COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

ÉLECTRICITÉ ET OPTIQUE

TOURS. — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS
PUBLIÉS PAR L'ASSOCIATION AMICALE DES ÉLÈVES ET ANCIENS ÉLÈVES
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

ÉLECTRICITÉ
ET OPTIQUE

II

LES THÉORIES DE HELMHOLTZ
ET LES EXPÉRIENCES DE HERTZ

Leçons professées pendant le second semestre 1889-90

PAR **H. POINCARÉ**, MEMBRE DE L'INSTITUT

Rédigées par **Bernard BRUNHES**
Ancien élève de l'École Normale Supérieure, agrégé de l'Université

PARIS
GEORGES CARRÉ, ÉDITEUR
58, RUE SAINT-ANDRÉ-DES-ARTS, 58

1891

PRÉFACE

Ce second volume contient les leçons que j'ai professées à la Sorbonne du mois de mars au mois de juin 1890 et qui ont été recueillies et rédigées par M. Brunhes. Je commence par lui en exprimer toute ma reconnaissance.

La première partie est consacrée aux théories d'Ampère et de Weber, la seconde à la théorie de Helmholtz qui contient comme cas particuliers celles de Neumann, de Weber et de Maxwell. J'ai dû assez profondément modifier le mode d'exposition de Helmholtz ; ce savant emploie en effet des notations nouvelles tout à fait différentes de celles de Maxwell ;

l'identité des équations auxquelles conduisent les deux théories, dans le cas où elles sont d'accord, se trouve ainsi artificiellement dissimulée ; le but principal de Helmholtz est ainsi moins complètement atteint qu'il ne pourrait l'être. Mais ce n'est pas tout, Helmholtz emploie les unités électrostatiques, c'est-à-dire des unités telles que l'attraction de deux unités électriques à l'unité de distance soit égale à l'unité de force ; mais cette attraction dépend du pouvoir inducteur K du diélectrique dans lequel sont plongées ces deux masses électriques. L'unité électrostatique n'est donc pas la même selon qu'on la définit dans l'air, comme on le fait d'ordinaire, ou dans un autre milieu. L'unité de Helmholtz est définie, non dans l'air, mais dans un milieu impolarisable idéal qui dépend de l'hypothèse faite sur la valeur de l'un des deux coefficients numériques qui caractérisent la théorie. Cette unité est donc variable avec ce coefficient et dans le cas particulier où la théorie de Helmholtz est d'accord avec celle de Maxwell, *cette unité est nulle.* Il résulte de ces circonstances d'incessantes obscurités qui déroutent le lecteur. Mais ces difficultés sont purement artificielles. J'ai cherché à les éviter en prenant, comme Maxwell, les unités électromagnétiques.

La troisième partie du cours est consacrée à la théorie des expériences de Hertz. Beaucoup de personnes trouveront cette tentative bien prématurée et elles n'auront pas tort ; je n'ai pu arriver à aucune conclusion définitive, les résultats expérimentaux ne le permettent pas encore. Aussi cette partie de l'ouvrage est destinée à vieillir rapidement et il faudra la recommencer dans quelques années. Mais l'importance de la question est assez grande pour que l'on prenne la peine de recommencer cette tâche plusieurs fois. Peut-être d'ailleurs les quelques tentatives que j'ai pu faire et les doutes même que j'exprime ne seront-ils pas sans utilité pour les chercheurs qui construiront l'édifice définitif.

Nous avons cru devoir ajouter aux leçons rédigées par M. Brunhes deux chapitres complémentaires. Le premier, qui contient la description succincte des expériences de Hertz est l'œuvre personnelle de M. Blondin. Il avait été rédigé d'abord pour être joint au premier volume qui contient les leçons professées de mars à juin 1888 (*et non* 1889 *comme la couverture de ce premier volume le porte par erreur*). Il trouve mieux sa place à côté de la théorie détaillée de ces mêmes expériences.

D'autre part j'ai terminé par un chapitre complémentaire que les progrès rapides de la science avaient rendu nécessaire. Entre le moment où j'ai clos le cours et celui où le manuscrit a été livré à l'impression, c'est-à-dire entre les mois de juin et de novembre 1890, diverses publications, et en particulier celle des nouvelles expériences de MM. Sarrasin et de la Rive ont modifié mes idées sur certains points.

INTRODUCTION

Quelques mots des notations employées dans cet ouvrage. Je désignerai habituellement par x, y, z, les coordonnées du point attiré, par x', y', z', celles du point attirant, par r la distance de ces deux points. Je représenterai un élément de volume par $d\tau$ ou par $d\tau'$ suivant que j'aurai appelé le centre de gravité de cet élément, x, y, z ou x', y', z'. De même un élément de surface s'appellera $d\omega$ et ses cosinus directeurs l, m, n, si son centre de gravité s'appelle x, y, z ; il s'appellera $d\omega'$, et ses cosinus directeurs l', m', n' s'il a pour centre de gravité le point x', y', z'. Je suivrai la même règle pour une fonction quelconque ; si par exemple j'appelle ρ la densité électrique au point x, y, z, j'appellerai ρ' la densité électrique au point x', y', z'.

Je ferai un fréquent usage de la formule de Maxwell (Voir le 1er volume de cet ouvrage, § 117, page 130) qui permet de transformer une intégrale de ligne en intégrale de surface et réciproquement.

J'emploierai aussi la méthode de l'intégration par parties appliquée aux intégrales multiples.

C'est ainsi qu'on aura par exemple :

$$\int u \frac{dv}{dx} d\tau = \int luv d\omega - \int v \frac{du}{dx} d\tau.$$

Les intégrales prises par rapport à $d\tau$ sont étendues à un volume quelconque et la première intégrale du second membre à tous les éléments $d\omega$ de la surface qui limite ce volume et dont l, m, n sont les cosinus directeurs.

Il arrivera souvent que les fonctions u, v que nous aurons à considérer s'annuleront à l'infini. Alors je pourrai écrire :

$$\int u \frac{dv}{dx} d\tau = - \int v \frac{du}{dx} d\tau$$

les intégrations étant étendues à l'espace tout entier.

C'est ce que j'appellerai *intégrer par parties dans tout l'espace.*

Ces transformations supposent les fonctions continues. Il n'en sera pas toujours ainsi. Il arrivera souvent qu'à la surface de séparation de deux milieux, par exemple d'un conducteur et d'un diélectrique, certaines des fonctions que nous aurons à considérer seront discontinues. On pourrait faire le calcul complètement en tenant compte de ces discontinuités et on verrait que les résultats ne sont pas changés.

Mais il est plus simple de tourner la difficulté. Il suffit pour cela de supposer que deux milieux différents ne sont pas séparés par une surface géométrique, mais par une couche de passage très mince, où les propriétés de la matière varient d'une manière très rapide mais continue. Il est assez probable qu'il en est effectivement ainsi ; mais quoi qu'il en soit de la réalité, il est clair que l'on peut substituer l'hypothèse de la couche de passage à celle de la séparation brusque sans altérer aucun résultat expérimentalement vérifiable, puisque l'épaisseur de cette couche peut toujours être supposée très petite.

ÉLECTRICITÉ ET OPTIQUE

II

THÉORIE DE HELMHOLTZ — EXPÉRIENCES DE HERTZ

Je me propose d'exposer les travaux qui ont été faits en électrodynamique, par Ampère d'abord, puis par Weber qui a tenté de relier, dans une explication commune, les phénomènes électrostatiques, électrodynamiques et l'induction, ensuite par Helmholtz et par Maxwell, et j'appliquerai les principes posés par ces divers savants à la discussion des expériences de Hertz, en cherchant si ces expériences ne peuvent pas nous permettre de décider entre les diverses théories en présence.

Une des difficultés que présente cette étude est la différence des notations, particulièrement la différence entre la notation de Helmholtz et celle de Maxwell; c'est cette dernière que j'emploierai constamment.

