ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona *in Roma* | **Enrico Betti** *in Pisa*
Eugenio Beltrami *in Pavia* | **Felice Casorati** *in Pavia.*

SERIE II - TOMO XIII

(dal gennaio al dicembre dell'anno 1885)

MILANO.

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XIII.° (SERIE II.ª)

Indice.

Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari.

(*Memoria di* F. Brioschi, *in Milano.*)

1.° Consideriamo una equazione differenziale lineare dell'ordine $m+1$:

$$y^{(m+1)} + p_1 y^{(m)} + p_2 y^{(m-1)} + \cdots + p_{m+1} y = 0 \tag{1}$$

e sieno $y_1, y_2, \ldots y_{m+1}$, $m+1$ integrali fondamentali di essa. Supponiamo che in quella equazione le derivate sieno prese rispetto ad una variabile x, della quale sono funzioni le $p_1, p_2, \ldots p_{m+1}$. Sia $f(y_1, y_2, \ldots y_{m+1})$ una forma ad $m+1$ variabili, dell'ordine n ed a coefficienti costanti, si avrà:

$$f(y_1, y_2, \ldots y_{m+1}) = f(x)$$

e la funzione $f(x)$ dovrà soddisfare ad una equazione differenziale lineare dell'ordine:

$$g = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}$$

i coefficienti della quale saranno funzioni delle $p_1, p_2, \ldots p_{m+1}$ e loro derivate.

Per determinare questa equazione differenziale dell'ordine g si può procedere nel modo seguente. Si considerino le g funzioni di x, che indicheremo con:

$$[r_1, r_2, \ldots r_m] \qquad (r_1, r_2, \ldots r_m = 0, 1, 2, \ldots n)$$

e per le quali sussistono le relazioni:

$$\left.\begin{array}{l}
[0, 0, \ldots 0] = f(x) \\
[r_1, r_2, \ldots r_m] = 0 \quad \text{per} \quad r = r_1 + r_2 + \cdots + r_m > n \\
\dfrac{d\,[r_1, r_2, \ldots r_m]}{d\,x} = \sum_1^{m-1}{}_s\, r_s\, [r_1, r_2, \ldots r_s - 1, r_{s+1} + 1, \ldots r_m] + \\
+ (n-r)\,[r_1 + 1, r_2, \ldots r_m] - r_m \sum_1^{m+1}{}_s\, p_s\, [r_1, r_2, \ldots r_{m-s+1} + 1, \ldots r_m - 1]
\end{array}\right\} \tag{2}$$

notando che in quest'ultima espressione il coefficiente di p_1 è $[r_1, r_2, \ldots r_m]$.

Le funzioni $[r_1, r_2, \dots r_m]$ sono evidentemente in numero g; eliminando colla derivazione successiva e colla formola ricorrente superiore $g-1$ fra esse, si giungerà alla equazione differenziale lineare dell'ordine g alla quale deve soddisfare la $[0, 0, \dots 0]$, ossia la $f(x)$.

Supponendo nota la funzione $f(x)$ il problema che rimane a risolversi si è quello di determinare i valori delle $y_1, y_2, \dots y_{m+1}$ in funzione di essa, dei coefficienti della equazione (1) e delle loro derivate. Ora questo problema può, in generale, farsi dipendere da un altro, quello cioè di determinare i valori dei covarianti della forma $f(y_1, y_2, \dots y_{m+1})$ in funzione della $f(x)$, delle p_1, $p_2, \dots p_{m+1}$ e loro derivate.

2.° Nel caso di $m=1$, cioè delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine, ho già esposto alcuni anni sono un metodo per la determinazione di quei covarianti (*), metodo che qui riassumo brevemente.

È noto per la teorica delle forme binarie: 1.° Che se nella forma $f(y_1, y_2)$ si sostituiscono alle y_1, y_2 le:

$$y_1 x_1 - f_2 x_2, \qquad y_2 x_1 + f_1 x_2, \qquad \left(f_1 = \frac{1}{n}\frac{df}{dy_1}\right)$$

si ottiene una forma dell'ennesimo ordine in x_1, x_2 la quale indicherò con:

$$t_0 x_1^n + n\, t_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{2} t_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + t_n x_2^n$$

ed in essa i coefficienti $t_0, t_1, \dots t_n$ sono covarianti della forma $f(y_1, y_2)$. 2.° Che qualunque altro covariante della forma $f(y_1, y_2)$ moltiplicato per una potenza della forma stessa è eguale ad una funzione razionale, intera, di quei primi covarianti $t_0, t_1, \dots t_n$.

Vediamo ora come si possano determinare i valori di $t_0, t_1, \dots t_n$ in funzione di $f(x)$, dei coefficienti p_1, p_2 e delle loro derivate. Le funzioni indicate sopra con $[r_1, r_2, \dots r_m]$ sono in questo caso ad un solo indice, e denotandole con λ_r si avranno le:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 = f(x), \qquad \lambda_{n+1} = 0 \\ \lambda_{r+1} = \frac{1}{n-r}\left[\frac{d\lambda_r}{dx} + r\, p_1 \lambda_r + r\, p_2 \lambda_{r-1}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Inoltre dalle:

$$y_1 f_1 + y_2 f_2 = \lambda_0, \qquad y'_1 f_1 + y'_2 f_2 = \lambda_1$$

(*) *La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre.* Mathematische Annalen, Bd. 11.

si deducono le:

$$\Delta f_1 = y'_2 \lambda_0 - y_2 \lambda_1, \qquad -\Delta f_2 = y'_1 \lambda_0 - y_1 \lambda_1$$

posto $\Delta = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$; si avranno quindi le relazioni:

$$t_0 = \lambda_0, \qquad t_1 = 0, \qquad t_2 = \frac{\lambda_0}{\Delta^2}(\lambda_0 \lambda_2 - \lambda_1^2)\dots$$

$$t_{r+1} = \frac{\lambda_0}{\Delta^{r+1}}\left[\lambda_0^r \lambda_{r+1} - \frac{r+1}{n}\lambda_0^{r-1}\lambda_1\lambda_r + \frac{(r+1)r}{2n^2}\lambda_0^{r-2}\lambda_1^2\lambda_{r-1}\dots + (-1)^r \frac{r}{n^{r+1}}\lambda_1^{r+1}\right]$$

ossia per la formola ricorrente (3) si otterrà la seguente:

$$\Delta t_{r+1} = \frac{1}{n-r}[f(x)t'_r - \mu_r f'(x) t_r] + r\frac{n-1}{n-r}\frac{\Delta}{f(x)} t_2 t_{r-1} \tag{4}$$

essendo $\mu_r = \dfrac{(r+1)n - 2r}{n}$; dalla quale si dedurranno i valori di $t_3, t_4, \dots t_n$ quando sia noto quello di t_2.

Se si pone:

$$t_r = z_{r-2} f^{\mu_r}$$

e si introduce una variabile υ legata alla x dalla $\dfrac{d\upsilon}{dx} = \dfrac{\Delta}{f^{\frac{2}{n}}}$, la (4) trasformasi nella:

$$z_{r-1} = \frac{1}{n-r}\left[\frac{dz_{r-2}}{d\upsilon} + r(n-1) z z_{r-3}\right] \tag{5}$$

e si avrà:

$$0 = \frac{dz_{n-2}}{d\upsilon} + n(n-1) z z_{n-3} \tag{6}$$

nelle quali si è scritto z in luogo di z_0.

Si giunge così al teorema: « Indicando con z la espressione seguente, di » $f(x)$, p_1, p_2 e loro derivate:

$$z = \frac{1}{n^2(n-1)} \cdot \frac{1}{f^2}[n f f'' - (n-1) f'^2 + n p_1 f f' + n^2 p_2 f^2]\left(\frac{dx}{d\upsilon}\right)^2$$

» le espressioni $z_1, z_2, \dots z_{n-2}$ si otterranno per mezzo della formola ricorrente » (5) e la z dovrà soddisfare ad una equazione differenziale non lineare del» l'ordine $n-1$ rappresentata dalla (6) ».

Se infine si indicano con:

$$h = \tfrac{1}{2}(ff)_2, \qquad t = 2(fh), \qquad l = \tfrac{1}{2}(ff)_4, \qquad \omega = (fl), \text{ ecc.}$$

covarianti della forma binaria $f(y_1, y_2)$ dell'ordine n, essendo:

$$f h = t_2, \qquad f t = t_3, \qquad f^4 l = f t_1 + 3 t_2^2, \qquad 2 f^4 \omega = f t_5 + 2 t_2 t_3, \text{ ecc.}$$

si avranno le:

$$h = f^{\frac{2(n-2)}{n}} \cdot z, \qquad t = f^{\frac{3(n-2)}{n}} \cdot z_1, \qquad l = f^{\frac{2(n-4)}{n}} (z_2 + 3 z^2),$$

$$\omega = \tfrac{1}{2} f^{\frac{3n-10}{n}} (z_3 + 2 z z_1), \ldots$$

3.° Passiamo ora a considerare il caso in cui $m = 2$. Le funzioni $[r_1, r_2, \ldots r_m]$ sono a due indici, le indicheremo con $\lambda_{r,s}$ e si avranno per esse le:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{00} = f(x), \qquad \lambda_{rs} = 0 \quad \text{per} \quad r + s > n \\ &\frac{d \lambda_{rs}}{d x} = r \lambda_{r-1, s+1} + (n - r - s) \lambda_{r+1, s} - s (p_1 \lambda_{r,s} + p_2 \lambda_{r+1, s-1} + p_3 \lambda_{r, s-1}). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Sia:

$$h(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \qquad \left(f_{rs} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{d^2 f}{d y_r \, d y_s}\right)$$

l'hessiano della forma $f(y_1, y_2, y_3)$ e:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix}$$

moltiplicando h due volte per Δ colla ordinaria regola della moltiplicazione dei determinanti, si ottiene:

$$h \Delta^2 = \begin{vmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{10} & \lambda_{01} \\ \lambda_{10} & \lambda_{20} & \lambda_{11} \\ \lambda_{01} & \lambda_{11} & \lambda_{02} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

Siccome secondo covariante della forma $f(y_1, y_2, y_3)$ consideriamo la forma:

$$k(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & h_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & h_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & h_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \left(h_r = \frac{1}{3(n-2)} \frac{d h}{d y_r}\right)$$

dell'ordine $2(4n-9)$. Essa pure moltiplicata per Δ^2 nel modo suindicato conduce alla:

$$k\,\Delta^2 = \begin{vmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{10} & \lambda_{01} & \mu_{00} \\ \lambda_{10} & \lambda_{20} & \lambda_{11} & \mu_{10} \\ \lambda_{01} & \lambda_{11} & \lambda_{02} & \mu_{01} \\ \mu_{00} & \mu_{10} & \mu_{01} & 0 \end{vmatrix} \tag{9}$$

essendo:

$$\mu_{00} = h(x), \qquad \mu_{rs} = 0 \quad \text{per} \quad r+s > 3(n-2)$$

e:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mu_{r,s}}{dx} = r\,\mu_{r-1,s+1} + (3n-6-r-s)\,\mu_{r+1,s} - \\ &\qquad - s(p_1\,\mu_{r,s} + p_2\,\mu_{r+1,s-1} + p_3\,\mu_{r,s-1}). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Il valore della espressione $\mu_{01} = y''_1\,h_1 + y''_2\,h_2 + y''_3\,h_3$ si può ottenere direttamente differenziando $h(y_1, y_2, y_3)$ rispetto ad y_1, y_2, y_3 e moltiplicando opportunamente i differenziali per Δ^2; si giunge così alla:

$$\tfrac{1}{3}\,\Delta^2\,\mu_{01} = -\begin{vmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{10} & \lambda_{01} \\ \lambda_{01} & \lambda_{11} & \lambda_{02} \\ \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{10} & \lambda_{01} \\ \lambda_{10} & \lambda_{20} & \lambda_{11} \\ \lambda_{02} & \lambda_{12} & \lambda_{03} \end{vmatrix} \tag{11}$$

Se infine indichiamo con:

$$t(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} \qquad \left(k_r = \frac{1}{2(4n-9)}\,\frac{dk}{dy_r}\right)$$

il covariante dell'ordine $3(4n-9)$ della $f(y_1, y_2, y_3)$ si ottiene tosto moltiplicando per Δ:

$$t\,\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{00} & \mu_{00} & \nu_{00} \\ \lambda_{10} & \mu_{10} & \nu_{10} \\ \lambda_{01} & \mu_{01} & \nu_{01} \end{vmatrix} \tag{12}$$

nella quale:

$$\left.\begin{aligned} &\nu_{00} = k(x), \quad \text{e} \quad \nu_{r,s} = 0 \quad \text{per} \quad r+s > 2(4n-9) \\ &\frac{d\nu_{r,s}}{dx} = r\,\nu_{r-1,s+1} + (8n-18-r-s)\,\nu_{r+1,s} - \\ &\qquad - s(p_1\,\nu_{r,s} + p_2\,\nu_{r+1,s-1} + p_3\,\nu_{r,s-1}). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Anche il valore della espressione $\nu_{01} = y''_1 k_1 + y''_2 k_2 + y''_3 k_3$ si può ottenere direttamente dalla $k(y_1, y_2, y_3)$ in funzione delle $\lambda_{r,s}$, $\mu_{r,s}$ e si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2(4n-9)}{n-2}\Delta^2 \nu_{01} = \frac{2(3n-7)}{n-2}&\left|\begin{matrix}\lambda_{00} & \lambda_{10} & \lambda_{01} & \mu_{01}\\ \lambda_{10} & \lambda_{20} & \lambda_{11} & \mu_{11}\\ \lambda_{01} & \lambda_{11} & \lambda_{02} & \mu_{02}\\ \mu_{00} & \mu_{10} & \mu_{01} & 0\end{matrix}\right| + \\ +\left|\begin{matrix}\lambda_{00} & \lambda_{11} & \lambda_{02} & \mu_{00}\\ \lambda_{10} & \lambda_{21} & \lambda_{12} & \mu_{10}\\ \lambda_{01} & \lambda_{12} & \lambda_{03} & \mu_{01}\\ (n-2)\mu_{00} & \mu_{10} & \mu_{01} & 0\end{matrix}\right| + \mu_{00}&\left\{\left|\begin{matrix}\lambda_{02} & \lambda_{10} & \mu_{00}\\ \lambda_{12} & \lambda_{20} & \mu_{10}\\ \lambda_{03} & \lambda_{11} & \mu_{01}\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}\lambda_{01} & \lambda_{11} & \mu_{00}\\ \lambda_{11} & \lambda_{21} & \mu_{10}\\ \lambda_{02} & \lambda_{12} & \mu_{01}\end{matrix}\right|\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Le formole precedenti conducono quindi al seguente teorema:

« Se il valore di una forma $f(y_1, y_2, y_3)$ dell'ordine n, di tre integrali » fondamentali di una equazione differenziale lineare del terzo ordine, si sup- » pone noto ed eguale ad $f(x)$, ed indicando con h, k, t i tre covarianti della » medesima sopra stabiliti, si pone:

$$h(y_1, y_2, y_3) = h(x), \qquad k(y_1, y_2, y_3) = k(x), \qquad t(y_1, y_2, y_3) = t(x)$$

» le funzioni $h(x)$, $k(x)$, $t(x)$ si possono ottenere espresse colla $f(x)$, i coeffi- » cienti della equazione differenziale e le loro derivate. »

4.° Supponiamo dapprima $f(x) = 0$. Per la sussistenza di questa equazione dovrà evidentemente essere soddisfatta una relazione fra le p_1, p_2, p_3 e le loro derivate. Allorquando questa abbia luogo, i valori generali di $h(x)$, $k(x)$, $t(x)$ sono i seguenti:

$$\left.\begin{aligned}h(x) &= -(n-1)^2 e^{2\int p_1 dx} \lambda^3\\ k(x) &= -e^{2\int p_1 dx} \lambda^2 \left\{\frac{6n^2 - 24n + 23}{9(n-2)^2} h'^2 + 2\frac{6n-11}{9(n-2)} p_1 h h' + \right.\\ &\left. \quad + \left[\frac{5}{9} p_1^2 + 6(n-1)\mu - 5\nu\right] h^2\right\}\\ t(x) &= \frac{n-1}{6(n-2)(4n-9)} e^{\int p_1 dx} \lambda \left[2(4n-9) k h' - 3(n-2) h k'\right]\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

nelle quali $\lambda = \lambda_{20}$, $\lambda\mu = \lambda_{21}$, $\lambda\nu = \lambda_{02}$ ed $h' = \frac{dh}{dx}$, $k' = \frac{dk}{dx}$. La prima di queste formole fu già fatta conoscere dal prof. Fuchs (*).

(*) Sitzungsberichten der K. Akademie zu Berlin, 8 Juni 1882.

I valori delle tre funzioni indicate con λ, μ, ν si ottengono nei vari casi particolari per mezzo delle relazioni (7).

Supporremo in questo paragrafo $p_1 = 0$, la quale ipotesi non altera la generalità dei risultati nel caso che quì si considera. Porremo inoltre $p_2 = a$, $p_3 = b$ ed:

$$\alpha = a' - 2\,b, \qquad \beta = 9\,a\,\alpha^2 - 6\,\alpha\,\alpha'' + 7\,\alpha'^2;$$

α, β sono così gli *invarianti* della equazione differenziale lineare del terzo ordine.

Dalle relazioni (7) si ottengono tosto le:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_{00} = 0, \quad \lambda_{10} = 0, \quad \lambda_{01} = -(n-1)\,\lambda, \quad \lambda_{11} = -\lambda' \\ \lambda_{02} + (n-2)\,\lambda_{21} = -\lambda'' + a\,\lambda, \quad (n-2)\,\lambda_{30} = 3\,\lambda', \\ (n-2)\,[3\,\lambda_{21} + (n-3)\,\lambda_{40}] = 3\,\lambda'' \end{array}\right\} \tag{16}$$

e così di seguito. Sia ora:

$n = 3$, si hanno le:

$$\lambda_{21} = \lambda'', \qquad \lambda_{02} = -2\,\lambda'' + a\,\lambda, \qquad \lambda_{30} = 3\,\lambda'$$

ma la equazione (7) dà:

$$\frac{d\,\lambda_{21}}{d\,x} = 2\,\lambda_{12} - (a\,\lambda_{30} + b\,\lambda_{20}), \qquad \frac{d\,\lambda_{02}}{d\,x} = \lambda_{12} - 2\,(a\,\lambda_{11} + b\,\lambda_{01})$$

e quindi si hanno per λ_{12} i due valori:

$$2\,\lambda_{12} = \lambda''' + 3\,a\,\lambda' + b\,\lambda; \qquad \lambda_{12} = -2\,\lambda''' - a\,\lambda' + (a' - 4\,b)\,\lambda$$

ossia λ dovrà soddisfare alla equazione:

$$\lambda''' + a\,\lambda' + \tfrac{1}{2}\,(a' - \tfrac{9}{5}\,\alpha)\,\lambda = 0.$$

Ma per la stessa (7):

$$\frac{d\,\lambda_{12}}{d\,x} = \lambda_{03} - 2\,(a\,\lambda_{21} + b\,\lambda_{11}), \qquad \frac{d\,\lambda_{03}}{d\,x} = -3\,(a\,\lambda_{12} + b\,\lambda_{02})$$

perciò deducendo dalla prima il valore di λ_{03} e sostituendolo nella seconda si avrà una seconda equazione differenziale in λ, evidentemente del quinto ordine, la quale abbassata d'ordine per mezzo della precedente, diventa la:

$$\alpha\,\lambda'' + \frac{1}{3}\,\alpha'\,\lambda' + \frac{1}{3\cdot 7}\,(\alpha'' + 9\,a\,\alpha)\,\lambda = 0.$$

Da queste equazioni differenziali con abbassamenti successivi si ottengono le due del primo ordine:

$$\beta\lambda' + \frac{1}{8}\left(\beta' - \frac{7\cdot 3^4}{5}\alpha^3\right)\lambda = 0 \tag{17}$$

$$\left(27\alpha\beta' - 8\beta\alpha' - \frac{7\cdot 3^5}{5}\alpha^4\right)\lambda' + \frac{1}{7}\left(21\alpha\beta'' - 8\beta\alpha'' - 72\,a\,\alpha\beta - \frac{7^2\cdot 3^6}{5}\alpha^3\alpha'\right)\lambda = 0$$

ed eliminando λ si otterrà la relazione fra i coefficienti della equazione differenziale e le loro derivate, relazione già nota per le ricerche del sig. HALPHEN (*). Soddisfatta questa equazione, dalla prima delle precedenti si otterrà il valore di λ e quindi quelli di $h(x)$, $k(x)$, $t(x)$.

5.° Sia in secondo luogo $f(x) = 0$ ed $h(x) = \text{Cost.}^e = 1$, dalle (15) si dedurranno le:

$$\lambda = -\frac{1}{(n-1)^{\frac{2}{3}}}\, e^{-\frac{2}{3}\int p_1 dx},$$

$$k(x) = -\frac{1}{(n-1)^{\frac{4}{3}}}\, e^{\frac{2}{3}\int p_1 dx}\left[\tfrac{5}{9}p_1^2 + 6(n-1)\mu - 5\nu\right]$$

$$t(x) = \frac{(n-1)^{\frac{1}{3}}}{2(4n-9)}\, e^{\frac{1}{3}\int p_1 dx}\cdot\frac{dk}{dx} \tag{18}$$

e quindi $\lambda' = -\frac{2}{3}p_1\lambda$. Le relazioni (7) conducono facilmente in questo caso alle seguenti:

$$\lambda_{11} = -\tfrac{1}{3}p_1\lambda, \qquad \lambda_{30} = 0, \qquad 3\lambda_{21} + (n-3)\lambda_{40} = 0$$

$$\lambda_{02} + (n-2)\lambda_{21} = -\tfrac{1}{3}(p'_1 + \tfrac{1}{3}p_1^2 - 3p_2)\lambda$$

$$(n-2)\lambda_{12} = \lambda'_{02} + 2(p_1\lambda_{02} + p_2\lambda_{11} + p_3\lambda_{01})$$

$$2\lambda_{12} + (n-3)\lambda_{31} = \lambda'_{21} + p_1\lambda_{21} + p_3\lambda_{20}, \qquad \lambda'_{40} = 4\lambda_{31} + (n-4)\lambda_{50}$$

e così via. Se $n = 3$, sarà $\lambda_{21} = 0$, ossia $\mu = 0$ e:

$$\nu = -\tfrac{1}{3}(p'_1 + \tfrac{1}{3}p_1^2 - 3p_2)$$

ed i valori di $k(x)$, $t(x)$ saranno in questo caso:

$$k(x) = -\frac{5}{2^{\frac{1}{3}}\cdot 6}\, e^{\frac{2}{3}\int p_1 dx}\left[p'_1 + \tfrac{2}{3}p_1^2 - 3p_2\right], \qquad t(x) = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}\cdot 3}\, e^{\frac{1}{3}\int p_1 dx}\cdot\frac{dk}{dx}.$$

(*) *Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 31 Décembre 1883.

Inoltre essendo $\lambda_{12} = \frac{1}{2} p_3 \lambda$, si avrà la:

$$\lambda'_{02} + 2 p_1 \lambda_{02} - \tfrac{2}{3} p_1 p_2 \lambda - \tfrac{9}{2} p_3 \lambda = 0$$

nella quale sostituendo per λ_{02} il suo valore, si otterrà fra i coefficienti p_1, p_2, p_3 la relazione:

$$\tfrac{1}{3} p''_1 + \tfrac{2}{3} p_1 p'_1 + \tfrac{4}{27} p_1^3 - p'_2 - \tfrac{2}{3} p_1 p_2 + \tfrac{9}{2} p_3 = 0$$

ossia ponendo:

$$a = - p'_1 - \tfrac{1}{3} p_1^2 + p_2$$
$$b = - \tfrac{1}{3} p''_1 + \tfrac{2}{27} p_1^3 - \tfrac{1}{3} p_1 p_2 + p_3$$

ed $\alpha = a' - 2 b$ come sopra; si avrà:

$$p_3 = \tfrac{2}{5} \alpha.$$

Infine essendo $\lambda_{03} = \frac{1}{2} p'_3 \lambda$, si otterrà la seconda relazione fra i coefficienti dalla:

$$\lambda'_{03} + 3 (p_1 \lambda_{03} + p_2 \lambda_{12} + p_3 \lambda_2) = 0$$

ossia la:

$$p''_3 + \tfrac{7}{3} p_1 p'_3 - (2 p'_1 + \tfrac{2}{3} p_1^2 - 9 p_2) p_3 = 0.$$

Supponiamo $p_1 = \frac{3}{2} \frac{\varphi'}{\varphi}$; dalla prima relazione si ha:

$$p_3 = \tfrac{2}{9}\left(p'_2 + \frac{\varphi'}{\varphi} p_2\right) - \tfrac{1}{9} \frac{\varphi'''}{\varphi}$$

e dalla seconda:

$$\frac{p''_3}{p_3} + \tfrac{7}{2} \frac{\varphi'}{\varphi} \frac{p'_3}{p_3} + 9 p_2 - 3 \frac{\varphi''}{\varphi} + \tfrac{3}{2} \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} = 0$$

dalla quale supponendo $\frac{p'_3}{p_3} = - \frac{\varphi'}{\varphi}$ si ha tosto $p_2 = \frac{4}{9} \frac{\varphi''}{\varphi}$, e sostituendo nella precedente $p_3 = - \frac{1}{81} \frac{\varphi'''}{\varphi}$. Si ha quindi il teorema: l'equazione differenziale lineare del terzo ordine (*)

$$\varphi y''' + \tfrac{3}{2} \varphi' y'' + \tfrac{4}{9} \varphi'' y' - \tfrac{1}{81} \varphi''' y = 0,$$

nella quale φ è una funzione di x, ha la proprietà: che indicando con y_1, y_2, y_3 tre integrali fondamentali di essa, esiste fra i medesimi una relazione del terzo ordine a coefficienti costanti, e che rappresentando con $f(y_1, y_2, y_3) = 0$

(*) Vedi la Memoria del sig. Halphen citata più sopra.

questa relazione, l'hessiano della forma f è costante ed i covarianti denominati k, t hanno i valori:

$$k(y_1, y_2, y_3) = -\frac{5}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 6^2} \varphi'', \qquad t(y_1, y_2, y_3) = -\frac{5}{6^3} \varphi''' \sqrt{\varphi}.$$

La nota relazione algebrica fra le forme f, h, k, t ed i due invarianti di f deve essere soddisfatta dalla funzione φ.

Osserviamo da ultimo come ponendo:

$$q = p'_1 + \tfrac{2}{3} p_1^2 - 3 p_2 \tag{19}$$

alla prima delle relazioni trovate fra i coefficienti p_1, p_2, p_3 e loro derivate, può darsi la forma:

$$q' + \tfrac{2}{3} p_1 q + \tfrac{27}{2} p_3 = 0$$

e quindi che in generale i valori di $k(x)$, $t(x)$ possono rappresentarsi colle:

$$k(x) = -\frac{5}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 6} e^{\frac{2}{3}\int p_1 dx} \cdot q, \qquad t(x) = \frac{3 \cdot 5}{8} e^{\int p_1 dx} \cdot p_3.$$

Ora siccome dalla equazione (18) si ha:

$$\tfrac{1}{3} p_1 = \frac{t'(x)}{t(x)} - \frac{k''(x)}{k'(x)}$$

si avranno le:

$$p_3 = \frac{8}{3 \cdot 5} \frac{k'^3}{t^2}, \qquad q = -\frac{6 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{5} \frac{k k'^2}{t^2}$$

e quindi i valori delle p_1, p_2, p_3 in funzione di $k(x)$, $t(x)$ e loro derivate. Sostituendo questi valori nella seconda delle relazioni di condizione, si giunge ad una equazione tosto integrabile che conduce alla nota equazione:

$$t^2 + \frac{6 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{5} k^3 = C k + D$$

nella quale C, D sono due costanti.

6.° Passiamo ora a considerare il caso in cui $n = 4$, nelle stesse ipotesi di $f(x) = 0$ $h(x) = 1$. Si avranno come precedentemente le:

$$\lambda' = -\tfrac{2}{3} p_1 \lambda, \qquad \lambda_{11} = -\tfrac{1}{3} p_1 \lambda, \qquad \lambda_{30} = 0$$

poi le:

$$\lambda_{40} = -3 \lambda_{21}, \qquad \lambda'_{40} = 4 \lambda_{31} \text{ e quindi } \lambda_{31} = -\tfrac{3}{4} \lambda'_{21}$$

e le:

$$\lambda_{02} + 2\lambda_{21} = -\tfrac{1}{3}(p'_1 + \tfrac{1}{3}p_1^2 - 3p_2)\lambda$$
$$2\lambda_{12} = \lambda'_{02} + 2(p_1\lambda_{02} + p_2\lambda_{11} + p_3\lambda_{01})$$
$$2\lambda_{12} = \tfrac{7}{4}\lambda'_{21} + p_1\lambda_{21} + p_3\lambda_{20}.$$

Da queste prime relazioni, rammentando essere $\lambda_{21} = \lambda\mu$, $\lambda_{02} = \lambda\nu$, si ottengono le due seguenti:

$$\mu' + \tfrac{2}{3}p_1\mu = \tfrac{4}{3}(\tfrac{1}{5}\alpha - p_3) \tag{20}$$
$$\nu = -2\mu - \tfrac{1}{3}(p'_1 + \tfrac{1}{3}p_1^2 - 3p_2)$$

e quindi:

$$k(x) = -\frac{1}{3^{\frac{4}{3}}}e^{\frac{2}{3}\int p_1 dx}[28\mu + \tfrac{5}{3}q]$$

nella quale q ha il valore superiore (19). Si osservi che la funzione q ha la proprietà espressa dalla relazione:

$$q' + \tfrac{2}{3}p_1 q = -3(\alpha + 2p_3)$$

si avrà quindi:

$$t(x) = \frac{1}{2\cdot 7\cdot 9}e^{\int p_1 dx}[142 p_3 - \tfrac{37}{5}\alpha]. \tag{21}$$

I coefficienti p_1, p_2, p_3 e le loro derivate dovranno anche in questo caso soddisfare a due relazioni. Per determinare queste relazioni si procede nel modo seguente. Essendo note, per le equazioni superiori, in funzioni di λ_{21} e di λ i valori di λ_{31} e di λ_{12}, dalle:

$$\lambda'_{12} = \lambda_{03} + \lambda_{22} - 2(p_1\lambda_{12} + p_2\lambda_{21} + p_3\lambda_{11})$$
$$\lambda'_{31} = 3\lambda_{22} - (p_1\lambda_{31} + p_2\lambda_{40} + p_3\lambda_{31})$$

si ricavano quelli di λ_{03}, λ_{22}; ed essendo:

$$\lambda'_{03} = \lambda_{13} - 3(p_1\lambda_{03} + p_2\lambda_{12} + p_3\lambda_{02})$$
$$\lambda'_{22} = 2\lambda_{13} - 2(p_1\lambda_{22} + p_2\lambda_{31} + p_3\lambda_{21})$$

si hanno due valori per λ_{13} che eguagliati fra loro conducono alla determinazione del valore di μ: si ha così:

$$\mu = \tfrac{1}{3}\frac{M}{\alpha}$$

posto:

$$M = m'' + \tfrac{7}{3}p_1 m' - \tfrac{1}{9}(7s + 3a)m - \tfrac{5}{3}q(\tfrac{1}{5}\alpha - p_3)$$

nella quale $m = p_3 - \frac{2}{7}\alpha$; a, q, hanno i valori superiori ed:

$$s = p'_1 + \tfrac{1}{3} p_1^2 - 3 p_2.$$

Si avrà quindi, rammentando la (20), la prima relazione richiesta sotto la forma:

$$\left(\frac{M}{\alpha}\right)' + \tfrac{2}{3} p_1 \frac{M}{\alpha} - 4(\tfrac{4}{5}\alpha - p_3) = 0. \tag{22}$$

La seconda relazione si ottiene osservando che posto $\lambda_{13} = \lambda g$, dall'uno o dall'altro dei valori di λ_{13} si deduce essere:

$$g = -\tfrac{4}{9} p_1 s \frac{M}{\alpha} + N$$

posto:

$$N = \tfrac{4}{70}[\alpha'' + \tfrac{7}{3} p_1 \alpha' - \tfrac{4}{2}(7s + 3a)\alpha] + \tfrac{4}{3}[p_1(\tfrac{4}{5}\alpha' - p'_3) + q(\tfrac{4}{5}\alpha - p_3)];$$

ora dalle (7) si hanno le ultime due equazioni:

$$\lambda_{04} = \lambda'_{13} + 3(p_1 \lambda_{13} + p_2 \lambda_{22} + p_3 \lambda_{12})$$
$$\lambda'_{04} + 4(p_1 \lambda_{04} + p_2 \lambda_{13} + p_3 \lambda_{03}) = 0$$

dalla prima delle quali ricavando il valore di λ_{04} e sostituendolo nella seguente, si giungerà alla seconda relazione fra i coefficienti p_1, p_2, p_3 e loro derivate.

Applichiamo le formole trovate alla risoluzione del seguente problema. Supponendo come sopra $f(x) = 0$, $h(x) = 1$ e noti i valori di $k(x)$, $t(x)$; determinare quelli dei coefficienti p_1, p_2, p_3.

Osserviamo dapprima che dalla equazione (18) si ha in generale, qualunque sia il valore di n, che:

$$\tfrac{1}{3} p_1 = \frac{d \log t}{dx} - \frac{d \log k'}{dx} \tag{23}$$

e quindi sarà determinato il valore di p_1; una seconda equazione si deduce dalla (21), ossia la:

$$142 p_3 - \tfrac{37}{5}\alpha = 2 \cdot 7 \cdot 9\, e^{-\int p_1 dx} \cdot t(x); \tag{24}$$

infine le due relazioni esistenti fra p_1, p_2, p_3 e loro derivate condurranno alla risoluzione del problema propostoci e ad una relazione fra le k, t e loro derivate.

È noto che la teoria delle funzioni ellittiche offre una equazione differenziale lineare di questa specie nella ipotesi che sieno:

$$k(x) = k_0 x^{\frac{1}{3}}, \qquad t(x) = t_0 (x-1)^{\frac{1}{2}}$$

e k_0, t_0 due coefficienti di cui il rapporto $\frac{k_0}{t_0} = 2 \cdot 7 \cdot 3^{\frac{2}{3}}$. La relazione (23) dà per p_1 il valore:

$$p_1 = \tfrac{1}{2} \frac{7x-4}{x(x-1)}$$

e la seguente (24) conduce alla:

$$142\, p_3 - \tfrac{37}{5} \alpha = 2 \cdot 7 \cdot 9 \frac{t_0}{x^2(x-1)}.$$

Suppongasi:

$$p_3 = \frac{\rho}{x^2(x-1)}$$

essendo ρ una costante indeterminata; si avrà $\alpha = \frac{\alpha_0}{x^2(x-1)}$ e fra le t_0, ρ, α_0 sussisterà la relazione:

$$142\, \rho - \tfrac{37}{5} \alpha_0 = 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot t_0. \tag{25}$$

Per questi valori di p_3 e di α, dalla espressione di α in funzione di p_1, p_2, p_3 e loro derivate, si ha tosto:

$$p'_2 + \tfrac{2}{3} p_1 p_2 = \tfrac{2}{27} \frac{1}{x^3(x-1)} \left[\left(\tfrac{27}{2} \alpha_0 + 27 \rho + 7 \right) x + 2 \right]$$

e quindi dovrà essere:

$$p_2 = \tfrac{2}{9} \frac{l x - 1}{x^2(x-1)}$$

nella quale:

$$l = \tfrac{27}{2} \alpha_0 + 27 \rho + 7. \tag{26}$$

Per questi valori si ottiene la:

$$\frac{M}{\alpha} = \frac{M_0}{x(x-1)}$$

nella quale:

$$M_0 = \frac{1}{9 \alpha_0} \left[8 l \rho - 53 \rho - \tfrac{22}{7} l \alpha_0 + \tfrac{148}{7} \alpha_0 \right]$$

e dalla prima relazione (22) fra i coefficienti p_1, p_2, p_3 e loro derivate si deduce la:

$$M_0 = \tfrac{12}{5} (\alpha_0 - 5 \rho).$$

Si ha così una prima relazione la quale deve essere soddisfatta dai coefficienti indeterminati l, ρ; ossia la:

$$4 \cdot 83 \cdot \gamma^2 - 4 \cdot 251 \cdot \gamma \delta + 8 \cdot 7^2 \cdot \delta^2 + 60 \gamma - 11 \cdot 15 \cdot \delta = 0 \qquad (27)$$

posto:

$$l - 7 = \gamma \qquad 27 \rho = \delta.$$

La seconda relazione fra l e ρ ottenuta nel modo indicato è la seguente:

$$32 \cdot 47 \cdot \gamma^3 - 2 \cdot 11443 \cdot \gamma^2 - 15 \cdot 283 \cdot \gamma - 43 \cdot 160 \cdot \gamma^2 \delta + 100 \cdot 677 \cdot \gamma \delta +$$
$$+ 64 \cdot 7^2 \cdot \gamma \delta^2 + 15 \cdot 773 \cdot \delta - 2 \cdot 7 \cdot 1861 \cdot \delta^2 = 0.$$

Dalla (27) e da quest'ultima si deduce la:

$$\delta = 4 \gamma \frac{N}{D} \qquad (28)$$

essendo:

$$N = 14 \cdot 64 \cdot \gamma^2 + 3 \cdot 337 \cdot \gamma + 200, \qquad D = 56 \cdot 64 \cdot \gamma^2 + 4 \cdot 1781 \cdot \gamma + 5 \cdot 391$$

e quindi:

$$D - 4 N = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot (8 \gamma + 3).$$

Sostituendo il valore (28) di δ nella (27) si ottiene per γ una equazione del quinto grado quale risulta dal prodotto dei cinque seguenti fattori:

$$(2 \gamma + 5)(8 \gamma + 3)(32 \gamma + 17)(56 \gamma + 5)(128 \gamma + 23) = 0$$

sussistono cioè cinque equazioni differenziali lineari del terzo ordine, gli integrali fondamentali y_1, y_2, y_3 di ciascuna delle quali soddisfanno le condizioni del problema. La forma comune di queste equazioni differenziali è quella delle ipergeometriche del terzo ordine (*), per cui:

$$\tfrac{2}{9} l = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2, \qquad \rho = a_1 a_2 a_3$$

ed:

$$a_1 + a_2 + a_3 = \tfrac{1}{2}, \qquad b_1 = \tfrac{2}{3}, \qquad b_2 = \tfrac{1}{3}.$$

Posto:

$$a_1 = \tfrac{1}{6} + \frac{1}{3 m}(2 r + s), \qquad a_2 = \tfrac{1}{6} - \frac{1}{3 m}(2 s + r), \qquad a_3 = \tfrac{1}{6} + \frac{1}{3 m}(s - r)$$

i valori di a_1, a_2, a_3 per ciascuna delle cinque equazioni differenziali si otten-

(*) GOURSAT, *Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur.* Annales de l'École Normale Supérieure. Août 1883.

gono come segue:

pel fattore	$2\gamma + 5 = 0,$	$m = 2,$	$r = 1,$	$s = 2$
»	$8\gamma + 3 = 0,$	$m = 3,$	$r = 1,$	$s = 1$
»	$32\gamma + 17 = 0,$	$m = 4,$	$r = 2,$	$s = 1$
»	$56\gamma + 5 = 0,$	$m = 7,$	$r = 2,$	$s = 1$
»	$128\gamma + 23 = 0,$	$m = 8,$	$r = 3,$	$s - 1.$

Dalle equazioni (26) (25) si deducono poi pei valori dei coefficienti indeterminati α_0, t_0 le espressioni

$$\alpha_0 = \frac{2}{3^3 \cdot m^3}(2r + s)(2s + r)(s - r)$$

$$3^5 \cdot t_0 = \frac{71}{7 \cdot 8}\left[1 - \frac{3 \cdot 4}{m^2}(r^2 + s^2 + rs)\right] - \frac{7 \cdot 8}{5\, m^3}(2r + s)(2s + r)(s - r)$$

e fra i tre covarianti $h(y_1, y_2, y_3)$, $k(y_1, y_2, y_3)$, $t(y_1, y_2, y_3)$ della forma biquadratica $f(y_1, y_2, y_3)$ si avrà la relazione:

$$8 \cdot 9 \cdot 7^3 t_0 \, [t^2(y_1, y_2, y_3) + t_0^2 h^7(y_1, y_2, y_3)] = k^3(y_1, y_2, y_3).$$

Se infine notasi che posto:

$$z_1 = e^{\frac{1}{3}\int p_1 dx}(y_2 y'_3 - y_3 y'_2), \qquad z_2 = e^{\frac{1}{3}\int p_1 dx}(y_3 y'_1 - y_1 y'_3),$$
$$z_3 = e^{\frac{1}{3}\int p_1 dx}(y_1 y'_2 - y_2 y'_1)$$

le z_1, z_2, z_3 sono integrali fondamentali della equazione differenziale del terzo ordine:

$$z''' + p_1 z'' + p_2 z' + (\alpha + p_3) z = 0$$

e che il valore di $\alpha_0 + \rho$ si ottiene da quello di ρ permutando le r, s, si dedurranno dalle superiori altrettante equazioni differenziali lineari del terzo ordine di cui saranno noti gli integrali quando lo sieno quelli delle stesse.

7.° Alcune fra le equazioni differenziali considerate sopra sono conosciute o possono dedursi da altre note. Il sig. Halphen nel suo importante lavoro premiato dall'Accademia delle Scienze (*) ha, fra gli altri, considerato il caso in cui $m = 2$, $r = 2$, $s = 1$ che conduce ad una relazione del terzo

(*) *Mémoires sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables*, pag. 141, 235.

ordine fra gli integrali, ed il caso $m = 4$, $r = 2$, $s = 1$ cioè il terzo dei sopra indicati. Il quarto si presenta nella trasformazione del settimo ordine delle funzioni ellittiche e la equazione differenziale corrispondente trovasi già nella mia Memoria: *Sulla teoria delle funzioni ellittiche* (*). Infine nel secondo caso, la funzione f, è il quadrato di una forma quadratica.

Rimangono così quattro forme biquadratiche $f(y_1, y_2, y_3)$ che soddisfano alle condizioni del problema, alle quali corrispondono le quattro equazioni differenziali ipergeometriche del terzo ordine sopra definite, e le altre che possono dedursi da ciascuna di esse nel modo seguente. Si indichino con η_1, η_2, η_3 tre integrali fondamentali di una equazione differenziale del terzo ordine, e suppongasi che fra gli integrali stessi e gli y_1, y_2, y_3 sussistano le tre relazioni:

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 = u$$

$$\eta_1 y'_1 + \eta_2 y'_2 + \eta_3 y'_3 = v$$

$$\eta_1 y''_1 + \eta_2 y''_2 + \eta_3 y''_3 = w$$

essendo u, v, w tre funzioni della variabile x. Se si indicano con U, V, W i tre determinanti:

$$U = \Sigma(\pm u v_1 w_2), \qquad V = \Sigma(\pm u v_2 w_3), \qquad W = \Sigma(\pm u_1 v_2 w_3)$$

nei quali:

$$u_1 = u' - p_1 u - v, \qquad v_1 = v' - p_1 v - w, \qquad w_1 = w' + p_2 v + p_3 u$$

e le u_2, v_2, w_2 sono formate colle u_1, v_1, w_1; le u_3, v_3, w_3 colle u_2, v_2, w_2 come le u_1, v_1, w_1 colle u, v, w; l'equazione differenziale in η è la seguente:

$$U\eta''' - (U' + p_1 U)\eta'' + [V + 2p_1 U' - (3p'_1 + p_1^2)U]\eta' -$$
$$- [W + p_1 V - (p'_1 - p_1^2)U' + (p''_1 - p_1 p'_1 - p_1^3)U]\eta = 0.$$

Per ciò se supponiamo che le u, v, w soddisfacciano alle condizioni:

$$\left.\begin{aligned} U' + 2p_1 U = 0 \qquad V &= \left[\tfrac{2}{9}\frac{l_0 x - 1}{x^2(x-1)} + 3p'_1 + 5p_1^2\right]U \\ W = -\left[\frac{\rho_0}{x^2(x-1)} + \tfrac{2}{9}p_1\frac{l_0 x - 1}{x^2(x-1)} + p''_1 + 4p_1 p'_1 + 2p_1^3\right]U \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

(*) Annali di Matematica, T. XII, Serie II, pag. 65.

l'equazione differenziale superiore diventa:

$$x^2(x-1)\eta''' + \tfrac{1}{2}(7x-4)x\eta'' + \tfrac{2}{9}(l_0 x - 1)\eta' + \rho_0\eta = 0$$

cioè una equazione ipergeometrica del tipo delle equazioni differenziali considerate fino qui.

Dalla prima delle relazioni (29) si ha tosto:

$$U = \frac{C}{x^4(x-1)^3}$$

essendo C una costante, e siccome il determinante U, posto $\sigma = w' + p_1 w + p_3$, può scriversi:

$$U = w^3\left[1 - \left(\frac{\sigma}{w^2}\right)' + \frac{1}{w}\left(p_2 + p_3\frac{\sigma}{w^2}\right)\right]$$

si avrà:

$$w = \frac{1}{9}\frac{c}{x(x-1)}$$

e le costanti c, C saranno date dalle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} 2c^3 + c^2(1+4\gamma) + \delta(2\delta+3c) &= 0 \\ \overline{27}^2 C = -(2c+\delta)(c+\delta) & \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

nelle quali si ha come sopra $\delta = 27\rho$, $\gamma = l - 7$. Determinati così i valori di U e di w, le altre due relazioni (29) daranno quelli di l_0, ρ_0. Posto $l_0 - 7 = \gamma_0$, $27\rho = \delta_0$ si ha così una prima equazione alla quale per la prima delle (30) può darsi la forma:

$$4(\gamma - \gamma_0)c = 3(3c + 2\delta)$$

o se indichiamo con r_0, s_0 i valori di r, s per la nuova equazione ipergeometrica, si avrà:

$$r_0^2 + s_0^2 + r_0 s_0 - (r^2 + s^2 + rs) = m^2\left[\tfrac{3}{2} + \frac{\delta}{c}\right].$$

Il valore di δ_0 trovasi essere:

$$\delta_0 = -\delta - 3c$$

e quindi:

$$(2r_0 + s_0)(2s_0 + r_0)(s_0 - r_0) - (2r + s)(2s + r)(s - r) =$$
$$= \tfrac{1}{2}m^3(4c-3)\left(\tfrac{3}{2} + \frac{\delta}{c}\right).$$

Per queste relazioni a ciascuno dei valori di c forniti dalla (30) si otterranno i corrispondenti valori di r_0, s_0.

Limitandoci a considerare il caso in cui $m = 7$, essendo pel medesimo:

$$\gamma = -\frac{5}{7 \cdot 8}, \qquad \delta = -\frac{5 \cdot 17}{8 \cdot 7^3}, \qquad r = 2, \qquad s = 1$$

si avranno le:

$$c = \frac{5}{4 \cdot 7^2}, \qquad r_0 = 4, \qquad s_0 = 1$$

e siccome dalla equazione (11) si ha:

$$\mu_{01} = \frac{2}{27} \frac{\gamma - 14\,\delta}{x(x-1)}$$

sarà $\mu_{01} = 9\,w$, cioè gli integrali η_1, η_2, η_3 saranno in questo caso eguali ad h_1, h_2, h_3, come ha già indicato recentemente il sig. Halphen in una lettera indirizzata al prof. Klein (*). Gli integrali della equazione differenziale per la quale $r_0 = 1$, $s_0 = 4$, saranno pel teorema dimostrato sul finire del precedente paragrafo:

$$e^{\frac{1}{3}\int p_1 dx}(h_2 h'_3 - h_3 h'_2), \qquad e^{\frac{1}{3}\int p_1 dx}(h_3 h'_1 - h_1 h'_3), \qquad e^{\frac{1}{3}\int p_1 dx}(h_1 h'_2 - h_2 h'_1)$$

ossia:

$$\xi_1 = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix}, \qquad \xi_3 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}.$$

8.° L'equazione (30) dà tre valori reali di c per ciascuna coppia di valori di γ e di δ. Pel caso in cui $m = 7$ i due valori non ancora considerati sono:

$$c = -\frac{5 \cdot 17}{4 \cdot 7^2}, \qquad c = \frac{17}{4 \cdot 7^2}$$

ai quali corrispondono i seguenti valori per r_0, s_0:

$$r_0 = 8, \quad s_0 = 2; \qquad r_0 = 6, \quad s_0 = 3.$$

Supponiamo:

$$\eta_1 = a\,k\,f_1 + b\,h^2\,h_1, \qquad \eta_2 = a\,k\,f_2 + b\,h^2\,h_2, \qquad \eta_3 = a\,k\,f_3 + b\,h^2\,h_3$$

nelle quali a, b sono coefficienti numerici a determinarsi, e gli integrali η_1, η_2, η_3 sono forme ternarie del 17° ordine, cioè tanto nell'uno che nell'altro caso dell'ordine $2(r_0 + 2\,s_0) - 7$.

(*) Mathematische Annalen, Bd. XXIV, pag. 463.

Evidentemente si avranno le:

$$u = b, \qquad v = 0, \qquad w = a\,k\,\lambda_{01} + b\,h^2\,\mu_{01}$$

e supponendo $b = 1$ come precedentemente, si avrà:

$$c = \frac{1}{4 \cdot 7^2}(5 \cdot 9 - 7 \cdot 11 \cdot a).$$

Le espressioni η_1, η_2, η_3 sopra indicate saranno quindi integrali della equazione ipergeometrica del terzo ordine per la quale $r_0 = 8$, $s_0 = 2$ allorquando sia $a = \frac{2 \cdot 5 \cdot 13}{7 \cdot 11}$, $b = 1$; ed integrali dell'altra per la quale $r_0 = 6$, $s_0 = 3$ se $a = \frac{4}{11}$, $b = 1$.

Infine se gli integrali η_1, η_2, η_3 sono le k_1, k_2, k_3, si avranno le:

$$u = \nu_{00}, \qquad v = \nu_{10}, \qquad w = \nu_{01}$$

ossia:

$$u = k_0\,x^{\frac{1}{3}}, \qquad v = \frac{k_0}{2 \cdot 3 \cdot 7}\,x^{-\frac{2}{3}}, \qquad w = \frac{k_0}{7 \cdot 9}\,\frac{p\,x - q}{x^{\frac{5}{3}}(x-1)}$$

essendo p, q due coefficienti numerici. Operando come si è fatto più addietro, la prima delle equazioni (29) dà due equazioni del terzo grado, l'una per la determinazione di p, l'altra per quella di q. Il fattore della prima che corrisponde al caso quì considerato è $28\,p + 41 = 0$, e l'equazione in q ha questa semplice forma:

$$(2\,q + 1)(q + 1)(q + 14) = 0;$$

e le altre due equazioni (29) conducono ai valori $r_0 = 8$, $s_0 = 1$.

I risultati ottenuti fin qui dimostrano l'analogia esistente, per $m = 7$, fra questa equazione differenziale ipergeometrica del terzo ordine e quella del secondo ordine denominata dall'icosaedro.

9.° Nel caso di $m = 5$, il sig. Halphen nella sua Memoria più volte citata, ha determinati i valori degli integrali della equazione differenziale del terzo ordine, per $r = 2$, $s = 1$; $r = 3$, $s = 1$, in funzione del rapporto di due integrali fondamentali della equazione ipergeometrica dell'icosaedro. Indicando con v_1, v_2 questi ultimi integrali e ponendo $z = v_1\,v_2\,\sqrt{5}$ la z è radice dell'equazione modulare Jacobiana:

$$z^{12} + 10\,z^6 - 12\,x^{\frac{1}{3}}\,z^2 + 5 = 0$$

e, come è noto, si hanno i seguenti sei tipi di radici di equazioni Jacobiane:

$$\varphi_0 = z, \qquad \varphi_1 = \frac{1}{z}(z^6 - 5), \qquad \varphi_2 = (z^6 + 9)z^3$$

$$\psi_0 = (z^6 + 7)z, \qquad \psi_1 = \frac{1}{z}(z^6 + 5), \qquad \psi_2 = z^3.$$

Ora ciascuna di queste funzioni è integrale di una equazione differenziale ipergeometrica del terzo ordine, nella quale $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2}$ $b_1 = \frac{2}{3}$, $b_2 = \frac{1}{3}$ e si hanno per φ_0: $r = s = 1$ e per ψ_0: $r = s = 2$; poi per φ_1: $r = 3$, $s = 1$ ed $r = 1$, $s = 3$ per φ_2: infine per ψ_1: $r = 1$, $s = 2$ e per ψ_2: $r = 2$, $s = 1$: cioè la z, come si è già detto, e la $(z^6 + 7)z$ sono funzioni quadratiche di due integrali fondamentali delle equazioni ipergeometriche del secondo ordine per le quali $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{r}{5}$, $\nu = \frac{1}{2}$. I casi in cui $r = s = 3$, $r = s = 4$ si ottengono per mezzo di relazioni lineari delle φ, ψ; nel primo caso la relazione lineare corrispondente è la $3\psi_0 + 12x^{\frac{1}{3}}\psi_2$; e nel secondo la $12\varphi_0 + 12x^{\frac{1}{3}}\varphi_2$. Queste varie espressioni si possono facilmente formare in funzioni omogenee di v_1, v_2, osservando essere:

$$f = v_1 v_2 (v_1^{10} - v_2^{10} - 11 v_1^5 v_2^5) = 1$$

$$h = v_1^{20} + v_2^{10} + 228 v_1^5 v_2^5 (v_1^{10} - v_2^{10}) + 494 v_1^{10} v_2^{10} = 12 x^{\frac{1}{3}};$$

si avrebbe quindi, ad esempio, per:

$$\varphi_1 = \frac{\sqrt{5}}{v_1 v_2}[25 v_1^6 v_2^6 - f] = \sqrt{5}(36 v_1^5 v_2^5 + v_1^{10} - v_2^{10})$$

e per:

$$\psi_1 = \sqrt{5}(14 v_1^5 v_2^5 + v_2^{10} - v_1^{10})$$

e così di seguito.

10.° Vogliamo da ultimo, in questo paragrafo, accennare ad una trasformazione di integrali che si ottiene facilmente da alcune delle formole stabilite in addietro.

Indicando con c_1, c_2, c_3 tre costanti se moltiplichiamo il determinante valore di $t(y_1, y_2, y_3)$ (pag. 5) per $\Sigma(\pm c_1 y_2 y'_3)$ nella ipotesi di $f(x) = 0$, qualunque sia n, si ottiene:

$$\frac{\Sigma(\pm c_1 y_2 y'_3)}{\Sigma c_1 f_1} = \frac{1}{t}(\mu_{00}\nu_{10} - \mu_{10}\nu_{00})$$

ossia per la (12):

$$\frac{\Sigma(\pm c_1 y_2 y'_3)}{\Sigma c_1 f_1} = \frac{\Delta}{\lambda_{01}}$$

ma:

$$\Delta^2 h = \frac{1}{n-1} \lambda_{01}^3$$

quindi si ha la formola di trasformazione dovuta al prof. FUCHS (*):

$$\frac{\Sigma(\pm c_1 y_2 y'_3)}{\Sigma c_1 f_1} = \frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{\Delta}{h}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Supponiamo ora che $n = 4$ ed $h = 1$, cioè le y_1, y_2, y_3 sieno gli integrali fondamentali dell'equazione differenziale considerata in addietro; si avrà:

$$\frac{\Sigma(\pm c_1 y_2 y'_3)}{\Sigma c_1 f_1} = \text{Cost.}^{\text{e}} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{2}}} = \text{Cost.}^{\text{e}} \eta^4(\omega) \frac{d\omega}{dx}$$

essendo: $\eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}} \Pi_r (1 - q^{2r})$ od anche (**):

$$\eta^3(\omega) = \tfrac{1}{2} \vartheta'_1(0, \omega).$$

(*) Acta Mathematica, *Ueber lineare homogene differentialgleichungen*, etc. An. 1882.
(**) HURWITZ, Mathematische Annalen, Bd. XXV, pag. 184.

Un problema sulle espressioni differenziali.

(*Nota del prof.* GABRIELE TORELLI, *a Napoli.*)

1. Il PFAFF (*) fece dipendere l'integrazione delle equazioni alle derivate parziali di prim'ordine dal problema seguente che porta il suo nome:

Essendo data l'espressione differenziale lineare $\sum_1^n {}_s\, a_s\, dx_s$, in cui i coefficienti a sono funzioni delle n variabili x, trasformarla in un'altra del tipo $\mu \sum_1^{n-1} {}_l\, c_l\, du_l$, dove i coefficienti c sono funzioni delle $n-1$ variabili u, le quali alla loro volta, come pure μ, dipendono dalle x.

Il RICCI in una recente Memoria (**) ha esposta la ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti, affinchè l'espressione differenziale quadratica $\sum_1^n {}_s\, a_{s_1 s_2}\, dx_{s_1}\, dx_{s_2}$ sia trasformabile in un'altra del tipo $\sum_1^{n-1} {}_l\, c_{l_1 l_2}\, du_{l_1}\, du_{l_2}$, e ha indicato il modo come effettuare la riduzione, allorchè è possibile.

Nella I parte della presente Nota io tratterò il problema generale:

Essendo data una espressione differenziale di grado r

$$\varphi = \sum_1^n {}_s\, a_{s_1 \ldots s_r}\, dx_{s_1} \ldots dx_{s_r},$$

dove il gruppo d'indici $s_1 \ldots s_r$ è una delle disposizioni con ripetizioni dei numeri $1, 2, \ldots, n$ ad r ad r, la sommatoria va estesa a tutte le disposizioni, ed ogni coefficiente $a_{s_1 \ldots s_r}$ è una funzione delle n variabili x che rimane im-

(*) PFAFF, *Methodus generalis, aequationes differentiarum partiarum,* etc. Mémoires de Berlin, 1814-15, pag. 76.

(**) RICCI, *Principii di una teoria delle forme differenziali quadratiche.* Annali di Matematica, Serie II, Tomo XII, pag. 135.

mutata se varia soltanto l'ordine degli r indici s, cercare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'espressione φ sia trasformabile in un'altra del tipo

$$\mu \sum_{1}^{n-1}{}_{l}\, c_{l_1 \ldots l_r}\, du_{l_1} \ldots du_{l_r},$$

dove i coefficienti c son funzioni delle $n-1$ variabili u, le quali alla loro volta, come pure μ, dipendono dalle n variabili x: effettuare la trasformazione, se è possibile, e vedere infine quando e come la φ si possa rendere identica a

$$\sum_{1}^{n-1}{}_{l}\, c_{l_1 \ldots l_r}\, du_{l_1} \ldots du_{l_r}.$$

Risolverò il problema seguendo una via diversa da quelle che battono i due Autori su nominati nel trattare i casi particolari più sopra enunciati. Così il calcolo riesce forse più simmetrico, e relativamente più semplice.

Ma il problema di Pfaff si può anche generalizzare da un altro punto di vista. Consideriamo gli r gruppi ognuno di n variabili indipendenti

$$x_{h1}\, x_{h2} \ldots x_{hn} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r)$$

e l'espressione differenziale

$$\psi = \sum_{1}^{n}{}_{s}\, a_{s_1 \ldots s_r}\, dx_{1s_1} \ldots dx_{rs_r},$$

dove il gruppo d'indici $s_1 \ldots s_r$ è una delle disposizioni con ripetizioni dei numeri $1, 2, \ldots, n$ ad r ad r, la sommatoria va estesa a tutte le disposizioni, ed ogni coefficiente $a_{s_1 \ldots s_r}$ è una funzione delle nr variabili x (la quale però ora generalmente varia al mutare sia il valore che l'ordine degl'indici s). Tale espressione è lineare rispetto ai differenziali di ciascun gruppo di variabili x; ecco perchè la chiamerò espressione differenziale polilineare, o più propriamente r-lineare. Possiamo quindi proporci la quistione:

Data l'espressione differenziale r-lineare

$$\psi = \sum_{1}^{n}{}_{s}\, a_{s_1 \ldots s_r}\, dx_{1s_1} \ldots dx_{rs_r},$$

cercare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè essa, mediante r distinte sostituzioni degli r gruppi di variabili x, sia trasformabile in un'altra del tipo

$$\mu \sum_{1}^{n-1}{}_{l}\, c_{l_1 \ldots l_r}\, du_{1l_1} \ldots du_{rl_r},$$

dove i coefficienti c son funzioni delle $(n-1)r$ variabili u, le quali alla loro volta, come pure μ, dipendono dalle nr variabili x; effettuare la trasformazione, se è possibile, e vedere infine quando e come la φ si possa rendere identica a

$$\sum_1^{n-1} {}_l\, c_{l_1 \ldots l_r}\, d u_{1 l_1} \ldots d u_{r l_r}.$$

La risoluzione di questo problema che procede in un modo del tutto analogo a quella del precedente, forma l'oggetto della II parte di questa Nota.

I.

2. Nella espressione differenziale di grado r

$$\varphi = \sum_1^n {}_s\, a_{s_1 \ldots s_r}\, d x_{s_1} \ldots d x_{s_r}$$

cambiamo le variabili x nelle variabili u legate alle prime dalle relazioni

$$x_s = x_s(u_1, u_2, \ldots, u_n), \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

I differenziali dx sono espressi in funzione dei differenziali du per mezzo del sistema

$$d x_s = \sum_1^n {}_l \frac{\partial x_s}{\partial u_l} d u_l, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Perciò l'espressione φ, fatta la sostituzione (1), diventa

$$\varphi = \sum_1^n {}_{sl}\, a_{s_1 \ldots s_r} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial u_{l_1}} \cdots \frac{\partial x_{s_r}}{\partial u_{l_r}} d u_{l_1} \ldots d u_{l_r};$$

cioè ponendo

$$\sum_1^n {}_s\, a_{s_1 \ldots s_r} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial u_{l_1}} \cdots \frac{\partial x_{s_r}}{\partial u_{l_r}} = b_{l_1 \ldots l_r}, \tag{3}$$

si ha

$$\varphi = \sum_1^n {}_l\, b_{l_1 \ldots l_r}\, d u_{l_1} \ldots d u_{l_r}. \tag{4}$$

Or per esaminare se la φ sia trasformabile nell'altra

$$\mu \sum_1^{n-1} {}_l\, c_{l_1 \ldots l_r}\, d u_{l_1} \ldots d u_{l_r},$$

occorre in primo luogo trovar le condizioni necessarie e sufficienti acciocchè dalla (4) sparisca du_n, e poi quelle affinchè sparisca u_n da $\frac{b_{l_1 \dots l_r}}{b_{\lambda_1 \dots \lambda_r}}$, essendo $b_{l_1 \dots l_r}$, $b_{\lambda_1 \dots \lambda_r}$ coefficienti di due termini contenenti i rimanenti differenziali du. Per la ricerca delle prime condizioni basta applicare il noto teorema: Affinchè n funzioni di n variabili sian legate da una relazione indipendente dalle n variabili, è necessario e sufficiente che il loro Jacobiano sia identicamente nullo.

Ed in vero immaginiamo che il sistema (1) risoluto rispetto alle u dia

$$u_l = u_l(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad (l = 1, 2, \dots, n); \tag{5}$$

poniamo

$$J_x = \sum \pm \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \sum \pm u_{11} \dots u_{nn},$$

e indichiamo come al solito con U_{ls} il complemento algebrico di u_{ls} in J_x. Differenziamo le prime $n-1$ equazioni (5), otterremo

$$du_l = \sum_1^n {}_s \frac{\partial u_l}{\partial x_s} dx_s, \qquad (l = 1, 2, \dots, n-1).$$

Affinchè la φ sia esprimibile soltanto per mezzo di $du_1, du_2, \dots, du_{n-1}$, è necessario e sufficiente che considerando $du_1, du_2, \dots, du_{n-1}$, φ come funzioni di $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ riguardate come variabili, il loro Jacobiano sia identicamente nullo, cioè è necessario e sufficiente che

$$U_{n1} \sum_1^n {}_s a_{s_1 \dots s_{r-1} 1} dx_{s_1} \dots dx_{s_{r-1}} + \dots + U_{nn} \sum_1^n {}_s a_{s_1 \dots s_{r-1} n} dx_{s_1} \dots dx_{s_{r-1}} = 0.$$

Ora poichè le x son variabili indipendenti, la precedente relazione dovrà sussistere identicamente, cioè dovranno esser nulli i coefficienti dei diversi prodotti $dx_{s_1} \dots dx_{s_{r-1}}$. Perciò dovrà aversi

$$U_{n1} a_{s_1 \dots s_{r-1} 1} + \dots + U_{nn} a_{s_1 \dots s_{r-1} n} = 0, \qquad (s_1, \dots, s_{r-1} = 1, 2, \dots, n). \tag{6}$$

Per ottenere tutte le equazioni distinte contenute nel precedente sistema basta porre nella equazione tipo in luogo del gruppo d'indici $s_1 \dots s_{r-1}$ tutte le combinazioni con ripetizione dei numeri $1, 2, \dots, n$ ad $r-1$ ad $r-1$. Si hanno così $\binom{n+r-2}{r-1}$ equazioni distinte. Ora per la coesistenza di queste equazioni è necessario e sufficiente che tutti i determinanti contenuti nella matrice

$$a = \left\| \begin{matrix} a_{1\ldots 111} & a_{1\ldots 112} & \cdot & a_{1\ldots 11n} \\ a_{1\ldots 121} & a_{1\ldots 122} & \cdot & a_{1\ldots 12n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\ldots nn1} & a_{n\ldots nn2} & \cdot & a_{n\ldots nnn} \end{matrix} \right\|$$

sieno identicamente nulli. Queste condizioni, che si riducono ad $\binom{n+r-2}{r-1} - n + 1$ distinte, sieno indicate brevemente con

$$a = 0. \tag{7}$$

Supposte verificate queste condizioni, i complementi algebrici degli elementi d'una linea in uno qualunque dei determinanti della matrice, nel quale tale linea figura, variano proporzionalmente sia al mutare del determinante che al mutare della linea; perciò dinotando con $A_{p_1\ldots p_{r-1}1}$, $A_{p_1\ldots p_{r-1}2}, \ldots, A_{p_1\ldots p_{r-1}n}$ i complementi algebrici degli elementi della linea $a_{p_1\ldots p_{r-1}1}$, $a_{p_1\ldots p_{r-1}2}, \ldots$, $a_{p_1\ldots p_{r-1}n}$ in qualsivoglia di quei determinanti si ha dal sistema (6)

$$\frac{U_{n1}}{A_{p_1\ldots p_{r-1}1}} = \frac{U_{n2}}{A_{p_1\ldots p_{r-1}2}} = \cdots = \frac{U_{nn}}{A_{p_1\ldots p_{r-1}n}};$$

ma è noto che

$$U_{ni} = J_x \frac{\partial x_i}{\partial u_n} \tag{8}$$

perciò

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial u_n}}{A_{p_1\ldots p_{r-1}1}} = \frac{\frac{\partial x_2}{\partial u_n}}{A_{p_1\ldots p_{r-1}2}} = \cdots = \frac{\frac{\partial x_n}{\partial u_n}}{A_{p_1\ldots p_{r-1}n}}. \tag{9}$$

Dunque si ricava che se la sostituzione (1) è quella che fa sparire du_n, il sistema (1) considerando $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ come costanti, verifica il sistema di equazioni differenziali simultanee (9). Ora in questo essendovi $n-1$ equazioni ed $n+1$ variabili, possiamo assegnare arbitrariamente il valore di una delle derivate $\frac{\partial x}{\partial u_n}$, per esempio $\frac{\partial x_n}{\partial u_n}$ (oppure l'espressione di x_n), ed integrando poi il sistema ricavare le espressioni di $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Si abbia così

$$x_s = \psi_s(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, u_n), \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

dove le c sieno costanti arbitrarie. Se in queste consideriamo oltre la u_n anche le c come variabili, e differenziamo, otteniamo

$$dx_s = \sum_1^{n-1} l \frac{\partial x_s}{\partial c_l} dc_l + \frac{\partial x_s}{\partial u_n} du_n, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

le quali paragonate colle due (2) ci mostrano che scelte le $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ rispettivamente eguali alle $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ si sarà trovata la richiesta sostituzione.

In fine giova osservare che dinotando con ρ il valor comune dei rapporti (9) avremo

$$U_{ni} = \rho\, J_x\, A_{p_1 \ldots p_{r-1} i}. \tag{10}$$

3. La condizione che occorre e basta affinchè il quoziente $\dfrac{b_{l_1 \ldots l_r}}{b_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}}$ si possa esprimere per mezzo di $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, è che il Jacobiano di $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, \dfrac{b_{l_1 \ldots l_r}}{b_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}}$ sia identicamente nullo. Tale Jacobiano è

$$\frac{1}{b^2_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}} \left\{ b_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \sum_1^n i\, U_{ni} \frac{\partial b_{l_1 \ldots l_r}}{\partial x_i} - b_{l_1 \ldots l_r} \sum_1^n i\, U_{ni} \frac{\partial b_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}}{\partial x_i} \right\}. \tag{11}$$

Ora

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{l_1 \ldots l_r}}{\partial x_i} = \sum_1^n s \frac{\partial a_{s_1 \ldots s_r}}{\partial x_i} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial u_{l_1}} \cdots \frac{\partial x_{s_r}}{\partial u_{l_r}} &+ \sum_1^n st\, a_{s_1 \ldots s_r} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial u_{l_1}} \cdots \frac{\partial x_{s_{r-1}}}{\partial u_{l_{r-1}}} \frac{\partial^2 x_{s_r}}{\partial u_{l_r} \partial u_t} u_{ti} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \sum_1^n st\, a_{s_1 \ldots s_r} \frac{\partial x_{s_2}}{\partial u_{l_2}} \cdots \frac{\partial x_{s_r}}{\partial u_{l_r}} \frac{\partial^2 x_{s_1}}{\partial u_{l_1} \partial u_t} u_{ti}. \end{aligned}$$

Se moltiplichiamo ambo i membri per U_{ni}, sommiamo rispetto ad i da 1 ad n, e teniamo presenti le (10) e le identità

$$\sum_1^n i\, U_{ni}\, u_{ti} = 0, \qquad (t \gtrless n); \qquad \sum_1^n i\, U_{ni}\, u_{ni} = J_x,$$

deduciamo

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n i\, U_{ni} \frac{\partial b_{l_1 \ldots l_r}}{\partial x_i} = J_x \Big\{ \rho \sum_1^n s \frac{\partial x_{s_1}}{\partial u_{l_1}} \cdots \frac{\partial x_{s_r}}{\partial u_{l_r}} \sum_1^n i \frac{\partial a_{s_1 \ldots s_r}}{\partial x_i} A_{p_1 \ldots p_{r-1} i} \\ + \sum_1^n s\, a_{s_1 \ldots s_r} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial u_{l_1}} \cdots \frac{\partial x_{s_{r-1}}}{\partial u_{l_{r-1}}} \frac{\partial^2 x_{s_r}}{\partial u_{l_r} \partial u_n} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \sum_1^n s\, a_{s_1 \ldots s_r} \frac{\partial x_{s_2}}{\partial u_{l_2}} \cdots \frac{\partial x_{s_r}}{\partial u_{l_r}} \frac{\partial^2 x_{s_1}}{\partial u_{l_1} \partial u_n} \Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Ora nel sistema (6) sostituendo per le U i valori dati dalle (8) si ha

$$\sum_{1}^{n} {}_{s_r}\, a_{s_1 \ldots s_{r-1} s_r} \frac{\partial x_{s_r}}{\partial u_n} = 0;$$

derivando rispetto ad u_{l_r} e tenendo presente che $\frac{\partial x_{s_r}}{\partial u_n} = \rho\, A_{p_1 \ldots p_{r-1} s_r}$ si ricava

$$\sum_{1}^{n} {}_{s_r}\, a_{s_1 \ldots s_{r-1} s_r} \frac{\partial^2 x_{s_r}}{\partial u_n\, \partial u_{l_r}} = -\rho \sum_{1}^{n} {}_{s_r i} \frac{\partial a_{s_1 \ldots s_r}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_{l_r}} A_{p_1 \ldots p_{r-1} s_r};$$

moltiplicando per $\frac{\partial x_{s_1}}{\partial u_{l_1}} \cdots \frac{\partial x_{s_{r-1}}}{\partial u_{l_{r-1}}}$ e sommando rispetto ad $s_1, \ldots, s_{r-1}$ da 1 ad n si ottiene

$$\sum_{1}^{n} {}_{s}\, a_{s_1 \ldots s_r} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial u_{l_1}} \cdots \frac{\partial x_{s_{r-1}}}{\partial u_{l_{r-1}}} \frac{\partial^2 x_{s_r}}{\partial u_{l_r}\, \partial u_n} = -\rho \sum_{1}^{n} {}_{si} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial u_{l_1}} \cdots \frac{\partial x_{s_{r-1}}}{\partial u_{l_{r-1}}} \frac{\partial x_i}{\partial u_{l_r}} \frac{\partial a_{s_1 \ldots s_r}}{\partial x_i} A_{p_1 \ldots p_{r-1} s_r},$$

e finalmente scambiando nel termine, che figura come tipo al secondo membro, gl'indici i ed s_r il che evidentemente non altera il valore del 2° membro, si ha

$$\sum_{1}^{n} {}_{s}\, a_{s_1 \ldots s_r} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial u_{l_1}} \cdots \frac{\partial x_{s_{r-1}}}{\partial u_{l_{r-1}}} \frac{\partial^2 x_{s_r}}{\partial u_{l_r}\, \partial u_n} = -\rho \sum_{1}^{n} {}_{s} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial u_{l_1}} \cdots \frac{\partial x_{s_r}}{\partial u_{l_r}} \sum_{1}^{n} {}_{i} \frac{\partial a_{s_1 \ldots s_{r-1} i}}{\partial x_i} A_{p_1 \ldots p_{r-1} i}.$$

Abbiamo così trasformata la seconda sommatoria che figura al secondo membro della (12); se così facciamo anche per le seguenti e poniamo

$$\frac{\partial a_{s_1 \ldots s_{r-1} i}}{\partial x_{s_r}} + \cdots + \frac{\partial a_{i s_2 \ldots s_r}}{\partial x_{s_1}} - \frac{\partial a_{s_1 \ldots s_r}}{\partial x_i} = 2(r-1) \begin{bmatrix} s_1 \ldots s_r \\ i \end{bmatrix}$$

e

$$\sum_{1}^{n} {}_{i}\, A_{p_1 \ldots p_{r-1} i} \begin{bmatrix} s_1 \ldots s_r \\ i \end{bmatrix} = \omega_{s_1 \ldots s_r}$$

otteniamo

$$\sum_{1}^{n} {}_{i}\, U_{ni} \frac{\partial b_{l_1 \ldots l_r}}{\partial x_i} = -2(r-1) \rho J_x \sum_{1}^{n} {}_{s}\, \omega_{s_1 \ldots s_r} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial u_{l_1}} \cdots \frac{\partial x_{s_r}}{\partial u_{l_r}}. \tag{13}$$

Per mezzo di questa relazione e della (3) l'espressione (11) del Jacobiano si trasforma in

$$-\frac{2(r-1)\rho J_x}{b^2_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}} \sum_{1}^{n} {}_{s\sigma} \left(a_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}\, \omega_{s_1 \ldots s_r} - a_{s_1 \ldots s_r}\, \omega_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}\right) \frac{\partial x_{s_1}}{\partial u_{l_1}} \cdots \frac{\partial x_{s_r}}{\partial u_{l_r}} \frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial u_{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial x_{\sigma_r}}{\partial u_{\lambda_r}}.$$

Dunque la condizione necessaria e sufficiente affinchè da $\frac{b_{l_1\ldots l_r}}{b_{\lambda_1\ldots\lambda_r}}$ sparisca u_n è

$$\sum_1^n{}_{s\sigma}\left(a_{\sigma_1\ldots\sigma_r}\,\omega_{s_1\ldots s_r}-a_{s_1\ldots s_r}\,\omega_{\sigma_1\ldots\sigma_r}\right)\frac{\partial x_{s_1}}{\partial u_{l_1}}\cdots\frac{\partial x_{s_r}}{\partial u_{l_r}}\,\frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial u_{\lambda_1}}\cdots\frac{\partial x_{\sigma_r}}{\partial u_{\lambda_r}}=0. \qquad (14)$$

Sviluppando la sommatoria, che sta al primo membro, rispetto a σ_r e poi facendo successivamente $\lambda_r = 1, 2, \ldots, n$ si ha un sistema di equazioni lineari rispetto alle sommatorie che restano indicate, e poichè i secondi membri sono tutti nulli, e il determinante del sistema è il Jacobiano delle x rispetto alle u, che non è nullo, poichè le x sono indipendenti, si ricava che ognuna delle sommatorie che resta indicata è nulla. E così continuando a sviluppare il tipo generale delle sommatorie che si deducono successivamente rispetto a $\sigma_{r-1}, \ldots,$ σ_1, $s_r, \ldots, s_1$ e ragionando ad ogni sviluppo come pocanzi, si perviene a conchiudere che

$$a_{\sigma_1\ldots\sigma_r}\,\omega_{s_1\ldots s_r}-a_{s_1\ldots s_r}\,\omega_{\sigma_1\ldots\sigma_r}=0,$$

cioè

$$\frac{\omega_{s_1\ldots s_r}}{a_{s_1\ldots s_r}}=\frac{\omega_{\sigma_1\ldots\sigma_r}}{a_{\sigma_1\ldots\sigma_r}},$$

vale a dire

$$\frac{\sum_1^n{}_i\, A_{p_1\ldots p_{r-1}i}\begin{bmatrix} s_1\ldots s_r \\ i\end{bmatrix}}{a_{s_1\ldots s_r}}=\frac{\sum_1^n{}_i\, A_{p_1\ldots p_{r-1}i}\begin{bmatrix} \sigma_1\ldots \sigma_r \\ i\end{bmatrix}}{a_{\sigma_1\ldots\sigma_r}} \qquad (15)$$

$$(s_1, \ldots, s_r = 1, 2, \ldots, n).$$

Nella (14) abbiamo dato alle l e λ il valore n; può parere a prima vista non esser ciò lecito giacchè in questo § 3 con $b_{l_1\ldots l_r}$, $b_{\lambda_1\ldots\lambda_r}$ abbiamo indicati coefficienti di termini non contenenti du_n. Ma nell'ipotesi di una o più delle l o λ eguali ad n essendo

$$b_{l_1\ldots l_r}=b_{\lambda_1\ldots\lambda_r}=0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial b_{l_1\ldots l_r}}{\partial x_i}=\frac{\partial b_{\lambda_1\ldots\lambda_r}}{\partial x_i}=0,$$

il fattore fra parentesi della espressione (11) è nullo, e quindi la (14) regge anche se alle l o λ si dà il valore n. E però fra le relazioni (15) ve ne ha un certo numero che non sono condizioni nuove, ma sono conseguenze delle (7) e (9) combinate colle rimanenti equazioni del sistema (15). E propriamente in tal sistema vi sono $\binom{n+r-1}{r}-1$ equazioni; di esse verificatesene

$\binom{n+r-2}{r}-1$ si troveranno soddisfatte le altre $\binom{n+r-2}{r-1}$ come conseguenze delle precedenti combinate colle (7) e (9); e ciò potea prevedersi, poichè $\binom{n+r-2}{r}$ è il numero dei coefficienti b generalmente diversi fra loro, e da zero.

Laonde si deduce che le condizioni necessarie e sufficienti affinchè da $c_{l_1\ldots l_r}$ sparisca u_n sono

$$\frac{\sum_1^n i\, A_{p_1\ldots p_{r-1}i}\begin{bmatrix} s_1\ldots s_r \\ i \end{bmatrix}}{a_{s_1\ldots s_r}} = \frac{\sum_1^n i\, A_{p_1\ldots p_{r-1}i}\begin{bmatrix} \sigma_1\ldots \sigma_r \\ i \end{bmatrix}}{a_{\sigma_1\ldots\sigma_r}}, \tag{16}$$

$$(s_1,\ldots,\ s_r=1,\ 2,\ldots;\ n-1).$$

È facile ora determinare il fattore μ.

Deriviamo rispetto ad x_i la relazione

$$b_{l_1\ldots l_r} = \mu\, c_{l_1\ldots l_r};$$

moltiplichiamo per U_{ni} e sommiamo rispetto ad i da 1 ad n; otterremo, dopo aver tenuto conto che il Jacobiano di $u_1,\ u_2,\ldots,\ u_{n-1},\ c_{l_1\ldots l_r}$ è nullo,

$$\sum_1^n i\, U_{ni}\frac{\partial b_{l_1\ldots l_r}}{\partial xi} = c_{l_1\ldots l_r}\sum_1^n i\, U_{ni}\frac{\partial \mu}{\partial xi},$$

ed in virtù delle (8)

$$\sum_1^n i\, U_{ni}\frac{\partial b_{l_1\ldots l_r}}{\partial xi} = c_{l_1\ldots l_r} J_x \frac{\partial \mu}{\partial un},$$

e questa in forza delle (13) e (3) si riduce a

$$\sum_1^n s \left\{ 2(r-1)\rho\mu\,\omega_{s_1\ldots s_r} + \frac{\partial\mu}{\partial un} a_{s_1\ldots s_r} \right\} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial u_{l_1}} \cdots \frac{\partial x_{s_r}}{\partial u_{l_r}} = 0,$$

ed applicando a tale relazione un ragionamento analogo a quello fatto sulla (14) si deduce

$$\frac{\omega_{s_1\ldots s_r}}{a_{s_1\ldots s_r}} = -\frac{1}{2(r-1)\rho}\frac{\partial \log\mu}{\partial un}; \tag{17}$$

donde

$$\mu = e^{\chi(u_1,\ldots,\ u_{n-1}) - 2(r-1)\int \frac{\sum_1^n i\, A_{p_1\ldots p_{r-1}i}\begin{bmatrix} s_1\ldots s_r \\ i \end{bmatrix}}{a_{s_1\ldots s_r}}\rho\, du_n}, \tag{18}$$

nella quale $\chi(u_1, \ldots, u_{n-1})$ indica una funzione arbitraria delle $u_1, \ldots, u_{n-1}$ costante rispetto ad u_n, che s'introduce mediante l'integrazione indicata.

Dunque ricapitolando conchiudiamo:

Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'espressione differenziale di grado r

$$\varphi = \sum_1^n {}_s\, a_{s_1 \ldots s_r}\, dx_{s_1} \ldots dx_{s_r}$$

sia trasformabile nell'altra

$$\mu \sum_1^{n-1} {}_l\, c_{l_1 \ldots l_r}\, du_{l_1} \ldots du_{l_r}$$

sono le (7) *e* (16); *la sostituzione atta ad eseguire la trasformazione si ricava integrando il sistema* (9), *e scegliendo le* $n-1$ *costanti arbitrarie come variabili* $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$; *e finalmente il valore di* μ *è fornito dalla* (18).

4. Si tratti ora delle condizioni affinchè l'espressione differenziale φ sia riducibile all'altra

$$\sum_1^{n-1} {}_l\, c_{l_1 \ldots l_r}\, du_{l_1 \ldots l_r}.$$

Le (7) sono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè sparisca du_n, e l'integrazione del sistema (9) fornirà la sostituzione. Per ottenere le condizioni necessarie e sufficienti acciocchè dai coefficienti della espressione ridotta sparisca u_n, basta supporre nelle (17) $\mu = 1$, e si conchiude che le condizioni richieste sono

$$\sum_1^n {}_i\, A_{p_1 \ldots p_{r-1} i} \begin{bmatrix} s_1 \ldots s_r \\ i \end{bmatrix} = 0, \tag{19}$$

$$(s_1, \ldots, s_r = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Queste equazioni reggono ancora se ad alcune o a tutte le s si dà il valore n, ma le nuove equazioni sono conseguenze delle precedenti combinate colle (7) e (9).

Allo stesso risultato si potrebbe pervenire direttamente arrestando il calcolo del § 3 alla formola (13), e ragionando su di questa come si è fatto sulla (14).

Le condizioni (7) e (19) per $r = 2$ si riducono alle equazioni (I) e (II) della citata Memoria del Ricci.

II.

5. Nella espressione differenziale r-lineare

$$\psi = \sum_1^n{}_s\, a_{s_1 \dots s_r}\, d x_{1 s_1} \dots d x_{r s_r}$$

cambiamo le variabili x nelle variabili u legate alle prime dalle relazioni

$$x_{hs} = x_{hs}(u_{h1}, u_{h2}, \dots, u_{hn}), \qquad (s = 1, 2, \dots, n;\ h = 1, 2, \dots, r). \quad (1)$$

Posto

$$\sum_1^n{}_s\, a_{s_1 \dots s_r} \frac{\partial x_{1 s_1}}{\partial u_{1 l_1}} \dots \frac{\partial x_{r s_r}}{\partial u_{r l_r}} = b_{l_1 \dots l_r} \quad (3)$$

l'espressione differenziale ψ diventa

$$\psi = \sum_1^n{}_l\, b_{l_1 \dots l_r}\, d u_{1 l_1} \dots d u_{r l_r}. \quad (4)$$

Per esaminare se la ψ sia trasformabile nell'altra

$$\mu \sum_1^{n-1}{}_l\, c_{l_1 \dots l_r}\, d u_{1 l_1} \dots d u_{r l_r},$$

occorre in primo luogo cercare le condizioni necessarie e sufficienti acciocchè dalla (4) spariscano $d u_{1n}, d u_{2n}, \dots, d u_{rn}$, e poi quelle affinchè spariscano u_{1n}, $u_{2n}, \dots, u_{rn}$ da $\dfrac{b_{l_1 \dots l_r}}{b_{\lambda_1 \dots \lambda_r}}$.

Poniamo

$$J_{hx} = \sum \pm \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_{h1}} \dots \frac{\partial u_{hn}}{\partial x_{hn}} = \sum \pm u_{h11} \dots u_{hnn}, \qquad (h = 1, 2, \dots, r),$$

e indichiamo con U_{hls} il complemento algebrico di u_{hls} in J_{hx}.

Ragionando come nel § 2 si trova che le condizioni necessarie e sufficienti acciocchè sparisca $d u_{1n}$ dalla (4) sono

$$U_{1n1}\, a_{1 s_2 \dots s_r} + \dots + U_{1nn}\, a_{n s_2 \dots s_r} = 0, \qquad (s_2, \dots, s_r = 1, 2, \dots, n). \quad (6_1)$$

Per ottenere tutte le equazioni contenute nel precedente sistema basta porre nella equazione tipo in luogo del gruppo d'indici $s_2 \dots s_r$ tutte le disposizioni con ripetizioni dei numeri $1, 2, \dots, n$ ad $r-1$ ad $r-1$. Si hanno così n^{r-1} equazioni distinte. Ora per la coesistenza di queste equazioni è necessario e sufficiente che tutti i determinanti contenuti nella matrice a' del sistema sieno identicamente nulli. Queste condizioni che si riducono ad $n^{r-1} - n + 1$ distinte sieno indicate brevemente con

$$a' = 0. \tag{7$_1$}$$

Supposte verificate queste condizioni dinotiamo con $A'_{1p_2\ldots p_r}$, $A'_{2p_2\ldots p_r}, \ldots,$ $A'_{np_2\ldots p_r}$ i complementi algebrici degli elementi della linea $a_{1p_2\ldots p_r}$, $a_{2p_2\ldots p_r}, \ldots,$ $a_{np_2\ldots p_r}$ in qualsivoglia dei determinanti della matrice a'; si ha quindi dal sistema (6$_1$)

$$\frac{U_{1n1}}{A'_{1p_2\ldots p_r}} = \frac{U_{1n2}}{A'_{2p_2\ldots p_r}} = \cdots = \frac{U_{1nn}}{A'_{np_2\ldots p_r}};$$

ma è

$$U_{1ni} = J_{1x} \frac{\partial x_{1i}}{\partial u_{1n}}, \tag{8$_1$}$$

perciò

$$\frac{\dfrac{\partial x_{11}}{\partial u_{1n}}}{A'_{1p_2\ldots p_r}} = \frac{\dfrac{\partial x_{12}}{\partial u_{1n}}}{A'_{2p_2\ldots p_r}} = \cdots = \frac{\dfrac{\partial x_{1n}}{\partial u_{1n}}}{A'_{np_2\ldots p_r}}. \tag{9$_1$}$$

Chiamando ρ_1 il valor comune di questi rapporti si ricava

$$U_{1ni} = \rho_1 J_{1x} A'_{ip_2\ldots p_r}. \tag{10$_1$}$$

L'integrazione del sistema (9$_1$) fornisce la sostituzione atta a fare sparire du_{1n}, scelte che si sono quali novelle variabili $u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n-1}$ le espressioni delle costanti arbitrarie introdotte mediante l'integrazione.

Ragionando analogamente sugli altri gruppi di variabili nell'intento di fare sparire dalla (4) $du_{2n}, \ldots, du_{rn}$ si perverrà a stabilire delle relazioni analoghe alle (6$_1$), (7$_1$), (8$_1$), (9$_1$), (10$_1$), che indicheremo occorrendo cogli stessi numeri muniti però successivamente degl'indici 2,..., r.

Notiamo infine che, nel caso particolare in cui ogni coefficiente a rimane immutato al variare dell'ordine dei suoi indici, le equazioni (7$_1$), (7$_2$),..., (7$_r$) diventano tutte identiche alla equazione (7) della I parte.

6. La condizione che occorre e basta affinchè il quoziente $\dfrac{b_{l_1\ldots l_r}}{b_{\lambda_1\ldots\lambda_r}}$ si possa esprimere per mezzo di $u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n-1}$, è che il Jacobiano di u_{11}, $u_{12}, \ldots, u_{1n}, \dfrac{b_{l_1\ldots l_r}}{b_{\lambda_1\ldots\lambda_r}}$ sia identicamente nullo. Tale Jacobiano è

$$\frac{1}{b^2_{\lambda_1\ldots\lambda_r}}\left\{b_{\lambda_1\ldots\lambda_r}\sum_1^n{}_i\, U_{1ni}\frac{\partial b_{l_1\ldots l_r}}{\partial x_{1i}} - b_{l_1\ldots l_r}\sum_1^n{}_i\, U_{1ni}\frac{\partial b_{\lambda_1\ldots\lambda_r}}{\partial x_{1i}}\right\}. \tag{11$_1$}$$

Se si trasforma questa espressione tal quale come l'espressione (11) della I parte, si pone

$$\frac{\partial a_{is_2\ldots s_r}}{\partial x_{1s_1}} - \frac{\partial a_{s_1\ldots s_r}}{\partial x_{1i}} = \theta'_{s_1 i}$$

e

$$\sum_1^n{}_i A'_{ip_2\ldots p_r} \theta'_{s_1 i} = \omega'_{s_1\ldots s_r},$$

il Jacobiano (11_1) si riduce a

$$-\frac{\rho_1 J_{1x}}{b^2_{\lambda_1\ldots\lambda_r}} \sum_1^n{}_{s\sigma}(a_{\sigma_1\ldots\sigma_r}\omega'_{s_1\ldots s_r} - a_{s_1\ldots s_r}\omega'_{\sigma_1\ldots\sigma_r}) \frac{\partial x_{1s_1}}{\partial u_{1l_1}}\cdots\frac{\partial x_{rs_r}}{\partial u_{rl_r}}\frac{\partial x_{1\sigma_1}}{\partial u_{1\lambda_1}}\cdots\frac{\partial x_{r\sigma_r}}{\partial u_{r\lambda_r}}.$$

Perciò la condizione necessaria e sufficiente affinchè da $\frac{b_{l_1\ldots l_r}}{b_{\lambda_1\ldots\lambda_r}}$ sparisca u_{1n} è

$$\sum_1^n{}_{s\sigma}(a_{\sigma_1\ldots\sigma_r}\omega'_{s_1\ldots s_r} - a_{s_1\ldots s_r}\omega'_{\sigma_1\ldots\sigma_r}) \frac{\partial x_{1s_1}}{\partial u_{1l_1}}\cdots\frac{\partial x_{rs_r}}{\partial u_{rl_r}}\frac{\partial x_{1\sigma_1}}{\partial u_{1\lambda_1}}\cdots\frac{\partial x_{r\sigma_r}}{\partial u_{r\lambda_r}} = 0, \qquad (14_1)$$

dalla quale come dalla (14) della I parte si trae

$$\frac{\sum_1^n{}_i A'_{ip_2\ldots p_r}\theta'_{s_1 i}}{a_{s_1\ldots s_r}} = \frac{\sum_1^n{}_i A'_{ip_2\ldots p_r}\theta'_{\sigma_1 i}}{a_{\sigma_1\ldots\sigma_r}}, \qquad (15_1)$$

$$(s_1,\ldots, s_r = 1, 2,\ldots, n).$$

Nel sistema (15_1) vi sono $n^r - 1$ equazioni, però di esse verificatesene $(n-1)^r - 1$ si troveranno soddisfatte le rimanenti come conseguenze delle precedenti e di tutte le (7) e le (9). Laonde si deduce che le condizioni necessarie e sufficienti affinchè da $c_{l_1\ldots l_r}$ sparisca u_{1n} sono

$$\frac{\sum_1^n{}_i A'_{ip_2\ldots p_r}\theta'_{s_1 i}}{a_{s_1\ldots s_r}} = \frac{\sum_1^n{}_i A'_{ip_2\ldots p_r}\theta'_{\sigma_1 i}}{a_{\sigma_1\ldots\sigma_r}}, \qquad (16_1)$$

$$(s_1,\ldots, s_r = 1, 2,\ldots, n-1).$$

Procedendo come nel § 3 della I parte si perviene ad esprimere i rapporti (15_1) per mezzo di μ mediante la formola

$$\frac{\sum_1^n{}_i A'_{ip_2\ldots p_r}\theta'_{s_1 i}}{a_{s_1\ldots s_r}} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \log \mu}{\partial u_{1n}},$$

che può anche scriversi

$$\frac{\sum_1^n i\,\theta'_{s_1 i}\frac{\partial x_{1i}}{\partial u_{1n}}}{a_{s_1\ldots s_r}} = -\frac{\partial \log\mu}{\partial u_{1n}}. \tag{17$_1$}$$

Ripetendo il medesimo calcolo per gli altri gruppi di variabili si troverebbero delle condizioni analoghe alle (15$_1$), (16$_1$), (17$_1$), che occorrendo dinoteremo coi medesimi numeri muniti successivamente degl'indici 2,..., r.

7. Dalle (17$_1$),..., (17$_r$) si trae che

$$-d\log\mu = \frac{\sum_1^n i\,\theta'_{s_1 i}\frac{\partial x_{1i}}{\partial u_{1n}}}{a_{s_1\ldots s_r}}\,du_{1n} + \cdots + \frac{\sum_1^n i\,\theta^{(r)}_{s_r i}\frac{\partial x_{ri}}{\partial u_{rn}}}{a_{s_1\ldots s_r}}\,du_{rn}. \tag{α}$$

Per avere una conferma dei calcoli finora eseguiti proveremo che il secondo membro dell'ultima eguaglianza è un differenziale esatto.

A tale scopo basta dimostrare l'eguaglianza

$$\frac{\partial}{\partial u_{rn}}\,\frac{\sum_1^n i\,\theta'_{s_1 i}\frac{\partial x_{1i}}{\partial u_{1n}}}{a_{s_1\ldots s_r}} = \frac{\partial}{\partial u_{1n}}\,\frac{\sum_1^n i\,\theta^{(r)}_{s_r i}\frac{\partial x_{ri}}{\partial u_{rn}}}{a_{s_1\ldots s_r}}, \tag{β}$$

poichè evidentemente collo stesso ragionamento si provano le rimanenti condizioni d'integrabilità.

Esprimendo le a per mezzo delle b, i coefficienti di du_{1n}, du_{rn} in (α) si trasformano rispettivamente nei rapporti

$$\sum_1^n l\,\frac{\partial b_{l_1\ldots l_r}}{\partial u_{1n}}\,\frac{\partial u_{1l_1}}{\partial x_{1s_1}}\cdots\frac{\partial u_{rl_r}}{\partial x_{rs_r}} : \sum_1^n l\, b_{l_1\ldots l_r}\frac{\partial u_{1l_1}}{\partial x_{1s_1}}\cdots\frac{\partial u_{rl_r}}{\partial x_{rs_r}} \tag{γ}$$

$$\sum_1^n l\,\frac{\partial b_{l_1\ldots l_r}}{\partial u_{rn}}\,\frac{\partial u_{1l_1}}{\partial x_{1s_1}}\cdots\frac{\partial u_{rl_r}}{\partial x_{rs_r}} : \sum_1^n l\, b_{l_1\ldots l_r}\frac{\partial u_{1l_1}}{\partial x_{1s_1}}\cdots\frac{\partial u_{rl_r}}{\partial x_{rs_r}}. \tag{δ}$$

Ora dalla $b_{l_1\ldots l_r} = \mu c_{l_1\ldots l_r}$, ricordando che $c_{l_1\ldots l_r}$ non contiene u_{1n}, si ricava

$$\frac{\partial b_{l_1\ldots l_r}}{\partial u_{1n}} = c_{l_1\ldots l_r}\frac{\partial\mu}{\partial u_{1n}}$$

donde

$$\frac{1}{b_{l_1\ldots l_r}}\,\frac{\partial b_{l_1\ldots l_r}}{\partial u_{1n}} = \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial\mu}{\partial u_{1n}} = \frac{1}{b_{\lambda_1\ldots\lambda_r}}\,\frac{\partial b_{\lambda_1\ldots\lambda_r}}{\partial u_{1n}}$$

e perciò la sommatoria

$$\sum_1^n l\lambda t \left\{ b_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \frac{\partial b_{l_1 \ldots l_r}}{\partial u_{1n}} - b_{l_1 \ldots l_r} \frac{\partial b_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}}{\partial u_{1n}} \right\} \frac{\partial u_{1\lambda_1}}{\partial x_{1s_1}} \cdots \frac{\partial u_{r\lambda_r}}{\partial x_{rs_r}} \frac{\partial u_{1l_1}}{\partial x_{1s_1}} \cdots \frac{\partial^2 u_{rl_r}}{\partial x_{rs_r} \partial x_{rt}} \frac{\partial x_{rt}}{\partial u_{rn}}$$

è identicamente zero. Quindi la derivata rispetto ad u_{rn} del rapporto (γ) è

$$\frac{1}{a^2_{s_1 \ldots s_r}} \sum_1^n l\lambda \left\{ b_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \frac{\partial^2 b_{l_1 \ldots l_r}}{\partial u_{1n} \partial u_{rn}} - \frac{\partial b_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}}{\partial u_{1n}} \frac{\partial b_{l_1 \ldots l_r}}{\partial u_{rn}} \right\} \frac{\partial u_{1\lambda_1}}{\partial x_{1s_1}} \cdots \frac{\partial u_{r\lambda_r}}{\partial x_{rs_r}} \frac{\partial u_{1l_1}}{\partial x_{1s_1}} \cdots \frac{\partial u_{rl_r}}{\partial x_{rs_r}}.$$

Evidentemente la derivata del rapporto (δ) è identica a quest'ultima espressione, dunque la (β) è soddisfatta.

Dalla (α) si ricava

$$\mu = e^{\chi - \int \left(\rho_1 \frac{\omega'_{s_1 \ldots s_r}}{a_{s_1 \ldots s_r}} du_{1n} + \cdots + \rho_r \frac{\omega^{(r)}_{s_1 \ldots s_r}}{a_{s_1 \ldots s_r}} du_{rn} \right)}, \tag{18}$$

dove

$$\chi = f(u_{11}, \ldots, u_{1n-1}, \ldots, u_{r1}, \ldots, u_{r\,n-1}),$$

f essendo una funzione arbitraria.

8. Nell'equazione (17_1) diamo successivamente alla s_1 i valori $1, 2, \ldots, n$, si ha allora il sistema lineare

$$\sum_1^n i\, \theta'_{s_1 i} \frac{\partial x_{1i}}{\partial u_{1n}} = - a_{s_1 s_2 \ldots s_r} \frac{\partial \log \mu}{\partial u_{1n}}, \qquad (s_1 = 1, 2, \ldots, n). \tag{ε}$$

Il determinante di questo sistema $\Delta' = \Sigma \pm \theta'_{11} \theta'_{22} \ldots \theta'_{nn}$ è evidentemente gobbo simmetrico. Se n è pari niente vi è da osservare; ma se n è dispari, essendo Δ' nullo, affinchè il sistema (ε) sia possibile è necessario che i numeratori dei valori che si ricavano da tal sistema per $\frac{\partial x_{11}}{\partial u_{1n}}, \ldots, \frac{\partial x_{1n}}{\partial u_{1n}}$ sieno nulli. Indicando con Θ' i complementi algebrici in Δ' degli elementi θ' si ha per una nota proprietà dei determinanti gobbi simmetrici

$$\frac{\Theta'_{q1}}{-\sqrt{\Theta'_{11}}} = \frac{\Theta'_{q2}}{+\sqrt{\Theta'_{22}}} = \cdots = \frac{\Theta'_{qn}}{-\sqrt{\Theta'_{nn}}}.$$

Laonde per la possibilità del sistema (ε) e quindi delle (16_1) si deve avere allorchè n è dispari

$$\sum_1^n i\, (-1)^i a_{is_2 \ldots s_r} \sqrt{\Theta'_{ii}} = 0. \tag{ζ_1}$$

Per la possibilità delle $(16_2), \ldots, (16_r)$ devono aver luogo altrettante relazioni analoghe alle (ζ_1) che indicheremo con $(\zeta_2), \ldots, (\zeta_r)$.

Dunque ricapitolando conchiudiamo:

Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la espressione differenziale r-lineare

$$\psi = \sum_1^n {}_s\, a_{s_1 \ldots s_r}\, dx_{1s_1} \ldots dx_{rs_r}$$

sia trasformabile nell'altra

$$\mu \sum_1^{n-1} {}_l\, c_{l_1 \ldots l_r}\, du_{1l_1} \ldots du_{rl_r}$$

sono le $(7_1), \ldots, (7_r)$, $(16_1), \ldots, (16_r)$; *alle quali se n è dispari bisogna aggiungere le* $(\zeta_1), \ldots, (\zeta_r)$. *Le sostituzioni atte ad eseguire la trasformazione si ricavano integrando i sistemi* $(9_1), \ldots, (9_r)$, *e scegliendo le* $n-1$ *costanti arbitrarie dei rispettivi sistemi integrali come variabili* $(u_{11}, \ldots, u_{1n-1}), \ldots, (u_{r1}, \ldots, u_{rn-1})$, *e finalmente il valore di* μ *è fornito dalla* (18).

9. Si tratti ora delle condizioni affinchè la espressione differenziale r-lineare ψ sia riducibile all'altra

$$\sum_1^{n\ 1} c_{l_1 \ldots l_r}\, du_{1l_1} \ldots du_{rl_r}.$$

Le $(7_1), \ldots, (7_r)$ sono le condizioni necessarie e sufficienti acciocchè possano sparire $du_{1n}, \ldots, du_{rn}$, e la integrazione dei sistemi (9) fornirà le sostituzioni. Per ottenere le condizioni necessarie e sufficienti acciocchè dai coefficienti della espressione ridotta spariscano $u_{1n}, \ldots, u_{rn}$ basta supporre nelle (17) $\mu = 1$, e si ha che le condizioni richieste sono

$$\sum_1^n {}_i\, \theta'_{s_1 i}\, A'_{ip_2 \ldots p_r} = 0, \ldots, \qquad \sum_1^n {}_i\, \theta'_{s_r i}\, A^{(r)}_{p_1 \ldots p_{r-1} i} = 0, \tag{19}$$

$$(s_1, \ldots, s_r = 1,\ 2, \ldots, n-1).$$

Queste equazioni reggono ancora se ad alcune o tutte le s si dà il valore n, ma le nuove equazioni sono conseguenze delle precedenti combinate con tutte le (7) e (9).

Napoli, settembre 1884.

Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali, che contengono un sistema di elicoidi aventi a comune l'asse ed il passo.

(*Nota di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

In occasione di una mia Nota: *Sui sistemi tripli ciclici di superficie ortogonali,* recentemente pubblicata nel Giornale di Battaglini, il sig. Weingarten mi ha gentilmente comunicato un suo teorema relativo alle superficie a curvatura costante e ai sistemi tripli ortogonali di cui fanno parte. Cercando di estendere questi interessanti risultati ad altre classi di superficie sono stato condotto a stabilire l'esistenza dei sistemi tripli, contenenti un sistema di elicoidi, che formano l'oggetto della presente Nota. Essi sono *caratterizzati* dalla proprietà che, assunti a sistema di coordinate curvilinee dello spazio, danno all'elemento lineare la forma:

$$dS^2 = H_1^2\, dy_1^2 + H_2^2\, dy_2^2 + H_3^2\, dy_3^2,$$

dove i coefficienti H_1, H_2, H_3 sono funzioni di y_3 e di $y_1 + y_2$, le $y_3 = \text{cost.}^{e}$ essendo le elicoidi.

La loro ricerca dipende dall'integrazione di un'equazione a derivate parziali del 2° ordine (*). Un integrale particolare di questa equazione corrispondente al caso in cui le elicoidi sono congruenti per rotazione attorno all'asse, dà luogo ad un sistema triplo ortogonale che mi sembra molto notevole. Esso è costituito da tre sistemi di superficie elicoidali col medesimo asse; due dei sistemi sono a curvatura costante negativa e il terzo a curvatura costante positiva. L'elemento lineare dello spazio assume in questo sistema di coordinate

(*) Equazione (7) della Nota.

la forma caratteristica:

$$dS^2 = A^2 sn^2(y_1 + y_2 + y_3)\,dy_1^2 + B^2 cn^2(y_1 + y_2 + y_3)\,dy_2^2 + C^2 dn^2(y_1 + y_2 + y_3)\,dy_3^2,$$

A, B, C essendo tre costanti legate col modulo arbitrario k delle funzioni ellittiche dalla relazione:

$$\frac{k^2}{A^2} = \frac{k^2}{B^2} + \frac{1}{C^2}.$$

Questo sistema ed un suo caso limite, contenente due sistemi di elicoidi sviluppabili, sono gli unici sistemi tripli ortogonali, pei quali H_1, H_2, H_3 risultano funzioni di $y_1 + y_2 + y_3$.

§ 1.

Dalle ricerche del Cayley (*) è noto che la distanza infinitesima fra due superficie consecutive S, S' di un sistema di superficie, al quale possono associarsene altri due ortogonali al primo e fra loro, soddisfa ad un'equazione caratteristica alle derivate parziali seconde. Se l'elemento lineare della superficie S, riferito alle linee di curvatura $u = \text{cost.}^e$, $v = \text{cost.}^e$, assume la forma:

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

l'equazione citata è la seguente:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v}, \tag{1}$$

dove ρ indica il tratto infinitesimo di normale elevata nel punto (u, v) alla S e limitata alla superficie consecutiva S'. Viceversa se per tutte le superficie S del sistema la (1) è soddisfatta, il sistema stesso fa parte di un sistema triplo ortogonale.

L'osservazione che serve di base allo studio seguente consiste in ciò che, supposta la S applicabile sopra una superficie di rotazione, si può sempre trovare un integrale particolare della (1), facendo uso del seguente teorema:

(*) *On curvature and orthogonal surfaces.* Philosophical Transactions CLXIII. — Cfr. anche Salmon-Fiedler, *Geometrie des Raumes.* 2. Auflage, pag. 640 e seguenti.

