est plus grande à la descente qu'à la montée.

On peut modifier ces relations en introduisant les nombres d'empreintes creusées sur la gorge des poulies. Généralement, ceux-ci ne diffèrent que d'une unité. En les désignant par n et $n - 1$, on a

$$\frac{r}{r'} = \frac{n}{n - 1}$$

d'où

$$\frac{r - r'}{r} = \frac{n - (n - 1)}{n} = \frac{1}{n}$$

et

$$\frac{r - r'}{r'} = \frac{n - (n - 1)}{n - 1} = \frac{1}{n - 1}$$

Par conséquent

$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{2n} \quad \text{ou} \quad v' = \frac{v}{2n}$$

et

$$\frac{v''}{v} = \frac{1}{2(n - 1)} \quad \text{ou} \quad v'' = \frac{v}{2(n - 1)}$$

On voit que : la vitesse d'élévation du fardeau est égale au quotient de la vitesse du moteur par le double du nombre d'empreintes de la grande poulie.

La vitesse de descente est égale au quotient de la vitesse du moteur par le double du nombre d'empreintes de la petite poulie.

En supposant, par exemple, $n = 15$, on a $v' = \frac{v}{30}$. On conclut de là que la force motrice nécessaire pour équilibrer un fardeau est égale à la trentième partie du poids de celui-ci.

La formule donnant la longueur de chaîne est analogue à celle du paragraphe précédent.

448. Autre disposition du palan différentiel.

On donne parfois au palan différentiel une autre disposition, dans laquelle les deux poulies de la moufle supérieure sont commandées par une manivelle oM (fig. 412) de longueur R . Une chaîne sans fin est disposée comme précédemment, mais ses brins libres A et D supportent une seconde poulie mobile Q' ; deux fardeaux sont suspendus, l'un à la poulie Q , l'autre à la poulie Q' . Chacun des mécanismes constitués par la moufle fixe et l'une des poulies mobile est un treuil différentiel (*). On reconnaît facilement que, la manivelle motrice tournant dans le sens de la flèche f , la poulie Q descend, tandis que la poulie Q' monte. Les chemins qu'elles parcourent dans le même temps sont d'ailleurs égaux, puisque la longueur totale de la chaîne reste constante, ce qui exige que le rac-

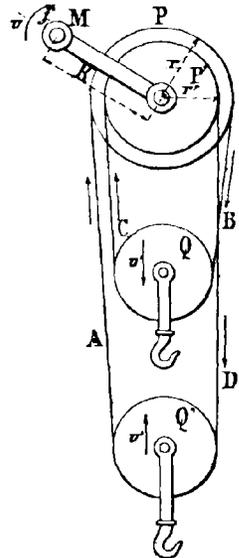


Fig. 412.

(*) A cette différence près qu'il n'existe aucune accumulation de chaîne sur les poulies P et P', qui représentent les tambours.

courcissement du groupe de brins A D soit égal à l'allongement du groupe B C. Le rapport des vitesses est donc

$$\frac{v'}{v} = \frac{r - r'}{2R}$$

Cet appareil est employé dans le forage des puits, pour la manœuvre des bennes. La longueur de chaîne à employer est à peu près le double de la profondeur du puits ; elle est donc bien inférieure à celle que nécessiterait un treuil différentiel.

449. Poulies Moore.

Ce mécanisme, employé pour l'élévation des fardeaux, se compose d'une moufle fixe, traversée par un axe $x'x$ (fig. 413) dont la rotation est commandée par une poulie à empreintes A, de rayon R, sur laquelle passe une chaîne E qui reçoit l'effort moteur. Dans l'intérieur de la chape, l'axe $x'x$ traverse à frottement doux deux poulies égales BC et B'C', dont les parties C et C', évidées intérieurement, sont dentées comme des roues d'engrenages ordinaires. Les parties B et B', dont le rayon commun est r , constituent les poulies proprement dites. Leurs gorges sont creusées d'empreintes, et la chaîne est disposée comme l'indique la figure. Ses deux extrémités P et Q sont reliées par une traverse qui supporte en son milieu le fardeau à soulever. Entre les coquilles C et C' se trouve un renflement cylindrique M, excentré par rapport à $x'x$ et solidaire de cet axe. Un pignon D, fou sur M, engrène intérieurement avec C et C'.

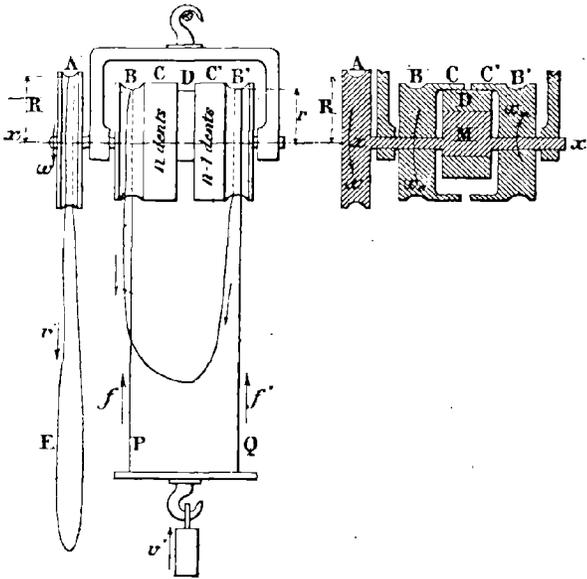


Fig. 413.

La denture de C comprenant n dents, celle de C' en a seulement $n - 1$. Malgré la petite inégalité des pas qui en résulte, C et C' sont parfaitement menées par D, dont le nombre de dents est indifférent.

1° Pour un observateur situé du côté de A, le poids du fardeau tend à faire tourner la poulie BC dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, et la poulie B'C', dans le sens direct. Ces deux poulies agissent donc sur le pignon D dans des sens différents. Leurs actions sont d'ailleurs d'égale intensité, puisque les poulies ont le même diamètre, et que le fardeau est suspendu à égale distance de chacune d'elles. Il ré-

sulte de là que le système reste immobile lorsqu'on supprime l'effort moteur, ce qui est un avantage précieux pour les manœuvres.

2° Quand la poulie A est mise en mouvement, le pignon D provoque les rotations de C et C', et comme les nombres de dents de ces coquilles sont différents, les poulies B et B' qui en sont solidaire prennent l'une à l'égard de l'autre un certain déplacement relatif. Puisque le poids à soulever est également réparti sur les brins de chaîne, et que ceux-ci passent à la même distance de l'axe $x'x$, ce déplacement se partage

également entre P et Q, de sorte que la traverse reste horizontale pendant toute la durée de l'ascension.

3° Pour étudier le fonctionnement de cet appareil, remarquons que l'axe xx' et la partie excentrée M peuvent être assimilés à une manivelle, autour du bouton de laquelle tournerait librement le pignon D. Le système de roues dentées C, D, C' constitue donc un train épicycloïdal, dont l'axe fixe est xx' , et dont le châssis est la manivelle fictive dont il vient d'être question. Si l'on considère C comme la première roue du train, la formule de Willis donne, en conservant les notations habituelles

$$\varepsilon = \frac{\omega_m - \omega}{\omega_o - \omega}$$

On a, d'autre part,

$$\varepsilon = \frac{CD}{DC'} = \frac{C}{C'} = \frac{n}{n-1}$$

De plus, les brins de chaîne P et Q qui aboutissent à la traverse ont la même vitesse v' , égale à celle du fardeau. Comme leur sens d'enroulement sur les poulies égales B et B' sont différents, les vitesses angulaires absolues ω_o et ω_m de celles-ci sont égales et de signes contraires. En faisant $\omega_m = -\omega_o$ dans la formule ci-dessus, il vient

$$\frac{n}{n-1} = \frac{-\omega_o - \omega}{\omega_o - \omega}$$

d'où

$$\omega_o = \frac{\omega}{2n-1}$$

On voit ainsi que ω_o et ω sont de même signe, c'est-à-dire que, dans le mouvement du mécanisme, la coquille qui porte le plus grand nombre de dents tourne dans le même sens que la poulie motrice ; l'autre coquille tourne en sens contraire.

Soient maintenant v et v' les vitesses respectives du moteur et du fardeau à un instant quelconque ; on a

$$\omega = \frac{v}{R} \quad \text{et} \quad \omega_o = \frac{v'}{r}$$

Par conséquent

$$\frac{v'}{r} = \frac{v}{R(2n-1)}$$

d'où enfin

$$\frac{v'}{v} = \frac{r}{R} \times \frac{1}{2n-1}$$

Si, par exemple, $r = 8^{\text{cm}}$, $R = 15^{\text{cm}}$, $n = 20$, on trouve

$$\frac{v'}{v} = \frac{8}{15} \times \frac{1}{39} = \frac{8}{585}$$

Un effort moteur de 8 kilogrammes suffit pour équilibrer un poids de 585 kilogrammes.

450. Vis différentielle de Prony.

Deux vis de même sens et de pas différents sont construites sur un même noyau V. La partie F, de pas P, s'engage dans un écrou A maintenu par des guides qui lui permettent de se déplacer parallèlement à l'axe du noyau, tout en s'opposant à sa

rotation. La partie F', de pas P', traverse un écrou A' entièrement fixe. A chaque fois qu'elle fait un tour dans le sens f , la vis s'enfonce dans A d'une quantité P, et dans A' d'une quantité P'. Il en résulte que la distance des écrous varie d'une quantité égale à la valeur absolue de la différence P' - P, qui mesure le déplacement de A, puisque A' est resté immobile. Si P' > P, le mouvement de A s'effectue dans le sens f , et la distance des deux écrous augmente, pour chaque tour de vis, de P' - P. Si P' < P, le mouvement

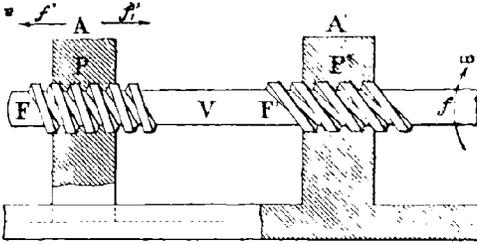


Fig. 414.

de A a lieu dans le sens f_1 , et l'intervalle AA' diminue de P - P'. Enfin, si P = P', la distance AA' reste invariable.

Pour exprimer la vitesse v de A en fonction de la vitesse angulaire ω de la vis, donnons au système un déplacement infiniment petit, pendant lequel l'écrou mobile parcourt un chemin $ds = v dt$. Ce chemin étant proportionnel à l'angle de rotation de la vis, dont la valeur est ωdt , on a

$$\frac{ds}{\omega dt} = \frac{P' - P}{2\pi}$$

d'où

$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{(P' - P) \omega}{2\pi}$$

L'effet produit est donc le même qu'avec une vis ordinaire dont le pas serait P' - P (362). Comme cette différence peut être rendue aussi petite que l'on veut, la vis de Prony permet de donner à l'écrou A un mouvement différentiel extrêmement lent.

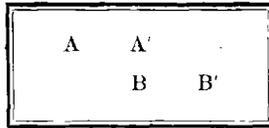
451. Tendeurs d'attelage des wagons.

Dans les tendeurs d'attelage des wagons, les deux vis sont de sens différents, et le déplacement relatif des écrous est égal, pour chaque tour du noyau, à P + P'. Le mécanisme produit le même effet qu'une vis ordinaire de pas P + P'.

452. Mouvement différentiel des machines à aléser.

Les machines à aléser sont destinées à réaliser des surfaces cylindriques de révolution parfaites à l'intérieur de corps creux, comme l'âme d'une arme à feu, le cylindre d'une machine à vapeur, etc... Le corps à aléser (fig. 415) est maintenu immobile ; son axe géométrique XX' coïncide avec celui d'un arbre creux DD' et d'une vis V qui peuvent être animés de mouvements de rotation indépendants. L'outil est porté par un manchon M concentrique à l'arbre creux ; afin d'agir successivement en tous les points de C, il doit prendre autour de XX' un mouvement hélicoïdal qui lui est communiqué de la façon suivante. L'arbre DD' est mis en mouvement au moyen de courroies et de deux séries de poulies étagées. (Pour la simplicité de la figure, chaque cône a été réduit à une seule poulie). Le cône P reçoit, par exemple, une courroie droite, et le cône P' une courroie croisée partant de poulies étagées montées sur l'arbre de commande de l'atelier. Ces courroies, qui tendraient à faire tourner l'arbre creux dans des sens opposés, ne peuvent pas agir simultanément. A cet effet, une poulie P'', folle sur DD', reçoit l'une d'elles pendant que l'autre entraîne la machine. L'arbre creux porte en outre, à l'une de ses extrémités, une roue d'engrenage A, qui communique son mouvement à un groupe de deux pignons A'B, solidaires d'un axe $\eta\eta'$ parallèle au

précédent. Le pignon B engrène avec une roue B' solidaire de la vis V de sorte que celle-ci tourne dans le même sens que DD, avec une vitesse angulaire qui dépend à la fois de la vitesse ω de l'arbre creux, et de la raison de l'équipage



Enfin, le manchon porte-outil est rendu solidaire, au moyen d'une nervure G, d'un écrou E dans lequel s'engage la vis V'. Cette nervure coulisse dans une fente HH' pratiquée le long d'une génératrice de l'arbre DD'. Il résulte évidemment de cette disposition que l'outil est entraîné dans un mouvement de rotation autour de XX', et reste libre de se déplacer parallèlement à cet axe.

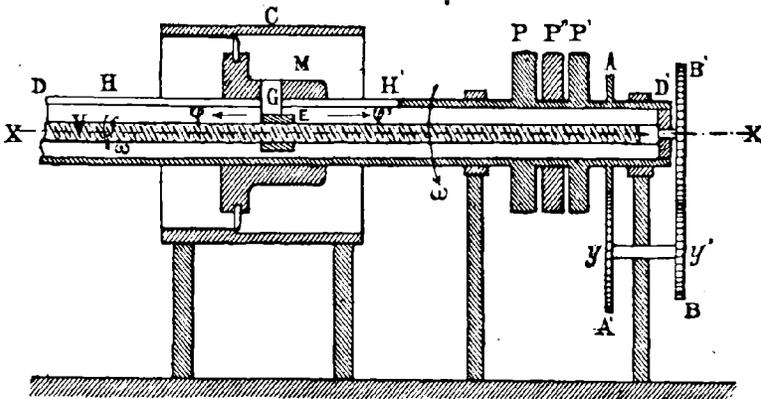


Fig. 415

Proposons-nous d'évaluer le chemin qu'il parcourt à chaque tour de l'arbre creux, en fonction du pas P de la vis et des nombres de tours N et N' que DD' et V effectuent dans le même temps. Si la vis restait immobile, la rotation de l'arbre creux déplacerait le manchon porte-outil, dans le sens φ' , de la quantité NP; si au contraire la vis était seule en mouvement, le déplacement du manchon se produirait dans le sens φ et serait égal à N'P. En définitive, pour N tours de DD', l'outil s'est transporté longitudinalement, dans un sens ou dans l'autre, d'une quantité égale à la valeur absolue de la différence $NP - N'P = (N - N')P$, ce qui correspond pour un tour à un déplacement

$$\alpha = \left(1 - \frac{N'}{N}\right) P$$

Ce déplacement se produit dans le sens φ' si $\frac{N'}{N} < 1$, et dans le sens φ si $\frac{N'}{N} > 1$.

On a, d'autre part

$$\frac{N'}{N} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{AB}{A'B'}$$

Par conséquent

$$\alpha = P \left(1 - \frac{AB}{A'B'}\right)$$

Généralement, $A' = B$ et $A = B' - 1$; il vient alors

$$\alpha = P \left(1 - \frac{B' - 1}{B'} \right) = \frac{P}{B'}$$

Cette quantité peut être rendue très petite, en donnant à la roue B' un nombre suffisant de dents.

Application. — *Quelle vitesse doit-on donner aux poulies motrices d'une alé-seuse pour que la vitesse de coupe de l'outil soit de 650 par minute, quand le rayon intérieur de la pièce est $R = 8$ cm ? Calculer la vitesse d'avance, en supposant que le pas de la vis V soit $P = 15$ mm, et que les nombres de dents des roues A, B, A', B' , soient respectivement $A' = B = 30$ $A = 39$ $B' = 40$.*

La vitesse de coupe v est égale à la vitesse linéaire d'un point de l'outil situé à la distance R de l'axe XX' . En désignant par x le nombre de tours des poulies motrices par minute, et par ω leur vitesse angulaire supposée constante, on a

$$v = \omega R = \frac{\pi x}{30} \times R$$

d'où

$$x = \frac{30 v}{\pi R}$$

Dans cette formule, la seconde est prise pour unité de temps, à cause de l'expression $\frac{\pi x}{30}$ substituée à ω (147). Si de plus, l'unité de longueur est le centimètre, $v = \frac{650}{60} = \frac{65}{6}$, et il vient

$$x = \frac{30 \times 65}{6 \times 8 \pi} = \frac{325}{8 \pi} = 13 \text{ tours environ,}$$

D'après ce qui précède, le déplacement de l'outil parallèlement à l'axe de la vis est, pour un tour des poulies motrices

$$\left(1 - \frac{AB}{A'B'} \right) P$$

La vitesse d'avance est donc, en centimètres par minute

$$v' = x \left(1 - \frac{AB}{A'B'} \right) P = \frac{325}{8 \pi} \left(1 - \frac{39}{40} \right) \times 15 = \frac{325 \times 15}{80 \times 40 \pi} = 0 \text{ cm } 48.$$

DEUXIÈME CLASSE — PREMIER GENRE

MÉCANISMES A CONTACT DIRECT

DANS LESQUELS

LE RAPPORT DES VITESSES EST VARIABLE ET
LE SENS DE LA TRANSMISSION CONSTANT

CHAPITRE XV

§ I. — *Courbes roulanges.*

453. Rappelons d'abord le principe général suivant, démontré au début de la théorie des engrenages cylindriques droits (243) sans aucune hypothèse sur la forme des courbes en contact :

Quand deux corps cylindriques, mobiles autour d'axes parallèles à la direction commune de leurs génératrices, agissent l'un sur l'autre par contact :

1° *Leurs rotations s'accomplissent dans le même sens ou en sens contraires suivant que la normale commune aux deux profils partage la ligne des centres en segments soustractifs ou en segments additifs ;*

2° *Leurs vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux segments déterminés par cette normale sur la ligne des centres ;*

3° *Leur vitesse relative de glissement est égale au produit de la différence ou de la somme des vitesses angulaires par la longueur de la normale commune, suivant que les rotations sont de même sens ou de sens contraires.*

Les sections droites des cylindres en mouvement, qui jouent dans les mécanismes dont nous allons parler le même rôle que les circonférences primitives dans la théorie des engrenages cylindriques, sont appelées *courbes primitives*. Leur vitesse relative de glissement est nulle, et leur mouvement relatif est un roulement simple, si leur point de contact est à tout instant sur la ligne des centres. Cette propriété caractérise les courbes primitives au point de vue géométrique. Nous nous proposons de rechercher à quelles relations analytiques elles doivent satisfaire pour qu'il en soit ainsi.

454. Relations analytiques entre les courbes primitives.

Soient I leur point de contact actuel (fig. 446), M et M' deux points satisfaisant à la relation

$$\text{arc IM} = \text{arc IM}'$$

où se fera le contact sur oo' après un certain temps, r et θ les coordonnées du point M dans le système défini par le pôle o et l'axe polaire oo' , r' et θ' celles du point M'

dans le système défini par le pôle o' et l'axe polaire $o'o$. Posons en outre $oo' = 2a$. Pour que M et M' puissent venir se superposer sur la ligne des centres, il est nécessaire que l'on ait

$$r + r' = 2a \tag{1}$$

Comme les tangentes MT , $M'T'$ sont alors confondues par hypothèse, les angles V et V' qu'elles forment avec les prolongements des rayons vecteurs correspondants sont supplémentaires. D'après la formule connue $\text{tg } V = \frac{r d\theta}{dr}$, on doit donc avoir

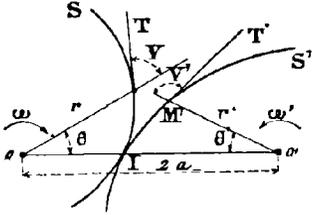


Fig. 416.

$$\frac{r d\theta}{dr} = - \frac{r' d\theta'}{dr'}$$

Mais la relation (1) donne, d'autre part,

$$dr + dr' = 0$$

ou

$$dr = - dr' \tag{2}$$

Il vient, par conséquent,

$$r d\theta = r' d\theta' \tag{3}$$

Les relations (1) et (3) traduisent analytiquement la propriété géométrique caractéristique des courbes primitives. On peut d'ailleurs vérifier que, si ces conditions sont remplies, leur mouvement relatif est un roulement simple. Soient, en effet, ds et ds' les différentielles des arcs IM , IM' . On sait que

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

et, par analogie

$$ds' = \sqrt{dr'^2 + r'^2 d\theta'^2}$$

Les égalités (2) et (3) montrent que $ds = ds'$. Des arcs infiniment petits égaux viennent donc successivement coïncider sur les deux courbes qui, par suite, roulent l'une sur l'autre sans glisser.

Le rapport des vitesses angulaires des deux profils est égal à chaque instant, d'après le principe général rappelé ci-dessus, au rapport inverse des segments déterminés par leur point de contact sur la ligne des centres. Quand les points M et M' seront venus coïncider sur oo' , on aura par conséquent

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{r}{r'}$$

La formule (3) fournit encore une vérification analytique de ce fait, car elle donne

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{r}{r'}$$

ou

$$\left(\frac{d\theta'}{dt} \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{r}{r'}$$

et comme

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \text{et} \quad \frac{d\theta'}{dt} = \omega'$$

on a enfin

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{r}{r'}$$

455. **Problème.** — *Connaissant l'une des courbes primitives, trouver sa conjuguée.*

Solution analytique.

Soit S la courbe donnée, dont l'équation en coordonnées polaires est $r = f(\theta)$.
 Considérons les trois relations

$$\left\{ \begin{array}{l} r = f(\theta) \\ r + r' = 2a \\ rd\theta = r'd\theta' \end{array} \right.$$

La seconde donne $r' = 2a - r = 2a - f(\theta)$ (4)

et la troisième $d\theta' = \frac{rd\theta}{r'} = \frac{f(\theta) d\theta}{2a - f(\theta)}$

D'où, en intégrant les deux membres entre les limites correspondantes a et θ' , o et θ

$$\theta' = \int_o^\theta \frac{f(\theta) d\theta}{2a - f(\theta)}$$
 (5)

Si l'on peut effectuer cette quadrature, il ne reste plus, pour obtenir l'équation de la courbe S' dans le système de coordonnées défini par le pôle o' et l'axe polaire $o'o$, qu'à éliminer θ entre les équations (4) et (5).

Solution graphique.

Portons sur S, à partir du point I où elle rencontre la ligne des centres, des longueurs égales $II_1 = I_1 I_2 = I_2 I_3 \dots$ assez petites pour qu'on puisse, sans erreur sensible les confondre avec leurs cordes (fig. 417), et proposons-nous de trouver sur S' les

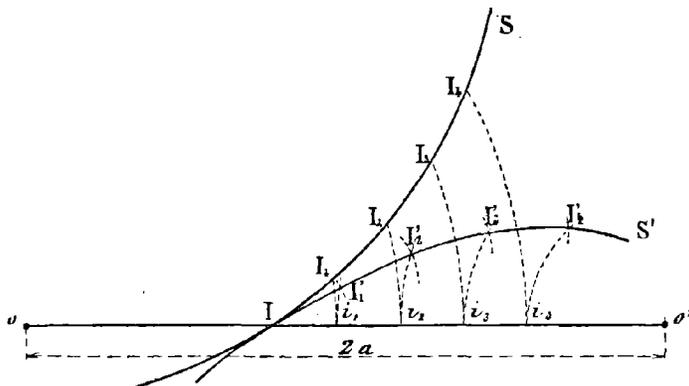


Fig. 417.

points homologues de I_1, I_2, \dots . D'après ce qui précède, la courbe S' est tangente en I à S. Le point I'_1 , homologue de I_1 , est déterminé par les deux considérations suivantes :

1° Il vient se confondre avec I_1 sur la ligne des centres;

2° Les arcs II_1 et II'_1 sont égaux, puisque le mouvement relatif des deux courbes est un roulement simple.

D'après cela, le point I'_1 se trouve à la rencontre de deux arcs de cercle, décrits l'un de o' comme centre avec $o'o' - oI_1 = o'i_1$ pour rayon, l'autre de I comme centre avec II_1 pour rayon.

Le point I_2 , homologue de I_1 , se trouve de même à l'intersection de deux arcs de cercle, l'un de centre I_1 et de rayon égal à $I_1 I_2$, l'autre de centre o' et de rayon $o' i_2 = oo' - oI_2$. Une série d'opérations graphiques très simples permet ainsi de tracer la courbe S' par points.

456. Applications. — I. Système employé pour manœuvrer le gouvernail des navires.

On emploie parfois, pour commander le gouvernail des navires, un engrenage formé d'une roue cylindrique S (fig. 418), mobile autour d'un axe excentré o perpendiculaire

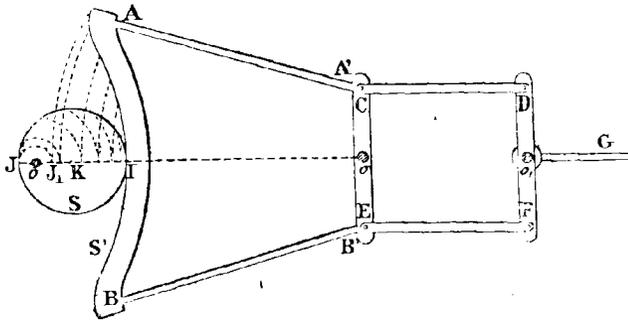


Fig. 418.

à son plan, et d'une sorte de crémaillère courbe S' , mobile autour du centre o' , dont on détermine la ligne primitive par les tracés qui viennent d'être exposés. Les constructions ne sont indiquées que pour la moitié supérieure du profil; l'autre moitié est symétrique de la première par rapport

à la ligne des centres oo' . La crémaillère est reliée par un châssis rigide $AA'B'B'$ à une traverse $A'B'$, oscillant autour de l'axe o' . Deux bielles égales et parallèles, CD et EF , sont articulées d'une part aux extrémités de $A'B'$, et d'autre part à celles d'un levier DF égal à $A'B'$, mobile autour de son milieu o_1 , et calé sur l'arbre du gouvernail G . Il résulte évidemment de cette disposition, analogue à celle que l'on rencontre dans les accouplements de roues de locomotives (415), que la vitesse angulaire du gouvernail est égale à celle de S' . Si l'on désigne par ω la vitesse angulaire de la roue S autour de o , par R et e son rayon et son excentricité, et par a la distance oo' des centres, ω' varie entre les limites

$$\omega \times \frac{oI}{o'I} = \omega \frac{R + e}{a - R - e} \text{ (maximum)}$$

et

$$\omega \times \frac{oJ_1}{o'J_1} = \omega \frac{R - e}{a - R + e} \text{ (minimum)}$$

pendant que l'arbre moteur o accomplit une demi-révolution dans un sens ou dans l'autre. D'après le principe des vitesses virtuelles énoncé au paragraphe 434, la force F_1 qui, appliquée au gouvernail, équilibre une force F appliquée à la roue S , est moindre dans le premier cas que dans le second. Il s'en suit qu'une même puissance F équilibre une résistance F_1 d'autant plus grande que le gouvernail est plus incliné, résultat important, car la résistance opposée par l'eau à la manœuvre croît avec l'angle que forme le gouvernail avec l'axe du navire.

II. Mouvement rectiligne alternatif à retour rapide.

Dans certaines machines à mortaiser, on communique au porte-outil un mouvement rectiligne alternatif à retour rapide par le moyen d'engrenages dans lesquels le rapport des vitesses est constant pendant l'aller, et variable pendant le retour. A cet effet, chaque roue est formée d'une partie circulaire AMB , $A'M'B'$, à laquelle se raccordent des arcs de courbes primitives ACB , $A'CB'$ déterminés comme il a été indiqué au paragraphe précédent. L'arc $A'M'B'$ est une demi-circonférence; pour que l'arc

AMB soit d'égale longueur, les rayons R et R' , dont la somme est égale à la distance des centres $oo' = a$, doivent vérifier la relation

$$\pi R' = 2(\pi - \alpha) R$$

dans laquelle α désigne l'angle AoC . On en tire

$$\pi - \alpha = \frac{\pi R'}{2R}$$

ce qui permet de tracer les rayons oA, oB qui limitent l'arc AMB . On détermine par tâtonnements la forme de la courbe $A'CB'$ et la position du point C sur oo' , de telle sorte que la courbe conjuguée de CA' vienne se terminer en A . Une bielle DE , articulée d'une part en un point D de la roue o' , d'autre part au coulisseau E , transforme le mouvement de rotation qui s'effectue autour du centre o' en un mouvement rectiligne alternatif.

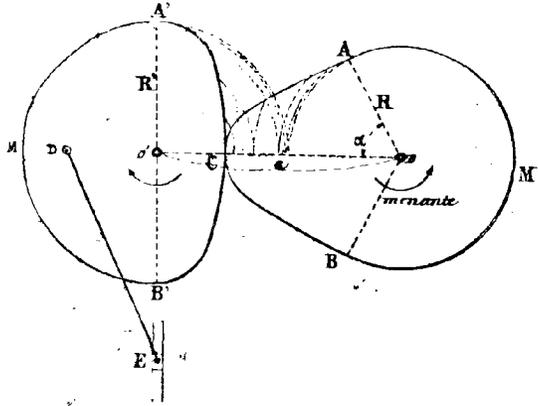


Fig. 419.

La roue o reçoit un mouvement de rotation uniforme par l'intermédiaire d'une poulie calée sur son arbre. Pendant que les parties $AMB, A'M'B'$ se conduisent, la roue o' tourne de 180° d'un mouvement uniforme, et l'outil accomplit sa course d'aller; quand les parties $ACB, A'CB'$ engrènent ensemble, la roue o' achève sa révolution, d'un mouvement d'abord accéléré, puis retardé, et l'outil accomplit sa course de retour. Les durées des deux phases de son mouvement étant proportionnelles aux angles $2(\pi - \alpha)$ et 2α , le retour est plus rapide que l'aller.

Ce mécanisme se comporte comme un système bielle et manivelle (533) dans lequel la manivelle $o'D$ recevrait un mouvement alternativement uniforme et varié pendant deux demi-révolutions successives.

457. Problème. — *Connaissant les lois des mouvements de rotation qui s'exécutent autour de deux axes parallèles, trouver les courbes primitives correspondantes.*

L'axe o étant supposé moteur, soit $\omega = f(t)$ l'expression donnée de sa vitesse angulaire en fonction du temps; on se propose de déterminer les courbes primitives de telle sorte que la rotation autour de l'axe o' s'effectue suivant la loi également donnée

$$\omega' = f_1(t).$$

Solution analytique.

Les vitesses angulaires ayant pour expressions respectives

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{et} \quad \omega' = \frac{d\theta'}{dt}$$

les coordonnées polaires de deux points homologues des courbes S et S' satisfont aux relations suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} d\theta = f(t) dt \\ d\theta' = f_1(t) dt \\ r + r' = 2a \\ r d\theta = r' d\theta' \end{array} \right. \quad 6)$$

On tire des deux premières, en prenant pour instant initial celui où les angles θ et θ' s'annulent simultanément

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \int^t f(t) dt \\ \theta' = \int_0^t f_1(t) dt \end{array} \right. \quad (7)$$

La dernière donne d'autre part

$$\frac{r}{r'} = \frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{f_1(t)}{f(t)}$$

En tenant compte de $r + r' = 2a$, on tire

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \frac{2af_1(t)}{f(t) + f_1(t)} \\ r' = \frac{2af(t)}{f(t) + f_1(t)} \end{array} \right. \quad (8)$$

Les équations des courbes S et S' seront ensuite obtenues par l'élimination de t dans chacun des groupes d'équations suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \frac{2af_1(t)}{f(t) + f_1(t)} \\ \theta = \int_0^t f(t) dt \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r' = \frac{2af(t)}{f(t) + f_1(t)} \\ \theta' = \int_0^t f_1(t) dt \end{array} \right.$$

Solution graphique.

Les lois données $\omega = f(t)$, $\omega' = f_1(t)$ peuvent être représentées graphiquement par

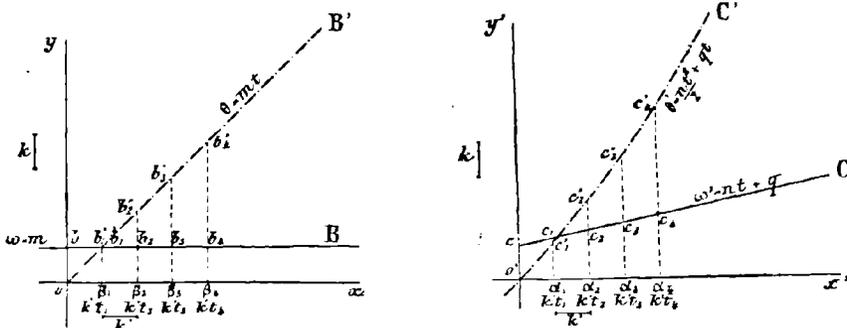


Fig. 420.

deux lignes B et C (fig. 420), en portant les temps en abscisses et les vitesses angulaires en ordonnées. Supposons que cette représentation ait été faite en prenant

des échelles communes k pour les vitesses et k' pour les temps. Nous avons vu dans la première partie de cet ouvrage comment on peut, une loi graphique de vitesses étant donnée, construire la courbe des espaces correspondante, en évaluant l'aire comprise entre la courbe des vitesses, l'axe des temps, et les ordonnées qui se rapportent aux deux valeurs du temps considérées. Les courbes B' et C' que l'on obtient ainsi figurent respectivement les variations des angles polaires θ et θ' , c'est-à-dire que, en mesurant à l'échelle k deux ordonnées de ces courbes qui correspondent à une même abscisse $k't$, on détermine les angles dont les courbes primitives inconnues ont tourné depuis l'instant initial jusqu'à l'instant t .

Ceci posé, décrivons des points o et o' comme centres (fig. 421) deux circonférences égales ayant pour rayon l'unité de longueur, et coupant oo' en α et α' . A l'instant initial, le point de contact des courbes primitives partage la ligne des centres en segments inversement proportionnels aux vitesses angulaires correspondantes $\frac{ob}{k}, \frac{o'c}{k}$ (fig. 420). Pour

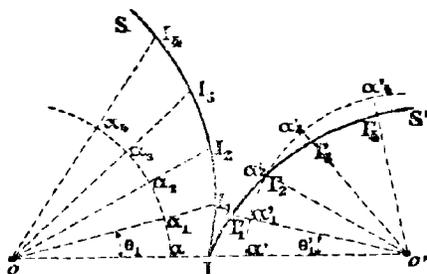


Fig. 421.

ne pas surcharger le dessin, la construction a été faite à part sur une droite $o_1o'_1$ (fig. 422) égale à oo' , ce qui a donné le point i , et l'on a ensuite porté $oI = o_1i$. A une époque quelconque t_1 , figurée par les abscisses $o\beta_1 = o'\gamma_1 = k't_1$ (fig. 420), la courbe S a tourné d'un angle $\theta_1 = \frac{\beta_1 b_1}{k} = \alpha o \alpha_1$. Le point I_1

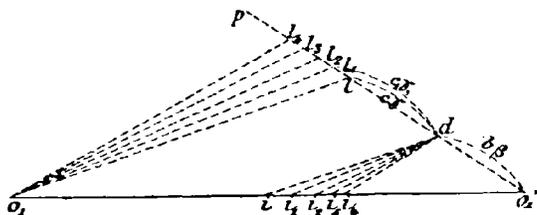


Fig. 422.

de la courbe S qui, à l'instant t_1 , se trouve sur la ligne des centres, est situé actuellement sur $o\alpha_1$. A cette même époque, la courbe S' a tourné

d'un angle $\theta' = \frac{\gamma_1 c_1}{k} = \alpha' o' \alpha'_1$ et le point I'_1 , homologue de I_1 , se trouve actuellement sur $o'\alpha'_1$. Il ne reste plus qu'à déterminer les longueurs $oI_1, o'I'_1$ en partageant oo' , ou son égale $o_1o'_1$, en segments inversement proportionnels aux vitesses angulaires $\frac{\beta_1 b_1}{k}, \frac{\gamma_1 c_1}{k}$ à l'instant t_1 . La construction fournit un point i_1 sur $o_1o'_1$. En portant $oI_1 = o_1i_1$ sur $o\alpha_1$ et $o'I'_1 = o'i_1$, sur $o'\alpha'_1$, on obtient les points I_1 et I'_1 , et ainsi de suite.

Les figures supposent que le mouvement de l'arbre moteur est uniforme ($\omega = m$) et que celui de l'arbre mené est uniformément accéléré ($\omega' = nt + q$).

458. Courbes dérivées.

Deux courbes primitives S et S' étant données, il est possible d'en déduire une infinité d'autres, qui conservent au rapport des vitesses angulaires les mêmes valeurs successives que les premières. Les coordonnées polaires (r, θ), (r', θ') de deux points homologues M et M' (fig. 423) vérifient les relations fondamentales :

$$\begin{cases} r + r' = 2a \\ r d\theta = r' d\theta' \end{cases} \quad (1)$$

Construisons les points M_1 et M'_1 du plan qui, rapportés aux mêmes systèmes de coordonnées polaires que S et S' , ont pour coordonnées respectives

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = r \\ \theta_1 = \frac{\theta}{n} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r'_1 = r' \\ \theta'_1 = \frac{\theta'}{n} \end{array} \right. \quad (3)$$

n étant un nombre quelconque. Cette opération, répétée pour des positions suffisamment nombreuses des points M et M' , fait correspondre à S et S' deux courbes S_1 et S'_1

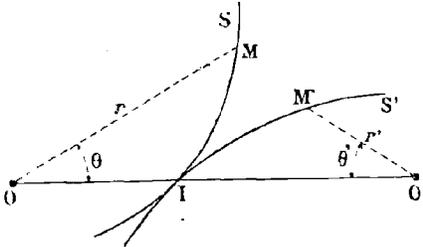


Fig. 423.

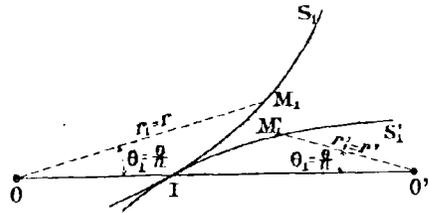


Fig. 424.

que, pour plus de clarté, nous avons construites séparément (fig. 424), et dont nous allons étudier les propriétés.

1° En les supposant solidaires des axes o et o' , leur mouvement relatif est un roulement simple. On tire, en effet, des égalités (2) et (3)

$$d\theta = n d\theta_1$$

$$d\theta' = n d\theta'_1$$

de sorte que les relations (1) deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 + r'_1 = 2a \\ r_1 d\theta_1 = r'_1 d\theta'_1 \end{array} \right.$$

On sait que ces dernières expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que S_1 et S'_1 roulent l'une sur l'autre sans glisser (454).

2° Les valeurs successives du rapport des vitesses angulaires ne sont pas modifiées, car elles sont égales, à chaque instant, au rapport inverse des rayons vecteurs des deux points homologues qui viennent se superposer, et l'on a évidemment

$$\frac{r}{r'} = \frac{r_1}{r'_1}$$

Les effets des courbes (S, S') et (S_1, S'_1) sont donc absolument comparables. La seule différence est que les variations du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ se produisent n fois plus vite dans le second cas que dans le premier, puisque, pour passer de la valeur $\frac{OI}{O'I}$ à la

valeur $\frac{r}{r'}$, l'arbre moteur doit tourner de l'angle θ quand il entraîne S, et seulement de $\frac{\theta}{n}$ quand il entraîne S₁.

S₁ et S'₁ sont appelées *courbes dérivées* ; on les obtient, d'après ce qui précède, en conservant les rayons vecteurs des courbes primitives, et en réduisant (ou en amplifiant) dans un même rapport quelconque leurs angles polaires.

459. Ellipses égales.

Soient deux ellipses égales S et S' (fig. 425) ayant pour grand axe la distance des centres $oo' = 2a$, pour petit axe une longueur arbitraire $2b$, et pour distance focale $2c$. Supposons que

leurs grands axes soient appliqués sur oo' , et que leurs foyers de droite soient respectivement en o et o' . Dans cette position, elles sont tangentes en un point I de la ligne des centres, qui est pour chacune d'elles une extrémité du grand axe. Nous

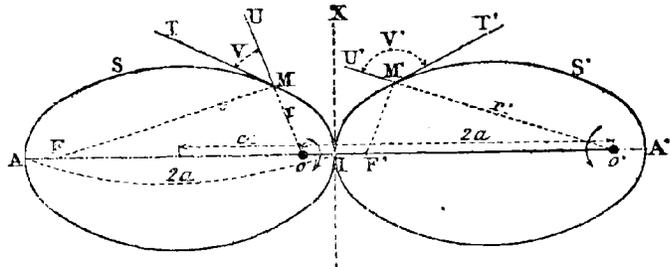


Fig. 425.

allons montrer que, si ces courbes sont invariablement reliées aux axes o et o' et se conduisent mutuellement, leurs mouvements de rotation sont de sens contraires, et que leur mouvement relatif est un roulement simple. D'après la théorie générale, il suffit d'établir que si l'on porte à partir du point I des arcs égaux IM, IM' :

1° La somme $oM + o'M$ est égale à $2a$;

2° Les tangentes MT et $M'T'$ se superposent en même temps que les points M et M' , ce qui revient à dire que les angles $V = TMU$ et $V' = T'M'U'$ sont supplémentaires ;

3° La position commune prise à cet instant par M et M' est située entre o et o' .

Soient F et F' les seconds foyers des ellipses dans la position SS' . Les points M, o, F étant respectivement symétriques des points M', o', F' par rapport à la perpendiculaire IX élevée sur oo' , on a

$$oM + o'M = oM' + FM = 2a$$

De plus, d'après la propriété de la tangente à l'ellipse

$$V = T'M'U' = T'M'F'$$

et comme

$$T'M'F' = TMo = 2 \text{ droits} - V$$

en raison de la symétrie de la figure, on a aussi

$$V' = 2 \text{ droits} - V \quad \text{ou} \quad V + V' = 2 \text{ droits.}$$

Enfin, oM étant toujours inférieur à $2a$, la position commune prise par les points M et M' sur la ligne des centres est nécessairement intérieure au segment oo' .

Il résulte de là que les ellipses S et S' peuvent être employées comme courbes primitives reliant deux rotations de sens contraires autour d'axes parallèles. Le rapport des vitesses angulaires, à l'instant où les points M et M' se confondent, est

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{oM}{o'M}$$

La plus petite valeur de oM est $oI = a - c$, à laquelle correspond la plus grande valeur $o'I = a + c$ de $o'M'$. Le minimum du rapport des vitesses angulaires est donc $\frac{a-c}{a+c}$; il se produit quand les ellipses occupent les positions S et S' . De même, la plus grande valeur de oM est $oA = a + c$, à laquelle correspond la plus petite valeur $o'A' = a - c$ de $o'M'$. Le maximum du rapport des vitesses est donc $\frac{a+c}{a-c}$; il a lieu quand les ellipses roulantes ont tourné de 180° à partir des positions figurées. Le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ croît donc d'une façon continue entre les valeurs $\frac{a-c}{a+c}$ et $\frac{a+c}{a-c}$ pendant la première demi-révolution, puis décroît entre les limites $\frac{a+c}{a-c}$ et $\frac{a-c}{a+c}$ pendant la demi-révolution suivante; les mêmes variations se reproduisent ensuite périodiquement.

460. Détermination des ellipses primitives en vue d'assurer aux limites du rapport des vitesses des valeurs données.

En posant $\frac{a-c}{a+c} = k$

et $\frac{a+c}{a-c} = \frac{1}{k}$

on a $c = a \frac{1-k}{1+k}$

Le demi-petit axe b des ellipses roulantes est donc, en fonction de k et de la distance des centres

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a \sqrt{1 - \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{k}}{1+k}$$

Pour que le rapport des vitesses angulaires varie d'une façon continue entre les limites k et $1/k$, par exemple, il suffit de faire $b = \frac{4a}{5}$.

461. Engrenage elliptique.

Deux cames cylindriques ayant pour sections droites les ellipses S et S' peuvent, d'après ce qui précède, établir une liaison entre les rotations de deux arbres parallèles, sans qu'il y ait glissement des surfaces en contact. Si l'arbre o est moteur, dans le sens de la flèche (fig. 426), les rayons vecteurs de l'ellipse S vont d'abord en croissant, ce qui rend la transmission obligatoire pendant toute la première demi-révolution. A la fin de celle-ci, les cames ont pris

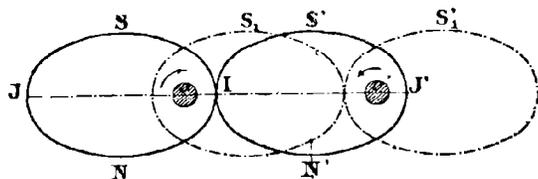


Fig. 426.

les positions S_1 et S'_1 , de sorte que les rayons vecteurs de l'ellipse motrice qui passent successivement sur oo' vont en décroissant. Pour que les deux corps continuent à se conduire, il est donc nécessaire de garnir de dents les demi-ellipses INJ , $IN'J'$ qui sont appelées à venir en contact pendant la seconde demi-révolution. Dans la pratique, on dispose ces dents sur toute l'étendue des deux courbes, et l'on obtient une paire de roues dentées qui constituent un *engrenage elliptique*.

462. Tracé de la denture.

Considérons les deux ellipses primitives dans une position quelconque S S' (fig 427) où elles sont tangentes en I; elles ont été préalablement divisées en parties égales aux pleins et aux creux consécutifs, dont l'origine est à un sommet du grand axe. Supposons que I soit l'un des

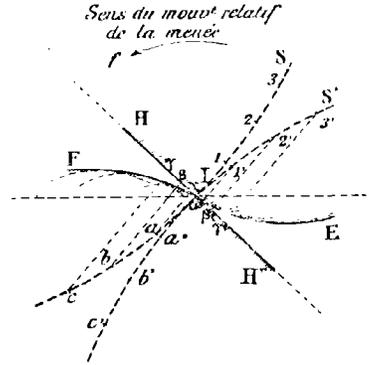
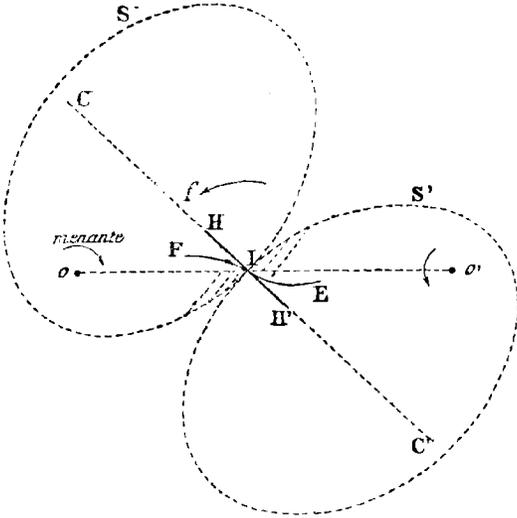


Fig. 427.

points de division sur chaque courbe. Pour déterminer les profils des dents qui aboutissent à ce point, on peut employer deux méthodes différentes.

1° Méthode des cercles de courbure.

Elle consiste à substituer aux ellipses primitives leurs cercles de courbure, qui sont égaux, et dont les centres C et C' peuvent être obtenus par la construction de Savary, si les deux courbes ont été tracées par le procédé de la bande de papier (164). On emploie, pour tailler la dent de la roue S en I, la fraise qui conviendrait à une roue cylindrique droite du même module M, mais dont le rayon primitif serait égal à CI. Le nombre des dents de cette roue cylindrique fictive, soit $\frac{2 CI}{M}$, varie avec la position du point I sur l'ellipse primitive.

2° Méthode de Poncelet.

On prend pour flancs des dents les normales communes IH et IH' aux deux ellipses, et l'on détermine les faces correspondantes par des tracés analogues à ceux qui ont été exposés aux paragraphes 257 et 289.

Cherchons d'abord la face de la roue o, considérée comme menante. Puisqu'elle doit conduire le flanc IH' de la menée après le passage de leur point de contact sur la ligne des centres, elle en est l'enveloppe quand S' roule sur S dans le sens de son mouvement relatif, indiqué par la flèche f. Soient 1, 2, 3... des points équidistants les uns des autres sur S, 1', 2', 3'... les points de S' qui viennent successivement se superposer aux précédents, et 1'α', 2'β', 3'γ' les perpendiculaires à IH'. D'après la méthode de Poncelet (257), les circonférences décrites de 1, 2, 3 comme centres, avec des rayons respectivement égaux à 1'α', 2'β', 3'γ', sont tangentes à l'enveloppe du flanc IH', et déterminent une courbe IE qui forme la face d'une dent de la roue o.

Pour trouver la face de la menée qui doit être associée au flanc IH, on observe qu'elle est conduite par celui-ci avant le passage de leur point de contact sur la ligne des centres, et qu'elle en est l'enveloppe quand S roule sur S' dans le sens f. On prend

des points a, b, c équidistants les uns des autres sur S , les points homologues $a' b' c'$ de S' , puis on abaisse les perpendiculaires $a \alpha, b \beta, c \gamma$, sur IH . On décrit, enfin, de $a' b' c'$ comme centres, avec des rayons respectivement égaux à $a \alpha, b \beta, c \gamma$, des arcs de cercle dont l'enveloppe IF est la face cherchée. Les lignes d'échanfrinement et d'évidement sont des courbes parallèles aux ellipses primitives, qui s'en écartent extérieurement de $0,3 P$ ou M et intérieurement de $0,4 P$ ou $\frac{7}{6} M$

463. Train épicycloïdal elliptique de Mac-Cord.

Ce mécanisme ne diffère du train épicycloïdal de Pecqueur qu'en ce que les deux premières roues A et B sont elliptiques (fig. 428). La roue A est boulonnée sur un montant du bâti fixe H ; un arbre x , mû par la manivelle M , la traverse à frottement doux en l'un de ses foyers, et entraîne le levier L , dans l'extrémité duquel tourne un arbre y , solidaire de la roue elliptique B qu'il perce en un foyer, et de la roue cylindrique C . Celle-ci engrène avec une seconde roue cylindrique D , dont l'axe z est le prolongement de x . Si A est considérée comme la roue initiale du train, la

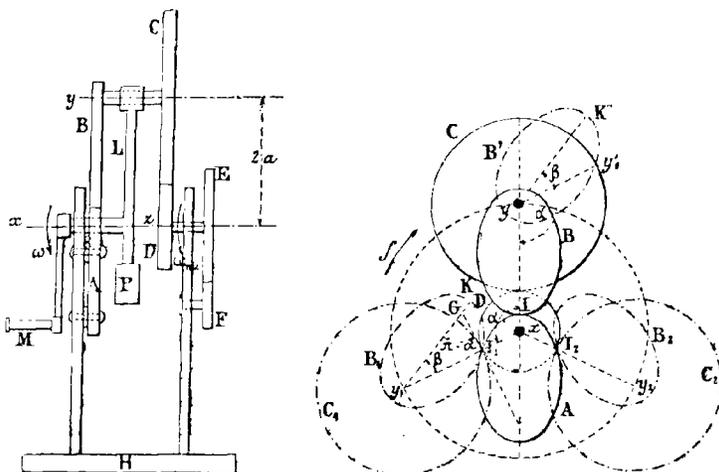


Fig. 428.

formule de Willis donne, ω désignant la vitesse angulaire du châssis L et ω_m celle de la roue D

$$\varepsilon = \frac{\omega_m - \omega}{-\omega}$$

d'où

$$\omega_m = \omega (1 - \varepsilon)$$

La raison ε , calculée en supposant le bras porte-train immobile, est égale au produit $\varepsilon_1 \times \frac{C}{D}$, dans lequel ε_1 représente la valeur absolue du rapport des vitesses des roues elliptiques, variable entre les limites $\frac{a-c}{a+c}$ et $\frac{a+c}{a-c}$. Il vient donc

$$\omega_m = \omega \left(1 - \varepsilon_1 \times \frac{C}{D} \right)$$

Si les nombres de dents des roues cylindriques vérifient les relations

$$\frac{a-c}{a+c} < \frac{C}{D} < \frac{a+c}{a-c}$$

la roue D prend un mouvement circulaire alternatif varié, dans le sens f du mouvement de la manivelle motrice, ou dans le sens contraire, suivant que $\varepsilon_1 \times \frac{C}{D}$ est inférieur ou supérieur à l'unité. Les maxima de sa vitesse angulaire dans les deux courses sont respectivement

$$\omega \left(1 - \frac{a-c}{a+c} \times \frac{C}{D} \right)$$

et

$$\omega \left(1 - \frac{a+c}{a-c} \times \frac{C}{D} \right)$$

Les changements de sens du mouvement de la roue D correspondent aux positions B_1 et B_2 de l'ellipse B pour lesquelles $\varepsilon_1 = \frac{D}{C}$. On a alors

$$\varepsilon_1 = \frac{xI_1}{y_1 I_1} = \frac{xI_2}{y_2 I_2} = \frac{D}{C}$$

Ces proportions permettent de construire les longueurs

$$xI_1 = xI_2 = \frac{2a \times D}{C + D}$$

$$y_1 I_1 = y_2 I_2 = \frac{2a \times C}{C + D}$$

en partageant la distance $2a$ des axes x et y dans le rapport $\frac{D}{C}$, et de déterminer les points I_1 et I_2 , ainsi que les positions B_1 et B_2 de l'ellipse B.

On calcule aisément l'amplitude angulaire de chaque course alternative. Pendant que le porte-train tourne de l'angle $y_1 xy = \alpha$, l'ellipse mobile passe de la position B_1 à la position B, et tourne autour de l'axe y d'un angle $IyK = \alpha + \beta$, dans le sens f du mouvement de la manivelle ; la roue C tourne elle-même autour de son centre de l'angle $\alpha + \beta$, et tout revient, pour calculer l'angle de rotation θ de la roue D, à considérer le train épicycloïdal CD, auquel on peut attribuer un mouvement uniforme, sans rien changer aux chemins parcourus par ses parties. Dans cette hypothèse, les angles de rotation sont proportionnels aux vitesses angulaires, et peuvent les remplacer dans la formule de Willis qui, appliquée en regardant D comme roue initiale, donne

$$\frac{-D}{C} = \frac{(\alpha + \beta) - \alpha}{\theta - \alpha}$$

On en tire
$$\theta = \alpha - \beta \times \frac{C}{D}$$

L'angle de rotation total de la roue D dans le sens f est donc

$$2\theta = 2 \left(\alpha - \beta \times \frac{C}{D} \right)$$

On trouverait de même l'amplitude de la seconde course

$$2\theta_1 = 2 \left[(\pi - \alpha) - (\pi - \beta) \frac{C}{D} \right]$$

Il reste à calculer α et β . On considère, pour cela, le triangle $I_1 G y_1$ formé par les rayons vecteurs $I_1 y_1$ et $I_1 G = I_1 x$ du point I_1 dans l'ellipse B ; son angle en G est égal à $\pi - \alpha$, et l'on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{I_1 G}^2 = \overline{I_1 y_1}^2 + \overline{G y_1}^2 - 2 I_1 y_1 \times G y_1 \cos \beta \\ \overline{I_1 y_1}^2 = \overline{I_1 G}^2 + \overline{G y_1}^2 + 2 I_1 G \times G y_1 \cos \alpha \end{array} \right.$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4 a^2 D^2}{(C + D)^2} = \frac{4 a^2 C^2}{(C + D)^2} + 4 c^2 - \frac{4 a C}{C + D} \times 2 c \cos \beta \\ \frac{4 a^2 C^2}{(C + D)^2} = \frac{4 a^2 D^2}{(C + D)^2} + 4 c^2 + \frac{4 a D}{C + D} \times 2 c \cos \alpha \end{array} \right.$$

d'où l'on tire

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \beta = \frac{a^2 (C - D) + c^2 (C + D)}{2 a c C} \\ \cos \alpha = \frac{a^2 (C - D) - c^2 (C + D)}{2 a c D} \end{array} \right.$$

Si, par exemple, $a = 50$ m/m, $b = 30$ m/m, $c = 40$ m/m. $C = 30$ et $D = 15$, on trouve

$$\cos \beta = 0.9125 \quad \text{d'où } \beta = 24^\circ 15' \text{ environ.}$$

$$\cos \alpha = -0.575 \quad \text{d'où } \alpha = 125^\circ.$$

$$2 \theta = 2 \left(125^\circ - 24^\circ 15' \times \frac{30}{15} \right) = 153^\circ \text{ (dans le sens de la manivelle).}$$

$$2 \theta' = 2 \left(55^\circ - 155^\circ 45' \times \frac{30}{15} \right) = -513^\circ \text{ (dans le sens contraire de la manivelle).}$$

On peut amplifier ou réduire l'étendue des courses en faisant suivre D d'un équipage de roues dentées, tel que EF.

464. Courbes dérivées des ellipses primitives.

En appliquant aux ellipses primitives le procédé général étudié au paragraphe 458, on en déduit des courbes dérivées dont le fonctionnement est analogue. Pour construire, par exemple, celles qui proviennent de la réduction des angles polaires dans le rapport de 1 à 2, on mène par le foyer o de l'ellipse S (fig. 429) des rayons vecteurs $oA, oB, oC \dots$ faisant entre eux des angles égaux à un sous-multiple quelconque de 180° , puis on partage un angle droit xoy (fig. 430) en un nombre correspondant de parties égales, et l'on porte sur les lignes de division des longueurs $oa, ob, oc \dots$ respectivement égales à $oA, oB, oC \dots$. En répétant la même construction tout autour du point o , on obtient une courbe $aefga$ dont chaque quart, tel que ae , correspond à une moitié de l'ellipse S. L'ellipse S' donnerait naissance à une courbe identique, disposée par rapport à la précédente comme l'indique la fig. 431. D'après la théorie générale des courbes dérivées, des cames cylindriques admettant pour sections droites les profils $aefga, almna$, transmettent un mouvement de rotation entre les arbres o et o' , avec les mêmes variations du rapport des vitesses que si l'on employait les cames elliptiques correspondantes (*). Seulement, le passage d'un minimum à un

(*) Au premier abord, ces cames paraissent analogues à celles dont nous avons indiqué l'emploi dans les pompes rotatives (258). Leur fonctionnement est néanmoins tout à fait différent, puisque le rapport des vitesses reste constant dans un cas, et varie dans l'autre.

maximum, ou inversement, se produira pendant un quart de tour de l'arbre moteur, soit deux maxima et deux minima par révolution complète au lieu d'un seul. Ces courbes dérivées sont appelées, en raison de leur forme particulière, des *courbes bilobées*.

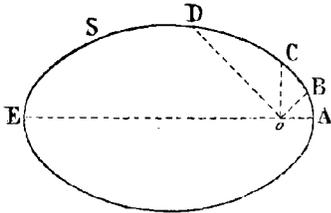


Fig. 429.

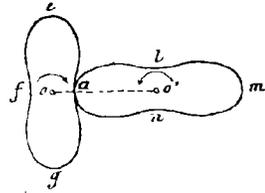


Fig. 431.

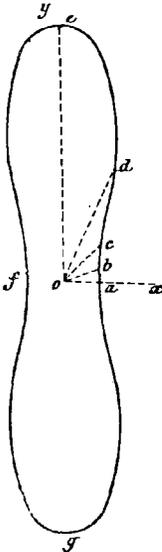


Fig. 430.

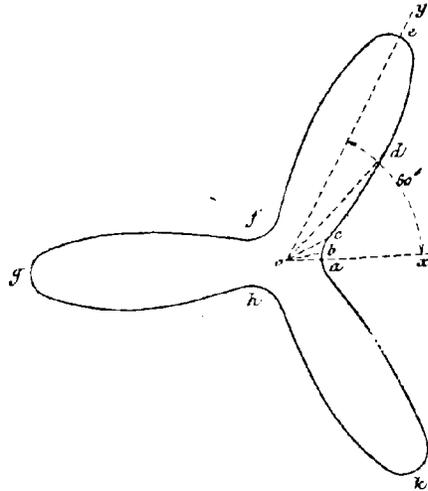


Fig. 432.

On construit de la même manière des courbes à trois saillies, ou *trilobées* (fig. 432) en faisant correspondre à la demi-ellipse ABCDE un arc *abcde* tracé dans un angle *xoy* de 60°. Le rapport des vitesses angulaires présente alors trois maxima et trois minima par révolution. Le procédé est applicable quel que soit le nombre des lobes.

465. Spirales logarithmiques égales.

L'équation d'une spirale logarithmique en coordonnées polaires est de la forme

$$r = ke^{m\theta}$$

k et *m* désignant des constantes arbitraires (*). Cette courbe jouit des propriétés suivantes :

(*) On sait que les diverses spirales obtenues en donnant à *k* une série de valeurs différentes peuvent se superposer, en les faisant tourner autour du pôle d'un angle convenable.

1° En supposant k et m positifs, r croît de o à $+\infty$ quand θ croît de $-\infty$ à $+\infty$.
Le pôle est un point asymptote ;

2° L'angle V , formé par une tangente avec le rayon vecteur correspondant, est constant.

On a en effet :

$$\operatorname{tg} V = \frac{rd\theta}{dr} = \frac{kem\theta d\theta}{kmem\theta d\theta} = \frac{1}{m}$$

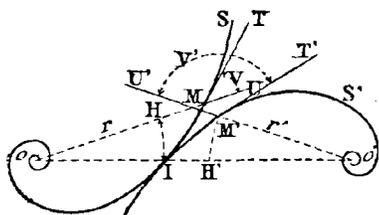


Fig. 433.

Nous nous proposons de montrer que deux spirales identiques S et S' , ayant pour points asymptotes les points o et o' des deux axes et disposées en sens inverse, se conduisent mutuellement de manière à ce que leur mouvement relatif soit un roulement simple.

Soit I un point de rencontre de S avec la ligne des centres (fig. 433) ; d'après la première propriété, il est toujours possible de placer S' de telle sorte qu'elle passe par le point I , et, d'après la seconde, elle est alors tangente à S . Prenons deux arcs infiniment petits égaux IM et IM' à partir de I , et décrivons les arcs de cercle IHH , $M'H'$ de centres o et o' . Les triangles infinitésimaux IMH , $IM'H'$, rectangles en H et H' , sont égaux comme ayant des hypoténuses égales IM et IM' , et deux angles aigus égaux $IMH = H'M' = V$. On a donc $HM = IH'$, et par conséquent

$$OM + o'M' = oI + o'I = oo' = 2a$$

Il résulte de là que les points M et M' viennent se superposer sur la ligne des centres, et comme on peut répéter en partant de leur position commune ce qui vient d'être dit en partant du point I , les deux spirales roulent l'une sur l'autre sans glisser.

On peut d'ailleurs établir ces résultats par une méthode purement analytique. Etant donnée l'équation

$$r = kem\theta$$

de la courbe S , il suffit, pour trouver celle de sa conjuguée, d'éliminer r et θ (455) entre les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} r = kem\theta \\ r + r' = 2a \\ \theta' = \int_0^\theta \frac{kem\theta d\theta}{2a - kem\theta} \end{array} \right.$$

En effectuant l'intégration, on a successivement

$$\begin{aligned} \theta' &= -\frac{1}{m} \int_0^\theta \frac{kem\theta d\theta}{2a - kem\theta} = -\frac{1}{m} \int_0^\theta \frac{d(2a - kem\theta)}{2a - kem\theta} \\ &= -\frac{1}{m} \int_0^\theta \frac{2a - kem\theta}{2a - kem\theta} = -\frac{1}{m} \int_0^\theta \frac{r'}{2a - kem\theta} \end{aligned}$$

d'où enfin

$$r' = (2a - kem\theta) e^{-m\theta}$$

Cette équation représente une spirale logarithmique égale à S, mais inversement placée, et dont le point asymptote est o'.

Les spirales S et S' étant indéfinies, on ne peut en utiliser que des arcs limités. On construit, pour cela, deux polygones réguliers égaux quelconques, puis on joint le milieu de chaque côté aux sommets les plus voisins par des arcs de spirale. On obtient ainsi des cames qui, rendues solidaires de deux axes passant par leurs centres, se conduisent avec rapport variable des vitesses, et roulent sans glisser l'une sur l'autre. Pour

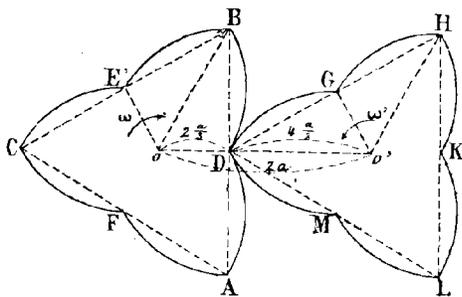


Fig. 434.

indiquer la manière de procéder, considérons deux triangles équilatéraux égaux ABC, DHL (fig. 434), et plaçons les profils obtenus dans la position indiquée par la figure. Les arcs de spirale DB et DG sont égaux et placés en sens inverse autour des pôles o et o'; ils se conduisent pendant le premier sixième de tour et le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ des vitesses angulaires croît depuis la valeur $\frac{oD}{o'D} = 1/2$ jusqu'à la valeur $\frac{oB}{o'G} = 2$. Pendant le second sixième de tour, les arcs BE' et GH entrent en action, et le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ décroît entre les limites $\frac{oB}{o'G} = 2$ et $\frac{oE'}{o'H} = 1/2$, etc... Il y a donc, pour chaque tour des arbres, trois maxima et trois minima.

Pour construire les arcs de spirale, il est indispensable de déterminer les constantes k et m qui s'y rapportent. Il suffit de faire le calcul pour l'un d'eux, DB par exemple. En posant $oo' = 2a$, on a

pour $\theta = 0$ $r = k \cdot oD = \frac{2a}{3}$

et pour $\theta = DoB = \frac{\pi}{3}$ $r = ke^{\frac{m\pi}{3}} = oB = \frac{4a}{3}$

Par conséquent $e^{\frac{m\pi}{3}} = 2$

ou, en prenant les logarithmes népériens des deux membres

$$m \frac{\pi}{3} = \mathcal{L}. 2$$

Les valeurs cherchées sont donc

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \frac{2a}{3} \\ m = \frac{3 \mathcal{L}. 2}{\pi} = 0,662 \end{array} \right.$$

et l'arc DB appartient à une spirale dont l'équation est

$$r = \frac{2a}{3} e^{0,662 \theta}$$

§ II. — *Système de deux roues dentées dont l'une est excentrée.*

466. Ce mécanisme est composé de trois roues dentées cylindriques M, N, P, de même module, disposées de manière à assurer la liaison de deux rotations autour d'axes parallèles, avec rapport variable des vitesses angulaires. Les roues M et N (fig. 435) sont solidaires des axes o et o' , et la première est excentrée d'une quantité $oC=e$. Pour qu'elle communique son mouvement à la seconde, on emploie une roue intermédiaire P, dont le centre D est maintenu à distance constante des points C et o' par deux tiges rigides CD et Do' . La tige CD est folle à ses deux extrémités sur des axes concentriques aux roues M et P ; la tige Do' est de même folle sur les axes de P et de N, et son articulation avec l'axe D est indépendante de celle de CD.

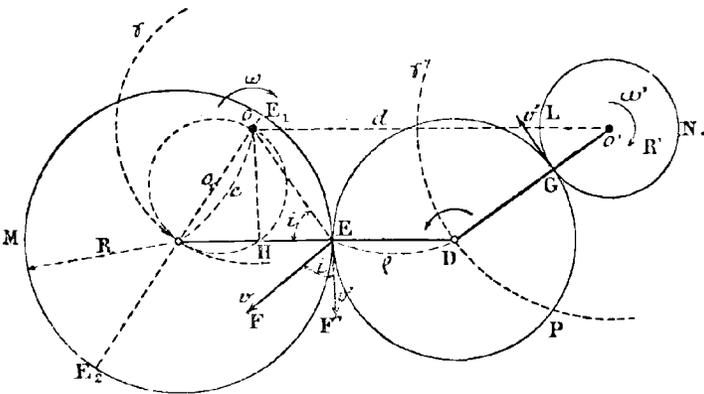


Fig. 435 (*).

Soit ω la vitesse angulaire de l'axe o supposé moteur. La vitesse du point de contact E des roues M et P, dans le mouvement de rotation autour de o , est représentée par un vecteur $EF = v = \omega \times oE$, perpendiculaire à oE . Sa projection

$$v' = EF' = v \cos oEC = \omega \times oE \cos i$$

sur la tangente commune en E aux circonférences M et P mesure la vitesse de tous les points de cette dernière. En l'égalant à la vitesse $\omega'R'$ du point G, on a

$$\omega'R' = \omega \times OE \cos i = \omega \times EH$$

d'où
$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{EH}{R'}$$

On voit de plus que les rotations extrêmes sont de même sens.

Pour étudier la variation du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, il suffit de suivre celle du segment EH pendant un tour de l'arbre moteur. Observons pour cela que le lieu géométrique du

(*) Le lecteur est prié de mettre la lettre C au centre de la roue M.

point H, rapporté à la roue M, est une circonférence o_1 , décrite sur $oC = e$ comme diamètre. En traçant le diamètre E_1oCE_2 , on a

$$\text{mesure } ECE_1 = \text{mesure arc } EE_1$$

$$\text{mesure } oCH = 1/2 \text{ mesure arc } oH$$

Si l'arc EE_1 comprend n degrés, l'arc oH en comprend le double, de sorte que le point H parcourt deux fois la circonférence o_1 pendant que l'arbre moteur fait un tour. Ceci posé, considérons la roue M à l'instant où les directions Co et CD sont confondues; son contact avec P a lieu en E_1 , et le point H se trouve en o . Le rapport des vitesses angulaires est alors

$$\frac{oE_1}{R'} = \frac{R - e}{R'}$$

Quand les directions Co et CD sont opposées, le contact des roues M et P a lieu en E_2 , et le point H est revenu en o . Le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ a donc grandi d'une façon continue, jusqu'à la valeur

$$\frac{oE_2}{R'} = \frac{R + e}{R'}$$

Il décroît ensuite graduellement jusqu'à ce que la roue motrice ait repris sa position initiale, de sorte qu'il présente, à chaque tour de l'arbre o , un minimum $\frac{R - e}{R'}$ et un maximum $\frac{R + e}{R'}$. Il faut remarquer que ces valeurs limites sont atteintes au moment où les directions oC et CD sont confondues ou opposées; comme celles-ci varient à chaque instant, le minimum et le maximum du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ ne sont pas nécessairement séparés l'un de l'autre par une demi-révolution de l'arbre moteur.

467. Dimensions à donner aux diverses parties du système pour que le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ varie entre des limites données k et k' .

Soient $oo' = d$ la distance donnée des axes, et ρ le rayon de la roue parasite P. On a

$$CD = R + \rho$$

$$Do' = R' + \rho$$

et les points C, D se meuvent sur des circonférences γ, γ' , de centres o et o' , et de rayons respectifs e et $R' + \rho$. Les conditions à réaliser sont les suivantes :

1° Les valeurs extrêmes du rapport des vitesses étant données, on doit avoir

$$\frac{R - e}{R'} = k \tag{1}$$

$$\frac{R + e}{R'} = k' \tag{2}$$

2° Le mouvement de l'arbre moteur ayant toujours lieu dans le même sens, oR_2 doit être inférieur à oL (fig. 435) pour que la roue M puisse passer dans l'intervalle qui sépare l'axe o de la roue N (*). On trouve ainsi

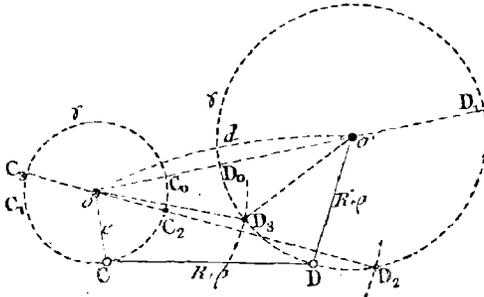


Fig. 436.

$$d - R' > e + R$$

$$\text{ou } d > e + R + R' \quad (3)$$

Cette condition n'est d'ailleurs pas suffisante. Il faut encore qu'un arc de cercle de rayon $CD = R + \rho$, décrit d'un point quelconque de la circonférence γ' comme centre,

rencontre la circonférence γ' , afin que la tige CD puisse se placer. Il suffit évidemment, pour qu'il en soit ainsi, que ceux de ces arcs qui ont pour centres les extrémités C_0 et C_1 (fig. 436) du diamètre oo' coupent γ' , ce qui donne

$$\begin{aligned} \text{(position } C_0) \quad & C_0D_0 \ll R + \rho \ll C_0D_1 \\ \text{et (position } C_1) \quad & C_1D_0 \ll R + \rho \ll C_1D_1 \\ \text{ou} \quad & d - e - R' - \rho \ll R + \rho \ll d - e + R' + \rho \quad (4) \\ \text{et} \quad & d + e - R' - \rho \ll R + \rho \ll d + e + R' + \rho \quad (5) \end{aligned}$$

Afin de chercher dans quelles circonstances ces doubles inégalités sont satisfaites, rangeons leurs membres extrêmes par ordre de grandeur croissante. Plusieurs cas sont à distinguer :

a) Si $e > R' + \rho$, on a

$$d - e - R' - \rho < d - e + R' + \rho < d + e - R' - \rho < d + e + R' + \rho$$

Il est donc impossible de satisfaire à la fois aux relations (4) et (5), et aucun système de valeurs attribuées à e, R, R', ρ ne permet à l'arbre moteur de tourner indéfiniment dans le même sens. Ce cas doit être rejeté.

b) Si $e < R' + \rho$, on a

$$d - e - R' - \rho < d + e - R' - \rho < d - e + R' + \rho < d + e + R' + \rho$$

Les relations (4) et (5) sont satisfaites par toute valeur de $R + \rho$ comprise entre $d + e - R' - \rho$ et $d - e + R' + \rho$, de sorte que, si les deux conditions

$$e < R' + \rho \quad (6)$$

$$\text{et } d + e - R' - \rho \ll R + \rho \ll d - e + R' + \rho \quad (7)$$

sont remplies, la rotation continue de l'arbre moteur est assurée.

(*) Il faudrait modifier légèrement cette condition pour tenir compte des saillies des dents.

c) Si $e = R' + \rho$, les doubles inégalités (4) et (5) ont un membre commun, égal à d , et ne peuvent être satisfaites simultanément que si $R + \rho = d$. Mais, en tenant compte de l'hypothèse $e = R' + \rho$, on a aussi

$$d = e + R - R'$$

ce qui est incompatible avec la condition (3). Ce cas est donc aussi à rejeter.

Nous allons effectuer le calcul en nous plaçant dans la seule hypothèse possible $e < R' + \rho$. L'ensemble des conditions à réaliser est alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R - e}{R'} = h \quad (1) \\ \frac{R + e}{R'} = h' \quad (2) \\ d > e + R + R' \quad (3) \\ e > R' + \rho \quad (6) \\ d + e - R' - \rho \leq R + \rho \leq d - e + R' + \rho \quad (7) \end{array} \right.$$

En ajoutant et en retranchant (1) et (2) membre à membre, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R}{R'} = \frac{h + h'}{2} \\ \frac{e}{R'} = \frac{h' - h}{2} \end{array} \right.$$

d'où
$$R' = \frac{2R}{h + h'} \quad (8)$$

$$e = \frac{(h' - h) R'}{2} = \frac{h' - h}{h' + h} R \quad (9)$$

On tire ensuite de (3)

$$d > \frac{h' - h}{h + h'} R + R + \frac{2R}{h + h'}$$

ou
$$d > \frac{2h' + 2}{h + h'} R \quad (10)$$

En résolvant l'inégalité (6) par rapport à ρ , il vient

$$\rho > e - R' \quad \text{ou} \quad \frac{h' - h - 2}{h + h'} R \quad (11)$$

La première des inégalités (7) donne en outre

$$2\rho \gg d + e - R - R'$$

d'où
$$\rho \gg \frac{d}{2} - \frac{h + 1}{h + h'} R \quad (12)$$

Enfin, on tire de la seconde des inégalités (7)

$$R + \rho \leq d - e + R' + \rho$$

ou
$$d \gg e + R - R'$$

Cette condition est nécessairement satisfaite si l'inégalité (3) est vérifiée. En définitive, les valeurs de R' , e et ρ doivent être exprimées en fonction de d , k et k' , de manière à satisfaire aux conditions (8), (9), (10), (11) et (12)

Application. — Avec les données suivantes :

$$d = 60 \text{ cm} \quad k = 1/2 \quad k' = 3/2$$

on tire de la relation (10), en prenant le centimètre pour unité de longueur

$$60 > \frac{5R}{2} \quad \text{ou} \quad R < 24$$

On prendra, par exemple, $R = 20$. Les relations (8) et (9) donnent alors

$$R' = 20 \quad \text{et} \quad e = 10$$

La relation (11) est satisfaite pour toute valeur positive de ρ , et la relation (12) donne $\rho \gg 15$. En prenant, par exemple, $\rho = 20$, les tiges CD et Do' auront chacune 40 centimètres de longueur.

468. Nature du mouvement de la tige $o'D$.

La condition nécessaire et suffisante pour que cette tige puisse prendre un mouvement de rotation continu est qu'un arc de cercle de rayon $CD = R + \rho$, décrit d'un point quelconque de la circonférence γ' comme centre, rencontre la circonférence γ . Il suffit d'écrire que ces conditions sont remplies pour les extrémités D_0D_1 du diamètre oo' de γ' , ce qui donne

$$\text{(position } D_0) \quad D_0C_0 \ll R + \rho \ll D_0C_1$$

$$\text{(position } D_1) \quad D_1C_0 \ll R + \rho \ll D_1C_1$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} d - e - R' - \rho \ll R + \rho \ll d + e - R' - \rho \\ d - e + R' + \rho \ll R + \rho \ll d + e + R' + \rho \end{cases}$$

Puisque l'on suppose $e < R' + \rho$, l'ordre de grandeur des membres extrêmes est

$$d - e - R' - \rho < d + e - R' - \rho < d - e + R' + \rho < d + e + R' + \rho$$

Les inégalités précédentes ne sont donc jamais satisfaites simultanément, de sorte que le mouvement de la tige $o'D$ est alternatif dans tous les cas.

Les points extrêmes de la course du point D correspondent au maximum et au minimum de oD . Or on a

$$oD \gg CD - oC$$

et

$$oD \ll CD + oC$$

La plus petite valeur de oD est donc $CD - oC$ et la plus grande $CD + oC$. En prenant ces longueurs comme rayons d'arcs de cercle de centre o , on détermine les points cherchés en D_2 et D_3 . Les positions correspondantes de CD sont $C_2 D_2$ et $C_3 D_3$. D'après ce qui précède, ce sont celles qui se rapportent au maximum et au minimum du rapport des vitesses angulaires. On voit que les points C_2 et C_3 ne sont pas diamétralement opposés sur la circonférence γ , ce qui justifie une remarque faite plus haut, d'après laquelle les valeurs limites du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ ne sont pas nécessairement séparées par une demi-révolution de l'arbre moteur.

§ III. — Roues de Rœmer.