CHAPITRE I

FORMULE D'AMPÈRE

1. Action de deux éléments de courant. — Ampère avait la prétention de ne rien emprunter qu'à l'expérience [1]. Cette prétention n'est pas absolument justifiée, car l'expérience ne peut porter sur deux éléments de courant. On peut observer l'action d'un courant fermé sur une portion de courant, mais non l'action d'une portion de courant sur une autre.

Si, en effet, la décharge d'un condensateur par exemple constitue un courant qui d'après les idées antérieures à Maxwell n'est pas fermé, ce courant est de trop courte durée pour qu'on puisse l'utiliser dans les expériences. On ne peut donc expérimenter que sur des courants fermés; on peut, il est vrai, par divers artifices, rendre mobile une portion d'un des courants, ce qui permet d'étudier l'action d'un courant fermé sur une portion de courant (voir ce sujet discuté plus

[1] Le titre de son ouvrage est : *Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience*, 1826.

loin, § 19); mais cette portion mobile reste toujours soumise à l'action simultanée de tous les éléments de l'autre courant fermé.

Ampère qui énonce une loi applicable à deux éléments de courant a dû par conséquent faire des hypothèses :

1° Pour avoir l'action d'un circuit fermé sur un élément de courant, il suffit de composer les actions des éléments de ce circuit fermé sur l'autre élément ;

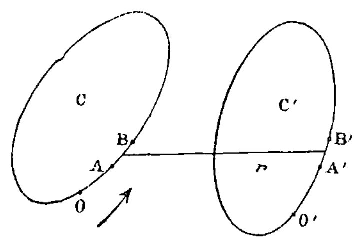

Fig. 1.

2° L'action de deux éléments de courant est une force dirigée suivant la droite qui les joint.

Soient deux circuits C et C'. Soit A un point de C. Je définis le point A par la longueur s de l'arc OA comptée à partir du point fixe O.

Soient AB et A'B' deux éléments appartenant respectivement à C et à C'. Soit O' un point fixe de C' à partir duquel nous compterons les arcs.

$$\text{Soient } OA = s; \qquad OB = s + ds$$
$$O'A' = s'; \qquad O'B' = s' + ds'$$

d'où

$$AB = ds. \text{ De même } A'B' = ds'.$$

Soient x, y, z les coordonnées de A

$x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, celles de B

x', y', z' A'

$x' + dx'$, $y' + dy'$, $z' + dz'$ B'

La distance des deux éléments AB et A'B' est donnée par

$$(1) \qquad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

r est fonction de s et s'

Les cosinus directeurs de AB sont $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$

de A'B' $\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}$

de AA' $\frac{x'-x}{r}, \frac{y'-y}{r}, \frac{z'-z}{r}$

Soient θ l'angle de AB avec AA'

θ' A'B' avec AA'

ε des deux éléments AB et A'B'

On a :

$$(2) \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{dx}{ds}\cdot\dfrac{x'-x}{r} + \dfrac{dy}{ds}\cdot\dfrac{y'-y}{r} + \dfrac{dz}{ds}\cdot\dfrac{z'-z}{r} \\ \cos\theta' = \dfrac{dx'}{ds'}\cdot\dfrac{x'-x}{r} + \dfrac{dy'}{ds'}\cdot\dfrac{y'-y}{r} + \dfrac{dz'}{ds'}\cdot\dfrac{z'-z}{r} \\ \cos\varepsilon = \dfrac{dx}{ds}\cdot\dfrac{dx'}{ds'} + \dfrac{dy}{ds}\cdot\dfrac{dy'}{ds'} + \dfrac{dz}{ds}\cdot\dfrac{dz'}{ds'} \end{cases}$$

Entre ces trois cosinus et les dérivées de la fonction r existent certaines relations.

On trouve en effet par différentiation :

$$(3) \qquad r\frac{dr}{ds} = \sum (x - x')\frac{dx}{ds}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{ds} = \sum \dfrac{x-x'}{r}\cdot\dfrac{dx}{ds} = -\cos\theta \\ \dfrac{dr'}{ds'} = \sum \dfrac{x'-x}{r}\cdot\dfrac{dx'}{ds'} = \cos\theta' \end{cases}$$

Différentions (3) par rapport à s'.

$$(5) \quad \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'} + r \frac{d^2r}{dsds'} = -\sum \frac{dx'}{ds'} \cdot \frac{dx}{ds} = -\cos \varepsilon$$

d'où :

$$r \frac{d^2r}{dsds'} = \cos \theta \cos \theta' - \cos \varepsilon$$

L'action de ds sur ds' est évidemment proportionnelle aux longueurs ds et ds' des deux éléments et aux intensités i et i' des deux courants; elle dépend d'autre part de la distance r des deux éléments et des angles θ, θ' et ε. Elle ne peut manifestement dépendre d'aucune autre quantité. Nous pouvons donc représenter cette action par la formule :

$$ii'dsds'f(r, \theta, \theta', \varepsilon)$$

et il nous reste à déterminer la fonction f.

Afin d'abréger les écritures nous supposerons :

$$i = i' = 1$$

quitte à rétablir à la fin du calcul le facteur ii'.

Ampère a emprunté à l'expérience les trois principes suivants qui serviront de point de départ à l'analyse qui va suivre :

1° Le principe des courants sinueux;

2° L'action d'un courant fermé sur un élément quelconque est normale à cet élément;

3° L'action d'un solénoïde fermé sur un élément quelconque est nulle.

Soit $Adxds'$ l'action qu'exercerait sur ds' un élément de courant dx qui serait la projection de ds sur l'axe des x; de même $Bdyds'$ et $Cdzds'$. Le *principe expérimental des courants* *sinueux* qui est le premier emprunt fait par Ampère à l'expérience, nous apprend que l'action de ds est la résultante des actions de ses projections et, comme toutes ces forces sont dirigées suivant la même droite AA', on a :

$$f(r, \theta, \theta', \varepsilon)\, ds ds' = A dx ds' + B dy ds' + C dz ds'$$
$$f = A \frac{dx}{ds} + B \frac{dy}{ds} + C \frac{dz}{ds}$$

La fonction f est donc linéaire par rapport aux cosinus directeurs de AB.

La fonction f dépend de r, θ', θ et ε ; r et θ' ne dépendent pas des cosinus directeurs $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$; $\cos \theta$ et $\cos \varepsilon$ sont linéaires et homogènes par rapport à ces cosinus. Donc f ne peut être linéaire et homogène par rapport à ces mêmes cosinus directeurs que si f est linéaire et homogène en $\cos \theta$ et $\cos \varepsilon$, ou, ce qui revient au même, en $\frac{dr}{ds}$ et $\frac{d^2 r}{ds ds'}$.

Elle est de même linéaire et homogène en $\frac{dr}{ds'}$ et $\frac{d^2 r}{ds ds'}$.

Donc elle doit être linéaire et homogène en $\frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'}$ d'une part et $\frac{d^2 r}{ds ds'}$ d'autre part.

Donc :

$$(6) \quad \begin{aligned} f ds ds' &= \left(A \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'} + B \frac{d^2 r}{ds ds'} \right) ds ds' \\ &= \left[\psi(r) \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'} + 2 \varphi(r) \frac{d^2 r}{ds ds'} \right] ds ds' \end{aligned}$$

A et B sont en effet fonctions de r seul, et je puis poser :

$$A = \psi(r) \qquad B = 2 \varphi(r).$$

2. Pour déterminer ces fonctions, il faudra deux expériences. Ampère a montré qu'un arc de cercle quelconque mobile autour de son centre ne se déplace pas, l'action tangentielle exercée sur un élément quelconque de cet arc de cercle est donc nulle. Donc l'action d'un courant fermé sur un élément est normale à cet élément, c'est le second principe d'Ampère énoncé plus haut.