Se si trasforma l'elemento lineare $ds^2 = d\alpha^2 + r^2 d\beta^2$ (*) di una superficie di rotazione in coordinate curvilinee ortogonali qualunque u, v, di guisa che si abbia:

$$ds^2 = d\alpha^2 + r^2 d\beta^2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \tag{2}$$

la funzione $\psi = \int r\,d\alpha$ soddisferà all'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}. \tag{3}$$

Nel caso che le linee $u = \text{cost.}^e$, $v = \text{cost.}^e$ siano le linee di curvatura della superficie S nella sua forma attuale, il teorema può facilmente dedursi dai risultati del § 12 della mia Nota sopra citata. Ma è ben facile dimostrarlo direttamente ricorrendo alle note condizioni di trasformabilità di due forme differenziali quadratiche (**). Se nella (2) riguardiamo infatti α, β come funzioni di u, v atte a soddisfarla, avremo:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v} - r\frac{dr}{d\alpha}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\alpha}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v},$$

la quale, avuto riguardo all'altra $\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v} + r^2\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v} = 0$, può anche scriversi:

$$r\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v} + \frac{dr}{d\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot r\frac{\partial\alpha}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cdot r\frac{\partial\alpha}{\partial v}$$

e dimostra appunto che $\psi = \int r\,d\alpha$ soddisfa la (3).

§ 2.

Supponiamo che la superficie S sia un'elicoide e quindi (pel teorema di Bour) applicabile sopra una superficie di rotazione, i cui paralleli sono le deformate delle eliche. La funzione $\psi = \int r\,d\alpha$ del paragrafo precedente sarà costante lungo le eliche. Ne segue che portando sopra ciascuna normale alla S, a partire dal suo piede, la lunghezza infinitesima $\rho = \varepsilon\psi$, dove ε è una costante

(*) α denota l'arco di meridiano, $r = f(\alpha)$ il raggio del parallelo, β la longitudine.

(**) Cfr. Christoffel. Journal von Crelle, 70 Band, pag. 46, formole (9).

infinitesima, la superficie S' luogo degli estremi sarà una nuova elicoide col medesimo asse e collo stesso passo della S. Ripetendo la medesima costruzione sopra S' otterremo una nuova elicoide S'', da questa una quarta S''' ecc., costruiremo cioè un sistema di elicoidi, aventi a comune l'asse ed il passo, che farà parte (§ 1) di un sistema triplo ortogonale.

Studiamo ora analiticamente il legame esistente fra le elicoidi del sistema. Per questo assumiamo l'asse comune delle elicoidi per asse delle z e supponiamo che

$$z = \varphi(\rho), \qquad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2})$$

sia l'equazione del *profilo* meridiano dell'elicoide iniziale. Passando da una elicoide del sistema ad un'altra, varierà in generale la forma del profilo, ciò che possiamo esprimere analiticamente, scrivendone l'equazione sotto la forma:

$$z = \varphi(\rho,\ t),$$

dove t è un parametro variabile, i cui singoli valori determinano i profili meridiani delle successive elicoidi.

Se con x, y, z indichiamo le coordinate Cartesiane ortogonali di un punto mobile sopra una qualunque di queste elicoidi, avremo:

$$x = \rho \cos\omega, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\omega, \qquad z = \varphi(\rho,\ t) + m\omega, \tag{4}$$

ω essendo l'angolo del piano mobile del profilo col piano xz, m il parametro del moto elicoidale, e t avendo il valore fisso che conviene all'elicoide considerata.

L'elemento lineare di questa elicoide riferito alle eliche $\rho = \text{cost.}^e$ e alle traiettorie ortogonali $v = \text{cost.}^e$ è dato da (*):

$$ds^2 = \frac{\rho^2 + m^2 + \rho^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2}{\rho^2 + m^2}\, d\rho^2 + (\rho^2 + m^2)\, dv^2,$$

sicchè la funzione ψ del § 1 diventa nel caso attuale:

$$\psi = \int \sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2}\, d\rho. \tag{5}$$

Ora per passare da un punto $P \equiv (\rho,\ \omega)$ dell'elicoide t al punto corrispondente P' sull'elicoide $t + dt$, dobbiamo spostarci sulla normale in P all'eli-

(*) Vedi per es. Bertrand, *Calcul Différentiel*, pag. 758.

coide t di un tratto infinitesimo $\overline{PP'}$ proporzionale a ψ. Assumendo quindi in modo conveniente il parametro t, possiamo porre:

$$\overline{PP'} = \psi \, dt.$$

Se con X, Y, Z indichiamo i coseni di direzione della normale in P sopra considerata, troviamo:

$$X = \frac{m \operatorname{sen} \omega - \rho \cos \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}}{\frac{\partial \psi}{\partial \rho}}, \qquad Y = -\frac{m \cos \omega + \rho \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}}{\frac{\partial \psi}{\partial \rho}}, \qquad Z = \frac{\rho}{\frac{\partial \psi}{\partial \rho}},$$

per cui, denotando con dx, dy, dz gli accrescimenti subíti da x, y, z nel passare da P a P', avremo manifestamente:

$$dx = \frac{m \operatorname{sen} \omega - \rho \cos \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}}{\frac{\partial \psi}{\partial \rho}} \cdot \psi \, dt, \qquad dy = -\frac{m \cos \omega + \rho \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}}{\frac{\partial \psi}{\partial \rho}} \cdot \psi \, dt,$$

$$dz = \frac{\rho}{\frac{\partial \psi}{\partial \rho}} \cdot \psi \, dt.$$

Ma se $d\rho$, $d\omega$ rappresentano similmente gli accrescimenti di ρ, ω, abbiamo dalla (4):

$$dx = \cos \omega \, d\rho - \rho \operatorname{sen} \omega \, d\omega, \qquad dy = \operatorname{sen} \omega \, d\rho + \rho \cos \omega \, d\omega,$$

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + m \, d\omega;$$

fra queste e le precedenti eliminando dx, dy, dz, $d\rho$, $d\omega$, dt troviamo:

$$\psi \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{6}$$

la quale per la (5) equivale all'altra:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2}} = \sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2}. \tag{7}$$

La funzione incognita $\varphi(\rho, t)$ deve dunque soddisfare all'equazione (7) alle derivate parziali del 2° ordine. Viceversa se la (7) è soddisfatta la distanza infinitesima dn fra due elicoidi successive è data da $dn = \psi \, dt$ e il sistema stesso appartiene quindi ad un sistema triplo ortogonale.

§ 3.

Assumiamo uno qualunque dei sistemi tripli ortogonali, la cui esistenza è stata sopra dimostrata, a sistema di coordinate curvilinee dello spazio. Siano y_1, y_2, y_3 i parametri del sistema triplo e supponiamo che l'elemento lineare dS dello spazio assuma la forma:

$$dS^2 = H_1^2\, dy_1^2 + H_2^2\, dy_2^2 + H_3^2\, dy_3^2, \tag{8}$$

le $y_3 = \text{cost.}^{\text{e}}$ essendo le elicoidi del sistema. Se sopra una determinata elicoide $y_3 = y'_3$, le eliche hanno per equazione

$$\tau(y_1, y_2) = \text{cost.}^{\text{e}},$$

esse avranno su tutte le elicoidi la medesima equazione, poichè alle eliche dell'una elicoide corrispondono le eliche dell'altra. D'altronde l'intero sistema ammettendo il moto elicoidale in sè medesimo, è chiaro che tutte le quantità relative al sistema triplo, in particolare H_1, H_2, H_3 e i raggi principali di curvatura delle superficie del sistema dovranno essere costanti lungo ciascuna elica del sistema, cioè queste quantità saranno funzioni di y_3 e τ soltanto, in particolare

$$H_1 = H_1(\tau, y_3), \qquad H_2 = H_2(\tau, y_3), \qquad H_3 = H_3(\tau, y_3).$$

Ma se r_{ik} indica il raggio principale di curvatura della $y_i = \text{cost.}^{\text{e}}$ relativo alla linea di curvatura per la quale varia solo y_k, si ha (*):

$$\frac{1}{r_{ik}} = -\frac{1}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial y_i},$$

e però

$$\frac{1}{r_{12}} = -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y_1}, \qquad \frac{1}{r_{21}} = -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y_2}$$

dovranno essere funzioni di τ, y_3 soltanto, cioè $\frac{\partial \tau}{\partial y_1}$, $\frac{\partial \tau}{\partial y_2}$ funzioni della sola τ. Dunque τ è funzione di una combinazione lineare $ay_1 + by_2$ di y_1, y_2 con a, b diverse da zero (**), ovvero, cangiando ay_1, by_2 in y_1, y_2, funzione di $y_1 + y_2$.

(*) Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, pag. 51, formole (24).

(**) Se una delle costanti a, b fosse zero le elicoidi si ridurrebbero a superficie di rotazione, caso che escludiamo.

Viceversa si vedrà facilmente che se nella (8) H_1, H_2, H_3 si suppongono funzioni di $y_1 + y_2$, y_3, le $y_3 = \text{cost.}^e$ saranno elicoidi, aventi a comune l'asse ed il passo, e le eliche dell'una corrisponderanno alle eliche dell'altra, talchè il sistema triplo ortogonale apparterrà alla classe di quelli del § 2. Ne concludiamo:

I sistemi tripli ortogonali trovati sono caratterizzati dalla proprietà che, assunti a sistema di coordinate curvilinee, danno all'elemento lineare dello spazio la forma (8), *dove* H_1, H_2, H_3 *sono funzioni di* $y_1 + y_2$ *e di* y_3.

§ 4.

La determinazione di questi sistemi tripli ortogonali dipende dall'integrazione dell'equazione (7) a derivate parziali. Limitiamoci qui a ricercare se la (7) ammette una soluzione particolare che sia la somma di due funzioni, l'una di ρ l'altra di t; cioè della forma

$$z = \varphi(\rho) + F(t),$$

il che equivale geometricamente alla questione se fra i sistemi elicoidali del § 2 ne esistono di quelli composti di elicoidi congruenti, di guisa che si ottenga l'intero sistema, facendo rotare una delle elicoidi attorno al suo asse. È chiaro dalla (7) che dovrà essere $F(t)$ funzione lineare di t, poniamo

$$F(t) = h\,t$$

con h costante e la (7) stessa diventa:

$$-\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2}}\,\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2}}\right\} = -\frac{1}{h}. \tag{9}$$

Il 1° membro esprime la curvatura totale dell'elicoide ed abbiamo quindi il risultato: *La condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema elicoidale consti di elicoidi congruenti è che la curvatura delle elicoidi sia costante.*

Non fa difetto il caso di $h = \infty$ e la generazione del sistema triplo ortogonale è in questo caso semplicissima. Basta infatti tracciare sopra un cilindro circolare retto due sistemi di eliche ortogonali fra loro; le elicoidi sviluppabili aventi per spigoli di regresso le eliche tracciate e i piani tangenti al cilindro formano il sistema triplo in discorso (Cfr. § 6.).

Occupiamoci del sistema triplo ortogonale corrispondente al caso di h finito. È indifferente supporre h positivo o negativo poichè, come ora vedremo, il sistema triplo consta di tre sistemi di elicoidi congruenti a curvatura costante, per due dei quali h è positivo, essendo negativo pel terzo, e d'altra parte ciascuna di queste elicoidi è generale nella sua specie contenendo tre costanti arbitrarie. Per fissare le idee supporremo h negativo e porremo $h = -R^2$; la (9) integrata darà:

$$\varphi(\rho) = \int \frac{\sqrt{R^2\rho^2 - (a^2-\rho^2)(\rho^2+m^2)}}{\rho\sqrt{a^2-\rho^2}}\, d\rho, \tag{10}$$

dove a indica una nuova costante arbitraria.

§ 5.

Cangiando t in $\frac{b}{R^2}y_3$, essendo b una nuova costante e y_3 un nuovo parametro, le (4) diverranno nel nostro caso

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\omega, \qquad z = \varphi(\rho) - by_3 + m\omega$$

e per l'elemento lineare dello spazio calcolato in coordinate curvilinee ρ, ω, y_3 avremo:

$$dS^2 = \{1+\varphi'^2(\rho)\}\,d\rho^2 + (\rho^2+m^2)\,d\omega^2 + b^2\,dy_3^2 + 2m\varphi'(\rho)\,d\rho\,d\omega -$$
$$- 2b\varphi'(\rho)\,d\rho\,dy_3 - 2bm\,d\omega\,dy_3.$$

Se indichiamo con y_1, y_2 due nuovi parametri e cangiamo le superficie coordinate $\rho = \text{cost.}^e$, $\omega = \text{cost.}^e$, ponendo

$$\rho = F(y_1+y_2+y_3), \qquad \omega = f(y_1+y_2+y_3) + \alpha y_1 + \beta y_2$$

potremo determinare le funzioni $F(\tau)$, $f(\tau)$ dell'argomento $\tau = y_1+y_2+y_3$ e le costanti α, β di guisa che ne risulti:

$$dS^2 = H_1^2\,dy_1^2 + H_2^2\,dy_2^2 + H_3^2\,dy_3^2, \tag{11}$$

cioè le superficie $y_1 = \text{cost.}^e$, $y_2 = \text{cost.}^e$ siano quelle degli altri due sistemi. Basta perciò assumere

$$F'(\tau) = b\,\frac{\rho^2\varphi'(\rho)}{\rho^2+m^2+\rho^2\varphi'^2(\rho)}, \qquad f'(\tau) = \frac{bm}{\rho^2+m^2+\rho^2\varphi'^2(\rho)} \tag{12}$$

e le costanti α, β legate fra loro dalle relazioni:

$$\alpha\beta = -\frac{b^2}{k^2}, \qquad \alpha + \beta = b\,\frac{a^2 + m^2 - R^2}{m R^2}. \tag{13}$$

Indicando con k la radice reale, positiva e < 1 dell'equazione:

$$a R k^2 - (a^2 + m^2 + R^2) k + a R = 0$$

si soddisfano le (13) prendendo

$$\alpha = b\,\frac{a k - R}{m R}, \qquad \beta = b\,\frac{a - k R}{m R k}. \tag{14}$$

La 1ª delle (12) si può scrivere

$$\tau = \frac{1}{b}\int \frac{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \varphi'^2}{\rho^2 \varphi'}\, d\rho,$$

sicchè a causa del valore (10) di $\varphi(\rho)$ basterà porre

$$a^2 - \rho^2 = a k R\, sn^2(\tau, k) \tag{15}$$

quando a b^2 si attribuisca il valore

$$b^2 = R^3 \cdot \frac{k}{a}. \tag{16}$$

Successivamente troviamo:

$$f(\tau) = \frac{b m k}{a R}\int \frac{sn^2 \tau\, d\tau}{1 - \frac{R k}{a} sn^2 \tau},$$

che si potrebbe subito esprimere per l'integrale ellittico di 3ª specie $\Pi(\tau, \sigma)$ di Jacobi, indi

$$\omega = f(\tau) + \frac{b a k}{m R} y_1 + \frac{b a}{m k R} y_2 - \frac{b}{m}(y_1 + y_2).$$

Le formole che esprimono le coordinate Cartesiane per i parametri y_1, y_2, y_3 del sistema triplo ortogonale sono quindi:

$$\left.\begin{aligned}
&x = \sqrt{a^2 - a k R\, sn^2 \tau}\,\cos\omega, \qquad y = \sqrt{a^2 - a k R\, sn^2 \tau}\,\operatorname{sen}\omega,\\
&z = \frac{a b}{k R}\left\{Z(\tau) - \frac{H}{K}\tau\right\} + \frac{b a k}{R} y_1 + \frac{b a}{k R} y_2\\
&\tau = y_1 + y_2 + y_3, \qquad \omega = \frac{b m k}{a R}\int \frac{sn^2 \tau\, d\tau}{1 - \frac{R k}{a} sn^2 \tau} +\\
&\qquad + \frac{b a k}{m R} y_1 + \frac{b a}{m k R} y_2 - \frac{b}{m}(y_1 + y_2),
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

la funzione $Z(\tau)$ e le costanti H, K avendo il solito significato che loro si attribuisce nella teoria delle funzioni ellittiche (*).

La formola che dà la z si può scrivere anche sotto una delle due forme:

$$z = \frac{ab}{kR}\left\{Z(\tau) - \frac{H}{K}\tau\right\} - \frac{bm^2k}{R(a-kR)}\int\frac{sn^2\tau\, d\tau}{1-\frac{Rk}{a}sn^2\tau} + ab\frac{1-k^2}{a-kR}y_1 + \frac{ma}{a-kR}\omega$$

$$z = \frac{ab}{kR}\left\{Z(\tau) - \frac{H}{K}\tau\right\} - \frac{bm^2k^2}{R(ak-R)}\int\frac{sn^2\tau\, d\tau}{1-\frac{Rk}{a}sn^2\tau} + ab\frac{1-k^2}{(R-ak)k}y_2 + \frac{mak}{ak-R}\omega$$

e queste ci dimostrano che tanto le superficie $y_1 = \text{cost.}^e$ quanto le $y_2 = \text{cost.}^e$ sono elicoidi congruenti aventi per asse l'asse delle z, le prime col parametro $\frac{ma}{a-kR}$ pel movimento elicoidale, le seconde col parametro $\frac{mak}{ak-R}$, dicchè avendosi $\frac{ma}{a-kR}\cdot\frac{mak}{ak-R} = -a^2$, le eliche dell'une girano in senso opposto alle eliche dell'altre.

Se ora si calcolano i coefficienti H_1, H_2, H_3 dell'elemento lineare (11) dello spazio nelle attuali coordinate curvilinee y_1, y_2, y_3 si trova

$$ds^2 = B^2 cn^2\tau\, dy_1^2 + C^2 dn^2\tau\, dy_2^2 + A^2 sn^2\tau\, dy_3^2 \tag{18}$$

dove le costanti A, B, C sono date dalle formole

$$A = Rk, \qquad B = \frac{Rk}{b}\sqrt{b^2 + R^2\alpha^2}, \qquad C = \frac{R}{b}\sqrt{b^2 + R^2\beta^2} \tag{18'}$$

e sono legate quindi, a causa delle (13), al modulo k delle funzioni ellittiche dalla relazione:

$$\frac{k^2}{A^2} = \frac{k^2}{B^2} + \frac{1}{C^2}. \tag{19}$$

Indicando con K_1, K_2, K_3 le curvature assolute delle superficie $y_1 = \text{cost.}^e$, $y_2 = \text{cost.}^e$, $y_3 = \text{cost.}^e$ rispettivamente, otterremo dalla (18), applicando le for-

(*) $$H = k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2\varphi}}, \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2\varphi}},$$

$$Z(\tau) = \frac{H}{K}\tau - k^2\int_0^\tau sn^2\tau\, d\tau.$$

mole sopra citate di LAMÉ (vedi § 3)

$$K_1 = -\frac{k^2}{B^2}, \qquad K_2 = -\frac{1}{C^2}, \qquad K_3 = \frac{k^2}{A^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Ne segue: *Il sistema triplo ortogonale definito dalle formole* (17) *consta di tre sistemi di superficie elicoidali aventi lo stesso asse. Due dei sistemi sono a curvatura costante negativa ed il terzo a curvatura costante positiva. Le elicoidi di ciascun sistema sono congruenti fra loro.*

È chiaro poi per la discussione precedente che ogni elicoide a curvatura costante dà luogo ad un sistema triplo ortogonale di questa specie.

§ 6.

La forma (18) dell'elemento lineare dello spazio presenta la particolarità che i coefficienti H_1, H_2, H_3 sono funzioni della somma $y_1 + y_2 + y_3$ delle tre coordinate curvilinee. Possiamo ora domandare se tale proprietà è esclusiva al sistema triplo trovato, o si presenta per altri sistemi.

Supponiamo che l'elemento lineare dello spazio abbia la forma:

$$dS^2 = H_1^2\, dy_1^2 + H_2^2\, dy_2^2 + H_3^2\, dy_3^2$$

e H_1, H_2, H_3 siano funzioni di $\tau = y_1 + y_2 + y_3$. Le 6 equazioni differenziali stabilite da LAMÉ (*) pei coefficienti H_1, H_2, H_3 diventano nel nostro caso:

$$\left.\begin{array}{c} H''_1 = \dfrac{H'_1 H'_2}{H_2} + \dfrac{H'_1 H'_3}{H_3}, \qquad H''_2 = \dfrac{H'_2 H'_3}{H_3} + \dfrac{H'_2 H'_1}{H_1}, \\ H''_3 = \dfrac{H'_3 H'_1}{H_1} + \dfrac{H'_3 H'_2}{H_2} \end{array}\right\} \quad (20)$$

$$\frac{H''_2}{H_1} + \frac{H''_1}{H_2} + \left(\frac{1}{H_3^2} - \frac{1}{H_1^2} - \frac{1}{H_2^2}\right) H'_1 H'_2 = 0,$$

$$\frac{H''_3}{H_2} + \frac{H''_2}{H_3} + \left(\frac{1}{H_1^2} - \frac{1}{H_2^2} - \frac{1}{H_3^2}\right) H'_2 H'_3 = 0,$$

$$\frac{H''_1}{H_3} + \frac{H''_3}{H_1} + \left(\frac{1}{H_2^2} - \frac{1}{H_3^2} - \frac{1}{H_1^2}\right) H'_3 H'_1 = 0,$$

avendo indicato per brevità cogli apici le derivate prese rispetto a τ. In forza

(*) L. c., pag.^{e} 76-78, formole (8) e (9).

delle tre prime le tre seconde si riducono all'unica:

$$\frac{H'_2 H'_3}{H_1} + \frac{H'_3 H'_1}{H_2} + \frac{H'_1 H'_2}{H_3} = 0; \tag{21}$$

d'altronde supposto dapprima che nessuno dei coefficienti H sia costante, integrando le (20) otteniamo:

$$H'_1 = a_1 H_2 H_3, \qquad H'_2 = a_2 H_3 H_1, \qquad H'_3 = a_3 H_1 H_2, \tag{22}$$

dove a_1, a_2, a_3 sono tre costanti, fra le quali sussiste a causa della (21) la relazione:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 0. \tag{23}$$

Delle tre costanti a_1, a_2, a_3 una si può dunque supporre positiva e le altre due negative (*). Se a_3 è la positiva si soddisferà nel modo più generale possibile alle (22) ponendo

$$H_1 = B\, cn(\lambda\tau,\ k), \qquad H_2 = C\, dn(\lambda\tau,\ k), \qquad H_3 = A\, sn(\lambda\tau,\ k),$$

dove k indica il modulo *arbitrario* delle funzioni ellittiche e λ è una nuova costante arbitraria che possiamo tuttavia supporre $= 1$, cangiando semplicemente y_1, y_2, y_3 in $\frac{y_1}{\lambda}$, $\frac{y_2}{\lambda}$, $\frac{y_3}{\lambda}$. Si avrà allora:

$$A^2 = \frac{k^2}{a_1 a_2}, \qquad B^2 = \frac{k^2}{-a_2 a_3}, \qquad C^2 = \frac{1}{-a_1 a_3}$$

e A, B, C rimangono quindi costanti arbitrarie legate fra loro dalla relazione (19) mentre l'elemento lineare assume la forma (18). Il sistema triplo ortogonale corrispondente è adunque quello del paragrafo precedente (**).

Resta da considerarsi il caso in cui qualcuno dei coefficienti H sia una costante, per esempio

$$H_3 = c.$$

Dalla (21) segue allora che dovrà essere costante H_1 o H_2; supponiamo

$$H_2 = b$$

(*) È chiaro che se due fossero positive e una negativa basterebbe cangiare il segno di H_1, H_2, H_3 per ritornare a questo caso.

(**) È noto che dati i coefficienti H_1, H_2, H_3 dell'elemento lineare, il sistema triplo ortogonale corrispondente è individuato a meno di movimenti nello spazio.

e le (20) si ridurranno all'unica $H''_1 = 0$, cioè

$$H_1 = a(y_1 + y_2 + y_3) + a'.$$

Se a è nullo, il sistema consta evidentemente di tre sistemi di piani paralleli ortogonali fra loro. Se $a \gtrless 0$, si può porre $a' = 0$ e alla forma

$$dS^2 = a^2(y_1 + y_2 + y_3)^2 dy_1^2 + b^2 dy_2^2 + c^2 dy_3^2$$

dell'elemento lineare corrispondono le formole di trasformazione:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{a}{k^2}\{\cos(ky_1) + k(y_1 + y_2 + y_3)\operatorname{sen}(ky_1)\}, \\ y = \dfrac{a}{k^2}\{-\operatorname{sen}(ky_1) + k(y_1 + y_2 + y_3)\cos(ky_1)\}, \qquad z = \dfrac{a}{k}\left\{\dfrac{b}{c}\, y_2 - \dfrac{c}{b}\, y_3\right\} \end{array}\right\} \quad (24)$$

dove $k = \frac{a}{bc}\sqrt{b^2 + c^2}$. Esse definiscono appunto il sistema triplo accennato al § 4 costituito dai due sistemi di elicoidi sviluppabili $y_2 = \text{cost.}^e$, $y_3 = \text{cost.}^e$ e dai piani $y_1 = \text{cost.}^e$ che toccano il cilindro centrale

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{k^4}$$

luogo dei loro spigoli di regresso.

È chiaro che la discussione precedente comprende in sè il caso in cui H_1, H_2, H_3 sono funzioni di una medesima combinazione lineare $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ dei tre parametri y_1, y_2, y_3 quando nessuna delle costanti α, β, γ è zero. Se una di esse è nulla, e più in generale quando H_1, H_2, H_3 dipendono da due sole coordinate, si vede facilmente che il sistema triplo appartiene alla classe ben nota, contenente due sistemi di superficie di rotazione attorno al medesimo asse.

Dunque: *Esclusi i sistemi di superficie di rotazione, gli unici sistemi tripli ortogonali, pei quali H_1, H_2, H_3 risultano funzioni di una combinazione lineare delle coordinate, sono i sistemi* (17), (24).

OSSERVAZIONE.

Fra i sistemi tripli ortogonali che corrispondono alla forma (18) dell'elemento lineare dello spazio, è notevole, per la sua semplicità, quello che appartiene al valore limite $k = 1$ per il modulo delle funzioni ellittiche. Allora la (18) diventa:

$$dS^2 = \frac{1}{\cosh^2(y_1 + y_2 + y_3)}\{R^2 \operatorname{senh}^2(y_1 + y_2 + y_3\, dy_1^2 + B^2 dy_2^2 + C^2 dy_3^2\}$$

e la relazione (19) fra le costanti:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2}.$$

Le formole che definiscono il sistema triplo sono le seguenti (*):

$$x = R \frac{\cos\left(\frac{R}{n} y_2 - \frac{n}{R} y_3\right)}{\cos h\,(y_1 + y_2 + y_3)}, \qquad y = R \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{R}{n} y_2 - \frac{n}{R} y_3\right)}{\cos h\,(y_1 + y_2 + y_3)},$$

$$z = R\,\{\operatorname{tg} h\,(y_1 + y_2 + y_3) - y_3\},$$

ove si è posto $n = \sqrt{C^2 - A^2}$. Le superficie $y_1 = \text{cost.}^e$ $y_2 = \text{cost.}^e$ sono elicoidi del Dini, aventi per profilo meridiano la curva delle tangenti costanti $= R$ (trattrice) e per asse l'assintoto, mentre i parametri dei rispettivi moti elicoidali sono, $\frac{-R^2}{n}$, n; per le une cioè le eliche sono destrorse, per le altre sinistrorse. Le superficie $y_3 = \text{cost.}^e$ sono, in questo caso limite sfere di raggio $= R$ coi centri distribuiti sull'asse.

Pisa, dicembre 1884.

(*) Possono essere dedotte con passaggio al limite dalle (17) ovvero stabilirsi direttamente.

Sopra alcune trasformazioni involutorie del piano.

(*Memoria del dott.* VITTORIO MARTINETTI, *in Mantova.*)

In un lavoro testè pubblicato negli Annali di Matematica (*) ho esposta la configurazione dei punti fondamentali e la costruzione delle involuzioni di 3ª e 4ª classe, continuando così le ricerche fatte in questo senso dal sig. BERTINI (**).

Lo scopo che qui mi propongo si è di dimostrare, come le involuzioni, da me allora unicamente enumerate, siano tutte le possibili involuzioni, a punti fondamentali distinti, di 3ª e 4ª classe.

Partendo dalle formole, che hanno condotto il sig. BERTINI a stabilire le involuzioni di classe $\nu = 1$, $\nu = 2$, ed applicandole in casi $\nu = 3$, $\nu = 4$ verrò a trovare i sistemi (Ω) possibili nelle dette involuzioni, le posizioni speciali che dovrebbero avere i punti fondamentali ed uniti, ed infine la costruzione colla quale si potrebbero ottenere. Si vedrà in ogni caso come applicando la costruzione trovata, si giunga effettivamente ad involuzioni della classe e specie che si considera, dalle quali resterà in tal modo dimostrata l'esistenza.

Preliminari.

1. Una curva generale del sistema (Ω) in una involuzione di classe ν è dell'ordine $2\nu + 1$, ed è segata da un'altra curva del sistema in 2ν punti variabili.

(*) *Le involuzioni di 3ª e 4ª classe.* Serie II, tom. XII. — Colgo questa occasione per avvertire, che il lavoro qui citato è un estratto della mia Tesi di Laurea presentata alla R. Università di Pavia.

(**) *Sopra alcune involuzioni piane.* Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. 16°, fasc. 2 e 3.

Siano r_i e λ_i il numero dei rami coi quali passano pel punto fondamentale i rispettivamente le curve C_n (della rete omaloidica, che determina l'involuzione considerata) e la curva Γ punteggiata unita; ed indichiamo con α_{ik} la molteplicità della curva fondamentale i^{ma} nel punto fondamentale k (che è anche la molteplicità della k^{ma} curva fondamentale, nel punto i). Allora si sa che le curve Ω passano per il punto fondamentale i con $r_i - \lambda_i$ rami dei quali $\alpha_{ii} - \lambda_i$ hanno direzioni fisse (*).

Sussistono in oltre le seguenti relazioni:

$$\sum_i r_i(r_i - \lambda_i) = (2\nu + 1)(n - 1); \tag{1}$$

$$\alpha_{ii} = r_i - \nu + \delta_i; \tag{2}$$

$$\lambda_i = r_i - \nu - \delta_i + 2\varepsilon_i; \tag{3}$$

epperò:

$$r_i - \lambda_i = \nu + \delta_i - 2\varepsilon_i; \tag{4}$$

$$\alpha_{ii} - \lambda_i = 2\delta_i - 2\varepsilon_i; \tag{5}$$

dove i numeri δ_i, ε_i soddisfano le condizioni:

$$0 \leqq \delta_i \leqq \nu - 1, \qquad \delta_i \geqq \varepsilon_i \geqq 0 \text{ (**)}. \tag{6}$$

Da queste formole prenderemo le mosse per ricercare le involuzioni di 3ª e 4ª classe e scoprire la posizione speciale che debbono avere i punti fondamentali ed uniti.

2. Per le nostre ricerche saranno molto utili le osservazioni seguenti:

a) Sommando le relazioni (2) e (3) del numero precedente deduciamo;

$$2\varepsilon_i = 2\nu - 2r_i + \alpha_{ii} + \lambda_i.$$

Il secondo membro diviso per 2 dà (***) il numero delle coppie di punti corrispondenti, che giacciono sopra una retta arbitraria uscente per i, quindi la curva d'ordine $2\nu + 1 - r_i$, la quale costituisce la Ω relativa al punto fondamentale i, è segata in $2\varepsilon_i$ punti, fuori del punto i da una retta arbitraria per i; per la qual cosa si avrà:

$$2\nu + 1 - r_i \geqq 2\varepsilon_i$$

(*) V. Bertini, *Sopra una classe di trasformazioni univoche involutorie.* Annali di Matematica, serie II, tom. VII, n.° 10. — Caporali, *Sulle trasformazioni univoche piane involutorie.* Rendiconti della R. Accademia di Napoli, fasc. 9, settembre 1879.

(**) *Sopra alcune involuzioni piane.* Rendiconti del R. Istituto Lombardo, l. c.

(***) Caporali, l. c., n.° 7.

donde

$$r_i \leqq 2\nu + 1 - 2\varepsilon_i.$$

Se ha luogo il segno d'uguaglianza, cioè se è

$$r_i = 2\nu + 1 - 2\varepsilon_i$$

sarà anche per la (2):

$$\alpha_{ii} = \nu + \delta_i - 2\varepsilon_i + 1.$$

Essendo $\delta_i \geqq \varepsilon_i$ dovrà essere necessariamente $\alpha_{ij} < \alpha_{ii}$ per tutti i valori di j (altrimenti ne verrebbe $\alpha_{ii} + \alpha_{ij} > r_i$) e quindi (*) $r_i \geqq r_j$. Se dunque si riconosce che esiste un punto fondamentale di molteplicità superiore ad r_i concluderemo senz'altro che:

$$r_i < 2\nu + 1 - 2\varepsilon_i.$$

b) È da notarsi il caso $\varepsilon_i = 0$. Allora dovrà la curva Ω relativa ad i spezzarsi in un certo numero di rette (unite) passanti per i, e perciò la curva fondamentale corrispondente ad i [che insieme a quelle rette deve costituire la curva Ω del sistema avente in i un punto $(r_i - \lambda_i + 1)$uplo] deve passare per ciascuno degli altri punti fondamentali collo stesso numero di rami coi quali vi passa una Ω qualunque, ovvero con uno solo di meno, ed allora per lo stesso punto passa una delle rette unite.

c) Dalla formola (2) vediamo che è:

$$r_i - \alpha_{ii} = \nu - \delta_i$$

epperò la curva fondamentale corrispondente ad i, è incontrata in $\nu - \delta_i$ punti variabili da una curva qualunque del sistema (Ω).

d) Data una involuzione d'ordine n e classe ν per ottenere da essa con continuità un'altra involuzione della stessa classe e specie (**), chiaramente basta imaginare che un sistema di punti fondamentali venga a disporsi in modo che per essi passi una curva C (spezzata o no) la quale per questo fatto si stacchi da tutte le curve della rete omaloidica ed insieme dalla curva punteggiata unita, senza però che le Ω abbiano a spezzarsi. *Una tal curva C altro non può essere che un sistema di rette.* Infatti una curva Ω arbitraria

(*) Bertini, *Sulle trasformazioni*, ecc. Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. 13°, fasc. 14.

(**) Due involuzioni si diranno della stessa specie quando i relativi sistemi (Ω) sono della stessa natura.

non ha fuori dei fondamentali alcun punto comune colla curva punteggiata unita, quindi neppure, al limite, colla curva C, allora la curva o ciascuna sua parte entra come parte fissa in un fascio di Ω; essa è dunque una retta od un sistema di rette (*).

Da una involuzione generale dedurremo adunque tutte le involuzioni della medesima specie d'ordine inferiore considerando successivamente tutti quegli allineamenti di punti fondamentali, compatibili coi legami esistenti fra i punti stessi, pei quali le Ω non si spezzano, ma si spezzano invece le curve della rete omaloidica e la curva punteggiata unita.

I sistemi (Ω) nelle involuzioni di 3ª classe.

3. Se nelle formole del n.° 1 si pone $\nu = 3$, si vede che pei punti fondamentali, nelle involuzioni di 3ª classe, si possono presentare sei casi, come dal seguente specchio:

	δ_i	ε_i	$r_i - \lambda_i$	$\alpha_{ii} - \lambda_i$	α_{ii}	λ_i
I	2	0	5	4	$r_i - 1$	$r_i - 5$
II	1	0	4	2	$r_i - 2$	$r_i - 4$
III	0	0	3	0	$r_i - 3$	$r_i - 3$
IV	2	1	3	2	$r_i - 1$	$r_i - 3$
V	1	1	2	0	$r_i - 2$	$r_i - 2$
VI	2	2	1	0	$r_i - 1$	$r_i - 1$

Le curve Ω sono del 7° ordine e posseggono 43 intersezioni fisse.

4. Supponiamo che avvenga per un punto fondamentale, che chiamerò 1 il I caso, supponiamo cioè che le curve Ω posseggano un punto quintuplo in comune.

Il punto 1 è certamente il punto di massima molteplicità; infatti la curva fondamentale corrispondente ad 1 deve passare con un solo ramo per altri

(*) Bertini, *Sopra alcune involuzioni piane*, l. c., n.° 6.

$2(r_1 - 1)$ punti fondamentali (avendosi $\alpha_{11} = r_1 - 1$) quindi per ogni valore di i sarà $\alpha_{11} > \alpha_{1i} + 1$, sicchè: $r_1 > r_i$ (*). Segue che le rimanenti curve fondamentali non posseggono punti multipli. Sono dunque coniche o rette. Se vi fosse una conica fondamentale, essa potrebbe passare al più per un punto fondamentale semplice, quindi od esistono tre punti fondamentali doppi e tre semplici, ovvero solo 5 punti fondamentali doppi, e questo è assurdo, poichè devono esistere, come vedemmo, oltre al punto 1 altri $2(r_1 - 1) \geqq 8$ punti fondamentali.

Concludiamo che gli altri $2(r_1 - 1)$ punti fondamentali devono essere semplici (caso VI) e quindi la trasformazione involutoria deve essere di Jonquières. Ed è noto appunto che le involuzioni di Jonquières di 3^a classe presentano il sistema (**):

$$(\Omega) = (1_4^5\, 2\, 3 \ldots 15)_7.$$

Queste involuzioni verranno chiamate di *1ª specie.*

5. Il caso II può presentarsi per un solo punto fondamentale 1. Se supponiamo che questo avvenga in una certa involuzione d'ordine n, dovrà la curva fondamentale d'ordine r_1, corrispondente ad 1, passare con $r_1 - 2$ rami per 1, e quindi possedere $r_1 - 2$ punti doppi in altri punti fondamentali $2, 3, \ldots, r_1 - 1$ e passare semplicemente per 5 altri.

I punti fondamentali $2, 3, \ldots, r_1 - 1$ sono almeno tripli, le curve corrispondenti dovendo possedere un punto doppio in 1. Sono poi tripli o doppi per le Ω avendosi $\varepsilon_1 = 0$ [n.° 2, *b*)] perciò saranno della specie III, IV o V.

Ma si riconosce immediatamente che solo il caso V è possibile, giacchè nel III caso si avrebbe $\alpha_{1i} > 2$ (perchè $\varepsilon_i = 0$) e ciò non può essere, e nel IV risulterebbe $\alpha_{1i} + \alpha_{ii} > r_i$.

I 5 punti poi pei quali passa semplicemente la curva corrispondente ad 1 sono semplici o doppi per le Ω perchè $\varepsilon_1 = 0$. Notiamo ancora che i punti semplici delle Ω sono od uniti o fondamentali semplici, perchè se fossero doppi [n.° 2, *a*)] le coniche corrispondenti dovrebbero essere segate in un solo punto variabile dalle Ω [n.° 2, *c*)], passando pel punto cui corrispondono, e ciò manifestamente è impossibile.

Le Ω hanno raccolte nel punto 1 18 intersezioni fisse, ne posseggono ancora 25 distribuite almeno in $r_1 + 3 \geqq 7$ punti. Se adunque il caso V si presenta per α punti dovrà essere

$$6 \geqq \alpha \geqq r_1 - 2.$$

(*) Bertini, *Sulle trasformazioni,* ecc., l. c.

(**) Bertini, *Sopra alcune involuzioni piane,* l. c., n.i 18, 22, 26.

La formola (1) (n.° 1) insieme alla relazione fondamentale $\sum_{i=1}^{i=h} r_i = 3(n-1)$ ci dà

$$3r_1 + \sum_{i=1}^{i=\alpha} r_{i+1} = 4(n-1).$$

Considerando la cubica $(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,7)_3$ si deduce $2r_1 + \sum_2^7 r_i \leq 3n$, e quindi sottraendo dalla precedente:

$$r_1 - \sum_{i=\alpha+2}^{i=7} r \geqq n-4.$$

D'altra parte si ha $r_1 \leq n-3$, dunque sarà:

$$\alpha = 6 \quad \text{od} \quad \alpha = 5.$$

Se fosse $\alpha = 6$ le Ω possiederebbero ancora un punto semplice 8 a comune, il quale necessariamente dovrebbe essere fondamentale semplice. La curva fondamentale corrispondente ad 1 deve passare, come già notammo, semplicemente per altri 4 punti fondamentali i quali sono doppi per le Ω; è quindi necessario che delle rette unite passanti per 1 [vedi n.° 2, *b*)] contengano insieme 4 dei 6 punti doppi delle Ω, e questo non è possibile se si osserva che le rette unite non debbono essere segate in punti variabili dalle curve Ω (*).

6. Si conclude che se in una involuzione di 3ª classe si presenta per un punto fondamentale il caso II, devono le Ω possedere 5 punti doppi, e 5 semplici a comune, cioè essere:

$$(\Omega) = (1_2^4\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8\,9\,10\,11)_7.$$

La relazione che abbiamo trovata:

$$r_1 - r_7 \geqq n-4$$

(essendo $r_7 > 0$, ed 8 almeno i punti fondamentali) ci dice che dobbiamo avere:

$$r_1 = n-3, \qquad r_2 = r_3 = 3, \qquad r_7 = r_8 = 1.$$

Le cubiche che corrispondono a 2 e 3 passano semplicemente pei punti corrispondenti ed hanno un punto doppio in 1, possiamo supporre che siano rispettivamente

$$(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,7)_3, \qquad (1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,8)_3.$$

(*) Bertini, *Sopra alcune involuzioni piane,* l. c., n.° 6.

Ma la curva unita passa pure semplicemente per questi due punti, sicchè per un noto teorema (*) avremo che le cubiche dei due fasci

$$(1^2\,3\,4\,5\,6\,7)_3, \qquad (1^2\,2\,4\,5\,6\,8)_3$$

sono unite. Se l'involuzione esiste si costruirà con questi due fasci.

Se anche i punti 4, 5, 6 fossero tripli sarebbero unite le cubiche dei fasci

$$(1^2\,2\,3\,5\,6\,9)_3, \qquad (1^2\,2\,3\,4\,6\,10)_3, \qquad (1^2\,2\,3\,4\,5\,11)_3$$

per la stessa ragione. Ma se alcuni di questi punti sono doppi si può vedere che questa proprietà non cessa. Infatti poniamo che il punto 6 sia fondamentale doppio, esso sarà semplice per la curva corrispondente ad 1, e ciò vuol dire che la retta $(1\,6)_1$ deve essere unita e passare quindi per uno dei punti semplici delle Ω, che diremo 11 il quale sarà unito per l'involuzione [n.° 2, *b*)]. La conica $(1\,2\,3\,4\,5)_2$ deve essere la corrispondente del punto 6, talchè avremo $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5=2n$. Adunque ad una cubica $(1^2\,2\,3\,4\,5\,11)_3$ corrisponde una curva d'ordine $3n-(2r_1+r_2+r_3+r_4+r_5)=n-r_1=3$, la quale passa per 1 con $3r_1-(2\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15})=3(n-3)-(n-5)-$ $-2(n-3)=2$ rami, e passa semplicemente per i punti 2, 3, 4, 5, 11 e per le intersezioni della cubica data colla curva punteggiata unita, le quali sono in numero di:

$$3(n-6)-2\lambda_1-\sum_2^5\lambda_i=3(n-6)-2(r_1-4)-\sum_2^5(r_i-2)=1;$$

la cubica considerata coincide adunque colla curva corrispondente, quindi ecc.

Le rette $(12)_1$, $(13)_1$ sono necessariamente fondamentali e corrispondono ai punti 7 e 8 quindi le cubiche dei cinque fasci che passano per 7 e per 8 devono contenere rispettivamente le rette $(12)_1$, $(13)_2$. Adunque i gruppi di 6 punti

1, 4, 5, 6, 7, 8; 1, 3, 5, 6, 7, 9; 1, 2, 5, 6, 8, 9; 1, 3, 4, 6, 7, 10;
1, 2, 4, 6, 8, 10; 1, 3, 4, 5, 7, 11; 1, 2, 4, 5, 8, 11

devono giacere sopra altrettante coniche, dall'esistenza delle quali segue poi anche quella delle tre altre:

$$(1\,2\,3\,4\,10\,11)_2 \qquad (1\,2\,3\,5\,9\,11)_2 \qquad (1\,2\,3\,6\,9\,10)_2.$$

(*) Caporali, l. c., n.° 5.

7. Scegliamo in un piano affatto arbitrariamente 8 punti, e denominiamoli 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11; e determiniamone tre altri 3, 7, 8 come intersezioni delle coniche:

$$\left.\begin{matrix}(1\ 2\ 6\ 9\ 10)_2\\(1\ 2\ 4\ 10\ 11)_2\end{matrix}\right\}3\qquad\left.\begin{matrix}(1\ 3\ 5\ 6\ 9)_2\\(1\ 3\ 4\ 6\ 10)_2\end{matrix}\right\}7\qquad\left.\begin{matrix}(1\ 2\ 5\ 6\ 9)_2\\(1\ 2\ 4\ 6\ 10)_2\end{matrix}\right\}8.$$

Stabiliamo coi due fasci

$$(1^2\,2\,3\,5\,6\,9)_3,\qquad(1^2\,2\,3\,4\,6\,10)_3$$

una trasformazione involutoria facendo corrispondere ad un punto del piano l'ulteriore intersezione delle cubiche dei due fasci, che passano per esso.

Con questa costruzione si ottengono, come si vede facilmente, le involuzioni di 3ª classe che hanno il sistema di curve Ω ora considerato e che chiameremo di *2ª specie* (*). La più generale è del 10° ordine, ed i casi particolari si ottengono dando posizioni speciali ai punti fondamentali che possono essere scielti arbitrariamente, secondo l'osservazione fatta al n.° 2, *d*).

8. Se in una involuzione le Ω posseggono dei punti tripli in comune, ma non punti di molteplicità superiore, questi punti devono essere tutti della medesima specie cioè della III o IV. Infatti se fossero ad es. i punti 1 e 2 l'uno di III e l'altro di IV specie si avrebbe $r_2-1=\alpha_{22}$ però $\alpha_{12}<2$ ed invece essendo $\varepsilon_1=0$ dovrebbe essere $\alpha_{12}=3$ ovvero $=2$ [n.° 2, *b*)].

Se α è il numero dei punti di III specie esistenti in una involuzione, gli altri punti fondamentali saranno delle specie V o VI, e dalla formola (1) (n.° 1) si deduce (se β sono i punti di V specie)

$$2\sum_{i=1}^{i=\alpha}r_i+\sum_{i=\alpha+1}^{i=\alpha+\beta}r_i=4(n-1),\qquad\sum_{i=1}^{i=\alpha}r_i=n-1+\sum_{i=\alpha+\beta+1}^{i=h}r_i$$

però $\alpha>1$; d'altra parte $\alpha<5$ sicchè potremo supporre solamente $\alpha=4$, $\alpha=3$, $\alpha=2$.

9. Sia $\alpha=4$. Allora $4\beta\leq7$, cioè $\beta=1$ ovvero $\beta=0$. Non può essere $\beta=1$ altrimenti la conica $(1\,2\,3\,4\,5)_2$ non sarebbe incontrata dalle Ω in punti variabili, cosa impossibile (**); dunque dobbiamo avere:

$$(\Omega)=(1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11)_7.$$

(*) *Le involuzioni di 3ª e 4ª classe,* l. c., dal n.° 2 al n.° 6.

(**) Bertini, *Sopra alcune involuzioni piane,* l. c., n.° 6; detta conica non può spezzarsi in due rette senza che si spezzino le Ω.

Siccome le curve che corrispondono ai punti 1, 2, 3, 4 devono avere tre punti doppi almeno [n.° 2, *b*)] così i punti stessi sono almeno quadrupli per l'involuzione, sicchè per i punti 5, 6, 7, 8 necessariamente passano le curve corrispondenti ad 1, 2, 3, 4, segue che i punti 5, 6, 7, 8 sono doppi [n.° 2, *a*)]. Per essi passano le coniche corrispondenti; e la curva punteggiata unita, per la qual cosa il fascio $(1\,2\,3\,4)_2$ è di coniche unite (*).

Le curve Ω relative ai punti 5, 6, 7, 8 sono curve del 5° ordine, che hanno quattro punti doppi nei punti 1, 2, 3, 4, e passano semplicemente per gli altri punti 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Due di queste quintiche si segano in altri due punti α_1, α_2 i quali essendo corrispondenti l'uno all'altro giacciono sopra una conica del fascio $(1\,2\,3\,4)_2$; i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 sono perciò sopra una medesima cubica.

Un fascio qualunque di quintiche $(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11)_5$ è formato da curve unite e con esso ed il fascio di coniche $(1\,2\,3\,4)_2$ si può stabilire una trasformazione involutoria la quale, come si riconosce immediatamente, è della specie considerata. Le involuzioni che nascono in questo modo verranno chiamate di *3ª specie* (**).

10. Se i punti di III specie sono tre, non è possibile che i punti semplici delle Ω siano fondamentali doppi, non esistendo alcuna conica passante per un punto semplice delle Ω e per altri 4 punti fondamentali che sia segata in un sol punto variabile dalle Ω stesse [n.° 2, *c*)]. Dunque tali punti, se fondamentali, sono semplici ed al massimo in numero di 3 (le rette fondamentali dovendo unire due dei punti tripli). Anche qui la curva fondamentale corrispondente ad un punto triplo delle Ω ha almeno un punto doppio negli altri due punti tripli, sicchè questi sono almeno quadrupli per l'involuzione, e le corrispondenti curve passeranno certamente per più di 7 punti fondamentali, senza poter contenere tre punti fondamentali semplici. Dunque le Ω possiederanno almeno tre punti doppi. Più di tre non ne possono poi esistere giacchè i punti fondamentali sarebbero 7 soltanto, dunque avremo $\beta = 3$. Le formole del n.° 8 danno:

$$2\sum_{i=1}^{i=3} r_i + \sum_{i=4}^{i=6} r_i = 4(n-1) \qquad \sum_{i=1}^{i=3} r_i = n - 1 + \sum_{i=7}^{i=h} r_i,$$

però:

$$\sum_{i=4}^{i=6} r_i = 2n - (2 + 2\sum_{i=7}^{i=h} r_i) \geqq 2n - 8.$$

(*) Caporali, l. c., n.° 5.

(**) Martinetti, *Le involuzioni di 3 e 4ª classe*, l. c., dal 7 al n.° 14.

Ed essendo $r_1 \geqq r_2 \geqq r_3 \geqq 4$ ed $r_6 \leqq r_3$ (il segno uguale non potendo aver luogo contemporaneamente in questa e nella relazione precedente) si vede come la fatta ipotesi conduca all'assurdo

$$\sum_{i=1}^{i=5} r_i > 2\,n.$$

11. Esaminiamo l'altro caso, che ancora ci resta a considerare, cioè che esistano due punti tripli 1, 2, per le Ω pei quali abbia luogo il caso III.

Le formole del n.° 8 danno:

$$r_1 + r_2 = n - 1 + \sum_{i=\beta+3}^{i=h} r_i,$$

quindi dei punti semplici delle Ω o nessuno è fondamentale, oppure uno solo è fondamentale semplice, in ogni caso nessun punto fondamentale è di molteplicità maggiore di r_1 ed r_2. r_1 che supponiamo $\geqq r_2$ non può essere triplo, chè se ciò fosse la cubica corrispondente non passerebbe per 1 ed avrebbe un punto doppio in 2, cosa impossibile, perciò sarà $r_1 \geqq 4$ ed esisteranno almeno 8 punti fondamentali, cioè sarà $\beta = 5$ od $= 6$. Se fosse $\beta = 5$ esisterebbe un punto fondamentale semplice pel quale non dovrebbero passare le curve corrispondenti ai punti 3, 4, 5, 6, 7, queste saranno dunque o cubiche o coniche. Avendosi $r_1 > 3$ le cubiche fondamentali avranno il loro punto doppio in 1 od in 2 se $r_1 = r_2$, epperò sono due al più, ma supponendo tanto $r_3 = 3$ $r_4 = r_5 = r_6 = r_7 = 2$ quanto $r_3 = r_4 = 3$ $r_5 = r_6 = r_7 = 2$ si ha un assurdo, giacchè nel primo caso le coniche fondamentali passerebbero per due punti doppi e non per altri due, nel secondo certamente una conica fondamentale passerebbe pel punto corrispondente.

Il solo caso che possiamo ammettere è adunque

$$(\Omega) = (1^3\,2^3\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8\,9)_7.$$

Il punto 9 è o fondamentale semplice, oppure unito.

Consideriamo separatamente i due casi:

Se 9 è fondamentale semplice avremo $r_1 + r_2 = n$.

Una cubica qualunque del fascio $(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)_3$ ha per corrispondente una curva d'ordine

$$3\,n - \sum_{i=1}^{i=8} r_i = 3\,n - (3\,n - 4) = 4,$$

che passa per un punto fondamentale i con

$$3\,r_i - \sum_{k=1}^{k=8} \alpha_{ik} = 3\,r_i - (3\,r_i - 1 - \alpha_{i9}) = 1 + \alpha_{i9}$$

rami, cioè passa due volte per 1 e 2 e semplicemente per tutti gli altri punti 3, 4,..., 9.

La cubica considerata sega la curva punteggiata unita, d'ordine $n-6$, fuori dei fondamentali in

$$3(n-6) - \sum_1^8 \lambda_i = 3(n-6) - (r_1 - 3) - (r_2 - 3) - \sum_{i=3}^{i=8} (r_i - 2) = 4$$

punti pei quali deve anche passare la curva corrispondente, questa adunque deve spezzarsi nella cubica data e nella retta fondamentale $(1\,2)_1$, cioè tutte le cubiche del fascio $(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)_3$ sono unite e passano pel punto fondamentale 9.

Con identiche considerazioni si dimostra che le quartiche della rete $(1^2\,2^2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)_4$ sono unite.

Se il punto 9 è unito, le curve fondamentali corrispondenti ad 1 e 2 non passano per 9 e questo vuol dire che i punti 1, 2, 9 sono sopra una medesima retta unita [n.° 2, *b*)] e si avrà $r_1 + r_2 = n - 1$.

Come precedentemente si dimostra, che le cubiche del fascio $(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)_3$ sono unite, quindi il residuo punto base, dovendo essere punto unito è 9.

Qui ancora le quartiche della rete

$$(1^2\,2^2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)_4$$

sono unite.

Vediamo adunque che posto il sistema

$$(\Omega) = (1^3\,2^3\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8\,9)_7$$

si possono avere involuzioni di 3ª classe solo quando i 9 punti 1, 2,..., 9 siano punti base di un fascio di cubiche; e la costruzione loro si avrà colla rete di quartiche unite:

$$(1^2\,2^2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)_4.$$

Ora questa costruzione conduce effettivamente ad involuzioni di terza classe che noi chiameremo di *IV specie* (*).

(*) Martinetti, l. c. dal n.° 15 al n.° 22.

12. In una involuzione di 3ª classe non possono i punti fondamentali presentare unicamente i casi V e VI, poichè la formola (1) (n.° 1) darebbe:

$$2\sum_{i=1}^{i=\alpha} r_i + \sum_{i=\alpha+1}^{i=h} r_i = 7(n-1)$$

donde l'assurdo

$$\sum_{i=1}^{i=\alpha} r_i = 4(n-1).$$

Dunque se oltre alle già trovate esistono ancora delle involuzioni di 3ª classe devono necessariamente esistere in esse dei punti fondamentali di IV specie. Se tale è il punto 1, dovremo avere:

$$\alpha_{11} = r_1 - 1 \quad \text{quindi} \quad \alpha_{1i} < 2.$$

Se fosse $r_1 > 3$ seguirebbe $r_1 > r_i$, sicchè r_1 sarebbe il punto di massima molteplicità, ed ogni altro punto fondamentale semplice o doppio (le corrispondenti curve passando semplicemente pel punto di massima molteplicità). Il caso IV si potrebbe quindi presentare per un unico punto cosa impossibile (n.° 8). Perciò dovrà essere $r_1 = 3$, ed il caso IV dovrà presentarsi almeno per un altro punto fondamentale 2 pel quale sarà pure $r_2 = 3$. Dico anzi che non v'hanno altri punti tripli per le Ω; infatti se ne avessero un altro (e più non ne potrebbero avere pel fatto che sono 43 sole le loro intersezioni fisse) ne verrebbe, che i punti semplici delle Ω non potendo essere fondamentali doppi o tripli (le curve fondamentali corrispondenti non verrebbero segate in un sol punto variabile dalle Ω) sarebbero semplici od uniti, ed al massimo in numero di tre; le Ω non potrebbero avere punti doppi, perchè ad essi corrisponderebbero curve non passanti pei punti semplici, e quindi dovrebbero passare tutte per soli 5 punti fondamentali, se di punti doppi ve ne hanno due, e per 4 se ve n'ha uno solo, e questo è impossibile. Sicchè i punti fondamentali sarebbero solo tre punti tripli ed al più tre semplici, cosa assurda.

I punti di IV specie saranno due solamente, e si avrà

$$3(r_1 + r_2) + 2\sum_{i=1}^{i=\beta} r_{2+i} + \sum_{i=\beta+3}^{i=h} r_i = 7(n-1)$$

$$r_1 + r_2 = n - 1 - \sum_{i=\beta+3}^{i=h} r_i.$$

Dei punti semplici delle Ω uno solo può essere fondamentale semplice, quindi, avendosi $r_1 + r_2 = 6$ sarà $n = 7$ od $n = 6$.

Dalle tavole di CREMONA (*) si vede che le sole soluzioni

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 3 \qquad r_5 = r_6 = r_7 = 2 \quad \text{per} \quad n = 7$$

$$r_1 = r_2 = 3 \qquad r_4 = r_5 = r_6 = 2 \qquad r_7 = 1 \quad \text{per} \quad n = 6$$

soddisfano a queste condizioni. La prima è da escludere giacchè esisterebbe almeno una conica fondamentale passante pel punto fondamentale corrispondente e ciò non deve essere. Quindi può esistere una sola involuzione di 3ª classe che possegga punti di IV specie, essa è del 6° ordine con due punti tripli, quattro doppi ed uno semplice, e dà luogo al sistema

$$(\Omega) = (1_2^3\, 2_2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 8\; 9\; 10\; 11)_7.$$

Questa involuzione, che diremo di *5ª specie* esiste infatti e si costruisce per mezzo di due fasci di coniche in involuzione (**).

Così resta dimostrato che tutte le involuzioni di 3ª classe, si possono dividere in cinque specie, quelle di una stessa specie si ottengono colla medesima costruzione, l'una non differendo dall'altra che per la posizione speciale dei punti fondamentali.

I sistemi (Ω) nelle involuzioni di 4ª classe.

13. Le formole del n.° 1 per $\nu = 4$ danno luogo ai seguenti casi:

	δ_i	ε_i	$r_i - \lambda_i$	$\alpha_{ii} - \lambda_i$	α_{ii}	λ_i
I	3	0	7	6	$r_i - 1$	$r_i - 7$
II	2	0	6	4	$r_i - 2$	$r_i - 6$
III	1	0	5	2	$r_i - 3$	$r_i - 5$
IV	0	0	4	0	$r_i - 4$	$r_i - 4$
V	3	1	5	4	$r_i - 1$	$r_i - 5$
VI	2	1	4	2	$r_i - 2$	$r_i - 4$

(*) CREMONA, *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane.* Memoria II. — Memorie dell'Accademia di Bologna, 1865.

(**) MARTINETTI, l. c., n.° 23.

	δ_i	ε_i	$r_i - \lambda_i$	$\alpha_{ii} - \lambda_i$	α_{ii}	λ_{ii}
VII	1	1	3	0	$r_i - 3$	$r_i - 3$
VIII	3	2	3	2	$r_i - 1$	$r_i - 3$
IX	2	2	2	0	$r_i - 2$	$r_i - 2$
X	3	3	1	0	$r_i - 1$	$r_i - 1$

Le curve Ω sono del 9° ordine ed hanno 73 intersezioni fisse.

14. Notiamo anzitutto che non possono esistere involuzioni nelle quali si presentino i casi II, V ed VIII.

Infatti supponiamo che pel punto 1 abbia luogo il caso II. La curva fondamentale corrispondente ha un punto $r_1 - 2$ in 1 e quindi passerà semplicemente per 5 punti fondamentali ed avrà $r_1 - 2 \geqq 4$ punti doppi in altri punti i quali saranno almeno tripli per l'involuzione e doppi per le Ω [n.° 2, *b*)].

Se le Ω posseggono punti tripli, questi saranno della VII specie, poichè se fossero dell'VIII ne verrebbe $\alpha_{i1} + \alpha_{ii} > r_i$. In ogni punto di VII specie sono riunite 9 intersezioni fisse perciò (ricordando che devono esistere oltre ad 1 almeno altri 9 punti fondamentali dei quali 4 di molteplicità superiore a 2) i punti di VII specie sono due al massimo.

I 5 punti pei quali passa semplicemente la curva corrispondente ad 1 sono semplici o doppi per la trasformazione ed anche per le Ω. Se ve n'ha di doppi le coniche corrispondenti non possono passare per essi, esistendo certamente 5 punti di molteplicità maggiore di 2, perciò devono essere anche doppi per le Ω, e le coniche fondamentali saranno dunque segate in 2 punti variabili dalle Ω stesse [n.° 2, *c*)]; questo non avviene se non esistono due punti tripli per le Ω, ma allora è assurdo supporre che esse posseggano ancora più di due punti doppi.

Rimane adunque da esaminare la sola ipotesi che i punti fondamentali, pei quali passa semplicemente la curva corrispondente ad 1, siano fondamentali semplici. Le rette che loro corrispondono uniranno 1 con cinque punti 2, 3, 4, 5, 6 di molteplicità $n - r_1$ e certamente doppi per le Ω [n.° 2, *c*)]. Questi punti sono di molteplicità $r_i > 3$, poichè se fosse $r_i = 3$ si avrebbe l'assurdo che la cubica fondamentale corrispondente ad i passerebbe per un punto semplice e non pel punto i. D'altronde avendosi per $i = 2, 3, \ldots, 6$

$\alpha_{1i} = 2 \geqq \alpha_{ii} = r_i - 2$ non può essere $r_i > 4$; talchè avremo necessariamente

$$r_1 = n - 4, \qquad r_2 = r_3 = \cdots = r_6 = 4, \qquad r_i < 4 \quad \text{per} \quad i > 6.$$

Le quartiche corrispondenti ai punti 2, 3,..., 6 formano il gruppo coordinato al gruppo dei punti semplici e questa osservazione mostra l'impossibilità dell'ipotesi fatta; poichè i due punti doppi che ancora devono avere queste quartiche dovrebbero essere in due punti quadrupli, perchè gli altri punti fondamentali sono di molteplicità inferiore, ed invece le quartiche devono passare collo stesso numero di rami pei punti quadrupli.

Il caso V si potrà presentare per il solo punto 1. Essendo $\alpha_{11} = r_1 - 1 \geqq 4$ si avrà $\alpha_{i1} < 2$ quindi $r_1 > r_i$. Poichè adunque tutte le curve fondamentali (la 1ª eccettuata) passano semplicemente pel punto di massima molteplicità (sicchè non hanno punti multipli) così queste curve saranno coniche o rette, epperò per i punti 2, 3,... h si presenteranno esclusivamente i casi IX e X. Ma per la (1) del n.° 1 ne verrebbe:

$$4\, r_1 + \sum_{i=2}^{i=\alpha+1} r_i = 6\,(n-1)$$

$$3\, r_1 = 3\,(n-1) + \sum_{i=\alpha+1}^{i=h} r_i$$

donde seguirebbe l'assurdo

$$r_1 + r_2 > n.$$

Se il caso VIII avviene ad esempio pel punto 1 sarà $r_1 \geqq 3$. Per $r_1 > 3$ abbiamo $\alpha_{11} > 2$ $\alpha_{1i} < 2$ quindi 1 è il punto di massima moltiplicità, e tutti gli altri punti fondamentali sono doppi o semplici, cosa assurda poichè verrebbe, come precedentemente:

$$r_1 \geqq 3\,(n-1).$$

Se poi $r_1 = 3$ nessun altro punto sarà di molteplicità superiore (avendosi $\alpha_{11} = 2$) cioè le Ω non possono avere che punti tripli, doppi e semplici, in numero rispettivamente di α, β, γ. Allora deduciamo:

$$\sum_{i=1}^{i=\alpha} r_i = 3\,(n-1) + \sum_{i=\alpha+\beta+1}^{i=\alpha+\beta+\gamma} r_i$$

la quale ci dice che tutti i punti fondamentali sono tripli per le Ω e quindi anche tripli per l'involuzione, necessariamente di VIII specie (poichè se ve ne fossero anche di VII le cubiche corrispondenti dovrebbero avere un punto doppio in un punto triplo e non passare pel punto triplo corrispondente e ciò non può essere). Il numero di questi punti fondamentali deve essere 7; ma allora le Ω hanno più di 73 intersezioni fisse. Così è dimostrato, come siano impossibili i casi II, V ed VIII.

Esaminiamo gli altri casi.

15. Supponiamo che in una involuzione si presenti il caso I per un punto fondamentale 1, che sarà dunque settuplo per le Ω; talchè queste curve non potranno avere a comune che punti semplici o doppi. La curva che corrisponde ad 1 ha un punto $(r_1 - 1)$-plo in 1 e passerà semplicemente per altri $2(r_1 - 1)$ punti fondamentali i quali saranno semplici o doppi per l'involuzione. Ma nessun punto fondamentale può essere doppio, perchè esisterebbe una conica fondamentale almeno, che dovrebbe essere segata in uno o due punti variabili dalle Ω (secondochè il punto corrispondente è semplice o doppio per le curve stesse [n.° 2, *c*)]) ed è ciò manifestamente impossibile. Sicchè le Ω dovranno possedere 18 punti semplici fissi e la trasformazione sarà di Jonquières. D'altronde si sa che esistono tre involuzioni di 4ª classe, che verranno dette di 1ª specie, di Jonquières (*) per le quali il sistema delle curve Ω è appunto

$$(\Omega) = (1_6^7\, 2\, 3 \ldots 19)_9.$$

16. In una involuzione può esistere un unico punto di III specie 1, ed allora nessuno dei rimanenti punti fondamentali può dar luogo al caso IV o VI; poichè per un punto di IV specie sarebbe $\alpha_{1i} = 4$ od $= 5$ [n.° 2, *b*)] ed invece la curva fondamentale corrispondente ad 1 può avere al più un punto triplo in i (essendo $\alpha_{11} = r_1 - 3$); e per un punto di VI specie verrebbe $\alpha_{ii} = r_i - 2$ ed è questo assurdo avendosi $\alpha_{1i} = 3$ od $= 4$.

Insieme al caso III potranno dunque avvenire soltanto i casi VII, IX e X.

Se non si presentasse il VII caso, i punti semplici delle Ω non potrebbero essere fondamentali, poichè o sarebbero semplici o doppi ed invece non esistono nè rette nè coniche segate in un punto variabile dalle Ω [n.° 2, *a*), *c*)] per la qual cosa si dovrebbe avere, chiamando β il numero dei punti di IX specie, [n.° 1, (1)]:

$$5\, r_1 + 1 \sum_{i=2}^{i=\beta+1} r_i = 9(n-1),$$

donde $3\, r_1 = 3(n-1)$, quindi $r_1 + r_i > n$.

(*) Bertini, *Sopra alcune involuzioni piane*, l. c., n.$^{\mathrm{i}}$ 18, 22, 26.

Le Ω possiedono adunque dei punti tripli di VII specie.

Anche in questo caso notiamo che i punti semplici delle Ω non possono essere doppi, giacchè mai si avrebbero coniche, passanti per un punto semplice, segate in un punto variabile dalle Ω, al contrario possono essere fondamentali semplici, ed allora le rette fondamentali devono unire uno dei punti tripli col punto quintuplo.

Le Ω devono avere fuori del punto quintuplo ancora 46 intersezioni fisse, sicchè (dovendo i punti fondamentali essere 8 almeno) i punti tripli delle Ω saranno $\alpha \leq 4$. I punti doppi siano β ed i semplici γ, allora si avrà

$$9\alpha + 4\beta + \gamma = 46 \tag{1}$$

$$5r_1 + 3\sum_{i=2}^{i=\alpha+1} r_i + 2\sum_{i=\alpha+2}^{i=\alpha+\beta+1} r_i + \sum_{i=\alpha+\beta+2}^{i=h} r_i = 9(n-1) \tag{2}$$

$$4r_1 + 2\sum_{i=2}^{i=\alpha+1} r_i + \sum_{i=\alpha+2}^{i=\alpha+\beta+1} r_i = 6(n-1). \tag{3}$$

Se fosse $\alpha < 3$ si avrebbe $4r_1 + 2\sum_{i=2}^{i=\alpha+1} r_i \leqq 4n$ e seguirebbe dalla (3) $\sum_{i=\alpha+2}^{i=\alpha+\beta+1} r_i \geqq 2n-6$, e dalla (3) stessa insieme alla relazione fondamentale $\sum_{i=1}^{i=h} r_i = 3(n-1)$:

$$r_1 \geqq n - 3 + \sum_{i=\alpha+\beta+2}^{i=h} r_i$$

per la qual cosa non dovrebbero esistere punti fondamentali semplici, e tutti i punti fondamentali, eccettuato 1, dovrebbero essere di molteplicità inferiore a tre e questo è contrario all'ipotesi fatta, che abbiano ad esistere punti tripli per le Ω.

Dunque α può avere i soli valori 4 e 3. Ma per $\alpha = 4$ è $\beta \leq 2$. La curva fondamentale corrispondente ad un punto doppio delle Ω non deve passare pei punti fondamentali semplici, e quindi al massimo passarebbe per 7 punti fondamentali (quando $\beta = 2$) ma allora è una cubica od una conica, la quale dovrebbe essere segata in due punti variabili dalle Ω [n.° 2, *c*)] e questo manifestamente non può avvenire. Non può così supporsi che $\beta = 0$, ma anche allora viene un assurdo, poichè le curve corrispondenti ai punti tripli delle Ω non dovrebbero passare che per 6 punti al massimo.

Dunque dobbiamo porre $\alpha = 3$ quindi $\beta \leqq 4$; ma non può essere $\beta < 4$, giacchè abbiamo in tal caso

$$2\, r_1 + \sum_{i=2}^{i=4} r_i + \sum_{i=5}^{i=\beta+4} r_i \leq 3\, n$$

e se ha luogo il segno $=$ deve essere $\beta = 3$ e la cubica $(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3$ fondamentale e corrispondere ad uno dei punti 5, 6 o 7 sicchè verrà

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 < 2\, n - 2;$$

e se non ha luogo il segno $=$ dovrà essere $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leq 2\, n - 2$, in ogni modo avremo:

$$3\, r_1 + 2 \sum_{i=2}^{i=4} r_i + \sum_{i=5}^{i=\beta+4} r_i < 5\, n - 2$$

sicchè dalla (3) deduciamo $r_1 > n - 4$. Ma non potrà essere che $r_1 = n - 3$, $r_2 = r_3 = r_4 = 3$, $r_5 = 2$, ecc., ed è manifestamente impossibile che le cubiche corrispondenti ai punti tripli non passino pei punti corrispondenti.

17. Dunque il solo sistema di curve Ω possibile nell'ipotesi che esse posseggano un punto quintuplo è

$$(\Omega) = (1_2^5\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2\, 9\, 10\, 11)_9.$$

La curva fondamentale corrispondente a 5 non può essere del 5° ordine, perchè avrebbe un punto triplo in 5 e quindi dovrebbe passare per altri 8 punti fondamentali ed invece sappiamo che non può passare per alcuno dei punti 9, 10, 11. Non può neppure essere del 4° perchè nessuna quartica con un punto doppio in 5 è segata in due soli punti variabili dalle Ω, così dicasi dei punti 6, 7 ed 8, perciò concludiamo che le curve fondamentali corrispondenti ai punti 5, 6, 7, 8 sono cubiche o coniche.

Se 5 è fondamentale triplo la cubica corrispondente ha un punto doppio in 1 e passa semplicemente per 2, 3, 4, 5 e per due altri dei punti 6, 7, 8, che supporremo siano 6 ed 8. Allora è triplo anche 6, giacchè se 6 ed 8 fossero contemporaneamente doppi le coniche corrispondenti dovrebbero passare per 1, 2, 3, 4, 5 e quindi coinciderebbero. La cubica che corrisponde a 6 non passerà per 8 ma per 7, per cui, in certo modo, i punti 5, 7 e 6 8, sono coniugati.

Se 5 e 6 sono tripli avremo (*) che i due fasci

$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 6\, 8)_3, \qquad (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 7)_3$$

sono di curve unite e con essi si potrà costruire l'involuzione.

(*) CAPORALI, l. c., n.° 5.

Ma se 5 è doppio, epperò anche 6, 7 ed 8, vuol dire che la curva fondamentale corrispondente ad 1 passa semplicemente per essi, cioè [n.° 2, *b*)] la retta che unisce 1 con 5 deve essere unita quindi deve passare per un altro punto doppio delle Ω che chiamo 6, cioè deve aver luogo l'allineamento $(1\,5\,6)_1$ come anche $(1\,7\,8)_1$.

La conica che corrisponde a 5 sarà $(1\,2\,3\,4\,8)_2$ quella che corrisponde a 6 $(1\,2\,3\,4\,7)_2$ dunque avremo

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2\,n - 2$$

$$r_1 + r_5 + r_6 = r_1 + 4 = n - 1.$$

Dopo questo è facile vedere che i due fasci

$$(1^2\,2\,3\,4\,6\,8)_3 \qquad (1^2\,2\,3\,4\,5\,7)_3$$

sono egualmente di cubiche unite.

Come già notammo i punti 9, 10, 11 sono o fondamentali semplici, aventi per rette corrispondenti rispettivamente le $(1\,2)_1$, $(1\,3)_1$, $(1\,4)_1$, od uniti, ma allora la retta che li unisce ad 1 passa anche per uno dei punti tripli. Per questo le cubiche dei due fasci che passano per 9, 10, 11 si spezzano rispettivamente nelle rette $(1\,2)_1$ $(1\,3)_1$ $(1\,4)_1$ ed in coniche contenenti i gruppi di 6 punti (*):

1, 2, 3, 5, 7, 11; 1, 2, 3, 6, 8, 11; 1, 2, 4, 5, 7, 10;

1, 2, 4, 6, 8, 10; 1, 3, 4, 6, 8, 9; 1, 3, 4, 5, 7, 9.

Le condizioni che ora trovammo essere necessarie per l'esistenza delle involuzioni in cui il sistema delle Ω è $(1_2^5\,2^3\,3^3\,4^3\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2\,9\,10\,11)_9$, e che noi diremo di 2ª specie (**), sono anche sufficienti, perchè applicando la detta costruzione si giunge appunto ad involuzioni di 4ª classe della specie qui considerata.

18. Le curve Ω non possono possedere contemporaneamente punti quadrupli i quali presentino i casi IV e VI; poichè la curva fondamentale corrispondente ad un punto di IV specie avrebbe almeno un punto triplo in un

(*) Se il punto 11 ad esempio fosse unito dalla cubica $(1^2\,2\,3\,4\,6\,8\,11)_3$ si stacca la retta $(1\,4\,11)_1$ e rimane la conica unita $(1\,2\,3\,6\,8)$ la quale è segata dalla detta retta, pure unita, in un solo punto, che sarà o fondamentale od unito, 4 od 11; 4 non può essere altrimenti la $(1\,2\,3\,4\,6\,8)_2$ sarebbe parte fissa in un fascio di Ω cosa impossibile (BERTINI, *Sopra alcune involuzioni piane*, l. c., n.° 6) però sulla conica giace il punto 11.

(**) MARTINETTI, l. c. dal n.° 26 al 30.

punto di VI (avendosi $\varepsilon_i = 0$) mentre la curva corrispondente a quest'ultimo non potrebbe avere nel primo che un punto doppio (perchè $\alpha_{ii} = r_i - 2$). Perciò se le Ω posseggono punti quadrupli saranno tutti di IV o di VI specie.

La formola (1) n.° 1 dà, nel caso che vi siano α punti quadrupli, β tripli, γ doppi e δ semplici:

$$3\sum_{i=1}^{i=\alpha} r_i + 2\sum_{i=\alpha+1}^{i=\alpha+\beta} r_i + \sum_{i=\alpha+\beta+1}^{i=\alpha+\beta+\gamma} r_i = 6(n-1)$$

epperò:

$$2\sum_{i=1}^{i=\alpha} r_i + \sum_{i=\alpha+1}^{i=\alpha+\beta} r_i = 3(n-1) + \sum_{i=\alpha+\beta+\gamma+1}^{i=h} r_i$$

ed ancora:

$$\sum_{i=1}^{i=\alpha} r_i = \sum_{i=\alpha+\beta+1}^{i=\alpha+\beta+\gamma} r_i + 2\sum_{i=\alpha+\beta+\gamma+1}^{i=h} r_i.$$

Dovendo essere poi

$$16\alpha + 9\beta + 4\gamma + \delta \leqq 73$$

deduciamo:

$$\alpha \leqq 4.$$

19. Se $\alpha = 4$ i punti quadrupli debbono essere di IV specie, ed avremo

$$\beta = 0 \qquad \gamma = 0 \qquad \delta = 9.$$

Le curve fondamentali corrispondenti ad uno dei punti quadrupli 1, 2, 3, 4 ha almeno dei punti tripli negli altri tre, però sarà

$$r_i \geqq 6 \quad \text{per} \quad i < 5.$$

I punti semplici per le Ω possono essere fondamentali semplici o doppi [n.° 2, *a*)]; di semplici ve n'ha al massimo tre perciò alcuni dei punti semplici delle Ω sono fondamentali doppi.

Le coniche del fascio $(1\,2\,3\,4)_2$ sono unite, essendo le coniche $(1\,2\,3\,4\,5)_2$ $(1\,2\,3\,4\,6)_2$ fondamentali e corrispondenti rispettivamente a 5 e 6.

Una quintica qualunque del fascio

$$(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13)_5$$

ha per corrispondente una curva di 9° ordine

$$(1^4\,2^4\,3^4\,4^4\,5^2\,6^2\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13)_9.$$

Se K indica il numero delle intersezioni della quintica considerata colla curva punteggiata unita fuori dei fondamentali; sarà:

$$K = 5(n-8) - 2\sum_{i=1}^{i=4}(r_i - 4) - \sum_{i=7}^{i=h}(r_i - 1).$$

Se scriviamo:

$$K' = 5(n-8) - 2\sum_{i=1}^{i=4}(r_i - 4) - \sum_{i=7}^{i=13}(r_i - 1)$$

avremo: $K = K'$ quando nella involuzione non esistano punti uniti, cioè siano 13 i punti fondamentali; ma se esistono dei punti uniti sarà $K' = K + u$, u essendo il numero dei punti uniti. Siccome poi due curve corrispondenti, se passano per un punto unito, ivi si toccano, così possiamo dire in ogni caso che le curve considerate si incontrano fuori dei punti fondamentali ed uniti in K' punti ancora, e perchè $K' = 8$ avremo che la curva di 9° ordine considerata si spezza nella quintica cui corrisponde e nelle due coniche fondamentali $(1\,2\,3\,4\,5)_2$ $(1\,2\,3\,4\,6)_2$, e questo vuol dire che tutte le quintiche del fascio considerato passano anche per 5 e per 6 e sono unite.

Questo fascio di quintiche e quello di coniche unite $(1\,2\,3\,4)_2$ danno la costruzione di involuzioni di 4ª classe che posseggono per curve Ω il sistema:

$$(\Omega) = (1^4\,2^4\,3^4\,4^4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13)_9$$

è che noi chiameremo di 3ª specie (*).

20. Se poniamo $\alpha = 3$ non potrà essere $\beta \geq 2$, altrimenti la conica $(1\,2\,3\,4\,5)_2$ sarebbe parte fissa in un fascio di curve Ω, cosa impossibile; si avrà quindi $\beta = 1$ ovvero $\beta = 0$.

Se $\beta = 1$, un punto semplice delle Ω non può essere fondamentale doppio, poichè la conica corrispondente, che passerebbe per esso e pei punti 1, 2, 3, 4, non verrebbe segata in un sol punto variabile dalle Ω; potrà però essere fondamentale semplice ed allora la retta fondamentale deve unire due dei tre punti quadrupli, sicchè dei punti semplici delle Ω al più tre sono fondamentali e semplici per l'involuzione.

La curva fondamentale corrispondente a 4 è di ordine $r_4 \geq 3$ e non passa pei punti fondamentali semplici; siccome poi per $r_4 > 3$ il numero dei punti pei quali deve passare la curva considerata è 8 almeno, ed è 7 per $r_4 = 3$ ma allora è $\alpha_{44} = 0$, così vediamo che devono esistere 4 punti doppi per le Ω le quali allora hanno tutte le intersezioni fisse raccolte nei tre punti quadrupli,

(*) MARTINETTI, l. c. dal n.° 31 al 38.

nel punto triplo e nei quattro doppi. I punti quadrupli devono poi essere di IV specie, non potendo le Ω avere direzioni fisse. Questo fa vedere come nessuna involuzione renda soddisfatte queste condizioni. Infatti l'ultima delle relazioni trovate al n.° 18 dà

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_5 + r_6 + r_7 + r_8.$$

Il primo membro è $\geqq 18$, giacchè i punti di IV specie sono almeno sestupli per l'involuzione (n.° 19) e ne verrebbe così l'assurdo $r_5 = r_6 = 5$ [n.° 2, a)].

21. Se dunque le Ω hanno tre punti quadrupli non possono avere ancora che punti doppi e semplici in comune. Anche in questo caso dei punti semplici delle Ω, tre al più possono essere fondamentali, necessariamente semplici.

Un punto doppio per le Ω non può essere che fondamentale doppio. Infatti se fosse triplo la cubica corrispondente passerebbe due volte per uno dei punti quadrupli, semplicemente per gli altri due e per quattro punti doppi delle Ω, e non verrebbe allora segata da queste curve in due punti variabili. Se fosse quadruplo, la curva corrispondente (non passando per punti fondamentali semplici) avrebbe un punto doppio nel punto cui corrisponde, altri due in due punti quadrupli, passerebbe semplicemente pel terzo e per altri cinque punti doppi per le Ω, sicchè queste curve dovrebbero avere sei punti doppi fissi, e così i punti quadrupli sarebbero di IV specie, allora è assurdo che la quartica fondamentale abbia un punto doppio nel punto corrispondente, e passi semplicemente per un punto che è almeno sestuplo. Per la stessa ragione un punto doppio delle Ω non può essere fondamentale quintuplo. Dunque i punti doppi delle Ω sono anche doppi per l'involuzione, ed il loro numero deve essere tre, giacchè le coniche fondamentali non passando pei punti corrispondenti formano un gruppo coordinato a quello dei punti doppi.

L'ultima delle relazioni date al n.° 18 diviene:

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_4 + r_5 + r_6 + 2\sum_{i=7}^{i=h} r_i$$

dalla quale vediamo non essere possibile che i punti quadrupli 1, 2, 3 siano di IV specie, poichè se così fosse il primo membro sarebbe $\geqq 18$ ed invece, per quanto si disse, il secondo è $\leqq 12$. Si conclude: che i punti 1, 2, 3 sono di VI specie, e sono fondamentali quadrupli, e che esistono tre punti semplici.

Avremo così $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{n}{2} = 4$ cioè $n = 8$.

Adunque se le Ω hanno tre punti quadrupli fissi, può aver luogo una sola involuzione di 4ª classe, essa sarà dell' 8° ordine con tre punti quadrupli, tre doppi e tre semplici ed il sistema delle curve Ω dovrà essere:

$$(\Omega) = (1_2^4\, 2_2^4\, 3_2^4\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 8\; 9\; 10\; 11\; 12\; 13)_9.$$

Questa involuzione esiste diffatti e la diremo di 4ª specie (*).

22. Supponiamo che le Ω posseggano due soli punti quadrupli. In questo caso uno solo dei punti semplici delle Ω potrà essere fondamentale ed allora è semplice.

Devono esistere almeno due punti tripli poichè dalla seconda delle relazioni poste al n.° 18 ricaviamo:

$$2(r_1 + r_2) + \sum_{i=3}^{i=\beta+2} r_i = 3(n-1) + \sum_{i=3+\beta+\gamma}^{i=h} r_i$$

ed avendosi

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leqq 2n - 2$$

risulta

$$r_1 + r_2 + \sum_{i=3}^{i=\beta+2} r_i - r_3 - r_4 \geqq n - 1 + \sum_{i=3+\beta+\gamma}^{i=h} r_i$$

la quale dice appunto che il valore di β deve essere *due* almeno.

Ma poichè i punti fondamentali non semplici devono essere più di 7 (le curve corrispondenti ai punti tripli delle Ω non passano pel punto semplice se esiste, nè pel punto cui corrispondono se sono cubiche) così i punti tripli al massimo saranno tre, ma se così fosse, la curva fondamentale corrispondente ad uno dei tre punti doppi, che in tal caso dovrebbero possedere le Ω, deve essere segata in due soli punti variabili dalle Ω stesse, dunque non è una conica e neppure una quartica, non potrebbe essere del 5° ordine, poichè potrebbe passare per soli 8 punti fondamentali, ed invece le quintiche fondamentali che posseggono un punto triplo passano necessariamente per 9 punti fondamentali; solo potrà essere una cubica passante due volte per un punto quadruplo e semplicemente per l'altro, pei tre punti tripli e per due dei doppi quello cui corrisponde ed un altro; ma è manifestamente impossibile che questo fatto avvenga per tutte e tre le cubiche fondamentali corrispondenti ai tre punti doppi delle Ω.

23. Adunque se le Ω hanno a comune due punti quadrupli, devono necessariamente avere anche due punti tripli, ed almeno altri 4 punti doppi.

(*) Martinetti, l. c., n.° 39.

Questi possono essere fondamentali doppi, perchè le coniche che passano per i due punti quadrupli e tripli e per uno dei doppi sono segate in due punti variabili dalle Ω (allora il numero dei punti fondamentali doppi è pari) ed invece non potrebbero essere curve del 3°, 4° o 5° ordine. Dunque se il caso che consideriamo è possibile, devono esistere 4 punti doppi per le Ω, i quali poi sono fondamentali doppi. Il sistema (Ω) al quale siamo così condotti è adunque

$$(\Omega) = (1_2^4\, 2_2^4\, 3^3\, 4^3\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2\, 9\, 10\, 11)_9.$$

L'ultima delle relazioni del n.° 18 ci dà

$$r_1 + r_2 = 8 + 2\, r_9.$$

Essendo poi $r_1 + r_2 = n$ $r_9 = 1$ ovvero $r_1 + r_2 = n - 1$ $r_9 = 0$ avremo $n = 10$ od $n = 9$.

I punti 10 ed 11 sono uniti, 9 può essere fondamentale od unito.

I punti 3 e 4 non possono essere tripli, altrimenti le cubiche fondamentali dovrebbero passare pei punti doppi e non pel punto triplo corrispondente. D'altra parte abbiamo $r_3 < r_2$ $r_4 < r_2$ se $r_9 = 1$ ed $r_3 \leqq r_2$ $r_4 \leqq r_2$ se $r_9 = 0$ quindi dovremo avere necessariamente $r_3 = 4$ $r_4 = 4$ e le curve che corrispondono a 3 e 4 saranno

$$(1^2\, 2^2\, 3\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^3 \qquad (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^4$$

laonde le curve dei fasci

$$(1^2\, 2^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4 \qquad (1^2\, 2^2\, 3^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4$$

saranno unite (*). Segue di qui l'esistenza delle due cubiche:

$$(1\, 2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9)_3 \qquad (1\, 2\, 3^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9)_3.$$

Alla cubica $(1\, 2\, 3\, 4\, 5\, 7\, 9\, 10\, 11)_3$ corrisponde la curva

$$(1^3\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5^2\, 6\, 7^2\, 8\, 9\, 10\, 11)_7,$$

la quale tocca la prima nei punti 10 ed 11, e se 9 è fondamentale passa pei due punti in cui la cubica data sega la curva punteggiata unita, e se invece 9 è unito passa pel punto in cui la cubica sega la curva punteggiata unita, e tocca la cubica stessa in 9; perciò in ogni caso la detta curva si spezza nella cubica data e nelle due coniche fondamentali $(1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^6$ $(1\, 2\, 3\, 4\, 7)_2^7$. Dunque gli 11 punti 1, 2, 3,..., 11 si trovano sopra una medesima cubica.

(*) Caporali, l. c., n.° 5.

Allo stesso modo si riconosce che i punti 1, 2, 3, 4, 10, 11; 1, 2, 5, 6, 7, 8 giacciono sopra due coniche le quali insieme alla curva $(1\,2)_1\ (1\,2\,3\,4\ldots 11)_3$ determinano un fascio

$$(1^2\,2^2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,10\,11)_4$$

di curve, che sono unite e che può servire insieme ad uno dei due già trovati a generare le involuzioni della natura considerata.

Questa costruzione dà appunto due involuzioni di 4ª classe e sono quelle che chiamammo di 5ª specie (*).

24. Ci resta ancora a considerare il caso $\alpha = 1$, quello cioè in cui le Ω hanno un unico punto quadruplo.

Qui nessuno dei punti semplici delle Ω può essere fondamentale, e le formole del n.° 18 danno:

$$2\,r_1 + \sum_{i=2}^{i=\beta+1} r_i = 3\,(n-1)$$

$$r_1 = \sum_{i=\beta+2}^{i=\beta+\gamma+1} r_i$$

e sarà sempre $r_1 + r_i < n$ (per i diverso da 1).

Le Ω posseggono certamente punti tripli e doppi ed il loro numero complessivo sarà almeno 7, talchè avremo $\beta \leqq 5$.

Ma se fosse $\beta < 5$ verrebbe un assurdo perchè avendosi:

$$r_1 + \sum_{i=2}^{i=\beta+1} r_i \leqq 2\,n,$$

risulterebbe:

$$r_1 \geqq n-3, \qquad r_1 + r_2 \geqq n.$$

Le Ω oltre al punto quadruplo ed ai 5 punti tripli avranno due o tre punti doppi a comune.

Se ne hanno due soli, i punti fondamentali della involuzione sono 8 soltanto, e si avrà, che ad una cubica qualunque per questi 8 punti corrisponde una cubica per gli stessi punti; e perchè

$$\sum_{i=1}^{i=8} \lambda_i = r_1 - 4 + \sum_{i=1}^{i=6} (r_i - 3) + r_7 - 2 + r_8 - 2 = 3\,(n-1) - 23$$

la cubica considerata corrisponde a sè stessa segando la curva punteggiata unita in due punti fuori dei fondamentali.

(*) Martinetti, l. c., n.i 40, 41, 42.

Il nono punto base del fascio delle cubiche passanti pei punti fondamentali, dovrà essere perciò un punto unito isolato, cioè un punto semplice per le Ω; ma allora una curva Ω è segata in tre punti variabili dalle cubiche unite di questo fascio, ed invece dovrebbe il numero delle intersezioni variabili essere pari, perchè le Ω sono unite e non segano in punti variabili la curva punteggiata unita. L'ipotesi fatta non è adunque possibile.

25. Siano perciò tre i punti doppi comuni alle Ω, le quali non avranno così altre intersezioni, nè direzioni fisse, sicchè il punto 1 sarà di IV specie. Avendosi:

$$r_1 = r_7 + r_8 + r_9 \geqq 6$$

non può essere $r_i \geqq 5$ per $i = 7, 8, 9$ [n.° 2, a)] e se fosse $r_i = 4$ la curva fondamentale corrispondente non potrebbe essere segata in due soli punti variabili dalle Ω per la qual cosa sarà

$$r_i = 3 \quad \text{od} \quad r_i = 2 \quad \text{per} \quad i = 7, 8, 9.$$

Se $r_7 = 3$ la curva corrispondente a 7 sarà

$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^7$$

e se $r_7 = 2$ invece sarà:

$$(1\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6)_2^7.$$

Nel primo caso le cubiche del fascio

$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6)_3$$

sono unite (*); nel secondo dovrebbe la retta $(1\, 7)_1$ passare pel punto triplo 4 [n.° 2, b)] e si vede allora che anche in questo caso il fascio $(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6)_3$ è di curve unite.

Una cubica qualunque del fascio

$$(1\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_3$$

ha per corrispondente una curva d'ordine $3 + r_9$, cioè del 6° o del 5° secondochè $r_9 = 3$ od $= 2$; questa curva è rispettivamente:

$$(1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8\, 9^2)_6, \qquad (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6\, 7\, 8\, 9)_5$$

e passa per i punti d'intersezione colla curva punteggiata unita, il cui numero è

$$3(n-8) - \sum_{i=1}^{i=8} \lambda_i = 3(n-8) - \{(r_1 - 4) + \sum_{i=2}^{i=6}(r_i - 3) + r_7 - 2 + r_8 - 2\} =$$
$$= 3(n-8) - \{3(n-1) - r_9 - 23\} = 2 + r_9.$$

(*) Caporali, l. c., n.° 5.

Dunque la cubica qualunque del fascio considerato ha per corrispondente sè stessa e la curva fondamentale corrispondente a 9, ossia 9 è il residuo punto base del fascio di cubiche unite

$$(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)_3.$$

Questo fascio e l'altro già trovato dànno, nel solito modo, alcune involuzioni le quali sono appunto di 4ª classe, ammettono per sistema di curve Ω:

$$(\Omega) = (1^4\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^3\,7^2\,8^2\,9^2)_9;$$

e noi le chiameremo di 6ª specie (*).

26. Le Ω non possono avere soli punti doppi e semplici a comune giacchè la formola (1) n.° 1 darebbe l'assurdo $\sum_{i=1}^{i=\alpha} r_i = 6\,(n-1)$ (se α è il numero dei punti doppi). Però se esistono ancora delle involuzioni di 4 classe, oltre alle specie già trovate, devono necessariamente risultare dal supporre che le Ω posseggano α punti tripli, e poi punti doppi e semplici a comune. Se ciò avviene dovrà essere [n.° 1 (1)]

$$3\sum_{i=1}^{i=\alpha} r_i + 2\sum_{i=\alpha+\beta}^{i=\alpha+\beta} r_i + \sum_{i=\alpha+\beta+1}^{i=h} r_i = 9\,(n-1)$$

dunque sarà anche:

$$\sum_{i=1}^{i=\alpha} r_i = 3\,(n-1) + \sum_{i=\alpha+\beta+1}^{i=h} r_i$$

la quale ci dice che i soli punti fondamentali dell'involuzione sono gli α punti tripli per le Ω.

Il valore massimo di α è 8; ma poichè per $r_i = 3$ è $\alpha_{ii} = 0$ e per $r_i > 3$ i punti fondamentali per cui passa la curva fondamentale corrispondente ad i sono 8 almeno, si conclude dover essere:

$$(\Omega) = (1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^3\,7^3\,8^3\,9)_9.$$

Le cubiche passanti per gli 8 punti fondamentali sono unite avendo, per corrispondenti, cubiche per gli stessi punti le quali passano inoltre pei

$$3\,(n-8) - 3\,(n-1) + 24 = 3$$

punti intersezione della curva punteggiata unita colla curva cui corrispondono.

Il nono punto base del fascio deve essere unito, ed è quindi il punto 9.

(*) Martinetti, l. c., dal n.° 43 al 48.

Le sestiche del sistema ∞^3 $(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2)_6$ sono, per la stessa ragione, unite e per mezzo di questo sistema potremo costruire (*) tutte le involuzioni della specie qui considerata.

La detta costruzione, non imponendo altri vincoli ai punti fondamentali, conduce alla nota involuzione di 17° ordine con 8 punti sestupli, ed i casi particolari si hanno ponendo successivamente in linea retta tre degli 8 punti fondamentali [n.° 2, *d*)]. Così si ottengono le involuzioni che diremo di 7ª specie (**).

Le involuzioni di 4ª classe si dividono adunque in 7 specie ciascuna delle quali si può generare con una medesima costruzione.

Per le posizioni speciali date nel citato lavoro: *Sulle involuzioni di 3ª e 4ª classe* ai punti fondamentali, le costruzioni nostre non divengono mai illusorie, per questo siamo certi dell'esistenza di tutte le involuzioni colà enumerate. Si vede poi facilmente, che di ciascuna specie furono considerate tutte le involuzioni di tutti i possibili ordini, essendosi fatti successivamente tutti quegli allineamenti, compatibili coi legami esistenti fra i punti fondamentali, per i quali dalle curve della rete omaloidica e dalla curva punteggiata unita veniva a staccarsi una retta, senza che per queste le Ω si spezzassero.

Mantova, settembre 1884.

(*) Bertini, *Ricerche sulle trasformazioni*, ecc., § 5. Annali di Matematica, Serie II, Tomo VIII.

(**) Martinetti, l. c., dal n.° 49 al 56.

Sulla superficie del quarto ordine avente una conica doppia (*).

(*Memoria di* L. BERZOLARI, *a Pavia.*)

La superficie di 4° ordine dotata di una conica doppia è stata l'oggetto di studi importanti fino dal 1863; ed il primo ad occuparsene fu il sig. KUMMER (**), a cui è dovuta la proprietà fondamentale che esistono cinque coni di 2° grado, i cui piani tangenti sono bitangenti per la superficie. Altre proprietà furono aggiunte in seguito dai sig.i C. JORDAN, GEISER, R. STURM, CREMONA, ZEUTHEN e segnatamente da CLEBSCH, il quale ebbe sopra tutto in mira di dare un nuovo esempio del sussidio che reca la rappresentazione piana allo studio della superficie. Sono poi ancora da ricordare i numerosi lavori dei sig.i MOUTARD (***), DARBOUX (****), LAGUERRE, CASEY, MAXWELL, LEMONNIER, REYE, ecc., sulla *ciclide,* cioè sulla superficie di 4° ordine avente per linea doppia il cerchio imaginario all'infinito, al qual caso può sempre del resto ridursi il caso generale con una trasformazione omografica.

(*) Memoria presentata per la Laurea alla Facoltà delle Scienze della R. Università di Pavia il 14 ottobre 1884.

(**) *Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen.* Monats. der Berliner Akad., 16 giugno 1863; riprodotta nel Journal von Crelle-Borchardt, Bd. LXIV, pag. 66.

(***) L'accennata proprietà trovata dal sig. KUMMER fu ritrovata l'anno dopo (1864) dal sig. MOUTARD insieme con molte altre e indipendentemente dal lavoro precedente in due Memorie: *Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques,* e *Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre* (Nouvelles Annales de Math, 2e série, t.e III, 1864). — Una superficie si dice anallagmatica quando, assoggettata ad una conveniente trasformazione per raggi vettori reciproci, essa si trasforma in sè stessa. Il sig. MOUTARD ha trovato che la ciclide gode di questa proprietà quando il polo sia situato in uno qualunque dei vertici dei cinque coni di KUMMER.

(****) Al sig. DARBOUX è dovuta (1864) la scoperta delle rette giacenti sulla superficie. Una gran parte de' suoi studi, che datano fino dal 1864, furono raccolti da lui stesso nel 1873 in un volume intitolato: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques,* etc.

Alcuni casi particolari della superficie di cui si tratta furono studiati dallo stesso sig. Kummer nel lavoro citato, nonchè dai sig.[i] Darboux, Casey, Korndörfer, R. Sturm, Cremona, Crone, Béla Tötössy, di cui gli ultimi tre si occuparono più specialmente della superficie di 4° ordine a conica cuspidale. Infine, quando il presente lavoro era già stato consegnato per la Laurea, sono comparse successivamente sullo stesso argomento la Memoria del sig. Loria (*) e quella del sig. Segre (**), nonchè una breve Nota del sig. Veronese (***). Nel primo lavoro sono studiate e classificate le ciclidi considerandole, come già avevano fatto i sig.[i] Lie, Klein e Reye, quale luogo dei punti-sfere di un complesso quadratico di sfere, e da questo punto di vista l'Autore ottiene 18 specie di ciclidi non mutabili l'una nell'altra mediante trasformazioni projettive, o per raggi vettori reciproci. Invece il sig. Segre, basandosi sopra un teorema dovuto al sig. Klein, considera la superficie come una projezione centrale nello spazio ordinario della intersezione di due varietà quadratiche (a tre dimensioni) dello spazio lineare a quattro dimensioni, e perviene così a dare la teoria e la classificazione completa delle superficie del 4° ordine aventi una conica doppia o cuspidale, generale o decomposta (****).

Nel presente lavoro mi sono sempre limitato al caso generale della superficie di 4° ordine a conica doppia, ed ho cercato in primo luogo di dimostrare direttamente e colla pura geometria le più importanti proprietà delle sue rette e delle sue curve (*****), proprietà che per la massima parte furono trovate da Clebsch nel suo ricco lavoro: *Ueber die Flächen vierten Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen* (******). Pertanto nel § 1 ho studiata la configurazione delle rette, dimostrando le proprietà già note e qualche

(*) *Ricerche intorno alla geometria della sfera e loro applicazione allo studio ed alla classificazione delle superficie di quarto ordine aventi per linea doppia il cerchio imaginario all' infinito.* Mem. dell'Accad. delle Scienze di Torino, Serie II, t. XXXVI.

(**) *Étude des différentes surfaces du 4e ordre à conique double ou cuspidale (générale ou decomposée) considérées comme des projections de l' intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions.* Math. Ann., Bd. XXIV, pag. 313.

(***) *Di una costruzione della superficie del 4° ordine dotata di conica doppia.* Atti del R. Istit. Veneto, Serie VI, vol. II.

(****) Non entro in altri particolari sulla storia dell'argomento, perchè questa è presentata in modo completo nel lavoro del sig. Segre.

(*****) La possibilità di tener questo metodo era già stata annunziata dal sig. R. Sturm (1871) nella sua Memoria: *Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung.* Math. Ann., Bd. IV, pag. 249, e più specialmente pag. 265.

(******) Journal von Crelle-Borchardt, Bd. LXIX, pag. 142, 1868.

altra forse non ancora osservata, e facendo rilevare nei luoghi opportuni l'analogia colla superficie di 3° ordine; mentre nel § 2 ho stabilite l'esistenza e le proprietà dei cinque doppi sistemi di coniche scoperti dal sig. KUMMER, rilevando l'intimo loro legame colle rette della superficie. Il § 3 contiene alcuni modi semplici per generare la superficie mediante forme projettive, e nel § 4 è fatta la ricerca di tutte le curve del 3°, 4° e 5° ordine esistenti su essa, considerandole come parziali o totali intersezioni della superficie stessa con altre passanti per la conica doppia, e fondandosi essenzialmente ed esclusivamente sulle proprietà dimostrate nei primi due paragrafi: dopo di che è anche fatto cenno brevemente della rappresentazione della superficie sopra un piano.

Nei tre ultimi paragrafi è ripreso lo studio della configurazione delle 16 rette e dei 40 piani tritangenti, e sono risolte alcune delle questioni che vennero già trattate a più riprese per la superficie generale del 3° ordine dai sig.i CREMONA e STURM, e recentemente dal sig. BERTINI. È già nota da lungo tempo, dietro i lavori dei sig.i C. JORDAN, DARBOUX, GEISER, CREMONA (*), l'intima analogia che passa fra le due superficie nominate, pel fatto che quella del 4° ordine avente una conica doppia è sempre deducibile da una generale del 3° mediante una trasformazione quadratica. Da ciò segue che la configurazione delle 16 rette della prima è la stessa di quella delle 16 rette della seconda appoggiate ad una conica della medesima, ed è per questa ragione che in nessuno dei lavori ricordati più innanzi, neppure nei più recenti là accennati, si è approfondito maggiormente lo studio della configurazione medesima. Tuttavia non mi sembra privo di interesse il fatto da me notato fra gli altri, che colle 16 rette della superficie si possono formare dei sistemi aventi un perfetto riscontro con alcuni dei più importanti sistemi *formati con tutte le* 27 *rette* della superficie di 3° ordine: resta con ciò stabilita, per la superficie generale di 3° ordine, un'intima analogia, non ancora, credo, notata, fra tutte le 27 rette e le 16 rette che si appoggiano ad una sua conica qualunque. Per quanto riguarda la configurazione dei 40 piani tritangenti non si è fin qui, credo, andato più oltre della proprietà, fornita dal teorema del sig. KUMMER, che essi si scindono a formare cinque angoli ottaedri. In questa questione, che si presenta molto più complicata della precedente, l'analogia colla superficie del 3° ordine è meno spiccata, come del resto è da prevedersi, perchè la simmetria viene turbata pel fatto che in ognuno dei piani tritangenti della superficie di 4° ordine a conica doppia esistono due rette ed una conica.

(*) JORDAN, Comptes Rendus, 15 marzo 1869; DARBOUX, id., 7 giugno 1869; GEISER, Journal von Crelle-Borchardt, Bd. LXX, 1869; CREMONA, Rendic. Istit. Lomb., Serie III, t. IV, 9 marzo 1871.

Nel § 6 vengono adunque determinati brevemente tutti i possibili moltilateri gobbi composti con rette della superficie, mostrandone la stretta relazione coi sistemi gobbi di rette studiati nel § 1. Nel § 5 è stabilito il concetto di *quaderna di quadrilateri,* cioè sistema di quattro quadrilateri gobbi contenenti tutte le rette della superficie: si dimostra che ve ne sono di tre specie ben distinte, e se ne trovano le relazioni coi cinque coni bitangenti del sig. Kummer, nonchè cogli *ottaedri,* cioè coi sistemi di otto piani (tritangenti) contenenti tutte le rette della superficie. Sono poi studiate più a fondo le quaderne che ho chiamate *di 1ª specie,* e che presentano un perfetto riscontro colle terne di coppie di triedri conjugati considerate nella superficie di 3° ordine per la prima volta da Steiner, ed in seguito dagli Autori sopra citati. In particolare ho stabilita una corrispondenza fra queste quaderne e le coppie di biquadruple conjugate (dovute a Clebsch), deducendo poi anche da alcune nuove proprietà di queste ultime l'importante teorema (pure dovuto a Clebsch) che la ricerca delle 16 rette dipende da una equazione di 5° grado e da altre di gradi inferiori. Infine nel § 7 è fatta la ricerca di tutti i poliedri principali (seguendo la denominazione adottata dal prof. Bertini) che si possono formare coi piani tritangenti; si trovano così due specie di esaedri, sette di ettaedri e sei di ottaedri, e ne sono dimostrate alcune proprietà. In particolare si trova una specie interessante di esaedri principali, contenenti dei pentaedri che hanno moltissima analogia con altri a cui è giunto il prof. Cremona in occasione affatto differente.

Quanto al metodo da me tenuto nel trovare e dimostrare i teoremi, mi sono valso, si può dire, esclusivamente delle proprietà esposte nel § 1 sulla configurazione delle rette della superficie.

§ 1. Le rette giacenti sulla superficie; loro raggruppamenti.

1. In tutto ciò che segue si suppone semplicemente l'esistenza di una superficie F_4 del 4° ordine dotata di una conica doppia D_2, e sfornita di ogni altra singolarità, cioè tale che la sua sezione con un piano arbitrario sia una quartica con due punti doppî (di genere 1).

Il metodo più semplice per istabilire l'esistenza di rette sulla superficie (*) è certamente quello accennato dal sig. Sturm al principio del lavoro citato, e

(*) Ai §§ 3 e 6 dove sono esposti alcuni modi di generazione della superficie, è pur dimostrata ogni volta, in base ad essi, l'esistenza delle 16 rette.

da lui poscia svolto per la superficie di 3° ordine nella Memoria: *Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung* (*): in tal modo, considerando le rette che si appoggiano in punti distinti alla conica doppia ed a tre sezioni piane, si trova che:

La superficie possiede sedici rette, appoggiate alla conica doppia.

In modo analogo, sostituendo ad una delle sezioni piane una di queste rette, si ricava che:

Ciascuna delle sedici rette è secata da altre cinque, che a due a due non si secano.

Due delle 16 rette non possono secarsi in un punto di D_2, altrimenti il loro piano taglierebbe ulteriormente F_4 in una conica con un punto doppio, cioè in un pajo di rette, e vi sarebbero quattro rette della superficie in un piano.