469. Ce mécanisme, qui sert à lier les rotations de deux axes parallèles z et z' avec rapport variable des vitesses angulaires, se compose de deux roues coniques égales, disposées en sens inverse, dont les cônes primitifs sont engendrés par une droite SS' joignant des points arbitraires de z et z' . L'un des cônes, soit S , est denté comme une roue ordinaire; l'autre porte une série de pointes, disposées sur des génératrices équi-

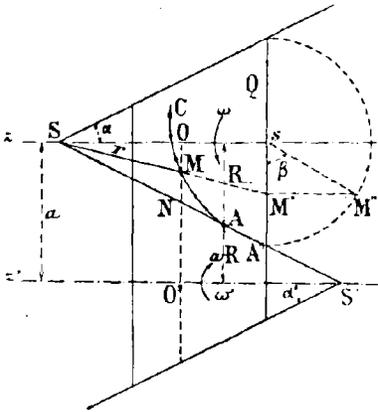


Fig. 437.

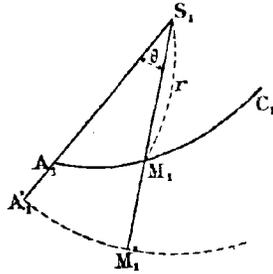


Fig. 438.

distantes, et formant par leur ensemble une courbe C . Quand l'une des pointes, située à une distance R de l'axe z , se trouve dans un creux de la roue S' , le système fonctionne comme un engrenage cylindrique dont les circonférences primitives auraient pour rayons respectifs R et $a - R$, a désignant la distance des axes. Le rapport des vitesses angulaires est alors

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R}{a - R}$$

Sa variation dépendant de celle de R , on peut la produire suivant telle loi qu'on veut, en donnant à la courbe C une forme convenable.

Soient $\omega = f(t)$ et $\omega' = f_1(t)$ les lois données des deux mouvements; la détermination de la courbe C revient à celle de sa transformée C_1 produite par le développement du cône S sur un plan. Nous rapporterons C_1 au système de coordonnées polaires défini par le point S_1 et la droite S_1A_1 (fig. 438) respectivement homologues de S et de SA . Considérons le point M de C qui vient se placer sur SA à un instant quelconque t , et soient r et θ les coordonnées polaires de son homologue M_1 sur S_1 . Le rapport des vitesses angulaires est, à cet instant,

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{f_1(t)}{f(t)} = \frac{ON}{O'N} = \frac{r \sin \alpha}{a - r \sin \alpha}$$

en désignant par α le demi-angle au sommet des cônes. On tire de cette égalité

$$r = \frac{a}{\sin \alpha} \times \frac{f_1(t)}{f(t) + f_1(t)}$$

En prenant pour instant initial celui où la pointe A est en prise, l'angle de rotation β du cône S pendant le temps t mesure le dièdre formé par les plans méridiens des points M

et A. On a construit sa vraie grandeur A'SM'' en rabattant, sur le plan des axes, le plan Q perpendiculaire à z, qui rencontre les génératrices SA et SM aux points projetés en A' et M'. Comme $\omega = \frac{d\beta}{dt}$, on a

$$d\beta = \omega dt = f(t) dt$$

et, par une intégration,

$$\beta = \int_0^t f(t) dt$$

Mais les arcs A'M'' et A'₁M'₁ ayant même longueur d'après une propriété connue des développements de surfaces, on a aussi

$$sA' \times \beta = S_1 A'_1 \times \theta$$

d'où

$$\theta = \frac{sA'}{S_1 A'_1} \times \beta = \sin \alpha \int^t f(t) dt$$

L'élimination de t entre les équations (1) et (2) fait connaître l'équation de la courbe C₁ et permet, par suite, de remonter à la courbe C.

Application de ce principe à un renvoi de transmission à vitesse variable.

Un renvoi de transmission à vitesse variable, basé sur ce principe, est construit par la *R. W. Speed Variator Company*. Un pignon cylindrique P (fig. 439) porte, implantées perpendiculairement à sa surface latérale, des dents coniques équidistantes ; son axe Z est parallèle à une génératrice d'un cône S, dont la surface est percée de trous circulaires, répartis sur une série de circonférences, et régulièrement espacés. Si un mouvement uniforme, de vitesse angulaire ω' , est donné au cône, le pignon P prend un mouvement également uniforme, dont la vitesse angulaire ω est comprise entre les limites extrêmes

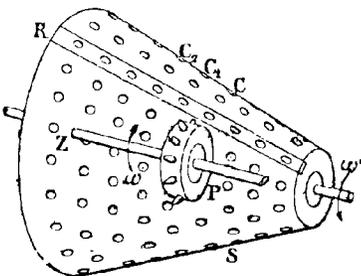


Fig. 439.

$$\omega' \times \frac{n'}{n} \quad \text{et} \quad \omega' \times \frac{n''}{n}$$

n désignant le nombre des dents du pignon, et n', n'' les nombres de trous disposés sur la plus petite et la plus grande circonférence du cône.

Cherchons la loi de distribution des trous qui correspondrait à une série de vitesses croissant en progression arithmétique. La vitesse angulaire du pignon étant proportionnelle au nombre de trous de la rangée qui le commande, celui-ci doit varier suivant la même loi, ainsi que le rayon de la rangée et la distance de son plan au sommet du cône S. D'où il suit que les plans des divers rangs de trous sont équidistants deux à deux.

Les rangées successives ont un élément sur une génératrice du cône S, figurée par une sorte de règle R, qui glisse dans une rainure pratiquée sur la surface. Quand cette génératrice se présente parallèlement à l'axe Z, un mécanisme particulier permet de mouvoir la règle R, dans un sens ou dans l'autre, d'une quantité égale à l'intervalle de deux rangées ; on peut ainsi assurer la transmission par la rangée de trous qui correspond au rapport de vitesses que l'on désire.

§ IV. — *Roue de champ d'Huyghens.*

470. Cet engrenage se compose d'une roue A, dite *roue de champ*, mobile autour d'un axe excentré XX' perpendiculaire à son plan, engrenant avec un long pignon B, dont l'axe YY' rencontre le précédent à l'angle droit (fig. 440). Soient ω et ω' les vitesses angulaires des deux arbres, r le rayon du pignon, R celui de la roue de champ, et e l'excentricité, c'est-à-dire la distance de l'axe XX' au centre o de A. La vitesse du point de contact M est $\omega \times PM$ ou $\omega' r$ suivant qu'on le considère comme entraîné par A ou par B. Comme elle est dirigée, dans les deux cas, suivant la perpendiculaire à PM dans le plan de la roue de champ, on a l'égalité

$$\omega' r = \omega \times PM$$

d'où
$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{PM}{r}$$

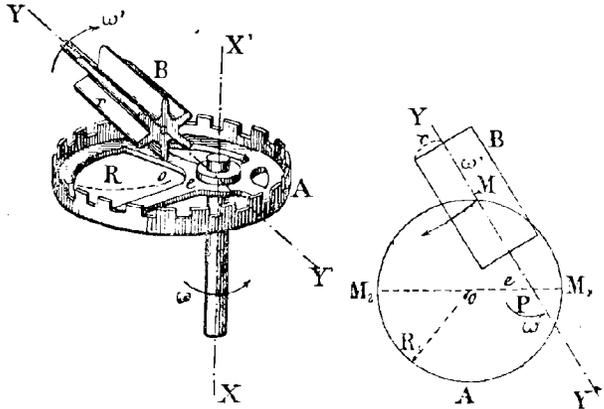


Fig. 440.

On voit que le rapport des vitesses angulaires varie dans le même sens que PM, et que ses valeurs extrêmes sont $\frac{R-e}{r}$ et $\frac{R+e}{r}$ (*). Le maximum se produit quand l'extrémité M_2 du diamètre oP de la roue A vient en contact avec le pignon, et le minimum quand le contact est en M_1 ; l'un et l'autre ont donc lieu au moment où le centre o de la roue de champ passe dans le plan des axes.

§ V. — *Vis à pas variable.*

471. On sait que, si R désigne le rayon d'une vis sans fin, ω sa vitesse angulaire, i l'inclinaison de l'hélice moyenne sur les génératrices du cylindre, ω' la vitesse angulaire du pignon, et R' son rayon, le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ a pour valeur

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R \cotg i}{R'}$$

Sans changer les rayons R et R' , on peut donc modifier le rapport des vitesses en faisant varier l'angle i . En d'autres termes, si l'on remplace chaque spire de l'hélice, d'inclinaison constante i dans le système roue et vis sans fin, par deux segments d'hélices

(*) Quand les axes du pignon et de la roue de champ se coupent, $e = 0$, et les valeurs extrêmes du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ sont égales. Le mécanisme fonctionne alors avec rapport constant des vitesses angulaires. On en trouvera une application dans le Cinémomètre Richard (Chapitre XXIV).

dont les tangentes fassent avec les génératrices du noyau des angles i_1 et i_2 , le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ passe brusquement de la valeur $\frac{R \cotg i_1}{R'}$ à la valeur $\frac{R \cotg i_2}{R'}$, ou inversement.

Ce mécanisme est également employé pour produire un mouvement intermittent du pignon. Si l'on veut donner la même durée aux phases de mouvement et de repos, on conserve les filets inclinés sur une moitié de la vis, et, sur l'autre moitié, on leur substitue des filets perpendiculaires à l'axe. Par suite de cette disposition, le pignon se trouve complètement bloqué dans les périodes de repos, bien que la vis continue son mouvement de rotation.

§ VI. — Secteurs dentés.

472. — En accolant les uns aux autres plusieurs secteurs dentés de même centre et de rayons différents, on forme une roue d'engrenage qui, en agissant sur une autre de même nature, lui communique un mouvement dans lequel le rapport des vitesses change brusquement de valeur, puisqu'il est égal à chaque instant au rapport inverse des rayons des secteurs en prise.

Soit proposé, par exemple, de trouver les éléments de deux roues o et o' satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Pendant un tiers de tour de la roue o , le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ aura une valeur k .

2° Pendant la demi-révolution suivante, il aura la valeur k_1 .

3° Pendant le sixième de révolution restant, il aura la valeur k_2 .

Solent R, R_1, R_2 les rayons des trois secteurs de la roue o , $\theta, \theta_1, \theta_2$ leurs angles au centre, $R', R'_1, R'_2, \theta', \theta'_1, \theta'_2$ les rayons et les angles au centre des secteurs correspondants de la roue o' , et a la distance des axes. Les rayons des deux premiers secteurs satisfont aux relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R}{R'} = k \\ R + R' = a \end{array} \right.$$

Par conséquent

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{ak}{k+1} \\ R' = \frac{a}{k+1} \end{array} \right. \quad (1)$$

De même

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{ak_1}{k_1+1} \\ R'_1 = \frac{a}{k_1+1} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_2 = \frac{ak_2}{k_2+1} \\ R'_2 = \frac{a}{k_2+1} \end{array} \right. \quad (3)$$

Il reste à déterminer les angles au centre. On a déjà, par hypothèse,

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{2\pi}{3} \\ \theta_1 = \pi \\ \theta_2 = \frac{\pi}{3} \end{array} \right. \quad (4)$$

Le fonctionnement du mécanisme n'étant évidemment possible que si les arcs des secteurs conjugués sont d'égale longueur, on a encore

$$\left\{ \begin{array}{l} R\theta = R'\theta' \\ R_1\theta_1 = R'_1\theta'_1 \\ R_2\theta_2 = R'_2\theta'_2 \end{array} \right.$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta' = k\theta \\ \theta'_1 = k_1\theta_1 \\ \theta'_2 = k_2\theta_2 \end{array} \right. \quad (5)$$

La somme des angles au centre de tous les secteurs d'une même roue étant nécessairement égale à 2π , les données $k, k_1, k_2, \theta, \theta_1, \theta_2$ doivent satisfaire aux conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi \\ k\theta + k_1\theta_1 + k_2\theta_2 = 2\pi \end{array} \right. \quad (6)$$

Lorsque celles-ci sont remplies, les formules (1) (2) (3) et (5) déterminent les éléments des deux roues.

Application. — Supposons

$$k = 1, \quad k_1 = 1/2, \quad a = 20\text{ cm}$$

et conservons pour $\theta, \theta_1, \theta_2$ les valeurs ci-dessus. La relation

$$k\theta + k_1\theta_1 + k_2\theta_2 = 2\pi$$

donne

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + k_2 \frac{\pi}{3} = 2\pi$$

d'où l'on tire

$$k_2 = \frac{5}{2}$$

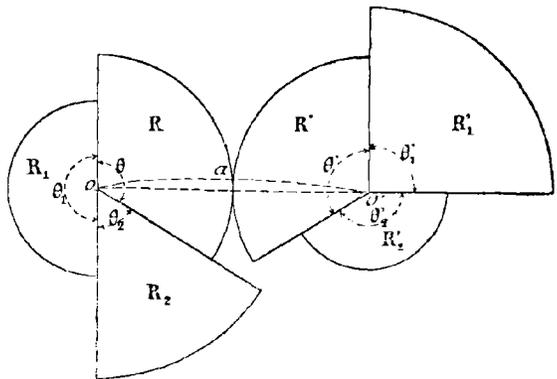


Fig. 441.

On trouve ensuite, en appliquant les formules trouvées précédemment

$$\left\{ \begin{array}{ll} R = 10 \text{ c/m} & \theta = \frac{2\pi}{3} \\ R_1 = -\frac{20 \text{ c/m}}{3} & \theta_1 = \pi \\ R_2 = \frac{100 \text{ c/m}}{7} & \theta_2 = \frac{\pi}{3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} R' = 10 \text{ c/m} & \theta' = \frac{2\pi}{3} \\ R'_1 = -\frac{40 \text{ c/m}}{3} & \theta'_1 = \frac{\pi}{2} \\ R'_2 = \frac{40 \text{ c/m}}{7} & \theta'_2 = \frac{5\pi}{6} \end{array} \right.$$

Ce mode de transmission a l'inconvénient de donner lieu à un choc toutes les fois qu'une paire de secteurs en prise est remplacée par la suivante, à cause de la brusque variation du rapport des vitesses.

§ VII. — Engrenages intermittents.

473. Pour obtenir un engrenage intermittent, il suffit de supprimer la denture sur une portion du périmètre de la roue menante ; la transmission cesse évidemment dès que les arcs dépourvus de dents se présentent sur la ligne des centres.

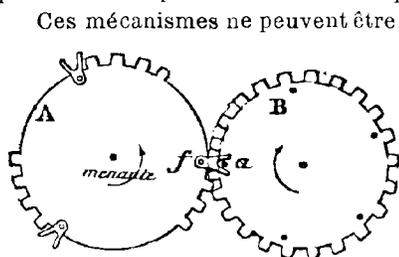


Fig. 442.

Ces mécanismes ne peuvent être employés que pour transmettre de faibles efforts, à cause des chocs qui se produisent à chaque engrenement. De plus, à cause de l'inertie de l'arbre conduit, son mouvement se prolonge un peu après qu'un arc denté de la menante a cessé d'agir, de sorte qu'il pourrait arriver que l'arc suivant ne trouve plus la roue menée dans la position convenable. Pour empêcher cet effet de se produire, on peut placer sur la menante, en avant de chaque arc denté, une fourche telle que *f* (fig. 442) qui saisit après chaque intermit-
tence une cheville *a* disposée sur le pignon conduit, et amène celui-ci à la position rigoureuse qu'il doit occuper. Pour comprendre l'action de ces organes, il suffit d'observer qu'une cheville et la fourche correspondante constituent un engrenage à lan-
terne réduit à une seule dent.

474. Engrenage intermittent des compteurs.

On emploie dans les compteurs un engrenage intermittent analogue au précédent ; la roue A n'a qu'une seule dent, tandis que B en a 10. Dans ces conditions, chaque tour de la menante correspond à un dixième de tour de la menée, de sorte que, si cette dernière porte à son centre une aiguille mobile devant un cadran partagé en 10 parties égales, on peut compter le nombre de tours de l'arbre moteur jusqu'à neuf inclusivement.

Imaginons maintenant que l'on ait monté sur l'axe de la roue B une roue A_1 , identique à A, commandant une roue B_1 identique à B ; à chaque tour de B correspond une rotation de B_1 égale à $\frac{1}{40}$ de tour, de sorte qu'une nouvelle aiguille fixée au centre de B_1 indiquera sur un second cadran divisé les dizaines de tours de l'arbre moteur. Un troisième groupe $A_2 B_2$, identique aux précédents, fera de même connaître les centaines de tours de la roue A, et ainsi de suite.

Il faut remarquer que les rotations de deux aiguilles consécutives sont de sens contraires, ce qui oblige à numérotter les divisions des cadrans correspondants en sens inverse.



DEUXIÈME CLASSE — DEUXIÈME GENRE

MÉCANISMES A LIEN RIGIDE

DANS LESQUELS

LE RAPPORT DES VITESSES EST VARIABLE ET
LE SENS DE LA TRANSMISSION CONSTANT

CHAPITRE XVI

§ I. — *Bielle et manivelles.*

475. Le principe général sur lequel repose ce mode de transmission a été établi au paragraphe 413.

Soient $oA = R$, $o'A' = R'$ les longueurs des manivelles, $AA' = l$ celle de la bielle, $oo' = e$ la distance des axes. Cherchons à déterminer la nature du mouvement de chaque manivelle, suivant les dimensions données aux divers éléments du système. Nous distinguerons plusieurs cas.

476. **Premier cas.** — *Les deux manivelles sont concentriques.*

La bielle et les manivelles forment, dans ce cas, un triangle invariable, et les deux rotations s'accomplissent dans le même sens avec la même vitesse angulaire.

La longueur de la bielle doit être comprise entre $R - R'$ et $R + R'$ pour que le triangle oAA' soit possible.

477. **Deuxième cas.** — *Le centre de la petite manivelle est extérieur à la circonférence décrite par le bouton de la grande.*

Le point o' étant, par hypothèse, extérieur à la circonférence o , on a $e > R$. Nous

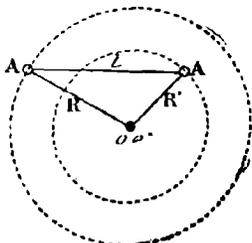


Fig. 413.

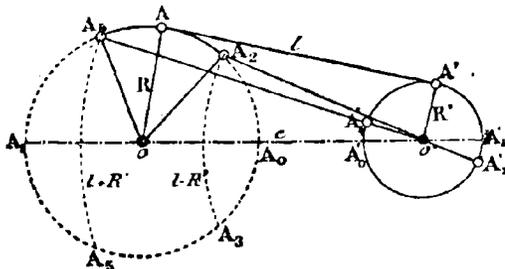


Fig. 444.

supposons en outre que $R > R'$, et que les circonférences o et o' n'ont aucun point commun.

1° *Mouvement de la grande manivelle.*

Pour que le mouvement de la manivelle oA puisse être continu, il est nécessaire et suffisant qu'un arc de cercle de rayon $l = AA'$, décrit d'un point quelconque de la circonférence o pris pour centre, rencontre la circonférence o' . Il suffit évidemment d'écrire que cette condition est remplie pour ceux de ces arcs dont les centres sont les extrémités A_0 et A_1 du diamètre oo' (fig. 444). On a ainsi :

$$(Position A_0) \quad A_0A'_0 \ll l \ll A_0A'_1$$

$$(Position A_1) \quad A_1A'_0 \ll l \ll A_1A'_1$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} e - R - R' \ll l \ll e - R + R' & (1) \\ e + R - R' \ll l \ll e + R + R' & (2) \end{cases}$$

L'ordre de grandeur croissante des membres extrêmes de ces inégalités, qui, dans l'hypothèse $e > R > R'$, est le suivant

$$\begin{array}{cccc} (A_0A'_0) & (A_0A'_1) & (A_1A'_0) & (A_1A'_1) \\ e - R - R' & < e - R + R' & < e + R - R' & < e + R + R' \end{array}$$

montre qu'il est impossible de les satisfaire simultanément. Le mouvement de la grande manivelle est donc nécessairement alternatif.

2° *Mouvement de la petite manivelle.*

Pour que le mouvement de la petite manivelle puisse être continu, il faut et il suffit que les arcs de cercle de rayon l , décrits de A'_0 et A'_1 comme centres, rencontrent la circonférence o , c'est-à-dire que l'on ait

$$(Position A'_0) \quad A'_0A_0 \ll l \ll A'_0A_1$$

$$(Position A'_1) \quad A'_1A_0 \ll l \ll A'_1A_1$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} e - R - R' \ll l \ll e + R - R' & (3) \\ e - R + R' \ll l \ll e + R + R' & (4) \end{cases}$$

L'ordre de grandeur des membres extrêmes étant le même que précédemment, on voit que les inégalités (3) et (4) sont satisfaites si l'on a

$$\begin{array}{ccc} e - R + R' \ll l \ll e + R - R' & (5) \\ (A_0A'_1) & (A_1A'_0) \end{array}$$

Dans ces conditions, le mouvement de la petite manivelle est continu ; si non, il est alternatif.

3° **Discussion.**

a) Si la longueur de la bielle est comprise entre

$$e - R - R' (= A_0A'_0) \quad \text{et} \quad e - R + R' (= A_0A'_1),$$

les inégalités (1) et (3) sont satisfaites, à l'exclusion des inégalités (2) et (4). Les deux manivelles prennent des mouvements alternatifs, dans lesquels elles passent en A_0 et A'_0 , mais non en A_1 et A'_1 (fig. 445). La distance $o'A$ étant au plus égale à $o'A' + AA' = l + R'$, les positions limites A_1A_1 du bouton A se trouvent à l'intersection

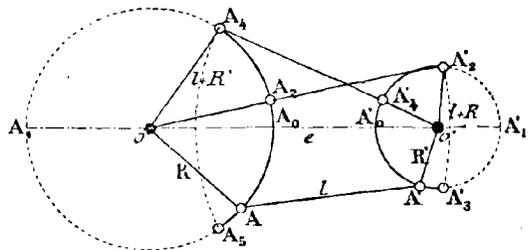


Fig. 445.

de la circonférence o avec un arc de cercle de centre o' et de rayon $l + R'$. Les positions limites $A'_2A'_3$ du bouton A' se trouvent, de même, à la rencontre de la circonférence o' avec un arc de cercle de centre o et de rayon $l + R$.

La relation $o'A_4 = l + R'$ montre que, quand le bouton de la manivelle oA atteint un point limite, la bielle et la manivelle $o'A'$ sont en ligne droite. Soit $oA_4A'_4o'$ une telle position du système. L'axe o étant moteur, il n'y a aucune raison géométrique pour que le point A'_4 se déplace sur l'arc $A'_4A'_2$ plutôt que sur l'arc $A'_4A'_3$. On exprime ce fait en disant que A'_4 est un *point mort* pour la manivelle conduite (*). D'une façon générale, toutes les fois qu'une manivelle prend l'une de ses positions limites, l'autre est à un point mort. Chaque manivelle passe donc par deux points morts, que l'on obtient en joignant son centre aux points limites de l'autre.

b) Si la longueur de la bielle est comprise entre $e - R + R'$ ($= A_0A'_1$) et $e + R - R$ ($= A_1A'_0$), les inégalités (3) et (4) sont satisfaites, à l'exclusion des inégalités (1) et (2). Le mouvement de la petite manivelle est continu, et celui de la grande est alternatif; il s'effectue sur un arc de la circonférence o qui ne contient pas les points A_0 et A_1 (fig. 444). La distance $o'A$ étant au plus égale à $o'A' + A'A = l + R'$ et au moins égale à $A'A - o'A' = l - R'$, les positions limites (A_2 et A_4 ou A_3 et A_5) du bouton A sont situées aux points de rencontre de la circonférence o avec deux arcs de cercle de centre o' et de rayons respectifs $l - R'$ et $l + R'$. Il n'y a pas de points morts pour la grande manivelle, et il y en a deux pour la petite; on les obtient comme précédemment.

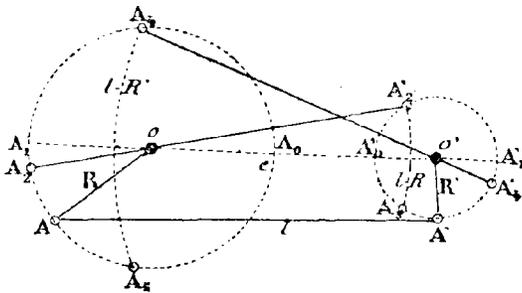


Fig. 446.

c) Enfin, si la longueur de la bielle est comprise entre $e + R - R'$ ($= A_1A'_0$) et $e + R + R'$ ($= A_1A'_1$) les inégalités (2) et (4) sont satisfaites, à l'exclusion des inégalités (1) et (3). Les deux manivelles prennent des mouvements alternatifs, dans lesquels leurs boutons passent en A_1 et A'_1 (fig. 446), et non en A_0 et A'_0 . On détermine les points limites A_1A_3 , $A'_1A'_3$ en dé-

crivant des arcs de cercle de o et o' comme centres, avec des rayons respectivement égaux à $l - R$ et $l - R'$. Il y a deux points morts pour chaque manivelle.

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant :

HYPOTHÈSES $e > R > R'$	MOUVEMENT de la GRANDE MANIVELLE	MOUVEMENT de la PETITE MANIVELLE
$e - R - R' < l < e - R + R'$	<i>Alternatif.</i>	<i>Alternatif.</i>
$e - R + R' < l < e + R - R'$	<i>Alternatif.</i>	<i>Continu.</i>
$e + R - R' < l < e + R + R'$	<i>Alternatif.</i>	<i>Alternatif.</i>

(*) Au moment où une manivelle passe à un point mort ou à un point limite, le rapport des vitesses angulaires est nul ou infini : le mouvement de cette manivelle conserve le même sens dans le premier cas, et change de sens dans le second.

478. Cas particulier où les manivelles sont égales.

Quand $R = R'$, les inégalités (1), (2), (3) et (4) se réduisent aux suivantes

$$e - 2R \ll l \ll e \tag{5}$$

$$e \ll l \ll e + 2R \tag{6}$$

Comme elles sont satisfaites simultanément pour $l = e$, on conclut que les mouvements de deux manivelles égales sont continus quand la bielle qui les unit est égale à la distance des centres, et alternatifs dans tous les autres cas.

La bielle peut recevoir deux dispositions différentes. Dans la première, elle reste parallèle à la ligne des centres, et les manivelles tournent dans le même sens avec la même vitesse angulaire (roues couplées des locomotives — 415). Dans la seconde, la bielle coupe la ligne des centres, et le rapport des vitesses varie à chaque instant. Nous étudierons ce mécanisme un peu plus loin (484).

479. Troisième cas. — *Le centre de la petite manivelle est intérieur à la circonférence décrite par le bouton de la grande, et le centre de cette dernière est extérieur à la circonférence décrite par le bouton de l'autre.*

Le point o' étant, par hypothèse, intérieur à la circonférence o et le point o extérieur à la circonférence o' , on a nécessairement

$$R' < e < R$$

Les circonférences o et o' sont intérieures ou sécantes. Pour fixer les idées, nous les supposons sécantes.

1^o *Mouvement de la grande manivelle.*

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il puisse être continu, obtenues comme au deuxième cas, sont les suivantes :

(Position A_0) $A_0A'_0 \ll l \ll A_0A'_1$

(Position A_1) $A_1A'_1 \ll l \ll A_1A'_0$

ou
$$\left\{ \begin{array}{l} R' - R - e \ll l \ll R' + R - e \\ R + e - R' \ll l \ll R + e + R' \end{array} \right. \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Avec les hypothèses faites plus haut, l'ordre de grandeur croissante des membres extrêmes est

$$(A_0A'_0) \quad (A_0A'_1) \quad (A_1A'_1) \quad (A_1A'_0)$$

$$R' - R + e < R' + R - e < R + e - R' < R + e + R'$$

Il est donc impossible de satisfaire simultanément aux inégalités (7) et (8), de sorte que le mouvement de la grande manivelle est nécessairement alternatif.

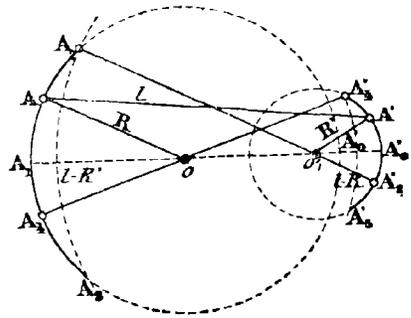


Fig. 417.

2° *Mouvement de la petite manivelle.*

Les conditions de continuité sont :

$$(Position A'_0) \quad A'_0A_0 \ll l \ll A'_0A_1$$

$$(Position A'_1) \quad A'_1A_0 \ll l \ll A'_1A_1$$

$$ou \quad \left\{ \begin{array}{l} R' - R + e \ll l \ll R + e + R' \quad (9) \\ R' + R - e \ll l \ll R + e - R' \quad (10) \end{array} \right.$$

L'ordre de grandeur des membres extrêmes n'ayant pas changé, on voit que, si les inégalités (10) sont satisfaites, les inégalités (9) le sont aussi ; le mouvement de la petite manivelle est continu dans ce cas, et alternatif dans tous les autres.

3° *Discussion.*

a) Si la longueur de la bielle est comprise entre $R' - R - e (= A_0A'_0)$ et $R' + R - e (= A_0A'_1)$ les inégalités (7) et (9) sont satisfaites, à l'exclusion des inégalités (8) et (10). Les deux manivelles prennent des mouvements alternatifs, en passant par $A_0A'_0$ et non par A_1 et A'_1 . Il y a deux points limites et deux points morts pour chaque manivelle ; on détermine les premiers par des arcs de cercle, de rayons respectifs $R - l$ et $l + R'$, décrits de o et o' comme centres (fig. 448).

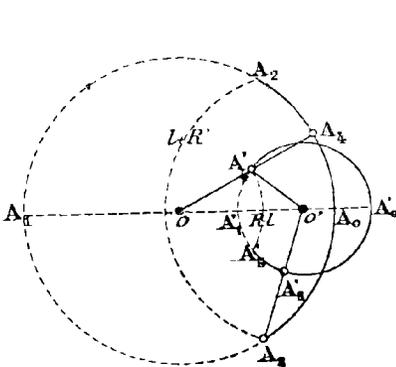


Fig. 448.

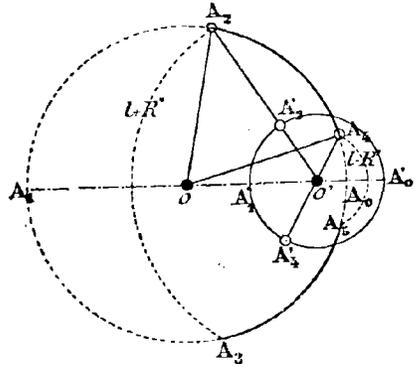


Fig. 449.

b) Si la longueur de la bielle est comprise entre $R' + R - e (= A_0A'_1)$ et $R + e - R' (= A_1A'_1)$, les inégalités (9) et (10) sont satisfaites, à l'exclusion des inégalités (7) et (8). Le mouvement de la petite manivelle est continu, et celui de la grande est alternatif. Ce dernier s'accomplit sur un arc de la circonférence o qui ne contient pas les points A_0 et A_1 (fig. 449). On détermine les positions limites du bouton A en décrivant du centre o' des arcs de cercle de rayons $l - R'$ et $l + R'$. Il y a, dans ce cas, deux points morts pour la petite manivelle seulement.

c) Enfin, si la longueur de la bielle est comprise entre $R + e - R' (= A_1A'_1)$ et $R + e + R' (= A_1A'_0)$, les inégalités (8) et (9) sont satisfaites à l'exclusion des inégalités (7) et (10). Les deux manivelles prennent des mouvements alternatifs, qui laissent passer leurs boutons en A_1 et A_0 , et non en A_0 et A'_1 (fig. 447). Il y a deux points limites et deux points morts pour chaque manivelle ; les premiers sont déterminés par des arcs de cercle de centre o et o' , et de rayons respectifs $l - R'$ et $l - R$.

Le tableau suivant résume cette discussion.

HYPOTHÈSES $R' < e < R$	MOUVEMENT de la GRANDE MANIVELLE	MOUVEMENT de la PETITE MANIVELLE
$R' - R - e \ll l \ll R' + R - e$	<i>Alternatif.</i>	<i>Alternatif.</i>
$R' + R - e \ll l \ll R + e - R'$	<i>Alternatif.</i>	<i>Continu.</i>
$R + e - R' \ll l \ll R + e + R'$	<i>Alternatif.</i>	<i>Alternatif.</i>

480. **Remarque.** — Ce cas ne peut pas se présenter avec deux manivelles égales, l'hypothèse $R' < e < R$, faite au début, étant incompatible avec l'égalité $R = R'$.

481. **Quatrième cas.** — Le centre de chaque manivelle est intérieur à la circonférence décrite par le bouton de l'autre.

On a, dans ce cas

$$e < R' < R$$

et les circonférences o et o' sont intérieures ou sécantes. Pour fixer les idées, nous les supposons sécantes.

1° *Mouvement de la grande manivelle.*

Les conditions de continuité du mouvement de la grande manivelle sont encore exprimées par les inégalités (7) et (8), mais l'ordre de grandeur des membres extrêmes est maintenant

$$(A_0 A'_0) \quad (A_1 A'_1) \quad (A_0 A'_1) \quad (A_1 A'_0)$$

$$R' - R - e < R + e - R' < R' + R - e < R + e + R'$$

Si la longueur de la bielle vérifie la relation

$$(A_1 A'_1) \quad (A_0 A'_1)$$

$$R + e - R' \ll l \ll R' + R - e \quad (11)$$

les inégalités (7) et (8) sont satisfaites, et le mouvement de la grande manivelle est continu. Il est alternatif dans tous les autres cas.

2° *Mouvement de la petite manivelle.*

Les conditions de continuité du mouvement de la petite manivelle sont

$$(Position A'_0) \quad A'_0 A_0 \ll l \ll A'_0 A_1$$

$$(Position A'_1) \quad A'_1 A_1 \ll l \ll A'_1 A_0$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} R' - R - e \ll l \ll R + e + R' \quad (9) \\ R + e - R' \ll l \ll R' + R - e \quad (11) \end{array} \right.$$

L'ordre de grandeur des membres extrêmes étant le même que plus haut, on voit qu'une longueur de bielle satisfaisant aux conditions (11) assure la rotation continue de la petite manivelle. On conclut de là que les deux manivelles prennent constamment des mouvements de même nature.

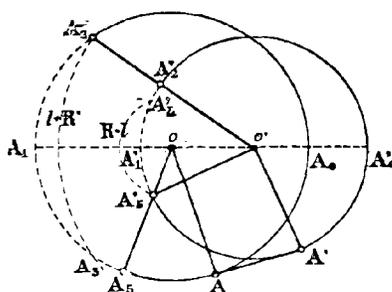


Fig. 450.

3° Discussion.

a) Si la longueur de la bielle est comprise entre $R' - R - e (= A_0 A'_0)$ et $R + e - R' (= A_1 A'_1)$ les inégalités (7) et (9) sont satisfaites à l'exclusion des inégalités (8) et (11). Les deux manivelles prennent des mouvements alternatifs, dans lesquels elles passent en $A_0 A'_0$ et non en $A_1 A'_1$ (fig. 450). La figure indique la détermination des points limites par des arcs de cercle de rayons $l + R'$ et $R - l$, de centres respectifs o et o' .

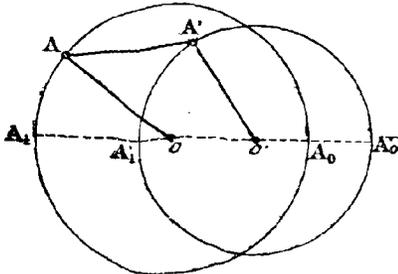


Fig. 451.

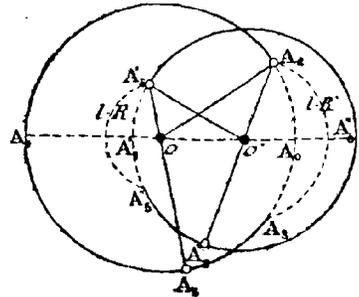


Fig. 452.

b) Si la longueur de la bielle est comprise entre $R + e - R' (= A_1 A'_1)$ et $R' + R - e (= A_0 A'_0)$ les quatre inégalités (7) (8) (9) (11) sont satisfaites, et les deux mouvements sont continus (fig. 451). Il n'existe ni points limites, ni points morts.

c) Enfin, si la longueur de la bielle est comprise entre $R' + R - e (= A_0 A'_0)$ et $R + e + R' (= A_1 A'_1)$ les inégalités (8) et (9) sont satisfaites, à l'exclusion des inégalités (7) et (11). Les deux manivelles prennent des mouvements alternatifs, qui laissent passer leurs boutons en A_1 et A'_0 et non en A_0 et A'_1 (fig. 452). On obtient les points limites en décrivant des arcs de cercle de rayons respectifs $l - R'$ et $l - R$ des points o et o' comme centres.

Le tableau suivant résume cette discussion.

HYPOTHÈSES $e < R' < R$	MOUVEMENT de la GRANDE MANIVELLE	MOUVEMENT de la PETITE MANIVELLE
$R' - R - e \leq l \leq R + e - R'$	<i>Alternatif.</i>	<i>Alternatif.</i>
$R + e - R' \leq l \leq R' + R - e$	<i>Continu.</i>	<i>Continu.</i>
$R' + R - e \leq l \leq R + e + R'$	<i>Alternatif.</i>	<i>Alternatif.</i>

482. Cas particulier où les manivelles sont égales.

Tous les résultats établis dans le quatrième cas sont encore applicables quand $R = R'$; mais les limites entre lesquelles doit être comprise la longueur de la bielle pour que les mouvements soient continus sont e et $2R - e$ (*); en dehors de ces limites, les deux manivelles prennent des mouvements alternatifs.

(*) Comme $e < R$, une bielle égale aux manivelles satisfait à ces conditions. Ce dispositif est employé parfois dans la production de mouvements rectilignes alternatifs à retour rapide.

483. Conséquences de la discussion générale.

Deux manivelles reliées par une bielle invariable ne peuvent prendre des mouvements de rotation continus que dans les trois cas suivants :

- 1° Elles sont concentriques ;
- 2° Elles sont égales, et reliées par une bielle égale à la distance des centres ;
- 3° Elles sont égales ou inégales, mais le centre de chacune d'elles est intérieur à la circonférence décrite par le bouton de l'autre. La longueur de la bielle est comprise entre celles des deux segments $A_1 A_1, A'_0 A_0$, déterminés sur le diamètre de la grande circonférence par l'extrémité du diamètre de la petite qui est la plus rapprochée du centre de la grande.

Dans tous les autres cas, les mécanismes rentrent dans la troisième classe.

484. Manivelles anti-rotatives ou Contre-parallélogramme.

On appelle ainsi le mécanisme constitué par deux manivelles égales, reliées par une bielle égale à la distance des centres, mais non assujettie à lui demeurer parallèle.

Deux cas sont à distinguer :

- 1° Les manivelles sont plus courtes que la bielle.

Le point de rencontre de la bielle et de la ligne des centres est alors situé entre o et o' ; les deux rotations sont de sens contraires, et le rapport de leurs vitesses angulaires, dont l'expression est $\frac{\omega'}{\omega}$, varie à chaque instant (414).

Les deux triangles $oAo, AA'o'$ (fig. 453) ayant leurs côtés égaux chacun à chacun, ainsi que les triangles $oAA', oo'A'$, on a

$$\text{angle } AoI = \text{angle } IA'o'$$

$$\text{angle } oAI = \text{angle } Io'A'$$

ce qui entraîne l'égalité des triangles $oAI, o'A'I$. Par conséquent

$$AI + oI = A'I + o'I = d$$

Il résulte de là que, si l'on considère deux plans superposés à celui de la figure, et invariablement reliés l'un à oA , l'autre à $o'A'$, le point I décrit dans chacun d'eux une ellipse, dont les foyers sont les extrémités de la manivelle correspondante, et dont le grand axe est égal à d . Ces ellipses égales, soient S et S' , sont tangentes en I , puisque les rayons vecteurs qui aboutissent à ce point sont dans le prolongement les uns des autres. Le même fait se reproduisant dans toutes

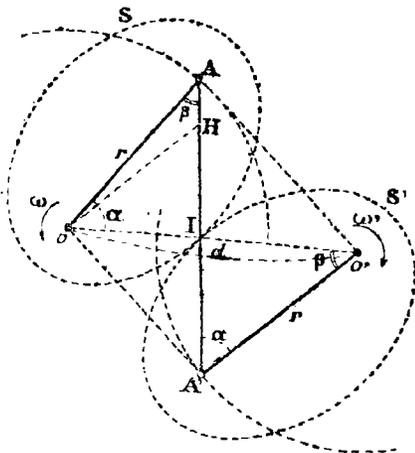


Fig. 453.

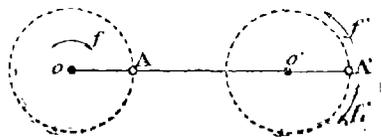


Fig. 454.

les positions du système, on en conclut que : Les manivelles anti-rotatives équiva-

lent au système formé par les ellipses roulanges S et S', supposées solidaires des axes o et o'.

Le rapport des vitesses angulaires varie donc suivant les mêmes lois que dans l'engrenage elliptique. Son maximum et son minimum se présentent quand l'axe focal des ellipses est appliqué sur la ligne des centres, c'est-à-dire quand la manivelle conduite passe à ses points morts ; leurs valeurs respectives sont, d'après les résultats établis au paragraphe 459, $\frac{d+R}{d-R}$ et $\frac{d-R}{d+R}$. Mais, quand le mécanisme a pris cette position, rien n'oblige la manivelle conduite, si l'on ne tient pas compte de l'inertie des pièces, à continuer son mouvement dans le sens f' plutôt que dans le sens f_t (fig. 454). Pour contraindre les rotations des deux arbres à rester de sens contraires, on a imaginé de prolonger chaque manivelle dans les deux sens, jusqu'à ses points d'intersection avec les ellipses fictives S et S'. L'une des extrémités porte un fuseau cylindrique et l'autre une fourche qui constituent deux dents d'un engrenage elliptique à lanterne ; au moment où les manivelles passent à leurs points morts, une fourche et un fuseau entrent en action, et la transmission est assurée dans le sens convenable.

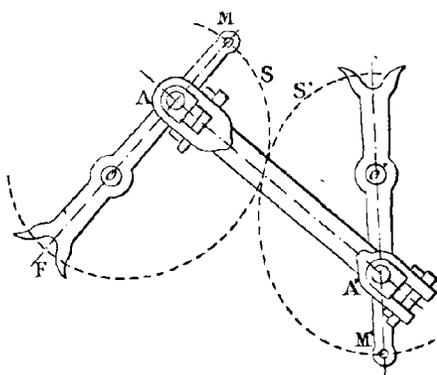


Fig. 455.

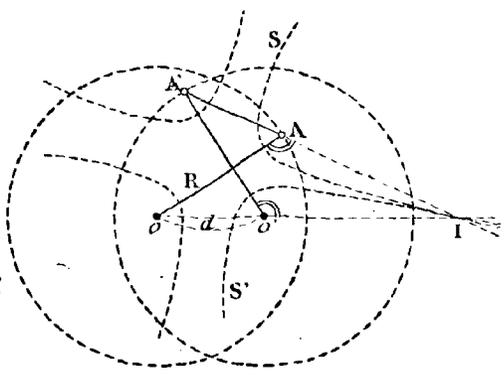


Fig. 456.

Pour déterminer les profils des fourches, on cherche, par la méthode de Poncelet, l'enveloppe de la section droite du fuseau dans le roulement de l'une des ellipses sur l'autre. On peut aussi appliquer le tracé de l'engrenage à lanterne cylindrique en remplaçant S et S' par leurs cercles de courbure.

2° Les manivelles sont plus longues que la bielle.

Le point d'intersection de la bielle et de la ligne des centres est alors sur le prolongement de oo' , et les deux rotations sont de même sens. En procédant comme dans le premier cas, on démontre l'égalité des triangles oAI , $o'A'I$ (fig. 456), d'où il résulte que

$$Io - IA = IA' - Io' = oo' = d$$

Les lieux géométriques du point I, dans les plans mobiles entraînés par les manivelles, sont des hyperboles S et S', tangentes en I, et roulant l'une sur l'autre sans glisser. Le rapport des vitesses est variable, et passe par un maximum et un minimum respectivement égaux à $\frac{R+d}{R-d}$ et $\frac{R-d}{R+d}$ quand la manivelle conduite est à l'un de ses points morts.

485. Lois graphiques du mouvement de la manivelle conduite.

Nous supposons que le mouvement de l'axe moteur o soit uniforme et, pour fixer les idées, nous nous placerons dans le cas du mouvement elliptique. Soient A_0 et A'_0 les origines des espaces; les heures de passage des manivelles en ces points seront prises pour origines des temps.

1° Courbe des espaces.

Partageons la circonférence o (fig. 457) en un nombre quelconque de parties égales, 8 par exemple, à partir de A_0 , et, par des arcs de cercle décrits des points de division

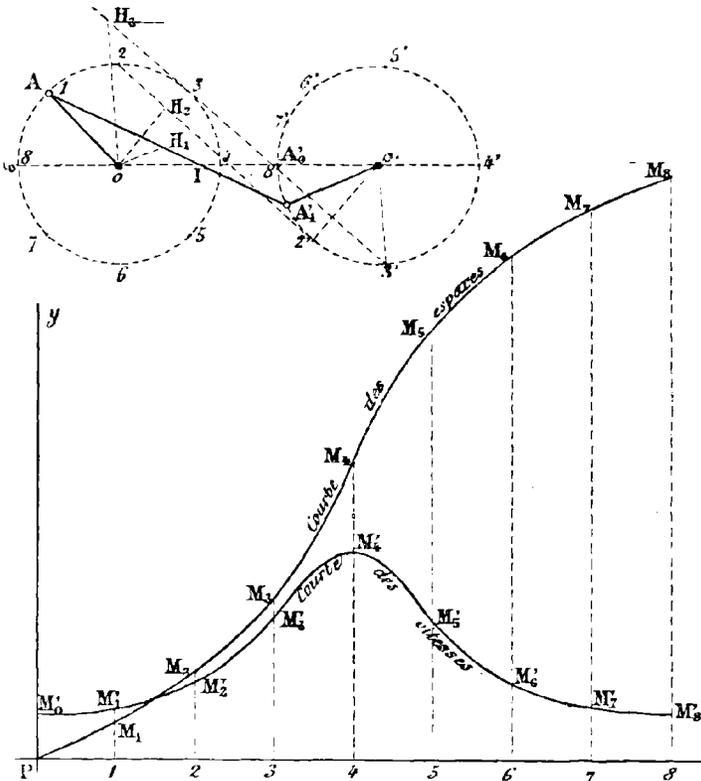


Fig. 457.

comme centres avec la longueur de la bielle pour rayon, déterminons les positions correspondantes de la manivelle $o'A'$. Convenons de représenter la durée d'un tour de oA par la longueur de la circonférence o qui lui est proportionnelle, portée sur l'axe des temps suivant $P8$. En élevant ensuite des ordonnées $1M_1, 2M_2, \dots$ respectivement égales aux arcs $A'_0A'_1, A'_0A'_2, \dots$ qui mesurent les espaces parcourus par le bouton de la manivelle conduite, on obtient la courbe des espaces $PM_1 M_2, \dots$ du mouvement de cette dernière.

2° Courbe des vitesses.

On peut la déduire de la courbe des espaces par les constructions indiquées en *Cinématique théorique*, mais il est plus simple de procéder de la façon suivante

Soit oH_1 la parallèle à $o'A'_1$; à l'instant où le système occupe la position $oA_1 A'_1 o'$, on a

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{oI}{oI} = \frac{oH_1}{o'A'_1}$$

et, en désignant par V' la vitesse linéaire du point A'_1

$$V' = \omega \times o'A'_1 = \omega \times oH_1$$

Cette expression montre que V' est proportionnelle à oH_1 . Si donc on porte, sur les ordonnées de la courbe des espaces, des longueurs $1M'_1, 2M'_2, \dots$ égales aux valeurs successives oH_1, oH_2, \dots du segment oH_1 , on obtient la courbe des vitesses. Elle est symétrique par rapport à l'ordonnée $4M'_4$; les ordonnées maximum et minimum, qui correspondent aux passages de la manivelle conduite à ses points morts, ne sont pas données par la construction générale, puisque les directions oH_1 et $A_1 A'_1$ sont alors confondues. On en détermine les valeurs $\frac{R(d+R)}{d-R}$ et $\frac{R(d-R)}{d+R}$ au moyen des expressions du maximum et du minimum du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$.

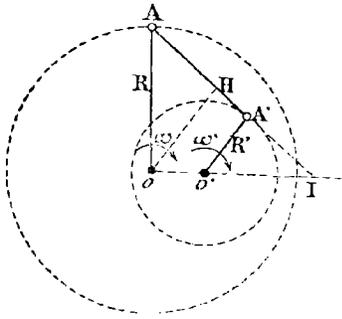


Fig. 458.

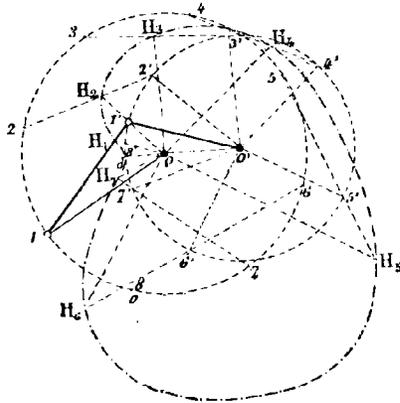


Fig. 459.

486. Système de deux manivelles inégales, dans le cas des rotations continues.

Comme dans le cas précédent, l'expression du rapport des vitesses angulaires est à chaque instant (fig. 458)

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{oI}{oI} = \frac{oH}{o'A'}$$

On procède de la même manière que ci-dessus pour construire les lois graphiques du mouvement de la manivelle conduite, mais la courbe des vitesses n'est plus symétrique, et ses ordonnées maximum et minimum ne sont plus séparées les unes des autres par un intervalle correspondant à une demi-révolution de l'arbre moteur. Les figures 459 et 460 supposent que l'origine des espaces, pour le mouvement de la manivelle conduite, est à l'extrémité $8'$ du diamètre oo' , et que l'instant du passage en ce point est pris pour origine des temps.

Nous reviendrons plus loin sur ce mécanisme, qui est employé pour la production d'un mouvement rectiligne alternatif à retour rapide dans les raboteuses.

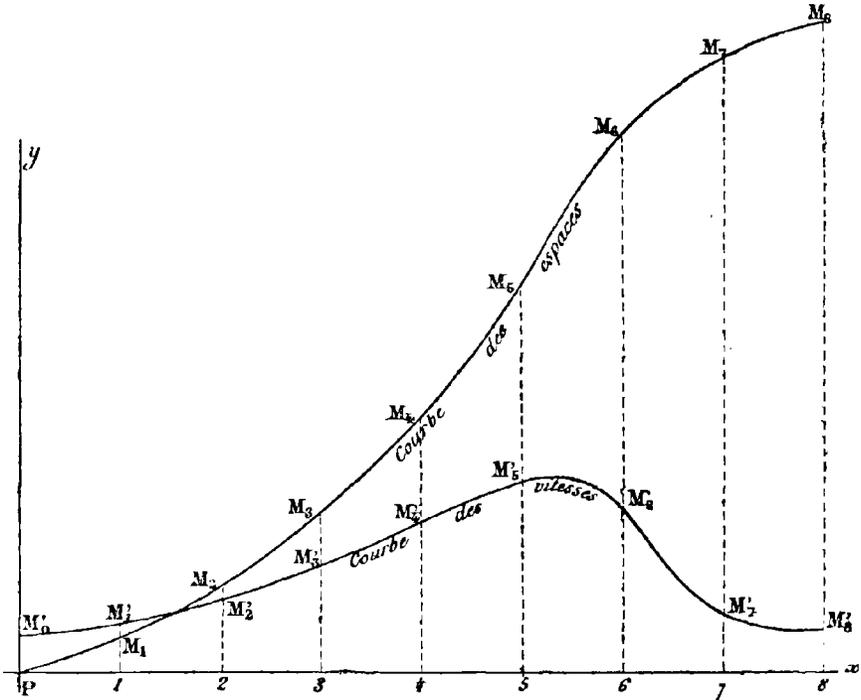


Fig. 460.

487. Poinçonneuse Hanna.

— Le système bielle et manivelle est souvent employé pour équilibrer, avec une force motrice relativement petite, une résistance considérable. Le rapport des vitesses angulaires des manivelles, dont

l'expression générale est $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{IO}{IO'}$

(413), s'annule quand la manivelle oA passe à l'un de ses points morts, et reste très petit pour toutes les positions voisines. Si l'on admet le principe des vitesses virtuelles déjà énoncé précédemment, on conçoit donc qu'une force donnée, appliquée à la manivelle oA , équilibrera, sur la manivelle $o'A'$, une résistance d'autant plus grande que la bielle AA' sera plus près d'être en ligne droite avec oA . Cette observation est appliquée dans un grand nombre de machines où l'on doit vaincre des résistances

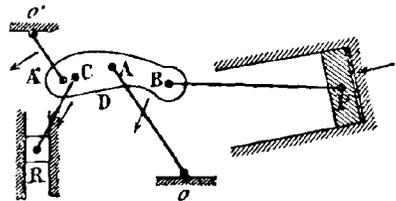


Fig. 461.

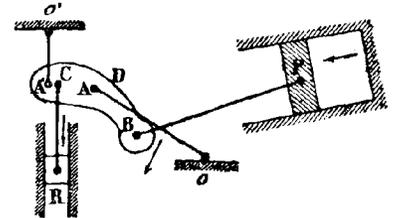


Fig. 462.

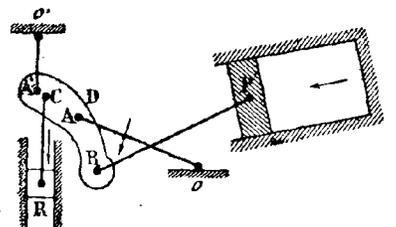


Fig. 463.

considérables. Les figures 461, 462, 463, représentent, schématiquement, le mécanisme de la poinçonneuse pneumatique Hanna. Une pièce rigide D, articulée en A et A' aux leviers oA, o'A' mobiles autour des points fixes o et o' du bâti, transmet à une tige CR, commandant le riveur R, le mouvement qu'elle reçoit du piston P par la tige PB. Les proportions des organes sont déterminées de telle sorte que, à l'instant où le piston P est presque à l'extrémité de sa course, les points o, A et A' soient sensiblement en ligne droite. Un effort très puissant est alors exercé par l'outil sur la tête du rivet.

§ II. — Manivelle à coulisse.

488. Ce mécanisme, formé d'une manivelle ordinaire oA, dont le bouton s'engage dans une coulisse o'A' (fig. 464), sert à lier deux mouvements de rotation qui s'effectuent autour des axes parallèles o et o'. Il rentre dans les appareils à contact direct, mais nous l'avons placé ici à cause de son analogie avec le système bielle et manivelles. Pour en exposer la théorie, nous distinguerons quatre cas.

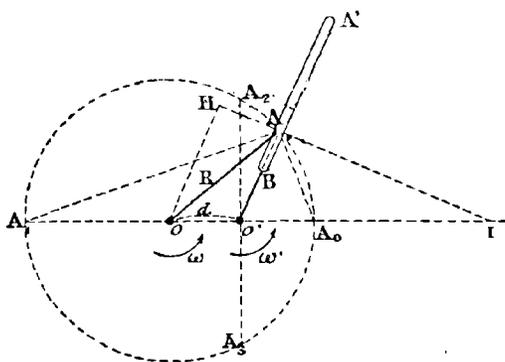


Fig. 464.

489. **Premier cas.** — La distance des centres est inférieure au rayon de la manivelle.

Soient R la longueur de la manivelle oA, ω sa vitesse angulaire à un instant quelconque, ω' celle de la coulisse et d la distance des axes.

La seule condition de continuité du mouvement est que la coulisse puisse contenir les points A₀ et A₁ ; il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$o'B \leq R - d$$

$$o'A' \geq R + d$$

1° Rapport des vitesses.

La perpendiculaire AI à la coulisse est la normale commune aux surfaces en contact ; on a, par conséquent (453)

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{oI}{o'I}$$

Les positions respectives des angles droits A₀AA₁, o'AI montrent que le point I est toujours extérieur au diamètre A₀A₁, et, a fortiori, au segment oo'. Les deux mouvements de rotation sont donc de même sens.

Quand la manivelle part de la position oA₀, I est en A₀, et le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ a pour valeur $\frac{oA_0}{o'A_0} = \frac{R}{R-d}$. Le mouvement s'effectuant dans le sens indiqué, le point I

s'éloigne vers la droite, et le rapport des vitesses décroît (*). Il devient égal à l'unité quand la coulisse est perpendiculaire à la ligne des centres, puisque le point I est alors rejeté à l'infini. A partir de cet instant, qui correspond à la position oA_2 de la manivelle, le point I passe à gauche de A_1 , et le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ continue à décroître, jusqu'à la valeur $\frac{oA_1}{o'A_1} = \frac{R}{R+d}$ qu'il prend à la fin de la première demi-révolution du système. Les mêmes variations se reproduisent dans l'ordre inverse pendant la demi-révolution suivante. En résumé :

Le rapport des vitesses angulaires varie d'une manière continue entre le maximum $\frac{R}{R-d}$ et le minimum $\frac{R}{R+d}$; il est égal à l'unité quand la coulisse est perpendiculaire à la ligne des centres.

2° *Vitesse relative de glissement.*

La vitesse de glissement v_g du bouton A dans la coulisse est (453)

$$v_g = (\omega' - \omega) \times AI$$

ou
$$v_g = \omega \left(\frac{\omega'}{\omega} - 1 \right) \times AI = \omega \left(\frac{oI}{o'I} - 1 \right) \times AI = \omega \times oo' \times \frac{AI}{o'I}$$

Mais en abaissant la perpendiculaire oH sur AI , il vient

$$\frac{AI}{o'I} = \frac{AH}{oo'}$$

Par conséquent

$$v_g = \omega \times oo' \times \frac{AH}{oo'} = \omega \times AH$$

On voit que, si le mouvement de la manivelle oA est uniforme, la vitesse de glissement du point A dans la coulisse est proportionnelle à AH . Elle est nulle aux points A_0 et A_1 , et prend sa valeur maximum ωd quand la coulisse est perpendiculaire à la ligne des centres; elle change de sens à chaque demi-révolution du système, comptée à partir de la position oA_0 .

490. Deuxième cas. — *La distance des centres est supérieure au rayon de la manivelle.*

Les positions extrêmes de la coulisse sont les tangentes $o'A_2, o'A_3$, menées de son centre à la circonférence décrite par le bouton de la manivelle (fig. 466). Quant à celle-ci, la seule condition de continuité de son mouvement est que la coulisse puisse contenir les points A_0 et A_1 ; il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$o'B \ll d - R$$

$$o'A' \gg d + R.$$

(*) On sait que la valeur absolue du rapport $\frac{MA}{MB}$ décroît de l'unité à zéro, puis croît de zéro à l'infini, et enfin décroît jusqu'à l'unité, quand le point M se déplace dans le sens de la flèche, de l'infini à A, puis de A à B, puis de B à l'infini.

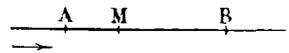


Fig. 465.

Comme dans le cas précédent, on a $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{oI}{o'I}$. Quand la manivelle est dans la

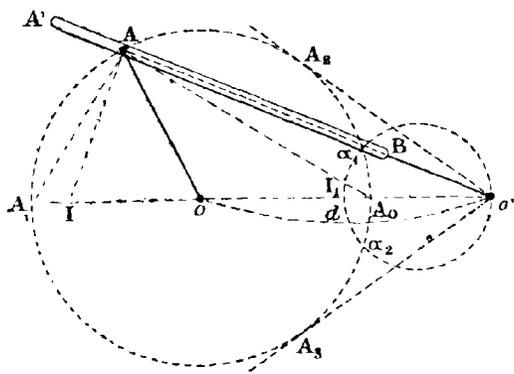


Fig. 466.

position oA_0 , le point I est en A_0 , et les deux rotations sont de sens contraires ; le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est égal à $\frac{oA_0}{o'A_0} = \frac{R}{d-R}$. Pendant que le point A parcourt l'arc $A_0 A_2$, le point I se déplace de A_0 en o , et $\frac{\omega'}{\omega}$ décroît, puis s'annule quand la coulisse prend la position $o'A_2$. Le point I venant ensuite se placer entre o et A_1 , les rotations deviennent de même sens, et le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ croît jusqu'à la valeur

limite $\frac{oA_1}{o'A_1} = \frac{R}{d+R}$, qu'il atteint quand la manivelle motrice est en oA_1 . Les mêmes variations se produisent dans l'ordre inverse pendant la seconde demi-révolution du système. En résumé :

Pendant que le point A parcourt l'arc $A_3 A_0 A_2$, les rotations sont de sens contraires, et le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, nul aux deux extrémités de la course, prend, en A_0 , la valeur $\frac{R}{d-R}$, qui correspond à un minimum si l'on regarde ω et ω' comme des grandeurs algébriques de signes contraires.

Pendant que le point A parcourt l'arc $A_2 A_1 A_3$, les rotations sont de même sens, et le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, nul aux deux extrémités de la course, prend, en A_1 , la valeur $\frac{R}{d+R}$, qui correspond à un maximum.

L'expression de la vitesse relative de glissement du bouton A dans la coulisse est la même que précédemment.

491. Remarque. — Les vitesses angulaires de la manivelle et de la coulisse sont égales quand le point I se trouve au milieu I_1 de oo' . Ce fait ne peut se produire que si $d \leq 2R$, puisque la disposition des angles droits $A_0 AA_1$, $o'AI$ montre que le point I est toujours situé sur le segment $A_0 A_1$. Les positions correspondantes α_1 et α_2 du point A sont à l'intersection de la circonférence o et d'une circonférence décrite sur $o'I_1$ comme diamètre.

492. Troisième cas. — *Le centre de la manivelle est rejeté à l'infini.*

Si l'on suppose le centre de la manivelle indéfiniment éloigné dans une direction oo' , la trajectoire du point A devient une droite ZZ' perpendiculaire à oo' (fig. 467). Le mécanisme se réduit alors à une tige CD, maintenue par des guides dans la direction ZZ' , et solidaire d'un bouton A qui s'engage dans la coulisse $o'A'$. Il réalise la liaison d'une rotation autour de l'axe o' , et d'une translation parallèle à ZZ' . Le mouvement du système CAD n'est pas géométriquement limité, car on peut supposer une coulisse de longueur infinie ; au contraire, l'amplitude de la rotation ne peut pas dépasser 180° . Pratiquement, les deux mouvements sont alternatifs.

En désignant par V la vitesse de CD , et en conservant pour le reste les notations précédentes, on a, par application des résultats établis au paragraphe 245 :

$$V = \omega' \times o'I$$

et

$$v_g = \omega' \times AI$$

On voit que, pour une valeur donnée de ω' , V et v_g croissent à mesure que la coulisse s'écarte de la position $o'R$; pour cette position particulière, $v_g = 0$ et V prend sa valeur minimum $\omega' \times o'K$.

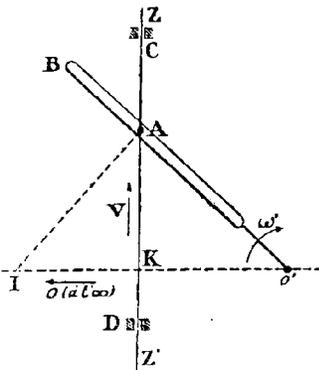


Fig. 467.

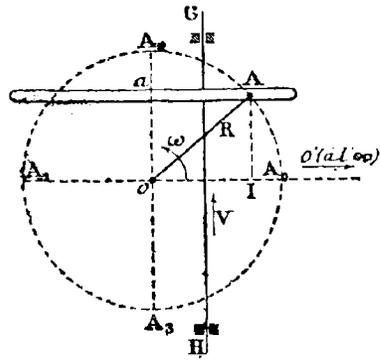


Fig. 468.

493. Quatrième cas. — *Le centre de rotation de la coulisse est rejeté à l'infini.*

La coulisse est rendue solidaire d'une tige guidée GHI perpendiculaire à oo' (fig. 468), et le mécanisme transforme la rotation continue de la manivelle oA en un mouvement rectiligne alternatif (*).

En conservant les notations du troisième cas, on a

$$V = \omega \times oI$$

$$V_g = \omega \times AI$$

La première de ces relations permet d'étudier le mouvement de translation de la coulisse, dont la vitesse, si l'on suppose que la manivelle tourne d'un mouvement uniforme, est proportionnelle à oI . Mais il est plus simple d'observer que la coulisse se meut suivant les mêmes lois que la projection du point A sur le diamètre $A_2 A_3$ de la circonférence o ; ce dernier mouvement a été étudié en *Cinématique théorique*.

L'expression $v_g = \omega \times AI$ montre que la vitesse de glissement du bouton dans la coulisse, s'annule en A_0 et A_1 , et devient maximum en A_2 et A_3 .

(*) Ce mécanisme peut être employé pour produire le mouvement rectiligne alternatif du coulisseau des étaux-limeurs. On en trouvera un exemple plus loin, dans la description de la machine Gibson à raboter les engrenages coniques (Chapitre XXVI).

494. **Remarque.** — Les mécanismes étudiés dans les trois derniers cas appartiennent à la troisième classe.

§ III. — *Joint universel.*

495. Le joint universel a pour but, deux axes oZ , oZ' dont l'angle est variable étant donnés, de lier leurs rotations de telle manière que leurs vitesses angulaires moyennes pendant un tour soient égales.

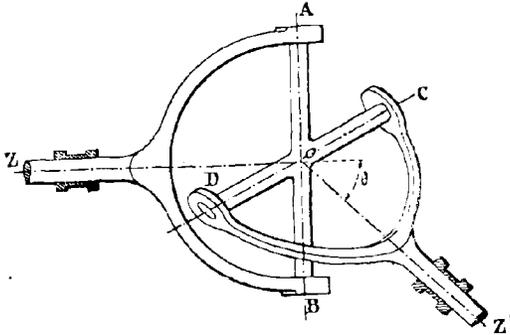


Fig. 469.

A cet effet, les arbres sont terminés par des fourches demi-circulaires égales, situées sur une sphère de centre o , et percées d'œilletons à leurs extrémités; leur liaison est assurée par un croisillon ABCD, dont les branches, qui sont perpendiculaires entre elles et aux axes correspondants, pivotent dans des œilletons placés aux extrémités des fourches.

Pendant le fonctionnement du système, les points A et B, C et D décrivent sur la sphère o deux grands cercles, dont les plans, respectivement perpendiculaires aux axes, forment des angles égaux à ZoZ' ou à son supplément θ (fig. 470). De plus, l'arc de grand cercle BC, qui joint les extrémités de deux branches consécutives du croisillon, est toujours égal à un quadrant.

Au point de vue géométrique, le mécanisme peut donc être réduit aux manivelles F , F' et à la bielle BC, égales chacune à un quart de grand cercle. Son étude se ramène à celle du mouvement de l'arc BC, dont les extrémités décrivent les grands cercles AA_0BB_0 et CB_0DA_0 . Prenons pour instant initial celui où la branche AB du croisillon coïncide avec l'intersection A_0B_0 de ces grands cercles. La bielle fictive occupe alors la position B_0C_0 , et ses extrémités parcourent, jusqu'à l'instant quelconque t où elle est venue en BC, les arcs $B_0B = x$, $C_0C = y$ qui, évalués en prenant comme unité le rayon de la sphère, mesurent respectivement les angles de rotation des fourches. En désignant par ω et ω' les vitesses angulaires des deux arbres à l'instant t , on a donc

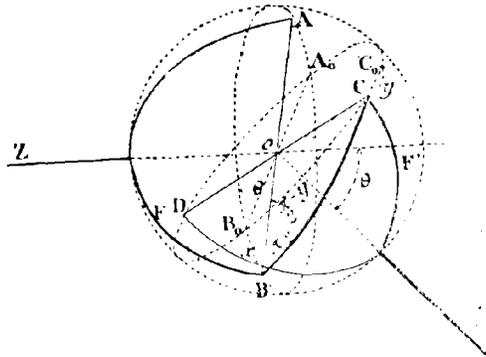


Fig. 470.

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{dx}{dt} \\ \omega' &= \frac{dy}{dt} \end{aligned} \right\}$$

D'autre part, la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique (*) appliquée au triangle BB₀C donne la relation

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos x \cos \left(\frac{\pi}{2} - y \right) + \sin x \sin \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \cos (\pi - \theta)$$

d'où l'on tire $\cos x \sin y = \sin x \cos y \cos \theta$

ou $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x \cos \theta$

En égalant les dérivées des deux membres de cette équation, prises par rapport à t , il vient

$$\frac{1}{\cos^2 y} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{dt} \cos \theta$$

ou $\frac{\omega'}{\cos^2 y} = \frac{\omega \cos \theta}{\cos^2 x}$

d'où enfin $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\cos \theta \cos^2 y}{\cos^2 x}$

Mais on a aussi $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x \cos^2 \theta}$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\omega'}{\omega} &= \frac{\cos \theta}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x \cos^2 \theta)} = \frac{\cos \theta}{\cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 x \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

496. Variations du rapport des vitesses angulaires pendant un tour.

Le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ n'est pas constant, puisqu'il dépend de $\sin x$. Sa valeur à l'instant initial, qui correspond à $x = 0$, est $\cos \theta$. Pendant que l'arbre moteur fait son premier

(*) Avec les notations habituelles de la Trigonométrie, cette formule est

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Pour la démontrer, menons les tangentes en A aux côtés AB et AC, jusqu'à leur rencontre avec les rayons oB et oC. Les triangles ADE, oDE donnent

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2AD \times AE \cos A = \overline{oD}^2 + \overline{oE}^2 - 2oD \times oE \cos a$$

Mais $AD = R \operatorname{tg} c$, $AE = R \operatorname{tg} b$, $oD = \frac{R}{\cos c}$, $oE = \frac{R}{\cos b}$

En remplaçant ci-dessus, il vient

$$\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2 \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos A = \frac{1}{\cos^2 b} + \frac{1}{\cos^2 c} - \frac{2 \cos a}{\cos b \cos c}$$

ou

$$\frac{2 \cos a}{\cos b \cos c} - \frac{2 \sin b \sin c \cos A}{\cos b \cos c} = \frac{1}{\cos^2 b} + \frac{1}{\cos^2 c} - \frac{\sin^2 b}{\cos^2 b} - \frac{\sin^2 c}{\cos^2 c} = 2$$

Il ne reste plus qu'à multiplier les membres extrêmes par $\frac{\cos b \cos c}{2}$, et à transposer les termes, pour trouver la formule indiquée.

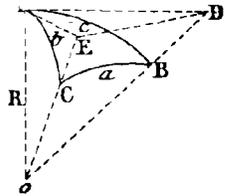


Fig. 471.

quart de tour, la quantité $1 - \sin^2 x \sin^2 \theta$ décroît entre les limites 1 et $\cos^2 \theta$, et le rapport des vitesses croît jusqu'à la valeur $\frac{1}{\cos \theta}$, qu'il atteint pour $x = \frac{\pi}{2}$.

Pendant le second quart de tour, $1 - \sin^2 x \sin^2 \theta$ croît entre les limites $\cos^2 \theta$ et 1, et $\frac{\omega'}{\omega}$ décroît jusqu'à la valeur $\cos \theta$, qui correspond à $x = \pi$. Les mêmes variations se reproduisent dans l'ordre inverse pendant la demi-révolution suivante. Donc :

Pendant chaque quart de tour de l'arbre moteur, le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ varie d'une manière continue de $\cos \theta$ à $\frac{1}{\cos \theta}$, ou inversement.

Ces variations sont d'autant moins prononcées que l'angle θ est plus petit. En particulier, si $\theta = 0$, $\frac{\omega'}{\omega}$ reste constamment égal à l'unité; les deux arbres, qui sont alors dans le prolongement l'un de l'autre, tournent avec la même vitesse.

Quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'une des valeurs extrêmes du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est nulle, et l'autre est infinie. En supposant que l'arbre moteur tourne d'un mouvement uniforme, la vitesse de l'arbre mené devrait donc passer de zéro à l'infini, ou inversement, pendant un quart de tour, ce qui est absurde. La transmission est impossible dans ce cas. Admettons, en effet, que le plan de la figure soit celui de la fourche F (fig. 472), et que l'axe Z' lui soit perpendiculaire. Il est évident que l'effort développé par la branche AB du

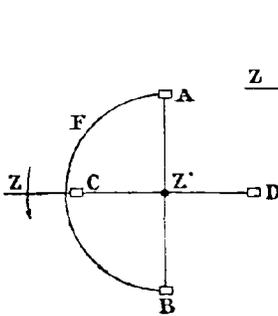


Fig. 472.

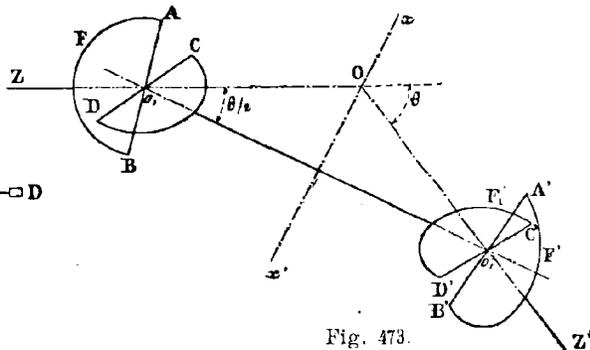


Fig. 473.

croisillon, pour faire tourner l'arbre Z', s'exerce dans le plan qu'elle détermine avec lui, et se trouve détruit par la résistance des paliers.

Pratiquement, la transmission ne se fait convenablement que si θ ne dépasse pas 45° , c'est-à-dire si les axes forment un angle obtus au moins égal à 135° . Les limites du rapport des vitesses sont alors $\sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

497. Double joint de Hooke.

Lorsque l'angle des axes est inférieur à 135° , on emploie un axe auxiliaire qui coupe les premiers sous un angle plus grand, et on le relie à chacun d'eux par un joint universel. Dans la disposition imaginée par Hooke, le second joint corrige les variations du rapport des vitesses qui résultent de l'action du premier. Voici en quoi elle consiste.

L'axe intermédiaire $o_1o'_1$ (fig. 473) joint deux points des axes primitifs équidistants de leur intersection O, et les fourches qui en sont solidaires sont situées dans un même plan. Les barres Co_1D , $C'o'_1D'$ sont donc parallèles; nous allons montrer de

plus que le mécanisme reste constamment symétrique par rapport au plan xx' perpendiculaire au milieu de $o_1o'_1$. Ce fait est évident pour les deux parties de l'axe $o_1o'_1$, les fourches qui le terminent, les barres Co_1D , $C'o'_1D'$ et les axes Z et Z' ; il suffit donc de l'établir pour les barres AB et $A'B'$. La première est l'intersection de deux plans α et β , respectivement perpendiculaires en o_1 aux droites Z et CD , et la seconde est l'intersection de deux plans α' et β' , respectivement perpendiculaires en o'_1 à Z' et $C'D'$ (fig. 474). Les plans α et α' , perpendiculaires aux extrémités des segments symétriques oo_1 , oo'_1 , sont eux-mêmes symétriques par rapport au plan xx' . Les plans β et β' , qui contiennent $o_1o'_1$, sont perpendiculaires au plan xx' , et se confondent à cause du parallélisme des barres CD , $C'D'$; leurs lignes d'intersection TAB , $TA'B'$ avec les précédents sont donc symétriques par rapport au plan xx' .

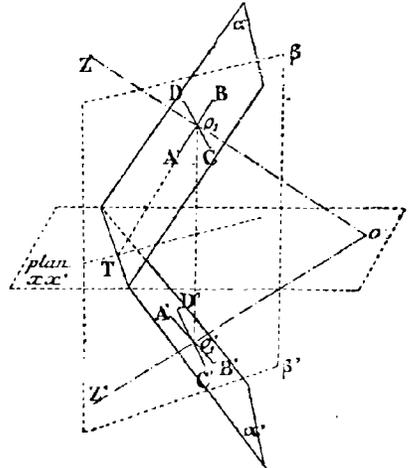


Fig. 474.

On conclut de là que, si l'axe Z et la barre AB qui en est solidaire tournent d'un certain angle, la barre $A'B'$ et l'axe Z' tournent d'un angle égal pendant le même temps ; le rapport des vitesses angulaires des deux arbres est donc constamment égal à l'unité.

Ce mécanisme peut être appliqué à la transmission de mouvement entre axes perpendiculaires ; car si $\theta = 90^\circ$, les angles que forme l'axe intermédiaire avec chacun des premiers sont égaux à 45° , et les joints universels placés à ses extrémités se trouvent dans de bonnes conditions de fonctionnement.

498. Assemblage à la Cardan.

La théorie du double joint de Hooke subsiste quelle que soit la longueur de l'arbre intermédiaire. Si on la suppose nulle, les barres des fourches correspondantes se confondent en une seule CoD (fig. 475), qui passe par le point de concours des axes

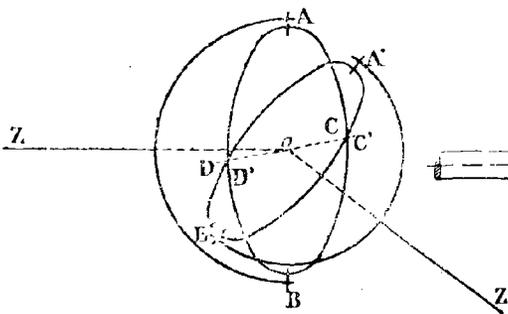


Fig. 475.

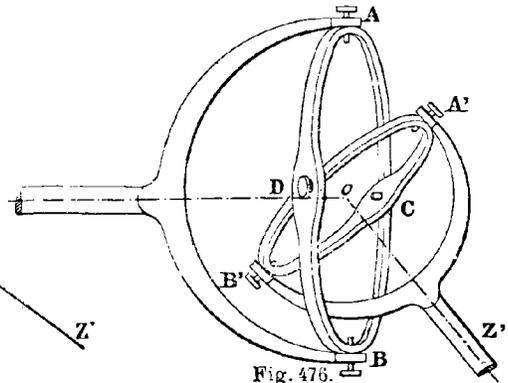


Fig. 476.

primitifs. Le mécanisme se réduit alors aux parties ci-dessous, dont chacune doit être invariablement reliée à celle qui la suit :

- 1° A la fourche terminale de l'arbre Z avec sa barre AB ;
- 2° A la barre CoD qui représente l'arbre intermédiaire ;
- 3° A la fourche terminale de l'arbre Z' avec sa barre $A'B'$.

Pour assurer la liaison des barres AB et CD , on emploie un anneau rigide $ADBC$,

mobile autour de son diamètre AB, et pourvu de deux pivots C et D qui déterminent un nouveau diamètre perpendiculaire au précédent. La liaison entre les barres CD et A'B' est de même assurée par un second anneau A'CB'D, mobile autour de son diamètre A'B', et percé, aux extrémités du diamètre perpendiculaire, de deux œillets dans lesquels s'engagent les pivots C et D. Tous les organes du double joint de Hooke sont ainsi remplacés par d'autres de formes différentes, mais jouant le même rôle, de sorte que la transmission a lieu avec conservation de la vitesse angulaire de l'arbre menant. Les rayons des fourches et des anneaux sont un peu différents, pour que les parties successives du mécanisme puissent passer librement les unes dans les autres. L'anneau A'CB'D passe dans le creux de la seconde fourche, qui évolue dans l'intérieur de l'anneau ACBD, et celui-ci passe à son tour dans le creux de la première fourche.