Donc l'intégrale :

$$ds' \int \left[\psi(r).\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'} + 2\varphi(r)\frac{d^2r}{dsds'}\right]\frac{dr}{ds'}ds = 0$$

l'intégrale étant prise le long du circuit C, qui est quelconque.

Posons :

$$\rho = \frac{dr}{ds'}$$

$$\int [\psi(r)\,\rho^2 dr + 2\varphi(r)\,\rho d\rho] = 0$$

La quantité sous le signe $\int$ est donc la différentielle exacte d'une fonction des deux variables indépendantes r et ρ, c'est-à-dire qu'on a :

$$2\rho\psi(r) = 2\rho\varphi'(r)$$

ou :

$$\psi(r) = \varphi'(r)$$

Il nous reste à déterminer la fonction φ, ce que le troisième principe expérimental d'Ampère nous permettra de faire ; en attendant, tirons toutes les conséquences des deux premiers principes et montrons d'abord que l'action élémentaire

$$\left[\varphi'(r)\frac{dr}{ds}\frac{dr'}{ds'} + 2\varphi(r)\frac{d^2r}{dsds'}\right]dsds'$$

peut se mettre sous la forme $V \dfrac{d^2U}{dsds'}$, V et U étant fonctions de r seul.

$$\frac{dU}{ds} = U' \frac{dr}{ds}, \text{ en écrivant } U' \text{ pour } \frac{dU}{dr}.$$

$$\frac{d^2U}{dsds'} = U' \frac{d^2r}{dsds'} + U'' \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'}$$

Je remplace et j'identifie :

$$VU'' = \varphi'$$

$$VU' = 2\varphi$$

$$\frac{U''}{U'} = \frac{\varphi'}{2\varphi}$$

$$\log U' = \frac{1}{2} \log \varphi$$

$$U' = \sqrt{\varphi}$$

$$V = 2\sqrt{\varphi} = 2U'$$

et l'action de deux éléments est mise ainsi sous la forme

$$2dsds'U' \frac{d^2U}{dsds'}.$$

3. Travail produit par un déplacement relatif de deux circuits. — Si nous donnons à r un accroissement δr, l'action de l'élément AB sur A'B' produira un certain travail. Nous choisirons les signes, suivant les conventions ordinaires en électrodynamique, de façon que la force soit positive quand elle est attractive; alors le travail élémentaire dû à une variation δr est :

$$-\, 2dsds'U'\delta r. \frac{d^2U}{dsds'} = -\, 2dsds'\delta U \frac{d^2U}{dsds'}$$

et le travail dû à l'action totale d'un des circuits sur l'autre est :

$$\delta T = -2 \int \int \delta U \frac{d^2 U}{ds ds'} ds ds'$$

Transformons, en intégrant par parties.

$$\int u \frac{dv}{ds} ds = [uv] - \int v \frac{du}{ds} ds = -\int v \frac{du}{ds} ds$$

car le contour d'intégration qui n'est autre que le circuit C étant fermé, *uv* a la même valeur aux deux limites d'intégration.

$$-\int \delta U \frac{d^2 U}{ds ds'} ds = \int \frac{dU}{ds'} \frac{d\delta U}{ds} ds = +\int \frac{dU}{ds'} \delta \frac{dU}{ds} ds$$

Donc :

$$\delta T = 2 \int \int \frac{dU}{ds'} \delta \frac{dU}{ds} ds ds'$$

et comme rien ne distingue C' de C on a aussi :

$$\delta T = 2 \int \int \frac{dU}{ds} \delta \frac{dU}{ds'} ds ds'$$

Donc :

$$\delta T = \int \int \left[\frac{dU}{ds} \delta \frac{dU}{ds'} + \frac{dU}{ds'} \delta \frac{dU}{ds} \right] ds ds'$$

$$\delta T = \delta \int \int \frac{dU}{ds} \frac{dU}{ds'} ds ds'$$

δT est l'accroissement de la fonction

$$(7) \qquad T = \int\int \frac{dU}{ds}\frac{dU}{ds'}\,ds\,ds'$$

Le travail élémentaire est donc la différentielle d'une fonction T dépendant seulement des positions relatives des deux circuits. Cette fonction [1] est le *potentiel électrodynamique mutuel* des deux circuits. Cette forme élégante donnée à l'expression du travail élémentaire est due à M. Bertrand [2].

4. Nous avons ainsi démontré l'existence d'un potentiel pour l'action de deux courants fermés, en nous appuyant simplement sur le fait que l'action d'un courant fermé sur un élément de courant est normale à l'élément.

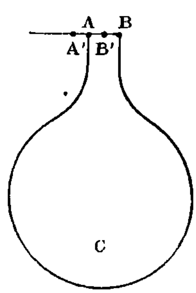

Fig. 2.

On peut, réciproquement, montrer que ce fait expérimental est une conséquence nécessaire de l'existence d'un potentiel.

Soit un élément AB, mobile suivant sa propre direction. S'il se déplace en A'B', le courant conserve la même position dans l'espace, il décrit le même circuit. Le potentiel électrodynamique, s'il existe, n'a pas varié, donc pas de travail, ce qui prouve que la force est normale au chemin parcouru.

(1) Le travail est, *en grandeur et en signe*, l'accroissement du potentiel, si l'on convient, comme nous l'avons fait, de considérer comme positive une force attirante.

(2) *Théorie mathématique de l'électricité* (1890), § 131, p. 175.

5. Détermination de la fonction U. — Pour aller plus loin, il faut de nouveau recourir à l'expérience. Nous nous appuierons sur ce fait que l'action d'un solénoïde fermé sur un élément de courant est toujours nulle.

On a :

$$T = \int\int \frac{dU}{ds}\frac{dU}{ds'}\,dsds' = \int\int U'^2\,\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}\,dsds'$$

ou en tenant compte des équations (3) (page 4) :

$$T = \int ds \left[\frac{dx}{ds}\int U'^2\,\frac{dr}{ds'}\cdot\frac{x-x'}{r}\,ds'\right.$$
$$\left. + \frac{dy}{ds}\int U'^2\,\frac{dr}{ds'}\cdot\frac{y-y'}{r}\,ds' + \frac{dz}{ds}\int U'^2\,\frac{dr}{ds'}\cdot\frac{z-z'}{r}\,ds'\right]$$

On peut écrire pour abréger :

$$T = \int (Fdx + Gdy + Hdz)$$

en posant :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} F &= \int U'^2\,\frac{dr}{ds'}\cdot\frac{x-x'}{r}\,ds' \\ G &= \int U'^2\,\frac{dr}{ds'}\,\frac{y-y'}{r}\,ds' \\ H &= \int U'^2\,\frac{dr}{ds'}\cdot\frac{z-z'}{r}\,ds' \end{aligned}\right.$$

En effectuant les intégrations le long de C′ on peut écrire

$$F = \int (x - x') \cdot \frac{U'^2}{r} \, dr = \int (x - x') \, f'(r) \, dr$$

en posant :

$$f'(r) = \frac{U'^2}{r}$$

Intégrons par parties : le terme fini est nul et l'on a :

$$F = -\int f(r) \frac{d(x - x')}{ds'} \, ds' = + \int f(r) \, dx'$$

car

$$\frac{d(x - x')}{ds'} = -\frac{dx'}{ds'}$$

Sous cette forme il est aisé de voir qu'on a :

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0 \tag{9}$$

En effet

$$\frac{dF}{dx} = \int \frac{df(r)}{dx} \, dx' = -\int \frac{df(r)}{dx'} \, dx'$$

car

$$\frac{dr}{dx} = -\frac{dr}{dx'}$$

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = -\int \left(\frac{df}{dx'} dx' + \frac{df}{dy'} dy' + \frac{df}{dz'} dz' \right) = -\int df =$$

Les quantités F, G, H définies plus haut sont ce que Maxwell appelle les composantes du *potentiel vecteur* dû à un courant d'intensité 1 parcourant le circuit C'. Pour avoir le potentiel vecteur dû à un courant d'intensité i parcourant le même circuit, il faudrait multiplier par i les intégrales (8).