2. Una sezione piana qualunque della superficie ha due punti doppi nei punti comuni al suo piano e a D_2; se il piano contiene una retta della superficie, la rimanente sezione è quindi una cubica (razionale) passante pel punto comune alla retta e a D_2 ed avente un punto doppio là dove il piano taglia di nuovo D_2; *ogni tal piano è dunque bitangente alla superficie,* e i due punti di contatto sono i due punti comuni alla retta ed alla cubica, non situati sopra D_2. Se il piano passa per due rette della superficie, la rimanente sezione è una conica (che non può mai spezzarsi) passante pei due punti in cui le rette incontrano D_2. *Un tal piano è tritangente alla superficie,* ed i punti di contatto sono il punto comune alle due rette, e i due punti in cui le rette secano la conica, fuori di D_2. Con ciò si esauriscono tutti i piani tritangenti, epperò:

La superficie possiede $\frac{16 \cdot 5}{2} = 40$ *piani tritangenti, cioè secanti la superficie in due rette ed una conica.*

3. D'ora innanzi si dirà *coppia terna, quadrupla, quintupla,* (*Dupel, Tripel, Quadrupel, Quintupel* secondo le denominazioni del sig. Sturm) il sistema di 2, 3, 4, 5 rette della superficie formanti un sistema gobbo, cioè non secantisi a due a due; invece si dirà che due rette della superficie formano un *pajo* (*Paar* di Clebsch e Sturm) quando si secano. Due paja si diranno *gobbe fra loro* quando le rette dell'uno non tagliano quelle dell'altro. Di più si dirà *r-secante* di un sistema di rette (o di una curva), una retta che si appoggi ad r rette del sistema (o alla curva in r punti).

(*) Journal von Crelle-Borchardt, Bd. LXXXVIII, pag. 213, I.

Si è veduto che una retta della superficie ha 5 secanti (*) e 10 zerosecanti; colle 16 rette si possono quindi formare $\frac{10 \cdot 16}{2} = 80$ coppie, e col metodo sopra indicato si trova che ognuna ha 2 bisecanti, 6 unisecanti, 6 zerosecanti. Ogni coppia appartiene quindi a 6 terne; epperò colle 16 rette si possono formare $\frac{80 \cdot 6}{3} = 160$ terne. Ognuna di esse ha una trisecante, 3 bisecanti, 6 unisecanti, 3 zerosecanti. Vi sono dunque $\frac{160 \cdot 3}{4} = 120$ quadruple.

Su questi ultimi sistemi è bene fermarsi alquanto. Sia $(a_1 a_2 a_3)$ una terna avente q_1 per trisecante, e sieno b_4, b_5 le altre rette appoggiate a q_1: allora la coppia $(b_4 b_5)$ ammette un'altra bisecante q_2, la quale non può tagliare alcuna delle a_i, altrimenti si formerebbero delle terne (per es. la $a_1 b_4 b_5$) con due trisecanti. Le due quadruple $(a_1 a_2 a_3 b_4)$, $(a_1 a_2 a_3 b_5)$ ammettono dunque ciascuna una quadrisecante, cioè la q_1, mentre la quadrupla $(a_1 a_2 a_3 q_2)$ non ne ammette, perchè q_1 e q_2 non si incontrano. Risulta quindi che, *data una terna, delle sue tre zerosecanti una taglia le altre due;* essa appartiene perciò a tre quadruple, di cui due ammettono una quadrisecante, e la terza no. Dunque (**):

Vi sono due specie di quadruple: una quadrupla della 1^a specie non ammette quadrisecanti; una quadrupla della 2^a specie ne ammette una (sola).

Una quadrupla non può avere due quadrisecanti, altrimenti una terna avrebbe due trisecanti.

Se una quadrupla $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ ammette una quadrisecante q, essa ammette anche una ed una sola zerosecante, e reciprocamente. Una zerosecante della quadrupla è manifestamente la quinta retta appoggiata a q. Che non ve ne siano altre si riconosce osservando che, se ve ne fosse un'altra m, questa non potrebbe secare q, epperò la coppia $(m\, q)$ avrebbe due bisecanti, ciò che è assurdo perchè le a_i, che tagliano q, non tagliano m.

Reciprocamente suppongasi che la quadrupla $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ ammetta una zerosecante p_0; si consideri la terna $(a_1 a_2 a_3)$ e sia p'_0 la terza sua zerosecante appoggiata, per quanto si vide, alle altre due a_4, p_0. Allora la coppia formata da queste due rette ha una seconda bisecante m, e poichè le tre terne

(*) Parlando di r-secanti si intende, naturalmente, che esse giacciano sulla superficie. Le loro proprietà saranno svolte, oltre che in questo, anche nel § 6.

(**) Clebsch, l. c., § 7, pag. 157. Per la superficie generale di 3° ordine sussiste la proprietà analoga relativamente alle quintuple, cioè esse sono di due specie, secondo che hanno una oppure due cinquisecanti. Cfr. Sturm: *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung.* 1867, pag. 49 e seg.

$(a_1 a_4 p_0)$, $(a_2 a_4 p_0)$, $(a_3 a_4 p_0)$ hanno ciascuna una trisecante, che deve appoggiare ad a_4 e p_0, essa non può essere che m. In altri termini, per una quadrupla la esistenza di una zerosecante e quella di una quadrisecante sono l'una conseguenza dell'altra.

Si ricava inoltre che *una terna appartiene ad una quadrupla di 1ª specie e a due di 2ª*. Vi sono dunque 40 quadruple di 1ª specie ed 80 di 2ª. Una quadrupla di 1ª specie non ha quadrisecanti, ha 4 trisecanti, una per ciascuna delle sue 4 terne, non ha bisecanti; ha 8 unisecanti, due per ciascuna delle sue rette; non ha zerosecanti. Essa non dà quindi luogo a quintuple. Invece una quadrupla di 2ª specie ha 1 quadrisecante, 0 trisecanti, 6 bisecanti, 4 unisecanti, 1 zerosecante. Ognuna di esse appartiene quindi ad una quintupla; e perciò vi sono $\frac{80 \cdot 1}{5} = 16$ quintuple: ognuna è coordinata ad una retta della superficie, cioè a quella che ne è la cinquisecante. È importante per il seguito osservare che, *data una quintupla e la sua cinquisecante, le altre* 10 *rette si ottengono cercando le seconde bisecanti delle sue* 10 *coppie.*

4. Se si indica con u_i il numero delle i-secanti di un dato sistema gobbo, le proprietà trovate si riassumono nel quadro:

	Numero	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
Retta	16	10	5				
Coppia.	80	6	6	2			
Terna	160	3	6	3	1		
Quadrupla di 1ª specie	40	0	8	0	4		
Quadrupla di 2ª specie	80	1	4	6	0	1	
Quintupla	16	0	0	10	0	0	1

5. Si vide al n.° 3 che una terna appartiene ad una quadrupla di 1ª specie e a due di 2ª. Se è data invece una coppia $(a\, b)$, per vedere a quante quadruple di 1ª e a quante di 2ª specie essa appartiene, si indichi con $(p\, q)$ la coppia delle sue bisecanti, con m_1, m_2, m_3 le altre tre secanti di p, e con n_1, n_2, n_3 le altre tre secanti di q: è chiaro che queste sei rette sono tutte fra loro distinte, e non sono altro che le sei zerosecanti della coppia data. Allora (n.° 3) una retta n_i deve tagliare due delle rette della quintupla

$(a\,b\,m_1\,m_2\,m_3)$, cioè due delle m_i; dal che segue che per formare colle a, b delle quadruple di 2ª specie si devono prendere o sole rette m, o sole rette n, e se ne hanno così 6 in tutto; per avere invece le quadruple di 1ª specie si deve combinare una retta m con quella delle n da cui non è tagliata, e se ne hanno così 3. Dunque *una coppia appartiene a tre quadruple di 1ª specie, ed a sei di 2ª.*

Data infine una retta a, avendo 10 zerosecanti, essa appartiene a 10 coppie; quindi, per ciò che precede, *una retta appartiene a* $\frac{3 \cdot 10}{3} = 10$ *quadruple di 1ª specie, ed a* $\frac{6 \cdot 10}{3} = 20$ *di 2ª.*

Analogamente si trova che *una terna appartiene ad una quintupla, una coppia a due, una retta a cinque.*

6. Teorema. — *Le quattro trisecanti di una quadrupla di 1ª specie formano pure una quadrupla di 1ª specie* (*). Sia infatti $(a_1\,a_2\,a_3\,a_4)$ la quadrupla data, e sieno b_1, b_2, b_3, b_4 le sue quattro trisecanti, in modo che ogni retta b seghi le rette a aventi indici diversi. Due rette b non possono coincidere in una sola retta, perchè questa sarebbe quadrisecante delle a; due rette b non possono tagliarsi, perchè ciò accadrebbe anche delle due rette a secate da esse due; infine è chiaro che le b non hanno quadrisecante, c. d. d.

Dunque ogni quadrupla di 1ª specie ne ha un'altra *conjugata;* reciprocamente questa ha per conjugata la prima, perchè entrambe sono nelle stesse condizioni. L'insieme di due tali quadruple si dirà *biquadrupla* (*Doppelvier* di Clebsch).

Le biquadruple sono in numero di 20.

7. Teorema. — *Le otto rette escluse da una biquadrupla formano una nuova biquadrupla* (**). Per dimostrare questa importante proprietà, indico con

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

la biquadrupla data, dove si conviene che due rette poste in una stessa linea o in una stessa colonna non si taglino. Se di ciascuna delle quattro coppie

(*) Clebsch, l. c., § 7, pag. 157. Per la superficie del 3° ordine vale il teorema analogo, fornito dalla notissima proprietà, dovuta al sig. Schlaefli, che le sei cinquisecanti di una sestupla formano una nuova sestupla.

(**) Clebsch, l. c., § 7, pag. 157. Questa simmetria, com'è noto, non ha luogo nella superficie di 3° ordine.

$(a_i b_i)$ si cercano le due bisecanti m_i, n_i, è chiaro che queste otto rette sono precisamente le rette escluse dalla biquadrupla. Ora se si considera per es. la terna $(a_1 a_2 m_3)$, essa ha tre zerosecanti, di cui due, formanti una coppia, sono a_4, n_3, e la terza, che deve secare queste due, non può manifestamente essere che m_4 od n_4, ed essendo ancora arbitraria la loro notazione si può supporre che sia la m_4. Con questo metodo si conclude che le m_i, n_i formano la biquadrupla

$$\left| \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{matrix} \right|, \quad \text{c. d. d.}$$

Due biquadruple che in questo modo contengono tutte le 16 rette della superficie si diranno *conjugate. Le coppie di biquadruple conjugate sono* 10.

8. Si ottengono altri raggruppamenti che, a mio credere, non furono ancora osservati, cercando tutte le possibili relazioni che possono avere fra loro due biquadruple qualunque. Questa ricerca è esaurita mediante il seguente

Teorema. — *Due biquadruple qualunque non possono avere in comune che nessuna, oppure quattro rette formanti o un quadrilatero gobbo o due paja gobbe fra loro.* Che il primo caso possa avvenire, e in quanti modi, si è veduto nel numero precedente. Per dimostrare la seconda parte della proposizione, si supponga di avere una biquadrupla

$$B \equiv \left| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix} \right|,$$

e di volerne costruire un'altra B' avente comune colla prima una retta, per es. la a_1: si vedrà che B e B' devono averne in comune altre tre od altre sette. Invero, poichè la a_1 compare in entrambe le biquadruple, essa verrebbe così a secare sei rette, epperò qualcuna delle rette che essa seca nella B deve coincidere con qualcuna delle b_2, b_3, b_4. Si possono dunque dare tre casi:

I. Le tre rette che a_1 seca in B' coincidono una per una colle b_2, b_3, b_4; allora le due biquadruple si possono indicare come segue:

$$B \equiv \left| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix} \right|, \qquad B' \equiv \left| \begin{matrix} a_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix} \right|.$$

Ma in tal caso la coppia $(b_2 b_3)$ ha le tre bisecanti a_1, a_4, c_4, ciò che è assurdo, a meno che due di esse coincidano; e poichè a_1 non può coincidere nè con a_4, nè con c_4, coincideranno fra loro le a_4, c_4. Analogamente coincidono a_2, c_2; a_3, c_3, e quindi b_1, d_1, cioè anche B, B' coincidono.

II. Delle tre rette che a_1 seca in B' due sole coincidono rispettivamente per es. con b_2, b_3; la B' si può allora indicare così

$$B' \equiv \left| \begin{matrix} a_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & b_2 & b_3 & d_4 \end{matrix} \right|,$$

e come sopra si conclude che a_1 e c_4 devono coincidere. In generale poi non avviene altro, perchè, se B e B' avessero un'altra retta comune, coinciderebbero esse stesse. Si vede che *le quattro rette comuni formano un quadrilatero gobbo*. Di questi quadrilateri formati colle 16 rette è chiaro che ve ne sono 40, perchè ognuno è individuato da una qualunque delle due coppie che contiene. È anche facile vedere nelle B e B' che le *otto rette non comuni formano una biquadrupla*, che è

$$\left| \begin{matrix} b_1 & c_2 & c_3 & b_4 \\ d_1 & a_2 & a_3 & d_4 \end{matrix} \right|,$$

di modo che le B, B' e quest'ultima biquadrupla hanno a due a due un quadrilatero comune: per brevità si dirà che esse formano una *terna di biquadruple associate*, dicendo *associate* due biquadruple aventi un quadrilatero comune. Tornando alle B, B', ciascuna delle rette a_1, b_2, b_3, a_4 è secata da altre cinque rette, ma per ciascuna finora se ne sono considerate soltanto quattro; rimangono dunque da considerare quattro rette, evidentemente distinte, che indico ordinatamente con m_1, m_2, m_3, m_4. Considerando allora le cinque rette b_2, b_3, b_4, d_4, m_1 appoggiate ad a_1, la m_2 deve tagliare, oltre a b_2, un'altra di esse, e questa dev'essere m_1, altrimenti si avrebbe una coppia con più di due bisecanti. Analogamente si trova che m_2 taglia m_4, e che m_3 taglia m_1 ed m_4, e quindi non m_2; si ha così il quadrilatero gobbo $m_1 m_2 m_4 m_3$, ossia *le quattro rette escluse formano un quadrilatero*. Si riconosce pure súbito che *le quattro rette comuni e le quattro escluse formano una biquadrupla*. Laonde un quadrilatero appartiene a tre, e tre sole, biquadruple: un tal sistema di biquadruple aventi un quadrilatero comune comprende tutte le 16 rette. Colle rette di una biquadrupla si possono formare 6 quadrilateri; quindi *una biquadrupla ne ha* $2 \cdot 6 = 12$ *associate, e appartiene perciò a* 6 *terne di biquadruple associate. Vi sono dunque* $\frac{6 \cdot 20}{3} = 40$ *di tali terne*. Si è veduto che le quattro rette escluse da una terna formano un quadrilatero; da ciò che precede segue anche reciprocamente che: *le dodici rette escluse da un quadrilatero gobbo si possono disporre, in un solo modo, in una terna di biquadruple associate.*

Resta con ciò stabilita una corrispondenza univoca fra queste 40 terne ed i 40 quadrilateri. È infine utile notare la proprietà evidente: *due biquadruple conjugate hanno le stesse associate.* In seguito (n.[i] 52, 53) tornerò di nuovo su questi sistemi di biquadruple associate, mostrandone altri raggruppamenti e le relazioni con altri sistemi che là verranno considerati (*).

III. Delle tre rette che a_1 seca in B' una sola coincide per es. con b_2. Questa retta taglia in B', oltre ad a_1, altre due rette, e siccome tre delle sue secanti compajono già in B, per non ricadere in alcuno dei due casi già considerati, si devono porre in B' le altre due, che dirò c_3 e c_4, in modo che sia

$$B' \equiv \begin{vmatrix} a_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & b_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Allora se si osserva come sono formate le B, B', si vede senza difficoltà che la terna $(a_1 c_3 c_4)$ non è tagliata da alcuna delle rette a_3, a_4, b_1, c_2, epperò c_2 deve coincidere con una delle altre rette, e, poichè non taglia b_2, coinciderà con b_1. Ma allora b_1 viene a tagliare le sei rette a_2, a_3, a_4; d_1, d_3, d_4, quindi almeno una delle tre prime deve coincidere con una delle altre tre; e si vede agevolmente che devono necessariamente coincidere le a_2, d_1. Si ha allora:

$$B' \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_3 & c_4 \\ a_2 & b_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Anche qui in generale non accade altro; però questo caso è essenzialmente diverso dal precedente, perchè qui *le quattro rette comuni formano due paja gobbe fra loro.* Non è possibile disporre, come dianzi, le otto rette non comuni di B e B' in una nuova biquadrupla poichè si riconosce facilmente che esse si dispongono, in un solo modo, in quattro paja gobbe fra loro (**); infine *le quattro rette escluse formano due paja gobbe fra loro, e colle due paja comuni.*

(*) Le proprietà sopra trovate presentano un perfetto riscontro con ciò che accade per la superficie di 3° ordine. Per questa infatti si dimostra (Cremona, *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal,* Mem. dell'Accad. de' Lincei, Serie III, vol. I, 8 aprile 1877, n.° 43) che se due bissestuple hanno 6 rette comuni, le loro altre 12 rette formano una nuova bissestupla; di modo che si formano delle *terne di bissestuple associate* (in numero di 120), cioè aventi a due a due 6 rette comuni. Le nove rette rimanenti della superficie sono contenute in una coppia di triedri conjugati di Steiner. Questa analogia fra le bissestuple e le biquadruple, e fra le coppie di triedri conjugati e i quadrilateri apparirà anche più spiccata nelle ricerche seguenti.

(**) Questo risulta immediatamente anche da un teorema che sarà dimostrato nel numero seguente.

Ricordando (n.° 2) che colle 16 rette si possono formare 40 paja, risulta anche reciprocamente: *le dodici rette escluse da due paja gobbe fra loro si dispongono, in un solo modo, in due biquadruple aventi in comune quattro rette formanti pure due paja gobbe fra loro e colle paja date.*

9. Le proprietà trovate nel III dei casi considerati nel numero precedente mettono in chiaro il vantaggio di studiare più da vicino quei sistemi di paja.

Se m, n sono le rette di un pajo, poichè entrambe hanno altre quattro secanti, vi sono sei rette p_1, $p_2, \ldots$, p_6 zerosecanti del pajo stesso. Di queste una non può secarne altre due; si supponga infatti che p_3 tagli p_1 e p_2; allora la terna $(m\,p_1\,p_2)$ ha una (sola) trisecante, che, dovendo essere una delle due bisecanti della coppia $(p_1\,p_2)$ e non potendo essere p_3, sarà una certa retta k. Ma la terna $(n\,p_1\,p_2)$ ha pure una (sola) trisecante, che non può essere k, e deve quindi essere p_3, il che è contro l'ipotesi. Di più, siccome le sei rette p_i non possono formare un sistema gobbo, si può supporre per es. che p_1 tagli p_2. Le quattro rette p_3, p_4, p_5, p_6, avendo due zerosecanti, cioè le m, n, non possono pure formare un sistema gobbo, e si può perciò supporre per es. che p_3 tagli p_4; e, per quanto si è premesso, le rette p_1, p_2, p_3, p_4 non sono incontrate da altre rette p_i che le ora accennate. Ne segue che anche le p_5 e p_6 devono incontrarsi, altrimenti si avrebbero le due quintuple $(m\,p_1\,p_3\,p_5\,p_6)$, $(n\,p_1\,p_3\,p_5\,p_6)$, epperò la quadrupla $(p_1\,p_3\,p_5\,p_6)$ avrebbe due quadrisecanti.

Si ha dunque la proprietà (*):

Un pajo di rette della superficie ha sei zerosecanti, che si distribuiscono, in un modo solo, in tre altre paja gobbe fra loro e col pajo dato.

Riflettendo che in ogni piano tritangente esiste anche una conica della superficie, è chiaro che il teorema ora dimostrato si può anche presentare sotto l'aspetto seguente, che verrà utile in seguito:

Ognuna delle coniche poste nei 40 *piani tritangenti è tagliata da otto rette, che si distribuiscono, in un solo modo, in quattro paja gobbe fra loro.*

10. La proprietà ora dimostrata fa dunque vedere che le 40 paja di rette si spezzano in 10 gruppi di 4 paja, che chiamerò *quaderne di paja,* essendo le quattro paja di una quaderna gobbe fra loro; *ogni quaderna è individuata da uno qualunque delle quattro paja in essa contenute.*

Sieno $(a_1\,a_2)$, $(b_1\,b_2)$, $(c_1\,c_2)$, $(d_1\,d_2)$ le paja di una quaderna; sieno m_1, m_2,

(*) Clebsch, l. c., § 2, pag. 145.

m_3, m_4 le altre quattro secanti di a_1, ed n_1, n_2, n_3, n_4 le altre quattro secanti di a_2. Delle m_i intanto una non può secare due delle n_i, chè se per es. m_1 secasse n_1, n_2, la terna $(a_1 n_1 n_2)$ avrebbe due trisecanti, cioè a_2 ed m_1. Di più, poichè la coppia $(m_1 a_2)$ ha due bisecanti, e l'una è a_1, l'altra deve trovarsi fra le n_i. Dunque si vede che ogni retta m_i taglia una ed una sola retta n_i, e queste otto rette si distribuiscono quindi, in un solo modo, in una quaderna di paja. Questa quaderna e la data esauriscono tutte le 16 rette; due tali quaderne si diranno *conjugate*. Riassumendo, si ha il teorema importante dovuto a Clebsch (l. c., § 2, pag. 145):

Le 40 *paja si distribuiscono in* 10 *quaderne, composta ciascuna di quattro paja gobbe fra loro*; *le* 10 *quaderne si spezzano di nuovo in* 5 *coppie di quaderne conjugate, ognuna delle quali contiene tutte le* 16 *rette.*

Questo teorema mostra che l'equazione del 16° grado, da cui dipende la ricerca delle 16 rette della superficie, è risolubile col mezzo di un'equazione (generale, come ha notato Clebsch al § 10 del lavoro citato) del 5° grado, e di altre di gradi inferiori, cioè quella ricerca non introduce altre trascendenti che le ellittiche (*).

11. Se $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(c_1 c_2)$, $(d_1 d_2)$; $(a'_1 a'_2)$, $(b'_1 b'_2)$, $(c'_1 c'_2)$, $(d'_1 d'_2)$ sono due quaderne non conjugate, le 16 rette che qui compajono non possono essere tutte fra loro distinte, e si avrà per es. $a_1 = a'_1$. Ma una retta a_1 non può avere che 10 zerosecanti, mentre così ne avrebbe 12, cioè le b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2; b'_1, b'_2, c'_1, c'_2, d'_1, d'_2; epperò due delle prime sei rette devono coincidere con due delle altre sei, e queste due rette non possono formare un pajo, altrimenti (n.° 10) le due quaderne coinciderebbero. Sia per es. $b_1 = b'_1$, $c_1 = c'_1$. Ma la terna $(a_1 b_1 c_1)$ non ha che tre zerosecanti, epperò, come sopra, sarà per es. $d_1 = d'_1$. Le quattro rette a_1, b_1, c_1, d_1 comuni alle due quaderne formano una quadrupla, che dico essere di 1ª specie; e invero una qualunque di esse, per es. la a_1, taglia due delle 12 rette (cioè a_2 e a'_2) che si sono con-

(*) Il Clebsch ha pure stabilita direttamente (§ 12) l'equazione del 16° grado da cui dipendono le 16 rette, ed ha mostrato (§ 15) come la sua risoluzione dipenda dalla risoluzione completa di quella equazione di 5° grado, e da quella di quattro equazioni quadratiche i cui coefficienti contengono razionalmente le quattro corrispondenti radici di quella del 5° grado. In seguito il prof. Cremona nella Nota: *Sulla superficie di quart'ordine dotata di una conica doppia* (Rendic. Istit. Lomb., 9 marzo 1871) col mezzo di una trasformazione razionale quadratica dello spazio ha dimostrate le stesse proprietà, facendo vedere che quell'equazione di 5° grado non è altro che quella da cui dipende la ricerca dei cinque piani tritangenti ad una superficie del 3° ordine passanti per una retta della medesima.

siderate, epperò taglierà tre delle quattro rette escluse. Ciò mostra anzi di più che le rette comuni e le rette escluse formano una biquadrupla. Dunque:

Due quaderne qualunque non conjugate hanno sempre in comune quattro rette formanti una quadrupla di 1ª specie; le quattro rette escluse formano una seconda quadrupla di 1ª specie, che si compone colla prima in una biquadrupla.

12. Prima di passare ad altri argomenti, credo utile di accennare brevemente ad una notazione molto semplice delle 16 rette, affatto analoga a quella data dal sig. Schlaefli per le 27 rette della superficie del 3° ordine, e già indicata dal prof. Cremona nella Nota citata nel numero precedente. Si indichi con a una qualunque delle 16 rette della superficie, e con b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 le sue cinque secanti; allora le 10 zerosecanti di a si possono opportunamente indicare con c_{ik}, essendo gli indici i, k variabili da 1 a 5, dove si conviene che la retta c_{ik} si appoggia alle b_i, b_k (cfr. la fine del n.° 3); come per la superficie di 3° ordine, due rette c si incontrano o no secondo che i loro simboli non hanno od hanno un indice comune.

Riguardo a questa notazione le quadruple di 1ª specie sono di tre tipi: ve ne sono 10 del tipo $(a\, c_{ik}\, c_{ih}\, c_{kh})$, 20 del tipo $(b_i\, c_{hk}\, c_{hm}\, c_{hn})$, 10 del tipo $(b_i\, b_k\, b_h\, c_{mn})$. Le quadruple di 2ª specie sono invece di 5 tipi, cioè ve ne sono 20 del tipo $(a\, c_{ik}\, c_{ih}\, c_{im})$, 5 del tipo $(b_i\, b_k\, b_h\, b_m)$, 5 del tipo $(c_{ih}\, c_{ik}\, c_{im}\, c_{in})$, 20 del tipo $(b_i\, c_{hk}\, c_{hm}\, c_{km})$, 30 del tipo $(b_i\, b_k\, c_{mh}\, c_{nh})$. Le biquadruple sono di soli due tipi: ve ne sono 10 del tipo

$$\left|\begin{matrix} a & c_{ik} & c_{ih} & c_{kh} \\ c_{mn} & b_h & b_k & b_i \end{matrix}\right|,$$

10 del tipo

$$\left|\begin{matrix} b_i & c_{hk} & c_{mk} & c_{nk} \\ b_k & c_{hi} & c_{mi} & c_{ni} \end{matrix}\right|.$$

Finalmente le 40 paja sono di tre tipi, cioè 5 del tipo $(a\, b_i)$, 20 del tipo $(b_i\, c_{ik})$, 15 del tipo $(c_{ik}\, c_{mn})$; invece i 40 quadrilateri gobbi sono di due tipi, cioè 10 del tipo $\left|\begin{matrix} a & b_i \\ b_k & c_{ik} \end{matrix}\right|$, e 30 del tipo $\left|\begin{matrix} b_i & c_{ik} \\ c_{ih} & c_{mn} \end{matrix}\right|$, colla quale scrittura si intende che si tagliano fra loro due rette poste in una stessa linea od in una stessa colonna.

§ 2. Cono circoscritto da un punto alla superficie. Coniche giacenti sulla superficie. — Teorema di Kummer.

13. Ogni punto della conica doppia D_2 ammette ivi due piani tangenti alla superficie, l'uno all'una, l'altro all'altra delle due falde della superficie; la sezione di F_4 con un tal piano è una curva (razionale) del 4^0 ordine avente nel punto di contatto un punto triplo, di cui due rami appartengono alla falda toccata e il terzo, che ha ivi per tangente la tangente di D_2, appartiene all'altra falda. Ora, preso un punto arbitrario 0 dello spazio, i punti di D_2 che sono di contatto per piani tangenti uscenti da 0 devono giacere sulla quadrica polare di 0, epperò sono quattro. Dunque (*) *la sviluppabile formata dalle coppie di piani tangenti ad F_4 nei punti di D_2 è della 4^a classe.*

Se 0 è ancora un punto arbitrario dello spazio, la sua prima polare è una superficie del 3^0 ordine passante per D_2, e secante quindi F_4 ulteriormente in una linea dell'8^0 ordine: essa non è altro che la linea di contatto del cono circoscritto da 0 alla superficie, quindi: *il cono circoscritto alla superficie da un punto esterno è dell'8^0 ordine* (*). È noto che le prime polari di tutti i punti dello spazio si toccano fra loro e toccano la superficie data nei punti cuspidali della linea doppia; nel caso presente quella linea di contatto, essendo dell'8^0 ordine, taglia D_2 in 8 punti, di cui quattro sono di contatto pei quattro piani tangenti uscenti da 0, e gli altri quattro sono quindi i punti cuspidali; cioè *la conica doppia contiene quattro punti cuspidali* (**).

Se si prendono due punti arbitrari 0, 0' dello spazio, le loro prime polari si secano lungo D_2 ed una ulteriore curva del 7^0 ordine (e di genere 5), che, pel teorema sopra ricordato, deve passare pei quattro punti cuspidali e pei due punti di D_2 che sono di contatto per le tangenti condotte a D_2 dal punto comune alla retta $\overline{0\,0'}$ ed al piano di D_2. Se si trovano dunque le intersezioni di F_4 con questa curva, i primi quattro punti contano ciascuno per tre, e gli altri due per due; epperò *la classe della superficie è* $4 \cdot 7 - 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 12$ (*). Se si considera di nuovo un punto 0 dello spazio, si sa che i punti di contatto delle rette che escono da 0 ed osculano la superficie sono i punti comuni ad F_4 e alle due prime polari di 0, ossia sono (nel caso presente) i punti

(*) V. R. Sturm, Mem. cit. Math. Ann., Bd. IV, n.° 4. — Cfr. anche Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes.* Bd. II, 3^a ediz., 1880, pag. 686.
(**) Clebsch, l. c., § 9, pag. 162.

comuni, e fuori di D_2, alla suddetta curva dell'8° ordine e alla quadrica polare di 0. Poichè questa curva passa pei quattro punti di contatto dei piani condotti da 0 a toccare in punti di D_2, e pei medesimi punti passa anche la quadrica polare di 0, segue che *da un punto esterno partono* $2 \cdot 8 - 4 = 12$ *rette osculatrici alla superficie* (*). Conoscendo questi tre numeri relativi al cono circoscritto da 0, le formole di Plücker dànno i rimanenti. Si trova così che *da un punto esterno partono* 4 *tangenti doppie,* 24 *piani stazionarî e* 26 *piani bitangenti alla superficie* (*).

Un piano bitangente taglia la superficie F_4 o in una retta ed una cubica, o in due coniche; l'ultimo numero dice dunque che *da un punto qualunque dello spazio partono* 10 *piani che secano la superficie secondo due coniche.*

Sarebbe molto facile trovare le particolarità che intervengono quando il punto 0 acquista posizioni speciali. Se per es. esso giace sopra una retta della superficie, questa giace sulla prima polare di 0, epperò la curva di contatto si spezza in questa retta ed in una curva del 7° ordine, che deve incontrare la retta in tre punti; perocchè un piano qualunque passante per la retta seca la F_4 ancora in una cubica razionale, che è quindi della 4ª classe; il che dice che la curva del 7° ordine taglia quel piano in soli quattro punti fuori della retta. Se il punto 0 è comune a due rette della superficie, la curva di contatto si spezza in esse ed in una residua curva del 6° ordine, di cui le rette sono corde, ecc.

14. *Coniche della superficie.* Si è già detto che in ciascuno dei 40 piani tritangenti vi è una conica; questa taglia D_2 in due punti, epperò per essa e per D_2 passano infinite quadriche, di cui ognuna taglia ulteriormente la F_4 in una conica. È dunque accertato che sulla superficie esistono infinite coniche. Ora si ha il

Teorema. — *Ogni conica della superficie è tagliata da otto rette della medesima formanti una quaderna di paja.* Se la conica è situata in un piano tritangente, la proprietà fu già dimostrata al n.° 9. In caso diverso, nel piano della conica data C vi è una seconda conica C' della superficie: allora è chiaro che a C' non possono appoggiarsi tutte le 16 rette, altrimenti l'iperboloide passante per D_2, C' e per una di esse conterrebbe anche le 5 rette appoggiate alla retta presa. Ciò mostra che alla conica C si appoggia almeno una retta a. L'iperboloide passante per D_2, C, a seca ancora F_4 in una retta a', che deve

(*) V. R. Sturm, l. c. Math. Ann., Bd. IV, n.° 4.

tagliare a, altrimenti esso conterrebbe anche le due bisecanti di a ed a'. Le altre quattro rette della superficie appoggiate ad a, e le altre quattro appoggiate ad a' non tagliano dunque la C, epperò tagliano C', e ciascuna delle prime (§ 1, n.° 10) seca una delle seconde in modo da formare una quaderna di paja. Ragionando sopra una di queste paja, si conclude lo stesso per C; c. d. d.

Due coniche di F_4 non aventi punti comuni sono tagliate dalle medesime otto rette; infatti le otto rette che tagliano l'una C delle due coniche date non possono tagliare l'altra conica posta nel piano della seconda conica data C', epperò devono tagliare C'. *Due coniche di F_4 aventi due punti comuni non hanno sopra F_4 alcuna secante comune,* perchè questa giacerebbe sopra l'iperboloide determinato dalle due coniche e da D_2. Infine *due coniche di F_4 aventi un punto comune hanno sopra F_4 quattro secanti comuni formanti una quadrupla di 1ª specie, e quattro zerosecanti comuni formanti una seconda quadrupla di 1ª specie, che si compone colla prima a formare una biquadrupla. La biquadrupla conjugata è costituita dalle altre quattro secanti dell'una conica e dalle altre quattro secanti dell'altra.* Sieno infatti C e C' le due coniche aventi un punto comune, e sieno C_1, C'_1 le altre due coniche contenute ancora rispettivamente nei loro piani. Se $(a\,b)$ è una delle quattro paja appoggiate a C, la quadrica passante per D_2, C ed a contiene anche b, quindi C' non può secare entrambe le a, b, altrimenti giacerebbe su quella quadrica. Neppure può accadere che C' non tagli alcuna delle a, b, altrimenti la C'_1, che pure ha un punto comune con C, taglierebbe entrambe le a, b. Dunque C' seca una retta di ciascuna delle quattro paja appoggiate a C. Le quattro rette secanti comuni formano una quadrupla, che è di 1ª specie; invero siano $(a_1\,b_1)$, $(a_2\,b_2)$, $(a_3\,b_3)$, $(a_4\,b_4)$ le quattro paja appoggiate a C, e siano a_1, a_2, a_3, a_4 le secanti comuni di C e C'; queste quattro rette non possono avere zerosecanti comuni, perchè le rette rimanenti si hanno cercando per una qualunque di quelle quattro paja le altre secanti delle sue due rette. Se ora $(a_1\,b'_1)$, $(a_2\,b'_2)$, $(a_3\,b'_3)$, $(a_4\,b'_4)$ è la quaderna appoggiata a C', la b_1, secando a_1, non può secare b'_1; invece, non secando alcuna delle a_2, a_3, a_4, deve, per l'osservazione ora fatta, secare le b'_2, b'_3, b'_4. E si ha quindi la biquadrupla

$$\left|\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & b'_4 \end{matrix}\right|.$$

Considerando analogamente le C_1, C'_1 che pure hanno un punto comune, le loro quattro secanti sono le zerosecanti di C e C', epperò queste formano una quadrupla di 1ª specie, che deve di più comporsi in una biquadrupla colla quadrupla delle secanti comuni; c. d. d.

In generale si può dunque dire che *due coniche di F_4 aventi α punti comuni hanno $4(6-\alpha)$ secanti comuni* (*). In modo analogo si trova che *tre coniche di F_4 aventi $\alpha+\beta+\gamma$ punti comuni hanno $2(4-\alpha-\beta-\gamma)$ secanti comuni* (*).

15. Valgono anche le proprietà reciproche delle precedenti. Se a_1, a_2 sono due rette della superficie che si incontrano, le quadriche passanti per esse e per D_2 formano un fascio e ciascuna di esse taglia ulteriormente la superficie in una conica appoggiata in un punto a ciascuna delle a_1, a_2; in particolare fra queste coniche vi è anche quella contenuta nel piano delle due rette, nonchè quattro paja, formate ciascuna di due rette, di cui l'una taglia a_1 e l'altra a_2, e costituenti una quaderna. Pel numero precedente ognuna di queste coniche è secata da otto rette formanti una quaderna di paja, fra cui vi è $(a_1 a_2)$, e che è la conjugata della precedente. Siccome poi (n.° 10) una quaderna è determinata da un suo pajo, qualunque sia il pajo da cui si parte si ottengono sempre le stesse coniche. Ricordando le proprietà dimostrate sopra si conclude:

Esistono sulla superficie cinque coppie di sistemi conjugati semplicemente infiniti di coniche, essendo ogni coppia coordinata ad una delle cinque coppie di quaderne conjugate di paja: ogni conica dell'un sistema è appoggiata alle otto rette di una quaderna, mentre ogni conica del sistema conjugato è appoggiata alle otto rette della quaderna conjugata; le quattro paja dell'una quaderna appartengono all'un sistema e si appoggiano a tutte le coniche del sistema conjugato.

Due coniche dello stesso sistema non si tagliano, altrimenti non potrebbero essere appoggiate alle stesse otto rette; *due coniche di sistemi conjugati hanno due punti comuni,* perchè non hanno alcuna secante comune; se dunque si imaginano le coniche di un sistema, quelle che sono contenute ulteriormente nei loro piani appartengono al sistema conjugato; infine *due coniche di sistemi diversi e non conjugati hanno un punto comune* per la proprietà dimostrata nel n.° 11 (**).

(*) Clebsch, l. c., § 3, pag. 146-7. — R. Sturm, l. c., n.° 22.

(**) La scoperta dei 10 sistemi di coniche è dovuta al sig. Kummer (l. c., § 3); le altre relazioni sono dovute a Clebsch (l. c., § 3) che le trovò per mezzo della rappresentazione della superficie sopra un piano.

16. Sia 0 un punto qualunque della superficie F_4, e sia $(a_1 a_2)$ un pajo di rette della medesima, $(a'_1 a'_2)$ un altro pajo gobbo col primo, cioè appartenente alla quaderna conjugata. Se nel fascio di quadriche avente per base D_2, a_1, a_2 si determina quella che passa per 0, essa seca ulteriormente la superficie in una conica passante per 0 ed appoggiata in un punto alle a_1, a_2 e quindi alle altre sei rette della quaderna corrispondente; analogamente passa per 0 una conica del sistema conjugato, cioè appoggiata alle a'_1, a'_2 ed alle altre sei rette della quaderna corrispondente. Cioè per ogni punto della superficie passano due piani che secano F_4 in coniche appartenenti ad un medesimo doppio sistema: la sviluppabile formata da questi piani è dunque della 2ª classe. Concludendo si ottiene il teorema fondamentale dovuto al sig. Kummer (l. c., § 3):

I piani che tagliano la superficie in coppie di coniche si distribuiscono in cinque serie, ciascuna delle quali è coordinata ad una delle cinque coppie di quaderne; i piani di una stessa serie passano per un punto ed inviluppano un cono di 2º grado. Le generatrici dei cinque coni così ottenuti toccano la superficie in due punti; ed i coni stessi tagliano quindi la superficie ciascuno in una linea del 4º ordine e di 1ª specie (di genere 1*) passante pei quattro punti cuspidali della conica doppia* (V. n.º 13).

Questi coni saranno detti in seguito *coni di Kummer,* ed i loro vertici *punti di Kummer.* La ricerca dei cinque coni di Kummer dipende da un'equazione di 5º grado, che è manifestamente la stessa da cui dipendono sostanzialmente le 16 rette (V. n.º 10).

In particolare il teorema precedente dà la seguente proprietà, che sarà utilissima in seguito:

I 40 *piani tritangenti formano cinque angoli ottaedri, in ognuno dei quali sono contenute tutte le* 16 *rette, disposte in una delle cinque coppie di quaderne conjugate.*

La esposta dimostrazione geometrica del teorema del sig. Kummer si raccomanda per la semplicità e per la sua indole, direi, affatto elementare.

Il sig. Zeuthen (*) ha pure date due dimostrazioni geometriche della stessa proprietà considerando la projezione della superficie fatta da un punto della

(*) *Om Flader af fierde Orden med Dobbeltkeglesnit,* Memoria scritta per il IV centenario della fondazione dell'Università di Kopenhagen, 1879. Collo stesso metodo della projezione da un punto della conica doppia sono dedotte in questo lavoro le principali proprietà già note della superficie; però lo scopo principale di esso è lo studio e la classificazione della superficie stessa dal punto di vista della connessione, e della realità o immaginarietà de' suoi elementi. Lo stesso metodo era già stato utilizzato da Clebsch nel § 9 della sua conica doppia; anche il sig. Segre (l. c., n.° 5, pag. 327-8) ha dimostrato geometricamente lo stesso teorema, facendo uso del metodo di cui si è già accennato. Le dimostrazioni date dai sig.i Zeuthen e Segre non presuppongono la conoscenza delle rette della superficie.

§ 3. **Due modi di generazione della superficie.**

17. Le proprietà sopra trovate delle coniche situate sulla superficie conducono immediatamente a due modi semplicissimi di generazione della medesima.

1.° Siano C_1 e C_2 due coniche della superficie appartenenti ad uno stesso sistema e non aventi quindi alcun punto comune, e si concepiscano i due fasci di quadriche aventi per basi (D_2, C_1) e (D_2, C_2). Ogni quadrica del primo fascio taglia ancora la F_4 in una conica appoggiata in due punti a D_2 e in due a C_1, cioè appartenente al sistema conjugato di quello di C_1, C_2; essa taglia quindi in due punti anche C_2, e giace in una quadrica determinata del secondo fascio. Questi due fasci sono per tal modo posti in corrispondenza projettiva, e colle loro mutue intersezioni generano la superficie F_4. Reciprocamente è manifesto pel principio di corrispondenza di Chasles che la superficie generata da due fasci projettivi di quadriche posti nelle precedenti condizioni è del 4° ordine, contiene C_1 e C_2 ed ha D_2 per conica doppia (*).

Cerchiamo ora le 16 rette della superficie. Si concepisca per ciò la superficie gobba formata dalle rette che si appoggiano in punti distinti alle C_1, C_2, D_2: essa è dell'8° grado, ha D_2 per curva quadrupla, e C_1, C_2 per curve doppie. Questa superficie taglia ulteriormente la F_4 in una linea dell'8° ordine che si spezza manifestamente in 8 rette. Se si indica con m una di esse, un piano variabile intorno ad m seca ulteriormente le D_2 e C_1 ciascuna in un punto, e la congiungente di questi due punti genera una superficie di 2° grado. Essa è secata da C_2 in quattro punti, di cui uno è fuori di m e di D_2, epperò fra quelle otto rette ve ne è una ed una sola appoggiata ad m;

Memoria: *Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit den Zweitheilung der Abel'schen Functionen* (Math. Ann., Bd. III) per ottenere la rappresentazione della superficie sopra un piano doppio.

(*) Questo modo di generazione è dovuto al sig. Durrande (*Sur les surfaces du quatrième ordre*, Comptes Rendus, 1870, t. LXX, pag. 920). — Cfr. il lavoro citato del sig. Sturm nei Math. Ann., Bd. IV, n.° 23.

vale a dire le otto rette formano una quaderna di paja. Per trovare le altre otto rette della superficie, si indichino con C'_1, C'_2 le altre due coniche di F_4 poste nei piani di C_1, C_2 rispettivamente, e si considerino due fasci projettivi di quadriche aventi per basi (D_2, C'_1) e (D_2, C'_2), essendo la corrispondenza determinata in modo che alla quadrica composta dei piani di D_2 e delle C_1, C'_1 corrisponda la quadrica del secondo fascio contenente C_1, alla quadrica del secondo fascio composta dei piani di D_2 e delle C_2, C'_2 corrisponda nel primo la quadrica contenente C_2, e che alla quadrica del primo fascio determinata da un punto 0 di F_4 corrisponda nel secondo la quadrica pure determinata da 0. Viene così generata una superficie che manifestamente coincide colla prima; vi devono dunque essere sopra F_4 otto rette formanti una quaderna di paja ed appoggiate a C'_1, C'_2 e non a C_1, C_2. Si hanno così le 16 rette, ed è chiaro che non se ne hanno altre.

18. 2.° Sia C una conica qualunque della superficie, Π il suo piano, K il cono di Kummer a cui Π è tangente, e si consideri il fascio di quadriche avente per curva base (D_2, C): ogni quadrica di questo fascio taglia ulteriormente la F_4 in una conica appartenente al sistema conjugato di quello di C, e il cui piano è quindi pure tangente a K. Reciprocamente ogni piano tangente di K seca F_4 in due coniche di cui una appartiene al sistema conjugato di quello di C, e quindi seca C in due punti e giace sopra una determinata quadrica del fascio (D_2, C). Il cono K e il fascio suddetto sono dunque riferiti projettivamente, e colle intersezioni dei loro elementi corrispondenti generano la F_4. In tale corrispondenza al piano Π corrisponde la quadrica formata dal piano Π e dal piano della conica doppia.

Viceversa se si riferiscono projettivamente le quadriche di un fascio ai piani tangenti di un cono quadrico, posti nelle precedenti mutue condizioni, il principio di Chasles mostra che (tralasciando il piano Π) la superficie generata è del 4° ordine, contiene C ed ha D_2 per conica doppia (*).

Per ritrovare anche qui le 16 rette basta imaginare una qualunque delle coniche della superficie, generata come dianzi, e la conica ulteriore che giace nel piano Π; esse non hanno punti comuni e si è allora ricondotti al 1° caso. Del resto si potrebbe anche cercare, col principio di Chasles, quante volte un piano di K è tangente alla sua quadrica corrispondente del fascio (D_2, C).

19. La generazione di F_4 esposta nel n.° 16 porge modo di trovare il numero delle condizioni lineari *(Costantenzahl)* che valgono a determinare una

(*) Cfr. Clebsch, l. c., § 11, pag. 167-8. — Sturm, l. c., Math. Ann., Bd. IV, n.° 23.

superficie del 4° ordine avente una conica doppia. La conica D_2 è determinata da 8 condizioni, le C_1, C_2, che secano D_2 ma non si secano fra loro, involgono altre $2(8-2)=12$ condizioni; la projettività fra i due fasci (D_2, C_1) e (D_2, C_2) dipende da 3 condizioni, e d'altra parte si è visto che vi è una doppia infinità di coppie di coniche come C_1 e C_2, epperò:

Le superficie del 4° ordine aventi una conica doppia data formano un sistema $21-8=13$ *volte infinito; se la conica doppia non è data, esse formano un sistema* 21 *volte infinito.*

Il semplice ragionamento esposto è dovuto al sig. Sturm (*); ma la prima parte del risultato si poteva dedurre anche dal fatto notato dai sig.[i] Geiser e Cremona (**), che si può stabilire una corrispondenza univoca fra le superficie del 3° ordine passanti per una conica fissa D_2, e le superficie del 4° ordine aventi D_2 per conica doppia e passanti per un punto fisso.

§ 4. Curve giacenti sulla superficie.

20. Nella Memoria più volte citata (§§ 5, 6, 7, 8, 9) il Clebsch, col mezzo della rappresentazione piana, ha studiate a fondo le curve gobbe del 3° e del 4° ordine situate sulla superficie, e ne ha trovate varie interessanti proprietà. In seguito il sig. Sturm nel lavoro citato poc'anzi (Math. Ann., Bd. XXI, pag. 507 e seg.) ha esposto un metodo generale per determinare le curve di tutti gli ordini esistenti sulla superficie, trovandone inoltre i numeri più importanti. Tuttavia varie proprietà di tali curve, considerate in sè stesse o come giacenti sopra una superficie generale del 3° ordine, erano già note in grazia dei numerosi lavori specialmente del sig. Cremona e dello stesso sig. Sturm sulla detta superficie. In questo paragrafo ho studiato direttamente e con metodo geometrico le curve gobbe della superficie (supposte prive di punti doppi o di altre particolarità) fino al 5° ordine inclusivamente, dimostrando, in particolare, tutte le proprietà stabilite dal Clebsch.

Prima di entrare nella considerazione particolareggiata delle curve dei singoli ordini, credo opportuno esporre alcune generalità sulle medesime. Se-

(*) *Ueber die Curven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung.* Math. Ann., Bd. XXI, 1883, pag. 511.

(**) Geiser, *Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben.* Giornale di Crelle, Bd. LXX, pag. 249. — Cremona, l. c., Rend. Istit. Lomb., 1871. — Cfr. anche l'opera di Darboux, pag. 165.

guendo il sig. STURM, indicherò con u_4 il numero dei parametri atti a determinare nello spazio una curva (che si considera, ben inteso, sulla F_4), ossia la sua molteplicità *(die Mächtigkeit)* nello spazio; con v_4 la molteplicità delle superficie F_4 passanti per la curva; con t_4 la molteplicità su F_4 delle curve della natura considerata; infine con f_4 il numero dei punti (arbitrarî) che la curva deve avere sopra F_4 per esservi contenuta interamente. Si useranno gli stessi simboli coll'indice 3 ad indicare gli stessi elementi relativi ad una superficie del 3° ordine. Allora si ha evidentemente:

$$u_3 = u_4 = f_3 + t_3 = f_4 + t_4. \tag{1}$$

Se si indica con n l'ordine della curva e con p il suo genere, col mezzo di superficie rigate si ha pure (*) la relazione:

$$t_4 = n + p - 1.$$

Infine si ha:

$$v_4 = 21 - f_4, \tag{2}$$

perchè (n.° 19) una F_4 è determinata da 21 condizioni. Se la curva giace anche sopra una (o più) superficie di 3° ordine, ricordando le formole analoghe date dal sig. STURM, si hanno le notevoli relazioni:

$$f_3 = f_4, \qquad t_3 = t_4, \qquad v_4 = v_3 + 2.$$

Io ammetterò come noto il valore di $u_3 = u_4$, che si trova nelle tavole del sig. STURM, ed anche in quelle contenute nei lavori premiati dei sig.i HALPHEN e NOETHER sulle curve gobbe algebriche; trovando poi direttamente il valore di t_4, la (1) dà quello di f_4, e quindi la (2) quello di v_4.

Siccome non avrò che a considerare curve parziali intersezioni (oltre a D_2) di F_4 con una superficie d'ordine $\mu\,(= 2,\ 3)$ passante per la conica doppia, ognuna di queste curve taglierà D_2 in tanti punti quant'è il suo ordine, cioè in $4(\mu - 1)$ punti. Poichè la curva è supposta priva di punti multipli effettivi, indicando con r il suo rango (ordine della sviluppabile osculatrice, ossia numero delle sue tangenti incontrate da una retta arbitraria), con h il numero de' suoi punti doppi apparenti, le formole di CAYLEY dànno:

$$h = \frac{n(n-1) - r}{2}, \qquad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h. \tag{3}$$

(*) STURM, l. c., pag. 459 e 508. — Per queste ed altre relazioni cfr. anche la Memoria dello stesso Autore nel Bd. LXXXVIII del Journal von Crelle-Borchardt, V, pag. 232 e seguenti.

Per trovare il valore di r seguirò sempre il metodo esposto dal sig. STURM nel n.° 59 delle sue *Synthetische Untersuchungen*, etc., ricordando soltanto che questo numero, espresso da $\mu + 2$, deve essere diminuito di 2 unità per ogni punto comune alla curva e a D_2 [cioè di $2 \cdot 4(\mu - 1)$ unità], e pure di 2 unità per ogni punto comune alle varie parti in cui la curva si possa spezzare.

21. *Cubiche gobbe.* Se C_3 è una cubica gobba posta sulla superficie, quella fra le ∞^2 superficie di 2° grado passanti per la curva, che contiene anche D_2, taglia ulteriormente F_4 in una retta a, che, come è noto, deve appoggiare a C_3 in uno od in due punti. Ora se appoggiasse in un solo punto, tutte le rette dell'altro sistema della quadrica vi si appoggierebbero in due e giacerebbero sopra F_4. Dunque la retta è una bisecante di C_3, e sopra F_4 non ve ne sono altre, perchè anche queste sarebbero contenute nella detta quadrica. Per la stessa ragione le cinque rette di F_4 appoggiate ad a sono zerosecanti della cubica. Infine le 10 zerosecanti di a poste su F_4 secano ciascuna la C_3 in un punto, ed invero la quadrica passante per D_2, per a e per una di queste 10 rette seca ancora F_4 in due rette zerosecanti di C_3; questa taglia dunque la quadrica in sei punti, di cui tre sono sopra D_2 e due sono sopra a, il sesto deve quindi essere sull'altra retta.

Reciprocamente, data una retta di F_4, per essa e per D_2 passano ∞^2 quadriche, di cui ognuna taglia ancora la superficie in una cubica gobba appoggiata in due punti alla retta: le altre 15 rette si comportano rispetto alla cubica come si è detto sopra (*). Epperò:

Esistono sulla superficie 16 *sistemi doppiamente infiniti di curve gobbe del 3° ordine: ogni sistema è coordinato ad una retta della superficie, che ne seca ogni curva in due punti; le dieci zerosecanti della retta ne secano ogni curva in un punto, le sue cinque secanti non le tagliano affatto* (**).

È noto (***) che per una cubica gobba si ha $u_3 = u_4 = 12$, epperò, siccome si è ora trovato che $t_4 = 2$, si avrà $f_4 = 10$, e quindi $v_4 = 11$, mentre $v_3 = 19 - f_3 = 9$.

Ognuna delle ∞^2 quadriche passanti per una cubica di F_4 taglia ancora

(*) La via da me tenuta per trovare le cubiche (e così, come si vedrà in seguito, le quartiche) della superficie coincide nella sostanza con quella seguita dal sig. SEGRE nel lavoro citato (n.i 8, 9); egli però, nel seguire il suo metodo generale, ha dovuto introdurre il concetto di uno spazio a 4 dimensioni e la susseguente projezione nello spazio ordinario, ciò che (nel presente caso, si badi) non è necessario.

(**) CLEBSCH, l. c., § 6, pag. 154-5.

(***) STURM, Giornale di Crelle-Borchardt, l. c., n.° 30.

questa superficie in una curva gobba del 5° ordine passante pei tre punti comuni alla cubica e a D_2, ed avente un punto doppio nel quarto punto comune a D_2 ed alla quadrica.

Credo inutile accennare alle possibili degenerazioni di questi 16 sistemi di cubiche, perchè sono affatto ovvie, e del resto sono indicate nel lavoro di Clebsch.

22. *Quartiche gobbe di 1ª specie.* Ogni quadrica passante per D_2 taglia ulteriormente la F_4 in una curva gobba del 4° ordine, che deve essere di 1ª specie, perchè è secata da ogni retta della quadrica in due punti. Reciprocamente ogni quartica di tal natura esistente sopra F_4 seca D_2 in quattro punti, epperò giace sopra una (sola) quadrica passante per D_2. Dunque (*):

Esiste sopra la superficie un sistema quattro volte infinito di curve gobbe del 4° ordine e di 1ª specie (di genere 1), di cui ciascuna giace sopra una (sola) quadrica passante per D_2. Ognuna di tali curve taglia ogni retta della superficie in un punto, ogni conica in due, ogni cubica in tre, ogni quartica in quattro punti.

Il modo stesso con cui sono generate queste quartiche mostra che per quattro punti arbitrarî di F_4 ne passa una ed una sola; due qualunque di esse si tagliano in quattro punti, posti in un piano, pei quali ne passa una semplice infinità, e di cui tre qualunque individuano il quarto.

Per questa curva si ha dunque $t_4 = 4$, poi si ha (**) $u_3 = u_4 = 16$, epperò sarà $f_4 = 12$, $v_4 = 9$, mentre $v_3 = 7$.

23. Si supponga di avere sulla superficie una quartica avente un punto doppio in un punto P di D_2; se P è biplanare, quella fra le ∞' quadriche passanti per la curva, che contiene D_2, ha in P per piani tangenti i due piani che quivi toccano le due falde della superficie F_4; questa quadrica è dunque un cono avente il vertice in P, e poichè da esso si deve quindi staccare il piano della conica doppia, il piano rimanente deve contenere la quartica. Se invece P è uno dei quattro punti cuspidali di D_2 (dal che segue che la quartica ha in P una cuspide), il cono quadrico che da P projetta la curva taglia ulteriormente la F_4 in una quartica avente pure in P una cuspide e appoggiata a D_2 negli stessi due punti in cui è appoggiata la quartica data. Ciò mostra che le due quadriche passanti per D_2 e per le due curve si toccano in P ma non in tutti i punti di D_2, epperò si secano in una seconda conica pas-

(*) Clebsch, l. c., pag. 157. — Cfr. Segre, l. c., n.° 9, pag. 333.
(**) Sturm, Giornale di Crelle-Borchardt, l. c., n.° 30.

sante per P ed avente in comune con F_4 quattro punti non giacenti sopra D_2, e che manifestamente sono comuni alle due quartiche. Questa conica giace dunque nel cono suddetto, cioè si spezza in due rette passanti per P, ciascuna delle quali contiene, oltre P, due punti di ciascuna delle due curve: queste sono dunque piane. Concludendo si ottiene (*):

Una quartica della superficie, che possegga un punto doppio sopra la conica doppia, è necessariamente piana, cioè ha un secondo punto doppio.

24. Se si indica con 0 un punto qualunque della superficie, una qualunque delle ∞' quadriche passanti per la conica D_2 e tangenti in 0 alla superficie, taglia questa in una quartica (razionale) avente in 0 un punto doppio, ed imaginando in 0 il piano tangente alla F_4, le due tangenti in 0 alla quartica sono manifestamente le due rette secondo cui quel piano taglia la quadrica suddetta. Queste coppie di tangenti formano dunque un' involuzione, di cui i raggi doppî corrispondono alle due quartiche aventi in 0 un regresso. Se fra quelle quartiche si considera quella che è tagliata dal piano tangente in 0 ad F_4, le due tangenti nel punto doppio sono le rette osculatrici alla superficie, cioè quelle che segnano le direzioni delle linee assintotiche. Inoltre, se si imagina una delle 10 coniche della superficie passanti (n.° 16) per 0, e che indico con C, e nel fascio di quadriche avente per base (C, D_2) si considera la quadrica passante per un punto di F_4 infinitamente vicino ad 0 in direzione diversa da quella di C, essa taglia F_4 secondo un' altra conica C' passante per 0, e appartenente al sistema conjugato di C. È chiaro che le cinque coppie di tangenti a queste coniche appartengono pure all' anzidetta involuzione; alla medesima appartengono infine anche le due rette che toccano in 0 la F_4 e si appoggiano a D_2.

Riassumendo si può dire (**):

Per ogni punto della superficie passa un sistema semplicemente infinito di quartiche gobbe aventi in quel punto un punto doppio e giacenti sulla superficie; fra esse ve ne sono due aventi in quel punto un regresso, e cinque che si spezzano in due coniche. Le coppie di tangenti nel punto doppio formano un' involuzione di cui i raggi doppi sono le tangenti alle curve con regresso, e queste giacciono armonicamente colle direzioni delle linee assintotiche.

Si può cercare per quali punti della superficie accade che le due suddette tangenti alle curve con regresso coincidono: ora, se si indica con m la retta

(*) Clebsch, l. c., § 8, pag. 160.
(**) Clebsch, l. c., § 8.

in cui esse coincidono, la involuzione precedente è degenere, cioè le sue coppie sono costituite dalla retta m e da una retta qualunque del piano tangente alla F_4 nel punto considerato. Ciò significa che tutte quelle quadriche passano non solo per D_2, ma anche per m; epperò m taglia D_2 in un punto. E siccome le rette osculatrici in 0 ad F_4 formano un fascio armonico con quelle due tangenti alle curve con regresso, la retta m sarà osculatrice alla superficie, epperò, avendo con questa in comune cinque punti, vi giacerà per intero. La reciproca è evidente. Dunque (*):

I soli punti delle 16 *rette sono tali che per essi passa una sola quartica della superficie avente ivi un regresso; le quartiche aventi ivi un punto doppio si spezzano nella retta ed in una cubica gobba.*

Se il punto preso è l'intersezione di due rette della superficie, le quartiche aventi ivi un punto doppio si spezzano nelle due rette e in un sistema di coniche appoggiate ad entrambe le rette; non vi è mai un regresso, perchè le tangenti del punto doppio sono fisse, essendo le due rette stesse. La curva acquista un punto triplo in 0 quando la conica passa per 0.

25. Una quartica C_4 di 1ª specie appartenente alla superficie taglia D_2 in quattro punti, e in vicinanza di questi la si può concepire come situata in una certa falda della superficie, che dirò 1. Se si imagina il fascio di quadriche avente per base C_4, una sua quadrica qualunque Q seca ulteriormente la superficie in una quartica di 1ª specie C'_4 la quale taglia D_2 negli stessi quattro punti di C_4. Siccome poi la Q è qualunque, cioè non tocca alcuna falda della superficie in punti di D_2, in vicinanza dei quattro punti suddetti la C'_4 si dovrà concepire come situata sull'altra falda, che dirò 2. Partendo in modo analogo da C'_4 si trovano ∞' quartiche di 1ª specie passanti pei medesimi quattro punti di D_2 e poste nella falda 1. Ora è facile vedere che le C_4 e C'_4 si tagliano, oltre che sulla D_2, in altri quattro punti. Invero C'_4 taglia la quadrica contenente D_2 e C_4 in otto punti, di cui quattro sono quelli che le due quartiche hanno in comune sopra D_2, e gli altri quattro debbono perciò essere sopra C_4; e si noti che questi non possono sovrapporsi ai precedenti, altrimenti C_4 e C'_4 si toccherebbero in quei punti cioè la Q passerebbe pei punti cuspidali della conica doppia, ciò che per ora si esclude. Si può anzi aggiungere (cfr. n.° 22) che questi altri quattro punti comuni a C_4 e C'_4 sono in un piano, e invero da ciò che precede risulta che le due quadriche passanti per D_2, C_4 e per D_2, C'_4 hanno in comune, oltre a D_2, un'altra conica *diversa* da D_2, e questa taglia F_4, oltre che su D_2, nei quattro punti di cui si tratta.

(*) Clebsch, l. c., § 8.

Se ora sono C'_4, C''_4 due quartiche di 1ª specie (situate nella stessa falda 2 della superficie) ottenute da C_4 con due quadriche Q' e Q'', esse passano pei medesimi quattro punti di D_2 per cui passa C_4 ed hanno di più in comune con C_4 altri quattro punti ciascuna; questi sono distinti dall'una all'altra curva, perchè se C_4, C'_4, C''_4 avessero un punto comune, in esso due quadriche del fascio avente per base C_4 toccherebbero la F_4, il che è assurdo. Ne segue che C'_4 e C''_4 non hanno, fuori di D_2, altri punti comuni, altrimenti C''_4 segherebbe Q' in più di otto punti e vi giacerebbe per intero. Le C'_4 e C''_4 non giacciono quindi sopra una quadrica, e le due quadriche contenenti D_2, C'_4 e D_2, C''_4 si toccano in tutti i punti di D_2.

Sia infine Γ_4 una quartica qualunque di 1ª specie posta sulla superficie, e passante pei quattro punti di D_2 pei quali passano C_4 e C'_4: dico che Γ_4 giace in una quadrica con una (sola) di queste due curve. Se infatti si indica ancora con Q la quadrica che le contiene, la Γ_4 taglia Q, oltre che nei quattro punti di D_2, in altri quattro punti che devono essere complessivamente sopra le C_4, C'_4. Ma essi devono essere tutti su C_4, o tutti su C'_4; perocchè se per es. due fossero sull'una e due sull'altra, la quadrica del fascio C_4 determinata da uno dei due punti posti su C'_4 taglierebbe Γ_4 in otto punti, di cui, essendo quattro sopra D_2, due sopra C_4 e uno sopra C'_4, l'ultimo dovrebbe essere o sopra C_4, o sopra C'_4, e poichè la quadrica non passa pel secondo punto comune a Γ_4 e C'_4, su C_4 vi sarebbero tre punti di Γ_4, contro l'ipotesi. La Γ_4 giace quindi sopra una quadrica con quella delle C_4, C'_4 con cui ha otto punti comuni. Riassumendo si ha la proprietà (*):

Una quartica qualunque di 1ª specie posta sulla superficie taglia D_2 in quattro punti, pei quali passa un sistema semplicemente infinito di tali curve appartenenti ad una medesima falda della superficie; per gli stessi quattro punti passa pure un sistema semplicemente infinito di quartiche di 1ª specie poste sull'altra falda; ed ogni curva del primo sistema giace in una determinata quadrica con ogni curva del secondo.

Non è però da credere che per quattro punti qualunque di D_2 passi una quartica di 1ª specie, epperò infinite; perocchè *le quartiche di 1ª specie passanti, in una determinata falda della superficie, per tre punti arbitrarî di D_2 passano per un suo quarto punto pienamente determinato dai primi tre* (*).

Se infatti sono A, B, C tre punti qualunque di D_2, e si fissano sulla su-

(*) Clebsch, l. c., § 8.

perficie in una falda determinata (*) tre punti infinitamente vicini ad essi, ma in direzioni che facciano angoli di grandezza finita colla direzione di D_2, per essi e per D_2 passa un fascio di quadriche, la cui curva base è la D_2 stessa contata due volte, cioè *tutte queste quadriche si toccano lungo* D_2. Se allora Q è una di esse, questa taglia F_4 in una quartica C_4 di 1ª specie passante per A, B, C ed appoggiata a D_2 in un quarto punto M. Un'altra quadrica qualunque del fascio, dovendo toccare Q in M, tocca quivi anche la falda di F_4 che è qui toccata da Q; c. d. d.

26. In particolare si supponga che i tre punti A, B, C siano tre dei quattro punti cuspidali della conica doppia; le quartiche di 1ª specie passanti per essi secano tutte la D_2 in un quarto punto fisso M, e tutte le quadriche passanti per esse e per D_2 toccano in A, B, C tanto l'una quanto l'altra delle due falde della superficie, epperò lo stesso deve accadere nel punto M, altrimenti si potrebbero avere due quartiche passanti per A, B, C (e quivi toccantisi) e per M, ma situate l'una nell'una, l'altra nell'altra falda di F_4 in vicinanza di M, e le due quadriche passanti per esse e per D_2 si toccherebbero nei punti A, B, C e quindi anche in M, ciò che nell'ipotesi fatta non sarebbe possibile. Dunque M è il quarto punto cuspidale. Si ha così la proprietà (**):

Pei quattro punti cuspidali della conica doppia passa un sistema semplicemente infinito di quartiche gobbe di 1ª specie, due qualunque delle quali si toccano nei punti cuspidali e giacciono quindi in una quadrica; le quadriche passanti per esse e per D_2 si toccano tutte lungo D_2 ed hanno per piani tangenti nei punti cuspidali i piani che in essi toccano la superficie.

Di qui segue súbito che *i piani tangenti alla superficie nei quattro punti cuspidali passano per uno stesso punto* (***). Al suddetto fascio di quadriche che tagliano F_4 in quartiche passanti pei punti cuspidali appartengono il piano della conica doppia contato due volte, ed il cono avente il vertice nel punto comune ai quattro piani tangenti alla superficie nei punti cuspidali.

(*) Pongo sempre questa condizione, perchè la quartica non potrebbe passare dall'una all'altra falda della superficie se non attraverso D_2, ciò che non può fare che avendo sopra D_2 un punto doppio.

(**) Clebsch, l. c., §§ 9, 10.

(***) Clebsch, l. c., § 10. Egli ha pur trovato che *i vertici dei cinque coni di Kummer ed il punto comune ai quattro piani tangenti nei punti cuspidali sono sopra una cubica gobba, che taglia il piano della conica doppia nei tre punti diagonali del quadrangolo formato dai punti cuspidali.* — Varie interessanti proprietà di questa cubica furono dimostrate in seguito dal sig. Darboux nel suo *Mémoire sur les surfaces cyclides,* Annales Scient. de l'École Normale Supérieure, 2ᵉ série, t. I, 1872, pag. 281 e seg.

27. Si indichi con (D_2) il fascio di quadriche toccantisi lungo D_2; sia C_4 una quartica di 1ª specie passante pei punti cuspidali, e fra le quadriche passanti per C_4 si imagini quella che tocca F_4 in un punto 0 della stessa C_4: essa taglia ulteriormente la superficie in una quartica C'_4 di 1ª specie passante per 0 e pei punti cuspidali. La quadrica del fascio (D_2) passante per 0 deve allora contenere entrambe le C_4 e C'_4, epperò queste coincidono; vale a dire esiste una (unica) quadrica che tocca F_4 in tutti i punti di C_4, cioè le cui generatrici toccano F_4 nei due punti in cui esse si appoggiano a C_4. Data sulla superficie una C_4 qualunque passante pei punti cuspidali, le generatrici della quadrica tangente ad F_4 lungo la quartica si possono costruire una per una nel modo seguente. In ogni punto M di C_4 condotto il piano tangente alla superficie, esso taglia la superficie stessa in una curva (razionale) del 4º ordine avente tre punti doppi, due sopra D_2 ed uno in M, e che perciò è della 6ª classe; da M le si possono quindi condurre due tangenti altrove. Costruendo per ogni punto M di C_4 queste due rette (che, per quanto si è detto, sono bisecanti di C_4 e bitangenti di F_4) si ha la quadrica cercata, come si potrebbe provare anche direttamente.

Si vuole ora trovare quante di queste quadriche passano per un punto arbitrario 0 dello spazio. Se $0AB$ è una qualunque delle quattro bitangenti (n.º 13), in A e B, alla superficie passanti per 0, la quadrica del fascio (D_2) passante per A taglia F_4 in una quartica passante per A e pei quattro punti cuspidali; e dalla costruzione ora esposta segue che la retta $0AB$ appartiene a questa quadrica.

L'altra retta della quadrica passante per 0 sarà pur'essa bitangente alla superficie. Le altre due bitangenti condotte da 0 ad F_4 dànno una seconda quadrica passante per 0, cioè per ogni punto dello spazio passano due di quelle quadriche. Concludendo si ha (*):

Pei quattro punti cuspidali passa una semplice infinità di quartiche gobbe di 1ª specie poste sulla superficie, la quale è toccata lungo ognuna di esse da una superficie di 2º grado; tutte queste superficie formano una serie razionale d'indice 2. *Fra quelle quartiche vi sono manifestamente anche le curve di contatto dei cinque coni bitangenti di Kummer.*

28. Sulla F_4 esistono ancora cinque curve gobbe notevoli del 4º ordine e di 1ª specie, e si ottengono considerando per ognuno dei cinque coni di Kummer i punti di contatto delle coniche dei due corrispondenti sistemi con-

(*) Clebsch, l. c., §§ 9, 10.

jugati. Se K è uno qualunque di questi coni, V il suo vertice e C_2 una conica qualunque il cui piano sia tangente a K, per avere fra le coniche del sistema conjugato quelle che toccano C_2, bisogna condurre da V le due tangenti a C_2, e per queste condurre gli altri due piani (oltre quello di C_2) tangenti a K: ognuno di essi taglia allora F_4 in due coniche, di cui una tocca C_2. Si vede dunque che i punti di contatto di queste coniche sono i punti della linea di contatto del cono circoscritto semplicemente (cioè astrazion fatta dal cono K che dev'essere contato due volte) da V alla superficie. Questa linea, essendo la ulteriore intersezione di F_4 colla prima polare di V, quando se ne tolga la D_2 e la quartica di contatto di K, è pur essa una linea del 4° ordine. Essa taglia l'iperboloide passante per D_2 e per la curva di contatto di K in otto punti, di cui quattro sono sopra D_2; e gli altri quattro sono quindi su quell'altra curva. Ora è facile vedere che il rango della curva complessiva è $5 \cdot 8 - 2 \cdot 8 = 24$; sottraendo il rango 8 della quartica di 1ª specie che è di contatto fra K ed F_4, e richiamando la regola del n.° 20, si trova che il rango di questa seconda quartica è $24 - 8 - 2 \cdot 4 = 8$, epperò anch'essa è di 1ª specie. Ma non passa, come la prima, pei punti cuspidali, sibbene taglia D_2 nei quattro punti che sono di contatto pei piani condotti da V a toccare F_4 in punti di D_2. Si ha pertanto la proprietà (*):

Sulla superficie esistono cinque speciali quartiche gobbe di 1ª specie, che sono il luogo dei punti di contatto delle coppie di coniche fra loro tangenti in ciascuno dei cinque doppi sistemi.

29. *Quartiche gobbe di 2ª specie.* Sia sempre indicata con C_4 una tale quartica, con S_2 la (unica) quadrica passante per essa, e con C'_4 l'ulteriore intersezione di S_2 con F_4, che è pure una quartica di 2ª specie. Allora ogni retta di F_4 taglia S_2 in due punti, che devono giacere complessivamente sulla curva (C_4, C'_4). Supponendo anzitutto che una retta m di F_4 tagli C_4 in due punti e quindi non tagli C'_4, nessuna delle cinque rette di F_4 appoggiate ad m può bisecare C_4; se infatti si ammette che n sia una tal retta, facendo ruotare un piano intorno ad m ed in ogni sua posizione congiungendo i due ulteriori punti che esso ha comuni con C_4, si ottiene una superficie gobba di 3° grado avente m per retta doppia, e secante F_4, oltre che nelle C_4, m, n, D_2, in una retta residua. Vi dovrebbe dunque essere una seconda retta n' appoggiata ad m e bisecante di C_4, e la quadrica passante per D_2, n, n' conterrebbe quindi pure m e C_4, ciò che è assurdo. Se invece m è una retta di

(*) Clebsch, l. c., § 9.

F_4 che non seca C_4, nessuna delle cinque rette di F_4 appoggiate ad m può essere zerosecante di C_4, altrimenti essa ed m sarebbero bisecanti di C'_4. Infine se m è una bisecante di C_4 posta sopra F_4, non possono le cinque rette appoggiate ad m essere tutte zerosecanti di C_4, altrimenti, considerando le intersezioni di C_4 cogli iperboloidi determinati da D_2 e due di queste secanti di m, si concluderebbe che tutte le dieci zerosecanti di m sono bisecanti di C_4, ciò che è assurdo, perchè con esse si possono formare delle paja.

Questo dimostra che fra le 16 rette di F_4 ve ne è almeno una che taglia C_4 in un punto solo, e sia la retta a: allora si può far vedere che delle sue cinque secanti una almeno deve essere zerosecante della quartica. Invero supponendo, nel caso più sfavorevole, che tutte cinque ne siano unisecanti, la superficie gobba formata dalle rette che appoggiano in punti distinti a D_2, C_4, a, ed a cui appartengono manifestamente quelle cinque rette, è del 6° grado e contiene C_4 semplicemente, a come quadrupla e D_2 come tripla, epperò la sua sezione con F_4 è dell'ordine $5+4+4+2\cdot 2\cdot 3=25$, che è assurdo. Facendo lo stesso ragionamento su C'_4, di cui a è pure unisecante, si conchiude che fra le cinque rette appoggiate ad a una almeno è zerosecante ed una almeno è bisecante di C_4 (e così per C'_4). Non vi possono poi essere appoggiate ad a due bisecanti (nè due zerosecanti) di C_4, altrimenti l'iperboloide determinato da esse e da D_2 conterrebbe C_4 (o C'_4). Dunque delle cinque rette appoggiate ad a una è zerosecante, una è bisecante, e tre sono unisecanti di C_4. E facendo gli stessi ragionamenti per queste tre unisecanti, si trova che vi è una biquadrupla, le cui rette sono unisecanti della curva, mentre nella biquadrupla conjugata l'una quadrupla è formata di bisecanti, e l'altra di zerosecanti della curva stessa.

Queste proprietà ammettono le loro reciproche. Se

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

è una biquadrupla qualunque, e per D_2 e per le rette a_1, b_2, b_3, b_4 si conduce una qualunque delle ∞^3 superficie del 3° ordine passanti per esse, e che indico con S_3, la residua intersezione di F_4 ed S_3 è una linea C_4 del 4° ordine. Per trovarne il rango, e quindi la specie, basta trovare in quanti punti appoggia alle quattro rette prese. Per questo se si denotano con c_{12}, c_{13}, c_{14} le tre rette di S_3 poste rispettivamente nei piani tritangenti $\overline{a_1 b_2}$, $\overline{a_1 b_3}$, $\overline{a_1 b_4}$, esse non tagliano D_2, e tagliano ciascuna due delle quattro rette prese, perciò secano F_4 in altri due punti situati sopra C_4. E poichè ognuno dei piani $\overline{a_1 b_2 c_{12}}$,

$\overline{a_1 b_3 c_{13}}$, $\overline{a_1 b_4 c_{14}}$ seca C_4 in quattro punti, su ciascuna delle tre paja $(a_1 b_2)$, $(a_1 b_3)$, $(a_1 b_4)$ vi sono complessivamente due punti di C_4, il che conduce ai tre seguenti casi possibili: che ognuna delle a_1, b_2, b_3, b_4 sia unisecante di C_4; che a_1 ne sia zerosecante e le altre tre bisecanti; che a_1 ne sia bisecante e le altre tre zerosecanti. Ora se si concepisce la quadrica passante per D_2 e pel quadrilatero gobbo $\begin{vmatrix} a_1 & b_3 \\ b_4 & a_2 \end{vmatrix}$, poichè la retta a_2, secando S_3 in tre punti posti su D_2, b_3, b_4, non seca C_4, la C_4 seca quella quadrica in otto punti, di cui quattro sono sopra D_2, e gli altri quattro devono giacere complessivamente sul sistema $(a_1 b_3 b_4)$; e questo mostra che ha luogo il secondo dei casi accennati. Dunque C_4 appoggia in due punti a ciascuna delle b_2, b_3, b_4 e non seca a_1. Quindi il rango, per la solita regola, è 6, cioè C_4 è di 2^a specie (razionale). Ed è facile vedere che colle rette rimanenti di F_4 essa si comporta come si disse sopra. E siccome si vide che ognuna di tali quartiche può concepirsi generata, in quattro modi diversi, in questa maniera, si conchiude:

Esistono sulla superficie 40 *sistemi triplamente infiniti di curve gobbe del 4° ordine e di 2^a specie, ognuno coordinato ad una data quadrupla di 1^a specie, le cui rette ne sono bisecanti, mentre le rette della quadrupla conjugata ne sono zerosecanti, e le rette della biquadrupla conjugata ne sono unisecanti* (*).

Si ha dunque $t_4 = 3$, e poichè (**) $u_3 = u_4 = 16$, si avrà $f_4 = 13$, $v_4 = 8$, mentre $v_3 = 6$.

30. Imaginando per ognuna di queste quartiche condotta la quadrica corrispondente, si ottiene per ogni sistema un sistema di quartiche che dirò *conjugato* al primo; allora è ovvio che *le quartiche di un sistema hanno le stesse unisecanti che quelle del sistema conjugato; mentre le zerosecanti delle prime sono bisecanti delle altre, e le bisecanti sono le zerosecanti.*

Si dicano infine *contrapposti* ai primi due quei due sistemi che sono coordinati alle quadruple della biquadrupla conjugata. Se sono C_4 e C'_4 due quartiche dello stesso sistema, e si imagina una delle quattro superficie cubiche che, nel modo esposto, dànno origine a C_4, essa è secata da C'_4 in 12 punti, da cui se si escludono i quattro posti su D_2 ed i sei posti sulle tre note rette, risulta che C_4 e C'_4 hanno due punti comuni. Quindi *due quartiche di uno stesso sistema hanno due punti comuni;* allo stesso modo si trova che *due*

(*) Clebsch, l. c., § 7.
(**) Sturm, l. c., n.° 30.

quartiche di sistemi conjugati si tagliano in sei punti, e due quartiche di sistemi contrapposti in quattro punti (*).

Col metodo precedente, e riflettendo al modo con cui si comportano rispetto ad una quadrupla di 1ª specie le rimanenti 39, si arriva agevolmente all'altra proprietà stabilita da Clebsch (l. c., § 7); come pure è facilissimo trovare in quali e quanti modi i detti sistemi di quartiche possano degenerare; ma per brevità ometto di ciò fare.

31. È noto (**) che esistono quattro specie di curve gobbe del 5° ordine, di cui due sono parziale intersezione di due superficie, una del 2°, l'altra del 3° ordine; ma è chiaro che nessuna di queste due specie può giacere sopra F_4, perchè anche D_2 giacerebbe su quella quadrica. Restano da considerare le altre due specie, la prima di genere 0, cioè con sei punti doppi apparenti, che si può pensare come ulteriore intersezione di due superficie del 3° ordine aventi in comune una quartica gobba (degenere) con quattro punti doppi apparenti; la seconda di genere 1, cioè con cinque punti doppi apparenti, che si può pensare come ulteriore intersezione di due superficie del 3° ordine aventi in comune una quartica gobba di 2ª specie.

Curve gobbe del 5° ordine e di genere 0. Queste curve furono studiate dal sig. Sturm nelle sue *Synthetische Untersuchungen*, etc. (pag. 209, 217, 233), e da lui furono stabilite alcune notevoli proprietà, che, insieme con altre, furono poi trovate di nuovo direttamente nel 1881 dal prof. Bertini (***).

Se C_5 è una quintica gobba razionale posta sopra F_4, la superficie gobba formata dalle sue trisecanti è (****) dell'8° grado, contiene C_5 come curva tripla, e come quadrupla la (unica) quadrisecante della curva. Questa quadrisecante non può appoggiarsi a D_2, altrimenti D_2 giacerebbe su quella superficie gobba, ciò che non può accadere, avendo il sig. Bertini dimostrato (l. c., pag. 318, n.° 10) che su essa non esiste alcuna conica. La superficie gobba taglia quindi D_2, fuori di C_5, in $2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 1$ punto, il che dice che vi è una, ed una sola, trisecante della curva appoggiata a D_2 e quindi giacente su F_4. Se questa retta si indica con g, è facile vedere che sopra F_4 non vi sono bisecanti della curva appoggiate a g; imaginando infatti un piano ruotante intorno a g, ed in ogni sua posizione congiungendo le due ulteriori intersezioni con C_5, si

(*) Clebsch, l. c., § 7.

(**) Cfr. Salmon-Fiedler, *Analyt. Geom. des Raumes*, Bd. II, 3ª ediz., 1880, pag. 141.

(***) *Sulle curve gobbe razionali del 5° ordine.* Collectanea Mathem. in memoriam D. Chelini, pag. 313.

(****) Bertini, l. c., p. 316.

ottiene una superficie gobba del 4° grado, che contiene g come retta tripla, e C_5 semplicemente, e che è quindi secata da D_2 in otto punti che sono tutti situati su g e su C_5, ciò che dimostra l'asserto. Di più le cinque rette di F_4 appoggiate a g non possono essere tutte zerosecanti della curva; si è veduto infatti (n.° 3) che le 10 zerosecanti di g non sono altro che le altre bisecanti (oltre g) delle 10 coppie che si possono formare colle cinque rette appoggiate a g; imaginando ciascuno dei 10 iperboloidi passanti per D_2 e per questi 10 quadrilateri aventi tutti la retta g comune, si vede che le 10 zerosecanti di g dovrebbero tutte bisecare la C_5. Ma se si imagina un quadrilatero contenente una delle secanti di g e tre delle sue zerosecanti, la C_5 seca l'iperboloide determinato da esso e da D_2 in $5+2\cdot 3=11$ punti, che è assurdo. Ciò porta a concludere che fra le cinque secanti di g una almeno, che indico con a, seca la curva in un punto; e come precedentemente si dimostra che le altre quattro secanti di g non possono tutte tagliare C_5. Ora se oltre alla retta a vi fosse una seconda retta a' appoggiata a g ed a C_5, mentre le tre altre rette secanti di g non secassero C_5, l'altra bisecante della coppia $(a\,a')$ ne sarebbe una zerocante, epperò imaginando il quadrilatero determinato da questa retta e da una delle tre rimanenti rette (zerosecanti di C_5) appoggiate a g, delle altre due rette del quadrilatero una dovrebbe essere almeno trisecante della curva, ciò che non può essere. Lo stesso si potrebbe dire se si supponesse che, oltre ad a, vi fosse più di un'altra retta (non però altre quattro, come si è notato sopra) appoggiata a g ed alla quintica. Dunque delle cinque rette appoggiate a g una è unisecante e quattro sono zerosecanti della curva. E formando i 10 soliti quadrilateri con queste cinque secanti di g e considerando gli iperboloidi corrispondenti passanti per D_2, si trova che delle dieci rette rimanenti quattro sono unisecanti e sei sono bisecanti della quintica. Imaginando allora due delle bisecanti di C_5 che si incontrano, per esse, per g, D_2 e C_5 passa una (sola) superficie del 3° ordine (*), epperò, siccome colle rette di F_4 si possono formare tre di tali sistemi, si vede che ogni C_5 si può, nel modo ora detto, ottenere in tre maniere diverse come parziale intersezione di F_4 con una superficie cubica passante per D_2 (**).

32. Reciprocamente se si indica con g una retta di F_4, e con m, m'

(*) Il sig. STURM nelle *Synth. Unters.*, etc., pag. 233 trova che $v_3=3$.

(**) Colla notazione data al n.° 12, se si chiama a la trisecante, b_1 una unisecante, e quindi b_2, b_3, b_4, b_5 le zerosecanti, sono c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15} unisecanti, e c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{34}, c_{35}, c_{45} bisecanti. I tre modi di generazione corrispondono alle tre paja $(c_{23}\,c_{45})$, $(c_{24}\,c_{35})$, $(c_{25}\,c_{34})$ gobbe fra loro; il pajo che completa la quaderna è $(a\,b_1)$.

due altre sue rette formanti un pajo, ma non appoggiate a g, per esse e per D_2 passa un sistema ∞^4 di superficie cubiche, ed una qualunque F_3 di esse seca ulteriormente F_4 in una linea C_5 del 5° ordine. Le due involuzioni quadratiche projettive determinate sopra g da un piano variabile intorno ad essa hanno (oltre al punto comune a g e D_2 che deve manifestamente essere escluso) tre elementi comuni, pei quali deve passare la C_5. La terza retta di F_3 posta nel piano $m\,m'$ non taglia D_2, sibbene taglia g, m, m', epperò seca la quintica in un punto solo; questa deve quindi avere complessivamente quattro punti sulle m, m'. Non possono però esservene più di due sopra alcuna di esse, altrimenti l'iperboloide determinato da D_2, g e da questa retta conterrebbe anche la quintica. La curva C_5 è dunque del rango $5 \cdot 8 - 2 \cdot 8 - 2 \cdot 8 = 8$, epperò è di genere 0. Data una retta g della F_4 si possono formare 15 paja come $(m\,m')$, epperò:

Esistono sulla superficie 16 *sistemi quattro volte infiniti di curve gobbe razionali del* 5° *ordine, ciascuno coordinato ad una retta della superficie, che è trisecante di ogni curva del sistema; ognuno dei* 16 *sistemi si scinde in altri* 15, *ognuno coordinato ad un pajo di rette zerosecanti della retta considerata.*

Si ha perciò $t_4 = 4$; e poichè (*) $u_4 = u_3 = 20$, sarà $f_4 = 16$, e quindi $v_4 = 5$; si è già detto invece che $v_3 = 3$.

33. *Curve gobbe del* 5° *ordine e di genere* 1. Queste curve furono studiate dal sig. R. Sturm nelle *Synth. Unters.*, etc. (pag. 208, 209, 211, 214-7, 233), dove egli ha trovato, fra le altre proprietà, che $v_3 = 4$ (pag. 233). Se C_5 è una tale curva posta sopra F_4, è noto (**) che la superficie gobba formata dalle sue trisecanti è del 5° grado, e contiene la quintica come doppia; essa è quindi tagliata da D_2 in 10 punti tutti appartenenti a C_5, epperò si conclude che sulla F_4 non esistono trisecanti della quintica. Di qui segue che non vi può essere sulla superficie più di una zerosecante della curva, chè se ve ne fossero due, imaginando un quadrilatero contenente queste due rette e l'iperboloide passante per esso e per D_2, si vedrebbe col solito metodo che delle altre due rette una dovrebbe essere almeno trisecante. Se si imaginano gli iperboloidi passanti per D_2 e per due quadrilateri gobbi non aventi in comune alcuna retta della superficie, lo stesso metodo fa vedere che sopra F_4

(*) Sturm, Giornale di Crelle-Borchardt, l. c., n.° 30.

(**) V. per es. Geiser, *Ueber die dreifachen Secanten einer algebraischer Raumcurve.* Collectanea Mathem., etc., pag. 301, e la fine del Capo IV.

vi sono almeno due rette (una per ciascuno dei due quadrilateri) bisecanti la curva, epperò, imaginando un quadrilatero in cui entrino queste due rette, delle altre due rette una deve essere zerosecante di C_5. È dunque dimostrato che sopra F_4 esiste una (sola) zerosecante, che dirò g_0, della quintica. Se si imagina dunque un iperboloide determinato da D_2 e da un quadrilatero in cui entri g_0, delle altre tre rette due saranno bisecanti, e le dirò g'_2, g''_2, ed una sarà unisecante e la dirò g_1, per cui una almeno delle g'_2, g''_2 segherà g_0, per es. la g'_2. Ora anche g''_2 deve tagliare g_0, ed invero, se ciò non fosse, le due rette g'_2, g''_2 si taglierebbero, ed imaginando un quadrilatero che le contenga, senza però contenere nè g_0 nè g_1, si avrebbe un'altra zerosecante oltre g_0. Pertanto, data sopra F_4 una quintica di genere 1, delle 16 rette della superficie una ne è zerosecante, le cinque rette ad essa appoggiate ne sono bisecanti, e le dieci rette rimanenti ne sono unisecanti. Imaginando una coppia di bisecanti e l'unisecante ad esse appoggiata, fra le ∞^4 superficie del 3° ordine passanti per C_5 ve ne è una sola contenente D_2 e le tre rette; una tale quintica si può dunque ottenere a questo modo in $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ maniere.

Reciprocamente se siano b_1, b_2 due rette gobbe della superficie ed a una loro secante comune, e sia F_3 una delle ∞^5 superficie del 3° ordine passanti per esse e per D_2, e sia C_5 l'ulteriore quintica comune alle due superficie, l'altra retta di F_4 che è bisecante della coppia $(b_1 b_2)$ è manifestamente zerosecante della quintica; epperò imaginando l'iperboloide determinato da D_2 e dal quadrilatero formato da a, b_1, b_2 e da questa retta, si vede che sulla curva $(a\, b_1\, b_2)$ vi sono cinque punti della quintica. Ma la terza retta di F_3 posta nel piano $a\, b_1$ è bisecante della curva, dunque su $(a\, b_1)$ vi sono tre punti della medesima, e così tre ve ne sono sopra $(a\, b_2)$, cioè a deve essere unisecante, e le b_1, b_2 bisecanti di C_5. La quintica dunque è del rango $5 \cdot 8 - 2 \cdot 8 - 2 \cdot 2 = 10$, epperò è di genere 1; le altre rette di F_4 si comportano nel modo sopra esposto. Dato un quadrilatero, la costruzione precedente si può fare in quattro modi, ed ogni quintica è coordinata, nel senso esposto, a dieci quadrilateri, quindi:

Esistono sulla superficie $\frac{4 \cdot 40}{10} = 16$ *sistemi cinque volte infiniti di curve gobbe del* 5° *ordine e di genere* 1, *ognuno coordinato ad una retta della superficie che è zerosecante di ogni curva del sistema, mentre le cinque rette appoggiate ad essa ne sono bisecanti, e le altre dieci ne sono unisecanti.*

Dunque $t_4 = 5$, e poichè (*) $u_3 = u_4 = 20$, sarà $f_4 = 15$, quindi $v_4 = 6$; si è già detto invece che $v_3 = 4$.

34. *Rappresentazione piana della superficie.* Lo studio delle curve gobbe del 5^0 ordine e di genere 1 situate sopra F_4 conduce tosto ad una trasformazione razionale dello spazio S in cui giace la F_4, dalla quale si deduce immediatamente la rappresentazione d'ordine minimo della superficie stessa sopra un piano. Infatti si vede agevolmente che le superficie del 4^0 ordine aventi in comune una conica doppia ed una quintica di genere 1 formano un sistema omaloidico, che può quindi servire ad una trasformazione del 4^0 ordine; è però più conveniente partire dalla trasformazione inversa, che è del 3^0 ordine (**).

Se in uno spazio Σ sia data una curva gobba Γ_5 del 5^0 ordine e di genere 1, ed un punto arbitrario 0, le superficie del 3^0 ordine Φ_3 passanti per Γ_5 e per 0 formano, come si è già notato, un sistema lineare tre volte infinito. Due qualunque di esse hanno in comune, oltre a Γ_5, una curva gobba razionale del 4^0 ordine Γ_4 passante per 0 e appoggiata in dieci punti a Γ_5 (***). Se quindi si considerano tre superficie Φ_3, due di esse si secano in una Γ_4, la quale taglia la terza in 12 punti, di cui dieci cadono su Γ_5, uno è 0, e quindi uno solo è variabile. Dunque *le superficie Φ_3 formano un sistema omaloidico e si possono quindi far corrispondere punto per punto ai piani di un secondo spazio S.* È chiaro che *alle rette di S corrispondono in Σ le quartiche razionali Γ_4.*

Cerchiamo la Jacobiana del sistema delle Φ_3; se si considera una superficie qualunque di questo sistema, fra le sue 27 rette è noto che ve ne sono cinque trisecanti della Γ_5, e poichè queste non incontrano le Φ_3 in punti variabili, ad esse corrispondono cinque punti posti nel piano corrispondente della Φ_3 nello spazio S. Il luogo di quelle rette è la superficie gobba H_5 luogo delle trisecanti di Γ_5, che, come si è già detto, è del 5^0 grado ed ha Γ_5 per curva doppia; questa superficie fa parte della Jacobiana delle Φ_3, ed il luogo dei punti corrispondenti alle sue generatrici è dunque una curva gobba C_5 dello spazio S, fondamentale per questo spazio, e, come Γ_5, del 5^0 ordine e di

(*) Sturm, Giornale di Crelle-Borchardt, l. c., n.° 30.

(**) Questa trasformazione presenta, come si vedrà, moltissima analogia con quella che fu studiata dal sig. Caporali nella Memoria: *Sulla superficie del 5° ordine dotata di una curva doppia del 5° ordine,* Annali di Matem. Serie II, t. VII, pag. 149. Di essa però si fa menzione, ch'io sappia, soltanto nella Memoria del prof. Cremona: *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen,* Math. Ann., Bd. IV, pag. 225.

(***) Sturm, *Synth. Unters.,* etc., pag. 216-7.

genere 1: essa è contenuta semplicemente dalle superficie del sistema omaloidico dello spazio S. È anche noto che fra le 27 rette di una Φ_3 ve ne sono due che non tagliano Γ_5; i piani che le projettano da 0 secano ulteriormente Φ_3 in due coniche, ciascuna delle quali taglia Γ_5 in cinque punti e passa per 0, e non incontra quindi le Φ_3 in punti variabili. A queste coniche corrispondono dunque in S due punti. Tutte le coniche analoghe formano un sistema semplicemente infinito, il cui luogo è una superficie K_3 che fa pure parte della Jacobiana delle Φ_3, e ad essa corrisponde in S una conica D_2 doppia per le superficie del rispettivo sistema omaloidico. È facile vedere che la K_3 non è altro che la (unica) superficie del sistema delle Φ_3 che ha in 0 un punto doppio; infatti una conica qualunque generatrice di K_3, secando Γ_5 in cinque punti e passando per 0, giace per intero su quella superficie di 3° ordine. Si può anche aggiungere una proprietà che verrà utilizzata fra poco. Delle sei rette di K_3 passanti pel punto doppio 0, cinque sono le corde di Γ_5 uscenti da 0, e la sesta, che indico con α, ne è una zerosecante. Imaginando dunque una qualunque superficie Φ_3, le sue due rette zerosecanti di Γ_5 non possono essere appoggiate ad alcuna delle prime cinque rette di K_3, epperò le ∞^1 coniche generatrici di K_3 devono tutte giacere in piani passanti per la sesta retta α.

Le superficie H_5 e K_3 formano insieme la intiera superficie Jacobiana delle Φ_3, che deve appunto essere dell'8° ordine. Lo spazio S non ha quindi altre curve fondamentali che la quintica semplice C_5 e la conica doppia D_2.

Poichè alle rette di S corrispondono in Σ le quartiche Γ_4, *ai piani di* Σ *corrispondono in* S *le superficie* F_4 *del 4° ordine aventi in comune la conica doppia* D_2 *e la quintica* C_5; queste curve hanno cinque punti comuni, ciò che risulta anche dalla trasformazione.

È anche facile vedere che la Jacobiana delle F_4, che deve essere del 12° ordine, è costituita dal piano della conica doppia contato due volte (e che corrisponde al punto 0), e dalla superficie gobba del 10° grado formata dalle rette che appoggiano in due punti alla C_5 ed in un punto a D_2 (e che corrisponde a Γ_5): essa è di genere 1, contiene la D_2 come quadrupla e la C_5 come tripla.

Alle rette di Σ corrispondono le cubiche gobbe appoggiate in tre punti a D_2, ed in cinque a C_5; esse sono le intersezioni delle superficie F_4 a due a due. Alle rette di Σ passanti per 0 corrispondono ∞^2 coniche che incontrano D_2 in un punto e C_5 in cinque; essi corrispondono rispettivamente ai punti in cui la retta per 0 taglia K_3 ed H_5. Ai piani di Σ passanti per 0 corrispondono le ∞^2 superficie cubiche passanti per D_2 e C_5. Alle rette di S

appoggiate a D_2 corrispondono in Σ le coniche cinquesecanti di Γ_5; alle rette che appoggiano a D_2 e C_5 corrispondono le corde di Γ_5, ecc.

35. La rappresentazione piana di una superficie F_4 è fornita dalla corrispondenza univoca stabilita nel paragrafo precedente fra i suoi punti ed i punti del suo piano corrispondente Π di Σ. Le imagini delle sezioni piane sono dunque le sezioni di Π col sistema delle Φ_3, cioè sono curve del 3° ordine passanti per cinque punti fissi (i punti comuni a Π ed a Γ_5); e poichè le sezioni piane di F_4 sono curve di genere 1, questa è la rappresentazione minima di F_4. Le 16 rette della superficie hanno manifestamente per imagini la conica contenente i cinque punti fondamentali, i cinque punti fondamentali stessi (imagini di una quintupla avente per cinquesecante la retta rappresentata dalla conica precedente), e le loro dieci congiungenti a due a due.

L'imagine della conica doppia D_2 è l'intersezione di Π con K_3, ed è quindi una curva del 3° ordine passante pei punti fondamentali, come è ben naturale, essendo D_2 una sezione piana di F_4. Un punto di D_2 è rappresentato da una coppia di punti di questa cubica, cioè dai due punti in cui la conica corrispondente in Σ (e generatrice di K_3) seca Π; e poichè i piani di queste coniche passano per la retta α di K_3, *le rette che congiungono le coppie di punti corrispondenti ai punti di D_2 passano per uno stesso punto dell'imagine di D_2* (il punto comune a Π ed α) (*); le rette di questo fascio corrispondono per tal modo univocamente ai punti di D_2.

Se si imaginano due coniche generatrici di K_3, esse non hanno, oltre 0, altri punti comuni, e ciascuna si appoggia in cinque punti alla Γ_5; per esse e per Γ_5 passa quindi un fascio di superficie del 3° ordine (appartenenti al sistema omaloidico). Tagliando col piano Π si ha l'altra proprietà pure dovuta a Clebsch (l. c., § 4):

Due coppie qualunque di punti che siano imagini di due punti della conica doppia formano insieme coi cinque punti fondamentali della rappresentazione i nove punti base di un fascio di cubiche, che tutte appartengono al sistema delle imagini delle sezioni piane.

Non credo opportuno di proseguire lo studio di questa rappresentazione, che è svolto ampiamente nel lavoro di Clebsch.

(*) Clebsch, l. c., § 4.

§ 5. Quaderne di quadrilateri gobbi formati colle 16 rette. Sistemi di piani tritangenti contenenti tutte le rette della superficie.

36. Dirò ν-edro il sistema di ν piani tritangenti di F_4 contenenti un numero 2ν di rette tutte distinte della superficie. In questo paragrafo non occorrerà che la considerazione dei diedri e degli ottaedri.

Esistono tre specie di diedri: nella 1^a specie ogni retta dell'un piano taglia una retta dell'altro: nella 2^a specie una sola retta di un piano taglia una retta dell'altro piano; nella 3^a specie nessuna retta dell'un piano taglia rette dell'altro.

Le due coniche contenute nei due piani di un diedro di 1^a specie hanno due punti comuni. Poichè ogni piano appartiene a 4 di tali diedri, *vi sono in tutto* $\frac{4 \cdot 40}{2} = 80$ *diedri di 1^a specie.* Se sono $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ i due piani del diedro e si suppone che si taglino fra loro a_1, a_2 e b_1, b_2, si ottiene il diedro *conjugato* formato dai piani $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, che è pure di 1^a specie; e si ha così il quadrilatero gobbo $\left|\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}\right|$. Se si imaginano le due coniche poste nei piani $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ e le due poste nei piani $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, tanto le prime che le seconde, avendo due punti comuni, giacciono in una quadrica passante per D_2. E poichè una conica posta in un piano tritangente taglia D_2 nei punti comuni a questa e alle due rette del suo piano, ne segue che le due prime coniche e le altre due formano due quartiche di 1^a specie aventi in comune con D_2 i medesimi quattro punti; siccome poi esse non hanno altri punti comuni, le due quadriche suddette devono toccarsi lungo D_2, ciò che si riconosce del resto anche direttamente (*).

Le due coniche contenute nei piani di un diedro di 2^a specie hanno un solo punto comune, e formano insieme una quartica di 2^a specie. Ogni piano appartiene a 24 di tali diedri, per cui *il numero totale dei diedri di 2^a specie è* $\frac{24 \cdot 40}{2} = 480$.

(*) Se quindi sono $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 0$ le equazioni dei piani $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$ quelle dei piani $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, e sono $\Pi_{12} = 0$, $\Sigma_{12} = 0$ le equazioni delle due quadriche, l'equazione della superficie F_4 si può scrivere:

$$\pi_1 \pi_2 \Sigma_{12} = \sigma_1 \sigma_2 \Pi_{12},$$

e ciò è possibile in 40 modi, corrispondentemente ai 40 quadrilateri gobbi.

Le due coniche poste nei piani di un diedro di 3^a specie non hanno punti comuni. Ogni piano appartiene a tre di questi diedri, quindi *il numero totale dei diedri di 3^a specie è* $\frac{3 \cdot 40}{2} = 60$. Vi sono dunque in tutto 620 diedri, ed ogni piano tritangente ne dà 31 (*).

37. Considero in particolare i diedri della 1 specie, che, come si vede, sono in intima relazione coi quadrilateri gobbi. Siccome talvolta sarà utile verificare i risultati ottenuti per mezzo della notazione data al n.° 12, così scrivo qui appresso con quella notazione i 40 quadrilateri, apponendovi un numero d'ordine per comodo di denominazione:

$$1 = \begin{vmatrix} a & b_1 \\ b_2 & c_{12} \end{vmatrix}, \quad 2 = \begin{vmatrix} a & b_1 \\ b_3 & c_{13} \end{vmatrix}, \quad 3 = \begin{vmatrix} a & b_1 \\ b_4 & c_{14} \end{vmatrix}, \quad 4 = \begin{vmatrix} a & b_1 \\ b_5 & c_{15} \end{vmatrix},$$

$$5 = \begin{vmatrix} a & b_2 \\ b_3 & c_{23} \end{vmatrix}, \quad 6 = \begin{vmatrix} a & b_2 \\ b_4 & c_{24} \end{vmatrix}, \quad 7 = \begin{vmatrix} a & b_2 \\ b_5 & c_{25} \end{vmatrix}. \quad 8 = \begin{vmatrix} a & b_3 \\ b_4 & c_{34} \end{vmatrix},$$

$$9 = \begin{vmatrix} a & b_3 \\ b_5 & c_{35} \end{vmatrix}, \quad 10 = \begin{vmatrix} a & b_4 \\ b_5 & c_{45} \end{vmatrix}, \quad 11 = \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{13} & c_{45} \end{vmatrix}, \quad 12 = \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{14} & c_{35} \end{vmatrix},$$

$$13 = \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{15} & c_{34} \end{vmatrix}, \quad 14 = \begin{vmatrix} b_1 & c_{13} \\ c_{14} & c_{25} \end{vmatrix}, \quad 15 = \begin{vmatrix} b_1 & c_{13} \\ c_{15} & c_{24} \end{vmatrix}, \quad 16 = \begin{vmatrix} b_1 & c_{14} \\ c_{15} & c_{23} \end{vmatrix},$$

$$17 = \begin{vmatrix} b_2 & c_{12} \\ c_{23} & c_{45} \end{vmatrix}, \quad 18 = \begin{vmatrix} b_2 & c_{12} \\ c_{24} & c_{35} \end{vmatrix}, \quad 19 = \begin{vmatrix} b_2 & c_{12} \\ c_{25} & c_{34} \end{vmatrix}, \quad 20 = \begin{vmatrix} b_2 & c_{23} \\ c_{24} & c_{15} \end{vmatrix},$$

$$21 = \begin{vmatrix} b_2 & c_{23} \\ c_{25} & c_{14} \end{vmatrix}, \quad 22 = \begin{vmatrix} b_2 & c_{24} \\ c_{25} & c_{13} \end{vmatrix}, \quad 23 = \begin{vmatrix} b_3 & c_{13} \\ c_{23} & c_{45} \end{vmatrix}, \quad 24 = \begin{vmatrix} b_3 & c_{13} \\ c_{34} & c_{25} \end{vmatrix},$$

$$25 = \begin{vmatrix} b_3 & c_{13} \\ c_{35} & c_{24} \end{vmatrix}, \quad 26 = \begin{vmatrix} b_3 & c_{23} \\ c_{34} & c_{15} \end{vmatrix}, \quad 27 = \begin{vmatrix} b_3 & c_{23} \\ c_{35} & c_{14} \end{vmatrix}, \quad 28 = \begin{vmatrix} b_3 & c_{34} \\ c_{35} & c_{12} \end{vmatrix},$$

$$29 = \begin{vmatrix} b_4 & c_{14} \\ c_{24} & c_{35} \end{vmatrix}, \quad 30 = \begin{vmatrix} b_4 & c_{14} \\ c_{34} & c_{25} \end{vmatrix}, \quad 31 = \begin{vmatrix} b_4 & c_{14} \\ c_{45} & c_{23} \end{vmatrix}, \quad 32 = \begin{vmatrix} b_4 & c_{24} \\ c_{34} & c_{15} \end{vmatrix},$$

(*) Queste tre specie di diedri godono, come si vedrà anche in appresso, di molte proprietà del tutto analoghe a quelle delle tre specie di triedri che si presentano nella superficie di 3^o ordine, e che furono considerate dal prof. Bertini nella sua Memoria che ha per titolo: *Contribuzione alla teoria delle* 27 *rette e dei* 45 *piani tritangenti di una superficie di 3^o ordine,* Annali di Matem., Serie II, t. XII, § 6.

$$33 = \begin{vmatrix} b_4 & c_{24} \\ c_{45} & c_{13} \end{vmatrix}, \quad 34 = \begin{vmatrix} b_4 & c_{34} \\ c_{45} & c_{12} \end{vmatrix}, \quad 35 = \begin{vmatrix} b_5 & c_{15} \\ c_{25} & c_{34} \end{vmatrix}, \quad 36 = \begin{vmatrix} b_5 & c_{15} \\ c_{35} & c_{24} \end{vmatrix},$$

$$37 = \begin{vmatrix} b_5 & c_{15} \\ c_{45} & c_{23} \end{vmatrix}, \quad 38 = \begin{vmatrix} b_5 & c_{25} \\ c_{35} & c_{14} \end{vmatrix}, \quad 39 = \begin{vmatrix} b_5 & c_{25} \\ c_{45} & c_{13} \end{vmatrix}, \quad 40 = \begin{vmatrix} b_5 & c_{35} \\ c_{45} & c_{12} \end{vmatrix},$$

Riguardo ai quadrilateri si può osservare la relazione seguente molto semplice e pressochè evidente: rispetto ad un quadrilatero qualunque gli altri 39 si distribuiscono in tre gruppi di 15, 12, 12 rispettivamente: i quadrilateri del primo gruppo hanno col dato nessun piano (e nessuna retta) in comune; quelli del secondo gruppo hanno col dato un piano (e due rette) in comune; quelli del terzo gruppo hanno col dato nessun piano (ed una retta) in comune.