Ce mécanisme constitue le joint de Cardan. Outre son usage dans les transmissions de mouvement, on l'emploie, réduit aux anneaux AB, A'B', pour suspendre des objets, tels que les boussoles des navires, que l'on veut maintenir dans un plan invariable malgré les oscillations de leurs supports.

499. Joint Clémens.

Ce mécanisme sert, comme le double joint de Hooke et le Cardan, à lier deux mouvements de rotation autour d'axes concourants dont l'angle est variable, avec égalité des vitesses angulaires.

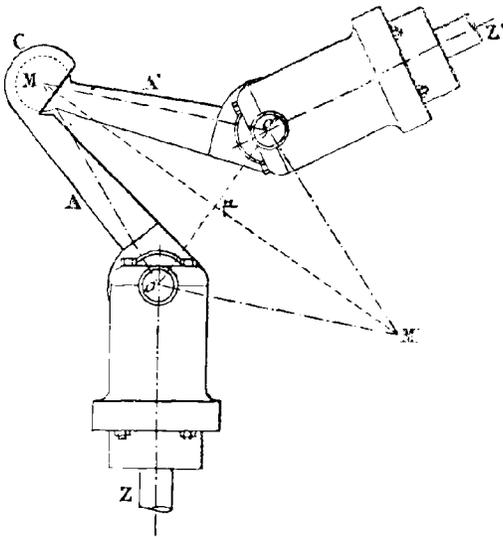


Fig. 477.

Les arbres Z et Z' (fig. 477) portent, à égale distance de leur point d'intersection, des coussinets dans lesquels tournent des tourillons o et o' , solidaires de deux bras rigides A et A'. L'un des bras est terminé par une sphère pleine de centre M, et l'autre par une sphère creuse qui emboîte la précédente. Deux autres bras, non représentés sur la figure, sont symétriques des précédents par rapport à oo' , et forment avec eux un losange. Quand l'axe Z se met en mouvement, le triangle indéformable oMo' tourne autour de son côté fixe oo' , et les bras A et A', ainsi que les axes géométriques de leurs tourillons, sont à chaque instant symétriques par rapport au plan perpendiculaire au milieu μ de oo' . Les angles de rotation des arbres Z et Z' sont donc aussi

symétriques, ce qui entraîne l'égalité de leurs vitesses angulaires.

Il semble tout d'abord que, le triangle oMo' étant invariable, les bras A et A' pourraient être rendus solidaires l'un de l'autre en M. Remarquons que les droites oZ , oM , oo' forment un trièdre déformable, puisqu'il se réduit à un plan quand le losange $oMo'M$ passe dans le plan ZZ' ; l'axe géométrique du tourillon o , qui est perpendiculaire à la face ZoM , fait donc un angle variable avec la face oMo' . De là résulte que le plan oMo' , dans son mouvement relatif rapporté à l'axe o , tourne autour de oM . Un raisonnement analogue prouverait que ce même plan tourne autour de $o'M$ dans son mouvement relatif rapporté à l'axe o' , ce qui établit la nécessité du joint sphérique M.

MÉCANISMES A LIEN FLEXIBLE

DANS LESQUELS

LE RAPPORT DES VITESSES EST VARIABLE
ET LE SENS DE LA TRANSMISSION CONSTANT

CHAPITRE XVII

§ I. — *Treuils spéciaux.*

500. On démontre en Statique que, dans un treuil en équilibre, la longueur R de la manivelle, le rayon r du tambour, la puissance motrice P et la résistance à vaincre Q sont liés par la relation

$$PR = Qr$$

de sorte que la limite inférieure de l'effort nécessaire pour produire le mouvement est $\frac{Qr}{R}$. Or, la résistance Q comprend le poids Q_1 du corps à soulever, et le poids Q_2 du câble qui le supporte ; comme cette seconde partie diminue depuis le commencement de l'ascension jusqu'à la fin, l'effort moteur décroît lui-même entre les limites $\frac{(Q_1 + Q_2)r}{R}$ et $\frac{Q_1 r}{R}$. Si, par exemple, il s'agit de soulever un poids de 1500 kilogrammes situé à 100 mètres de profondeur, suspendu à un câble pesant 5 kilogrammes par mètre courant, avec un treuil de 20 centimètres de rayon mû par une manivelle de 50 centimètres, ces limites sont

$$\frac{2000 \times 20}{50} = 800 \text{ kilogrammes}$$

et

$$\frac{1500 \times 20}{50} = 600 \text{ kilogrammes}$$

On peut se proposer de déterminer la section méridienne du tambour, par une épure, de telle manière que le produit Qr reste constant malgré la variation de Q . Soient h la hauteur d'ascension et q le poids du câble par unité de longueur. Quand le fardeau est au bas de sa course, le rayon r_0 du treuil est donné par la relation

$$PR = (Q_1 + qh) r_0$$

d'où l'on tire

$$r_0 = \frac{PR}{Q_1 + qh}$$

Après un tour du tambour, le rayon est devenu r_1 , le poids du câble a diminué de $2 \pi r_0 q$. On a alors

$$r_1 = \frac{PR}{Q_1 + qh - 2 \pi r_0 q} = \frac{PR}{Q_1 + q(h - 2 \pi r_0)}$$

La section de rayon r_1 et celle de rayon r_0 sont, d'ailleurs, séparées par un intervalle égal au diamètre d du câble.

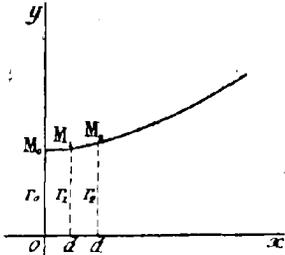


Fig. 478.

Après un second tour du tambour, le poids du câble a encore diminué de $2 \pi r_1 q$, et le nouveau rayon r_2 a pour valeur

$$r_2 = \frac{PR}{Q_1 + q[h - 2 \pi (r_0 + r_1)]}$$

En continuant ainsi, et en portant sur des ordonnées équidistantes, séparées par des intervalles d , les valeurs successives de r , on obtient une suite de points $M_0 M_1 M_2 \dots$ (fig. 478) qui, joints d'un trait continu, déterminent la section méridienne du tambour. Elle diffère peu d'une

droite, et, dans la pratique, on peut se borner à prendre un tambour tronc-conique, ayant pour bases des circonférences de rayons respectifs

$$r_0 = \frac{PR}{Q_1 + qh} \qquad r_n = \frac{PR}{Q_1}$$

501. Bobines pour câbles plats.

On obtient un effet analogue par l'emploi de câbles plats, dont les spires successives produisent la variation de r en se superposant les unes aux autres. On substitue alors au tambour une bobine composée d'un noyau cylindrique en fonte dont la longueur est un peu plus grande que la largeur du câble; celui-ci est maintenu par des bras latéraux A (fig. 479) solidaires du noyau.

Proposons-nous de calculer le raccourcissement du câble après n tours de la bobine. En désignant par e son épaisseur, et par r le rayon du noyau, les longueurs qui s'enroulent pendant les tours successifs sont

$$2 \pi r, 2 \pi (r + e), 2 \pi (r + 2e) \dots 2 \pi [r + (n - 1) e]$$

Le raccourcissement total du câble est donc

$$\begin{aligned} L &= 2 \pi r + 2 \pi (r + e) + 2 \pi (r + 2e) + \dots + 2 \pi [r + (n - 1) e] \\ &= 2 \pi r n + 2 \pi e [1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)] \\ &= 2 \pi r n + \frac{2 \pi e n (n - 1)}{2} = 2 \pi n \left[r + \frac{(n - 1) e}{2} \right] \quad (1) \end{aligned}$$

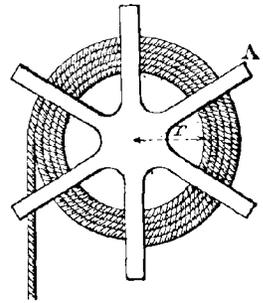


Fig. 479.

Cette formule exprime aussi le raccourcissement du câble pendant n tours quelconques, si l'on convient de représenter par r non plus le rayon du noyau, mais celui de la bobine à l'instant où commence le premier d'entre eux.

Enfin, en conservant à r cette dernière signification, l'allongement du câble qui correspond à n tours de la bobine manœuvrée dans le sens du déroulement est

$$\begin{aligned} L &= 2 \pi r + 2 \pi (r - 2e) + 2 \pi (r - 2e) + \dots + 2 \pi [r - (n - 1) e] \\ &\quad - 2 \pi n \left[r - \frac{(n - 1) e}{2} \right] \end{aligned}$$

expression qui ne diffère de la précédente que par le signe de e . La formule (1) est donc générale, à condition d'y remplacer r par le rayon de la bobine au commencement de la série de n tours, et de considérer e comme positif quand le câble s'enroule, et comme négatif dans le cas contraire.

502. Application. — Calcul de la longueur des bras.

Soit h la profondeur à laquelle se trouve le fardeau à soulever; la longueur totale du câble étant au moins égale à h , on a

$$2 \pi n \left[r + \frac{(n-1) e}{2} \right] \geq h \tag{2}$$

r désignant cette fois le rayon du noyau. En résolvant cette inégalité par rapport à n , on connaîtra le nombre de tours du câble, et l'on en déduira la longueur des bras, égale ou supérieure à $r + ne$.

Si, par exemple, $h = 200$ mètres, $r = 40$ c/m, $e = 2$ c/m, l'inégalité (2) devient, en prenant le centimètre pour unité de longueur

$$2 \pi n \left[40 + \frac{(n-1)^2}{2} \right] \geq 20000$$

ou

$$n^2 + 39 n - \frac{10000}{\pi} \geq 0$$

Le trinôme du premier membre ayant ses racines réelles et de signes contraires, n doit être au moins égal à la racine positive. On trouve ainsi

$$n \geq 41$$

La longueur l des bras est donc déterminée par la relation

$$l \geq 40 + 41 \times 2$$

ou

$$l \geq 122 \text{ c/m}$$

503. Fusée régulatrice du mouvement rectiligne transmis par un treuil de rayon variable.

Dans beaucoup d'appareils enregistreurs, une bande de papier s'enroule sur un

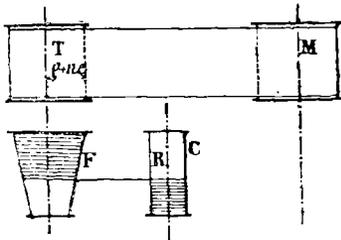


Fig. 480.

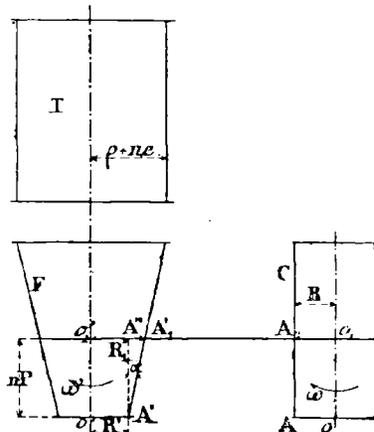


Fig. 481.

tambour T (fig. 480), devant lequel se déplace la pointe d'un traceur. Celui-ci dessine

une courbe dont les abscisses, égales aux longueurs du papier qui passent devant lui, ne sont proportionnelles au temps que si la vitesse linéaire des points de la circonférence du tambour reste constante. On ne peut atteindre ce résultat qu'en donnant à T un mouvement de rotation retardé, afin de compenser l'effet produit par l'accroissement de son rayon, dû à l'enroulement progressif du papier.

Pour cela, le tambour est rendu solidaire d'une sorte de treuil conique F, appelée *fusée*, sur la surface duquel est creusée une rainure hélicoïdale de pas P. Sur un cylindre C, dont l'axe est parallèle à celui de la fusée, est fixée une extrémité d'un fil qui, après avoir passé dans toutes les spires de F, en commençant par les plus petites, est attaché à un point fixe de la grande base. Dans ces conditions, il est clair que, si C reçoit un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω , la fusée et le tambour T prendront un mouvement retardé. Il reste à déterminer la forme de la fusée pour que la vitesse d'enroulement du papier sur le tambour soit constante.

Appelons R' le rayon de la petite base de la fusée, R'_1 celui de la section où se trouve le fil après n tours, ρ le rayon initial du tambour, R celui du cylindre C, et e l'épaisseur du papier. A l'instant initial, la vitesse angulaire de la fusée est

$$\omega' = \frac{\omega R}{R'}$$

et la vitesse d'enroulement du papier a pour valeur

$$V = \omega' \rho = \frac{\omega \rho R}{R'}$$

Après n tours, la vitesse angulaire de la fusée est

$$\omega'_1 = \frac{\omega R}{R'_1}$$

ce qui correspond à une vitesse du papier

$$V_1 = \omega'_1 (\rho + ne) = \frac{\omega R (\rho + ne)}{R'_1}$$

Pour que $V_1 = V$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\omega \rho R}{R'} = \frac{\omega R (\rho + ne)}{R'_1} = V$$

d'où l'on tire

$$\frac{\rho}{R'} = \frac{\rho + ne}{R'_1} = \frac{V}{\omega R} = \frac{ne}{R'_1 - R'}$$

et par conséquent

$$R'_1 - R' = A^n A'_1 = \frac{\omega R ne}{V}$$

Mais, d'autre part

$$A' A^n = nP$$

Par conséquent

$$\frac{A^n A'_1}{A' A^n} = \frac{\omega R ne}{V nP} = \frac{\omega R e}{VP} = \text{Constante.}$$

Il résulte de là que le triangle $A' A^n A'_1$ reste semblable à lui-même quel que soit n , et que la fusée affecte la forme d'un tronc de cône. Pour construire celui-ci, il suffit de connaître les quantités R' et α . Or, on a

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} R' = \frac{\omega R \rho}{V} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{A^n A'_1}{A' A^n} = \frac{\omega R e}{VP} \end{array} \right.$$

La vitesse de translation V du papier étant connue, ainsi que les quantités ω , R , ρ , P et e , ces formules déterminent R' et α .

Applications. — I. Déterminer la fusée F de telle manière que la vitesse de translation constante du papier soit de 6 m/m par minute, quand le cylindre C fait 6 tours à l'heure. On prendra

$$R = 1 \text{ c/m} \quad \rho = 3 \text{ c/m} \quad e = 1/4 \text{ m/m} \quad P = 1 \text{ m/m}$$

En rapportant tous les éléments de la question à la seconde comme unité de temps et au millimètre comme unité de longueur, on a, les notations employées restant les mêmes,

$$\omega = \frac{\pi}{30} \times \frac{6}{60} = \frac{\pi}{300} \quad V = \frac{6 \text{ m/m}}{60} = 0 \text{ m/m s}$$

$$R = 10\% \quad \rho = 30\% \quad e = 0\%25 \quad P = 1\%$$

Les formules précédentes donnent

$$R' = \frac{\pi \times 10 \times 30}{300 \times 0.1} = 10\pi = 31\%4$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\pi \times 10 \times 0.25}{300 \times 1 \times 0.1} = \frac{\pi}{12} = 0.262$$

$$\alpha = 14^{\circ}40'$$

II. Déterminer le nombre de spires à donner à l'hélice conique de pas P , si la bande de papier enroulée sur le tambour a 10 mètres de longueur.

Il est égal au nombre d'épaisseurs de papier superposées sur le tambour T quand toute la bande est enroulée. Nous appliquerons la formule du paragraphe 501, en faisant $L = 10 \text{ mètres} = 10000\%$, $r = \rho = 30\%$, $e = 0\%25$, ce qui donne l'équation

$$10000 = 2\pi n \left[30 + \frac{0.25(n-1)}{2} \right]$$

ou

$$0.25\pi n^2 + 59.75\pi n - 10000 = 0$$

En ne prenant que la racine positive, il vient, tous calculs faits

$$n = 40 \text{ environ.}$$

504. Courroies et poulies à section non circulaire.

Pour transmettre un mouvement de rotation entre deux axes avec rapport variable des vitesses, on peut caler sur eux des poulies dont l'une au moins n'est pas circulaire, et les relier par une courroie sans fin droite ou croisée, que l'on maintient constamment tendue en faisant agir un contre-poids sur le brin conduit. Le rapport des vitesses angulaires, égal au rapport inverse des segments déterminés par le brin menant sur la ligne des centres, varie à chaque instant. Ces mécanismes sont peu employés.

MÉCANISMES A CONTACT DIRECT

DANS LESQUELS

LE SENS DE LA TRANSMISSION VARIE PÉRIODIQUEMENT
LE RAPPORT DES VITESSES EST GÉNÉRALEMENT VARIABLE

CHAPITRE XVIII

§ I. — Mécanismes qui dérivent des engrenages ordinaires.

505. — Roues tronquées à double denture.

Ces roues sont disposées de telle façon qu'un même pignon menant, animé d'un mouvement de rotation continu, constitue avec elles un engrenage tantôt extérieur, tantôt intérieur, ce qui communique évidemment à l'arbre conduit un mouvement alternatif.

Il existe de très nombreuses dispositions pratiques ; nous nous bornerons à en indiquer deux. Dans celle que représente la figure 482, l'axe o est solidaire de deux roues à demi dentées A et A_1 , montées sur un plateau, et l'axe o' porte un pignon A' . Suivant que ce dernier engrène avec la partie A ou avec la partie A_1 , les deux arbres tournent en sens contraires ou dans le même sens. Le rapport des vitesses angulaires passe brusquement de la valeur $\frac{R}{R'}$ à la valeur $\frac{R_1}{R'}$, en même temps que le mouvement de l'arbre conduit change de sens.

Dans la disposition représentée par la figure 483, l'axe o est solidaire d'une sorte de couronne échantrecée D

dentée sur tout son périmètre. L'arbre o' du pignon menant traverse une rainure $\alpha\alpha_1$ qui le guide de manière à le faire entrer en contact alternativement avec les parties A ou A_1 de la couronne. Dans le premier cas, les rotations sont de sens contraires ; elles sont de même sens dans le second. Le rapport des vitesses change graduellement de valeur pendant que le pignon A' engrène avec les arcs dentés qui rejoignent les faces A et A_1 de la couronne D . En passant d'un bord à l'autre de la rainure $\alpha\alpha_1$, l'axe o' subit de petites variations que l'on rend possibles en la partageant en deux parties, reliées par un joint universel.

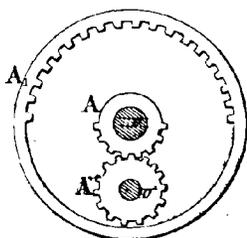


Fig. 482.

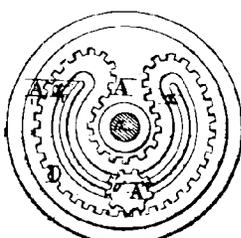


Fig. 483.

506. Crémaillère double oscillante.

Ce système ne diffère du précédent que par la substitution d'une crémaillère à la roue tronquée. Dans le cas d'une crémaillère à lanterne (fig. 484), le pignon tourne autour du premier fuseau pour passer de l'une des faces de la rainure dans l'autre, ce qui produit un amortissement graduel de la vitesse et évite les chocs quand le mouvement de la crémaillère change de sens.

Dans la disposition représentée par la figure 485, le pignon n'est denté que sur la moitié de sa circonférence primitive, et agit alternativement sur les deux faces de la crémaillère.

On peut éviter de scinder l'arbre du pignon en deux parties reliées par un joint universel, en plaçant la crémaillère sur un châssis mobile C (fig. 486), réuni à la tige guidée ZZ' par des tringles AB, A'B' qui lui sont articulées en B et B', et qui oscillent autour des points A et A' solidaires de ZZ'. Quand le pignon arrive à une extrémité de la rainure, il soulève le châssis C afin de passer sur l'autre face.

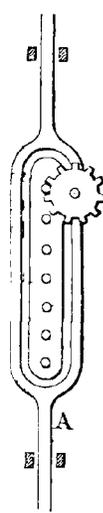


Fig. 484.

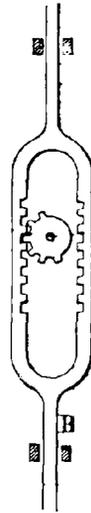


Fig. 485.

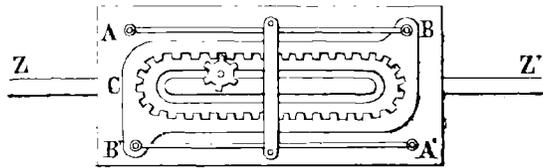


Fig. 486.

§ II. — Cames des divers genres, ou Excentriques à galets.

507. Une came est constituée par un cylindre A, mobile autour d'un axe o parallèle à ses génératrices, dont le mouvement se communique par contact soit à un second cylindre (258-459-464-465), soit à une tige BC convenablement guidée (fig. 487) et terminée par un petit galet. Le mouvement de la pièce conduite est, dans ce dernier cas, généralement limité; le rapport des vitesses peut être constant (came en cœur — came Grisson), mais il est plus souvent variable.

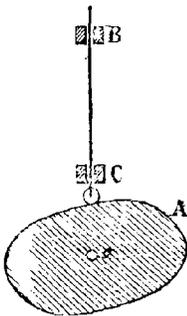


Fig. 487.

508. Cames Grisson.

Ce mécanisme assure la liaison de deux rotations de sens contraires autour d'axes parallèles, et son rôle est analogue à celui des engrenages cylindriques extérieurs. L'un des axes porte une roue à galets S (fig. 488) et l'autre une paire de

comes $S'S'$, calées à 180° l'une de l'autre, qui s'engagent dans des gorges à section rectangulaire creusées sur la surface de S .

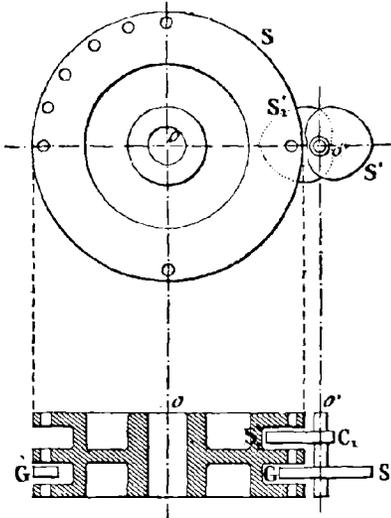


Fig. 488.

Les joues de ces gorges sont percées de trous équidistants, traversés par des boulons qui servent d'axes à des galets cylindriques G , avec lesquels les comes entrent successivement en contact. Les galets de l'une des gorges correspondent aux milieux des intervalles de ceux de l'autre. Par suite de cette disposition, la rotation du premier arbre se communique évidemment au second, avec un rapport de vitesses angulaires qui dépend de la forme des comes. Nous allons déterminer celle-ci de telle sorte que le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ conserve une valeur constante donnée k .

Premier procédé. — Supposons provisoirement que chaque galet soit réduit à son axe géométrique, et considérons celui qui, situé tout d'abord sur la ligne des centres en A (fig. 489), vient se placer en M quand la roue S a tourné de l'angle $\angle AoM = \theta$. L'angle de rotation de la came est $\angle Ao'P' = k\theta$.

Pour obtenir le point du profil inconnu qui est venu se confondre avec M , il suffit, après avoir mené l'ordonnée MP , de porter $o'P' = o'P$ et d'élever sur $o'P'$ la perpendiculaire $P'M' = PM$. Cette construction, répétée pour des valeurs suffisamment nombreuses de θ , détermine une courbe Δ , dont on déduit le profil δ de la came en traçant l'enveloppe d'une série de circonférences égales ayant pour centres les points A, M, \dots de Δ , et pour rayon celui du galet. On ne conserve de la courbe δ que la partie située au-dessous de la ligne des centres ; l'autre moitié de la came est limitée par une courbe symétrique.

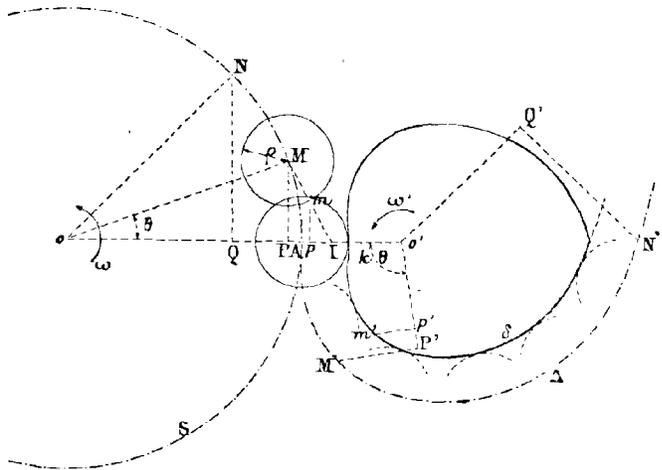


Fig. 489.

Deuxième procédé. — On sait que la normale commune au galet et à la came passe à tout instant par le point I de la ligne des centres qui satisfait à la relation $\frac{oI}{o'I} = k$ (243). Supposons que ce point soit déterminé. Le point de contact m des deux profils se trouve donc sur IM . Pour trouver le point correspondant de la courbe δ , il suffit de construire les coordonnées mp et $o'p$ du point m , de porter $o'p' = o'p$,

et d'élever sur $o'p'$ la perpendiculaire $p'm' = pm$. Ce procédé dispense donc de tracer la courbe Δ .

On a réalisé avec les cames Grisson des rapports de vitesse de $\frac{1}{50}$ par une transmission directe, alors que des engrenages extérieurs ne permettent guère de dépasser $\frac{1}{8}$. De plus, les axes peuvent être très rapprochés.

509. Came conduisant une tige guidée. — Principe du tracé d'après la nature du mouvement de la tige.

Un arbre projeté en o sur le plan de la figure, auquel il est supposé perpendiculaire, étant animé d'un mouvement de rotation uniforme, on se propose de déterminer le profil d'une came imprimant à la ligne Z , située dans le plan de la figure, et rencontrant l'axe, un mouvement rectiligne suivant une loi donnée. Décrivons une circonférence de centre o et de rayon arbitraire, qui rencontre Z au point A (fig. 490), et partageons-la en un nombre quelconque de parties égales.

D'après l'hypothèse, la durée d'un tour de l'arbre o est proportionnelle à la longueur de la circonférence oA ; supposons celle-ci rectifiée sur une droite xy (fig. 491), avec tous ses points de division, et construisons la courbe des espaces IJ du mouvement de la tige guidée. Portons enfin sur les rayons $o1, o2, \dots$ des longueurs $1B,$

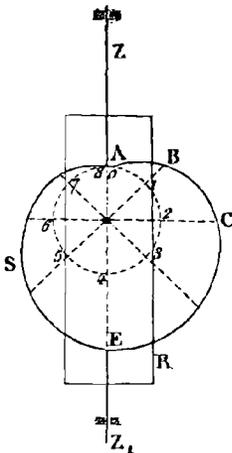


Fig. 490. (*)

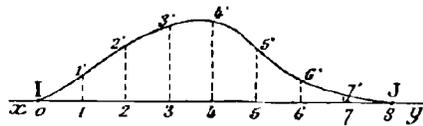


Fig. 491.

$2C \dots$ respectivement égales aux ordonnées $11', 22', \dots$ de IJ . La courbe S ainsi obtenue, rendue solidaire de l'axe o , communique au point A de la tige Z le mouvement voulu, puisque les chemins qu'il parcourt pendant les fractions de tour successives sont respectivement

$$1B = 11'$$

$$2C = 22'$$

.....

Si la courbe IJ est d'une nature telle que les sommes $11' + 55', 22' + 66' \dots$ des ordonnées séparées par un intervalle égal à la durée d'une demi-révolution soient égales, tous les diamètres de la courbe S ont même longueur, et l'on peut scinder la tige guidée en deux parties ZA et Z_1E , reliées l'une à l'autre par un châssis rigide R . L'action de la came se manifeste alors alternativement en A et en E , de sorte que la tige est conduite pendant les deux phases de son mouvement. Dans le cas contraire, elle n'est conduite que dans un seul sens, et son contact avec la came doit être assuré par un poids ou par un ressort.

(*) Le lecteur est prié de placer la lettre o au pied de l'axe de la came.

510. Came du mouvement uniforme.

Nous distinguerons deux cas :

1° *La tige n'est pas guidée dans son mouvement de retour.*

Soit h la course à produire. La loi graphique du mouvement de la tige guidée, obtenue comme on vient de l'indiquer, est une droite IJ (fig. 493) dont l'extrémité J a pour ordonnée $8h' = h$. D'après les tracés effectués, on a évidemment

$$\frac{1 B}{\text{arc A 1}} = \frac{2 C}{\text{arc A 2}} = \frac{3 D}{\text{arc A 3}} = \dots$$

ce qui prouve que le profil S de la came (fig. 492) est

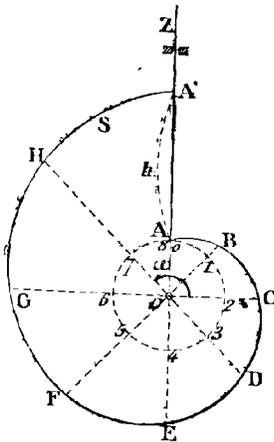


Fig. 492.

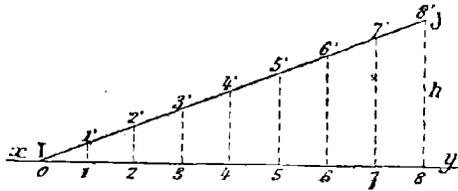


Fig. 493.

une spirale d'Archimède.

Ce mécanisme est employé dans certains appareils enregistreurs pour guider le levier traceur. (Came en limaçon).

2° *La tige est guidée dans son mouvement de retour.*

Supposons que les deux phases du mouvement alternatif aient même durée. Dans ces conditions, la loi graphique du mouvement de la tige se compose de deux droites symétriques par rapport à l'ordonnée médiane $4h' = h$, et la courbe S est formée de deux arcs égaux de

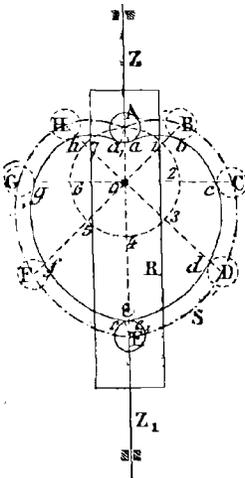


Fig. 494.

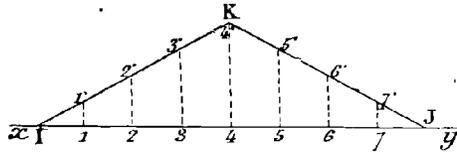


Fig. 495.

spirale d'Archimède, symétriques par rapport à Z. En raison de sa forme particulière, cet appareil a reçu le nom de *came en cœur*.

Il faut remarquer que tous les diamètres du profil S sont égaux. On a en effet

$$BF = 2o A + 1 B + 5 F = 2o A + 11' + 55'$$

$$AE = 2o A + 4 E = 2o A + 44'$$

Or, en se reportant à la loi graphique des espaces (fig. 495) on voit que

$$41' = 77' = \frac{h}{4}$$

$$22' = 66' = \frac{h}{2}$$

$$33' = 55' = \frac{3h}{4}$$

$$44' = h$$

Par conséquent $41' + 55' = 44'$ et $BF = AE$.

La tige peut donc être partagée en deux parties ZA et Z₁E réunies par un cadre rigide R. Dans la pratique, ces parties sont terminées par des galets égaux de centres E et A ; le profil de la came est alors constitué par des courbes *abcde*, *e₁fg₁ha*, parallèles aux arcs de spirale, que l'on obtient en traçant l'enveloppe d'une série de circonférences de même rayon que le galet, et de centres respectifs ABC... Les extrémités *aa₁*, *ee₁* de ces courbes sont distinctes ; les points *a* et *a₁*, qui laissent entre eux un intervalle vide, sont reliés par un arc de cercle appartenant au galet A ; enfin, la disposition de l'enveloppe en *e* et *e₁* conduit à supprimer les deux arcs *εe*, *εe₁*, qui dépassent la pointe *ε*. Ces modifications apportées à la came théorique ont pour effet d'interrompre le guidage de la tige pendant deux petites fractions de sa course, de sorte que son mouvement n'a pas rigoureusement lieu suivant la loi uniforme que l'on s'était assignée.

541. Autre came du mouvement uniforme.

Cette came est employée dans les machines à décoller Brown et Sharpe pour commander l'avance des outils qui servent au filetage. En supposant que la barre à travailler soit animée d'un mouvement de rotation uniforme, la vis n'est régulière que si l'avance de la filière est aussi uniforme, et égale au pas pour chaque tour de barre. Généralement, la came n'agit pas directement sur le chariot porte-outil ; elle presse un galet cylindrique, appelé *touche*, placé à l'extrémité d'un levier, dont l'autre extrémité porte un pignon ou un secteur denté engrenant avec une crémaillère solidaire du chariot.

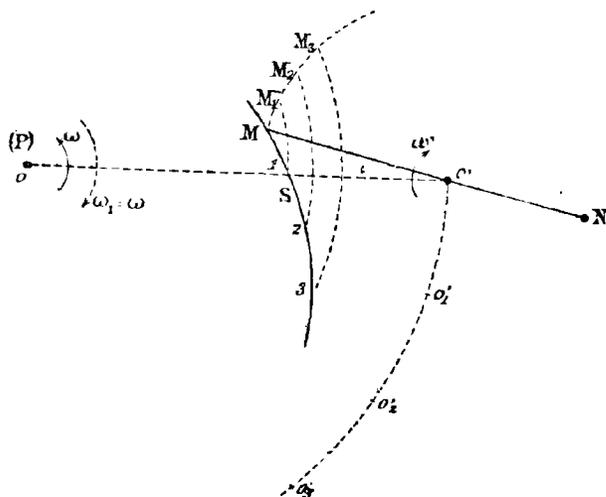


Fig. 496.

Soient *o* et *o'* les pieds des axes de la came et du levier, et *M* le centre de la touche à un instant quelconque (fig. 496). Pour que le chariot, commandé par l'extrémité N du levier, prenne un mouvement uniforme, il faut que le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ des vitesses

angulaires de la came et du levier reste constant. Le problème revient donc au tracé d'une came Grisson ; mais nous en donnerons une solution nouvelle.

Le profil cherché n'est pas autre chose, si l'on suppose la touche réduite à son centre, que la trajectoire du point M dans son mouvement rapporté à l'axe o . Or M décrit, dans son mouvement absolu, une circonférence de centre o' sur laquelle il occupe, après des intervalles de temps égaux d'une durée arbitraire, les positions équidistantes $M_1 M_2 M_3 \dots$. Pour déterminer sa trajectoire relative dans un plan P invariablement relié à l'axe o , imprimons à l'ensemble de la figure un mouvement de rotation autour de cet axe, de vitesse angulaire ω_1 égale, en valeur absolue, à celle de la came, mais orientée en sens contraire. Le plan P est ramené au repos, et le point o' décrit une circonférence de centre o sur laquelle il vient occuper, après les mêmes intervalles de temps que tout à l'heure, les positions $o'_1 o'_2 o'_3 \dots$ caractérisées par les relations

$$\text{arc } o'o'_1 = \text{arc } o'_1 o'_2 = \text{arc } o'_2 o'_3 \dots = \frac{\text{arc } MM_1}{k} \times \frac{o'o'}{o'M}$$

en posant $\frac{\omega'}{\omega} = k$. Les positions 1, 2, 3... des points $M_1 M_2 M_3 \dots$, dans le mouvement relatif du levier, se trouvent donc à la rencontre des arcs de cercle de centre o et de rayons respectifs $oM_1, oM_2, oM_3 \dots$ avec les arcs de cercle de rayon $o'M$ décrits des points $o'_1 o'_2 o'_3 \dots$ comme centres. On détermine ainsi une courbe S, dont on déduit le profil réel de la came en décrivant, de chacun de ses points comme centre, une circonférence de même rayon que la touche, et en construisant son enveloppe. Ce procédé est applicable au tracé de toutes les comes.

La figure 497 représente l'application d'une came de cette nature dans une machine à poinçonner. Le poinçon P est fixé à l'extrémité d'une tige guidée, suspendue au bras

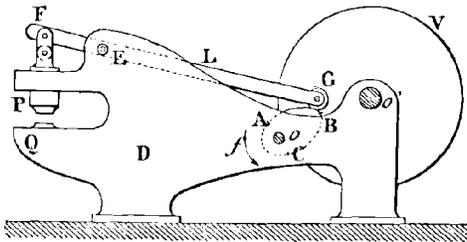


Fig. 497.

le plus court d'un levier L qui oscille autour d'un axe E solidaire du bâti D. Le second bras du levier est terminé par un galet circulaire G; le système n'est pas en équilibre, et les poids de ses parties sont calculés de telle sorte que le galet appuie constamment sur le pourtour de la came ABC. Celle-ci, qui est mobile autour de l'axe fixe o , reçoit, par des engrenages non figurés, un mouvement de rotation provenant de l'arbre o' , sur lequel est calé un volant V.

Supposons que le mouvement du poinçon doive être réglé de la façon suivante :

- 1° Pendant un quart de tour de la came, il effectue sa course de travail, d'un mouvement uniforme, en s'approchant de la table Q qui supporte la matière à usiner ;
- 2° Pendant le quart de tour suivant, il remonte à sa position initiale ;
- 3° Pendant le demi-tour restant, il demeure immobile, afin de donner à l'ouvrier le temps nécessaire pour disposer convenablement la pièce.

Le profil de la came comprendra un arc de courbe AB, correspondant à un quadrant, tracé comme il a été dit précédemment, puis un second arc BC, de forme arbitraire, et enfin un demi-cercle AC de centre o . Le plus grand rayon de oB est déterminé de telle manière que le poinçon, en arrivant au point le plus bas de sa course, soit à une distance convenable de la table Q. Grâce au mode de commande de la came, toute l'énergie emmagasinée dans le volant entre deux frappes consécutives est utilisée par l'outil.

512. **Came du mouvement uniformément varié, ou came Morin.**

La production d'un mouvement rectiligne alternatif par la came en cœur donne lieu à un choc à chaque fin de course, à cause du changement de sens brusque de la vitesse. On peut remédier à cet inconvénient en modifiant la forme de la came, de manière que la vitesse de la tige s'annule en même temps que son mouvement change de sens.

Dans le tracé imaginé par le général Morin, la tige conduite parcourt la moitié

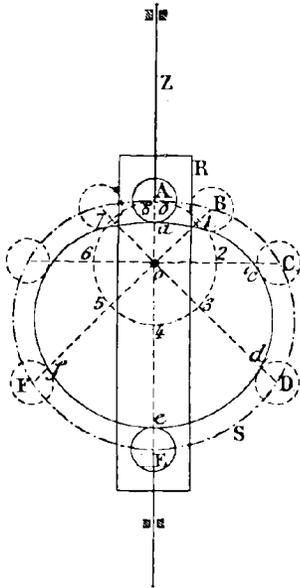


Fig. 498.

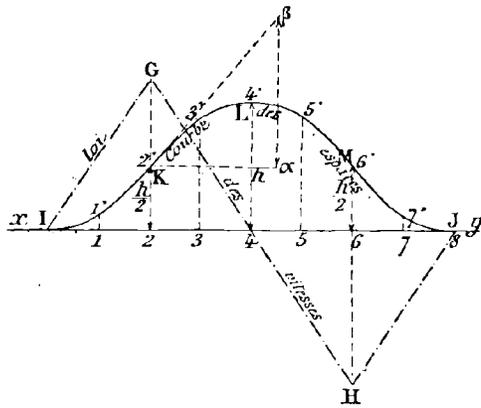


Fig. 499.

de sa course pendant chaque quart de tour de la came ; le premier quart correspond à un mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale, dont l'accélération φ est déterminée par la relation

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2} \varphi \theta^2$$

ou

$$\varphi = \frac{h}{\theta^2}$$

h représentant la course à produire, et θ le quart de la durée d'une révolution de la came. Pendant le second quart de tour, le mouvement de la tige est uniformément retardé, et son accélération conserve la même valeur absolue, de sorte que sa vitesse revient à zéro. Pendant les deux quarts de tour suivants, les mouvements sont respectivement identiques aux précédents, mais s'effectuent en sens inverse. La courbe des espaces du mouvement de la tige, tracée d'après les indications données dans le cas général, se compose de quatre segments de parabole IKLMJ, qui se raccordent deux à deux comme le montre la figure 499. Il ne reste plus qu'à porter les longueurs $1B=11'$, $2C=22'$... sur les prolongements des rayons de la circonférence oA , et à joindre les points ABC... d'un trait continu (fig. 498).

Tous les diamètres du profil S ainsi déterminé sont égaux. En considérant deux d'entre eux, soient AE et BF, par exemple, on a en effet

$$AE = 2 OA + 4 E = 2 OA + 44'$$

$$BF = 2 OA + 1 B + 5 F = 2 OA + 11' + 55'$$

Or, d'après les lois du mouvement uniformément varié

$$11' = \frac{1}{2} \varphi \theta^2$$

et
$$55' = h - \frac{1}{2} \varphi \theta^2$$

Par conséquent
$$11' + 55' = h$$

d'où il suit que $AE = BF$. On peut donc partager la tige guidée en deux segments, maintenus à distance invariable par un cadre rigide R, et limités au point A et au point E.

Dans la pratique, ces deux segments sont terminés par des galets, et il faut substituer au profil ABC... une courbe parallèle *abc.*, que l'on détermine comme précédemment, et dont le tracé ne donne lieu à aucune remarque particulière.

513. Cames des pilons.

Un pilon consiste généralement en une pièce de bois munie à son extrémité inférieure d'une armature en fer appelée *sabot*, qu'une came soulève, puis laisse retomber sur la matière à travailler. Les cames employées diffèrent des précédentes en ce que

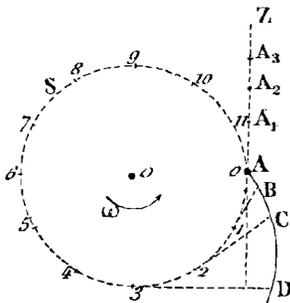


Fig. 500.

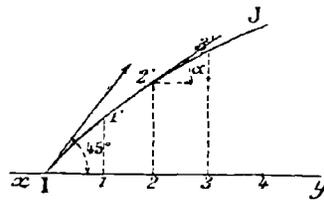


Fig. 501.

la direction du mouvement rectiligne de la tige guidée ne rencontre pas l'axe de rotation ; elles exercent leur action sur une saillie, appelée *mentonnet*, qui est solidaire de la tige du pilon, et que nous supposons provisoirement réduite à un point. Cherchons, dans ces conditions, quel profil il convient de donner à la came pour qu'elle communique à la tige guidée un mouvement déterminé.

Soient *o* (fig. 500) la projection de l'axe sur le plan de la figure, auquel il est perpendiculaire, *Z* la tige du pilon, et *S* une circonférence de centre *o* tangente à *Z* au point A, que nous partagerons en un nombre quelconque de parties égales. Le mouvement de rotation étant supposé uniforme, la longueur de la circonférence *S* peut être adoptée pour représenter la durée d'un tour. Rectifions-la avec ses points de division sur une droite *xy*, et construisons la loi graphique *IJ* (fig. 501) du mou-

vement à imprimer à la tige guidée. Portons enfin sur les tangentes à la circonférence des longueurs 1 B, 2 C, 3 D, ... égales aux ordonnées correspondantes 11', 22', 33'... de IJ. Les points obtenus déterminent une courbe ABCD... qui répond à la question, car, après chaque fraction de tour, une des droites 1 B, 2 C... s'applique sur Z, ce qui fait parcourir au point A des espaces successifs

$$AA_1 = 1 B = 11'$$

$$AA_2 = 2 C = 22'$$

.

égaux aux ordonnées de la courbe IJ.

Il faut observer que IJ n'est pas absolument arbitraire. En désignant par ω la vitesse angulaire de l'arbre à came, la durée d'un tour, égale à $\frac{2\pi}{\omega}$, est représentée par une longueur $2\pi oA$, de sorte que l'échelle des temps est $h' = \omega \times oA$. Or, l'expression de la vitesse v déduite de la courbe des espaces est

$$v = \frac{h'}{k} \operatorname{tg} \alpha$$

formule qui se réduit ici à

$$v = h' \operatorname{tg} \alpha = \omega \times oA \operatorname{tg} \alpha$$

puisque les espaces parcourus sont reportés en vraie grandeur. A l'instant initial

$$v = \omega \times oA$$

ce qui nécessite $\alpha = \frac{\pi}{4}$. La tangente en I à la courbe des espaces du mouvement à produire doit donc faire un angle de 45° avec l'axe des temps. Si, par exemple, on veut imprimer au pilon un mouvement ascensionnel uniforme, IJ est une droite dont les ordonnées successives sont, d'après la remarque qui précède, égales aux abscisses correspondantes, c'est-à-dire aux arcs de la circonférence S mesurés à partir de A. Le profil de la came est alors une développante de cercle, et le mécanisme est identique au système formé par un pignon et une crémaillère à fuseaux (*).

Dans la pratique, le mentonnet est habituellement constitué par un galet; il faut donc substituer au profil théorique dont nous venons d'indiquer le tracé une courbe parallèle, enveloppe d'une série de petites circonférences de même rayon que le galet, et décrites des différents points de ABCD... comme centres.

514. Distribution des dents sur le disque.

Soient N le nombre de tours de l'arbre o pendant une minute, ω sa vitesse angulaire, n le nombre de dents du disque, x son rayon, et h la hauteur d'ascension de la tige du pilon. Une dent du disque vient remplacer celle qui la précède au bout d'un temps $\frac{2\pi}{n\omega}$, qui mesure l'intervalle de deux coups consécutifs du pilon. Ce temps peut être décomposé en trois parties :

1° *La durée de l'ascension.* En supposant la came à profil de développante, le mouvement d'ascension est uniforme, et sa vitesse est ωx . Cette première partie, évaluée en secondes, est donc égale à $\frac{h}{\omega x}$.

(*) Ces mécanismes appartiennent en réalité à la première classe (premier genre), l'interruption du mouvement n'étant pas due à une cause géométrique.

2° *La durée de la chute.* Elle est égale à $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ d'après les lois de la pesanteur.

3° *La durée du repos.* L'effet d'une force n'étant jamais instantané, cette troisième partie ne peut pas être nulle, comme on serait tenté de le croire tout d'abord. En lui attribuant une valeur égale à la septième partie de l'intervalle de deux coups consécutifs, on doit avoir

$$\frac{h}{\omega x} \times \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{6}{7} \times \frac{2\pi}{n\omega} = \frac{12\pi}{7n\omega}$$

Cette équation du premier degré détermine le rayon du disque porte-cames. En remplaçant ω par sa valeur en fonction de N , il vient

$$x = \frac{h}{\pi} \times \frac{1}{\frac{12}{7n} - \frac{N}{30} \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

Il n'y a pas d'inconvénient à se tenir au-dessus de la valeur trouvée.

Application. — Supposons que chaque ascension du pilon soit de 20 centimètres, que le disque porte 5 cames, et fasse 5 tours par minute. La formule précédente donne, le millimètre étant pris pour unité de longueur

$$x = \frac{200}{\pi} \times \frac{1}{\frac{12}{7 \times 5} - \frac{5}{30} \sqrt{\frac{40}{981}}} = 206 \text{ mm}$$

515. Remarque. — Nous avons admis que le mentonnet était constitué par un galet circulaire; il est souvent formé par une pièce de bois ou de métal perpendiculaire à la tige du pilon. Le mécanisme se comporte alors comme une crémaillère à flancs droits (312).

516. Cames des machines soufflantes.

Imaginons qu'un cylindre C (fig. 502), parcouru par un piston P , communique avec l'extérieur par une soupape S s'ouvrant de dehors en dedans, et avec une tuyère T par une autre soupape B s'ouvrant de dedans en dehors. A chaque montée du piston correspond une compression de l'air dans le cylindre, dont l'effet est de fermer S , d'ouvrir B , et d'alimenter la tuyère. Pendant chaque descente, au contraire, les mouvements inverses des soupapes se produisent, et l'air afflue de l'extérieur dans le cylindre; le jet de la tuyère est donc interrompu. Pour en assurer la continuité :

1° On fait communiquer la tuyère avec un second cylindre C' , identique au premier; mais, pendant que le piston P se meut dans un sens, le piston P' se meut en sens contraire ;

2° On commande les pistons de telle sorte que leur mouvement de montée soit uniforme, et que sa durée dépasse celle de la descente.

Il résulte de la première disposition que l'un des cylindres se remplit d'air tandis que l'autre alimente la tuyère, et de la seconde que la période de refoulement commence pour chaque piston avant d'être terminée pour l'autre. De plus, l'air s'écoule par la tuyère avec une vitesse constante.

Les tiges des pistons sont commandées par des cames à profil de développante, que nous allons déterminer de telle manière que l'ascension se fasse pendant les $\frac{6}{10}$ d'un tour de l'arbre, et la descente pendant les $\frac{4}{10}$ restants. Soit h la course des pis-

tons, égale à la hauteur commune des cylindres C et C'. Quand la partie utile ABC...G de la développante (fig. 503) a exercé son action, la tige du piston a monté de la quantité $A_1G = h$. Mais

$$A_1G = \text{arc } A_1A = \frac{6}{10} \times 2\pi oA.$$

On doit donc avoir

$$\frac{6}{10} \times 2\pi oA = h$$

d'où
$$oA = \frac{5h}{6\pi}$$

Le rayon oA étant ainsi connu, on peut tracer le profil théorique ABC...G de la

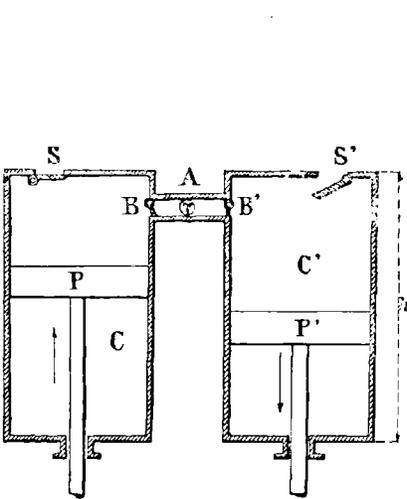


Fig. 502.

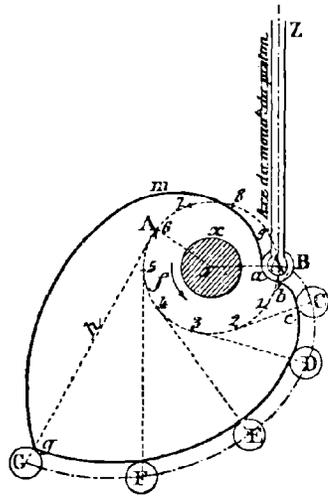


Fig. 503.

came, qui répondrait à la question si la tige du piston était terminée en A par un simple point. Dans la pratique, on place en A un petit galet, et l'on substitue à la développante une courbe parallèle $abc...g$. Le reste du contour de la came, sur lequel la tige du piston s'appuie pendant la descente, peut recevoir une forme quelconque. Le second piston est actionné par une came analogue, calée sur l'arbre o en sens opposé, de telle manière que, quand l'un des pistons commence à descendre, l'autre ait encore à effectuer une partie de sa course ascendante correspondant à $\frac{1}{10}$ de tour de l'arbre.

517. Cames des marteaux de forge.

Le marteau-frontal, employé en métallurgie, est constitué par une sorte de levier pesant M (fig. 504), mobile autour d'un point A ; un arbre porte-cames tourne d'un mouvement uniforme autour d'un axe o , et vient agir sur la tête du levier qu'il soulève, puis laisse retomber sur l'enclume E. Le mécanisme constitue évidemment un engrenage extérieur, dans lequel la face inférieure BD de la tête du marteau est le flanc de l'une des roues. Le profil de la came, qui conduit le précédent, peut donc être tracé par l'une quelconque des méthodes étudiées au chapitre II. L'arc de retraite, qui est égal à la levée du marteau, est déterminé d'après l'effet à produire ; on échan-

frine les dents de la came de manière à lui donner la valeur convenable. En particulier, si l'extrémité DB du marteau est limitée par un plan contenant l'axe A, les profils de la came sont des épicycloïdes (269), que l'on obtient en faisant rouler la circonférence S', de diamètre AC, sur la circonférence S.

On calcule le rayon primitif x du disque S en procédant comme au paragraphe 514.

Toutefois, comme la chute du marteau n'est pas libre, sa durée n'est plus égale à $\sqrt{\frac{2h}{g}}$. En remarquant que chaque point de la masse M parcourt un espace compris entre zéro et h pendant chaque levée, on peut admettre que la durée de la chute correspond à une chute libre de hauteur $\frac{h}{2}$, et l'équation trouvée précédemment devient

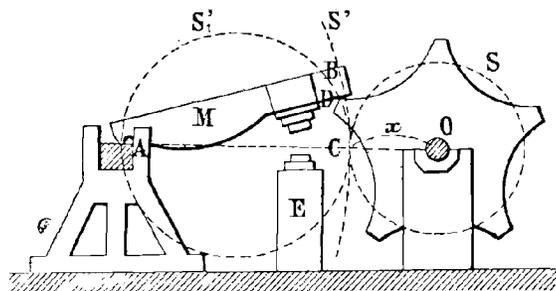


Fig. 504.

$$\frac{h}{\omega x} + \sqrt{\frac{h}{g}} = \frac{12\pi}{7n\omega}$$

On en tire

$$x = \frac{12\pi}{7n} \frac{h}{\omega \sqrt{\frac{h}{g}}} = \frac{h}{\pi} \times \frac{12}{7n} \frac{1}{\frac{N}{30} \sqrt{\frac{h}{g}}}$$

N désignant encore le nombre de tours de l'arbre ω pendant une minute, et n le nombre de cames portées par le disque.

Nous avons supposé que la came agit sur la tête du marteau ; dans le *marteau à soulèvement*, ou à *l'allemande*, elle est placée, au contraire, entre A et B. Enfin, dans le *marteau à bascule*, la came agit sur un prolongement du levier situé au-delà de son axe A. La théorie de tous ces appareils est identique à celle du marteau frontal.

518. Rainures servant de guides.

1° Cas où la direction du mouvement rectiligne est perpendiculaire à l'axe de rotation de la came.

Pour reproduire les divers mouvements dont il vient d'être question, on peut, au lieu de construire une came en relief, reporter son profil théorique sur un disque circulaire concentrique à l'axe de la rotation, et creuser une rainure dont les bords soient équidistants de la courbe ainsi tracée (fig. 505). La tige guidée est alors terminée par un bouton A qui s'engage dans la rainure. La rotation du disque communique évidemment à la tige Z un mouvement

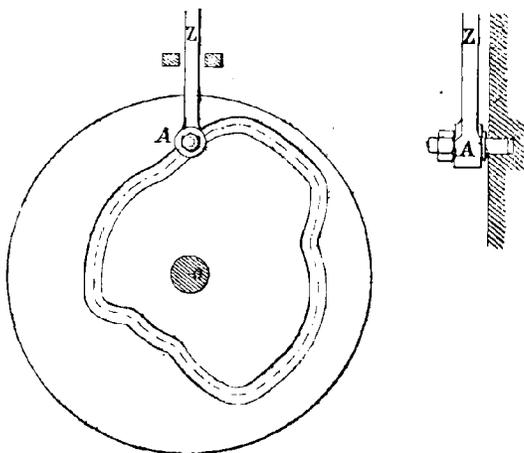


Fig 505.

identique à celui qu'elle prendrait sous l'influence d'une came en relief de même forme. Des mécanismes de ce genre se trouvent dans les machines à coudre, pour commander le mouvement de la tige porte-aiguille.

2° Cas où la direction du mouvement rectiligne est parallèle à l'axe de la rotation.

L'arbre tournant, que nous supposons animé d'un mouvement uniforme, est solidaire d'un cylindre de révolution C (fig. 507) de même axe géométrique que lui. Une

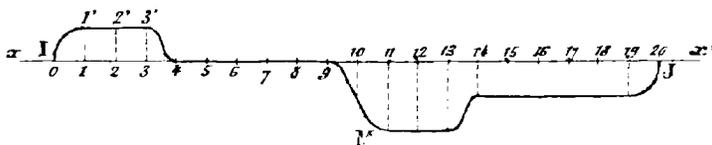


Fig. 506.

section droite yy' de ce cylindre, rectifiée suivant xx' (fig. 506), peut représenter la durée d'un tour de l'arbre, et servir d'axe des temps pour la construction de la courbe des espaces IMJ du mouvement à produire. En roulant sur C une feuille de papier découpée suivant le contour IMJ, de manière à faire coïncider xx' avec la section

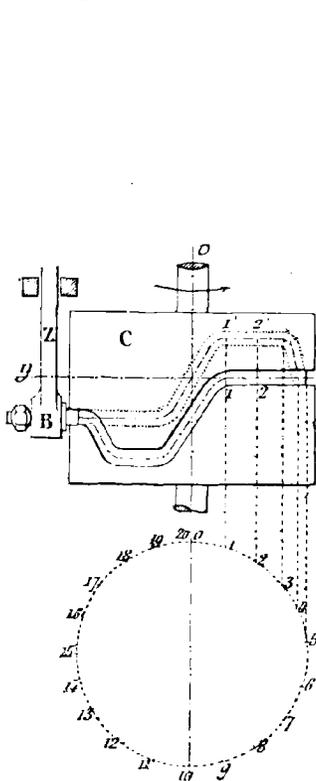


Fig. 507.

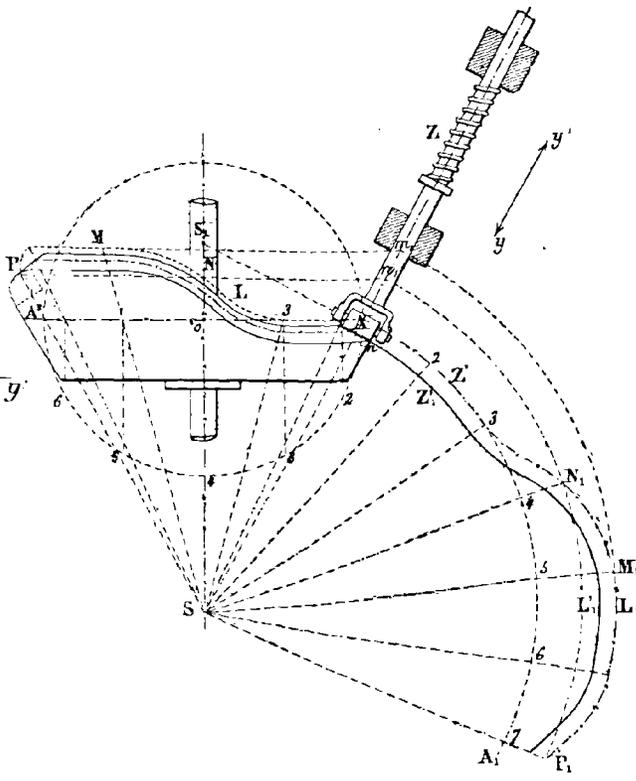


Fig. 508.

droite yy' , on détermine une courbe, qui, prise pour directrice d'une rainure, conduit la tige Z, supposée guidée parallèlement à l'axe o , suivant la loi de mouvement qui avait été assignée. Le mécanisme étudié au paragraphe 361 rentre dans cette catégorie.

On pourrait supprimer toute la partie du cylindre C qui se trouve d'un même côté de la rainure, à la condition de maintenir le bouton en contact avec la face conservée, par un contre-poids ou un ressort.

3° Cas où la direction du mouvement rectiligne est oblique à l'axe de la rotation.

Les tracés précédents sont applicables avec quelques modifications. Soient oS (fig. 508) l'axe du mouvement de rotation, et SZ une parallèle à la direction yy' du mouvement rectiligne. Coupons le cône de révolution engendré par SZ en tournant autour de oS par un plan AA' perpendiculaire à son axe, et effectuons le développement de sa surface après l'avoir ouverte suivant la génératrice SA . Nous obtenons ainsi un secteur circulaire ASA_1 , dans lequel l'arc AA_1 , de même longueur que la circonférence AA' , est proportionnel à la durée d'un tour du cône, si le mouvement de celui-ci autour de son axe est supposé uniforme. Portons sur les rayons successifs du secteur, à partir de l'arc AA_1 , des longueurs égales aux chemins que doit parcourir la tige guidée. Nous déterminons ainsi une courbe L_1 qui peut être considérée comme la courbe des espaces du mouvement à produire, établie dans un système particulier de coordonnées. L'enroulement du secteur sur la surface du cône fait correspondre à L_1 une courbe L , qui conduirait la tige Z suivant la loi voulue, si celle-ci était terminée en A par un simple point. Les tracés nécessaires ont été effectués pour les points $M_1N_1P_1$, reportés sur la surface du cône en MNP .

Pratiquement, la tige guidée est terminée par un galet conique, qui s'engage dans une rainure dont les bords sont équidistants de la courbe L . On peut construire les transformées des lignes qui limitent cette rainure en traçant sur le développement l'enveloppe d'une série de circonférences ayant pour rayon celui du galet en A , et pour centres les différents points de L_1 ; on les reporte sur la surface du cône en procédant comme pour cette dernière courbe. Comme dans le cas précédent, on peut supprimer toute la partie du cône qui se trouve d'un même côté de la rainure, à la condition de maintenir la tige guidée en contact avec la partie conservée par un ressort ou un contre-poids. C'est ce qui a été fait dans la figure.

§ III. — *Excentriques conduisant un cadre.*



519. Les cames qui, comme la came en cœur, conduisent une tige par l'intermédiaire d'un galet, exercent généralement leur action sur celui-ci dans une direction oblique à celle du mouvement rectiligne. Il en résulte une pression de la tige contre ses guides, qui peut devenir considérable. Cet inconvénient disparaît lorsqu'on emploie les excentriques à cadre. La tige à conduire est alors invariablement liée à un cadre rectangulaire, dans l'intérieur duquel tourne l'excentrique, et celui-ci presse alternativement les deux côtés du cadre qui sont perpendiculaires à la direction du mouvement. Pour qu'il n'y ait pas d'interruption dans la transmission, il est nécessaire que l'excentrique reste tangent à ces côtés, quelle que soit la position qu'il occupe; sa forme doit donc être telle que la distance de deux tangentes parallèles soit constante.

520. Tracé d'un excentrique à cadre, d'après la loi du mouvement à communiquer à la tige guidée.

Soit o (fig. 509) la projection de l'axe de l'excentrique sur le plan de la figure. Décrivons, de ce point comme centre, une circonférence de rayon arbitraire oA , et rectifions-la après l'avoir partagée en un nombre quelconque de parties égales. Construisons sur la droite obtenue, considérée comme axe des temps, la courbe des espaces IJ du mouvement à produire (fig. 510), et portons ses ordonnées sur les pro-

longements des rayons correspondants de la circonférence o . Par les points $abc\dots$ ainsi déterminés, menons des perpendiculaires aux rayons $oa, ob, oc\dots$ et traçons leur enveloppe S . Pour que cette courbe satisfasse à la condition essentielle des tangentes qui lui permet d'être embrassée par un cadre rectangulaire, il est nécessaire et suffisant que la somme de deux ordonnées de la courbe IJ , séparées l'une de l'autre par un intervalle égal à la moitié de la circonférence o rectifiée, soit constante. En supposant qu'il en soit ainsi, le profil S conduit bien la tige suivant la loi voulue, car, au moment où les points 1, 2, ... viennent successivement prendre la place du point A , le côté inférieur du cadre a parcouru, au-dessous de sa position primitive, des chemins

$$1 a = 11'$$

$$2 b = 22'$$

égaux aux ordonnées correspondantes de la courbe IJ .

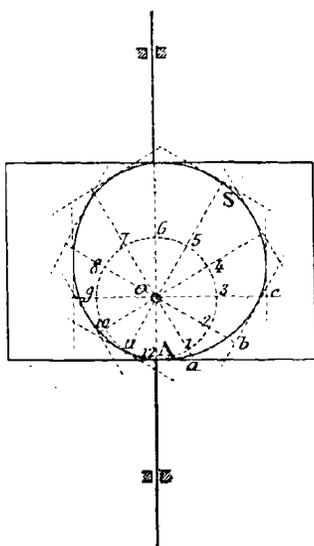


Fig. 509.

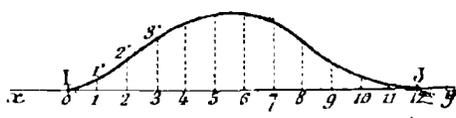


Fig. 510.

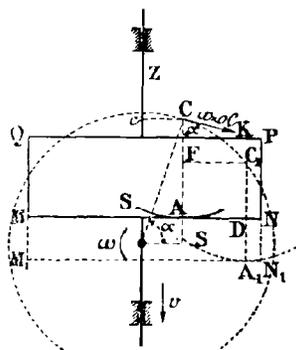


Fig. 511.

521. — Généralement l'excentrique est limité par des arcs de cercle. Son fonctionnement est alors basé sur le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsqu'un arc de cercle S , animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe o , presse une droite MN guidée de manière à ne pouvoir prendre qu'un mouvement de translation rectiligne perpendiculaire à sa direction, le déplacement de la droite est égal à la projection du chemin parcouru par le centre C de l'arc moteur sur la direction du mouvement rectiligne.*

Soient C et C_1 deux positions quelconques du centre de l'arc moteur, MN et M_1N_1 les positions correspondantes de la droite mobile, solidaire d'une tige guidée Z qui lui est perpendiculaire (fig. 511). Les rayons CA et C_1A_1 étant égaux et parallèles, si l'on retranche du premier la longueur FA , et du second la longueur égale C_1D , il reste

$$CF = DA_1$$

C. Q. F. D.

522. Conséquence. — Il résulte de ce théorème que, si l'arc moteur est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe o , les lois du mouvement de la tige guidée sont celles de la projection d'un mouvement circulaire uniforme sur un diamètre (*).

523. Excentrique circulaire à cadre rectangulaire.

Cet appareil se compose d'un disque circulaire S , excentré par rapport à l'axe o auquel il est invariablement relié (fig. 512), compris à l'intérieur d'un cadre rectangulaire $MNPQ$ solidaire de la tige guidée Z . Le centre C du disque décrit une circonférence γ de rayon $oC = d$, et le cadre se meut d'après les mêmes lois que la projection du point C sur la direction Z . En prenant comme instant initial celui où oC est parallèle à Z , pour origine des espaces le point C , et en supposant que l'arbre o tourne d'un mouvement uniforme, les lois du mouvement rectiligne sont :

$$\begin{cases} s = d(1 - \cos \omega t) \\ v = \omega d \sin \omega t \\ \varphi = \omega^2 d \cos \omega t \end{cases}$$

L'amplitude de la course est $2d$, et sa durée $\frac{\pi}{\omega}$.

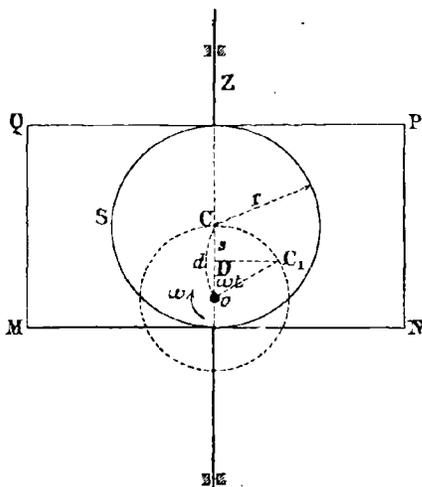


Fig. 512.

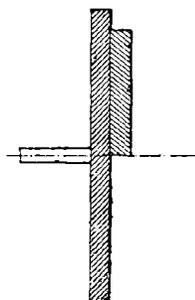


Fig. 513.

(*) Le théorème précédent et sa conséquence découlent du principe général démontré au paragraphe 245, d'après lequel on a, en désignant par ω la vitesse angulaire de rotation de l'arc S autour du point o , par v la vitesse de translation du cadre, et par I l'intersection de CA avec la perpendiculaire oI à la droite Z .

$$v = \omega \times oI$$

ou, en considérant le triangle rectangle oCI

$$v = \omega \times oC \cos \alpha$$

La vitesse du point C étant figurée par le vecteur $CK = \omega \times oC$, celle de sa projection c sur la droite Z est

$$v_1 = CK \cos KCA = \omega \times oC \cos \alpha$$

Donc $v = v_1$, d'où il résulte que les lois du mouvement du cadre sont les mêmes que celles du mouvement du point c .

Ces résultats étant indépendants du rayon r de l'excentrique, toutes les circonférences de centre C produisent le même mouvement alternatif de la tige guidée. De là résultent trois dispositions différentes :

1° $r < d$. Dans ce cas, le disque S est porté par une manivelle de centre o , et le système est identique au mécanisme étudié au paragraphe 493 ;

2° $r = d$. Le disque est alors fixé en saillie sur un plateau calé en porte-à-faux à l'extrémité de l'arbre o (fig. 513).

3° $r > d$. On peut percer un œil de centre o dans l'épaisseur du disque, et caler celui-ci en un point quelconque de l'arbre. Cette disposition est préférable à la précédente au point de vue de la solidité.

Dans tous les cas, il suffit, pour obtenir une course h de la tige guidée, de placer le centre du disque à une distance $d = \frac{h}{2}$ du point o .

524. Excentrique triangulaire.

Il est constitué par un triangle équilatéral AoB (fig. 514) aux côtés duquel on a substitué des arcs de cercle décrits des sommets opposés comme centres. Ce triangle est fixé en saillie sur un plateau, mobile autour d'un axe perpendiculaire à son plan et passant par le point o . La distance qui sépare un sommet quelconque d'une tangente à l'arc de cercle opposé étant égale au côté a du triangle primitif, le système peut être compris dans un cadre rectangulaire de hauteur a . Nous supposons que l'arbre moteur tourne d'un mouvement uniforme dans le sens indiqué par la flèche, et que la durée d'un tour soit représentée par la longueur rectifiée de la circonférence oA .

L'excentrique, partant de la position AoB , presse le bord supérieur du cadre par son sommet B , et la tige commence sa course ascendante. D'après le théorème fondamental (524), son mouvement est identique à celui de la projection du point A sur la droite Z pendant que ce point parcourt l'arc AA_1 . L'élévation totale du cadre pendant cette période

est $A_2 = \frac{a}{2}$. Pendant le second sixième de

tour, l'excentrique, partant de la position A_1oB , presse le bord supérieur du cadre par son sommet B_1 , que l'on peut considérer comme un cercle de rayon nul ; la tige continue à monter, et son mouvement est identique à celui de la projection du point B_1 sur Z , pendant que ce point parcourt l'arc B_1B_2 . Le cadre s'élève d'une quantité $\alpha_2 B_2 = \frac{a}{2}$.

Pendant la fraction de tour suivante, l'excentrique agit par son côté A_2B_2 dont le centre o est immobile. La tige guidée reste en repos, jusqu'à ce que le triangle soit venu occuper la position A_3oB_3 . A partir de cet instant, l'arc oB_3 presse le bord inférieur du cadre, et la course descendante commence. Le mouvement de la tige guidée est identique à celui de la projection du point A_3 sur la direction Z , pendant que ce point parcourt l'arc A_3B_3 , et le

système descend d'une quantité $A_3\alpha_2 = \frac{a}{2}$ pendant la quatrième fraction de tour.

Au début de la fraction de tour suivante, l'excentrique occupe la position A_4oB_4 et

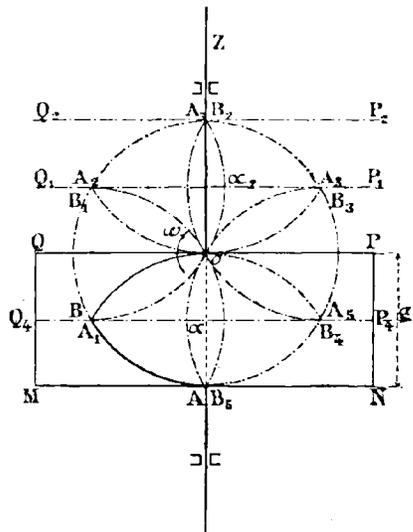


Fig. 514.

presse le bord inférieur du cadre par son sommet B_1 . La tige descend d'une quantité $\alpha A = \frac{a}{2}$, et son mouvement est identique à celui de la projection du point B_1 sur Z , pendant que ce point parcourt l'arc B_1B_3 . Enfin, le cadre reste stationnaire pendant le dernier sixième de tour de l'arbre. L'amplitude de chaque course alternative étant égale au côté du triangle équilatéral primitif, il est facile de construire le mécanisme de manière à lui assurer une course d'étendue déterminée.

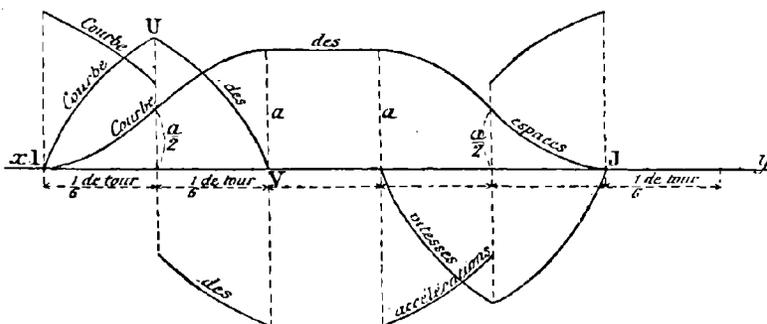


Fig. 515.

Les courbes du mouvement de la tige (fig. 515) se composent d'arcs de sinusoides correspondant aux périodes de mouvement, et de segments de droites parallèles à l'axe des temps ou confondus avec lui, correspondant aux périodes de repos. Il faut observer que les courbes des vitesses et des accélérations sont discontinues. Cela tient à ce que les arcs IU et UV par exemple, qui appartiennent à la courbe des vitesses

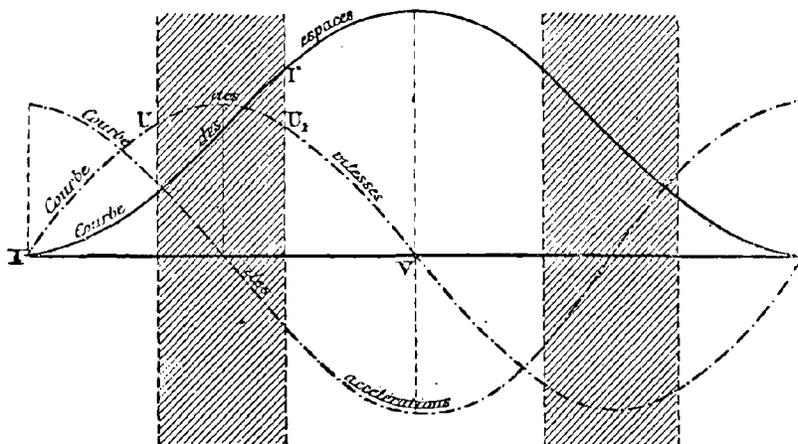


Fig. 516.

du mouvement du point A projeté sur Z, se rapportent au déplacement du mobile sur les arcs non contigus AA_1 et A_2A_3 ... Il faut donc enlever de la courbe des vitesses complète, représentée fig. 516, la partie UU_1 qui correspond au déplacement du point A sur l'arc A_1A_2 , de sorte que le raccordement des arcs IU et U_1V n'a plus lieu. La discontinuité est encore plus apparente sur la courbe des accélérations.

525. Autre tracé de l'excentrique triangulaire.

A cause de la coïncidence du sommet o avec l'axe de rotation, le plateau qui supporte l'excentrique triangulaire doit être placé en porte-à-faux, à l'extrémité de l'arbre. On peut modifier le tracé de manière à supprimer cet inconvénient.

Décrivons d'abord autour du point o une circonférence oA , (fig. 517), de diamètre un peu supérieur à celui de l'arbre, portons en AB la course à produire h , et décrivons de o comme centre une circonférence de rayon oB . Formons un contour curviligne :

1° Par un arc de cercle CD de centre B , tangent en C à la circonférence oA .

2° Par un arc de cercle EB , égal au précédent, décrit de D comme centre, et tangent en E à la circonférence oA .

3° Par les arcs CE et BD de centre o .

L'excentrique ainsi obtenu peut être embrassé par un cadre rectangulaire rigide, car la distance, soit de deux tangentes parallèles menées aux arcs CE , BD , soit de l'un des sommets B ou D à une tangente à l'arc opposé, est évidemment égale à BC . Enfin, en le perceant d'un trou de centre o , on peut le caler en un point quelconque de l'arbre.

On étudie comme dans le cas précédent les différentes phases du mouvement de la tige guidée. Les positions remarquables de l'excentrique sont BoD , B_1oD_1 , B_2oD_2 , B_3oD_3 , B_4oD_4 , B_5oD_5 . Observons que les périodes de repos correspondent au contact

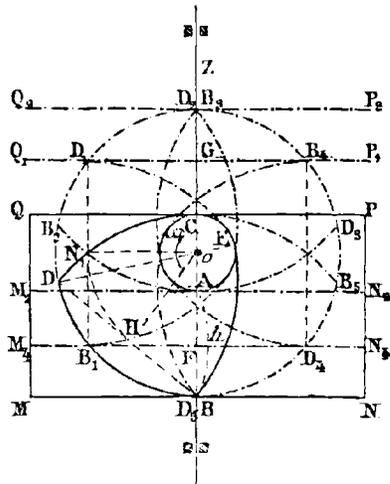


Fig. 517.

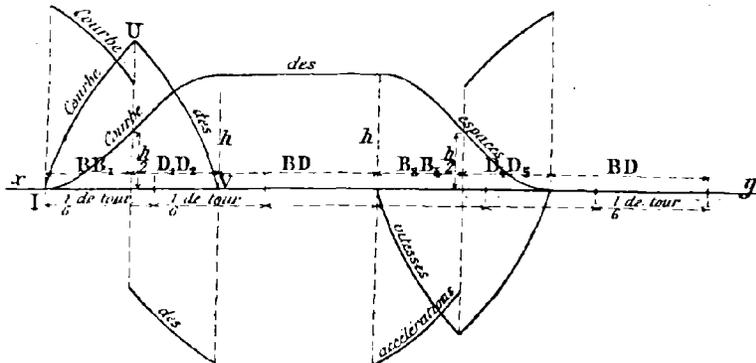


Fig. 518.

des arcs BD et CE avec les côtés du cadre. Leur durée est proportionnelle à la longueur de l'arc BD . Or, la relation

$$BD = BC > oB$$

montre que l'arc BD est plus grand que le sixième de la circonférence oB . La modification apportée au tracé a donc pour résultat d'augmenter la durée des périodes de stationnement du cadre. Les courbes représentatives des lois du mouvement sont encore formées d'arcs de sinusoides, et de segments de droites parallèles à l'axe des temps ou confondus avec lui (fig. 518).