6. Nous nous proposons maintenant de calculer le potentiel électrodynamique d'un solénoïde par rapport au courant C', et d'exprimer que ce potentiel est nul quand le solénoïde est fermé.

Nous avons trouvé :

$$T = \int (F dx + G dy + H dz)$$

F, G, H étant les composantes du potentiel vecteur dû à C' et l'intégrale étant prise le long de C.

Je vais d'abord transformer T en une intégrale étendue à l'aire d'une surface passant par le contour C et limitée à ce contour [1]

$$(10) \quad T = \int \left[l \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + m \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + n \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right] d\omega$$

$d\omega$ étant un élément de l'aire considérée, et l, m, n les cosinus directeurs de la normale à cet élément.

Rappelons brièvement la définition d'un solénoïde. Un solénoïde est un ensemble d'une infinité de courants infiniment petits construits de la manière suivante :

Soit un arc de courbe quelconque que l'on appelle l'axe du

[1] Voir pour ce genre de transformation, 1er volume, p. 130.

solénoïde. Partageons cet arc de courbe en une infinité d'éléments $d\sigma$ *tous égaux entre eux.*

A chacun de ces éléments correspondra un courant élémentaire défini comme il suit :

1° L'intensité de ce courant sera i;

2° Ce courant parcourra un circuit infiniment petit dont le plan sera normal à l'élément $d\sigma$;

3° Ce circuit limitera une aire plane infiniment petite égale à $d\omega$;

4° Le centre de gravité de cette aire coïncidera avec le milieu de $d\sigma$;

5° Les valeurs de i et de $d\omega$ seront les mêmes pour tous les courants élémentaires.

L'ensemble de ces courants élémentaires constituera le solénoïde.

Nous sommes convenus plus haut de supposer provisoirement $i = 1$ pour abréger un peu les écritures.

Soient donc un solénoïde et un élément d'arc $d\sigma$ pris sur son axe et dont les cosinus directeurs sont l, m, n. Dans le plan normal à l'axe mené par l'élément $d\sigma$, circule un courant qui embrasse une aire infiniment petite $d\omega$. Le potentiel T dû à l'action de ce courant se calcule aisément. L'intégrale (10) se réduit en effet à un seul élément qui peut s'écrire :

$$d\omega \sum l \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right) = \frac{d\omega}{d\sigma} \sum dx \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)$$

car :

$$dx = l d\sigma$$
$$dy = m d\sigma$$
$$dz = n d\sigma$$

$d\omega$ et $d\sigma$ sont des constantes, quand on passe d'un élément du solénoïde à un autre. Pour avoir le potentiel dû au solénoïde total, il faut intégrer par rapport à dx, dy, dz le long de l'axe, et l'on a :

$$T = \frac{d\omega}{d\sigma} \int \left[dx\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right) + dy\left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right) + dz\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right) \right].$$

7. L'action d'un solénoïde fermé est nulle ; donc la quantité sous le signe $\int$ est une différentielle exacte, ce qui s'écrit :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)$$

ou, ce qui revient au même :

$$\Delta F - \frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right) = 0.$$

Or, d'après l'équation (9)

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0;$$

par suite

$$\Delta F = 0$$

Mais $\Delta F = -\int \Delta f(r)\, dx'$; il faut donc que $\Delta f(r)$ soit une constante, pour que l'intégrale précédente, prise le long d'un circuit fermé quelconque, soit nulle. En effet cette intégrale ne peut être nulle que si $\Delta f(r)$ est fonction de x' seulement. Mais $\Delta f(r)$ est une fonction de r seulement. Elle ne peut donc être fonction de x' qu'en se réduisant à une constante. Écrivons donc :

$$\Delta f(r) = h.$$

On tire de là :

$$f(r) = \frac{hr^2}{6} + k + \frac{k'}{r}$$

La fonction $f(r)$ devant s'annuler à l'infini, h et k sont nécessairement nuls, et il vient :

$$f(r) = \frac{k'}{r}$$

L'expérience montre que $k' = 1$ en valeur absolue, il faut ici faire intervenir l'expérience.

Nous avons pu en effet, par une convention arbitraire, choisir l'unité de magnétisme, puis celle d'intensité de façon que le coefficient qui entre dans l'expression de l'action mutuelle de deux aimants soit égale à 1, de même que celui qui entre dans l'expression de l'action d'un courant sur un aimant. Il n'en est plus de même ici ; nous ne disposons plus du choix de l'unité que les conventions précédentes ont fixée définitivement ; c'est donc l'expérience seule qui peut nous faire savoir que le coefficient k' est bien égal à 1.

De plus, nous devons prendre le signe $+$, $f(r) = +\frac{1}{r}$; c'est encore l'expérience qui l'indique, les conventions de signe étant celles qui ont été faites plus haut. Jusqu'ici nous n'avions considéré que des expériences dans lesquelles on avait une action nulle ; une nouvelle expérience pouvait seule décider si, entre deux éléments parallèles et de même sens, s'exerçait une attraction ou une répulsion.

Ainsi

$$f'(r) = -\frac{1}{r^2} = \frac{U'^2}{r}$$

d'où :

$$U' = \pm \frac{i}{\sqrt{r}}$$

$$U' \frac{d^2U}{dsds'} = U' \frac{d}{ds}\left(U' \frac{dr}{ds'}\right) = U'U'' \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + U'^2 \frac{d^2r}{dsds'}$$

$$= + \frac{1}{2r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - \frac{1}{r}\frac{d^2r}{dsds'}$$

et la force attractive exercée entre deux éléments est :

$$2ii'dsds'U' \frac{d^2U}{dsds'} = \frac{ii'dsds'}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - 2r\frac{d^2r}{dsds'}\right)$$

On peut encore mettre cette expression sous la forme :

$$(11) \qquad \frac{2ii'dsds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right)$$

8. Relation entre la force électromagnétique et le potentiel vecteur. — On a vu dans le premier volume (nos 111 à 113, p. 122 *sqq*), que l'action exercée par C', sur un pôle magnétique égal à 1 [1] est une force qui dérive d'un potentiel et dont les composantes sont :

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx}$$

$$\beta = -\frac{d\Omega}{dy}$$

$$\gamma = -\frac{d\Omega}{dz}$$

[1] On peut avoir un pôle magnétique isolé, en considérant un solénoïde magnétique de longueur infinie dont un seul pôle est à distance finie.

Ω est le potentiel magnétique dû à un feuillet limité au contour du circuit C′, et de puissance égale à l'intensité du courant. Soit $d\omega'$ un élément de l'aire limitée au contour C′, et l', m', n', les cosinus directeurs de la normale,

$$\Omega = \int \left(l' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + m' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} + n' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} \right) d\omega' .$$

$\frac{1}{r}$ est fonction de $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ donc

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx} = -\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}, \text{ etc.}$$

et

$$\Omega = -\int \left(l' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + m' \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + n' \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\omega'$$

$$\alpha = +\int \left(l' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} + m' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy} + n' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz} \right) d\omega'.$$

Transformons $F = \int f(r)\, dx' = \int \frac{1}{r}\, dx'$, en une intégrale étendue à l'aire $\int d\omega'$ limitée au contour C′.

$$F = \int d\omega' \left(m' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} - n' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} \right) = \int d\omega' \left(n' \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - m' \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right)$$

De même

$$G = \int d\omega' \left(l' \frac{d\frac{1}{r}}{dz} - u' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} \right)$$

$$H = \int d\omega' \left(m' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - l' \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \right)$$

Calculons

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \int d\omega' \left(m' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdy} - l' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2} \right)$$

$$+ \int d\omega' \left(n' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz} - l' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2} \right)$$

Ajoutons :

$$0 = \int d\omega' \left(l' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdx} - l' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} \right)$$

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \alpha - \int d\omega . l' \Delta \frac{1}{r} = \alpha, \quad \text{car} \quad \Delta \frac{1}{r} = 0.$$

On a d'une manière générale, entre la force et l'induction magnétique, les relations

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a = \alpha + 4\pi A \\ b = \beta + 4\pi B \\ c = \gamma + 4\pi C \end{array} \right.$$

Dans un milieu non magnétique, $A = B = C = 0$, et a, b, c, se confondent avec α, β γ.