38. Si dirà che quattro quadrilateri formano una *quaderna,* quando essi contengano insieme tutte le rette della superficie; è chiaro che in una quaderna entrano 8 diedri di 1^a specie e 16 piani.

Se $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}$ è un quadrilatero, ogni retta a deve secare, oltre le sue due laterali, altre tre rette; e si hanno così $3 \cdot 4 = 12$ rette tutte distinte, che colle quattro a dànno tutte le rette della superficie. Epperò:

Dato un quadrilatero gobbo qualunque, ciascuna delle dodici rette escluse taglia una ed una sola delle sue rette.

Su questa semplicissima proprietà si può dire che è fondato tutto ciò che segue sulle quaderne. È utile intanto notare altre proprietà che seguono da essa e che saranno pure utilissime in seguito. Se si hanno tre quadrilateri contenenti dodici rette tutte distinte della superficie, le quattro rette rimanenti formano pure un quadrilatero; infatti ognuna di queste rette seca una retta in ciascuno dei tre quadrilateri, e deve quindi secarne due delle escluse.

Se si suppongono dati due quadrilateri

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

contenenti otto rette distinte, è facile vedere che sono possibili due soli casi: che per es. ogni retta a_i tagli la retta *omologa* b_i; oppure che le a_1, a_2 taglino rispettivamente le b_1, b_2, e invece le a_3, a_4 taglino rispettivamente le b_4, b_3. Nel primo caso è chiaro che i due quadrilateri si compongono nella biquadrupla $\begin{vmatrix} a_1 & b_3 & b_2 & a_4 \\ b_4 & a_2 & a_3 & b_1 \end{vmatrix}$. Reciprocamente, data una biquadrupla, colle sue rette si possono formare sei quadrilateri, che si dividono in tre coppie in guisa che ogni coppia contiene tutte le rette della biquadrupla, e i due suoi quadrilateri sono sempre nelle condizioni del primo caso. Nel secondo caso quindi i due quadrilateri non si possono mai comporre in una biquadrupla.

39. Se i due piani $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ formano un diedro di 1ª specie, le due paja $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ di rette formano due coniche di uno stesso sistema, epperò quei due piani toccano un medesimo cono di Kummer. Per cui in due quadrilateri che siano nelle condizioni del primo dei due casi considerati al numero precedente, i quattro piani orizzontali sono tangenti ad uno stesso cono di Kummer, ed i quattro piani verticali ad un altro; nel secondo caso invece i soli quattro piani orizzontali hanno questa proprietà. Avendosi pertanto una quaderna di quadrilateri è sempre possibile scriverla in modo che gli otto piani orizzontali (per es.) passino per uno stesso punto di Kummer toccandone il cono rispettivo.

Si è dimostrato al n.° 16 che i 40 piani tritangenti si possono distribuire in cinque angoli ottaedri, di cui ciascuno contiene tutte le 16 rette; colla notazione solita essi sono i seguenti:

a	b_1	a	b_2	a	b_3	a	b_4	a	b_5
b_2	c_{12}	b_1	c_{12}	b_1	c_{13}	b_1	c_{14}	b_1	c_{15}
b_3	c_{13}	b_3	c_{23}	b_2	c_{23}	b_2	c_{24}	b_2	c_{25}
b_4	c_{14}	b_4	c_{24}	b_4	c_{34}	b_3	c_{34}	b_3	c_{35}
b_5	c_{15}	b_5	c_{25}	b_5	c_{35}	b_5	c_{45}	b_4	c_{45}
c_{23}	c_{45}	c_{13}	c_{45}	c_{12}	c_{45}	c_{12}	c_{35}	c_{12}	c_{34}
c_{24}	c_{35}	c_{14}	c_{35}	c_{14}	c_{25}	c_{13}	c_{25}	c_{13}	c_{24}
c_{25}	c_{34}	c_{15}	c_{34}	c_{15}	c_{24}	c_{15}	c_{23}	c_{14}	c_{23}

40. Si vuole ora cercare quante e quali specie di quaderne si possono formare. Se

a_1	b_1	a_2	b_2
c_1	d_1	c_2	d_2

sono due quadrilateri contenenti otto rette distinte, e si suppone che si taglino due rette rappresentate da una stessa lettera, essi si compongono in una biquadrupla, e le otto rette rimanenti si dispongono, in tre maniere diverse, in una coppia di quadrilateri pure del tipo scritto; i due quadrilateri appartengono dunque intanto a queste tre quaderne. Per vederne la natura, si indichi con a_3 una delle altre due secanti di a_1 (oltre b_1, c_1, a_2): le due coppie $(b_1\, a_3)$, $(c_1\, a_3)$ hanno ciascuna un'altra secante oltre alla a_1 ed è facile vedere che nessuna di esse è contenuta nei quadrilateri dati.

Infatti poichè nei quadrilateri $\left|\begin{array}{cc|cc} a_1 & a_2 & a_1 & b_1 \\ c_1 & c_2 & a_2 & b_2 \end{array}\right|$ la a_3 seca già la retta a_1, essa non può nel quadrilatero $\left|\begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{array}\right|$ secare nessuna delle rette a_2, b_2, c_2, e segherà quindi la retta d_2. Allora se si considera per es. la coppia $(b_1\, a_3)$, l'altra bisecante non può essere c_1, perchè questa non seca b_1, nè d_1 poichè a_3 nel primo quadrilatero seca già a_1, nè alcuna delle a_2, b_2, c_2 perchè a_3 nel secondo quadrilatero seca d_2, nè d_2 perchè questa non seca b_1. Siano dunque b_3 e c_3 quelle due rette; volendo allora completare il quadrilatero contenente le rette c_3, a_3, b_3, la quarta retta deve essere una delle rette escluse, come si dimostra con un metodo analogo al precedente, e sia d_3, in modo da avere il quadrilatero $\left|\begin{array}{cc} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{array}\right|$ le cui rette secano quelle del primo rappresentate dalle stesse lettere. Le quattro rette rimanenti formano un quadrilatero che dirò $\left|\begin{array}{cc} a_4 & b_4 \\ c_4 & d_4 \end{array}\right|$, e siccome questo si compone col precedente in una biquadrupla, si può supporre che le rette dell'uno taglino quelle dell'altro rappresentate dalle stesse lettere. Si ha così una quaderna i cui piani orizzontali passano per un medesimo punto di Kummer, e i verticali per un altro, quaderna che dirò *di 1^a specie.*

Tornando ai due quadrilateri dati, per formare con essi altre quaderne, si deve porre la a_3 in un quadrilatero con una delle sue secanti b_3, c_3 e colla terza sua secante k_1 appoggiata manifestamente a d_1. Ponendovi le rette b_3, k_1 ho la terna (incompleta) $\left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \\ c_1 & d_1 & c_2 & d_2 & k_1 & \end{array}\right|$, e la quarta retta del terzo quadrilatero, che non è contenuta nei primi due, sia m.

Allora le quattro rette rimanenti formano un quadrilatero, che col terzo si compone in una biquadrupla, e che si può quindi disporre in modo che le sue rette seghino le rette rispettivamente omologhe, per così dire, del terzo. Si ottiene a questo modo una quaderna i cui piani orizzontali passano per un punto di Kummer, i quattro primi verticali per un altro, e i quattro ultimi verticali per un terzo. Una tale quaderna si dirà *di 2^a specie.* Se nel terzo quadrilatero si pone a_3 con k_1, c_3 si ottiene analogamente una quaderna di 2^a specie, salvo che i piani formanti un angolo ottaedro sono i verticali. È chiaro che non si hanno altre quaderne a cui appartengano i due quadrilateri dati.

41. Siano ora invece

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{matrix}\Bigg|$$

due quadrilateri aventi otto rette distinte, secantisi quando sono rappresentate dalle stesse lettere, e posti quindi nel secondo dei casi considerati nel n.° 38. Se a_3, a_4 sono le altre due secanti di a_1, le due coppie $(b_1 a_3)$, $(b_1 a_4)$ hanno ciascuna una seconda bisecante oltre ad a_1, e come nel numero precedente si dimostra che queste due rette non sono contenute nei due quadridrilateri dati; si indichino con b_3, b_4 queste rette e si consideri la quaderna (incompleta) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} a_3 & b_3 \\ & \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} a_4 & b_4 \\ & \end{matrix} \Bigg|$. Siccome nel quadrilatero $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ la retta a_3 taglia a_1, così nel secondo dei quadrilateri dati la a_3 non può tagliare nessuna delle a_2, b_2, epperò segherà una delle c_2, d_2; analogamente la a_4 deve secare una delle c_2, d_2, ed essendo permesso di scambiare fra loro le a_3, a_4 (purchè si scambino anche le b_3, b_4), si può supporre per es. che a_3 tagli d_2, e quindi a_4 tagli c_2, epperò che b_3 seghi c_2 e b_4 seghi d_2. Allora a_3 ha ancora due secanti e dicendole per un istante p e q, la retta che completa il quadrilatero contenente le rette a_3, p, q deve essere la b_2 la quale non seca alcuna delle altre tre secanti a_1, b_3, d_2 di a_3. Dunque nel quadrilatero $\begin{vmatrix} a_3 & p \\ q & b_2 \end{vmatrix}$ la c_1, non secando nè a_3 nè b_2, dovrà secare una delle p, q che ora dirò c_3. Il quadrilatero $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & \end{vmatrix}$ è completato da una retta che deve essere fra le escluse, come si vede col solito metodo, e si ottiene quindi una quaderna tale che le rette del primo quadrilatero secano le rette omologhe del terzo. Gli otto piani orizzontali passano dunque per uno stesso punto di Kummer, e lo stesso accade dei quattro piani verticali del primo e del terzo quadrilatero, laonde i quattro piani verticali del secondo e del quarto dovranno passare per un terzo punto di Kummer, e la quaderna è quindi di 2^a specie. Sia essa la seguente:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} a_4 & b_4 \\ c_4 & d_4 \end{matrix} \Bigg| . \qquad (1)$$

Nel primo quadrilatero la c_4 non può tagliare nè a_1 nè b_1 perchè queste nel quarto tagliano rispettivamente le a_4, b_4, dunque c_4 taglia una delle c_1, d_1; il quadrilatero $\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix}$ mostra quindi che c_4 nel terzo quadrilatero deve tagliare o la a_3, o la b_3. Ora c_4 non può tagliare c_1, altrimenti nei due quadrilateri estremi si segherebbero le rette omologhe, e la quaderna sarebbe di 1ª specie; quindi nel quadrilatero $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$ la retta c_4 taglia a_3.

Per formare altre quaderne a cui appartengano i due quadrilateri dati si può porre nel terzo quadrilatero la c_4 colle a_3, c_3 in modo da avere la quaderna (incompleta) $\left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 & a_4 & b_4 \\ c_1 & d_1 & d_2 & c_2 & c_4 & & & \end{array}\right|$. La quarta retta del terzo quadrilatero non può essere che la d_4, come si vede facilmente considerando una per una tutte le altre rette alla solita maniera; infine la a_4, non potendo nel terzo quadrilatero della quaderna (1) tagliare le a_3, b_3, deve tagliare una delle c_3, d_3; ma nel quadrilatero $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$ taglia già a_1, dunque essa deve tagliare d_3, epperò b_4 deve tagliare c_3. Si ha dunque anche la quaderna

$$\left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 & a_4 & b_4 \\ c_1 & d_1 & d_2 & c_2 & c_4 & d_4 & d_3 & c_3 \end{array}\right|, \tag{2}$$

in cui gli otto piani orizzontali, che sono ancora quelli della (1), passano per un medesimo punto di Kummer. Per giudicare dei piani verticali basta confrontare la quaderna (2) colla (1); i piani verticali dei due primi quadrilateri di (2) passano intanto per punti di Kummer diversi; poi nella (1) i piani $(a_3\, c_3)$, $(b_3\, d_3)$ appartenevano allo stesso cono di Kummer che i piani $(a_1\, c_1)$, $(b_1\, d_1)$, epperò i piani $(a_3\, c_4)$, $(b_3\, d_4)$ del terzo quadrilatero di (2) apparterranno ad un altro cono, avendo rispettivamente con quelli in comune una retta della superficie; analogamente i piani $(a_3\, c_4)$, $(b_3\, d_4)$ appartengono a coni diversi dei piani $(a_2\, d_2)$, $(b_2\, c_2)$, e lo stesso dicasi dei piani $(a_4\, d_3)$, $(b_4\, c_3)$. Dunque gli otto piani verticali di (2) passano a due a due (due appartenenti ad un medesimo quadrilatero) per gli altri quattro punti di Kummer oltre a quello per cui passano tutti i piani orizzontali. Una quaderna siffatta si dirà *di 3ª specie.*

I due quadrilateri dati non appartengono ad altre quaderne; infatti in caso contrario nel terzo quadrilatero la a_3 dovrebbe essere accompagnata dalle

due secanti c_3, c_4 e si avrebbe la terna (incompleta) $\left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & c_3 \\ c_1 & d_1 & d_2 & c_2 & c_4 & \end{array}\right|$.
Ora delle cinque secanti a_1, d_2, b_3, c_3, c_4 di a_3 la retta b_2 non taglia nè a_1, nè d_2, nè b_3, epperò deve tagliare c_3 e c_4, cioè deve completare il quadrilatero $\begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ c_4 & \end{vmatrix}$; quella terna (incompleta) non dà dunque luogo a quaderne. Si ottiene pertanto il notevole risultato:

Le quaderne di quadrilateri gobbi sono di tre specie: i 16 *piani che compajono in una quaderna di 1ª specie si spezzano in due angoli ottaedri aventi i loro vertici in due punti di Kummer; i* 16 *che compajono in una quaderna di 2ª specie si spezzano in un angolo ottaedro e in due angoli tetraedri aventi i loro vertici in tre punti di Kummer; i* 16 *che compajono in una quaderna di 3ª specie si spezzano in un angolo ottaedro avente per vertice un punto di Kummer e in quattro angoli diedri, i cui spigoli passano ordinatamente pei quattro rimanenti punti di Kummer.*

Appare quindi come queste quaderne sono in intima relazione coi cinque punti di Kummer.

42. Vediamo a quante quaderne appartiene un quadrilatero qualunque $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}$, dal che sarà facile dedurre quante quaderne di ciascuna specie esistono. La retta a_1 ha, oltre alle b_1 e c_1, altre tre secanti, di cui una sia a_2; la coppia $(b_1 a_2)$ ha una seconda bisecante, che dico b_2, oltre alla a_1, e così la coppia $(c_1 a_2)$ ha una seconda bisecante che dico c_2; le rette c_2, a_2, b_2 determinano un quadrilatero, le cui rette tagliano le rette omologhe del dato; laonde questa coppia di quadrilateri appartiene a tre quaderne, una di 1ª specie e due di 2ª. Oltre alle tre rette a_1, b_2, c_2 la retta a_2 è tagliata da due altre rette m, n, e le rette m, a_2, b_2; n, a_2, b_2 determinano due quadrilateri di cui siano m_1, n_1 le quarte rette. Il primo di essi, cioè $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ m & m_1 \end{vmatrix}$, mostra che la m non può tagliare nè a_1 nè b_1, quindi m nel quadrilatero dato deve tagliare una delle c_1, d_1; ma non può tagliare c_1 perchè la coppia $(c_1 a_2)$ ha già per bisecanti le a_1, c_2, dunque m taglia d_1, ed m_1 taglia c_1; analogamente n seca d_1, ed n_1 seca c_1. Le due coppie di quadrilateri $\left|\begin{array}{cc|cc} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 & m & m_1 \end{array}\right|$, $\left|\begin{array}{cc|cc} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 & n & n_1 \end{array}\right|$ che appartengono al secondo dei casi considerati nel n. 38, dànno quindi luogo ciascuna a due quaderne, una di 2ª e l'altra di 3ª specie. Ponendo c_2 in luogo

di b_2 si hanno altre quattro quaderne, due di 2^a e due di 3^a specie. Cioè *un quadrilatero qualunque appartiene ad* 11 *quaderne, di cui una è di 1^a specie, sei sono di 2^a e quattro sono di 3^a*. Epperò si conclude:

Esistono in tutto 110 *quaderne, di cui* 10 *sono di 1^a specie ed ognuna è individuata da un suo quadrilatero qualunque;* 60 *sono di 2^a specie e* 40 *sono di 3^a.*

Le quaderne di 1^a specie corrispondono, come si riconoscerà anche in seguito, per la superficie del 3^o ordine alle 40 terne di coppie di triedri conjugati, di cui ognuna è determinata da una sua coppia qualunque, e che furono considerate per la prima volta da Steiner (*) e studiate poscia dal prof. Cremona nella Nota: *Sulle ventisette rette di una superficie del terzo ordine* (Rendiconti Istit. Lomb., Serie II, vol. III, 24 marzo 1870) ed ultimamente dal prof. Bertini nei primi quattro paragrafi della Memoria citata. Gli enneaedri di 1^a specie considerati in questi due lavori hanno per corrispondenti nella F_4 i cinque ottaedri di cui ho dato il prospetto al n.° 39.

Do qui la tabella delle 110 quaderne di quadrilateri, apponendovi un numero d'ordine per comodo di denominazione; i quattro numeri posti fra le parentesi sono i numeri d'ordine dei quattro quadrilateri contenuti nella quaderna, secondo lo specchio del n.° 37; infine i numeri scritti con cifre romane indicano la specie delle quaderne stesse.

$$(1)\qquad \left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_1 & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_2 & c_{12} & c_{23} & c_{45} & c_{24} & c_{35} & c_{25} & c_{34} \end{array}\right| = (1,\ 23,\ 29,\ 35) \qquad \mathrm{I}$$

$$(2)\qquad \left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_1 & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_2 & c_{12} & c_{23} & c_{45} & c_{34} & c_{25} & c_{35} & c_{24} \end{array}\right| = (1,\ 23,\ 30,\ 36) \qquad \mathrm{II}$$

$$(3)\qquad \left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_1 & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{24} & b_5 & c_{25} \\ b_2 & c_{12} & c_{23} & c_{45} & c_{34} & c_{15} & c_{35} & c_{14} \end{array}\right| = (1,\ 23,\ 32,\ 38) \qquad \mathrm{II}$$

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_1 & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_2 & c_{12} & c_{34} & c_{25} & c_{24} & c_{35} & c_{45} & c_{23} \end{array}\right| = (1,\ 24,\ 29,\ 37) \qquad \mathrm{II}$$

$$(5)\qquad \left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_1 & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_2 & c_{12} & c_{34} & c_{25} & c_{45} & c_{23} & c_{35} & c_{24} \end{array}\right| = (1,\ 24,\ 31,\ 36) \qquad \mathrm{III}$$

(*) *Gesammelte Werke,* Berlin, 1882, Bd. II, pag. 665. Queste terne sono però tutte di una medesima specie.

(6)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_2 & c_{12} & c_{35} & c_{24} & c_{34} & c_{25} & c_{45} & c_{23} \end{array}\right\rvert = (1,\ 25,\ 30,\ 37)$	III
(7)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_2 & c_{12} & c_{35} & c_{24} & c_{45} & c_{23} & c_{25} & c_{34} \end{array}\right\rvert = (1,\ 25,\ 31,\ 35)$	II
(8)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_3 & c_{23} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{25} \\ b_2 & c_{12} & c_{34} & c_{15} & c_{24} & c_{35} & c_{45} & c_{13} \end{array}\right\rvert = (1,\ 26,\ 29,\ 39)$	II
(9)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_3 & c_{23} & b_4 & c_{24} & b_5 & c_{25} \\ b_2 & c_{12} & c_{34} & c_{15} & c_{45} & c_{13} & c_{35} & c_{14} \end{array}\right\rvert = (1,\ 26,\ 33,\ 38)$	III
(10)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_3 & c_{23} & b_4 & c_{24} & b_5 & c_{25} \\ b_2 & c_{12} & c_{35} & c_{14} & c_{34} & c_{15} & c_{45} & c_{13} \end{array}\right\rvert = (1,\ 27,\ 32,\ 39)$	III
(11)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_3 & c_{23} & b_4 & c_{24} & b_5 & c_{15} \\ a_2 & c_{12} & c_{35} & c_{14} & c_{45} & c_{13} & c_{25} & c_{34} \end{array}\right\rvert = (1,\ 27,\ 33,\ 35)$	II
(12)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_3 & c_{13} & c_{23} & c_{45} & c_{24} & c_{35} & c_{25} & c_{34} \end{array}\right\rvert = (2,\ 17,\ 29,\ 35)$	II
(13)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_3 & c_{13} & c_{23} & c_{45} & c_{34} & c_{25} & c_{35} & c_{24} \end{array}\right\rvert = (2,\ 17,\ 30,\ 36)$	I
(14)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_4 & c_{24} & b_5 & c_{25} \\ b_3 & c_{13} & c_{23} & c_{45} & c_{34} & c_{15} & c_{35} & c_{14} \end{array}\right\rvert = (2,\ 17,\ 32,\ 38)$	II
(15)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_3 & c_{13} & c_{24} & c_{35} & c_{34} & c_{25} & c_{45} & c_{23} \end{array}\right\rvert = (2,\ 18,\ 30,\ 37)$	II
(16)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_3 & c_{13} & c_{24} & c_{35} & c_{45} & c_{23} & c_{25} & c_{34} \end{array}\right\rvert = (2,\ 18,\ 31,\ 35)$	III
(17)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_3 & c_{13} & c_{25} & c_{34} & c_{24} & c_{35} & c_{45} & c_{23} \end{array}\right\rvert = (2,\ 19,\ 29,\ 37)$	III
(18)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_3 & c_{13} & c_{25} & c_{34} & c_{45} & c_{23} & c_{35} & c_{24} \end{array}\right\rvert = (2,\ 19,\ 31,\ 36)$	II
(19)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{23} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{35} \\ b_3 & c_{13} & c_{24} & c_{15} & c_{34} & c_{25} & c_{45} & c_{12} \end{array}\right\rvert = (2,\ 20,\ 30,\ 40)$	II
(20)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{23} & b_4 & c_{34} & b_5 & c_{25} \\ b_3 & c_{13} & c_{24} & c_{15} & c_{45} & c_{12} & c_{35} & c_{14} \end{array}\right\rvert = (2,\ 20,\ 34,\ 38)$	III

(21)	$\left\| \begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{23} & b_4 & c_{24} & b_5 & c_{35} \\ b_3 & c_{13} & c_{25} & c_{14} & c_{34} & c_{15} & c_{45} & c_{12} \end{array} \right\| = (2,\ 21,\ 32,\ 40)$	III
(22)	$\left\| \begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{23} & b_4 & c_{34} & b_5 & c_{15} \\ b_3 & c_{13} & c_{25} & c_{14} & c_{45} & c_{12} & c_{35} & c_{24} \end{array} \right\| = (2,\ 21,\ 34,\ 36)$	II
(23)	$\left\| \begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_3 & c_{13} & b_5 & c_{15} \\ b_4 & c_{14} & c_{23} & c_{45} & c_{34} & c_{25} & c_{35} & c_{24} \end{array} \right\| = (3,\ 17,\ 24,\ 36)$	II
(24)	$\left\| \begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_3 & c_{13} & b_5 & c_{15} \\ b_4 & c_{14} & c_{23} & c_{45} & c_{35} & c_{24} & c_{25} & c_{34} \end{array} \right\| = (3,\ 17,\ 25,\ 35)$	III
(25)	$\left\| \begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_3 & c_{13} & b_5 & c_{15} \\ b_4 & c_{14} & c_{24} & c_{35} & c_{23} & c_{45} & c_{25} & c_{34} \end{array} \right\| = (3,\ 18,\ 23,\ 35)$	II
(26)	$\left\| \begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_3 & c_{13} & b_5 & c_{15} \\ b_4 & c_{14} & c_{24} & c_{35} & c_{34} & c_{25} & c_{45} & c_{23} \end{array} \right\| = (3,\ 18,\ 24,\ 37)$	I
(27)	$\left\| \begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_3 & c_{23} & b_5 & c_{25} \\ b_4 & c_{14} & c_{24} & c_{35} & c_{34} & c_{15} & c_{45} & c_{13} \end{array} \right\| = (3,\ 18,\ 26,\ 39)$	II
(28)	$\left\| \begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_3 & c_{13} & b_5 & c_{15} \\ b_4 & c_{14} & c_{25} & c_{34} & c_{23} & c_{45} & c_{35} & c_{24} \end{array} \right\| = (3,\ 19,\ 23,\ 36)$	III
(29)	$\left\| \begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_3 & c_{13} & b_5 & c_{15} \\ b_4 & c_{14} & c_{25} & c_{34} & c_{35} & c_{24} & c_{45} & c_{23} \end{array} \right\| = (3,\ 19,\ 25,\ 37)$	II
(30)	$\left\| \begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{23} & b_3 & c_{13} & b_5 & c_{35} \\ b_4 & c_{14} & c_{24} & c_{15} & c_{34} & c_{25} & c_{45} & c_{12} \end{array} \right\| = (3,\ 20,\ 24,\ 40)$	II
(31)	$\left\| \begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{23} & b_3 & c_{34} & b_5 & c_{25} \\ b_4 & c_{14} & c_{24} & c_{15} & c_{35} & c_{12} & c_{45} & c_{13} \end{array} \right\| = (3,\ 20,\ 28,\ 39)$	III
(32)	$\left\| \begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{24} & b_3 & c_{23} & b_5 & c_{35} \\ b_4 & c_{14} & c_{25} & c_{13} & c_{34} & c_{15} & c_{45} & c_{12} \end{array} \right\| = (3,\ 22,\ 26,\ 40)$	III
(33)	$\left\| \begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{24} & b_3 & c_{34} & b_5 & c_{15} \\ b_4 & c_{14} & c_{25} & c_{13} & c_{35} & c_{12} & c_{45} & c_{23} \end{array} \right\| = (3,\ 22,\ 28,\ 37)$	II
(34)	$\left\| \begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} \\ b_5 & c_{15} & c_{23} & c_{45} & c_{35} & c_{24} & c_{34} & c_{25} \end{array} \right\| = (4,\ 17,\ 25,\ 30)$	II
(35)	$\left\| \begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} \\ b_5 & c_{15} & c_{23} & c_{45} & c_{24} & c_{25} & c_{24} & c_{35} \end{array} \right\| = (4,\ 17,\ 24,\ 29)$	III

(36)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} \\ b_5 & c_{15} & c_{24} & c_{35} & c_{23} & c_{45} & c_{34} & c_{25} \end{array}\right\rvert = (4,\ 18,\ 23,\ 30)$	III
(37)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} \\ b_5 & c_{15} & c_{24} & c_{35} & c_{34} & c_{25} & c_{45} & c_{23} \end{array}\right\rvert = (4,\ 18,\ 24,\ 31)$	II
(38)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} \\ b_5 & c_{15} & c_{25} & c_{34} & c_{23} & c_{45} & c_{24} & c_{35} \end{array}\right\rvert = (4,\ 19,\ 23,\ 29)$	II
(39)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} \\ b_5 & c_{15} & c_{25} & c_{34} & c_{35} & c_{24} & b_{45} & c_{23} \end{array}\right\rvert = (4,\ 19,\ 25,\ 31)$	I
(40)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_3 & c_{23} & b_4 & c_{24} \\ b_5 & c_{15} & c_{25} & c_{34} & c_{35} & c_{14} & c_{45} & c_{13} \end{array}\right\rvert = (4,\ 19,\ 27,\ 33)$	II
(41)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{23} & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{34} \\ b_5 & c_{45} & c_{25} & c_{14} & c_{35} & c_{24} & c_{45} & c_{12} \end{array}\right\rvert = (4,\ 21,\ 25,\ 34)$	II
(42)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{23} & b_3 & c_{34} & b_4 & c_{24} \\ b_5 & c_{15} & c_{25} & c_{14} & c_{35} & c_{12} & c_{45} & c_{13} \end{array}\right\rvert = (4,\ 21,\ 28,\ 33)$	III
(43)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{24} & b_3 & c_{23} & b_4 & c_{34} \\ b_5 & c_{15} & c_{25} & c_{13} & c_{35} & c_{14} & c_{45} & c_{42} \end{array}\right\rvert = (4,\ 22,\ 27,\ 34)$	III
(44)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_1 & b_2 & c_{24} & b_3 & c_{34} & b_4 & c_{14} \\ b_5 & c_{15} & c_{25} & c_{13} & c_{35} & c_{12} & c_{45} & c_{23} \end{array}\right\rvert = (4,\ 22,\ 28,\ 31)$	II
(45)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{12} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_3 & c_{23} & c_{13} & c_{45} & c_{24} & c_{35} & c_{25} & c_{34} \end{array}\right\rvert = (5,\ 11,\ 29,\ 35)$	II
(46)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{12} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_3 & c_{23} & c_{13} & c_{45} & c_{34} & c_{25} & c_{35} & c_{24} \end{array}\right\rvert = (5,\ 11,\ 30,\ 36)$	II
(47)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{12} & b_4 & c_{24} & b_5 & c_{25} \\ b_3 & c_{23} & c_{13} & c_{45} & c_{34} & c_{15} & c_{35} & c_{14} \end{array}\right\rvert = (5,\ 11,\ 32,\ 38)$	I
(48)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{12} & b_4 & c_{24} & b_5 & c_{25} \\ b_3 & c_{23} & c_{14} & c_{35} & c_{34} & c_{15} & c_{45} & c_{13} \end{array}\right\rvert = (5,\ 12,\ 32,\ 39)$	II
(49)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{12} & b_4 & c_{24} & b_5 & c_{15} \\ b_3 & c_{23} & c_{14} & c_{35} & c_{45} & c_{13} & c_{25} & c_{34} \end{array}\right\rvert = (5,\ 12,\ 33,\ 35)$	III
(50)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{12} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{25} \\ b_3 & c_{23} & c_{15} & c_{34} & c_{24} & c_{35} & c_{45} & c_{13} \end{array}\right\rvert = (5,\ 13,\ 29,\ 39)$	III

(51)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{12} & b_4 & c_{24} & b_5 & c_{25} \\ b_3 & c_{23} & c_{15} & c_{34} & c_{45} & c_{13} & c_{35} & c_{14} \end{array}\right\rvert = (5,\ 13,\ 33,\ 38)$	II
(52)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{13} & b_4 & c_{24} & b_5 & c_{35} \\ b_3 & c_{23} & c_{14} & c_{25} & c_{34} & c_{15} & c_{45} & c_{12} \end{array}\right\rvert = (5,\ 14,\ 32,\ 40)$	II
(53)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{13} & b_4 & c_{34} & b_5 & c_{15} \\ b_3 & c_{23} & c_{14} & c_{25} & c_{45} & c_{12} & c_{35} & c_{24} \end{array}\right\rvert = (5,\ 14,\ 34,\ 36)$	III
(54)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{13} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{35} \\ b_3 & c_{23} & c_{15} & c_{24} & c_{34} & c_{25} & c_{45} & c_{12} \end{array}\right\rvert = (5,\ 15,\ 30,\ 40)$	III
(55)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{13} & b_4 & c_{34} & b_5 & c_{25} \\ b_3 & c_{23} & c_{15} & c_{24} & c_{45} & c_{12} & c_{35} & c_{14} \end{array}\right\rvert = (5,\ 15,\ 34,\ 38)$	II
(56)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{12} & b_3 & c_{23} & b_5 & c_{25} \\ b_4 & c_{24} & c_{13} & c_{45} & c_{34} & c_{15} & c_{35} & c_{14} \end{array}\right\rvert = (6,\ 11,\ 26,\ 38)$	II
(57)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{12} & b_3 & c_{23} & b_5 & c_{15} \\ b_4 & c_{24} & c_{13} & c_{45} & c_{35} & c_{14} & c_{25} & c_{34} \end{array}\right\rvert = (6,\ 11,\ 27,\ 35)$	III
(58)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{12} & b_3 & c_{13} & b_5 & c_{15} \\ b_4 & c_{24} & c_{14} & c_{35} & c_{23} & c_{45} & c_{25} & c_{34} \end{array}\right\rvert = (6,\ 12,\ 23,\ 35)$	II
(59)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{12} & b_3 & c_{13} & b_5 & c_{15} \\ b_4 & c_{24} & c_{14} & c_{35} & c_{34} & c_{25} & c_{45} & c_{23} \end{array}\right\rvert = (6,\ 12,\ 24,\ 37)$	II
(60)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{12} & b_3 & c_{23} & b_5 & c_{25} \\ b_4 & c_{24} & c_{14} & c_{35} & c_{34} & c_{15} & c_{45} & c_{13} \end{array}\right\rvert = (6,\ 12,\ 26,\ 39)$	I
(61)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{12} & b_3 & c_{13} & b_5 & c_{25} \\ b_4 & c_{24} & c_{15} & c_{34} & c_{23} & c_{45} & c_{35} & c_{14} \end{array}\right\rvert = (6,\ 13,\ 23,\ 38)$	III
(62)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{12} & b_3 & c_{23} & b_5 & c_{25} \\ b_4 & c_{24} & c_{15} & c_{34} & c_{35} & c_{14} & c_{45} & c_{13} \end{array}\right\rvert = (6,\ 13,\ 27,\ 39)$	II
(63)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{13} & b_3 & c_{23} & b_5 & c_{35} \\ b_4 & c_{24} & c_{14} & c_{25} & c_{34} & c_{15} & c_{45} & c_{12} \end{array}\right\rvert = (6,\ 14,\ 26,\ 40)$	II
(64)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{13} & b_3 & c_{34} & b_5 & c_{15} \\ b_4 & c_{24} & c_{14} & c_{25} & c_{35} & c_{12} & c_{45} & c_{23} \end{array}\right\rvert = (6,\ 14,\ 28,\ 37)$	III
(65)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_2 & b_1 & c_{14} & b_3 & c_{13} & b_5 & c_{35} \\ b_4 & c_{24} & c_{15} & c_{23} & c_{34} & c_{25} & c_{45} & c_{12} \end{array}\right\rvert = (6,\ 16,\ 24,\ 40)$	III

(66)	$\begin{vmatrix} a & b_2 \\ b_4 & c_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{14} \\ c_{15} & c_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{34} \\ c_{35} & c_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_5 & c_{25} \\ c_{45} & c_{13} \end{vmatrix} = (6,\ 16,\ 28,\ 39)$	II
(67)	$\begin{vmatrix} a & b_2 \\ b_5 & c_{25} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{13} & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{23} \\ c_{34} & c_{15} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 & c_{14} \\ c_{24} & c_{35} \end{vmatrix} = (7,\ 11,\ 26,\ 29)$	III
(68)	$\begin{vmatrix} a & b_2 \\ b_5 & c_{25} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{13} & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{23} \\ c_{35} & c_{14} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 & c_{24} \\ c_{34} & c_{15} \end{vmatrix} = (7,\ 11,\ 27,\ 32)$	II
(69)	$\begin{vmatrix} a & b_2 \\ b_5 & c_{25} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{14} & c_{35} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{13} \\ c_{23} & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 & c_{24} \\ c_{34} & c_{15} \end{vmatrix} = (7,\ 12,\ 23,\ 32)$	III
(70)	$\begin{vmatrix} a & b_2 \\ b_5 & c_{25} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{14} & c_{35} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{23} \\ c_{34} & c_{15} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 & c_{24} \\ c_{45} & c_{13} \end{vmatrix} = (7,\ 12,\ 26,\ 33)$	II
(71)	$\begin{vmatrix} a & b_2 \\ b_5 & c_{25} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{15} & c_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{13} \\ c_{23} & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 & c_{14} \\ c_{24} & c_{35} \end{vmatrix} = (7,\ 13,\ 23,\ 29)$	II
(72)	$\begin{vmatrix} a & b_2 \\ b_5 & c_{25} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{15} & c_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{13} \\ c_{35} & c_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 & c_{14} \\ c_{45} & c_{23} \end{vmatrix} = (7,\ 13,\ 25,\ 31)$	II
(73)	$\begin{vmatrix} a & b_2 \\ b_5 & c_{25} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{15} & c_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{23} \\ c_{35} & c_{14} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 & c_{24} \\ c_{45} & c_{13} \end{vmatrix} = (7,\ 13,\ 27,\ 33)$	I
(74)	$\begin{vmatrix} a & b_2 \\ b_5 & c_{25} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{13} \\ c_{15} & c_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{23} \\ c_{35} & c_{14} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 & c_{34} \\ c_{15} & c_{12} \end{vmatrix} = (7,\ 15,\ 27,\ 34)$	II
(75)	$\begin{vmatrix} a & b_2 \\ b_5 & c_{25} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{13} \\ c_{15} & c_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{34} \\ c_{35} & c_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 & c_{14} \\ c_{45} & c_{23} \end{vmatrix} = (7,\ 15,\ 28,\ 31)$	III
(76)	$\begin{vmatrix} a & b_2 \\ b_5 & c_{25} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{14} \\ c_{15} & c_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{13} \\ c_{35} & c_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 & c_{34} \\ c_{45} & c_{12} \end{vmatrix} = (7,\ 16,\ 25,\ 34)$	III
(77)	$\begin{vmatrix} a & b_2 \\ b_5 & c_{25} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{14} \\ c_{15} & c_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{34} \\ c_{35} & c_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 & c_{24} \\ c_{45} & c_{13} \end{vmatrix} = (7,\ 16,\ 28,\ 33)$	II
(78)	$\begin{vmatrix} a & b_3 \\ b_4 & c_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{13} & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{23} \\ c_{24} & c_{15} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_5 & c_{25} \\ c_{35} & c_{14} \end{vmatrix} = (8,\ 11,\ 20,\ 38)$	II
(79)	$\begin{vmatrix} a & b_3 \\ b_4 & c_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{13} & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{23} \\ c_{25} & c_{14} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_5 & c_{15} \\ c_{35} & c_{24} \end{vmatrix} = (8,\ 11,\ 21,\ 36)$	III
(80)	$\begin{vmatrix} a & b_3 \\ b_4 & c_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{14} & c_{35} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{23} \\ c_{24} & c_{15} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_5 & c_{25} \\ c_{45} & c_{13} \end{vmatrix} = (8,\ 12,\ 20,\ 39)$	II

(81)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_3 & b_1 & c_{12} & b_2 & c_{24} & b_5 & c_{15} \\ b_4 & c_{34} & c_{14} & c_{35} & c_{25} & c_{13} & c_{45} & c_{23} \end{array}\right\rvert = (8,\ 12,\ 22,\ 37)$	III
(82)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_3 & b_1 & c_{13} & b_2 & c_{12} & b_5 & c_{15} \\ b_4 & c_{34} & c_{14} & c_{25} & c_{23} & c_{45} & c_{35} & c_{24} \end{array}\right\rvert = (8,\ 14,\ 17,\ 36)$	II
(83)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_3 & b_1 & c_{13} & b_2 & c_{12} & b_5 & c_{15} \\ b_4 & c_{34} & c_{14} & c_{25} & c_{24} & c_{35} & c_{45} & c_{23} \end{array}\right\rvert = (8,\ 14,\ 18,\ 37)$	II
(84)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_3 & b_1 & c_{13} & b_2 & c_{23} & b_5 & c_{35} \\ b_4 & c_{34} & c_{14} & c_{25} & c_{24} & c_{15} & c_{45} & c_{12} \end{array}\right\rvert = (8,\ 14,\ 20,\ 40)$	I
(85)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_3 & b_1 & c_{13} & b_2 & c_{12} & b_5 & c_{25} \\ b_4 & c_{34} & c_{15} & c_{24} & c_{23} & c_{45} & c_{35} & c_{14} \end{array}\right\rvert = (8,\ 15,\ 17,\ 38)$	III
(86)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_3 & b_1 & c_{13} & b_2 & c_{23} & b_5 & c_{35} \\ b_4 & c_{34} & c_{15} & c_{24} & c_{25} & c_{14} & c_{45} & c_{12} \end{array}\right\rvert = (8,\ 15,\ 21,\ 40)$	II
(87)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_3 & b_1 & c_{14} & b_2 & c_{12} & b_5 & c_{25} \\ b_4 & c_{34} & c_{15} & c_{23} & c_{24} & c_{35} & c_{45} & c_{13} \end{array}\right\rvert = (8,\ 16,\ 18,\ 39)$	III
(88)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_3 & b_1 & c_{14} & b_2 & c_{24} & b_5 & c_{35} \\ b_4 & c_{34} & c_{15} & c_{23} & c_{25} & c_{13} & c_{45} & c_{12} \end{array}\right\rvert = (8,\ 16,\ 22,\ 40)$	II
(89)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_3 & b_1 & c_{12} & b_2 & c_{23} & b_4 & c_{14} \\ b_5 & c_{35} & c_{13} & c_{45} & c_{24} & c_{15} & c_{34} & c_{25} \end{array}\right\rvert = (9,\ 11,\ 20,\ 30)$	III
(90)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_3 & b_1 & c_{12} & b_2 & c_{23} & b_4 & c_{24} \\ b_5 & c_{35} & c_{13} & c_{45} & c_{25} & c_{14} & c_{34} & c_{15} \end{array}\right\rvert = (9,\ 11,\ 21,\ 32)$	II
(91)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_3 & b_1 & c_{12} & b_2 & c_{23} & b_4 & c_{24} \\ b_5 & c_{35} & c_{15} & c_{34} & c_{25} & c_{14} & c_{45} & c_{13} \end{array}\right\rvert = (9,\ 13,\ 21,\ 33)$	II
(92)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_3 & b_1 & c_{12} & b_2 & c_{24} & b_4 & c_{14} \\ b_5 & c_{35} & c_{15} & c_{34} & c_{25} & c_{13} & c_{45} & c_{23} \end{array}\right\rvert = (9,\ 13,\ 22,\ 31)$	III
(93)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_3 & b_1 & c_{13} & b_2 & c_{12} & b_4 & c_{24} \\ b_5 & c_{35} & c_{14} & c_{25} & c_{23} & c_{45} & c_{34} & c_{15} \end{array}\right\rvert = (9,\ 14,\ 17,\ 32)$	III
(94)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_3 & b_1 & c_{13} & b_2 & c_{23} & b_4 & c_{34} \\ b_5 & c_{35} & c_{14} & c_{25} & c_{24} & c_{15} & c_{45} & c_{12} \end{array}\right\rvert = (9,\ 14,\ 20,\ 34)$	II
(95)	$\left\lvert\begin{array}{cc\|cc\|cc\|cc} a & b_3 & b_1 & c_{13} & b_2 & c_{12} & b_4 & c_{14} \\ b_5 & c_{35} & c_{15} & c_{24} & c_{23} & c_{45} & c_{34} & c_{25} \end{array}\right\rvert = (9,\ 15,\ 17,\ 30)$	II

(96)	$\begin{vmatrix} a & b_3 \\ b_5 & c_{35} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{13} \\ c_{15} & c_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{12} \\ c_{25} & c_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 & c_{14} \\ c_{45} & c_{23} \end{vmatrix} = (9,\ 15,\ 19,\ 31)$	II
(97)	$\begin{vmatrix} a & b_3 \\ b_5 & c_{35} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{13} \\ c_{15} & c_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{23} \\ c_{25} & c_{14} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 & c_{34} \\ c_{45} & c_{12} \end{vmatrix} = (9,\ 15,\ 21,\ 34)$	I
(98)	$\begin{vmatrix} a & b_3 \\ b_5 & c_{35} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{14} \\ c_{15} & c_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{12} \\ c_{25} & c_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 & c_{24} \\ c_{45} & c_{13} \end{vmatrix} = (9,\ 16,\ 19,\ 33)$	III
(99)	$\begin{vmatrix} a & b_3 \\ b_5 & c_{35} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{14} \\ c_{15} & c_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{24} \\ c_{25} & c_{13} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 & c_{34} \\ b_{45} & c_{12} \end{vmatrix} = (9,\ 16,\ 22,\ 34)$	II
(100)	$\begin{vmatrix} a & b_4 \\ b_5 & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{14} & c_{35} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{23} \\ c_{24} & c_{15} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{13} \\ c_{34} & c_{25} \end{vmatrix} = (10,\ 12,\ 20,\ 24)$	III
(101)	$\begin{vmatrix} a & b_4 \\ b_5 & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{14} & c_{35} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{24} \\ c_{25} & c_{13} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{23} \\ c_{34} & c_{15} \end{vmatrix} = (10,\ 12,\ 22,\ 26)$	II
(102)	$\begin{vmatrix} a & b_4 \\ b_5 & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{15} & c_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{23} \\ c_{25} & c_{14} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{13} \\ c_{35} & c_{24} \end{vmatrix} = (10,\ 13,\ 21,\ 25)$	III
(103)	$\begin{vmatrix} a & b_4 \\ b_5 & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{12} \\ c_{15} & c_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{24} \\ c_{25} & c_{13} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{23} \\ c_{35} & c_{14} \end{vmatrix} = (10,\ 13,\ 22,\ 27)$	II
(104)	$\begin{vmatrix} a & b_4 \\ b_5 & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{13} \\ c_{14} & c_{25} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{12} \\ c_{24} & c_{35} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{23} \\ c_{34} & c_{15} \end{vmatrix} = (10,\ 14,\ 18,\ 26)$	III
(105)	$\begin{vmatrix} a & b_4 \\ b_5 & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{13} \\ c_{14} & c_{25} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{23} \\ c_{24} & c_{15} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{34} \\ c_{35} & c_{12} \end{vmatrix} = (10,\ 14,\ 20,\ 28)$	II
(106)	$\begin{vmatrix} a & b_4 \\ b_5 & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{13} \\ c_{15} & c_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{12} \\ c_{25} & c_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{23} \\ c_{35} & c_{14} \end{vmatrix} = (10,\ 15,\ 19,\ 27)$	III
(107)	$\begin{vmatrix} a & b_4 \\ b_5 & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{13} \\ c_{15} & c_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{23} \\ c_{25} & c_{14} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{34} \\ c_{35} & c_{12} \end{vmatrix} = (10,\ 15,\ 21,\ 28)$	II
(108)	$\begin{vmatrix} a & b_4 \\ b_5 & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{14} \\ c_{15} & c_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{12} \\ c_{24} & c_{35} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{13} \\ c_{34} & c_{25} \end{vmatrix} = (10,\ 16,\ 18,\ 24)$	II
(109)	$\begin{vmatrix} a & b_4 \\ b_5 & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{14} \\ c_{15} & c_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{12} \\ c_{25} & c_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{13} \\ c_{35} & c_{24} \end{vmatrix} = (10,\ 16,\ 19,\ 25)$	II
(110)	$\begin{vmatrix} a & b_4 \\ b_5 & c_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_{14} \\ c_{15} & c_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_{24} \\ c_{25} & c_{13} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_3 & c_{34} \\ c_{35} & c_{12} \end{vmatrix} = (10,\ 16,\ 22,\ 28)$	I

43. Considero una quaderna di 1ª specie, e poichè fu dimostrato che essa deve essere necessariamente di un certo tipo, di cui si sono stabiliti nettamente i caratteri distintivi, a fine di riconoscere in un solo tratto le relazioni che vi hanno fra loro le 16 rette, adopero la solita notazione del n.° 12, avvertendo però che i ragionamenti ne sono affatto indipendenti. La quaderna considerata sia ad es. la (1), cioè

$$\left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_1 & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_2 & c_{12} & c_{23} & c_{45} & c_{24} & c_{35} & c_{25} & c_{34} \end{array}\right|. \tag{1}$$

Considerando in essa per es. i soli otto piani orizzontali (formanti uno dei cinque angoli ottaedri), essi si possono disporre in più altre guise in modo da dare nuove quaderne; ciò si ottiene infatti scambiando il piano superiore $(a\,b_1)$ del 1° quadrilatero con ciascuno degli altri tre piani superiori. Una qualunque delle tre quaderne che così si ottengono ha in comune colla data gli otto piani orizzontali e quattro piani verticali (formanti un angolo tetraedro); gli altri quattro suoi piani verticali formano dunque pure un angolo tetraedro, e le tre nuove quaderne sono tutte di 2ª specie. In una qualunque delle quattro quaderne che così si hanno si tenga ora fisso il quadrilatero contenente la retta a e uno qualunque degli altri tre, e nei due rimanenti si scambino fra loro i piani orizzontali superiori (o inferiori, che è lo stesso); per tal modo da ognuna delle quattro quaderne ne nascono altre tre, che, come è manifesto, sono tutte distinte fra loro e dalle date. Di queste dodici quaderne le tre dedotte dalla data hanno comuni con essa i piani orizzontali e quattro piani verticali, epperò sono tutte di 2ª specie; per riguardo alle altre, si consideri una qualunque delle tre quaderne che si dedussero primieramente dalla (1), per es. la

$$\left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_1 & b_2 & c_{12} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_3 & c_{13} & c_{23} & c_{45} & c_{24} & c_{35} & c_{25} & c_{34} \end{array}\right|, \tag{12}$$

che, come si è notato, è di 2ª specie: se in essa si tengono fissi il 1° ed il 2° quadrilatero si ottiene una quaderna di 1ª specie, cioè la (13); tenendo fissi il 1° quadrilatero ed uno degli altri due si ottengono invece due quaderne di 3ª specie, cioè le (16), (17). Infine dalla quaderna data (1) e da ciascuna delle tre quaderne da essa primamente dedotte, cioè le (12), (25) e (38), si possono dedurre altre due quaderne tenendo fisso soltanto il quadrilatero che contiene la retta a, e combinando fra loro i sei rimanenti piani orizzontali. Per tal modo dalle quattro quaderne precedenti si deducono rispettivamente le (5), (6); (15), (18); (23), (29); (34), (37), di cui le due prime sono di 3ª e le altre quattro di 2ª specie. E non si hanno che queste 24 quaderne: esse si possono evidentemente distribuire in quattro gruppi, di cui ognuno contiene una quaderna di 1ª specie, tre di 2ª e due di 3ª.

44. Credo utile osservare fin d'ora, poichè se ne presenta l'occasione, che le quattro quaderne di 1ª specie sopra trovate, cioè le (1), (13), (26), (39) hanno i medesimi piani orizzontali; un tal sistema di quattro quaderne di 1ª specie aventi in comune un angolo ottaedro si dirà *quaderna di quaderne.* In una qualunque di esse, oltre agli otto piani dell'ottaedro, compajono altri 32 piani, che si possono supporre i verticali; e questi sono tutti fra loro distinti, perchè se due coincidessero, siccome per una retta della superficie non passa che un solo piano (tritangente) tangente ad un determinato cono di Kummer, dovrebbero coincidere anche i due quadrilateri relativi, ciò che è incompatibile col modo sopra tenuto per generare la quaderna di quaderne. Si conclude quindi:

In una quaderna di quaderne compajono tutti i 40 *piani tritangenti.*

Di questi sistemi mi occuperò più a lungo in seguito (*).

45. Se si considera di nuovo la quaderna (1) di 1ª specie, coi 16 piani tritangenti che in essa compajono si possono formare 16 ottaedri nel senso dichiarato in principio del paragrafo, ed è facile riconoscere che due di essi (cioè quelli costituiti dai piani orizzontali e dai verticali) formano un angolo ottaedro, otto costituiscono ciascuno un angolo esaedro ed un diedro, e sei costituiscono due angoli tetraedri.

Si è già veduto nel n.° 43 in quali e quanti modi si possono disporre in una quaderna i piani di un ottaedro della 1ª specie. Considero ora un ottaedro della 2ª specie, per es. quello formato dai piani orizzontali della quaderna (1) di 1ª specie, in cui si sia rovesciato l'ultimo quadrilatero:

$$\left|\begin{matrix} a & b_1 \\ b_2 & c_{12} \end{matrix}\right| \begin{matrix} b_3 & c_{13} \\ c_{23} & c_{45} \end{matrix} \left|\begin{matrix} b_4 & c_{14} \\ c_{24} & c_{35} \end{matrix}\right| \begin{matrix} b_5 & c_{25} \\ c_{15} & c_{34} \end{matrix}\right| . \qquad (1)$$

(*) Anche dalle poche cose ora dimostrate sopra queste quaderne di quaderne si può scorgere la grande analogia che ha luogo con ciò che accade per la superficie del 3° ordine. Per questa infatti è noto (Cremona, l. c.; Bertini, l. c.) che, data una terna di coppie di triedri conjugati (di Steiner), si possono scegliere in essa, in quattro modi diversi, nove piani (formanti *un enneaedro di 1ª specie*) contenenti tutte le 27 rette della superficie, e che si possono disporre in altri tre modi in una terna di coppie di triedri conjugati; in ognuna delle quaderne così ottenute compajono tutti i 45 piani tritangenti della superficie.

Con un metodo del tutto analogo a quello seguito nel n.° 43 si trova senza difficoltà che coi piani di un tale ottaedro si possono formare altre cinque quaderne, cioè le (12), (25), (7); (16), (24) di cui le tre prime sono di 2ª, le altre due di 3ª specie.

Se si considera infine un ottaedro della 3ª specie, quale è quello formato per es. dalle orizzontali della (1) in cui siano rovesciati i due ultimi quadrilateri:

$$\left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_1 & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{24} & b_5 & c_{25} \\ b_2 & c_{12} & c_{23} & c_{45} & c_{14} & c_{35} & c_{15} & c_{34} \end{array}\right|, \tag{1}$$

è pur facile vedere che co' suoi piani si possono formare altre tre quaderne di 2ª specie, cioè le (3), (12), (14).

46. Considerando una quaderna di 2ª specie per es. la

$$\left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_1 & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_2 & c_{12} & c_{23} & c_{45} & c_{34} & c_{25} & c_{35} & c_{24} \end{array}\right|, \tag{2}$$

è evidente che co' suoi 16 piani si possono formare 16 ottaedri, di cui uno è di 1ª specie (cioè è propriamente un angolo ottaedro, ed è quello formato dai piani orizzontali), quattro sono di 2ª specie, tre sono di 3ª specie, e i rimanenti otto sono tali che i loro piani costituiscono un angolo tetraedro e due diedri (*). Tuttavia questi ultimi godono di proprietà differenti rispetto alle quaderne (**) e si distinguono in due gruppi di quattro ottaedri, come si rileva dal quadro seguente, dove gli ottaedri di cui si tratta sono costituiti dai piani orizzontali:

$$\left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_2 & b_3 & c_{23} & b_4 & c_{34} & b_5 & c_{15} \\ b_1 & c_{12} & c_{13} & c_{45} & c_{14} & c_{25} & c_{35} & c_{24} \end{array}\right|, \qquad \left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_2 & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{34} & b_5 & c_{15} \\ b_1 & c_{12} & c_{23} & c_{45} & c_{14} & c_{25} & c_{35} & c_{24} \end{array}\right|,$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_2 & b_3 & c_{23} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{35} \\ b_1 & c_{12} & c_{13} & c_{45} & c_{34} & c_{25} & c_{15} & c_{24} \end{array}\right|, \qquad \left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_2 & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{35} \\ b_1 & c_{12} & c_{23} & c_{45} & c_{34} & c_{25} & c_{15} & c_{24} \end{array}\right|,$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_1 & b_3 & c_{23} & b_4 & c_{34} & b_5 & c_{35} \\ b_2 & c_{12} & c_{13} & c_{45} & c_{14} & c_{25} & c_{15} & c_{24} \end{array}\right|, \qquad \left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_1 & b_3 & c_{23} & b_4 & c_{34} & b_5 & c_{15} \\ b_2 & c_{12} & c_{13} & c_{45} & c_{14} & c_{25} & c_{35} & c_{24} \end{array}\right|,$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_2 & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{34} & b_5 & c_{35} \\ b_1 & c_{12} & c_{23} & c_{45} & c_{14} & c_{25} & c_{15} & c_{24} \end{array}\right|; \qquad \left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_1 & b_3 & c_{23} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{35} \\ b_2 & c_{12} & c_{13} & c_{45} & c_{34} & c_{25} & c_{15} & c_{24} \end{array}\right|.$$

(*) Quì, come anche altrove in questo paragrafo, uso talvolta per brevità la parola diedro per indicare un diedro il cui spigolo passi per un punto di Kummer, cioè un diedro di 1ª o di 3ª specie.

(**) Questo fatto è tanto più notevole in quanto che si vedrà più innanzi che queste due specie di ottaedri, che pure sono ben differenti, hanno inoltre, in ugual numero, i diedri ed i triedri delle medesime specie.

Nel gruppo a sinistra gli ottaedri si possono disporre in una seconda quaderna di 2ª specie ed in nessun'altra; laddove nel gruppo a destra essi si possono disporre, oltre che nella quaderna data di 2ª specie, in una di 3ª. Questi ottaedri si diranno rispettivamente della 4ª e della 5ª specie.

47. Se si ha da ultimo una quaderna di 3ª specie, per es. la

$$\left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & b_1 & b_3 & c_{13} & b_4 & c_{14} & b_5 & c_{15} \\ b_2 & c_{12} & c_{31} & c_{25} & c_{45} & c_{23} & c_{35} & c_{24} \end{array}\right|, \qquad (5)$$

è chiaro che co' suoi piani è possibile formare un ottaedro di 1ª specie (quello dei piani orizzontali), quattro di 2ª, sei di 5ª, e cinque di 6ª, cioè tali che i loro piani formano quattro diedri, costituendo perciò un vero ottaedro non degenere. Un siffatto ottaedro è dato ad es. dai piani verticali della quaderna precedente, ed è ovvio che i suoi piani non si possono disporre in altre quaderne.

48. Si può dimostrare facilmente che oltre ai precedenti non vi sono altri ottaedri, cioè che *i piani di un ottaedro qualunque si possono sempre disporre almeno in una quaderna* (*). Siano invero $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$,..., $(a_8 b_8)$ i piani di un ottaedro, e si supponga anzitutto che con due de' suoi piani si possa formare un diedro di 1ª specie, per es. il diedro $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ di modo che si abbia il quadrilatero $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Allora la a_3, tagliando la b_3 e una di queste quattro rette, deve tagliare tre delle dieci rette rimanenti, che dovranno trovarsi in tre piani distinti dell'ottaedro. Lo stesso dicasi della retta b_3, epperò fra i cinque piani rimanenti ve ne dovrà essere almeno uno che con $(a_3 b_3)$ forma un diedro di 1ª specie, e si avrà per es. il quadrilatero $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}$. Collo stesso metodo si dimostra che vi deve essere almeno un piano fra i tre rimanenti, il quale con $(a_5 b_5)$ forma un diedro di 1ª specie, in modo da avere per es. il quadrilatero $\begin{vmatrix} a_5 & b_5 \\ a_6 & b_6 \end{vmatrix}$, e allora i due piani rimanenti devono (n.º 38) pure formare un diedro di 1ª specie; e si ottiene almeno una quaderna. Si supponga ora invece che con due piani del dato ottaedro si possa formare un

(*) Per la superficie del 3º ordine ha luogo la proprietà affatto analoga, poichè si dimostra (Cremona, l. c.; Bertini, l. c.) che vi sono soltanto due specie di enneaedri (sistemi di nove piani contenenti tutte le 27 rette della superficie), ciascuna delle quali dà luogo almeno ad una terna di coppie di triedri conjugati. Queste terne però, come si è già ricordato, sono di una sola specie.

diedro di 2^a specie, per es. il diedro $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, dove a_1 taglia a_2. La a_1 deve tagliare, oltre alle a_2, b_1, altre tre rette, e la b_1, oltre alla a_1, altre quattro rette, e, come sopra, vi sarà quindi almeno un piano dell'ottaedro che col piano $(a_1 b_1)$ forma un diedro di 1^a specie; si torna dunque al caso precedente. Siccome poi è affatto ovvio che un ottaedro non può contenere diedri soltanto della 3^a specie, il teorema è dimostrato.

Da tutto quanto si è detto negli ultimi cinque numeri si traggono le seguenti proprietà:

Coi 40 *piani tritangenti della superficie si possono in tutto formare* 705 *ottaedri, di cui* 5 *di 1^a specie e formanti un angolo ottaedro, il cui vertice è un punto di Kummer;* 80 *di 2^a specie, che si spezzano in un angolo esaedro avente per vertice un punto di Kummer e in un diedro il cui spigolo passa per un altro punto di Kummer;* 60 *di 3^a specie, che si spezzano in due angoli tetraedri aventi i loro vertici in due punti di Kummer;* 120 *di 4^a e* 240 *di 5^a specie che si spezzano in un angolo tetraedro avente per vertice un punto di Kummer e in due diedri i cui spigoli passano per altri due punti di Kummer;* 200 *di 6^a specie, che si possono dividere in quattro diedri, i cui spigoli passano per quattro diversi punti di Kummer. Soltanto questi ultimi sono veri ottaedri non degeneri.*

I piani di un ottaedro di 1^a specie si possono disporre, in 4 *modi diversi, in una quaderna di 1^a specie, in* 12 *modi in una di 2^a, in* 8 *modi in una di 3^a; i piani di un ottaedro di 2^a specie si possono disporre, in un solo modo, in una quaderna di 1^a specie, in* 3 *modi in una di 2^a, in* 2 *modi in una di 3^a; i piani di un ottaedro di 3^a specie si possono disporre, in un solo modo, in una quaderna di 1^a specie, ed in tre modi in una di 2^a; essi non possono mai formare i piani di una quaderna di 3^a specie; i piani di un ottaedro di 4^a specie si possono disporre in due sole quaderne, entrambe di 2^a specie; i piani di un ottaedro di 5^a specie si possono disporre in due sole quaderne, una di 2^a e l'altra di 3^a specie; i piani di un ottaedro di 6^a specie si possono disporre in una sola quaderna, che è di 3^a specie.*

Inoltre coi piani di una quaderna di 1^a specie si possono formare 2 *ottaedri di 1^a specie,* 8 *di 2^a,* 6 *di 3^a; coi piani di una quaderna di 2^a specie se ne possono formare* 1 *di 1^a specie,* 4 *di 2^a,* 3 *di 3^a,* 4 *di 4^a,* 4 *di 5^a; coi piani di una quaderna di 3^a specie se ne possono formare* 1 *di 1^a specie.* 4 *di 2^a,* 6 *di 5^a,* 5 *di 6^a.*

Qualche altra proprietà degli ottaedri verrà considerata più tardi.

49. Si possono cercare le relazioni che una quaderna qualunque ha

colle rimanenti 109. Siccome però questa ricerca non presenta difficoltà e d'altra parte, nella sua generalità, non ha interesse per il seguito, mi limito a dare le relazioni che una quaderna di 1^a specie ha colle rimanenti quaderne:

Rispetto ad una quaderna di 1^a specie le altre 109 *quaderne si distribuiscono in* 3 *gruppi di* 12, 16, 81 *rispettivamente; quelle del 1^o gruppo hanno in comune colla data due quadrilateri, un ottaedro di 1^a specie e quattro altri piani formanti un angolo tetraedro; quelle del 2^o gruppo hanno comune colla data un solo quadrilatero, un ottaedro di 1^a specie e due piani formanti un diedro; quelle del 3^o gruppo non hanno comune colla data nessun quadrilatero, e si suddividono in* 5 *sottogruppi di* 18, 6, 24, 24, 9 *rispettivamente: quelle del 1^o hanno in comune colla data un ottaedro di 1^a specie; quelle del 2^o un ottaedro di 3^a specie; quelle del 3^o quattro piani formanti due diedri; quelle del 4^o quattro piani formanti un angolo tetraedro; quelle del 5^o non hanno colla data alcun piano comune.*

Le due prime parti della proposizione si dimostrano molto facilmente; per brevità di linguaggio suppongo di aver disposta la quaderna data in modo che i due ottaedri di 1^a specie in essa contenuti siano costituiti dai piani orizzontali e dai piani verticali. Ora si è già veduto che in una quaderna di 1^a specie le sei coppie di quadrilateri sono tutte nel primo dei due casi considerati nel n.° 38, e si è anche dimostrato (n.° 40) che una tale coppia appartiene a tre quaderne; se dunque non si conta la data, si hanno $6 \cdot 2 = 12$ quaderne aventi colla data due quadrilateri comuni. Imaginandone una, avente colla data in comune per es. i due primi quadrilateri, l'ottaedro di 1^a specie in essa contenuto sarà uno dei due contenuti nella quaderna data, per es. quello delle orizzontali; le due quaderne hanno dunque in comune questo ottaedro e i quattro piani verticali dei due primi quadrilateri.

Si è anche veduto che un quadrilatero appartiene ad 11 quaderne; non contando dunque le quaderne precedenti aventi colla data due quadrilateri comuni, rimangono $4 \cdot 10 - 6 \cdot 4 = 16$ quaderne aventi colla data un solo quadrilatero comune. Una di esse ha dunque in comune colla data quaderna uno degli ottaedri di 1^a specie contenuti in questa, per es. quello delle orizzontali, e i due piani verticali del quadrilatero comune. Con ragionamenti analoghi si dimostra l'ultima parte del teorema, come pure si trovano tutte le altre relazioni che hanno fra loro le varie quaderne.

50. Si è mostrato al n.° 44 che le dieci quaderne di 1^a specie si possono aggruppare a quattro a quattro in *quaderne di quaderne,* avendo le quattro quaderne di un gruppo un ottaedro di 1^a specie comune. Ogni quaderna di

1ª specie, contenendo due di questi ottaedri, appartiene a due di quei gruppi, epperò:

Vi sono $\frac{10 \cdot 2}{4} = 5$ *quaderne di quaderne, ed ognuna corrisponde ad uno dei cinque ottaedri di 1ª specie, cioè a quello che le quattro quaderne hanno in comune.* La loro ricerca dipende da un' equazione di 5° grado, che è manifestamente la stessa di quella da cui si vide dipendere la determinazione dei cinque coni di Kummer.

Le 10 quaderne di 1ª specie si possono opportunamente indicare col simbolo Q_{ik}, dove gli indici i e k variabili da 1 a 5 denotano i due ottaedri di 1ª specie contenuti nella quaderna. Data una quaderna di 1ª specie, per es. la Q_{12}, le altre nove si distribuiscono in due gruppi di sei e tre: le prime hanno comune colla data un (angolo) ottaedro, e sono le Q_{13}, Q_{14}, Q_{15}, Q_{23}, Q_{24}, Q_{25}; le altre non hanno colla data alcun piano comune, e sono Q_{34}, Q_{35}, Q_{45}. Da qui segue che se si considerano i quattro quadrilateri di ognuna delle quaderne di 1ª specie si vengono ad esaurire tutti i $10 \cdot 4 = 40$ quadrilateri gobbi.

Dirò *associate* due quaderne aventi un ottaedro (si intende di 1ª specie) comune. *Se due quaderne* (come Q_{12} e Q_{13}) *sono associate, i loro due ottaedri non comuni sono contenuti in una terza quaderna* (Q_{23}) *associata ad entrambe.* Si hanno per tal modo $\frac{6 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 10$ *terne di quaderne associate;* una è per es. formata dalle quaderne Q_{12}, Q_{13}, Q_{23}.

51. Sia δ una quaderna qualunque di 1ª specie, e siano δ', δ'', δ''' le tre che con essa formano una quaderna relativamente ad un ottaedro 0 di 1ª specie; siano inoltre δ_1, δ_2, δ_3 le tre quaderne che con δ formano la quaderna relativa all'altro ottaedro 0′ di 1ª specie contenuto in δ. Se sopra δ' si opera come si è ora operato sopra δ, si ottengono due quaderne di quaderne, di cui una è la prima delle due precedenti, e poichè nella seconda le tre altre quaderne devono contenere, oltre all'altro ottaedro 0″ contenuto da δ', gli altri tre ottaedri 0′, 0‴, 0′″, la prima di esse sarà ancora δ_1; le altre due invece sono nuove e le indico con δ'_1, δ'_2. Se si opera allo stesso modo sopra δ'' si ottengono due quaderne di quaderne, di cui una è, al solito, quella formata dalle δ, δ', δ'', δ''' e l'altra contiene δ'', δ_1, δ'_1 ed una nuova quaderna che indico con δ''_1. Infine operando allo stesso modo su δ''' si ottengono nella seconda quaderna di quaderne di nuovo le δ_3, δ'_2, δ'''_1. Si vede dunque come dalla data quaderna δ si possono ottenere successivamente tutte le altre.

Se invece si parte da un ottaedro di 1ª specie (per es. l'ottaedro che dirò 1), le dieci quaderne Q_{ik} si ottengono nel modo seguente. L'ottaedro è comune a quattro quaderne (Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{15}) formanti una quaderna; ognuna di queste contiene un secondo ottaedro di 1ª specie (che dirò 2, 3, 4, 5), e ciascuno di questi appartiene a tre nuove quaderne (Q_{23}, Q_{24}, Q_{25}; Q_{32}, Q_{34}, Q_{35}; Q_{42}, Q_{43}, Q_{45}; Q_{52}, Q_{53}, Q_{54}), di cui però ognuna viene ripetuta due volte. In questo modo si hanno le $4+\frac{3\cdot 4}{2}=10$ quaderne Q_{ik} (*).

52. La notazione stabilita nel penultimo numero mostra che *i* 16 *piani tritangenti esclusi da una terna di quaderne associate* (come Q_{12}, Q_{13}, Q_{23}) *sono contenuti in un'altra quaderna* (Q_{45}), *cioè si scindono a formare i due ottaedri* (4 e 5) *non contenuti nelle tre quaderne date.* Reciprocamente *i* 24 *piani tritangenti esclusi da una quaderna di 1ª specie* (per es. Q_{12}) *si possono distribuire, in un modo solo, in una terna di quaderne associate* (Q_{34}, Q_{35}, Q_{45}).

Queste proprietà stabiliscono una corrispondenza univoca fra le dieci quaderne di 1ª specie e le dieci terne di quaderne associate che con esse si possono formare, e sono affatto analoghe a quelle che si sono trovate al n.° 8 per le terne di biquadruple associate.

Si può anzi stabilire una corrispondenza molto semplice fra le quaderne e le biquadruple. Considero invero una coppia di biquadruple conjugate

$$B\equiv\left|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix}\right|, \qquad B'\equiv\left|\begin{matrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & b'_4 \end{matrix}\right|,$$

dove posso supporre che le rette a'_i, b'_i taglino le a_i, b_i in modo da formare il quadrilatero $\left|\begin{matrix} a_i & a'_i \\ b'_i & b_i \end{matrix}\right|$. A questo modo si formano quattro quadrilateri costituenti una quaderna, che è di 1ª specie perchè una coppia qualunque dei suoi quadrilateri è nelle condizioni del primo dei casi considerati al n.° 38.

Reciprocamente se è data una quaderna di 1ª specie

$$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} a_4 & b_4 \\ c_4 & d_4 \end{matrix}\right|,$$

la coppia ($a_1 d_1$) determina una biquadrupla ove a_1, d_1 sono rette conjugate, e di cui le tre altre coppie di rette conjugate sono una in ciascuno dei tre ultimi quadrilateri. Considerando invece la coppia ($b_1 c_1$) si ottiene la biquadrupla conjugata alla precedente.

(*) Cfr. Bertini, l. c., § 4.

Una quaderna di 1ª specie e una coppia di biquadruple conjugate che si determinino vicendevolmente a questo modo si dicano *corrispondenti.* Si ha allora la proprietà:

Se due biquadruple sono associate, le due quaderne corrispondenti sono pure associate; e reciprocamente se due quaderne sono associate, ciascuna delle due biquadruple corrispondenti all'una è associata a ciascuna delle due biquadruple corrispondenti all'altra. Se siano infatti

$$B \equiv \begin{vmatrix} a & l_1 & m_1 & b \\ n_1 & c & d & p_1 \end{vmatrix}, \qquad B' \equiv \begin{vmatrix} a & l_2 & m_2 & b \\ n_2 & c & d & p_2 \end{vmatrix}$$

le due biquadruple associate, aventi in comune il quadrilatero $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, poichè l_2 è nella biquadrupla conjugata di B, essa deve tagliare in B due rette conjugate, le quali, guardando le B e B', si vede tosto che devono essere m_1 e d, ecc. Per cui le due quaderne corrispondenti alle B, B' sono (incompletamente):

$$\begin{vmatrix} a\ p_2 & c\ m_2 & d\ l_2 & b\ n_2 \\ n_1 & l_1 & m_1 & p_1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} b\ p_2 & d\ m_2 & c\ m_1 & a\ p_1 \\ n_1 & l_1 & l_2 & n_2 \end{vmatrix},$$

e queste, essendo entrambe di 1ª specie ed avendo quattro piani comuni, devono (n.° 50) essere associate, cioè avere in comune un intero ottaedro di 1ª specie. In modo analogo si dimostra la verità reciproca.

Ad una terna di biquadruple associate corrisponde dunque una terna di quaderne associate, mentre ad una di queste ultime terne ne corrispondono quattro delle prime.

53. In virtù della corrispondenza ora stabilita si possono per le dieci coppie di biquadruple conjugate usare gli stessi simboli usati per le quaderne corrispondenti; le indicherò pertanto col simbolo C_{ik}, essendo i e k permutabili fra loro e variabili da 1 a 5: questa notazione condurrà al tempo stesso a nuove proprietà, non ancora osservate, delle biquadruple.

Due coppie rappresentate da simboli aventi un indice comune sono tali che ogni biquadrupla dell'una è associata ad ogni biquadrupla dell'altra. Epperò se si hanno le tre coppie C_{12}, C_{13}, C_{23} aventi a due a due un indice comune, combinando in tutti i modi possibili le biquadruple dell'una coppia con quelle di un'altra, resta determinata una biquadrupla della terza coppia che colle altre due forma una terna di biquadruple associate; l'altra biquadrupla della terza coppia contiene invece il quadrilatero comune alle prime due, e forma con queste un sistema contenente tutte le 16 rette.

Se si considera una coppia qualunque di biquadruple conjugate (ad es. la C_{12}), *combinando in ciascuna di queste le rette che fra loro si incontrano, si ottengono in tutto* 24 *piani tritangenti, e questi si scindono in tre ottaedri di* 1^a *specie* (gli ottaedri 3, 4, 5) *che sono quelli esclusi dalla quaderna* (Q_{12}) *corrispondente alla coppia data.*

Avendosi quattro coppie C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15} *i cui simboli hanno un indice comune, gli otto piani tritangenti da esse esclusi formano un ottaedro di* 1^a *specie (l'ottaedro* 1*), e precisamente quello che è comune alla quaderna delle quaderne corrispondenti.*

Se allora si combinano fra loro a due a due in tutti i modi possibili quelle quattro coppie e ogni volta si trova la coppia associata ad entrambe si ottengono tutte le dieci coppie C_{ik}.

Si hanno dunque cinque di queste quaderne di coppie di biquadruple conjugate, ed ognuna è relativa ad un certo ottaedro di 1^a specie, come si disse or ora; la loro ricerca dipende quindi dalla solita equazione di 5^o grado, da cui dipendono i coni di Kummer. Anche colla considerazione delle biquadruple si è dunque potuto giungere a questo risultato.

È anche utile osservare che, *data una delle cinque quaderne precedenti* (per es. quella costituita dalle coppie C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}) *se da ciascuna delle sue quattro coppie si sceglie una biquadrupla, le quattro biquadruple che così si ottengono hanno in comune una retta ed una sola, ed in questo modo si ottengono le* $2^4 = 16$ *rette della superficie.*

54. Di qui si può ricavare una notazione delle 16 rette abbastanza semplice, e simmetrica rispetto a ciascuna di esse. Indico con 1, 1'; 2, 2'; 3, 3'; 4, 4' le quattro coppie di biquadruple conjugate che costituiscono una delle cinque quaderne precedenti. Le 16 rette si possono allora rappresentare prendendo in tutti i modi possibili quattro numeri, uno da ciascuna di quelle quattro coppie, e ciò per la proposizione precedente. Per passare dalla notazione del n.° 12 alla attuale, basta porre, per es., le equazioni:

$$\begin{array}{ll}
a\ \ = (1\,2\,3\,4), & b_1 = (1'\,2'\,3'\,4'),\\
b_2 = (1'\,2\,3\,4), & b_3 = (1\,2'\,3\,4),\\
b_4 = (1\,2\,3'\,4), & b_5 = (1\,2\,3\,4'),\\
c_{12} = (1\,2'\,3'\,4'), & c_{13} = (1'\,2\,3'\,4'),\\
c_{14} = (1'\,2'\,3\,4'), & c_{15} = (1'\,2'\,3'\,4),\\
c_{23} = (1'\,2'\,3\,4), & c_{24} = (1'\,2\,3'\,4),\\
c_{25} = (1'\,2\,3\,4'), & c_{34} = (1\,2'\,3'\,4),\\
c_{35} = (1\,2'\,3\,4'), & c_{45} = (1\,2\,3'\,4').
\end{array}$$

Due rette si incontrano se i loro simboli hanno zero o tre numeri comuni, non si incontrano se i loro simboli hanno uno o due numeri comuni, ritenendo differenti due numeri, di cui uno sia accentato e l'altro no.

55. *Considerando infine due coppie i cui simboli non hanno indici comuni, esse hanno in comune otto piani formanti un ottaedro di 1ª specie, e precisamente quello escluso dalle due quaderne corrispondenti.* Per es. le due coppie C_{12}, C_{34} contengono la prima i piani degli ottaedri 3, 4, 5, la seconda quelli degli ottaedri 1, 2, 5, epperò hanno in comune l'ottaedro 5 escluso dalle quaderne corrispondenti Q_{12}, Q_{34}.

È poi evidente che sì le quaderne di quaderne di quadrilateri, che le quaderne di coppie di biquadruple conjugate sono in istretta relazione colle coppie di quaderne di paja di cui si è parlato nel § 1, e tutti questi sistemi si connettono intorno alla proprietà fondamentale dovuta al sig. Kummer.

§ 6. Moltilateri gobbi formati colle 16 rette delle superficie.

56. Si dirà *moltilatero gobbo* o semplicemente *moltilatero* il sistema di più rette della superficie F_4 concepite in un determinato ordine, e di cui ciascuna taglia la precedente e la susseguente e non altre; ometto di parlare dei quadrilateri, perchè questi furono già studiati.

Dal § 1 si desume che la configurazione delle 16 rette di F_4 coincide con quella delle 16 rette di una superficie cubica che non si appoggiano ad una data retta della medesima. È perciò che la massima parte dei risultati contenuti in questo paragrafo si trovano già in sostanza in un lavoro inserito dal sig. Affolter nel Bd. LVI dell'Archiv di Grunert-Hoppe, e in una recente Memoria del sig. Sturm: *Ueber die 27 Geraden der cubischen Fläche* (Math. Ann., Bd. XXIII, 1884, pag. 289), entrambi i quali hanno trattata la stessa questione per la superficie di 3° ordine. Mi sembra utile tuttavia far vedere brevemente come collo stesso metodo seguito dall'ultimo degli Autori citati si possono stabilire con prontezza e facilità gli analoghi risultati anche per la F_4.

Sia a una retta della superficie b_1, b_2,..., b_5 siano le sue secanti, e c_{ik} le sue zerosecanti (V. n.° 12) che sono le ulteriori bisecanti delle dieci coppie $(b_i b_k)$; poichè una quintupla non ha zerosecanti, colle dieci rette c_{ik} non si possono formare delle quintuple. Ognuna di queste rette è tagliata da altre tre, ed esse giacciono quindi a due a due in quindici piani (tritangenti).

È facile persuadersi che (*):

Colle dieci rette c_{ik} *si possono formare sei doppi pentalateri (Doppelfünfseit); delle tre rette c che sono incontrate da una retta di uno di questi pentalateri, due sono suoi lati adjacenti, e la terza giace nell'altro pentalatero.* Questi sei doppi pentalateri sono i seguenti:

$$\begin{array}{lllll@{\qquad\qquad}lllll}
c_{12} & c_{34} & c_{15} & c_{23} & c_{45}, & c_{35} & c_{24} & c_{13} & c_{25} & c_{14}; \\
c_{21} & c_{34} & c_{25} & c_{13} & c_{45}, & c_{35} & c_{14} & c_{23} & c_{15} & c_{24}; \\
c_{32} & c_{14} & c_{35} & c_{21} & c_{45}, & c_{15} & c_{24} & c_{31} & c_{25} & c_{34}; \\
c_{42} & c_{31} & c_{45} & c_{23} & c_{15}, & c_{35} & c_{21} & c_{43} & c_{25} & c_{41}; \\
c_{52} & c_{34} & c_{51} & c_{23} & c_{41}, & c_{31} & c_{24} & c_{53} & c_{21} & c_{54}; \\
c_{15} & c_{34} & c_{12} & c_{53} & c_{42}, & c_{32} & c_{54} & c_{13} & c_{52} & c_{14}.
\end{array}$$

Con questo metodo si ottengono tutti i possibili pentalateri formati colle 16 rette; se infatti è $(a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5)$ uno qualunque di essi, la coppia $(a_i\, a_{i+2})$ ammette, oltre alla a_{i+1}, una seconda bisecante che indico con $c_{i,\, i+2}$, e si hanno in tal guisa altre cinque rette c_{13}, c_{14}, c_{24}, c_{25}, c_{35} formanti una quintupla. Dunque la cinquisecante di questa quintupla è zerosecante delle rette del pentalatero, e ne è anzi la sola, perchè, formando tutti i quadrilateri analoghi ad $\left|\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ a_5 & c_{25} \end{matrix}\right|$, si scorge che in essi una zerosecante del pentalatero deve necessariamente tagliare tutte le rette c. *Si possono dunque formare in tutto* $16 \cdot 12 = 192$ *pentalateri, che a due a due si accoppiano in* 96 *doppi pentalateri* (**).

A questi numeri si poteva del resto anche pervenire osservando che una retta appartiene a $10 \cdot 6 = 60$ pentalateri gobbi.

Dato un doppio pentalatero, ogni retta di uno de' suoi due pentalateri giace in un piano (tritangente) con una, ed una sola, dell'altro; cioè le zerosecanti di una retta della superficie restano per tal guisa distribuite, in sei modi differenti, in un pentaedro. Ma su tali pentaedri avrò occasione di fermarmi più a lungo in seguito.

57. Dato il pentalatero $(a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5)$, si può cercare il suo *conjugato*, cioè quello che con esso forma un doppio pentalatero. Poichè la a_1 taglia le

(*) Affolter, Sturm, l. c.
(**) Sturm, l. c.

rette a_2, a_5 e le due che sopra si sono indicate con c_{13}, c_{14}, vi è una quinta retta b_1 tagliata da a_1 e da nessun'altra retta del pentalatero; e analogamente si hanno le rette b_2, b_3, b_4, b_5 secanti rispettivamente le a_2, a_3, a_4, a_5. Si ottiene allora il quadrilatero $\left|\begin{matrix} a_1 & c_{14} \\ a_5 & a_4 \end{matrix}\right|$, in cui b_2, non tagliando alcuna delle a_1, a_4, a_5, deve tagliare c_{14}; si ha dunque pure il quadrilatero $\left|\begin{matrix} b_2 & c_{14} \\ a_2 & a_1 \end{matrix}\right|$, il quale mostra come la b_1, tagliando già la a_1, non può tagliare la b_2, e così neppure può tagliare b_5. Invece il quadrilatero $\left|\begin{matrix} a_2 & c_{24} \\ a_3 & a_4 \end{matrix}\right|$ fa vedere che c_{24} taglia b_1 e non b_3, e quindi dal quadrilatero $\left|\begin{matrix} b_1 & c_{24} \\ a_1 & a_2 \end{matrix}\right|$ segue che b_1 taglia b_3 e analogamente taglia b_4. Laonde si ha il pentalatero $(b_1\, b_3\, b_5\, b_2\, b_4)$ che è il conjugato del dato.

58. Quello che si è detto sopra conduce súbito ad una generazione della F_4 che è la generalizzazione immediata di quella dovuta a STEINER-AFFOLTER (*) per la superficie del 3° ordine. Data la F_4, un suo pentalatero gobbo e la sua retta zerosecante, ogni cubica (razionale) della superficie esistente in un piano passante per questa retta è determinata dal dover passare per le cinque tracce dei lati del pentalatero sul piano, e pel punto comune alla zerosecante ed alla conica doppia D_2, e dall'avere inoltre un punto doppio nell'altro punto comune al piano e a D_2. Reciprocamente, data una conica D_2, una retta ed un pentalatero gobbo ad essa appoggiati, le cubiche (razionali) generate nel modo esposto dànno una superficie passante manifestamente per tutte le linee ora accennate. Ma le superficie del 4° ordine aventi D_2 per conica doppia formano (n.° 19) un sistema lineare ∞^{13}; ne esiste quindi una sola che contenga quella retta ed il pentalatero, ed è questa la superficie che si è dianzi generata.

Conservando ancora le denominazioni del n.° 57, e chiamando m la zerosecante del pentalatero, si possono *con costruzioni lineari* determinare le altre dieci rette della F_4 generata coi dati precedenti. Per costruire infatti una delle cinque rette c, per es. la c_{13}, basta ricordare che essa si appoggia a D_2 e alla terna $(a_1\, a_3\, m)$, epperò basta trovare il quarto punto comune a D_2 e all'iperboloide determinato da quelle tre rette; conducendo per questo punto la generatrice appoggiata a queste tre rette si ha la c_{13}; e analogamente si otten-

(*) AFFOLTER, STURM, l. c.

gono le altre c. Per costruire le cinque rette b basta ricordare, che, per es., b_1 taglia a_1, c_{24}, c_{35} formanti un sistema gobbo; si deve dunque procedere come sopra.

59. Considero ora una coppia $(a_1 a_2)$, di cui sia $(b_1 b_2)$ la coppia delle bisecanti; pel quadrilatero $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$ e per D_2 passa una (sola) superficie di 2° grado, per cui le 6, 6 rette che tagliano 1, 0 rette delle a_1, a_2 tagliano rispettivamente 0, 1 rette delle b_1, b_2. Le sei zerosecanti delle a non sono altro che le tre ulteriori secanti di b_1 e le tre ulteriori secanti di b_2, e le indico rispettivamente con m_1, m_2, m_3; m'_1, m'_2, m'_3, dove, per una proprietà già veduta, posso supporre che ognuna delle m tagli le due m' aventi indici diversi. Lo stesso si dica per le sei unisecanti delle a, perchè esse sono zerosecanti delle b, e le indico con n_1, n_2, n_3; n'_1, n'_2, n'_3, dove, come sopra, posso supporre che ognuna delle n tagli le due n' aventi indici differenti. La retta m_1 taglia le m'_2, m'_3, b_1, quindi deve tagliare due altre rette che si troveranno fra le n, n'; ma, poichè le a_1, b_1 formano un pajo, ognuna delle altre quattro rette appoggiate ad a_1 deve tagliare una (sola) delle altre quattro rette appoggiate a b_1, e poichè m_1 non taglia b_2 dovrà tagliare una delle n_1, n_2, n_3, che supporrò sia n_1; cioè posso supporre in generale che m_i, m'_i taglino n_i, n'_i. Da tutto ciò risulta che le rette m, m' come pure le n, n' formano i due (soli) esalateri gobbi $(m_1 m'_2 m_3 m'_1 m_2 m'_3)$, $(n_1 n'_2 n_3 n'_1 n_2 n'_3)$: essi formano un *doppio esalatero (Doppelsechsseit),* e si diranno *conjugati;* ogni retta dell'uno ne taglia due dell'altro. Dato un esalatero qualunque $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)$, le superficie del 4° ordine passanti pe' suoi lati e aventi D_2 per conica doppia formano un fascio, la cui curva base è completata dalle due altre rette b_1, b_2 (che si ottengono ciascuna linearmente) che tagliano rispettivamente D_2, a_1, a_3, a_5; D_2, a_2, a_4, a_6, e queste due rette formano una coppia, perchè se si tagliassero si potrebbero formare i due quadrilateri $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_6 \end{vmatrix}$ aventi tre rette comuni. Non essendovi oltre alle b_1, b_2 altra retta della superficie che goda di quella proprietà, si vede che *gli esalateri ottenuti col metodo sopra esposto sono tutti e soli i possibili.* Essi sono dunque tanti quante sono le coppie, cioè 80, e si può anche dire che essi corrispondono a coppie (formanti un doppio esalatero) ai 40 quadrilateri gobbi, di guisa che ognuno dei 40 doppi esalateri è formato colle dodici rette escluse dai singoli 40 quadrilateri.

Questi numeri si possono anche trovare cercando di quanti esalateri fa parte una retta. Indicando la retta con a_1, e con $(a_2 a_6)$ una delle dieci coppie che si possono formare colle sue secanti, la a_6 oltre alla a_1 ed all'altra bisecante della coppia $(a_2 a_6)$ ha ancora tre secanti, di cui una sia a_5. La a_2 ha pure cinque secanti, di cui una è a_1, un'altra taglia anche a_6 e due altre tagliano anche a_5, e tutte queste non servono allo scopo; la quinta retta a_3 tagliata da a_2 è appoggiata a cinque rette, di cui una è a_2, due tagliano anche a_6 e due tagliano anche a_5; ma di queste due ultime una seca pure a_1, epperò il moltilatero si chiude da sè, e in modo unico, con una retta a_4 appoggiata ad a_3 e ad a_5. Pertanto *non si possono formare moltilateri aventi più di sei lati* (*); di più *ogni retta della superficie appartiene a* 30 *esalateri, e il numero totale dei medesimi è quindi* $\frac{16 \cdot 30}{6} = 80$.

60. Dato un esalatero, per costruirne il conjugato basta cercare la coppia delle sue zerosecanti, e trovare di essa le sei unisecanti. Ma si può anche procedere così: sia $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)$ l'esalatero, e siano b_1, b_2 le sue secanti: ognuna delle tre coppie di lati opposti $(a_1 a_4)$, $(a_2 a_5)$, $(a_3 a_6)$ ha due bisecanti, e queste sei rette formano l'esalatero conjugato al dato.

61. Sia data ora una terna $(b_1 b_2 b_3)$ avente a per trisecante: le tre ulteriori bisecanti c_1, c_2, c_3 delle tre coppie $(b_2 b_3)$, $(b_3 b_1)$, $(b_1 b_2)$ formano pure una terna, che dirò *conjugata* alla prima, e che si unisce con questa a formare la *biterna (Doppeldrei)* $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$. La terna data ha pure sei unisecanti, due per ciascuna delle sue rette, ed ognuna di esse taglia anche la retta conjugata dell'altra nella biterna, così che le due terne conjugate delle b e delle c hanno le stesse unisecanti, che dirò m'_1, m''_1; m'_2, m''_2; m'_3, m''_3, essendo m'_i, m''_i le bisecanti della coppia $(b_i c_i)$. È poi chiaro che la trisecante a della terna delle b è una zerosecante della terna delle c; infine delle tre zerosecanti g, g', g'' delle b_i, una, ad es. la g, taglia le altre due, epperò a taglia g', g'' e non g, di modo che si ha il quadrilatero $\begin{vmatrix} a & g' \\ g'' & g \end{vmatrix}$. La trisecante delle c_i, dovendo essere zerosecante delle b_i, sarà una delle g, g', g''; ma nel quadrilatero $\begin{vmatrix} b_1 & c_3 \\ a & b_2 \end{vmatrix}$ le g', g'' tagliano già la a per cui la trisecante delle c_i è la retta g. Epperò le c_i hanno per zerosecanti le a, g', g'', di cui

(*) Lo stesso vale per la superficie di 3° ordine. V. AFFOLTER, STURM, l. c.

la prima taglia le altre due. Si ha quindi la biquadrupla $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & g \\ c_1 & c_2 & c_3 & a \end{vmatrix}$.

Riassumendo *le due terne conjugate delle b_i e delle c_i hanno le stesse sei unisecanti, e le stesse due zerosecanti che sono secate dalla terza; la terza zerosecante dell'una è invece trisecante dell'altra e reciprocamente.*

Ora si dimostra facilmente che ogni m'_i taglia una delle m'_h, m''_h e una delle m'_k, m''_k $(i, h, k = 1, 2, 3)$, ed essendo arbitraria la notazione si può supporre che la m'_i tagli le due m'' aventi indici diversi, col che si ottiene la biterna $\begin{vmatrix} m'_1 & m'_2 & m'_3 \\ m''_1 & m''_2 & m''_3 \end{vmatrix}$. Le due terne conjugate delle m'_i, m''_i hanno ciascuna una trisecante, che, dovendo essere zerosecante sia delle b_i, che delle c_i, si può supporre sia rispettivamente g', g'', potendosi ancora scambiare le m'_i colle m''_i. Infine le zerosecanti delle m'_i sono le due trisecanti a, g delle b_i e c_i rispettivamente, e la trisecante g'' delle m''_i; invece le zerosecanti delle m''_i sono le a, g, g'. Da tutto ciò si raccoglie che la biterna delle b_i, c_i, dà l'esalatero gobbo $(b_1 c_2 b_3 c_1 b_2 c_3)$, e la biterna delle m'_i, m''_i dà l'esalatero conjugato $(m'_1 m''_2 m'_3 m''_1 m'_2 m''_3)$; le due zerosecanti del primo sono g', g'', e le sue due secanti sono a, g. Ogni terna dà dunque un solo esalatero; ma colle rette di un esalatero si formano due terne, quindi si trova di nuovo che vi sono $\frac{160}{2} = 80$ esalateri.

È inutile fermarsi a considerare le quadruple, perchè è manifesto che quelle di 1ª specie condurrebbero alle biquadruple e ai quadrilateri, e quelle di 2ª specie di nuovo ai pentalateri.

§ 7. Poliedri formati coi 40 piani tritangenti della superficie.

62. Si è già chiamato (§ 5, n.° 36) *poliedro* il sistema (*) di più piani tritangenti, due qualunque dei quali non si taglino in una retta della superficie; si dirà *ordine* del poliedro il numero de' suoi piani; *poliedro principale* un poliedro non contenuto in altri d'ordine superiore al suo; *piano conjugato* un piano contenente due rette poste in due piani distinti del poliedro; infine *po-*

(*) Le denominazioni che qui adopero sono le stesse che ha usate il prof. Bertini nei §§ 6 e 7 della Memoria citata, dove è fatta la stessa ricerca per la superficie del 3° ordine.

liedro conjugato ad un altro (dello stesso ordine) un poliedro che ne' suoi piani contenga, in modo diverso, le rette contenute nei piani dell'altro.

Un ν-edro ($\nu \leqq 8$) contiene 2ν rette distinte della superficie, per cui ne rimangono altre $16 - 2\nu$: se il poliedro è principale queste rette escluse devono formare un sistema gobbo, quindi deve essere

$$16 - 2\nu \leqq 5, \quad \text{ossia} \quad \nu \geqq 6;$$

dunque *non esistono poliedri principali aventi meno di sei piani.* Si vedrà poi fra breve che esistono effettivamente di tali poliedri aventi 6, 7, 8 piani. Ma, siccome occorrerà in seguito e del resto si può fare molto facilmente, premetto la ricerca di tutti i possibili triedri.

63. *Triedri.* Per costruire tutti i possibili triedri, il modo più ovvio ed anche più semplice è quello di considerare un diedro di ciascuna delle tre specie, ed aggiungergli un piano in tutti i modi possibili. Nel far questo sarà utile tener presenti le due seguenti proprietà che derivano immediatamente dalle cose dette nel § 2:

Coi piani di uno stesso ottaedro di 1ª specie (che d'ora innanzi dirò semplicemente ottaedro) *non si possono formare diedri di 2ª specie, ma soltanto di 1ª e di 3ª.*

Due piani appartenenti a due diversi ottaedri formano sempre un diedro di 2ª specie.

Premesso questo, siano $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$ i piani di un diedro di 1ª specie, appartenenti all'ottaedro 0_1; per formare con essi dei triedri si possono, in primo luogo, aggiungere i sei piani rimanenti di 0_1, ed ognuno di essi formerà con uno dei due piani dati un diedro di 1ª specie e coll'altro un diedro di 3ª. Si ottengono così sei triedri del tipo $\left(\begin{matrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ c_1 \quad c_2 \end{matrix}\right)$, dove i tratti di linea sono qui, come sempre in seguito, impiegati a denotare che le rette da essi congiunte si tagliano. Un triedro di questa natura, contenente due diedri di 1ª e uno di 3ª specie, si dirà *di 4ª specie.* Se si chiama 0_2 l'ottaedro cui appartengono i due piani conjugati $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, aggiungendo ai due piani dati ciascuno dei sei piani rimanenti di 0_2, si hanno sei triedri del tipo $\left(\begin{matrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ c_1 \searrow c_2 \end{matrix}\right)$.

Un triedro di questa natura, contenente un diedro di 1ª e due di 2ª specie, si dirà *di 5ª specie.* Se si ricorda che per una retta della superficie passa un solo piano di ciascuno dei cinque ottaedri di 1ª specie, si vede súbito che a formare triedri col diedro dato non rimangono che 12 piani appartenenti tutti agli altri tre ottaedri, di cui non si è ancor fatto parola.

Se $(c_1 c_2)$ è uno qualunque di essi e si suppone che nel quadrilatero $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ la c_1 tagli per es. la a_1, la c_2 dovrà tagliare b_2, altrimenti il piano $(c_1 c_2)$ apparterrebbe ad uno degli ottaedri 0_1, 0_2. Si hanno dunque 12 triedri del tipo $\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \atop c_1 \;\; c_2\right)$. Un tal triedro, contenente un diedro di 1ª e due di 2ª specie, si dirà *di 6ª specie.*

Se è dato ora un diedro di 2ª specie $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, i cui piani appartengono quindi a due diversi ottaedri, la retta a_1 ha altre tre secanti, di cui una taglia anche la b_2, e le altre due no. Indicando con c_1 la prima di queste rette, per essa passa un solo piano $(c_1 c_2)$ dell'ottaedro a cui appartiene il piano $(a_1 a_2)$, epperò c_2 taglia a_2, e si ha così un triedro della 5ª specie. Se invece è m_1 una delle altre due secanti di a_1 ed $(m_1 m_2)$ il piano appartenente all'ottaedro cui appartiene $(a_1 a_2)$, la m_2 taglia a_2, poi deve tagliare una delle b_1, b_2 perchè il piano $(m_1 m_2)$ è in un ottaedro diverso da quello a cui appartiene il piano $(b_1 b_2)$, e precisamente deve tagliare b_2, altrimenti i piani $(a_1 b_1)$, $(m_1 m_2)$ farebbero parte di un medesimo ottaedro. Si hanno dunque due triedri della 6ª specie. Nell'ottaedro a cui appartiene $(a_1 a_2)$ si hanno da ultimo due altri piani, che non contengono rette appoggiate ad a_1, e che col piano $(a_1 a_2)$ formano perciò un diedro di 3ª specie.

Se $(c_1 c_2)$ è uno di questi due piani, esso ed il piano $(a_1 b_1)$, essendo in due ottaedri diversi, formano un diedro di 2ª specie, epperò b_1 deve tagliare una delle c_1, c_2 e si avrà un triedro della specie $\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}\right.$. Un triedro di questa natura, contenente due diedri di 2ª specie ed uno di 3ª, si dirà *di 7ª specie.* Lo stesso si può ripetere considerando l'ottaedro a cui appartiene il piano $(b_1 b_2)$. Se ora considero i piani appartenenti all'ottaedro 0 a cui appartiene il piano $(a_1 b_1)$, essi dànno triedri in cui vi sono tre diedri di 2ª specie. La retta a_1 taglia altre tre rette, di cui una, come già si disse, taglia anche b_2; il piano di 0 passante per una tal retta contiene quindi anche b_2, epperò non è da considerarsi. Se invece è m_1 una delle altre due rette ed $(m_1 m_2)$ il piano di 0 passante per essa, la m_2 dovrà tagliare b_1, e si hanno così due triedri del tipo $\left(\left(\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}\right.\right.$. Un tale triedro si dirà *di 8ª specie.* Nell'ottaedro 0 restano altri tre piani, che non contengono rette tagliate da a_1, e quindi contengono ciascuno una retta tagliata da a_2 e nessuna retta tagliata da b_1. Ora la coppia $(a_2 b_2)$ ha due bisecanti e i piani di 0 passanti per esse dànno quindi due triedri del tipo $\left(\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}\right)$ e che dirò *di 2ª specie.*

Considerando infine la quinta retta appoggiata ad a_2, il piano di 0 che passa per essa contiene un'altra retta che taglia b_2, e si ha così un triedro del tipo $\left(\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}\right)$ e che dirò *di 3ª specie.* Considero adesso i piani dei due ottaedri non ancora presi in esame, di cui indico con 0 uno qualunque. Il piano di 0 passante per l'altra bisecante della coppia $(a_1 b_2)$ dà manifestamente un triedro dell'8ª specie. Delle altre due secanti di a_1, una è tale che il piano di 0 passante per essa contiene la retta a_1, quindi non serve allo scopo; rimane un'altra retta, per la quale il piano appartenente ad 0 dà un triedro che è della 2ª specie. Se si considerano finalmente le tre rette secanti a_2 (oltre a quella che in 0 darebbe un piano contenente a_2) una taglia pure la b_1, e dà quindi un triedro ancora dell'8ª specie; invece una qualunque delle altre due si indichi con c_2 e sia $(c_1 c_2)$ il piano di 0 passante per essa; allora poichè i piani $(a_1 b_1)$, $(c_1 c_2)$ appartengono ad ottaedri diversi e la a_1 non seca nessuna delle c_1, c_2, dovrà una di queste essere secata da b_1, ma non già la c_2 perchè il piano passante per la bisecante della coppia $(a_2 b_1)$ fu già considerato. Si hanno dunque due altri triedri della 2ª specie.

Considero infine un diedro di 3ª specie $\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}$, i cui piani appartengono quindi ad uno stesso ottaedro 0. La retta a_1 taglia altre quattro rette, e i piani di 0 passanti per esse formano col piano $(a_1 a_2)$ un diedro di 1ª specie. Se $(c_1 c_2)$ è uno di tali piani si ha dunque il quadrilatero $\left|\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}\right|$ da cui si rileva che anche il piano $(b_1 b_2)$ deve formare un diedro di 1ª specie col piano $(c_1 c_2)$. Si hanno così quattro triedri di 4ª specie. Gli altri tre piani dell'ottaedro 0 non contengono rette tagliate da a_1, quindi neppure rette tagliate da a_2, nè da b_1, nè da b_2 e si hanno con ciò tre triedri del tipo $\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}$. Un tal triedro è definito dal dover contenere tre diedri tutti di 3ª specie, e si dirà *di 1ª specie.* Se infine è $(c_1 c_2)$ un piano qualunque dei quattro ottaedri rimanenti, dovendo esso col piano $(a_1 a_2)$ formare un diedro di 2ª specie, una delle sue rette, per es. la c_1, dovrà tagliare una delle a_1, a_2, per es. la a_1. Allora i piani $(a_1 c_1)$, $(b_1 b_2)$ sono in ottaedri diversi, quindi c_1 deve tagliare b_1 e si hanno con ciò 16 triedri della 7ª specie.

Riassumendo: un diedro di 1ª specie appartiene a 6 triedri di 4ª specie, 6 di 5ª, 12 di 6ª; un diedro di 2ª specie appartiene a 6 triedri di 2ª specie, 1 di 3ª, 2 di 5ª, 4 di 6ª, 4 di 7ª, 6 di 8ª; un diedro di 3ª specie appartiene a 3 triedri di 1ª specie, 4 di 4ª, 16 di 7ª. Le 8 specie di triedri sono ordinatamente le seguenti:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}, \quad \left(\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}\right), \quad \left(\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}\right), \quad \left(\begin{matrix} \left(\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}\right) \\ c_1 \quad c_2 \end{matrix}\right), \quad \left(\begin{matrix} \left(\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}\right) \\ c_1 \quad c_2 \end{matrix}\right.,$$

$$\left(\begin{matrix} \left(\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}\right. \\ c_1 \quad c_2 \end{matrix}\right), \quad \left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}\right., \quad \left(\begin{matrix} \left(\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}\right. \\ c_1 \quad c_2 \end{matrix}\right..$$

Vi sono dunque in tutto 4780 *triedri, di cui* 60 *di 1ª specie,* 960 *di 2ª,* 160 *di 3ª,* 240 *di 4ª,* 480 *di 5ª,* 960 *di 6ª,* 960 *di 7ª,* 960 *di 8ª.* All'infuori di quelli della 1ª specie, tutti hanno almeno 2 e al più 4 piani conjugati; soltanto quelli della 3ª e 5ª specie ammettono un triedro conjugato, che è della stessa specie. È poi facile vedere che: *Due piani qualunque di un triedro di 3ª specie determinano il terzo,* come accade per i triedri di Steiner della superficie del 3° ordine.

64. Teorema. — *Se a, b, c sono i piani di un triedro di 2ª specie, e sono a, b, c'; a, b', c; a', b, c i piani di tre triedri di 3ª specie, anche i piani a', b', c' formano un triedro di 3ª specie* (*).

(*) Questa proprietà è la stessa di quella che il prof. Bertini (l. c., § 6, n.° 17) ha dimostrato aver luogo nella superficie di 3° ordine pei triedri da lui chiamati di 2ª e 3ª specie, e che anche sotto altri aspetti si vedrà che presentano molta analogia con quelli ora trovati nella F_4.