526. **Excentrique Trézel.**

Une autre modification du tracé de l'excentrique triangulaire consiste à substituer aux angles vifs, qui s'émousent rapidement, de petits arcs de cercle, qui se raccordent avec les autres parties curvilignes du contour. Nous supposons donnés :

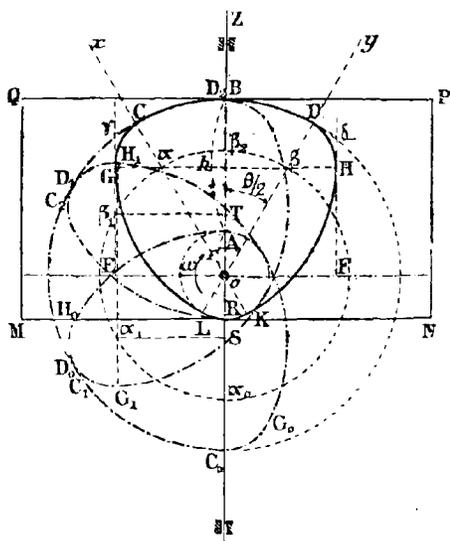


Fig. 519.

des longueurs γG et δH égales à C_γ et D_δ , et joignons GH . Cette droite coupe ox et oy aux points α et β , qui sont les centres des arcs de raccordement CG , DH en même temps que des grands arcs latéraux GL et HK . D'après la construction employée, deux arcs consécutifs sont tangents; de plus, la distance de deux tangentes parallèles est constamment égale à BR , de sorte que l'excentrique peut être compris dans un cadre rectangulaire $MNPQ$, dont le côté $NP = BR$.

Considérons le système dans la position oC_0D_0 qui correspond au début de la course ascendante. L'arc AH_0 , dont le centre est α_0 , presse le bord supérieur du cadre, et le mouvement de la tige guidée est identique à celui de la projection du point α_0 sur la droite Z , jusqu'au moment où GH vient prendre la position G_1H_1 parallèle à Z . La durée de cette première phase du mouvement est proportionnelle à l'arc $\alpha_0\alpha_1$, et l'élévation correspondante du cadre est α_0S . La came presse ensuite le bord supérieur du cadre par l'arc de raccordement D_1H_1 dont le centre est β_1 , jusqu'à ce qu'elle occupe la position oC_2D_2 . La tige se déplace d'après la même loi que la projection du point β_1 sur Z . Cette deuxième phase du mouvement, dont la durée est proportionnelle à l'arc $\beta_1\beta_2$, correspond à une course ascendante égale à $T\beta_2$. Les points α_1 et β_1 étant symétriques par rapport à oE , on a

$$\alpha_0\alpha_1 = \beta_1\beta_2$$

et

$$T\beta_2 = \alpha_0S$$

ce qui prouve que les deux parties de l'ascension sont égales et de même durée.

Quand l'excentrique dépasse la position oC_2D_2 , la tige reste immobile, puisque le centre de l'arc moteur est alors en o . La durée de ce repos, qui est celle du passage de l'arc $C_2D_2 = C_1D_1$ sous le côté PQ du cadre, est proportionnelle à l'arc $\alpha_1\beta_1 = \alpha\beta$. On retrouve les mêmes phases dans le mouvement descendant.

Il faut observer que la durée des périodes de repos dépend de l'angle θ . On peut donc la faire varier entre certaines limites, ce qui n'a pas lieu avec les autres tracés de l'excentrique triangulaire.

1° La course h de la tige ;

2° Le plus petit rayon $r = oA$ de la came, légèrement supérieur à celui de l'arbre ;

3° L'angle θ formé par les droites qui joignent le pied de l'axe aux centres des arcs de raccordement. Nous le supposons construit en xy (fig. 519), dans la position où la droite Z le partage en deux parties égales.

Prolongeons oA d'une longueur $AB = h$, décrivons la circonférence de rayon oB qui coupe ox et oy en C et D , et traçons les tangentes C_γ , D_δ . Portons sur une perpendiculaire à oB des longueurs

$$oE = oF = \frac{h}{2} + r = \frac{BR}{2}$$

et menons par les points E , F des parallèles à oB , qui rencontrent C_γ et D_δ aux points γ et δ . Portons enfin sur γE et δF

MÉCANISMES A LIEN RIGIDE

DANS LESQUELS

LE SENS DE LA TRANSMISSION VARIE PERIODIQUEMENT

LE RAPPORT DES VITESSES EST GÉNÉRALEMENT VARIABLE

CHAPITRE XIX

MOUVEMENTS RECTILIGNES ALTERNATIFS A RETOUR RAPIDE

527. Dans certaines machines, telles que les étaux-limeurs, l'outil reçoit un mouvement rectiligne alternatif qui le déplace devant la pièce à travailler. A chaque course d'aller, il enlève un copeau de matière, après quoi la course de retour le ramène dans sa position primitive. Pour accroître le rendement de la machine, on a recherché des dispositions propres à augmenter la vitesse de retour. L'une d'elles a déjà été décrite comme application de la théorie des engrenages à rapport de vitesses variable. Nous en décrirons ici quelques autres.

528. Mouvement alternatif à retour rapide produit par deux manivelles à rotation continue.

Considérons deux manivelles oA et $o'A'$ (fig. 520) qui remplissent les conditions de rotation continue posées au paragraphe 433. La longueur de la bielle, qui doit être comprise entre KC et KF , peut être supposée égale aux segments $CD = EF$, qui joignent aux extrémités du diamètre CF les points de rencontre de la circonférence o avec la perpendiculaire élevée sur la ligne des centres par le point o' , car on a

$$CD > CK$$

et

$$EF < FK$$

Articulons une bielle $A'B$, d'une part à la manivelle $o'A'$, d'autre part à une tige BB maintenue par des guides sur la direction oo' . Il est clair que la rotation des manivelles donne au point B un mouvement rectiligne alternatif, dont la longueur de course est $CF = 2 o'A'$. Si la manivelle motrice oA tourne d'un mouvement uniforme, dans le sens f , en partant de la position oD , la manivelle conduite part de $o'C$, et le point B commence sa course d'aller. Il l'accomplit en entier pendant que le point A

parcourt l'arc DGE, dont l'extrémité E correspond à la position F du point A'. Puis, la rotation des manivelles continuant, la tige BB' revient en sens inverse tant que le point A se meut sur l'arc EKD. Les durées des phases du mouvement étant proportionnelles aux longueurs des arcs DGE et EKD, le retour s'effectue plus rapidement que l'aller (*).

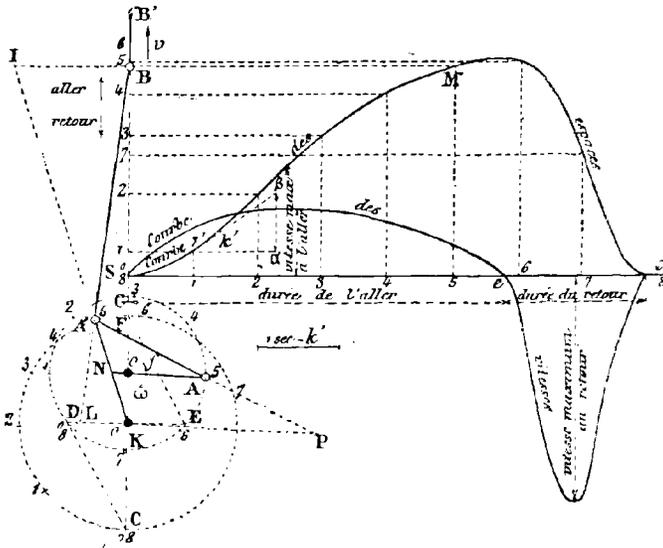


Fig. 520.

La figure 520 représente les courbes des espaces et des vitesses du mouvement du point B. Pour construire la première, on a pris comme origine des espaces du

(*) On peut aussi employer l'engrenage elliptique à la production d'un mouvement rectiligne alternatif à retour rapide.

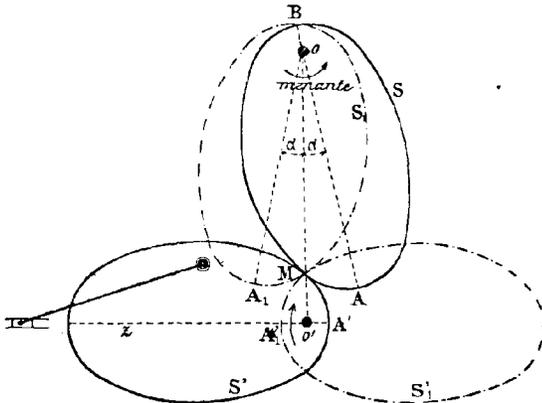


Fig. 521.

Soient S_1 et S'_1 (fig 521) les positions des ellipses primitives à l'instant où le grand axe de la menée S'_1 est perpendiculaire à la ligne des centres. Après que S'_1 a accompli un quart de révolution dans le sens de la flèche, le point de contact M s'est transporté aux sommets A_1 et A'_1 des grands axes, de sorte que l'ellipse menante a tourné de l'angle $M_0A_1 = \alpha$. Il en est encore de même pendant le quart de révolution suivant, qui amène les courbes dans les positions S et S' . Enfin, pendant la demi-révolution restante, l'axe moteur tourne de $2(\pi - \alpha)$. Si l'on articule, en un point de l'ellipse menée, une bielle reliée à un coulisseau guidé dans la direction $o'Z$ perpendiculaire à la ligne des

centres, celui-ci prendra un mouvement alternatif, et les durées de ses deux courses seront dans le rapport $\frac{\alpha}{\pi - \alpha}$ si le mouvement de l'ellipse motrice est uniforme.

Le même mouvement est également obtenu si l'on remplace l'engrenage elliptique par les manivelles antirotatives équivalentes.

mouvement du point A la position D qui correspond au début de la course d'aller, et l'on a partagé la circonférence o en huit parties égales. Les positions correspondantes des points A et B ont été déterminées par deux séries d'arcs de cercle, ayant pour rayons respectifs les longueurs AA' et A'B des deux bielles. Enfin, la longueur de la circonférence o , rectifiée avec ses points de division sur une droite Sx perpendiculaire à oo' , représente la durée d'un tour de la manivelle motrice. En menant par les positions successives du point B des parallèles, telles que BM, à l'axe des temps, jusqu'à leur intersection avec les ordonnées correspondantes, on obtient une suite de points M dont le lieu géométrique est la courbe cherchée. On en déduit la courbe des vitesses par les constructions indiquées en *Cinématique théorique*. On voit que les vitesses maxima d'aller et de retour sont à peu près dans le rapport de 1 à 3,5, mais ce résultat varie avec les proportions des divers éléments du système.

On peut exprimer la vitesse v du point B en fonction de la vitesse angulaire ω de la manivelle motrice. En appliquant le théorème de Chasles au déplacement élémentaire de la bielle A'B, dont le centre instantané de rotation est en I, à la rencontre de $o'A'$ et de la perpendiculaire BI à la droite Boo' , on a, $v_{a'}$ désignant la vitesse linéaire du point A',

$$\frac{v}{v_{a'}} = \frac{IB}{IA'} = \frac{o'L}{o'A'} \quad (1)$$

D'autre part, le centre instantané de rotation de la bielle AA' se trouve à l'intersection N des deux manivelles; on a donc, v_a représentant la vitesse linéaire du point A

$$\frac{v_{a'}}{v_a} = \frac{NA'}{NA} = \frac{o'A'}{o'P} \quad (2)$$

Enfin
$$v_a = \omega \times oA \quad (3)$$

En multipliant membre à membre les égalités (1) (2) et (3), il vient

$$v = \omega \times oA \times \frac{o'L}{o'P}$$

Pour une vitesse motrice donnée, la vitesse du point B dépend seulement du rapport $\frac{o'L}{o'P}$, auquel elle est proportionnelle.

Remarque. Pour faire varier la longueur de course du point B, égale, comme on l'a vu, à $2 o'A'$, il faudrait relier la manivelle $o'A'$ à un plateau de centre o' , et articuler la bielle A'B en des points de ce plateau rapprochés du centre pour les petites courses, éloignés pour les grandes.

529. Mouvement rectiligne alternatif à retour rapide produit par une manivelle à coulisse.

Le mécanisme constitué par une manivelle et une coulisse peut être employé à la production d'un mouvement rectiligne alternatif à retour rapide, en reliant par une bielle l'extrémité de la coulisse à une tige guidée. Les trois dispositions suivantes sont utilisées dans les étaux-limeurs.

530. Emploi d'une coulisse à rotation continue. — Premier genre de commande Whitworth.

Dans ce mécanisme, une manivelle oM (fig. 522) dont l'arbre reçoit un mouvement de rotation uniforme par des roues dentées P, P', commande une coulisse $o'X$ mobile autour d'un point o' intérieur à la circonférence décrite par le point M. Une bielle AB,

articulée en A à un point fixe de la coulisse, est reliée à son extrémité B au chariot porte-outil. Celui-ci est maintenu par des glissières sur une droite $o'Z$ perpendiculaire à la ligne des centres. L'effet de cette disposition est évidemment d'imprimer au chariot un mouvement de translation rectiligne, dont l'amplitude, égale au diamètre A_0A_1 de la circonférence décrite par le point A, est double de la distance du coulisseau au centre de rotation de la coulisse. On peut donc régler la course d'après le travail à exécuter, par un simple déplacement du coulisseau (*).

Prenons pour origine des espaces, dans le mouvement du point M, l'un des points d'intersection de $o'Z$ avec la circonférence oM, N par exemple, pour origine des temps

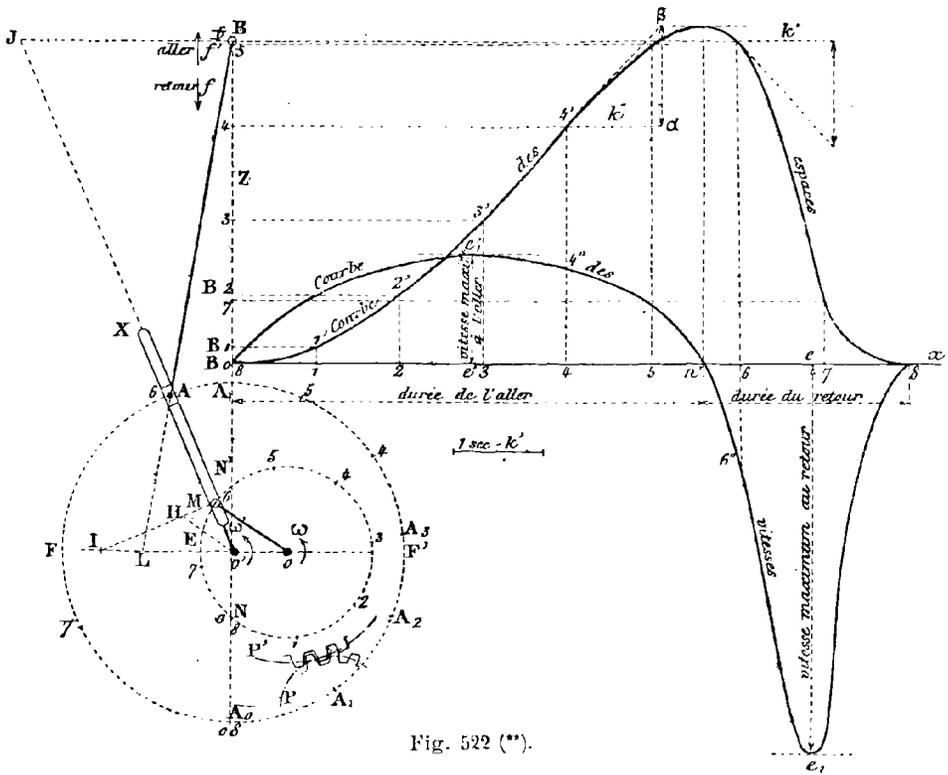


Fig. 522 (**).

l'heure de son passage en N, et soient A_0, B_0 les origines des espaces correspondantes pour les mouvements des points A et B. Pendant que le bouton de la manivelle motrice parcourt l'arc NEN' , le point A décrit la demi-circonférence $A_0F'A_1$, et le chariot effectue sa course d'aller, égale à A_0A_1 , dans le sens f' ; il accomplit sa course de retour pendant que la manivelle motrice parcourt l'arc $N'EN$. Les durées de ces deux

(*) Il faut observer que, pour une même vitesse motrice, la durée totale d'un aller et d'un retour consécutifs reste la même quelle que soit la longueur de la course; la vitesse moyenne de l'outil serait donc, dans ces conditions, d'autant moindre que la course serait plus courte. Aussi commande-t-on l'arbre moteur, soit par poulies étagées, soit par harnais d'engrenages (395), de telle façon que ses plus grandes vitesses correspondent aux plus petites courses, et inversement. Cette remarque est applicable à la plupart des mouvements à course variable.

(**) Placer la lettre E' à l'extrémité du diamètre Eo .

phases de son mouvement étant proportionnelles aux longueurs des arcs $NE'N'$, $N'EN$, le retour est plus rapide que l'aller (*).

La figure 522 représente les courbes des espaces et des vitesses du mouvement du point B. Pour construire la première, on a partagé la circonférence oM en huit parties égales à partir du point N, et l'on a déterminé les positions correspondantes du point A en traçant les droites $o'N$, $o'1$, $o'2$... jusqu'à leurs points de rencontre avec la circonférence $o'A$. Une série d'arcs de cercle de rayon AB , décrits des points $A_0 A_1 A_2$... comme centres, ont donné ensuite les positions $B_0 B_1 B_2$... du point B; le reste de la figure est obtenu comme au paragraphe précédent.

La courbe des vitesses rencontre l'axe des temps B_0x au point n' , qui correspond à l'instant où le mouvement du point B change de sens. Comme le point M est alors en N' , la longueur $B_0 n'$ est égale à l'arc $NE'N'$. Les ordonnées maxima ee_1 , $e'e_1$ montrent que la vitesse maximum est environ trois fois plus grande au retour qu'à l'aller.

On peut exprimer la vitesse v_b du chariot en fonction de la vitesse motrice ω et des dimensions du mécanisme. Si ω' désigne la vitesse angulaire de la coulisse dans la position $o'X$, et v_a la vitesse linéaire du point A, on a (489), en menant MI perpendiculaire sur $o'X$

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{oI}{o'I} = \frac{oM}{o'H}$$

$$v_a = \omega' \times o'A$$

De plus, le centre instantané de rotation de AB se trouve à l'intersection J de $o'A$ et de la perpendiculaire BJ à $o'Z$; par conséquent

$$\frac{v_b}{v_a} = \frac{JB}{JA} = \frac{o'L}{o'A}$$

D'où, en multipliant membre à membre

$$\frac{v_b}{\omega} = \frac{oM \times o'L}{o'H}$$

et enfin

$$v_b = \omega \times oM \times \frac{o'L}{o'H}$$

On voit que la vitesse du point B est proportionnelle au rapport $\frac{o'L}{o'H}$.

Ce genre de commande Whitworth est employé dans les étaux-limeurs Flather, dans ceux de la Société Maubeugeoise, etc...

531. Emploi d'une coulisse à rotation alternative. — Second genre de commande Whitworth.

La coulisse possède un mouvement alternatif quand son centre est extérieur à la circonférence décrite par le bouton de la manivelle motrice, que nous supposons encore animée d'un mouvement de rotation uniforme. Une bielle AB (fig. 523) est articulée comme précédemment, d'une part en un point A de la coulisse, d'autre part au chariot porte-outil, que des glissières maintiennent sur une direction fixe BZ perpendiculaire à oo' . Le point B reçoit ainsi un mouvement rectiligne alternatif, dont l'am-

(*) On pourrait changer le rapport des durées des courses en remplaçant la manivelle oM par un plateau-manivelle, de centre o .

plitude, égale à la corde de l'arc décrit par le point A, dépend à la fois de la position de ce point sur la coulisse, et de la longueur oM de la manivelle.

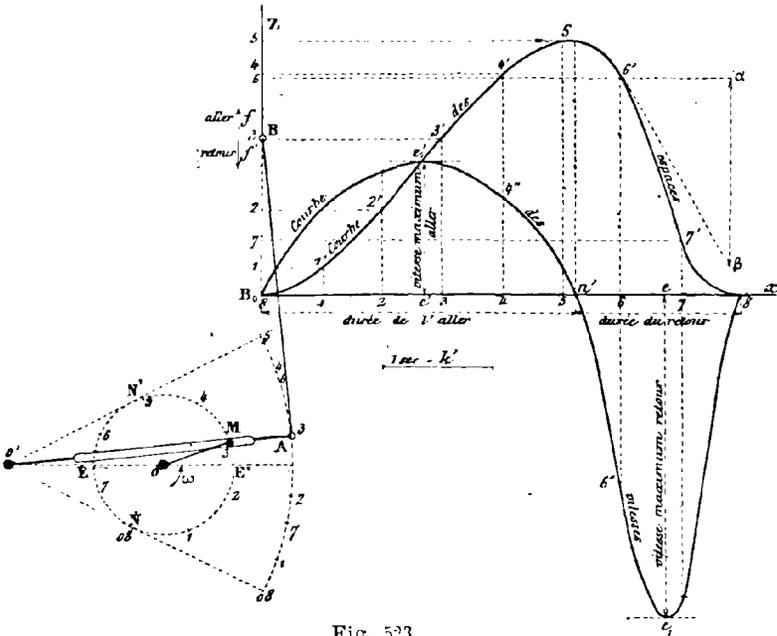


Fig. 523.

Pendant que le point M parcourt l'arc $NE'N'$, le point B accomplit sa course d'aller dans le sens f ; sa course de retour s'effectue pendant le parcours de l'arc $N'EN$. Comme les durées de ces deux phases du mouvement sont proportionnelles aux arcs $NE'N'$, $N'EN$, la seconde est plus courte que la première.

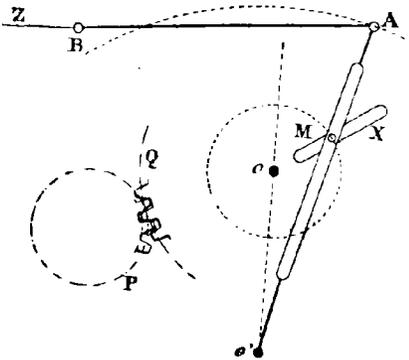


Fig. 524.

La figure 523 représente les lois graphiques du mouvement du point B, construites comme dans le cas précédent. On trouve aisément, par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 530, l'expression de la vitesse du point B.

Pour faire varier la course de l'outil, on dispose le système de manière à pouvoir modifier à volonté la longueur oM . Dans ce but, on substitue à la manivelle motrice une coulisse oX (fig. 524), et à son bouton M un coulisseau, que l'on fixe sur oX à une distance quelconque du point o , tout en le laissant glisser librement dans oA . La distance oo' doit être supérieure à la plus grande valeur de oM . Un mouvement uniforme est communiqué à oX par des roues dentées P et Q.

Cette seconde variété de commande Whitworth est employée dans les étaux-limeurs systèmes Bouhey, Pratt et Whitney, Gould et Eberhardt, etc..... La vitesse maximum de retour vaut de deux à trois fois celle de l'aller.

532. Combinaison des deux genres de commande Whitworth. — Mécanismes à retour rapide des étaux-limeurs Ducommun et Schultz.

On emploie dans les étaux-limeurs Ducommun une commande Whitworth $o'X$, o^A (fig. 525), dans laquelle la manivelle de longueur variable $o'X$ est calée à angle

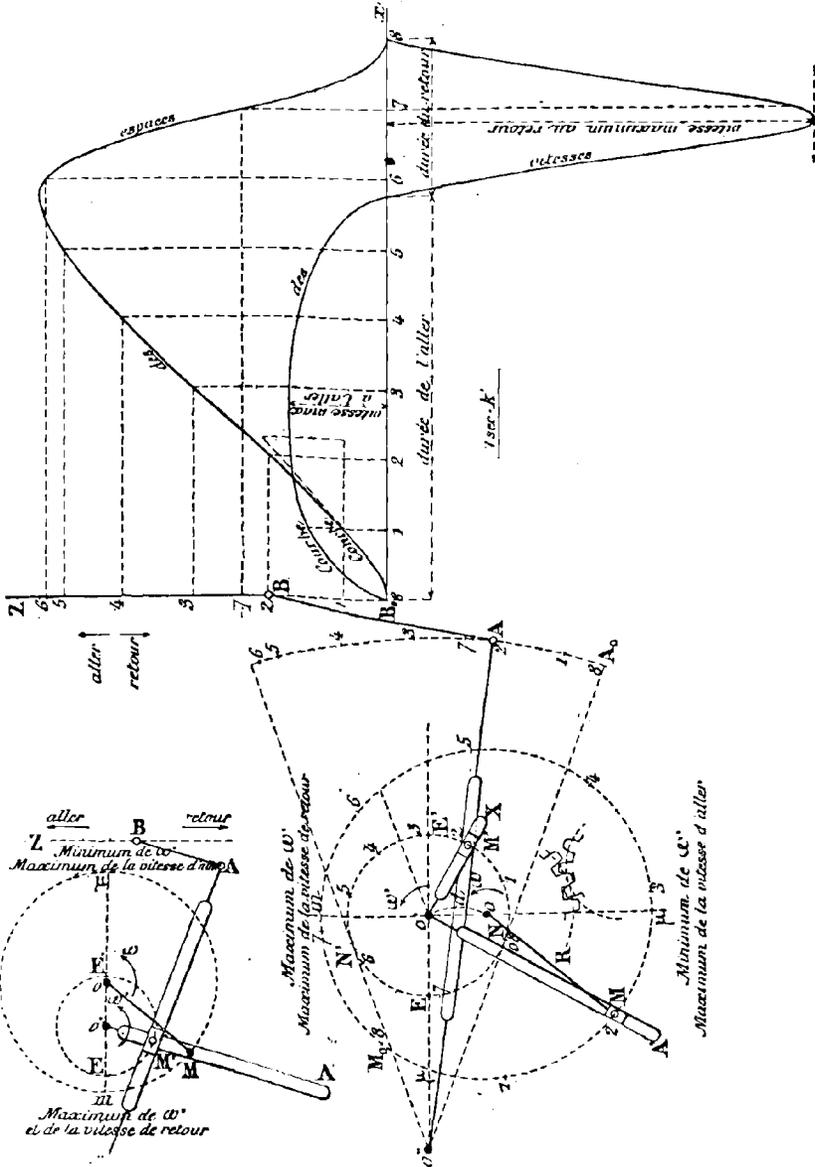


Fig. 525.

Fig. 526.

droit sur une coulisse à rotation continue $o'A$, conduite elle-même par une manivelle oM qui tourne d'un mouvement uniforme. D'après l'étude des propriétés du mécanisme ($oM, o'A$) faite au paragraphe 489, la vitesse angulaire ω du système rigide

A'o'X décroît entre les limites

$$\omega \times \frac{om}{o'm} = \frac{\omega R}{R-d} \quad \text{et} \quad \omega \times \frac{o\mu}{o'\mu} = \frac{\omega R}{R+d}$$

pendant que le bouton M de la manivelle motrice parcourt la demi-circonférence $mM\mu$, et croît ensuite de $\frac{\omega R}{R+d}$ à $\frac{\omega R}{R-d}$ pendant qu'il parcourt la demi-circonférence μMm . Or, quand le point M occupe la position m , M' est en E sur la circonférence o' , et l'étude du système ($o'M'$, o^A) faite au paragraphe 490 montre que la coulisse oscillante o^A aurait à ce moment sa vitesse maximum de retour, si ω' était restée constante. On conçoit que la coïncidence du maximum de ω' avec celui de la vitesse de retour a pour effet de donner à ce dernier une valeur plus grande que dans une commande Whitworth ordinaire.

Quand le point M occupe la position μ , M' est en E' et la coulisse o^A aurait sa vitesse maximum d'aller (490), si ω' était restée constante. La coïncidence du minimum de ω' avec le maximum de la vitesse d'aller modère évidemment les variations de cette dernière, et donne plus d'uniformité au mouvement de l'outil pendant la période de travail. En outre, le rapport de la vitesse maximum de retour à celle de l'aller se trouve augmenté.

Les courbes représentatives des lois du mouvement du point B, construites (fig. 525) par une combinaison des tracés employés dans les deux commandes Whitworth, corroborent ces conclusions. La partie de la courbe des vitesses qui correspond à l'aller est très aplatie, et se rapproche sensiblement, sur une assez longue étendue, d'une droite parallèle à l'axe des temps. La vitesse maximum de retour vaut environ cinq fois celle de l'aller.

On obtient une disposition un peu plus simple en plaçant les trois centres o , o' , o'' sur la même droite (fig. 526), perpendiculaire à la direction BZ du mouvement à produire. Dans ce cas, la coulisse à rotation alternative o^A est commandée par un tourillon M' fixé sur la coulisse à rotation continue o^A' , qui est elle-même entraînée par la manivelle à mouvement uniforme oM . En supposant que les mouvements s'effectuent dans les sens indiqués, on voit que ω' prend son maximum en même temps que la vitesse de retour de la coulisse o^A , et son minimum quand la vitesse d'aller est maximum. Les propriétés caractéristiques du mécanisme précédent sont donc conservées.

Les figures 527 et 528 représentent la disposition adoptée dans les étaux-limeurs Schultz. Un mouvement de rotation uniforme, communiqué à l'arbre 9 par les poulies étagées 22, est transmis au plateau 19, mobile autour de l'axe fixe 7, par les roues dentées 23-24. Un tourillon 20, fixé au plateau 19, commande la coulisse à rotation continue 17-18, mobile autour de l'axe fixe 2. Dans la partie évidée de cette coulisse est logée une vis 16, dont l'écrou 14 est solidaire d'un tourillon 1, qui glisse librement dans le levier oscillant 15, mobile autour du centre 4. Une petite bielle 5-6 relie l'extrémité de la coulisse 15 au chariot porte-outil. On retrouve ainsi tous les organes représentés schématiquement dans la figure 526.

La course de l'outil est d'autant plus grande que le tourillon 1 est plus éloigné de l'axe 2. (Ces éléments sont désignés par M' et o' dans la figure 526). Pour la régler, on a calé sur la vis 16 un pignon conique 12, qui engrène avec un pignon égal 11 solidaire de l'axe 2. Un mouvement de rotation, donné à celui-ci par une manivelle placée en 13, se transmet à la vis 16, et provoque le déplacement de l'écrou 14 qui entraîne avec lui le tourillon 1. Cette manœuvre peut s'exécuter pendant la marche de la machine.

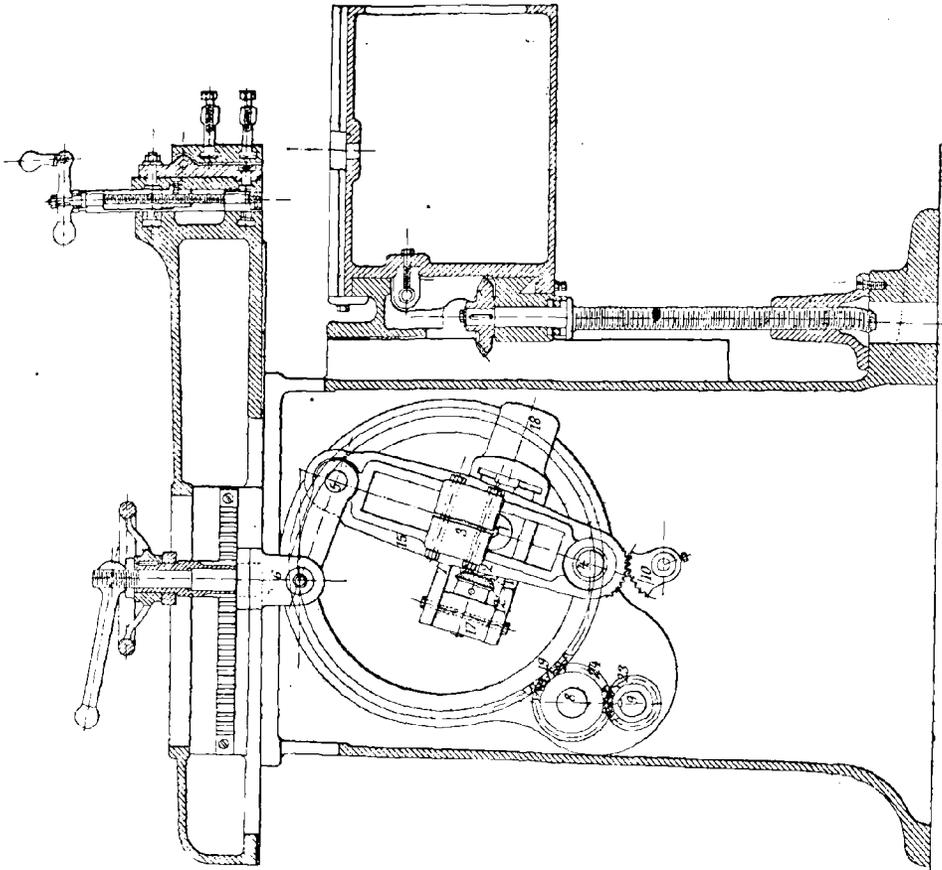


Fig. 538.

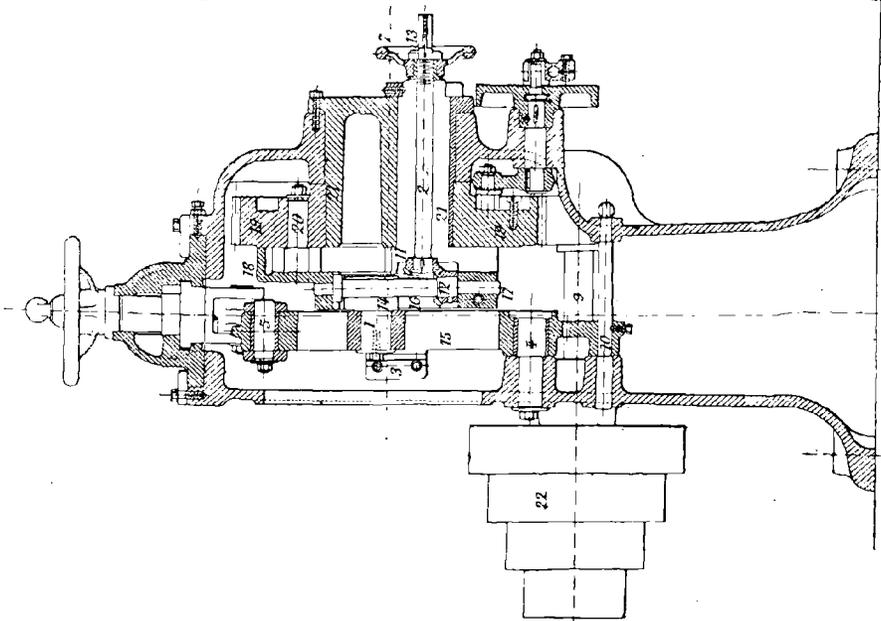


Fig. 537.

533. Production d'un mouvement rectiligne alternatif à retour rapide par engrenages. Mécanisme de commande d'une raboteuse.

Pour produire un mouvement rectiligne alternatif à retour rapide par engrenages, il suffit de relier la pièce mobile à deux équipages de roues dentées, de raisons différentes, et de disposer le mécanisme de manière que la combinaison la plus lente commande le mouvement pendant la course de travail, et la plus rapide pendant la course de retour. La disposition suivante est fréquemment employée dans la commande des tables de raboteuses.

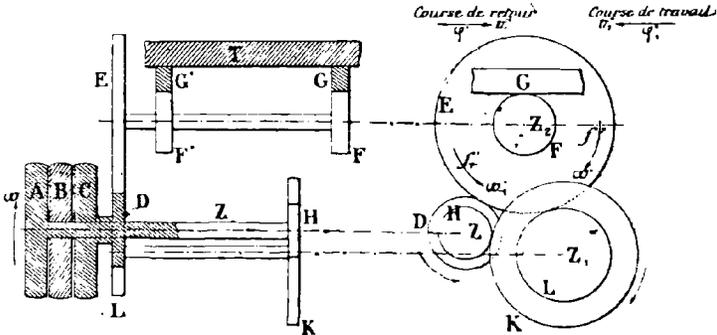


Fig. 529.

La partie inférieure de la table est solidaire de deux crémaillères G et G' (fig. 529), menées par des pignons égaux F et F', dont l'axe commun Z₂ est entraîné par une roue E, engrenant avec deux autres pignons D et L. Le pignon D est solidaire d'une poulie C, et le système CD est traversé à frottement doux par un arbre concentrique Z, aux extrémités duquel sont calées une poulie A, de même diamètre que C, et une roue dentée H. Un arbre Z₁, parallèle à Z, porte la roue L engrenant avec E, et une seconde

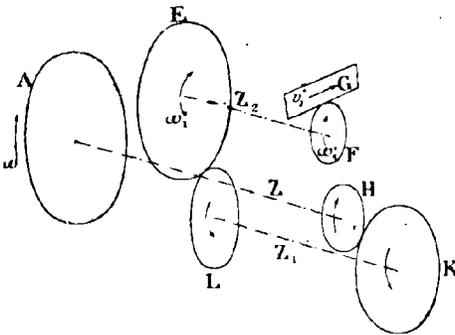


Fig. 530.

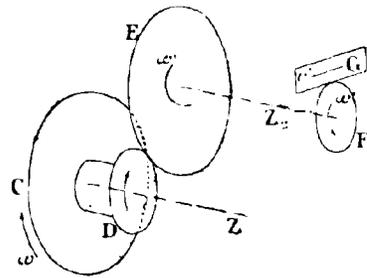


Fig. 531.

roue K engrenant avec H. Entre les poulies A et C est intercalée une poulie égale, B, folle sur l'arbre Z, et indépendante des deux autres. Quand la courroie motrice est placée sur C, la roue E est commandée directement par le pignon D (fig. 531), et le système (L, K, H, A) tourne à vide ; la vitesse angulaire ω' du pignon F est donnée par la relation

$$\frac{\omega'}{\omega} = - \frac{D}{E}$$

ce qui correspond à une vitesse v' de la table, dirigée dans le sens φ' , et égale, en valeur absolue, à

$$v' = \frac{\omega DFM}{2E}$$

M désignant le module des pignons et crémaillères (F, G). (F', G'). Si, au contraire, la courroie est sur A, la roue E est commandée par l'intermédiaire des roues H, K, L, (fig. 530), et la vitesse angulaire ω'_1 du pignon F est donnée par la relation

$$\frac{\omega'_1}{\omega} = \frac{HL}{KE}$$

ce qui correspond à une vitesse v'_1 de la table, dirigée dans le sens φ'_1 , et égale à

$$v'_1 = \frac{\omega HLFM}{2KE}$$

Le rapport des vitesses est, en valeur absolue,

$$\frac{v'}{v'_1} = \frac{DK}{HL}$$

Si les nombres de dents sont tels que l'on ait $DK < HL$, v'_1 est supérieure à v' ; la courroie doit être placée sur la poulie C pendant la course de travail, et sur la poulie A pendant la course de retour. Enfin, quand la courroie est sur la poulie B, la table n'est pas entraînée.

La machine est agencée de manière à transférer automatiquement la courroie de

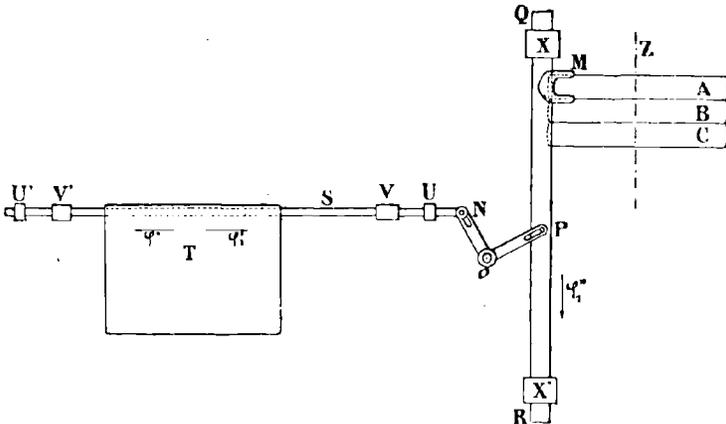


Fig. 532.

A en C, ou inversement. A cet effet, une tige S (fig. 532), parallèle à la direction du mouvement de la table, peut glisser dans les guides U, U' solidaires du bâti. Son extrémité N est reliée à une branche ON d'un levier coudé à coulisses NoP, mobile autour du centre fixe o. La branche oP commande une tige QR, qui glisse dans les guides XX', et porte une fourchette M dans laquelle s'engage la courroie. Deux butoirs VV' sont fixés sur S, en avant et en arrière de la table, dans des positions qui correspondent aux

extrémités de la course. Supposons, pour fixer les idées, que la commande se fasse par la poulie A, dans le sens φ'_1 . Quand la table vient heurter le butoir V, elle entraîne la tige S qui, par l'action du levier NoP, fait glisser QR dans le sens φ''_1 , et amène graduellement la courroie sur la poulie folle B. A ce moment, la force motrice cesse d'agir sur la table ; mais celle-ci continue néanmoins, en raison de son inertie, à se mouvoir dans le même sens, de sorte que la courroie est entraînée sur la poulie C. Après un temps très court, l'inertie est vaincue par la force motrice qui s'exerce maintenant en sens contraire, et le changement de marche se produit.

534. Applications. I. — Calculer les nombres de dents des roues du système décrit au paragraphe précédent, de telle manière que, la course de travail étant commandée par la poulie C :

1° Le rapport de la vitesse d'aller à celle de retour soit égal à 1/2 ;

2° La vitesse d'aller soit de 8 mètres par minute.

Les pignons de crémaillère FF' ont 20 dents, au module 6, et les poulies de commande tournent à raison de 30 tours par minute.

On doit avoir, d'après les données

$$\frac{v'}{v_1} = \frac{DK}{HL} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$v' = \frac{\omega DFM}{2E} = 8^m \text{ par minute} \quad (2)$$

Il existe, en outre, des conditions de possibilité dont il est facile de se rendre compte en examinant la vue de profil de la figure 529. Tout d'abord, les roues D, L, qui engrènent avec E, ne doivent pas se gêner mutuellement ; en écrivant que leurs circonférences d'échanfrinement sont extérieures l'une à l'autre, on a, M' désignant le module commun des roues H, K, L, E, D

$$\frac{M'(H + K)}{2} \text{ (distance des centres)} > \frac{M'(D + L + 4)}{2} \text{ (somme des rayons)}$$

ou
$$H + K > D + L + 4 \quad (3)$$

Enfin, le triangle ZZ₁Z₂ doit être possible, ce qui oblige chacune des sommes D + E, E + L, H + K à être au plus égale à la somme des deux autres, et au moins égale à leur différence.

L'équation (2) devient, en prenant le millimètre pour unité de longueur et la minute comme unité de temps ($\omega = 2\pi N = 60\pi$).

$$\frac{60\pi D \times 20 \times 6}{2E} = 8000$$

d'où

$$\frac{D}{E} = \frac{20}{9\pi}$$

Comme une grande approximation n'est pas nécessaire, on peut se contenter d'évaluer le quotient $\frac{20}{9\pi}$ avec une ou deux décimales, en arrondissant au besoin le résultat, afin d'éviter la conversion en fraction continue et le calcul des réduites. On trouve

$$\frac{D}{E} = \frac{7}{10} \text{ environ}$$

ce qui conduit à donner aux roues D, E des nombres de dents équivultiples de 7 et de 10, soit D = 28 et E = 40 par exemple. L'équation (1) donne

$$\frac{28 K}{4 L} = \frac{1}{2}$$

d'où

$$\frac{K}{HL} = \frac{1}{56} = \frac{1}{8 \times 7}$$

Cette équation est vérifiée quand $H = 8\lambda$, $L = 7\mu$, à condition de prendre en même temps $K = \lambda\mu$. D'autre part, les nombres entiers λ et μ doivent, d'après la relation (3), satisfaire à l'inégalité

$$8\lambda + \lambda\mu > 32 + 7\mu$$

d'où

$$\lambda > \frac{32 + 7\mu}{8 + \mu}$$

Si, par exemple, $\mu = 3$, on a $\lambda > \frac{53}{11}$ ou $\lambda \geq 5$. En prenant $\lambda = 5$, les nombres de dents définitifs sont

$$D = 28 \quad E = 40 \quad H = 40 \quad K = 15 \quad L = 21$$

On reconnaît aisément que le triangle ZZ_1Z_2 correspondant à ces valeurs est possible.

II. Un étai-limeur est mené par une commande Whitworth du second genre (531); les longueurs de la manivelle et de la coulisse sont respectivement $r = 40^{\text{cm}}$, $l = 60^{\text{cm}}$, et le centre d'oscillation de la coulisse est à une distance $d = 40^{\text{cm}}$ de l'axe de la manivelle. Déterminer, en nombre de tours par minute, la vitesse x à donner à l'arbre de la manivelle pour que la vitesse moyenne du coulisseau pendant la course de travail soit de un décimètre par seconde, et calculer la vitesse moyenne de retour.

Soient $o'A$ et $o'A'$ les positions extrêmes de la coulisse, tangentes à la circonférence décrite par le bouton de la manivelle. La distance AA' mesure la longueur c de la course, et l'on a, dans les triangles semblables $o'oM$, oAB .

$$\frac{\left(\frac{c}{2}\right)}{r} = \frac{l}{d}$$

d'où

$$c = \frac{2rl}{d}$$

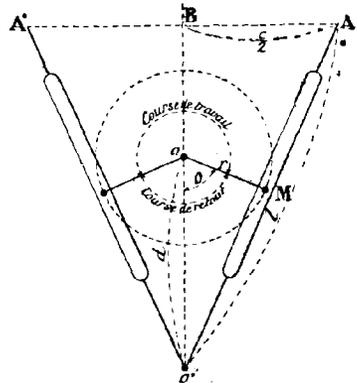


Fig. 533.

L'arbre de la manivelle ayant un mouvement uniforme, la durée d'un tour exprimée en minutes est $\frac{1}{x}$; celle de la course de travail est par conséquent, θ désignant l'angle $o'oM$

$$t = \frac{1}{x} \times \frac{180^\circ - \theta}{180^\circ}$$

ce qui correspond à une vitesse moyenne de l'outil

$$v = \frac{c}{t} = \frac{2 r l x}{d} \times \frac{180^\circ}{180^\circ - \theta} \text{ par minute}$$

On tire de cette équation

$$x = \frac{v d}{2 r l} \times \frac{180^\circ - \theta}{180^\circ}$$

L'angle θ est déterminé par la relation

$$\cos \theta = \frac{r}{d}$$

En prenant le centimètre pour unité de longueur, et la minute pour unité de temps, il vient

$$v = 600 \text{ } ^\circ/\text{m}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\theta = 75^\circ \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{600 \times 40}{2 \times 10 \times 60} \times \frac{104^\circ \frac{1}{2}}{180^\circ} = \frac{209}{18} = 11 \text{ tours } 6 \text{ environ}$$

La durée d'un retour étant

$$t' = \frac{1}{x} \times \frac{\theta}{180^\circ}$$

la vitesse moyenne correspondante, évaluée en centimètres par minute, est

$$v' = \frac{c}{t'} = \frac{2 r l x}{d} \times \frac{180^\circ}{\theta} = \frac{2 \times 10 \times 60 \times 209}{40 \times 18} \times \frac{180^\circ}{75^\circ \frac{1}{2}} = \frac{209 \times 600}{151} = 830 \text{ } ^\circ/\text{m} \text{ environ.}$$

CHAPITRE XX

SYSTÈMES ARTICULÉS EMPLOYÉS DANS LES MACHINES A VAPEUR

§ I. — *Bielle et manivelle des machines à action directe.*

535. Une disposition fréquemment employée, dans les machines à vapeur, pour transformer le mouvement rectiligne alternatif du piston en mouvement circulaire continu du volant, consiste à relier par une bielle AB (fig. 534) l'extrémité B de la tige du piston au bouton d'une manivelle oA solidaire de l'arbre du volant. On dispose les choses de manière que la direction BC passe par le point o. La course du point B étant égale à 2oA, la longueur de la manivelle doit être un peu inférieure à la moitié de la différence entre la longueur du cylindre et l'épaisseur du piston, afin que celui-ci n'aille pas heurter les fonds à chaque fin de course.

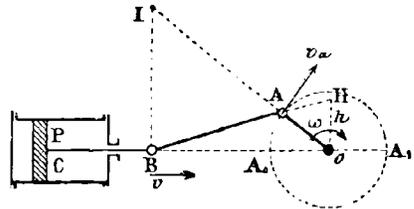


Fig. 534.

Pour établir la relation qui lie, à un instant quelconque, la vitesse v du point B à la vitesse angulaire ω de la manivelle, que nous supposons constante, appliquons le théorème de Chasles au déplacement élémentaire de la bielle. Le centre instantané de rotation I est l'intersection de oA et de la perpendiculaire BI à Co. En désignant par v_a la vitesse linéaire du point A, on a donc

$$\frac{v}{v_a} = \frac{IB}{IA}$$

ou, en menant oH parallèle à BI

$$\frac{v}{v_a} = \frac{oH}{oA}$$

Mais, d'autre part,

$$v_a = \omega \times oA$$

Par conséquent

$$v = \omega \times oH \tag{1}$$

Cette expression montre que la vitesse du piston est proportionnelle à oH ; elle s'annule quand la manivelle passe en A_0 et A_1 , puisqu'à ce moment $oH = 0$. Ce passage aux points morts ne présente rien de remarquable lorsque la manivelle commande le piston (pompes ménagères) ; mais, quand le piston est moteur, et que la manivelle part de l'un des points morts, il est nécessaire d'assurer la mise en marche dans le sens voulu par des dispositions particulières. Si la machine est à un seul cylindre, on agit à la main sur le volant, dans le sens du mouvement à produire, jusqu'à ce que le point mort soit dépassé. Dans les machines à deux cylindres, les manivelles sont calées à angle droit sur le même arbre, de sorte qu'elles ne peuvent passer

simultanément à leurs points morts, et que la mise en train est toujours possible.

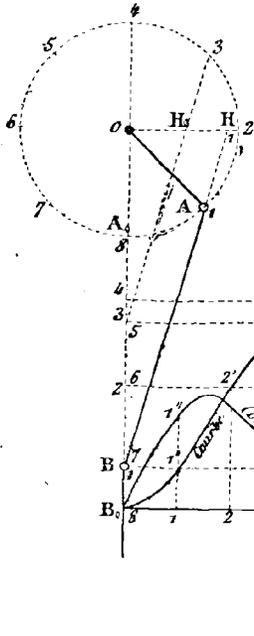


Fig. 535.

La figure 535 représente les courbes du mouvement du point B, en prenant pour origine des espaces le point A_0 , et en supposant la vitesse angulaire du volant constante. Pour construire la courbe des espaces, on a procédé comme dans les cas précédents. Mais au lieu d'en déduire la courbe des vitesses par les tracés généraux exposés en *Cinématique théorique*, on a porté en ordonnées les diverses longueurs oH_1, oH_2, \dots du segment oH , qui correspondent aux positions considérées de la bielle. On voit que les deux phases du mouvement alternatif sont symétriques.

Si la longueur de la bielle était infinie, le mouvement du point B serait identique à celui de la projection du point A sur

la droite oB , et les courbes ci-dessus seraient des sinusoides. Elles se rapprochent d'autant plus de cette forme simple que la bielle est plus longue, et l'on admet, en pratique, que le mouvement du piston s'accomplit suivant des lois sinusoidales dès que la longueur de la bielle atteint ou dépasse cinq fois celle de la manivelle. Mais on descend souvent au-dessous de cette limite.

536. Mouvement à retour rapide produit par le système bielle et manivelle.

Un mécanisme dérivé du précédent est employé dans certaines raboteuses pour donner à la table un mouvement rectiligne alternatif à retour rapide. Il suffit de déplacer la ligne de mouvement du point B, de manière à la faire passer à une certaine distance du centre de la manivelle. Les extrémités de la course du point B correspondent, évidemment, aux positions du système pour lesquelles les directions de la manivelle

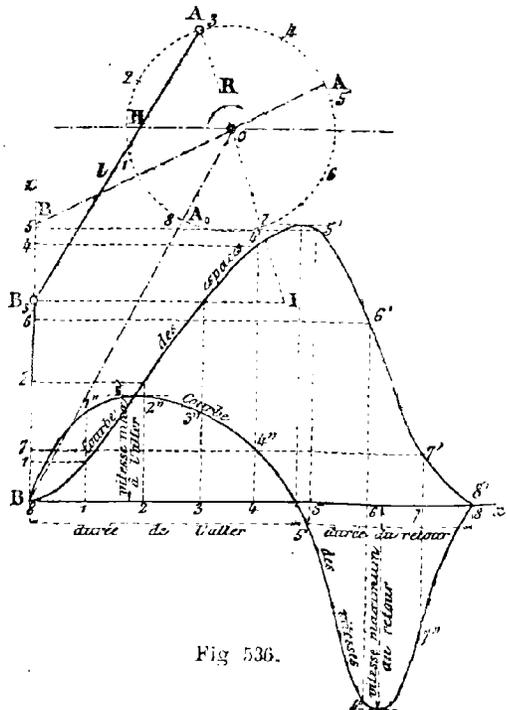


Fig 536.

et de la bielle sont confondues ou opposées. On les obtient en décrivant, de o comme centre, des arcs de cercle de rayons respectifs $oB_0 = l + R$, $oB = l - R$, l et R désignant les longueurs de la bielle et de la manivelle motrice. Si celle-ci tourne d'un mouvement uniforme, les durées des deux courses alternatives sont proportionnelles aux arcs $A_0 A_3 A$ et AA_0 . Le retour est donc plus rapide que l'aller. La figure montre les courbes représentatives des lois du mouvement du point B , qui ont été tracées comme dans le cas précédent.

Pour obtenir des courses variables, on remplace la manivelle oA par un plateau centré sur l'axe o , et l'on articule la bielle à un tourillon mobile dans une rainure diamétrale. La longueur de la course diminue avec la distance de ce tourillon au centre o , et peut ainsi être appropriée au travail à exécuter.

537. Excentrique circulaire à collier.

L'excentrique circulaire à collier est la disposition limite du mécanisme précédent, quand le bouton de la manivelle augmente de diamètre jusqu'à venir englober l'axe de rotation (fig. 537). Le système se réduit alors à un disque circulaire excentré, embrassé par deux demi-colliers boulonnés l'un sur l'autre, et dont l'un est solidaire de la bielle ou barre d'excentrique. Il fonctionne comme une manivelle de longueur oA .

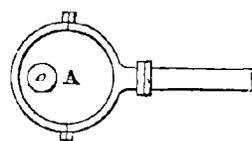


Fig. 537.

L'excentrique à collier donne lieu à des frottements considérables ; aussi n'est-il employé que dans des appareils légers (commande du tiroir des machines à vapeur, par exemple).

538. Applications du système bielle et manivelle aux appareils de serrage.

Dans le système bielle et manivelle des machines à vapeur à action directe, le rapport $\frac{v_b}{v_a} = \frac{IB}{JA}$ des vitesses linéaires de l'extrémité de la bielle et du bouton de la manivelle est nul quand la manivelle passe à l'un de ses points morts, et très petit pour toutes les positions voisines. Il en résulte qu'une force donnée, appliquée à la manivelle, équilibre une résistance, appliquée en B dans la direction Bo , d'autant plus grande que la manivelle est plus voisine de son point mort. Cette propriété est appliquée dans un très grand nombre de mécanismes. Nous en indiquerons deux.

539. Mécanisme employé pour le bouchage des bouteilles.

On utilise fréquemment pour le bouchage des bouteilles un obturateur constitué

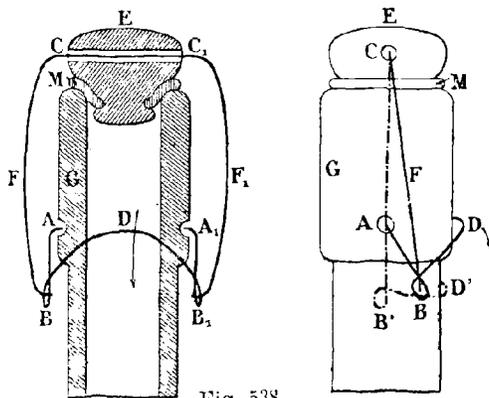


Fig. 538.

par une masse en porcelaine E , garnie à sa partie inférieure d'un anneau de caoutchouc (fig. 538). Un double levier $ABD B_1 A_1$, formé de deux parties rectilignes $AB, A_1 B_1$, contournées en anneau à leurs extrémités B et B_1 , et reliées par une portion BDB_1 recourbée en demi-circonférence, pivote dans deux trous diamétralement opposés, percés dans l'épaisseur du goulot. Un étrier $BFC C_1 F_1 B_1$ engage ses extrémités dans les anneaux B et B_1 , et traverse un conduit CC_1 creusé dans la tête du bouchon. Chaque moitié, telle que $ABFC$, du mécanisme,

constitue un système bielle et manivelle, dont la manivelle est AB. L'opération du bouchage consiste à amener AB à son point mort; d'après ce qui précède, une force assez petite appliquée à AB, par rabattement de la partie recourbée D, développe une pression considérable sur l'anneau M, et assure l'étanchéité de la fermeture. Les dimensions sont calculées de telle sorte que, quand la partie D est rabattue en D' sur le goulot, le point mort soit un peu dépassé; l'élasticité du caoutchouc tend alors à ramener AB' vers la gauche, ce qui s'oppose au débouchage spontané de la bouteille.

540. Application aux riveuses pneumatiques.

Les figures schématiques 539-540 montrent l'application du même principe aux riveuses pneumatiques. Le piston P commande, par la tige articulée PC, un double levier CoA oscillant autour du centre fixe o.

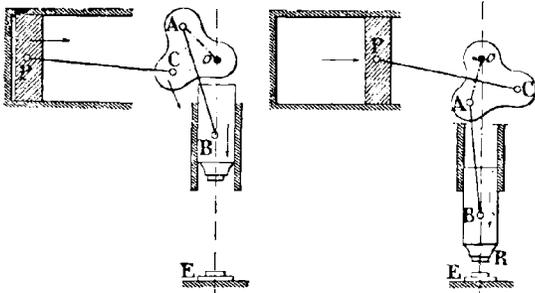


Fig. 539.

Fig. 540.

Le levier est relié, par une bielle AB, au riveur R mobile dans des glissières verticales. Les dimensions des pièces sont calculées de telle sorte que, quand le piston arrive à fin de course, les directions oA et AB sont à peu près confondues avec la verticale du point o. D'après ce qui précède, l'effort exercé sur le piston par l'air comprimé

envoyé dans le cylindre est transmis en B, accru dans une proportion considérable.

§ II. — Machines à vapeur à balancier.

541. Dans les machines à vapeur à balancier, le piston, au lieu d'agir directement sur une bielle articulée à une manivelle solidaire de l'arbre du volant, communique un mouvement circulaire alternatif à une longue pièce oscillante AoE (fig. 541) appelée *balancier*, mobile autour de son centre o. L'extrémité E du balancier est reliée à l'arbre du volant par le système bielle et manivelle EFo'', qui diffère du précédent en ce que la trajectoire du point E, au lieu d'être rectiligne, est un arc de cercle de centre o.

La liaison de la tige du piston au balancier peut être établie de plusieurs manières. Nous étudierons en premier lieu le parallélogramme de Watt.

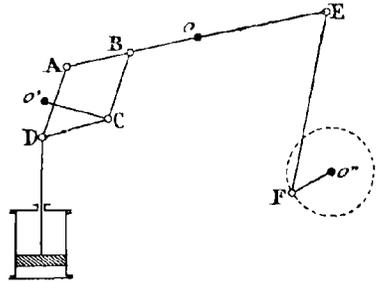


Fig. 541.

Parallélogramme de Watt.

542. **Principe de l'appareil.** — Considérons deux leviers parallèles égaux oB et o'C (fig. 542), mobiles autour des axes perpendiculaires à leur plan qui sont projetés en o et o', et reliés par une bride BC, articulée aux points B et C. Nous nous proposons de montrer que le milieu M de BC décrit une courbe S, dite *courbe de Watt*, qui, sur une assez grande étendue comprenant le point M, diffère très peu d'une droite perpendiculaire à oB.

Tout d'abord, une tangente yy' en M est perpendiculaire à la direction commune des deux leviers, car le centre instantané de rotation de la bride dans la position BC est rejeté à l'infini, dans la direction oB . La courbe S est donc normale en M à la parallèle Mx à oB .

Soient Cbb' , $Bc'c$ les tangentes en B et C aux circonférences décrites par ces points dans le mouvement du système. Supposons que les dimensions des tiges et l'écartement des axes soient tels que la tangente à l'une de ces circonférences soit sécante à l'autre. Les droites bc , $b'c'$ sont deux positions de la droite BC ; on a, en effet, à cause de l'égalité des cordes bb' , cc' , dont β et γ sont les points milieux

$$b'\beta = c'\gamma = c\gamma = b\beta$$

Les quadrilatères $b'c'\gamma\beta$, $bc\gamma\beta$ sont donc des parallélogrammes, et par suite

$$b'c' = bc = \beta\gamma$$

Mais $\beta\gamma = BC$ comme diagonales du rectangle $B\beta C\gamma$. Il s'en suit que

$$b'c' = bc = BC$$

La droite yy' , qui passe par le milieu de $\beta\gamma$ et qui est parallèle à bb' et cc' , coupe les droites bc et $b'c'$ en leurs milieux m et m' , qui appartiennent ainsi à la courbe S. Celle-ci rencontre donc sa tangente yy' en deux points, équidistants du point de contact M.

Le point M étant évidemment un centre de symétrie de la courbe S, les deux arcs Mm et Mm' sont situés de part et d'autre de yy' , ce qui prouve que M est un point d'inflexion. Si l'on suppose que l'arc Mm' soit, par exemple, à droite de la tangente, il tourne d'abord sa concavité vers la droite, mais, comme il revient couper yy' en m' , sa courbure doit nécessairement changer de sens. Le point M_1 où ce fait se produit est un nouveau point d'inflexion. L'arc Mm étant, dans cette même hypothèse, à gauche de yy' , tourne d'abord sa concavité vers la gauche, et ne peut revenir passer en m qu'à la condition de présenter, dans l'intervalle, un point d'inflexion M_2 , symétrique de M_1 par rapport à M. Grâce à toutes ces propriétés géométriques, la portion mM_2MM_1m' de la courbe S ne diffère pas sensiblement d'une droite, ce qui justifie le nom de *courbe à longue inflexion* par lequel on la désigne fréquemment. L'écart de l'arc mMm' et de la droite yy' dépend des dimensions attribuées aux diverses parties du système ; nous indiquerons plus loin les dispositions adoptées par Watt pour le rendre très petit.

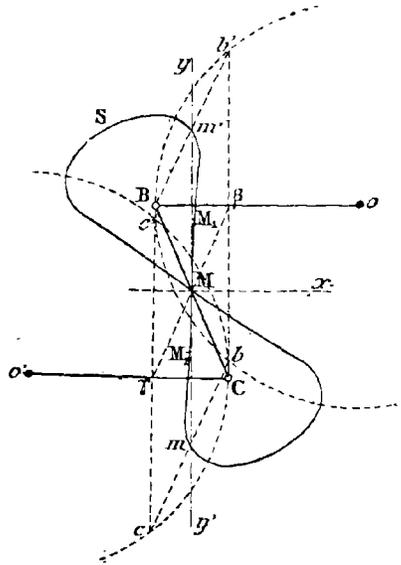


Fig. 542.

On peut compléter le système de manière à obtenir toute une série de points dont

(*) Le dessinateur a tracé, par erreur, la droite Bb' ; il faut joindre, au contraire, les points c' et b' .

le mouvement soit, comme celui de M, sensiblement rectiligne. Il suffit de prolonger le levier oB (fig. 543) d'une longueur quelconque BB', de mener B'M' parallèle à BC jusqu'à son intersection avec oM, et enfin, de tracer M'C' parallèle à BB'. Le parallélogramme BB'M'C' étant articulé à ses quatre sommets, se déforme tout en conservant le parallélisme de ses côtés opposés, pendant que les leviers oB B', o'c tournent autour des axes o et o'.

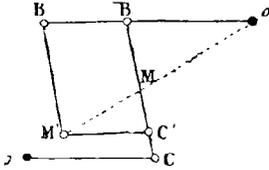


Fig. 543.

$$\frac{oM}{oM'} = \frac{oB}{oB'} = \text{constante}$$

La trajectoire du point M' est donc homothétique de celle du point M, et présente les mêmes particularités géométriques.

543. Disposition du parallélogramme de Watt.

Dans la pratique, on prolonge le levier oB d'une longueur égale BB₁ (fig. 544), et l'on construit sur BB₁ et sur BC un parallélogramme dont le sommet M' possède, d'après le principe précédent, un mouvement analogue à celui du point M, mais d'amplitude et de vitesse doubles. Le balancier est constitué par une longue pièce métallique de longueur égale à 2 oB₁; l'extrémité opposée au point B₁ reçoit l'articulation de la bielle qui commande la manivelle du volant. Dans la position moyenne du système, le point M' se confond avec l'axe o' du levier o'C, que l'on appelle le *contre-balancier*; pour lui laisser le libre passage, on forme le contre-balancier de deux tiges symétriques par rapport au plan de la figure, et on laisse entre elles un intervalle suffisant pour la manœuvre du parallélogramme. Les tiges BC, M'C et B₁M' sont aussi doublées, de manière à former un ensemble qui, en projection, se superpose au parallélogramme B₁BCM', mais qui, dans l'espace, est symétrique par rapport au plan d'oscillation du balancier oBB₁. Les deux sommets projetés en M' sont reliés par un petit axe horizontal, au milieu duquel on articule la tige M'N' du piston. Les milieux des deux brides projetées en BC sont aussi réunis par un axe, auquel on adapte la tige MN d'une pompe d'alimentation de la machine. D'après ce qui précède, le mécanisme communique à ces deux droites un mouvement très sensiblement rectiligne, dans une direction verticale si la position moyenne du balancier est horizontale.

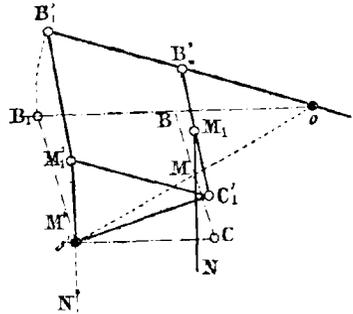


Fig. 544.

544. Proportions des divers éléments du système, d'après Watt.

Soit 2 c la course verticale du piston; les dimensions des divers éléments du système doivent être telles, que la courbe à longue inflexion décrite par le point M présente une portion sensiblement rectiligne de longueur 2 c. Comme le déplacement du point M' est double de celui du point M, il suffit, d'après ce qui précède, de faire en sorte que (fig. 542) mm' = c, ou

$$b' \beta = \frac{mm'}{2} = \frac{c}{2}$$

Les recherches de Watt lui ont montré que les conditions suivantes déterminent un guidage presque parfait :

1° La distance horizontale $d = oo_1$ (fig. 545) des axes o et o' doit être égale à $3c$.

2° La longueur l de la bride BC doit être comprise entre c et $\frac{6}{7}c$.

Calculons, dans ces hypothèses, les longueurs $oB = o'C = r$ des deux leviers, la flèche $B\beta = f$ de l'arc sous-tendu par la corde bb' de la circonférence oB , et la distance verticale $o_1o' = BD = h$ des axes o et o' , en fonction de c , d et l . Tout d'abord, on a

$$d = o_1B + r = 2r - f \quad (1)$$

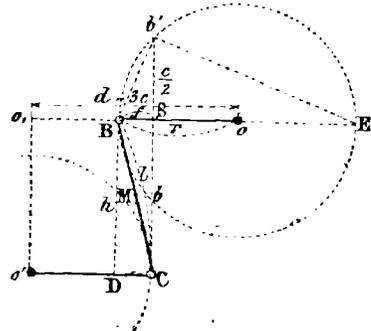


Fig. 545.

De plus, le triangle rectangle $Bb'E$ donne la relation

$$\frac{c^2}{4} = f(2r - f) = fd$$

d'où l'on tire

$$f = \frac{c^2}{4d} = \frac{c^2}{12c} = \frac{c}{12} \quad (2)$$

En remplaçant f et d par leurs valeurs respectives dans l'égalité (1), il vient

$$3c = 2r - \frac{c}{12}$$

et par conséquent

$$r = \frac{3c + \frac{c}{12}}{2} = \frac{37c}{24} \quad (3)$$

Le triangle rectangle BDC donne enfin

$$h = \sqrt{l^2 - f^2} = \sqrt{l^2 - \frac{c^2}{144}} \quad (4)$$

Les formules (2), (3) et (4) résolvent la question. On déduit des deux premières

$$\frac{r}{37} = \frac{f}{2} = \frac{c}{24}$$

Elles montrent, sous cette forme, que les longueurs r , f et c doivent être proportionnelles aux nombres entiers 37, 2 et 24.

Dans ces conditions, la déviation est très petite. De Prony a trouvé, en prenant $r = 2^m 515$ et $l = 1^m 524$, qu'elle était seulement de 2 m/m pour une course de $1^m 631$ du piston.

Des modifications ont été apportées au parallélogramme de Watt pour diminuer encore cet écart; celles qui ont été indiquées par Tchébycheff le réduisent, avec les données ci-dessus, à $0 \text{ m/m } 05$; malgré cet avantage, son mécanisme n'a pas pénétré dans la pratique.

545. Etude cinématique du parallélogramme de Watt.

Nous nous proposons d'établir une relation entre la vitesse v du piston, égale à celle du point D (fig. 546), et la vitesse angulaire ω de la manivelle $o''F$ du volant, à l'instant où le système occupe la position figurée. Il suffit, pour cela, de suivre la chaîne cinématique depuis son origine jusqu'à son extrémité, en cherchant les centres instantanés de rotation des tiges rigides qui la composent.

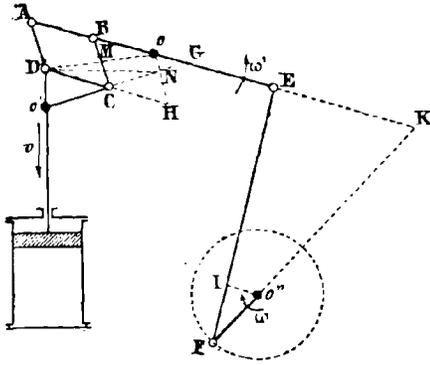


Fig. 546.

Pour déterminer celui de CD, prenons l'intersection H de cette droite avec la parallèle oH à BC . Dans le mouvement du système, le point H décrit une circonférence, de centre o et de rayon oH . Comme $CH = oB = CD$, le point H est invariable sur CD, et, d'après le théorème de Chasles, le centre instantané de rotation cherché se trouve en N, à la rencontre des normales aux trajectoires des points C et H. On a

donc, en désignant par v_c la vitesse du point C

$$\frac{v}{v_c} = \frac{ND}{NC} \tag{1}$$

D'autre part, le centre instantané de rotation de la bride BC est l'intersection G des droites oB et $o'C$. Par suite, on a, v_b étant la vitesse du point B

$$\frac{v_c}{v_b} = \frac{GC}{GB}$$

Mais, à cause du parallélisme de oN et de BC

$$\frac{GC}{GB} = \frac{NC}{oB}$$

Donc

$$\frac{v_c}{v_b} = \frac{NC}{oB} \tag{2}$$

De plus

$$v_b = \frac{1}{2} v_e \tag{3}$$

puisque les distances oB et oE sont dans le rapport de 1 à 2.

Le centre instantané de rotation de la bielle EF est l'intersection K de oE et de $o''F$; par conséquent

$$\frac{v_e}{v_f} = \frac{KE}{KF}$$

ou, en traçant $o''I$ parallèle à KE

$$\frac{v_e}{v_f} = \frac{o''I}{o''F} \tag{4}$$

Enfin

$$v_f = \omega \times o''F \tag{5}$$

En multipliant membre à membre les égalités (1) (2) (3) (4) (5), il vient, après simplifications

$$v = \frac{\omega}{2 oB} \times o''I \times ND$$

Cette expression ne dépend que des deux facteurs variables $o'I$ et ND ; la vitesse du piston, en supposant que le volant tourne d'un mouvement uniforme, est donc proportionnelle à leur produit.

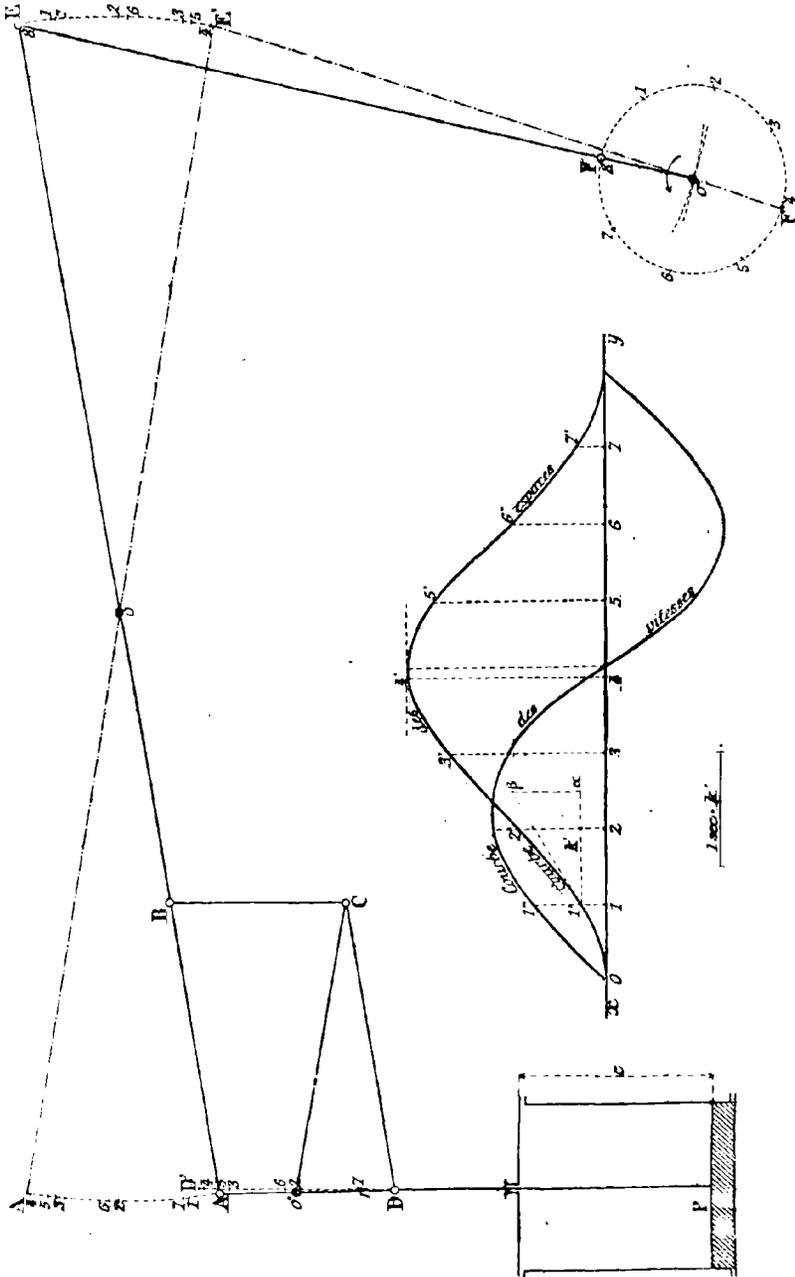


Fig. 547.

On a représenté, dans cette hypothèse (fig. 547), les courbes du mouvement du point D ; les origines des temps et des espaces correspondent à l'instant où le piston est au point le plus bas de sa course. Ce sont, à peu de chose près, des sinusoides, et les deux phases du mouvement du piston sont sensiblement symétriques.

Il faut remarquer que la longueur $o^{\prime}F$ de la manivelle n'est pas arbitraire. Figurons, en effet, les positions extrêmes D et D' du point D (fig. 547) (la longueur DD' est égale à la hauteur du cylindre, diminuée de l'épaisseur du piston) et soient AoB, A'oE' les positions correspondantes du balancier. Le système oEFo' est formé de deux manivelles oE, o''F reliées par une bielle, et l'on sait (chapitre XVI) que lorsqu'une des manivelles passe à ses points limites, la bielle est en ligne droite avec l'autre. On a donc

$$Eo'' = EF + o''F$$

$$E'o'' = EF - o''F$$

d'où il résulte que l'axe o'' se trouve à l'intersection de deux arcs de cercle, décrits de E et E' comme centres, avec des rayons respectivement égaux à la somme et à la différence des longueurs de la bielle EF et de la manivelle o''F. Pour que ces arcs se coupent, il suffit, si la longueur de la bielle dépasse EE', ce qui a toujours lieu en pratique, que la distance de leurs centres soit au moins égale à la différence de leurs rayons, c'est-à-dire que l'on ait

$$EE' \geq 2 o''F$$

La longueur de la manivelle calée sur l'arbre du volant ne peut donc pas dépasser $\frac{EE'}{2}$.

546. Parallélogramme pour bateaux.

On a supposé, dans ce qui précède, que le balancier était placé au-dessus du cylindre, ce qui donne à la machine de Watt une hauteur assez considérable. Dans les machines marines, auxquelles l'espace est nécessairement mesuré, on évitait

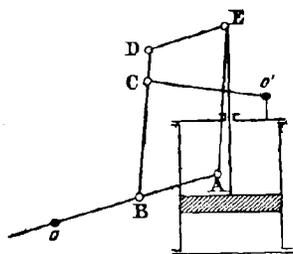


Fig. 548.

est inconvenient de la manière suivante. Le balancier, dont l'axe o se trouve à peu près dans le plan horizontal de base du cylindre (fig. 548), est formé de deux pièces identiques, symétriques par rapport à un plan méridien du cylindre. A leurs extrémités sont articulées deux bielles, dont les projections sur le plan de la figure sont confondues en AE; ces bielles sont réunies en E par une traverse, au milieu de laquelle est fixé la tige du piston. Un parallélogramme articulé est

construit sur les droites AE, AB, de chaque côté du cylindre. Les deux brides projetées en BD sont également reliées en C par une traverse, sur laquelle on articule le contre-balancier o'C, qui oscille autour d'un point fixe o' solide du couvercle du cylindre. On peut déterminer les proportions des différentes parties du système de telle manière que le point E décrive une trajectoire à très peu près rectiligne sur une assez grande étendue. La théorie de cet appareil est analogue à celle du parallélogramme ordinaire.

Machine à balancier d'Olivier Evans.

547. Principe et disposition. — Quand les extrémités d'une droite mobile AB, de longueur constante, s'appuient sur deux axes rectangulaires oxy (fig. 549), son milieu C décrit une circonférence γ , de centre o et de rayon $oC = \frac{AB}{2}$. Réciproquement, si l'on guide la droite de telle sorte que le point A soit assujéti à se mouvoir sur ox , et le point C sur la circonférence γ , le point B décrit une droite oy perpendi-

culaire à ox , car le triangle $A'oB'$, déterminé par une position quelconque de la droite mobile, est rectangle en o , puisque sa médiane oC' est égale à la moitié du côté correspondant.

Olivier Evans a déduit de ce principe un moyen de guider en ligne droite la tige du piston des machines à vapeur à balancier. Le balancier AB (fig. 550) est articulé en B à la tige du piston, et en son milieu C à une bride

$oC = \frac{AB}{5}$, mobile autour du centre fixe o situé sur la verticale du point B . Enfin un levier $o'A$, oscillant autour de l'axe fixe o' , est articulé en A à AB . Le point A décrit ainsi un arc de circonférence, d'autant plus voisin d'une droite qu'il est moins étendu, et que son rayon $o'A$ est plus considérable. Le mouvement du point B n'est donc pas rigoureusement rectiligne, mais on conçoit la possibilité de déterminer les proportions des divers éléments du système de telle manière que l'écart soit négligeable.