Les formules précédentes peuvent donc s'écrire :

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ b &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ c &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}, \end{aligned}\right.$$

9. Ces formules sont démontrées pour un milieu non magnétique ; on a toujours supposé, dans les calculs, que $\frac{1}{r}$ et ses dérivées restaient finies, ce qui suppose que le point où est placé le pôle-unité est extérieur aux masses attirantes ; il n'y avait ici de masses attirantes que le feuillet C'.

Nous verrons que les formules (13) sont encore vraies dans un milieu magnétique ; on n'a plus alors $\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$, formule équivalente à la première des formules (13) dans un milieu non magnétique. Maxwell admet sans démonstration que ce sont les formules (13) qui conviennent dans le cas d'un milieu magnétique ; ou plutôt, il définit, à propos du magnétisme, les quantités F, G, H, par les équations (13), et les appelle les composantes du *potentiel vecteur de l'induction magnétique* [1] ; deux cents pages plus loin, il introduit les quantités F, G, H, en électromagnétisme, comme nous les avons introduites précédemment, et il dit : « Ces fonctions F, G, H, ne sont autre chose que les composantes du potentiel vecteur, qu'on a déjà rencontré. » Enfin, un peu plus loin, il dit : « *Nous*

[1] Maxwell, *Traité d'électricité et de magnétisme*, traduction française, t. II, § 405, p. 32, § 589-592, p. 266-269, et § 616, p. 290.

avons démontré que les composantes de l'induction sont liées par les relations (13) aux composantes du potentiel vecteur. » Nous donnerons plus loin cette démonstration que Maxwell n'a pas donnée (§ 36 et § 37).

Le potentiel électrodynamique T peut se mettre sous la forme

$$T = \int (la + mb + nc)\, d\omega,$$

d'après les équations (13).

10. Potentiel électrodynamique d'un système voltaïque constitué par deux circuits. — Le potentiel mutuel de deux circuits peut recevoir une expression très simple

$$T = \int_{(C)} (F dx + G dy + H dz)$$

et

$$F = \int_{(C')} \frac{dx'}{r}$$

Donc

$$T = \int\int \frac{dxdx' + dydy' + dzdz'}{r} = \int\int \frac{dsds' \cos\varepsilon}{r}$$

Si les intensités, qui étaient jusqu'ici prises égales à 1, étaient quelconques, on aurait :

$$(14) \qquad T = ii' \int\int \frac{dsds' \cos\varepsilon}{r} = ii'M$$

en posant :

$$M = \int\int \frac{ds ds' \cos \varepsilon}{r}$$

M est le *coefficient d'induction mutuelle* des circuits C et C'

11. Soit $L = \int\int \frac{ds ds' \cos \varepsilon}{r}$ le coefficient d'induction mutuelle du circuit C et d'un autre qui coïnciderait avec C. L est le coefficient de self-induction du circuit C.

Les divers éléments du circuit C exercent évidemment l'un sur l'autre une certaine action ; si le circuit se déforme, cette action produira un certain travail δT que je me propose d'évaluer. Nous avons vu plus haut quel est le travail dû à l'action d'un courant sur un *autre* courant. Quand on veut en déduire l'expression du travail dû à l'action d'un courant *sur lui-même*, on rencontre une petite difficulté que nous tournerons par l'artifice suivant :

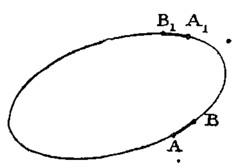

Fig. 3.

Supposons deux courants différents C et C' d'intensités i et i' parcourant un même circuit C. Nous pouvons appliquer à ces deux courants *différents* la formule (14) et, si nous appelons δT_1 le travail dû à leur action mutuelle, nous pouvons écrire :

$$\delta T_1 = \delta L i i'$$

Il nous reste à comparer δT à δT_1.

Soient $d\sigma$ un élément du courant C d'intensité i; $d\sigma'$, l'élément du courant C′ d'intensité i' qui coïncide avec $d\sigma$; soient $d\sigma_1$ un autre élément de C, et $d\sigma'_1$, celui des éléments de C′ qui coïncide avec $d\sigma'$.

Si μ est le travail de l'action de $d\sigma$ sur $d\sigma'_1$
μ' de $d\sigma'$ sur $d\sigma_1$
λ de $d\sigma$ sur $d\sigma_1$

et si δT_1 est le travail élémentaire total de l'action du courant C sur le courant C′ et δT le travail de l'action de C sur lui-même, on a :

$$\delta T_1 = \delta\,(Lii') = \int(\mu + \mu')$$

$$\delta T = \int \lambda$$

Or :

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{i'}{i} \text{ et } \frac{\mu'}{\lambda} = \frac{i'}{i}$$

$$\mu = \mu' = \frac{i'}{i}\,\lambda$$

$$\delta T_1 = \int 2\,\frac{i'}{i}\,\lambda = 2\,\frac{i'}{i}\,\delta T$$

$$\delta T = \frac{1}{2}\,\delta\,(Li^2).$$

Le potentiel électrodynamique total du système voltaïque formé par deux circuits C et C′, par rapport à lui-même, a donc pour expression :

$$T = \frac{Li^2}{2} + Mii' + \frac{Ni'^2}{2} \tag{15}$$

N étant le coefficient de self-induction de C′.

Le travail dû aux actions électrodynamiques est :

$$\frac{i^2\delta L + 2ii'\delta M + i'^2\delta N}{2}.$$

Il se compose en effet :

1° Du travail de l'action de C sur lui-même, égal à :

$$\frac{i^2}{2}\delta L.$$

2° Du travail de l'action de C sur C', égal à :

$$ii'\delta M.$$

3° Du travail de l'action de C' sur lui-même, égal à :

$$\frac{i'^2}{2}\delta N.$$

CHAPITRE II

THÉORIE DE L'INDUCTION

12. L'opinion reçue est qu'une fois connues les lois de l'électrodynamique, l'application du principe de la conservation de l'énergie suffit à trouver les lois de l'induction. M. Bertrand a cherché à réfuter cette opinion ([1]). Je vais discuter ses objections en détail, mais on verra que la plus grande partie du champ de bataille restera à M. Bertrand.

On a deux courants en présence. Chacun est alimenté par une pile ; les conducteurs s'échauffent. S'ils sont mobiles et se rapprochent, il se produit un travail mécanique, ce travail a dû être emprunté à quelque chose : il faut donc admettre qu'un phénomène ignoré jusqu'ici introduit dans les équations un terme nouveau. La loi $dQ = Ri^2 dt$ est-elle encore applicable ? Pourquoi, dit M. Bertrand, de même que la vapeur qui travaille refroidit le vase qui la contient, l'électricité n'aurait-elle pas un effet analogue ? On pourrait concevoir

([1]) *Théorie mathématique de l'électricité*, chap. XI, p. 208.

que les conducteurs s'échauffent moins quand le courant travaille et ne serait-ce pas aussi vraisemblable que de supposer que les intensités varient?