Sia infatti

$$\begin{array}{c|c} a & \\ b & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \\ c & \end{array} \tag{1}$$

il triedro dato di 2ª specie. Se coi piani a, b si determina il piano c' formante il triedro di 3ª specie $(a\,b\,c')$, esso deve contenere la retta c_2. In esso deve infatti esistere una retta che taglia, nei piani a e b, la a_2 e nessun'altra retta; ora delle cinque secanti di a_2, una è a_1 che si deve escludere, un'altra è l'altra bisecante (oltre a_1) della coppia $(a_2\,b_1)$, e due altre sono le bisecanti della coppia $(a_2\,b_2)$, epperò non rimane che la c_2. Si ha dunque necessariamente il triedro di 3ª specie

$$\begin{array}{c|c} a & \\ b & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c'_1 & c_2 \end{pmatrix}, \\ c' & \end{array} \tag{2}$$

dove la c'_1 è una retta affatto determinata, essendo quella bisecante della coppia $(b_2\,c_2)$ che non taglia a_1. Dati i piani a, c, il piano (unico) b' che con essi forma un triedro di 3ª specie non può contenere nè b_1 nè b_2, perchè b_1 taglia entrambe le a_1, c_1, mentre b_2 non ne taglia alcuna. Quel triedro sarà dunque:

$$\begin{array}{c|c} a & \\ b' & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b'_1 & b'_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}. \\ c & \end{array} \tag{3}$$

Volendo infine formare il triedro di 3ª specie coi piani b, c, si è ancora nel primo dei casi precedenti, cioè il piano a' deve contenere la retta a_2, e si ha il triedro:

$$\begin{array}{c|c} a' & \\ b & \begin{pmatrix} a'_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}. \\ c & \end{array} \tag{4}$$

Allora si può dimostrare che a'_1 taglia una delle b'_1, b'_2. Invero cerco la retta che completa il quadrilatero $\left|\begin{matrix} b'_1\ b'_2 \\ c_1 \end{matrix}\right|$: questa retta non può essere a_1, perchè per la (1) essa non taglia c_1, non può essere a_2 nè b_2 per la stessa ragione, nè può essere b_1, perchè questa tagliando a_1 non può tagliare la b'_1 per la (3); non può essere c_2, perchè per la (3) non seca b'_1, nè infine è la a'_1 o la c'_1 per la (4). Quella retta sarà dunque una certa m non compresa fra le precedenti, e si avrà il quadrilatero $\begin{vmatrix} b'_1 & b'_2 \\ m & c_1 \end{vmatrix}$. Allora la retta a_2 non secando quivi alcuna delle c_1, b'_1, b'_2 dovrà secare m, epperò a'_1 non potrà tagliarvi la m, perchè taglia a_2, e non potendo tagliarvi la c_1 taglierà una delle b'_1, b'_2. Ma non è possibile che a'_1 tagli b'_1, perchè si formerebbe il quadrilatero $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b'_1 & a'_1 \end{vmatrix}$ di cui nessuna retta sarebbe tagliata da c_1. Dunque si conclude che a'_1 taglia b'_2. Anche la c'_1 deve tagliare una delle b'_1, b'_2; cercando infatti la retta che completa il quadrilatero $\begin{vmatrix} b'_1 & b'_2 \\ a_1 & \end{vmatrix}$, con un metodo del tutto simile al precedente si trova che essa è una delle rette non ancora considerate, e sia k, talchè si abbia il quadrilatero $\begin{vmatrix} b'_1 & b'_2 \\ a_1 & k \end{vmatrix}$. La c_2, non secando alcuna delle a_1, b'_1, b'_2 deve qui tagliare la k, quindi c'_1 deve tagliarvi una delle b'_1, b'_2. Ma non può tagliarvi b'_2, altrimenti si avrebbe il quadrilatero $\begin{vmatrix} a'_1 & b'_2 \\ b_2 & c'_1 \end{vmatrix}$, di cui a_1 non taglierebbe alcuna retta. Questo dimostra che i tre piani a', b', c' formano il triedro di 3ª specie

$$\begin{array}{c|c} a' & \\ b' & \begin{pmatrix} a_2 & a'_1 \\ b'_1 & b'_2 \\ c_2 & c'_1 \end{pmatrix}, \\ c' & \end{array} \qquad \text{c. d. d.}$$

Si può anche far vedere che *delle sei rette non considerate una taglia le altre cinque* (*). Infatti se si guardano le (1), (2), (3), (4) si scorge che delle rette considerate la a_1 taglia le sole a_2, b_1, b'_1, epperò essa avrà fra le sei rette escluse due secanti p_1, p_2. Analogamente la retta c_2 taglia le a_2, c_1, c'_1, epperò deve tagliare due delle rette escluse, di cui una deve tagliare anche a_1 e sarà per es. la p_1, l'altra sarà una certa retta p_3. Così b_2 taglia le rette b_1, a'_1, c'_1, quindi deve tagliare due delle rette escluse; ora la terna $(a_1 c_2 b_2)$ ha una trisecante, la quale, non essendo a_2, dovrà essere l'altra bisecante della coppia $(a_1 c_2)$, cioè la p_1; sia poi p_4 l'altra retta appoggiata alla b_2. Si ha allora il quadrilatero $\begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, in cui la b'_2, non potendo tagliare nè a_1 nè b_2 nè c_2,

(*) Circa la proprietà analoga che vale per la superficie del 3° ordine (Bertini, l. c.) si può similmente dimostrare che *le dodici rette che non entrano nei triedri là considerati formano una bissestupla.*

deve tagliare p_1. Dunque p_1 delle rette finora nominate taglia a_1, b_2, c_2, b'_2, quindi deve tagliare una delle due rimanenti p_5, p_6, e sia ad es. la p_6. Questa retta p_6 non taglia a_1, come si vede osservando il quadrilatero precedente, neppure taglia b_1, altrimenti la coppia $(b_1 p_1)$ avrebbe tre bisecanti, cioè a_1, b_2, p_6, e neppure taglia b'_1, altrimenti la coppia $(b'_1 p_1)$ avrebbe le tre bisecanti a_1, b'_2, p_6; dunque essa deve tagliare le altre due secanti di a_1, cioè p_1 e p_2. Collo stesso metodo si dimostra che p_6 taglia p_3 e p_4 e quindi anche p_5, c. d. d.

65. Prendo ora a considerare i poliedri principali cominciando dagli esaedri. Qui vi sono due casi da distinguere, a seconda che le quattro rette escluse formano una quadrupla di 1ª oppure di 2ª specie; in corrispondenza a questi due casi l'esaedro si dirà *di 1ª* oppure *di 2ª specie.*

Esaedro principale di 1ª specie. Sia $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ una quadrupla di 1ª specie, e $(b_1 b_2 b_3 b_4)$ la sua conjugata, che colla prima dà luogo alla biquadrupla $B \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$; sia $B' \equiv \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & b'_4 \end{vmatrix}$ la biquadrupla conjugata, di modo che le rette a_i, b_i taglino in B' le rette a'_i, b'_i. Per formare degli esaedri ne' cui piani vi siano tutte e sole le rette b_i, a'_i, b'_i bisogna combinare ciascuna delle b_i con una delle a'_i, b'_i che essa taglia in B', ma in modo che le quattro rimanenti di B' si possano disporre in due piani. Questo non si può fare se non combinando colle b_i le rette di uno qualunque de' sei quadrilateri che entrano in B', ed ognuna di tali combinazioni fornisce poi due esaedri. Dunque:

Le rette escluse da una quadrupla di 1ª specie si possono disporre in 12 modi nei piani di un esaedro (di 1ª specie). Quindi gli esaedri principali di 1ª specie sono in numero di $40 \cdot 12 = 480$.

Il modo stesso con cui è generato un esaedro di questa specie ne pone in evidenza la conformazione necessaria; laonde per farla meglio risaltare conviene usare la notazione del n.° 12, colla quale un esaedro di 1ª specie è per es. il seguente:

$$\begin{matrix} b_5 & c_{25} \\ c_{35} & c_{14} \\ a & b_4 \\ c_{15} & c_{23} \\ c_{12} & c_{34} \\ c_{13} & c_{24}. \end{matrix}$$

È facile riconoscere che: *Un esaedro di 1ª specie si spezza, in un modo solo,* *in tre diedri, di cui uno è di 1ª specie e due sono di 3ª; tutti gli altri* 12 *diedri contenuti nell'esaedro sono di 2ª specie.*

Se si indicano con x_1, y_1 i piani del diedro di 1ª specie, e con x_3, y_3; x'_3, y'_3 quelli dei due diedri di 3ª, prendendo un piano per ciascuno di questi tre diedri in tutti i modi possibili si formano otto triedri, che a due a due si accoppiano in modo da esaurire tutti i piani dell'esaedro; due di queste quattro coppie constano di triedri di 2ª specie, una terza contiene due triedri di 3ª specie, e l'ultima due di 8ª. Combinando invece i due piani x_1, y_1 con ciascuno degli altri quattro si ottengono quattro triedri tutti di 6ª specie; i rimanenti otto triedri sono di 7ª specie. Epperò:

Un esaedro di 1ª specie si può spezzare, in due modi, in due triedri di 2ª specie, e in un modo solo in due triedri di 3ª, oppure di 8ª specie. Esso si può anche spezzare, in un modo solo, in un diedro di 1ª specie e in un tetraedro i cui quattro triedri sono di 7ª specie. Infine i piani di un esaedro principale di 1ª specie passano due per un punto di Kummer, due per un altro e due per un terzo, di modo che si ha un vero esaedro non degenere.

66. *Esaedro principale di 2ª specie.* Sia $(b_1 b_2 b_3 b_4)$ una quadrupla di 2ª specie, a la sua quadrisecante e b_5 la quinta retta appoggiata ad a: se esistono esaedri contenenti nei loro piani le dodici rette escluse dalla quadrupla, uno dei loro piani deve essere necessariamente il piano $(a\, b_5)$. Ora si è veduto al n.º 56 che le altre dieci rette (zerosecanti di a) formano sei doppi pentalateri, ognuno dei quali dà luogo ad un pentaedro contenente quelle dieci rette; aggiungendo ad esso il piano $(a\, b_5)$ si ottiene uno degli esaedri cercati.

Per dimostrare che questi sono gli unici, indico con $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(c_1 c_2)$, $(d_1 d_2)$, $(m_1 m_2)$, $(n_1 n_2)$ i piani di un esaedro qualunque contenente le rette escluse dalla quadrupla $(p_1 p_2 p_3 p_4)$ di 2ª specie avente a_1 per quadrisecante. Allora è chiaro che a_1 non taglia altre rette che le p_i e a_2, mentre a_2, non potendo tagliare alcuna delle p_i, deve tagliare (oltre ad a_1) altre quattro rette poste in quattro piani distinti dell'esaedro, e che si può supporre siano le b_2, c_2, d_2, m_2. Poichè le rette a_2, n_1 formano una coppia, devono avere due secanti comuni, cioè n_1 deve tagliare due delle rette b_2, c_2, d_2, m_2, che si può supporre siano le b_2, m_2; per la stessa ragione la n_2 deve tagliare due di quelle quattro rette, che devono perciò essere le due rimanenti d_2, c_2. Ed è facile vedere che le n_1, n_2 non possono tagliare altra retta contenuta nell'esaedro, poichè se per es. la n_1 tagliasse c_1 si avrebbe il quadrilatero $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix}$, in cui a_1 non taglierebbe alcuna retta. Il quadrilatero $\begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ c_2 & n_2 \end{vmatrix}$ fa vedere che b_1 deve tagliare una delle rette c_2, d_2 e poichè queste si possono anche scambiare fra loro, suppongo che b_1 tagli c_2. Il quadrilatero $\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ & d_2 \end{vmatrix}$ non può essere completato che dalla retta d_1, epperò d_1 taglia b_2, e quindi b_1 non taglia d_2. La b_2, la quale seca già le a_2, b_1, d_1, n_1, non può tagliare altra retta dell'esaedro, altrimenti le p_i avrebbero due zerosecanti. Il quadrilatero $\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$ mostra che c_1 deve tagliare una delle d_1, d_2, che deve essere d_2, perchè si ha pure il quadrilatero $\begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ c_2 & n_2 \end{vmatrix}$. La c_2 invece non taglia nè d_1 nè d_2. Vediamo ora quale è la retta che completa il quadrilatero $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ & c_1 \end{vmatrix}$: non dovendo essere tagliata da a_1, sarà una retta dell'esaedro, e poichè dev'essere tagliata da a_2 sarà una delle rette b_2, d_2, m_2; ma si vide poc'anzi che c_1 non taglia d_2, di più il quadrilatero $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$ mostra che c_1 e b_2 non si tagliano, dunque la retta che si cerca è m_2. Pertanto m_2 taglia c_1, e quindi m_1 non taglia c_2. Allora dal quadrilatero $\begin{vmatrix} d_2 & a_2 \\ n_2 & c_2 \end{vmatrix}$ risulta che m_1 seca d_2, e quindi m_2 non taglia nè d_1 nè d_2; infine il quadrilatero $\begin{vmatrix} d_2 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{vmatrix}$ mostra che b_1 taglia una delle m_1, m_2, e questa non può essere m_2, perchè si ha il quadrilatero $\begin{vmatrix} m_2 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, dunque b_1 taglia m_1, e quindi b_2 non taglia nè m_1 nè m_2. L'esaedro ha dunque la conformazione espressa, mediante la notazione solita, nel modo seguente:

$$\begin{matrix} a & b_2 \\ c_{45} & c_{23} \\ c_{34} & c_{12} \\ c_{15} & c_{24} \\ c_{13} & c_{25} \\ c_{14} & c_{35}, \end{matrix}$$

cioè è uno di quelli che si sono trovati precedentemente. Il doppio pentalatero corrispondente è $(b_1\, c_1\, n_2\, d_2\, m_1)$, $(b_2\, n_1\, m_2\, c_1\, d_1)$, ossia, colla notazione, $(c_{45}\, c_{12}\, c_{35}\, c_{24}\, c_{13})$, $(c_{23}\, c_{14}\, c_{25}\, c_{34}\, c_{15})$. Concludendo si ha:

Le rette escluse da una quadrupla di 2ª specie si possono disporre in sei modi nei piani di un esaedro (di 2ª specie). Quindi gli esaedri principali di 2ª specie sono in numero di $80 \cdot 6 = 480$.

67. Si è dunque veduto che un esaedro di 2ª specie si spezza, in un modo solo, in un piano y e in un pentaedro $(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$. Fra i piani del pentaedro ve ne è uno, ed uno solo, che accoppiato col piano y dà un diedro di 3ª specie, mentre gli altri 14 diedri sono tutti di 2ª specie. Se è (y, x_3) il diedro di 3ª specie, i quattro triedri $(y x_3 x_1)$, $(y x_3 x_2)$, $(y x_3 x_4)$, $(y x_3 x_5)$ sono di 7ª specie; invece, dei sei triedri che si ottengono aggiungendo ad y i piani x_1, x_2, x_4, x_5 a due a due, due sono di 2ª specie e quattro di 8ª; gli altri dieci triedri sono di 2ª specie. Si hanno pertanto le seguenti proprietà:

Un esaedro principale di 2ª specie si può spezzare, in un solo modo, in un diedro di 3ª specie ed in un tetraedro i cui quattro triedri sono tutti di 2ª specie. Esso si può anche spezzare, in due modi, in due triedri di 2ª specie.

Infine un esaedro di 2ª specie si spezza, in un modo solo, in un piano e in un pentaedro, i cui dieci triedri sono di 2ª specie. Reciprocamente *ogni poliedro contenente un tale pentaedro è un esaedro principale di 2ª specie.*

Questa reciproca si può manifestamente enunciare anche dicendo:

Se i triedri contenuti in un pentaedro sono tutti di 2ª specie, le dieci rette contenute ne' suoi piani sono le zerosecanti di una certa retta della superficie (*), e sotto questa forma se ne può dare più facilmente la dimostrazione.

Intanto dall'ipotesi fatta segue che tutti i diedri contenuti nel pentaedro sono di 2ª specie. Siano allora $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(c_1 c_2)$, $(d_1 d_2)$, $(m_1 m_2)$ i piani del pentaedro, e suppongo che lo si possa spezzare, secondo l'ipotesi, in un triedro $\left(\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}\right)$ di 2ª specie e in un diedro $\left(\begin{matrix} d_1 & d_2 \\ m_1 & m_2 \end{matrix}\right)$ pure di 2ª specie. La a_1 non può tagliare le b_2, c_2, nè può tagliare alcuna retta del diedro, chè, se tagliasse ad es. la d_2, dovendo il piano $(a_1 a_2)$ formare un triedro di 2ª specie con due qualunque dei tre piani $(b_1 b_2)$, $(d_2 d_1)$, $(c_1 c_2)$, le rette b_2, d_1, c_2 si taglierebbero a due a due. Questo fa anche vedere che una retta qualunque del pentaedro non può tagliarne più di altre tre. Poichè tutti i diedri contenuti nel pentaedro sono di 2ª specie, la a_2 deve dunque tagliare una retta in ognuno dei due piani $(d_1 d_2)$, $(m_1 m_2)$; ma non taglia nè d_2 nè m_2, perchè se tagliasse per es. la d_2

(*) Nell'enunciato non si è detto: Se i *diedri*, ecc., perchè è facile persuadersi che ciò può accadere senza che abbia luogo la proprietà che si vuol dimostrare.

si avrebbe il triedro $\left(\begin{matrix} a_2 & a_1 \\ d_2 & d_1 \\ m_1 & m_2 \end{matrix}\right.$ di 8^a specie, contro l'ipotesi. Dunque a_2 taglia d_1 ed m_1. Ora dico che nessuna delle d_1, m_1 può tagliare alcuna delle b_1, c_1; invero se b_1 tagliasse per es. d_1 si avrebbe il quadrilatero $\left|\begin{matrix} b_1 & a_1 \\ d_1 & a_2 \end{matrix}\right|$ in cui m_2 non taglierebbe alcuna retta. Dunque le rette b_1, c_1, d_1, m_1 formano una quadrupla, e si può dimostrare che è di 2^a specie. Infatti la coppia $(b_1 c_1)$ ha, oltre ad a_1, un'altra bisecante p che deve manifestamente essere fuori del pentaedro; così la coppia $(d_1 m_1)$ ha una seconda bisecante q che deve coincidere con p, altrimenti si avrebbero i due quadrilateri $\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & p \end{matrix}\right|$, $\left|\begin{matrix} a_2 & d_1 \\ m_1 & q \end{matrix}\right|$ e nel primo di essi tanto la d_1 quanto la m_1 non tagliando alcuna delle a_1, b_1, c_1 dovrebbero tagliare p, cioè p segherebbe due rette del secondo quadrilatero. Sia dunque p la quadrisecante della quadrupla $(b_1 c_1 d_1 m_1)$. Ricordo ora che, avendosi due rette (come a_1, a_2) formanti un pajo, delle altre quattro secanti dell'una, ciascuna taglia una (sola) delle altre quattro secanti dell'altra. Pertanto le altre due secanti di a_1 e le altre due di a_2 formano (come le b_1, c_1; d_1, m_1) una quadrupla, che è pure di 2^a specie avendo la zerosecante p. La p e queste nuove quattro rette formano una quintupla, la cui cinquisecante, esclusa dal pentaedro, è precisamente la zerosecante delle rette del pentaedro stesso; c. d. d.

In uno qualunque dei pentaedri ora considerati i diedri sono tutti di 2^a specie, quindi *i suoi piani passano ad uno ad uno pei cinque punti di Kummer.* Pertanto *i piani di un esaedro di 2^a specie passano due per un punto di Kummer, e gli altri quattro ad uno ad uno pei quattro rimanenti punti di Kummer; si ha così un esaedro non degenere.*

68. È utile soffermarsi ancora su questi notevoli pentaedri, allo scopo principalmente di mettere in evidenza la stretta analogia che corre (cfr. n.° 64) fra il sistema delle dieci rette (e dei quindici piani che le contengono a due a due) zerosecanti di una retta data di F_4, e il sistema delle quindici rette (e dei quindici piani che le contengono a tre a tre) escluse da una bissestupla di una superficie del 3° ordine. Si giunge così a vedere che i pentaedri sopra trovati tengono lo stesso posto di quelli a cui è pervenuto il sig. Cremona nella Memoria intitolata: *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal* (*).

(*) Memorie della R. Accad. de' Lincei, Serie III, vol. I, 8 aprile 1877.

Indico con a una retta della superficie, con R le sue dieci zerosecanti, con P i quindici punti comuni alle rette R a due a due, con τ i quindici piani (tritangenti) contenenti le quindici paja di rette R. È evidente che per ogni punto P passano un solo piano τ e due rette R contenute in esso piano; sopra ogni piano τ vi sono due rette R e cinque punti P; per ogni retta R passano tre piani τ. Ogni piano τ forma un diedro con altri 10; coi piani τ si possono dunque formare $\frac{15 \cdot 10}{2} = 75$ diedri, ed è chiaro che fra essi non ve ne possono essere di 1^a specie, altrimenti le quattro rette contenute nei due piani formerebbero un quadrilatero, di cui a non taglierebbe alcuna retta. Per trovare invece quanti di quei diedri sono di 2^a e quanti di 3^a specie, si osservi che se $(a_1\, b_1)$ è uno qualunque dei piani τ, la retta a_1 sarà tagliata da altre due rette R che dico a_2, a_3, e la retta b_1 da altre due che dico b_2, b_3. Considerando per es. la a_2, essa (oltre che da a_1) è tagliata da altre due rette R, di cui nessuna può secare b_1 per la ragione detta poc' anzi; ognuna di esse insieme con a_2 determina un piano τ che col piano $(a_1\, b_1)$ forma un diedro di 2^a specie. Se in luogo di a_2 si considera a_3, il piano $(a_1\, b_1)$ determina due nuovi diedri di 2^a specie. Analogamente si hanno quattro diedri di 2^a specie di cui fa parte $(a_1\, b_1)$ e che nel piano conjugato contengono b_1. Per trovare ora i diedri di 3^a specie osservo che le quattro rette a_2, a_3, b_2, b_3 formano una quadrupla, perchè se per es. a_2 tagliasse b_2 si otterrebbe il quadrilatero gobbo $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ formato con rette R. Allora, indicando con m una qualunque delle quattro R non ancora considerate, essa non può non secare alcuna delle rette della quadrupla, altrimenti le cinque rette formerebbero una quintupla la cui cinquisecante non potrebbe essere una retta R. Suppongo pertanto ad es. che m tagli a_2; dico di più che m deve tagliare una delle b_2, b_3; invero se ciò non avvenisse si avrebbe la quadrupla $(m\, a_1\, b_2\, b_3)$ priva di quadrisecante, poichè questa dovrebbe essere la b_1, mentre b_1 non taglia m; la quadrupla non ha dunque neppure zerosecanti, ciò che è assurdo, perchè è formata di sole rette R. E poichè m non può tagliare più di due delle rette a_2, a_3, b_2, b_3, la terza retta R tagliata da essa sarà una delle altre tre non ancora considerate. La m e queste tre rette sono dunque tali che ciascuna seca una, ed una sola, delle rimanenti, cioè sono contenute in due piani τ, e in due soltanto: ognuno di essi col piano $(a_1\, b_1)$ forma un diedro di 3^a specie. Si conclude che:

Un piano τ appartiene ad otto diedri di 2^a specie e a due di 3^a; coi piani τ si possono dunque formare $\frac{15 \cdot 8}{2} = 60$ *diedri di 2^a specie, e* $\frac{15 \cdot 2}{2} = 15$ *di 3^a.*

In modo del tutto analogo si trova che:

Un diedro di 2^a specie formato coi piani τ appartiene a tre triedri di 2^a specie e ad uno di 3^a; coi piani τ si possono dunque formare $\frac{60 \cdot 3}{3} = 60$ triedri di 2^a specie, e $\frac{60 \cdot 1}{3} = 20$ di 3^a. Le due suddette specie di triedri sono le uniche formate coi piani τ, e contenenti soltanto diedri di 2^a specie.

69. Come è ben naturale, le due suddette specie di triedri si comportano affatto diversamente rispetto alle rette R non contenute nei loro piani. Perocchè *le quattro rette R non contenute in un triedro di 3^a specie sono tali che tre di esse tagliano la quarta.* Se infatti $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ è il triedro di 3^a specie, e sono m_1, m_2, m_3, m_4 le altre quattro rette R, la retta a_1 taglia, oltre alle a_2, b_1, una terza retta R che sarà una delle m, per es. la m_1; ora i piani $(a_1 b_1)$, $(c_1 c_2)$ appartengono allo stesso ottaedro di 1^a specie, perchè formano un diedro di 3^a specie, quindi il piano $(a_1 m_1)$ che, avendo con $(a_1 b_1)$ la retta a_1 comune, appartiene ad un ottaedro diverso da quello cui appartiene $(a_1 b_1)$, forma col piano $(c_1 c_2)$ un diedro di 2^a specie, e poichè a_1 non taglia nè c_1 nè c_2, una di queste due rette sarà tagliata da m_1. Questa retta poi non è c_2, altrimenti si formerebbe il quadrilatero $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ m_1 & c_2 \end{vmatrix}$; dunque m_1 taglia c_1, ed oltre a questa e alla a_1 non taglia altra retta del triedro; essa deve dunque tagliare una delle tre altre rette m, per es. la m_2. È evidente che questa retta m_2 non taglia alcuna retta del triedro, epperò, oltre ad m_1, dovrà tagliare le m_3, m_4; c. d. d. Reciprocamente *se si considera una retta R e le sue tre secanti, le sei rette R rimanenti sono contenute in una coppia di triedri conjugati di 3^a specie.* Se infatti sieno m_1, m_2, m_3, m_4 le quattro rette date, di cui la prima tagli le altre tre, una qualunque a_1 delle altre sei rette R non può tagliare m_1, e neppure due fra le m_2, m_3, m_4, epperò deve tagliare due delle cinque rette R non ancora considerate, e due soltanto, altrimenti non taglierebbe alcuna delle m_i e darebbe luogo alla quadrupla $(a_1 m_2 m_3 m_4)$ di 1^a specie (perchè a_1 non taglia m_1), ciò che è assurdo, avendo la solita retta a per zerosecante. Siano dunque a_2, b_1 le due rette tagliate da a_1; per la stessa ragione la a_2 deve secare (oltre ad a_1 e ad una delle m_2, m_3, m_4) una terza retta R che indico con b_2 e che manifestamente non taglia nè a_1 nè b_1. Se infine si chiama b_3 la terza retta R tagliata da b_1, essa non può tagliare nè a_2 nè b_2, perchè se tagliasse b_2, ognuna

delle cinque rette a_1, b_1, a_2, b_2, b_3 ne taglierebbe già altre due, e la sesta retta R, non ancora considerata, non potrebbe secarne alcuna; esiste adunque una retta a_3, che non fu ancora presa in esame, la quale seca ad un tempo b_2 e b_3; e si ha quindi la coppia di triedri conjugati di 3ª specie $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_3 \\ a_3 & b_2 \end{pmatrix}$, c. d. d.

70. Se si considerano invece i triedri di 2ª specie, si hanno le seguenti proprietà che servono allo scopo, e che sono del tutto somiglianti a quelle che valgono (Cremona, l. c., n.° 9) per la superficie del 3° ordine:

Le quattro rette R escluse da un triedro di 2ª specie si dispongono in uno, e in uno solo, diedro di 2ª specie, e reciprocamente. Se infatti è $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ un triedro di 2ª specie, e sono m_1, m_2, m_3, m_4 le altre quattro rette R, la b_1 taglia le tre rette a_1, b_2, c_1, epperò le altre sei rette R, cioè le a_2, c_2, m_1, m_2, m_3, m_4, sono disposte, per la proprietà del numero precedente, nei piani di una coppia di triedri conjugati di 3ª specie; se dunque si imagina quello di questi due triedri a cui appartiene il piano $(a_2 c_2)$, si vede che le quattro rette m_i sono nei piani di un diedro di 2ª specie.

Per dimostrare la proposizione reciproca suppongo che sia $\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$ il diedro di 2ª specie; la bisecante della coppia $(m_2 m_4)$ che non taglia a è una retta R e sia designata con b_2, mentre sia b_1 la terza retta R appoggiata a b_2: allora è chiaro che b_1 non può tagliare alcuna delle m, epperò taglierà altre due rette R, che dirò a_1, c_1. Se si indicano con a_2, c_2 le due rimanenti rette R, poichè b_1 taglia le tre rette a_1, b_2, c_1, le sei rette rimanenti, pel numero precedente, devono essere disposte in due triedri, fra loro conjugati, di 3ª specie, e poichè le m_i sono in due piani di un diedro di 2ª specie, le due rette residue a_2 e c_2 devono essere in un piano. Di queste due rette una poi deve essere, per le solite proprietà, appoggiata ad a_1 e l'altra a c_1, e si ha così il triedro (unico) di 2ª specie $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$, c. d. d.

71. La proprietà dimostrata nel numero precedente stabilisce una corrispondenza univoca fra i 60 diedri di 2ª specie e i 60 triedri di 2ª specie, essendo corrispondenti due poliedri che contengano insieme le dieci rette R. Se si concepiscono un diedro e il suo triedro corrispondente, si ottiene quindi

un sistema di cinque piani τ che secano la superficie secondo le dieci rette R e queste soltanto (non tenendo conto delle cinque coniche situate nei piani stessi). La generazione di un tal pentaedro è dissimmetrica, ma è facile vedere che ogni suo spezzamento in due e tre piani fornisce un diedro e un triedro entrambi di 2ª specie. Siano infatti (1, 2), (3, 4, 5) il diedro e il triedro primitivi: se nel nuovo spezzamento il diedro consta di due piani del triedro, per es. dei piani 3 e 4, gli altri tre piani, per le proprietà dei due numeri precedenti, devono formare un triedro di 2ª specie. Se invece il diedro che nasce contiene un piano del primo diedro e uno del primo triedro, come il diedro (1, 3), i piani residui 4 e 5 del primo triedro formano un diedro di 2ª specie, quindi (1, 3, 4) è un triedro di 2ª specie, epperò (1, 3) è un diedro di 2ª specie, e per conseguenza (2, 4, 5) un triedro pure di 2ª specie.

72. Per comodo si dirà *retta p* lo spigolo di uno dei diedri di 2ª specie, *punto K* il vertice di uno dei triedri di 2ª specie, *punto S* il vertice di uno dei triedri di 3ª specie. *Esistono* 60 *rette p,* 60 *punti K,* 20 *punti S a due a due conjugati,* dicendo conjugati due punti S che sono vertici di due triedri conjugati. In uno qualunque dei pentaedri trovati vi sono dieci punti K e dieci rette p, e sono vertici e spigoli ordinatamente opposti del pentaedro stesso. Ogni retta p corrisponde ad un determinato punto K e reciprocamente, essendo corrispondenti una retta ed un punto che siano rispettivamente spigolo e vertice di un diedro e di un triedro di 2ª specie fra loro corrispondenti. Poichè un punto K non può mai essere un punto di Kummer, così *ogni punto K individua un triedro di 2ª specie, e quindi anche un pentaedro. Il numero dei pentaedri è dunque sei.* In questi sei pentaedri si hanno sei distribuzioni che si possono formare coi quindici piani τ in modo da comprendere tutte le dieci rette R. E non ve ne sono altre; se infatti se ne imagina una qualsivoglia, due qualunque $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ de' suoi piani non possono formare, come si è già veduto, un diedro di 1ª specie, quindi una almeno delle a_1, b_1 non taglierà alcuna delle a_2, b_2, e sia per es. la a_1. Questa retta a_1 taglia quindi altre due rette R oltre alla b_1, e siano m_1, m_2, che saranno poste in due piani distinti fra i tre rimanenti. Analogamente la b_1, oltre ad a_1, deve tagliare altre due rette R, che evidentemente non possono essere nè m_1, m_2 nè alcuna delle due rette della distribuzione data situate nei piani in cui giacciono le m_1, m_2, e poichè queste due rette formano una coppia, una di esse sarà o la a_2, o la b_2, epperò il diedro $\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$ è di 2ª specie.

73. Considerando uno qualunque dei sei pentaedri, ciascuno de' suoi

piani, combinato cogli altri quattro, dà quattro diedri di 2ª specie; ma si è trovato (n.° 68) che ogni piano τ appartiene ad otto di questi diedri, quindi:

Due qualunque de' sei pentaedri hanno un piano comune; ogni piano τ appartiene a due di quei pentaedri.

Questo fa vedere che per i sei pentaedri trovati si può usare la stessa notazione adoperata dal prof. Cremona (l. c., n.° 14) per i sei pentaedri a cui egli è giunto, cioè si possono indicare coi numeri romani I, II,..., VI, e allora accoppiando a due a due questi simboli, si possono con queste quindici combinazioni denotare i quindici piani τ: per es. il simbolo I · II indicherà il piano τ comune ai pentaedri I e II. Così pure si indicherà con I (II · III) la retta p spigolo del pentaedro I e comune ai piani I · II e I · III; con I (II · III · IV) il punto K vertice del pentaedro I e comune ai piani I · II, I · III, I · IV; il punto K indicato da I (II · III · IV) ha per spigolo opposto nel pentaedro I la retta p indicata da I (V · VI). Se si prendono due piani come I · II, I · III, i cui simboli hanno un indice comune, essi determinano (n.° 63) un unico triedro di 3ª specie; il simbolo del terzo piano deve avere un indice comune con entrambi i precedenti, ma non avere l'indice I, altrimenti si otterrebbe un triedro di 2ª specie, quindi il triedro avrà per terzo piano quello rappresentato da II · III; il triedro conjugato è formato dai piani IV · V, V · VI, VI · IV. Due piani τ i cui simboli non hanno indici comuni o formano un diedro di 3ª specie o si tagliano in una retta R; quindi i sei pentaedri non conducono ad una notazione simmetrica delle rette R, contrariamente a ciò che accade per la superficie del 3° ordine.

Credo inutile fermarmi sopra altre proprietà della configurazione ottenuta, e perchè valgono in generale le stesse dimostrazioni date dal prof. Cremona (l. c., n.i 15. 16, 17, 20) e perchè uscirebbero fuori dell'argomento.

74. *Ettaedri principali.* Se un ettaedro è principale, le due rette non contenute ne' suoi piani devono formare una coppia. Per agevolare il linguaggio ed ajutare la memoria nella ricerca a cui mi accingo, adopero la notazione del n.° 12, avvertendo però che i ragionamenti ne sono affatto indipendenti.

Se sono b_2, b_3 le rette della coppia che si considera, prendendole come conjugate, esse determinano una coppia di biquadruple conjugate, che è la seguente:

$$B \equiv \begin{vmatrix} b_3 & c_{12} & c_{24} & c_{25} \\ b_2 & c_{13} & c_{34} & c_{35} \end{vmatrix}, \qquad B' \equiv \begin{vmatrix} a & c_{45} & c_{15} & c_{14} \\ c_{23} & b_1 & b_4 & b_5 \end{vmatrix}.$$

Per formare degli ettaedri colle 14 rette escluse dalla coppia si possono anzitutto combinare in tre piani le rimanenti sei rette di B, e in altri quattro le rette di B'; si vede però che questa seconda operazione si può eseguire in due modi differenti, ciò che porta quindi a due specie ben distinte di ettaedri, che sono per es. i seguenti:

$$\begin{array}{cc} c_{12} & c_{34} \\ c_{25} & c_{13} \\ c_{24} & c_{35} \\ a & b_1 \\ c_{23} & c_{45} \\ b_4 & c_{14} \\ b_5 & c_{15}, \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} c_{12} & c_{34} \\ c_{25} & c_{13} \\ c_{24} & c_{35} \\ a & b_4 \\ c_{23} & c_{45} \\ b_1 & c_{14} \\ b_5 & c_{15}, \end{array}$$

e che dirò rispettivamente *di 1ª* e *di 2ª specie.*

In quelli della 1ª specie i primi tre piani sono determinati da uno qualunque di essi, invece i quattro ultimi da due qualunque di essi. Si ottengono quindi $2 \cdot 3 = 6$ di questi ettaedri. In quelli della 2ª specie i primi tre piani sono determinati, come dianzi, da uno qualunque di essi, e i quattro ultimi da due qualunque di essi; per cui si hanno $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ di questi ettaedri.

Per avere altre specie di ettaedri bisogna combinare le rette dell'una biquadrupla con parte di quelle dell'altra; non si possono però combinare tutte le sei rette rimanenti di B con sei di B', altrimenti le rette a, c_{23} resterebbero escluse dall'ettaedro. Comincio anzitutto a combinare due rette conjugate di B con due rette pure fra loro conjugate di B' e secanti le precedenti; poi combino fra loro le rette di B (ciò che si può fare in un solo modo) e fra loro le rette rimanenti di B' (ciò che si può fare in due modi). Ora, fissate le due coppie di rette conjugate in B e B', per es. le $(c_{25}\, c_{35})$, $(c_{14}\, b_5)$, la loro combinazione si può fare in due modi, ciascuno dei quali fornisce due ettaedri, e poichè di quelle coppie di coppie di rette conjugate se ne hanno tre, così vi sono $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ di questi ettaedri che dirò *di 3ª specie.* Uno di essi è il seguente:

$$\begin{array}{ll} c_{25} & c_{14} \\ c_{35} & b_5 \\ c_{12} & c_{34} \\ c_{24} & c_{13} \\ a & b_4 \\ c_{23} & c_{45} \\ b_1 & c_{15}. \end{array}$$

Quando, come si fece ora, si combina una coppia di rette conjugate di B con una coppia di rette pure conjugate di B', è chiaro che non si possono poi combinare fra loro altre coppie analoghe; si hanno però altre combinazioni che forniscono nuove specie di ettaedri. Se si sono per es. combinate le c_{25}, c_{35} rispettivamente colle c_{14}, b_5, si possono poi combinare fra loro le c_{13}, c_{24} e poscia combinare le c_{12}, c_{34} rispettivamente colle b_1, c_{15}, e quindi le a, c_{45} colle b_4, c_{23}; oppure si possono combinare fra loro ancora le c_{13}, c_{24}, ma poi le c_{12}, c_{34} rispettivamente colle c_{45}, b_4, e quindi le a, c_{23} colle b_1, c_{15}. Si hanno così ordinatamente gli ettaedri:

$$\begin{array}{ll} c_{25} & c_{14} \\ c_{35} & b_5 \\ c_{13} & c_{24} \\ c_{12} & b_1 \\ c_{34} & c_{15} \\ a & b_4 \\ c_{45} & c_{23}, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} c_{25} & c_{14} \\ c_{35} & b_5 \\ c_{13} & c_{24} \\ c_{12} & c_{45} \\ c_{34} & b_4 \\ a & b_1 \\ c_{23} & c_{15}, \end{array}$$

che dirò rispettivamente *di* 4^a e *di* 5^a *specie.*

La loro differenza consiste in ciò che mentre nel primo di essi le due rette c_{25}, c_{12}, formanti una coppia, di B tagliano le rette c_{14}, b_1, formanti un pajo, di B', nel secondo invece esse tagliano le due rette c_{14}, c_{45} formanti pure una coppia; e lo stesso vale per le rette c_{35}, c_{34} di B formanti un sistema gobbo. Di ciascuna di queste due specie se ne hanno $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Vi è un ultimo modo di appajare le rette escluse dalla coppia che si considera, e consiste nel combinare due rette secantisi di B rispettivamente con due rette secantisi di B', e le quattro rimanenti di B fra loro, e quindi pure le sei rimanenti di B'

fra loro. Questo si può però fare in due modi differenti come appare per es. dai due ettaedri che scrivo:

$$\begin{array}{cccccc} a & b_4 & \qquad & a & b_1 \\ c_{23} & c_{45} & & c_{23} & c_{45} \\ c_{12} & b_1 & & c_{25} & c_{14} \\ c_{35} & c_{14} & & c_{34} & b_4 \\ c_{13} & c_{24} & & c_{12} & c_{35} \\ c_{34} & c_{25} & & c_{13} & c_{24} \\ b_5 & c_{15}, & & b_5 & c_{15}, \end{array}$$

e che dirò rispettivamente *di 6ª* e *di 7ª specie.*

La loro differenza proviene da ciò, che in quelli della 6ª specie le due bisecanti a, c_{23} della coppia esclusa si appajano rispettivamente colle rette c_{45}, b_4 formanti un pajo, mentre nella 7ª specie esse si appajano rispettivamente colle rette c_{45}, b_1 formanti una coppia. Per vedere il numero di questi ettaedri si osservi che nella B vi sono sei paja come $(c_{12}\,c_{35})$, a ciascuno delle quali se ne possono far corrispondere due di B' come $(b_1\,c_{14})$; allora le rette di B restano combinate in un solo modo, mentre quelle di B' lo restano in due; epperò vi sono $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ ettaedri della 6ª specie. Nella 7ª specie invece una volta fissato il pajo di B e il pajo corrispondente di B', le rette di B, come pure quelle di B', si dispongono in una sola maniera; laonde della 7ª specie vi sono $6 \cdot 2 = 12$ ettaedri.

Riassumendo e ricordando che colle 16 rette si formano 80 coppie si ha:

Le 14 *rette escluse da una coppia si possono disporre in* 90 *modi nei piani di un ettaedro; di questi ettaedri (principali)* 6 *sono di 1ª specie,* 12 *di 2ª,* 12 *di 3ª,* 12 *di 4ª,* 12 *di 5ª,* 24 *di 6ª,* 12 *di 7ª. Esistono dunque in tutto* 7200 *ettaedri principali, di cui* 480 *di 1ª specie,* 960 *di 2ª,* 960 *di 3ª,* 960 *di 4ª,* 960 *di 5ª,* 1920 *di 6ª,* 960 *di 7ª.*

75. Il modo con cui sono state generate le sette specie di ettaedri principali ne mostra anche la conformazione, e non è difficile trovare quali e quanti diedri e triedri contenga ciascuna di esse. Ho fatta questa ricerca non solo per gli ettaedri, ma anche per ognuna delle sei specie di ottaedri a cui sono giunto nel § 5; per abbreviare e presentare ad un tempo i risultati in modo più prospettivo, scrivo i numeri che ho ottenuti nella tavola seguente, in cui ho poste per maggior compitezza anche le due specie di esaedri principali; nell'ultima colonna a destra i numeri indicano quanti piani del poliedro considerato passano per ciascun punto di Kummer.

Poliedri principali	Numero dei poliedri principali	Numero dei diedri di 1ª specie	2ª specie	3ª specie	Numero dei triedri di specie 1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	Passaggio pei punti di Kummer
Esaedro di 1ª specie	480	1	12	2	—	4	2	—	—	4	8	2	2, 2, 2
» 2ª »	480	—	14	1	—	12	—	—	—	—	4	4	2, 1, 1, 1, 1
Ettaedro di 1ª specie	480	6	11	4	1	2	1	9	4	8	8	2	5, 1, 1
» 2ª »	960	4	15	2	—	4	1	2	6	10	8	4	3, 3, 1
» 3ª »	960	3	17	1	—	4	3	1	2	11	4	10	3, 2, 1, 1
» 4ª »	960	2	19	—	—	14	—	—	3	7	—	11	2, 2, 1, 1, 1
» 5ª »	960	4	15	2	—	4	2	4	3	9	6	7	4, 1, 1, 1
» 6ª »	1920	3	17	1	—	8	1	1	4	9	4	8	3, 2, 1, 1
» 7ª »	960	3	17	1	—	10	—	1	5	8	4	7	3, 2, 1, 1
Ottaedro di 1ª specie	5	16	—	12	8	—	—	48	—	—	—	—	8
» 2ª »	80	10	12	6	2	—	—	18	12	12	12	—	6, 2
» 3ª »	60	8	16	4	—	—	—	8	16	16	16	—	4, 4
» 4ª »	120	6	20	2	—	8	—	4	12	16	8	8	4, 2, 2
» 5ª »	240	6	20	2	—	8	—	4	12	16	8	8	4, 2, 2
» 6ª »	200	4	24	—	—	12	2	—	6	18	—	18	2, 2, 2, 2

Come si è già fatto osservare nel n.° 46, è notevole che i due ottaedri di 4ª e 5ª specie abbiano nella presente tavola gli stessi numeri, mentre rispetto alle quaderne di quadrilateri essi si comportano del tutto diversamente.

76. Ricordando la genesi delle differenti specie di poliedri, e avendo riguardo alla tavola del numero precedente si potrebbero senza difficoltà ricavare diverse loro proprietà, relative per es. ai loro più importanti spezzamenti in altri poliedri di ordine inferiore, come se ne ebbero già esempi per gli esaedri. Ma per non dilungarmi troppo mi limito ad accennarne soltanto alcuni.

Se si considera l'ettaedro principale di 1ª specie, i due triedri T'_2, T''_2 di 2ª specie in esso contenuti hanno in comune un diedro di 2ª specie, e comprendono quindi in tutto quattro piani, mentre i tre piani rimanenti formano un triedro T_4 di 4^a specie, e i due piani non comuni sono contenuti nell'unico triedro T_1 di 1^a specie contenuto nell'ettaedro. Invece i due triedri T'_8, T''_8 di 8^a specie hanno in comune il diedro stesso comune a T'_2, T''_2, mentre i tre piani rimanenti formano il triedro T_1, e i due piani non comuni sono contenuti in T_4. I triedri T_1 e T_4 hanno allora in comune il terzo piano, e questo coi due piani comuni alle due coppie di triedri T'_2, T''_2; T'_8, T''_8 forma il triedro T_3 (unico) di 3^a specie contenuto nell'ettaedro. Ricordando la genesi dell'ettaedro stesso data al n.° 74, si vede che il triedro T_3 contiene ne' suoi piani le sei rette ulteriori della biquadrupla B; i quattro piani rimanenti, contenenti le rette di B', formano un tetraedro i cui quattro triedri sono tutti di 4^a specie. I cinque piani dell'ettaedro, che si ottengono tralasciando il diedro di 2^a specie comune a T'_2, T''_2 ed a T'_8, T''_8, formano un pentaedro i cui dieci triedri sono il triedro T_1 di 1^a specie ed i nove triedri di 4^a specie.

77. Se si considera invece un ettaedro di 2^a specie, esso contiene un unico triedro di 3^a specie contenente ne' suoi piani le residue sei rette di B, mentre gli altri quattro piani formano un tetraedro i cui triedri sono tutti di 5^a specie. Gli altri due triedri di 5^a specie non hanno in comune alcun piano, per cui un ettaedro di 2^a specie si può spezzare, in un solo modo, in un piano e in due triedri di 5^a specie. Esso si può anche spezzare, in un solo modo, in un piano, che è ancora il precedente, e in due triedri di 4^a specie: il piano stesso appartiene al triedro di 3^a specie. Ognuno dei due triedri di 4^a specie ha comune un diedro di 1^a specie con uno dei due triedri di 5^a specie, ed ha comune coll'altro il terzo piano. Ecc.

78. Venendo agli ottaedri, uno di essi che appartenga alla 1^a specie si può scindere, in una sola maniera, in una coppia di tetraedri i cui triedri sono tutti di 1^a specie, ed in 18 maniere in una coppia di tetraedri i cui triedri sono tutti di 4^a specie. Si può notare un'altro carattere, oltre quello osservato nel n.° 46 rispetto al modo di comportarsi colle quaderne di quadrilateri, per il quale riescono di natura ben differente gli ottaedri di 4^a e 5^a specie. Entrambi invero contengono un tetraedro i cui triedri sono i quattro triedri di 4^a specie in essi contenuti; ma nell'ottaedro di 4^a specie il tetraedro residuo contiene triedri soltanto di 5^a specie, mentre in quello di 5^a specie il tetraedro residuo contiene triedri soltanto di 6^a specie.

Infine ognuno dei 200 ottaedri di 6^a specie (che sono i soli non degeneri) si scinde, in una sola maniera, in quattro diedri di 1^a specie, che sono gli unici in esso contenuti, e, pure in una sola maniera, in un diedro di 1ª specie ed in una coppia di triedri di 3ª specie. Ecc., ecc.

79. Da tutto quanto precede si ricava il seguente risultato generale:

Tutti i poliedri che si possono formare coi 40 *piani tritangenti sono i poliedri principali fin qui studiati e quelli contenuti in essi.*

La determinazione però di questi ultimi condurrebbe ad un grandissimo numero di specie differenti, come agevolmente si capisce anche a priori, epperò avrebbe meno interesse.

Pavia, 12 dicembre 1884.

Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten.

(*Memoria di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

INTRODUZIONE.

Il presente lavoro contiene la teoria generale di quei sistemi tripli ortogonali di superficie, ai quali appartiene un sistema di superficie colla medesima curvatura costante positiva o negativa. Una classe interessante di questi sistemi era conosciuta fin dal 1870 per i lavori del sig. Ribaucour (*). Nei Rendiconti del 15 Febbraio scorso della R. Accademia dei Lincei ho pubblicato l'enunciato di un teorema comunicatomi dal sig. Weingarten e col quale mediante costruzioni infinitesimali successive, partendo da una superficie nota a curvatura costante, si perviene ad una serie ∞^1 di tali superficie, che fanno parte di un sistema triplo ortogonale.

Nel corso delle ricerche da me fatte su questi sistemi, che ho chiamato *sistemi di Weingarten,* ho osservato che essi sono i sistemi più generali possibili della specie menzionata in principio, sicchè il teorema di Weingarten risolve completamente, per le superficie colla medesima curvatura costante, l'importante problema di associarle in serie appartenenti a sistemi tripli ortogonali.

Tutti i teoremi, che ho enunciato nella mia Nota sopra citata e nella successiva del 15 Marzo, si trovano dimostrati in questo lavoro. Il § 2 contiene la ricerca fondamentale della forma, che assume l'elemento lineare dello spazio riferito ad un sistema di Weingarten. Nel successivo § 3, mediante il teorema di Weingarten, si perviene all'effettiva dimostrazione dell'esistenza di

(*) Comptes Rendus de l'Académie, t. LXX.

questi sistemi. Il § 5 tratta delle condizioni iniziali geometriche necessarie e sufficienti per individuare un sistema di Weingarten. Rispetto a queste ultime dimostrazioni (§§ 3 e 5) è da notare che dal punto di vista analitico peccano di rigore, come quelle che ammettono l'esistenza del limite in una costruzione geometrica infinitesimale. Esse hanno perciò un carattere provvisorio, finchè i progressi della teoria delle equazioni a derivate parziali non permettano di dimostrare l'esistenza di funzioni che soddisfano a date equazioni di questa specie con determinate condizioni ai limiti. Per le equazioni che qui si presentano, le (I) o (II) § 2, sembra ben difficile che ciò possa farsi.

Del resto questa lacuna non influisce in alcun modo sugli altri principali risultati della Memoria e in particolare sono rigorosamente dimostrati i teoremi dei §§ 8, 9, ove quelle trasformazioni geometriche, che già hanno dato risultati importanti, applicate a superficie di curvatura costante negativa (pseudosferiche) isolate, vengono applicate simultaneamente a tutte le superficie pseudosferiche di un sistema di Weingarten e danno il modo di dedurre infiniti nuovi sistemi di questa specie da uno noto. Analiticamente ciò significa che, nota una soluzione delle equazioni simultanee a derivate parziali (I), si possono costruirne infinite nuove e precisamente, nel caso della trasformazione al § 8, con soli calcoli di derivazione e nel caso del § 9, sotto le ipotesi ivi fatte, con successive quadrature.

I sistemi di Weingarten che ho chiamato a flessione costante (§ 6) mi sono sembrati meritevoli di studio speciale, come quelli che più si avvicinano ai sistemi già noti di Ribaucour, e perciò ho loro dedicato i due §§ 6, 10 del lavoro.

Ho poi creduto utile di premettere (§ 1) quelle formole fondamentali relative ai sistemi tripli di superficie ortogonali, il cui uso frequentemente ricorre e di dare (§ 4) la dimostrazione di un notevole teorema di Ribaucour, che, sebbene non indispensabile in queste ricerche, le collega con altre anteriori relative ai sistemi tripli ciclici ortogonali.

Per i sistemi di Weingarten a curvatura positiva, all'infuori della loro esistenza e delle formole fondamentali che vi si riferiscono, ben pochi sono i risultati contenuti nel presente lavoro. Essi potranno formare oggetto di studî ulteriori.

§ 1.

Generalità sui sistemi tripli di superficie ortogonali.

1. Sia

$$ds^2 = H_1^2\,du^2 + H_2^2\,dv^2 + H_3^2\,dw^2 \tag{1}$$

il quadrato dell'elemento lineare dello spazio riferito ad un sistema di coordinate curvilinee ortogonali u, v, w. I coefficienti H_1^2, H_2^2, H_3^2 sono quantità essenzialmente positive e in tutto lo spazio, o in quella regione di spazio, a cui dovremo limitare le nostre considerazioni, differenti da zero (*). Con H_1, H_2, H_3 intenderemo sempre le loro radici positive, cosicchè se per direzione positiva dell'arco delle linee, lungo le quali varia soltanto il parametro u, v o w, si assume quella secondo cui cresce il parametro corrispondente, i loro incrementi positivi d'arco saranno rispettivamente:

$$H_1\,du, \qquad H_2\,dv, \qquad H_3\,dw.$$

La medesima direzione si assumerà anche come direzione positiva della normale alle rispettive superficie

$$u = \text{cost.}^e, \qquad v = \text{cost.}^e, \qquad w = \text{cost.}^e$$

del sistema triplo ortogonale.

Il raggio principale di curvatura della superficie $u = \text{cost.}^e$ lungo la sua intersezione (linea di curvatura) colla $w = \text{cost.}^e$ sarà indicato con r_{12}, il 1° indice rappresentando la superficie cui il raggio r è relativo ed il 2° il parametro che varia lungo la corrispondente linea di curvatura. Avremo così i 6 raggi principali di curvatura:

$$\underbrace{u = \text{cost.}^e}_{r_{12},\; r_{13}} \qquad \underbrace{v = \text{cost.}^e}_{r_{21},\; r_{23}} \qquad \underbrace{w = \text{cost.}^e}_{r_{31},\; r_{32}}$$

e ciascuno di essi sarà contato positivamente o negativamente secondo che la direzione, che va dal rispettivo centro di curvatura al piede della normale corrispondente coincide colla direzione positiva della normale o colla opposta. I

(*) Cfr. Beltrami: *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque*. Annali di Matematica, Serie II, t. I.

coefficienti H_1, H_2, H_3 soddisfano alle 6 equazioni fondamentali di LAMÉ (*):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)+\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial w}=0\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\right)+\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial u}=0\\
&\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\right)+\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial v}=0
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 H_1}{\partial v\,\partial w}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial H_2}{\partial w}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial v}\\
&\frac{\partial^2 H_2}{\partial w\,\partial u}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial u}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_1}{\partial w}\\
&\frac{\partial^2 H_3}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial H_1}{\partial v}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_2}{\partial u}\,.
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Viceversa se queste 6 equazioni sono soddisfatte esiste un sistema triplo ortogonale, che dà all'elemento lineare dello spazio la forma (1) e questo sistema è perfettamente individuato a meno di movimenti nello spazio (**).

Se poi con x, y, z indichiamo le coordinate Cartesiane ortogonali del punto (u, v, w) dello spazio saranno x, y, z funzioni di u, v, w, che soddisferanno alle equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial x}{\partial u}\right)=-\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial w},\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial x}{\partial u}\right)=\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},\qquad \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial x}{\partial u}\right)=\frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=-\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_2}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial w}-\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u},\\
&\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w},\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=\frac{1}{H_2H_1}\frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\\
&\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial x}{\partial w}\right)=-\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v},\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial x}{\partial w}\right)=\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u},\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial x}{\partial w}\right)=\frac{1}{H_3H_2}\frac{\partial H_2}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial v}
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

e alle altre che si ottengono cangiando x in y ed in z.

(*) *Leçons sur les coordonnées curvilignes,* pag.^{e} 76-78.

(**) Vedi per es. DARBOUX: *Sur les surfaces orthogonales;* Annales de l'École Normale Supérieure, t. III, 1866, § 8 e LIOUVILLE: *Note VI à l'Application de l'Analyse à la Géométrie par Monge.*

2. Indicando con X_1, Y_1, Z_1 i coseni di direzione positiva della normale alla superficie $u = \text{cost.}^e$ avremo:

$$X_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad Y_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad Z_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial z}{\partial u}$$

e per le convenzioni fatte rispetto ai segni

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{r_{12}}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{\partial Y_1}{\partial v} = \frac{1}{r_{12}}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial Z_1}{\partial v} = \frac{1}{r_{12}}\frac{\partial z}{\partial v},$$

da cui ponendo mente alle (4):

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u}.$$

Per gli altri 5 raggi di curvatura avremo formole perfettamente simili, cioè (*):

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{1}{r_{12}} = \dfrac{1}{H_1 H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial u}, & \dfrac{1}{r_{21}} = \dfrac{1}{H_2 H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial v}, & \dfrac{1}{r_{31}} = \dfrac{1}{H_3 H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial w} \\ \dfrac{1}{r_{13}} = \dfrac{1}{H_1 H_3}\dfrac{\partial H_3}{\partial u}, & \dfrac{1}{r_{23}} = \dfrac{1}{H_2 H_3}\dfrac{\partial H_3}{\partial v}, & \dfrac{1}{r_{32}} = \dfrac{1}{H_3 H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial w}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Siano ora $(\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$, $(\cos\xi_1, \cos\eta_1, \cos\zeta_1)$, $(\cos\lambda_1, \cos\mu_1, \cos\nu_1)$ i rispettivi coseni di direzione positiva della tangente, normale principale e binormale della linea, lungo la quale varia u soltanto e il cui arco elementare è $ds_1 = H_1 du$, come pure ρ_1, T_1 i suoi raggi di 1ª e 2ª curvatura. Abbiamo:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \cos\beta_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \cos\gamma_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial z}{\partial u}$$

e derivando queste formole rispetto ad u, tenendo conto delle (4) e delle note formole di Serret, troviamo:

$$\frac{\cos\xi_1}{\rho_1} = -\frac{1}{r_{21}}\frac{1}{H_2}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{1}{r_{31}}\frac{1}{H_3}\frac{\partial x}{\partial w}, \qquad \frac{\cos\eta_1}{\rho_1} = -\frac{1}{r_{21}}\frac{1}{H_2}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{1}{r_{31}}\frac{1}{H_3}\frac{\partial y}{\partial w},$$

$$\frac{\cos\zeta_1}{\rho_1} = -\frac{1}{r_{21}}\frac{1}{H_2}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{1}{r_{31}}\frac{1}{H_3}\frac{\partial z}{\partial w},$$

da cui quadrando e sommando

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{r_{21}^2} + \frac{1}{r_{31}^2}.$$

(*) Lamé, l. c., pag. 50.

Le precedenti possono dunque scriversi:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\xi_1 &= -\frac{r_{31}}{\sqrt{r_{21}^2+r_{31}^2}}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{r_{21}}{\sqrt{r_{21}^2+r_{31}^2}}\cdot\frac{1}{H_3}\frac{\partial x}{\partial w},\\
\cos\eta_1 &= -\frac{r_{31}}{\sqrt{r_{21}^2+r_{31}^2}}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{r_{21}}{\sqrt{r_{21}^2+r_{31}^2}}\cdot\frac{1}{H_3}\frac{\partial y}{\partial w},\\
\cos\zeta_1 &= -\frac{r_{31}}{\sqrt{r_{21}^2+r_{31}^2}}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{r_{21}}{\sqrt{r_{21}^2+r_{31}^2}}\cdot\frac{1}{H_3}\frac{\partial z}{\partial w},
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

e ne risulta

$$\begin{aligned}
\cos\lambda_1 &= \frac{r_{21}}{\sqrt{r_{21}^2+r_{31}^2}}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{r_{31}}{\sqrt{r_{21}^2+r_{31}^2}}\cdot\frac{1}{H_3}\frac{\partial x}{\partial w},\\
\cos\mu_1 &= \frac{r_{21}}{\sqrt{r_{21}^2+r_{31}^2}}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{r_{31}}{\sqrt{r_{21}^2+r_{31}^2}}\cdot\frac{1}{H_3}\frac{\partial y}{\partial w},\\
\cos\nu_1 &= \frac{r_{21}}{\sqrt{r_{21}^2+r_{31}^2}}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{r_{31}}{\sqrt{r_{21}^2+r_{31}^2}}\cdot\frac{1}{H_3}\frac{\partial z}{\partial w},
\end{aligned}$$

le quali ultime, derivate rispetto ad u moltiplicate ordinatamente per $\cos\xi_1$, $\cos\eta_1$, $\cos\zeta_1$ e sommate danno per le (4) e per le (6):

$$\frac{1}{T_1}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_{31}}{r_{21}}\right).$$

Usando notazioni analoghe per gli altri due sistemi di curve, lungo le quali varia solo v o w, avremo dunque le formole:

$$\frac{1}{\rho_1^2}=\frac{1}{r_{21}^2}+\frac{1}{r_{31}^2},\qquad \frac{1}{\rho_2^2}=\frac{1}{r_{12}^2}+\frac{1}{r_{32}^2},\qquad \frac{1}{\rho_3^2}=\frac{1}{r_{13}^2}+\frac{1}{r_{23}^2}\quad (*) \qquad (7)$$

$$\left.\begin{gathered}
\frac{1}{T_1}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_{31}}{r_{21}}\right),\qquad \frac{1}{T_2}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial v}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_{12}}{r_{32}}\right),\\
\frac{1}{T_3}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial}{\partial w}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_{23}}{r_{13}}\right).
\end{gathered}\right\} \quad (8)$$

(*) Lamé, l. c., pag. 65.

§ 2.

Sistemi tripli ortogonali che contengono un sistema di superficie colla medesima curvatura costante.

3. Supponiamo che nel sistema triplo ortogonale di superficie, definito dalla forma (1) dell'elemento lineare dello spazio, le superficie $w = \text{cost.}^e$ abbiano la medesima curvatura costante K, che per semplicità porremo $= \pm 1$. Escludiamo però il caso che esse siano superficie di rotazione, poichè i corrispondenti sistemi tripli ortogonali sono allora ben noti (*). Come nelle citate comunicazioni alla R. Accademia dei Lincei, chiamerò questi sistemi tripli ortogonali *sistemi di Weingarten* e intenderò per loro curvatura la curvatura delle superficie del sistema w. Distinguiamo i due casi di $K = -1$ e $K = +1$ e cominciando dal primo supponiamo quindi

$$\frac{1}{r_{31}\, r_{32}} = -1.$$

Potremo porre allora $\frac{1}{r_{31}} = -\operatorname{tg}\theta$, $\frac{1}{r_{32}} = \cot\theta$, cioè per le (5):

$$\frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w} = -\operatorname{tg}\theta, \qquad \frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w} = \cot\theta, \tag{9}$$

dove il significato geometrico di θ è ben semplice. Esso rappresenta infatti, a causa della formola

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{-\frac{r_{32}}{r_{31}}},$$

l'angolo formato dalle assintotiche di un sistema sopra una superficie $w = \text{cost.}^e$ colle linee di curvatura $v = \text{cost.}^e$ Ciò posto, per le (9) le due prime (3) diverranno

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial v} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}, \qquad \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}$$

e integrate daranno

$$H_1 = \cos\theta \cdot \psi(u, w), \qquad H_2 = \operatorname{sen}\theta \cdot \varphi(v, w), \tag{10}$$

dove ψ è funzione di u, w soltanto e φ di v, w.

(*) Fra questi sistemi speciali soltanto quelli generati dalla traslazione della superficie pseudosferica lungo il suo asse di rotazione appartengono alla classe dei sistemi di Weingarten. E infatti si verifica facilmente che la forma caratteristica (12) n.° 4 per l'elemento lineare dello spazio si ha solo in questo caso.

Vogliamo ora dimostrare che φ e ψ sono indipendenti da w, cioè

$$\frac{\partial\varphi}{\partial w}=0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial w}=0, \tag{a}$$

e per questo ricaveremo dalle (9) (10):

$$H_3=\operatorname{tg}\theta\left\{\cot\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}+\frac{\partial\log\varphi}{\partial w}\right\}=-\cot\theta\left\{-\operatorname{tg}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}+\frac{\partial\log\psi}{\partial w}\right\}, \tag{11}$$

da cui

$$\operatorname{tg}\theta\frac{\partial\log\varphi}{\partial w}+\cot\theta\frac{\partial\log\psi}{\partial w}=0.$$

Questa, se le (a) non sussistessero, ci darebbe

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{M(u,\ v)}{N(v,\ w)}, \tag{b}$$

dove M è funzione di u, w e N di v, w. Ora consideriamo una speciale superficie pseudosferica del sistema w, sia $w=c$ e indichiamo con

$$ds^2=E\,du^2+G\,dv^2$$

il suo elemento lineare, riferito alle linee di curvatura; se cangiamo i parametri u, v rispettivamente in $\int\psi(u,\ c)\,du$, $\int\varphi(v,\ c)\,dv$, avremo per le (10)

$$E=\cos^2\theta, \qquad G=\operatorname{sen}^2\theta$$

e per la (b)

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{U}{V},$$

essendo U funzione della sola u e V di v. D'altra parte, la curvatura della superficie essendo $=-1$, dovrà θ soddisfare alla equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\operatorname{sen}\theta\cos\theta,$$

il che è impossibile col valore precedente di θ a meno che non sia costante U o V (*); ma allora la superficie sarebbe di rotazione contro l'ipotesi.

(*) E infatti questa equazione diventerebbe:

$$\left(\frac{U''}{U}+\frac{V''}{V}\right)(U^2+V^2)=U^2+V^2+2U'^2+2V'^2, \tag{α}$$

gli apici indicando derivate. Facendone la derivata 2^a rispetto ad u e v, otteniamo

$$\left(\frac{U''}{U}\right)'\cdot VV'+\left(\frac{V''}{V}\right)'\cdot UU'=0,$$

Sussistono dunque le (α) e però ψ è funzione solo di u e φ di v, per cui cangiando i parametri u, v rispettivamente in $\int \psi\, du$, $\int \varphi\, dv$ avremo per le (10) (11):

$$H_1 = \cos\theta, \qquad H_2 = \operatorname{sen}\theta, \qquad H_3 = \frac{\partial\theta}{\partial w}.$$

4. Per i valori ora ottenuti di H_1, H_2, H_3 la 1ª e la 2ª delle (3) sono identicamente soddisfatte e le quattro rimanenti si riducono alle tre distinte:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right) = \cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial w} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} \\
&\frac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}
\end{aligned}\right\} \tag{I}$$

poichè la 4ª, cioè la 2ª delle (2):

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w} - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} \tag{I$_a$}$$

è una facile conseguenza delle due prime (I).

a) Abbiamo dunque il risultato: *All'elemento lineare dello spazio riferito ad un sistema di Weingarten a curvatura* $K = -1$ *si può dare la*

---

da cui

$$\left(\frac{U''}{U}\right)' = kUU', \qquad \left(\frac{V''}{V}\right)' = -kVV',$$

k essendo una costante. Di qui integrando segue

$$\frac{U''}{U} = \frac{kU^2}{2} + C, \qquad \frac{V''}{V} = -\frac{kV^2}{2} + C'$$

$$2U'^2 = \frac{kU^4}{2} + 2CU^2 + C_1$$

$$2V'^2 = -\frac{kV^4}{2} + 2C'V^2 + C'_1$$

con C, C', C_1, C'_1 nuove costanti e per la (α) si avrebbe

$$(C' - C - 1)U^2 + (C - C' - 1)V^2 = C_1 + C'_1$$

equazione impossibile a verificarsi se non è costante U o V.

forma

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2, \tag{12}$$

dove la funzione θ di u, v, w soddisfa le equazioni (I) *alle derivate parziali.*

È questa la forma stessa, trovata da Darboux per i sistemi di Ribaucour (*). Per i raggi principali di curvatura abbiamo poi dalle (5)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{du}, \qquad \frac{1}{r_{21}} = -\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}, \qquad \frac{1}{r_{31}} = -\operatorname{tg}\theta \\ &\frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}}{\frac{\partial\theta}{\partial w}}, \qquad \frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}}{\frac{\partial\theta}{\partial w}}, \qquad \frac{1}{r_{32}} = \cot\theta. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Notiamo inoltre che, sopra ogni superficie pseudosferica del sistema w, le equazioni delle linee assintotiche sono

$$u - v = \text{cost.}^{e}, \qquad u + v = \text{cost.}^{e},$$

e se si riguardano come punti corrispondenti sopra due superficie del sistema w quelli che corrispondono alla medesima coppia di valori (u, v) dei parametri u, v (cioè i punti d'intersezione colla medesima traiettoria ortogonale del sistema w) si ha quindi il teorema:

b) *Sopra due superficie pseudosferiche di un sistema di Weingarten si corrispondono, oltre le linee di curvatura, le assintotiche e i loro archi corrispondenti sono eguali* (**).

Per i sistemi di Weingarten a curvatura positiva $K = +1$ (***), i calcoli possono farsi in modo perfettamente simile, ponendo

$$\frac{1}{r_{31}} = \operatorname{tgh}\theta, \qquad \frac{1}{r_{32}} = \coth\theta,$$

e si trova allora per l'elemento lineare dello spazio:

$$ds^2 = \cosh^2\theta\, du^2 + \operatorname{senh}^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2,$$

(*) Comptes Rendus; t. XCVII, pag. 894, formola (6).

(**) Vedi la nota in fondo al lavoro.

(***) Qui intendiamo però escluso il caso in cui tutte le superficie del sistema w sono sfere di raggio $= 1$.

dove θ soddisfa alle equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+\operatorname{senh}\theta\cosh\theta=0\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)+\cosh\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}+\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}=0\\
&\frac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w}-\frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w}+\frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}=0,
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(II)}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)+\operatorname{senh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}+\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}=0,\qquad(\mathrm{II}_a)$$

delle quali però la (II_a) è conseguenza delle due prime (II).

Viceversa, se supponiamo che la funzione θ soddisfi le (I) o le (II), le 6 equazioni fondamentali di Lamé, per l'elemento lineare (12) o (14), saranno soddisfatte e quindi:

c) Ad ogni funzione θ di u, v, w, che soddisfa le (I) *o le* (II), *corrisponde uno ed uno solo sistema di Weingarten, che dà all'elemento lineare dello spazio la forma* (12) *o* (14).

5. Supponiamo di avere un sistema di Weingarten e per fissare le idee consideriamo il caso, in cui $K=-1$ e valgono quindi le formole (12), (I), (I_a), l'altro caso ($K=+1$) potendosi trattare in modo perfettamente simile.

L'arco elementare delle curve traiettorie ortogonali delle superficie pseudosferiche è dato da

$$ds_3=\frac{\partial\theta}{\partial w}\,dw$$

e quindi, sopra una individuata superficie $w=\text{cost.}^e$, l'equazione

$$\frac{\partial\theta}{\partial w}=\text{cost.}^e$$

rappresenta quel sistema di linee, lungo ciascuna delle quali è costante la distanza *normale* (*) infinitesima della superficie considerata dalla successiva. Ora possiamo dimostrare l'importante teorema:

a) Sopra ogni superficie a curvatura costante del sistema le linee $\frac{\partial\theta}{\partial w}=\text{cost.}^e$ *costituiscono un sistema di circoli geodetici paralleli.*

Per questo basta stabilire che il parametro differenziale primo di queste

(*) Cioè il tratto infinitesimo intercetto sulla normale alla 1ª superficie dalla successiva.

linee

$$\Delta_1\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)=\frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\cos^2\theta\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2}}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

e la loro curvatura geodetica $\frac{1}{R}$ sono costanti lungo le linee stesse, cioè sono funzioni di $\frac{\partial\theta}{\partial w}$ (*). Ora ponendo

$$\Lambda=\left[\Delta_1\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)\right]^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2$$

e derivando, coll'osservare le (I), (I_a), troviamo

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial u}=2\frac{\partial\theta}{\partial w}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w},\qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial v}=2\frac{\partial\theta}{\partial w}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}$$

e quindi $\begin{vmatrix}\frac{\partial\Lambda}{\partial u}, & \frac{\partial\Lambda}{\partial v}\\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial w}, & \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial w}\end{vmatrix}=0$, il che dimostra la 1ª asserzione. Se calcoliamo poi la curvatura geodetica $\frac{1}{R}$ colla formola di Bonnet

$$\frac{1}{R}=-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta\cdot\Delta_1\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right]+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\ \ \Delta_1\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right]\right\},$$

avendo riguardo alle precedenti ed alle (I) troviamo:

$$\frac{1}{R}=-\frac{\frac{\partial\theta}{\partial w}}{\Delta_1\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)}$$

il che dimostra la 2ª asserzione. Se però $K=+1$ troviamo invece dalle (II) $\frac{1}{R}=+\frac{\frac{\partial\theta}{\partial w}}{\Delta_1\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)}$ e possiamo quindi scrivere

$$\frac{1}{R}=\pm\frac{\frac{\partial\theta}{\partial w}}{\Delta_1\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)},\qquad \text{per } K=\pm 1. \tag{15}$$

(*) Cfr. il § 9 della mia Nota 2ª: *Sui sistemi ciclici*, Giornale di Napoli, vol. XXII.

Da un teorema di Lie è noto che le geodetiche ortogonali ai circoli $\frac{\partial \theta}{\partial w} = \text{cost.}^e$ si determinano con quadrature e però abbiamo il risultato:

b) Sopra le superficie a curvatura costante di un sistema noto di Weingarten le geodetiche si determinano con quadrature.

Osservazione. — L'equazione differenziale di queste linee geodetiche per $K = -1$ è:

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}du - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}dv = 0$$

e per mezzo del teorema citato e della formola (15), ponendo per brevità $\psi = \frac{\partial\theta}{\partial w}$, si trova subito per un fattore integrante di questa equazione

$$M = \frac{1}{\Delta_1\psi}\cdot e^{-\int\frac{\psi d\psi}{(\Delta_1\psi)^2}}$$

sicchè l'equazione ridotta alle quadrature per le geodetiche in questione è:

$$\int\left\{\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\,\Delta_1\psi}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}du - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta\,\Delta_1\psi}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}dv\right\}e^{-\int\frac{\psi d\psi}{(\Delta_1\psi)^2}} = \text{cost.}^e \qquad (15')$$

Del resto si potrebbe ora verificare facilmente, per mezzo delle formole sviluppate, che l'espressione sotto il segno integrale in (15') è un differenziale esatto. Analogamente dicasi per $K = +1$.

§ 3.

Teorema di Weingarten.

6. I risultati ora ottenuti rendono naturale la domanda, se in un sistema triplo ortogonale della specie considerata può scegliersi arbitrariamente una superficie iniziale a curvatura costante e sopra di essa arbitrariamente quel sistema di circoli geodetici paralleli, lungo i quali deve essere costante la distanza normale della superficie scelta dalla consecutiva del sistema. A tale domanda risponde appunto affermativamente il teorema di Weingarten, di cui ora andiamo a trattare.

L'enunciato di questo teorema nella forma comunicatami dall'Autore può leggersi nella mia Nota del 15 Febbraio, già sopra citata. Qui ve ne sostituirò un altro, alquanto modificato, in vista delle distinzioni ulteriori, che converrà fare per applicare il teorema alle superficie pseudosferiche.

Sia S una superficie a curvatura costante $K = \pm 1$ e

$$ds^2 = d\alpha^2 + r^2 d\beta^2, \qquad r = \text{funzione di } \alpha$$

il quadrato del suo elemento lineare, riferito ad un sistema qualunque di circoli geodetici paralleli $\alpha = \text{cost.}^e$ ed alle geodetiche ortogonali $\beta = \text{cost.}^e$ In ogni punto P della S eleviamo la normale e stacchiamone un segmento infinitesimo

$$\overline{PP'} = \varepsilon \psi,$$

dove ε indica una costante infinitesima e ψ una funzione di α. Se supponiamo, che la superficie S' luogo degli estremi P' appartenga insieme con S ad un sistema triplo ortogonale di Weingarten (n.[i] 4, 5), avremo

$$\psi = \frac{\partial \theta}{\partial w}$$

e per la curvatura geodetica dei circoli geodetici $\alpha = \text{cost.}^e$ sulla S

$$\frac{1}{R} = -\frac{\frac{dr}{da}}{r} = -\frac{\frac{\partial\theta}{\partial w}}{\Delta_1\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)} = -\frac{\psi}{\Delta_1\psi} \qquad \text{[Vedi formola (15)].}$$

Ma essendo $K = \pm 1$ quindi $r = \mp \frac{d^2 r}{d\alpha^2}$ e $\Delta_1\psi = \frac{d\psi}{d\alpha}$ ne segue

$$\psi = k\frac{dr}{d\alpha},$$

dove k è una costante e però:

$$\overline{PP'} = \varepsilon\frac{dr}{d\alpha} = \varepsilon r'.$$

Inversamente dimostriamo:

Teorema di Weingarten. — 1.° *Se il segmento infinitesimo di normale $\overline{PP'}$ si assume dato dalla legge $\overline{PP'} = \varepsilon r'$, la superficie S' luogo degli estremi avrà la medesima curvatura $K = \pm 1$* (a meno d'infinitesimi d'ordine superiore ad ε).

2.° *Ripetendo sopra S' la stessa costruzione, poi di nuovo sulla successiva ottenuta, e così via si otterrà una serie ∞^1 di superficie colla medesima curvatura costante $K = \pm 1$, che faranno parte di un sistema triplo ortogonale.*

Essendo $K = \pm 1$, quindi $r = \mp r''$ e $\int r\,d\alpha = \mp r'$, da quanto ho dimostrato nel § 1 della mia Nota precedente in questi Annali (*), risulta che la 2ª parte del teorema enunciato è una conseguenza della 1ª e perciò di questa soltanto dovremo occuparci. Dimostrata questa, le osservazioni premesse ci assicurano che i sistemi tripli ortogonali così costruiti sono i più generali possibili, che contengano una serie di superficie colla medesima curvatura costante.

7. Serbando le notazioni del lavoro citato e sotto le ipotesi ivi fatte la funzione $\psi = \int r\,d\alpha$, oltre alla equazione (3) ivi stabilita, soddisfa anche alle due seguenti:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} = r' E \\ &\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + \frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} = r' G, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

ciò che si verifica nel medesimo modo, ricorrendo alle condizioni di trasformabilità delle espressioni differenziali quadratiche:

$$d\alpha^2 + r^2 d\beta^2, \qquad E du^2 + G dv^2.$$

Ora se le linee u, v sono le linee di curvatura della S, r_1, r_2 i suoi raggi principali di curvatura e X, Y, Z i coseni di direzione della normale, le coordinate x', y', z' del punto P', che sopra la S' corrisponde al punto P di S, saranno date dalle formole:

$$x' = x + \varepsilon\psi\cdot X, \qquad y' = y + \varepsilon\psi\cdot Y, \qquad z' = z + \varepsilon\psi\cdot Z$$

e quindi, trascurando le potenze superiori di ε, avremo per l'elemento lineare di S'

$$ds'^2 = E\left(1 + \frac{2\varepsilon\psi}{r_2}\right)du^2 + G\left(1 + \frac{2\varepsilon\psi}{r_1}\right)dv^2.$$

Venendo al caso nostro speciale, supponiamo dapprima $K = -1$; potremo porre allora, come è noto:

$$E = \cos^2\theta \qquad G = \operatorname{sen}^2\theta$$

$$r_2 = \cot\theta \qquad r_1 = -\operatorname{tg}\theta,$$

(*) Fascicolo 1°, pag. 40-41 di questo volume.

dove θ soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\operatorname{sen}\theta\cos\theta,$$

e troveremo quindi

$$d s'^2=\cos^2\theta_1\,d u^2+\operatorname{sen}^2\theta_1\,d v^2$$

con

$$\theta_1=\theta-\varepsilon\psi.$$

Ma dalle (16) sottratte, essendo $\psi=r'$, ricaviamo

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}=\psi\,(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)$$

e per conseguenza

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\theta_1}{\partial v^2}=\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_1,$$

il che dimostra appunto che la superficie S' ha la curvatura $K=-1$. Analogamente, se $K=+1$, potremo porre

$$E=\cos\mathrm{h}^2\theta \qquad G=\operatorname{sen}\mathrm{h}^2\theta$$

$$r_2=\cot\mathrm{h}\,\theta \qquad r_1=\operatorname{tg}\mathrm{h}\,\theta,$$

dove θ soddisfa all'equazione $\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+\operatorname{sen}\mathrm{h}\,\theta\cos\mathrm{h}\,\theta=0$ ed avremo per la S'

$$d s'^2=\cos\mathrm{h}^2\theta_1\,d u^2+\operatorname{sen}\mathrm{h}^2\theta_1\,d v^2$$

con

$$\theta_1=\theta+\varepsilon\psi.$$

Ma le (16) sommate, essendo $\psi=-r'$, danno

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}=-\psi\,(\cos\mathrm{h}^2\theta+\operatorname{sen}\mathrm{h}^2\theta)$$

e però anche

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial v^2}+\operatorname{sen}\mathrm{h}\,\theta_1\cos\mathrm{h}\,\theta_1=0,$$

cioè S' ha la curvatura $K=+1$, c. d. d.

§ 4.

Teorema di Ribaucour.

8. Alla dimostrazione precedente del teorema di WEINGARTEN, che combina in sostanza con quella comunicatami più tardi dall'Autore stesso, ne aggiungerò un'altra fondata sulla considerazione dei sistemi ciclici. Per questo premetterò la dimostrazione di un teorema dovuto a RIBAUCOUR (*), che dà una proprietà generale dei sistemi tripli ortogonali.

Sia

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2$$

l'espressione dell'elemento lineare dello spazio riferito ad un sistema triplo ortogonale (u, v, w) e in ciascun punto di una delle superficie $w =$ cost.^{e}, sia $w = c$, costruiamo il circolo osculatore della linea d'intersezione delle altre due superficie; sussiste allora il teorema:

Il sistema ∞^2 di circoli costruito ammette una serie ∞^1 di superficie ortogonali.

Se indichiamo infatti con ω l'angolo, che la normale principale alla detta linea (u, v), diretta verso il centro di curvatura corrispondente, forma colla direzione positiva della linea $v =$ cost.^{e}, avremo

$$\cos\omega = \Sigma \cos\xi_3 \cdot \frac{1}{H_1}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \operatorname{sen}\omega = \Sigma \cos\xi_3 \frac{1}{H_2}\frac{\partial x}{\partial v},$$

quindi per le formole (6) n.° 2:

$$\cos\omega = -\frac{\rho_3}{r_{13}}, \qquad \operatorname{sen}\omega = -\frac{\rho_3}{r_{23}}. \tag{17}$$

Ponendo ora

$$H_3 = \psi, \qquad \Phi = -\log H_3,$$

la 3^a delle (7) n.° 2 darà

$$\frac{1}{\rho_3} = \frac{\sqrt{H_2^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 + H_1^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2}}{H_1 H_2} = \Delta_1 \Phi.$$

Confrontando queste formole con quelle al § 4 della mia Nota sui sistemi ci-

(*) Comptes Rendus, 1870, t. LXX.

clici, citata al n.° 5, si vede subito che $H_3 = \psi$ soddisfa all'equazione ivi segnata (15) e prendendo

$$R = \rho_3 \qquad \varphi = \omega,$$

si soddisfano le (16) ibid., il che dimostra il teorema di Ribaucour. In forza poi dell'altro teorema di Ribaucour dimostrato al § 7 (l. c.) le superficie ortogonali ai circoli faranno parte di un sistema triplo ciclico di superficie ortogonali, che chiameremo *il sistema ciclico osculatore* del sistema triplo dato lungo la superficie $w = c$. È chiaro che questi due sistemi hanno a comune, oltre la superficie $w = c$, anche la consecutiva del sistema w.

9. Ora se consideriamo un sistema triplo ortogonale di Weingarten e il suo sistema ciclico osculatore lungo una delle superficie a curvatura costante, vediamo subito che questo appartiene alla classe di sistemi ciclici considerati al § 14, l. c. E inversamente sarà dimostrato il teorema di Weingarten, quando si provi che nei sistemi ciclici in discorso la superficie S', infinitamente vicina alla iniziale S a curvatura costante, ha la medesima curvatura.

Per questo, se osserviamo le formole 20, l. c., § 8 e con r'_2, r'_1 indichiamo i raggi principali di curvatura della S' per la quale si ha

$$\theta = \pi - \eta,$$

dove η è un infinitesimo (di 1° ordine), otterremo:

$$r'_2 = R \frac{\dfrac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}\left(1 + \dfrac{\eta R}{r_2}\right)}{\dfrac{\sqrt{E}\cos\varphi}{r_2} - \eta\left(\dfrac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R} + \dfrac{\partial \log R}{\partial u}\right)},$$

$$r'_1 = R \frac{\dfrac{\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi}{R}\left(1 + \dfrac{\eta R}{r_1}\right)}{\dfrac{\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi}{r_1} - \eta\left(\dfrac{\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi}{R} + \dfrac{\partial \log R}{\partial v}\right)}.$$

Ora se con $\dfrac{1}{r}$ indichiamo la curvatura geodetica delle $\psi = \text{cost.}^e$ abbiamo (§ 9, l. c.)

$$\frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R} + \frac{\partial \log R}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{r}, \qquad \frac{\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi}{R} + \frac{\partial \log R}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi}{r},$$

quindi

$$r'_2 = \frac{1 + \eta\dfrac{R}{r_2}}{\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{\eta}{r}}, \qquad r'_1 = \frac{1 + \eta\dfrac{R}{r_1}}{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{\eta}{r}},$$

da cui

$$r'_2 r'_1 = r_2 r_1 + \eta (r_1 + r_2) \left\{ R + \frac{r_2 r_1'}{r} \right\}.$$

Supponiamo $K = +1$, cioè $r_2 r_1 = +1$ e potremo porre

$$r = \cos\alpha \qquad \psi = \operatorname{sen}\alpha$$

$$R = -\frac{1}{\Delta_1 \log \psi} = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \frac{1}{r} = \operatorname{tg}\alpha$$

da cui segue $r'_2 r'_1 = +1$. Similmente per $r_1 r_2 = -1$ si trova $r'_1 r'_2 = -1$.

§ 5.

Caratteristiche dei sistemi di Weingarten.

10. Occupiamoci ora di riconoscere il grado di arbitrarietà che resta nei sistemi tripli ortogonali di Weingarten. Per questo ci saranno utili le considerazioni seguenti.

Indichiamo con Σ le superficie a curvatura costante $K = \pm 1$ del sistema, con Σ_1, Σ_2 le superficie degli altri due sistemi e infine con C le curve intersezioni delle Σ_1, Σ_2, cioè le traiettorie ortogonali del sistema Σ. Da ogni punto P di una qualunque delle Σ esce una curva C, la cui normale principale in P è diretta nel piano tangente a Σ e forma colla linea $v = \text{cost.}^e$ l'angolo ω definito dalla formola (17), § 4, cioè è perpendicolare alla linea

$$H_3 = \frac{\partial \theta}{\partial w} = \text{cost.}^e$$

sopra Σ che passa per P. Ma nel nostro caso (n.° 5) le linee $\frac{\partial \theta}{\partial w} = \text{cost.}^e$ sono circoli geodetici paralleli, dunque:

a) Le normali principali delle curve C nei punti d'incontro con una superficie Σ inviluppano sopra Σ le geodetiche G ortogonali ai circoli $\frac{\partial \theta}{\partial w} = \text{cost.}^e$

Ora per la curvatura geodetica dei circoli $\frac{\partial \theta}{\partial w} = \text{cost.}^e$ abbiamo trovato la (15) § 2 e per il valore assoluto della flessione $\frac{1}{\rho_3}$ della curva C

$$\frac{1}{\rho_3} = \sqrt{\frac{1}{r_{13}^2} + \frac{1}{r_{23}^2}} = \frac{\Delta_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)}{\frac{\partial \theta}{\partial w}};$$

per conseguenza

$$r\rho_2 = \pm 1,$$

dove naturalmente si prenderà il segno $+$ o $-$ a seconda che le direzioni, che vanno dal punto P ai rispettivi centri di curvatura assoluta per la curva C e di curvatura geodetica per la $\frac{\partial \theta}{\partial w} = \text{cost.}^e$ coincidono o sono opposte. Un accurato esame dei segni nelle formole precedenti dà

$$r\rho_3 = +1 \quad \text{per} \quad K = -1$$
$$r\rho_3 = -1 \quad \text{»} \quad K = +1$$

e del resto ciò risulta anche subito osservando un caso particolare per es. quello delle superficie di rotazione. Ne concludiamo:

b) In ogni punto P di una superficie Σ i raggi di curvatura assoluta e geodetica della curva C e del cerchio geodetico $\frac{\partial \theta}{\partial w} = \text{cost.}^e$, *che passano per P, sono l'inverso l'uno dell'altro, e coincidono in direzione o sono opposti, secondo che $K = -1$ o $K = +1$.*

Quando poi $K = -1$, conviene distinguere tre casi secondo che le geodetiche G sopra la superficie Σ escono da un punto reale a distanza finita, da un punto reale all'infinito o da un punto ideale. A seconda dei tre casi, prendendo per linee coordinate sopra Σ i circoli geodetici $\frac{\partial \theta}{\partial w} = \text{cost.}^e$ ($\alpha = \text{cost.}^e$) e le geodetiche G ($\beta = \text{cost.}^e$), abbiamo per l'elemento lineare

$$ds^2 = d\alpha^2 + \operatorname{senh}^2\alpha\, d\beta^2, \qquad ds^2 = d\alpha^2 + e^{2\alpha} d\beta^2, \qquad ds^2 = d\alpha^2 + \cosh^2\alpha\, d\beta^2$$

e corrispondentemente per $\frac{1}{r}, \frac{1}{\rho_3}$:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{r} = \coth\alpha, & \frac{1}{r} = 1, & \frac{1}{r} = \operatorname{tgh}\alpha \\ \frac{1}{\rho_3} = \operatorname{tgh}\alpha, & \frac{1}{\rho_3} = 1, & \frac{1}{\rho_3} = \coth\alpha. \end{array}\right\} \tag{18}$$

In quest'ultimo caso è da notarsi inoltre che tutte le geodetiche G, cioè le $\beta = \text{cost.}^e$, sono ortogonali ad una medesima geodetica ($\alpha = 0$). Lungo questa geodetica si ha $\frac{1}{\rho_3} = \infty$, cioè essa è un luogo di cuspidi per le curve C.

11. In forza dell'ultimo teorema b), se in un punto P d'incontro di una

curva C con una superficie Σ nota si conosce il centro di curvatura di C, il circolo geodetico del sistema $\frac{\partial \theta}{\partial w} = \text{cost.}^e$ e con esso l'intero sistema di circoli geodetici e delle loro geodetiche ortogonali ne verrà completamente individuato, poichè di questo circolo geodetico si conoscerà in grandezza e direzione il raggio geodetico. Ciò posto, potremo stabilire geometricamente il teorema:

A) Scelta arbitrariamente una superficie iniziale Σ_0 a curvatura costante e una curva C_0, uscente da un suo punto P_0 normalmente alla superficie, esiste sempre uno ed un solo sistema di Weingarten, al quale appartiene la superficie scelta Σ_0 e che fra le curve C, ortogonali alle superficie del sistema Σ, contiene la curva data C_0.

E infatti, supposto dapprima che un tale sistema esista effettivamente, per le osservazioni precedenti conosceremo sopra Σ_0 il sistema di geodetiche G e con esso il sistema ciclico osculatore lungo Σ_0 (n.° 8), sicchè la superficie Σ'_0 infinitamente vicina a Σ_0, comune al sistema di Weingarten ed al sistema ciclico osculatore, ne risulterà perfettamente individuata. Essendo poi la Σ'_0 nelle medesime condizioni della Σ_0, anche la successiva Σ''_0 ne sarà determinata e cosi via.

Il ragionamento precedente che, sotto le condizioni date ai limiti, prova l'unicità del sistema, ne dimostra anche l'effettiva esistenza. Basta infatti osservare che la superficie Σ'_0 è ortogonale alla curva data C_0 nel punto P'_0 successivo a P_0 e si trova quindi nelle medesime condizioni iniziali della Σ_0.

Agli elementi precedenti, caratteristici per i sistemi di Weingarten, possiamo anche semplicemente sostituire la curva stessa C_0 ed una delle linee di curvatura Γ_0 di Σ_0 uscente da P_0. E infatti conosceremo allora in P_0 la normale a Σ_0 e però anche lungo tutta la linea di curvatura Γ_0 di Σ_0 le normali alla superficie stessa saranno determinate. Per un teorema dimostrato dal sig. Bäcklund al § 3 della sua Memoria: *Om ytor med konstant negativ krökning* (*), la superficie Σ_0 a curvatura costante $K = \pm 1$, che passa per Γ_0 ed ha lungo di essa le normali assegnate, esiste ed è pienamente determinata. Sussiste quindi l'altro teorema.

B) Due curve arbitrarie C_0, Γ_0 che s'incontrano ad angolo retto in un punto P_0 determinano uno ed un solo sistema di Weingarten, che fra le linee di curvatura delle superficie a curvatura costante contiene Γ_0 e fra le traiettorie ortogonali del sistema Σ la curva data C_0.

(*) Annali della Università di Lund; t. XIX, 1883.

È chiaro che questa costruzione geometrica di un sistema di WEINGARTEN per mezzo dei suoi successivi sistemi ciclici osculatori è perfettamente simile a quella di una curva considerata come inviluppo dei suoi circoli osculatori. (Vedi del resto l'avvertenza nella Prefazione.)

§ 6.

Sistemi di Weingarten a flessione costante.

12. Se per brevità chiamiamo *flessione* di un sistema di WEINGARTEN in ogni punto P dello spazio la flessione $\frac{1}{\rho_3}$ nel punto P di quella curva C che vi passa, le formole (18) n.° 10 ci mostrano che per un sistema di WEINGARTEN a curvatura negativa $K = -1$ (sistema di WEINGARTEN pseudosferico di raggio $= 1$) la flessione sarà

$$<1, \quad =1, \quad \text{o} \quad >1,$$

secondo che le geodetiche G sopra Σ usciranno da un punto reale e a distanza finita, da un punto all'infinito o da un punto ideale.

Fermiamoci al caso intermedio al quale corrisponde, come ora vedremo, un gruppo (*) interessante di sistemi di WEINGARTEN. Per ciò supponiamo che *una* delle curve C abbia costante $= 1$ il raggio di 1ª curvatura; allora dalle (18) risulta che sopra *tutte* le superficie Σ le geodetiche G sono parallele e i circoli $\frac{\partial \theta}{\partial w} =$ cost.ᵉ sono *oricicli* paralleli colla curvatura geodetica $= 1$, dunque:

Se una delle curve C ortogonali alle superficie pseudosferiche di raggio $= 1$ di un sistema di Weingarten ha costante $= 1$ il raggio di 1ª curvatura, lo stesso accade per tutte le altre curve C.

Questi sistemi speciali di WEINGARTEN li diremo *sistemi a flessione costante.* Il loro grado di arbitrarietà risulta dai teoremi A), B), del paragrafo precedente, quando per C_0 si assuma una curva a flessione costante $= 1$. Essi comprendono come casi particolari i sistemi ciclici di RIBAUCOUR. Se infatti per C_0 si assume un circolo di raggio $= 1$ esiste un sistema ciclico di RIBAU-

(*) Tale denominazione della teoria delle sostituzioni è qui usata in vista del modo di comportarsi di questi sistemi rispetto alla trasformazione complementare e di BÄCKLUND (cfr. più avanti §§ 8, 9).

cour che soddisfa alle condizioni iniziali del teorema A) (*) e sarà pel teorema stesso l'unico sistema di Ribaucour che vi soddisfi. Ciò dimostra che se una delle curve C è un circolo di raggio $=1$, tutte le altre curve sono circoli eguali.

È chiaro poi che ogni sistema di Weingarten a flessione costante ha per sistemi ciclici osculatori lungo le superficie pseudosferiche altrettanti sistemi di Ribaucour.

Osservazione. — Pel teorema dimostrato al § 3 della Nota citata si può enunciare l'altro:

Se in un sistema triplo ortogonale le curve d'intersezione di due dei sistemi hanno la medesima flessione costante, il sistema stesso è un sistema di Weingarten (a flessione costante) teorema che ci dà una proprietà caratteristica dei sistemi di Weingarten a flessione costante.

13. È interessante ricercare come si modificano le formole del n.° 4 pei sistemi attuali. Per ciò osserviamo che se ω indica l'angolo che ogni geodetica G del sistema parallelo nella sua direzione positiva (cioè nel senso stesso del parallelismo) forma colla direzione positiva delle linee $v = \text{cost.}^e$ avremo per le (17) § 4, essendo $\rho_3 = 1$:

$$\cos\omega = -\frac{1}{r_{13}}, \qquad \operatorname{sen}\omega = -\frac{1}{r_{23}}$$

e però le (13) § 2 daranno

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} = -\cos\omega\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}, \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} = -\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}. \tag{19}$$

Con queste formole le (I) § 2 diventano

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \operatorname{sen}\omega\cos\theta \\ \frac{\partial\omega}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} &= -\cos\omega\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Le due ultime sono compatibili, appunto in forza delle (20), e se da esse si elimina θ si ottiene:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\omega\cos\omega,$$

(*) Cfr. i § 3 e 14 della mia Nota 2ª: *Sui sistemi ciclici.*

come anche

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial w} = \cos\omega \cos\theta \frac{\partial \omega}{\partial w}, \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \, \partial w} = \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\theta \frac{\partial \omega}{\partial w}, \tag{22}$$

dopo di che si vede subito che la funzione $\omega(u, v, w)$ soddisfa tutte le condizioni (I) e definisce perciò un nuovo sistema triplo ortogonale di WEINGARTEN (a flessione costante), che dà all'elemento lineare dello spazio la forma

$$ds^2 = \cos^2\omega \, du^2 + \operatorname{sen}^2\omega \, dv^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial w}\right)^2 dw^2.$$

La dipendenza geometrica di questo nuovo sistema (ω) dall'iniziale (θ) sarà spiegata più avanti (n.° 23).

Qui osserveremo ancora che la torsione $\frac{1}{T_3}$ delle curve C a flessione costante ha in questo caso speciale l'espressione semplice [v. § 1 formole (8)]

$$\frac{1}{T_3} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial w}}{\frac{\partial \theta}{\partial w}}. \tag{23}$$

Nel caso dei sistemi ciclici di RIBAUCOUR si ha $\frac{1}{T_3} = 0$, cioè ω indipendente da w (*).

§ 7.

Sistema triplo elicoidale e sistemi di superficie di Enneper.

14. Prima di procedere ad ulteriori ricerche sui sistemi di WEINGARTEN mi sembra utile discutere alcuni casi speciali più semplici. Un esempio molto notevole di tali sistemi è fornito dal sistema triplo elicoidale discusso nella mia Nota precedente in questi Annali. La forma dell'elemento lineare dello spazio, riferito a questo sistema è data da

$$ds^2 = b^2 sn^2(u + v + w) du^2 + a^2 cn^2(u + v + w) dv^2 + c^2 dn^2(u + v + w) dw^2,$$

dove le costanti a, b, c sono legate al modulo k delle funzioni ellittiche dalla

(*) Cfr. DARBOUX, l. c.

relazione

$$\frac{k^2}{b^2}=\frac{k^2}{a^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Le rispettive curvature delle elicoidi

$$u=\text{cost.}^e,\qquad v=\text{cost.}^e,\qquad w=\text{cost.}^e$$

sono date da

$$K_1=\frac{k^2}{b^2},\qquad K_2=-\frac{k^2}{a^2},\qquad K_3=-\frac{1}{c^2},$$

e in questo sistema abbiamo quindi nello stesso tempo un esempio per i sistemi di WEINGARTEN a curvatura negativa e per quelli a curvatura positiva. Se lo consideriamo come un esempio per il 1° caso e poniamo, per accordo colle formole al n.° 4, $c=1$ basterà cangiare u, v rispettivamente in $\frac{v}{b}$, $\frac{u}{a}$ per ottenere

$$ds^2=cn^2\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}+w\right)du^2+sn^2\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}+w\right)dv^2+dn^2\left(\frac{u}{a}+\frac{v'}{b}+w\right)dw^2.$$

Ponendo adunque

$$\theta=am\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}+w,\ k\right),\qquad \frac{k^2}{b^2}=\frac{k^2}{a^2}+1$$

tutte le (I) saranno soddisfatte. A questa soluzione delle (I) saremmo pervenuti direttamente, cercando di soddisfarvi con una funzione di una combinazione lineare delle variabili u, v, w.

Per la flessione $\frac{1}{\rho_3}$ dell'attuale sistema di WEINGARTEN si trova

$$\frac{1}{\rho_3^2}=1+\frac{k^4-b^2}{b^2 dn^2\tau},$$

sicchè, se si vuole un sistema di WEINGARTEN a flessione costante, basta fare

$$b=k^2,\qquad a=\frac{k^2}{k'}.$$

Calcolando dalla (23) la torsione delle curve C troviamo

$$\frac{1}{T_3}=\frac{k'}{dn^2\left(\frac{v+k'u}{k^2}+w\right)};$$

quindi le curve C sono veramente a doppia curvatura e il sistema non degenera in uno ciclico di RIBAUCOUR.

15. Fra le superficie a curvatura costante quelle che hanno un sistema di linee di curvatura piane sono state studiate da ENNEPER (*) e più tardi dal DINI (**). Per ogni tale superficie (superficie di ENNEPER) i piani delle linee di curvatura di un sistema passano per una retta fissa nello spazio, l'*asse* della superficie di ENNEPER, e le linee di curvatura del 2° sistema sono tracciate sopra sfere Σ_1 che la tagliano ortogonalmente ed hanno i centri distribuiti sull'asse. Ne risulta che se si fa ruotare una superficie di ENNEPER attorno all'asse si ottiene un sistema ∞^1 di superficie Σ, colla medesima curvatura costante, che incontra ortogonalmente e lungo linee di curvatura il sistema di sfere Σ_1. Per il noto teorema di DARBOUX (***) esiste quindi un terzo sistema Σ_2, che insieme a Σ, Σ_1 formerà un sistema triplo ortogonale (di WEINGARTEN).

Per ricercare la forma effettiva della funzione θ nelle formole (12) o (14) § 2 corrispondenti a questo caso, ci possiamo servire delle formole di ENNEPER e di quelle che BOCKWOLDT (****) e LENZ (*****) hanno sviluppato nelle loro dissertazioni. È bensì vero che tali formole non convengono ad alcune superficie limiti, le cui coordinate dipendono soltanto da funzioni circolari e iperboliche, come recentemente ha dimostrato KUEN (******); però il metodo qui adoperato si applica nel medesimo modo a tali superficie limiti e le formole corrispondenti si trovano con eguale facilità.

16. Cominciamo dalle superficie di ENNEPER a curvatura costante positiva $= +1$ e indichiamo con u', v i parametri delle linee di curvatura, le linee $u' = \text{cost.}^e$ essendo le linee di curvatura piane. I valori di E, G nell'espressione dell'elemento lineare saranno allora (BOCKWOLDT, l. c.)

$$\sqrt{E} = \frac{1}{\operatorname{sen}(U+V)}, \qquad \sqrt{G} = \cot(U+V)$$

dove U, V sono funzioni la 1^a di u' soltanto, la 2^a di v, determinate dalle equazioni

$$\frac{dU}{du'} = \sqrt{A\cos 2U - C - 1}, \qquad \frac{dV}{dv} = \sqrt{C - A\cos 2V},$$

(*) Göttinger Nachrichten, 1868, pag. 258.

(**) *Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura piane.* Pisa, tipografia Nistri, 1869.

(***) Annales de l'École Normale, t. III, pag. 110.

(****) *Ueber die Enneper'schen Flächen mit constantem positivem Krümmungsmaas.* Inaugural-Dissertation. Göttingen, 1878 bei Dieterich.

(*****) *Ueber die Enneper'schen Flächen constanten negativen Krümmungsmaasses.* Ibid. 1879.

(******) Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe. München, 1884, Heft. II le A, C essendo costanti arbitrarie. Se inoltre indichiamo con x, y, z le coordinate di un punto mobile sulla superficie e poniamo

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

avremo

$$\rho = \frac{\sqrt{A \cos 2U - C}}{\sqrt{A^2 - C^2} \operatorname{sen}(U + V)}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u'} = \frac{\sqrt{A^2 - C^2}}{A \cos 2U - C}.$$

Facciamo rotare la superficie di Enneper di un angolo w attorno all'asse z (asse della superficie) e indicando con ξ, η, ζ le coordinate del punto, in cui viene trasportato per la rotazione il punto (x, y, z) della superficie, avremo:

$$\xi = x \cos w - y \operatorname{sen} w, \qquad \eta = x \operatorname{sen} w + y \cos w, \qquad \zeta = z.$$

Di qui calcolando l'elemento lineare dello spazio

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$$

in coordinate u', v, w, troveremo:

$$ds^2 = E du'^2 + G dv^2 + \rho^2 dw^2 + 2\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u'} dw\, du'$$

e ponendo

$$u' = u - \frac{w}{\sqrt{A^2 - C^2}},$$

lo ridurremo, tenendo conto delle precedenti, alla forma ortogonale

$$ds^2 = \frac{du^2}{\operatorname{sen}^2(U + V)} + \cot^2(U + V) dv^2 + \frac{A \cos 2U - C - 1}{(A^2 - C^2) \operatorname{sen}^2(U + V)} dw^2.$$

Basta ora porre

$$\cosh \theta = \frac{1}{\operatorname{sen}(U + V)}, \qquad \operatorname{senh} \theta = \cot(U + V)$$

per accertarsi che si ha

$$\frac{\partial \theta}{\partial w} = \frac{\sqrt{A \cos 2U - C - 1}}{\sqrt{A^2 - C^2} \operatorname{sen}(U + V)}$$

e la formola precedente rientra nella (14) § 2.

17. Per le superficie di Enneper a curvatura negativa $K = -1$ procederemo in modo del tutto simile, facendo uso delle formole della Memoria

di Lenz, cioè:

$$\sqrt{E} = \frac{1}{\cosh(U+V)}, \qquad \sqrt{G} = \frac{\operatorname{sen h}(U+V)}{\cosh(U+V)},$$

dove U, V sono funzioni rispettivamente di u', V date dalle formole

$$\frac{dU}{du'} = \sqrt{C + A\cosh 2U - 1}, \qquad \frac{dV}{dv} = \sqrt{C - A\cosh 2V}$$

e ρ, φ dall'altre

$$\rho = \frac{\sqrt{C + A\cosh 2U}}{\sqrt{C^2 - A^2}\cosh(U+V)}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u'} = \frac{\sqrt{C^2 - A^2}}{C + A\cosh 2U}.$$

Troveremo così per l'elemento lineare dello spazio, riferito al sistema di Weingarten corrispondente:

$$ds^2 = \frac{du^2}{\cosh^2(U+V)} + \operatorname{tg h}^2(U+V)dv^2 + \frac{C + A\cosh 2U - 1}{(C^2 - A^2)\cosh^2(U+V)}dw^2,$$

con

$$u' = u - \frac{w}{\sqrt{C^2 - A^2}},$$

la quale formola si riduce alla (12) § 2 ponendo

$$\cos\theta = \frac{1}{\cosh(U+V)}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \operatorname{tg h}(U+V).$$

Osserviamo poi che per i raggi r_{13}, r_{23} abbiamo dalle (13)

$$\frac{1}{r_{13}} = -\sqrt{C - A\cosh 2V}, \qquad \frac{1}{r_{23}} = -\frac{A\operatorname{sen h}(V-U) + (C-1)\operatorname{sen h}(U+V)}{\sqrt{C + A\cosh 2U - 1}}$$

e quindi per la flessione $\frac{1}{\rho_3}$ del sistema, con semplici trasformazioni, troviamo

$$\frac{1}{\rho_3^2} = \frac{1}{r_{13}^2} + \frac{1}{r_{23}^2} = 1 + \frac{\{(C-1)^2 - A^2\}\cosh^2(U+V)}{C + A\cosh 2U - 1}.$$

Di qui risulta che il sistema di Weingarten sarà a flessione costante nei soli casi

$$C = 1 + A, \qquad C = 1 - A;$$

ma allora la superficie di Enneper diventa la trasformata complementare di una superficie pseudosferica di rotazione (*) e il sistema degenera in uno ciclico

(*) Cfr. Kuen, l. c., pag. 202.

di Ribaucour, come si può subito verificare per mezzo delle nostre formole generali osservando che in tal caso

$$\frac{1}{T_3} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial w} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{r_{23}}{r_{13}}\right) = 0.$$

Infine per quelle superficie pseudosferiche accennate al n.° 15, alle quali le formole sopra adoperate non sono applicabili, si hanno le altre (*)

$$\sqrt{E} = \frac{1}{\cos h(U+V)}, \qquad \sqrt{G} = \operatorname{tg} h(U+V)$$

$$\frac{dU}{du'} = \sqrt{C + Ae^{2U} - 1}, \qquad \frac{dV}{dv} = \sqrt{C - Ae^{-2V}}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{C + Ae^{2U}}}{C \cos h(U+V)}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u'} = \frac{C}{C + Ae^{2U}}$$

e per l'elemento lineare dello spazio si ottiene

$$ds^2 = \frac{du^2}{\cos h^2(U+V)} + \operatorname{tg} h^2(U+V) dv^2 + \frac{C + Ae^{2U} - 1}{C^2 \cos h^2(U+V)} dw^2$$

con

$$u' = u - \frac{w}{C}.$$

Similmente, calcolando la flessione del sistema, risulta

$$\frac{1}{\rho_3^2} = 1 + (C-1)^2 \frac{\cos h^2(U+V)}{C + Ae^{2U} - 1}$$

ed anche qui si conclude che la flessione è costante nel solo caso limite $C = 1$, al quale corrisponde la trasformata complementare della pseudosfera e quel sistema ciclico di Ribaucour che ho considerato al n.° 5 della mia Nota 1ª sui sistemi ciclici.

Osservazione. — Se riavviciniamo i risultati ora ottenuti per le superficie di Enneper al teorema generale *b*) § 2 n.° 5, otteniamo l'altro, che non sembra sia stato osservato fino ad ora:

Sopra ogni superficie di Enneper a curvatura costante le linee geodetiche si determinano con quadrature.

(*) Kuen, l. c., pag. 204 V.

§ 8.

La trasformazione complementare.

18. Nella mia tesi d'abilitazione, presentata alla R. Scuola Normale Superiore di Pisa (Tip. Nistri, 1879) e successivamente nel vol. XVI dei Mathematische Annalen, ho fatto conoscere una costruzione per dedurre da una superficie pseudosferica nota S nuove superficie pseudosferiche col medesimo raggio. Per ciò, se il raggio di S è $= R$, basta considerare sopra S un sistema di geodetiche parallele e sopra ciascuna tangente ad ogni singola geodetica del sistema staccare (nel senso del parallelismo) un segmento $\overline{PP'} = R$ a partire dal punto di contatto P; il luogo degli estremi P' è una nuova superficie pseudosferica di raggio R (*).