Pour transformer le mouvement alternatif du balancier en mouvement circulaire continu, on relie l'un de ses points, par une bielle DE , au bouton d'une manivelle $o'E$ solidaire de l'arbre du volant.

548. Etude cinématique de ce mécanisme.

Soient v la vitesse du piston, et ω la vitesse angulaire de la manivelle, pour la position figurée du système. Afin d'établir une relation entre ces quantités, parcourons la chaîne cinématique de B en E , en cherchant les centres instantanés de rotation des tiges qui la composent.

Le centre instantané de rotation du balancier est le point de rencontre G des normales oC , $o'A$ aux trajectoires des points C et A . On a donc, v_d désignant la vitesse du point D

$$\frac{v}{v_d} = \frac{GB}{GD} \tag{1}$$

Soit v_e la vitesse linéaire du bouton de la manivelle. Le centre instantané de rotation de la bielle DE est en F , sur la normale GD à la trajectoire du point D . Par conséquent

$$\frac{v_d}{v_e} = \frac{FD}{FE}$$

ou, en traçant $o'I$ parallèle à FD

$$\frac{v_d}{v_e} = \frac{o'I}{o'E} \tag{2}$$

$$\text{Enfin} \quad v_e = \omega \times o'E \tag{3}$$

En multipliant membre à membre les égalités (1) (2) et (3), il vient, après simplifications

$$v = \omega \times \frac{o'I \times GB}{GD}$$

On voit que, si le mouvement du volant est uniforme, la vitesse du piston varie comme la quatrième proportionnelle entre $o'I$, GB et GD .

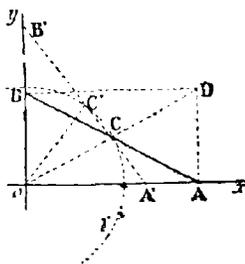


Fig. 549.

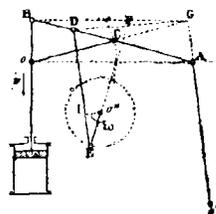


Fig. 550.

On peut aussi déterminer la vitesse v_a du point A par la relation

$$\frac{v}{v_a} = \frac{GB}{GA}$$

ce qui donne

$$v_a = v \times \frac{GA}{GB} = \omega \times \frac{o''I \times GA}{GD}$$

Elle varie comme la quatrième proportionnelle aux droites $o''I$, GA et GD.

Enfin, il serait facile, en procédant comme pour le parallélogramme de Watt, de tracer les courbes représentatives du mouvement du piston. On constaterait encore qu'elles sont très sensiblement sinusoïdales.

Machine à balancier de Klérity.

549. Ce mécanisme ne diffère du précédent que par une modification dans la liaison du point A, destinée à rendre le guidage du piston rigoureusement rectiligne.

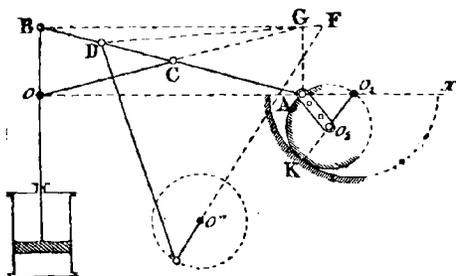


Fig. 551.

L'extrémité B du balancier est articulée en un point de la circonférence primitive du pignon o_2 (fig. 551), fou sur un axe porté par le bouton d'une manivelle o_1o_2 égale à son rayon, et mobile autour du centre fixe o_1 . Ce pignon engrène intérieurement avec une roue de rayon double, o_1K . D'après le théorème de La Hire, le point A décrit le diamètre Ao_1x de la circonférence o_1K , et, si l'on a disposé les choses de telle manière que cette droite se confonde

avec la perpendiculaire élevée en o sur la tige du piston, le point B prend un mouvement alternatif rigoureusement rectiligne suivant oB . Pratiquement, l'engrenage intérieur o_1o_2 est réduit à deux secteurs dentés.

L'expression de la vitesse du piston est, comme précédemment

$$v = \omega \times \frac{o''I \times GB}{GD}$$

Le quadrilatère $GAoB$ est alors un rectangle.

Inverseur, ou losange de Peaucellier.

550. Principe. — Soit ABCD (fig. 552) un losange articulé dont les sommets A et C sont reliés à deux leviers égaux oA , oC . Les points oDB sont évidemment en ligne droite, et y restent quelles que soient les déformations du système, puisque leurs distances aux points A et C sont invariables. De plus, le produit $oD \times oB$ est constant. On a, en effet

$$oD = oE - DE$$

$$oB = oE + DE$$

et, par conséquent

$$oD \times oB = \overline{oE^2} - DE^2$$

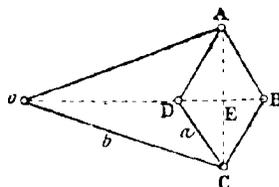


Fig. 552.

Mais, d'autre part, on tire des triangles rectangles oEC , DEC , en posant $CD = a$ et $oC = b$

$$\overline{oE}^2 = b^2 - \overline{CE}^2$$

$$\overline{DE}^2 = a^2 - \overline{CE}^2$$

Donc enfin

$$oD \times oB = b^2 - a^2 = \text{Constante.}$$

Il résulte de là que si, ayant fixé le point o , on fait décrire au point D une certaine ligne, le lieu du point B est la *figure inverse*, ou la *transformée par rayons vecteurs réciproques* du lieu du point D . De là le nom d'*inverseur* donné à cet appareil. Les points D et B s'appellent les *pôles* du losange, et les tiges oA , oC les *leviers connecteurs*.

551. Disposition de l'appareil. — Système positif.

Supposons que le point D soit relié par une tige $o'D$ (fig. 553), articulée en D , à un axe fixe o' équidistant de o et D ; le lieu géométrique du point B est alors une droite Bx perpendiculaire à oB . En considérant une seconde position $A_1B_1C_1D_1$ du losange, on a en effet

$$oD \times oB = oD_1 \times oB_1 = b^2 - a^2$$

Par conséquent $\frac{oD}{oD_1} = \frac{oB_1}{oB}$

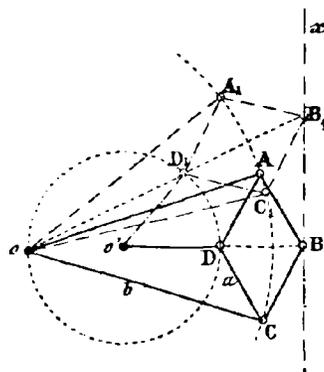


Fig. 553.

ce qui prouve la similitude des triangles oDD_1 et oBB_1 ; les angles homologues oD_1D , oBB_1 , sont donc égaux, et par suite BB_1 est perpendiculaire sur oB .

Si, comme dans la figure 553, b est plus grand que a , le produit $oD \times oB = b^2 - a^2$

est positif, ce qui a fait donner le nom de *système positif* à l'appareil correspondant. Pour l'appliquer au guidage du piston dans une machine à vapeur, on relie la tige Px au pôle B du losange (fig. 554). D'après ce qui précède, elle est entraînée dans sa propre direction si l'on a eu le soin de placer les centres fixes o et o' sur une droite perpendiculaire à Px . On prolonge l'un des leviers connecteurs d'une longueur $oE = oC$, puis on

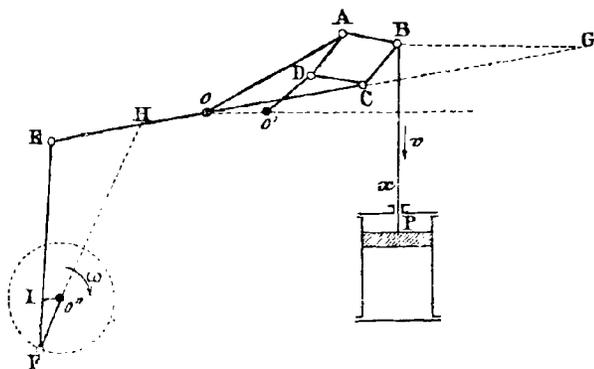


Fig. 554.

articule en E une bielle EF , reliée en F à la manivelle $o'F$ calée sur l'arbre du volant.

552. Etude cinématique de ce mécanisme.

Soient v la vitesse du piston et ω la vitesse angulaire de la manivelle pour la position figurée du système. Parcourons la chaîne cinématique de $Ben F$. Le centre instan-

tané de rotation de BC est l'intersection G de oC et de la perpendiculaire BG à la tige du piston ; en désignant par v_c la vitesse du point C, on a

$$\frac{v}{v_c} = \frac{GB}{GC} \quad (1)$$

Les vitesses des points C et E sont égales. Le centre instantané de rotation de la bielle EF étant H, et v_f désignant la vitesse du point F, on a encore

$$\frac{v_c}{v_f} = \frac{HE}{HF}$$

ou, en traçant o'I parallèle à oE

$$\frac{v_c}{v_f} = \frac{o'I}{o'F} \quad (2)$$

Enfin

$$v_f = \omega \times o'F \quad (3)$$

En multipliant membre à membre les égalités (1), (2) et (3), il vient, après simplifications

$$v = \omega \times \frac{o'I \times GB}{GC}$$

ce qui montre que la vitesse du piston varie comme la quatrième proportionnelle entre o'I, GB et GC, si le mouvement du volant est uniforme.

On tracerait les courbes du mouvement du point B en procédant comme au paragraphe 545.

553. Système négatif de Peaucellier.

Les propriétés géométriques du système de Peaucellier subsistent quand les leviers connecteurs sont plus courts que les côtés du losange articulé. Dans ce cas, le point o est situé entre D et B, et la relation

$$oD \times oB = b^2 - a^2$$

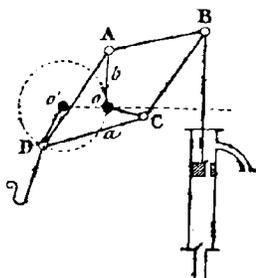


Fig. 555.

montre que le produit $oD \times oB$ est alors négatif ; pour cette raison, l'appareil tout entier est appelé *système négatif*, afin de le distinguer du précédent. La théorie générale subsiste sans modification essentielle.

Cette disposition est quelquefois employée pour commander la tige du piston des pompes ménagères, comme l'indique la figure 555.

554. Emploi de l'inverseur pour le tracé des circonférences.

On a supposé, dans les mécanismes précédents, que le point o était équidistant des points o et D ; quand cette condition n'est pas réalisée, la circonférence lieu du point D ne passe plus par le centre d'inversion o, et la trajectoire du point B devient une circonférence.

Admettons, pour fixer les idées, que $o'D$ soit plus grand que oo' , et posons, pour simplifier (fig. 556)

$$o'D = p \qquad oo' = q$$

Soit, de plus, $oA_1 B_1 C_1 D_1$ une position quelconque du système. La propriété fondamentale du losange articulé (550), donne la relation

$$oD_1 \times oB_1 = oD \times oB = b^2 - a^2$$

En prolongeant oD_1 jusqu'à son point de rencontre F avec la circonférence lieu du point D , on a aussi

$$oD_1 \times oF = oD \times oE = p^2 - q^2$$

et par conséquent

$$\frac{oB_1}{oF} = \frac{b^2 - a^2}{p^2 - q^2}$$

Traçons la parallèle B_1G à oF jusqu'à son intersection avec oo' . Les triangles semblables $oo'F$, oGB_1 donnent la proportion

$$\frac{oG}{oo'} = \frac{GB_1}{oF} = \frac{oD_1}{oF}$$

d'où l'on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} oG = oo' \times \frac{oB_1}{oF} = q \times \frac{b^2 - a^2}{p^2 - q^2} \\ GB_1 = oF \times \frac{oB_1}{oF} = p \times \frac{b^2 - a^2}{p^2 - q^2} \end{array} \right.$$

Ces égalités montrent que le lieu du point B_1 est une circonférence de centre G et de rayon GB_1 . On voit que, pour des longueurs p , a et b données, le rayon OB_1 varie avec q , et croît à mesure que la différence $p - q$ diminue. On a construit, d'après cette observation, des inverseurs qui, avec des tiges articulées de petites dimensions, permettent de tracer des arcs de cercle de tous les rayons imaginables.

Trapèze inverseur de Hart.

555. Principe. — La théorie de ce mécanisme est basée sur le théorème de Roberts^r que nous démontrerons tout d'abord :

Soient quatre tiges articulées, disposées suivant les côtés égaux et les diagonales d'un trapèze isocèle; une droite parallèle aux bases rencontre un des côtés égaux et les diagonales en des points qui, supposés invariablement liés au système, restent en ligne droite quelles que soient ses déformations, et tels que le produit des distances du premier aux deux autres est constant.

Soit $ABCD$ (fig. 557) le trapèze isocèle articulé, dont les côtés égaux sont AB et

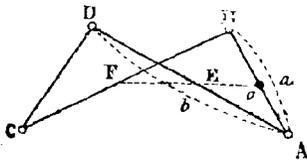


Fig. 557.

CD ; prenons, sur AB et sur les diagonales, trois points oEF situés sur une parallèle aux bases, et supposons-les invariablement liés au système. Le quadrilatère $ABCD$ reste un trapèze dans toutes ses positions, car les triangles ABC , ADC ne cessent pas d'être égaux, de sorte que BD reste constamment parallèle à AC . Dans la position primitive de la figure, oE et oF étant respectivement parallèles à BD et à AC , on a

$$\frac{oA}{oE} = \frac{AB}{AD}$$

$$\frac{oB}{oF} = \frac{AB}{BC}$$

Mais les points o, E, F restant fixes sur les tiges auxquelles ils appartiennent, les termes de ces proportions sont invariables pendant les déformations du système ; oF et oE restent donc respectivement parallèles à BD et à AC , et se confondent, ce qui établit la première partie du théorème.

De plus, on a, en posant $AB = a$

$$\frac{oE}{BD} = \frac{oA}{a}$$

$$\frac{oF}{AC} = \frac{oB}{a}$$

d'où l'on tire

$$\frac{oE \times oF}{BD \times AC} = \frac{oA \times oB}{a^2}$$

et, par suite

$$oE \times oF = BD \times AC \times \frac{oA \times oB}{a^2} \quad (1)$$

En appliquant le théorème de Ptolémée au quadrilatère inscrit $ABCD$, il vient

$$AD^2 = b^2 = BD \times AC + a^2$$

ou

$$BD \times AC = b^2 - a^2$$

et, en remplaçant dans l'égalité (1)

$$oE \times oF = (b^2 - a^2) \times \frac{oA \times oB}{a^2} = \text{Constante.}$$

Si, par exemple, le point o est situé au milieu de AB ,

$$oE \times oF = \frac{b^2 - a^2}{4}$$

De la relation

$$oE \times oF = \text{Constante}$$

résulte que si, le point o restant fixe, on fait décrire au point E une certaine ligne, le lieu du point F est la transformée par rayons vecteurs réciproques du lieu du point E .

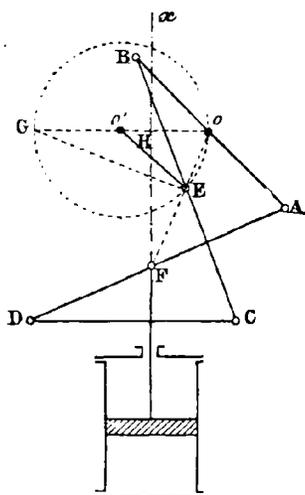


Fig. 558.

556. Disposition de l'appareil.

En supposant que le point E soit relié par une barre rigide à un axe o' équidistant des points o et E (fig. 558), le lieu géométrique du point F est une droite Fx perpendiculaire à oo' . On a, en effet

$$\frac{oE}{oH} = \frac{oG}{oF}$$

d'où

$$oH = \frac{oE \times oF}{oG} = \frac{oE \times oF}{2 oo'} = \text{Constante.}$$

On peut appliquer ce dispositif au guidage de la tige du piston d'une machine à vapeur ; il suffit d'articuler cette dernière au point F . Le balancier AB prend, autour de l'axe o , un mouvement oscillatoire, que l'on transforme en mouvement circulaire continu par une bielle, reliée d'une part à un point de oA ou de son prolongement, et d'autre part au bouton d'une manivelle calée sur l'arbre du volant. La théorie cinématique du mécanisme obtenu est identique à celle de l'inverseur de Peaucellier.

§ III. — *Machines à cylindre oscillant.*

557. Dans ces machines à vapeur, la tige du piston, articulée directement à la manivelle du volant, joue le rôle de la bielle des machines à connexion directe. Les déviations qu'elle subit à chaque instant ne sont évidemment possibles que si le cylindre peut osciller librement ; il porte à cet effet deux tourillons, projetés en o' (fig. 559), et diamétralement opposés dans un plan de section droite.

Il est intéressant de chercher la relation qui existe entre la vitesse relative v_r du piston dans le cylindre, et la vitesse angulaire ω du volant. Pour cela, déterminons le centre instantané de rotation de la droite AB dans la position figurée. Tous ses points participent à deux mouvements simultanés, savoir : un mouvement relatif rectiligne suivant l'axe du cylindre, et un mouvement d'entraînement circulaire autour du centre o' . Le point de AB qui, à l'instant actuel, est confondu avec o' , reste immobile dans le mouvement d'entraînement, et le chemin élémentaire qu'il parcourt pendant un temps infiniment petit est dirigé suivant $o'A$. Le centre instantané de rotation de AB se trouve donc à l'intersection K de oA et de la perpendiculaire élevée en o' à $o'B$. En désignant par v_a la vitesse du point A, et par v_b la vitesse absolue du piston, on a

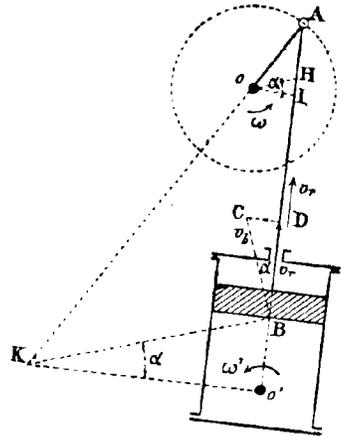


Fig. 559.

$$\frac{v_b}{v_a} = \frac{KB}{KA}$$

d'où l'on tire

$$v_b = v_a \times \frac{KB}{KA} = \omega \times oA \times \frac{KB}{KA}$$

Soit oH la parallèle à KB menée par le point o ; les triangles semblables AoH, AKB donnent la proportion

$$\frac{KB}{KA} = \frac{oH}{oA}$$

Par conséquent

$$v_b = \omega \times oA \times \frac{oH}{oA} = \omega \times oH$$

La vitesse v_b , représentée par le vecteur BC perpendiculaire à BK , est la résultante des vitesses simultanées du point B dans le mouvement relatif du piston et dans le mouvement d'entraînement du cylindre ; sa composante BD mesure la vitesse relative cherchée v_r , dont l'expression est, en désignant par α l'angle CBD

$$v_r = v_b \cos \alpha = \omega \times oH \cos \alpha$$

ou, en abaissant oI perpendiculaire sur AB

$$v_r = \omega \times oI$$

Pour tracer les courbes du mouvement relatif du piston (fig. 560), on a déterminé des positions de l'extrémité B de sa tige, en partageant la circonférence σA en huit parties égales et en portant sur les droites $\sigma'0, \sigma'1, \sigma'2...$, à partir des points de division, des longueurs égales à AB. Les points obtenus, reportés sur $\sigma\sigma'$ par des arcs de cercle de centre σ' , font connaître les chemins $B_01, B_02...$ successivement parcourus par le point B dans le cylindre rendu immobile. Il suffit ensuite d'élever, perpendiculairement à un axe des temps B_0x partagé en huit parties égales, des ordonnées respectivement égales à ces chemins, pour déterminer par points la courbe des espaces.

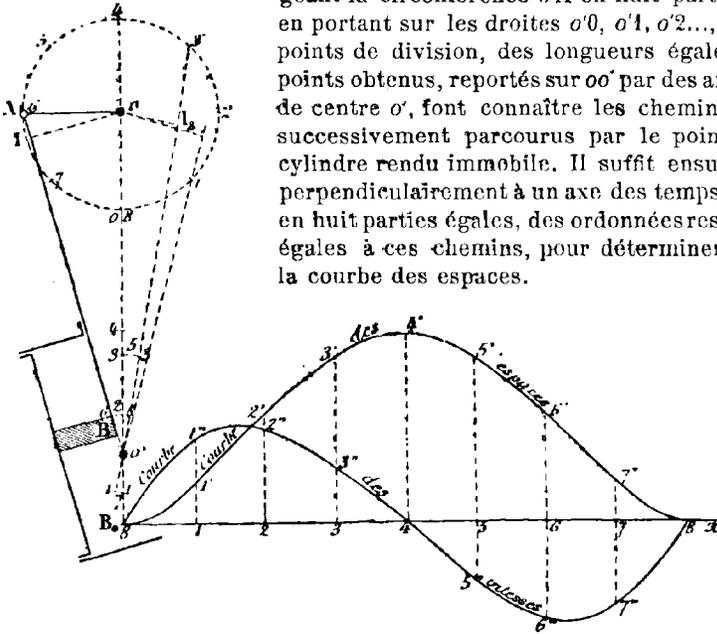


Fig. 560.

Pour construire la courbe des vitesses, on porte sur les ordonnées $11', 22'...$ des longueurs $11'', 22''...$ égales aux perpendiculaires, telles que $o1$, abaissées sur les positions successives de AB. L'exactitude de ce tracé résulte de l'expression

$$v_r = \omega \times o1$$

établie précédemment.

§ IV. — Coulisse de Stephenson.

558. La coulisse de Stephenson, employée dans les locomotives pour commander le mouvement du tiroir, fut imaginée dans le but de renverser à volonté le sens de marche de la machine ; mais elle permet aussi de réaliser une détente variable. Pour en faire comprendre le fonctionnement, nous donnerons d'abord quelques notions sommaires sur la distribution de la vapeur.

559. Distribution de la vapeur.

La vapeur produite par la chaudière pénètre dans la boîte à vapeur, et de là dans le cylindre par deux conduits HH' (fig. 561) qui aboutissent respectivement, d'une part à ses fonds avant et arrière, et d'autre part à une surface plane BB' , parfaitement dressée, que l'on appelle *glace*, ou *table des lumières*. Un troisième conduit G, percé dans la table, se rend soit à l'extérieur, soit au condenseur de la machine.

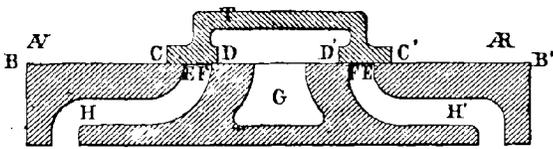


Fig. 561.

Pour que le piston, supposé, par exemple, à son fond de course avant (à gauche de la figure), soit amené à se déplacer vers l'arrière, il est nécessaire que la lumière d'admission EF communique avec la boîte à vapeur, et qu'en même temps la lumière EF' communique avec G, pour permettre à la vapeur accumulée dans le cylindre pendant la course précédente de s'échapper. L'inverse doit avoir lieu pendant la course d'arrière en avant. Ces résultats sont obtenus en plaçant dans la boîte à vapeur, sur la table des lumières, une pièce T appelée *tiroir*, évidée intérieurement, et terminée par des patins CD, C'D'. Dans sa position moyenne, le tiroir couvre les deux lumières d'admission ; il les dépasse extérieurement de quantités égales CE, C'E' que l'on appelle les *recouvrements extérieurs*, et intérieurement de quantités égales DF, D'F', appelées *recouvrements intérieurs* (*). Supposons que le tiroir soit articulé à la barre d'un excentrique à collier, calé sur l'arbre de la manivelle motrice ; il prend ainsi un mouvement rectiligne alternatif dont nous allons étudier l'effet, en suivant la distribution de la vapeur sur la face avant du piston.

Soient oA_0 (fig. 562) la position de la manivelle motrice quand le piston est à son fond de course avant, et oa_0 la position correspondante de la manivelle théorique oa équivalente à l'excentrique du tiroir. Les dimensions du système sont telles que le tiroir occupe à cet instant une position T_0 (fig. 563) laissant à découvert une petite partie EC de la lumière EF ; la longueur EC est appelée l'*avance linéaire du tiroir* ; elle indique que l'admission de la vapeur sur la face gauche du piston avait commencé un peu avant son arrivée à fond de course (*admission anticipée*).

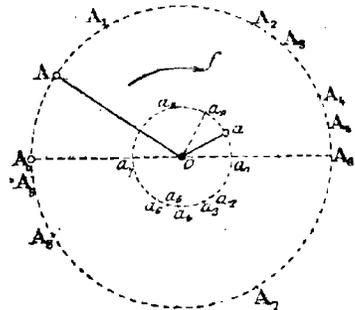


Fig. 562.

La manivelle motrice tournant dans le sens f (fig. 562), le point a se rapproche de a_1 et le tiroir se meut vers la droite, dégageant ainsi de plus en plus la lumière EF ; la vapeur afflue sur la gauche du piston, c'est la période d'*admission*. Elle atteint son maximum quand le tiroir occupe la position T_1 (fig. 564).

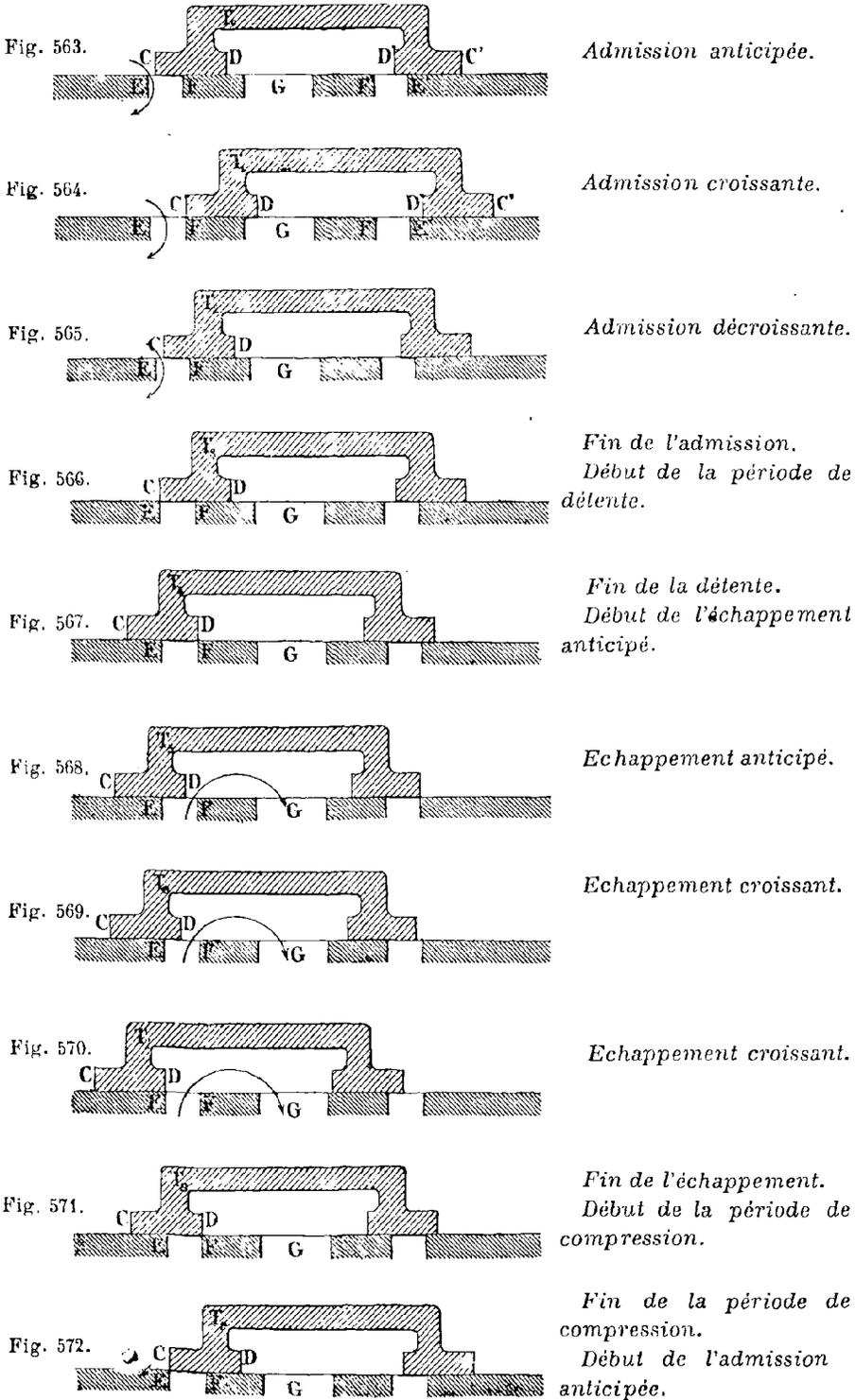
Quand le point a franchit la position a_1 , le tiroir rétrograde vers la gauche, en obturant graduellement la lumière EF (fig. 565) ; pour la position a_3 , située un peu au delà du point a_2 symétrique de a_0 par rapport à A_0O , la lumière est complètement couverte, et l'admission n'a plus lieu (fig. 566). Le mouvement du piston continuant vers l'arrière, le volume de la quantité de vapeur contenue à l'avant du cylindre augmente, et sa pression diminue : c'est la période de *détente* ; elle dure jusqu'à ce que le tiroir occupe la position T_4 (fig. 567), correspondant aux positions a_4 et A_4 de l'excentrique et de la manivelle motrice.

Son mouvement vers la gauche continuant, le tiroir dégage le bord F de la lumière, et met ainsi l'avant du cylindre en communication avec le conduit G (fig. 568) ; la vapeur commence à s'échapper vers l'extérieur, bien que le piston ne soit pas encore arrivé à son fond de course arrière. C'est pourquoi l'on donne à cette période le nom d'*échappement anticipé*. Elle dure jusqu'à ce que la manivelle motrice soit arrivée à son point mort A_0 , qui correspond au changement de sens du mouvement du piston.

A partir de cet instant l'excentrique, partant de a_0 , continue à entraîner le tiroir vers la gauche, en dégageant de plus en plus le bord F de la lumière. C'est la période

(*) Les recouvrements extérieurs sont généralement plus grands que les intérieurs ; ceux-ci peuvent être nuls, et il existe même des tiroirs à découverts intérieurs,

Distribution de la vapeur sur la face avant du piston.



MOUVEMENT DU PISTON D'AVANT EN ARRIÈRE

MOUVEMENT D'ARRIÈRE EN AVANT

d'échappement proprement dit, pendant laquelle la partie avant du cylindre se vide de sa vapeur (fig. 569-570). Puis, le point a étant arrivé à a_7 , le tiroir commence à se mouvoir vers la droite; il occupe à un moment donné une position T_8 (fig. 571) à partir de laquelle l'avant du cylindre est complètement séparé tant du conduit G que de la boîte à vapeur. La période de *compression* commence. Elle se termine quand le tiroir occupe la position T_9 (fig. 572), l'excentrique étant revenu au voisinage de a_0 . A partir de cet instant jusqu'en a_0 , le bord E de la lumière se dégage, et la vapeur commence à affluer vers l'avant du cylindre, bien que le piston ne soit pas encore arrivé à son fond de course. C'est l'*admission anticipée*.

Les mêmes phénomènes se reproduisent sur la face droite du piston, avec cette seule différence que leurs phases successives ne correspondent pas aux positions déjà considérées de l'excentrique oa .

Avec un tiroir commandé par un seul excentrique, la machine, une fois mise en marche tourne indéfiniment dans le même sens. Pour rendre le changement de marche possible, il faudrait caler sur l'arbre moteur deux excentriques oa, oa' (fig. 573), symétriques par rapport à la manivelle oA , et disposer les choses de manière à pouvoir relier le tiroir avec l'un ou l'autre à volonté; car les diverses phases de la distribution, commandée par oa' tournant dans le sens f' , sont identiques à celles qui résultent de la commande par oa tournant dans le sens f , de sorte que la machine, supposée au repos, se met en mouvement dans le sens f si l'on relie le tiroir à oa , et dans le sens f' si on le relie à oa' .

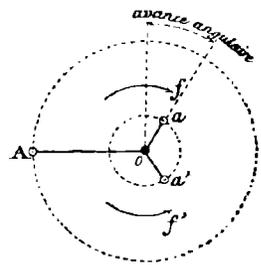


Fig. 573.

De plus, la course du tiroir est égale à $2 oa$, et les durées des phases de la distribution varient avec elle; elles dépendent aussi de l'angle Aoa . Une combinaison qui permettrait de changer à volonté le rayon de l'excentrique et son angle de calage donnerait donc une détente variable. En définitive :

1° Deux excentriques symétriques par rapport à la manivelle motrice, et disposés de manière que le tiroir puisse être commandé indifféremment par chacun d'eux, permettent le changement de marche.

2° Un excentrique, disposé de manière que l'on puisse modifier son angle de calage et son rayon, assure une détente variable.

Ces deux desiderata sont réalisés par l'emploi de la coulisse de Stephenson.

560. Coulisse de Stephenson.

Ce mécanisme se compose de deux excentriques à collier égaux, solidaires l'un de l'autre et de même angle de calage, entraînés par l'essieu moteur. Nous avons représenté (fig. 574), les manivelles oA et oA' auxquelles ils équivalent théoriquement. L'angle AoA' est inférieur à 180° (*). Les barres d'excentriques AB et $A'B'$ sont articulées en B et B' aux extrémités d'une pièce circulaire, appelée *coulisse*, creusée d'une rainure dans laquelle s'engage un coulisseau D . Ce dernier est fixé à un levier FD , qui oscille autour d'un point fixe F du bâti. Une bielle EU est articulée en E à ce levier, et en U à la tige du tiroir. L'excentrique oA commande la marche de la machine dans le sens f , par exemple, et l'excentrique oA' commande la marche en sens contraire.

La coulisse est supportée par une bielle CG , reliée au bras GH d'un levier à trois

(*) On appelle *avance angulaire* d'un excentrique l'angle que forme la manivelle idéale qu'il remplace avec la perpendiculaire à la manivelle motrice (fig. 573). L'avance angulaire n'est jamais nulle; en la supposant de 30° , $AoA' = 120^\circ$.

branches, mobile autour d'un axe fixe H , appelé *arbre de relevage*. Un second bras HI est articulé à une longue tige IJ , appelée *barre de relevage*, reliée en J au *levier de changement de marche* KJL , mobile autour de l'axe fixe K . En manœuvrant ce levier, soit à la main, soit par un volant commandant une vis, le mécanicien fait mouvoir le système $LJKIHGC$, et la coulisse se relève ou s'abaisse, modifiant ainsi la position relative du coulisseau D . Un contrepoids P , fixé au troisième bras du levier $GHIP$, équilibre toutes les pièces de ce système.

Quand la machine entre en mouvement, les points B et B' se déplacent comme s'ils étaient commandés respectivement par les systèmes bielle et manivelle oAB , $oA'B'$. Si donc on abaisse complètement la coulisse en rabattant le levier LJK vers la droite, la distribution de la vapeur est celle qui correspond à la marche dans le sens f , puisque les points D et B deviennent très voisins, et que le tiroir est alors mené par l'excentrique oAB . Le relèvement complet de la coulisse correspond à la marche en sens contraire.

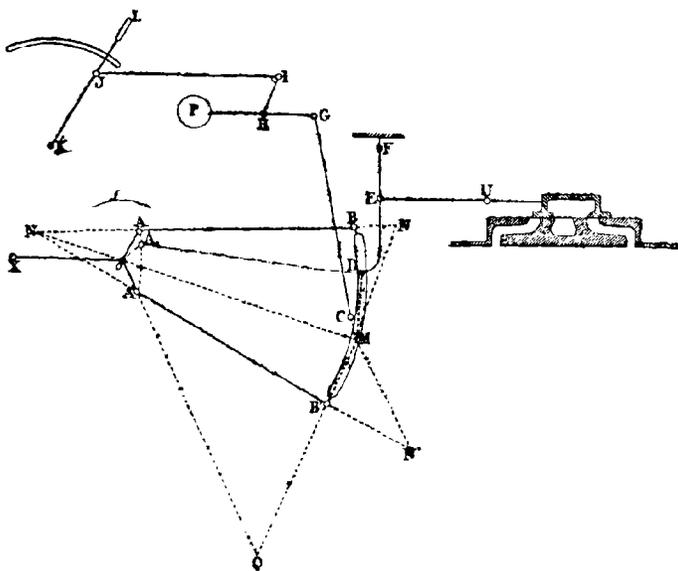


Fig. 574.

Pour une position moyenne de la coulisse, le mouvement du point D participe à la fois de ceux de B et de B' , et l'effet prépondérant est produit par celle des deux barres d'excentrique où il est le plus rapproché. On conçoit donc que, pour toutes les positions de la coulisse où le point D est compris entre C et B , la distribution convient à la marche dans le sens f , mais la durée de ses phases varie avec la position du levier de changement de marche. De même, toutes les positions de la coulisse dans lesquelles le coulisseau est compris entre C et B' , se rapportent à la marche en sens contraire. Enfin, quand le coulisseau D se trouve très près du point C , les mouvements oscillatoires du tiroir sont insuffisants pour détacher les lumières d'admission, et la vapeur ne pénètre plus dans le cylindre. La machine, après quelques tours, finit par s'arrêter. Il est donc possible, en manœuvrant convenablement la coulisse, de réaliser des distributions avec admission variable, de mettre la machine à l'arrêt, ou enfin de renverser la vapeur.

Une étude attentive des propriétés de la coulisse de Stephenson a montré que, pour chaque position du levier de changement de marche, le mouvement du point D est sensiblement identique à celui qu'il prendrait sous l'action d'un excentrique oA_1D ,

dont le centre A_1 serait situé, à l'instant où la manivelle motrice oX est à l'un de ses points morts, sur un arc de cercle de grand rayon (à peu près assimilable à une droite) passant par A et A' , et partagerait cet arc dans le rapport des segments déterminés par le point D sur BB' . L'angle de calage et le rayon de cet excentrique fictif varient avec la position de la coulisse, ce qui corrobore les indications sommaires données ci-dessus, relativement aux admissions variables qui résultent de la manœuvre de l'arbre de relevage. En étudiant la distribution qu'il produit, on peut repérer d'avance les positions à donner au levier de changement de marche pour obtenir une admission déterminée.

561. Etude cinématique de la coulisse de Stephenson.

Calculons la vitesse v_d du coulisseau en fonction de la vitesse angulaire ω de l'arbre o . Le point C décrivant un arc de cercle de centre G , le centre instantané de rotation de la coulisse se trouve en un certain point M de GC dont nous déterminerons plus loin la position rigoureuse. En désignant par $v_{b'}$ la vitesse du point B' , on a donc

$$\frac{v_d}{v_{b'}} = \frac{MD}{MB'} \quad (1)$$

D'autre part, le centre instantané de rotation de la bielle fictive $A'B'$ se trouve à l'intersection Q des normales oA' , MB' , aux trajectoires des points A' et B' . Par conséquent

$$\frac{v_{b'}}{v_{a'}} = \frac{QB'}{QA'}$$

ou, en menant MN' parallèle à oA'

$$\frac{v_{b'}}{v_{a'}} = \frac{MB'}{MN'} \quad (2)$$

$$\text{D'autre part} \quad v_{a'} = \omega \times oA' \quad (3)$$

En multipliant membre à membre les égalités (1) (2) et (3), il vient

$$v_d = \omega \times MD \times \frac{oA'}{MN'} \quad (4)$$

On trouverait de même, en raisonnant sur l'excentrique oAB

$$v_d = \omega \times MD \times \frac{oA}{MN} \quad (5)$$

En égalant les valeurs (4) et (5) de v_d , on a

$$\frac{oA}{MN} = \frac{oA'}{MN'}$$

Cette proportion montre que les trois droites AB , $A'B'$, oM sont concourantes. Il en résulte que le centre instantané de rotation M de la coulisse se trouve à l'intersection de la bielle de relevage GC , avec la droite qui joint le point o au point de rencontre des barres d'excentrique AB et $A'B'$.

Connaissant la vitesse du point D , on trouve facilement celle du tiroir, en considérant le système articulé qui les unit.

La coulisse de Stephenson a reçu de nombreuses modifications: (coulisse renversée de Gooch, coulisse droite d'Allan, etc...); la théorie de ces appareils ne diffère pas de celle qui précède.

§ V. — *Commande de la distribution dans les machines à vapeur à grande vitesse, du Creusot (*)*.

562. MM. Schneider et C^o ont construit pour la commande des dynamos destinées à l'éclairage électrique par incandescence, une machine à vapeur à grande vitesse, pourvue de quatre distributeurs. Deux tiroirs cylindriques T et T', (fig. 575, 578, 580), placés à la partie supérieure du cylindre et à ses deux extrémités, règlent l'admission de la vapeur; deux tiroirs Corliss U et U', disposés à la partie inférieure, règlent l'échappement, de telle sorte que les phases de la distribution à l'avant et à l'arrière sont commandées par des mécanismes différents. Le mouvement est donné à ces organes par un système très intéressant d'excentriques à collier et de tiges articulées, dont voici la description.

563. **Commande des tiroirs d'admission.**

Un excentrique de rayon et d'angle de calage variables, figuré par la manivelle fictive équivalente oA (fig. 575), est entraîné par l'arbre o du volant. Sa

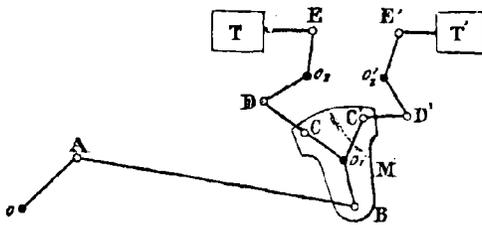


Fig. 575.

barre est articulée en B à une pièce M, mobile autour du centre fixe o_1 , et portant deux axes CC' autour desquels pivotent les petites bielles CD, $C'D'$. La bielle CD est articulée en D à une extrémité d'un levier coudé Do_2E , oscillant autour de l'axe fixe o_2 ; l'autre branche est reliée en E à la tige du tiroir T. Une disposition analogue $C'D'o'_2E'$ assure la liaison de la tige du tiroir T' et du point C'. L'en-

semble du mécanisme équivaut à un double système de tiges articulées, formé par $oA Bo_1 CDo_2E$ d'une part, et $oA Bo_1 C'D'o'_2E'$ d'autre part, oscillant autour des centres fixes $oo_1 o_2 o'_2$, et dans lequel les angles Bo_1C , Bo_1C' , Do_2E , $D'o'_2E'$ seraient invariables. Son effet est de transformer la rotation continue donnée à oA par l'arbre moteur, en un mouvement rectiligne alternatif de EE' , qui règle l'admission de la vapeur sur les deux faces du piston. On sait que les phases de la distribution dépendent du rayon oA de l'excentrique moteur et de son angle de calage. Pour laisser à ces éléments la possibilité de varier, on a monté l'excentrique d'admission à frottement doux sur un second excentrique α (fig. 576), calé sur l'arbre du volant. Le point A peut ainsi se mouvoir sur une circonférence de centre α , et sa distance au point o varie entre les limites $e + e'$, $e - e'$. en désignant par e et e' les distances respectives αA , $o\alpha$. De plus, l'angle que forme oA avec la manivelle motrice change avec la position du point A.

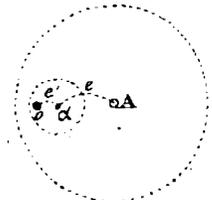


Fig. 576.

Les déplacements du point A sont assurés de la façon suivante. L'excentrique d'admission est entraîné par un point N (fig. 578) d'un balancier QQ' , articulé par ses

(*) Les figures 578 à 582 inclus sont extraites du journal *Le Génie civil*, qui nous a autorisé à les reproduire.

extrémités à deux leviers QR, Q'R', dont les centres d'oscillation R et R' sont invariablement liés à deux masses SS', mobiles autour des points VV'. Sous l'action de la force centrifuge développée par la rotation du volant, ces masses pendulaires tendent à s'écarter de l'arbre moteur; elles mettent en mouvement le système articulé NQR Q'R', et provoquent ainsi la rotation de l'excentrique oA sur l'excentrique plus petit qui le supporte. Deux ressorts antagonistes relient les masses SS' à des points fixes du volant, et combattent l'effet de la force centrifuge, de sorte que le déplacement du point N est d'autant plus prononcé que le mouvement de la machine est plus rapide. Ces masses jouent donc le rôle de régulateur.

564. Commande des tiroirs d'échappement.

Un second excentrique, de rayon et d'angle de calage constants, est entraîné par l'arbre du volant. Sa barre FG (fig. 577-580) est articulée en G à une pièce triangulaire X, mobile autour de l'axe fixe o_3 . Deux bielles HK, H'K' transmettent le mouvement oscillatoire de X à des manivelles o_4K , $o_4'K'$ solidaires des tiroirs d'échappement. L'émission de la vapeur se fait toujours d'après les mêmes lois, quelle que soit l'allure de la machine.

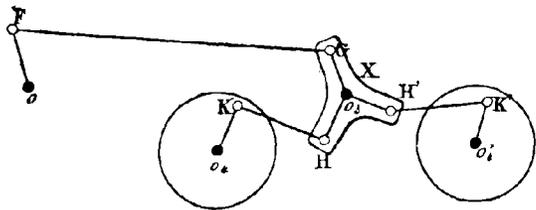


Fig. 577.

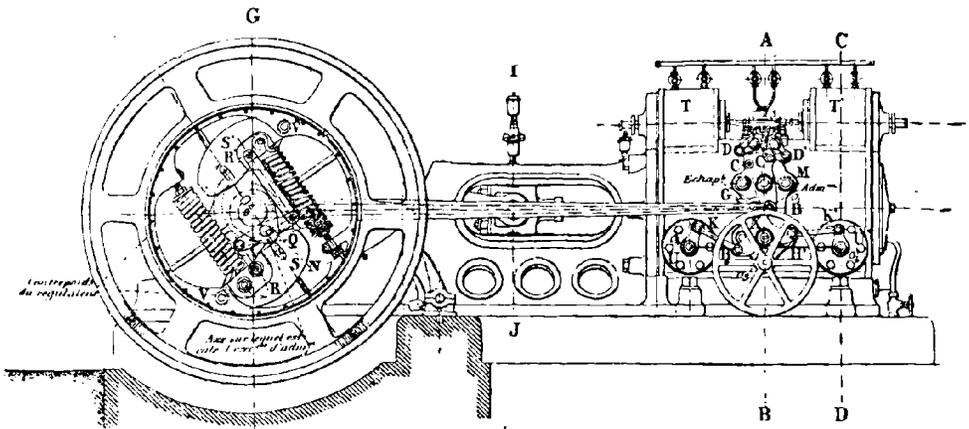


Fig. 578.

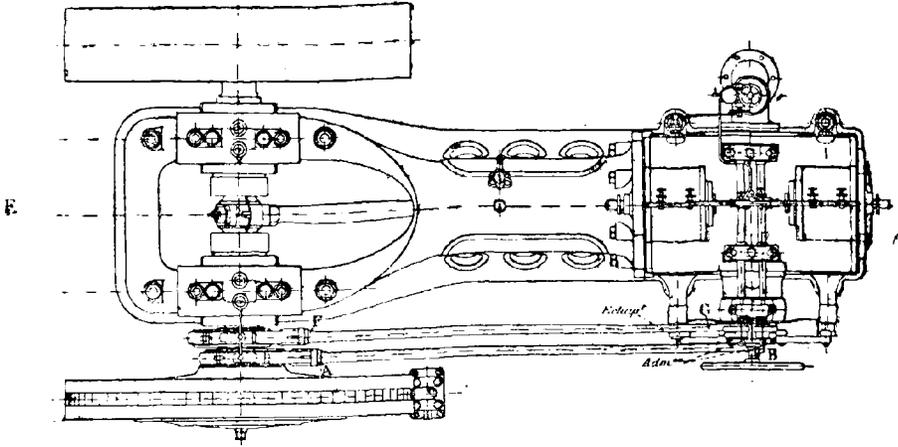


Fig. 579.

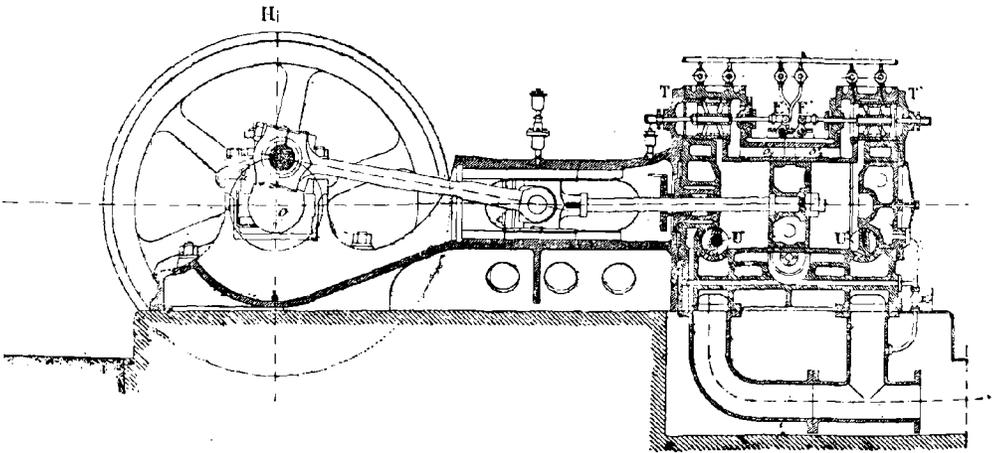


Fig. 580.

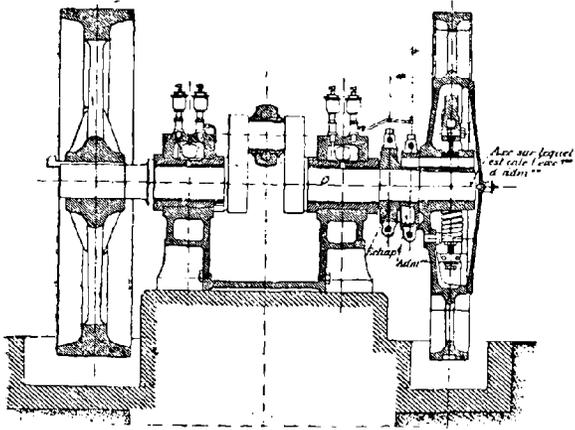


Fig. 581.

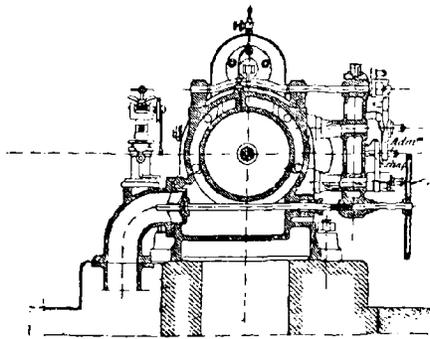


Fig. 582

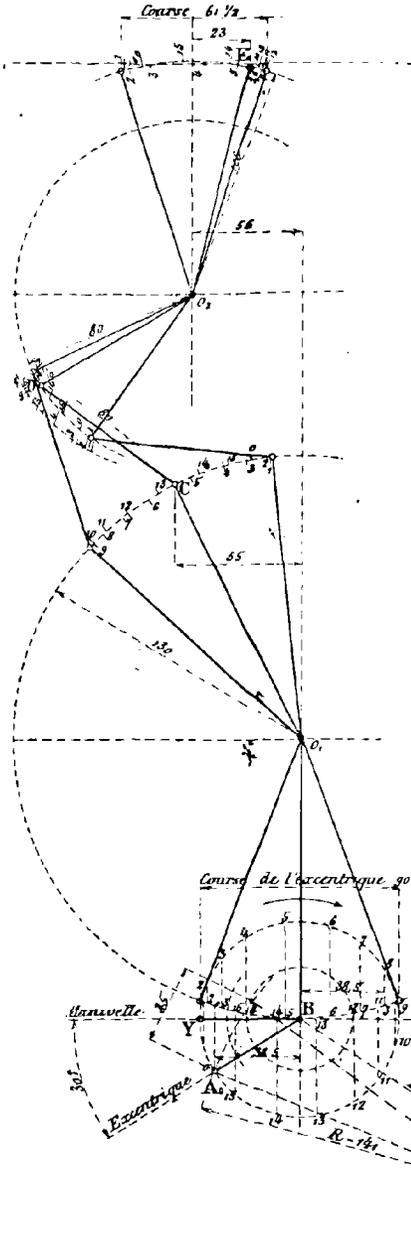


Fig. 583.

Fig. 584.

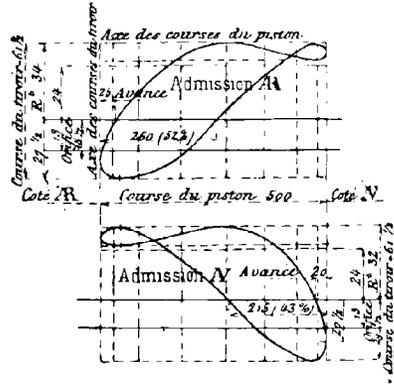


Fig. 585.

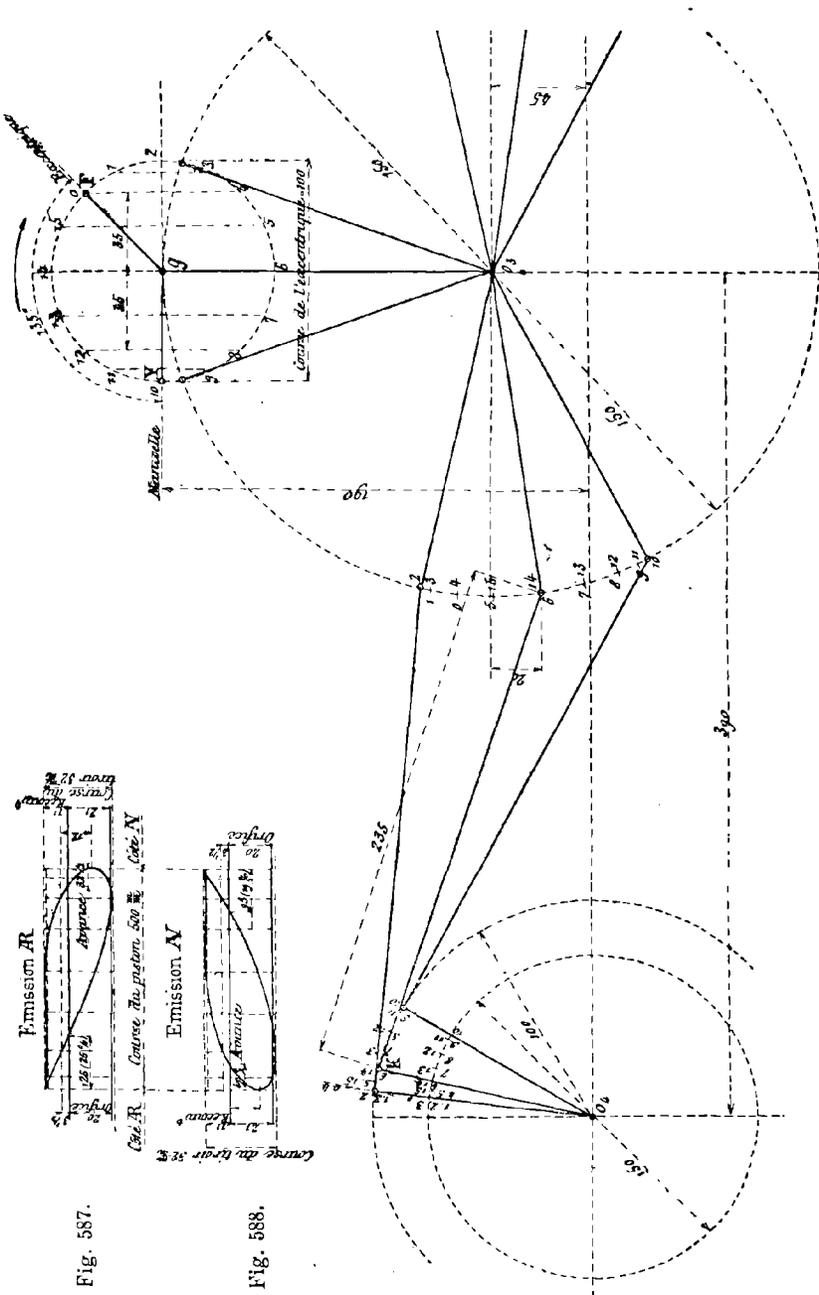


Fig. 587.

Fig. 588.

Fig. 586.

565. Epures de distribution.

Les figures 584 et 585 représentent les courbes d'admission, et les figures 587, 588 les courbes d'échappement, en prenant pour abscisses les courses du piston et pour ordonnées celles du tiroir. Les origines des espaces se rapportent aux positions qu'occupent les éléments du système quand le piston est à son fond de course avant; la manivelle motrice est alors à son point mort de gauche. Dans l'épure 583, relative à l'admission, on a transporté l'arbre moteur, l'excentrique oA et la manivelle motrice parallèlement à eux-mêmes jusqu'au point B_0 , pour réduire les dimensions du dessin. A cause de la grande longueur de la barre d'excentrique, les positions successives du point B se trouvent sensiblement à l'intersection de la circonférence o_1B avec les ordonnées tracées par les positions correspondantes du point A . On a ainsi déterminé de proche en proche 16 positions des points B, C, D, E . Celles du point E fournissent les courses du tiroir. Les courses du piston sont obtenues de la même manière, en considérant les positions successives du bouton Y de la manivelle motrice. L'angle de calage de l'excentrique oA a été supposé de 30° .

Les figures 586, 587, 588, relatives à l'échappement, ont été construites de la même manière que les précédentes. L'angle de calage de l'excentrique est de 135° .

SYSTÈMES DIVERS DE TIGES ARTICULÉES

§ I. — *Machine verticale à mortaiser, système Guillet.*

566. Cette machine offre un exemple intéressant de la production d'un mouvement rectiligne alternatif à course variable par l'emploi de tiges articulées. Le porte-outil F (fig. 589), monté sur un chariot mobile dans les coulisses G, est commandé par une bielle DE, articulée en D à l'extrémité d'un petit balancier CD pivotant autour de son milieu o_1 . Ce balancier est mis en mouvement par un système de deux bielles inégales, BC et AB, dont la dernière est entraînée par une manivelle oA , qui reçoit un mouvement de rotation uniforme par l'intermédiaire d'une poulie calée sur son arbre. L'extrémité B de la bielle AB est reliée, par un levier Bo_2 , à un centre o_2 que nous supposons provisoirement fixe. Quand la poulie motrice entre en mouvement, le point B se déplace sur un arc de cercle de centre o_2 , et toutes les tiges du mécanisme jusqu'à DE accomplissent des oscillations qui impriment au chariot un mouvement rectiligne alternatif. Pour fixer les limites de sa course, il suffit de chercher les positions extrêmes du point E. Celles-ci correspondent évidemment aux instants où les directions oA et AB sont confondues ou opposées. La distance oB étant égale, dans le premier cas, à la différence $AB - oA$, et, dans le second, à la somme $AB + oA$, les positions limites B et B_0 du point B se trouvent à l'intersection de la circonférence o_2B , de centre o_2 , avec deux arcs de cercle de centre o et de rayons respectifs $AB - oA$, $AB + oA$. On en déduit aisément les positions correspondantes CoD , $C_0o_1D_0$ du balancier, et la course EE_0 du chariot.

Afin de pouvoir modifier cette dernière suivant la profondeur de la mortaise à creuser, l'axe o_2 est porté par une branche o_3o_2 d'un triple levier rigide Ho_3o_3K , mobile autour du centre fixe o_3 . La seconde branche o_3K est reliée par une tringle KL à un levier à pédale MN, qui peut être fixé à différentes hauteurs sur le support Q. La troisième branche o_3H porte un contre-poids P, qui équilibre tout le système. Lorsqu'on élève le levier MN, le point o_2 s'élève aussi, et l'arc de cercle sur lequel se meut le point B se rapproche de l'horizontale. L'amplitude de l'oscillation du balancier CD diminue, ainsi que la course du chariot. Les positions limites E_0E_1 du point E, déterminées sur la figure 590 par les constructions indiquées précédemment, montrent que la course de l'outil a varié de 160 m/m à 125 m/m . Cette réduction est d'autant plus grande que le levier MN est plus relevé.

Cherchons l'expression de la vitesse v du chariot, à un instant quelconque, en fonction de la vitesse angulaire ω de la manivelle oA , supposée constante. Soient v_a, v_b, v_c, v_d , les vitesses des points ABCD. Le centre instantané de rotation T de la bielle DE (fig. 591) est au point de rencontre de CD et de la perpendiculaire en E à la direction du mouvement rectiligne. On a donc

$$\frac{v}{v_d} = \frac{TE}{TD}$$

ou, en menant o_1I parallèle à TE

$$\frac{v}{v_d} = \frac{o_1I}{o_1D} \tag{1}$$

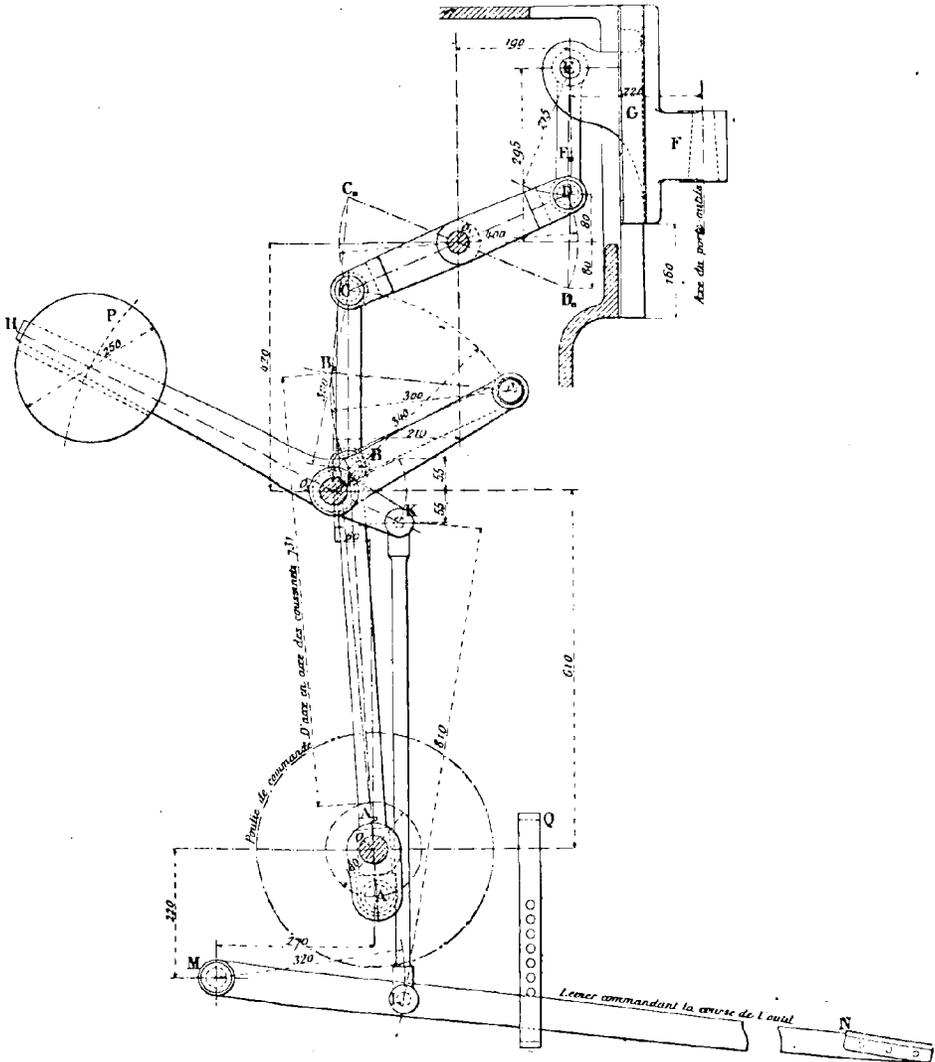


Fig. 589.

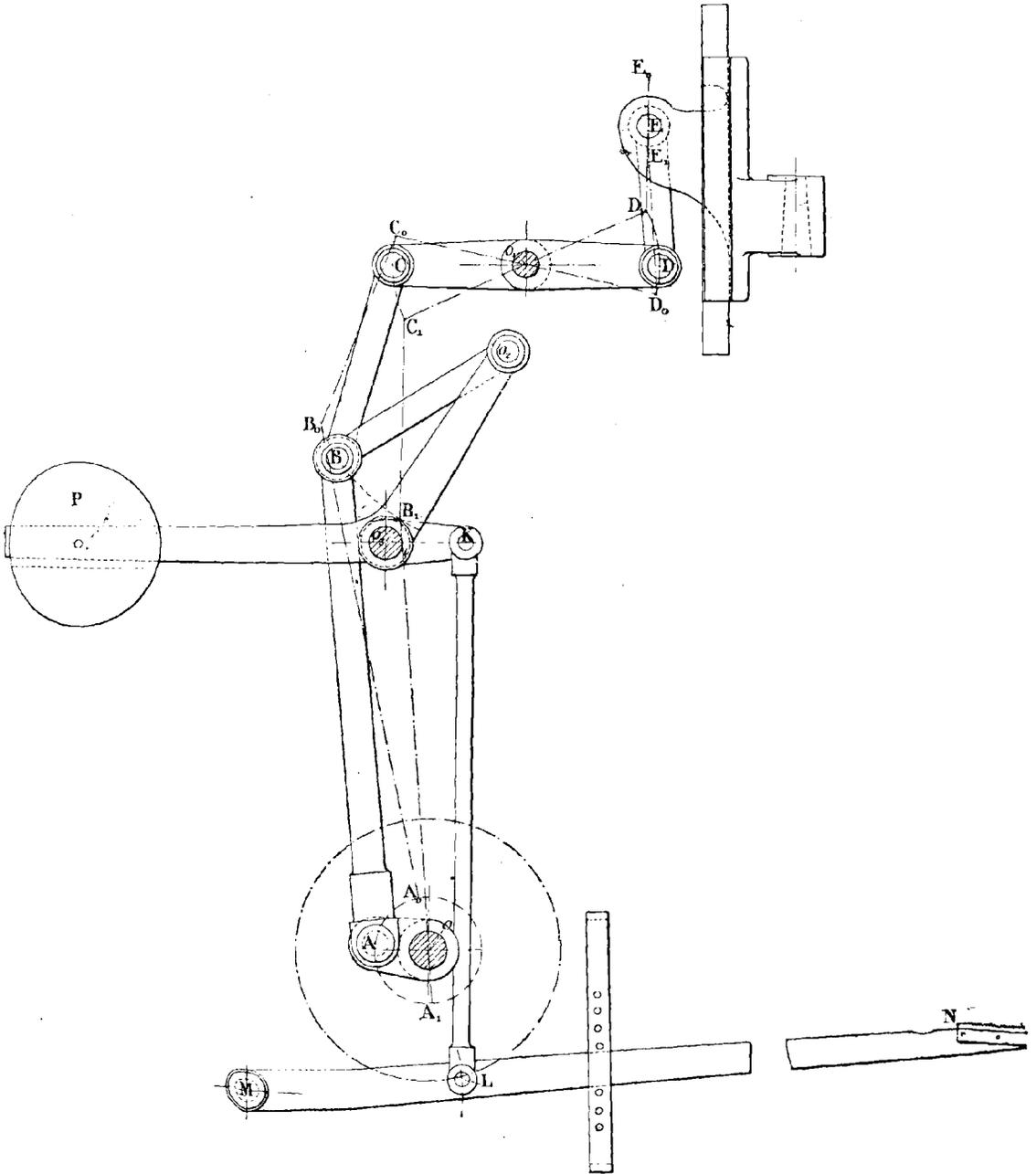


Fig 590.

De plus, à cause de l'égalité des deux bras du balancier Co_1D

$$v_d = v_c$$

(2)

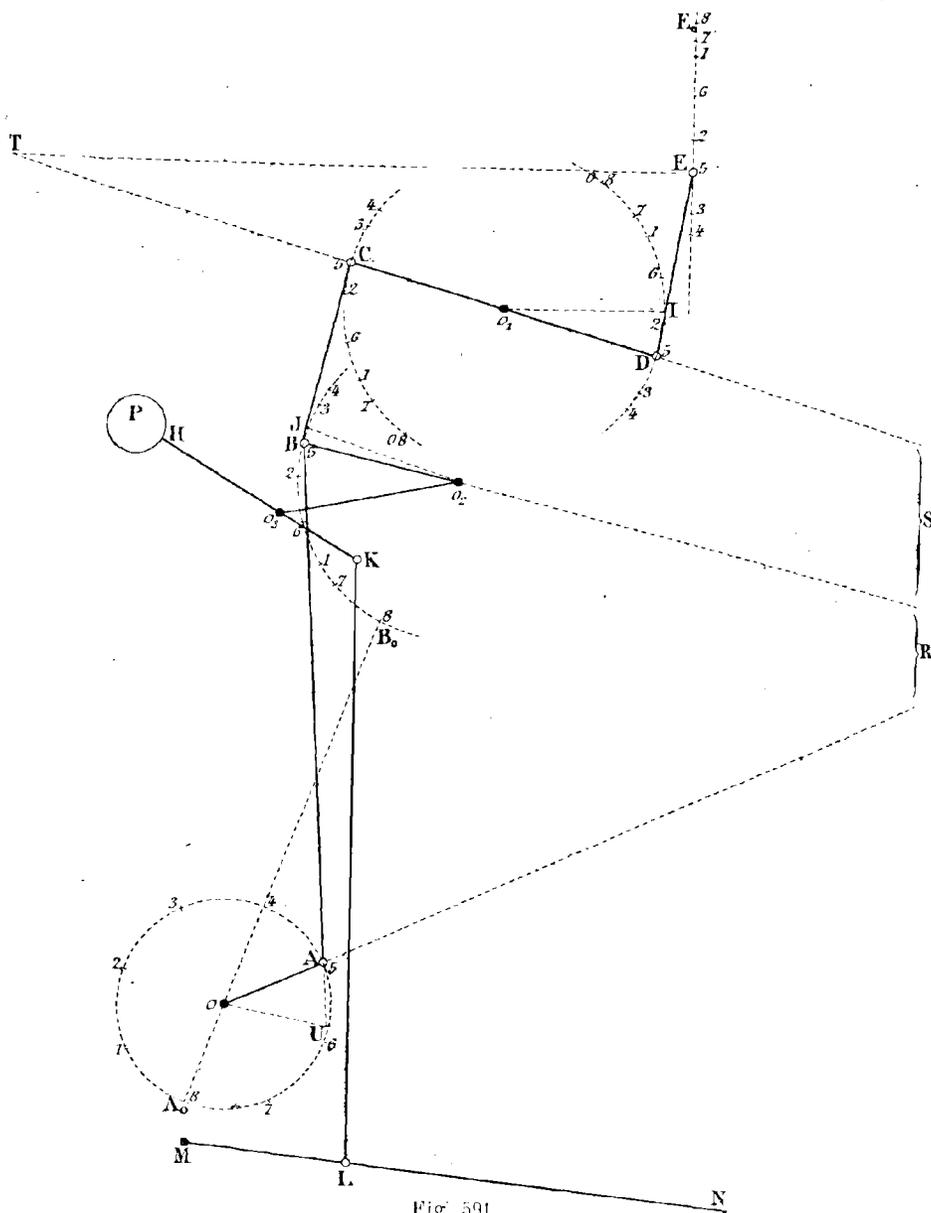


Fig. 591.

Le centre instantané de rotation S (en dehors des limites du dessin) de BC est l'intersection de oC_1 et de o_2B . Par conséquent

$$\frac{v_c}{v_b} = \frac{SC}{SB}$$

ou, en traçant la parallèle o_2J à o_1C

$$\frac{v_c}{v_b} = \frac{o_2J}{o_2B} \quad (3)$$

En considérant le centre instantané de rotation R de AB (situé aussi en dehors des limites du dessin), on a encore

$$\frac{v_b}{v_a} = \frac{RB}{RA}$$

ou, en menant la parallèle oU à RB

$$\frac{v_b}{v_a} = \frac{oU}{oA} \quad (4)$$

Enfin $v_a = \omega \times oA$ (5)

En multipliant membre à membre les égalités (1), (2), (3), (4), (5), il vient, après simplifications

$$v = \frac{\omega}{o_1D} \times \frac{o_1I \times o_2J \times oU}{o_2B}$$

Cette expression montre que la vitesse de l'outil est proportionnelle à

$$\frac{o_1I \times o_2J \times oU}{o_2B}$$

On a représenté (fig. 592) les lois graphiques du mouvement de l'outil, en prenant pour origines des temps et des espaces celles qui se rapportent au début de la course descendante (période de travail). A cet instant, le point B est en B_0 , à une distance du centre o égale à $AB = oA$, et le point A est en A_0 sur oB (fig. 591). Après avoir partagé la circonférence oA en huit parties égales, à partir de A_0 , on a successivement

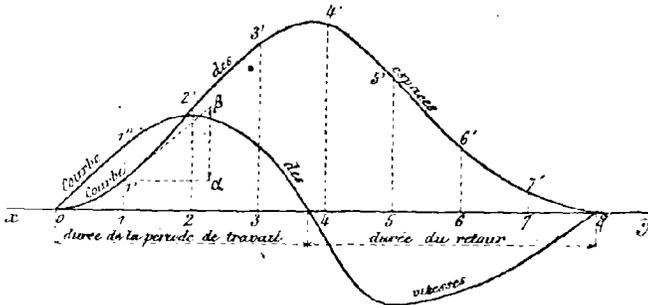


Fig. 592.

déterminé les positions correspondantes des points B, C, D, E. On a ensuite porté, perpendiculairement à un axe des temps partagé en huit parties égales, des ordonnées égales aux distances $E_0 1, E_0 2 \dots$ du point E à sa position initiale, ce qui a donné la courbe des espaces $01' 2' 3' \dots 8$, dont on a déduit la courbe des vitesses $01'' 2'' \dots$ par la méthode générale. La figure montre que le mouvement du point E est à peu près sinusoïdal, et que ses deux phases sont sensiblement symétriques.

§ II. — *Pantographe.*

567. Le pantographe, employé par les dessinateurs pour amplifier ou réduire une figure dans un rapport donné, se compose essentiellement d'un parallélogramme articulé ABCD (fig. 593), dont deux côtés adjacents AC, AB, sont prolongés respectivement jusqu'en *o* et M; les dimensions des barres ACo, ABM, sont telles que les trois points *oDM* sont en ligne droite. Nous allons d'abord montrer que, si cette condition

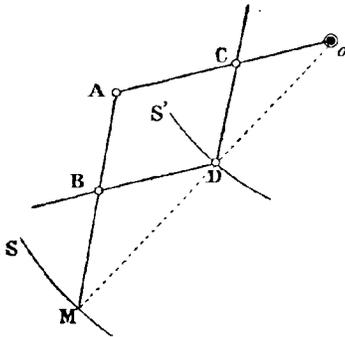


Fig. 593.

est supposée remplie pour une position particulière du système, elle l'est encore quelles que soient ses déformations. On a en effet, par hypothèse

$$\frac{oC}{CD} = \frac{oA}{AM}$$

Cette proportion subsiste à chaque instant, puisque ses termes sont invariables; comme, d'autre part, le quadrilatère ABDC est toujours un parallélogramme, les triangles *oCD*, *oAM* restent semblables, et la ligne *oDM* ne cesse pas d'être droite. De plus, la proportion

$$\frac{oD}{oM} = \frac{oC}{oA}$$

montre que le rapport $\frac{oD}{oM}$ reste constant. Si donc, ayant fixé le point *o*, on fait décrire au point M une certaine ligne S, le point D trace une ligne S', homothétique de la première par rapport au point *o*, avec $\frac{oC}{oA}$ pour rapport d'homothétie.

Pour faire des dessins à diverses échelles, il suffit de déplacer les points d'articulation B et C, tous les autres restant fixes, en ayant soin que les points *oDM* restent en ligne droite. Dans la pratique, les articulations sont formées par des vis de pression, que l'on introduit dans des trous numérotés percés dans l'épaisseur des tiges. Pour tracer ces graduations, on procède de la façon suivante. Soit $\frac{m}{p}$ le rapport d'homothétie à obtenir; on a, d'après ce qui précède

$$\frac{oC}{oA} = \frac{DC}{AM} = \frac{oD}{oM} = \frac{m}{p}$$

Les points *o*, A et M restant fixes sur les deux tiges qui aboutissent en A, les termes *oA* et AM sont constants; les termes inconnus *oC* et DC sont déterminés par les relations

$$oC = oA \times \frac{m}{p}$$

$$DC = AB = AM \times \frac{m}{p}$$

Le point fixe *o* est constitué par une pointe ou une masse pesante; on introduit, dans des trous percés en D et M, une pointe sèche et un crayon, dont l'un suit le modèle à reproduire; l'autre en trace une réduction ou un agrandissement, selon que le crayon est placé en D ou en M.

§ III. — Systèmes articulés à tiges flexibles.

563. On emploie souvent, pour la commande des marteaux de forge, des bielles ou des balanciers flexibles, constitués par des ressorts à lames multiples. Dans les martinets « Ajax », par exemple (fig. 594) un mouvement de rotation uniforme est communiqué à un plateau A, en un point duquel est articulée une bielle BC, formée de deux lames juxtaposées réunies à leurs extrémités. Un balancier à ressorts CD, articulé à la bielle en C, supporte en D la masse pesante M, et oscille autour d'un axe fixe o. La partie oD est très flexible; l'autre partie oC, contiguë à la bielle, est plus courte et plus rigide.

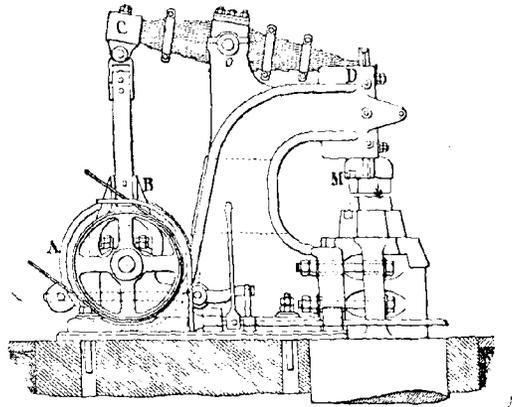


Fig. 591.

Pour étudier l'effet de cette disposition, suivons le plateau A pendant un tour, s'effectuant par exemple dans le sens *f*, à partir de l'instant où la masse vient de frapper sur l'enclume (fig. 595). La manivelle motrice, partant de son point mort supérieur, tire la bielle vers le bas; à cause de l'inertie du système CoDM, les deux lames BC deviennent parallèles, et fonctionnent comme un tirant rigide, en même temps que le balancier s'infléchit vers l'enclume, ce qui évite un choc au commencement de la course ascendante du marteau.

Dès que la manivelle motrice a dépassé son point mort inférieur, la bielle BC est repoussée vers le haut, tandis que la masse M, en raison de son inertie, continue à s'élever. Cette circonstance a pour résultat de bander le balancier à ressort, et d'écartier les deux lames BC, de sorte que le système prend la disposition indiquée figure 596. Aussitôt que la frappe M commence à descendre, le système BCoD reprend sa forme normale, et la détente des ressorts ajoute son effet à celui que la manivelle

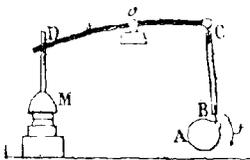


Fig. 595.