On peut répondre: non, cette hypothèse ne serait pas *a priori aussi vraisemblable* que celle qui est confirmée par l'expérience. Supposons que la loi de Joule ne s'applique plus; les conducteurs s'échauffent moins; on a $dQ = Ri^2dt - Hdt$, H étant une quantité positive dépendant de la vitesse des conducteurs. On pourra rendre H très grand, en donnant à la vitesse une valeur très grande, et il pourra arriver que dQ soit négatif. On emprunterait donc de la chaleur au circuit qui se refroidirait et l'on pourrait la transformer en travail mécanique susceptible d'être transformé à son tour, par frottement, en chaleur à température aussi élevée qu'on voudrait; ce serait contraire au principe de Clausius.

Une autre conjecture est possible : la loi de Joule s'appliquerait, mais la pile consommerait davantage pour donner le même courant. En d'autres termes la loi de Faraday ne s'appliquerait pas aux courants qui produisent un travail mécanique. — Cette hypothèse est fort invraisemblable; si j'ai une pile à Paris et que je la relie par des fils à une machine située à Creil, il serait étrange que, l'intensité restant toujours la même, la loi de Faraday cessât de s'appliquer à Paris quand le courant travaille à Creil.

Malgré l'invraisemblance de ces deux hypothèses, on a peut-être eu tort d'en regarder la fausseté comme évidente, mais j'appellerai plus particulièrement l'attention sur deux autres objections de M. Bertrand qui me semblent beaucoup plus graves. Il ne s'agit plus en effet d'hypothèses que l'expérience démontre fausses et qu'on n'aurait pas dû pourtant rejeter *a priori*, mais de circonstances *réelles* dont on a souvent oublié de tenir compte en s'exposant ainsi à des erreurs.

En premier lieu, lorsque deux courants s'attirent, ils deviennent solidaires, et l'on n'a pas le droit, quoi qu'on le fasse constamment, d'appliquer le principe de la conservation de l'énergie à l'un d'entre eux seulement : il faut considérer le système des deux courants.

Ce n'est pas tout : l'éther a une force vive variable dont il faut tenir compte dans les calculs, comme de la force vive de l'air que met en mouvement un moulin à vent. Ici il y a deux manières de présenter l'objection : on peut supposer qu'un courant permanent rayonne de la force vive comme une lampe constante rayonne de la lumière ; on peut supposer au contraire que la force vive de l'éther reste constante dès que l'état de régime est atteint et qu'il n'y en a point d'empruntée au courant : c'est seulement pendant la période variable que la force vive de l'éther varie ; quand le courant croît, l'éther absorbe de la force vive qu'il restitue au moment où le courant décroît.

La première hypothèse, celle du rayonnement indéfini, est contredite par l'expérience, puisque avec un courant permanent la chaleur produite dans les conducteurs est l'équivalent de l'énergie voltaïque de la pile. Il est vrai de dire que l'expérience seule nous l'a appris.

Quant à la seconde hypothèse, non seulement elle n'est pas à rejeter, mais il y a certainement à tenir compte de la force vive communiquée à l'éther, sous peine de ne pas tenir compte des faits. En la négligeant on s'expose à l'erreur.

On pourrait varier les objections à l'infini, et l'on serait conduit à des conjectures plus ou moins invraisemblables qu'il faudrait rejeter l'une après l'autre. C'est en quoi M. Bertrand a raison de dire que l'expérience seule pouvait montrer que les lois de Joule, de Faraday et de Ohm sont encore applicables aux courants qui travaillent.

13. Nous allons prendre comme point de départ ce fait expérimental ; et, de plus, nous admettrons que l'éther a une énergie électrocinétique constante quand le courant est constant, mais variable avec l'intensité du courant. Mais nous devons emprunter plus encore à l'expérience.

Soient deux circuits fermés C et C′, parcourus par des courants i et i', l'expérience montre que quand i' varie, il en résulte dans C une force électromotrice A $\frac{di'}{dt}$, A étant un *coefficient d'induction* de C′ sur C, coefficient indépendant des intensités. Si C′ se déplace et est parcouru par un courant constant i', si au bout du temps dt C′, prend une position infiniment voisine C″, le déplacement du circuit de C′ en C″ pendant le temps dt produit une force électromotrice $i' \frac{dB}{dt}$, $\frac{dB}{dt}$ étant aussi un coefficient ne dépendant que des conditions géométriques des deux circuits.

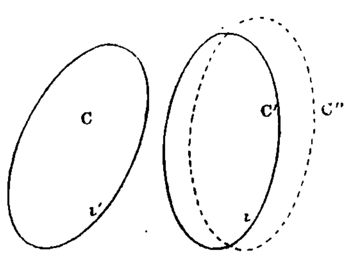

Fig. 4.

Ici se présente une hypothèse toute naturelle, il est vrai, mais qui a besoin d'être confirmée par l'expérience; soient A le coefficient d'induction de C′ sur C ; A + dA, celui de C″ sur C.

Supposons qu'à l'époque t, nous ayons en C′ un courant di' et en C″ un courant O. Le courant di' se déplace en conservant son intensité et vient en C″ au temps $t + dt$: on a alors un courant O en C′, et un courant di' en C″.

On peut imaginer qu'on est passé du même état initial au même état final par une autre modification en faisant varier les intensités : l'intensité en C′ primitivement égale à di' a décru jusqu'à s'annuler et pendant ce temps l'intensité en C″ primitivement nulle est devenue di'. Les circuits C′ et C″ sont d'ailleurs demeurés fixes. Il est *naturel* de supposer que l'effet produit sur C est le même dans les deux cas.

Dans le premier cas, la force électromotrice née en A est $ai' \frac{dB}{dt}$; dans le second, elle est la différence entre $- A \frac{di'}{dt}$, et $(A + dA) \frac{di'}{dt}$, c'est-à-dire $\frac{dA.di'}{dt}$; donc :

$$dA = dB.$$

Si le courant se déplace et varie en même temps, les deux forces électromotrices ont pour somme :

$$A \frac{di'}{dt} + i' \frac{dA}{dt} = \frac{d(Ai')}{dt}.$$

Nous admettrons cette équation, conséquence de l'égalité $dA = dB$, comme un fait expérimental.

14. L'application du principe de la conservation de l'énergie va nous permettre de déterminer les coefficients d'induction définis comme précédemment.

Soient A le coefficient d'induction de C par rapport à lui-même

B	C	C′
B′	C′	C
D	C′	lui-même

La loi de Ohm, appliquée aux deux circuits, donne :

$$(1)\qquad \begin{cases} Ri = E - \dfrac{d\,(Ai)}{dt} - \dfrac{d\,(Bi')}{dt} \\[2ex] R'i' = E' - \dfrac{d\,(B'i)}{dt} - \dfrac{d\,(Di')}{dt}. \end{cases}$$

Écrivons que l'énergie se conserve. L'énergie voltaïque dépensée dans le temps dt est

$$(Ei + E'i')\,dt.$$

Elle se retrouve sous trois formes :

1° Chaleur de Joule ;

2° Travail électrodynamique ;

3° Accroissement d'énergie électrocinétique de l'éther.

Si cette énergie de l'éther est représentée par U, l'équation s'écrit :

$$(2)\quad (Ei + E'i')\,dt = Ri^2dt + R'i'^2dt + \frac{1}{2}\,(i^2dL + 2ii'dM + i'^2dN) + dU$$

Je ne connais rien sur la fonction U ; j'écris seulement que dU est une différentielle exacte. Remplaçons dans l'expression de dU, $E - Ri$ par sa valeur tirée de (1) :

$$(3)\quad dU = id\,(Ai) + id\,(Bi') + i'd\,(B'i) + i'd\,(Di') - \frac{1}{2}\,(i^2dL + 2ii'dM + i'^2dN)$$

Supposons que les intensités varient seules. Le dernier terme disparaît et dU se réduit à :

$$dU = Aidi + Bidi' + B'i'di + Di'di' ;$$

dU étant différentielle exacte, il faut que

$$\frac{d}{di'}(Ai + B'i') = \frac{d}{di}(Bi + Di')$$

d'où :

$$B = B'.$$

Intégrant :

$$U = \frac{Ai^2}{2} + Bii' + \frac{Di'^2}{2} + \text{const.}$$

la constante ne dépendant pas des intensités. Comme U est nul quand il n'y a pas de courant, que $i = i' = 0$, la constante est nulle.