Ho chiamato S' la *complementare* di S ed ora indicherò col nome di *trasformazione complementare* la costruzione sopra riferita per cangiare S nella S'.

La trasformazione complementare ha poi acquistato per i lavori del signor Lie (**) molta importanza, specialmente per il fatto che la sua successiva applicazione alle superficie pseudosferiche via via ottenute non richiede altri calcoli d'integrazione che quadrature.

Ora mi propongo, invece che a superficie pseudosferiche isolate, di applicarla simultaneamente alle ∞^1 superficie pseudosferiche di un sistema di Weingarten e di mostrare: *come essa permetta di dedurre da ogni sistema noto di Weingarten infiniti nuovi sistemi della stessa specie senza alcun calcolo d'integrazione.*

A questo scopo mi saranno utili le formole date da Darboux nei Comptes Rendus, 1883 (l. c., n.° 4), formole che possono stabilirsi nel modo seguente.

19. Sia S una superficie pseudosferica di raggio $= 1$, al cui elemento lineare, riferito alle linee di curvatura u, v, si potrà quindi dare la forma:

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2,$$

(*) Solo più tardi quando, non conoscendo i lavori di Ribaucour, fui condotto dal canto mio ai sistemi ciclici ortogonali, avvertii che tale costruzione è una facile conseguenza dei teoremi trovati per la prima volta da questo geometra.

(**) *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung.* Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Christiania, 1880.

dove θ soddisfa all'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

Consideriamo sopra la S un sistema qualunque ∞^1 di geodetiche parallele (concorrenti in un punto all'infinito) e indichiamo con φ l'angolo che la direzione positiva (*) della geodetica uscente dal punto (u, v) forma colla direzione positiva della linea $v = \text{cost.}^e$ Se du, dv indicano gli incrementi di u, v quando dal punto (u, v) ci si sposta lungo la detta geodetica al punto successivo $(u + du, v + dv)$, si avrà identicamente:

$$\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\, du - \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\, dv = 0. \tag{24}$$

Ma se $d\varphi$ indica similmente l'incremento ricevuto da φ, dovrà essere soddisfatta l'equazione differenziale delle geodetiche

$$\sqrt{EG}\, d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} dv,$$

cioè nel caso nostro

$$d\varphi = -\left(\frac{\partial\theta}{\partial u} dv + \frac{\partial\theta}{\partial v} du\right),$$

ossia

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\right) du + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) dv = 0.$$

Per la (24) questa diventa

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\cos\theta\operatorname{sen}\varphi = 0. \tag{25}$$

Ora l'equazione differenziale delle geodetiche essendo la (24), quella delle loro traiettorie ortogonali sarà

$$\cos\theta\cos\varphi\, du + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\, dv = 0$$

e per ipotesi la curvatura geodetica di queste linee (oricicli) deve essere costante $= 1$. La formola di Bonnet ci dà quindi

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi) + \frac{\partial}{\partial v}(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi)\right\} = \mp 1,$$

cioè

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\cos\theta\cos\varphi = \pm\operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

(*) Nel senso cioè del parallelismo. Cfr. n.° 13.

Da questa e dalla (25) ricaviamo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial v}=\pm\cos\theta\operatorname{sen}\varphi,\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \theta}{\partial u}=\mp\operatorname{sen}\theta\cos\varphi.$$

Per decidere, dietro le convenzioni fatte rispetto al senso positivo delle geodetiche, quali sono i segni da scegliersi basta considerare un caso particolare per es. quello della pseudosfera, ponendo

$$\cos\theta=\operatorname{tgh}u,\qquad \operatorname{sen}\theta=\frac{1}{\cos\operatorname{h}u}$$

e assumendo per geodetiche parallele i meridiani stessi, il cui senso di parallelismo è quello del parametro u crescente, e porre quindi $\varphi=0$, dopo di che si vede che i segni da scegliersi sono i superiori.

Abbiamo dunque il risultato:

Se φ indica l'angolo che la direzione positiva delle geodetiche di un sistema parallelo forma colla direzione positiva delle linee $v=$ cost.^{e}, la funzione φ soddisfa le equazioni a derivate parziali di Darboux:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial v}=\cos\theta\operatorname{sen}\varphi,\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \theta}{\partial u}=-\operatorname{sen}\theta\cos\varphi. \tag{26}$$

Viceversa si vedrà subito che se φ soddisfa queste equazioni definisce sopra S un sistema di geodetiche parallele nella loro direzione positiva.

20. Supponiamo ora di avere un sistema triplo ortogonale di Weingarten a curvatura negativa $K=-1$, che assunto a sistema di coordinate curvilinee dello spazio dia all'elemento lineare la forma (12) § 2

$$ds^2=\cos^2\theta du^2+\operatorname{sen}^2\theta dv^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2,$$

dove θ soddisfa alle equazioni fondamentali (I). Di ciascuna superficie pseudosferica $w=$ cost.^{e} del sistema assumiamo la complementare rispetto ad un particolare sistema di geodetiche parallele e vediamo se è possibile determinare questi sistemi di geodetiche parallele in modo che le ∞^1 superficie pseudosferiche complementari delle $w=$ cost.^{e} appartengano ad un nuovo sistema di Weingarten.

Se $\varphi(u, v, w)$ indica l'angolo, che la direzione positiva delle geodetiche supposte sopra una superficie $w=$ cost.^{e} forma colla direzione positiva delle $v=$ cost.^{e}, dovrà intanto φ soddisfare le equazioni (26). Indicando ora con ξ, η, ζ le coordinate del punto della superficie complementare della $w=$ cost.^{e} che corrisponde al punto (x, y, z) di questa, avremo per la costruzione stessa:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x + \cos\varphi \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v}\\ \eta &= y + \cos\varphi \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial y}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial y}{\partial v}\\ \zeta &= z + \cos\varphi \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial z}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial z}{\partial v}.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Di qui derivando, coll'aver riguardo alle formole (4) § 1, che valgono per ogni sistema triplo ortogonale, ed alle (26) che supponiamo soddisfatte da φ, otteniamo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial u} &= \cos^2\varphi\cos\theta\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos\theta\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} + \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\frac{1}{\frac{\partial\theta}{\partial w}}\frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial\xi}{\partial v} &= \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\frac{1}{\frac{\partial\theta}{\partial w}}\frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial\xi}{\partial w} &= -\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} + \\ &\qquad + \frac{\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} + \frac{\partial\theta}{\partial w}}{\frac{\partial\theta}{\partial w}}\frac{\partial x}{\partial w}\end{aligned}\right\}$$

e analogamente per η, ζ. Abbiamo per conseguenza:

$$\Sigma\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2 = \cos^2\varphi,\qquad \Sigma\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2 = \operatorname{sen}^2\varphi,$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial\xi}{\partial w}\right)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2 + \left\{\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} + \frac{\partial\theta}{\partial w}\right\}^2$$

$$\Sigma\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v} = 0,\qquad \Sigma\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial w} = \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\left\{\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} + \frac{\partial\theta}{\partial w}\right\}$$

$$\Sigma\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial w} = -\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\left\{\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} + \frac{\partial\theta}{\partial w}\right\}.$$

Se adunque, oltre che alle (26), potremo con φ soddisfare all'altra

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} + \frac{\partial\theta}{\partial w} = 0 \ (*) \tag{28}$$

(*) Nella mia Nota ai Lincei, 15 Febbraio, è cangiato φ in $\varphi + \pi$.

avremo

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \cos^2\varphi\, du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, dv^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

e le (27) ci daranno le coordinate ξ, η, ζ dei punti dello spazio espresse pei parametri u, v, w di un nuovo sistema triplo ortogonale di Weingarten, le cui superficie pseudosferiche $w = \text{cost.}^e$ saranno complementari di quelle dell'antico sistema.

Resterà dunque soltanto da verificarsi che se φ soddisfa la (28), soddisfa anche le (26). Per ciò basta derivare la (28) una prima volta rispetto ad u, una seconda rispetto a v, tenendo conto delle equazioni fondamentali (I) soddisfatte da θ e si trovano appunto le (26).

21. Dobbiamo ora completare l'interpretazione geometrica del risultato precedente, cercando di caratterizzare sopra ciascuna superficie $w = \text{cost.}^e$ dell'antico sistema di Weingarten il sistema di geodetiche parallele, definito dalla funzione φ che soddisfa la (28).

Per ciò, osservando le (13) § 2, scriveremo la (28) sotto la forma

$$\frac{\cos\varphi}{r_{13}} + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{r_{23}} = -1.$$

Ma se ω indica l'angolo che la direzione positiva della normale principale alle curve C (§ 5) dell'antico sistema di Weingarten forma colla corrispondente linea $v = \text{cost.}^e$ sulla superficie pseudosferica $w = \text{cost.}^e$, per le (17) § 4 abbiamo

$$\frac{1}{r_{13}} = -\frac{\cos\omega}{\rho_3}, \qquad \frac{1}{r_{23}} = -\frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho_3}$$

e la precedente può quindi scriversi

$$\cos(\varphi - \omega) = \rho_3. \tag{30}$$

Ciò dimostra intanto che l'angolo φ, definito dalla (28), è reale soltanto quando $\rho_3 \leqq 1$, cioè per quei sistemi di Weingarten la cui flessione $\frac{1}{\rho_3}$ è $\geqq 1$, o almeno soltanto per quella regione dello spazio in cui tale condizione è verificata. Il caso $\frac{1}{\rho_3} = 1$ sarà trattato a parte (al n.° 23); qui supposto $\frac{1}{\rho_3} > 1$ avremo che le geodetiche G inviluppate dalle normali principali delle curve C lungo una superficie Σ saranno ortogonali ad una medesima geodetica γ (n.° 10). Assumendo allora sopra una superficie Σ a linee coordinate le geodetiche G e le loro traiettorie ortogonali, l'elemento lineare di Σ prenderà la forma

$$ds^2 = d\alpha^2 + \cosh^2\alpha\, d\beta^2.$$

Ora se con Ω indichiamo l'angolo che la direzione definita dalla (28) forma in un punto P di Σ colla geodetica G ($\beta = \text{cost.}^e$) che vi passa, avremo evidentemente $\Omega = \varphi - \omega$ e però la (30) diverrà

$$\cos\Omega = \rho_3 = \operatorname{tgh}\alpha,$$

dove α sarà precisamente la distanza geodetica del punto P dalla geodetica γ ($\alpha = 0$). Ma questa formola non è altro che quella ben nota, che fornisce l'angolo di parallelismo relativo al punto P ed alla geodetica γ sulla superficie pseudosferica Σ (*), cioè l'angolo formato da ciascuna delle due geodetiche parallele a γ, uscenti da P, colla geodetica calata da P normalmente a γ. Così resta nuovamente confermato che l'angolo φ, dato dalla (28), definisce veramente sopra Σ un sistema di geodetiche parallele e di più troviamo che queste geodetiche sono quelle parallele, in un senso o nell'altro (**), alla geodetica γ. Possiamo quindi formulare il teorema:

Dato un sistema di Weingarten a curvatura $K = -1$ e a flessione $\frac{1}{\rho_3} > 1$, si consideri sopra ogni superficie pseudosferica Σ del sistema quella geodetica γ, a cui tutte le geodetiche G, inviluppate dalle normali principali delle curve C (n.° 10), *sono ortogonali. Sopra Σ si tracci il sistema Γ di geodetiche parallele nell'un senso o nell'altro a γ, e si costruisca la superficie $\Sigma^{(1)}$ complementare di Σ rispetto a Γ; le superficie $\Sigma^{(1)}$ così costruite faranno parte di un nuovo sistema di Weingarten, che si dirà* COMPLEMENTARE *del primitivo.*

22. Ogni sistema Σ di WEINGARTEN a flessione > 1 ha quindi due sistemi complementari $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(-1)}$, le cui equazioni in termini finiti si ottengono da quelle note per Σ colle formule (27) cioè senza calcoli d'integrazione. Ora possiamo facilmente stabilire che ciascuno di questi sistemi è ancora a flessione > 1. E infatti dalle (26) e dalla (28) segue:

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w} = \cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial w} + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} - \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w} = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial\varphi}{\partial w} - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} + \cos\varphi\cos\theta\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}$$

(*) Cfr. BELTRAMI: *Saggio di geometria non-euclidea*, § IV (9).

(**) È chiaro che la (28) definisce due direzioni distinte, le quali corrispondono appunto all'uno o all'altro dei punti all'infinito di γ.

e quadrando e sommando

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2=\\=\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2,\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

formola notevole, che ci dimostra essere l'espressione

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2$$

un *invariante* rispetto alla trasformazione complementare (*). Introducendo le due flessioni $\frac{1}{\rho_3}$, $\frac{1}{\rho'_3}$ dei corrispondenti sistemi di WEINGARTEN abbiamo la formola richiesta

$$\left(\frac{1}{\rho'^2_3}-1\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2=\left(\frac{1}{\rho^2_3}-1\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2, \tag{31bis}$$

che dimostra l'asserzione fatta.

Per le formole superiori abbiamo inoltre

$$\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w}-\frac{\partial\varphi}{\partial w}=0,$$

che è perfettamente simile alla (28), cangiato θ in φ e φ in $\pi+\theta$. Ciò dimostra (come del resto è chiaro geometricamente) che se del nuovo sistema $\Sigma^{(1)}$ si assumono i due complementari, uno di essi è l'antico sistema Σ e l'altro sarà un nuovo sistema $\Sigma^{(2)}$. Così procedendo, con successive trasformazioni complementari si costruirà dal sistema noto Σ un'intera serie di sistemi di WEINGARTEN

$$\ldots\Sigma^{(-3)},\quad \Sigma^{(-2)},\quad \Sigma^{(-1)},\quad \Sigma,\quad \Sigma^{(1)},\quad \Sigma^{(2)},\quad \Sigma^{(3)}\ldots$$

estendentesi all'infinito nei due sensi. Dunque:

Da ogni sistema noto di Weingarten a curvatura $K=-1$ e a flessione >1 possono dedursi, senza calcoli d'integrazione, infiniti nuovi sistemi della medesima specie.

23. Per i sistemi di WEINGARTEN a flessione costante, esclusi dalle considerazioni al n.° 21, i risultati ottenuti si modificano, particolarizzandosi nel modo seguente. La (30) o la (28) dà per φ l'unica soluzione $\varphi=\omega$ e il sistema dato ha quindi un unico sistema complementare $\Sigma^{(1)}$. Questo è di nuovo

(*) Vedi al seguente n.° 28 la proprietà analoga per la trasformazione di BÄCKLUND.

un sistema di Weingarten a flessione costante $= 1$ in forza della (31^{bis}). Del resto ciò risulta anche dall'osservare che, per la costruzione stessa, le curve $C^{(1)}$ traiettorie ortogonali delle nuove superficie $\Sigma^{(1)}$ sono i luoghi dei centri di curvatura delle curve C ed hanno quindi, come le C, costante $= 1$ il raggio di 1^a curvatura. Ed anzi da questa osservazione e dalle note proprietà della trasformazione complementare si può facilmente dedurre una dimostrazione puramente geometrica del teorema, che ora ci occupa, e che enuncieremo così:

Dato un sistema Σ di Weingarten a flessione costante, se delle curve C, traiettorie ortogonali delle superficie pseudosferiche Σ, si assumono le linee $C^{(1)}$ luogo dei loro centri di curvatura, queste ammettono una serie di superficie pseudosferiche $\Sigma^{(1)}$ ortogonali, che fanno parte di un nuovo sistema di Weingarten, complementare di Σ.

È chiaro poi che nel caso attuale la relazione fra i sistemi Σ, $\Sigma^{(1)}$ è reciproca, cioè il sistema complementare di $\Sigma^{(1)}$ è Σ (Cfr. n.° 13).

In fine è da notarsi che se il sistema Σ è di Ribaucour, cioè se le curve C sono circoli, il sistema complementare $\Sigma^{(1)}$ si riduce ad una superficie pseudosferica unica, il luogo dei centri dei circoli. Ciò si rileva anche analiticamente dalla formula (23), osservando che allora $\frac{1}{T_3} = 0$, cioè ω è indipendente da w.

24. Se applichiamo il metodo ora trovato ai sistemi speciali di Weingarten studiati al § 7, troviamo che essi presentano la particolarità di riprodurre sistemi complementari appartenenti al medesimo gruppo.

Per il sistema triplo elicoidale (n.° 14) abbiamo infatti

$$ds^2 = cn^2\tau\, du^2 + sn^2\tau\, dv^2 + dn^2\tau\, dw^2$$

$$\tau = \frac{u}{a} + \frac{v}{b} + w, \quad \frac{k^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} + 1$$

e per la sua flessione

$$\frac{1}{\rho_3^2} - 1 = \frac{k^4 - b^2}{b^2 dn^2\tau}.$$

Supposto $\frac{1}{\rho_3} > 1$ potremo porre $b = k^2 sn\alpha$, essendo α una costante reale e ne seguirà $a = k^2 \frac{sn\alpha}{dn\alpha}$. Se si calcola l'elemento lineare dello spazio riferito al sistema complementare per mezzo della (28) e si fa uso delle formule d'addizione per le funzioni ellittiche, si trova:

$$ds^2 = cn^2(\tau \pm \alpha)\, du^2 + sn^2(\tau \pm \alpha)\, dv^2 + dn^2(\tau \pm \alpha)\, dw^2$$

ed è facile concluderne che il nuovo sistema si ottiene dal primitivo facendo rotare quest'ultimo di un angolo conveniente attorno all'asse elicoidale.

Similmente, se si considera il sistema di Weingarten composto di superficie di Enneper (n.° 17), e si applicano le formole ivi date, si verifica facilmente che i suoi sistemi complementari constano nuovamente di superficie di Enneper, congruenti per rotazione attorno all'asse.

In tal caso però il sistema complementare differisce per la sua forma dal sistema primitivo. Per convincersene geometricamente basta osservare che, nel caso limite di un sistema ciclico di Ribaucour, il sistema complementare si riduce ad un'unica superficie di rotazione, differente quindi per la forma dalle superficie di Enneper del sistema ciclico. Rispetto alla trasformazione complementare i sistemi di Weingarten constanti di superficie di Enneper si suddividono quindi in gruppi (cfr. più avanti n.° 28).

Così per i sistemi di Weingarten, che fin qui conosciamo, la trasformazione complementare non conduce che a sistemi già noti del medesimo gruppo; ma presto potremo trovarne dei nuovi pei quali tale particolarità non ha più luogo.

§ 9.

La trasformazione di Bäcklund.

25. Nel lavoro citato al n.° 11 il sig. Bäcklund ha felicemente generalizzato la trasformazione complementare. Questa trasformazione più generale (trasformazione di Bäcklund) serve egualmente per dedurre da una superficie pseudosferica nota infinite nuove ed ora vogliamo dimostrare che essa può, come la complementare, applicarsi simultaneamente alle superficie pseudosferiche di un sistema di Weingarten, per dedurre nuovi sistemi di questa specie.

È utile dare alle formole relative alla trasformazione di Bäcklund una forma analoga a quelle di Darboux per la trasformazione complementare (n.° 19), il che servirà nello stesso tempo di dimostrazione ai teoremi di Bäcklund.

Sia S una superficie, pseudosferica di raggio $= 1$, riferita alle sue linee di curvatura,

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2$$

il quadrato del suo elemento lineare, dove θ soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta \cos\theta; \tag{32}$$

siano inoltre

$$r_1 = -\operatorname{tg}\theta, \qquad r_2 = \cot\theta$$

i suoi raggi principali di curvatura, x, y, z le coordinate correnti di un suo punto, X, Y, Z i coseni di direzione positiva della normale.

Indicando ora con σ una costante arbitraria, supponiamo che l'angolo φ, formato da un certo sistema di linee sopra S colle $v = \text{cost}^{e}$, soddisfi, invece che alle (26) n.^{d} 18, alle equazioni più generali seguenti

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\theta + \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\operatorname{sen}\theta}{\cos\sigma} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\frac{\cos\varphi\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\theta}{\cos\sigma}, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

o ciò che torna lo stesso all'equazione a differenziali totali:

$$\left.\begin{aligned} d\varphi - \left(\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\theta + \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\operatorname{sen}\theta}{\cos\sigma} - \frac{\partial \theta}{\partial v}\right) du + \\ + \left(\frac{\cos\varphi\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\theta}{\cos\sigma} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) dv = 0. \end{aligned}\right\} \tag{33'}$$

Osserviamo anzitutto che ciò è possibile, essendo la condizione d'integrabilità della (33') identicamente soddisfatta in forza della (32); potremo quindi soddisfarvi con una funzione $\varphi(u, v)$, che contenga, oltre σ, una costante arbitraria C.

Derivando la 1^{a} delle (33) rispetto ad u, la 2^{a} rispetto a v e sottraendo si trova che anche φ soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi. \tag{34}$$

Ciò posto, possiamo formulare il teorema di Bäcklund nel modo seguente:

Per ciascun punto P della superficie pseudosferica data S e nel piano tangente in P si conduca un segmento costante $\overline{PP'} = \cos\sigma$, *inclinato sulla linea di curvatura* $v = \text{cost.}^{e}$ *dell'angolo φ, che soddisfa le* (33); *la superficie S' luogo degli estremi P' è una nuova superficie pseudosferica di raggio* $= 1$ (*).

Per dimostrare questo teorema, osserviamo che se x', y', z' sono le coordinate di P', x, y, z quelle di P si avrà per la costruzione stessa

$$x' = x + \cos\sigma\left\{\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v}\right\}$$

(*) Usando le denominazioni di Kummer, la S e la S' sono le superficie focali del sistema ∞^1 di raggi formato dalle rette PP'.

e analogamente per y', z'. Di qui derivando, coll'aver riguardo alle note formole sussistenti per ogni superficie, riferita alle sue linee di curvatura (*), ed alle (33) troviamo:

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = (\cos^2\varphi\cos\theta - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\theta)\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} +$$

$$+ (\operatorname{sen}\sigma\cos^2\varphi\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos\theta)\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} - \cos\sigma\cos\varphi\operatorname{sen}\theta X$$

$$\frac{\partial x'}{\partial v} = (\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\theta)\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} +$$

$$+ (\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos\theta)\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} + \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\theta X,$$

e quindi per l'elemento lineare di S'

$$ds'^2 = \cos^2\varphi\, du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, dv^2. \qquad (35)$$

Osservando la (34), si vede quindi subito che anche S' è a curvatura costante negativa $K = -1$ c. d. d.

26. Se calcoliamo i coseni di direzione X', Y', Z' della normale alla S' troviamo

$$X' = \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} - \cos\sigma\cos\varphi\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} - \operatorname{sen}\sigma X, \qquad (36)$$

il che dimostra che il segmento PP' è tangente in P' alla S', come lo è in P alla S. Le due normali in P, P' a S, S' formano fra loro l'angolo $\frac{\pi}{2} - \sigma$, poichè $-\Sigma XX' = \operatorname{sen}\sigma$ (Cfr. Bäcklund, l. c.).

(*) Le formole qui accennate sono:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\sqrt{E}}{r_2}X$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\sqrt{G}}{r_1}X$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Dalle (36) derivando, otteniamo:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial X'}{\partial u} = \operatorname{tg}\varphi \dfrac{\partial x'}{\partial u}, & \dfrac{\partial Y'}{\partial u} = \operatorname{tg}\varphi \dfrac{\partial y'}{\partial u} & \dfrac{\partial Z'}{\partial u} = \operatorname{tg}\varphi \dfrac{\partial z'}{\partial u} \\ \dfrac{\partial X'}{\partial v} = -\cot\varphi \dfrac{\partial x'}{\partial v}, & \dfrac{\partial Y'}{\partial v} = -\cot\varphi \dfrac{\partial y'}{\partial v}, & \dfrac{\partial Z'}{\partial v} = -\cot\varphi \dfrac{\partial z'}{\partial v}, \end{array}\right\}$$

le quali dimostrano che le linee u, v sono anche sopra S' linee di curvatura. Dopo di ciò segue subito dalla (35):

La trasformazione di Bäcklund conserva le linee di curvatura, le assintotiche e gli archi di assintotica (Bäcklund, l. c., § 4).

Rispetto all' equazione (33'), osserviamo con Bäcklund che, ponendo $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \Lambda$, si riduce alla forma

$$d\Lambda + \{a\Lambda^2 + b\Lambda + c\}du + \{a'\Lambda^2 + b'\Lambda + c'\}dv = 0,$$

dove a, b, c, a', b', c' sono funzioni note di u, v e se ne è noto un integrale particolare $\Lambda = \Lambda_1$, facendo la posizione $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda'$ si riduce alla forma lineare

$$d\Lambda' + (\alpha\Lambda' + \beta)du + (\gamma\Lambda' + \delta)dv = 0$$

e si integra con quadrature. Se adunque è nota *una* trasformata di Bäcklund a costante σ di S, tutte le altre si determinano con quadrature. Per ciascuna di queste conosciamo poi un integrale particolare della corrispondente equazione (33'), quello che corrisponde alla superficie iniziale S, sicchè la successiva applicazione della medesima trasformazione di Bäcklund B_σ a costante σ alle nuove superficie via via ottenute non richiede più altro che quadrature.

La trasformazione complementare si ottiene evidentemente da quella di Bäcklund B_σ, facendo $\sigma = 0$, e può indicarsi con B_0.

27. Applichiamo ora la trasformazione di Bäcklund B_σ simultaneamente alle superficie pseudosferiche di un sistema di Weingarten, come abbiamo fatto al n.° 20 per la trasformazione complementare B_σ. Ritenendo le notazioni ivi adottate, trasformiamo ciascuna superficie pseudosferica Σ del sistema dato di Weingarten con una trasformazione di Bäcklund B_0 in una nuova Σ'. Se $\varphi(u, v, w)$ indica l'angolo corrispondente a questa trasformazione di Bäcklund sopra ogni singola superficie Σ, ($w = \text{cost.}^e$) (*) e soddisfa quindi alle (33), le coordinate x', y', z' di un punto di Σ' si otterranno da quelle x, y, z del punto

(*) Vedi n.° 25.

corrispondente sopra Σ colle formole

$$x' = x + \cos\sigma \left\{ \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial x}{\partial v} \right\}$$

e analogamente per y', z'.

Di qui derivando e facendo uso delle formole fondamentali (4) § 1 e delle (33), troviamo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial u} &= (\cos^2\varphi\cos\theta - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\theta)\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \\
&+ (\operatorname{sen}\sigma\cos^2\varphi\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos\theta)\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi}{\frac{\partial\theta}{\partial w}}\frac{\partial x}{\partial w} \\
\frac{\partial x'}{\partial v} &= (\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\theta)\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \\
&+ (\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos\theta)\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\cos\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi}{\frac{\partial\theta}{\partial w}}\frac{\partial x}{\partial w} \\
\frac{\partial x'}{\partial w} &= -\frac{\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\cos\sigma\cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial v} + \\
&\frac{\frac{\cos\sigma\cos\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w} + \frac{\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w} + \frac{\partial\theta}{\partial w}}{\frac{\partial\theta}{\partial w}}\frac{\partial x}{\partial w}.
\end{aligned}\right\}$$

Se adunque la funzione $\varphi(u, v, w)$, oltre che alle (33) soddisferà all'altra:

$$\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial w} = -\left\{\frac{\cos\sigma\cos\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w} + \frac{\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w} + \frac{\partial\theta}{\partial w}\right\} \tag{37}$$

otterremo

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = \cos^2\varphi\, du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, dv^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

e le superficie Σ', trasformate di Bäcklund delle Σ, faranno quindi parte di un nuovo sistema di Weingarten.

Alle equazioni (33) (37) possiamo sostituire l'unica a differenziali totali:

$$\left.\begin{aligned}
d\varphi - \left(\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\theta + \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\operatorname{sen}\theta}{\cos\sigma} - \frac{\partial\theta}{\partial v}\right)du + \\
+ \left(\frac{\cos\varphi\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\theta}{\cos\sigma} + \frac{\partial\theta}{\partial u}\right)dv + \\
+ \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left\{\frac{\cos\sigma\cos\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w} + \frac{\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w} + \frac{\partial\theta}{\partial w}\right\}dw = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Ora le tre condizioni d'integrabilità (*) per questa equazione, ovvero per le (33), (37), si trovano identicamente soddisfatte in forza delle equazioni (I) § 2 cui soddisfa θ; esiste quindi un integrale $\varphi(u, v, w, C)$ della (38) contenente, oltre σ, una costante arbitraria C. Dunque:

Applicando ad ogni superficie pseudosferica di un sistema di Weingarten una trasformazione di Bäcklund a costante σ, definita dalla (38), *si ottiene un nuovo sistema di Weingarten.*

Rispetto alla equazione (38) si possono ripetere le osservazioni stesse del numero precedente per la (33') e si può quindi stabilire l'ulteriore risultato:

Se uno dei sistemi di Weingarten, trasformato di un sistema dato per mezzo della trasformazione di Bäcklund B_σ, è noto, la successiva applicazione della medesima trasformazione B_σ ai sistemi di Weingarten che via via si ottengono si effettua con quadrature.

28. I sistemi di Weingarten a flessione costante si comportano rispetto alla trasformazione di Bäcklund come rispetto alla complementare (n.° 23), cioè si cangiano in sistemi della stessa natura. In altre parole essi formano nella totalità dei sistemi di Weingarten un *sottogruppo* invariabile per trasformazioni di Bäcklund.

Per dimostrarlo stabiliremo che l'espressione stessa

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2,$$

di cui abbiamo riconosciuto il carattere invariantivo rispetto alla trasformazione complementare (n.° 22), è anche un *invariante* rispetto alla trasformazione di Bäcklund.

E infatti dalle (33) (37) deduciamo:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\cos\sigma}{\cos\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}=\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial w}+\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}+\\
&+\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}-\cos\sigma\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\\
&\frac{\cos\sigma}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w}=\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\varphi}{\partial w}+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}-\\
&-\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}+\cos\sigma\cos\varphi\cos\theta\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w},
\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

(*) Come è noto queste tre condizioni si ottengono esprimendo che i due valori ottenuti per ciascuna delle derivate seconde

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v},\quad\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w},\quad\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\,\partial u}$$

dalle (33) (37) stesse coincidono.

da cui quadrando e sommando:

$$\cos^2\sigma\left\{\left(\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w}\right)^2\right\}=\cos^2\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2+$$

$$+\left(\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial w}+\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2+\cos^2\sigma\operatorname{sen}^2\varphi\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+$$

$$+\cos^2\sigma\cos^2\varphi\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2-2\cos^2\sigma\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}-\cos^2\sigma\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2,$$

ovvero per la (37)

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 \quad \text{c. d. d.}$$

Ne segue che la formola

$$\left(\frac{1}{\rho_3'^2}-1\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2=\left(\frac{1}{\rho_3^2}-1\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 \tag{40}$$

vale anche in questo caso e però:

Ogni sistema di Weingarten a flessione costante si cangia per trasformazioni di Bäcklund in sistemi della medesima specie.

Indicando poi in questo caso con ω la funzione, che corrisponde al sistema complementare di quello dato (n.i 13 e 23), e con ψ quella del sistema complementare del trasformato, otteniamo dalle (39)

$$\left.\begin{aligned}-\cos\psi&=\frac{\cos\sigma\cos\theta+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\varphi-\omega)-\cos\theta\cos(\varphi-\omega)}{1-\cos\sigma\cos(\varphi-\omega)}\\-\operatorname{sen}\psi&=\frac{\cos\sigma\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}(\varphi-\omega)-\operatorname{sen}\theta\cos(\varphi-\omega)}{1-\cos\sigma\cos(\varphi-\omega)},\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

dalle quali, derivando rispetto a w, risulta

$$\frac{\partial\psi}{\partial w}=-\frac{\operatorname{sen}\sigma}{1-\cos\sigma\cos(\varphi-\omega)}\frac{\partial\omega}{\partial w}.$$

Dunque se $\frac{\partial\omega}{\partial w}=0$, anche $\frac{\partial\psi}{\partial w}=0$, cioè (n.° 13):

I sistemi ciclici di Ribaucour si cangiano per trasformazioni di Bäcklund in sistemi della stessa natura.

Essi formano cioè nel gruppo dei sistemi di WEINGARTEN a flessione costante un ulteriore *sottogruppo* invariabile per trasformazioni di BÄCKLUND (*).

29. Per dare almeno un esempio dell'effettiva applicazione di questi risultati ad un caso particolare, partiamo da quel sistema di WEINGARTEN semplicissimo, considerato alla fine della mia Nota precedente in questi Annali, e che è formato da due sistemi di elicoidi del DINI e da un sistema di sfere. Scriviamo le formole, che danno le coordinate dei punti dello spazio espresse per i parametri u, v, w del sistema triplo ortogonale sotto la forma

$$x = \cos\sigma \frac{\cos\beta}{\cosh\alpha}, \qquad y = \operatorname{sen}\sigma \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cosh\alpha}, \qquad z = u + \cos\sigma \operatorname{tgh}\alpha,$$

dove σ è una costante e per brevità si è posto

$$\alpha = w + \operatorname{tg}\sigma \cdot v - \frac{u}{\cos\sigma}, \qquad \beta = v - \operatorname{tg}\sigma \cdot w.$$

La corrispondente forma dell'elemento lineare dello spazio è data da

$$ds^2 = \frac{1}{\cosh^2\alpha} \{\operatorname{senh}^2\alpha\, du^2 + dv^2 + dw^2\}.$$

Se ora applichiamo a questo sistema di WEINGARTEN la trasformazione di BÄCKLUND a costante σ, per integrale generale della corrispondente equazione (38) a differenziali totali (38) troveremo

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \frac{\Omega}{\cosh\alpha},$$

ove per brevità si è posto

$$\Omega = u \cdot \operatorname{tg}\sigma + \frac{w}{\operatorname{sen}\sigma} - \frac{v}{\cos\sigma} + C \qquad (C \text{ costante arbitraria}).$$

(*) Questa denominazione di gruppi e sottogruppi, come già ho osservato al n.° 12, è scelta appositamente per rilevare l'analogia di questi risultati colla teoria generale dei gruppi di *operazioni*. Le operazioni che qui si presentano sono le *trasformazioni* di BÄCKLUND e gli enti geometrici a cui si applicano *i sistemi di Weingarten.*

Esaminando la (40) si vede subito che ogni sistema di WEINGARTEN, la cui flessione sia *costantemente* > 1 o < 1 si cangia per trasformazioni di BÄCKLUND in sistemi della medesima specie, il che pone già fuori di dubbio che nella totalità dei sistemi di WEINGARTEN, oltre ai gruppi formati dai sistemi a flessione costante e da quelli di RIBAUCOUR, esistono ulteriori sottogruppi. Lo studio e la classificazione di questi sottogruppi sarebbe certamente interessante, tanto sotto il punto di vista geometrico quanto sotto quello analitico della integrazione del sistema (I) d'equazioni a derivate parziali.

In quest'ordine d'idee si può osservare che i sistemi studiati al § 7 formano appunto, rispetto alle trasformazioni complementari, dei sottogruppi.

Le formole relative al nuovo sistema triplo di Weingarten sono quindi

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{2\cos\sigma}{\Omega^2+\cosh^2\alpha}\{(\cosh\alpha-\operatorname{sen}\sigma\;\;\Omega\operatorname{senh}\alpha)\cos\beta-\cos\sigma\cdot\Omega\cosh\alpha\operatorname{sen}\beta\} \\ y' &= \frac{2\cos\sigma}{\Omega^2+\cosh^2\alpha}\{(\cosh\alpha-\operatorname{sen}\sigma\cdot\Omega\operatorname{senh}\alpha)\operatorname{sen}\beta+\cos\sigma\cdot\Omega\cosh\alpha\cos\beta\} \\ z' &= u+\frac{2\cos\sigma}{\Omega^2+\cosh^2\alpha}\{\operatorname{senh}\alpha\cosh\alpha+\operatorname{sen}\sigma\cdot\Omega\}, \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

dove

$$\alpha = w+v\operatorname{tg}\sigma-\frac{u}{\cos\sigma}, \qquad \beta = v-\operatorname{tg}\sigma\cdot w, \qquad \Omega = u\operatorname{tg}\sigma+\frac{w}{\operatorname{sen}\sigma}-\frac{v}{\cos\sigma}+C.$$

È facile verificare che questo sistema è differente da quelli considerati al § 7 e inoltre la formola (40) ci mostra che, come quello da cui l'abbiamo dedotto, esso ha la flessione >1. Potremmo quindi applicarvi la trasformazione complementare come pure con successive quadrature la trasformazione di Bäcklund a costante σ.

Infine osserviamo che al limite, per $\sigma=0$, il sistema (42) si riduce ad un sistema ciclico di Ribaucour e precisamente al sistema considerato al n.° 5 della mia Nota 1ª sui sistemi ciclici.

§ 10.

Le superficie ipercicliche.

30. Fino ad ora nei sistemi tripli ortogonali di Weingarten abbiamo diretta la nostra attenzione soltanto alle superficie a curvatura costante del sistema. Ma è chiaro che per ben conoscere la loro natura bisognerà anche studiare le superficie degli altri due sistemi e tale studio inizieremo appunto in questo ultimo paragrafo, limitandoci però al caso dei *sistemi di Weingarten a flessione costante.*

In un sistema di questa specie ciascuna delle superficie ortogonali alle pseudosferiche gode evidentemente della proprietà che un suo sistema di linee di curvatura è formato di curve colla medesima flessione costante. Se diamo il nome di *superficie cicliche di raggio R* a quelle che hanno per linee di curvatura di un sistema circoli di raggio R, potremo chiamare *superficie iperciclica di raggio R* una superficie le cui linee di curvatura di un sistema hanno la flessione costante $=\frac{1}{R}$ (*). Potremo quindi dire che un sistema di WEINGARTEN a flessione costante $\frac{1}{R}$ è composto di un sistema di superficie a curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$ e da due sistemi di superficie ipercicliche di raggio R.

Qui noteremo subito che in coordinate cartesiane si può facilmente formare l'equazione a derivate parziali, caratteristica per le superficie ipercicliche di raggio R; essa è però un'equazione del 3° ordine di forma complicata. Ciò nonostante le teorie che abbiamo svolte ci permettono di stabilire alcune notevoli proprietà di queste superficie. Come vedremo, queste proprietà sono intimamente connesse con quelle dei sistemi di WEINGARTEN a flessione costante e dipendono dal fatto che ogni superficie iperciclica può inserirsi in un tale sistema. Per le superficie cicliche (le canali escluse) tale asserzione si dimostra facilmente, osservando che le normali nei centri dei circoli inviluppano una curva evoluta dalla curva C, luogo dei loro centri; facendo allora passare per la curva C una superficie pseudosferica S; le cui normali lungo C siano le rette ora dette (**), il sistema ciclico di RIBAUCOUR che ha per superficie centrale (complementare) (vedi n.° 23) la S, contiene appunto la superficie ciclica data. Ma per le superficie ipercicliche non ci è possibile per ora dimostrarlo che con considerazioni infinitesimali. Per ciò nei due numeri seguenti tratteremo separatamente quelle proprietà delle superficie ipercicliche che possono stabilirsi con un'analisi rigorosa, riserbando per l'ultimo numero l'uso delle considerazioni infinitesimali (cfr. l'avvertenza nella prefazione e il n.° 11).

31. Sia S una superficie iperciclica di raggio $=1$ e ritenendo le solite notazioni, riferiamo la S alle sue linee di curvatura u, v e di queste supponiamo che le $v=\text{cost.}^e$ abbiano la flessione costante $=1$. Il quadrato della flessione di ogni linea tracciata sopra una superficie essendo eguale alla somma dei quadrati delle sue curvature normale e geodetica, dovremo avere per ipotesi:

$$\frac{1}{r_2^2}+\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)^2=1.$$

(*) Intendiamo escluse da queste considerazioni e denominazioni le superficie canali di raggio R; per queste non soltanto il raggio di curvatura della linea di curvatura (circolo), ma benanco il raggio principale di curvatura della superficie è costante $=R$.

(**) Cfr. BÄCKLUND, l. c.

Possiamo quindi porre

$$\frac{1}{r_2} = \operatorname{sen}\omega, \qquad \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = \cos\omega; \tag{43}$$

ma perchè l'elemento lineare $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$ appartenga ad una superficie di cui u, v siano le linee di curvatura e r_1, r_2 i raggi principali di curvatura, è necessario e sufficiente (*) che siano soddisfatte le 3 condizioni seguenti

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial v}=0\\ &\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}+\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial u}=0\\ \frac{1}{r_1r_2}=-&\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

La 1ª ci dà per le (43)

$$\frac{1}{r_1} = \operatorname{sen}\omega + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\omega}{\partial v}$$

e per conseguenza la 2ª

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + \sqrt{G}\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial u} = 0.$$

Dopo ciò la 3ª diviene

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \sqrt{EG} = 0.$$

Poniamo ora $\theta = \int\sqrt{E}du$ e considerando $\sqrt{G}$ come funzione di θ, v, avremo dalla precedente

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial\theta^2} + \sqrt{G} = 0,$$

da cui integrando

$$\sqrt{G} = V\cos(\theta + V_1),$$

dove V, V_1 sono funzioni di v soltanto. Di questa la 1ª si può porre $= 1$ can-

(*) Cfr. la mia tesi di laurea: *Sulle superficie applicabili.* Pisa, Nistri, 1878, n.° 17, pag. 36.

giando v in $\int V dv$ e la 2^a $V_1 = 0$, includendola in θ. Avremo dunque

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{E} = \frac{\partial\theta}{\partial u}, \qquad \sqrt{G} = \cos\theta \\ \frac{1}{r_2} = \operatorname{sen}\omega, \qquad \frac{1}{r_1} = \operatorname{sen}\omega + \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial\omega}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

dove θ, ω soddisfano le equazioni simultanee a derivate parziali

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} - \cos\omega\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + \cos\omega\cos\theta\frac{\partial\omega}{\partial u} = 0. \tag{46}$$

Viceversa colle (45) (46) le (44) sono identicamente soddisfatte, dunque:

All'elemento lineare di ogni superficie iperciclica di raggio $= 1$, *riferita alle sue linee di curvatura si può dare la forma*

$$ds^2 = \left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 du^2 + \cos^2\theta\, dv^2,$$

dove le $v =$ cost.^{e} *hanno costante* $= 1$ *il raggio di 1^a curvatura. I suoi raggi principali di curvatura sono dati dalle* (45), *le funzioni* θ, ω *essendo legate dalle* (46).

Osservazione. — Alle medesime formole saremmo giunti partendo da un sistema di Weingarten a flessione costante (§ 4) e facendo nella formola

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

$v =$ cost.^{e}, col cangiare poi u in v e w in u.

32. Per la simmetria delle (46) in θ, ω è chiaro che anche l'elemento lineare

$$ds_1^2 = \cos^2\omega\, dv^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2 du^2$$

appartiene ad una seconda superficie iperciclica S_1 di raggio $= 1$, le cui linee di curvatura $v =$ cost.^{e} hanno la flessione costante $= 1$.

Le formole che danno le coordinate $(x_1\, y_1\, z_1)$ del punto P_1 di S_1, che corrisponde al punto $P \equiv (x, y, z)$ di S, sono

$$\left.\begin{aligned} x_1 = x - \cos\omega\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} - \operatorname{sen}\omega X \\ y_1 = y - \cos\omega\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v} - \operatorname{sen}\omega Y \\ z_1 = z - \cos\omega\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v} - \operatorname{sen}\omega Z, \end{aligned}\right\}$$

come agevolmente si verifica calcolando di qui l'elemento lineare

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2.$$

Geometricamente esse significano che il punto P_1 è il centro di curvatura relativo al punto P di quella curva $v = \text{cost.}^e$ che passa per P sopra S e però abbiamo il teorema:

A) Ogni superficie iperciclica S ha una superficie iperciclica coniugata S_1, che è il luogo dei centri di curvatura delle sue linee di curvatura a flessione costante. Inversamente la coniugata di S_1 è S.

Se la S è una superficie ciclica, la sua coniugata S_1 si riduce, come è chiaro, ad una linea.

Come nel teorema precedente viene utilizzata in sostanza la trasformazione complementare, così possiamo anche stabilire un risultato più generale servendoci della trasformazione di Bäcklund. Basterà formulare il teorema corrispondente e le verifiche si faranno con somma facilità:

B) Data una superficie iperciclica S di raggio $= 1$, per ogni suo punto P si conduca un segmento rettilineo costante $\overline{PP'} = \cos\sigma$, normale alla linea di curvatura $v = \text{cost.}^e$ e inclinato sull'altra dell'angolo φ, che soddisfa all'equazione a differenziali totali:

$$\left.\begin{aligned} & d\varphi - \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial u}\left\{1 + \cos\sigma\cos(\varphi - \omega)\right\} - \\ & - \left\{\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\theta - \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\operatorname{sen}\theta}{\cos\sigma} + \cos\theta\operatorname{sen}\omega + \frac{\partial\omega}{\partial v}\right\} dv = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

il luogo degli estremi P' sarà una nuova superficie iperciclica di raggio $= 1$, che avrà per elemento lineare

$$ds'^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 du^2 + \cos^2\varphi\, dv^2.$$

Qui osserveremo che per le (46) la condizione d'integrabilità della (47) è identicamente soddisfatta, sicchè φ conterrà, oltre σ, una costante arbitraria. Inoltre se x', y', z' sono le coordinate di P' si avrà per la costruzione stessa

$$x' = x + \cos\sigma\left(\cos\varphi\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} + \operatorname{sen}\varphi X\right)$$

e analogamente per y', z'. Di qui derivando e tenendo conto della (47) si verificano agevolmente le asserzioni del teorema.

In fine noteremo che la (47), come la (33') n.° 25, si riduce alle quadrature, noto un integrale particolare e quindi se della S si conosce una delle superficie ipercicliche derivate, l'applicazione successiva del teorema B) richiederà soltanto quadrature.

33. Occupiamoci ora delle *caratteristiche* delle superficie ipercicliche e dimostriamo il teorema:

Date ad arbitrio due curve C, C' che s'incontrino ortogonalmente in un punto M e delle quali la prima sia a flessione costante $\frac{1}{R}$, esiste una ed una sola superficie iperciclica di raggio R, che passa per le curve C, C' e le ammette per linee di curvatura.

Supponiamo dapprima che la superficie cercata S esista; la sua normale in M sarà determinata come la normale comune a C, C' e per conseguenza lungo le linee di curvatura C, C' si conosceranno le normali di S. Sia ora C_1 la linea di curvatura del medesimo sistema di C e infinitamente vicina a questa. Per ogni punto P di C passa una linea di curvatura del 2° sistema, che interseca C_1 nel punto corrispondente P_1. I segmenti rettilinei infinitesimi PP_1 sono normali in P alla curva iniziale C e prolungati inviluppano una delle evolute della curva C. Poniamo

$$\overline{PP_1} = \varepsilon f(s)$$

essendo ε una costante infinitesima e $f(s)$ una funzione dell'arco s di C che risulterà determinata dall'ipotesi fatta, che cioè la curva C_1 luogo degli estremi P_1 abbia la medesima flessione costante $\frac{1}{R}$.

E infatti, ritenendo per la curva C le denominazioni usate da Serret e indicando con x_1, y_1, z_1, s_1... gli elementi corrispondenti relativi alla curva C_1, e ponendo $\tau = \int \frac{ds}{T} + g$ avremo (*):

$$x_1 = x + \varepsilon f (\cos\tau \cos\xi + \operatorname{sen}\tau \cos\lambda)$$

e similmente per y_1, z_1; la costante g risulterà determinata dalla direzione iniziale $\overline{MM_1}$ del segmento $\overline{PP_1}$ in M. Di qui derivando abbiamo

$$\frac{dx_1}{ds} = \left\{1 - \varepsilon f \frac{\cos\tau}{R}\right\} \cos\alpha + \varepsilon f' \cos\tau \cos\xi + \varepsilon f' \operatorname{sen}\tau \cos\lambda$$

(*) Serret C. D.

e quindi, trascurando le potenze superiori di ε:

$$\frac{ds_1}{ds} = 1 - \varepsilon f \frac{\cos\tau}{R}$$

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha + \varepsilon f' \cos\tau \cos\xi + \varepsilon f' \operatorname{sen}\tau \cos\lambda.$$

Derivando di nuovo colla medesima avvertenza si ha:

$$\frac{\cos\xi_1}{R_1} = -\frac{\varepsilon f'}{R}\cos\tau\cos\alpha + \left\{\frac{1}{R} + \varepsilon\left(f'' + \frac{f}{R^2}\right)\cos\tau\right\}\cos\xi + \varepsilon f'' \operatorname{sen}\tau\cos\lambda$$

e introducendo l'ipotesi $R_1 = R$ avremo

$$f'' + \frac{f}{R^2} = 0,$$

da cui $f(s) = A\cos\left(\frac{s}{R} + B\right)$. La costante A si può porre $= 1$, includendola in ε e la B risulta determinata, osservando che la C_1 deve essere normale in M_1 alla curva C'. Così dunque la linea di curvatura C determina la successiva C_1, questa la successiva C_2 e così via. D'altra parte il ragionamento stesso prova che se le curve C, C' sono date e le successive curve C_1, C_2... si costruiscono nel modo anzidetto, il loro luogo sarà la superficie iperciclica cercata.

Da questo risultato, paragonato col teorema B) n.° 11, si ottiene subito l'altro:

Ogni superficie iperciclica individua un sistema triplo ortogonale di Weingarten a flessione costante, cui essa appartiene.

È chiaro che, volendo far uso di questo teorema, i risultati dei due numeri precedenti potevano più semplicemente stabilirsi.

NOTA.

La 2ª parte del teorema b) n.° 4, cui questa nota si riferisce, è una conseguenza della 1ª. Stabilito infatti che sopra le superficie pseudosferiche di un sistema di Weingarten le linee assintotiche si corrispondono, si osserverà che le curve C, traiettorie ortogonali del sistema Σ, uscenti dai punti di una assintotica, hanno per luogo una superficie A, le cui intersezioni L colle superficie pseudosferiche Σ sono assintotiche per le Σ e quindi geodetiche per la A. Le traiettorie ortogonali delle geodetiche L sopra A sono curve C e però gli archi di due curve L compresi fra due curve C sono eguali c. d. d.

Le linee L sono a torsione costante $= 1$ (teorema di ENNEPER) sicchè la superficie A ha un sistema di linee geodetiche a torsione costante. Se poi il sistema Σ è a flessione costante, le superficie A godono dell'ulteriore proprietà che le curve C traiettorie ortogonali delle geodetiche L a torsione costante $= 1$ sono a flessione costante $= 1$.

Per queste superficie A, che si trovano così intimamente legate ai sistemi tripli ortogonali di WEINGARTEN, potremmo stabilire proprietà analoghe a quelle svolte nell'ultimo paragrafo del lavoro per le superficie ipercicliche e in particolare applicarvi la trasformazione complementare e di BÄCKLUND, le quali cangiano evidentemente ogni superficie A in una superficie della medesima specie.

Qui mi limiterò ad osservare che se nella formola

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

che dà l'elemento lineare dello spazio riferito ad un sistema di WEINGARTEN, si fa

$$u + v = 2\alpha \qquad u - v = 2\beta,$$

α, β sono gli archi di assintotica delle superficie pseudosferiche e ne risulta

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\cos 2\theta\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2.$$

Di qui facendo $\beta = \text{cost.}^e$, si ha per l'elemento lineare della corrispondente superficie A

$$ds^2 = d\alpha^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2.$$

Pisa, Marzo 1885.

APPENDICE.

Applicazione simultanea della trasformazione complementare e di Bäcklund.

Essendo Σ un sistema di WEINGARTEN a flessione $\frac{1}{\rho_3} \geqq 1$, indichiamo con Σ' un sistema derivato da Σ con una trasformazione di BÄCKLUND B_σ (vedi n.° 27). Per la flessione $\frac{1}{\rho'_3}$ di Σ' avremo pure, a causa della (40) n.° 28, $\frac{1}{\rho'_3} \geqq 1$, e potremo quindi applicare tanto a Σ quanto a Σ' la trasformazione complementare (n.° 22). Supposto $\frac{1}{\rho_3} > 1$, otteremo da Σ un *gruppo* infinito Γ di sistemi complementari di WEINGARTEN

$$\Gamma = (\ldots \Sigma_{-2}, \quad \Sigma_{-1}, \quad \Sigma, \quad \Sigma_1, \quad \Sigma_2 \ldots)$$

e medesimamente da Σ' un gruppo

$$\Gamma' = (\ldots \Sigma'_{-2}, \quad \Sigma'_{-1}, \quad \Sigma', \quad \Sigma'_1, \quad \Sigma'_2 \ldots),$$

mentre nel caso di $\frac{1}{\rho_3} = 1$ i gruppi Γ, Γ' consteranno ciascuno di due soli sistemi di WEINGARTEN (a flessione costante) (*). In ogni caso avremo il teorema:

Ad ogni sistema Σ_i del gruppo Γ corrisponde nel gruppo Γ' un sistema Σ'_i legato a Σ_i dalla medesima trasformazione di Bäcklund B_σ, che trasforma il sistema iniziale Σ in Γ nell'iniziale Σ' in Γ'.

In altre parole la trasformazione di BÄCKLUND B_σ cangia l'intero gruppo Γ in Γ', sicchè (per usare un noto vocabolo della teoria delle sostituzioni) i gruppi di sistemi complementari di WEINGARTEN formano, rispetto alle trasformazioni di BÄCKLUND, dei *sistemi d'imprimitività*.

Simbolicamente esprimeremo questa proprietà colla formola

$$\Sigma'_i \equiv B_\sigma \Sigma_i, \quad \text{ovvero} \quad \Gamma' \equiv B_\sigma \Gamma$$

(*) Cfr. i n.i 22, 23.

e in particolare avremo $\Sigma'_1 \equiv B_\sigma \Sigma_1$, cioè

$$B_0 B_\sigma \Sigma \equiv B_\sigma B_0 \Sigma,$$

il che dimostrerà in certo senso la *permutabilità* delle operazioni B_0 (trasformazione complementare) e B_σ (trasformazione di Bäcklund) applicate ai sistemi di Weingarten (*).

È chiaro che basterà dimostrare la proprietà enunciata per due sistemi Σ_1, Σ'_1 contigui a Σ, Σ', la dimostrazione stessa potendosi poi ripetere per i successivi.

Indichiamo con θ, φ, ω gli angoli che definiscono la forma (12) n.° 4 dell'elemento lineare dello spazio riferito rispettivamente ai sistemi

$$\Sigma, \quad \Sigma', \quad \Sigma_1,$$

di guisa che φ soddisferà all'equazione a differenziali totali (38) n.° 27 ed ω alle (28) n.° 20, cioè:

$$\frac{\cos\omega}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}+\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial\theta}{\partial w}=0. \qquad (a)$$

È facile allora vedere che le stesse formole (41) n.° 28, le quali nel caso dei sistemi di Weingarten a flessione costante definiscono l'angolo ψ corrispondente all'unico sistema Σ'_1 complementare di Σ', nel caso attuale $\left(\frac{1}{\rho_3}>1\right)$ definiranno *uno* dei due sistemi complementari di Σ', che indicheremo appunto con Σ'_1. Tale verifica si farà sostituendo i valori (41) di $\cos\psi$, $\operatorname{sen}\psi$ nell'equazione

$$\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}+\frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}=0,$$

costruita con φ, ψ come la (a) con θ, ω, la quale si troverà così, per le (39) e per la (a) stessa, identicamente soddisfatta.

Ciò posto, consideriamo quattro superficie pseudosferiche corrispondenti S, S', S_1, S'_1 nei quattro sistemi di Weingarten Σ, Σ', Σ_1, Σ'_1 e sopra di esse quattro punti corrispondenti P, P', P_1, P'_1, le cui coordinate indicheremo rispettivamente con (x, y, z), (x', y', z'), (x_1, y_1, z_1), (x'_1, y'_1, z'_1). Dobbiamo dimostrare che S'_1 si deduce da S_1 colla medesima costruzione di Bäcklund

(*) Non bisogna dimenticare che la trasformazione B_σ contiene oltre σ un'altra costante arbitraria C (n.° 27); la formola sopra scritta vale soltanto, quando le due costanti che entrano in B_σ nel 1° e nel 2° membro hanno fra loro una relazione determinata.

B_σ che trasforma S in S', ossia che insieme alle formole (n.° 27)

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \cos\sigma\left\{\cos\varphi\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v}\right\}, \\ y' &= y + \cos\sigma\left\{\cos\varphi\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial y}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial y}{\partial v}\right\}, \\ z' &= z + \cos\sigma\left\{\cos\varphi\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial z}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial z}{\partial v}\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

per passare da P a P' sussistono le analoghe

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \cos\sigma\left\{\cos\psi\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \operatorname{sen}\psi\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right\}, \\ y'_1 &= y_1 + \cos\sigma\left\{\cos\psi\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial y_1}{\partial u} + \operatorname{sen}\psi\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial y_1}{\partial v}\right\}, \\ z'_1 &= z_1 + \cos\sigma\left\{\cos\psi\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial z_1}{\partial u} + \operatorname{sen}\psi\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial z_1}{\partial v}\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

per passare da P_1 a P'_1.

Ora abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + \cos\omega\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}\omega\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} \\ x'_1 &= x' + \cos\psi\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial x'}{\partial u} + \operatorname{sen}\psi\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial x}{\partial v} \quad (\text{n.° } 20) \end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

e dalle (b) segue inoltre per le (36^{bis}) n.° 27:

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial x'}{\partial u} = (\cos\varphi\cos\theta - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} +$$

$$+ (\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi)\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} + \cos\sigma\operatorname{sen}\theta\frac{\dfrac{\partial x}{\partial w}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial w}}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial x'}{\partial v} = (\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi)\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} +$$

$$+ (\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\varphi)\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} - \cos\sigma\cos\theta\frac{\dfrac{\partial x}{\partial w}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial w}}.$$

Sostituendo nella (d) otteremo quindi

$$\left.\begin{aligned}
x'_1 - x_1 = &\{\cos\sigma\cos\varphi - \cos\omega + \cos\varphi\cos(\psi-\theta) + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}(\psi-\theta)\}\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u}\\
&+\{\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\varphi\cos(\psi-\theta) - \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\operatorname{sen}(\psi-\theta)\}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v}\\
&-\cos\sigma\operatorname{sen}(\psi-\theta)\frac{\dfrac{\partial x}{\partial w}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial w}}
\end{aligned}\right\}\qquad (e)$$

e analogamente per $y'_1 - y_1$, $z'_1 - z_1$. D'altra parte dalle (26^{bis}) n.° 20 risulta

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial x_1}{\partial u} &= \cos\omega\cos\theta\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}\omega\cos\theta\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} + \operatorname{sen}\theta\frac{\dfrac{\partial x}{\partial w}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial w}}\\
\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial x_1}{\partial v} &= \cos\omega\operatorname{sen}\theta\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\theta\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} - \cos\theta\frac{\dfrac{\partial x}{\partial w}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial w}}\\
\frac{\dfrac{\partial x_1}{\partial w}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial w}} &= -\operatorname{sen}\omega\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \cos\omega\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v}
\end{aligned}\right\}$$

e, risolvendo rispetto a $\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial x}{\partial v},\ \dfrac{\dfrac{\partial x}{\partial w}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial w}}$,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} &= \cos\omega\cos\theta\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \cos\omega\operatorname{sen}\theta\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \operatorname{sen}\omega\frac{\dfrac{\partial x_1}{\partial w}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial w}}\\
\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} &= \operatorname{sen}\omega\cos\theta\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\theta\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \cos\omega\frac{\dfrac{\partial x_1}{\partial w}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial w}}\\
\frac{\dfrac{\partial x}{\partial w}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial w}} &= \operatorname{sen}\theta\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \cos\theta\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial x_1}{\partial v}.
\end{aligned}\right\}$$

Sostituendo nella (e), coll'osservare le formole (*)

$$\cos(\psi - \theta) = \frac{\cos(\varphi - \omega) - \cos\sigma}{1 - \cos\sigma\cos(\varphi - \omega)}, \qquad \operatorname{sen}(\psi - \theta) = \frac{\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}(\varphi - \omega)}{1 - \cos\sigma\cos(\varphi - \omega)},$$

che seguono dalle (41), si vedrà subito che la (e) si cangia appunto nella prima delle (c), le quali risultano così dimostrate.

(*) Possiamo sostituire a queste due formole l'unica

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\psi - \theta) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi - \omega).$$

Étude moyenne du plus grand commun diviseur de deux nombres.

(*Par* Ernest Cesàro, *étudiant, à Torre Annunziata.*)

---

1. (u, v) désignant le plus grand commun diviseur de u et v, et $F(u, v)$ étant une fonction quelconque de (u, v), tâchons d'évaluer la somme des valeurs que prend $F(u, v)$, lorsque u et v varient séparément de 1 à n. À cet effet, observons que, pour avoir $(u, v) = p$, il faut et il suffit que l'on ait $u = pu'$, $v = pv'$, les entiers u' et v' étant *premiers entre eux*. Il en résulte que, dans la somme considérée, $F(p)$ entre autant de fois qu'il y a de couples de nombres premiers entre eux, non supérieurs à $\left[\frac{n}{p}\right] = q_p$. Par conséquent, si $I(x)$ est le *nombre des fractions irréductibles, dont les termes ne surpassent pas* x, on a

$$\sum F(u, v) = \sum_{p=1}^{p=n} F(p) I(q_p). \tag{1}$$

D'après des principes connus (*), si l'on pose

$$\Psi(x) = F(1) + F(2) + F(3) + \cdots + F(x),$$

et d'autre part, si l'on représente par $i(x)$ le *nombre des fractions irréductibles, dont un terme au moins est égal à* x, de telle sorte que l'on ait

$$I(x) = i(1) + i(2) + i(3) + \cdots + i(x),$$

on peut écrire, au lieu de (1),

$$\sum F(u, v) = \sum_{p=1}^{p=n} i(p) \Psi(q_p). \tag{2}$$

2. Les formules (1) et (2) ne sont pas toujours faciles à utiliser dans l'étude moyenne du plus grand commun diviseur de deux nombres. Aussi,

allons-nous les transformer, de manière à pouvoir en tirer le plus grand profit possible. À cet effet, observons que la fonction $i(x)$ n'est que le double de $\varphi(x)$, sauf pour $x=1$; car $i(1)=2\varphi(1)-1$. Conséquemment

$$i(a)+i(b)+i(c)+\cdots=2n-1,$$

$a, b, c, \ldots$ étant tous les diviseurs de n. De cette identité on déduit (*) l'identité plus générale

$$\left.\begin{aligned} &F(a)i\left(\frac{n}{a}\right)+F(b)i\left(\frac{n}{b}\right)+F(c)i\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots \\ &=(2n-a)\frac{f(a)}{a}+(2n-b)\frac{f(b)}{b}+(2n-c)\frac{f(c)}{c}+\cdots, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ou bien

$$i(a)F\left(\frac{n}{a}\right)+i(b)F\left(\frac{n}{b}\right)+\cdots=(2a-1)f\left(\frac{n}{a}\right)+(2b-1)f\left(\frac{n}{b}\right)+\cdots,$$

pourvu que

$$f(a)+f(b)+f(c)+\cdots=F(n).$$

Si, dans la première de ces identités, on change successivement n en $n-1$, $n-2, \ldots 3, 2, 1$, on obtient, par addition,

$$\sum_{p=1}^{p=n} F(p)I(q_p)=\sum_{p=1}^{p=n} q_p^2 f(p).$$

L'autre identité donne, par le même procédé,

$$\sum_{p=1}^{p=n} i(p)\Psi(q_p)=\sum_{p=1}^{p=n}(2p-1)\psi(q_p),$$

en posant

$$\psi(x)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(x).$$

On peut donc, aux identités (1) et (2), substituer les suivantes:

$$\sum F(u, v)=q_1^2 f(1)+q_2^2 f(2)+q_3^2 f(3)+\cdots+q_n^2 f(n), \quad (4)$$

$$\sum F(u, v)=\psi(q_1)+3\psi(q_2)+5\psi(q_3)+\cdots+(2n-1)\psi(q_n), \quad (5)$$

qu'il est facile d'obtenir directement, ainsi qu'on le verra dans une autre Note (**).

3. Chacun des membres de (3) est une certaine fonction $\xi(n)$, définie

par l'une ou l'autre des égalités

$$\xi(n) = 2\sum\varphi(a)F\left(\frac{n}{a}\right) - F(n) = 2\sum af\left(\frac{n}{a}\right) - F(n).$$

D'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, on peut écrire

$$\sum F(u,\ v) = \xi(1) + \xi(2) + \xi(3) + \cdots + \xi(n), \tag{6}$$

de sorte qu'une *double série* se trouve mise sous la forme d'une *série simple.* Ainsi, pour $f(x) = 1$, on a d'abord

$$F(x) = \theta(x), \qquad \xi(x) = 2\int x - \theta(x) \quad (***);$$

puis:

$$\sum\theta(u,\ v) = 2\left(\int 1 + \int 2 + \cdots + \int n\right) - [\theta(1) + \theta(2) + \cdots + \theta(n)].$$

De cette façon, l'évaluation moyenne des doubles sommes que nous étudions se trouve ramenée à l'évaluation moyenne des sommes simples, dont nous nous sommes occupé dans le *Premier Mémoire.* Dans le dernier exemple, on sait que, si l'on néglige les quantités d'un ordre inférieur à celui de n^2, on a

$$\sum\theta(u,\ v) = \frac{\pi^2}{6}n^2.$$

Donc, en moyenne, $\theta(u, v) = \frac{\pi^2}{6}$, c'est-à-dire que: « *Deux nombres quelconques admettent, en moyenne,* $\frac{\pi^2}{6}$ *diviseurs communs* ».

De même, soit $f(x) = x$, et, par suite,

$$F(x) = \int x, \qquad \xi(x) = 2x\theta(x) - \int x;$$

la formule (6) donne

$$\sum\int(u,\ v) = 2[\theta(1) + 2\theta(2) + \cdots + n\theta(n)] - \left(\int 1 + \int 2 + \cdots + \int n\right).$$

Asymptotiquement:

$$\sum\int(u,\ v) = n^2 \log n.$$

On satisfait à cette égalité en prenant, en moyenne, $\int(u,\ v) = \log\sqrt{uv}.$

4. On peut aller plus loin, dans la dernière évaluation. Dans le *Premier Mémoire* nous avons, en effet, énoncé, sans démonstration, la proposition suivante:

« *La moyenne somme des diviseurs communs à deux nombres quelconques est égale au demi-logarithme naturel du produit de ces nombres, augmenté de la constante* 0,83196.... »

Ici, les formules (4) et (5) sont insuffisantes. Il faut avoir recours à la transformation asymptotique connue (*)

$$\sum F(u,\ v) = \sum_{p=1}^{p=\sqrt{n}} q_p^2 f(p) + \sum_{p=1}^{p=\sqrt{n}} (2p-1)\psi(q_p) - n\psi(\sqrt{n}). \tag{7}$$

Pour $f(x) = x$, on a d'abord

$$F(x) = \int x, \qquad \psi(x) = \frac{x(x+1)}{2};$$

puis la formule (7) devient

$$\sum \int (u,\ v) = 2\sum_1^{\sqrt{n}} p q_p^2 - \frac{1}{2}\sum_1^{\sqrt{n}} q_p^2 + \sum_1^{\sqrt{n}} p q_p - \frac{1}{2}\sum_1^{\sqrt{n}} q_p - \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Or, en négligeant les quantités d'un ordre inférieur à celui de n^2, on trouve

$$\sum_1^{\sqrt{n}} p q_p^2 = n^2 \sum_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} n^2 \log n + C n^2,$$

$$\sum_1^{\sqrt{n}} q_p^2 = n^2 \sum_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6} n^2.$$

Les deux autres sommes sont négligeables vis-à-vis de n^2. Conséquemment

$$\sum \int (u,\ v) = n^2 \log n + \left(2C - \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\right) n^2. \tag{8}$$

Tâchons de satisfaire à cette égalité en posant

$$\int (u,\ v) = K \log(uv) + K'. \tag{9}$$

Faisant varier séparément u et v, dans la dernière égalité, depuis 1 jusqu'à n, on trouve, par addition,

$$\sum \int (u,\ v) = 2Kn \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ n) + K' n^2,$$

ou bien, asymptotiquement,

$$\sum\int(u,\ v) = 2Kn^2\log n + (K' - 2K)n^2.$$

Par comparaison avec (8), on obtient

$$K = \frac{1}{2}, \quad K' = 2C - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}.$$

L'égalité moyenne (9) devient donc

$$\int(u,\ v) = \frac{1}{2}\log(uv) + 2C - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2},$$

ou bien, approximativement,

$$\int(u,\ v) = \log\sqrt{uv} + 0{,}83196\ldots \tag{10}$$

5. On pourrait chercher directement la moyenne somme des diviseurs de $(u,\ v)$, multiples de α. À cet effet, après avoir fait $f(x) = x$, pour x multiple de α, et $f(x) = 0$, dans les autres cas, on trouverait d'abord

$$\psi(x) = \frac{\alpha}{2}\left[\frac{x}{\alpha}\right]\left\{\left[\frac{x}{\alpha}\right] + 1\right\},$$

et l'on emploierait, ensuite, la formule (7), ainsi qu'il a été fait dans le paragraphe précédent. Mais nous suivrons une voie indirecte, beaucoup plus aisée, et nous résoudrons, en même temps, une question plus générale. Soit

$$f(x) = \left|\begin{array}{l} -x, \text{ si } x \text{ est un multiple de } \alpha \\ +x, \text{ si } x \text{ a la forme } \mathfrak{M}\alpha + r \\ \quad 0, \text{ dans les autres cas.} \end{array}\right.$$

Ici, et, en général, dans tous les cas où il s'agit de trouver une valeur moyenne *constante,* la formule (4) suffit. Elle donne

$$\sum\int_r(u,\ v) - \sum\int_\alpha(u,\ v) = rq_r^2 - \alpha q_\alpha^2 + (\alpha + r)q_{\alpha+r}^2 - 2\alpha q_{2\alpha}^2 + \cdots$$

Nous désignons par $\int_r x$ la somme des diviseurs de x, qui, divisés par α, donnent le reste r: nous supposons, en outre, que r soit toujours *positif,* de sorte que les multiples de α répondent au cas de $r = \alpha$. Asymptotiquement, la dernière formule devient

$$\sum_r \int(u, v) - \sum_\alpha \int(u, v) = n^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + r} - \frac{1}{2\alpha} + \cdots\right).$$

Donc, en moyenne,

$$\int_r (u, v) - \int_\alpha (u, v) = \frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha} H\left(\frac{r}{\alpha}\right), \tag{11}$$

pourvu que l'on représente par $H(x)$ la *fonction harmonique,* c'est-à-dire la fonction

$$\int_0^1 \frac{1 - \varphi^x}{1 - \varphi} d\varphi = 1 - \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 + x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 + x} + \cdots,$$

dont il a été question dans le *Premier Mémoire*. Le second membre de (11) peut aussi être mis sous la forme

$$-\frac{1}{\alpha} H\left(\frac{r - \alpha}{\alpha}\right).$$

On en déduit que: « *Si l'on considère les diviseurs communs à deux nombres quelconques, l'excès de la somme de ceux qui, divisés par α, donnent le reste r, sur la somme de ceux qui sont divisibles par α, est égal, en moyenne, à*

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{1 - \varphi^{\frac{\alpha - r}{\alpha}}}{1 - \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\varphi^{\frac{\alpha - r}{\alpha}}} \cdot \text{ »}$$

Par exemple, pour $\alpha = 2$, $r = 1$, on a:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1 - \varphi^{\frac{1}{2}}}{1 - \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\varphi^{\frac{1}{2}}} = \log 2.$$

Par conséquent: « *La somme des diviseurs impairs, communs à deux nombres quelconques, surpasse, en moyenne, de* 0,6931... *la somme des diviseurs pairs.* »

6. On a aussi, en vertu de propriétés connues (*),

$$\int_r - \int_{\alpha - r} = \frac{1}{\alpha}\left\{H\left(-\frac{r}{\alpha}\right) - H\left(\frac{r}{\alpha} - 1\right)\right\} = \frac{\pi}{\alpha} \cot\frac{\pi r}{\alpha} \cdot$$

De là, une nouvelle proposition.

7. Reprenons la formule (11). En y faisant varier r, de 1 à α, on obtient, par addition,

$$\left(\int_1+\int_2+\cdots+\int_\alpha\right)-\alpha\int_\alpha=H(\alpha)-\frac{1}{\alpha}\left\{H\left(\frac{1}{\alpha}\right)+H\left(\frac{2}{\alpha}\right)+\cdots+H\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)\right\},$$

c'est-à-dire (*):

$$\int(u,\ v)-\alpha\int_\alpha(u,\ v)=\log\alpha;$$

d'où, en tenant compte de (10),

$$\int_\alpha(u,\ v)=\frac{1}{\alpha}\log\sqrt{uv}+\frac{1}{\alpha}\left(2\,C-\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}-\log\alpha\right). \tag{12}$$

Telle est la *moyenne somme des multiples de α, diviseurs communs de deux nombres quelconques.* Ainsi, pour $\alpha=2$, on trouve que: « *la somme moyenne des diviseurs pairs, communs à deux nombres, est égale au quart du logarithme naturel du produit des deux nombres, augmenté de la constante* 0,06940... » Il reste, pour la *moyenne somme des diviseurs impairs,* le quart du logarithme, augmenté de la constante 0,76254...

8. En tenant compte de (12), la formule (11) donne

$$\int_r(u,\ v)=\frac{1}{\alpha}\log\sqrt{uv}+\frac{1}{\alpha}\left(2\,C-\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}-\log\alpha-\int_0^1\frac{1-\varphi^{\frac{r}{\alpha}-1}}{1-\varphi}\,d\varphi\right).$$

Par exemple, pour $\alpha=4$,

$$\int_r(u,\ v)=\frac{1}{4}\left[\log\sqrt{uv}+2\,C-\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi r}{2}-\left\{(-1)^r+\cos\frac{\pi r}{2}\right\}\log 2\right].$$

Faisant successivement $r=1,\ 2,\ 3,\ 4,$ on trouve les égalités moyennes suivantes:

$$\int_1(u,\ v)=\frac{1}{4}\log\sqrt{uv}+0{,}77397\ldots$$

$$\int_2(u,\ v)=\quad \text{»} \quad +0{,}20799\ldots$$

$$\int_3(u,\ v)=\quad \text{»} \quad -0{,}01142\ldots$$

$$\int(u,\ v)=\quad \text{»} \quad -0{,}13858\ldots$$

9. Nous avons dit que la formule (4) suffit pour la recherche des valeurs moyennes constantes. Pour en donner encore un exemple, nous ferons $f(x)=\frac{1}{x^m}$, de manière que $F(x)$ représente la somme $\theta_{-m}(x)$ des inverses des $m^{\grave{e}mes}$ puissances des diviseurs de x. La formule (4) donne

$$\sum \theta_{-m}(u,\ v)=n^2 s_{m+2},$$

s_m désignant toujours la somme de la série $1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots$ Donc, en moyenne, $\theta_{-m}(u,\ v)=s_{m+2}$. Ainsi, pour $m=1$, on trouve que: « *la somme des inverses des diviseurs, communs à deux nombres, est moyennement égale à* 1,202056... » La dernière égalité moyenne peut prendre cette autre forme:

$$\frac{\theta_m(u,\ v)}{(u,\ v)^m}=s_{m+2},$$

$\theta_m(x)$ étant la somme des $m^{\grave{e}mes}$ puissances des diviseurs de x; mais on ne pourrait en déduire l'expression moyenne de $\theta_m(u,\ v)$, même en connaissant celle de $(u,\ v)^m$.

10. Dans bien des cas, on peut employer, pour le calcul d'une expression moyenne, la formule (5), alors que la formule (4) est insuffisante. Nous allons prendre comme exemple la recherche de l'expression moyenne de $\theta_m(u,\ v)$. La formule (4) donne

$$\sum \theta_m(u,\ v)=\sum_1^n p^m q_p^2.$$

Or, on a:

$$n^2 p^{m-2}-2np^{m-1}+p^m<p^m q_p^2 \overline{\gtrless} n^2 p^{m-2};$$

puis, en négligeant les quantités d'un ordre inférieur à celui de n^{m+1},

$$n^{m+1}\left(\frac{1}{m-1}-\frac{2}{m}+\frac{1}{m+1}\right)<\sum \theta_m(u,\ v)<\frac{n^{m+1}}{m-1}.$$

Il est donc impossible d'obtenir, par cette voie, l'expression cherchée. Employons, au contraire, la formule (5). Elle donne

$$\sum \theta_m(u,\ v)=\sum_1^n(2p-1)\sigma_m(q_p), \tag{13}$$

en posant

$$\sigma_m(x)=1^m+2^m+3^m+\cdots+x^m.$$

Remarquons d'abord, que l'on a

$$\sigma_m\left(\frac{n}{p}\right)-\frac{n^m}{p^m}<\sigma_m(q_p)\overline{\gtrless}\sigma_m\left(\frac{n}{p}\right).$$

Par conséquent, en vertu de (13),

$$\sum_1^n (2p-1)\sigma_m\left(\frac{n}{p}\right) - n^m \sum_1^n \frac{2p-1}{p^m} < \sum \theta_m(u,\ v) < \sum_1^n (2p-1)\sigma_m\left(\frac{n}{p}\right).$$

La différence entre les deux limites étant d'un ordre inférieur à celui de n^{m+1}, tant que $m > 1$, on peut la négliger. Donc, asymptotiquement,

$$\sum \theta_m(u,\ v) = \sum_1^n (2p-1)\sigma_m\left(\frac{n}{p}\right).$$

Cela revient à prouver que, dans la formule (13), il est permis de remplacer q_p par $\frac{n}{p}$. En outre, à cause de

$$\sigma_m(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^m}{2} + \frac{m x^{m-1}}{12} + \cdots,$$

on peut écrire, asymptotiquement,

$$\sum \theta_m(u,\ v) = \frac{n^{m+1}}{m+1} \sum_1^\infty \frac{2p-1}{p^{m+1}} = \frac{n^{m+1}}{m+1}(2s_m - s_{m+1}). \qquad (14)$$

Il est donc permis de poser l'égalité moyenne

$$\theta_m(u,\ v) = K(\sqrt{uv})^{m-1},$$

qui donne

$$\sum \theta_m(u,\ v) = \frac{4K}{(m+1)^2} n^{m+1}.$$

De la comparaison avec (14) résulte la valeur de K; puis:

$$\theta_m(u,\ v) = \frac{m+1}{4}(2s_m - s_{m+1})(\sqrt{uv})^{m-1}.$$

Par exemple:

$$\theta_2(u,\ v) = \frac{\pi^2 - 3 \cdot 1{,}202056\ldots}{4}\sqrt{uv}.$$

Ainsi: « *la somme des carrés des diviseurs, communs à deux nombres, est moyennement égale à la moyenne géométrique de ces nombres, multipliée par la constante* 1,56585... »

11. Les conséquences qu'il est possible de tirer des identités (4) et (5) sont tellement nombreuses, les moyens d'y parvenir sont si faciles à entrevoir, que nous ne croyons pas utile d'y insister davantage, d'autant plus que nous nous proposons de donner, dans une Note ultérieure, des développements d'une

plus grande généralité (**). Cependant, nous ajouterons encore quelques considérations sur la manière dont on pourrait traiter les questions analogues aux précédentes, mais relatives au *plus petit commun multiple* $[u, v]$ des nombres u et v. On sait que

$$(u, v)[u, v] = uv. \tag{15}$$

Cela étant, cherchons de combien de manières il est possible d'avoir $[u, v] = n$. Il faut d'abord que (u, v) soit égal à un diviseur de n: soit a ce diviseur. L'égalité (15) devient $an = uv$. On sait, en outre, que les quotients $\frac{u}{a}$, $\frac{v}{a}$, dont le produit est $\frac{n}{a}$, doivent être *premiers entre eux*. Le système des équations

$$[u, v] = n, \qquad (u, v) = a,$$

admet donc autant de solutions qu'il y a de manières de décomposer $\frac{n}{a}$ en un produit de deux facteurs, premiers entre eux. Fidèles à nos notations habituelles, nous désignerons par $\omega(x)$ le *nombre de manières de décomposer x en un produit de deux facteurs, premiers entre eux;* ou, ce qui revient au même, le *nombre des diviseurs de x, qui n'admettent pas de diviseurs carrés,* autres que l'unité. Cela posé, si l'on égale successivement (u, v) à tous les diviseurs $\frac{n}{a}, \frac{n}{b}, \frac{n}{c}, \ldots$, de n, on trouve que le nombre des solutions de l'équation $[u, v] = n$ est

$$\omega(a) + \omega(b) + \omega(c) + \cdots = \theta(n^2).$$

Conséquemment: « *la quotité des couples de nombres, qui admettent n pour plus petit commun multiple, est égale au nombre des diviseurs de n^2* ». Par exemple, les seuls couples de nombres, qui admettent 10 pour plus petit multiple commun, sont

$$[1, 10], \quad [2, 5], \quad [2, 10], \quad [5, 2], \quad [5, 10],$$
$$[10, 1], \quad [10, 2], \quad [10, 5], \quad [10, 10].$$

Leur nombre est égal à 9, nombre des diviseurs de 100.

12. On peut démontrer autrement le même théorème. Soit $f(n)$ le nombre des solutions de l'équation $[u, v] = n$. Il est évident que la somme

$$f(a) + f(b) + f(c) + \cdots$$

exprime la quotité des couples de nombres, qui admettent n pour *multiple* *commun*, ou, ce qui revient au même, le nombre des manières dont on peut accoupler deux diviseurs quelconques de n, égaux ou inégaux. Or, ce nombre est évidemment $\theta^2(n)$. Par conséquent

$$f(a)+f(b)+f(c)+\cdots=\theta^2(n),$$

d'où, par comparaison avec une formule connue (*),

$$f(n)=\theta(n^2).$$

13. Si l'on veut développer la somme $\sum F[u, v]$, on voit qu'une première partie est $\sum_1^n \theta(p^2)F(p)$, mais l'autre partie, correspondant aux valeurs de $[u, v]$, supérieures à n, paraît assez difficile à évaluer. Pour le moment, nous devons nous borner à faire observer que, si la fonction $F(x)$ est constamment positive, on a

$$\sum_1^m \theta(p^2)F(p) < \sum F[u, v] < \sum_1^{n^2} \theta(p^2)F(p).$$

On peut donc écrire, asymptotiquement,

$$\sum F[u, v]=\theta(1)F(1)+\theta(4)F(2)+\theta(9)F(3)+\cdots,$$

toutes les fois que la série du second membre est convergente. Soit, par exemple, $F(x)=\frac{1}{x^m}\cdot$ On trouve

$$\sum \frac{1}{[u, v]^m}=\sum_1^\infty \frac{\theta(p^2)}{p^m}=\frac{s_m^3}{s_{2m}} \quad (*).$$

Or, si l'on pose

$$\frac{1}{[u, v]^m}=\frac{K}{(uv)^m},$$

on obtient

$$\sum \frac{1}{[u, v]^m}=Ks_m^2.$$

Il en résulte, d'abord, $K=\frac{s_m}{s_{2m}}$; puis, on voit que l'on peut écrire, moyennement,

$$\frac{1}{[u, v]^m}=\frac{s_m}{s_{2m}}\cdot\frac{1}{(uv)^m}.$$

En particulier:

$$\frac{1}{[u, v]^2}=\frac{15}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(uv)^2}.$$

Conséquemment: « *le carré de l'inverse du plus petit multiple, commun à deux nombres, est égal, en moyenne, au carré de l'inverse du produit des deux nombres, multiplié par la constante* 1,5198... »

14. En tenant compte d'autres formules connues, on trouve que, si r ne peut recevoir que les valeurs

$$1,\ 4,\ 6,\ 9,\ 10,\ 14,\ 15,\ 16,\ 21,\ 22,\ 24,\ 25,\ldots,$$

composées d'un nombre *pair* de facteurs premiers, égaux ou inégaux, et si l'on ne donne à s que les valeurs

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 11,\ 12,\ 13,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ldots,$$

composées d'un nombre *impair* de facteurs premiers, égaux ou inégaux, on a

$$\sum{}'' \frac{1}{[u,\, v]^m} - \sum{}' \frac{1}{[u,\, v]^m} = \sum \frac{\theta(r^2)}{r^m} - \sum \frac{\theta(s^2)}{s^m} = \frac{s_{2m}^2}{s_m^3},$$

les sommes $\sum''$, $\sum'$ se rapportant respectivement aux valeurs $[u, v]$, qui appartiennent à la première ou à la seconde des séries ci-dessus. La combinaison des formules

$$\sum{}'' + \sum{}' = \frac{s_m^3}{s_{2m}}, \qquad \sum{}'' - \sum{}' = \frac{s_{2m}^2}{s_m^3},$$

donne

$$\sum{}'' = \frac{s_m^6 + s_{2m}^3}{2\, s_{2m}\, s_m^3}, \qquad \sum{}' = \frac{s_m^6 - s_{2m}^3}{2\, s_{2m}\, s_m^3}.$$

Par exemple:

$$\sum{}'' \frac{1}{[u,\, v]^2} = \frac{133}{600}\pi^2, \qquad \sum{}' \frac{1}{[u,\, v]^2} = \frac{117}{600}\pi^2.$$

Ainsi: « *la somme des inverses des carrés des plus petits communs multiples de tous les couples de nombres possibles est* 4,11233.... *Les* $\frac{133}{250}$ *de cette somme, c'est-à-dire* 2,18776..., *se rapportent aux plus petits multiples, composés d'un nombre pair de facteurs premiers, égaux ou inégaux. Il reste* 1,92457... *pour les plus petits multiples, composés d'un nombre impair de facteurs premiers, égaux ou inégaux.* »

15. Le développement de $\sum F[u, v]$ n'est pas absolument nécessaire pour le calcul des expressions moyennes, relatives au plus petit multiple commun de deux nombres quelconques. Bien souvent, les formules (4) et (5), ou des formules analogues, suffisent, pourvu que l'on ait égard à la relation (15). Ainsi,

par exemple, par un procédé analogue à celui qui nous a servi pour établir la relation (4), nous trouvons

$$\sum uvF(u,\ v) = \frac{1}{4}\sum_1^n p^2 q_p^2 (q_p + 1)^2 f(p). \tag{16}$$

En particulier, pour $f(x) = \frac{\pi(x)\varphi(x)}{x^2}$ (***), on a $F(x) = \frac{1}{x}$ (*), et la dernière formule devient

$$\sum \frac{uv}{(u,\ v)} = \frac{1}{4}\sum_1^n q_p^2 (q_p + 1)^2 \pi(p)\varphi(p),$$

ou bien, en vertu de (15), et asymptotiquement,

$$\sum [u,\ v] = \frac{n^4}{4}\sum_1^\infty \frac{\pi(p)\varphi(p)}{p^4}.$$

Or, on sait (*) que

$$\sum_1^\infty \frac{\pi(p)\varphi(p)}{p^m} = \frac{s_{m-1}}{s_{m-2}}.$$

Donc

$$\sum [u,\ v] = \frac{3\,s_3}{2\,\pi^2} n^4.$$

D'autre part, si l'on pose $[u,\ v] = Kuv$, on trouve

$$\sum [u,\ v] = K \cdot (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \frac{K}{4} n^4.$$

On doit donc prendre $K = \frac{6\,s_3}{\pi^2}$, et l'on peut dire que: « *Le plus petit multiple, commun à deux nombres, est égal, en moyenne, au produit de ces nombres, multiplié par la constante* 0,73076... »

16. En général, on a

$$\sum u^m v^m F(u,\ v) = \sum_1^n p^{2m} \sigma_m^2(q_p) f(p). \tag{17}$$

Supposons que la fonction f soit telle que l'on ait toujours

$$f(a) + f(b) + f(c) + \cdots = \frac{1}{n^m}. \tag{18}$$

Alors $F(x) = \frac{1}{x^m}$, et la formule (17) devient

$$\sum [u,\ v]^m = \sum_1^n p^{2m} \sigma_m^2(q_p) f(p). \tag{19}$$

Or, on sait que

$$\sigma_m^2(x) = \frac{x^{2m+2}}{(m+1)^2} + \frac{x^{2m+1}}{m+1} + \frac{2m+3}{12(m+1)} x^{2m} + \cdots$$

On peut donc, au lieu de (19), écrire la formule asymptotique

$$\sum [u, v]^m = \frac{n^{2m+2}}{(m+1)^2} \sum_1^\infty \frac{f(p)}{p^2},$$

parceque les ordres de $\sum_1^n \frac{f(p)}{p}$, $\sum_1^n f(p)$, etc.... sont respectivement inférieurs à ceux de n, n^2, etc....

Cela est évidemment vrai pour $m=0$, comme pour $m=1$, et, à plus forte raison, pour toute valeur positive de m. D'après les principes exposés dans le *Premier Mémoire,* l'identité (18) donne lieu à la formule

$$s_r \sum_1^\infty \frac{f(p)}{p^r} = s_{m+r}.$$

Par conséquent

$$\sum [u, v]^m = \frac{6 s_{m+2}}{\pi^2} \cdot \frac{n^{2m+2}}{(m+1)^2}.$$

Or, si l'on pose

$$[u, v]^m = K(uv)^m,$$

on trouve

$$\sum [u, v]^m = K\sigma_m^2(n) = K \cdot \frac{n^{2m+2}}{(m+1)^2}.$$

Donc, moyennement,

$$[u, v]^m = \frac{6 s_{m+2}}{\pi^2} (uv)^m.$$

Par exemple:

$$[u, v]^2 = \frac{\pi^2}{15} (uv)^2,$$

c'est-à-dire que: « *le carré du plus petit commun multiple de deux nombres est moyennement égal au carré du produit des deux nombres, multiplié par la constante* 0,65797... »

17. Il y a plusieurs autres manières de développer $\sum F[u, v]$, parmi lesquelles nous signalerons la suivante: — Il est clair que les quotients, par n, des nombres

$$[1, n], \quad [2, n], \quad [3, n], \ldots \quad [n, n],$$

sont égaux, dans un certain ordre, aux nombres premiers avec les diviseurs de n, et respectivement inférieurs ou égaux à ces diviseurs. Il en résulte que, si l'on pose

$$g_n(x) = F(n\alpha) + F(n\beta) + F(n\gamma) + \cdots,$$

où α, β, γ,... sont les nombres non supérieurs et premiers à x, on a

$$\sum_{p=1}^{p=n} F[p,\ n] = g_n(a) + g_n(b) + g_n(c) + \cdots$$

En particulier, si la fonction F est telle que l'on ait

$$F(xy) = F(x)F(y),$$

et si l'on pose

$$G(x) = F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \cdots,$$

on a:

$$\sum_{p=1}^{p=n} F[p,\ n] = F(n)\{G(a) + G(b) + G(c) + \cdots\}\cdot$$

Par conséquent, si l'on représente par $\Psi(x)$ la somme $\sum_1^x F(p)$, on peut écrire

$$\sum F[u,\ v] = 2\sum_{p=1}^{p=n} G(p)F(p)\Psi(q_p) - \Psi(n).$$

18. En particulier, pour $F(x) = x^m$, on a $\Psi(x) = \sigma_m(x)$, $G(x) = \varphi_m(x)$, et la dernière formule devient

$$\sum [u,\ v]^m = 2\sum_1^n p^m \varphi_m(p)\sigma_m(q_p) - \sigma_m(n). \tag{20}$$

Mais celle-ci ne se prête pas, aussi facilement que la formule (19), aux transformations asymptotiques. Par exemple, pour $m = 1$, on trouve

$$\sum [u,\ v] = \frac{1}{2}\sum_1^n p^2 q_p(q_p + 1)\varphi(p).$$

Asymptotiquement:

$$\sum [u,\ v] = \frac{n^2}{2}\sum_1^n \varphi(p) + \varepsilon\frac{n}{2}\sum_1^n p\varphi(p),$$

ε étant moindre que l'unité, en valeur absolue. Ici, le second terme n'est pas négligeable, car nous avons démontré ailleurs (*) les égalités asymptotiques

$$\sum_1^n \varphi(p) = 3\frac{n^2}{\pi^2}, \qquad \sum_1^n p\varphi(p) = \frac{n^3}{\pi^2}\cdot$$

Conséquemment:

$$\sum[u,\ v] = \frac{3+\varepsilon}{2\pi^2} n^4.$$

C'est tout ce que l'on peut affirmer. Comme vérification, comparons ce résultat à celui qui a été trouvé dans le paragraphe précédent. Nous trouvons

$$\varepsilon = 3(1 - s_3) = 0{,}60616\ldots$$

Enfin, il est intéressant de comparer les égalités (19) et (20). On retrouve, à l'aide de quelques trasformations simples, les propriétés des *fonctions* ζ, étudiées dans le *Premier Mémoire.*

(*) Voyez *Premier Mémoire d'Arithmétique.*

(**) *Sur le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres.*

(***) Dans cette Note et dans les suivantes, $\theta(x)$ désignera constamment le *nombre des diviseurs de x,* et $\pi(x)$ le *produit des facteurs de x,* chacun d'eux étant pris négativement.

Le plus grand diviseur carré.

(*Par* Ernest Cesàro, *étudiant, à Torre Annunziata.*)

1. Soit $f_m(x)$ une fonction de x, égale à 0 ou à 1, suivant que x admet ou n'admet pas des diviseurs, autres que l'unité, qui soient des puissances $m^{\text{èmes}}$ parfaites. Si $a_m, b_m, c_m, \ldots$ sont les diviseurs de x, puissances $m^{\text{èmes}}$ parfaites, et $d_m(x)$ le plus grand de ces nombres, il est clair que, parmi les nombres

$$\frac{x}{a_m}, \quad \frac{x}{b_m}, \quad \frac{x}{c_m}, \ldots,$$

le *seul* qui n'admette pas de facteurs, puissances $m^{\text{èmes}}$, est $\frac{x}{d_m(x)}\cdot$ Conséquemment:

$$f_m\left(\frac{x}{a_m}\right) + f_m\left(\frac{x}{b_m}\right) + f_m\left(\frac{x}{c_m}\right) + \cdots = 1. \tag{1}$$

2. Dans cette égalité, attribuons à x les valeurs $1, 2, 3, \ldots n$, et additionnons. Il vient:

$$F_m(q_{1^m}) + F_m(q_{2^m}) + F_m(q_{3^m}) + \cdots = n. \tag{2}$$

Nous avons posé

$$F_m(x) = f_m(1) + f_m(2) + f_m(3) + \cdots + f_m(x),$$

de sorte que $F_m(x)$ représente la quotité des nombres, non supérieurs à x, non divisibles par des $m^{\text{èmes}}$ puissances. Si l'on tâche de satisfaire à (2), au moyen de $F_m(x) = Kx$, on trouve

$$Kn\left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\right) = n,$$

d'où $K = \frac{1}{s_m}\cdot$ On a donc, en moyenne,

$$F_m(x) = \frac{x}{s_m}, \qquad f_m(x) = \frac{1}{s_m},$$

conformément à ce qui a été trouvé, avec rigueur, dans une autre *Note* (*).

3. Par exemple, $F_3(x)$ est le nombre des entiers, non supérieurs à x, n'admettant pas de facteurs cubes. Ainsi, en dessous de 200, on trouve, par le calcul direct, qu'il y a 167 de tels nombres. Or, on vérifie facilement que 167 exprime, par excès, le quotient de 200 par $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots$

4. Si l'on pose

$$G(x)=g\,[d_m(x)], \tag{3}$$

on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} g(1^m)F_m(q_1)+g(2^m)F_m(q_{2^m})+g(3^m)F_m(q_{3^m})+\cdots &= \\ =G(1)+G(2)+\cdots+G(n). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

En effet, parmi les valeurs $1, 2, 3,\ldots n$, de x, les seules qui donnent $d_m(x)=p^m$ sont celles pour lesquelles $\frac{x}{p^m}$ est un des nombres entiers, non supérieurs à q_{p^m}, non divisibles par des $m^{\text{èmes}}$ puissances. L'égalité (2) est un cas particulier de (4), correspondant à $g(x)=1$. Si l'on donne à $g(x)$ d'autres formes, on obtient d'autres égalités. Par exemple, pour $g(x)=x$, on trouve

$$F_m(q_{1^m})+2^mF_m(q_{2^m})+3^mF_m(q_{3^m})+\cdots=d_m(1)+d_m(2)+\cdots+d_m(n).$$

De même, pour $g(x)=\theta\,[x^{\frac{1}{m}}]$, $G(x)$ devient égale au nombre $T_m(x)$ des diviseurs de x, puissances $m^{\text{èmes}}$, et l'on a

$$\begin{aligned} \theta(1)F_m(q_1)+\theta(2)F_m(q_{2^m})+\theta(3)F_m(q_{3^m})+\cdots &= \\ =T_m(1)+T_m(2)+\cdots+T_m(n);\ \text{etc., etc.} \end{aligned}$$

Toutes ces formules peuvent être utilisées dans la théorie des moyennes.

5. Soit $r_m(x)$ une fonction de x, égale à 1 ou à 0, suivant que x est ou n'est pas une puissance $m^{\text{ème}}$ parfaite. La relation (1) peut être écrite ainsi:

$$r_m(a)f_m\left(\frac{x}{a}\right)+r_m(b)f_m\left(\frac{x}{b}\right)+r_m(c)f_m\left(\frac{x}{c}\right)+\cdots=1,$$

$a, b, c,\ldots$ étant tous les diviseurs de x. Plus généralement

$$r_m(a)g(a)f_m\left(\frac{x}{a}\right)+r_m(b)g(b)f_m\left(\frac{x}{b}\right)+\cdots=G(x), \tag{5}$$

la fonction G étant définie par (3). Par addition, on obtient

$$\sum_{x=1}^{x=n} r_m(x)g(x)F_m(q_x)=\sum_{x=1}^{x=n}G(x). \tag{6}$$

C'est la relation (4).

6. Les nombres $\frac{x}{a}, \frac{x}{b}, \frac{x}{c}, \cdots$ ne différant pas de $a, b, c, \ldots$, on peut, au lieu de (5), écrire

$$f_m(a) r_m\left(\frac{x}{a}\right) g\left(\frac{x}{a}\right) + f_m(b) r_m\left(\frac{x}{b}\right) g\left(\frac{x}{b}\right) + \cdots = G(x).$$

Dans ce cas, si l'on pose

$$R(x) = g(1) + g(2^m) + g(3^m) + \cdots + g([x^{\frac{1}{m}}]^m),$$

on obtient, par addition, au lieu de (6),

$$\sum_{x=1}^{x=n} f_m(x) R(q_x) = \sum_{x=1}^{x=n} G(x), \tag{7}$$

Faisons, par exemple,

$$g(x) = 1, \qquad G(x) = 1, \qquad R(x) = [x^{\frac{1}{m}}].$$

Nous trouvons que: « *si $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont les entiers, non supérieurs à n, non divisibles par des* $m^{\text{èmes}}$ *puissances, et si $\rho_m^m(x)$ est la plus haute puissance* $m^{\text{ème}}$, *contenue dans $\frac{n}{x}$, on a:*

$$\rho_m(\alpha) + \rho_m(\beta) + \rho_m(\gamma) + \cdots = n. \text{ »}$$

Par exemple, les nombres non supérieurs à 10, privés de facteurs carrés, sont 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10. En divisant 10 par ces nombres, on trouve que les plus grands carrés, contenus dans les quotients sont 9, 4, 1, 1, 1, 1, 1. La somme de leurs racines est $3+2+1+1+1+1+1=10$. En donnant à $g(x)$ d'autres formes, on peut se servir des égalités (6) et (7) pour évaluer moyennement les fonctions d_m, r_m, etc. ... À leur tour, les expressions moyennes obtenues peuvent servir à résoudre certaines questions de probabilités.

7. De l'identité

$$\sum r_m(a) = T_m(x) \tag{8}$$

on déduit (**) la formule

$$\sum \frac{T_m(x)}{x^k} = s_k s_{mk}, \tag{9}$$

dans laquelle l'entier x varie de 1 à l'infini. Par exemple, pour $m = k = 2$,

$$\frac{T_2(1)}{1} + \frac{T_2(2)}{4} + \frac{T_2(3)}{9} + \cdots = \frac{\pi^6}{540}.$$

Si $\psi(x)$ est une fonction telle que l'on ait toujours

$$\psi(x)\psi(y) = \psi(xy), \tag{10}$$

on peut, au lieu de (8), écrire

$$\sum \psi(a)\,\psi\left(\frac{x}{a}\right) r_m\left(\frac{x}{a}\right) = \psi(x)\,T_m(x);$$

puis:

$$\sum \frac{\psi(x)}{x^k} \cdot \sum \frac{\psi(x)\,r_m(x)}{x^k} = \sum \frac{\psi(x)\,T_m(x)}{x^k},$$

d'où

$$\sum \frac{\psi(x)\,T_m(x)}{x^k} = \sum \frac{\psi(x)}{x^k} \cdot \sum \frac{\psi(x^m)}{x^{mk}}. \tag{11}$$

8. Soit, par exemple, $\psi(x) = \lambda(x)$ (***). La relation (10) est évidemment vérifiée, et l'on a

$$\lambda(x^m) = \lambda^m(x) = \left| \begin{array}{ll} 1, & \text{si } m \text{ est } \textit{pair} \\ \lambda(x), & \text{si } m \text{ est } \textit{impair}. \end{array} \right.$$

Si l'on se rappelle (**), en outre, que

$$\sum \frac{\lambda(x)}{x^m} = \frac{s_{2m}}{s_m},$$

on voit que la relation (11) devient

$$\sum \frac{\lambda(x)\,T_m(x)}{x^k} = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{s_{2k}\,s_{mk}}{s_k}, & \text{si } m \text{ est } \textit{pair} \\[2ex] \dfrac{s_{2k}\,s_{2mk}}{s_k\,s_{mk}}, & \text{si } m \text{ est } \textit{impair}. \end{array} \right. \tag{12}$$

Par exemple, pour $k = m = 2$,

$$\frac{T_2(1)}{1} - \frac{T_2(2)}{4} - \frac{T_2(3)}{9} + \frac{T_2(4)}{16} - \frac{T_2(5)}{25} + \frac{T_2(6)}{36} - \cdots = \frac{\pi^6}{1350}$$

$T_2(x)$ représentant le *nombre des diviseurs carrés* de x. Pour $k = 2$, $m = 3$, on trouve

$$\frac{T_3(1)}{1} - \frac{T_3(2)}{8} - \frac{T_3(3)}{27} + \frac{T_3(4)}{64} - \frac{T_3(5)}{125} + \frac{T_3(6)}{216} - \cdots = \frac{1382\,\pi^{10}}{212837625}$$

$T_3(x)$ étant le *nombre des diviseurs cubes* de x; etc., etc....

9. Soient α, β, γ,... tous les nombres entiers, composés d'un nombre impair de facteurs premiers, égaux ou inégaux. Ces nombres sont les termes de la série

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 11,\ 12,\ 13,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20, \ldots,$$

qui comprend tous les nombres premiers, hors l'unité. La combinaison des formules (9) et (12) donne

$$\sum \frac{T_m(\alpha)}{\alpha^k} = \left| \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(s_k^2 - s_{2k})\frac{s_{mk}}{s_k}, & \text{pour } m \text{ pair} \\ \frac{s_k^2 s_{mk}^2 - s_{2k} s_{2km}}{2 s_k s_{mk}}, & \text{pour } m \text{ impair.} \end{array} \right.$$

Par exemple, pour $k = 2$,

$$\frac{T_m(2)}{4} + \frac{T_m(3)}{9} + \frac{T_m(5)}{25} + \frac{T_m(7)}{49} + \cdots = \left| \begin{array}{ll} \frac{\pi^2}{20} s_{2m}, & (m \text{ pair}) \\ \frac{\pi^2}{60}\left(5 s_{2m} - 2\frac{s_{4m}}{s_{2m}}\right), & (m \text{ impair}). \end{array} \right.$$

En particulier, si l'on fait $m = 1$, on trouve

$$\frac{\theta(2)}{4} + \frac{\theta(3)}{9} + \frac{\theta(5)}{25} + \frac{\theta(7)}{49} + \frac{\theta(8)}{64} + \cdots = \frac{7\pi^4}{600};$$

etc., etc....

10. Les mêmes calculs s'appliquent à la fonction f_m, et l'on obtient d'abord

$$\sum \frac{f_m(x)}{x^k} = \frac{s_k}{s_{mk}}. \tag{13}$$

On trouve aussi

$$\sum \frac{\lambda(x) f_m(x)}{x^k} = \left| \begin{array}{ll} \frac{s_{2k}}{s_k s_{mk}}, & (m \text{ pair}) \\ \frac{s_{2k} s_{mk}}{s_k s_{2km}}, & (m \text{ impair}). \end{array} \right.$$

En combinant ces deux formules, on démontre que, *si α, β, γ,... sont tous les nombres composés d'un nombre impair de facteurs premiers, égaux ou inégaux, et n'admettant pas de diviseurs, puissances $m^{\text{èmes}}$, autres que l'unité, on a:*

$$\sum \frac{1}{\alpha^k} = \left| \begin{array}{ll} \frac{s_k^2 - s_{2k}}{2 s_k s_{mk}}, & (m \text{ pair}) \\ \frac{s_k^2 s_{2km} - s_{2k} s_{km}^2}{2 s_k s_{mk} s_{2mk}}, & (m \text{ impair}). \end{array} \right.$$

Supposons, par exemple, que α, β, γ,... soient les termes de la série

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ldots,\ 29,\ 30,\ 31,\ldots,$$

qui sont tous *des nombres premiers, ou des produits de nombres premiers, iné-*

gaux, en nombre impair. La dernière formule donne

$$\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{7^k}+\cdots=\frac{s_k^2-s_{2k}}{2\,s_k\,s_{2k}}.$$

En particulier:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{9}{2\,\pi^2}.$$

11. La fonction f_m peut être définie au moyen d'une autre fonction μ_m, analogue à μ, égale à $+1$, ou à -1, suivant que x est le produit d'un nombre *pair* ou d'un nombre *impair* de puissances $m^{\text{èmes}}$ de facteurs premiers, *inégaux.* Dans les autres cas, $\mu_m(x)=0$. On trouve facilement

$$\mu_m(a)+\mu_m(b)+\mu_m(c)+\cdots=f_m(x). \tag{14}$$

À son tour, la fonction f_m peut servir, de la même manière, à définir une importante fonction, par l'égalité

$$f_m(a)+f_m(b)+f_m(c)+\cdots=\omega_m(x), \tag{15}$$

$\omega_m(x)$ représentant le *nombre des diviseurs de x, privés de facteurs qui soient des puissances $m^{\text{èmes}}$ parfaites.* Cette fonction sera étudiée dans une autre *Note.* Pour le moment, remarquons que les relations (14) et (15) donnent, eu égard à (13),

$$\sum\frac{\mu_m(x)}{x^k}=\frac{1}{s_{mk}},\qquad \sum\frac{\omega_m(x)}{x^k}=\frac{s_k^2}{s_{mk}}.$$

Par exemple:

$$\frac{\omega_2(1)}{1}+\frac{\omega_2(2)}{4}+\frac{\omega_2(3)}{9}+\frac{\omega_2(4)}{16}+\cdots=\frac{5}{2}.$$

On obtient, tout aussi facilement,

$$\sum\frac{\lambda(x)\mu_m(x)}{x^k}=\frac{s_k^2}{s_{2k}^2}\sum\frac{\lambda(x)\,\omega_m(x)}{x^k}=\left|\begin{array}{ll}\dfrac{1}{s_{mk}}, & (m\ \textit{pair})\\[2ex] \dfrac{s_{mk}}{s_{2mk}}, & (m\ \textit{impair});\end{array}\right.$$

etc., etc....