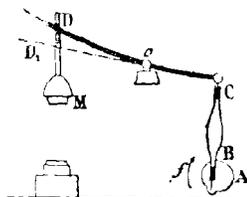


Fig. 596.

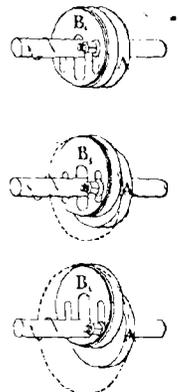


Fig. 597.

motrice exerce sur le balancier par l'intermédiaire de la bielle. En résumé, la construction spéciale du balancier et de la bielle permet de réaliser :

1° Une grande élasticité de marche, sans chocs sur les organes de commande au commencement des courses ascendantes de la frappe ;

2° Un accroissement de la force des coups battus par une frappe d'un poids donné, grâce à l'énergie emmagasinée par les ressorts.

La force des coups dépend évidemment de l'angle formé par les positions extrêmes du balancier, c'est-à-dire de la longueur de la manivelle motrice constituée par le plateau A et le point d'articulation B. Pour faire varier cette longueur, on attelle la bielle à un disque B (fig. 597), que l'on peut caler plus ou moins excentriquement sur le plateau A, ce qui modifie la distance du point B à l'axe de rotation.

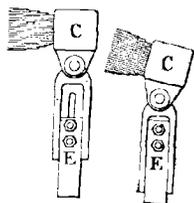


Fig. 598.

Enfin, la distance du marteau à l'enclume au moment où le coup est frappé doit être réglée d'après la hauteur de la pièce à forger. Dans ce but, la bielle est articulée au balancier par l'intermédiaire d'un étrier à coulisses E (fig. 598), qui permet de faire varier sa longueur, et d'approprier la machine aux travaux qu'elle doit exécuter.

Citons encore comme exemple de transmission par balanciers flexibles, les martinets cingleurs « *Excelsior* » (fig. 599) ; le marteau D est fixé sur un manche en bois A, mobile autour de tourillons supportés par les paliers fixes o ; la queue du manche est reliée à l'extrémité C d'un ressort CFE, mobile autour des tourillons G ; l'autre extrémité du ressort est articulée à une bielle, attelée elle-même à un excentrique à course variable monté sur l'arbre de commande. Celui-ci, auquel le mouvement est donné par une paire de poulies fixe et folle P, entraîne en outre avec lui

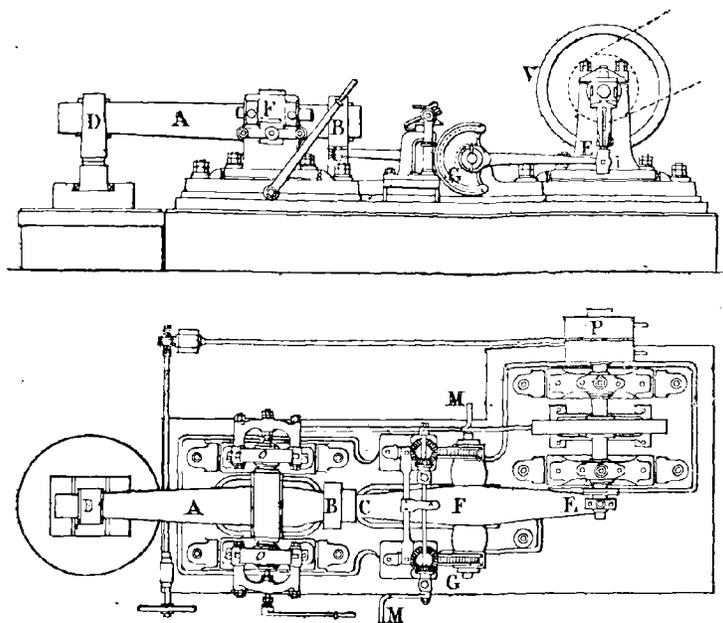


Fig. 599.

un fort volant V. La rotation de l'arbre moteur donne aux systèmes EFC, BoA, des mouvements oscillatoires dont l'effet est de faire frapper un coup du marteau sur l'enclume à chaque tour des poulies P. On reconnaît aisément que, comme dans le cas précédent, l'élasticité du ressort EFC ajoute son effet à celui du mouvement

moteur pour augmenter la force des coups. Cette dernière dépend en outre de l'amplitude des oscillations du marteau, et, par suite, de la course de la bielle ; on peut la faire varier entre certaines limites, en réglant le rayon de l'excentrique de commande.

Enfin, la hauteur du marteau au-dessus de l'enclume à l'instant où le coup va être frappé doit être modifiée suivant les pièces à façonner. On peut arriver à ce résultat en changeant la longueur de la bielle ; mais comme ce réglage ne peut se faire qu'au repos, et que la pièce diminue graduellement d'épaisseur pendant le travail, il est nécessaire de compléter cette disposition par une autre qui puisse fonctionner en marche. Dans ce but, les tourillons du ressort EFC sont montés sur des excentriques, munis de secteurs dentés G ; en agissant sur ces secteurs par les manivelles M et les engrenages visibles en plan (fig. 599), on élève ou on abaisse l'axe d'oscillation du ressort, ce qui modifie la hauteur de frappe.

Cet appareil et le précédent permettent, au moyen d'une fourchette d'embrayage qui fait passer rapidement la courroie de commande de la poulie fixe à la poulie folle, ou vice-versa, de réaliser toutes les vitesses de frappe comprises entre des coups isolés, et un maximum de 400 coups par minute.

ENCLIQUETAGES

569. Les encliquetages sont des mécanismes destinés à transformer le mouvement circulaire alternatif d'un levier en un mouvement circulaire ou rectiligne intermittent, dont le sens reste invariable. Il en existe de deux sortes :

- 1^o Les encliquetages à dents ;
- 2^o Les encliquetages à arc-boutement.

Nous décrirons d'abord les premiers.

§ I. — Encliquetages à dents.

570. Encliquetage à simple effet.

Les encliquetages à dents sont à simple ou à double effet, suivant que le mouvement oscillatoire moteur entraîne l'organe mené pendant une seule de ses courses alternatives, ou pendant toutes les deux.

Un levier moteur L (fig. 600) oscille librement autour de l'arbre à conduire o , sur lequel est calée une roue R à dents inclinées, dite *roue à rochet*. En un point fixe o' du levier est articulée une pièce recourbée C, appelée *cliquet*, qui est maintenue en contact avec la roue à rochet par un ressort M, et s'engage entre ses dents. Les faces sur lesquelles son extrémité vient s'appuyer sont rectilignes, et constituées le plus souvent par des rayons ; les faces opposées sont courbes, et de profil quelconque. Lorsqu'on manœuvre le levier dans le sens f , le cliquet vient buter sur une dent, ce qui rend momentanément les parties du mécanisme solidaires les unes des autres, et provoque l'entraînement de la roue R. La solidarité cesse dès le début de la course du levier en sens contraire ; le cliquet glissant alors sur les faces courbes des dents, la roue à rochet est abandonnée à elle-même. Pour la maintenir dans la position qu'elle vient d'acquiescer, on dispose sur un axe fixe o'' un *cliquet d'arrêt* C', qui empêche la rotation inverse. Cette disposition est utilisée dans certaines foreuses à la main.

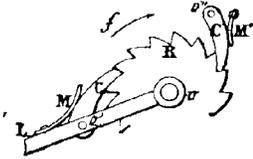


Fig. 600.

571. Encliquetage à double effet, ou levier de Lagarousse.

Il est combiné de manière que l'entraînement de la roue à rochet se produise pendant les deux phases du mouvement alternatif moteur. Le levier L oscille autour d'un axe fixe I (fig. 601) parallèle à celui de la roue à rochet, et porte deux cliquets C_1 et C_2 , mobiles autour de tourillons o_1 et o_2 situés de part et d'autre du point I. Il suit évidemment de là que, quand l'un des points o_1 o_2 se rapproche de la roue à rochet, l'autre s'en éloigne, et que les deux cliquets fonctionnent chacun pendant l'une des courses du levier de commande. Si l'on manœuvre celui-ci dans le sens f , sa solidarité avec la roue R est assurée par le cliquet C_2 , et le cliquet C_1 glisse sur les profils courbes des dents qui passent devant lui ; dans la manœuvre inverse, c'est le cliquet C_1 qui transmet le mouvement. La rota-

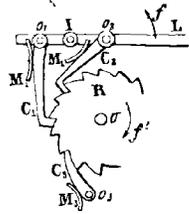


Fig. 601.

tion de l'axe o s'effectue toujours dans le sens f' , et l'on conçoit la possibilité de déterminer pour les pièces des dimensions telles, qu'il n'y ait pas d'intermittences sensibles.

Comme dans l'appareil à simple effet, un cliquet d'arrêt C_3 bloque la roue pendant les intermittences, ou pendant les arrêts du levier moteur.

572. Pressoir à levier multiple de MM. Mabilie.

Une disposition analogue au levier de Lagarousse est utilisée dans certains pressoirs, pour commander la rotation de l'écrou qui, en tournant autour de la vis centrale, vient comprimer la substance contenue dans la claie. Dans le pressoir Mabilie, l'écrou est solidaire d'une roue à trous R (fig. 602), dont on provoque la rotation en agissant sur un levier L , mobile autour de l'axe D supporté par une pièce A , appelée *crapaud*, dont nous parlerons tout à l'heure. Le levier moteur est terminé par deux bras E et E' , articulés aux axes indépendants o et o' ; des clavettes en acier G et G' appelées *valets*, taillées en biseau à leur partie inférieure, se maintiennent par leur propre poids dans des trous percés aux extrémités des branches E , E' , et pénètrent dans ceux de la roue R qui viennent, par le jeu du système, se présenter en dessous.

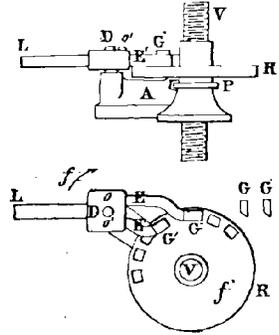


Fig. 602.

Supposons que, le crapaud et l'axe D étant fixes, l'on agisse sur le levier L dans le sens f ; l'axe o du bras E s'avance vers la droite de la figure, tandis que l'axe o' se recule vers la gauche. Les deux valets étant tournés comme il est indiqué, le bras E pousse la roue R et l'écrou dans le sens f' ; en même temps, le valet G' , dont le biseau glisse sur le bord du trou de la roue qui le contient, est ramené en arrière par le bras E' , jusqu'à ce qu'il rencontre un autre trou dans lequel il tombe. Pendant le retour du levier moteur, les mêmes phénomènes se reproduisent, mais les actions des bras E , E' et des valets correspondants sont interverties; les mouvements solidaires de la roue R et de l'écrou s'accomplissent ainsi à peu près sans intermittences.

L'axe du levier L a été supposé fixe. Cette condition ne peut évidemment pas être remplie, puisque tout le mécanisme de commande doit, comme la roue à trous, se déplacer parallèlement à l'axe de la vis. Pour rendre ce mouvement possible, on dispose les choses de telle manière que le crapaud soit solidaire de l'écrou dans son mouvement de translation, et indépendant de lui dans son mouvement de rotation. Il suffit pour cela de placer sur l'écrou un épaulement P , qui s'engage dans une rainure correspondante du crapaud. Tant que l'écrou n'est pas venu en contact avec la substance à pressurer, le crapaud fait bloc avec lui à cause de son poids, et tout l'ensemble descend le long de la vis dans un mouvement hélicoïdal: à un certain moment, le frottement déterminé par la pression immobilise le crapaud, qui, à partir de cet instant, ne participe plus qu'au mouvement de translation.

573. Encliquetages muets.

Dans les encliquetages que l'on vient d'étudier, le cliquet ne peut passer d'une dent de la roue à rochet à une autre qu'en retombant à chaque fois dans les creux, ce qui occasionne un bruit désagréable. Un grand nombre de dispositions ont été imaginées pour remédier à cet inconvénient: on leur donne le nom général d'*encliquetages muets*. Nous en décrivons deux.

Dans celle que représente la figure 603, l'axe D du cliquet est supporté par une pièce coudée, folle sur l'arbre o de la roue à rochet. Sur la seconde branche de cette

pièce sont implantés deux taquets B et B', entre lesquels passe le levier moteur. Enfin, celui-ci est relié au cliquet par une petite bielle A. Quand on manœuvre le levier dans le sens *f*, la traction de la bielle rapproche le cliquet de la roue, et l'entraînement se produit. Dans le mouvement contraire, la bielle A soulève le cliquet qui se dégage de la denture ; à partir de l'instant où le levier touche le butoir B, la pièce coudée fait corps avec lui, et ramène le cliquet en arrière, puis le même jeu recommence à chaque double oscillation.

La figure 604 représente un encliquetage muet dans lequel les cliquets s'engagent dans la denture ou s'en dégagent par frottement. La roue à rochet, dont le plan est

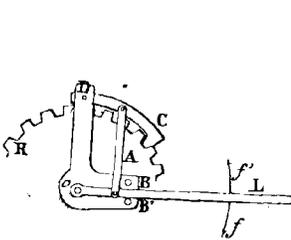


Fig. 603.

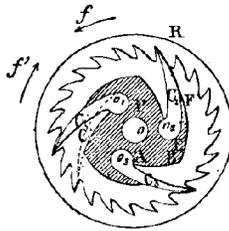


Fig. 604.

horizontal, est dentée intérieurement, et forme une sorte de boîte sur le fond de laquelle reposent plusieurs cliquets C₁C₂C₃. Ceux-ci pivotent dans de petites cavités creusées dans une pièce P, folle sur l'axe o de la roue. Quand cette pièce tourne dans le sens *f*, les cliquets, qui occupent d'abord des positions analogues à C₁, se relèvent à cause du léger frot-

tement qui s'exerce entre eux et le fond de la roue ; ils pénètrent ainsi dans les creux de la denture, et l'entraînement de R se produit dans le sens *f*. Lorsque la pièce P tourne dans le sens de *f'*, le frottement ramène les cliquets dans des positions analogues à C₁, et le mouvement de la roue s'arrête.

Ces mécanismes sont employés dans certains drilles, dans des machines à faucher le gazon, etc... L'axe o peut être horizontal ; c'est alors le poids des cliquets qui les amène dans la position convenable pour assurer la solidarité de la roue et de la pièce P tournant dans le sens *f*.

574. **Remarque.** — Avec les encliquetages à levier, l'amplitude du mouvement moteur est nécessairement assez faible, si l'on veut que l'ouvrier n'ait pas à se déplacer. Dans le mécanisme précédent, au contraire, le mouvement moteur pourrait conserver indéfiniment le même sens. Ce caractère se retrouve dans les encliquetages à arc-boutement.

§ II. — Encliquetages à arc-boutement.

575. Nous décrivons seulement l'encliquetage Dobo, qui est le type de ces appareils.

Le mouvement moteur est donné à une poulie R (fig. 605), complètement évidée, dans l'intérieur de laquelle est logé un disque S, solidaire de l'arbre à conduire. La liaison entre ces deux organes est assurée par des sortes de secteurs M, mobiles autour de petits axes C implantés dans le disque S ; leurs profils IJ, qui sont des arcs de cercles de rayon un peu plus court que celui de l'anneau R, s'appuient sur ce dernier sous l'action des ressorts *r*. Enfin, on a disposé les choses de manière que, A désignant le point de contact de l'un des secteurs avec R, on ait la relation

$$oA < oC + CA \quad (1)$$

et que l'angle oAC soit inférieur à l'angle de frottement.

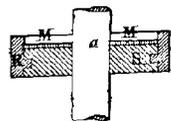
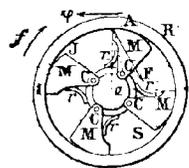


Fig. 605.

Supposons que la poulie R tourne dans le sens f ; le mouvement relatif du disque S consiste en une rotation de sens contraire autour de l'axe o , qui indique la direction φ dans laquelle le glissement relatif de M sur R tend à se produire. On sait que la réaction de R sur M est inclinée sur la normale Ao , dans le sens opposé au glissement, d'un angle égal à l'angle de frottement ; elle prend donc une direction telle que AF, et la relation (1) montre que le mouvement relatif du secteur ne peut pas s'accomplir : l'arc-boutement qui se produit rend chaque secteur solidaire de l'anneau moteur, et l'arbre o se trouve entraîné. La transmission cesse dès que le mouvement de R change de sens, car alors la réaction F passe du côté opposé de Ao , et tend à écarter les secteurs de la surface intérieure de l'anneau. Ils sont d'ailleurs immédiatement ramenés en contact avec elle par les ressorts r , de sorte que le mécanisme se trouve prêt à fonctionner dès que le mouvement moteur reprend son sens primitif.

APPAREILS

SERVANT A L'OBSERVATION DES MOUVEMENTS

CHAPITRE XXIII

COMPTEURS DE TOURS

576. Le conducteur d'une machine a souvent intérêt à en connaître la vitesse, soit, comme dans les chemins de fer, parce qu'elle ne doit pas dépasser les limites imposées par des raisons de sécurité, soit parce que la vitesse de l'outil qu'elle met en jeu ne doit pas au contraire, tomber au-dessous d'un certain minimum, fixé par la résistance qu'oppose la matière à son travail, soit encore pour calculer son rendement, etc... On a donc été conduit à imaginer des appareils propres à observer et à enregistrer les mouvements d'un organe mobile. Ces appareils, très nombreux, peuvent être partagés en deux groupes principaux :

- 1^o *Les compteurs de tours ;*
- 2^o *Les mesureurs et les enregistreurs de vitesse.*

Nous nous occuperons en premier lieu des compteurs de tours. Il en existe de divers genres :

- a) *Compteurs de tours à mouvement différentiel produit par une vis sans fin ;*
- b) *Compteurs de tours à équipages de roues dentées ;*
- c) *Compteurs de tours à engrenages intermittents ;*
- d) *Compteurs de tours à trains épicycloïdaux.*

Quelques trains épicycloïdaux susceptibles de constituer des compteurs ont été étudiés au chapitre XI ; aussi ne décrirons nous ici qu'un appareil de chacun des autres genres.

§ I. — *Compteurs à vis sans fin.*

577. **Compteur de Wollaston.**

Le plus ancien de ces appareils est le compteur Wollaston. Une vis tangente V (fig. 606), supportée par deux coussinets fixés aux parois de la boîte du compteur, peut être reliée momentanément à l'arbre dont on veut évaluer la vitesse, soit par une pièce à griffe dans le cas d'un arbre à pointe, soit par une sorte de pyramide aiguë dans le cas d'un arbre à centre, analogues aux pièces représentées en A et B (fig. 643). Elle engrène avec deux demi-roues R et R' dont les diamètres primitifs sont égaux ; la première, qui porte 100 dents, est clavetée sur un axe xx' , autour duquel la seconde, armée de 101 dents, peut tourner à frottement doux. Les pas de ces roues sont donc inégaux, mais leur faible différence, de même ordre de grandeur que le jeu, n'empêche pas l'engrènement avec la vis V. Un cadran C, dont la circonférence est partagée en 100 parties égales, est fixé à la roue R et tourne devant un index I, immobile sur la boîte du compteur ; un second cadran C', pourvu de 101 divisions, est entraîné par la roue R'. Enfin une aiguille A, calée sur l'arbre xx' , participe au mouvement de la roue R.

Supposons que, l'index et l'aiguille étant aux zéros des cadrans correspondants, la vis V soit mise en mouvement. A chaque tour qu'elle accomplit, la roue R avance d'une dent, et le cadran C qu'elle entraîne se déplace d'une division devant l'index I (fig. 608). Il s'en suit que le numéro indiqué par I sur le cadran fait connaître le nombre de tours jusqu'à 99 inclusivement, car, pour 100 tours, l'index se retrouve en face du zéro. Mais, à cet instant, la roue R', à cause de ses 101 dents, n'a fait que $\frac{100}{101}$ de tour ; l'aiguille A, qui a fait un tour complet, a pris sur elle une avance de $\frac{1}{101}$ de tour, et coïncide avec la division 1 du cadran C' (fig. 609), tandis qu'elle était auparavant com-

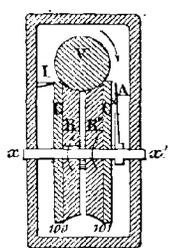


Fig. 606.

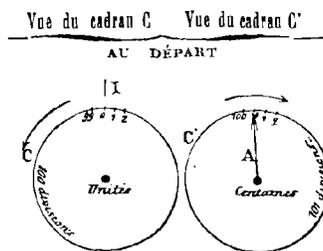


Fig. 607.

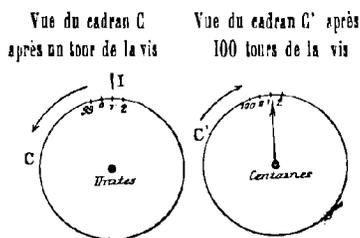


Fig. 608.

Fig. 609.

prise entre 0 et 1. Comme le même fait se reproduit tous les 100 tours de vis, on conclut que le numéro du cadran C' superposé à l'aiguille A, ou situé immédiatement avant, indique les centaines de tours, et celui qui correspond à l'index I les dizaines et les unités.

Il en est ainsi tant que le déplacement relatif de l'aiguille A n'atteint pas la circonférence complète du cadran C', c'est-à-dire jusqu'à la cent-unième centaine de tours. A ce moment, l'aiguille et l'index sont revenus tous deux aux zéros de leurs cadrans respectifs. L'appareil permet donc de compter le nombre de tours jusqu'à 10099 inclusivement.

Pour remettre le compteur au zéro, une disposition particulière permet de soulever la vis V et de rendre les deux roues complètement indépendantes. On tourne alors à la main la roue R jusqu'à ce que le zéro du cadran C soit en face de l'index I, puis ensuite la roue R' jusqu'à ce que le zéro du cadran C' coïncide avec l'aiguille A.

Nous avons supposé les cadrans en regard de deux faces opposées de la boîte ; pour faciliter les lectures, il convient de les transporter sur la même face, à droite par exemple. Il suffit, pour cela, de rendre le cadran C solidaire de l'axe xx', et de diminuer un peu son diamètre, afin qu'on puisse apercevoir à la fois les deux graduations.

578. Modification du compteur de Wollaston.

Cette modification est destinée à éviter l'emploi de deux cadrans indépendants.

A cet effet, la roue R de 100 dents (fig. 610) est montée sur un axe creux traversé à frottement doux par l'arbre xx' sur lequel est clavetée la roue R' de 101 dents. Sur la roue R est fixé un cadran C qui porte deux graduations concentriques, dont la plus petite, γ' (fig. 611) porte 101 divisions égales, et la plus grande, γ , 100 seulement. Une aiguille A, solidaire de l'axe xx', se déplace devant la graduation γ' , et un repère I, fixé sur la boîte de l'appareil, fait face à la graduation γ . En raisonnant comme ci-dessus, on reconnaît aisément

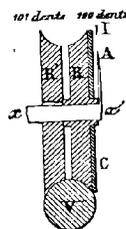


Fig. 610.

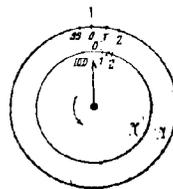


Fig. 611.

ment que le numéro qui, sur la circonférence γ , correspond à l'index I, donne le nombre de tours de vis jusqu'à 99 inclusivement. Après 100 tours, la roue R et le double cadran ont accompli une révolution complète, et I se retrouve au zéro ; mais la roue R' n'ayant fait que $\frac{100}{101}$ de tour, l'aiguille A retarde sur la graduation γ' de $\frac{1}{104}$ de tour ou de 1 division ; elle indique par conséquent le chiffre 1 ; après 200 tours de vis, elle indique le chiffre 2, et ainsi de suite. La graduation γ' fait donc connaître le nombre de centaines de tours, et la graduation γ le nombre de dizaines et d'unités.

Les compteurs Schaeffer et Budenberg sont basés sur un principe analogue.

§ II. — *Compteurs à équipages de roues dentées.*

579. Imaginons un équipage de roues dentées constitué par une série de couples de roues ayant respectivement 100 dents et 10 dents, montées sur des axes parallèles, de telle sorte que chaque roue de 10 dents serve de menante à la roue de 100 dents

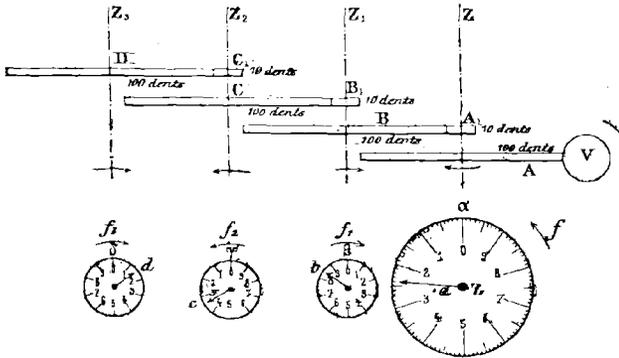


Fig. 612.

qui la suit (fig. 612). La première roue du système, soit A, engrène avec une vis sans fin à un seul filet, que l'on peut rendre momentanément solidaire de l'arbre dont on veut mesurer la vitesse. Enfin, chaque axe entraîne, soit une aiguille qui se déplace devant un cadran fixe concentrique, soit un cadran mobile devant un index fixe. Le cadran relatif à l'axe z est divisé en 100 parties égales, numérotées 0, 1, 2, ... 9 de 10 en 10 ; les

autres ne portent que 10 divisions.

Supposons toutes les aiguilles aux zéros de leurs cadrans respectifs ; à chaque tour de vis, la roue A avance d'une dent dans le sens f_1 , et l'aiguille a qu'elle entraîne parcourt une des petites divisions du cadran α ; après 10 tours, elle indique le 1, et ainsi de suite. La position qu'elle occupe indique donc le nombre de tours effectués, tant que celui-ci est inférieur à 100.

Après le centième tour, l'aiguille a revient au zéro. Mais la roue A₁ ayant alors fait un tour, la roue B a fait $\frac{1}{10}$ de tour dans le sens f_1 , et l'aiguille b qu'elle entraîne indique le chiffre 1 du cadran correspondant β . Pendant la seconde centaine de tours, l'aiguille a fonctionne comme pendant la première, et l'aiguille b reste comprise entre les chiffres 1 et 2, etc... La position de b sur le cadran β fait donc connaître les centaines de tours, de sorte que le système des deux premiers axes permet de compter jusqu'à 999 inclusivement.

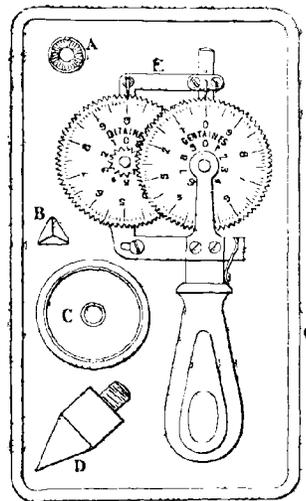


Fig. 613.

En continuant le même raisonnement, on conclut que le cadran situé devant l'axe de la roue commandée par la vis sans fin indique les dizaines et les unités; le suivant indique les centaines; le troisième les mille, etc... Il faut observer que les graduations de deux cadrans consécutifs sont numérotées en ordre inverse, les rotations des arbres correspondants s'effectuant en sens contraires.

M. Richard, constructeur à Paris, a établi d'après ce principe un compteur portatif à main, représenté à peu près en demi-grandeur par la figure 613. Ce compteur ne comporte que deux axes et deux cadrans, dont l'un indique les centaines, et l'autre les dizaines et les unités. Pour s'en servir, on fixe sur la partie E qui termine la vis sans fin, soit la pièce à griffe A, soit la pyramide B, suivant que l'arbre dont on veut mesurer la vitesse est terminé en pointe, ou percé d'un trou à son centre. Les cadrans sont mobiles devant des index fixés au châssis. Un ressort permet de débrayer les roues, et de les remettre séparément au zéro.

Cet appareil peut être employé à mesurer la vitesse circonférentielle d'une poulie ou d'un volant; il suffit de placer en E la roulette C, dont le périmètre p est connu très exactement, et de l'appuyer sur la surface de la pièce tournante. Si, après n secondes, le compteur indique N tours, la vitesse cherchée est $\frac{Np}{n}$. Un fil à plomb D, dont le fil a $994 \text{ }^m/m$ de longueur, bat la seconde lorsqu'il est converti en pendule, et permet d'évaluer le temps.

§ III. — Compteurs à engrenages intermittents.

580. Le principe de ces appareils a été exposé au paragraphe 474, mais les dispositions varient suivant les constructeurs. Les compteurs totalisateurs Richard se

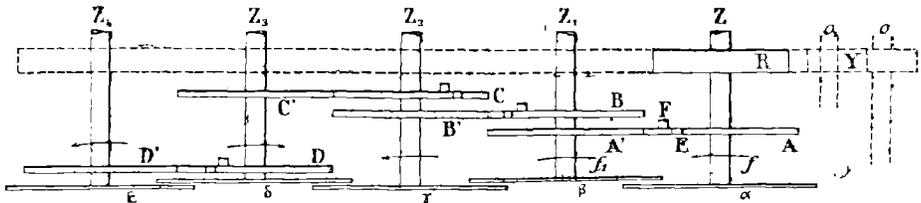


Fig. 614.

composent d'une série de roues formant un équipage intermittent (fig. 614), dans lequel chaque menante conduit sa menée pendant $\frac{1}{10}$ de tour, à chaque fois qu'elle termine une révolution complète, et en est indépendante pendant tout le reste de sa rotation. Toutes les menantes successives étant identiques, ainsi que toutes les menées, il suffit de décrire le couple (A, A') qui, dans la figure, lie les axes consécutifs Z et Z₁ du compteur.

La menante A, calée sur l'axe Z (fig. 615), affecte la forme d'un disque circulaire, qui porte perpendiculairement à l'une de ses faces un petit fuseau cylindrique F, et, sur son pourtour, une échancrure E, placée de manière à se présenter après F dans le plan des axes ZZ₁. La menée A' est doublement dentée; dix dents triangulaires F'F'₁... forment une première roue qui peut engrener avec F; dix autres dents, placées au milieu des intervalles des précédentes, sont implantées perpendiculairement

au plan du disque A' ; quand l'une d'elles pénètre dans l'échancrure E, le système (A, A') forme un engrenage dont l'arc de conduite est égal à $\frac{1}{10}$ de la circonférence primitive correspondante.

Supposons que la menante tourne dans le sens *f*, et considérons-la à partir de l'instant où E et F quittent la roue A'. Celle-ci reste immobile dans la position figurée, tant que A n'a pas accompli $\frac{9}{10}$ de tour ; à ce moment, le fuseau F appuie sur la dent F' et donne à la menée, si elle ne l'occupait pas déjà, la position qui convient à l'engrènement de E' dans E. Puis A' tourne pendant $\frac{1}{10}$ de tour, et les mêmes faits se reproduisent. Les lancés sont impossibles, car si la menée, entraînée par la vitesse acquise, tentait de dépasser le $\frac{1}{10}$ de tour qu'elle doit effectuer, elle serait arrêtée dans son élan par le choc de F' sur F.

Les axes successifs ZZ₁Z₂... du compteur sont solidaires de cadrans αβγ... qui portent sur leur pourtour les chiffres 0,1,2,3... 9, régulièrement espacés, et se déplacent devant des fenêtres laissant apercevoir un seul numéro (*).

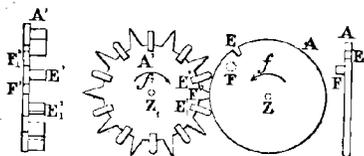


Fig. 615.

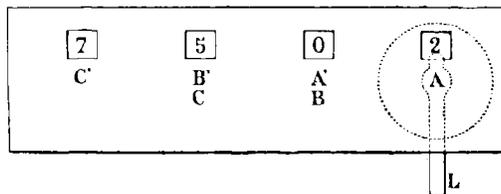


Fig. 616.

La première menante est commandée par un encliquetage à mouvement alternatif que nous décrirons plus loin, et son mode de liaison avec l'arbre dont on veut mesurer la vitesse est tel qu'un tour de celui-ci lui fasse faire $\frac{1}{10}$ de tour. Supposons tous les zéros en face des fenêtres correspondantes ; pendant les neuf premiers tours de l'arbre moteur, les chiffres 1,2,3... 9 du cadran α se succèdent devant la fenêtre de droite, et les autres restent immobiles. A la fin du neuvième tour, le groupe (A, A') entre en action, et le chiffre zéro apparaît au cadran α en même temps que le chiffre 1 au cadran β ; tous les autres cadrans restent au zéro. Les mêmes faits se reproduisent jusqu'au quatre-vingt-dix-neuvième tour inclusivement ; à cet instant, A a fait neuf tours $\frac{9}{10}$, et A', ainsi que la seconde menante B qui est solidaire du même axe, a fait $\frac{9}{10}$ de tour. Le groupe (B, B') se trouve dans la même position que le groupe (A, A'), de sorte que, pendant la centième révolution de l'arbre moteur, les roues A, A', B et B' font chacune $\frac{1}{10}$ de tour, ce qui ramène les cadrans α et β à leurs zéros et fait apparaître le chiffre 1 du cadran γ. Le même raisonnement, étendu à tous les axes, montre que les chiffres lus aux fenêtres représentent les unités des divers

(*) Les fuseaux et les échancrures des diverses menantes sont placés de manière que l'engrènement avec la menée se produise au moment où le chiffre 9 doit être remplacé par le zéro ; la transmission cesse quand cette substitution est effectuée.

ordres du nombre de tours effectués par l'arbre moteur. Comme deux arbres consécutifs tournent en sens contraires, les cadrans correspondants sont gradués dans l'ordre inverse.

La commande de la première menante est assurée de la façon suivante. Sur son axe est calée une roue à rochet R (fig. 617) pourvue de dix dents triangulaires, embrassée par une sorte d'ancre mobile LPo, dont la partie P, évidée intérieurement, est munie de deux dents M, N fixées par des vis. Un mouvement oscillatoire de faible amplitude est communiqué au système LPo, et fait avancer R d'une dent à chaque mouvement de va-et-vient, ce qui entraîne la rotation de A et l'enclenchement successif des diverses parties du compteur. Le levier L peut être extérieur à la boîte de l'appareil (fig. 616) ;

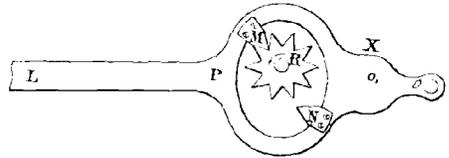


Fig. 617.

il est alors relié à la barre d'un excentrique à collier, calé sur l'arbre moteur, qui lui communique un mouvement alternatif. Tantôt, au contraire, le système LPo est complètement intérieur à la boîte ; un excentrique, calé sur un axe o_1 auquel l'arbre moteur communique une rotation continue, appuie sur les bords d'un trou de plus grand diamètre, creusé dans la partie X de l'ancre mobile, et lui donne son mouvement alternatif.

APPAREILS ENREGISTREURS OU MESUREURS DE VITESSE

§ I. — *Enregistreur totalisateur de marche Richard.*

581. Description. — Cet appareil a été imaginé dans le but de contrôler la marche d'une machine, d'un tramway, d'une automobile, etc..., en enregistrant ses heures de mise en train, ses arrêts, sa vitesse, et en totalisant le nombre de tours effectués par son arbre moteur. Son organe essentiel est une came E à mouvement uniforme (fig. 618, 619, 620), identique à celle dont l'étude a été faite au paragraphe 510. Le mouvement de la machine est d'abord transmis à une poulie P, dont l'arbre porte

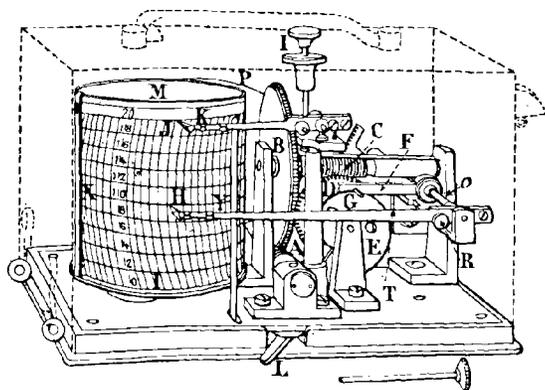


Fig. 618.

une vis sans fin A, engrenant avec une roue B. L'axe de celle-ci est fileté en C sur une certaine étendue, et son engrenement avec la roue D, calée sur l'arbre de la came, fait tourner cette dernière avec une vitesse angulaire proportionnelle à celle de l'arbre moteur. Un levier F, mobile autour de l'axe fixe o, appuie par une goupille G sur le contour de la came. L'axe o entraîne dans sa rotation le style T, terminé en H par une plume particulière, en contact avec une feuille de papier enroulée sur un tambour cylindrique M, auquel un mouvement d'horlogerie com-

munique une rotation uniforme. La plume H est constituée par un godet en forme de pyramide triangulaire, dont une face est maintenue sur le style par deux petites agrafes ; une fente étroite, pratiquée le long d'une arête, amène à la pointe, par capillarité, l'encre dont le godet est rempli. Enfin, la pression de la plume sur le papier est réglée par un bouton moleté R, placé à la naissance du style.

582. Indications données par l'appareil.

Grâce à la composition de la chaîne cinématique qui relie l'arbre moteur au style, la vitesse de la plume est, à chaque instant, proportionnelle à celle de la machine, et la hauteur à laquelle elle se trouve sur le tambour est proportionnelle au nombre de tours effectués. Ces remarques vont nous permettre d'analyser le fonctionnement de l'appareil.

Quand le tambour reste immobile, la plume trace une ligne IJ (fig. 618), intersection de la surface du cylindre M avec celle d'un second cylindre, décrit autour de l'axe o avec un rayon égal à la longueur du style T. Une série de lignes analogues,

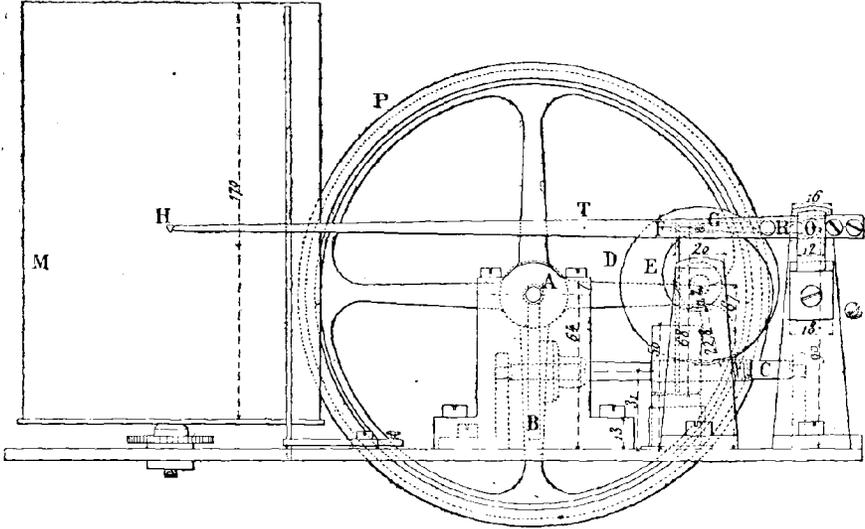


Fig. 619.

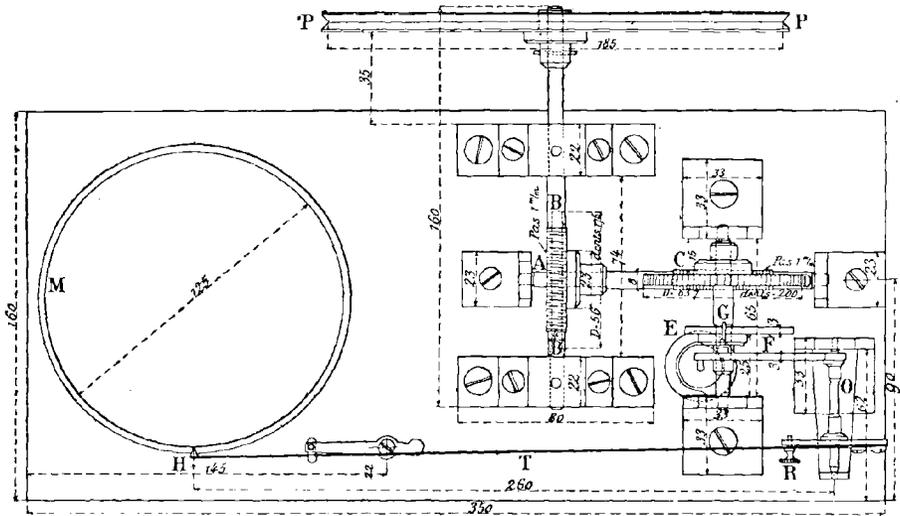


Fig. 620.

équidistantes, est imprimée sur le papier ; le temps nécessaire pour que deux courbes consécutives viennent se remplacer sous la plume dépend du mécanisme d'horlogerie qui commande le tambour et a été déterminé pour chaque appareil ; il suffit donc de compter les traits IJ qui sont coupés par le diagramme pour avoir une mesure du temps.

Quand la poulie P cesse de tourner, la plume trace une circonférence XY, dont la cote est proportionnelle au nombre de tours effectués avant l'arrêt de la machine. Une série de lignes analogues équidistantes sont également imprimées sur le papier ; en comptant celles qui se trouvent au-dessous de la plume, on peut donc connaître le nombre de révolutions accomplies, à condition d'avoir préalablement déterminé le rapport de la vitesse angulaire de la came à celle de l'arbre moteur. En supposant, par exemple, que celui-ci transmette son mouvement à l'appareil par une poulie de diamètre égal aux $\frac{7}{10}$ de celui de P, que les vis A et C aient un seul filet, et les roues B et D respectivement 175 et 200 dents, ce rapport est égal à

$$\frac{7}{10} \times \frac{1}{175} \times \frac{1}{200} = \frac{1}{50000}$$

de sorte que la came fait un tour pour 50000 de l'arbre moteur. Si le papier à diagramme est partagé en 20 bandes égales par les circonférences XY, chacune d'elles correspond à 250 tours. Et si la plume, partant du zéro à la mise en marche, y est revenue deux fois, et indique finalement le trait XY portant le numéro 10, le nombre de tours total est

$$50000 \times 3 + 250 \times 10 = 152500$$

Enfin, quand la poulie P et le tambour tournent simultanément, le diagramme est incliné à la fois sur les deux séries de lignes IJ et XY. En désignant par a la vitesse linéaire constante du tambour, et par v celle de la machine à un instant donné, le segment $\alpha\gamma$ (fig. 621), tracé pendant un temps infiniment petit dt , est la résultante d'un

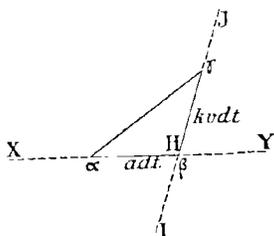


Fig. 621.

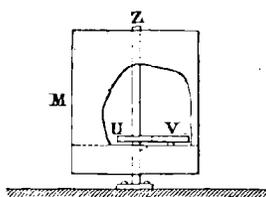


Fig. 622.

contour triangulaire, dont les côtés $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$, dirigés suivant les lignes XY et IJ qui passent par la position correspondante de la plume, ont pour valeurs respectives

$$\alpha\beta = a dt$$

$$\beta\gamma = k v dt$$

k représentant un coefficient de proportionnalité qui dépend des rayons des poulies de commande, du train d'engrenages ABCD, et du rapport des bras de levier Go et oH. On voit que l'inclinaison de $\alpha\gamma$ sur XY est, pour une valeur donnée de a , d'autant plus grande que v est plus considérable. L'aspect du diagramme renseigne donc sur les variations de vitesse de la machine.

Pour que les indications soient nettes, il est indispensable que le rapport $\frac{a}{kV}$ ne soit ni trop grand ni trop petit, car, dans le premier cas, $\alpha\gamma$ se rapproche de XY, et, dans le second, de IJ. De plus, la longueur de papier utilisée dans un temps donné est proportionnelle à a . Pour ces deux raisons, il peut être nécessaire de changer la vitesse de rotation du tambour. Dans ce but, on a logé le mécanisme d'horlogerie dans un double fond : l'axe du dernier rouage traverse la cloison, et porte un pignon V (fig. 622) qui reçoit ainsi un mouvement uniforme. Ce pignon engrène avec une roue U, solidaire d'une tige Z, vissée au socle de l'appareil et servant d'axe au tambour. Le système UV forme un train épicycloïdal, et V tourne autour de Z en entraînant tout le mécanisme d'horlogerie. Celui-ci est relié au tambour par un canon à frottement gras, et lui communique son mouvement. La vitesse angulaire, ω_0 de la roue U, qui est la première de ce train, est nulle ; celle de la roue V, soit ω_m , qui dépend de la composition de l'horloge, est connue et constante. On a, d'après la formule de Willis, ω désignant la vitesse angulaire du tambour porte-train

$$-\frac{U}{V} = \frac{\omega_m - \omega}{\omega_0 - \omega} = \frac{\omega_m - \omega}{-\omega}$$

d'où l'on tire

$$\omega = \omega_m \times \frac{1}{\frac{U}{V} + 1}$$

Cette expression montre que la vitesse du tambour dépend du rapport des nombres de dents des roues U et V, de sorte que l'on peut, par une substitution d'engrenages, faire varier la durée d'une révolution entre certaines limites. Le mode de liaison du mécanisme d'horlogerie et du tambour permet de plus, en tournant celui-ci à la main, de le placer de manière que la plume se trouve en regard de la division IJ du papier qui correspond à l'heure à laquelle la machine est mise en marche.

§ II. — Cinémomètre Richard.

583. Aucun des appareils précédents ne donne, par une simple lecture, la vitesse de la machine à un instant déterminé. Cette indication est fournie avec une grande précision par le Cinémomètre Richard.

584. Principe de l'appareil.

Deux plateaux parallèles égaux H et H', dont un seul a été représenté (fig. 623), reçoivent, par un mécanisme que nous décrivons plus loin, des mouvements de rotation uniformes de sens contraires, dont nous désignerons la vitesse angulaire commune par ω_h ; ils pressent entre eux un galet G, solidaire d'une tige E filetée sur une certaine étendue, et lui communiquent un mouvement de rotation uniforme dans le sens f . La partie filetée est comprise entre deux petits pignons D et D' dont l'un, soit D', sert simplement d'appui, et dont l'autre tourne, dans le sens f_1 , avec une vitesse angulaire ω_d proportionnelle à celle de la machine. Si le système DD' restait immobile, il jouerait, par rapport à E, le rôle d'un écrou, et le galet, par l'effet de sa rotation, se rapprocherait du centre J des plateaux avec une vitesse proportionnelle à ω_h . Si, au contraire, le mouvement de HH' venait à cesser, la vis E se comporterait comme une crémaillère par rapport aux pignons qui l'embrassent (*), et le galet s'éloignerait

(*) Pour qu'il en soit ainsi, le filetage de E doit être tel que la vis puisse mener le pignon, sans réciprocity. Voir, à ce sujet, le paragraphe 368.

du point J avec une vitesse proportionnelle à ω_d . Quand toutes les parties de l'appareil sont en mouvement, ces deux effets contraires se combattent, et le galet prend une position d'équilibre que nous allons déterminer en calculant sa distance x au centre J.

Soient r le rayon du galet, ω_e sa vitesse angulaire, et P le pas de la vis E, qui est à un seul filet. La relation

$$\omega_e \times r = \omega_h \times x$$

obtenue en égalant la vitesse circonférentielle du galet à celle de son point de contact avec le plateau H, donne

$$\omega_e = \frac{\omega_h \times x}{r}$$

La vitesse de translation de E dans le sens f' , calculée comme dans le système vis et écrou (362), est donc

$$\frac{P \omega_e}{2 \pi} = \frac{P \omega_h x}{2 \pi r}$$

Sa vitesse de translation dans le sens f_1 , calculée comme dans le système pignon et crémaillère, est égale au produit

$$\omega_d \times \frac{DP}{2 \pi}$$

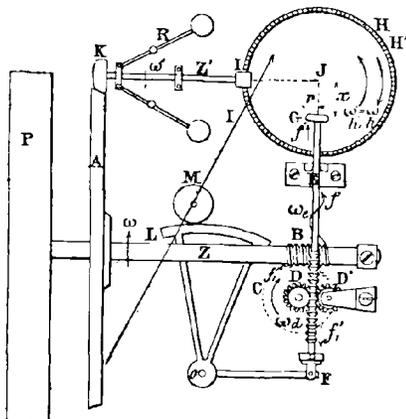


Fig. 623.

de la vitesse de D par son rayon, ce dernier étant exprimé en fonction du nombre des dents et du pas apparent. On a donc, à l'instant de l'équilibre

$$\frac{P \omega_h x}{2 \pi r} = \frac{P \omega_d D}{2 \pi}$$

d'où
$$x = \frac{Dr}{\omega_h} \times \omega_d \quad (1)$$

Le facteur $\frac{Dr}{\omega_h}$ étant constant par hypothèse, on voit que la distance du galet au centre J des plateaux est proportionnelle à ω_d , et par conséquent à la vitesse angulaire de la machine à l'instant considéré. En dési-

gnant par N le nombre de tours par minute qu'effectuerait cette dernière si elle conservait sa vitesse actuelle, on a donc, en définitive

$$x = k N$$

k représentant un coefficient de proportionnalité qui dépend de la constitution de l'appareil, et que nous calculerons tout à l'heure. Il résulte de là que, si l'on relie le système GE à une aiguille mobile devant un cadran convenablement gradué, on peut lire la vitesse actuelle de la machine, évaluée en nombre de tours par minute.

585. Description de l'appareil.

Une poulie P, montée sur un arbre Z (fig. 623, 624, 625), reçoit son mouvement de la machine dont on veut mesurer la vitesse, et le transmet, d'une part à la roue C, solidaire du pignon D, par engrenement avec la vis tangente B, d'autre part à un arbre parallèle Z' par les roues à friction A et K. Le mouvement de rotation varié que

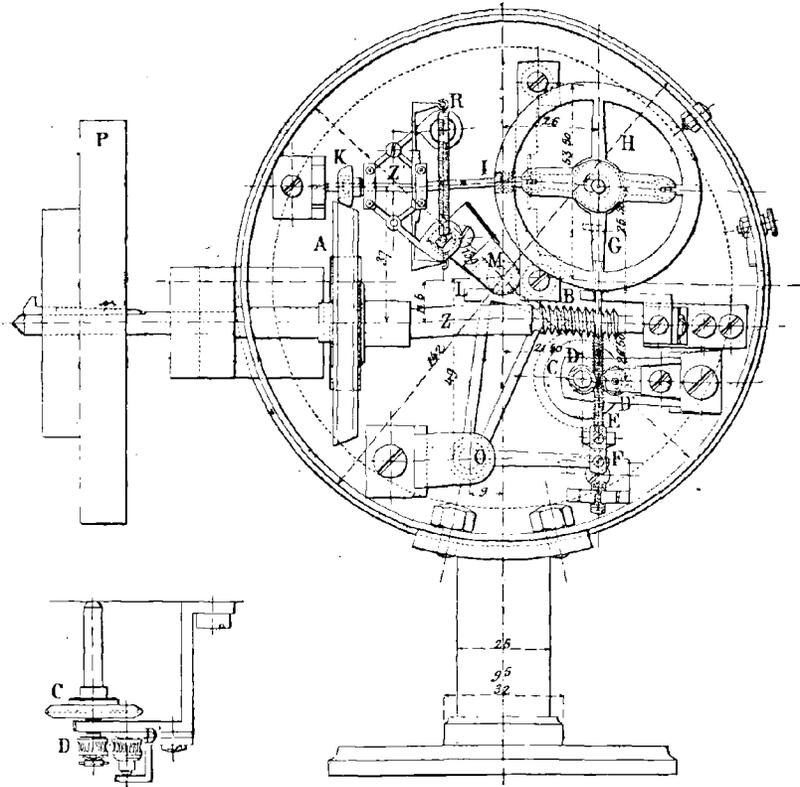


Fig. 626.

Fig. 624.

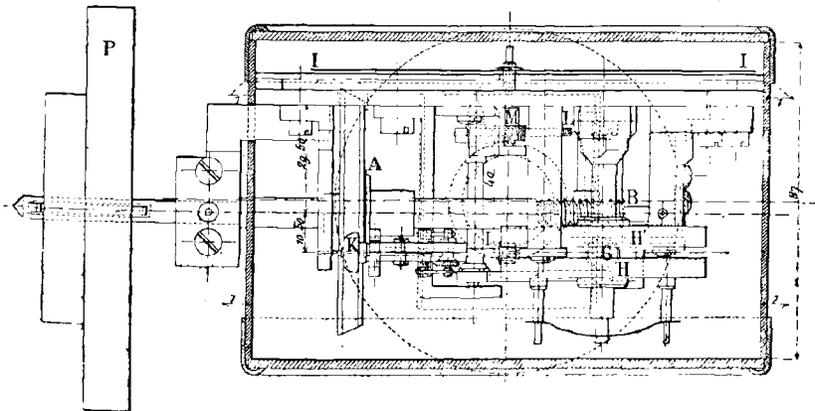


Fig. 625.

prendrait Z' est rendu uniforme par un petit régulateur à force centrifuge et à ressort R. A l'extrémité de l'arbre Z' est calé un pignon I qui pénètre entre les plateaux H et H'. Ces derniers, dentés de champ sur leur pourtour, prennent ainsi les mouvements uniformes de sens contraires que nous leur avons attribués plus haut, en même temps que le pignon D tourne avec une vitesse proportionnelle à celle de la machine. Enfin, le déplacement rectiligne du système GE est converti en mouvement circulaire de l'aiguille I par l'intermédiaire de la roue M engrenant avec le secteur denté L, solidaire du levier OF articulé à l'extrémité F de la tige E.

586. Calcul du coefficient h .

Soient ω et ω' les vitesses angulaires respectives des arbres Z et Z', Ω celle de la machine, N le nombre de tours par minute correspondant, R le rayon de la poulie P, et R' celui de la poulie calée sur l'arbre de la machine ; calculons, en fonction de ces données et des nombres de dents des roues du système, les quantités ω_h et ω_d figurant dans l'expression (1) de x . Nous aurons

$$\omega_h = \omega' \times \frac{I}{H}$$

et, en supposant que la vis B soit à un seul filet, la seconde étant prise pour unité de temps

$$\omega_d = \frac{\omega}{C} = \frac{\Omega R'}{CR} = \frac{\pi NR'}{30 CR}$$

Par conséquent

$$x = \frac{Dr'}{\omega_h} \times \omega_d = \frac{Dr'H}{\omega'I} \times \frac{\pi NR'}{30 CR} = \frac{\pi r DHR'}{30 CI \omega' R} \times N$$

ce qui donne pour h la valeur

$$h = \frac{\pi r DHR'}{30 CI \omega' R}$$

Dans l'un des appareils construits par M. Richard,

$$\begin{array}{lll} r = 4\% & D = 24 & H = 144 \\ C = 40 & I = 12 & \end{array}$$

Avec ces données, on a

$$h = \frac{24 \pi R'}{25 \omega' R}$$

Sans rien changer aux organes du cinémomètre proprement dit, on peut donc amplifier ou réduire les déplacements de l'aiguille, en remplaçant la poulie calée sur l'arbre de la machine par une autre de rayon différent. Si, par exemple, on diminue R' de moitié, h et x deviennent deux fois plus petits ; il faut, dans ce cas, doubler les nombres lus sur le cadran pour avoir exactement la vitesse cherchée. On utilise cette observation pour mesurer, avec un cinémomètre donné, des vitesses qui correspondent à un nombre de tours par minute plus grand que la limite supérieure de la graduation du cadran. Une modification inverse permet d'employer l'appareil à la mesure des vitesses de machines lentes.

§ III. — Chronotachymètres.

587. Les chronotachymètres sont des appareils employés pour enregistrer la vitesse des locomotives, le chemin parcouru, et contrôler le mécanicien d'une façon incessante. Il en existe de diverses sortes ; nous en décrivons ici trois types basés sur des principes différents :

- A. Le chronotachymètre Desdouts, employé en France sur les chemins de fer de l'État ;
- B. Le chronotachymètre P.-L.-M. ;
- C. Le chronotachymètre Hasler.

A. Chronotachymètre Desdouts.

588. Cet enregistreur est basé sur ce fait que, lorsqu'un corps pesant tourne autour d'un axe, il exerce sur lui une réaction centrifuge proportionnelle au carré de sa vitesse (*).

La locomotive communique, par l'intermédiaire de la coulisse et d'une tige BB' (fig. 627), un mouvement oscillatoire rapide à une pièce XC en forme de T, mobile autour de l'axe fixe *o*. La partie C sert de guide à une masse pesante P, suspendue en un point D d'un levier mobile autour d'un axe fixe *o'* indépendant de la pièce X. Une extrémité de ce levier est reliée à un ressort R, et l'autre à un frein à liquide F. Le poids P participe au mouvement oscillatoire de X, et la réaction centrifuge qu'il développe a pour effet de tendre le ressort R, et de presser sur le frein F. L'expérience montre que, grâce à la viscosité du liquide et à l'inertie du système, le levier o'DE, au lieu d'osciller plus ou moins rapidement autour de son axe, prend, pour chaque vitesse de la machine, une position à peu près fixe, qui peut précisément servir à repérer cette vitesse, si l'on a gradué convenablement l'appareil.

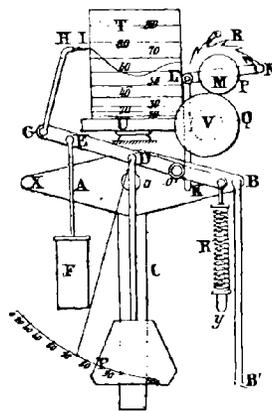


Fig. 627. (**).

Dans ce but, le levier o'DE est solidaire :

- 1° D'une aiguille mobile devant un cadran divisé ;
- 2° D'une petite bielle GH, munie d'un style I appuyant sur un tambour T animé d'un mouvement de rotation.

L'aiguille indique au mécanicien la vitesse actuelle de sa machine, et le style enregistre les variations pour le contrôle. On ne peut tirer du diagramme des indications précises, qu'à la condition de connaître la relation qui existe entre ses ordonnées et la vitesse à mesurer. Observons pour cela que la vitesse de la pièce oscillante X est, pour chacune de ses positions, proportionnelle à celle de la locomotive. La réaction centrifuge de la masse P, et les déviations angulaires du levier o'DE qui en sont la conséquence, seraient donc rigoureusement proportionnelles au carré de la vitesse à mesurer, si la distance du centre d'oscillation *o* de la masse P à son centre de gravité restait invariable. En réalité, il n'en est pas tout à fait ainsi, puisque le

(*) On sait en effet que, dans le mouvement circulaire, la composante de l'accélération totale suivant le rayon est $\varphi_n = \frac{v^2}{P}$.

(**) Figure reproduite d'après la *Revue industrielle*.

levier o'DE s'incline davantage vers le bas à mesure que la vitesse augmente. Toutefois, au point de vue pratique, les déplacements de l'aiguille sur le cadran, ou du style sur le tambour, sont très sensiblement proportionnelles au carré de la vitesse; il en résulte que les lectures sont d'autant plus précises que le mouvement de la locomotive est plus rapide.

Dans le modèle adopté sur les Chemins de fer de l'Etat, le mouvement de rotation est donné au tambour enregistreur par la locomotive elle-même. A cet effet, la pièce oscillante X communique son mouvement, par l'intermédiaire du système articulé KLMN, à une roue à rochet R, sur l'axe de laquelle est calée la première roue d'un engrenage PQ, qui commande la rotation du tambour par la vis tangente V et la roue hélicoïdale U. Il résulte de là que les abscisses de la courbe des vitesses, égales aux longueurs de papier qui passent devant le style, ne sont pas proportionnelles au temps. Ce fait ne présente pas d'inconvénient au point de vue de la mesure des vitesses, puisqu'on ne considère que les ordonnées. On pourrait d'ailleurs commander le tambour par un mouvement d'horlogerie.

B. Chronotachymètre P.-L.-M.

589. Principe. — L'enregistrement de la vitesse est produit par le choc d'un

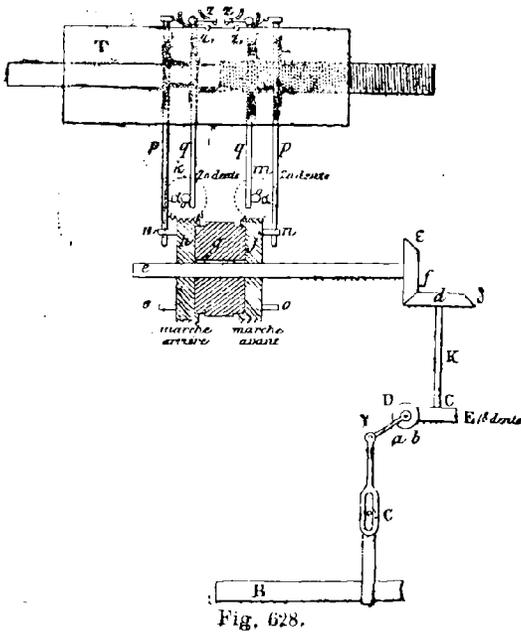


Fig. 628.

marteau sur le papier à diagramme qu'un tambour entraîne d'un mouvement uniforme. Le marteau est actionné par la locomotive, et frappe un coup après un nombre déterminé de tours des roues motrices. Les traces qu'il laisse sur le papier sont d'autant plus rapprochées que la vitesse de la locomotive est plus considérable; en désignant par N le nombre de frappes tracées sur une longueur L de papier, par l celle qui passe devant le marteau en une minute, par n le nombre de tours qui correspond à l'intervalle de deux frappes consécutives, et par C la circonférence des roues motrices, l'espace parcouru par le train pendant le temps $\frac{L}{l}$ est

$$s = NnC$$

et sa vitesse moyenne à l'heure,

exprimée avec la même unité que C

$$V = \frac{NnC}{L} \times 60$$

Les quantités n et l dépendent de la constitution du mécanisme et sont connues, ainsi que le périmètre C du bandage de la roue; il suffit donc de mesurer L et de compter les frappes du marteau. On facilite cette dernière opération en employant comme totalisateur un second marteau, qui n'entre en action qu'après un nombre de

tours égal à un multiple connu de n , et qui laisse sur le papier des traces de forme différente. Deux autres marteaux, fonctionnant comme les précédents, se rapportent à la marche en arrière,

590. Description. — Le mouvement de la locomotive est transmis aux marteaux de la façon suivante. Sur la bielle d'accouplement B (fig. 628-629 630-632-633) est fixée une tige métallique, terminée par un bouton qui s'engage dans la coulisse d'une petite bielle C, articulée à une manivelle γ , solidaire de l'axe horizontal ab , sur lequel est calée une vis sans fin D. Celle-ci engrène avec un pignon hélicoïdal E de 8 dents, qui entraîne un arbre vertical cKd . Deux roues coniques égales δ transmettent le mouvement à un arbre horizontal ef , qui porte trois manchons g , h , j , le premier claveté, et les deux autres, placés de chaque côté du précédent, fous sur l'axe. La liaison entre le manchon g et les deux autres est assurée par deux encliquetages à arc-boutement système Dobo, dont les ailettes sont disposées en sens inverse, de telle sorte que le manchon j , par exemple, soit entraîné pendant la marche en avant, et le manchon h pendant la marche en arrière. Les surfaces extérieures de h et j sont filetées, et engrenent avec des pignons égaux k et m de 20 dents, dont les axes portent des taquets α , qui viennent, après chaque tour, pousser les bielles q reliées aux marteaux z . De plus, chacun des manchons h et j porte, sur sa face extérieure, une sorte de double manivelle; les boutons no , diamétralement opposés, actionnent les bielles p des marteaux z_1 . Enfin, le tambour T est mû par un mécanisme d'horlogerie, qui lui fait faire un tour en 15, 10 ou 6 minutes, suivant la rapidité de marche du train auquel l'appareil est destiné. Son arbre est fileté sur une certaine étendue, de manière à imprimer au papier un mouvement hélicoïdal qui amène les parties non encore utilisées en contact avec les marteaux.

Il résulte de ces dispositions :

1° Que l'arbre ab et la vis D font, pendant un temps donné, le même nombre de tours que les roues motrices ;

2° Que les tambours ghj font un tour pendant que les roues motrices en font huit, j se mouvant pendant la marche en avant, h pendant la marche en arrière, et g dans les deux sens ;

3° Que les marteaux z_1 frappent un coup pour 4 tours des roues motrices ; ce sont les enregistreurs de marche, celui de droite, dans le mouvement vers l'avant, l'autre, dans le mouvement inverse. Leurs chocs sur le papier tracent de petits traits rectilignes parallèles à l'axe du tambour ;

4° Que les marteaux z frappent un coup par tour des pignons k et m , c'est-à-dire par 160 tours des roues motrices. Ils laissent sur le papier des marques triangulaires, situées au-dessous des traits tracés par les marteaux z_1 . L'intervalle de deux frappes triangulaires consécutives comprend 40 frappes rectilignes, de sorte que les marteaux z jouent le rôle de totalisateurs, celui de droite pour la marche en avant, celui de gauche pour la marche en arrière ;

5° Après le déroulement du papier, les frappes d'un même marteau se disposent suivant des droites, transformées des spires d'hélice décrites par les points correspondants du tambour dans son mouvement hélicoïdal. Ces droites, très peu inclinées sur les bords du papier, sont tracées d'avance. La disposition des marteaux est telle que les frappes relatives à la marche en avant suivent les lignes, tandis que celles qui se rapportent à la marche en arrière se rangent dans les interlignes.

La figure 635 représente un des graphiques obtenus ; les traits rectilignes qui se succèdent à partir du mot « Laroche » (nom de la station de départ) sont ceux qui correspondent à quatre tours de roues vers l'avant ; les frappes triangulaires situées au-dessous sont celles du marteau totalisateur, et correspondent à 160 tours. Les frappes situées dans les interlignes en haut et en bas du diagramme se rapportent à la marche

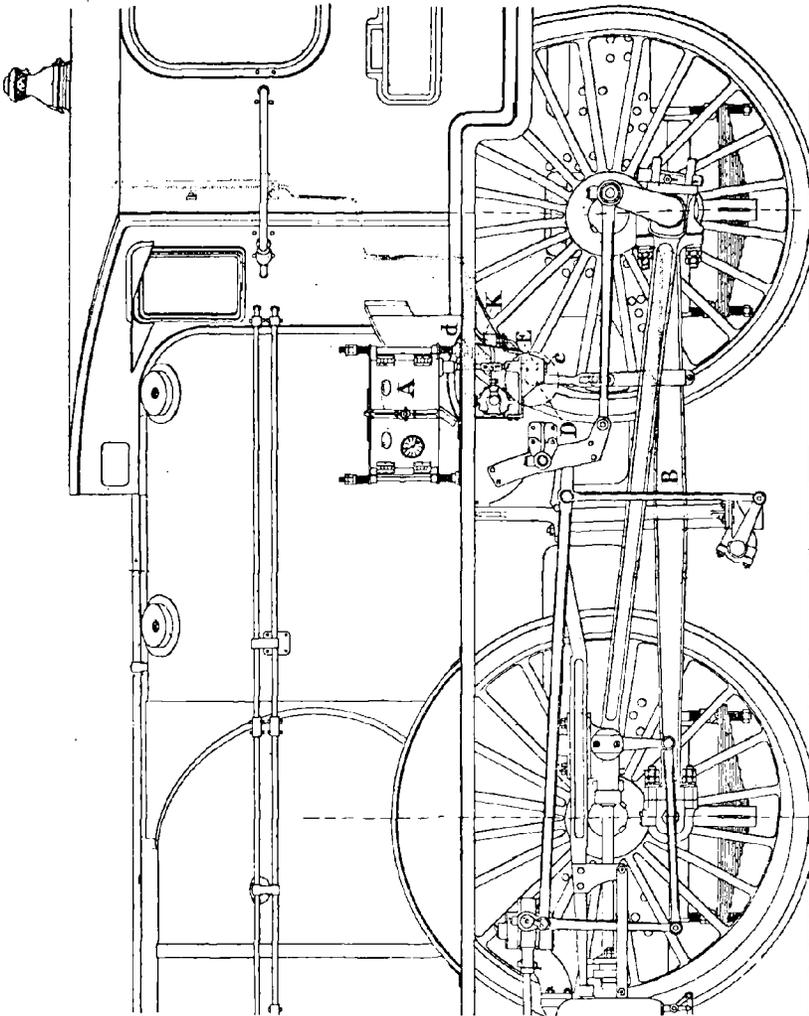


Fig. 630.

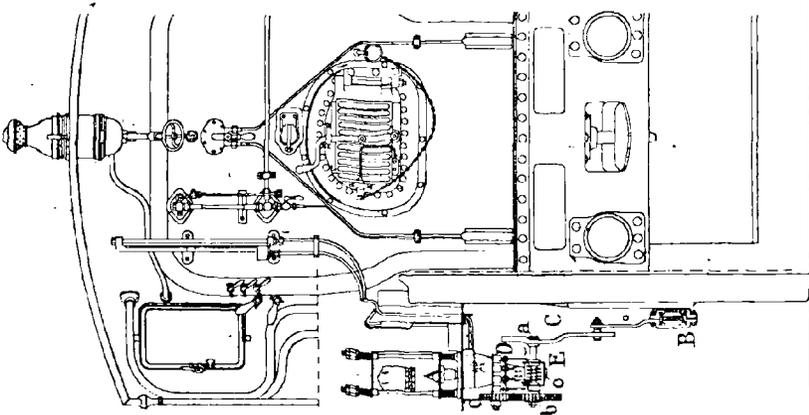


Fig. 629.

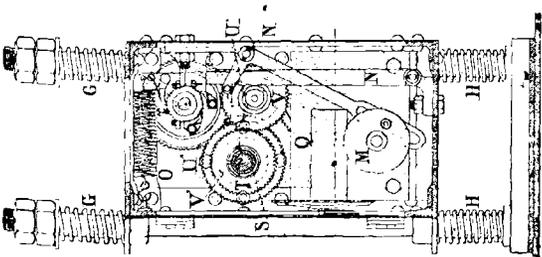
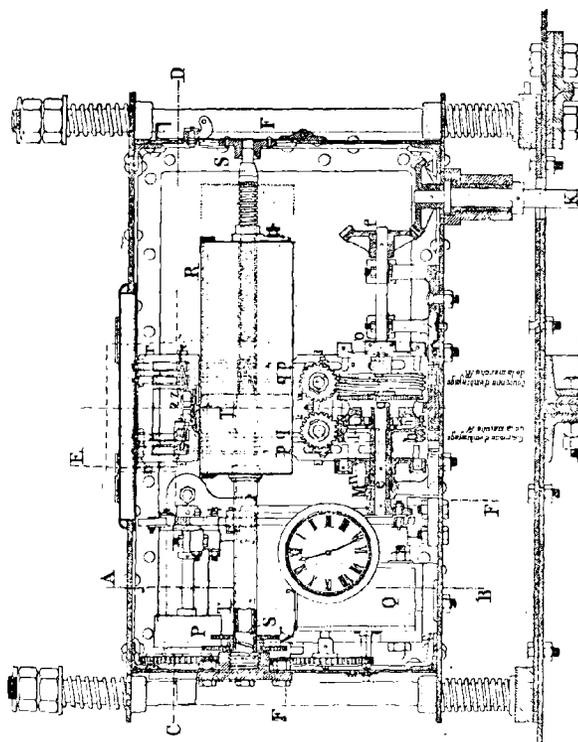
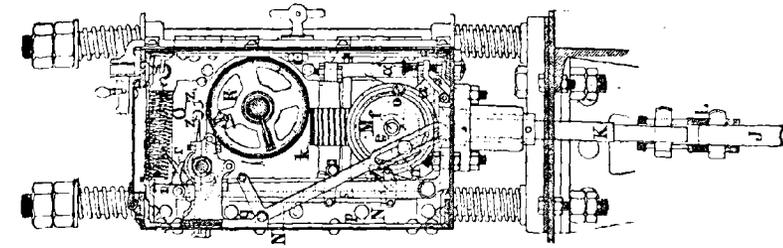


Fig. 631

Fig. 632

Coupe horizontale suivant C.D. de la fig. 631

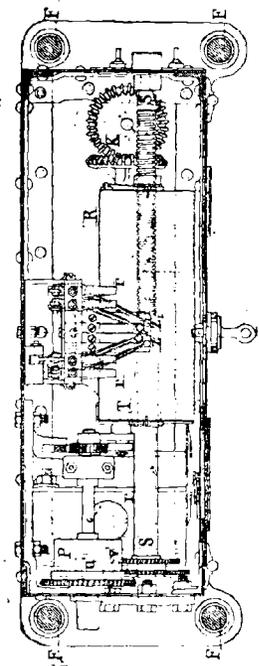


Fig. 634

Fig. 633

en arrière. Enfin, les traits verticaux équidistants servent à mesurer le temps ; leur distance, égale au déplacement du papier pendant une minute, est de $31 \frac{m}{m} 4$ pour une vitesse de rotation du tambour de 1 tour en 10 minutes. On voit que la machine, sortie du dépôt à 7^h 1^m, a fait d'abord 72 tours en avant (18 frappes rectilignes de A en B), pendant environ $3 \frac{m}{m} 1/2$ (intervalle AB) ; elle s'est arrêtée jusqu'à 7^h 19^m, puis a fait 80 tours en avant (20 frappes rectilignes de C en D) pendant un peu plus de 4 minutes. Son départ définitif a eu lieu à 7^h 25^m.

Calculons sa vitesse moyenne pendant la minute qui correspond à la partie MN du graphique. Le nombre de tours des roues motrices est de

$$160 + (9 + 3) \times 4 = 208$$

et comme leur périmètre est de $6 \frac{m}{m} 1920$, l'espace parcouru est

$$6 \frac{m}{m} 1920 \times 208 = 1287 \frac{m}{m} 94$$

La vitesse en kilomètres à l'heure est donc

$$v = 1 \frac{km}{km} 28794 \times 60 = 77 \frac{km}{km} 276$$

Comme la circonférence des roues diminue par l'usure, il faut la mesurer de temps en temps ; l'expérience a montré que sa variation pendant un mois de service régulier est à peine sensible.

Pour éviter le calcul de v , on a établi des échelles qui donnent les distances des frappes triangulaires pour les valeurs maxima des vitesses autorisées dans les différents cas. Cherchons cette distance pour une vitesse v , (évaluée en kilomètres à l'heure), en supposant que le tambour fasse un tour en 10 minutes et que sa circonférence soit de 314 millimètres (correspondant à 10 centimètres de diamètre) ; 160 tours des roues motrices correspondent à un espace parcouru $160 C$; le temps employé est, en minutes,

$$\frac{60 \times 160 C}{v} = \frac{9600 C}{v}$$

Le déplacement linéaire du papier pendant ce temps mesure la distance cherchée d . Sa valeur est

$$d = 31 \frac{m}{m} 4 \times \frac{9600 C}{v}$$

Dans les applications numériques, C et v doivent être exprimés avec la même unité de longueur. Si $C = 6 \frac{m}{m} 1920$ et $v = 80$ kilomètres, on a

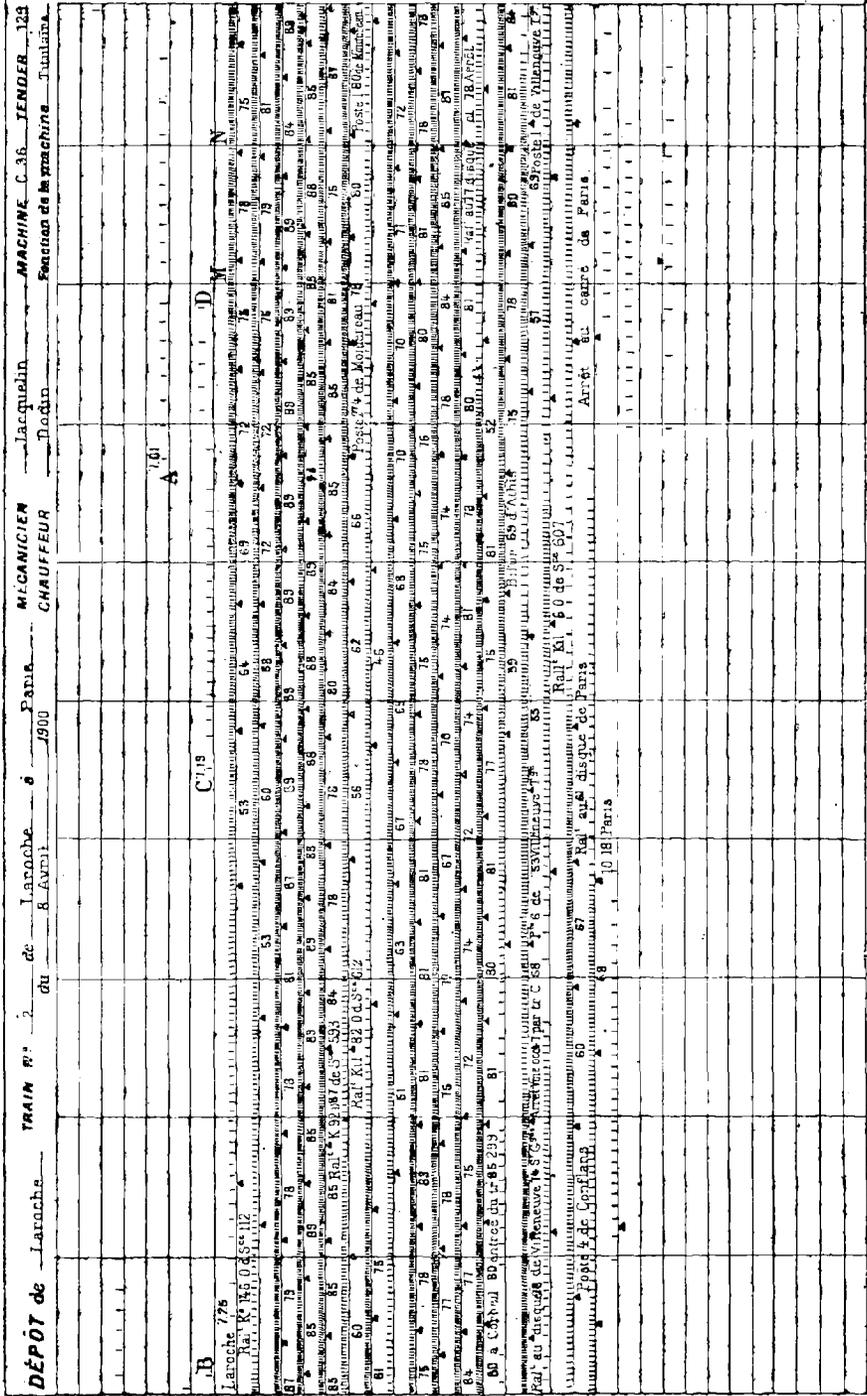
$$d = 31 \frac{m}{m} 4 \times \frac{9600 \times 6.192}{80000} = 23 \frac{m}{m} 3 \text{ environ}$$

En faisant glisser sous les lignes successives du graphique une échelle construite d'après ce principe, on voit immédiatement si les vitesses réglementaires ont été dépassées.

591. Dispositions particulières.

1° L'encliquetage Dobo qui entraîne le manchon j , par exemple, pendant la marche en avant, n'exerce sur lui, pendant la marche en arrière, que le léger frottement dû à l'action de ses ressorts. Pour être absolument sûr qu'aucun recul du manchon ne se produira, on place sur son bord une denture dans laquelle s'engage un cliquet qui s'oppose au mouvement arrière. Une disposition analogue est appliquée au manchon h .