D'après cela, quand les intensités sont constantes et que les conducteurs se déplacent, dU se réduit à :

$$dU = \frac{1}{2}(i^2dA + 2ii'dB + i'^2dD),$$

expression qui doit être identique à la valeur du second membre de (3), quand on fait $di = di' = 0$, c'est-à-dire à :

$$i^2dA + 2ii'dB + i'^2dD - \frac{1}{2}(i^2dL + 2ii'dM + i'^2dN).$$

Identifions :

$$\frac{1}{2}dA = dA - \frac{1}{2}dL$$

$$dA = dL,$$

d'où

$$A = L$$

car A et L s'annulent quand les conducteurs sont à une distance infinie. De même

$$D = N$$
$$B = M$$

et

$$T = U.$$

Le potentiel électrodynamique représente l'énergie électrocinétique de l'éther.

On peut écrire, d'après cela, la loi de Ohm :

$$E - Ri = \frac{d\,(Li + Mi')}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dT}{di}$$
$$E' - R'i' = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dT}{di'}$$

Cette forme rappelle celle des équations de Lagrange.

Maxwell a montré, et c'est là une des parties les plus originales de son œuvre, que les lois des actions électrodynamiques et de l'induction peuvent être mises sous la forme des équations de Lagrange ; les forces électromotrices d'induction seraient ainsi des forces d'inertie (1).

(1) Voir le premier volume, § 151, p. 168 et suivre.

CHAPITRE III

THÉORIE DE WEBER (¹)

15. Explication des attractions électrodynamiques. — Weber a voulu rendre compte des attractions électrodynamiques, en considérant les courants comme produits par des masses électriques se déplaçant dans les conducteurs, et supposant qu'entre deux masses électriques s'exerce une action qui dépend de leur mouvement et qui se réduit à l'action déterminée par la loi de Coulomb quand elles sont au repos.

Soient deux masses e et e' au repos : la force répulsive qui s'exerce entre elles est égale à $+\frac{ee'}{r^2}$ en unités électrostatiques. Weber admet que si elles sont en mouvement, la répulsion devient :

$$\frac{ee'}{r^2} + ee'\left[\mathrm{A}\,\frac{d^2r}{dt^2} + \mathrm{B}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] \tag{1}$$

A et B étant fonctions de r seul.

(¹) *Electrodynamische Maassbestimmungen*, p. 305.

Il s'agit de déterminer A et B de manière à retrouver la formule d'Ampère, en vertu de laquelle la *répulsion* entre deux éléments de courant est, en unités électromagnétiques :

$$+\frac{ii'ds'ds'}{r^2}\left(2r\frac{d^2r}{dsds'}-\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right) \tag{2}$$

Les quantités d'électricité e et e' sont supposées parcourir les deux circuits avec des vitesses constantes v et v'. La distance r est fonction de s et de s' et on a :

$$v=\frac{ds}{dt} \qquad v'=\frac{ds'}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{ds}v+\frac{dr}{ds'}v'$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d^2r}{ds^2}v^2+2\frac{d^2r}{dsds'}vv'+\frac{d^2r}{ds'^2}v'^2$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{ds}\right)^2v^2+2\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}vv'+\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2v'^2$$

La répulsion électrodynamique [le second terme de l'expression (1)] devient ainsi :

$$\lambda ee'v^2+2\mu ee'vv'+\nu ee'v'^2$$

en posant, pour abréger :

$$\lambda=A\frac{d^2r}{ds^2}+B\left(\frac{dr}{ds}\right)^2$$

$$\mu=A\frac{d^2r}{dsds'}+B\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}$$

$$\nu=A\frac{d^2r}{ds'^2}+B\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2$$

Supposons que ds contienne e d'électricité positive, e_1 d'électricité négative (e_1 est un nombre essentiellement négatif; quand le corps est à l'état neutre $e + e_1 = 0$). La vitesse de e est v, de e_1 est v_1. Dans ds' on a de même une quantité e' d'électricité positive et une quantité e'_1 d'électricité négative animées respectivement de vitesses v' et v'_1.

La répulsion totale de ds sur ds' s'obtient en composant les répulsions des quantités e et e_1 d'électricité contenues dans ds sur les quantités e' et e'_1 contenues dans ds'.

Il vient donc :

$$R = \lambda \sum ee'v^2 + 2\mu \sum ee'vv' + \nu \sum ee'v'^2$$

en posant :

$$\sum ee'v^2 = ee'v^2 + ee'_1v^2 + e_1e'v_1^2 + e_1e'_1v_1^2$$
$$= (ev^2 + e_1v_1^2)(e' + e'_1)$$

De même

$$\sum ee'vv' = (ev + e_1v_1)(e'v' + e'_1v'_1)$$

$$\sum ee'v'^2 = (e + e')(e'v'^2 + e'_1v'^2_1)$$

Le débit électrique du premier circuit est :

$$\frac{e}{\frac{ds}{v}} = \frac{ev}{ds}$$

pour l'électricité positive ;

Il est égal à $\frac{e_1v_1}{ds}$ pour l'électricité négative. Le débit total est donc $\frac{ev + e_1v_1}{ds}$;

D'autre part l'intensité i est par définition le débit total exprimé en unités électromagnétiques. Le débit total exprimé en unités électrostatiques est donc ci, c étant le rapport des unités, de sorte qu'on a :

$$\frac{ev + e_1v_1}{ds} = ci$$

Donc :

$$\sum ee'vv' = c^2ii'dsds'$$

La répulsion électrodynamique est nulle entre un conducteur chargé d'électricité, mais où ne passe pas de courant, et un autre parcouru par un courant sans être chargé.

R doit donc être nul si le conducteur C n'est pas chargé mais est parcouru par un courant, c'est-à-dire si $e + e_1 = 0$, et si le conducteur C' est chargé mais n'est parcouru par aucun courant, c'est-à-dire si $v' = v'_1 = 0$;

Mais si $v' = v'_1 = 0$ les deux derniers termes de R s'annulent ; le premier terme doit donc s'annuler également ; donc on a :

$$\lambda (e' + e'_1) (ev_1^2 + e_1v_1^2) = 0$$

λ n'est pas nul en général ; $e' + e'_1 \gtrless 0$ si le conducteur C' est chargé ainsi que nous l'avons supposé.

Donc on a :

$$ev^2 + e_1v_1^2 = 0$$

et de même :

$$e'v'^2 + e'_1 v_1'^2 = 0$$

Voilà des conditions bien étranges et bien artificielles. En outre elles obligent d'admettre l'existence réelle des deux fluides. Il y a plus : Rowland a réalisé des actions électrodynamiques avec un disque chargé d'électricité et animé d'un mouvement rapide ; alors

$$v = v_1, \quad \text{d'où } ev^2 + e_1v_1^2 = (e + e_1)\, v^2$$

et ni v ni $e + e_1$ n'est nul. Il est vrai qu'en faisant le calcul on reconnaît que ce facteur est absolument négligeable dans les expériences de Rowland.

16. On peut présenter la théorie de Weber sous un jour plus favorable. Rien n'est plus loin de ma pensée que de la défendre: mais je veux montrer seulement en quoi on pourrait la rendre moins étrange. On peut supposer e et e_1 séparément très grands, très supérieurs en valeur absolue à leur somme algébrique $e+e_1$; e et e_1 seraient de l'ordre de grandeur d'une quantité très grande N, $e + e_1$ de l'ordre de grandeur de l'unité et au contraire v et v_1 de l'ordre de $\frac{1}{N}$. Ceci pourra paraître assez naturel d'après la vitesse que certains physiciens attribuent à l'électricité dans les électrolytes, vitesse qui à les en croire ne dépasserait pas quelques millimètres par seconde; je ne veux discuter ici en aucune façon leurs conclusions. Il n'est pas nécessaire d'ailleurs que v et v_1 soient si petits pour pouvoir être regardés comme très petits. Il suffit en effet que v soit petit par rapport à c, qui est égal à la vitesse de la lumière.