Ultérieurement, nous aurons besoin de cette fonction μ_m, qui dépend, d'ailleurs, fort simplement de μ. En effet, on peut écrire

$$\mu_m(x)=r_m(x)\,\mu\left(x^{\frac{1}{m}}\right).$$

12. Reprenons la formule

$$\sum_1^n g(x^m)F_m\left[\frac{n}{x^m}\right]=\sum_1^n g\left[d_m(x)\right], \tag{4}$$

et transformons-la au moyen de la relation

$$F_m\left[\frac{n}{p^m}\right]=\left[\frac{n}{p^m}\right]\mu(1)+\left[\frac{n}{(2p)^m}\right]\mu(2)+\left[\frac{n}{(3p)^m}\right]\mu(3)+\cdots$$

En ordonnant le premier membre de (4), par rapport aux quotients $\left[\frac{n}{x^m}\right]$, on reconnaît aisement que le coefficient de $\left[\frac{n}{x^m}\right]$ est

$$g(a^m)\mu\left(\frac{x}{a}\right)+g(b^m)\mu\left(\frac{x}{b}\right)+g(c^m)\mu\left(\frac{x}{c}\right)+\cdots=h(x). \tag{16}$$

Donc

$$\sum_1^n g[d_m(x)]=\sum_1^n\left[\frac{n}{x^m}\right]h(x). \tag{17}$$

13. La relation (16) peut, d'ailleurs, en vertu de la *loi d'inversion* (****), être mise sous cette autre forme:

$$h(a)+h(b)+h(c)+\cdots=g(x^m), \tag{18}$$

et l'on peut, alors, en déduire facilement la formule (17). En effet, observons que les racines $m^{\text{èmes}}$ de a_m, b_m, c_m,... ne sont autres que *tous* les diviseurs de la $m^{\text{ème}}$ racine de $d_m(x)$. On peut donc, au lieu de (18), écrire

$$h(a_m^{\frac{1}{m}})+h(b_m^{\frac{1}{m}})+h(c_m^{\frac{1}{m}})+\cdots=g[d_m(x)].$$

Il suffit de faire, dans cette égalité, $x=1, 2, 3,\ldots n$, et additionner, pour avoir la formule (17).

14. Si le second membre de (17) est de l'ordre de n, on peut, à $\left[\frac{n}{x^m}\right]$, substituer $\frac{n}{x^m}$, toutes les fois que $h(1)+h(2)+\cdots+h[n^{\frac{1}{m}}]$ est, en valeur absolue, d'un ordre inférieur à celui de n. Alors, nous pourrons établir, en remplaçant $g(x)$ per $g(x^{\frac{1}{m}})$, l'égalité asymptotique

$$\sum_1^n g[d_m^{\frac{1}{m}}(x)]=n\sum_1^\infty\frac{h(x)}{x^m},$$

pourvu que la série du second membre soit convergente. Mais de l'égalité (18) on déduit aussi

$$s_m\sum_1^\infty\frac{h(x)}{x^m}=\sum_1^\infty\frac{g(x)}{x^m}.$$

Donc:

$$\sum_1^n g[d_m^{\frac{1}{m}}(x)] = \frac{n}{s_m}\sum_1^\infty \frac{g(x)}{x^m}.$$

En d'autres termes:

$$\lim\cdot\frac{1}{n}\left\{g[d_m^{\frac{1}{m}}(1)] + g[d_m^{\frac{1}{m}}(2)] + \cdots + g[d_m^{\frac{1}{m}}(n)]\right\} = \frac{1}{s_m}\sum_1^\infty \frac{g(x)}{x^m}, \tag{19}$$

pour n infini. En particulier:

« *Si $\delta(x)$ est la racine carrée du plus grand diviseur carré de x, on a:*

$$\lim\cdot\frac{1}{n}\left\{g[\delta(1)] + g[\delta(2)] + \cdots + g[\delta(n)]\right\} = \frac{6}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{g(x)}{x^2} \text{ ».} \tag{20}$$

15. En donnant à $g(x)$ différentes formes, on obtient une infinité de relations intéressantes. Pour $g(x) = x$, la formule (19) donne

$$\lim\cdot\frac{1}{n}\sum_1^n d_m^{\frac{1}{m}}(x) = \frac{s_{m-1}}{s_m}, \qquad (m > 2).$$

Par exemple, pour $m = 3$, on voit que: « *la racine cubique du plus grand diviseur cube d'un nombre quelconque est moyennement égale à* 1,3684... ». Pour $g(x) = \frac{1}{x^2}$, la formule (20) donne

$$\lim\cdot\frac{1}{n}\sum_1^n \frac{1}{\delta^2(x)} = \frac{6}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{1}{x^4} = \frac{\pi^2}{15}.$$

Donc: « *l'inverse du plus grand diviseur carré d'un nombre quelconque est moyennement égale à* 0,6579... ». De même, on trouve facilement que les fonctions

$$\varphi, \qquad \theta, \qquad \theta^2, \qquad \omega_k, \qquad T_k, \ldots$$

relatives au nombre $d_m^{\frac{1}{m}}(x)$, sont moyennement égales à

$$\frac{s_{m-1}}{s_m^2}, \qquad s_m, \qquad \frac{s_m^3}{s_{2m}}, \qquad \frac{s_m}{s_{mk}}, \qquad s_{mk}, \ldots$$

Pour $g(x) = \theta(x^2)$, on voit que le nombre des diviseurs de $d_m^{\frac{2}{m}}(x)$ est égal, en moyenne, à $\frac{s_m^2}{s_{2m}}$. En particulier: « *le nombre des diviseurs du plus grand carré qui divise un nombre quelconque, est moyennement égal à* $\frac{5}{2}$ ». Enfin, supposons $g(x) = \nu(x)$ (***). Il vient, en moyenne,

$$\nu[\overset{1}{d_m^m}(x)] = \frac{1}{s_m} \sum_1^\infty \frac{\nu(x)}{x^m} = \frac{1}{s_m^2} \sum_1^\infty \frac{\log x}{x^m}.$$

En particulier:

$$\nu[\delta(x)] = \frac{36}{\pi^4} \sum_1^\infty \frac{\log x}{x^2} = 0{,}3464\ldots$$

On doit se rappeler (**) que $\nu(x)$ est moyennement égale à l'unité. Les dernières égalités sont utiles pour l'étude de la distribution des nombres premiers, dans la série $\delta(1)$, $\delta(2)$, $\delta(3)$,...

16. Nous allons faire quelques applications de la formule (19) à la recherche de certaines probabilités. Soit, d'abord, $g(x) = 1$, pour $x = k$, mais $g(x) = 0$, dans les autres cas. Le premier membre de (19) exprimera la *probabilité P_k que, parmi les puissances $m^{\text{èmes}}$ parfaites, k^m soit la plus grande, qui divise un nombre quelconque, pris au hasard.* La formule (19) donne immédiatement

$$P_k = \frac{1}{k^m s_m}.$$

On peut arriver directement à ce résultat, en employant un raisonnement analogue à celui dont nous nous sommes servi ailleurs (**), pour des questions semblables. Si, au lieu de considérer *tous* les nombres entiers, on considère seulement les *multiples de k^m*, le nombre total des cas devient k^m fois moindre, mais le nombre des cas favorables reste le même; car tout nombre, qui se trouve dans les conditions désirées, est nécessairement un multiple de k^m. Donc, la probabilité que k^m soit la plus haute puissance $m^{\text{ème}}$, qui divise un *multiple de k^m*, pris au hasard, est $P_k \cdot k^m$. Mais cette probabilité ne diffère pas de celle qu'un nombre quelconque ne soit pas divisible par des $m^{\text{èmes}}$ puissances; car, la condition nécessaire et suffisante pour que k^m soit la plus haute puissance $m^{\text{ème}}$, qui divise $r \cdot k^m$, est précisément que r n'admette pas de diviseurs, autres que l'unité, puissances $m^{\text{èmes}}$ parfaites. Conséquemment:

$$P_k \cdot k^m = P_1;$$

puis:

$$P_1 + P_2 + P_3 + \cdots = P_1\left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\right) = P_1 s_m.$$

Mais le premier membre représente la *certitude:* il est donc égal à l'unité. Il en résulte

$$P_1 = \frac{1}{s_m}, \qquad P_k = \frac{1}{k^m s_m}.$$

17. Pour $g(x) = r_k(x)$, on a

$$\lim \cdot \frac{1}{n} \sum_1^n r_k\left[d_m^{\frac{1}{m}}(x)\right] = \frac{s_{mk}}{s_m} \cdot$$

Telle est la probabilité que $d_m^{\frac{1}{m}}(x)$ soit une puissance $k^{ème}$ parfaite. En particulier, pour $m = k = 2$, le second membre devient $\frac{\pi^2}{15}$, et l'on voit que: « *Il y a environ* 25 *à parier, contre* 13, *que la racine carrée du plus grand diviseur carré d'un nombre entier, pris au hasard, est elle-même un carré* ». Ce résultat ne nous étonnera pas si nous réfléchissons que, dans près des $\frac{2}{3}$ des cas, c'est l'unité qui est le *seul* diviseur carré, et sa racine carrée est, naturellement, un carré.

18. Faisons $g(x) = 0$, en général, mais $g(x) = 1$ lorsque x a la forme $\mathfrak{M}\alpha + r$. En observant que

$$\frac{1}{(1+x)^m} + \frac{1}{(2+x)^m} + \frac{1}{(3+x)^m} + \cdots = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1} H(x)}{d x^{m-1}}, \quad (^{**})$$

on trouve, après quelques transformations simples,

$$P_r = \frac{1}{\alpha^m s_m} \cdot \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\varphi r}{\alpha}}}{1 - e^{-\varphi}} \varphi^{m-1} d\varphi. \tag{21}$$

Telle est la *probabilité que* $d_m^{\frac{1}{m}}(x)$ *ait la forme* $\mathfrak{M}\alpha + r$. En particulier, $P_\alpha = \frac{1}{\alpha^m}$, résultat évident. Si α est *pair*, $P_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2^m - 1}{\alpha^m}$; etc. Comme exemple, prenons le cas de $\alpha = 4$, et faisons $m = 2$. La formule (21) donne

$$P_1 = 3\left(\frac{1}{8} + \frac{G}{\pi^2}\right), \qquad P_2 = \frac{3}{16}$$

$$P_3 = 3\left(\frac{1}{8} - \frac{G}{\pi^2}\right), \qquad P_4 = \frac{1}{16} \cdot$$

Comme d'habitude, G représente la constante 0,915965594... Approximativement, on peut remplacer $\frac{G}{\pi^2}$ par $\frac{4}{43}$, et l'on voit que: « *Les probabilités que la racine du plus grand carré, diviseur d'un nombre pris au hasard, ait l'une des formes*

$$4\mu + 1, \qquad 4\mu + 2, \qquad 4\mu + 3, \qquad 4\mu,$$

sont à peu près proportionnelles aux nombres

450, 129, 66, 43. »

19. Examinons d'une manière spéciale le cas de $m = 2$. La formule (20) donne

$$P_r = \frac{6}{\pi^2}\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(\alpha+r)^2} + \frac{1}{(2\alpha+r)^2} + \cdots\right\} = \frac{6}{\pi^2\alpha^2} H'\left(\frac{r}{\alpha} - 1\right),$$

$H'(x)$ étant la dérivée de la *fonction harmonique* (**). On sait que

$$H'(x-1) + H'(-x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}.$$

Par suite:

$$P_r + P_{\alpha-r} = \frac{6}{\alpha^2 \sin^2 \frac{\pi r}{\alpha}}, \qquad (0 < r < \alpha).$$

Nous avons une curieuse application de cette formule pour $\alpha = 10$. Alors P_r représente la *probabilité que r soit le dernier chiffre de $\delta(x)$*, en supposant x pris au hasard. Soit, de même, p_r la probabilité que $\delta^2(x)$ se termine par le chiffre r. On a:

$$P_{5-r} + P_{5+r} = \frac{3}{50 \cos^2(r \cdot 18^0)}.$$

En particulier:

$$p_1 = P_1 + P_9 = \frac{3}{25}(3 + \sqrt{5}) = 0{,}6283281\ldots,$$

$$p_4 = P_2 + P_8 = \frac{3}{125}(5 + \sqrt{5}) = 0{,}1736656\ldots$$

$$p_9 = P_3 + P_7 = \frac{3}{25}(3 - \sqrt{5}) = 0{,}0916718\ldots,$$

$$p_6 = P_4 + P_6 = \frac{3}{125}(5 - \sqrt{5}) = 0{,}0663343\ldots$$

$$p_5 = P_5 = 0{,}03, \qquad p_0 = P_0 = 0{,}01.$$

Il en résulte aussi

$$\frac{p_1 + p_9}{18} = \frac{p_4 + p_6}{6} = \frac{p_0 + p_5}{1} = \frac{1}{25}.$$

Conséquemment: « *Ayant pris, au hasard, un nombre entier, on considère le* *plus grand carré qui le divise:*

1.° *Il y a* 18 *à parier, contre* 7, *que le dernier chiffre est* 1 *ou* 9;

2.° " 6 " " 19, " " 4 " 6;

3.° " 1 " " 24, " " 0 " 5 ".

20. Pour $g(x) = \lambda(x)$, on trouve

$$\lim \cdot \frac{1}{n} \sum_1^n \lambda [d_m^{\frac{1}{m}}(x)] = \frac{s_{2m}}{s_m^2} \cdot$$

En d'autres termes, si P'' et P' sont les probabilités que $\lambda [d_m^{\frac{1}{m}}(x)]$ soit $+1$ ou -1, on a

$$P'' - P' = \frac{s_{2m}}{s_m^2} \cdot$$

D'autre part $P'' + P' = 1$. Donc

$$P'' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{s_{2m}}{s_m^2}\right), \qquad P' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{s_{2m}}{s_m^2}\right) \cdot$$

En particulier, pour $m = 2$,

$$P'' = \frac{7}{10}, \qquad P' = \frac{3}{10} \cdot$$

Par conséquent: « *Il y a* 7 *à parier, contre* 3, *que la racine carrée du plus grand diviseur carré d'un nombre entier, pris au hasard, est composée d'un nombre pair, plutôt que d'un nombre impair de facteurs premiers, égaux ou inégaux* ».

21. Soit P_r la probabilité que, ayant pris au hasard un nombre x, on ait $\mu [d_m^{\frac{1}{m}}(x)] = r$, où r n'est susceptible que des valeurs $+1$, -1, 0. Pour $g(x) = \mu(x)$, la formule (19) devient

$$P_1 - P_{-1} = \frac{1}{s_m^2} \cdot \tag{22}$$

Si $g(x) = f_2(x)$, on sait que les fonctions μ et f_2 s'annulent simultanément; mais que, si μ n'est pas nul, f_2 a toujours la valeur 1. Par conséquent, la formule (19) peut s'écrire ainsi:

$$P_1 + P_{-1} = \frac{1}{s_{2m}} \cdot \tag{23}$$

Les formules (22) et (23) donnent

$$P_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s_{2m}} + \frac{1}{s_m^2}\right), \qquad P_{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s_{2m}} - \frac{1}{s_m^2}\right) \cdot$$

Enfin, à cause de $P_1 + P_{-1} + P_0 = 1$, on a aussi

$$P_0 = 1 - \frac{1}{s_{2m}}.$$

Par exemple, pour $m = 2$, on obtient

$$P_1 = \frac{63}{\pi^4}, \qquad P_{-1} = \frac{27}{\pi^4}, \qquad P_0 = 1 - \frac{90}{\pi^4}.$$

Conséquemment:

1.° « *Il y a environ* 42 *à parier, contre* 23, *que la racine carrée du plus grand diviseur carré d'un nombre quelconque, pris au hasard, est le produit de facteurs premiers, inégaux, en nombre pair* ».

2.° « *Il y a environ* 47 *à parier, contre* 18, *que la racine carrée du plus grand diviseur carré d'un nombre entier, pris au hasard, n'est pas un produit de nombres premiers, inégaux, en nombre impair* ».

3.° « *Il n'y a que* 1 *à parier, contre* 12 *environ, que la racine du plus grand carré, qui divise un entier, pris au hasard, est divisible par un carré* ».

En comparant entre elles les valeurs de P_1 et P_{-1}, on voit encore que: « *Si la racine du plus grand diviseur carré d'un nombre, pris au hasard, est un produit de nombres premiers, inégaux, il y a* 7 *à parier, contre* 3, *que ceux-ci sont en nombre pair, plutôt qu'en nombre impair* ».

22. Soit

$$g(x) = \left|\begin{array}{ll} \lambda(x), & \text{si } x \text{ est divisible par } \alpha, \\ 0, & \text{dans le cas contraire,} \end{array}\right.$$

et distinguons respectivement par les lettres Π et P les probabilités relatives aux cas où $d_m^{\frac{1}{m}}(x)$ *est* ou *n'est pas* divisible par α. La formule (19) donne

$$\Pi'' - \Pi' = \frac{1}{s_m} \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\lambda(\alpha x)}{(\alpha x)^m} = \frac{\lambda(\alpha)}{\alpha^m s_m} \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\lambda(x)}{x^m} = \frac{\lambda(\alpha)}{\alpha^m} \cdot \frac{s_{2m}}{s_m^2}.$$

D'autre part:

$$\Pi'' + \Pi' = \frac{1}{s_m} \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{(\alpha x)^m} = \frac{1}{\alpha^m s_m} \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^m} = \frac{1}{\alpha^m}.$$

Donc

$$\Pi'' = \frac{1}{2\,\alpha^m} \left\{ 1 + \lambda(\alpha) \frac{s_{2m}}{s_m^2} \right\}, \qquad \Pi' = \frac{1}{2\,\alpha^m} \left\{ 1 - \lambda(\alpha) \frac{s_{2m}}{s_m^2} \right\}.$$

En tenant compte des résultats obtenus plus haut, on trouverait facilement les expressions de P'' et de P'. En particulier, pour $m=2$,

$$\Pi''=\frac{5+2\lambda(\alpha)}{10\alpha^2},\qquad P''=\frac{7}{10}-\frac{5+2\lambda(\alpha)}{10\alpha^2},$$

$$\Pi'=\frac{5-2\lambda(\alpha)}{10\alpha^2},\qquad P'=\frac{3}{10}-\frac{5-2\lambda(\alpha)}{10\alpha^2}.$$

Par exemple, en faisant $\alpha=2$, on trouve

$$\frac{\Pi''}{3}=\frac{\Pi'}{7}=\frac{P''}{25}=\frac{P'}{5}=\frac{1}{40}.$$

Par conséquent: « *Ayant pris, au hasard, un nombre entier, si l'on considère la racine carrée de son plus grand diviseur carré:*

1.° *Il y a seulement* 3 *à parier, contre* 37, *qu'elle est un nombre pair, composé de facteurs premiers, égaux ou inégaux, en nombre pair.*

2.° *Il y a seulement* 7 *à parier, contre* 33, *qu'elle est un nombre pair, composé de facteurs premiers, égaux ou inégaux, en nombre impair.*

3.° *Il y a* 5 *à parier, contre* 3, *qu'elle est un nombre impair, composé d'un nombre pair de facteurs premiers, égaux ou inégaux.*

4.° *Il y a seulement* 1 *à parier, contre* 7, *qu'elle est un nombre impair, composé d'un nombre impair de facteurs premiers, égaux ou inégaux* ».

La comparaison des valeurs de Π'', Π', ou de Π'', P'', etc...., fournit quelques autres propositions. Par exemple: « *Si le plus grand carré, qui divise un nombre, pris au hasard, est impair, il est cinq fois plus probable que sa racine est composée d'un nombre pair, plutôt que d'un nombre impair de facteurs premiers, égaux ou inégaux* ».

23. Supposons encore

$$g(x)=\left|\begin{array}{ll}\mu(x), & \text{si } x \text{ est divisible par le nombre } \textit{premier } \varpi,\\ 0, & \text{dans le cas contraire.}\end{array}\right.$$

D'après (19):

$$\Pi_1-\Pi_{-1}=\frac{1}{s_m}\sum{}''\frac{\mu(x)}{x^m},\qquad P_1-P_{-1}=\frac{1}{s_m}\sum{}'\frac{\mu(x)}{x^m},$$

où les sommes $\sum''$, $\sum'$ se rapportent respectivement aux valeurs de x, divisibles ou non par ϖ. Or, on sait que, si ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3,... est la série des nombres premiers, supérieurs à l'unité, on a

$$\sum_1^\infty\frac{\mu(x)}{x^m}=\left(1-\frac{1}{\varpi_1^m}\right)\left(1-\frac{1}{\varpi_2^m}\right)\left(1-\frac{1}{\varpi_3^m}\right)\cdots$$

Mettant en évidence, dans le second membre, le facteur $1-\frac{1}{\varpi^m}$, on peut écrire

$$\sum\frac{\mu(x)}{x^m}=\frac{\sum\frac{\mu(x)}{x^m}}{1-\frac{1}{\varpi^m}}-\frac{1}{\varpi^m}\cdot\frac{\sum\frac{\mu(x)}{x^m}}{1-\frac{1}{\varpi^m}},$$

et l'on reconnaît immédiatement que les deux parties du second membre sont précisément les valeurs des sommes $\sum''$, $\sum'$. Ainsi:

$$\sum{}'\frac{\mu(x)}{x^m}=\frac{\varpi^m}{\varpi^m-1}\sum\frac{\mu(x)}{x^m},\qquad \sum{}''\frac{\mu(x)}{x^m}=-\frac{1}{\varpi^m-1}\sum\frac{\mu(x)}{x^m}.$$

Par conséquent:

$$\Pi_1-\Pi_{-1}=-\frac{1}{\varpi^m-1}\cdot\frac{1}{s_m^2},\qquad P_1-P_{-1}=\frac{\varpi^m}{\varpi^m-1}\cdot\frac{1}{s_m^2}.$$

D'autre part, pour

$$g(x)=\left|\begin{array}{ll} f_2(x), & \text{si } x \text{ est divisible par } \varpi,\\ 0, & \text{dans le cas contraire,}\end{array}\right.$$

la même formule donne

$$\Pi_1+\Pi_{-1}=\frac{1}{s_m}\sum{}''\frac{f_2(x)}{x^m},\qquad P_1+P_{-1}=\frac{1}{s_m}\sum{}'\frac{f_2(x)}{x^m}.$$

Or, on sait que

$$\sum_1^\infty\frac{f_2(x)}{x^m}=\left(1+\frac{1}{\varpi_1^m}\right)\left(1+\frac{1}{\varpi_2^m}\right)\left(1+\frac{1}{\varpi_3^m}\right)\cdots$$

En opérant comme ci-dessus, on trouve

$$\sum{}'\frac{f_2(x)}{x^m}=\frac{\varpi^m}{\varpi^m+1}\sum\frac{f_2(x)}{x^m},\qquad \sum{}''\frac{f_2(x)}{x^m}=\frac{1}{\varpi^m+1}\sum\frac{f_2(x)}{x^m}.$$

Par suite, en ayant égard à la formule (13),

$$\Pi_1+\Pi_{-1}=\frac{1}{\varpi^m+1}\cdot\frac{1}{s_{2m}},\qquad P_1+P_{-1}=\frac{\varpi^m}{\varpi^m+1}\cdot\frac{1}{s_{2m}}.$$

Enfin, les valeurs de Π_0, P_0, se déduisent des relations évidentes

$$\Pi_1+\Pi_{-1}+\Pi_0=\frac{1}{\varpi^m},\qquad P_1+P_{-1}+P_0=1-\frac{1}{\varpi^m}.$$

Faisant varier m et ϖ on obtient une infinité de propositions. En particulier, si $m = 2$,

$$\Pi_1 = \frac{3\varpi^2 - 7}{\varpi^4 - 1} \cdot \frac{9}{\pi^4}, \qquad \Pi_{-1} = \frac{7\varpi^2 - 3}{\varpi^4 - 1} \cdot \frac{9}{\pi^4}, \qquad \Pi_0 = \frac{1}{\varpi^2} - \frac{1}{\varpi^2 + 1} \cdot \frac{90}{\pi^4},$$

$$P_1 = \varpi^2 \frac{7\varpi^2 - 3}{\varpi^4 - 1} \cdot \frac{9}{\pi^4}, \qquad P_{-1} = \varpi^2 \frac{3\varpi^2 - 7}{\varpi^4 - 1} \cdot \frac{9}{\pi^4}, \qquad P_0 = \frac{\varpi^2 - 1}{\varpi^2} - \frac{\varpi^2}{\varpi^2 + 1} \cdot \frac{90}{\pi^4}.$$

Par exemple, pour $\varpi = 2$,

$$\frac{\Pi_1}{3} = \frac{\Pi_{-1}}{15} = \frac{P_1}{60} = \frac{P_{-1}}{12} = \frac{1}{\pi^4},$$

$$\Pi_0 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{72}{\pi^4}\right), \qquad P_0 = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{96}{\pi^4}\right).$$

On en déduit que: « *Si l'on considère la racine du plus grand carré, qui divise un entier pris au hasard:*

1.° *Il y a seulement* 2 *à parier, contre* 63 *environ, qu'elle est un produit pair de facteurs premiers, inégaux, en nombre pair, c'est-à-dire qu'elle appartient à la série*

6, 30, 14, 22, 26, 34, 38,..., 210,...

2.° *Il y a seulement* 2 *à parier, contre* 11 *environ, qu'elle est un produit pair de facteurs premiers, inégaux, en nombre impair, c'est-à-dire qu'elle appartient à la série*

2, 30, 42, 66, 70, 78, 102,..., 2310,...

3.° *Il y a environ* 8 *à parier, contre* 5, *qu'elle est l'unité, ou un entier impair, produit de facteurs premiers, inégaux, en nombre pair, c'est-à-dire qu'elle appartient à la série*

1, 15, 21, 33, 35, 39, 51,..., 1155,...

4.° *Il y a environ* 57 *à parier, contre* 8, *qu'elle n'est pas un produit de nombres premiers, inégaux, en nombre impair, c'est-à-dire qu'elle n'appartient pas à la série*

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,..., 105,... ».

De même, les valeurs de Π_0 et P_0 montrent que:

« *Il y a environ* 243 *à parier, contre* 17, *que la racine du plus grand diviseur carré d'un nombre entier, pris au hasard, n'est pas un nombre pair,* *admettant un diviseur carré autre que l'unité. Il y a* 257 *à parier, contre* 3 *environ, qu'elle n'est pas un nombre impair, jouissant de la même propriété* ».

24. On voit que la formule (19) se prête avec la plus grande facilité aux recherches de probabilités, relatives à la fonction $d_m^{\frac{1}{m}}(x)$. En donnant à $g(x)$ les valeurs 1 ou 0, suivant que x appartient ou n'appartient pas à un certain système de nombres, la formule (19) donne immédiatement la probabilité pour que $d_m^{\frac{1}{m}}(x)$ appartienne au même système. Proposons-nous, comme dernier exemple, de chercher la *probabilité* P_m *pour que* $d_m^{\frac{1}{m}}(x)$ *appartienne à la série des nombres triangulaires:*

$$1,\quad 3,\quad 6,\quad 10,\quad 15,\quad 21,\quad 28,\quad 36,\quad 45,\ldots$$

D'après (19):

$$P_m = \frac{2^m}{s_m}\sum_1^\infty \frac{1}{x^m(x+1)^m}.$$

Observons que, si l'on pose

$$\xi_m = \frac{1}{x^m} + \frac{(-1)^m}{(x+1)^m},$$

on a:

$$\frac{1}{x^m(x+1)^m} = \xi_m - C_{m,1}\xi_{m-1} + C_{m+1,2}\xi_{m-2} - \cdots \pm C_{2m-2,m-1}\xi_1.$$

Or:

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\xi_m = \{1+(-1)^m\}s_m - (-1)^m.$$

Par suite:

$$P_m = (-1)^m\frac{2^{m+1}}{s_m}\Big\{-\frac{1}{2}C_{2m-1,m-1} + C_{2m-3,m-1}s_2 + C_{2m-5,m-1}s_4 + C_{2m-7,m-1}s_6 + \cdots\Big\}.$$

Par exemple, pour $m=2$, on trouve

$$P_2 = 8\left(1-\frac{9}{\pi^2}\right),$$

c'est-à-dire que: « *Il y a environ* 12 *à parier, contre* 5, *que la racine du plus grand diviseur carré d'un nombre, pris au hasard, est un nombre triangulaire* ».

De même, pour $m=4$, on obtient

$$P_4 = 32\left(1+\frac{150}{\pi^2}-\frac{1575}{\pi^4}\right) = 0{,}936\ldots$$

etc., etc.... La grandeur considérable de ces résultats est dûe à la présence de l'*unité*, dans la série que l'on considère. Si l'on veut exclure cette valeur, on doit, de l'expression de P_m, retrancher $\frac{1}{S_m}$. Après cela, il vient seulement

$$p_2 = 8 - \frac{78}{\pi^2} = 0{,}096\ldots; \qquad p_4 = 32 + \frac{4800}{\pi^2} - \frac{50490}{\pi^4} = 0{,}013\ldots$$

etc., etc.... Comme on devait s'y attendre, les probabilités sont considérablement atténuées. En particulier: « *Il y a environ* 46 *à parier, contre* 5, *que la racine du plus grand diviseur carré d'un nombre, pris au hasard, n'est pas un nombre triangulaire, différent de l'unité* ».

(*) Voir, dans les Nouvelles Annales, notre *Généralisation de l'identité de MM. Tchébychew et Polignac.*

(**) Voir le *Premier Mémoire d'Arithmétique.*

(***) Dans cet article, et dans les suivants, $\lambda(x)$ représentera constamment une fonction de x, égale à ± 1, suivant que x est décomposable en un nombre *pair* ou en un nombre *impair* de facteurs *premiers,* égaux ou inégaux. Quant à $\nu(x)$, cette fonction est généralement nulle, sauf pour $x = \varpi^m$, ϖ étant *premier*. Dans ce cas, $\nu(x) = \log \varpi$.

(****) Voyez, dans le Journal de BATTAGLINI, notre article: *Sull' inversione delle identità aritmetiche.*

Eventualités de la division arithmétique.

(*Par* Ernest Cesàro, *étudiant, à Torre Annunziata.*)

1. On a beaucoup étudié la fonction $[x]$, qui représente le *plus grand nombre entier, contenu dans x;* mais on n'a pas suffisamment fait attention aux propriétés de $i(x)$, *nombre entier le plus proche de x*. Lorsque $x = n + \frac{1}{2}$, n étant entier, nous conviendrons de prendre $i(x) = n + 1$. Il est facile d'exprimer $i(x)$ au moyen de $[x]$. En effet, remarquons que $i(x) - [x]$ est 0 ou 1, suivant que $x - [x]$ est inférieur ou non à $\frac{1}{2}$. Or, on sait que la fonction $[2x] - 2[x]$ jouit de la même propriété. Par suite:

$$i(x) = [2x] - [x].$$

Inversément:

$$[x] = i\left(\frac{x}{2}\right) + i\left(\frac{x}{4}\right) + i\left(\frac{x}{8}\right) + \cdots \tag{1}$$

La fonction $[x]$ est *définie* par les propriétés d'être un nombre entier et de satisfaire aux conditions

$$[x] \overline{\gtrless} x < [x] + 1.$$

De même, la fonction $i(x)$ est *définie* par les propriétés d'être un nombre entier, et de satisfaire aux conditions

$$i(x) - \frac{1}{2} \overline{\gtrless} x < i(x) + \frac{1}{2},$$

que l'on peut écrire ainsi:

$$i(x) \overline{\gtrless} x + \frac{1}{2} < i(x) + 1.$$

On voit, maintenant, que

$$i(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right], \qquad [x] = i\left(x - \frac{1}{2}\right). \tag{2}$$

2. Nous ne nous arrêterons pas à étudier les propriétés de la fonction i, car notre but est seulement d'utiliser cette fonction dans l'étude de certaines questions de moyennes et de probabilités. Néanmoins, nous ferons observer que les égalités obtenues permettent de déduire facilement les propriétés de $i(x)$ de celles de $[x]$. Nous ferons aussi quelques remarques, relatives aux mêmes égalités. D'abord, la comparaison de (1) avec (2) donne la relation

$$[x]=\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{x}{8}+\frac{1}{2}\right]+\cdots, \tag{3}$$

qui en fournit beaucoup d'autres. Une de ses conséquences est que, si l'on considère les excès des quantités $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$, $\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$, $\frac{x}{8}+\frac{1}{2}$, $\cdots$, non inférieures à l'unité, sur les plus grands nombres entiers qu'elles renferment, le rapport de leur somme au logarithme de x tend vers l'inverse du logarithme de 4, lorsque x augmente sans limite. La moyenne valeur des mêmes différences est $\frac{1}{2}\cdot$ Autre remarque: lorsque x est un entier n, la relation (3) prend la forme

$$\sum_1^n\left[\frac{n}{p}+\frac{1}{2}\right]t(p)+\sum_{n+1}^{2n}t(p)=n,$$

pourvu que l'on pose

$$t(x)=\left|\begin{array}{l}1,\text{ pour } x=2,\ 4,\ 8,\ 16,\ldots\\ 0,\text{ dans les autres cas.}\end{array}\right.$$

Si l'on observe que, entre n et $2n$, il y a une puissance de 2, et une seule, on obtient

$$\sum_1^n\left[\frac{n}{p}+\frac{1}{2}\right]t(p)=n-1.$$

Il est facile (*) de transformer cette formule, en posant

$$T(x)=t(1)+t(2)+t(3)+\cdots+t(x),$$

et en observant que, de $\frac{n}{x}+\frac{1}{2}=y$, on tire $x=\frac{2n}{2y-1}\cdot$ On trouve alors

$$\sum T\left[\frac{2n}{2p-1}\right]=n. \tag{4}$$

$T(x)$ est l'exposant de la plus haute puissance de 2, non supérieure à x, et peut être mis sous la forme suivante:

$$T(x)=\left[\frac{\log x}{\log 2}\right].$$

Si, dans l'identité (4), on change n en $n-1$, on obtient, par soustraction, la relation *évidente*

$$t\left(\frac{2n}{a'}\right)+t\left(\frac{2n}{b'}\right)+t\left(\frac{2n}{c'}\right)+\cdots=1,$$

où a', b', c',... sont tous les diviseurs *impairs* de $2n$. D'autres relations, plus générales, peuvent être obtenues en faisant $x=\frac{n}{p}$ dans l'égalité (3), en multipliant les deux membres par $f(p)$ et en additionnant, après avoir fait $p=1$, 2, 3,..., n. Par exemple, pour $f(x)=1$, il vient

$$\sum\left[\frac{n}{p}+\frac{1}{2}\right]\varepsilon(p)=\sum\mathfrak{E}\left[\frac{2n}{2p-1}\right]=\sum q_p,$$

pourvu que l'on représente par $\varepsilon(x)$ l'exposant de la plus haute puissance de 2, qui divise x, et par $\mathfrak{E}(x)$ la somme $\varepsilon(1)+\varepsilon(2)+\cdots+\varepsilon(x)$. Si l'on opère comme plus haut, on reconnaît que la dernière identité prend son origine dans l'identité *évidente*

$$\varepsilon\left(\frac{2n}{a'}\right)+\varepsilon\left(\frac{2n}{b'}\right)+\varepsilon\left(\frac{2n}{c'}\right)+\cdots=\theta(n).$$

On obtient d'autres relations, en faisant $f(x)=\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\varepsilon(x)$,... Par exemple:

$$\sum i\left(\frac{n}{p}\right)\lambda(p)\varepsilon(p)\sin^2\frac{\pi\,\varepsilon(p)}{2}=[\sqrt{n}],\qquad \sum i\left(\frac{n}{p}\right)\varepsilon(p)\mu\left(\frac{p}{2^{\varepsilon(p)}}\right)=1,$$

$$\sum i\left(\frac{n}{p}\right)\varepsilon^4(p)-\sum i\left(\frac{n}{p}\right)\varepsilon^3(p)=2\sum\left[\frac{n}{p}\right]\varepsilon(p),\ldots$$

3. Pour chercher la valeur asymptotique de

$$I_n=i\left(\frac{n}{1}\right)+i\left(\frac{n}{2}\right)+i\left(\frac{n}{3}\right)+\cdots+i\left(\frac{n}{n}\right),$$

il faut nous rappeler (*) que la somme

$$E_n=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right]$$

est asymptotiquement égale à

$$E_n=n\log n+(2C-1)n.$$

Or:

$$I_n=\sum_1^n\left\{\left[\frac{2n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p}\right]\right\}=E_{2n}-E_n-n.$$

Par suite:

$$I_n=n\log n+(\log 4+2C-2)n.$$

4. Une autre expression qu'il nous faut évaluer asymptotiquement, pour les besoins des recherches ultérieures, est

$$\Delta_n = \left[\frac{n}{1}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{5}\right] - \left[\frac{n}{7}\right] + \cdots$$

Souvent nous avons affirmé (*) que cette expression est asymptotique à $n \cdot \frac{\pi}{4}$, mais nous n'avons jamais donné, de cela, une démonstration rigoureuse. On peut écrire

$$\Delta_n = \sum\left[\frac{n}{p}\right]\sin\frac{\pi p}{2},$$

ou bien, par la transformation habituelle (*),

$$\Delta_n = \sum F\left[\frac{n}{p}\right],$$

en posant

$$F(x) = \sum_1^x \sin\frac{\pi x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \cos\frac{\pi x}{2}\right).$$

En d'autres termes, $F(x)$ est 1, si x a l'une des formes $4\mu + 1$, $4\mu + 2$, et 0 dans les autres cas. En combinant les deux formules trouvées, on sait (*) que l'on peut écrire, asymptotiquement,

$$\Delta_n = \sum_1^{\sqrt{n}}\left[\frac{n}{p}\right]\sin\frac{\pi p}{2} + \sum_1^{\sqrt{n}} F\left[\frac{n}{p}\right] - \sqrt{n}\,F(\sqrt{n}).$$

Si $F(x)$ était toujours 1, la deuxième somme se réduirait à $\sqrt{n}$, et serait, par conséquent, négligeable vis-à-vis de n. À plus forte raison cela a-t-il lieu, puisque $F(x)$ ne quitte la valeur 1 que pour s'annuler. De même, dans la première somme, il est permis de remplacer $\left[\frac{n}{p}\right]$ par $\frac{n}{p}$; car on vient à négliger ainsi une quantité d'un ordre non supérieur à celui de $\sqrt{n}$. Par suite

$$\Delta_n = n\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) = n \cdot \frac{\pi}{4}.$$

5. Cela posé, voyons dans combien de cas, pour $x = \frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \cdots \frac{n}{n}$, la valeur de $i(x)$ est *impaire*. Pour que l'on ait $i\left(\frac{n}{p}\right) = 2k - 1$, il faut et il suffit que

$$2k - \frac{3}{2} \leqq \frac{n}{p} < 2k - \frac{1}{2},$$

d'où

$$\frac{2n}{4k-1} < p \overline{\overline{<}} \frac{2n}{4k-3}.$$

Les valeurs de p, pour lesquelles $i\left(\frac{n}{p}\right) = 2k-1$, sont donc

$$\left[\frac{2n}{4k-1}\right]+1, \quad \left[\frac{2n}{4k-1}\right]+2, \quad \left[\frac{2n}{4k-1}\right]+3, \ldots \quad \left[\frac{2n}{4k-3}\right].$$

Leur nombre est $\left[\frac{2n}{4k-3}\right] - \left[\frac{2n}{4k-1}\right]$. Faisant varier k, depuis 1, on obtient l'expression

$$\left[\frac{2n}{1}\right] - \left[\frac{2n}{3}\right] + \left[\frac{2n}{5}\right] - \ldots = \Delta_{2n},$$

qui représente la quotité des termes *impairs*, dans la série *indéfinie*

$$i\left(\frac{n}{1}\right), \quad i\left(\frac{n}{2}\right), \quad i\left(\frac{n}{3}\right), \ldots \tag{5}$$

Voulant nous arrêter au $n^{ème}$ terme, observons que les n termes suivants sont égaux à 1, et les autres sont nuls, d'où il suit que nous devons, de la somme ci-dessus, retrancher n, si nous voulons la quotité des termes *impairs*, dans la série des n premiers nombres (5). Par conséquent, la probabilité que l'un de ces nombres, pris au hasard, soit impair, est

$$P_n = \frac{\Delta_{2n}}{n} - 1.$$

Si n augmente indéfiniment,

$$P = \frac{\pi}{2} - 1 = 0{,}5707\ldots \tag{6}$$

En d'autres termes: « *Si l'on divise un nombre très-grand par un nombre plus petit, pris au hasard, il y a* 4 *environ à parier, contre* 3, *que le quotient le plus approché est impair* ».

6. Soit $\frac{u}{v}$ une fraction quelconque, dont les termes ne surpassent pas n. Quelle est la probabilité que le plus grand nombre entier qu'elle renferme est *impair?* Après avoir donné à v une valeur fixe p, faisons varier u de 1 à n. Pour

$$\begin{array}{llll} u = p, & p+1, & p+2, \ldots, & 2p-1, \\ 3p, & 3p+1, & 3p+2, \ldots, & 4p-1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

$\frac{u}{v}$ sera impair. On ne doit pas aller au delà de $u = n = pq_p + r$. Si q_p est *pair*, il y aura, pour u, $\frac{1}{2}q_p$ séries de p valeurs. Si q_p est *impair*, il y en aura $\frac{1}{2}(q_p - 1)$ de p valeurs, et une de $r + 1$ valeurs. Le *nombre des cas favorables* est donc, dans chacun de ces cas,

$$\frac{1}{2}pq_p, \qquad n + 1 - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}pq_p,$$

ou bien, en une seule expression,

$$\frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{4}p + \frac{(-1)^{q_p}}{2}\left\{pq_p + \frac{1}{2}p - (n+1)\right\}.$$

Par conséquent, si P est la probabilité cherchée,

$$n^2P = \frac{3}{8}n^2 + \frac{1}{2}\sum pq_p(-1)^{q_p} + \frac{1}{4}\sum p(-1)^{q_p} - \frac{n+1}{2}\sum(-1)^{q_p}, \tag{7}$$

en supprimant toujours, dans le second membre, les quantités d'un ordre inférieur à celui de n^2.

7. Cela étant, transformons le second membre de (7) par les moyens habituels (*). Posons

$$S = \sum(-1)^p pq_p^2, \qquad U = \sum(-1)^p q_p^2,$$
$$T = \sum(-1)^p pq_p, \qquad V = \sum(-1)^p q_p,$$

et soit

$$F(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(x).$$

Pour $f(x) = (-1)^x(2x-1)$, on a $F(x) = (-1)^x \cdot x$. Donc

$$\sum pq_p(-1)^{q_p} = \sum(-1)^p(2p-1)\frac{q_p(q_p+1)}{2} = S + T - \frac{1}{2}(U+V).$$

De même, si $f(x) = -1$, pour $x = 1$, et $f(x) = 2(-1)^x$, dans tout autre cas, on a d'abord $F(x) = (-1)^x$; puis:

$$\sum p(-1)^{q_p} = 2\sum(-1)^p\frac{q_p(q_p+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + U + V.$$

Enfin:

$$\sum(-1)^{q_p} = 2\sum(-1)^p q_p + n = 2V + n.$$

Substituant dans (7), on trouve

$$n^2P = \frac{1}{2}(S+T) - nV. \tag{8}$$

8. Évaluons asymptotiquement S, T, V. Observons d'abord que

$$\sum_1^n p\,\frac{q_p(q_p+1)}{2} = 2\sum_1^{\sqrt{n}} p\,\frac{q_p(q_p+1)}{2} - \frac{n^2}{4},$$

ou bien

$$\sum_1^n p\,\frac{q_p(q_p+1)}{2} = n^2 H(\sqrt{n}) - \frac{n^2}{4} = \frac{1}{2}\,n^2\log n + \left(C - \frac{1}{4}\right)n^2.$$

Par suite:

$$\sum_1^n (-1)^p p\,\frac{q_p(q_p+1)}{2} = -\,n^2\left(\frac{1}{2}\log n + C - \frac{1}{4}\right) + n^2\left(\frac{1}{2}\log\frac{n}{2} + C - \frac{1}{4}\right),$$

c'est-à-dire

$$S + T = -\,n^2\log 2.$$

De même, on sait que

$$\sum_1^n q_p = n\log n + (2C-1)n.$$

On en déduit

$$\sum_1^n (-1)^p q_p = -\,n(\log n + 2C - 1) + n\left(\log\frac{n}{2} + 2C - 1\right),$$

c'est-à-dire

$$V = -\,n\log 2.$$

Asymptotiquement, la formule (8) devient

$$n^2 P = -\frac{1}{2}\,n^2\log 2 + n^2\log 2 = \frac{1}{2}\,n^2\log 2,$$

d'où:

$$P = \log\sqrt{2} = 0{,}3465\ldots$$

Ainsi: « *Il y a* 115 *à parier, contre* 61 *environ, que le quotient obtenu dans une division quelconque est pair plutôt qu'impair* ».

Considérons, par exemple, les 2500 fractions, dont les termes ne surpassent pas 50. Les plus grands nombres entiers contenus dans 887 de ces fractions sont *impairs*. Or, le quotient de 887 par 2500 est 0,3548, et ne diffère pas beaucoup du logarithme de $\sqrt{2}$.

9. Faisons la même recherche pour $i\left(\frac{u}{v}\right)$. Si $v = p$, $i\left(\frac{u}{p}\right)$ sera *impair* pour les valeurs suivantes de u:

$$\begin{array}{llll} \mu, & \mu+1, & \mu+2,\ldots, & \mu+p-1, \\ \mu+2p, & \mu+2p+1,\ldots, & & \mu+3p-1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

On a posé $\mu = \left[\frac{p+1}{2}\right]$. En raisonnant comme précédemment, on trouve, pour u, un nombre de valeurs, donné par le tableau suivant:

	$i\left(\frac{n}{p}\right)$ *pair*	$i\left(\frac{n}{p}\right)$ *impair*
$\left[\frac{n}{p}\right]$ *pair*	$\frac{1}{2}pq_p$	$n+1-\mu-\frac{1}{2}pq_p$
$\left[\frac{n}{p}\right]$ *impair*	» $+\frac{p}{2}$	» $+\frac{p}{2}$.

En observant que $\left[\frac{p+1}{2}\right] = \frac{p}{2} + \frac{1}{4} - \frac{(-1)^p}{4}$, on peut écrire, en une seule expression,

$$\frac{1}{2}\left(n + \frac{3}{4} + \frac{(-1)^p}{4}\right) - \frac{1}{4}p(-1)^{q_p} + \frac{(-1)^{i\left(\frac{n}{p}\right)}}{2}\left(pq_p - n - \frac{3}{4} + \frac{p}{2} - \frac{(-1)^p}{4}\right).$$

Conséquemment:

$$\left.\begin{aligned} n^2 P = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{4}\sum p(-1)^{q_p} + \frac{1}{2}\sum pq_p(-1)^{i\left(\frac{n}{p}\right)} - \\ -\frac{n}{2}\sum(-1)^{i\left(\frac{n}{p}\right)} + \frac{1}{4}\sum p(-1)^{i\left(\frac{n}{p}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

10. Transformons asymptotiquement les sommes du second membre. Nous avons déjà trouvé

$$\sum p(-1)^{q_p} = \frac{n^2}{2} + \sum(-1)^p q_p^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{12}\right)n^2. \tag{10}$$

La somme $\sum_1^n(-1)^{i\left(\frac{n}{p}\right)}$ est évidemment l'excès de n sur la double quotité des termes *impairs* de la série $i\left(\frac{n}{1}\right)$, $i\left(\frac{n}{2}\right)$, … $i\left(\frac{n}{n}\right)$, c'est-à-dire:

$$\sum(-1)^{i\left(\frac{n}{p}\right)} = n - 2n\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = -(\pi - 3)n. \tag{11}$$

De même, si α, β, γ,… sont *toutes* les valeurs de p, pour lesquelles $i\left(\frac{n}{p}\right)$ est *impair*, on a

$$\sum_1^n p(-1)^{i\left(\frac{n}{p}\right)} = \sum_1^n p - 3\sum\alpha + 2\sum_1^n(n+p) = \frac{7}{2}n^2 - 2\sum\alpha.$$

Or, d'après une remarque faite précédemment

$$\sum\alpha = \sum_1^{\left[\frac{2n}{1}\right]-\left[\frac{2n}{3}\right]} \left\{\left[\frac{2n}{1}\right]-p+1\right\} + \sum_1^{\left[\frac{2n}{5}\right]-\left[\frac{2n}{7}\right]} \left\{\left[\frac{2n}{5}\right]-p+1\right\} +$$
$$+ \sum_1^{\left[\frac{2n}{9}\right]-\left[\frac{2n}{11}\right]} \left\{\left[\frac{2n}{9}\right]-p+1\right\} + \cdots$$

D'ailleurs

$$\sum_{p=1}^{p=s-t}(s-p+1) = \frac{s^2-t^2}{2} + \frac{s-t}{2}.$$

Par suite:

$$\sum\alpha = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{2n}{1}\right]^2 - \left[\frac{2n}{3}\right]^2 + \left[\frac{2n}{5}\right]^2 - \left[\frac{2n}{7}\right]^2 + \cdots\right\} = 2G\cdot n^2.$$

Finalement:

$$\sum_1^n p(-1)^{i\left(\frac{n}{p}\right)} = -\frac{8G-7}{2}n^2. \tag{12}$$

Il nous resterait à transformer la somme

$$\sum_1^n p q_p(-1)^{i\left(\frac{n}{p}\right)} = \sum_1^n p q_p - 2\sum \alpha q_\alpha;$$

mais, ici, les formules ordinaires semblent impuissantes, de sorte que nous devons nous borner à écrire

$$\sum \alpha q_\alpha = n^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) - \varepsilon\left(\sum\alpha - \frac{3}{2}n^2\right),$$

ε étant une fraction proprement dite. Puis:

$$\sum p q_p(-1)^{i\left(\frac{n}{p}\right)} = \left\{\frac{\pi^2}{12} - \pi + 2 + \varepsilon(4G-3)\right\}n^2. \tag{13}$$

Au moyen des relations (10), (11), (12), (13), la formule (9) donne

$$P = \frac{\pi^2}{16} + \frac{3}{4} - G + \varepsilon\left(2G - \frac{3}{2}\right), \tag{14}$$

valeur comprise entre 0,45 et 0,79. Nous arriverons au résultat exact par une autre voie; mais nous ne supprimerons pas les calculs qui précèdent, soit parcequ'ils nous ont donné des expressions asymptotiques importantes, soit parceque l'on peut arriver, par la même voie, à des formules plus générales, qu'il serait impossible d'obtenir par le moyen spécial dont nous allons parler.

11. Considérons, d'abord, les plus grands nombres entiers contenus dans les fractions $\frac{u}{v}$, dont les termes ne dépassent pas n. Changeons n en rn, r

étant un nombre déterminé et *fini*. Le nombre des cas favorables, qui était $n^2 P_n$, devient $r^2 n^2 P_{rn}$. Si l'on considère seulement les fractions dont un terme, au moins, est égal à n, c'est-à-dire les fractions

$$\begin{matrix} \frac{n}{1}, & \frac{n}{2}, & \frac{n}{3}, \dots, & \frac{n}{n-1}, \\ \frac{1}{n}, & \frac{2}{n}, & \frac{3}{n}, \dots, & \frac{n-1}{n}, \end{matrix} \quad \frac{n}{n}, \tag{15}$$

quel est le nombre des cas favorables correspondant? Dans la seconde ligne, il n'y en a aucun. Dans la première, on sait qu'il y en a asymptotiquement $n \log 2$. Donc

$$r^2 n^2 P_{rn} - n^2 P_n = \{(n+1) + (n+2) + \cdots + rn\} \log 2,$$

d'où

$$r^2 P_{rn} - P_n = \frac{r^2 - 1}{2} \log 2.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, P_n et P_{rn} tendent vers la même limite P, et l'on a

$$P = \log \sqrt{2},$$

conformément à ce qui a été trouvé plus haut.

12. Faisons la même recherche pour les nombres $i\left(\frac{u}{v}\right)$. Dans la première ligne de (15), il y a $n\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ cas favorables, et $\frac{n}{2}$ dans la seconde. En tout $\frac{\pi - 1}{2} n$. Donc:

$$r^2 n^2 P_{rn} - n^2 P_n = \{(n+1) + (n+2) + \cdots + rn\} \cdot \frac{\pi - 1}{2}.$$

Enfin:

$$P = \frac{\pi - 1}{4} = 0{,}5353\ldots \tag{16}$$

Conséquemment: « *Il y a* 15 *à parier, contre* 13 *environ, que le nombre entier le plus proche d'une quantité commensurable, prise au hasard, est impair* ».

Ainsi, parmi les nombres entiers les plus proches des 2500 fractions, dont les termes ne surpassent pas 50, il y en a 1358 *impairs*. Dans ce cas, $P = 0{,}5432$. La comparaison des valeurs (14) et (16) montre que

$$\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{(\pi - 2)^2}{4G - 3} = 0{,}2646\ldots$$

Maintenant, on peut écrire

$$\sum \alpha q_\alpha = \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4} - G\right) \cdot n^2 = 0{,}48628\ldots n^2.$$

De même

$$\sum p q_p (-1)^{i\left(\frac{n}{p}\right)} = \left(2G - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{24}\right) n^2 = -0{,}15009\ldots n^2,$$

etc., etc. Toutes ces formules semblent assez difficiles à obtenir directement.

13. En raisonnant comme nous l'avons fait dans les paragraphes précédents, on peut arriver à un résultat plus général. Soit $f(x)$ la *fonction indicatrice* (**) d'un système Ω de quantités.

« *La probabilité que le nombre entier le plus proche d'une quantité commensurable, prise au hasard, appartienne à* Ω, *est*

$$P = \frac{1}{2} L + \frac{1}{4} f(0) + \frac{1}{4} f(1). \text{ »} \tag{17}$$

Dans cette formule, L représente la *fréquence* de Ω dans la série $i\left(\frac{n}{1}\right)$, $i\left(\frac{n}{2}\right)$, ... $i\left(\frac{n}{n}\right)$, c'est-à-dire que

$$L = \lim \cdot \frac{1}{n} \left\{ f\left[i\left(\frac{n}{1}\right)\right] + f\left[i\left(\frac{n}{2}\right)\right] + f\left[i\left(\frac{n}{3}\right)\right] + \cdots + f\left[i\left(\frac{n}{n}\right)\right] \right\}.$$

14. Si l'on considère des fonctions quelconques des plus grands nombres entiers contenus dans les fractions $\frac{u}{v}$, on trouve, en répétant les raisonnements employés plus haut, l'importante formule

$$\left.\begin{aligned} \sum f\left[\frac{u}{v}\right] = \sum p F(q_p) - \sum p q_p f(q_p) - \sum p f(q_p) + \\ + (n+1) \sum f(q_p) + \frac{n(n-1)}{2} f(0), \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

pourvu que l'on pose $F(x) = f(1) + f(2) + \cdots + f(x)$. De la même manière, si l'on veut évaluer la somme des quantités $f\left[i\left(\frac{u}{v}\right)\right]$, on trouve d'abord, pour $v = p$,

$$\left.\begin{aligned} p F(q_p) + \left\{(n+1) - p q_p - \left[\frac{p+1}{2}\right]\right\} f\left(q_p + \frac{1 - (-1)^{\left[\frac{2n}{p}\right]}}{2}\right) + \\ + \left\{\left[\frac{p+1}{2}\right] - 1\right\} f(0). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Il suffit, maintenant, de changer p en 1, 2, 3,..., n, et additionner.

15. Pour $f(x)=x$, la formule (18) donne

$$\sum\left[\frac{u}{v}\right]=(n+1)\sum q_p-\frac{1}{2}\sum p q_p^2-\frac{1}{2}\sum p q_p.$$

Or, d'après des formules connues (*),

$$\sum q_p \;=n\log n+(2C-1)n,$$

$$\sum p q_p=\frac{\pi^2}{12}n^2,$$

$$\sum p q_p^2=n^2\log n+\left(2C-\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\right)n^2.$$

Donc

$$\sum\left[\frac{u}{v}\right]=\frac{1}{2}\,n^2\log n-\left(\frac{3}{4}-C\right)n^2. \tag{20}$$

16. De même, pour $f(x)=x$, l'expression (19) devient

$$(n+1)q_p-\frac{1}{2}p q_p^2+\frac{1}{2}p q_p-\left[\frac{p+1}{2}\right]q_p,$$

lorsque p n'est pas un des nombres α, β, γ,..., *non supérieurs à* n, pour lesquels $\left[\frac{2n}{p}\right]$ est *impair*. Dans ce cas, il faut encore ajouter

$$(n+1)-p q_p-\left[\frac{p+1}{2}\right]. \tag{21}$$

Par conséquent

$$\sum i\left(\frac{u}{v}\right)=n\sum q_p-\frac{1}{2}\sum p q_p^2+R,$$

en négligeant les quantités d'un ordre inférieur à celui de n^2, et en appelant R la somme des quantités analogues à (21). On a donc

$$\sum i\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{2}\,n^2\log n+\left(\frac{\pi^2}{24}-\frac{3}{4}+C\right)n^2+R.$$

Pour calculer R, observons d'abord que le nombre asymptotique des quantités α est $2n\cdot\log 2-n$. Remarquons aussi que

$$\left[\frac{2n}{\alpha}\right]=2q_\alpha+1.$$

Par suite:

$$R=(\log 4-1)n^2-\frac{1}{2}\sum_1^n\alpha\left[\frac{2n}{\alpha}\right].$$

Cela étant, on a vu que

$$\sum p q_p (-1)^{q_p} = S + T - \frac{1}{2}(U + V) = \left(\frac{\pi^2}{24} - \log 2\right) n^2.$$

Si l'on distingue respectivement par des accents ′ et ″ les sommes relatives aux valeurs de p, pour lesquelles q_p est *impair* ou *pair*, on peut écrire

$$\sum' - \sum'' = \left(\log 2 - \frac{\pi^2}{24}\right) n^2.$$

D'autre part:

$$\sum' + \sum'' = \frac{\pi^2}{12} n^2.$$

Par suite:

$$\sum' = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{24} + \log 2\right) n^2.$$

Puis, successivement,

$$\sum_1^n \alpha \left[\frac{2n}{\alpha}\right] + \sum_1^n (n+p) = \left(\frac{\pi^2}{12} + \log 4\right) n^2,$$

$$R = \left(\log 2 - \frac{1}{4} - \frac{\pi^2}{24}\right) n^2.$$

Enfin:

$$\sum i\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{2} n^2 \log n + (\log 2 + C - 1) n^2. \tag{22}$$

17. On peut comparer les formules (20) et (22) à la suivante:

$$\sum \frac{u}{v} = \frac{n(n+1)}{2} H(n) = \frac{1}{2} n^2 \log n + \frac{1}{2} C n^2. \tag{23}$$

Soustrayant (20) de (23) on a

$$\lim \cdot \frac{1}{n^2} \sum \left\{\frac{u}{v} - \left[\frac{u}{v}\right]\right\} = \frac{3}{4} - \frac{C}{2} = 0{,}46139\ldots$$

Tel est le *moyen excès d'une quantité commensurable quelconque sur le plus grand nombre entier qu'elle renferme.* De même,

$$\lim \cdot \frac{1}{n^2} \sum \left\{\frac{u}{v} - i\left(\frac{u}{v}\right)\right\} = 1 - \log 2 - \frac{C}{2} = 0{,}01824\ldots$$

Tel est le *moyen excès d'une quantité commensurable quelconque sur le nombre entier qui s'en rapproche le plus.* La petitesse du dernier résultat est due à ce que la différence $\frac{u}{v} - i\left(\frac{u}{v}\right)$ n'est pas *toujours positive.* Il y aurait à chercher la *moyenne valeur de la différence absolue* des deux quantités.

18. Enfin, les égalités (22) et (23) donnent

$$\lim \cdot \frac{1}{n^2} \sum \left\{ i\left(\frac{u}{v}\right) - \left[\frac{u}{v}\right] \right\} = \log 2 - \frac{1}{4} = 0{,}44314\ldots \tag{24}$$

Telle est la moyenne valeur de la différence $i\left(\frac{u}{v}\right) - \left[\frac{u}{v}\right]$, toujours égale à 0 ou à 1. Ayant pris deux entiers, au hasard, si on les divise l'un par l'autre, le second membre de (24) représente aussi la probabilité d'avoir $i\left(\frac{u}{v}\right) - \left[\frac{u}{v}\right] = 1$. En d'autres termes:

« Il y a environ 49 à parier, contre 39, que, dans une division quelconque, le quotient le plus approché est celui par défaut ».

On arrive au même résultat en employant un raisonnement analogue à celui qui nous a servi pour établir la formule (17). On trouve facilement que, si L et Λ sont les *fréquences* d'une certaine condition dans les séries

$$\left.\begin{array}{llll} f\left(\frac{n}{1}\right), & f\left(\frac{n}{2}\right), & f\left(\frac{n}{3}\right), \ldots & f\left(\frac{n}{n}\right), \\ f\left(\frac{1}{n}\right), & f\left(\frac{2}{n}\right), & f\left(\frac{3}{n}\right), \ldots & f\left(\frac{n}{n}\right), \end{array}\right\} \tag{25}$$

la probabilité que, en prenant u et v au hasard, $f\left(\frac{u}{v}\right)$ satisfasse à la même condition, est égale à la moyenne arithmétique des deux fréquences. Ainsi:

$$P = \frac{1}{2}(L + \Lambda). \tag{26}$$

On retrouve (17) comme cas particulier. Soit $f(x) = i(x)$. La condition à vérifier par chaque nombre $i(x)$ est d'être plus grand que la quantité x correspondante. Cela étant, il est clair que

$$nL = \sum_1^n \left\{ i\left(\frac{n}{p}\right) - \left[\frac{n}{p}\right] \right\} = \sum_1^n \left\{ \left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] \right\},$$

ou bien

$$L = \lim \cdot \frac{1}{n} \{ E_{2n} - 2E_n - n \} = \log 4 - 1.$$

D'ailleurs,

$$\Lambda = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$P = \frac{1}{2}\left(\log 4 - 1 + \frac{1}{2}\right) = \log 2 - \frac{1}{4}.$$

19. La formule (26) trouverá d'intéressantes applications dans une prochaine *Note* (***). Pour le moment, nous nous bornerons à résoudre une curieuse question de probabilités. On sait (*) que, pour $f(x) = x$, dans la première des séries (25), la fréquence des termes qui, réduits en décimales, ont r pour premier chiffre après la virgule, est

$$L = H\left(\frac{r+1}{10}\right) - H\left(\frac{r}{10}\right)$$

D'autre part, dans la seconde des séries (25), chaque chiffre est également fréquent. Donc, d'après (26), on peut affirmer que: « *Dans une division quelconque, la probabilité que le premier chiffre décimal soit r, est*

$$\frac{1}{20} + 5\int_0^1 \frac{1-\varphi}{1-\varphi^{10}}\,\varphi^{9+r}\,d\varphi \text{ ».}$$

En faisant usage des propriétés de la *fonction harmonique* (*), on arrive à ce curieux résultat:

« *La probabilité que, dans une division quelconque, le premier chiffre décimal soit un* 4 *ou un* 5 *est*

$$\frac{1}{60}\left\{6\pi\sqrt{25-10\sqrt{5}} - 19\right\} \text{ ».}$$

Plus généralement, la probabilité que le premier chiffre décimal soit inférieur à $5+m$, mais non à $5-m$, est

$$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi m}{10} - \frac{m}{10}\cdot\frac{75+m^2}{25-m^2}.$$

Pour $m = 1$, on obtient la proposition qui précède. Pour $m = 4$:

« *La probabilité que, dans une division quelconque, le premier chiffre décimal soit* 0 *ou* 9 *est*

$$\frac{1}{90}\left\{454 - 45\pi\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right\} \text{ »}$$

etc., etc.... D'ailleurs, il n'est pas difficile de généraliser ces propositions; car il est aisé de démontrer que: « *Dans une division quelconque, la probabilité que le $k^{ème}$ chiffre décimal soit r est*

$$\frac{1}{20} + \frac{10^k}{2}\int_0^1 \frac{1-\varphi}{1-\varphi^{10}}\,\varphi^{10^k-1+r}\,d\varphi \text{ ».}$$

Les petits chiffres sont toujours plus probables que les grands, et ils le sont d'autant plus qu'ils se trouvent plus près de la virgule; mais, à mesure qu'on s'en éloigne, tous les chiffres tendent à devenir également probables.

20. Revenons à la formule (18), et transformons-la au moyen des fonctions g, h, définies par les égalités

$$\sum_1^x g(x) = f(x), \qquad \sum_1^x h(x) = x f(x). \tag{27}$$

On sait (*) que

$$\sum p F(q_p) = \sum \frac{q_p(q_p+1)}{2} f(p), \qquad \sum p q_p f(q_p) = \sum \frac{q_p(q_p+1)}{2} h(p),$$

$$\sum p f(q_p) = \sum \frac{q_p(q_p+1)}{2} g(p), \qquad \sum f(q_p) = \sum q_p g(p).$$

Donc

$$\sum f\left[\frac{u}{v}\right] = \sum \frac{q_p(q_p+1)}{2} \psi(p) + (n+1) \sum q_p g(p) + \frac{n(n-1)}{2} f(0),$$

en posant

$$\psi(x) = f(x) - h(x) - g(x).$$

Or, les relations (27) donnent

$$h(x) = f(x) + (x-1) g(x).$$

Par suite:

$$\psi(x) = -x g(x).$$

Enfin:

$$\left.\begin{aligned} \sum f\left[\frac{u}{v}\right] = (n+1) \sum q_p g(p) - \frac{1}{2} \sum p q_p^2 g(p) - \\ - \frac{1}{2} \sum p q_p g(p) + \frac{n(n-1)}{2} f(0), \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

formule facile à obtenir directement.

21. Par exemple, pour $g(x)=1$, on a $f(x)=x$, et les formules (18) et (28) coïncident. Si $g(x)=(-1)^{x+1}$, $f(x)$ est 1 ou 0, suivant que x est impair ou pair. En appelant P la probabilité pour que $\left[\frac{u}{v}\right]$ soit *impair*, la formule (28) donne immédiatement

$$n^2 P = (n+1) \sum (-1)^{p+1} q_p - \frac{1}{2} \sum (-1)^{p+1} p q_p^2 - \frac{1}{2} \sum (-1)^{p+1} p q_p,$$

c'est-à-dire:

$$P = \lim \cdot \frac{1}{n^2} \left\{ (n+1) n \log 2 - \frac{1}{2} n^2 \log 2 - \dots \right\} = \frac{1}{2} \log 2.$$

En général, toutes les fois que f est une fonction indicatrice, la formule (28) est plus commode que (18), parceque, dans la première, la fonction f ne dépend pas des quantités q.

22. D'après (19),

$$\left.\begin{aligned}\Sigma f\left[i\left(\frac{u}{v}\right)\right] &= \Sigma pF(q_p) + (n+1)\Sigma f(q_p) - \Sigma p q_p f(q_p) - \\ &- \Sigma\left[\frac{p+1}{2}\right]f(q_p) + \left\{(n+1) - \left[\frac{n+1}{2}\right]\right\}\left[\frac{n+1}{2}\right]f(0) + R,\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

où

$$R = (n+1)\Sigma g\left[i\left(\frac{n}{\alpha}\right)\right] - \Sigma \alpha i\left(\frac{n}{\alpha}\right) g\left[i\left(\frac{n}{\alpha}\right)\right] - \Sigma\left[\frac{\alpha+1}{2}\right] g\left[i\left(\frac{n}{\alpha}\right)\right], \quad (30)$$

en appelant α, β, γ,.... les nombres, *non supérieurs à* n, pour lesquels $\left[\frac{2n}{\alpha}\right]$, $\left[\frac{2n}{\beta}\right]$, $\left[\frac{2n}{\gamma}\right]$,... sont *impairs*. On calculera R à part, dans chaque cas.

23. Parmi les fractions $\frac{u}{v}$ considérons seulement celles qui se rapprochent plus du nombre entier immédiatement supérieur que de celui immédiatement inférieur, et distinguons par un accent les sommes correspondantes. Pour ces fractions, la différence $i\left(\frac{u}{v}\right) - \left[\frac{u}{v}\right]$, nulle dans tout autre cas, est égale à l'unité. Par suite

$$\Sigma' g\left[i\left(\frac{u}{v}\right)\right] = \Sigma\left\{f\left[i\left(\frac{u}{v}\right)\right] - f\left[\frac{u}{v}\right]\right\},$$

ou bien, en vertu des formules (18) et (29),

$$\Sigma' g\left[i\left(\frac{u}{v}\right)\right] = \Sigma p f(q_p) - \Sigma\left[\frac{p+1}{2}\right] f(q_p) + R, \quad (31)$$

en supposant $f(0) = 0$. De là on pourrait déduire la formule (24).

24. Du reste, les applications de la formule (31) sont extrêmement nombreuses. Bornons-nous à signaler la suivante. Soit $g(x) = 2x - 1$, et, par suite, $f(x) = x^2$. En observant que, d'après (24), le nombre asymptotique des fractions considérées est $\left(\log 2 - \frac{1}{4}\right)n^2$, on obtient

$$2\Sigma' i\left(\frac{u}{v}\right) - \left(\log 2 - \frac{1}{4}\right)n^2 = \frac{1}{2}\Sigma p q_p^2 - \frac{1}{2}\Sigma q_p^2 + \frac{1}{2}\Sigma q_{2p}^2 + R,$$

d'où:

$$\Sigma' i\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{4} n^2 \log n + \frac{n^2}{4}\left(\log 4 - 1 + 2C - \frac{5\pi^2}{24}\right) + \frac{1}{2} R.$$

Pour calculer R, la formule (30) donne, en se rappelant que le nombre asymptotique des quantités α est $(\log 4 - 1)n$,

$$R = (\log 4 - 1)n^2 - 2\sum \alpha q_\alpha^2 - 2\sum \alpha q_\alpha + 2n\sum q_\alpha - \frac{1}{2}\sum \alpha.$$

Faisant attention que $q_\alpha = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{2n}{\alpha}\right] - 1\right\}$, on trouve sans peine

$$R = \frac{n}{2}\sum_1^{2n}\left[\frac{2n}{p}\right] - \frac{n}{2}\sum_1^{2n}\left[\frac{2n}{p}\right](-1)^{\left[\frac{2n}{p}\right]} - \frac{1}{4}n^2 +$$
$$-\frac{1}{4}\sum_1^{2n} p\left[\frac{2n}{p}\right]^2 + \frac{1}{4}\sum_1^{2n} p\left[\frac{2n}{p}\right]^2(-1)^{\left[\frac{2n}{p}\right]}.$$

On voit que le calcul de R est ramené à la détermination des sommes habituelles. Nous n'irons pas plus loin, pour le moment, parceque les moyens ordinaires sont impuissants pour calculer asymptotiquement les sommes en question, avec l'approximation nécessaire. Il faudrait pouvoir déterminer les sommes

$$\sum q_p^3, \qquad \sum p^2 q_p^2,$$

jusqu'aux quantités de l'ordre de n^2, inclusivement, et la somme $\sum q_p^2$ jusqu'aux quantités de l'ordre de n, inclusivement. Nous reviendrons sur cette question, en cherchant des procédés d'approximation plus délicats. Une fois la question résolue, il sera facile de chercher, par les formules qui précèdent, la moyenne valeur de la différence absolue entre une quantité commensurable quelconque et le nombre entier le plus proche. On pourra résoudre une foule de questions analogues, en employant la formule *évidente*

$$\sum' f\left[i\left(\frac{u}{v}\right)\right] = \sum\left\{i\left(\frac{u}{v}\right) - \left[\frac{u}{v}\right]\right\} f\left(\frac{u}{v}\right),$$

qui est surtout utile dans les questions de probabilités, lorsque f est une fonction indicatrice, convenablement choisie.

25. On sait que, si

$$s(n) = f(a) + f(b) + f(c) + \cdots, \qquad S(n) = s(1) + s(2) + \cdots + s(n),$$

a, b, c,... étant tous les diviseurs de n, on a

$$S(n) = \left[\frac{n}{1}\right]f(1) + \left[\frac{n}{2}\right]f(2) + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]f(n).$$

De même

$$S(2n) = \left[\frac{2n}{1}\right]f(1) + \left[\frac{2n}{2}\right]f(2) + \cdots + \left[\frac{2n}{n}\right]f(n) + F(2n) - F(n).$$

Par soustraction:

$$\sum_1^n i\left(\frac{n}{p}\right)f(p) = S(2n) - S(n) - \{F(2n) - F(n)\}. \tag{32}$$

Cette formule donne beaucoup d'expressions moyennes importantes. Par exemple:

$$\sum_1^n i\left(\frac{n}{p}\right)\varphi(p) = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi^2}\right)n^2;$$

etc. Lorsque f est une fonction indicatrice, telle que λ, μ, $\lambda\mu$, etc...., la formule (32) permet de résoudre une foule de questions de probabilités. Quelquefois, il est utile de la transformer comme il suit:

$$\sum_1^n i\left(\frac{n}{p}\right)f(p) = \sum\left[\frac{n}{p} + \frac{1}{2}\right]f(p) - \{F(2n) - F(n)\} = \sum F\left[\frac{2n}{2p-1}\right] - \sum_{p=1}^{p=n} f(n+p).$$

De la même manière on trouve

$$\sum_1^n F\left[i\left(\frac{n}{p}\right)\right] = \sum F\left[\frac{n}{p} + \frac{1}{2}\right] - nF(1) = \sum\left[\frac{2n}{2p-1}\right]f(p) - nF(1); \tag{33}$$

etc., etc.

26. Toutes ces relations sont fort utiles. Ainsi la dernière, pour $f(x) = (-1)^{x+1}$, donne immédiatement la formule (6). Faisons, plus généralement, $F(x)$ égale à 1 ou à 0, suivant que le reste de la division de x, par le nombre fixe α, *est* ou *n'est pas* r. Au moyen de la formule (33) on obtient sans peine

$$L = -F(1) + \frac{2}{2r-1} - \frac{2}{2r+1} + \frac{2}{2(r+\alpha)-1} - \frac{2}{2(r+\alpha)+1} + \\ + \frac{2}{2(r+2\alpha)-1} - \cdots,$$

ou bien

$$L = -F(1) + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\eta} + \frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{1}{1+\eta} + \frac{1}{2+\varepsilon} - \frac{2}{2+\eta} + \cdots\right),$$

en posant

$$\varepsilon = \frac{2r-1}{2\alpha}, \qquad \eta = \frac{2r+1}{2\alpha}.$$

Enfin:

$$L = \frac{1}{\alpha}\{H(\eta-1) - H(\varepsilon-1)\} - F(1).$$

Telle est, dans la série $i\left(\frac{n}{1}\right)$, $i\left(\frac{n}{2}\right), \ldots, i\left(\frac{n}{n}\right)$, la fréquence des termes qui ont la forme $\mathfrak{M}\alpha + r$.

Dans la série $i\left(\frac{1}{n}\right), i\left(\frac{2}{n}\right), \cdots i\left(\frac{n}{n}\right)$, il est clair que la fréquence analogue est

$$\Lambda = \frac{1}{2} F(1),$$

en supposant r *différent de zéro*. Conséquemment:

« *La probabilité que le nombre entier le plus proche d'une quantité commensurable, prise au hasard, ait la forme* $\mathfrak{M}\alpha + r$, *est*

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-\varphi}{1-\varphi^\alpha}\varphi^{r-\frac{3}{2}}d\varphi,$$

pourvu que $r > 1$. *Si* $r = 1$, *il faut encore retrancher* $\frac{1}{4}$ ».

27. Soit P_r la probabilité dont il s'agit. On peut la laisser sous la forme

$$P_r = \frac{1}{2\alpha}\left\{H\left(\frac{2r+1}{2\alpha}\right) - H\left(\frac{2r-1}{2\alpha}\right)\right\} + \frac{2}{4r^2-1} - \frac{1}{4}F(1). \tag{34}$$

Cette formule est vraie pour $r = 1, 2, 3, \ldots, \alpha - 1$. Quelle est la valeur de P_0? Remarquons que

$$P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_{\alpha-1} = \frac{1}{2\alpha}\left\{H\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) - H\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\right\} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2\alpha - 1},$$

d'où

$$1 - P_0 = \frac{\pi}{2\alpha}\cot\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{1}{4}.$$

Telle est la *probabilité que le nombre entier le plus proche d'une quantité commensurable, prise au hasard, ne soit pas divisible par* α.

Enfin, si α est un nombre pair $2m$, supérieur à 2, la formule (34) donne

$$P_m = \frac{\pi}{4m}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4m}.$$

Par exemple, pour $m = 2$: « *La probabilité que le nombre entier le plus proche d'une quantité commensurable, prise au hasard, ait la forme* $4\mu + 2$, *est égale à*

$$\frac{\pi}{8}(\sqrt{2} - 1) = 0{,}1626\ldots »$$

De même, pour $m = 5$, on voit que: « *La probabilité que, dans une division quelconque, le quotient le plus approché se termine par un* 5 *est* $\frac{\pi}{20}\operatorname{tg} 9^\circ$ ».

28. Nous rappellerons, à titre de simple renseignement, que des fonctions assez étroitement liées avec notre fonction $i(x)$ sont fort connues en Analyse. Ainsi Riemann a imaginé une fonction $\rho(x)$, généralement égale à l'excès de x sur le plus proche entier, mais égale à zéro lorsque x est également éloigné des deux nombres entiers qui le comprennent. En d'autres termes:

$$\rho(x) = x - i(x) + \left| \begin{array}{l} 0, \text{ en général} \\ \frac{1}{2}, \text{ si } 2x \text{ est un entier impair.} \end{array} \right.$$

Lorsqu'on introduit cette fonction dans les recherches asymptotiques, on rencontre la *fonction de Riemann,* somme de la série

$$\frac{\rho(x)}{1^m} + \frac{\rho(2x)}{2^m} + \frac{\rho(3x)}{3^m} + \cdots$$

D'après la *série de Fourier,* il existe pour $\rho(x)$ une expression analytique, à savoir:

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\sin 2\pi x - \frac{1}{2}\sin 4\pi x + \frac{1}{3}\sin 6\pi x - \cdots\right\}.$$

Si x est une fraction, dont les deux termes ont été pris au hasard, on a vu que, en moyenne,

$$\rho(x) = 0{,}01824\ldots$$

Une autre fonction, extrêmement intéressante, a été imaginée par M. Tchébychew. C'est *la plus petite quantité* $\mathfrak{T}(x)$, *qu'il faut ajouter ou retrancher a x, pour obtenir un nombre entier.* $\mathfrak{T}(x)$ est donc la *valeur absolue* de $\rho(x)$, sauf pour x également éloigné des deux entiers qui le comprennent: dans ce cas $\mathfrak{T}(x) = \frac{1}{2}$, mais $\rho(x) = 0$, par convention. En d'autres termes:

$$\mathfrak{T}(x) = \{x - i(x)\}\,\{2[x] - 2i(x) + 1\}.$$

M. Tchébychew a donné cette curieuse formule

$$\frac{\mu(1)\mathfrak{T}(x)}{1^2} + \frac{\mu(3)\mathfrak{T}(3x)}{3^2} + \frac{\mu(5)\mathfrak{T}(5x)}{5^2} + \cdots = \frac{4}{\pi^2}\sin^2\pi x,$$

qui en engendre d'autres. Par exemple:

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\mu(p)\mathfrak{T}(px)}{p^2} = \frac{4}{\pi^2}\sin^4\pi x.$$

De même, *considérons les diviseurs de x, congrus avec* $\pm r$; $\left(\text{mod. } n,\ r \overline{\gtrless} \frac{n}{2}\right)$.

Soit $\varepsilon_r(x)$ *l'excès du nombre de ceux qui sont composés d'un nombre* pair *de facteurs premiers, inégaux, sur le nombre de ceux qui sont premiers, ou composés de facteurs premiers, inégaux, en nombre* impair. *Posons*

$$f(x) = \varepsilon_1(x) + 2\varepsilon_2(x) + 3\varepsilon_3(x) + \cdots$$

On a:

$$\frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{4} + \frac{f(3)}{9} + \cdots = \frac{2}{3} n \sin^4 \frac{\pi}{n}.$$

Nous reviendrons sur les séries de Riemann et de M. Tchébychew, pour en faire quelques applications asymptotiques. Nous démontrerons aussi que, en concevant x comme engendré par la division de deux entiers, pris au hasard, on a, en moyenne,

$$\mathfrak{T}(x) = \frac{1}{8} + \log \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 0{,}245782\ldots$$

(*) Voyez notre *Premier Mémoire d'Arithmétique.*

(**) Nous appelons ainsi toute fonction susceptible de prendre telle ou telle autre valeur constante, suivant que la variable appartient à tel ou tel système de nombres. Ces fonctions seront l'objet d'un article spécial, où nous étudierons aussi les *groupes de nombres.*

(***) *Sur la distribution des quantités commensurables.*

Sur le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres.

(*Par* Ernest Cesàro, *étudiant*, *à Torre Annunziata.*)

1. Soit $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$ le plus grand commun diviseur des nombres $x_1, x_2, \dots, x_m$. Pour évaluer la somme de toutes les quantités, analogues à $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$, lorsque chaque x varie, indépendamment des autres, depuis 1 jusqu'à n, on pourrait ordonner le résultat par rapport à $F(1)$, $F(2)$, $F(3), \dots$, en cherchant *combien de groupes de m nombres, égaux ou inégaux, non supérieurs à n, admettent p pour plus grand commun diviseur.* Mais il est plus facile d'imaginer une fonction f, telle que l'on ait

$$f(a) + f(b) + f(c) + \cdots = F(x), \tag{1}$$

$a, b, c, \dots$ étant tous les diviseurs de x, et d'ordonner la somme considérée par rapport à $f(1)$, $f(2)$, $f(3), \dots$ En effet, le coefficient de $f(p)$ exprimera *combien de groupes de m nombres, égaux ou inégaux, non supérieurs à n, admettent p pour diviseur commun,* que celui-ci soit ou non le plus grand. Or, puisque chaque x n'est susceptible que des valeurs p, $2p$, $3p, \dots$, $q_p p$, le coefficient cherché est q_p^m. Il en résulte

$$\sum F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = q_1^m f(1) + q_2^m f(2) + q_3^m f(3) + \cdots \tag{2}$$

À cette formule on peut (*) substituer la suivante:

$$\sum F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \psi(q_1) + (2^m - 1)\psi(q_2) + (3^m - 2^m)\psi(q_3) + \cdots, \tag{3}$$

pourvu que l'on pose

$$\psi(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(x).$$

Les formules (2) et (3) sont fort utiles dans les recherches asymptotiques, relatives au plus grand commun diviseur de m nombres. Mais l'on verra plus loin pourquoi nous ne nous y arrêtons pas.

2. On peut écrire

$$q_p^m = \frac{n^m}{p^m} - \varepsilon m \frac{n^{m-1}}{p^{m-1}},$$

ε étant une fraction proprement dite. Le second membre de (2), divisé par n^m, prend donc la forme

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{f(p)}{p^m} - \frac{\varepsilon m}{n} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{f(p)}{p^{m-1}}. \tag{4}$$

Si la fonction $f(x)$ reste entre deux limites finies, lorsque x varie de 1 à $+\infty$, il est clair que la somme $\sum_1^n \frac{f(p)}{p^r}$ n'est pas d'un ordre supérieur à celui de $\sum_1^n \frac{1}{p^r}$. Lors, donc, que r est supérieur à l'unité, la somme en question est de l'ordre des constantes, au moins. Dans le cas de $r = 1$, elle n'est pas d'un ordre supérieur à celui de $\log n$, et son rapport à n tend, par conséquent, vers zéro. Il en résulte que, pour n indéfiniment croissant, l'expression (4) tend vers la limite de son premier terme, pourvu que $m \gtreqless 2$. Conséquemment,

$$\lim \cdot \frac{1}{n^m} \sum F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{f(p)}{p^m}. \tag{5}$$

3. Pour appliquer la formule (5), il faudrait chercher, chaque fois, la fonction f, qui dépend de la fonction donnée F par la relation (1); mais nous pouvons nous affranchir de cela, en observant que, d'après les principes exposés dans le *Premier Mémoire,* l'identité (1) donne lieu à la formule

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^m} \cdot \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{f(p)}{p^m} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{F(p)}{p^m}.$$

Par suite:

$$\lim \cdot \frac{1}{n^m} \sum F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) = \frac{1}{S_m} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{F(p)}{p^m}. \tag{6}$$

4. La formule (6) est d'une extrême souplesse pour la résolution des questions de probabilités, concernant le plus grand commun diviseur de m nombres, pris au hasard. Veut-on savoir, par exemple, quelle probabilité il y a pour que ce diviseur soit précisément un nombre donné k? Faisons $F(x) = 1$,

pour $x = k$, mais $F(x) = 0$, en général. La formule (6) donne immédiatement

$$P_k = \frac{1}{k^m s_m} \quad (**).$$

En particulier, pour $k = 1$ et $m = 3$:

« *La probabilité que trois nombres, pris au hasard, soient premiers entre eux, est* 0,83190... », etc., etc....

5. Si nous donnions d'autres applications de la formule (6), cette *Note* ferait, en quelque sorte, double emploi avec une des *Notes* qui précèdent. En effet, d'après la formule (19) de notre article « *Le plus grand diviseur carré* », on a:

$$\lim \cdot \frac{1}{n^m} \cdot \sum F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) = \lim \cdot \frac{F\left(d_m^{\frac{1}{m}}(1)\right) + F\left(d_m^{\frac{1}{m}}(2)\right) + \cdots + F\left(d_m^{\frac{1}{m}}(n)\right)}{n}.$$

Par conséquent:

« *La probabilité que la* $m^{ème}$ *racine de la plus haute puissance* $m^{ème}$, *qui divise un nombre entier pris au hasard, appartienne à un certain système de nombres, ne diffère pas de la probabilité que le plus grand commun diviseur de* m *entiers, pris au hasard, appartienne au même système* ».

Ailleurs (**), nous avons donné l'explication, extrêmement simple, de ce fait curieux.

6. Il n'y aurait donc à faire autre chose, pour terminer cet article, que de transcrire l'article cité, en remplaçant partout la fonction $d_m^{\frac{1}{m}}(x)$ par $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Aussi, nous bornerons-nous à énoncer quelques propositions:

1.° « *La probabilité que le plus grand commun diviseur de* m *nombres, pris au hasard, soit un carré, est* $\frac{s_{2m}}{s_m}$ ».

2.° « *Il y a* 7 *à parier, contre* 3, *que le plus grand commun diviseur de deux nombres, pris au hasard, est composé d'un nombre pair, plutôt que d'un nombre impair de facteurs premiers, égaux ou inégaux* ».

3.° « *Il est trois fois plus probable que le plus grand commun diviseur de deux entiers, pris au hasard, soit impair plutôt que pair* ».

4.° *a) Il y a* 18 *à parier, contre* 7, *que le plus grand commun diviseur de deux entiers, pris au hasard, se termine par un chiffre impair, autre que* 5.

b) Il y a 3 *à parier, contre* 97, *qu'il se termine par* 5; *et* 1 *seulement, contre* 99, *qu'il se termine par* 0.

c) Il y a 6 *à parier, contre* 19, *qu'il se termine par un chiffre pair, différent de* 0.

5.° On a, en moyenne,

$$\lambda(x,\ y) = \frac{2}{5}, \qquad \lambda(x,\ y)\mu(x,\ y) = \frac{90}{\pi^4},$$

$$\mu(x,\ y) = \frac{36}{\pi^4}, \qquad \mu(x,\ y)\mathfrak{T}\{(x,\ y)\varepsilon\} = \frac{24}{\pi^4}\sin^4\pi\varepsilon,$$

etc., etc....

(*) Voyez *Premier Mémoire d'Arithmétique.*
(**) MATHESIS, 1884: *Probabilité de certains faits arithmétiques.*

Sur la distribution des quantités commensurables.

(*Par* Ernest Cesàro, *étudiant, à Torre Annunziata.*)

1. La question que nous nous proposons de résoudre ne présenterait aucune difficulté, si nous ne voulions considérer les valeurs commensurables qu'à un point de vue entièrement abstrait, c'est-à-dire sans tenir compte de la manière dont elles sont engendrées. Supposons, en effet, que, ayant une valeur commensurable z, il faille ajouter dz, nécessairement commensurable, pour obtenir la valeur commensurable, *immédiatement* supérieure. Il est clair que: 1° $z+dz$ sera commensurable; 2° entre $z+dz$ et $z+2dz$ il n'y aura pas de valeurs commensurables; car s'il y en avait une, en en retranchant dz on obtiendrait une valeur commensurable, comprise entre z et $z+dz$, ce qui est contraire à l'hypothèse. La distribution des quantités commensurables, considérées indépendamment de leur génération, est donc *uniforme*. Mais l'on peut demander que l'on tienne compte de la manière dont ces valeurs ont été engendrées. Imaginons, par exemple, que, ayant porté, sur une droite indéfinie, à partir d'un point fixe, et dans le même sens, toutes les longueurs *entières*, on divise chaque intervalle en n parties égales, et supposons que l'on attribue successivement à n les valeurs 2, 3, 4,..., jusqu'à l'infini. On vient ainsi à représenter, sur la droite, *toutes* les quantités commensurables. Il est clair que, dans chaque intervalle, la distribution se reproduit d'une manière identique: il suffit donc de rechercher ce qui se passe dans l'intervalle $\overline{01}$. Or, par la division de cet intervalle en n parties égales, après les divisions successives en 2, 3,...; $n-1$ parties, les seuls points *nouveaux* que l'on introduit correspondent aux $\varphi(n)$ fractions irréductibles, de dénominateur n, inférieures à l'unité. Le nombre total des points de division devient donc

$$\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\cdots+\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}n^2 \quad (*).$$

Cela étant, prenons, entre 0 et 1, une quantité ε, si petite qu'on le veut, mais *fixe* et *différente de zéro.* Si $\varphi(n, n')$ est le nombre des entiers, premiers avec n et non supérieurs à n', il est clair que, parmi les $\varphi(n)$ fractions irréductibles, considérées plus haut, il y en a $\varphi(n, n\varepsilon)$ *non supérieures à* ε. Or, on sait que

$$\varphi(n, n\varepsilon) = \left[\frac{n\varepsilon}{a}\right]\mu(a) + \left[\frac{n\varepsilon}{b}\right]\mu(b) + \left[\frac{n\varepsilon}{c}\right]\mu(c) + \cdots,$$

a, b, c,... étant tous les diviseurs de n. Par suite, si l'on pose

$$f(x) = [\varepsilon] + [2\varepsilon] + [3\varepsilon] + \cdots + [x\varepsilon],$$

le nombre des points de division, compris dans l'intervalle $\overline{0\varepsilon}$, est

$$\sum_{p=2}^{p=n}\varphi(p, p\varepsilon) = \mu(1)f(q_1) + \mu(2)f(q_2) + \mu(3)f(q_3) + \cdots.$$

Or, on peut écrire

$$f(x) = \frac{\varepsilon}{2}x^2,$$

en négligeant les quantités de l'ordre de x. On en déduit, comme d'habitude, l'égalité asymptotique

$$\sum_{p=2}^{p=n}\varphi(p, p\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}n^2\sum_1^\infty\frac{\mu(p)}{p^2} = \varepsilon\cdot\frac{3}{\pi^2}n^2,$$

où la quantité négligée n'est pas d'un ordre supérieur à celui de $n\log n$. La probabilité qu'un point de division tombe dans l'intervalle $\overline{0\varepsilon}$ est donc ε. Par conséquent, la *densité* des valeurs commensurables est *constante* dans tout l'intervalle $\overline{01}$, *les points extrêmes exceptés.* En effet, les raisonnements qui précèdent ne subsisteraient plus si la quantité ε était nulle ou *indéfiniment petite;* si, par exemple, elle tendait à zéro de manière que $\varepsilon n = 1$. Pour $\varepsilon = 0$, remarquons que le point de division le plus proche de 0 est $\frac{1}{n}$. Après $\frac{1}{n}$, il vient, certainement, le point $\frac{1}{n-1}$, séparé de $\frac{1}{n}$ par un intervalle de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$, dont le rapport à l'intervalle $\overline{0\frac{1}{n}}$ tend, par conséquent, vers zéro. En conséquence, si la densité est représentée par 1 dans tout un intervalle, elle est 0 aux points extrêmes, mais seulement en ces points; car, si petit que l'on prenne ε, du moment que l'on fixe sa valeur, la probabilité qu'un point de division tombe à l'intérieur de $\overline{0\varepsilon}$ ne cesse d'être ε. En d'autres termes, la densité se présente ici sous forme d'une fonction, admettant une discontinuité ordinaire pour toutes les valeurs entières de la variable. Mais c'est exclusivement au point de vue *arithmétique* que nous voulons étudier la distribution des quantités commensurables. Aussi, dans tout ce que nous allons dire, nous supposerons constamment que ces quantités soient engendrées par la *division de deux entiers, pris au hasard.*

2. Dans notre article « *Sur les éventualités de la division arithmétique* », nous avons fait voir que, *si* L et Λ *sont les fréquences d'une propriété dans les séries*

$$\left.\begin{array}{llll} f\left(\frac{n}{1}\right), & f\left(\frac{n}{2}\right), & f\left(\frac{n}{3}\right), \cdots & f\left(\frac{n}{n}\right), \\ f\left(\frac{1}{n}\right), & f\left(\frac{2}{n}\right), & f\left(\frac{3}{n}\right), \cdots & f\left(\frac{n}{n}\right), \end{array}\right\} \tag{1}$$

la probabilité que, en prenant x et y au hasard, $f\left(\frac{x}{y}\right)$ jouisse de la propriéte considérée, est

$$P = \frac{L + \Lambda}{2}. \tag{2}$$

Cela étant, soit $h(x)$ une fonction généralement nulle, mais égale à l'unité pour $x = k$. On a (*):

$$\sum_{p=1}^{p=n} h(q_p) = \sum_{p=1}^{p=n} q_p\, g(p),$$

pourvu que

$$g(1) + g(2) + g(3) + \cdots + g(x) = h(x),$$

d'où:

$$g(x) = \left| \begin{array}{l} 0, \text{ en général,} \\ 1, \text{ pour } x = k, \\ -1, \text{ pour } x = k + 1. \end{array} \right.$$

Donc

$$\sum h(q_p) = q_k - q_{k+1}.$$

Par conséquent, si $f(x) = [x]$ dans les séries (1), la fréquence de la valeur k dans la première de ces séries est

$$L = \lim \cdot \frac{1}{n} \sum h(q_p) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Si k n'est pas nul, la fréquence de k dans la seconde des séries (25) est évidemment $\Lambda = 0$. En conséquence: « *la probabilité que k soit le quotient par* *défaut, dans une division quelconque, est* $\frac{1}{2k(k+1)}$ ». De même, on a

$$\sum h\left[i\left(\frac{n}{p}\right)\right]=\sum h\left[\frac{n}{p}+\frac{1}{2}\right]-nh(1)=\sum\left[\frac{2n}{2p-1}\right]g(p)-nh(1),$$

d'où, pour $f(x)=i(x)$ dans la première des séries (1),

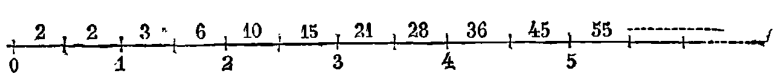
$$L=\frac{2}{2k-1}-\frac{2}{2k+1}-h(1).$$

D'autre part, $\Lambda=\frac{h(1)}{2}\cdot$ En conséquence:

$$P=\frac{2}{4k^2-1}-\frac{h(1)}{4}.$$

Ainsi: « *la probabilité que k soit l'entier le plus proche d'une quantité commensurable, prise au hasard, est* $\frac{2}{4k^2-1}$, *sauf pour* $k=1$, $k=0$. *Dans ces cas, la probabilité est* $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{4}$ ».

3. D'après ce qui vient d'être dit, il est facile de s'imaginer, sommairement, la *distribution* des quantités commensurables dans le système des quantités réelles, positives. En réunissant les résultats obtenus, on trouve qu'elle peut être figurée comme ci-après:



Les nombres écrits à côté des demi-intervalles sont, à partir du troisième, les nombres triangulaires. Ils sont inversement proportionnels aux nombres des quantités commensurables, comprises dans les demi-intervalles respectifs. Il est bon de rappeler ici, une fois pour toutes, que nous considérons les quantités commensurables comme obtenues en prenant, au hasard, deux entiers, et en les divisant l'un par l'autre.

4. Pour compléter l'étude de la distribution, qui nous occupe, cherchons d'abord la probabilité qu'une quantité commensurable quelconque soit comprise entre $k-\varepsilon$ et $k-\varepsilon+1$, ε étant une fraction proprement dite, et k un nombre entier. Il suffit de faire $f(x)=[x+\varepsilon]$ dans les séries (1), en continuant à considérer les mêmes fonctions g et h. On trouve sans peine

$$\sum_1^n h\left[\frac{n}{p}+\varepsilon\right]=\sum h\left[\frac{n}{p}+\varepsilon\right]-\frac{n\varepsilon}{1-\varepsilon}h(1)=\sum\left[\frac{n}{p-\varepsilon}\right]g(p)-\frac{n\varepsilon}{1-\varepsilon}h(1),$$

d'où, en posant $k - \varepsilon = z$,

$$L = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} h(1).$$

D'autre part $\Lambda = \varepsilon h(1)$. En conséquence:

$$P = \frac{1}{2z(z+1)} - \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon} \cdot \frac{h(1)}{2}.$$

Telle est la probabilité qu'une quantité commensurable quelconque soit comprise entre z et $z+1$. La *probabilité qu'elle ne surpasse pas z* est donc

$$\Pi(z) = 1 - \frac{1}{2z},$$

pourvu que z ne soit pas inférieur à 1. Enfin, la probabilité qu'elle soit comprise entre z et $z + dz$ est donnée par

$$\Pi(z + dz) - \Pi(z) = \frac{dz}{2 \cdot z^2}.$$

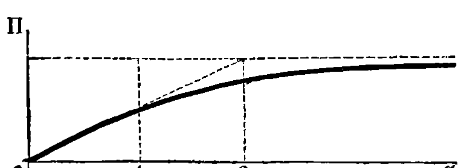
On peut énoncer ce résultat en disant que: « *La densité des quantités commensurables, autour de z, est inversement proportionnelle à z^2* ». En représentant par $D(z)$ une fonction proportionnelle à la densité des quantités commensurables, autour de z, on peut donc écrire

$$D(z) = \frac{1}{z^2}.$$

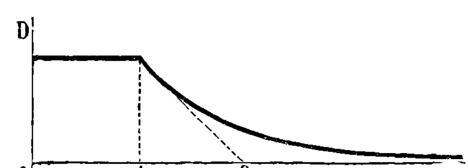
Dans le cas de $z < 1$, on trouve immédiatement

$$\Pi(z) = \frac{z}{2}, \qquad D(z) = 1.$$

La variation des *probabilités* et des *densités* peut être représentée par les diagrammes suivants:



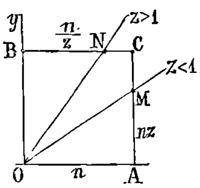
(Diagramme des *probabilités*.)



(Diagramme des *densités proportionnelles*.)

5. Nous avons tenu à montrer que les propositions précédentes pouvaient être déduites des formules démontrées dans la Note: *Sur les éventualités de la*

division arithmétique; mais il est possible de les établir simplement, par une voie toute différente. Dans ce but, prenons, au hasard, deux entiers x et y. Nous supposerons, d'abord, que x soit pris parmi les nombres entiers compris entre 0 et n, et nous devrons alors adopter pour y le même champ de variation. Nous ferons, ensuite, augmenter n indéfiniment. Or, si l'on considère x et y comme les coordonnées d'un point du plan, prendre au hasard x et y c'est prendre au hasard un point à coordonnées entières parmi tous les points d'un carré de côté n, indéfiniment grand. La distribution des points à coordonnées entières étant *uniforme* dans le plan, il est clair que le rapport entre les nombres de ces points, compris à l'intérieur de deux aires indéfiniment grandes est le même que le rapport des deux aires. Par



suite, si l'on veut, par exemple, la probabilité que $\frac{y}{x}$ soit moindre que z, $(z<1)$, le problème se réduit à chercher le rapport de l'aire du triangle OAM, comprenant les *points favorables,* à l'aire totale du carré. Si $z>1$, l'*aire favorable* est celle du trapèze $OACN$. On retrouve ainsi les formules

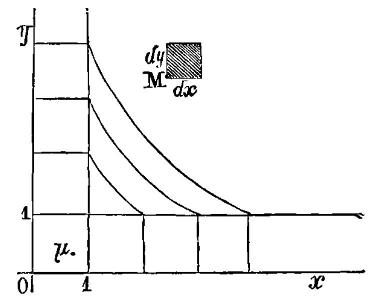
$$\Pi(z)=\frac{z}{2}, \qquad \Pi(z)=1-\frac{1}{2z},$$

et les densités *proportionelles* seront, si l'on veut,

$$D(z)=1, \qquad D(z)=\frac{1}{z^2}. \tag{3}$$

6. Chaque quantité commensurable z, obtenue par la division de *deux* entiers, pris au hasard, peut être représentée, sur une droite, par un point, situé à la distance z d'un point fixe de la droite. Remarquons que, inversement, tout point de celle-ci représente une infinité de quantités commensurables, ou n'en représente aucune. Ayant, pour ainsi dire, *condensée* sur une droite la représentation des quantités commensurables, nous pouvons, d'une manière analogue, passer à l'étude des systèmes de deux quantités commensurables. Pour abréger le discours, nous dirons que le nombre complexe $z=x+y\sqrt{-1}$ est commensurable, lorsque x et y sont commensurables. Quelle est, dès lors, la distribution des nombres commensurables dans le plan? Il est clair que la densité de ces nombres, autour de z, c'est-à-dire dans le rectangle infinitésimal $dx\,dy$, est $D(x)\,D(y)$. Elle est donc inversement proportionnelle aux carrés des coordonnées, supérieures à l'unité. Ayant conduit les parallèles aux axes, à la distance 1, on partage la portion du plan, contenant les points à coordonnées

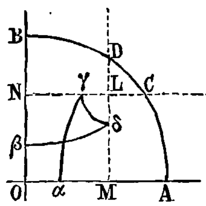
positives, en *quatre* régions, comme le montre la figure ci-contre. Dans la région *limitée*, la densité est 1: dans les régions illimitées suivant un seul axe, elle est représentée par l'inverse du carré de la coordonnée correspondante à cet axe. Enfin, dans la région *doublement illimitée*, la densité est $\frac{1}{x^2 y^2}$. Nous avons tracé, sur la même figure, des *lignes isobariques*, ou lieux des *points à densité constante:* elles sont constituées par des arcs d'hyperboles équilatères, asymptotiques aux axes, dans la région doublement illimitée, et par des segments rectilignes, parallèles aux axes, dans les deux régions simplement illimitées. Quant à la région limitée, elle est partout isobarique.



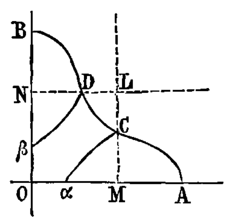
7. Le principe précédemment employé pour la recherche directe des formules (3) peut encore s'appliquer ici, et même à des *aires finies*, parceque la quotité des nombres commensurables, contenus dans une aire finie, est infinie: seulement, il faut tenir compte de la densité. Dans ce but, à un point quelconque M faisons correspondre un point μ, dont chaque coordonnée soit *directement* ou *inversement* égale à la coordonnée correspondante de M, suivant que celle-ci est *inférieure* ou *supérieure* à l'unité. De cette façon, le point μ est *toujours* situé dans la région limitée. Il est facile de s'assurer que le rapport des éléments superficiels, pris autour de μ et de M, est proportionnel à la densité des quantités commensurables, autour de M. Si M et μ décrivent des aires S et σ, la probabilité qu'un nombre commensurable, pris au hasard, soit contenu par S est $\frac{1}{4}\sigma$. En vertu de cette transformation nous pouvons, étant donnée une aire S quelconque, en *rapprocher les points commensurables*, jusqu'à ce que la densité devienne 1. En d'autres termes, nous pouvons *rendre isobarique* toute aire qui ne l'est pas. Observons que chaque région a pour transformée la région isobarique, d'où il résulte qu'un nombre commensurable peut tomber, avec une égale probabilité, dans une quelconque des quatre régions, ce qui est évident.

8. Les considérations qui précèdent nous permettent de trouver la *probabilité pour qu'une fonction quelconque de deux quantités commensurables, prises au hasard, satisfasse à une certaine condition.* Supposons, par exemple, qu'un nombre commensurable, pris au hasard, doive tomber à l'intérieur de l'aire limitée par les axes et par la ligne $ABCD$, figurée ci-après (fig. 1).

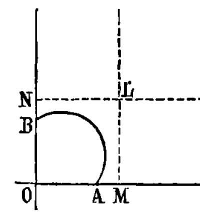
Pour fixer les idées, nous supposerons que la ligne ait la forme générale, indiquée par la figure, et qu'elle soit symétrique par rapport aux axes, de sorte que son équation est, indifféremment, $y = f(x)$ ou $x = f(y)$. La ligne $ABCD$ se transforme en $\alpha\beta\gamma\delta$, et il est clair que les figures LCD, $LMAC$, $LNBD$,



(Fig. 1.)



(Fig. 2.)



(Fig. 3.)

$OLMN$, qui constituent $OABCD$, se transforment respectivement en $L\gamma\delta$, $LM\alpha\gamma$, $LN\beta\delta$, $OLMN$. La moyenne arithmétique des aires de ces dernières figures nous donnera la probabilité cherchée. On trouve, moyennant quelques transformations simples,

$$P = 1 - \frac{1}{4f(1)} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} - \frac{1}{4}\int_1^{f(1)} \frac{dx}{x^2 f(x)}. \tag{4}$$

Lorsque $ABCD$ ne traverse pas la région doublement illimitée, c'est-à-dire si elle se trouve dans un des cas indiqués par les fig. 2 et 3, on obtient ces deux autres formules:

$$P = \frac{3}{4}f(1) - \frac{1}{4}\int_1^{f(1)} f(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{f(1)} \frac{dx}{f(x)}, \tag{5}$$

$$P = \frac{1}{4}\int_0^{f(0)} f(x)\,dx. \tag{6}$$

Les deux premières donnent la valeur remarquable

$$P = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}, \tag{7}$$

dans le cas où la ligne passe per L. Par exemple, lorsque la ligne est l'hyperbole équilatère représentée par $xy = 1$, on a $f(x) = \frac{1}{x}$; puis la formule (7) donne $P = \frac{1}{2}$, ce qui doit être, comme on peut le voir *a priori*. Plus généralement, si l'équation de $ABCD$ est $xy = \lambda^2$, les formules (4), (5), donnent

$$P_\lambda = 1 - \frac{1 + \log\lambda}{2\lambda^2}, \quad (\lambda \geqq 1); \qquad P_\lambda = (1 - \log\lambda)\frac{\lambda^2}{2}, \quad (\lambda \leqq 1). \tag{8}$$

Telles sont les expressions de la *probabilité que, ayant pris, au hasard, deux quantités commensurables, leur produit soit inférieur à* λ^2. Si $ABCD$ est une droite, de sorte que $f(x) = \lambda - x$, on obtient

$$\left.\begin{array}{l} P_\lambda = 1 - \frac{1}{4(\lambda-1)} - \log\sqrt{\lambda} + \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)\log\sqrt{\lambda - 1}, \quad (\lambda \geqq 2); \\ P_\lambda = -\frac{1}{8}\lambda^2 + \lambda - \frac{3}{4} - \log\sqrt{\lambda}, \quad (2 \gtreqless \lambda \geqq 1); \qquad P_\lambda = \frac{1}{8}\lambda^2, \quad (1 \gtreqless \lambda). \end{array}\right\} \quad (9)$$

Telles sont les expressions de la *probabilité que la somme de deux quantités commensurables, prises au hasard, soit moindre que* λ. Les deux premières formules concordent pour $\lambda = 2$; les deux dernières, pour $\lambda = 1$. Elles donnent:

$$P_2 = \frac{1}{4}(3 - \log 4) = 0{,}4034\ldots; \qquad P_1 = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Comme dernier exemple, soit $f(x) = \sqrt{\lambda^2 - x^2}$. Si l'on pose $\sin\omega = \frac{1}{\lambda}$, on trouve

$$\left.\begin{array}{ll} P = 1 - \frac{1}{2}(\omega + \sin\omega\cos\omega), \quad (\lambda \geqq \sqrt{2}); & \\ P = \frac{4}{16}\{(4\omega - \pi)\cot^2\omega + 12\cot\omega + 12\omega - 5\pi\}, & P = \frac{\pi\lambda^2}{16}, \\ (\sqrt{2} \gtreqless \lambda \geqq 1), & (1 \gtreqless \lambda). \end{array}\right\} \quad (10)$$

Ainsi, pour $\lambda = \sqrt{2}$, les deux premières formules donnent

$$P = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{8},$$

c'est-à-dire que: « *Il y a* 9 *à parier, contre* 5 *environ, que la somme des carrés de deux quantités commensurables, prises au hasard, est supérieure à* 2 ».