CHEMIN DE FER DE PARIS A LYON ET A LA MÉDITERRANÉE — CIRONOTACHYMÈTRE P.-L.-M.
 Relevé graphique de la marche du train N° 2 du 8 Avril 1900 de Laroche à Paris



Opérations effectuées pendant la marche du train N° 2 du 8 Avril 1900 de Laroche à Paris

Fig. 635.

Supposons la machine en marche vers l'avant ; si sa vitesse vient à diminuer, le manchon j tend, en raison de son inertie, à conserver la vitesse acquise, et à tourner plus rapidement que l'encliquetage Dobo qui le mène. Pour s'opposer à cet effet, qui fausserait les indications de l'appareil, on appuie contre ce manchon un sabot α en bois dur qui joue le rôle de frein (fig. 633).

2° *Mouvement du tambour.*

Le mouvement d'horlogerie du tambour est remonté automatiquement par la locomotive. A cet effet, l'arbre horizontal ef entraîne un plateau excentrique M (fig. 631 à 634) qui commande par une coulisse un levier coudé N' , dont l'extrémité fait osciller une tige verticale N. Cette tige porte à sa partie supérieure un cliquet γ (fig. 631) qui, sous l'action d'un ressort o , tend à faire tourner la roue à rochet φ dans laquelle il s'engage. Chaque mouvement de la tige N provoque ainsi une rotation de la roue φ , qui remonte le ressort du barillet auxiliaire P. Celui-ci entraîne à son tour les roues U et U', ou V et V', qui font mouvoir le tambour enregistreur. Le déroulement du barillet est réglé par une horloge régulatrice Q (fig. 631), qui donne en même temps l'indication des heures. Le rapport des roues U et U' est $\frac{6}{10}$; les roues V et V' sont égales ; suivant celle des deux combinaisons qui est employée pour transmettre le mouvement au tambour, le déroulement du papier se fait plus ou moins vite ; la première, qui correspond à un tour en 10 minutes convient aux trains express, et la seconde, qui donne un tour en 6 minutes, convient aux trains rapides.

3° *Suspension de l'appareil.*

L'appareil est suspendu entre deux séries de ressorts GG, IIII, afin de le soustraire autant que possible aux vibrations et aux chocs produits par la marche de la locomotive. Pour permettre les petits déplacements verticaux résultant du jeu des ressorts, l'arbre vertical cKd qui lui donne le mouvement a dû être fait en deux pièces J et K (fig. 633) fixées, la première au pignon hélicoïdal E, et la seconde au chronotachymètre proprement dit. Ces deux pièces sont réunies par un manchon L, qui est claveté à poste fixe sur la pièce J, et dont le clavetage sur la pièce K permet le déplacement longitudinal de cette dernière.

4° *Indicateur Stroudley.*

Les indications du chronotachymètre ne sont pas visibles pour le mécanicien ; pour remédier à cet inconvénient, on adjoint à l'appareil une sorte de petite turbine qui refoule un liquide dans un tube gradué placé bien en vue (indicateur Stroudley) ; la hauteur à laquelle s'élève le niveau fait connaître à chaque instant la vitesse de la machine.

C. — Chronotachymètre Hasler.

592. Le chronotachymètre modèle P.-L.-M. ne donne pas la vitesse réelle de la locomotive à un instant déterminé, mais seulement une vitesse moyenne d'autant plus voisine de la vérité que les frappes se succèdent à des intervalles plus rapprochés. Mais comme, d'autre part, le diagramme enregistré n'est lisible que si la distance de deux traits consécutifs est appréciable à l'œil, la précision qu'il est possible d'atteindre est nécessairement limitée.

Dans les appareils à force centrifuge, au contraire, les indications fournies concordent exactement avec la vitesse réelle ; mais elles dépendent dans une certaine mesure de la lubrification des organes, qui laisse la masse mobile glisser plus ou moins facilement le long de son guide. De plus, la graduation du cadran est empirique, et les lectures pour les faibles vitesses peu précises.

Le chronotachymètre Hasler a été imaginé dans le but de remédier à ces incon-

vénients, en donnant une vitesse moyenne aussi rapprochée que possible de la vitesse réelle à l'instant considéré, et des enregistrements nets et précis quelle que soit l'allure de la machine.

593. Principe de l'appareil.

Un mouvement de rotation, dont la vitesse angulaire est proportionnelle à celle de l'essieu moteur, est communiqué à une vis 7 (fig. 636) finement filetée, qui engrène avec un segment d'écrou 27 guidé par une tige 25. Un système de cames et de ressorts, que nous décrirons plus loin, maintient cet écrou en contact avec la vis pendant deux secondes, puis supprime la liaison pendant une seconde, et ainsi de suite. Une bague tronquée 15, qui embrasse la vis aux trois quarts sans la toucher, peut se mouvoir parallèlement à son axe. Si N désigne le nombre de tours des roues motrices pendant la durée de l'engrènement, le nombre correspondant de tours de vis est kN , et l'écrou s'élève de $h = k \times PN$, h représentant un coefficient constant qui dépend de la liaison entre la vis 7, de pas P , et l'essieu moteur. La bague 15 soulevée par l'écrou 27, entraîne une crémaillère 19, terminée par une pointe 45 en face de laquelle une bande de papier D se déplace dans un mouvement de translation uniforme. La crémaillère engrène avec un secteur denté 20, solidaire d'une aiguille I mobile devant un cadran divisé. L'origine o de la graduation correspond à la position de repos du système 27-15; d'après ce qui précède, l'arc oM est proportionnel au nombre de tours qu'ont fait les roues motrices pendant la durée d'engrènement de l'écrou 27, de sorte que si, par exemple, on a déterminé la position R du point M pour une vitesse de 100 kilomètres à l'heure, et si l'on a partagé oR en 100 parties égales, le nombre indiqué par l'aiguille sur le cadran exprime, en kilomètres à l'heure, la vitesse moyenne de la machine pendant les deux dernières secondes. Enfin, la pointe 45, généralement maintenue un peu écartée du papier, s'en rapproche automatiquement après des intervalles de temps égaux, et y perce des trous d'autant plus élevés que la vitesse atteinte est plus grande. Ces trous forment une ligne discontinue qui donne l'aspect de la courbe des vitesses moyennes de la locomotive, puisque ses abscisses (égales aux déplacements du papier) sont proportionnelles au temps, et ses ordonnées (égales au déplacement de l'écrou 27) proportionnelles au nombre de tours effectués pendant les deux dernières secondes. Le *chronotachymètre* Hasler donne donc à la fois une indication optique et une représentation graphique de la vitesse.

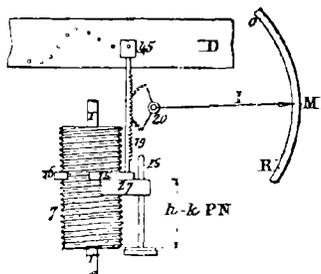


Fig. 636.

Les dispositions que nous venons d'indiquer seraient insuffisantes en pratique, puisque l'aiguille ne serait actionnée par l'écrou que toutes les trois secondes. Aussi, dispose-t-on autour de la vis 7 trois segments d'écrou au lieu d'un seul; chacun d'eux jouant à son tour le rôle décrit pour le premier, la mise en place de l'aiguille peut ainsi se faire toutes les secondes. Sa position indique toujours la vitesse moyenne des deux dernières secondes écoulées, correspondant à l'engrènement de l'écrou qui vient d'agir sur elle. Mais comme, à cause de la succession des écrous, chaque intervalle de deux secondes comprend la dernière seconde de l'intervalle précédent, la vitesse moyenne lue se rapproche assez de la vitesse réelle pour lui être substituée en pratique.

594. Description :

1^o Prise de mouvement sur la machine.

L'une des bielles d'accouplement est reliée par une petite bielle KJ (fig. 637-638) à une manivelle IJ solidaire d'un arbre horizontal z (fig. 639), qui porte à ses extrémités

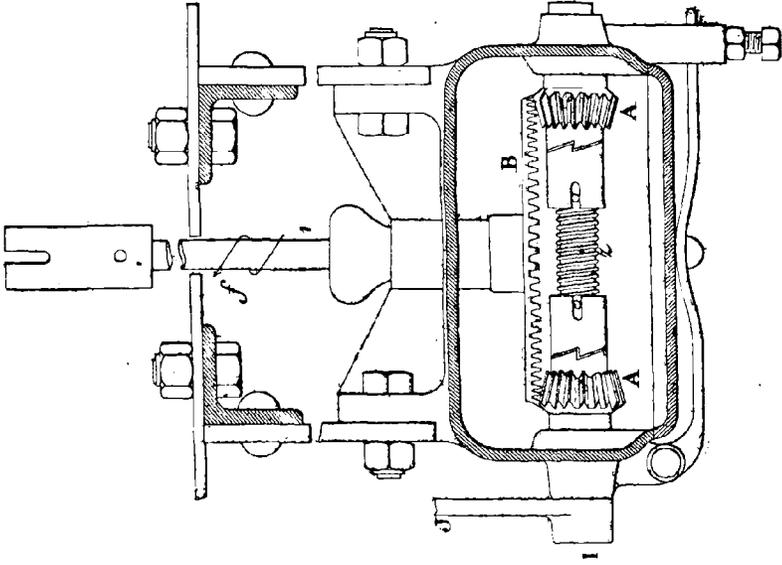


Fig. 639

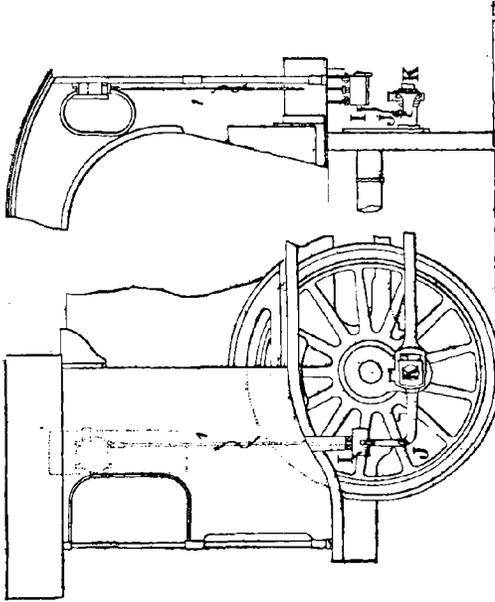


Fig. 638.

Fig. 637.

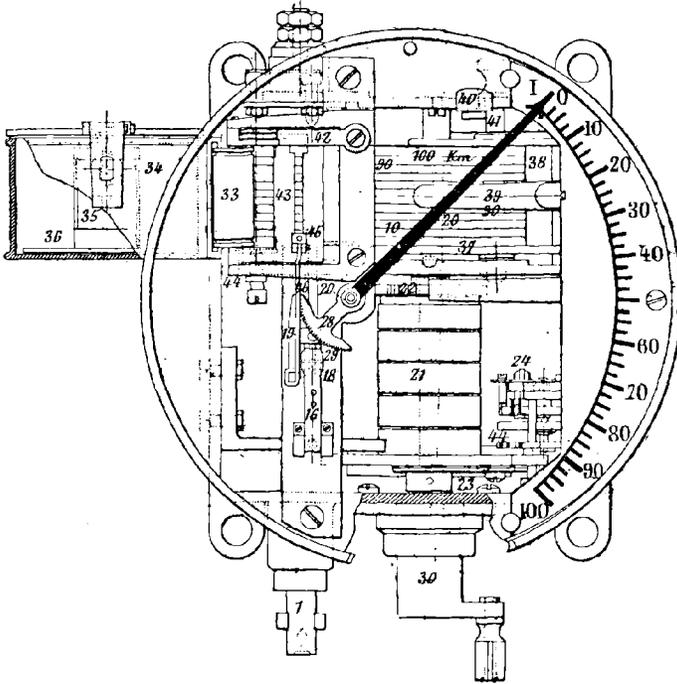


Fig. 640. — Vue de face.

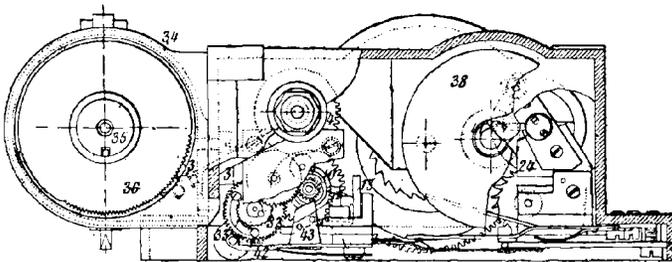


Fig. 641. — Plan.

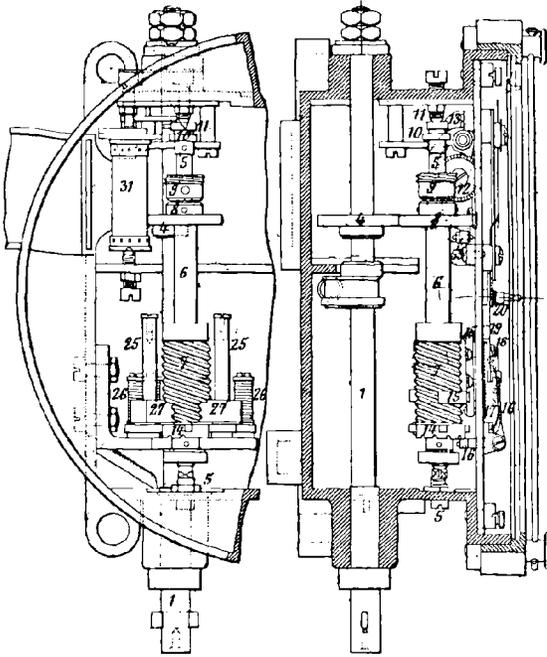


Fig. 642. — Vue de face. Fig. 643. — Coupe verticale.
(plaque de l'aiguille enlevée)

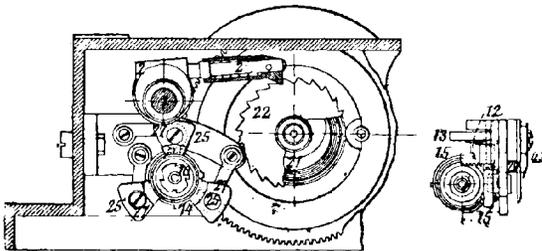


Fig. 644. — Coupe horizontale. Fig. 645. — Détail du compteur
kilométrique.

deux pignons coniques égaux A, engrenant avec la même roue B. Un double embrayage à cliquet et à ressort est disposé de manière que l'axe z entraîne l'un des pignons A pendant la marche en avant, et l'autre pendant la marche en arrière. L'arbre vertical t de la roue B reçoit, dans les deux cas, un mouvement de rotation de sens l , dont la vitesse angulaire est égale, à chaque instant, au produit de celle des roues motrices par le rapport $\frac{A}{B}$ des nombres de dents.

2° *Commande de la vis 7 et des écrous 27. — Mouvement d'horlogerie.*

L'arbre 1 transmet son mouvement par deux roues 4 et 8 (fig. 643) (portant respectivement 34 et 30 dents), à une douille creuse 6, sur laquelle est calée la vis à filets multiples 7 qui, d'après ce qui précède, fait dans un temps donné un nombre de tours égal à celui des roues motrices multiplié par $\frac{34 A}{30 B}$. Chacun des trois segments d'écrou 27 est guidé par une tige 25 (fig. 642), fixée à sa partie inférieure sur un petit

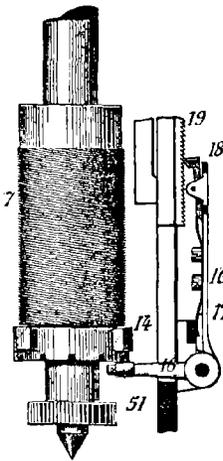


Fig. 646.

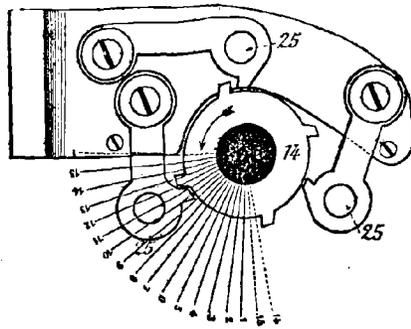


Fig. 647.

plateau mobile, qu'un ressort 26 tend constamment à rapprocher de la vis. Un arbre 5 (fig. 642-643) traverse la douille 6, et reçoit un mouvement de rotation uniforme du mécanisme d'horlogerie figuré par les cinq ressorts 21, et l'échappement H (fig. 640). Il porte à son extrémité inférieure un disque 14 (fig. 642-643-644-646) sur la circonférence duquel sont placées quatre cames (fig. 644-647) qui viennent repousser successivement les plateaux des tiges 25. Pendant toute la durée d'action d'une de ces cames, un des segments d'écrou 27 se trouve séparé de la vis 7 et retombe en vertu de son poids, puis il engrène de nouveau, et ainsi de suite. D'après le principe exposé plus haut, la liaison de chaque écrou est établie avec la vis pendant deux secondes, et cesse pendant une seconde; le disque 14 portant quatre cames, le mouvement d'horlogerie doit être réglé de telle sorte que l'arbre 5 fasse un tour en douze secondes (*). Les cinq ressorts 21 du barillet le font fonctionner pendant une demi-heure environ. Au mo-

(*) L'échappement frappe 300 coups simples à la minute, et le disque 14 fait un tour pendant que le mouvement frappe 60 coups. Chaque came vient donc occuper la place de la précédente avec le quinzième coup. Pendant onze de ces coups, les écrous engrenent avec la vis 7 et, pendant les quatre autres, ils reviennent à leur position de repos. Les durées des périodes de liaison et de dégagement sont donc exactement de $2\text{ s } \frac{1}{5}$ et de $\frac{4}{5}$ de seconde.

ment de la mise en marche et pendant les arrêts prolongés. le remontage doit être fait à la main ; mais, en cours de route, il est assuré automatiquement par la locomotive, au moyen d'une douille à manivelle 30, qui renferme un cliquet à friction 2 (fig. 644-649) ou à ressort commandé par un excentrique calé sur l'arbre 1. A chaque tour de ce dernier, le cliquet fait avancer d'une dent la roue 22. Quand le mécanisme est complètement remonté, un organe spécial 23 (fig. 640), fonctionnant comme la croix de Malte des horloges, arrête la roue 22, et le cliquet 2, toujours entraîné par l'excentrique qui le commande, ne fait plus que comprimer le ressort à boudin représenté en coupe (fig. 644). Après un certain temps, le dispositif 23, se dégage de la roue 22, et le remontage automatique recommence.

3° Mouvement du papier et pointage du temps.

L'arbre 5 communique son mouvement de rotation uniforme, par l'intermédiaire d'une roue 11 (fig. 642-643), à deux rouleaux cylindriques 31 et 33 (fig. 640-641-642), entre lesquels passe une bande de papier qu'ils dévident d'une bobine 37 (fig. 640) pour la conduire dans la boîte à diagramme 34. Le rouleau 31 porte, à ses deux extrémités, des pointes régulièrement espacées (fig. 642-648) qui en assurent le transport uniforme, et pointent en outre les temps. Les engrenages qui le commandent sont calculés de manière que, suivant les appareils, quatre, six et même huit millimètres de papier se déroulent pendant une minute. En admettant la première vitesse, la distance de deux pointes consécutives, qui est de 6 millimètres, correspond à 1 minute 1/2. Comme il y a 10 pointes, un tour complet du rouleau 31 représente un quart d'heure de marche. Une pointe spéciale, placée au milieu de l'intervalle de deux autres, perce un trou sur le papier, visible en α sur le diagramme (fig. 654), et permet de lire des durées de quinze minutes sans compter les trous intermédiaires ; elle joue ainsi le rôle de totalisateur des temps.

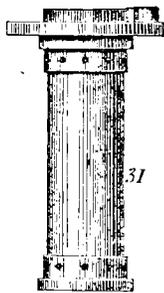


Fig. 648.

La bande de papier a 40 mètres de longueur, ce qui, dans l'hypothèse ci-dessus, correspond à un service continu de 160 heures environ. Pour la renouveler, on tire le verrou 40 (fig. 640) et on enlève la cheville 41 qui fixe la bobine 37. Le plateau supérieur 38 de celle-ci est mobile, de sorte qu'on peut placer facilement un nouveau rouleau tout préparé. De plus, le rouleau 33 possède une roue à cliquet, qui permet de le manœuvrer à la main, indépendamment du mouvement d'horlogerie, et de transporter le bout libre de la bande jusque dans la boîte à diagramme 34. Celle-ci renferme un rouleau 35, qui enroule automatiquement le papier à l'aide d'un mécanisme analogue à celui qui sert à remonter le mouvement d'horlogerie — cliquet à excentrique 3 (fig. 641 et 649).

4° Indication optique de la vitesse.

Nous avons montré, dans l'exposé du principe, que la hauteur atteinte par chaque écrou 27 est proportionnelle à la vitesse moyenne des deux dernières secondes écoulées. La bague tronquée 15 qu'il soulève est solidaire d'un chariot qui glisse le long d'une réglette fixe (fig. 643) évidée intérieurement. Au travers de l'évidement passent de petites colonnes qui relient le chariot à la crémaillère 19. Celle-ci fait mouvoir le secteur denté 28 (fig. 640-650) auquel est rivée l'aiguille I, dont le fonctionnement a été expliqué précédemment.

Au moment où le segment d'écrou 27 qui vient de commander la bague 15 cesse d'être lié à la vis 7, la crémaillère 19, abandonnée à elle-même, tend à retomber en ramenant l'aiguille au zéro. Des dispositions particulières sont employées pour éviter cet inconvénient, qui rendrait les lectures impossibles. Un levier coudé 16-16 (fig. 643-646) porte, à l'une de ses extrémités, une roulette 51 qui frotte sur le bord inférieur du disque 14, garni de douze encoches équidistantes, et à l'autre trois petits cliquets

18 qui font face à la crémaillère. Au moment où une encoche se présente devant la roulette, un ressort plat 17 force celle-ci à y pénétrer, et les cliquets 18 dégagent pendant un instant la crémaillère 19, ce qui permet à la bague 15 de retomber sur l'écrou 27 le plus élevé. Comme le disque 14 fait un tour en 12 secondes, et qu'il y a 12 encoches, ce fait se reproduit toutes les secondes. De plus, d'après le mode de commande des écrous, il y en a toujours un qui, à ce moment, termine sa période d'engrènement (*). Le court laps de temps pendant lequel la crémaillère est rendue libre permet donc à l'aiguille d'indiquer la vitesse moyenne des deux dernières secondes écoulées ; sa remise en place toutes les secondes lui occasionne de petites secousses qui ne nuisent pas à la lecture.

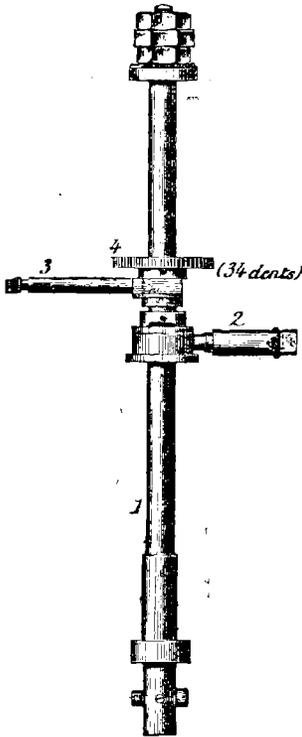


Fig. 649.

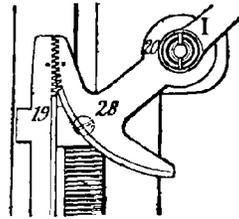


Fig. 650.

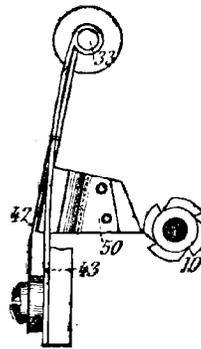


Fig. 651.

5° Pointage de la vitesse.

La crémaillère 19 entraîne une tige 46 (fig. 640), terminée par une pointe 45, et guidée par une rainure pratiquée dans la plaque 43 qui s'étend sur la hauteur du papier à diagramme. A la partie supérieure de cette plaque se trouve une sorte de dent trapézoïdale 50 qui forme angle droit avec elle (fig. 641-651), et fait face à une roue à rochet 10 solidaire de l'arbre 5 (fig. 641-644-651). Tant que cette dent, mobile autour de l'axe du cylindre 33, est appliquée sur un plein de la roue 10, la pointe 45 frôle seule-

(*) Le dégagement d'un écrou 27 se produit à la fin du onzième coup de l'échappement et le passage de la roulette 51 dans une encoche a lieu du dixième au onzième coup ; à la fin du onzième coup, la roulette sort de l'encoche, et l'extrémité supérieure du levier 16 se rapproche de la crémaillère, avec les cliquets 18 qu'elle supporte ; le système mobile 15-19 peut ainsi se placer au niveau de la masse 27, la plus élevée à ce moment.

ment le papier ; mais dès qu'un creux se présente, le ressort 42 pousse la plaque 43 et la tige 46 qu'elle guide, de sorte que la pointe pique le papier. La roue à rochet 10 n'ayant que quatre creux, l'enregistrement se fait toutes les trois secondes. Il se produit dès que la crémaillère, dégagée des cliquets 18 (mais seulement une fois sur trois), a subi l'action de la masse 27 la plus élevée. Le porte-pointe est à charnière, de sorte que, si le pointage se fait pendant un accroissement de la vitesse, le papier ne se déchire pas.

6° *Pointage des espaces parcourus.*

Puisque la douille 6 fait, pendant un temps donné, un nombre de tours proportionnel à celui des roues motrices, son mouvement peut être utilisé pour l'enregistrement des espaces parcourus. Elle porte à cet effet, dans sa région supérieure, un pas de vis 9, qui commande une roue hélicoïdale 12 (fig. 642-643-645-652).

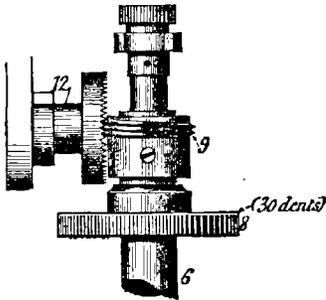


Fig. 652.

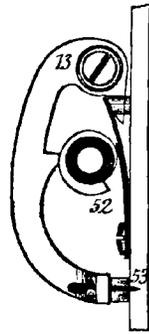


Fig. 653.

Un excentrique à bec 52, rivé sur cette dernière (fig. 653), tend le levier à ressort 13 (fig. 643-653) à l'extrémité duquel est fixée une pointe 53. Après chaque tour de la roue 12, le ressort se détend, et projette la pointe sur le papier, où elle perce un trou. Evidemment, un tour de la roue hélicoïdale ne correspond à un kilomètre parcouru que si l'on a convenablement déterminé le nombre de ses dents. Nous donnerons plus loin un exemple du calcul.

595. **Calcul de l'engrenage AB.**

L'expression

$$h = k \times PN = \frac{A}{B} \times PN$$

de la hauteur atteinte par un des segments d'écrou à la fin de son engrenement, montre qu'elle est proportionnelle au rapport $\frac{A}{B}$ pour chaque valeur de la vitesse. Comme la région de la bande de papier réservée au pointage a une largeur de quatre centimètres, les constantes A, B et P doivent être telles que, pour la plus grande vitesse de la locomotive, h soit au plus égal à 4 centimètres. D'après le pas donné à la vis 7, cette condition se trouve réalisée pour tous les appareils si le nombre de tours fait en une minute par l'arbre 1 ne dépasse pas 75. Il faut donc déterminer $\frac{A}{B}$ en conséquence.

Soient V la plus grande vitesse de la locomotive, en kilomètres à l'heure, et D le

diamètre moyen de ses roues motrices, en mètres ; le nombre de tours de celles-ci par minute est $\frac{1000 V}{60 \pi D}$, et l'on doit avoir

$$\frac{75}{\left(\frac{1000 V}{60 \pi D}\right)} = \frac{A}{B}$$

D'où l'on tire

$$\frac{A}{B} = \frac{60 \times 75 \pi D}{1000 V} = 4,5 \frac{\pi D}{V}$$

Pour une vitesse maximum de 100 kilomètres à l'heure, et une circonférence de roues motrices égale à 6^m 192, on aurait

$$\frac{A}{B} = \frac{4,5 \times 6,192}{100} = \frac{3483}{12500}$$

La conversion en fraction continue donne, en s'arrêtant à la cinquième réduite,

$$\frac{A}{B} = \frac{17}{61}$$

On donnera donc 17 dents aux pignons A, et 61 dents à la roue B. Le calcul doit être fait pour chaque type de locomotives, tant à cause de l'inégalité de leurs vitesses maxima que de celle des diamètres de leurs roues motrices.

596. Calcul de la roue hélicoïdale 12.

Soit x le nombre de ses dents ; quand la locomotive donne la vitesse maximum V , l'arbre 1 fait 75 tours par minute, et la douille 6, qui en reçoit le mouvement par les roues 4 et 8 de 34 et 30 dents, accomplit $\frac{75 \times 34}{30} = 85$ révolutions. La vis 9 n'ayant qu'un filet, le nombre de tours par minute de la roue 12 et de l'excentrique à bec 52 est $\frac{85}{x}$, correspondant à un espace parcouru $\frac{V}{60}$, évalué en kilomètres. Chaque tour de la roue 12 correspond donc à un parcours de $\frac{V}{60} : \frac{85}{x} = \frac{V \times x}{60 \times 85}$ kilomètres ; si l'on veut que le pointage des espaces se fasse tous les kilomètres, on devra avoir

$$\frac{V \times x}{60 \times 85} = 1$$

d'où

$$x = \frac{60 \times 85}{V}$$

Si, par exemple, $V = 100$ km, $x = \frac{60 \times 85}{100} = 51$ dents.

La nécessité de donner à x une valeur entière fait généralement commettre une petite erreur, de sorte que les indications kilométriques de l'appareil doivent être corrigées. Cette erreur est calculée pour chaque cas. L'usure des bandages est une autre cause de correction ; pour en atténuer l'effet, on attribue à D , dans les calculs, une valeur égale à la moyenne entre les diamètres d'une roue neuve et à limite d'usure.

Remarquons que, tout en conservant le nombre de dents déterminé par le calcul

ci-dessus, on peut diminuer de moitié l'unité d'espace enregistré en plaçant sur l'excentrique 52 deux becs diamétralement opposés.

597. Diagrammes obtenus.

La figure 654 représente un diagramme tracé par le chronotachymètre Hasler. Pour faciliter la lecture des vitesses, le papier présente des réglures horizontales numérotées d'après la vitesse maximum que peut atteindre la machine. On distingue :

1° En haut et en bas, une ligne des temps, formée de points régulièrement espacés, correspondant à des durées de 1 minute 5. La ligne inférieure contient en outre les points α totalisateurs des temps, placés de manière à comprendre entre eux des durées de 15 minutes. Dans la figure, le papier s'est déroulé à raison de 4 millimètres par minute, et les points les plus nombreux sont espacés de 6 millimètres ; la distance de deux points totalisateurs est de 60 millimètres. On peut donc évaluer un temps, en minutes, sans compter les points, en mesurant la longueur correspondante, et en la divisant par 4.

2° La ligne des vitesses, sinueuse. Les arrêts sont indiqués par les parties horizontales, et la durée peut en être évaluée comme il vient d'être dit. Les parties presque verticales indiquent les rapides croissances ou décroissances de la vitesse, à la mise en marche, aux ralentissements ou aux arrêts. Les pointages s'effectuant toutes les trois secondes, on peut contrôler la ligne des temps.

Il faut observer que les points tracés pendant les arrêts ne se trouvent pas exactement sur la ligne zéro. Cela provient de ce que l'appareil est réglé pour que la pointe 45 ne se soulève que quand les écrous ont monté de 1/2 millimètre sur la vis. Il n'y a donc pas lieu de corriger de ce 1/2 millimètre d'écart les valeurs pointées de la vitesse.

3° La ligne des espaces est au bas de la feuille, immédiatement au-dessus de celle des temps. Deux points consécutifs représentent, dans la figure, 1/2 kilomètre de parcours. Les points sont d'autant plus rapprochés que les ordonnées de la courbe des vitesses sont plus grandes.

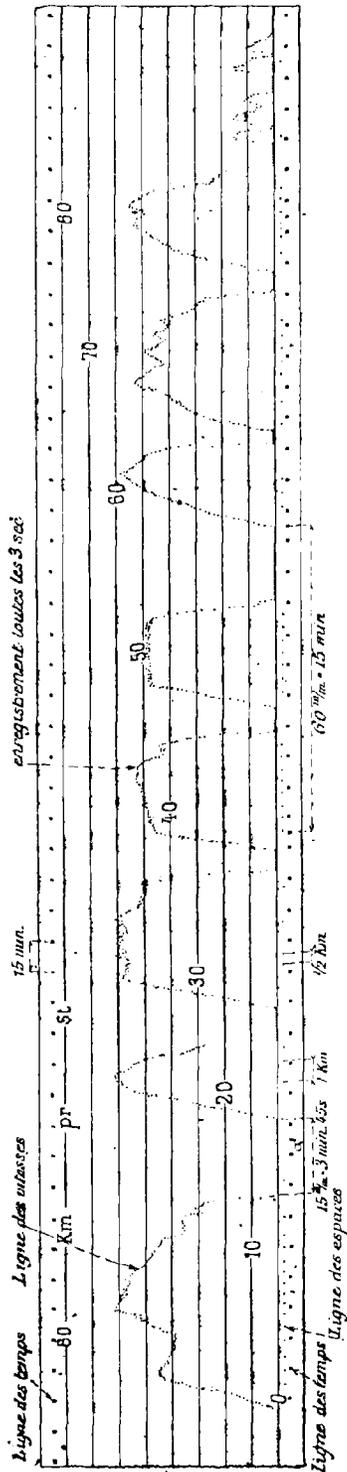


Fig. 654.

MACHINES A TAILLER LES ENGRENAGES CYLINDRIQUES

§ I. — Généralités sur les fraises et sur leur emploi dans le taillage des roues cylindriques à dents droites ou hélicoïdales.

598. On donne le nom général de fraises à tous les outils, de formes très variables, qui possèdent plusieurs dents tranchantes venant successivement agir, à peu près de la même manière qu'un outil de raboteuse, sur la pièce à travailler. Soit ABCD (fig. 655) la section d'une dent par un plan perpendiculaire à l'axe de la fraise; l'angle $xAy = \alpha$ que forme la tangente en A à la circonférence o avec la direction AB du taillant est appelé l'angle d'incidence. Sa valeur, ainsi que celle de l'angle $yAz = \beta$ des deux faces de la dent, varie avec la dureté du métal à ouvrir, et a été déterminée expérimentalement pour les diverses substances employées. Dans le travail de l'acier, $\alpha = 4^\circ$ environ, et $\beta = 51^\circ$. Le complément γ de la somme $\alpha + \beta$ est appelé angle de dégagement. Il vaudrait 35° dans le cas actuel. Pour que la fraise exécute bien son travail, il est indispensable de donner à ses dents un angle d'incidence aussi voisin que possible de la valeur assignée par l'expérience; l'angle β peut, au contraire, varier dans de plus larges limites. On peut même supprimer l'angle de dégagement, et diriger le bord AD de la dent suivant un rayon (fig. 656). Cette disposition est évidemment favorable à la solidité des dents.

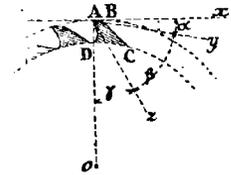


Fig. 655.

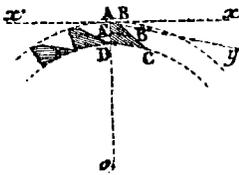


Fig. 656.

On emploie, dans l'industrie, deux sortes de fraises, qui se distinguent l'une de l'autre par la forme des dents et le mot d'affûtage. Ce sont :

- 1° Les fraises à denture fraisée ;
- 2° Les fraises à denture dégagée, ou à profil constant après affûtage.

Dans les deux cas, la section de la fraise par le plan méridien de l'arête de tête représente, en plein, les creux du profil à reproduire, et inversement.

599. Fraises à denture fraisée.

Les fraises à denture fraisée (fig. 657-659-660) sont ainsi nommées parce qu'elles sont taillées avec une autre fraise, dont le déplacement est guidé par des cames ou

A denture fraisée

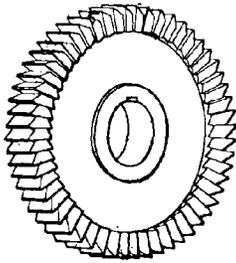


Fig. 657.

A denture dégagée

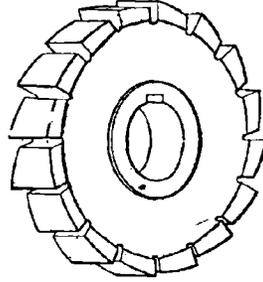


Fig. 658.

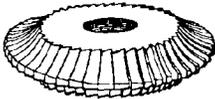


Fig. 659.

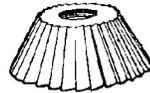


Fig. 660.

un gabarit appropriés. La section d'une dent par un plan perpendiculaire à l'axe est un quadrilatère ABCD (fig. 656) dont les côtés qui aboutissent à l'arête A forment un angle aigu complémentaire de l'angle d'incidence. Chaque dent est tranchante sur toute la longueur de son profil méridien, qui se trouve ainsi constitué, dans le plan ADo, par une arête vive. Lorsque celle-ci vient à s'émousser, il faut l'aviver par un affûtage, pratiqué sur le dessus de la dent en suivant tout son pourtour (fig. 664). Cette opération, rendue délicate et parfois impossible par le souci de conserver rigoureusement la forme du profil méridien, nécessite l'emploi de machines spéciales, et le travail, auquel il faut procéder assez souvent, est relativement long et dispendieux. Enfin, l'affûtage élargit la facette de coupe AB (fig. 656) qui, au bout d'un certain temps, vient

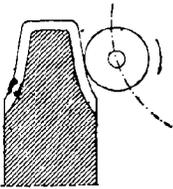


Fig. 661.

prendre la position A'B' par exemple. La fraise est alors exposée à talonner, et il faut la remplacer ou la retailler complètement, si son rayon n'est pas devenu trop petit.

Lorsque la fraise est destinée à tailler des engrenages, le profil dans le plan méridien de tête est celui d'un creux de la roue à construire.

600. Fraises à denture dégagée, dont le profil reste constant après affûtage.

C'est pour remédier à ces inconvénients que l'on emploie habituellement aujourd'hui les fraises à denture dégagée (fig. 662) dont le profil dans le plan méridien de tête reste constant après affûtage. Pour en concevoir la forme, supposons qu'il s'agisse d'une fraise à engrenages. Traçons dans un plan zoA (fig. 663) le profil MAN d'un creux de la roue à tailler, de manière que ses deux moitiés soient symétriques par rapport au rayon oA , et considérons un arc de spirale logarithmique AB, de pôle o ,

situé dans le plan mené par oA perpendiculaire à Z . Puis faisons tourner le plan ZoA autour de oZ en obligeant le point A du profil MAN à rester sur AB . Si chaque dent de la fraise est limitée par des surfaces analogues à celles que les courbes AM et AN décrivent dans ce mouvement :

1° La section d'une dent par tout plan passant par l'axe est identique au profil MAN d'un creux de la roue à exécuter ;

2° L'angle d'incidence conserve une valeur invariable, égale au complément de l'angle constant que forme la tangente en un point de la spirale logarithmique avec le rayon vecteur correspondant.

Il suffit, pour conserver ces propriétés, d'affûter la fraise dans un plan méridien,

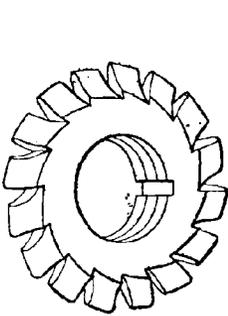


Fig. 662.

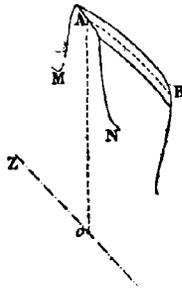


Fig. 663.



Fig. 664.

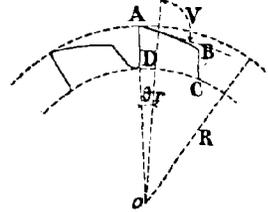


Fig. 665.

sur le devant de la dent (fig. 664) ; cette opération se fait à la meule, et présente la même facilité quelle que soit la forme du profil. Il faut avoir soin, toutefois, d'enlever la même épaisseur de matière sur toutes les dents, afin que leurs têtes A restent réparties sur une même circonférence de centre o .

Les figures 657-658 représentent des fraises à défoncer, et les figures 659-662 des fraises à engrenages des deux types. On voit que les fraises à denture dégagée sont plus résistantes que les fraises à denture fraisée ; la plus grande épaisseur de leurs dents, leur mode d'affûtage et l'invariabilité de leurs profils font qu'on peut les utiliser sans retailage jusqu'à usure. En revanche, leur taillant est moins coupant, et leur prix de revient plus élevé. Ce dernier inconvénient est d'ailleurs racheté par leur facilité d'affûtage et leur plus grande durée.

Nous avons dit que la courbe AB du dessus d'une dent est un arc de spirale logarithmique. Il est facile d'en trouver l'équation en fonction du rayon initial R de la fraise et de l'angle d'incidence α . En prenant o pour pôle et oA pour axe polaire, cette équation est de la forme

$$r = ke^{-m\theta}$$

k et m désignant des constantes à déterminer. Quand $\theta = 0$, $r = k$; on doit donc avoir

$$k = R$$

De plus, l'angle V de la tangente avec le prolongement du rayon vecteur est donné par la formule

$$\operatorname{tg} V = \frac{r d\theta}{dr} = \frac{Re^{-m\theta} d\theta}{-mRe^{-m\theta} d\theta} = -\frac{1}{m}$$

Mais, d'autre part,

$$V = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

On a donc

$$\operatorname{tg} V = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{1}{m}$$

D'où

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

L'équation cherchée est par conséquent

$$r = R e^{-\theta \operatorname{tg} \alpha}$$

En désignant par r_0 et θ_0 les coordonnées polaires du point B, le dégagement de la dent a pour valeur

$$R - r_0 = R - R e^{-\theta_0 \operatorname{tg} \alpha} = R (1 - e^{-\theta_0 \operatorname{tg} \alpha})$$

Dans la pratique, on substitue habituellement au profil théorique du dessus de la dent, soit un arc de spirale d'Archimède passant par ses extrémités, soit même un arc de cercle ayant pour centre le point de rencontre de la perpendiculaire au milieu de AB avec la normale à la spirale logarithmique au point A. L'angle d'incidence varie alors après chaque affûtage, mais le calcul montre que l'erreur dont il est affecté n'atteint jamais un demi-degré.

601. Disposition schématique du taillage d'une roue cylindrique droite.

On peut se représenter le taillage d'une roue cylindrique à dents droites de la façon suivante. Le disque à fraiser, soit A (fig. 666, préalablement tourné au diamètre extérieur de la roue, est maintenu immobile sur un arbre horizontal z . La fraise B tourne autour d'un axe horizontal z' , perpendiculaire au précédent, et placé sur un chariot D auquel la machine communique un mouvement d'avance parallèlement à z , avec retour en arrière à la fin de chaque passe. On règle la position du chariot D de telle manière que le plan moyen de la fraise passe par z , et que la plus courte distance d des deux axes soit égale à la somme des rayons du disque et de la fraise, diminuée de la longueur d'une dent de la roue à construire. Lorsque, par suite de l'avancement du chariot D, la fraise entre en contact avec le disque, elle y trace une rainure qui, d'après ce qui précède, affecte exactement la forme d'un creux de la roue, puis elle revient à sa position primitive. Avant de lui faire effectuer une seconde passe, il faut faire tourner le disque A, autour de l'axe z , d'une quantité égale à l'intervalle de deux dents consécutives. Cette opération est commandée par un appareil diviseur, relié au chariot C, et dont l'organe principal est habituellement un disque portant des séries de trous répartis sur des circonférences concentriques, de manière à permettre la division de la circonférence A en autant de parties égales que la roue à construire doit avoir de dents. Dans un grand nombre

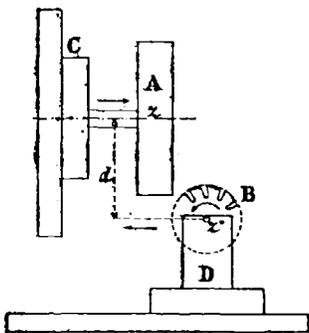


Fig. 666.

de machines, tous ces mouvements s'accroissent automatiquement.

602. Disposition schématique du taillage d'une roue cylindrique à dents hélicoïdales.

Les fraises à denture fraisée ou dégagée se prêtent également au taillage des roues hélicoïdales ; leur profil dans le plan méridien passant par l'arête de coupe est

alors celui d'une section droite de la denture à construire, déterminée comme on l'a vu dans l'étude géométrique de ces mécanismes.

Soient MN (fig. 667) l'arc d'hélice suivant lequel le cylindre primitif de la roue rencontre la surface d'une dent, MT sa tangente en M, et α l'angle qu'elle forme avec la génératrice Mo. La fraise, montée sur un chariot inclinable, est d'abord placée de telle sorte que son plan moyen soit parallèle au plan formé par MT et le rayon du cylindre qui aboutit en M. Supposons qu'elle reçoive, outre son mouvement de rotation, une avance linéaire parallèle à l'axe du disque ; il faudra que, pendant la durée d'une passe, celui-ci tourne sur lui-même, dans le sens opposé à l'inclinaison de l'hélice MN, d'une quantité $oN = h \operatorname{tg} \alpha$. L'arbre qui le supporte devra donc être commandé par un train d'engrenages susceptible de lui donner ce mouvement d'avance circulaire. En désignant par ω sa vitesse angulaire, par R le rayon primitif de la roue à tailler, et par V la vitesse d'avance linéaire de la fraise, on aura

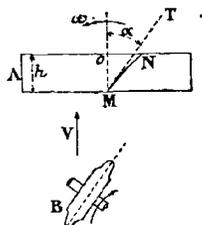


Fig. 667.

$$oN = \omega R \times \frac{h}{V} = h \operatorname{tg} \alpha$$

d'où

$$V = \omega R \operatorname{cotg} \alpha.$$

Cette égalité définit la relation qui doit exister entre les valeurs absolues des vitesses des deux mouvements d'avance, pour réaliser une denture hélicoïdale inclinée de l'angle α , soit à droite, soit à gauche, sur les génératrices du disque.

Si, au contraire, la fraise ne fait que tourner autour de son axe, le disque à tailler devra recevoir un mouvement hélicoïdal, qui le fasse simultanément avancer vers la fraise et tourner sur lui-même de la quantité oN pendant la durée d'une passe. La relation entre les vitesses de ces deux mouvements composants reste la même que ci-dessus.

Dans les deux cas, le mouvement de rotation du disque A est indépendant du mécanisme diviseur, qui fonctionne comme pour le taillage d'une roue cylindrique à dents droites.

Ce principe et le précédent font comprendre qu'une même machine puisse servir à tailler indifféremment des roues droites ou hélicoïdales ; il suffit que le chariot porte-fraise soit inclinable à volonté, et que le support du disque à tailler soit pourvu du mécanisme d'avance circulaire ou hélicoïdale dont il vient d'être question.

§ II. — Machine à tailler les engrenages cylindriques droits ou hélicoïdaux construite par la « Société Alsacienne ».

603. Elle comprend deux parties distinctes :

1^o Les organes qui servent à tailler des engrenages cylindriques droits, par déplacement horizontal de la fraise ;

2^o Ceux qui produisent le déplacement hélicoïdal du disque à fraiser, et ne servent que pour tailler des roues cylindriques à dents courbes.

604. **Commande du mouvement hélicoïdal du disque à tailler.**

Un mouvement de rotation uniforme est donné par courroie à la poulie 33 (fig. 668), solidaire de la vis sans fin 32, qui engrène avec la roue 31, et fait ainsi tourner l'arbre

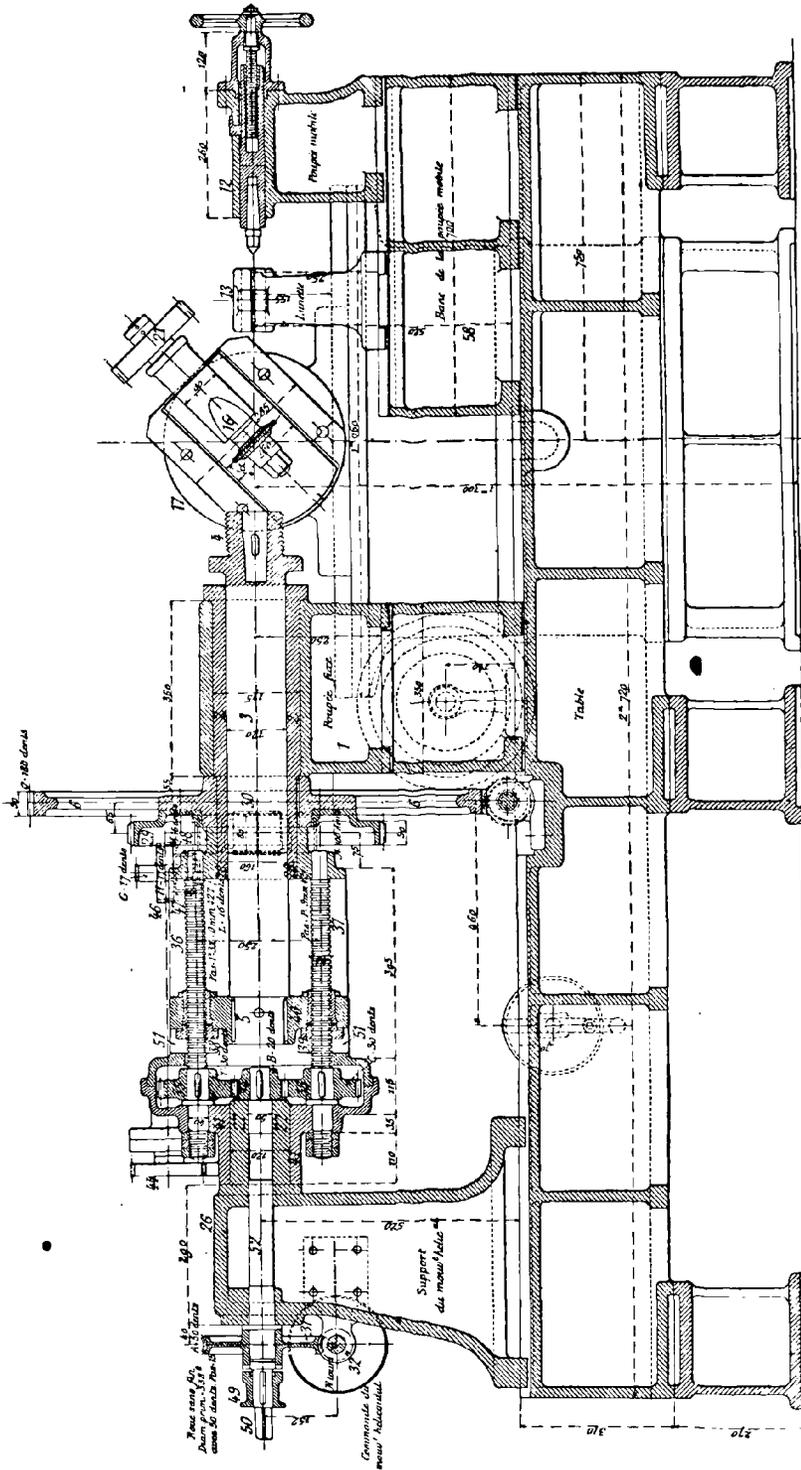


Fig. 668. — Coupe longitudinale.

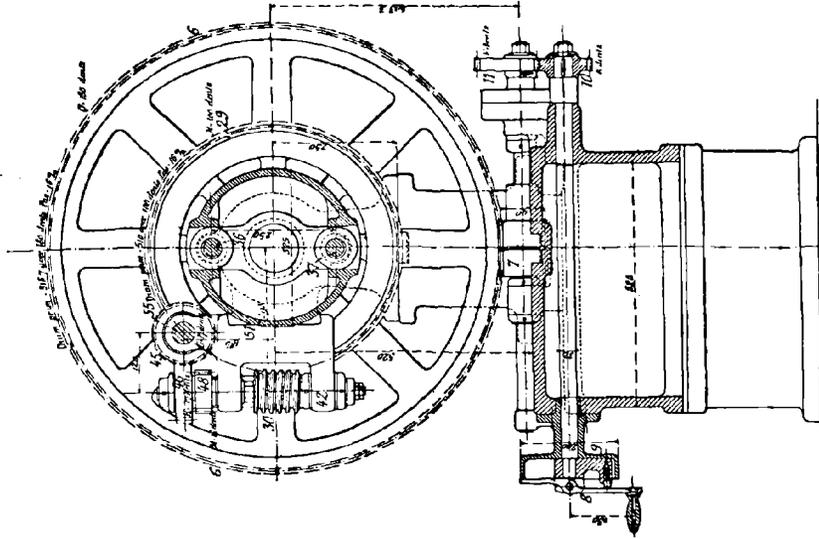


Fig. 670. — Coupe transversale.

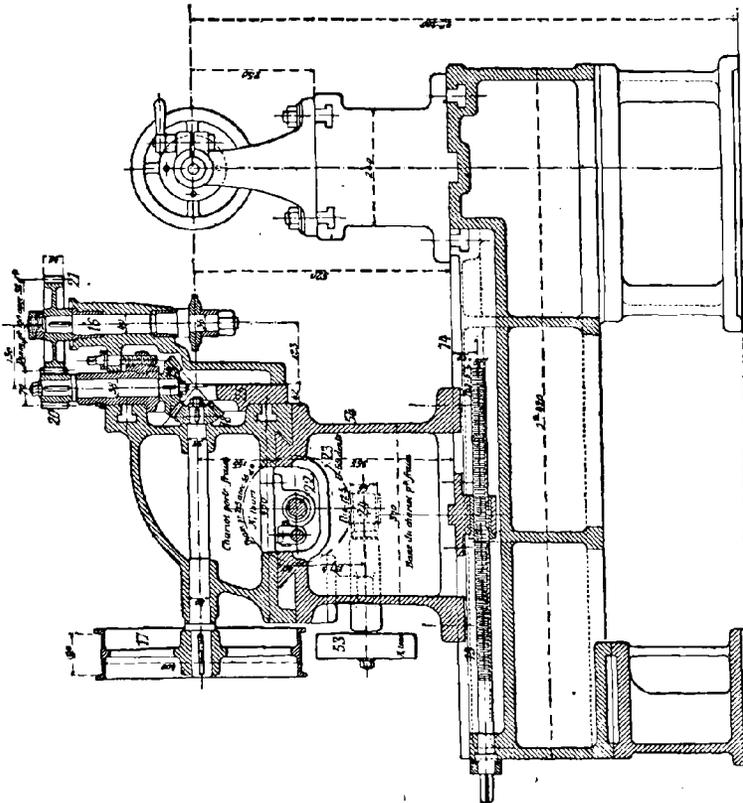


Fig. 669. — Coupe transversale.

horizontal 52 porté par la poupée 26, dite *support du mouvement hélicoïdal*. L'arbre 52 entraîne le pignon 34, qui commande deux roues égales 35-35, calées sur les vis parallèles 36-37 de même pas, dont les écrous 38-39 sont solidaires d'une traverse 40, invariablement liée à la broche 3. Celle-ci tourne librement dans un arbre creux 2, porté par la poupée fixe 1. Elle reçoit à son extrémité 4 le disque à fraiser, placé sur un plateau ou sur un mandrin dont le bout est supporté par la lunette 13. L'ensemble formé par les vis 36-37, leurs écrous 38-39, et les roues 34-35 est renfermé dans un manchon 51, appelé *boîte du mouvement hélicoïdal*, percé, suivant deux génératrices opposées, de rainures servant de guides à la traverse 40. Cette boîte, qui supporte les extrémités des vis 36-37, est mobile, d'une part sur le tourillon 27 venu de fonte avec la poupée 26, d'autre part sur le prolongement 28 de l'arbre creux 2 qui sert d'axe à la broche 3. On peut lui donner un mouvement de rotation de la façon suivante.

L'une des roues 35 engrène avec un pignon 56 (fig. 671), calé sur un axe qui traverse la paroi de gauche de la boîte 51. L'extrémité extérieure de cet axe reçoit la première roue d'un équipage 43-44 porté par une tête de cheval ; la dernière roue de ce train entraîne un arbre 55 (fig. 670), monté parallèlement à la broche sur des coussinets solidaires de la boîte 51. L'arbre 55 commande, par l'intermédiaire de l'engrenage hélicoïdal 45-46 et des roues droites 47-48, la vis 30 qui engrène avec une roue 29 solidaire du diviseur 6. Comme celui-ci conserve une position fixe pendant le fraissage de chaque dent, la roue 29 sert d'appui à la vis 30, dont le support 42 se met à tourner, en entraînant la boîte 51, la traverse 40 et la broche 3. Celle-ci participe donc à deux mouvements simultanés qui lui sont communiqués par la traverse 40 dont elle est solidaire, savoir :

1° Au mouvement d'entraînement circulaire dont il vient d'être question ;

2° A un mouvement relatif de translation, provenant de la rotation des vis 36-37 dans leurs écrous.

Le mouvement hélicoïdal qui en résulte varie avec l'équipage de roues dentées 43-44.

605. Appareil diviseur.

L'appareil diviseur comprend une roue 6 (fig. 668 et 670) de 180 dents, commandée par une double vis sans fin 7, mue à la main par la manivelle 8, le compteur 9, et les roues de rechange 10-11 portées par une tête de cheval. La roue 6, montée sur l'arbre creux 2 traversé par la broche 3, est solidaire d'une seconde roue 29, engrenant avec la vis 30 portée, comme on l'a vu, par un petit bâti 42 solidaire de la boîte 51. Chacune des roues 6 et 29 peut être menée

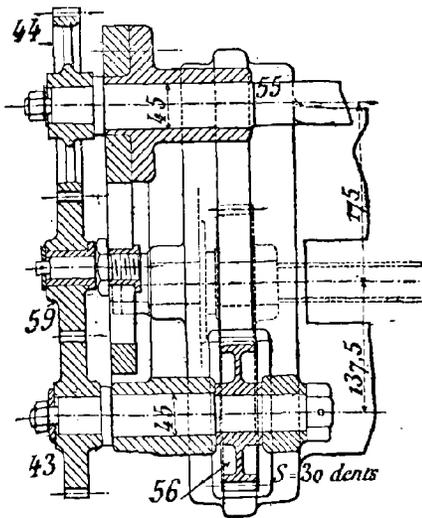


Fig. 671.

Tête de cheval du mouvement hélicoïdal.

par la vis qui engrène avec elle, mais ces systèmes ne sont pas réversibles, de sorte que le mouvement communiqué au groupe 6-29 par la manivelle 8 a pour effet d'entraîner le bâti 42, et avec lui la boîte du mouvement hélicoïdal, la traverse 40, la broche 3 et le disque à tailler. La rotation de celui-ci étant, d'après cela, égale à celle de la roue diviseur 6, il suffit de faire accomplir à cette dernière une fraction de tour $\frac{1}{n}$ pour tailler une roue de n dents. Si l'on désigne par x la fraction de tour corres-

pondante du compteur 9, et par ε la raison de l'équipage 10-11 porté par la tête de cheval, on a, si la vis 7 est à un seul filet

$$\frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{x} = \frac{\varepsilon \times 1}{180} = \frac{\varepsilon}{180}$$

d'où l'on tire
$$x = \frac{180}{n\varepsilon}$$

ce qui correspond à un nombre de degrés égal à $\frac{180 \times 360}{n\varepsilon}$. On détermine ε de telle manière que ce nombre de degrés soit simple. Pour tailler une roue de 50 dents, par exemple, on aurait

$$x = \frac{18}{5\varepsilon}$$

d'où
$$\varepsilon = \frac{18}{5x}$$

En prenant $\varepsilon = \frac{18}{5}$, la manivelle du compteur devrait faire un tour complet pour faire déplacer le disque à fraiser d'une quantité égale à l'intervalle de deux dents. L'équipage à placer sur la tête de cheval du compteur pourrait être composé de deux roues, ayant des nombres de dents équimultiples de 18 et 5. La menante, de 90 dents par exemple, prendrait la place de la roue 10, et la menée, qui aurait 25 dents, celle de la roue 11.

606. Commande de la fraise et de son avance linéaire.

L'arbre porte fraise 16 (fig. 669) est supporté par un petit banc à coulisses prismatiques, que l'on peut écarter ou rapprocher à volonté de la broche 3, suivant le diamètre des roues à tailler, en agissant sur la vis 15 à l'aide d'une manivelle. Un mouvement de rotation uniforme lui est transmis par une courroie montée sur la poulie 17, au moyen d'une paire de roues coniques 18-19 et d'une paire de roues droites 20-21. Le mouvement d'avance linéaire lui est donné, parallèlement à la broche 3, par la vis 22, calée sur le pignon 23, auquel une vis sans fin 24 communique la rotation qu'elle reçoit d'une poulie 53. Ce mécanisme est pourvu d'un débrayage automatique. Le chariot intermédiaire 25 est mobile autour de l'axe du pignon 18, de telle sorte qu'on peut incliner l'arbre 16 sur la verticale, et avec lui le plan moyen de la fraise, sans que le mouvement de rotation donné à cette dernière par le système de roues 18-19-20-21 cesse d'être transmis. Cette disposition, qui permet de placer la fraise obliquement par rapport à la broche 3, est utilisée dans la construction des roues hélicoïdales ; pour les roues droites, l'arbre 16 est placé verticalement. Les angles que forme le plan moyen de la fraise avec la broche sont d'ailleurs repérés par un index, et des boulons fixent à demeure le chariot 25 sur la poupée 54 quand il a reçu la position convenable.

Soient N_1 le nombre de tours par minute de la poulie 53, N'_1 celui du système 22-23, D le nombre de dents de la roue 23, et P_1 le pas de la vis 22. On a, la vis 24 étant à un seul filet,

$$\frac{N'_1}{N_1} = \frac{1}{D}$$

d'où
$$N'_1 = \frac{N_1}{D}$$

La vitesse d'avance de la fraise est, par seconde,

$$V_t = \frac{N_1 P_1}{60} = \frac{N_1 P_1}{60 D}$$

et, comme $D = 55$,

$$V_t = \frac{N_1 P_1}{3300}$$

607. Emploi de la machine pour le taillage d'une roue droite.

Dans le taillage d'une roue droite, le disque à fraiser reste complètement immobile pendant la durée d'une passe ; le mécanisme du mouvement hélicoïdal n'est pas embrayé, et la fraise reçoit, outre son mouvement de rotation par la poulie 17, son mouvement d'avance linéaire par la poulie 53. L'extrémité du mandrin porte-pièce est alors supportée par la contrepoinle 12, que l'on substitue à la lunette 13, et qui est placée comme elle sur la poupée mobile 57. A la fin de chaque passe, la fraise étant ramenée à sa position primitive, on fait tourner la boîte 51 et la broche 3 de la fraction de tour convenable, en agissant sur la manivelle du compteur, puis le même jeu recommence.

608. Emploi de la machine pour le taillage d'une roue hélicoïdale.

Dans ce cas, le chariot 25 ayant été incliné sur la verticale de l'angle donné α , la fraise reçoit seulement son mouvement de rotation par la poulie 17 ; son avance linéaire est supprimée. Enfin, le mécanisme du mouvement hélicoïdal entre en action ; proposons-nous de déterminer la composition de l'équipage 43-44, qui doit être fixé sur la tête de cheval de la boîte 51.

1° Calcul de la vitesse d'avance angulaire de la broche.

Le système formé par les roues 34-35, la tête de cheval, les roues 45-46-47-48, la vis 30 et la roue 29, est un train épicycloïdal avec la boîte 51 pour châssis ; les roues extrêmes sont 34 et 29. En considérant 34 comme la première, et en conservant les notations générales adoptées au chapitre XI, la formule de Willis se réduit à

$$\varepsilon = \frac{-\omega}{\omega_0 - \omega}$$

et donne

$$\omega = \frac{\omega_0 \varepsilon}{\varepsilon - 1} \quad (1)$$

La broche et la boîte 51 étant rendues solidaires l'une de l'autre, quant à la rotation, par la traverse 40, ω mesure la vitesse d'avance angulaire du disque à tailler. Elle dépend, par ε , de la composition de l'équipage 43-44 porté par la tête de cheval du mouvement hélicoïdal. En désignant par ε_1 la raison de ce dernier, on a

$$\varepsilon = \pm \frac{B \times \varepsilon_1 \times G \times L}{S \times H \times M \times N}$$

B, G, H, L, M, N et S représentant les nombres de dents respectifs des roues 34, 45, 46, 47, 48, 29, 56 (cette dernière est la roue qui, intérieure à la boîte 51, reçoit son mouvement de l'une des roues 35 et le communique à la tête de cheval). On suppose de plus que la vis 30 est à un seul filet. Si, par exemple,

$B = 20$ $G = H = 17$ $L = M = 16$ $N = 100$ et $S = 30$, il vient

$$\varepsilon = \pm \frac{20 \varepsilon_1}{3000} = \pm \frac{\varepsilon_1}{150}$$

d'où, en portant dans la formule (1) et en considérant seulement le signe + du second membre (*)

$$\omega = \frac{-\omega_o \frac{\varepsilon_1}{150}}{-\frac{\varepsilon_1}{150} - 1} = \frac{\omega_o \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 150} \quad (2)$$

Cette expression montre que si $\varepsilon_1 > 0$, c'est-à-dire si l'équipage porté par la tête de cheval du mouvement hélicoïdal renferme un nombre impair d'axes, ω et ω_o sont de même signe, de sorte que la broche et la roue 34 tournent dans le même sens. Si au contraire $\varepsilon_1 < 0$, ω et ω_o sont tantôt de même signe, tantôt de signes contraires, suivant que $\varepsilon_1 + 150$ est $<$ ou $>$ 0.

2° *Calcul de la vitesse d'avance rectiligne de la broche.*

Les roues 34-35 constituent un train épicycloïdal dont la boîte 51 est encore le châssis. En désignant par ω_1 la vitesse angulaire absolue de la roue 35, considérée comme la dernière du système, et par C son nombre de dents, il vient, d'après la formule de Willis :

$$-\frac{B}{C} = \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_o - \omega}$$

ou, si $B = 20$ et $C = 30$

$$-\frac{2}{3} = \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_o - \omega}$$

En résolvant par rapport à ω_1 , on trouve

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{5\omega - 2\omega_o}{3} = \frac{5\omega_o \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 150} - 2\omega_o \\ &= \frac{\omega_o (\varepsilon_1 - 100)}{\varepsilon_1 + 150} \end{aligned}$$

La vitesse d'avance horizontale de la broche est donc, en fonction du pas commun P des vis 36 et 37

$$V = \frac{P\omega_1}{2\pi} = \frac{P\omega_o (\varepsilon_1 - 100)}{2\pi (\varepsilon_1 + 150)}$$

Si $\varepsilon_1 > 0$, la valeur de V fournie par cette formule est généralement négative, (ε_1 étant le plus souvent inférieur à 100) ; nous lui substituerons sa valeur absolue

$$\text{val. abs. } V = \frac{P\omega_o (100 - \varepsilon_1)}{2\pi (\varepsilon_1 + 150)} \quad (3)$$

3° *Calcul de l'équipage à fixer sur la tête de cheval du mouvement hélicoïdal pour tailler une roue dont les dents font avec l'axe un angle α .*

On doit avoir

$$V = \omega R \cotg \alpha$$

(*) Le signe de ε dépend du sens des filets sur les roues hélicoïdales 45-46. Chaque machine est pourvue d'un double jeu de ces roues, avec des inclinaisons contraires. Nous ferons les calculs dans la seule hypothèse indiquée; la marche à suivre, si $\varepsilon_1 < 0$, est absolument analogue.

R désignant le rayon primitif du disque à tailler. En remplaçant V et ω par leurs valeurs (2) et (3), il vient

$$\frac{P\omega_0(100 - \varepsilon_1)}{2\pi(\varepsilon_1 + 150)} = R \cotg \alpha \times \frac{\omega_0 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 150}$$

d'où

$$\varepsilon_1 = \frac{100 P}{P + 2\pi R \cotg \alpha}$$

Afin d'éliminer le nombre incommensurable π , on a donné au pas des vis 36 et 37 la valeur

$$P = 3\pi = 9 \text{ m/m } 425.$$

Il reste, dans ces conditions

$$\varepsilon_1 = \frac{300}{3 + 2R \cotg \alpha}$$

R devra être exprimé en millimètres. Si, par exemple, $R = 60$ millimètres et $\alpha = 45^\circ$, on trouve

$$\varepsilon_1 = \frac{300}{3 + 2 \times 60} = \frac{300}{123} = \frac{100}{41}$$

Il suffit de placer sur la tête de cheval du mouvement hélicoïdal une menante de 100 dents (qui prend la place de la roue 43) et une menée de 41 dents (calée, à l'extrémité de l'arbre 55, à la place de la roue 44), réunies par une roue parasite quelconque 59. La vitesse d'avance angulaire de la broche sera, d'après la formule (2)

$$\omega = \frac{\omega_0 \times \frac{100}{41}}{\frac{100}{41} + 150} = \frac{2\omega_0}{125}$$

et sa vitesse d'avance linéaire, d'après la formule (3)

$$\text{val. abs. de } V = \frac{P\omega_0 \left(100 - \frac{100}{41}\right)}{2\pi \left(\frac{100}{41} + 150\right)} = \frac{24\omega_0}{25}$$

en millimètres par seconde.

Les flèches tracées sur la figure 672 indiquent les sens de ces divers mouvements. A gauche du support du mouvement hélicoïdal (fig. 668) se trouve un manchon d'embrayage 49 qui se manœuvre à la main ; suivant la position qu'on lui donne, il permet l'entraînement de l'arbre 52 et de tout le mécanisme du mouvement hélicoïdal, ou interrompt au contraire la liaison entre cet arbre et le système 31-32-33, qui peut continuer à tourner pendant que l'ouvrier, avec la manivelle placée sur le bout 50, ramène la broche à son point de départ pour le taillage d'une nouvelle dent. Le mécanisme diviseur fonctionne de la même manière,

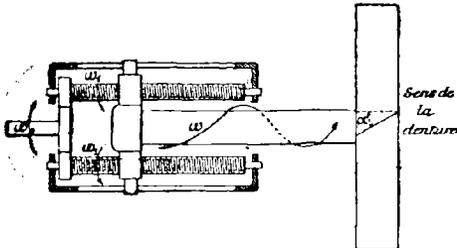


Fig. 672.

qu'il s'agisse d'une roue droite ou d'une roue hélicoïdale.

§ III. — *Taillage des roues cylindriques, droites ou hélicoïdales, par engrenement.*

609. Dans les automobiles, et, en général, dans toutes les machines tournant à grande vitesse, il est nécessaire, pour obtenir une marche silencieuse, que la division des engrenages soit rigoureuse, et la forme des dents théoriquement exacte. Ces conditions ne sont qu'imparfaitement remplies dans le taillage des roues à la fraise par le procédé dont les principes ont été exposés aux paragraphes 601 et 602, pour les raisons suivantes :

1^o Lorsqu'on utilise les séries de 8 ou 14 fraises par module, chaque fraise est employée pour plusieurs nombres de dents différents ; les profils théoriques ne sont réalisés que pour le nombre de dents minimum, et toutes les autres roues taillées avec la même fraise ont des profils approchés ;

2^o Après chaque passe de l'outil, il faut faire tourner le disque à tailler d'une quantité égale au pas ; on conçoit que la moindre irrégularité dans l'appareil diviseur, le plus petit jeu dans ses organes, se répercutent sur la division de la roue, et nuisent à son exactitude.

Toutes les fois qu'on veut obtenir des roues précises, on remédie au premier inconvénient en employant une fraise spéciale pour chaque nombre de dents ; mais le second subsiste dans les machines les plus parfaites. Tous deux sont complètement évités lorsque les roues sont taillées par engrenement, au moyen d'une roue-mère servant d'outil.

Ce nouveau procédé de taillage repose sur l'observation suivante, tirée de l'étude des tracés pour assortiments :

Des roues de même module, tracées toutes à profils épicycloïdaux ou toutes à profils de développantes, engrenent toujours entre elles, quels que soient leurs nombres de dents, pourvu que leurs longueurs de faces et de flancs soient les mêmes, et qu'elles aient été établies avec des cercles générateurs identiques, ou avec une inclinaison uniforme de la génératrice des développantes sur la ligne des centres.

Il résulte de là que, si l'on emploie comme outil une roue déjà construite, placée à la même distance du disque à tailler que si elle engrenait avec lui, et si l'on communique aux deux pièces des mouvements tels que leur mouvement relatif soit identique à celui qu'elles auraient en se menant directement, les dents de l'outil détermineront dans la masse du disque les profils mathématiquement exacts. Dans la pratique, on applique cette observation de deux façons différentes.

610. **Construction des engrenages cylindriques droits par l'emploi d'une roue-mère. — Principe de la machine de Fellow.**

Dans la machine de Fellow, la roue-outil A et le disque à tailler B (fig. 673) sont montés sur des axes verticaux Z et Z', commandés par des équipages de roues dentées qui les font tourner avec des vitesses angulaires inversement proportionnelles aux nombres de dents de la roue à construire et de l'outil. L'arbre Z' est porté par un chariot qui permet de le placer à des distances variables de l'arbre Z, et qui peut recevoir un mouvement d'avance rectiligne vers Z. Enfin, l'arbre Z' reçoit un mouvement rectiligne alternatif dans sa propre direction ; pendant la course ascendante, les dents de la roue-outil agissent sur la masse du disque comme le burin d'un étai-limeur, et s'en écartent pendant la course descendante. La position du chariot est d'abord réglée de telle sorte que les dents de l'outil affleurent la surface extérieure du disque à

tailler; les axes sont alors dans les positions Z et Z_1 . On communique ensuite à l'outil son mouvement rectiligne alternatif, et au chariot son mouvement d'avance vers Z . Cette période préparatoire dure jusqu'à ce que l'axe Z_1 soit venu occuper la position Z , dont la distance à Z est égale à la somme des rayons primitifs de la roue-mère et de la roue à tailler, A ce moment, on supprime le mouvement d'avance du chariot, et l'on donne aux deux arbres leurs mouvements de rotation simultanés. Ceux-ci s'effectuent d'une façon intermittente, seulement pendant la course descendante de l'outil, de sorte que, pendant la course ascendante, le disque B reste immobile, et la roue-mère n'a que son mouvement rectiligne. Dans ces conditions, les profils taillés dans la matière du disque sont les enveloppes de ceux de l'outil; la roue est terminée quand son arbre Z a fait un tour complet (*).

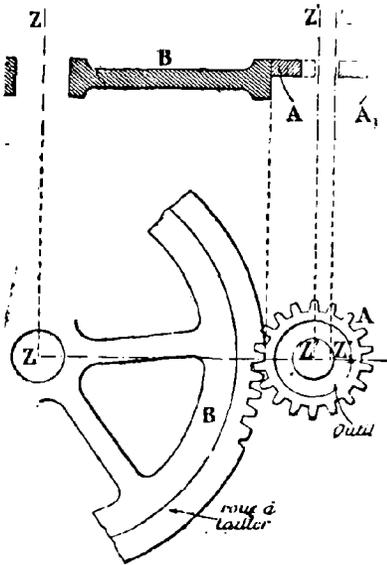


Fig. 673.

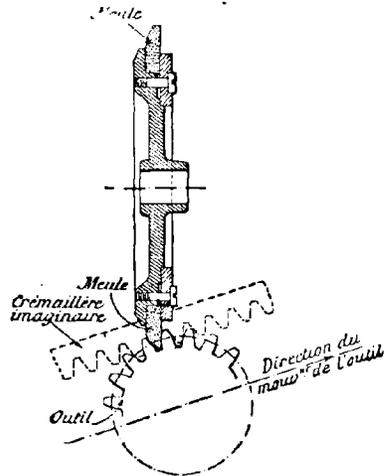


Fig. 674.

L'exactitude des profils réalisés sur la roue à tailler dépend de celle des profils de la roue-mère. Si l'on adopte le tracé par épicycloïdes, la construction de l'outil nécessite l'emploi d'un gabarit et d'une machine à reproduire, car il n'existe aucune roue, dans ce tracé, dont le profil ne soit pas épicycloïdal, au moins en partie. Cet inconvénient, qui est une cause d'erreur, disparaît si l'on adopte le tracé par développantes. Dans ce cas, en effet, la crémaillère, dont les profils sont entièrement rectilignes, peut être construite avec une exactitude absolue, et si on l'emploie au taillage de la roue-mère, celle-ci recevra des profils en développante mathématiquement exacts. On procède pour cela de la façon suivante.

Une dent de la crémaillère est constituée par une meule d'émeri (fig. 674) dont une face a été rendue parfaitement plane. Pour faire comprendre l'action de cette meule, on a représenté en pointillé le reste de la crémaillère imaginaire qu'elle remplace. La roue-mère est présentée à la meule et reçoit d'abord un mouvement d'avance rectiligne jusqu'à ce que son cercle primitif soit tangent à la ligne primitive de la crémaillère imaginaire. A ce moment, on fait rouler la roue-outil sur la ligne primitive de la

(*) Pour une description complète de machine Fellow, consulter le *Mechanical Engineer* (18 août 1900).

crémaillère, de manière à réaliser le mouvement relatif étudié au paragraphe 311. Ce résultat est obtenu par l'emploi de lames d'acier, qui entourent un disque solidaire de la roue-outil, et de même diamètre que son cylindre primitif. La rotation continue de la meule ayant pour effet d'user la matière suivant la courbe enveloppe du profil de la crémaillère imaginaire, la forme en développante des dents de l'outil est réalisée rigoureusement sur l'une des faces. On retourne ensuite l'outil, et la face opposée de ses dents est rectifiée à son tour.

On peut donner aux dents de la roue-mère du dégagement pour faciliter la coupe ; il suffit, pour cela, de lui donner une forme générale cylindro-conique (fig. 675) en inclinant son axe sur le plan de la figure 674. Dans ces conditions, en effet, les dents de l'outil s'amincissent graduellement, mais chacune des sections droites de la roue-mère présente des profils enveloppes de ceux de la crémaillère imaginaire, et peut engrener avec un engrenage à développantes de même pas. Les roues taillées resteront donc les mêmes quelle que soit la section prise comme outil ; cette observation permet d'affûter la roue-mère sur le devant, comme une fraise à denture dégagée.

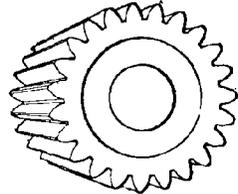


Fig. 675.

La machine de Fellow peut être employée au taillage des engrenages intérieurs.

611. Emploi d'une fraise-mère en forme de vis sans fin.

Dans ce second mode d'application du principe énoncé au paragraphe 609, on emploie comme engrenage-outil une crémaillère à développantes ; mais comme il serait impossible de lui communiquer, pendant le taillage du disque, un mouvement de translation continu, on lui substitue en pratique une vis sans fin, reproduisant dans chaque plan méridien le profil de la crémaillère, et creusée de cannelures pour la rendre tranchante. Les parties conservées des filets sont dégagées d'après les mêmes principes que les fraises à profil constant. Un mouvement de rotation continu, donné à la fraise-mère, produit le même effet que le mouvement de translation continu, impossible à réaliser, que devrait recevoir la crémaillère idéale qu'elle remplace. Nous étudierons le mode d'emploi de ces fraises hélicoïdales au paragraphe 613.

612. Avantages que présente le taillage des roues par engrenement.

Outre les avantages déjà signalés, le taillage des roues par engrenement possède encore les suivants :

1° La forme des dents de la fraise-mère est très simple, puisque les sections méridiennes sont à profils rectilignes. Il est donc plus facile de les établir exactement que des fraises ordinaires à profils constants, dont les sections méridiennes sont des développantes ;

2° Le mécanisme diviseur est supprimé. La division, qui résulte du mouvement relatif du disque à tailler et de la fraise-mère, s'effectue d'elle-même. Les dents ne sont pas, en effet, finies une par une, mais taillées graduellement sur toute la périphérie du disque ;

3° Une seule fraise-mère taille toutes les roues d'un même module, et remplace un jeu de 8 (ou 14) fraises ordinaires, tout en étant d'un prix de revient moins élevé.

613. Position de la fraise. — Relations entre sa vitesse angulaire et celle du disque à tailler.

Les positions des axes de la fraise et du disque sont réglées de telle sorte :

1° Que leur plus courte distance soit égale à la somme des rayons extérieurs diminuée de la profondeur du fraisage (2 modules $1/6$) ;

2° Que la tangente à l'hélice déterminée par les filets de la fraise-mère sur son cylindre primitif soit parallèle à la direction des dents de la roue à construire (fig. 676 et 677). Si l'on désigne par α et i les inclinaisons des filets de la roue et de la fraise sur leurs axes respectifs, ceux-ci font un angle égal à $i - \alpha$ ou à $i + \alpha$ suivant que, sur les deux pièces, les dents sont de même sens ou de sens contraires.

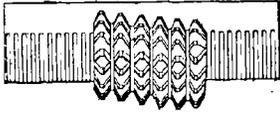


Fig. 676. — Position de la fraise (roues droites).

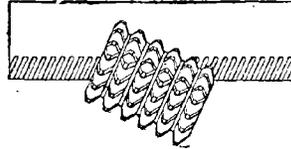


Fig. 677. — Position de la fraise (roues hélicoïdales).

Qu'il s'agisse de roues droites ou de roues à denture hélicoïdale, la fraise reçoit, outre un mouvement de vitesse angulaire ω' autour de son axe, une avance linéaire de vitesse V , parallèle à l'axe du disque. Nous nous proposons de chercher la relation qui doit exister, dans les différents cas, entre ces quantités, la vitesse de rotation ω du disque, son rayon R et le nombre de dents n qu'il faut exécuter.

a) *Taillage des roues droites.*

Considérons l'instant où la plus courte distance des axes Z et Z' se trouve dans le plan de section droite AB du disque à tailler (fig. 678), et supprimons provisoirement le mouvement d'avance linéaire de la fraise. Les profils du disque dans le plan AB forment avec la fraise un engrenage de pignon et vis sans fin entre axes obliques (380) dans lequel le rapport des vitesses angulaires est

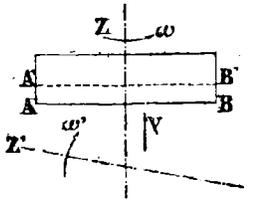


Fig. 678.

d'où

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{1}$$

$$\omega' = n\omega \quad (1)$$

Cette relation subsiste quand on imprime à la fraise et au plan AB , parallèlement à l'axe Z , un mouvement de translation de vitesse V . L'action de l'outil étant ainsi transportée successivement dans tous les plans de section droite du disque, les surfaces exécutées sont les lieux géométriques des profils dans le plan AB , déplacés parallèlement à Z , et forment des dents droites.

b) *Taillage des roues hélicoïdales.*

Lorsqu'on supprime le mouvement d'avance de la fraise, son engrenement avec une section droite AB du disque à tailler nécessite, comme ci-dessus, que la relation (1) soit vérifiée. Le disque doit donc recevoir un premier mouvement de rotation, de vitesse angulaire $\omega_1 = \frac{\omega'}{n}$, dans le sens f_1 où la vis entraînerait la roue hélicoïdale supposée construite (fig. 679). Mais cela n'est pas suffisant. Imprimons en effet, à la fraise et à la section AB , un mouvement de translation de vitesse V , parallèle à l'axe Z , et considérons les positions qu'elles occupent après n tours de la fraise. Si le disque n'avait que le mouvement de rotation de vitesse angulaire ω_1 , le point de la section AB actuellement en contact avec la fraise en C aurait fait à ce moment

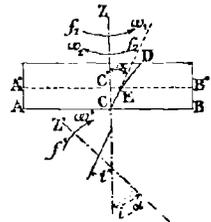


Fig. 679.

un tour complet, et occuperait une position telle que C', où l'action de l'outil recommencerait à se produire. Comme cette action doit avoir lieu au point E de l'hélice CD, il a fallu communiquer au disque un mouvement de rotation supplémentaire de vitesse ω_2 , dont le sens f_2 est, dans le cas de la figure, opposé à celui du mouvement principal ω_1 . En désignant par t la durée de n tours de fraise, on a

$$\begin{cases} CC' = Vt \\ C'E = \omega_2 Rt \end{cases}$$

Mais $C'E = CC' \operatorname{tg} \alpha$.

Par conséquent $\omega_2 = \frac{V \operatorname{tg} \alpha}{R}$

La vitesse angulaire du mouvement définitif du disque autour de son axe est donc

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega'}{n} - \frac{V \operatorname{tg} \alpha}{R}$$

d'où l'on tire

$$\omega' = n\omega + \frac{nV \operatorname{tg} \alpha}{R} \quad (2)$$

Si, toutes choses égales d'ailleurs, le sens de l'hélice CD était contraire du sens des hélices de la fraise, il faudrait changer le signe de ω_2 , et l'on aurait

$$\omega' = n\omega - \frac{nV \operatorname{tg} \alpha}{R}$$

Ce résultat pouvant être obtenu par un changement de signe de $\operatorname{tg} \alpha$, il suffit, pour rendre la relation (2) générale, de considérer α comme positif quand les filets de la roue sont inclinés dans le même sens que ceux de la fraise, et comme négatif dans le cas contraire.

614. Remarques. — 1° Les formules (1) et (2) deviennent identiques quand $V = 0$. Il doit bien en être ainsi, car la section déterminée dans la roue par le plan de section droite qui contient la plus courte distance des axes ZZ' fonctionne alors avec la fraise comme un engrenage hélicoïdal, dans lequel les vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux nombres de dents.

2° Les formules sont encore identiques quand $\alpha = 0$ (roues droites).

3° On a obtenu la relation (2) en donnant au disque le mouvement d'avance circulaire $\omega_2 = \frac{V \operatorname{tg} \alpha}{R}$. Comme le mouvement relatif des deux pièces importe seul, on peut aussi, dans la pratique, laisser au disque le même mouvement que dans le tailage d'une roue droite, et communiquer à la fraise un mouvement de rotation additionnel de vitesse angulaire $\frac{nV \operatorname{tg} \alpha}{R}$.

4° La roue construite et la fraise-mère sont du même module normal, soit m .

Le pas H de la fraise-mère, mesuré parallèlement à l'axe, l'inclinaison i de ses filets et le module m sont liés (369) par l'équation

$$H = \frac{m\pi}{\sin i}$$

§ IV. — *Machine à tailler les engrenages droits ou hélicoïdaux par engrènement construite par MM. Biernatzki et C^{ie}, de Chemnitz.*

615. **Commande du disque à tailler.**

Un arbre horizontal 3 reçoit, par les poulies étagées 1 et 2 (fig. 680-681-682), un mouvement de rotation continu, qui est transmis de la façon suivante au disque *b*, solidement fixé sur un plateau solidaire d'un arbre 4 parallèle au précédent. Sur l'arbre 3 est calée la première roue 5 d'un équipage formé d'un certain nombre de roues droites de rechange 5-6-7-8, et de deux roues d'angle égales 9 et 10. Les roues 6 et 7 sont portées par une tête de cheval. La dernière roue conique 10 commande, par l'arbre vertical 11 et la vis 12, la grande roue hélicoïdale 13 solidaire de la broche 4. Le disque à fraiser reçoit ainsi un mouvement de rotation, dont la vitesse angulaire ω dépend de celle de l'arbre moteur, et des nombres de dents des diverses roues du système.

Soient *A* le nombre de dents de 13, ϵ la raison de l'équipage 5-6-7-8, *N* le nombre de tours de l'arbre 3 par minute; en supposant que la vis 12 n'ait qu'un filet, on a, les roues 9 et 10 étant égales :

$$\frac{\omega}{\left(\frac{\pi N}{30}\right)} = \frac{\text{roue 5} \times \text{roue 7} \times \text{roue 9} \times \text{vis 12}}{\text{roue 6} \times \text{roue 8} \times \text{roue 10} \times \text{roue 13}} = \frac{\epsilon}{A}$$

d'où $\omega = \frac{\pi N \epsilon}{30 A}$ (3)

La broche est supportée par un chariot à coulisses verticales, ce qui permet de l'approcher ou de l'éloigner de la fraise suivant le diamètre des roues à tailler.

616. **Disposition et commande de la fraise.**

La fraise *a* est calée à une extrémité de l'arbre horizontal 22 (fig. 680-681-683), porté par une poupée 40, solidaire du plateau 39 mobile autour de l'axe vertical 41. Les paliers de ce dernier font corps avec le chariot à coulisses 38, qui peut se mouvoir parallèlement à l'arbre 4, en entraînant tout le mécanisme fraiseur. D'après ce qui précède (613), l'outil doit recevoir :

1° Un mouvement de rotation de vitesse angulaire $n\omega$, proportionnelle à celle de la roue à construire et à son nombre de dents ;

2° Un mouvement de rotation additionnel, de vitesse angulaire $\frac{n V \operatorname{tg} \alpha}{R}$, qui dépend de l'inclinaison des dents sur les génératrices du disque *b*. Ces deux mouvements se composent en un seul, de vitesse angulaire

$$\omega' = n\omega + \frac{n V \operatorname{tg} \alpha}{R}.$$

3° Un mouvement d'avance linéaire, de vitesse *V*, parallèle à la broche 4.

A cet effet, l'arbre moteur est partagé en deux segments 3 et 14, dont le second est relié au premier par un mécanisme différentiel qui permet de réaliser à la fois les deux mouvements de rotation que la fraise doit recevoir dans le taillage des roues hélicoïdales. Un manchon 23 (fig. 681), calé à l'extrémité de l'arbre 14, supporte un petit axe 24 autour duquel tourne librement la roue conique 25. Cette dernière relie deux roues coniques égales 26 et 27; la première est solidaire de l'arbre 3, et la se-

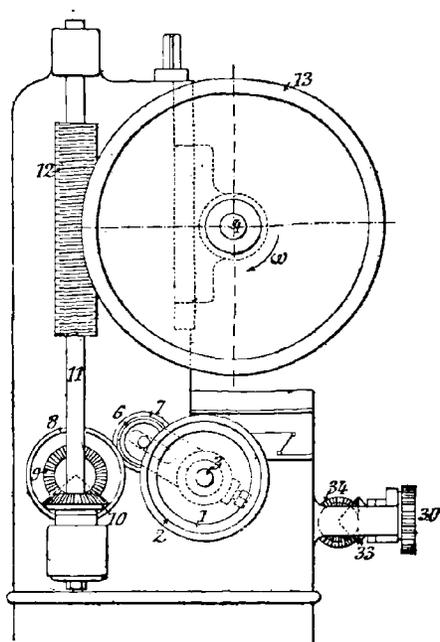


Fig. 682.

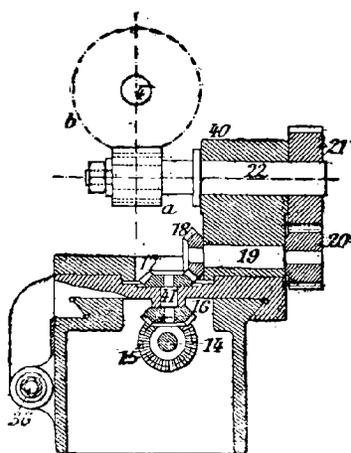


Fig. 683.

conde d'une roue hélicoïdale 28, folle comme elle sur l'arbre 14. Enfin, un train d'engrenages, formé des deux paires de roues coniques 15-16, 17-18, et d'une paire de roues droites 20-21 (fig. 680-681-683), relie l'arbre 14 à l'arbre 22 de la fraise, par l'intermédiaire des axes 41 et 19 portés, le premier par le chariot 38, et le second par la poupée 40.

Suivant que la roue à tailler est droite ou hélicoïdale, le système 27-28 reste complètement immobile ou bien est animé d'un mouvement de rotation qui se transmet à la fraise, et que l'on calcule de manière à donner aux dents l'inclinaison voulue. A cet effet, la roue hélicoïdale 28 engrène avec une vis tangente 29, commandée par un arbre 35, auquel la relie les roues d'angle 33-34 et les roues cylindriques de rechange 30-31-32 (fig. 681). L'engrenage 28-29 n'est pas réversible; la vis conduit la roue sans réciprocité. L'arbre 35, fileté sur une certaine étendue, s'engage dans l'écrou 37 solidaire du chariot 38, et produit ainsi le mouvement d'avance de la fraise. Pour que celle-ci, malgré son déplacement rectiligne, ne cesse pas d'être commandée par le système de roues 15-16-17-18-20-21, la roue 15 est calée à rainure sur l'arbre 14, dont elle reste solidaire quant au mouvement de rotation, tout en participant au mouvement de translation du chariot. Enfin, grâce à la mobilité de tout le mécanisme fraiseur autour de l'axe 41 des roues 16-17, on peut incliner d'une façon quelconque l'axe de l'outil sur l'axe du disque, sans toucher à l'équipage 15-16 . . . 21 qui le commande.

En désignant par N' le nombre de tours que fait la vis 35 par minute, et par H son pas, la vitesse d'avance du mécanisme fraiseur est, par seconde,

$$V = \frac{N'H}{60}$$

617. Emploi de la machine dans la construction des roues cylindriques droites.

a) Calcul de la vitesse angulaire de la fraise.

La pièce à fraiser b étant calée à l'extrémité de la broche, le plateau 39 est tourné de telle façon que l'angle des axes 4 et 22 soit égal à l'inclinaison i des filets de la fraise (613). Les roues de rechange 30-31-32 sont enlevées, ce qui immobilise la vis 29, et par suite le système 27-28. Le groupe de roues 25-26-27 constitue un train épicycloïdal, dont le châssis est formé par le manchon 23 solidaire de l'arbre 14, et dans lequel on peut regarder 26 comme roue initiale. En désignant par ω_0 sa vitesse angulaire, et par ω_1 celle de l'arbre 14, on a, d'après la formule de Willis, les roues 26 et 27 étant égales, et la dernière restant fixe

$$-1 = \frac{-\omega_1}{\omega_0 - \omega_1}$$

d'où

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2}$$

Mais ω_0 est la vitesse angulaire de l'arbre moteur 3, égale à $\frac{\pi N}{30}$ (la seconde étant prise pour unité de temps) en fonction du nombre de tours qu'il effectue par minute. Par conséquent

$$\omega_1 = \frac{\pi N}{60}$$

La vitesse angulaire ω' de la fraise est donnée par la relation

$$\frac{\omega'}{\omega_1} = \frac{\text{roue 15} \times \text{roue 17} \times \text{roue 20}}{\text{roue 16} \times \text{roue 18} \times \text{roue 21}}$$

En supposant que chacun des couples de renvoi 15-16 et 17-18 soit composé de roues égales, et en désignant par B et C les nombres de dents respectifs des roues 20 et 21, il reste

$$\omega' = \omega_1 \times \frac{B}{C} \quad (4)$$

ou

$$\omega' = \frac{\pi N}{60} \times \frac{B}{C} \quad (5)$$

b) *Calcul de l'équipage 5-6-7-8, en fonction du nombre de dents de la roue à construire.*

Les vitesses angulaires de la broche et de la fraise sont respectivement

$$\omega = \frac{\pi N \varepsilon}{30 A} \quad (3)$$

$$\omega' = \frac{\pi N}{60} \times \frac{B}{C} \quad (5)$$

La relation $\omega' = n\omega$ qui doit exister entre elles donne

$$\frac{B}{C} = \frac{2 n \varepsilon}{A}$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{AB}{2 n C} \quad (6)$$

Si, par exemple, on veut construire une roue de 50 dents, on a, en supposant

$$A = 180, \quad B = 30, \quad C = 40$$

$$\varepsilon = \frac{180 \times 30}{2 \times 50 \times 40} = \frac{9 \times 3}{5 \times 4} = \frac{45 \times 30}{25 \times 40}$$

ce qui conduit à donner aux roues 5-6-7-8 les nombres de dents respectifs

(roue 5)	(roue 6)	(roue 7)	(roue 8)
45 dents	25 dents	30 dents	40 dents

613. Emploi de la machine dans la construction des roues hélicoïdales.

a) *Calcul de la vitesse angulaire de la fraise.*

L'inclinaison des dents à construire sur les génératrices du disque b étant α , on oriente d'abord le plateau 39 de telle manière que l'angle des axes 4 et 22 soit égal à $i - \alpha$ ou à $i + \alpha$, suivant que les filets de la fraise et ceux du disque sont de même sens ou de sens contraires (613). On commande la vis 29 par un équipage 32-31-30 convenablement déterminé, dont nous désignerons la raison par ε' . Les roues 27 et 28 reçoivent ainsi un mouvement dont la vitesse angulaire ω_m est donnée par la relation

$$\frac{\omega_m}{\left(\frac{\pi N'}{30}\right)} = \frac{\text{roue 34} \times \text{roue 32} \times \text{roue 31} \times \text{vis 29}}{\text{roue 33} \times \text{roue 31} \times \text{roue 30} \times \text{roue 28}}$$

ou, en supposant que les roues 33 et 34 soient égales, et que la vis 29 n'ait qu'un filet

$$\frac{\omega_m}{\left(\frac{\pi N'}{30}\right)} = \frac{\text{roue 32}}{\text{roue 30} \times \text{roue 28}} = \frac{\varepsilon'}{\text{roue 28}}$$

On tire de cette proportion, D représentant le nombre de dents de la roue 28

$$\omega_m = \frac{\pi N'}{30} \times \frac{\varepsilon'}{D} \quad (7)$$

La formule de Willis, appliquée au train épicycloïdal 26-25-27, donne, avec les mêmes notations qu'au paragraphe précédent

$$-1 = \frac{\omega_m - \omega_1}{\omega_o - \omega_1}$$

et par suite

$$\omega_1 = \frac{\omega_o + \omega_m}{2}$$

La vitesse angulaire de la fraise est donc, d'après la formule (4)

$$\omega' = \omega_1 \times \frac{B}{C} = \frac{\omega_o + \omega_m}{2} \times \frac{B}{C}$$

ou, en remplaçant ω_o et ω_m par leurs valeurs

$$\begin{aligned} \omega' &= \left(\frac{\pi N}{60} + \frac{\pi N'}{60} \times \frac{\varepsilon'}{D} \right) \times \frac{B}{C} \\ &= \frac{\pi}{60} \times \frac{B}{C} \left(N + \frac{N' \varepsilon'}{D} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

b) *Calcul de l'équipage 32-31-30, en fonction de l'inclinaison et du nombre des dents de la roue à construire.*

La relation $\omega' = n \omega + \frac{n V \operatorname{tg} \alpha}{R}$ (2)

qui doit exister entre les vitesses du disque b et de la fraise (613) devient, après substitution

$$\frac{\pi}{60} \times \frac{B}{C} \left(N + \frac{N' \varepsilon'}{D} \right) = \frac{n \pi N \varepsilon}{30 A} + \frac{n N' H' \operatorname{tg} \alpha}{60 R}$$

On donne à la pièce le même mouvement que dans le taillage d'une roue droite; la raison ε étant dès lors donnée par la formule (6) déjà établie, il reste

$$\frac{\pi}{60} \times \frac{B}{C} \left(N + \frac{N' \varepsilon'}{D} \right) = \frac{n \pi N}{30 A} \times \frac{AB}{2 n C} + \frac{n N' H' \operatorname{tg} \alpha}{60 R}$$

ou, en simplifiant

$$\frac{\pi B \varepsilon'}{CD} = \frac{n H' \operatorname{tg} \alpha}{R}$$

Cette équation détermine la raison

$$\varepsilon' = \frac{n H'CD \operatorname{tg} \alpha}{\pi RB}$$

de l'équipage 32-31-30 à intercaler pour la commande de la vis 29. Rappelons que l'angle α doit être considéré comme positif ou négatif, suivant que les filets de la roue à tailler sont inclinés comme ceux de la fraise, ou bien en sens contraire. Si, par exemple, $n = 50$, $R = 120$, $\alpha = 45^\circ$, $B = 30$, $C = 40$, $D = 30$, $P' = 2\pi$, on trouve

$$\varepsilon' = \frac{50 \times 2\pi \times 40 \times 30 \times 1}{\pi \times 120 \times 30} = \frac{100}{3} = \frac{100 \times 75}{15 \times 15}$$

ce qui conduit à former l'équipage par deux menantes ayant respectivement 100 et 75 dents associées à deux menées de 15 dents.

CHAPITRE XXVI

MACHINES A TAILLER LES ROUES CONIQUES

619. Les machines à tailler les engrenages coniques peuvent être divisées, d'après leur mode de travail, en deux groupes principaux, suivant qu'elles utilisent une fraise, ou qu'elles rabotent les surfaces des dents à la façon d'un étai-limeur.

L'emploi des fraises à profil constant ne donne pas des résultats bien rigoureux. Observons, en effet, que la forme des dents en un point M du cône primitif (fig. 684) étant, d'après le tracé de Tredgold, la même que pour une roue cylindrique construite sur un cercle de rayon égal à la génératrice MN du cône supplémentaire, leur courbure change avec la distance SM, ce qui est impossible à réaliser avec une fraise à profil invariable. De plus, la fraise doit recevoir un mouvement d'avance rectiligne, tel que celui de ses points qui est sur le cône primitif décrive la génératrice correspondante. Elle engendre ainsi une surface cylindrique, alors que, théoriquement, les creux doivent être constitués par des surfaces coniques de sommet S. Les erreurs qui résultent de ces deux causes sont d'autant moins sensibles que les dents sont plus courtes et plus nombreuses; mais, néanmoins, l'emploi de la fraise à profil n'est admissible que pour les engrenages coniques courants; il doit être rejeté lorsqu'il s'agit de transmissions à grande vitesse.

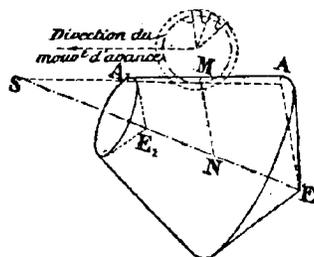


Fig. 684.

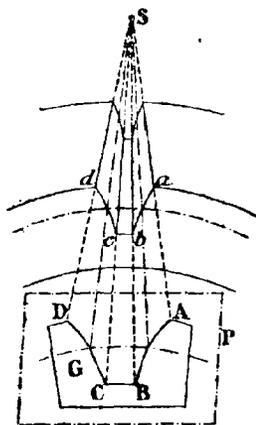


Fig. 685.

Les machines à raboter les engrenages coniques donnent toute la précision désirable. Pour en concevoir le principe, imaginons que le coulisseau d'un étai-limeur soit animé d'un mouvement alternatif sur une droite qui passe à tout instant par le sommet S du cône primitif de la roue (fig. 685). Si cette droite se déplace graduellement, de manière à dessiner sur le plan tangent au cône de tête extérieur le profil ab d'une dent, l'outil creuse évidemment, dans le bloc à tailler, une saignée conique de directrice ab , dont la surface est précisément celle qui, d'après le tracé de Tredgold, doit limiter un creux de la roue. On obtient habituellement ce résultat en fixant, dans un plan P parallèle au plan tangent du cône de tête, un gabarit G de forme identique à la section d'un creux par le plan P, et en faisant pivoter le châssis qui supporte le coulisseau autour du point S, de manière que la trajectoire de l'outil s'appuie constamment sur le contour ABCD. Dans certaines machines, on n'emploie pas de gabarit, et le pivotement du châssis est commandé par des dispositions cinématiques appropriées. Dans tous les cas, ce mouvement de pivotement est décomposé en deux rotations simulta-

nées, qui s'exécutent autour d'un axe vertical et d'un axe horizontal passant par le point S, et l'on peut indifféremment, soit les donner toutes deux à la même pièce, l'outil par exemple, le bloc à tailler restant fixe pendant l'exécution d'un profil, soit donner l'une au bloc et l'autre à l'outil. Nous décrirons ici une machine de chaque type :

- 1° La machine Gibson, avec gabarit reproducteur ;
- 2° La machine Smith et Coventry, sans gabarit reproducteur.

§ I. — *Machine Gibson, à raboter les roues coniques, avec reproducteur.*

620. Disposition du bloc à tailler (*).

Le bloc à tailler 1, préalablement tourné suivant le cône d'échanfrinement, est calé sur un mandrin 2, dont l'axe est mobile, dans un plan vertical, autour du point S avec lequel on fait coïncider le sommet du cône primitif de la roue. L'inclinaison de l'axe du mandrin sur le plan horizontal est mesurée par un quadrant gradué 4 ; lorsque l'angle indiqué est égal à la moitié de l'angle au sommet du cône primitif, l'une des génératrices situées dans le plan du quadrant est horizontale. On fixe alors le système au bâti de la machine. Le mandrin est solidaire d'une roue commandée par l'appareil diviseur 5, à l'aide duquel on fait tourner le bloc 1, d'une quantité égale au pas, pour tailler successivement toutes les dents.

621. Disposition de l'outil.

Le burin 18 est fixé dans un porte-outil 9, placé à l'extrémité du coulisseau 8. Pour que la trajectoire de l'arête taillante passe par le sommet du cône primitif, la position de l'outil doit être convenablement déterminée. Un système de vis de réglage, visible en 17 sur la figure 686, permet de le déplacer latéralement et en hauteur, jusqu'à ce que le résultat soit atteint.

Les glissières du coulisseau sont supportées par un châssis 7 qui, d'après ce qui précède, doit pouvoir tourner à la fois autour d'un axe vertical et d'un axe horizontal passant par S, puisque le bloc 1 reste immobile pendant le taillage d'une dent. A cet effet, le châssis est terminé par une fourche 7-7, dont les deux branches portent des tourillons situés dans le prolongement l'un de l'autre ; ces tourillons tournent dans des coussinets 33-33, fixés en des points diamétralement opposés d'un plateau circulaire horizontal 34, dont le centre est en S. Ce plateau forme sur son bord une saillie annulaire, qui s'engage dans une coulisse concentrique 35, solidaire du bâti de la machine. Grâce à cette disposition, le châssis est mobile à la fois autour de l'axe horizontal des coussinets 33 et de l'axe vertical du plateau 34. Par suite de son réglage préalable, l'outil ne cesse pas de décrire une droite passant par S, puisque sa trajectoire pivote autour de ce point en même temps que le châssis 7.

622. Guidage du châssis.

Une face du bâti est dressée suivant un plan vertical perpendiculaire à celui du quadrant 4 ; elle est donc parallèle au plan tangent mené au cône de tête extérieur de la roue, à l'extrémité A de la génératrice du cône primitif qui a été rendue horizontale, et peut recevoir le gabarit 11. Celui-ci est placé symétriquement par rapport au plan vertical du quadrant qui contient SA, et de telle manière que le prolongement de cette droite rencontre la circonférence primitive.

(*) Les figures 684 à 691 sont extraites de *Engineering* (mars 1897).

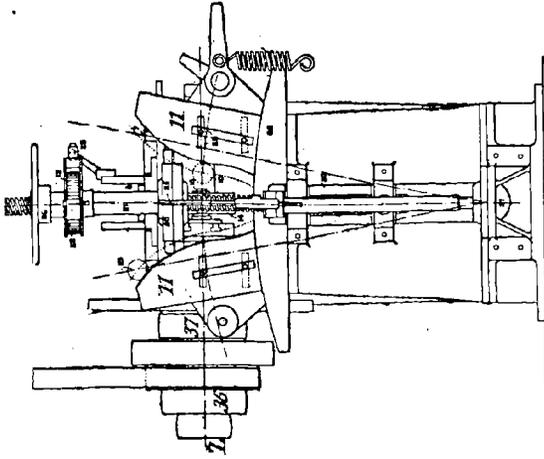


Fig. 688.

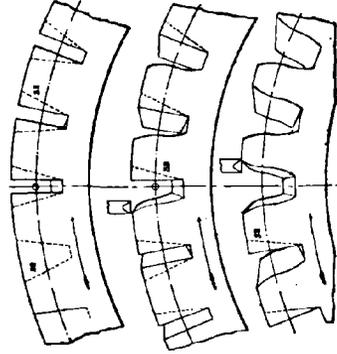


Fig. 689.

Fig. 690.

Fig. 691.

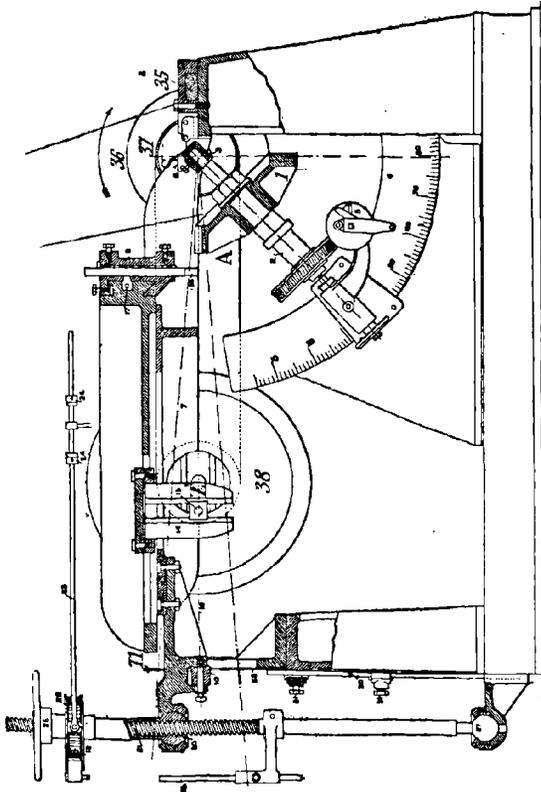


Fig. 686.

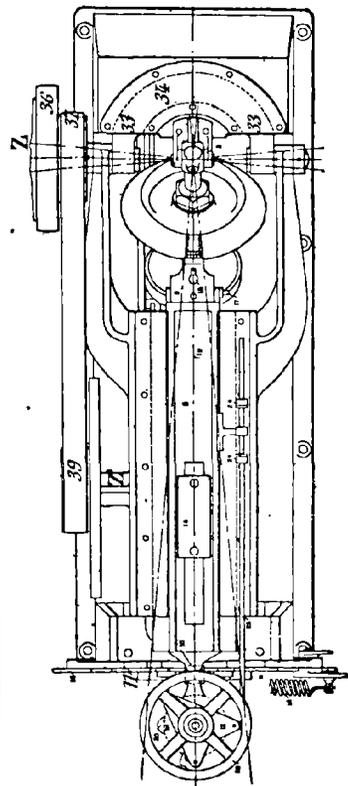


Fig. 687.

A l'opposé de la fourche 77, un prolongement du châssis porte une roulette ou *touche* cylindrique 10, qui s'appuie sur le contour du gabarit, et un joint sphérique 20 dans la sphère duquel pénètre la vis 21, dont une extrémité pivote dans un second joint sphérique 27, et dont l'autre est solidaire d'un petit volant 26 servant de manivelle. Un ressort à boudin 13, qui réunit l'extrémité du châssis à un point fixe du bâti de la machine, maintient, par son élasticité, la roulette en contact avec le gabarit. Il est évident que, si l'on tourne le volant 26, la touche parcourt le profil à reproduire, en entraînant avec elle tout le châssis ; les trajectoires successives de l'outil forment ainsi une surface conique, qui dessine sur le bloc 1 un creux limité par des courbes homothétiques à celles du gabarit, réduites dans le rapport $\frac{SA}{ST}$. Au lieu de commander les déplacements du châssis à la main par le volant 26, on peut caler sur la vis 21 une roue à rochet, que la machine fait mouvoir automatiquement.

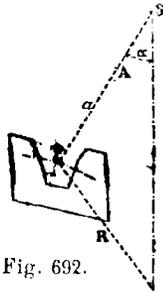


Fig. 692.

623. Commande du coulisseau.

Le mouvement est donné à la machine par les poulies étagées 36, solidaires d'une poulie 37, mobile comme elles sur un arbre Z porté par le plateau 34, et situé dans le prolongement de l'axe 33-33. Le châssis porte un arbre Z', parallèle au précédent, sur lequel sont calés un plateau-manivelle 38, et une poulie 39 réunie à 37 par une courroie. Le bouton 15 du plateau s'engage dans une coulisse 14, solidaire du coulisseau 8, ce qui constitue le mode de transmission de mouvement étudié au paragraphe 493. La course de l'outil est égale au diamètre de la circonférence décrite par le point 15 ; on peut la faire varier entre certaines limites, suivant l'épaisseur des jantes des roues à tailler, en éloignant plus ou moins le bouton du centre du plateau-manivelle.

Il faut observer que la distance des axes Z et Z' reste constante malgré la mobilité du châssis 7 ; celle du cône 36 à son cône menant varie au contraire, mais il n'en résulte aucun inconvénient, le déplacement angulaire du plateau 34 pendant le taillage d'un creux étant très petit.

624. Etablissement du gabarit.

Soient α le demi-angle au sommet du cône primitif, et a la distance ST du point S au plan du gabarit. En supposant que le cône primitif soit prolongé jusqu'en T, la longueur de la génératrice du cône de tête correspondant est $R = a \operatorname{tg} \alpha$. D'après le tracé de Tredgold, les profils des dents de la roue sur le plan du gabarit sont identiques à ceux d'un engrenage cylindrique de même module construit sur une circonférence primitive de rayon R. Toutefois, ces profils ne sont pas ceux du gabarit lui-même ; on doit leur substituer des courbes parallèles obtenues en traçant l'enveloppe d'une série de circonférences de même rayon que la touche, ayant pour centres les différents points du profil théorique.

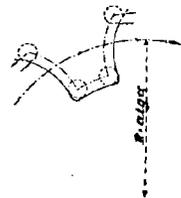


Fig. 693.

La longueur a étant constante pour chaque machine, on peut établir à l'avance un jeu de gabarits, donnant, pour les valeurs principales de α , les profils correspondants aux divers nombres de dents des roues que l'on aura à construire.

§ II. — *Machine Smith et Coventry,*
à raboter les engrenages coniques, sans gabarit.

625. Principe de la machine.

Avec les machines qui, comme la précédente, utilisent un gabarit, on peut tailler des roues coniques à profil quelconque. La machine construite par les ateliers Smith et Coventry s'applique exclusivement au tracé de Willis, par un seul arc de cercle (296). On sait que, dans cette méthode, le rayon $AH = r$ de l'arc qui constitue le profil d'une dent est $r = R \cos \theta$, R désignant le rayon primitif de la roue, et θ un angle théoriquement quelconque, mais qui, dans la pratique, doit être voisin de 75° . En appliquant ce résultat au cas d'un engrenage conique de demi-angle au sommet α , on trouve, pour rayon des profils à une distance $SA = a$ du sommet du cône primitif.

$$r = oA \cos \theta = a \operatorname{tg} \alpha \cos \theta$$

Le cas que l'on rencontre le plus fréquemment est celui de deux roues coniques égales engrenant ensemble. Le rayon des profils est alors, en faisant $\alpha = 45^\circ$

$$r = a \cos \theta$$

Dans un but de simplification, on donne à θ la valeur $75^\circ 1/2$, dont le cosinus est très approximativement égal à $1/4$ (0,25038 à moins de un cent-millième près); il reste alors

$$r = \frac{a}{4}$$

En supposant qu'un burin soit animé d'un mouvement rectiligne alternatif passant par le point S , toute la question revient donc à déplacer sa trajectoire de manière que

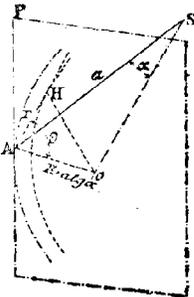


Fig. 694.

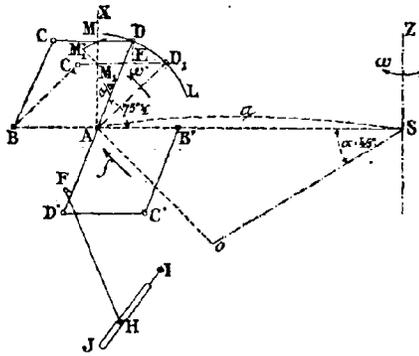


Fig. 695.

son point de rencontre avec un plan P perpendiculaire à la génératrice SA du cône primitif, à la distance a du sommet, trace dans ce plan un arc de cercle, dont le rayon $AH = \frac{a}{4}$ soit incliné de $75^\circ 1/2$ sur oA . Cette condition est réalisée de la façon suivante.

Considérons, dans le plan tangent au cône primitif le long de SA , un parallélogramme articulé $ABCD$ (fig. 695) dont les sommets A et B sont fixes sur SA , et dont les côtés AD et BC , égaux à $\frac{SA}{4}$, font avec SA , dans leur position moyenne, un angle

de $75^\circ 1/2$. Les déformations du système font parcourir au point D un arc de cercle L identique, d'après ce qui précède, à celui que l'on devrait tracer dans le plan oAX, perpendiculaire à SA, pour guider le mouvement de l'outil. Soit ABC_1D_1 une position du parallélogramme infiniment voisine de la première, et DE, D_1E les différences entre les coordonnées des points D et D_1 dans le système d'axes rectangulaires SAX. Imaginons que, pendant que le parallélogramme se meut de ABC_1D_1 en ABCD, le plan oAX glisse sur lui-même, parallèlement à oA, de la quantité D_1E . Le point M_1 , où il était tout d'abord rencontré par C_1D_1 , vient prendre, sur la parallèle à oA, une position M'_1 déterminée par la relation $M_1M'_1 = D_1E$. L'égalité évidente des triangles infinitésimaux DED_1 , $MM_1M'_1$ montre que, pendant le déplacement infiniment petit considéré, le côté CD du parallélogramme a dessiné dans le plan mobile oAX un arc de courbe superposable à DD_1 . Il s'en suit que, pour un déplacement fini du système, le lieu géométrique des points d'intersection de

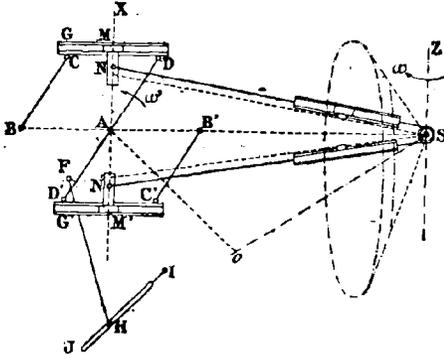


Fig. 696.

CD avec le plan oAX est, dans ce plan, un arc de cercle égal à L, dont le rayon moyen fait avec oA le même angle (de $75^\circ 1/2$) que AD forme, dans sa position moyenne, avec SA.

Supposons maintenant que le côté CD du parallélogramme soit constitué par une glissière G (fig. 696) dans laquelle se meut un coulisseau dont le centre coïncide avec le point M. Le raisonnement qui précède est applicable à tout point N invariablement relié au coulisseau, de sorte que si le support des glissières de l'outil, mobile autour du sommet S de la roue, est articulé en N, et si le plan oAX glisse sur lui-même comme il a été dit plus haut, le prolongement de la trajectoire de l'outil trace, dans ce plan, le profil d'une dent. Un autre parallélogramme, construit sur le prolongement AD' de AD, commande de la même manière le support d'un second outil, dont la trajectoire dessine, dans le plan oAX, le profil symétrique de la même dent.

Le mouvement du plan oAX est obtenu, mais seulement d'une façon approximative, en faisant tourner le bloc à tailler autour d'un axe SZ parallèle à AX. Il reste à chercher la relation qui doit exister entre la vitesse angulaire ω de cette rotation et celle du levier DAD', que nous désignerons par ω' . Soit dt le temps infiniment petit pendant lequel le système articulé passe de la position AD_1 à la position AD (fig. 695). Le déplacement linéaire du point A dans le mouvement de rotation du bloc est

$$\omega \times SA \, dt = \omega a \, dt = M_1M'_1 = D_1E = DD_1 \sin \widehat{EDD}_1$$

Celui du point D_1 est

$$\omega' \times AD \cdot dt = \omega' \frac{a}{4} \, dt = DD_1$$

On a donc

$$\omega a = \omega' \frac{a}{4} \sin \widehat{EDD}_1$$

d'où

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sin \widehat{EDD}_1}{4}$$

Ce rapport devrait donc varier à chaque instant ; mais, comme l'arc de cercle à

tracer est toujours de faible étendue, on peut se contenter de donner à l'angle EDD_1 la valeur $75^\circ 1/2$ qu'il prend dans la position moyenne du système. Il reste alors

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sin 75^\circ 1/2}{4} = \frac{0.968}{4}$$

soit sensiblement $\frac{1}{4}$.

Les propriétés du parallélogramme articulé subsistent quel que soit le demi-angle au sommet du cône primitif; mais le rayon du cercle tracé dans le plan oAX devant être alors

$$a \operatorname{tg} \alpha \cos \theta = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{4}$$

il serait nécessaire de donner aux côtés AD et AD' la longueur $a \operatorname{tg} \alpha$. On peut éviter cette modification, qui compliquerait la machine, en changeant simplement le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ des vitesses de rotation du disque et du levier DAD' . Supposons, en effet, que, pendant que ce dernier passe de AD_1 en AD (fig. 695), le glissement du plan oAX dans le sens oA soit

$$M_1M'_1 = k. D_1E$$

k représentant un facteur constant à déterminer. Le lieu géométrique du point M dans le plan oAX est alors un arc d'ellipse (*), dont les demi-axes, dirigés suivant AX et Ao , sont respectivement égaux à $\frac{a}{4}$ et $\frac{ka}{4}$. Suivant que k est supérieur ou inférieur à l'unité, l'axe correspondant à oA est le plus grand ou le plus petit. Dans le premier cas, le profil elliptique tracé dans le plan oAX est plus aplati, dans la région utile, que le cercle L_1 de rayon $\frac{a}{4}$, qui correspondrait à une valeur de α plus grande que 45° . Dans le second cas, au contraire, la courbure de l'arc d'ellipse est plus prononcée, et le profil tracé se rapproche suffisamment d'un arc de cercle de rayon moindre que $\frac{a}{4}$, qui correspondrait à une valeur de $\alpha < 45^\circ$.

pour lui être substitué en pratique. L'expression du rapport $\frac{\omega}{\omega'}$, obtenue comme précédemment, est

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{k \sin EDD_1}{4}$$

soit sensiblement $\frac{k}{4}$. On en tire

$$\omega' = \frac{4 \omega}{k}$$

Si l'on convient de donner, dans tous les cas, la même vitesse angulaire ω au bloc dans son mouvement autour de SZ , on voit qu'il suffit de ralentir le mouvement du parallélogramme quand le demi-angle au sommet du cône primitif dépasse 45° ($k > 1$), et de l'accélérer dans le cas contraire. Ce résultat est obtenu en commandant le levier

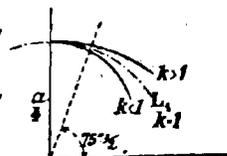


Fig. 697.

(*) On démontre en Géométrie analytique que, si l'on réduit ou si l'on amplifie dans un rapport constant k les abscisses des points d'une circonférence de rayon R , en conservant les ordonnées, on obtient une ellipse, dont les demi-axes sont respectivement R et kR .

DAD' par une bielle FH, dont l'extrémité H s'engage dans une coulisse IJ. Cette dernière reçoit, par des engrenages, un mouvement de rotation autour du point I, en rapport constant avec celui du bloc autour de SZ. On peut donc, pour une valeur donnée de ω , modifier à volonté la vitesse de AD' en fixant le point H à une distance variable du centre de la coulisse.

626. Description de la machine. (Fig. 698 à 701) (*).

Le bloc à tailler 1 est calé sur un mandrin horizontal 2, mobile autour de la verticale d'un point fixe S, avec lequel on fait coïncider le sommet du cône primitif. Ce mouvement, qui produit l'avance du plan oAX dont il a été question dans l'exposé du principe, est donné au support 3 du mandrin par l'engrènement d'une vis sans fin 4 et d'un secteur denté 5, solidaire de la table de la machine.

La vis 4 est manœuvrée par deux pignons d'angle égaux et une manivelle. Si, par exemple, le secteur 5 porte une dent par degré, un tour de la manivelle équivaut à un déplacement angulaire de 1 degré autour du point S. Une graduation en degrés sur le secteur 5, et une autre en $1/8$ de minute sur l'arbre de la manivelle, permettent de placer exactement le bloc de manière que le fond de sa denture soit dans le plan vertical des outils. Un butoir fixé sur la table de la machine empêche le système de dépasser cette position limite.

Le support 3 entraîne dans son cheminement horizontal autour de S une barre circulaire 6, dont le centre est sur la verticale du point S, et dont l'extrémité 7, dentée sur une certaine étendue, commande, — par l'intermédiaire du secteur 8, des roues coniques 9-10, de la coulisse IJ et de la bielle HF, — le mouvement du système articulé. La coulisse IJ porte une graduation, qui permet de fixer le point H dans la position convenable, suivant la valeur du demi-angle au sommet du cône primitif. Enfin le mandrin peut tourner sur lui-même, son support restant fixe ; ce mouvement est réglé par un appareil diviseur 11, d'après le nombre de dents à tailler.

Les outils 12-12 sont des sortes de couteaux dont le profil est arrondi suivant le raccordement d'un creux. Leurs supports coulisent dans des glissières 19-19, qui peuvent tourner autour du point S dans un plan vertical, et sont prolongées par deux bras en fonte 13-13. Ces derniers portent, à leurs extrémités, des quadrants circulaires 14-14, creusés de rainures de centre S et boulonnés à des pièces solitaires des coulisses M, M' qui parcourent les côtés G, G' des parallélogrammes articulés. Cette disposition permet de faire varier l'angle des bras 13-13, et, par suite, celui des trajectoires des outils, suivant l'épaisseur des dents de la roue à tailler ; les quadrants 14 portent, à cet effet, une graduation.

Les porte-outils sont commandés par deux petites bielles 15-15, articulées à un même chariot 16 qui reçoit son mouvement de la machine par le système bielle et manivelle 17-18. La longueur de la course dépend du rayon de la manivelle, ce qui permet de l'approprier à la hauteur de la roue à tailler. Celle-ci reçoit, d'après ce qui précède, deux mouvements de rotation intermittents : l'un, qui s'effectue autour de l'axe du mandrin, produit la division ; l'autre, dont l'axe est la verticale du point S, produit à la fois l'avance du bloc vers les outils, et le guidage de ces derniers ; il est donné au support du mandrin, par la vis 4, à chaque fois que le bloc conique a fait un tour complet sur lui-même. Il s'en suit que l'action des outils s'exerce successivement de la même manière sur toutes les dents, après quoi la roue reçoit une légère avance qui, par un mouvement connexe, écarte les glissières GG', et augmente l'intervalle des deux outils. Puis le bloc fait de nouveau un tour sur lui-même, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la profondeur voulue soit atteinte.

(*) Les figures 698, 699 et 700 sont reproduites d'après *The Engineer* (août 1900).

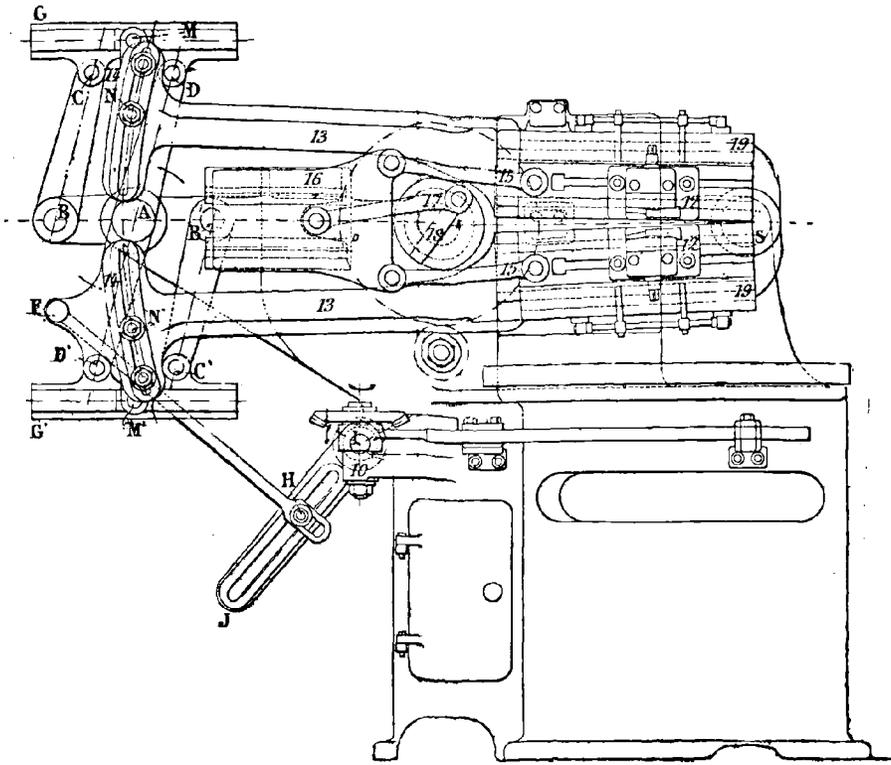


Fig. 698.

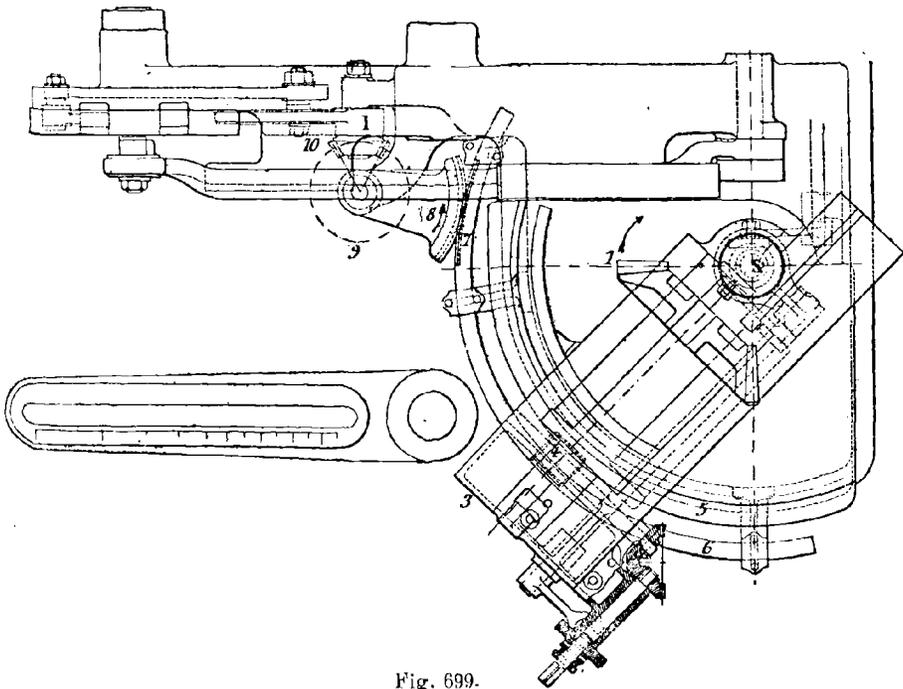


Fig. 699.

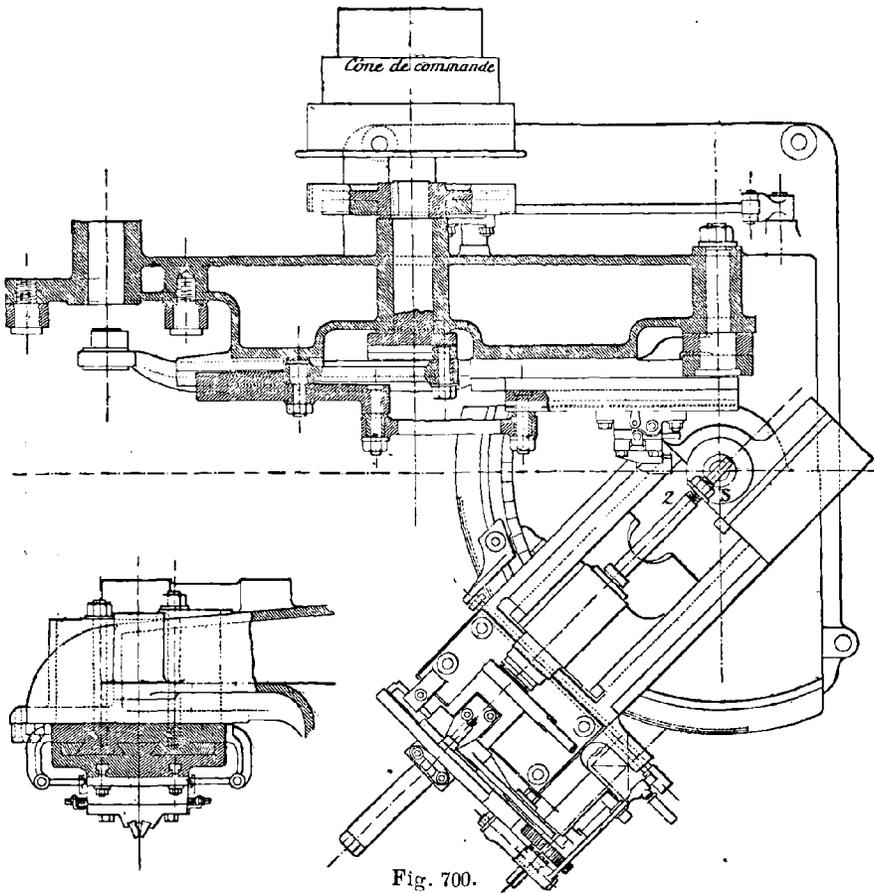


Fig. 700.

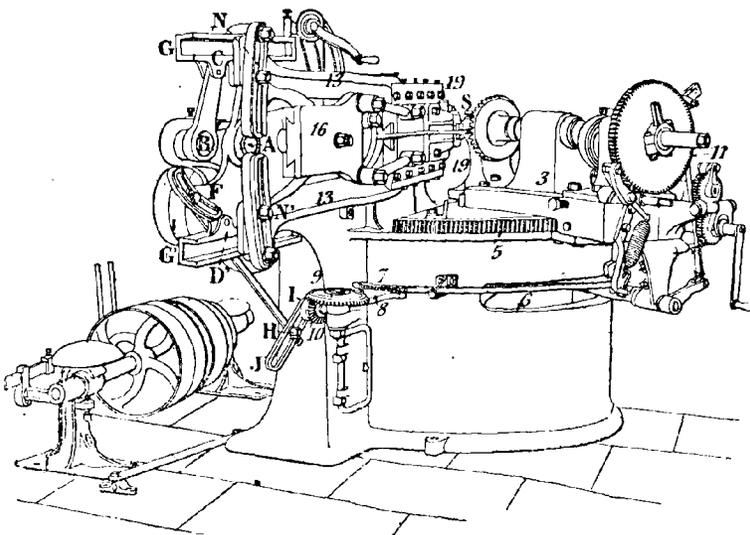


Fig. 701.

§ III. — *Machine à tailler les engrenages coniques hélicoïdaux système Monneret.*

627. Nous terminerons cette étude rapide des procédés de taillage en donnant le principe d'une machine qui permet de construire par engrènement, sans appareil diviseur et sans gabarit reproducteur, des engrenages coniques hélicoïdaux tracés par développantes de cercle. Cette machine est caractérisée par deux dispositions principales, dont l'une donne au profil la forme en développante, et dont l'autre fait la denture en hélice conique en même temps que la division.

a) *Mécanisme automatique donnant à la dent la forme en développante.*

Il est basé sur une propriété des engrenages à développantes, que nous avons déjà indiquée à propos du taillage des roues cylindriques : *deux roues de même module engrènent toujours entre elles, quels que soient leurs nombres de dents, pourvu que la droite génératrice des développantes fasse, dans tous les cas, le même angle avec la ligne des centres.*

Considérons, en particulier, la roue limite dont le demi-angle au sommet est droit. Sa forme est très simple, car le sommet du cône de tête étant rejeté à l'infini, les profils des dents, tracés d'après la méthode de Tredgold, sont identiques à ceux d'une crémaillère à développantes, c'est-à-dire que leurs flancs sont rectilignes. D'après ce qui précède, si l'on donne au bloc à tailler le mouvement qu'il aurait en engrènement avec la roue plane, ses dents prendront d'elles-mêmes la forme de développante, et pourront mener celles de n'importe quel autre pignon construit de la même manière.

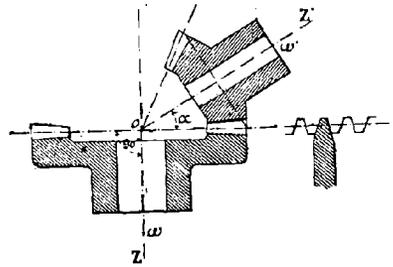


Fig. 702.

Pour arriver à ce résultat en pratique, on peut employer, au lieu d'une roue plane complète, un simple outil à flancs droits, à la condition de lui communiquer :

1° Un mouvement rectiligne dirigé vers le centre *o* de la roue plane, afin de lui faire engendrer la surface d'une de ses dents.

2° Un mouvement de rotation autour du point *o*, pour que cette dent prenne successivement les mêmes positions que si elle engrènement avec le pignon à usiner. Toutefois, comme l'arête tranchante de l'outil n'engendre la surface de la dent que par génératrices successives, le mouvement de rotation autour du point *o* ne doit lui être donné qu'après chaque tour du pignon en œuvre, quand une passe a été faite sur toutes les dents.

Soit α le demi-angle au sommet du cône primitif du pignon ; le rapport de sa vitesse angulaire à celle de l'outil est (340)

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\text{vit. ang. outil}}{\text{vit. ang. pignon}} = \frac{\sin \alpha}{\sin 90^\circ} = \sin \alpha$$

b) *Mécanisme faisant à la fois la denture en hélice et la division.*

On vient de voir que l'outil doit être animé d'un mouvement rectiligne passant par le centre de la roue plane, avec lequel se confond le sommet du cône primitif

du pignon à tailler. Supposons que ce dernier reçoive un mouvement de rotation continue autour de son axe, de manière à faire $\frac{1}{n}$ de tour pendant la durée d'un aller et retour de l'outil. Si celui-ci travaille seulement dans sa course d'aller, ses passes successives tracent sur le cône primitif n lignes équidistantes, ce qui convient au taillage d'un pignon de n dents. Pour assurer la liaison cinématique des deux mouvements, il suffit de produire celui de l'outil par une bielle articulée au maneton d'un plateau-manivelle de rayon variable, et d'intercaler entre l'arbre du plateau et celui du mandrin porte-pièce un train d'engrenages convenable.

La denture en hélice est obtenue en même temps que la division, car, par suite de la coexistence du mouvement de rotation continu du pignon en œuvre avec le mouvement rectiligne de l'outil, ce dernier trace, à chaque passe, un segment d'hélice conique dont le pas, en désignant par c l'étendue de la course, est $2nc$ (*). Pour tailler le pignon conjugué, on établit le train d'engrenages qui lie l'arbre du plateau-manivelle à celui du mandrin d'après la nouvelle valeur du nombre de dents, on change le

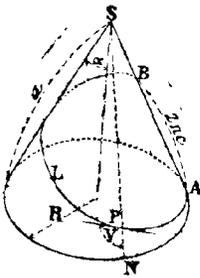


Fig. 703.

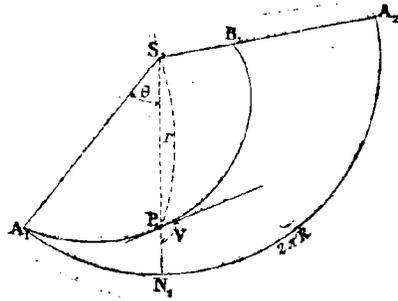


Fig. 704.

sens de l'hélice en renversant le mouvement de rotation du bloc, et l'on conserve la même course de l'outil, ce qui est naturel, puisque les dents ont même longueur sur deux roues qui se conduisent. Nous allons montrer que, dans ces conditions, les hélices coniques décrites par l'outil sur les deux cônes primitifs ont à chaque instant, lorsque ceux-ci roulent l'un sur l'autre, un point commun sur la génératrice de contact, et même tangente en ce point. Il suffit, pour cela, d'établir que les deux courbes donnent la même transformée lorsqu'on développe les cônes primitifs sur leur plan tangent commun (355).

Supposons d'abord que le mouvement de l'outil soit uniforme pendant l'aller ; le chemin PN qu'il parcourt suivant une génératrice est, dans cette hypothèse, proportionnel à l'arc AN dont le cône primitif a tourné simultanément, de sorte que, si l'on développe la surface du cône après l'avoir ouverte suivant SA, la transformée de la ligne L, lieu du point P, est une spirale d'Archimède L_1 , dont l'équation, dans le système de coordonnées polaires défini par le pôle S_1 et l'axe polaire S_1A_1 , est de la forme

$$r = k + l\theta$$

(*) La rotation du pignon pendant un aller de l'outil est une fraction de tour $\frac{1}{2n}$; le pas suivant la génératrice est donc bien $2nc$.

Les coordonnées respectives des points A_1 et B_1 , homologues des extrémités de la spire AB , sont

$$\begin{array}{lll} \text{(pour } A_1) & r = a & \theta = 0 \\ \text{(pour } B_1) & r = a - 2nc & \theta = \frac{2\pi R}{a} \end{array}$$

En écrivant qu'elles vérifient l'équation ci-dessus, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} k = a \\ l = -\frac{anc}{\pi R} = -\frac{2ac}{M\pi} \end{array} \right.$$

de sorte que l'équation de la ligne L_1 devient

$$r = a - \frac{2ac}{M\pi} \theta \quad (1)$$

M représentant le module $\frac{2R}{n}$ de la roue à construire. Comme les quantités M , a et c restent les mêmes pour deux pignons conjugués, on conclut que les lignes tracées par l'outil sur les deux cônes primitifs ont la même transformée, de sorte que l'engrènement a bien lieu.

En réalité, le mouvement de l'outil, produit par bielle et manivelle, n'est pas uniforme, mais périodique, et à peu près sinusoïdal. Toutefois, comme on peut partager la durée d'une course en parties assez petites pour que la vitesse de l'outil soit sensiblement constante dans chacune d'elles, les conclusions qui précèdent restent applicables.

Pour éviter le talonnage, l'outil doit se présenter tangentiellement à la courbe L ; il faut donc le faire pivoter sur lui-même d'un angle V égal à celui que forment les tangentes à cette ligne avec les génératrices correspondantes du cône primitif. Cet angle, qui se conserve dans le développement, est donné sur la transformée par la formule

$$\operatorname{tg} V = \frac{rd\theta}{dr} = \frac{rd\theta}{-\frac{2ac}{M\pi}d\theta} = -\frac{M\pi r}{2ac}$$

On voit qu'il varie avec r ; mais comme, en pratique, l'écart entre les valeurs de V aux deux extrémités de la course ne dépasse pas 4° , on peut se contenter d'incliner l'outil à l'angle du point milieu de la denture.

Une machine très ingénieuse, établie d'après ces principes, a été construite par MM. Ernault.

TABLE DES MATIÈRES

Définitions préliminaires	Pages 7
-------------------------------------	------------

CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL

CHAPITRE I

Etude du mouvement sur la Trajectoire (Méthode analytique).

Généralités	9
Mouvement uniforme	10
Mouvement varié. — Vitesse dans un mouvement varié.	13
Mouvement uniformément varié.	15
Chute des corps	20
Accélération tangentielle dans un mouvement varié	26
Mouvement périodique	27
Mouvement périodiquement uniforme	28
Etude analytique d'un mouvement	29

CHAPITRE II

Etude du mouvement sur la Trajectoire (Méthode graphique).

Courbes représentatives des lois du mouvement	33
Mouvement uniforme	41
Mouvement uniformément varié.	46
Mouvement périodique	50
Mouvement périodiquement uniforme	52

CHAPITRE III

Théorie du mouvement projeté.

Relation entre la vitesse d'un point et celle de sa projection.	55
Etude du mouvement d'un point en coordonnées rectilignes	58
Etude du mouvement d'un point en coordonnées polaires	67

CHAPITRE IV

Théorie du mouvement relatif et des mouvements simultanés.

Composition des mouvements	74
Mouvement relatif de deux points	88
Méthodes de Roberval pour le tracé des tangentes.	91

CHAPITRE V

De l'accélération totale.

	Pages
Détermination de l'accélération totale sur la trajectoire.	96
De l'accélération totale dans le mouvement projeté	101
Accélération totale d'un point en coordonnées rectilignes ou polaires	109

CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

CHAPITRE I

Etude des mouvements des systèmes invariables.

Théorèmes généraux	113
Mouvement de translation	114
Mouvement de rotation	115
Mouvement épicycloïdal plan.	119
Mouvement d'une figure plane invariable qui se déplace dans son plan	126
Mouvement d'un système invariable parallèlement à un plan.	137
Mouvement épicycloïdal sphérique	138
Mouvement d'une figure sphérique invariable qui se déplace sur une sphère	139
Mouvement de pivotement	142
Mouvement le plus général d'une figure plane invariable	143
Mouvement le plus général d'un système invariable	145

CHAPITRE II

Théorie des mouvements simultanés d'un système invariable.

Représentation d'une translation et d'une rotation par un vecteur.	151
Composition des translations.	152
Composition des rotations parallèles	152
Composition d'une rotation et d'une translation perpendiculaire à l'axe de la rotation	158
Composition des rotations concourantes.	160
Composition de deux rotations dont les axes ne sont pas situés dans un même plan	162
Composition d'une rotation et d'une translation quelconque.	162
Problème général de la composition des mouvements simultanés	163

CHAPITRE III

Mouvement relatif de deux systèmes invariables. 164

CHAPITRE IV

De l'accélération totale dans la théorie des mouvements simultanés. 169

CINÉMATIQUE APPLIQUÉE

Classification des Machines	Pages 177
---------------------------------------	--------------

CHAPITRE I

Généralités sur les Engrenages cylindriques droits.

Principe fondamental	182
Cylindres de friction et mécanismes dérivés	185
Méthodes générales pour le tracé des profils. — Calcul des dimensions des roues, en fonction du pas circonférentiel.	189

CHAPITRE II

Engrenages cylindriques extérieurs.

Engrenage à lanterne	202
Engrenage à flancs droits, non réciproque.	204
Engrenage à flancs droits et à faces épicycloïdales	206
Engrenage à faces et à flancs épicycloïdaux	207
Engrenage à développantes de cercle	213
Engrenage à cames	223
Engrenage à flancs rectilignes divergents	224
Tracés approximatifs	227

CHAPITRE III

Engrenages cylindriques intérieurs.

Emploi d'une roue parasite. — Calcul d'un engrenage intérieur.	236
Engrenage à lanterne.	240
Engrenage à flancs droits.	241
Engrenage à doubles profils épicycloïdaux	242
Engrenage à développantes	244
Engrenage à flancs droits divergents	245
Engrenage Willis	246

CHAPITRE IV

Pignons et Crémaillères.

Rouleaux et galets. — Calcul d'un système pignon et crémaillère	247
Pignon et crémaillère à flancs droits.	249
Pignon et crémaillère à doubles profils épicycloïdaux	251
Pignon et crémaillère à développantes	252
Pignon et crémaillère à flancs droits divergents, et tracé Willis.	254

CHAPITRE V

Théorie du Module.

Définitions et règles. — Calcul des dimensions des roues droites, extérieures ou intérieures, en fonction du module	255
Calcul des arcs de conduite	266

CHAPITRE VI

De l'arc-boutement	Pages 275
------------------------------	--------------

CHAPITRE VII

Du glissement. — Engrenage hélicoïdal de White.	278
---------------------------------------------------------	-----

Module normal. Calcul des dimensions des roues hélicoïdales en fonction du module normal. Nombres de dents des roues droites fictives servant au choix des fraises.	282
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

CHAPITRE VIII

Engrenages coniques.

Principe fondamental	291
Cônes de friction. — Galets coniques	293
Tracé des profils. — Tracé de Tredgold. — Calcul d'un engrenage conique, en fonction du module	297
Engrenages coniques hélicoïdaux	308

CHAPITRE IX

Liaison de deux rotations dont les axes ne sont pas dans un même plan.

Emploi de roues cylindriques ou coniques.	310
Roue et vis sans fin. — Cas particuliers et cas des axes rectangulaires. Vis globiques.	311
Engrenages hélicoïdaux entre axes quelconques. — Mécanismes dérivés.	326
Calcul des dimensions des roues hélicoïdales en fonction du module normal	333
Engrenages hyperboloïdes	352

CHAPITRE X

Equipages de roues dentées.

Calcul de la raison. — Problème inverse. — Harnais d'engrenages	359
Calcul d'un harnais ordinaire à roues droites ou à roues hélicoïdales	369
Tour à fileter	376

CHAPITRE XI

Trains épicycloïdaux.

Formule de Willis. — Exemples de trains épicycloïdaux plans.	384
Exemples de trains épicycloïdaux sphériques	397

CHAPITRE XII

Mécanismes à lien rigide, et à rapport de vitesses constant.

Bielles et manivelles égales. — Joint d'Oldham. — Tour elliptique	404
-----------------------------------------------------------------------------	-----

CHAPITRE XIII

Mécanismes à lien flexible, et à rapport de vitesses constant.

	Pages
Poulies et courroies	409
Poulie fixe et poulie mobile	431
Treuil ordinaire. — Treuil à engrenages	434
Moufles et palans	437
Pignons et chaînes	441

CHAPITRE XIV

Mouvement différentiels	447
------------------------------------------	------------

CHAPITRE XV

Engrenages à rapport de vitesses variable.

Courbes roullantes	455
Systèmes de deux roues dentées, dont l'une est excentrée	472
Roues de Rømer et d'Huyghens. — Renvoi de la <i>Speed Variator Company</i>	477
Secteurs dentés. — Engrenages intermittents.	480

CHAPITRE XVI

Mécanismes à lien rigide, et à rapport de vitesses variable.

Bielle et manivelles	484
Manivelle à coulisse	496
Joint universel. — Joint Clemens.	500

CHAPITRE XVII

Mécanismes à lien flexible, et à rapport de vitesses variable.

Treuils spéciaux. — Bobines.	505
--------------------------------------	-----

CHAPITRE XVIII

Mécanismes dans lesquels le sens de la transmission varie périodiquement.

Roues à double denture	510
Cames des divers genres	511
Excentriques à cadre	524

CHAPITRE XIX

Mouvements rectilignes alternatifs à retour rapide.

Emploi du système bielle et manivelles — de l'engrenage elliptique	531
Emploi d'une coulisse. — Commande Whitworth des trois genres	533
Emploi de trains d'engrenages	540

CHAPITRE XX

Systemes articulés employés dans les machines à vapeur.

	Pages
Bielle et manivelle. — Retour rapide. — Excentrique à collier	545
Machines à balancier de Watt, Evans, Klérity, Peaucellier, Hart	548
Machines à cylindre oscillant.	561
Coulisse de Stephenson. — Notions sur la distribution de la vapeur	562
Distribution dans les machines à vapeur à grande vitesse du Creusot	568

CHAPITRE XXI

Systemes divers de tiges articulées.

Machine verticale à mortaiser, système Guillet	575
Pantographe	580
Systemes articulés à tiges flexibles, — Martinets <i>Ajax</i> et <i>Excelsior</i>	581

CHAPITRE XXII

Encliquetages.

Encliquetages à dents, à simple ou double effet.	584
Encliquetages à arc-boutement	586

CHAPITRE XXIII

Compteurs de tours.

Compteurs à vis sans fin	588
Compteurs à équipages de roues dentées	590
Compteurs à mouvement intermittent	591

CHAPITRE XXIV

Appareils enregistreurs ou mesureurs de vitesse.

Enregistreur totaliseur de marche Richard.	594
Cinémomètre Richard	597
Chronotachymètres Desdoutis, P.-L.-M. et Hasler.	601

CHAPITRE XXV

Machines à tailler les engrenages cylindriques.

Généralités sur les fraises. — Dispositions schématiques pour le taillage d'une roue cylindrique, à denture droite ou hélicoïdale.	619
Machine de la Société alsacienne.	623
Taillage des roues cylindriques par engrenement. — Principe de Fellow. — Emploi d'une fraise-mère hélicoïdale	631
Machine Biernatzki	636

CHAPITRE XXVI

Machines à tailler les engrenages coniques.

	Pages.
Généralités, Machine Gibson, avec gabarit	643
Machine Smith et Coventry, sans gabarit	647
Machine Monneret, pour le taillage des pignons coniques hélicoïdaux, par engrènement	653

FIN

AIDE-MÉMOIRE PRATIQUE DE L'INGÉNIEUR

publié par un Comité d'ingénieurs spécialistes
PARAISSANT PAR FASCICULES DE 16 PAGES

On peut souscrire dès maintenant à l'ouvrage complet moyennant le prix forfaitaire de 40 francs, payable comme suit : 15 francs à la réception de la trentième fascicule et 5 francs tous les cinq suivants, jusqu'à concurrence de 40 francs.

Dès l'apparition du dernier fascicule le prix sera porté à 50 francs.

Pour justifier notre titre, toutes les formules sont suivies de notations explicatives (Désignation des unités choisies) et, si elles sont compliquées, d'exemples numériques. Nous ne donnerons pas de monographies de machines, mais bien le plus grand nombre possible de tableaux, comptes rendus et données numériques.

GRANDES DIVISIONS DE L'OUVRAGE

1° *Arithmétique, algèbre, géométrie, trigonométrie*, par Jean Loubet (paru) : 5 fr.

2° *Physique industrielle*.

3° *Chauffage et ventilation*, par Ed. Deny (paru) : 10 francs.

4° *Mécanique* (sous presse).

5° *Résistance des matériaux* (paru) : Première partie. Métaux par A. Mussan ; Deuxième partie. Matériaux de construction, par Lanave * 9 francs.

6° *Organes de machines* (sous presse), par G. Terrasse.

7° *Générateurs*, par A. Bouvard.

8° *Moteurs* : Première partie. Moteurs à gaz et à pétrole, par Lunet (paru) ; Deuxième partie. Moteurs hydrauliques ; Troisième partie. Moteurs à vapeur.

9° *Constructions métalliques* (sous presse), par Vernier, ingénieur E. C. P.

10° *Hydraulique*.

11° *Electricité*, par Mortureux, ancien élève de l'Ecole supérieure d'Electricité.

12° *Travaux publics et ponts et chaussées* (sous presse), par Lanave.

13° *Mines*, par E. Leroyer, ancien élève de l'Ecole des Mines de Saint Etienne (paru) : 8 francs.

14° *Métallurgie* : Première partie. Fonderie par Ed. Deny ; Deuxième partie : Métallurgie proprement dite. Métallurgie du fer, par J. Malette, préparateur de chimie à l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées. Métallurgie de métaux autres que le fer, par Moslard, ingénieur E. C. P.

15° *Poids et dimensions du commerce* (sous presse).

Chacune de ces grandes divisions, qui comprendra plusieurs fascicules sera numérotée à part et pourra former un aide-mémoire séparé.

40 FASCICULES PARUS (1^{er} juillet 1908)

L' INDUSTRIE MODERNE

PUBLICATION MENSUELLE

Formée de la réunion de : *Mécanique Nouvelle, Fonderie Nouvelle, Hygiène du Batiment et de l'Usine* (Revue pratique de Chauffage-Ventilation, *Revue de Manutention Mécanique*).

Chacune de ces parties est paginée séparément afin de permettre au lecteur de relier à part chacune d'elles s'il le désire.

ADMINISTRATION
Jean LOUBAT
Ingénieur A & M

Le Premier Numéro
EN
Octobre 1919

ABONNEMENTS
FRANCE . . . 50 f
ÉTRANGER . . 60 fr

Programme

Comme l'indique la note ci-dessus, il ne s'agit pas d'une nouvelle publication, mais du groupement de plusieurs périodiques existant déjà, qui permettra aux ingénieurs ou industriels non spécialisés de se tenir au courant, pour un prix modique, des progrès réalisés dans les principales branches de l'Industrie. Elle paraîtra mensuellement et donnera au moins **60 pages de texte**.

On s'abonne séparément aux différentes publications qui composent **L'INDUSTRIE MODERNE** aux conditions ci-dessous :

L'HYGIÈNE DU BATIMENT & DE L'USINE

(Revue de Chauffage et de Ventilation)

Abonnements : FRANCE : 20 francs. ÉTRANGER : 24 francs.

LA REVUE DE MANUTENTION MÉCANIQUE

Abonnements : FRANCE : 15 francs. ÉTRANGER : 20 francs.

LA MÉCANIQUE NOUVELLE

LA FONDERIE NOUVELLE

Abonnements :
FRANCE . . . 15 francs
ÉTRANGER . . 20 —

Tél. Archives 11-12

J. LOUBAT, Éditeur
15, Boulevard Saint-Martin
PARIS

Tél. Archives 11- 2

Vannes. — Imprimerie LAFOLYÉ frères,

COMPTEURS DE TOURS

TOTALISATEURS POUR TOUTES APPLICATIONS

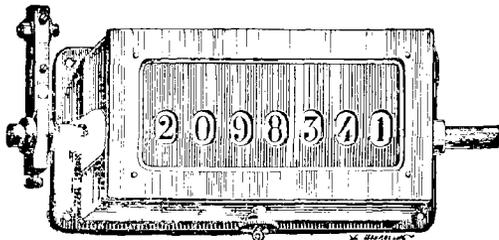
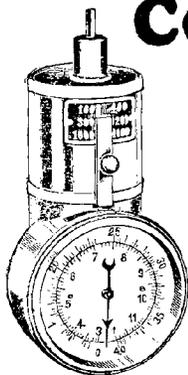
TACHYMÈTRES

à main et pour postes fixes

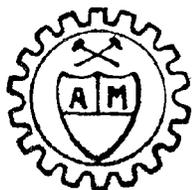
COMPTE-SECONDES

Amagnétiques

BREVETÉS S. G. D. G.



ALPH. DARRAS, Ingénieur-Constructeur
123, Boulevard St-Michel, PARIS



Association de Mécanique

(PROFESSIONNELLE ET MUTUELLE)

ET DES INDUSTRIES QUI S'Y RATTACHENT

(Ingénieurs, dessinateurs, chefs de service, contremaîtres, etc.)

Siège social : 15, boulevard Saint-Martin

Tél. : Archives 11-12

PARIS

Faites tous partie de l'A. M.

Cotisation annuelle } 20 fr. pour les membres honoraires (patrons).
15 fr. pour les membres titulaires (chefs de service).
12 fr. pour les membres aspirants (ouvriers).

Les membres de l'A. M. reçoivent GRATUITEMENT *La Mécanique nouvelle (Machine-Outil, Outillage)*.