9. À leur tour, les formules (8), (9), (10), permettent de résoudre une foule d'autres questions de probabilités. Par exemple, d'après (8), la probabilité que xy soit compris entre deux nombres entiers consécutifs, n et $n+1$, est

$$p_n = P_{\sqrt{n+1}} - P_{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\log n}{n} - \frac{\log(n+1)}{n+1}\right).$$

Il en résulte

$$p_1 + p_3 + p_5 + \cdots = \log\sqrt{2} + \frac{s}{4},$$

en désignant par s la somme de la série

$$\frac{\log 1}{1} - \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} - \frac{\log 4}{4} + \cdots$$

Cela étant, il est clair que, si l'on fait

$$S_n = \frac{\log 1}{1} + \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \cdots + \frac{\log n}{n},$$

on a, en supposant n pair,

$$s_n = S_n - \left(\frac{\log 2}{1} + \frac{\log 4}{2} + \cdots + \frac{\log n}{\frac{n}{2}}\right) = S_n - S_{\frac{n}{2}} - H\left(\frac{n}{2}\right)\cdot \log 2.$$

Or, on sait que

$$S_n = A + \frac{1}{2}(\log n)^2 + R_n,$$

A étant une constante, et R_n une fonction de n, qui tend à zéro pour n infini. On en déduit

$$s_n = \frac{1}{2}(\log 2)^2 - \left\{H\left(\frac{n}{2}\right) - \log\frac{n}{2}\right\}\log 2 + R_n - R_{\frac{n}{2}};$$

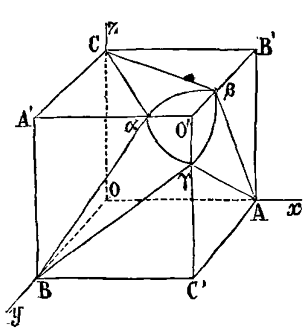
puis, pour n infini,

$$s = \frac{1}{2}(\log 2)^2 - C\log 2.$$

Conséquemment: « *la probabilité que le plus grand nombre entier, contenu dans le produit de deux quantités commensurables, prises au hasard, soit impair, est*

$$\frac{1}{2}(\log\sqrt{2} + 2 - C)\log\sqrt{2} = 0{,}30660\ldots \text{»}.$$

10. Avec la même facilité on résout les questions relatives à des systèmes de *trois* quantités commensurables. Si l'on veut savoir, par exemple, quelle probabilité il y a pour que le produit de trois quantités commensurables, prises au hasard, soit inférieur à une quantité donnée λ^3, on ramène immédiatement la question à la cubature de certains volumes. Soit, pour fixer les idées, $\lambda > 1$. La surface représentée par $xyz = \lambda^3$ traverse sept des huit régions de l'espace, qu'il y a lieu de considérer. Le volume compris entre cette surface et les plans coordonnés se trouve divisé en huit parties. Une d'elles est la *région isobarique*, dont le volume est 1. La partie limitée par la portion de la surface, qui se trouve dans la région triplement illimitée, se transforme en un volume $O'\alpha\beta\gamma$, que nous appellerons u. Un



calcul simple donne

$$u = 1 - \frac{2 + 6\log\lambda + 9(\log\lambda)^2}{2\lambda^3}.$$

Les portions de surface, contenues dans les trois régions doublement illimitées, se transforment dans les paraboloïdes hyperboliques $BC\beta\gamma$, $CA\gamma\alpha$, $AB\alpha\beta$, limitant, dans le cube isobarique, du côté des arêtes $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$, trois volumes égaux à v. On trouve

$$v = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 + 2\log\lambda}{\lambda^3}.$$

Enfin, les portions de surface, contenues dans les régions simplement illimitées, ont pour transformées les paraboloïdes hyperboliques $BC\alpha$, $CA\beta$, $AB\gamma$, limitant, du côté des arêtes OA, OB, OC, trois volumes isobariques, égaux à w. On trouve

$$w = 1 - \frac{1}{4\lambda^3}.$$

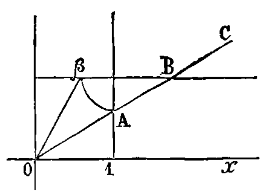
Donc:

$$P = \frac{1}{8}(1 + 3v + 3w + u) = 1 - \frac{8 + 15\log\lambda + 9(\log\lambda)^2}{16\lambda^3}.$$

Par exemple: « *La probabilité que le produit de trois quantités commensurables, prises au hasard, surpasse le nombre e, est* $\frac{2}{e^3}$ ».

11. En général, on peut étudier ces questions dans un espace à k dimensions, dont on partage la partie positive en régions, moyennant les plans $x_1 = 1$, $x_2 = 1, \ldots$ $x_k = 1$, de sorte que, dans une région r fois illimitée, r des coordonnées d'un point quelconque sont supérieures à l'unité. Le nombre de ces régions est $C_{k,r}$, et le nombre total des régions est 2^k. La densité des nombres, ($k - 1$ fois complexes), commensurables, varie toujours en raison inverse du produit carré des coordonnées supérieures à l'unité. Cette idée des *transformations arithmétiques des espaces* mérite d'être amplement développée. Outre ses applications à des questions de *probabilités* et à des questions de *moyennes*, qui se ramènent toujours à des déterminations barycentriques, elle est surtout utile pour l'étude des *distributions*, qu'il s'agisse ou non de quantités commensurables. Pour cela, elle doit s'aider du principe de la *condensation des espaces*. La droite sur laquelle nous avons commencé à étudier les quantités commensurables nous a offert un premier exemple de condensation. Nous en avons déduit des espaces à densité variable, et, en particulier, un plan, qui est la condensation d'une figure d'un espace à *quatre* dimensions.

Ce plan pourra subir une nouvelle condensation, et ainsi de suite. L'utilité de ces condensations est visible. D'abord des questions, relatives à des espaces inabordables par la pensée, sont reconduites dans les espaces réels. D'autre part, les quantités arithmétiques, représentées géométriquement, sont répandues d'une manière discontinue, de sorte qu'on ne peut leur appliquer les formules du Calcul intégral. Après condensation, cet inconvénient disparaît, car les points représentatifs se rapprochent, coïncident, et créent ainsi un espace à densité variable, non continu, mais à discontinuités infinitésimales. Pour montrer un exemple de condensations successives, reprenons le plan, sur lequel nous avons représenté les nombres complexes commensurables. Si x et y sont deux quantités commensurables, prises au hasard, pour calculer la probabilité que $\frac{y}{x}$ soit moindre que z, il faut transformer d'abord la droite OAC, de manière à rendre isobarique l'aire COx. On voit immédiatement que OA, AB, BC se transforment en OA, $A\beta$, βO. Par le calcul habituel on trouve



$$\Pi(z) = \frac{z}{4}(2 - \log z) \qquad (z < 1).$$

Si $z > 1$, il est clair que $\Pi(z)$ s'obtient en retranchant de 1 l'expression précédente, après y avoir changé z en $\frac{1}{z}\cdot$ Par conséquent

$$\Pi(z) = 1 - \frac{2 + \log z}{4z} \qquad (z > 1).$$

La représentation étant ainsi condensée sur une droite, la densité en chaque point sera donnée par une des deux formules qui suivent:

$$D(z) = 1 - \log z, \qquad D(z) = \frac{1 + \log z}{z^2}.$$

Par extension au plan, nous pourrons résoudre, avec la plus grande facilité, une foule de questions, relatives à *huit* nombres entiers, pris au hasard, c'est-à-dire des questions, qui, par les procédés habituels, exigeraient une représentation dans un espace à *huit* dimensions.

12. Dans la formation d'une quantité commensurable, au moyen de deux nombres entiers x et y, on a accordé, jusqu'ici, pleine liberté de variation aux deux entiers. Mais il peut se faire que, par la manière même dont on pose la question, les deux champs de variation viennent à se limiter mutuellement,

Supposons, par exemple, que les deux nombres, au lieu d'être pris tout à fait au hasard, aient été obtenus par décomposition arbitraire, en deux parties entières, d'un nombre entier, pris au hasard. Alors, le champ de variation, au lieu d'être un carré, sera un triangle rectangle, isoscèle, de côtés n indéfiniment grands. On voit que la probabilité d'avoir $\frac{y}{x} < z$ a pour expression *unique*

$$\Pi(z) = \frac{z}{1+z}.$$

Par suite

$$D(z) = \frac{1}{(1+z)^2}.$$

Si l'on étend la représentation au plan, on voit que la densité en un point quelconque est l'inverse de $(1+x)^2(1+y)^2$. La transformation à employer, pour rendre isobarique une aire donnée, est définie par les relations

$$x' = \frac{1}{1+x}, \qquad y' = \frac{1}{1+y}.$$

Ici aussi toutes les figures transformées sont contenues par un carré de côté 1. Si σ est la transformée de S, la probabilité qu'un point tombe à l'intérieur de S est σ. Les applications seraient faciles: nous les omettons.

13. Dans une *Note* précédente, nous avons rencontré certaines questions, que les formules ordinaires, dans leur état actuel, ont été impuissantes à résoudre. Il n'en est pas ainsi de la représentation géométrique. Celle-ci nous fournira, plus tard, les moyens d'approximation qui nous manquent. Pour le moment, nous l'appliquerons à la résolution de quelques questions de moyennes, en faisant observer que la comparaison des résultats que nous allons obtenir, avec les formules écrites dans les Notes précédentes, conduit à des déterminations asymptotiques importantes, dont nous parlerons une autre fois. D'abord, si la valeur moyenne de $f(z)$ est *constante,* elle sera évidemment donnée par

$$\mathfrak{M} = \frac{\int_0^\infty f(z) D(z) dz}{\int_0^\infty D(z) dz}. \tag{11}$$

Lorsque z est une quantité commensurable, prise au hasard, cette formule devient

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\int_0^1 f(z) dz + \frac{1}{2}\int_1^\infty f(z)\frac{dz}{z^2}. \tag{12}$$

Si l'on veut, par exemple, la moyenne valeur de $z-[z]$, on a

$$\mathfrak{M}=\frac{1}{2}\int_0^1 z\,dz+\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{q=\infty}\int_q^{q+1}(z-q)\frac{dz}{z^2},$$

ou bien

$$\mathfrak{M}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sum_1^\infty\left\{\log\left(1+\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{q+1}\right\}=\frac{3}{4}-\frac{C}{2},$$

conformément à ce qui a été trouvé dans une *Note* antérieure. De même, pour $f(z)=z-i(z)$, on a d'abord

$$\mathfrak{M}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} z\,dz+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1(z-1)dz-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1(z-1)\frac{dz}{z^2}+\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{q=\infty}\int_{q-\frac{1}{2}}^{q+\frac{1}{2}}(z-q)\frac{dz}{z^2};$$

puis:

$$\mathfrak{M}=\frac{1}{2}(1-\log 2)+\frac{1}{2}\sum_1^\infty\left\{\log\frac{2q+1}{2q-1}-\left(\frac{1}{2q-1}+\frac{1}{2q+1}\right)\right\}=1-\log 2-\frac{C}{2},$$

résultat connu. Venons, maintenant, à un problème qui nous intéresse, et supposons que $f(z)$ soit la *valeur absolue* de la différence $z-i(z)$. On voit aisément que

$$\mathfrak{M}=\frac{1}{2}\int_0^1 z\,dz+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1(1-z)dz-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1(1-z)\frac{dz}{z^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{q=\infty}\left\{\int_{q-\frac{1}{2}}^{q}(q-z)\frac{dz}{z^2}+\int_q^{q+\frac{1}{2}}(z-q)\frac{dz}{z^2}\right\},$$

c'est-à-dire:

$$\mathfrak{M}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}(1-\log 2)+\frac{1}{2}\sum_1^\infty\left\{\log\frac{2q-1}{2q}\cdot\frac{2q+1}{2q}+\left(\frac{1}{2q-1}-\frac{1}{2q+1}\right)\right\},$$

d'où, en vertu de la *formule de Wallis,*

$$\mathfrak{M}=\frac{1}{8}+\log\frac{2}{\sqrt{\pi}}=0{,}245782\ldots$$

Telle est la *valeur moyenne de la différence absolue entre une quantité commensurable quelconque et le nombre entier qui s'en rapproche le plus.* Tel est aussi, dans une division quelconque, *le moyen rapport du plus petit reste au diviseur.*

14. Cherchons la moyenne valeur r_m du $m^{ème}$ chiffre décimal, dans une division quelconque. Il est clair que, dans la formule (12), la somme des intégrales correspondante au chiffre r est le produit de r par

$$\sum_{q=1}^{q=10^{m-1}} \int_{\frac{q-1}{10^{m-1}}+\frac{r}{10^m}}^{\frac{q-1}{10^{m-1}}+\frac{r+1}{10^m}} dz + \sum_{q=1}^{q=\infty} \int_{1+\frac{q-1}{10^{m-1}}+\frac{r}{10^m}}^{1+\frac{q-1}{10^{m-1}}+\frac{r+1}{10^m}} \frac{dz}{z^2},$$

c'est-à-dire:

$$\frac{r}{10} + 10^{m-1} r \left\{ H\left(10^{m-1} - 1 + \frac{r+1}{10}\right) - H\left(10^{m-1} - 1 + \frac{r}{10}\right) \right\}.$$

Conséquemment:

$$r_m = \frac{9}{4} + \frac{10^{m-1}}{2} \left\{ 10\, H(10^{m-1}) - \sum_{p=1}^{p=10} H\left(10^{m-2} - 1 + \frac{p}{10}\right) \right\},$$

ou, enfin,

$$r_m = \frac{9}{4} + \frac{10^m}{2} \left\{ \log 10 - H(10^m) + H(10^{m-1}) \right\}.$$

Par exemple:

$$r_1 = 5 \log 10 - \frac{3727}{504} = 4{,}1230\ldots$$

Telle est la *moyenne valeur du premier chiffre décimal, dans une division quelconque.* Si m augmente indéfiniment, r_m tend vers $4 + \frac{1}{2}$.

15. Quelle est la valeur moyenne du dernier chiffre? Évidemment, d'après (12),

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \sum_{r=1}^{r=q} r \int_{10q+r}^{10q+r+1} \frac{dz}{z^2},$$

ou bien

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{q=\infty} \left(\frac{1}{10q+1} + \frac{1}{10q+2} + \cdots + \frac{1}{10q+10} - \frac{1}{q+1} \right) = \log \sqrt{10}.$$

Ainsi: « *dans une division quelconque, le dernier chiffre du quotient est moyennement égal à* 1,15179... » La petitesse du résultat est due à ce que, dans la moitié des divisions, le quotient est zéro.

16. Lorsque f est une *fonction indicatrice,* l'expression de $\mathfrak{M}$ sert à résoudre des questions de probabilités. Par exemple, la probabilité que r soit le dernier chiffre du quotient est, pour $r > 0$,

$$P_r = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \int_{10q+r}^{10q+r+1} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{20} \left\{ H\left(\frac{r+1}{10} - 1\right) - H\left(\frac{r}{10} - 1\right) \right\}.$$

Pour $r=0$,

$$P_0=\frac{1}{2}+\frac{1}{20}H\left(\frac{1}{10}\right)\cdot$$

On trouve encore

$$P_r+P_{9-r}=\frac{\pi}{20}\cdot\frac{\sin 18^0}{\sin\frac{\pi r}{10}\cdot\sin\frac{\pi(r+1)}{10}},\qquad (r>0)$$

et

$$P_0+P_9=1-\frac{\pi}{20}\cot 18^0.$$

Par exemple: « *la probabilité que, dans une division quelconque, le dernier chiffre du quotient soit* 4 *ou* 5, *est* $\frac{\pi}{20}\operatorname{tg}18^0$ ».

17. D'une manière générale, la formule (12) permet d'affirmer que si, ayant pris au hasard deux entiers, on divise le plus grand par le plus petit, la probabilité que le *quotient par défaut* appartienne à un certain système Ω est

$$P=\frac{f(1)}{1\cdot 2}+\frac{f(2)}{2\cdot 3}+\frac{f(3)}{3\cdot 4}+\frac{f(4)}{4\cdot 5}+\cdots,$$

$f(x)$ étant 1 ou 0, suivant que x appartient ou n'appartient pas à Ω. Si, par exemple, Ω est le système des nombres *carrés*, on trouve

$$P=\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}\cdot$$

Telle est la probabilité que dans la division d'un nombre quelconque, par un nombre plus petit, le quotient soit un carré. De même, la probabilité que, dans la même division, le *quotient le plus approché* appartienne à Ω est

$$P=4\left\{\frac{f(1)}{1\cdot 3}+\frac{f(2)}{3\cdot 5}+\frac{f(3)}{5\cdot 7}+\cdots\right\}-f(1);$$

etc., etc. ... Les applications, fort nombreuses, sont trop faciles pour que nous insistions davantage.

18 L'expression de $\mathfrak{M}$, prise entre des limites finies, est destinée à devenir de la plus grande importance dans la théorie des moyennes; car nous l'emploierons à déterminer le premier terme de toute représentation moyenne ou asymptotique. Cependant, il est bon d'observer que la formule (11), sous sa forme actuelle, constitue déjà un moyen de détermination asymptotique, plus délicat que les formules dont nous faisons usage habituellement. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'évaluer moyennement, jusqu'aux quantités de l'ordre

de n, la somme $\sum q_p^2$. Une induction fort simple permet d'affirmer que l'expression cherchée a la forme

$$\sum_1^n q_p^2 = \frac{\pi^2}{6} n^2 + A n \log n + B n,$$

où A et B sont des constantes à déterminer. D'ailleurs

$$\sum_1^n \frac{n^2}{p^2} = \frac{\pi^2}{6} n^2 - n, \qquad \sum_1^n \frac{n}{p} = n \log n + C n,$$

en négligeant les quantités d'un ordre inférieur à celui de n. En conséquence:

$$\sum_1^n \left\{ \frac{n^2}{p^2} + A \frac{n}{p} - q_p^2 \right\} = (AC - B - 1) n.$$

D'autre part:

$$\sum_1^n \left\{ \frac{p^2}{n^2} + A \frac{p}{n} - \left[\frac{p}{n}\right]^2 \right\} = \left(\frac{1}{3} + \frac{A}{2}\right) n.$$

Par suite, d'après (2),

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{A}{2}\right) + \frac{1}{2}(AC - B - 1).$$

pourvu que $f(z) = z^2 + Az - [z]^2$. Donc, en vertu de (12),

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{A}{2}\right) + (AC - B - 1) = \int_0^2 (z^2 + Az) dz + \sum_{q=1}^{q=\infty} \int_q^{q+1} (z^2 + Az - q^2) \frac{dz}{z^2},$$

ou bien

$$AC - B - 1 = \sum_{q=1}^{q=\infty} \left\{ A \log\left(1 + \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{q+1} \right\} =$$

$$= A \sum_1^\infty \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{q+1} \right\} + (A+1) \sum_1^\infty \frac{1}{q+1} \cdot$$

Dans le second membre, la première serie est convergente, et a pour somme $1 - C$; mais la seconde est divergente. On doit donc prendre $A = -1$. La dernière relation devient alors $B = -2C$. Conséquemment

$$\sum_1^n q_p^2 = \frac{\pi^2}{6} n^2 - n \log n - 2Cn.$$

Par combinaison avec

$$\sum_1^n q_p = n \log n + (2C - 1) n,$$

on trouve

$$\sum_1^n \int p = \sum p q_p = \frac{1}{2} \sum q_p^2 + \frac{1}{2} \sum q_p = \frac{\pi^2}{12} n^2 - \frac{n}{2} \cdot$$

Donc, en moyenne,

$$\int x = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{1}{2}.$$

19. Rappelons-nous aussi que nous n'avons pu obtenir directement la valeur de la constante A dans la somme

$$\sum_1^n p q_p (-1)^{i\left(\frac{n}{p}\right)} = A n^2.$$

Maintenant, si l'on fait $f(z) = (-1)^{i(z)} \cdot \frac{[z]}{z}$, dans (12), on obtient immédiatement

$$A = \sum_1^\infty \left\{ \int_q^{q+\frac{1}{2}} (-1)^q q \frac{dz}{z^3} + \int_{q+\frac{1}{2}}^{q+1} (-1)^{q+1} q \frac{dz}{z^3} \right\},$$

c'est-à-dire:

$$A = \frac{1}{2} \sum_1^\infty (-1)^q q \left\{ \frac{1}{q^2} + \frac{1}{(q+1)^2} - \frac{8}{(2q+1)^2} \right\} = 2G - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{24}.$$

20. Autre application: $\chi(x)$ étant le logarithme du plus petit commun multiple des x premiers nombres naturels, on sait (*) que, asymptotiquement,

$$\sum_1^n \chi(q_p) = n \log n - n.$$

Par suite:

$$\sum_1^n \left\{ \frac{n}{p} - \chi(q_p) \right\} = (1 + C) n.$$

Puis:

$$1 + C = \sum_{q=1}^{q=\infty} \int_q^{q+1} \{z - \chi(q)\} \frac{dz}{z^2} = \sum_1^\infty \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{q}\right) - \frac{\chi(q)}{q(q+1)} \right\},$$

d'où, en introduisant la fonction $\nu(x)$, et en observant que, pour n infini, $\frac{\chi(n)}{n}$ tend vers l'unité,

$$\lim \cdot \left(\log n - \left\{ \frac{\nu(1)}{1} + \frac{\nu(2)}{2} + \frac{\nu(3)}{3} + \cdots + \frac{\nu(n)}{n} \right\} \right) = C,$$

pour n infini. Sous une autre forme, en désignant par $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \ldots \varpi_\vartheta$ la série des nombres premiers 2, 3, 5,..., non supérieurs à n, on peut écrire

$$\lim \cdot \left\{ \log n - \sum_{r=1}^{r=\vartheta} \frac{\log \varpi_r}{\varpi_r - 1} \right\} = C,$$

résultat important, connu (*).

21. En changeant le mode de génération des quantités commensurables, l'égalité (11) prend d'autres formes. Ainsi, en employant une génération, à laquelle il a été fait allusion plus haut, on a:

$$\mathfrak{M}=\int_0^\infty \frac{f(z)\,dz}{(1+z)^2}. \tag{13}$$

Par exemple, soit $f(z)$ égal à 1 ou à 0, suivant que $i(z)$ est *impair* ou *pair*. On obtient

$$\mathfrak{M}=\sum_1^\infty \int_{2q-\frac{3}{2}}^{2q-\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1+z)^2}=2\sum_1^\infty\left(\frac{1}{4q-1}-\frac{1}{4q+1}\right)=2-\frac{\pi}{2}.$$

Donc: « *On divise l'une par l'autre les deux parties entières, arbitraires, d'un nombre entier, pris au hasard. La probabilité que le quotient le plus approché soit pair est* 0,57079... ».

Veut-on la moyenne valeur de $z-[z]$? La formule (13) donne immédiatement

$$z-[z]=\sum_1^\infty \int_{q-1}^{q} \frac{z-(q-1)}{(1+z)^2}\,dz=\sum_1^\infty\left\{\log\left(1+\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{q+1}\right\}=1-C.$$

De même

$$i(z)-[z]=\sum_1^\infty \int_{q-\frac{1}{2}}^{q} \frac{dz}{(1+z)^2}=2\sum_1^\infty\left(\frac{1}{2q+1}-\frac{1}{2q+2}\right)=\log 4-1.$$

Donc: « *Lorsqu'on divise l'une par l'autre les deux parties entières, arbitraires, d'un entier, pris au hasard, il y a* 27 *à parier, contre* 17 *environ, que le quotient le plus approché est celui par défaut* ».

(*) Voyez *Premier Mémoire d'Arithmétique.*

Sur le rôle arithmétique de $\sin \frac{\pi x}{2}$.

(*Par* Ernest Cesàro, *étudiant*, *à Torre Annunziata.*)

---

1. Le sinus de $\frac{\pi x}{2}$, pour x entier et positif, est égal à ± 1, suivant que x a l'une des formes $4k \pm 1$: il est nul dans les autres cas. Une telle fonction jouit de propriétés arithmétiques remarquables, qui n'offrent, d'ailleurs, qu'un exemple isolé des applications des fonctions trigonométriques à la théorie des Nombres. Sur ces applications nous reviendrons à plusieurs reprises, dans le cours de ces articles, soit en traitant de l'expression trigonométrique de certaines fonctions arithmétiques, soit en donnant plus d'extension aux résultats du présent article, au moyen de la théorie des indices et des résidus. Ici nous nous bornerons à l'étude du rôle remarquable que joue la fonction $\sin \frac{\pi x}{2}$ dans certaines sommations de séries arithmétiques, et dont l'origine doit être recherchée dans ce fait, que la fonction dont il s'agit jouit de la propriété exprimée par la relation

$$\psi(x)\psi(y) = \psi(xy). \tag{1}$$

De plus, $\rho_k(n)$ étant le nombre des solutions entières et positives de l'équation $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 = n$, on sait que

$$\sin \frac{\pi a}{2} + \sin \frac{\pi b}{2} + \sin \frac{\pi c}{2} + \cdots = \rho_1(n) + \rho_2(n), \tag{2}$$

a, b, c,... étant, comme d'habitude, tous les diviseurs de n.

2. Les deux propriétés que nous venons de signaler vont nous conduire rapidement à un résultat analytique intéressant. Nous allons, en effet, déterminer la valeur de la double série

$$S_m = \sum_{x=1}^{x=\infty} \sum_{y=1}^{y=\infty} \frac{\psi(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^m},$$

$\psi(x)$ étant une fonction qui jouit de la propriété (1). En réunissant, dans S_m, tous les termes pour lesquels $x^2 + y^2 = n$, nous trouvons d'abord

$$S_m = \sum \frac{\psi(n) \rho_2(n)}{n^m},$$

où n doit parcourir la série des valeurs entières et positives. Or, en ayant égard à (1), l'égalité (2) peut être mise sous la forme suivante:

$$\psi\left(\frac{n}{a}\right)\psi(a)\sin\frac{\pi a}{2} + \psi\left(\frac{n}{b}\right)\psi(b)\sin\frac{\pi b}{2} + \cdots = \psi(n)\rho_1(n) + \psi(n)\rho_2(n). \tag{3}$$

Par application des principes exposés dans notre *Premier Mémoire d'Arithmétique,* nous en déduisons

$$\sum \frac{\psi(n)}{n^m} \cdot \sum \frac{\psi(n)\sin\frac{\pi n}{2}}{n^m} = \sum \frac{\psi(n)\rho_1(n)}{n^m} + \sum \frac{\psi(n)\rho_2(n)}{n^m},$$

pourvu que les séries, qui entrent dans cette égalité, soient convergentes. Par suite, si l'on pose

$$s_m = \frac{\psi(1)}{1^m} + \frac{\psi(2)}{2^m} + \frac{\psi(3)}{3^m} + \cdots, \qquad \sigma_m = \frac{\psi(1)}{1^m} - \frac{\psi(3)}{3^m} + \frac{\psi(5)}{5^m} - \cdots,$$

on a

$$S_m = s_m \sigma_m - s_{2m}. \tag{4}$$

3. Soit, par exemple, $\psi(x) = 1$. La formule (4) devient

$$\left.\begin{aligned} \sum_{x=1}^{x=\infty}\sum_{y=1}^{y=\infty} \frac{1}{(x^2+y^2)^m} &= \left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\right)\left(1 - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \cdots\right) - \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{9^m} + \cdots\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

En particulier, pour $m = 2$,

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\sum_{y=1}^{y=\infty} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\pi^2}{6}\left(G - \frac{\pi^2}{15}\right) = 0{,}4244\ldots$$

4. Pour $\psi(x) = \lambda(x)$, on trouve

$$S_m = \sum \frac{\lambda(n)}{n^m} \cdot \sum \frac{\lambda(n)\sin\frac{\pi n}{2}}{n^m} - \sum \frac{\lambda(n)}{n^{2m}}. \tag{6}$$

Or, d'après une propriété connue,

$$\lambda(a) + \lambda(b) + \lambda(c) + \cdots = \rho_1(n),$$

d'où

$$\sum \frac{1}{n^m} \cdot \sum \frac{\lambda(n)}{n^m} = \sum \frac{\rho_1(n)}{n^m} = \sum \frac{1}{n^{2m}} \tag{7}$$

De même

$$\lambda(a)\sin\frac{\pi a}{2}\sin\frac{\pi n}{2a}+\lambda(b)\sin\frac{\pi b}{2}\sin\frac{\pi n}{2b}+\cdots=\rho_1(n)\sin\frac{\pi n}{2},$$

d'où

$$\sum\frac{\lambda(n)\sin\frac{\pi n}{2}}{n^m}\cdot\sum\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n^m}=\sum\frac{\rho_1(n)\sin\frac{\pi n}{2}}{n^m}=\sum\frac{1}{(2n-1)^{2m}}=\left(1-\frac{1}{4^m}\right)\sum\frac{1}{n^{2m}}\cdot \quad (8)$$

À l'aide de (7) et de (8), la formule (6) devient

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\sum_{y=1}^{y=\infty}\frac{\lambda(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^m}=\left(1-\frac{1}{4^m}\right)\frac{s_{2m}^2}{s_m\sigma_m}-\frac{s_{4m}}{s_{2m}}, \quad (9)$$

pourvu que l'on pose

$$s_m=1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots,\qquad \sigma_m=1-\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}-\cdots \quad (10)$$

5. Dans la formule (9), nous pouvons donner à m des valeurs surpassant l'unité d'aussi peu qu'on le désire. À la limite, nous obtenons

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\sum_{y=1}^{y=\infty}\frac{\lambda(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=-\frac{\pi^2}{15}.$$

S_m étant le premier membre de (9), nous pouvons mettre cette égalité (9) sous la forme suivante:

$$\frac{S_m+\frac{s_{4m}}{s_{2m}}}{m-1}=\left(1-\frac{1}{4^m}\right)\frac{s_{2m}^2}{\sigma_m}\cdot\frac{1}{(m-1)s_m}.$$

On sait que, si $m-1$ tend vers zéro, $(m-1)s_m$ tend vers l'unité. Par conséquent, pour $m=1$, la dernière formule devient

$$S'_1+\frac{24}{\pi^2}s'_4-\frac{4}{5}s'_2=\frac{\pi^3}{12}.$$

Les accents indiquent les dérivées relatives à m. En d'autres termes:

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\sum_{y=1}^{y=\infty}\frac{\log(x^2+y^2)\cdot\lambda(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{4}{5}\sum\frac{\log n}{n^2}-\frac{24}{\pi^2}\sum\frac{\log n}{n^4}-\frac{\pi^3}{12}.$$

6. Dans la relation (4) nous pouvons attribuer à $\psi(x)$ toute forme, pour laquelle la condition (1) soit remplie. Or, parmi les fonctions qui jouissent de cette propriété nous avons précisément celle qui fait l'objet de cette Note. Dans ce cas, la formule (4) devient

$$\sum_m=\left(1-\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}-\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\cdots\right)-\left(1-\frac{1}{9^m}+\frac{1}{25^m}-\cdots\right).$$

Si l'on attribue aux sommes s_m, σ_m, la signification que leur donnent les égalités (10), on peut écrire

$$\sum_m = \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) s_m \sigma_m - \sigma_{2m}. \tag{11}$$

Les valeurs de $x^2 + y^2$, qui entrent dans le premier membre, doivent être impaires: elles y entrent toutes positivement, puisque une somme de deux carrés, de parités différentes, ne saurait avoir la forme $4k - 1$. Le premier membre S_m de la formule (5) se décompose donc en trois parties, dont l'une est la somme $\sum_m$, donnée par (11), et les autres, A_m et B_m, sont celles pour lesquelles x et y parcourent simultanément la série des nombres impairs, ou bien celle des nombres pairs. La somme B_m est facile à calculer; car

$$B_m = \frac{1}{4^m} \sum_{x=1}^{x=\infty} \sum_{y=1}^{y=\infty} \frac{1}{(x^2 + y^2)^m} = \frac{1}{4^m} S_m.$$

On a donc

$$\left(1 - \frac{1}{4^m}\right) S_m = \sum_m + A_m,$$

d'où, en tenant compte de (5) et de (11),

$$A_m = \left(1 - \frac{1}{4^m}\right)(s_m \sigma_m - s_{2m}) - \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) s_m \sigma_m + \sigma_{2m},$$

c'est-à-dire:

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \sum_{y=1}^{y=\infty} \frac{1}{[(2x-1)^2 + (2y-1)^2]^m} = \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) \left\{ \frac{s_m \sigma_m}{2^m} - \left(1 + \frac{1}{2^m}\right) s_{2m} \right\} + \sigma_{2m}.$$

7. Outre leurs applications à l'évaluation de certaines séries doubles, les égalités (1) et (2) donnent naissance à une foule d'identités arithmétiques, plus ou moins intéressantes. Toute identité de la forme

$$f(a) + f(b) + f(c) + \cdots = F(n)$$

peut être écrite ainsi:

$$\sum f(a) \sin\frac{\pi a}{2} \sin\frac{\pi n}{2a} = F(n) \sin\frac{\pi n}{2},$$

et l'on en déduit

$$\left.\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \cdots\right) \left\{ \frac{f(1)}{1^m} - \frac{f(3)}{3^m} + \frac{f(5)}{5^m} - \cdots \right\} = \\ = \frac{F(1)}{1^m} - \frac{F(3)}{3^m} + \frac{F(5)}{5^m} - \cdots \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Par exemple, pour $f(x) = \lambda(x)$, on a $F(x) = \rho_1(x)$; puis:

$$\frac{\lambda(1)}{1^m} - \frac{\lambda(3)}{3^m} + \frac{\lambda(5)}{5^m} - \frac{\lambda(7)}{7^m} + \cdots = \left(1 - \frac{1}{4^m}\right) \frac{s_{2m}}{\sigma_m}.$$

En particulier:

$$\frac{\lambda(1)}{1}-\frac{\lambda(3)}{3}+\frac{\lambda(5)}{5}-\frac{\lambda(7)}{7}+\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

Pour $f(x)=\lambda(x)\omega(x)$, on a $F(x)=\lambda(x)$; puis:

$$\frac{\lambda(1)\omega(1)}{1^m}-\frac{\lambda(3)\omega(3)}{3^m}+\frac{\lambda(5)\omega(5)}{5^m}-\cdots=\left(1-\frac{1}{4^m}\right)\frac{s_{2m}}{\sigma_m^2}.$$

En particulier:

$$\frac{\lambda(1)\omega(1)}{1}-\frac{\lambda(3)\omega(3)}{3}+\frac{\lambda(5)\omega(5)}{5}-\cdots=2.$$

Pour $f(x)=\varphi(x)$, on a $F(x)=x$; puis:

$$\frac{\varphi(1)}{1^m}-\frac{\varphi(3)}{3^m}+\frac{\varphi(5)}{5^m}-\frac{\varphi(7)}{7^m}+\cdots=\frac{\sigma_{m-1}}{\sigma_m}.$$

En particulier:

$$\frac{\varphi(1)}{1}-\frac{\varphi(3)}{9}+\frac{\varphi(5)}{25}-\frac{\varphi(7)}{49}+\cdots=\frac{\pi}{4G}=0,8574\ldots;$$

etc., etc. ...

8. Plus généralement, l'identité

$$g(a)h\left(\frac{n}{a}\right)+g(b)h\left(\frac{n}{b}\right)+g(c)h\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots=F(n) \tag{13}$$

donne lieu à la formule

$$\sum\frac{g(n)\sin\frac{\pi n}{2}}{n^m}\cdot\sum\frac{h(n)\sin\frac{\pi n}{2}}{n^m}=\sum\frac{F(n)\sin\frac{\pi n}{2}}{n^m}.$$

Par exemple, pour $g(x)=\lambda(x)$, $h(x)=\omega(x)$, on a d'abord $F(x)=1$; puis:

$$\frac{\omega(1)}{1^m}-\frac{\omega(3)}{3^m}+\frac{\omega(5)}{5^m}-\cdots=\frac{4^m\sigma_m^2}{(4^m-1)s_{2m}}. \tag{14}$$

En particulier:

$$\frac{\omega(1)}{1}-\frac{\omega(3)}{3}+\frac{\omega(5)}{5}-\cdots=\frac{1}{2};$$

etc., etc. ...

9. Soit p un nombre premier. Si r est une racine primitive de la congruence

$$x^{p-1}\equiv 1, \qquad (\text{mod. } p)$$

la fonction
$$I_p(x) = \left| \begin{array}{ll} 0, & \text{si } x \equiv 0, \\ r^{ind.\, x}, & \text{si } x \not\equiv 0, \end{array} \right. \qquad (\text{mod. } p)$$
jouit, évidemment, de la propriété (1). Ces fonctions I, analogues à $\sin\frac{\pi x}{2}$. sont fort importantes. Pour $p = 3, 5, \ldots$, on trouve successivement
$$I_3(x) = \left| \begin{array}{ll} 0, & \text{si } x \equiv 0, \\ 1, & \text{» } x \equiv 1, \\ -1, & \text{» } x \equiv 2, \end{array} \right. (\text{mod. } 3), \qquad I_5(x) = \left| \begin{array}{ll} 0, & \text{si } x \equiv 0, \\ 1, & \text{» } x \equiv 1, \\ i, & \text{» } x \equiv 2, \\ -i, & \text{» } x \equiv 3, \\ -1, & \text{» } x \equiv 4, \end{array} \right. (\text{mod. } 5).$$
etc., etc. En introduisant les fonctions I dans la formule (5), on obtiendrait beaucoup d'autres relations intéressantes. Des fonctions analogues existent aussi dans le cas de p composé. Par exemple, la fonction $I_{10}(x)$ est ± 1, suivant que x a l'une des formes $10k \pm 1$: elle est $\pm i$, suivant que x a l'une des formes $10k \pm 3$: elle est 0, dans les autres cas.

10. Toute identité, telle que (13), donne lieu à l'identité semblable
$$\sum g(a) I_p(a) h\left(\frac{n}{a}\right) I_p\left(\frac{n}{a}\right) = F(n) I_p(n),$$
d'où l'on déduit
$$\sum \frac{g(n) I_p(n)}{n^m} \cdot \sum \frac{h(n) I_p(n)}{n^m} = \sum \frac{F(n) I_p(n)}{n^m}. \tag{15}$$
Si, par exemple, $p = 5$, on a d'abord, quelle que soit la fonction ψ,
$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\psi(n) I_5(n)}{n^m} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{\psi(5n+1)}{(5n+1)^m} - \frac{\psi(5n+4)}{(5n+4)^m} \right\} + i \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{\psi(5n+2)}{(5n+2)^m} - \frac{\psi(5n+3)}{(5n+3)^m} \right\}.$$
Dans cette égalité, désignons respectivement par A_ψ, B_ψ, la partie réelle du second membre, et le coefficient de i; puis, faisons successivement $\psi(x) = g(x)$, $h(x)$, $F(x)$. Par substitution dans la relation (15), celle-ci se décompose en deux autres, à savoir:
$$A_g A_h - B_g B_h = A_F, \qquad A_g B_h + A_h B_g = B_F. \tag{16}$$

11. Ainsi, pour $g(x) = 1$, $h(x) = \lambda(x)$, on a d'abord $F(x) = \rho_1(x)$; puis, si l'on pose
$$\alpha_m = \left(1 - \frac{1}{4^m}\right) + \left(\frac{1}{6^m} - \frac{1}{9^m}\right) + \left(\frac{1}{11^m} - \frac{1}{14^m}\right) + \left(\frac{1}{16^m} - \frac{1}{19^m}\right) + \cdots,$$
$$\beta_m = \left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{3^m}\right) + \left(\frac{1}{7^m} - \frac{1}{8^m}\right) + \left(\frac{1}{12^m} - \frac{1}{13^m}\right) + \left(\frac{1}{17^m} - \frac{1}{18^m}\right) + \cdots,$$
$$\gamma_m = \left(1 - \frac{1}{2^{2m}} - \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}}\right) + \left(\frac{1}{6^{2m}} - \frac{1}{7^{2m}} - \frac{1}{8^{2m}} + \frac{1}{9^{2m}}\right) + \cdots,$$

on obtient, d'après (16),

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\lambda(5n+1)}{(5n+1)^m}-\frac{\lambda(5n+4)}{(5n+4)^m}\right\}=\frac{\alpha_m\gamma_m}{\alpha_m^2+\beta_m^2},$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\lambda(5n+2)}{(5n+2)^m}-\frac{\lambda(5n+3)}{(5n+3)^m}\right\}=-\frac{\beta_m\gamma_m}{\alpha_m^2+\beta_m^2}.$$

Pour $m=1$, on trouve sans peine

$$\alpha_1=\frac{\pi}{5}\cot\frac{\pi}{5},\qquad \beta_1=\frac{\pi}{5}\cot\frac{2\pi}{5},\qquad \gamma_1=\frac{\pi^2}{25\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}}.$$

Par conséquent:

$$\frac{\lambda(1)}{1}-\frac{\lambda(4)}{4}+\frac{\lambda(6)}{6}-\frac{\lambda(9)}{9}+\frac{\lambda(11)}{11}-\frac{\lambda(14)}{14}+\cdots=\frac{2\pi}{25}\sqrt{5+2\sqrt{5}},$$

$$\frac{\lambda(2)}{2}-\frac{\lambda(3)}{3}+\frac{\lambda(7)}{7}-\frac{\lambda(8)}{8}+\frac{\lambda(12)}{12}-\frac{\lambda(13)}{13}+\cdots=-\frac{2\pi}{25}\sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

De même, pour $g(x)=\lambda(x)$, $h(x)=\omega(x)$, et, par suite, $F(x)=1$, on a

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\omega(5n+1)}{(5n+1)^m}-\frac{\omega(5n+4)}{(5n+4)^m}\right\}=\frac{\alpha_m^2-\beta_m^2}{\gamma_m},$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\omega(5n+2)}{(5n+2)^m}-\frac{\omega(5n+3)}{(5n+3)^m}\right\}=\frac{2\alpha_m\beta_m}{\gamma_m}.$$

Par exemple:

$$\frac{\omega(1)}{1}-\frac{\omega(4)}{4}+\frac{\omega(6)}{6}-\frac{\omega(9)}{9}+\frac{\omega(11)}{11}-\frac{\omega(14)}{14}+\cdots=1.$$

$$\frac{\omega(2)}{2}-\frac{\omega(3)}{3}+\frac{\omega(7)}{7}-\frac{\omega(8)}{8}+\frac{\omega(12)}{12}-\frac{\omega(13)}{13}+\cdots=\frac{1}{2}.$$

On trouve aussi

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\mu(5n+1)}{(5n+1)^m}-\frac{\mu(5n+4)}{(5n+4)^m}\right\}=\frac{\alpha_m}{\alpha_m^2+\beta_m^2},$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\mu(5n+2)}{(5n+2)^m}-\frac{\mu(5n+3)}{(5n+3)^m}\right\}=-\frac{\beta_m}{\alpha_m^2+\beta_m^2}.$$

En particulier:

$$\frac{\mu(1)}{1}-\frac{\mu(4)}{4}+\frac{\mu(6)}{6}-\frac{\mu(9)}{9}+\frac{\mu(11)}{11}-\frac{\mu(14)}{14}+\cdots=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{2\pi},$$

$$\frac{\mu(2)}{2}-\frac{\mu(3)}{3}+\frac{\mu(7)}{7}-\frac{\mu(8)}{8}+\frac{\mu(12)}{12}-\frac{\mu(13)}{13}+\cdots=-\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{2\pi};$$

etc., etc. ...

12. Pour le moment, toutes ces formules ne semblent avoir qu'un intérêt de pure curiosité. Cependant, nous allons en faire une application à la recherche de la probabilité d'un fait arithmétique. Soit P_r la probabilité que, ayant pris m entiers au hasard, leur plus grand commun diviseur soit un nombre de la forme $4k+r$, n'admettant pas de facteurs carrés. Il est évident que $P_0=0$. La fonction $\lambda(x)\mu(x)$ est égale à l'unité seulement dans le cas où x est dépourvu de facteurs carrés: elle est nulle dans le cas contraire. On a donc, en vertu des formules établies dans les articles précédents,

$$P_1+P_2+P_3=\frac{1}{s_m}\sum_1^\infty\frac{\lambda(n)\mu(n)}{n^m}=\frac{1}{s_{2m}}.$$

D'ailleurs,

$$P_2=\frac{1}{s_m}\sum_1^\infty\frac{\lambda(2n)\mu(2n)}{(2n)^m}=\frac{1}{2^m s_m}\sum_1^\infty\frac{\lambda(n)\mu(n)}{n^m}=\frac{1}{2^m s_{2m}}.$$

Cela étant, si l'on a égard à (14), la formule (12) donne

$$\frac{\lambda(1)\mu(1)}{1^m}-\frac{\lambda(3)\mu(3)}{3^m}+\frac{\lambda(5)\mu(5)}{5^m}+\cdots=\frac{4^m\sigma_m}{(4^m-1)s_{2m}}.$$

Par suite

$$P_1-P_3=\frac{4^m\sigma_m}{(4^m-1)s_m s_{2m}}.$$

Ces trois équations fournissent les valeurs de P_1, P_2, P_3. Par exemple, pour $m=2$, on trouve

$$P_0=0,\qquad P_1=\frac{9}{4\pi^6}(15\pi^2+128\,G)=0{,}6208\ldots$$

$$P_2=\frac{45}{2\pi^4}=0{,}2309\ldots\qquad P_3=\frac{9}{4\pi^6}(15\pi^2-128\,G)=0{,}0720\ldots$$

Telles sont les expressions de la probabilité que le plus grand commun diviseur de deux entiers, pris au hasard, est dépourvu de facteurs carrés, et donne, dans la division par 4, un reste déterminé.

Sur la fonction $z-[z]$.

(*Par* ERNEST CESÀRO, *étudiant, à Torre Annunziata.*)

---

1. Par des opérations définies, effectuées sur les nombres d'un certain système, on engendre un nouvel ensemble Ω de quantités, dont la distribution, dans le système des valeurs réelles, n'est pas, généralement, *uniforme.* Soit $D(z)$ la *densité* des quantités de Ω, autour de la valeur z. Il est évident que la moyenne arithmétique des valeurs d'une fonction $f(z)$, relatives à tous les nombres de Ω, est

$$\mathfrak{M}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)D(z)dz. \tag{1}$$

Nous avons déjà donné des applications de cette formule en supposant le système primitif constitué par tous les *nombres entiers,* et le système Ω par toutes les *quantités commensurables,* considérées comme engendrées par la division de deux nombres, pris au hasard dans le premier système. D'autres modes de génération sont possibles; mais c'est en adoptant celui qui vient d'être indiqué que l'on a trouvé, dans la Note « *Sur la distribution des quantités commensurables* » que la densité $D(z)$, égale à $\frac{1}{2}$, lorsque z est compris entre 0 et 1, est $\frac{1}{2z^2}$ pour z supérieur à l'unité. C'est ainsi que nous avons pu établir l'importante formule

$$\mathfrak{M}=\frac{1}{2}\int_0^1 f(z)dz+\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{f(z)}{z^2}dz. \tag{2}$$

Nous allons faire une nouvelle application de la formule (1) aux quantités $z-[z]$, représentant les *excès des fractions z sur les plus grands nombres entiers qu'elles renferment.* On continuera à concevoir z comme engendré par la division de deux nombres entiers, pris au hasard, de sorte que $z-[z]$ représente aussi le *rapport du reste au diviseur,* dans une division quelconque.

2. Soit $L(\varepsilon)$ la *fréquence* des valeurs inférieures à ε, dans la suite

$$\frac{n}{1}-\left[\frac{n}{1}\right],\quad \frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right],\quad \frac{n}{3}-\left[\frac{n}{3}\right],\ldots,\quad \frac{n}{n}-\left[\frac{n}{n}\right]. \tag{3}$$

Naturellement, ε est une fraction proprement dite. D'après une remarque, due à Dirichlet, on a

$$[z]-[z-\varepsilon]=\left|\begin{array}{l} 1,\ \text{si}\ z-[z]<\varepsilon \\ 0,\ \text{»}\quad \text{»}\ \overline{\overline{>}}\,\varepsilon. \end{array}\right.$$

Le nombre des quantités (3), inférieures à ε, est donc

$$nL(\varepsilon)=\sum_{p=1}^{p=n}\left\{\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p}-\varepsilon\right]\right\}.$$

Il suffit d'évaluer, de deux manières différentes, la quotité des couples de nombres x, y, entiers et positifs, satisfaisant à la condition $x(y+\varepsilon)\overline{\overline{<}}\,n$, pour se convaincre immédiatement que l'on peut aussi écrire

$$nL(\varepsilon)=\sum_{p=1}^{p=n}\left\{\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p+\varepsilon}\right]\right\}.$$

Par conséquent, pour n infini,

$$L(\varepsilon)=1-\frac{1}{1+\varepsilon}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\varepsilon}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3+\varepsilon}+\cdots \tag{4}$$

En conservant les notations habituelles on a donc

$$L(\varepsilon)=H(\varepsilon)=\int_0^1\frac{1-\varphi^\varepsilon}{1-\varphi}\,d\varphi.$$

3. Remarquons, en passant, que les propriétés de la *fonction harmonique* donnent

$$L\left(\frac{1+x}{2}\right)-L\left(\frac{1-x}{2}\right)=\pi\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}-\frac{4x}{1-x^2}.$$

Par exemple, pour $x=\frac{1}{2}$,

$$L\left(\frac{3}{4}\right)-L\left(\frac{1}{4}\right)=\pi-\frac{8}{3}.$$

Telle est, pour n indéfiniment grand, la fréquence, dans la série (3), des valeurs comprises entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$. Comme l'a montré M. Berger, dans ses « *Applica-*

tions de la fonction gamma à la théorie des nombres », on peut employer ces formules pour le calcul de certaines transcendantes. Ainsi, la dernière formule permet de calculer π, et il est remarquable que les valeurs obtenues par cette voie sont précisément celles qui résultent du calcul des réduites successives, dans le développement de π en fraction continue. En effet, pour $n=21$, la série (3) devient

$$0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{5}{8},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{10},\ \frac{10}{11},$$
$$\frac{3}{4},\ \frac{8}{13},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{16},\ \frac{4}{17},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{19},\ \frac{1}{20},\ 0.$$

Parmi ces fractions, il y en a *dix* qui sont comprises entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$. Donc, approximativement,

$$\pi=\frac{8}{3}+\frac{10}{21}=\frac{22}{7}.$$

C'est le *rapport d'Archimède.* Pour $n=339$, M. Berger trouve le *rapport de Métius*

$$\pi=\frac{8}{3}+\frac{161}{339}=\frac{355}{113};$$

etc., etc....

4. Quelle est, dans la série

$$\frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n}\right],\quad \frac{2}{n}-\left[\frac{2}{n}\right],\quad \frac{3}{n}-\left[\frac{3}{n}\right],\dots\quad \frac{n}{n}-\left[\frac{n}{n}\right],$$

la fréquence $\Lambda(\varepsilon)$ des termes non supérieurs à ε? Il est évident que

$$n\Lambda(\varepsilon)=[n\varepsilon]+1.$$

Par suite, n augmentant indéfiniment,

$$\Lambda(\varepsilon)=\varepsilon. \tag{5}$$

Cela posé, appelons $\mathfrak{p}(\alpha,\beta)$ la *probabilité que l'excès d'une fraction quelconque sur le plus grand nombre entier qu'elle renferme soit compris entre* α *et* β. D'après ce que nous avons dit dans la Note « *Sur les éventualités de la division arithmétique* », et en ayant égard aux formules (4) et (5), on a:

$$\mathfrak{p}(0,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}H(\varepsilon). \tag{6}$$

Plus généralement:

$$\mathfrak{p}(\alpha, \beta) = \frac{\beta - \alpha}{2}\left\{1 + \frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)} + \frac{1}{(2+\alpha)(2+\beta)} + \frac{1}{(3+\alpha)(3+\beta)} + \cdots\right\}.$$

En particulier:

$$\mathfrak{p}\left(\frac{1-x}{2}, \frac{1+x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2} - \frac{x}{2}\cdot\frac{3+x^2}{1-x^2}.$$

Par exemple, pour $x = \frac{1}{2}$,

$$\mathfrak{p}\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{13}{12} = 0,4874\ldots$$

Conséquemment: « *Il y a* 43 *à parier, contre* 41 *environ, que, dans une division quelconque, le rapport du reste au diviseur n'est pas compris entre* $\frac{1}{4}$ *et* $\frac{3}{4}$ ».

5. Par dérivation de (6) nous obtenons

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}H'(\varepsilon). \tag{7}$$

Sous une autre forme

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\varphi}{e^\varphi - 1}\cdot\frac{d\varphi}{e^{\varepsilon\varphi}}.$$

En particulier:

$$D(0) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2} = 1,3224\ldots, \qquad D(1) = \frac{\pi^2}{12} = 0,8224\ldots,$$

$$D\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3}{2} = 0,9674\ldots$$

À chaque propriété de la fonction harmonique correspond une propriété de la fonction D. C'est ainsi que l'on trouve

$$D\left(\frac{1-x}{2}\right) + D\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2\cos^2\frac{\pi x}{2}} + 1 - 4\frac{1-x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Par exemple:

$$D\left(\frac{1}{4}\right) + D\left(\frac{3}{4}\right) = \pi^2 - \frac{71}{9} = 1,9807\ldots$$

On a aussi

$$\sum_{p=1}^{p=n} D\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+2}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+3}\right)^2 + \cdots\right\};$$

etc., etc....

6. En vertu de (7), la formule (1) devient

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\int_0^1 f(z)\,dz + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\int_0^1 \frac{f(z)\,dz}{(z+p)^2}. \tag{8}$$

Si la fonction f admet la période 1, on a

$$f(z-[z]) = f(z),$$

et, par conséquent, sa valeur moyenne, relative au système des quantités $z-[z]$, ne diffère pas de celle qui se rapporte aux quantités z. En d'autres termes, les formules (2) et (8) doivent coïncider. C'est ce qu'il est aisé de vérifier. En effet

$$\sum_{p=1}^{p=\infty}\int_0^1 \frac{f(z)\,dz}{(z+p)^2} = \sum_{p=1}^{p=\infty}\int_p^{p+1} \frac{f(z-p)\,dz}{z^2} = \int_1^\infty \frac{f(z)\,dz}{z^2}.$$

Il est donc superflu de s'occuper de ces formes particulières de la fonction f: elles nous reconduiraient aux résultats obtenus dans la Note « *Sur la distribution des quantités commensurables* ».

7. Veut-on la moyenne valeur de $z-[z]$? Pour $f(z)=z$, la formule (8) devient

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p+1}\right\},$$

et l'on trouve ainsi l'égalité *moyenne* connue

$$z-[z] = \frac{3}{4} - \frac{C}{2} = 0,4613\ldots$$

De même, pour $f(z)=z^2$,

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left\{2 - \frac{1}{p+1} - 2p\log\left(1+\frac{1}{p}\right)\right\}.$$

Donc, en moyenne,

$$\{z-[z]\}^2 = \frac{5}{3} - \frac{C}{2} - \log\sqrt{2\pi} = 0,4591\ldots$$

D'ailleurs, la formule (8), à laquelle nous sommes parvenus *directement*, n'est qu'un cas particulier de (2). Il suffit de changer, dans celle-ci, $f(z)$ en $f(z - [z])$, pour obtenir (8). Cela devait être, puisque les fonctions de $z - [z]$ ne sont, après *tout*, que des fonctions particulières de z. Il est inutile de multiplier les exemples: il nous suffit d'avoir montré que toutes les difficultés de la recherche de la valeur moyenne d'une fonction quelconque, par rapport au système des quantités $z - [z]$, se réduisent au calcul de certaines intégrales, et à la sommation d'une série. Il en est ainsi de toute recherche asymptotique, concernant un système Ω quelconque, et capable de conduire à un résultat constant, pourvu que l'on ait eu soin de calculer, préalablement, la densité des éléments de Ω aux environs de toute valeur, dont ces éléments soient susceptibles.

Sur la fonction $\mathfrak{T}(z)$.

(*Par* Ernest Cesàro, *étudiant, à Torre Annunziata.*)

---

1. Cette fonction, citée précédemment à propos d'une formule de M. Tchébychew, représente *la plus petite quantité qu'il faut ajouter ou retrancher à z pour obtenir un nombre entier*. Nous allons d'abord chercher une fonction de z, qui soit propre à indiquer, par les valeurs qu'elle prend, si la fonction $\mathfrak{T}(z)$ est inférieure ou supérieure à une certaine quantité ε, comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$. Si $\mathfrak{T}(z) > \varepsilon$, il est évident que

$$\varepsilon < z - [z] < 1 - \varepsilon.$$

On en déduit

$$[z + \varepsilon] = [z], \qquad [z - \varepsilon] = [z].$$

Si, au contraire, $\mathfrak{T}(z) < \varepsilon$, deux cas peuvent se présenter:

1.° $z - [z] < \varepsilon$, et, par suite, $[z + \varepsilon] = [z]$, $[z - \varepsilon] = [z] - 1$;

2.° $z - [z] > 1 - \varepsilon$, et, par suite, $[z + \varepsilon] = [z] + 1$, $[z - \varepsilon] = [z]$.

Il en résulte que

$$[z + \varepsilon] - [z - \varepsilon] = \left| \begin{array}{l} 1, \text{ si } \mathfrak{T}(z) < \varepsilon \\ 0, \text{ si } \mathfrak{T}(z) > \varepsilon. \end{array} \right. \tag{1}$$

Il convient de considérer à part le cas de $\mathfrak{T}(z) = \varepsilon$. La différence $[z + \varepsilon] - [z - \varepsilon]$ est, alors, 1 ou 0, suivant que la fonction $z - [z]$ est ou n'est pas inférieure à $\frac{1}{2}$. Cela ne doit pas nous préoccuper, parceque les formules que nous allons établir ont une portée purement asymptotique, et, par conséquent, il est permis d'y négliger les valeurs de z pour lesquelles la fonction $\mathfrak{T}(z)$ est précisément égale à ε: celles-ci sont, en effet, infiniment moins nombreuses que les autres.

2. Il est aisé de déterminer les *fréquences* $L(\varepsilon)$, $\Lambda(\varepsilon)$ des valeurs inférieures à ε, dans chacune des séries

$$\mathfrak{T}\left(\frac{n}{1}\right),\quad \mathfrak{T}\left(\frac{n}{2}\right),\quad \mathfrak{T}\left(\frac{n}{3}\right),\dots\quad \mathfrak{T}\left(\frac{n}{n}\right),$$
$$\mathfrak{T}\left(\frac{1}{n}\right),\quad \mathfrak{T}\left(\frac{2}{n}\right),\quad \mathfrak{T}\left(\frac{3}{n}\right),\dots\quad \mathfrak{T}\left(\frac{n}{n}\right).$$

En effet, en vertu de (1),

$$nL(\varepsilon)=\sum_{p=1}^{p=n}\left\{\left[\frac{n}{p}+\varepsilon\right]-\left[\frac{n}{p}-\varepsilon\right]\right\}-N_{1-\varepsilon}(n). \tag{2}$$

Nous désignons par $N_\varepsilon(n)$ le nombre des valeurs de p, entières, positives et non supérieures à n, pour lesquelles la différence $\frac{n}{p}-\left[\frac{n}{p}\right]$ est précisément égale à ε. Il est clair que, si ε, nécessairement commensurable, est représenté par la fraction irréductible $\frac{\alpha}{\beta}$, le nombre $N_\varepsilon(n)$ indique aussi combien de diviseurs de n sont congrus avec α, (mod. β). L'ordre de la fonction $N_\varepsilon(n)$ est donc celui du logarithme de $n^{\frac{1}{\beta}}$. C'est pourquoi dans ce qui suit nous considérons $N_\varepsilon(n)$ comme négligeable vis-à-vis de n.

3. Si l'on calcule, de deux manières différentes, la quotité des couples de nombres x et y, entiers et positifs, satisfaisant à chacune des conditions $x(y-\varepsilon)\overline{\gtrless} n$, $x(y+\varepsilon)\overline{\gtrless} n$, on reconnaît que l'on peut écrire identiquement

$$\sum_{p=1}^{p=\left[\frac{n}{1-\varepsilon}\right]}\left[\frac{n}{p}+\varepsilon\right]=\sum_{p=1}^{p=n}\left[\frac{n}{p-\varepsilon}\right],$$
$$\sum_{p=1}^{p=\left[\frac{n}{1+\varepsilon}\right]}\left[\frac{n}{p}-\varepsilon\right]=\sum_{p=1}^{p=n-1}\left[\frac{n}{p+\varepsilon}\right].$$

On obtient, par soustraction,

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{p=1}^{p=n}\left\{\left[\frac{n}{p}+\varepsilon\right]-\left[\frac{n}{p}-\varepsilon\right]\right\}+\sum_{p=1}^{p=\left[\frac{n}{1-\varepsilon}\right]-n}\left[\frac{n}{n+p}+\varepsilon\right]+\\&+\sum_{p=1}^{p=n-\left[\frac{n}{1+\varepsilon}\right]}\left[\frac{n}{\left[\frac{n}{1+\varepsilon}\right]+p}-\varepsilon\right]=\sum_{p=1}^{p=n}\left\{\left[\frac{n}{p-\varepsilon}\right]-\left[\frac{n}{p+\varepsilon}\right]\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Des trois séries du premier membre, la dernière ne renferme que des termes nuls. Dans la deuxième, les $\left[\frac{n\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]$ premiers termes sont égaux à l'unité: les autres sont nuls. Par conséquent la formule (3) devient

$$L(\varepsilon) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=n}\left\{\left[\frac{n}{p-\varepsilon}\right] - \left[\frac{n}{p+\varepsilon}\right]\right\} - \frac{1}{n}\left[\frac{n\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] - \frac{N_{1-\varepsilon}(n)}{n}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, il vient

$$L(\varepsilon) = \sum_{p=1}^{p=\infty}\left\{\frac{1}{p-\varepsilon} - \frac{1}{p+\varepsilon}\right\} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1 + \frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon(1-\varepsilon)} - \pi\cot\pi\varepsilon. \qquad (4)$$

Par exemple

$$L\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{11}{3} - \pi = 0{,}525074\ldots$$

4. Avec beaucoup plus de facilité on obtient

$$\Lambda(\varepsilon) = 2\varepsilon. \qquad (5)$$

Cela étant, désignons par $\mathfrak{p}(\alpha,\ \beta)$ la *probabilité que la plus petite quantité, qu'il faut ajouter ou retrancher à une fraction quelconque prise au hasard, pour obtenir un nombre entier, soit comprise entre* α *et* β. C'est aussi la *probabilité que, dans une division quelconque, le rapport du plus petit reste au diviseur soit compris entre* α *et* β. On a, en vertu de principes connus, et en ayant égard aux formules (4) et (5),

$$\mathfrak{p}(0,\ \varepsilon) = \varepsilon + \frac{1}{2} + \frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon(1-\varepsilon)} - \frac{\pi}{2}\cot\pi\varepsilon. \qquad (6)$$

Si l'on observe que

$$\mathfrak{p}(\alpha,\ \beta) = \mathfrak{p}(0,\ \beta) - \mathfrak{p}(0,\ \alpha),$$

on obtient le résultat plus général

$$\mathfrak{p}(\alpha,\ \beta) = \frac{\beta-\alpha}{2}\left\{2 - \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)}\right\} + \frac{\pi\sin\pi(\beta-\alpha)}{2\sin\pi\alpha\cdot\sin\pi\beta}.$$

Par exemple

$$\mathfrak{p}\left(\frac{1}{8},\ \frac{3}{8}\right) = \pi - \frac{1111}{420} = 0{,}496354\ldots;$$

c'est-à-dire que: « *dans une division quelconque, il y a environ* 209 *à parier, contre* 211, *que le plus petit des deux restes est compris entre* $\frac{1}{8}$ *et* $\frac{3}{8}$ *du diviseur* ».

5. En concevant z comme engendré par la division de deux entiers, pris au hasard, il est clair que la *densité* $D(\varepsilon)$ des valeurs de $\mathfrak{T}(z)$, aux en-

virons de ε, est exprimée, dans le cas actuel, par la *demi*-dérivée de $\mathfrak{p}(0, \varepsilon)$, relative à ε. D'après cela, la formule (6) donne

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{4 \sin^2 \pi \varepsilon} - \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\right\}. \tag{7}$$

Par exemple:

$$D(0) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{4} = 1{,}072467\ldots; \qquad D\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3}{2} = 0{,}967401\ldots$$

$$D\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2} - \frac{71}{18} = 0{,}990357\ldots$$

On sait que la connaissance de la densité est essentielle, si l'on veut établir une formule générale, donnant les valeurs moyennes des fonctions de $\mathfrak{T}(z)$, pour autant que ces valeurs soient constantes. Dans le cas actuel, la formule

$$\mathfrak{M} = \frac{\int f(z) D(z)\, dz}{\int D(z)\, dz}$$

fournit l'égalité moyenne

$$f[\mathfrak{T}(z)] = \int_0^{\frac{1}{2}} f(z)\, dz + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{(1-z)^2}\right\} f(z)\, dz, \tag{8}$$

pourvu que l'on ait égard à (7).

6. D'ailleurs, ces formules ne sont pas essentiellement nouvelles: elles sont des conséquences nécessaires de celles qui ont été établies pour les fonctions des quantités z, engendrées par la division de deux entiers, pris au hasard; car, toute fonction de $\mathfrak{T}(z)$ est, en définitive, une fonction de z. Aussi la formule (8) doit pouvoir se déduire de la relation moyenne générale

$$f(z) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(z)\, dz + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{f(z)\, dz}{z^2},$$

dans laquelle on remplace $f(z)$ par $f[\mathfrak{T}(z)]$. Effectivement, on a:

$$f[\mathfrak{T}(z)] = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} f(z)\, dz + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 f(1-z)\, dz + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty} \int_p^{p+\frac{1}{2}} \frac{f(z-p)\, dz}{z^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty} \int_{p+\frac{1}{2}}^{p+1} \frac{f(p+1-z)\, dz}{z^2};$$

ou bien

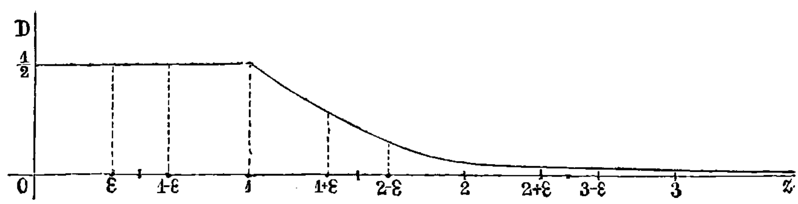
$$f[\mathfrak{T}(z)] = \int_0^{\frac{1}{2}} f(z)\,dz + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{(p+z)^2} + \frac{1}{(p+1-z)^2}\right\} f(z)\,dz =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} f(z)\,dz + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(2-z)^2} + \frac{1}{(2+z)^2} + \frac{1}{(3-z)^2} + \cdots\right\} f(z)\,dz.$$

On retrouve donc la formule (8). Par exemple, pour $f(z) = z$, on a, en moyenne,

$$\mathfrak{T}(z) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\log\frac{2p+1}{2p}\cdot\frac{2p+1}{2p+2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\log\frac{4}{\pi}\,.$$

7. La même observation doit être faite en ce qui concerne les densités. Reprenons le *diagramme des densités,* relatif aux quantités z:



Si l'on veut, par exemple, la densité des quantités $z - [z]$ autour de ε, il faut accumuler au point ε tous les points $1+\varepsilon$, $2+\varepsilon$, $3+\varepsilon,\ldots$, chacun avec sa propre densité. Conséquemment, la densité cherchée est

$$\frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{1}{(2+\varepsilon)^2} + \frac{1}{(3+\varepsilon)^2} + \cdots\right\},$$

conformément à ce qui a été trouvé dans l'article précédent. Pour avoir, maintenant, la densité de $\mathfrak{T}(z)$, autour de ε, il faut encore accumuler sur ε les points $1-\varepsilon$, $2-\varepsilon$, $3-\varepsilon,\ldots$ Une telle condensation se faisant sur un espace moitié moindre, le résultat doit être divisé par 2. On retrouve ainsi la formule

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{1}{(2-\varepsilon)^2} + \frac{1}{(2+\varepsilon)^2} + \frac{1}{(3-\varepsilon)^2} + \cdots\right\},$$

qui ne diffère pas de (7).

8. La notion de la densité est indispensable pour l'extension des considérations qui précèdent aux systèmes de plusieurs valeurs de $\mathfrak{T}(z)$, prises au hasard. Elle permet de résoudre des problèmes, qui paraissent inabordables par

toute autre voie. Par exemple, un système de deux valeurs de $\mathfrak{T}(z)$ étant représenté par un point dont les coordonnées sont égales à ces valeurs, tous les points analogues sont renfermés dans un carré, de côté $\frac{1}{2}$. La densité autour du point (x, y) est $D(x)D(y)$. L'intégrale

$$\iint D(x)D(y)\,dx\,dy,$$

étendue à tout le carré est égale à $\frac{1}{4}$: étendue à une aire fermée, contenue dans le carré, elle représente le quart de la probabilité que, ayant pris au hasard deux fractions quelconques, les valeurs correspondantes de la fonction $\mathfrak{T}$ soient les coordonnées d'un point, situé à l'intérieur de l'aire considérée. D'après cela, nous pouvons résoudre des questions semblables à la suivante: « *Ayant effectué, à l'aide de deux couples d'entiers, pris au hasard, deux divisions, quelle probabilité y a-t-il que la somme des rapports des plus petits restes aux diviseurs correspondants soit moindre que* $\frac{1}{2}$? » Ici, l'*aire favorable* est constituée par la moitié du carré, limitée par la diagonale qui ne passe pas par l'origine. La probabilité cherchée est donc

$$P = 4\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}-x} D(x)\,D(y)\,dx\,dy.$$

On peut ramener la question à une intégration simple, en substituant les fonctions $\mathfrak{p}$ aux fonctions D. On trouve immédiatement

$$P = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathfrak{p}\left(0,\ \frac{1}{2} - x\right)\mathfrak{p}'(0,\ x)\,dx.$$

Au point de vue arithmétique, le problème doit être considéré comme résolu; car nous savons exprimer la quantité soumise au signe d'intégration, en nous servant de la formule (6). Ce qui reste à faire est du ressort du Calcul intégral.

9. Les questions que nous venons de traiter sont susceptibles d'extension dans un autre sens, en supposant, par exemple, que la division soit effectuée à $\frac{1}{n}$ près. Alors, au lieu de considérer les quantités $z - [z]$, on doit étudier, plus généralement, les excès des quantités z sur les nombres de la forme $\alpha + \frac{\beta}{n}$

qui, par défaut, s'en rapprochent le plus. Ces excès sont évidemment exprimés par $z - \frac{[nz]}{n}\cdot$ Si $\mathfrak{D}_n(\varepsilon)$ est leur densité autour de la quantité ε, nécessairement comprise entre 0 et $\frac{1}{n}$, la simple inspection du diagramme des densités, relatif aux quantités z, donne immédiatement

$$\mathfrak{D}_n(\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{n}{2} H'(n\varepsilon + n - 1).$$

Par intégration entre deux limites quelconques, on obtient la $n^{\text{ème}}$ partie de la probabilité que la différence $z - \frac{[nz]}{n}$ soit comprise entre les mêmes limites. On peut avoir intérêt à connaître ce qui arrive lorsque n augmente indéfiniment. Alors ε doit nécessairement tendre à zéro de manière que le produit $n\varepsilon$ ait pour limite une fraction proprement dite θ. Si B_p est le $p^{\text{ème}}$ des *Nombres de Bernoulli,* définis par l'égalité symbolique $(B+1)^p - B^p = p$, la théorie de la fonction H donne

$$\mathfrak{D}_n\left(\frac{\theta}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(B-\theta)^p}{n^p},$$

c'est-à-dire:

$$\mathfrak{D}_n\left(\frac{\theta}{n}\right) = 1 + \frac{1-2\theta}{4n} + \frac{1-6\theta+6\theta^2}{12n^2} - \frac{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}{4n^3} + \cdots$$

On voit que, si l'on effectue les divisions avec une exactitude de plus en plus grande, le système des rapports des restes aux diviseurs correspondants tend à devenir *uniformément dense.* Cependant, le terme $\frac{1-2\theta}{4n}$ nous montre que, avant qu'une telle homogénéité soit atteinte, la tendance des restes à être moindres que la moitié des diviseurs persiste jusqu'à la limite, en même temps que le rapport θ, autour duquel on a la *densité moyenne,* croît et se rapproche de plus en plus de $\frac{1}{2}\cdot$

10. Connaissant la densité des quantités $z - \frac{[nz]}{n}$, nous pouvons procéder, sans difficultés, à leur évaluation moyenne. Nous avons d'abord

$$z - \frac{[nz]}{n} = n\int_0^{\frac{1}{n}} \mathfrak{D}_n(z)\cdot z\,dz,$$

d'où

$$nz - [nz] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{np}\int_0^1 (B-\theta)^p \theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left\{1 - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{B_{p+1}}{(p+1)n^p}\right\},$$

c'est-à-dire

$$[nz] = nz - \frac{1}{2} + \frac{1}{24n} - \frac{1}{240n^3} + \cdots$$

On voit bien que $nz - [nz]$ tend, en moyenne, vers $\frac{1}{2}$. D'ailleurs, sous une forme concise,

$$z - \frac{[nz]}{n} = \frac{1}{4n} + \frac{1}{2}\left\{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - (\log n + C)\right\}.$$

Par exemple:

$$z - [z] = \frac{3}{4} - \frac{C}{2} = 0{,}461392\ldots$$

$$z - \frac{[2z]}{2} = \frac{7}{8} - \frac{C + \log 2}{2} = 0{,}239818\ldots$$

$$z - \frac{[3z]}{3} = 1 - \frac{C + \log 3}{2} = 0{,}162086\ldots$$

. . . .

La combinaison de ces égalités en fournit d'autres, fort intéressantes. Par exemple:

$$[nz] - n[z] = \frac{3}{4} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2}\left\{\log n - H(n)\right\}.$$

Il faut remarquer que le premier membre est égal au *reste de la division de* $[nz]$ *par* n. Ainsi, pour $n = 2$, la fonction $[2z] - 2[z]$ est 0 ou 1, suivant que $[2z]$ est *pair* ou *impair*. La valeur $\log 2 - \frac{1}{4}$ représente donc la probabilité que le plus grand nombre entier, contenu dans $2z$, soit impair. Plus généralement, *la probabilité que* $[2nz]$ *soit impair est*

$$\frac{1}{4} + n\left\{\log 2 - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)\right\}.$$

Elle croît sans cesse, et tend vers $\frac{1}{2}$, lorsque n augmente indéfiniment. De même, la différence $[10^k z] - 10^k[z]$ n'est autre chose que le $k^{\text{ème}}$ chiffre, dans le développement de z en fraction décimale. La formule ci-dessus donne donc, pour $n = 10^k$, la valeur moyenne du $k^{ème}$ chiffre décimal, dans une division quelconque.

11. Au lieu de prendre, dans les divisions à $\frac{1}{n}$ près, les quotients par défaut, prenons les quotients les plus approchés, et appelons $\mathfrak{T}_n(z)$ les différences *absolues* entre ces quotients et les valeurs des fractions correspondantes. Il est évident que

$$\mathfrak{T}_n(z) = \frac{\mathfrak{T}(nz)}{n}.$$

Or, en appelant ε une quantité comprise entre 0 et $\frac{1}{2n}$, le diagramme des densités montre que la densité des valeurs de $\mathfrak{T}_n(z)$, autour de ε, est

$$D_n(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{D}_n(\varepsilon) + \mathfrak{D}_n\left(\frac{1}{n} - \varepsilon\right)\right\}.$$

Par conséquent

$$D_n\left(\frac{\theta}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{n}{4}\{H'(n+\theta-1) + H'(n-\theta)\},$$

θ étant compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. En développant le second membre suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{n}$ on obtient

$$D_n\left(\frac{\theta}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(B+\theta-1)^{2p}}{n^{2p}},$$

c'est-à-dire

$$D_n\left(\frac{\theta}{n}\right) = 1 + \frac{1-6\theta(1-\theta)}{12n^2} - \frac{1-30\theta^2(1-\theta)^2}{60n^4} + \cdots$$

La densité tend à devenir uniforme, à mesure que l'on effectue des divisions de plus en plus exactes.

12. Connaissant D_n, on obtient, par le procédé habituel, l'égalité moyenne

$$\mathfrak{T}(nz) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(4^{p+1}-1)B_{2p+2}}{(2p+1)(2p+2)}\cdot\frac{1}{(2n)^{2p}}.$$

On voit que, pour n infini, le second membre tend vers $\frac{1}{4}$, ce qui était à prévoir. D'ailleurs, la théorie de la *fonction gamma* permet de mettre la dernière égalité sous la forme que voici:

$$\mathfrak{T}(nz) = \frac{1}{8} + \frac{n}{2} \log \left\{ \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2n+3}{2n+2} \cdot \frac{2n+3}{2n+4} \cdots \right\};$$

ou bien sous celle-ci:

$$\mathfrak{T}(nz) = \frac{1}{8} + n \log \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \right\}.$$

Sur l'inversion de certaines séries.

(*Par* Ernest Cesàro, *étudiant*, *à Torre Annunziata*.)

1. En 1851, dans le *Journal de Liouville,* M. Tchébychew s'est occupé du problème suivant: « *Deux fonctions étant liées par une équation de l'une de ces trois formes*:

$$F(x)=f(x)+f(2x)+f(3x)+f(4x)+f(5x)+\cdots,$$
$$F(x)=f(x)+f(3x)+f(5x)+f(7x)+f(9x)+\cdots,$$
$$F(x)=f(x)-f(3x)+f(5x)-f(7x)+f(9x)-\cdots,$$

exprimer la fonction f moyennant la fonction F ».

En résolvant cette question, M. Tchébychew est parvenu à des résultats fort curieux, qui sont de la plus grande utilité pour l'étude des faits arithmétiques de l'infini: c'est ce qui nous engage à reprendre le problème posé par M. Tchébychew, en nous élevant à un point de vue tellement général, qu'il nous soit permis de découvrir le lien existant entre les recherches que l'on vient de rappeler et celles que le même savant a publiées, une année après, en collaboration avec M. Polignac, et qui sont restées célèbres par leur application à l'étude de la *répartition des nombres premiers.*

2. Imaginons une suite de fonctions

$$\varepsilon_1(x),\qquad \varepsilon_2(x),\qquad \varepsilon_3(x),\qquad \varepsilon_4(x),\ldots,$$

telles que l'on ait

$$\varepsilon_\alpha[\varepsilon_\beta(x)]=\varepsilon_{\alpha\beta}(x), \tag{1}$$

pour tout système de valeurs, entières et positives, de α et β, ce qui exige, avant tout, que $\varepsilon_1(x)$ coïncide constamment avec x. Soient

$$G(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}g(n)f[\varepsilon_n(x)],\qquad H(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}h(n)f[\varepsilon_n(x)], \tag{2}$$

et évaluons la somme

$$h(1)G[\varepsilon_1(x)] + h(2)G[\varepsilon_2(x)] + h(3)G[\varepsilon_3(x)] + \cdots$$

Il est évident que $f[\varepsilon_n(x)]$ se trouve seulement dans

$$G[\varepsilon_a(x)], \qquad G[\varepsilon_b(x)], \qquad G[\varepsilon_c(x)], \ldots,$$

où a, b, c,... représentent *tous les diviseurs* de n: ses coefficients, dans chacune de ces sommes, sont respectivement $g\left(\frac{n}{a}\right)$, $g\left(\frac{n}{b}\right)$, $g\left(\frac{n}{c}\right)$, $\cdots$: son coefficient total, dans la somme considérée, est donc

$$h(a)g\left(\frac{n}{a}\right) + h(b)g\left(\frac{n}{b}\right) + h(c)g\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = F(n). \tag{3}$$

Conséquemment

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} h(n)G[\varepsilon_n(x)] = \sum_{n=1}^{n=\infty} F(n)f[\varepsilon_n(x)]. \tag{4}$$

Si l'on observe que l'échange des lettres g et h, dans l'égalité (3), n'altère pas la fonction F, on peut écrire aussi

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} g(n)H[\varepsilon_n(x)] = \sum_{n=1}^{n=\infty} F(n)f[\varepsilon_n(x)]. \tag{5}$$

3. Veut-on opérer l'*inversion* des séries (2), c'est-à-dire exprimer la fonction f moyennant G ou H? Les formules (4) et (5) résolvent la question, dès que l'on prend $F(x) = 1$, pour $x = 1$, et $F(x) = 0$, en général. On obtient alors

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} h(n)G[\varepsilon_n(x)] = \sum_{n=1}^{n=\infty} g(n)H[\varepsilon_n(x)], \tag{6}$$

les fonctions g et h dépendant l'une de l'autre par la relation

$$h(a)g\left(\frac{n}{a}\right) + h(b)g\left(\frac{n}{b}\right) + h(c)g\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \left| \begin{array}{l} 1, \text{ pour } n = 1 \\ 0, \text{ en général.} \end{array} \right. \tag{7}$$

On sait que l'on peut prendre

$$g(x) = 1, \qquad h(x) = \mu(x).$$

Plus généralement, si la fonction g satisfait à la condition

$$g(x)g(y) = g(xy), \tag{8}$$

on doit prendre $h(x) = g(x)\mu(x)$. D'après cela, l'inversion de la série

$$G(x) = g(1)f[\varepsilon_1(x)] + g(2)f[\varepsilon_2(x)] + g(3)f[\varepsilon_3(x)] + \cdots \tag{9}$$

est immédiatement opérée par l'égalité

$$f(x) = \mu(1)g(1)G[\varepsilon_1(x)] + \mu(2)g(2)G[\varepsilon_2(x)] + \mu(3)g(3)G[\varepsilon_3(x)] + \cdots, \quad (10)$$

pourvu que la fonction g vérifie (8).

4. Les fonctions ε jouiront de la propriété (1), si nous prenons $\varepsilon_n(x) = nx$. Nous aurons alors le couple de séries inverses

$$G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} g(n) f(nx), \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(n) g(n) G(nx), \quad (11)$$

qui, en particulier, pour ces trois formes de $g(x)$:

$$1, \qquad \frac{1}{2}\{1-(-1)^x\}, \qquad \sin\frac{\pi x}{2}, \quad (12)$$

donne les trois couples que voici:

$$G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} f(nx), \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(n) G(nx), \quad (13)$$

$$G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} f\{(2n-1)x\}, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(2n-1) G\{(2n-1)x\}, \quad (14)$$

$$G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} f\{(2n-1)x\}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \mu(2n-1) G\{(2n-1)x\}. \quad (15)$$

Ceux-ci sont les seuls que M. Tchébychew ait considérés dans sa *Note.* Nous ne tarderons pas à en faire d'intéressantes applications.

5. Le cas où la fonction g satisfait à (8) est celui qui se présente ordinairement dans les applications, et nous avons vu qu'il suffit pour retrouver les trois exemples généraux, traités par M. Tchébychew. Il est cependant utile de faire observer que les cas où la fonction g est quelconque peuvent être ramenés au précédent. Pour ne pas trop compliquer nos formules, nous nous bornerons à opérer l'inversion de la série

$$G(x) = f(x) - f(2x) + f(3x) - f(4x) + \cdots$$

Ici, la fonction $g(x)$ n'est autre que $(-1)^{x+1}$, de sorte qu'elle ne jouit pas de la propriété (8); mais nous trouvons sans peine

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} 2^{n-1} G(2^{n-1}x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + \cdots;$$

puis, en vertu de (13),

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sum_{j=1}^{j=\infty} 2^{j-1} \mu(i) G(2^{j-1} i x). \quad (16)$$

Pour mettre le second membre sous sa forme normale, il faut chercher toutes les solutions *entières* et *positives* de l'équation $i \cdot 2^{j-1} = n$. On trouve ainsi que le coefficient de $G(nx)$ est

$$2^{e_n}\mu(\delta_n) + 2^{e_n-1}\mu(2\delta_n) + \cdots + \mu(2^{e_n}\delta_n),$$

où δ_n est le *plus grand diviseur impair* de n, tandis que e_n représente l'*exposant de la plus haute puissance de* 2, *qui divise* n. Dans la dernière somme, tous les termes qui suivent les deux premiers sont nuls, parceque les nombres soumis au signe μ admettent des facteurs carrés. Le coefficient de $G(nx)$ est donc

$$2^{e_n}\mu(\delta_n) + 2^{e_n-1}\mu(2\delta_n) = 2^{e_n-1}\mu(\delta_n),$$

pourvu que n soit *pair*. Si n est *impair*, le coefficient cherché est $\mu(n)$. D'après cela, la formule (16) devient

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \{3 + (-1)^{n+1}\} 2^{e_n-2}\mu(\delta_n)\, G(nx). \tag{17}$$

6. On a une application de la formule (17), en prenant la série

$$\pi\mathfrak{E}(x) = \frac{\sin 2\pi x}{1} - \frac{\sin 4\pi x}{2} + \frac{\sin 6\pi x}{3} - \frac{\sin 8\pi x}{4} + \cdots,$$

où $\mathfrak{E}(x)$ représente l'*excès de x sur le plus proche entier:* si x est à égale distance de deux entiers consécutifs, on doit faire $\mathfrak{E}(x) = 0$. La formule (17) donne immédiatement

$$\sin 2\pi x = \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{3 + (-1)^{n+1}}{4} \cdot \frac{\mu(\delta_n)}{\delta_n}\, \mathfrak{E}(nx).$$

De même, si $f(x)$ jouit de la propriété (8), on trouve

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \{3 + (-1)^{n+1}\} 2^{e_n}\mu(\delta_n) f(n) = \frac{4}{f(1) - f(2) + f(3) - \cdots}.$$

Par exemple:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{3 + (-1)^{n+1}}{4} \cdot \frac{\mu(\delta_n)}{\delta_n} = \frac{1}{\log 2}.$$

7. Naturellement, les *séries de Fourier* sont celles qui donnent lieu aux applications les plus curieuses. Ainsi, on a

$$\frac{\pi^2}{8}\left\{1 - 4\mathfrak{T}(x)\right\} = \frac{\cos 2\pi x}{1^2} + \frac{\cos 6\pi x}{3^2} + \frac{\cos 10\pi x}{5^2} + \cdots, \tag{18}$$

ou bien, après une transformation simple,

$$\frac{\pi^2}{4}\mathfrak{T}(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{1^2} + \frac{\sin^2 3\pi x}{3^2} + \frac{\sin^2 5\pi x}{5^2} + \cdots \tag{19}$$

Comme d'habitude, nous représentons par $\mathfrak{T}(x)$ la *plus petite quantité, qu'il faut ajouter ou retrancher à x, pour obtenir un nombre entier.* Cela étant, on trouve, en vertu de (14),

$$\frac{\mu(1)\mathfrak{T}(x)}{1^2} + \frac{\mu(3)\mathfrak{T}(3x)}{3^2} + \frac{\mu(5)\mathfrak{T}(5x)}{5^2} + \cdots = \frac{4}{\pi^2}\sin^2 \pi x.$$

Cette formule en engendre d'autres. Remarquons, en effet, que, si l'on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu(n) f(nx)}{n^r}, \qquad s(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu(2n-1) f\{(2n-1)x\}}{(2n-1)^r},$$

on a

$$S(x) = s(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu(2n) f(2nx)}{(2n)^r}.$$

Or, il est évident que $\mu(2n)$ est 0 ou $-\mu(n)$, suivant que n est *pair* ou *impair*. Par suite:

$$S(x) = s(x) - \frac{s(2x)}{2^r}.$$

Si, par exemple, on fait

$$r = 2, \qquad f(x) = \mathfrak{T}(x),$$

on a

$$s(x) = \frac{4}{\pi^2}\sin^2 \pi x, \qquad S(x) = \frac{4}{\pi^2}\left(\sin^2 \pi x - \frac{1}{4}\sin^2 2\pi x\right) = \frac{4}{\pi^2}\sin^4 \pi x.$$

Conséquemment

$$\frac{\mu(1)\mathfrak{T}(x)}{1^2} + \frac{\mu(2)\mathfrak{T}(2x)}{2^2} + \frac{\mu(3)\mathfrak{T}(3x)}{3^2} + \cdots = \frac{4}{\pi^2}\sin^4 \pi x.$$

L'inversion de la dernière série, au moyen de (13), donne encore

$$\frac{\pi^2}{4}\mathfrak{T}(x) = \frac{\sin^4 \pi x}{1^2} + \frac{\sin^4 2\pi x}{2^2} + \frac{\sin^4 3\pi x}{3^2} + \cdots$$

Ce résultat est, d'ailleurs, facile à déduire directement de la formule (19).

8. Soit encore $f(x) = q^x$, de sorte que, pour mod. $q < 1$, $G(x)$ prend une de ces formes:

$$\frac{q^x}{1-q^x}, \qquad \frac{q^x}{1-q^{2x}}, \qquad \frac{q^x}{1+q^{2x}}.$$

On a, d'après (13), (14), (15), et pour $x=1$,

$$q=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n\mu(n)}{1-q^n}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{2n-1}\mu(2n-1)}{1-q^{4n-2}}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}q^{2n-1}\mu(2n-1)}{1+q^{4n-2}}.$$

En d'autres termes, *chacune des séries*

$$\frac{q}{1-q}-\frac{q^2}{1-q^2}-\frac{q^3}{1-q^3}-\frac{q^5}{1-q^5}+\frac{q^6}{1-q^6}-\frac{q^7}{1-q^7}+\frac{q^{10}}{1-q^{10}}-\cdots,$$

$$\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^3}{1-q^6}-\frac{q^5}{1-q^{10}}-\frac{q^7}{1-q^{14}}-\frac{q^{11}}{1-q^{22}}-\frac{q^{13}}{1-q^{26}}+\frac{q^{15}}{1-q^{30}}-\cdots,$$

$$\frac{q}{1+q^2}+\frac{q^3}{1+q^6}-\frac{q^5}{1+q^{10}}+\frac{q^7}{1+q^{14}}+\frac{q^{11}}{1+q^{22}}-\frac{q^{13}}{1+q^{26}}-\frac{q^{15}}{1+q^{30}}-\cdots,$$

est égale à q.

9. Reprenons les séries (11). Pour les appliquer, nous pouvons utiliser tout développement tel que

$$\Psi(x)=x\psi(1)g(1)+x^2\psi(2)g(2)+x^3\psi(3)g(3)+\cdots,$$

où la fonction ψ jouit, comme g, de la propriété (8). Ce développement peut être écrit comme il suit:

$$\psi(x)\Psi(q^x)=g(1)\psi(x)q^x+g(2)\psi(2x)q^{2x}+g(3)\psi(3x)q^{3x}+\cdots,$$

de sorte que nous pouvons prendre

$$G(x)=\psi(x)\Psi(q^x),\qquad f(x)=q^x\psi(x).$$

Il en résulte

$$q=\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu(n)\psi(n)g(n)\Psi(q^n). \tag{20}$$

Les exemples du paragraphe précédent répondent au cas de $\psi(x)=1$. Faisons encore $\psi(x)=\frac{1}{x}\cdot$ Les formes de $\Psi(x)$, correspondant aux formes (12) de $g(x)$, sont

$$\log\frac{1}{1-x},\qquad \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\qquad \operatorname{arctg}x.$$

Par suite:

$$q=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\mu(n)}{n}\cdot\log\frac{1}{1-q^n}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\mu(2n-1)}{2n-1}\log\sqrt{\frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}}=$$
$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu(2n-1)}{2n-1}\operatorname{arctg}q^n.$$

Sous une autre forme:

$$e^{-q} = \frac{(1-q)(1-q^6)^{\frac{1}{6}}(1-q^{10})^{\frac{1}{10}}(1-q^{14})^{\frac{1}{14}}(1-q^{15})^{\frac{1}{15}}\dots}{(1-q^2)^{\frac{1}{2}}(1-q^3)^{\frac{1}{3}}(1-q^5)^{\frac{1}{5}}(1-q^7)^{\frac{1}{7}}(1-q^{11})^{\frac{1}{11}}\dots},$$

$$e^{2q} = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^3}{1+q^3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1-q^5}{1+q^5}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{1-q^7}{1+q^7}\right)^{\frac{1}{7}}\left(\frac{1-q^{11}}{1+q^{11}}\right)^{\frac{1}{11}}\left(\frac{1-q^{13}}{1+q^{13}}\right)^{\frac{1}{13}}\left(\frac{1+q^{15}}{1-q^{15}}\right)^{\frac{1}{15}}\dots,$$

$$q = \operatorname{arctg} q + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} q^3 - \frac{1}{5}\operatorname{arctg} q^5 + \frac{1}{7}\operatorname{arctg} q^7 +$$

$$+ \frac{1}{11}\operatorname{arctg} q^{11} - \frac{1}{13}\operatorname{arctg} q^{13} - \dots$$

10. Soient

$$s_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots, \qquad \sigma_m = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \cdots:$$

la seconde somme est étendue à tous les nombres *premiers,* la première à tous les nombres entiers. Il est évident que

$$s_m = \frac{1}{1-\frac{1}{2^m}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^m}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^m}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^m}} \cdots,$$

d'où, en prenant les logarithmes naturels, et en développant,

$$\log s_m = \sigma_m + \frac{1}{2}\sigma_{2m} + \frac{1}{3}\sigma_{3m} + \cdots$$

Par suite, en vertu de (13), nous avons

$$\sigma_m = \mu(1)\log s_m + \frac{\mu(2)}{2}\log s_{2m} + \frac{\mu(3)}{3}\log s_{3m} + \cdots$$

Par exemple, *la somme des inverses des carrés de tous les nombres premiers est*

$$\log\left\{\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\sqrt{90}}{\pi^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{954}}{\pi^2}\cdot\frac{\sqrt[5]{93555}}{\pi^2}\cdots\right\} = 0{,}45224\ldots$$

M. Tchébychew s'occupe, dans sa *Note,* de quelques autres séries du même genre. Il trouve, par exemple,

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots = 0{,}33498\ldots,$$

chaque nombre étant pris avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant qu'il est de la forme $4k-1$ ou $4k+1$.

11. Jusqu'ici nous avons supposé constamment $\varepsilon_n(x) = nx$; mais l'on est libre de prendre, pour $\varepsilon_n(x)$, toute fonction jouissant de la propriété (1). Voyons, par exemple, s'il est possible d'avoir

$$\varepsilon_n(x) = \frac{x\,U(n)}{1 - x\,V(n)},$$

en disposant convenablement des fonctions U et V. Pour satisfaire à (1), il faut que

$$U(\alpha)\,U(\beta) = U(\alpha\beta), \qquad V(\alpha)\,U(\beta) + V(\beta) = V(\alpha\beta).$$

Si la fonction $U(x)$ n'est pas constamment égale à l'unité, la seconde condition nous oblige à prendre

$$V(x) = k\,\{U(x) - 1\},$$

k étant une *constante*. Si $U(x) = 1$, on doit faire $V(x) = k \log x$. D'après cela, on trouve, par exemple, que la série

$$F(x) = f(x) + f\left(\frac{2x}{1-x}\right) + f\left(\frac{3x}{1-2x}\right) + f\left(\frac{4x}{1-3x}\right) + f\left(\frac{5x}{1-4x}\right) + \cdots$$

a pour inverse la série

$$f(x) = F(x) - F\left(\frac{2x}{1-x}\right) - F\left(\frac{3x}{1-2x}\right) - F\left(\frac{5x}{1-4x}\right) + F\left(\frac{6x}{1-5x}\right) - \cdots$$

De même, la série

$$F(x) = f(x) + f\left(\frac{x}{1-x\log 2}\right) + f\left(\frac{x}{1-x\log 3}\right) + $$
$$+ f\left(\frac{x}{1-x\log 4}\right) + f\left(\frac{x}{1-x\log 5}\right) + \cdots,$$

a pour inverse

$$f(x) = F(x) - F\left(\frac{x}{1-x\log 2}\right) - F\left(\frac{x}{1-x\log 3}\right) -$$
$$- F\left(\frac{x}{1-x\log 5}\right) + F\left(\frac{x}{1-x\log 6}\right) - \cdots$$

Nous laisserons de côté les applications.

12. Une autre forme importante de $\varepsilon_n(x)$ est $\frac{x}{n}\cdot$ On a, par exemple, le couple de séries inverses

$$F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} f\left(\frac{x}{n}\right), \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(n)\,F\left(\frac{x}{n}\right). \tag{21}$$

Ainsi, l'*identité de Tchébychew et Polignac*

$$\chi\left[\frac{x}{1}\right]+\chi\left[\frac{x}{2}\right]+\chi\left[\frac{x}{3}\right]+\cdots=\log\{[x]!\}, \tag{22}$$

permet de prendre, simultanément,

$$f(x)=\chi[x], \qquad F(x)=\log\{[x]!\}.$$

Donc, d'après (21),

$$\chi[x]=\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu(n)\log\left\{\left[\frac{x}{n}\right]!\right\}\cdot$$

Si x est un nombre *entier* n, on voit que *le plus petit multiple commun des* n *premiers nombres naturels est*

$$e^{\chi(n)}=\frac{\left[\frac{n}{1}\right]!\left[\frac{n}{6}\right]!\left[\frac{n}{10}\right]!\left[\frac{n}{14}\right]!\left[\frac{n}{15}\right]!\cdots}{\left[\frac{n}{2}\right]!\left[\frac{n}{3}\right]!\left[\frac{n}{5}\right]!\left[\frac{n}{7}\right]!\left[\frac{n}{11}\right]!\cdots}.$$

On a, de même, le couple de séries inverses

$$F(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\lambda(n)f\left(\frac{x}{n}\right), \qquad f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\lambda(n)\mu(n)F\left(\frac{x}{n}\right)\cdot \tag{23}$$

Or, d'après une formule connue,

$$\left[\frac{x}{1}\right]\lambda(1)+\left[\frac{x}{2}\right]\lambda(2)+\left[\frac{x}{3}\right]\lambda(3)+\cdots=[\sqrt{x}],$$

d'où il résulte que l'on peut prendre simultanément

$$f(x)=[x], \qquad F(x)=[\sqrt{x}].$$

Par suite, en vertu de (23),

$$[x]=[\sqrt{x}]+\left[\sqrt{\frac{x}{2}}\right]+\left[\sqrt{\frac{x}{3}}\right]+\left[\sqrt{\frac{x}{5}}\right]+\left[\sqrt{\frac{x}{6}}\right]+\cdots$$

Dans le second membre, les nombres 1, 2, 3, 5, 6,... sont *tous les nombres dépourvus de facteurs carrés*. Enfin, dans le couple

$$F(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}f\left(\frac{x}{2n-1}\right), \qquad f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu(2n-1)F\left(\frac{x}{2n-1}\right),$$

faisons $f(x)=\log\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\cdot$ Il vient d'abord

$$F(x)=\log\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots=\log\cdot\cos x;$$

La formule (4) devient

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} g(n)\nu(n)G[\varepsilon_n(x)] = \sum_{n=1}^{n=\infty} g(n)\log n f[\varepsilon_n(x)].$$

Nous prendrons $\varepsilon_n(x) = nx$, bien que les développements qui suivent subsistent pour toute forme de $\varepsilon_n(x)$, satisfaisant à (1). Réunissons, dans le premier membre, les termes de rang p, p^2, p^3,..., p étant *premier*. Pour ces termes, la fonction ν est égale, par définition, à $\log p$: le coefficient de $\log p$, dans le second membre, est donc

$$\mathfrak{L}(p,\ x) = g(p)G(px) + g(p^2)G(p^2x) + g(p^3)G(p^3x) + \cdots,$$

où, d'après (2),

$$G(x) = g(1)f(x) + g(2)f(2x) + g(3)f(3x) + \cdots \tag{26}$$

Conséquemment:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} g(n)f(nx)\log n = \sum_p \mathfrak{L}(p,\ x)\log p.$$

Pour $g(x) = 1$, et $x = 1$, on obtient la formule (25).

16. Pour finir, nous appellerons l'attention du lecteur sur l'excessive fécondité de la formule (4). Tout ce qui a été dit jusqu'à présent repose, en effet, sur cette relation, et se rapporte à *deux* formes, très-particulières, de $F(x)$. Pour chaque nouvelle forme de $F(x)$, on obtient une infinité d'autres résultats. Ainsi, soit $h(x) = g(x)\lambda(x)$, où $g(x)$ satisfait à (8). La fonction $F(x)$, généralement nulle, coïncide avec $g(x)$, lorsque x est un *carré*. Cela étant, nous trouvons que, si l'on définit la fonction G par l'égalité (26), on a:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \lambda(n)g(n)G(nx) = \sum_{n=1}^{n=\infty} g(n^2)f(n^2x).$$

Par exemple, pour

$$g(x) = \frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x}, \qquad f(x) = q^x,$$

et $x = 1$, on trouve que *la série elliptique* $q + q^9 + q^{25} + \cdots$ *équivaut à la série*

$$\operatorname{arctg} q + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} q^3 - \frac{1}{5}\operatorname{arctg} q^5 + \frac{1}{7}\operatorname{arctg} q^7 + \frac{1}{9}\operatorname{arctg} q^9 + \frac{1}{11}\operatorname{arctg} q^{11} - \cdots$$

puis:

$$1-\frac{4x^2}{\pi^2}=\frac{\cos x\cdot\cos\frac{x}{15}\cdot\cos\frac{x}{21}\cdot\cos\frac{x}{33}\cdot\cos\frac{x}{35}\cdots}{\cos\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{5}\cdot\cos\frac{x}{7}\cdot\cos\frac{x}{11}\cdot\cos\frac{x}{13}\cdots}.$$

13. Actuellement, il nous convient d'introduire dans nos calculs une nouvelle fonction, dont l'importance ne tardera pas à se faire sentir dans la suite de ces recherches. Supposons que le nombre n soit décomposé en ses facteurs premiers:

$$n=u^\alpha v^\beta w^\gamma\ldots$$

La fonction que nous voulons employer est

$$j(n)=(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}.\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\cdots)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}.$$

En particulier, nous supposerons $j(1)=1$. Observons que

$$j\left(\frac{n}{u}\right)=(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots-1}.\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\cdots-1)!}{(\alpha-1)!\,\beta!\,\gamma!\ldots}=-\frac{\alpha\, j(n)}{\alpha+\beta+\gamma+\cdots},$$

d'où il résulte

$$j\left(\frac{n}{u}\right)+j\left(\frac{n}{v}\right)+j\left(\frac{n}{w}\right)+\cdots=-j(n).$$

D'après cela, nous pouvons, dans (7), supposer

$$h(x)=\left|\begin{array}{l}1,\ \text{si } x \text{ est premier}\\ 0,\ \text{en général}\end{array}\right.,\qquad g(x)=j(x).$$

Les formules (6) deviennent

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}j(n)H[\varepsilon_n(x)]=\sum_p G[\varepsilon_p(x)];$$

la dernière somme est étendue à tous les nombres premiers, y compris l'unité, et les fonctions G, H, sont définies par les égalités

$$H(x)=\sum_p f[\varepsilon_p(x)],\qquad G(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}j(n)f[\varepsilon_n(x)].$$

Il en résulte, par exemple, que, pour opérer l'inversion de la série

$$G(x)=j(1)f(x)+j(2)f(2x)+j(3)f(3x)+j(4)f(4x)+\cdots,$$

on a la formule

$$f(x)=G(x)+G(2x)+G(3x)+G(5x)+G(7x)+G(11x)+\cdots$$

14. On utiliserait de la même manière le cas de $\varepsilon_n(x)=x^n$, ce qui nous reconduirait à quelques-unes des formules données précédemment. Une identité générale, qui demande pour $\varepsilon_n(x)$ l'emploi simultané des formes nx et x^n, a été donnée, en 1878, au *Congrès de Paris,* par M. Tchébychew. Ayant posé successivement

$$G(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty} f(nx), \qquad F(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty} G(x^n), \tag{24}$$

on a:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} f(n)\log n=\sum_p F(p)\log p. \tag{25}$$

Cette formule, pour ainsi dire intuitive, est une féconde source de résultats curieux. En particulier, elle renferme la formule (22), pour $f(x)=1$, si $x \overline{\leq} N$, et $f(x)=0$, si $x>N$, comme l'a fait observer M. Tchébychew. On sait aussi que M. Tchébychew se sert de la même formule pour démontrer que *les nombres premiers, de la forme* $4k+1$, *sont infiniment plus nombreux que ceux de la forme* $4k-1$. Si l'on se donne $f(x)$, la détermination de $F(x)$ peut se faire de plusieurs manières, parceque cette fonction se présente sous la forme d'une double série:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{i=\infty}\sum_{j=1}^{j=\infty} f(ix^j).$$

On peut se donner $F(x)$, et alors la détermination de $f(x)$ s'effectuera par les formules d'inversion, démontrées dans cette *Note.* En effet, l'inversion des séries (24), au moyen de (13) et de la formule analogue, relative au cas de $\varepsilon_n(x)=x^n$, donne

$$G(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu(n)F(x^n), \qquad f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu(n)G(nx).$$

Ces formules permettent d'exprimer la fonction f, au moyen de F, par l'élimination de la fonction auxiliaire G.

15. Dans le t. IV de la *Nouvelle Correspondance Mathématique,* M. Catalan a démontré fort simplement la formule (25). Nous tenons à faire voir que cette égalité est un cas extrêmement particulier de notre formule (4). Imaginons, à cet effet, deux fonctions quelconques, f et g, la dernière étant douée de la propriété (8). D'après (3), et en tenant compte des propriétés de la fonction ν, nous pouvons supposer

$$h(x)=g(x)\nu(x), \qquad F(x)=g(x)\log x.$$

De même, pour

$$g(x) = 1, \qquad f(x) = \frac{\sin^4 \pi x}{x^2},$$

on trouve que la série

$$\left(\frac{\sin \pi x}{1}\right)^4 + \left(\frac{\sin 4 \pi x}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sin 9 \pi x}{3}\right)^4 + \left(\frac{\sin 16 \pi x}{4}\right)^4 + \left(\frac{\sin 25 \pi x}{5}\right)^4 + \cdots,$$

multipliée par $\frac{4}{\pi^2}$, équivaut à

$$\frac{\mathfrak{T}(x)}{1} - \frac{\mathfrak{T}(2x)}{4} - \frac{\mathfrak{T}(3x)}{9} + \frac{\mathfrak{T}(4x)}{16} - \frac{\mathfrak{T}(5x)}{25} + \frac{\mathfrak{T}(6x)}{36} - \frac{\mathfrak{T}(7x)}{49} - \cdots$$

Fine del Tomo XIII.° (Serie II.ª)