$ev + e_1v_1$ sera de l'ordre de grandeur de 1 ; $ev^2 + e_1v_1^2$, de l'ordre de $\frac{1}{N}$. Le produit $(ev^2 + e_1v_1^2)\,(e' + e_1')$ sera dès lors très petit, de l'ordre de $\frac{1}{N}$; et deux des termes de R, les termes en λ et en ν sont complètement négligeables en présence du terme en μ. On n'a plus alors les mêmes difficultés, et l'on rend compte des expériences de Rowland.

17. On trouve en somme, en ne tenant compte que du terme en μ et remplaçant

$$\sum ee'vv'$$

par sa valeur :

$$\mathrm{R} = 2c^2 ii' ds ds' \left(\mathrm{A}\frac{d^2r}{dsds'} + \mathrm{B}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right);$$

identifiant avec (2), on a :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{c^2 r} \qquad \mathrm{B} = \frac{-1}{2c^2r^2};$$

et l'expression de la répulsion électrodynamique entre deux masses en mouvement est :

$$\frac{ee'}{c^2}\left[\frac{1}{r}\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{2r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

18. Une question se pose : l'hypothèse de Weber est-elle conforme au principe de la conservation de l'énergie ?

Le travail de la répulsion électrodynamique est :

$$\frac{ee'}{c^2}\left[\frac{dr}{r}\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{dr}{2r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

et doit être égal à $- d\psi$ s'il existe un potentiel et qu'on appelle ψ ce potentiel. Mais on a :

$$\frac{dr}{r}\cdot\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\cdot d.\,\frac{dr}{dt}$$

d'où :

$$d\psi = -\frac{ee'}{c^2}\left[\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\cdot d\cdot\frac{dr}{dt} - \frac{dr}{r^2}\times\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$
$$= -\frac{ee'}{c^2}\, d\left[\frac{1}{2r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

Le potentiel *total* (obtenu en tenant compte à la fois de la répulsion électrostatique et de la répulsion électrodynamique) de deux masses e et e' est :

$$\psi = \frac{ee'}{r}\left[1 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

Cherchons, d'après cela, le potentiel mutuel de deux éléments de courant (en nous bornant ici au potentiel électrodynamique) ; c'est :

$$-\frac{1}{2c^2r}\sum ee'\left(\frac{dr}{dt}\right)$$
$$= -\frac{1}{2c^2r}\left[\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\sum ee'v^2 + 2\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}\sum ee'vv' + \left(\frac{dr}{ds'}\right)^2\sum ee'v'^2\right]$$

Le premier et le dernier terme disparaissant, il reste le terme du milieu qui est $2c^2ii'dsds'\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}$; donc le potentiel est :

$$-\, ii'dsds'\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}.$$

19. Nous avons là une différence avec la théorie d'Ampère, d'après laquelle l'action réciproque de deux circuits fermés admet bien un potentiel, mais non l'action réciproque de deux éléments, ni même l'action réciproque d'un courant fermé et d'une portion de courant. Je dis que dans la théorie d'Ampère un élément de courant n'a pas de potentiel par rapport à un courant fermé ; en effet, soit un élément AB qui se déplace sous l'action d'un courant fermé et vient en A'B' ; je puis choisir AA', tel que le travail effectué dans ce déplacement ne soit pas nul. Je pourrai toujours ramener l'élément en AB sans travail, si la loi d'Ampère est vraie ; en effet, je fais tourner A'B' autour de A', jusqu'à ce que sa direction coïncide avec AA'. Le travail effectué dans cette relation est un infiniment petit d'ordre supérieur. Je fais ensuite mouvoir l'élément dans sa propre direction : il vient en AB''' : aucun travail, puisque l'action d'un courant fermé est normale à l'élément ; une rotation autour de A le ramène ensuite en AB, et en n'effectuant encore qu'un travail infiniment petit d'ordre supérieur. Il n'existe donc pas de potentiel, puisqu'on a pu ramener l'élément à sa position initiale sans que le travail total effectué soit nul ; ce travail total se réduit à celui qui a été effectué pour amener AB en A'B'.

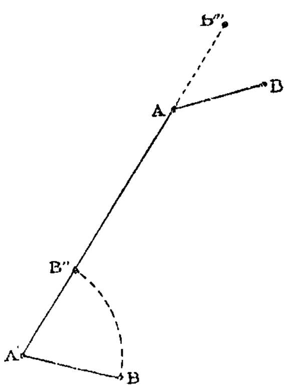

Fig. 5.

La contradiction avec la théorie de Weber n'est qu'apparente. On a supposé, dans cette théorie, les molécules électriques animées d'un mouvement uniforme : cela n'est possible que pour un courant fermé, non pour un courant ouvert. A l'extrémité d'un courant ouvert en effet les molécules électriques *s'arrêtent;* leur accélération n'est donc pas nulle. Les éléments voisins des extrémités n'obéiraient pas à la loi d'Ampère, parce qu'il y aurait à tenir compte de l'accélération des molécules électriques qui y circulent, accélération qui n'est plus nulle. Il y aurait donc divergence entre les deux théories si on avait à faire, par exemple, à un courant fermé et à une portion de courant entièrement libre.

Mais ce n'est pas le cas où l'on se place d'ordinaire quand on examine expérimentalement l'action d'un courant fermé sur un élément de courant.

En effet, quand on étudie l'action d'un conducteur fermé sur un élément mobile AMB, cet élément mobile AMB fait partie lui-même d'un courant fermé et ses extrémités A et B sont mobiles le long de conducteurs fixes. Il n'y a pas alors d'accélération pour la molécule qui arrive en A ou en A′; et, dans ce cas, la théorie de Weber nous conduit à la loi d'Ampère. On trouve alors, en effet, que les forces qu'indiquent les deux lois admettent toutes deux un potentiel, et le même potentiel; seulement dans la théorie d'Ampère, il n'y a un potentiel qu'en vertu des liaisons particulières imposées au système. Si, au contraire, on considérait des courants instantanés, ouverts, la loi d'Ampère et l'hypothèse de Weber conduiraient à des résultats différents; mais dans ce cas l'expérience ne semble guère possible.

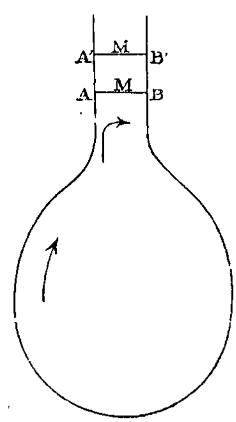

Fig 6.

20. L'induction dans la théorie de Weber. — La loi de Weber satisfait au principe de la conservation de l'énergie. Donc, d'après Maxwell, les lois de l'induction doivent s'en déduire. Dans l'espèce, ce raisonnement ne vaut rien : on ne trouverait les lois ordinaires de l'induction en partant de l'hypothèse de Weber, qu'en supposant qu'on n'a que des courants fermés, et nullement si on suppose qu'on a des circuits ouverts. Maxwell a commis dans son calcul (1) des erreurs graves, mais il en a commis deux qui se compensent.

Cherchons l'induction de C sur C'. Les deux circuits sont mobiles, la distance r de deux éléments ds et ds' est ici fonction non seulement de s et de s', mais du temps t

$$\frac{ds}{dt} = v \qquad v \text{ fonction de } s \text{ et } t$$

$$\frac{ds'}{dt} = v' \qquad v' \text{ fonction de } s' \text{ et } t'$$

L'action électrodynamique est :

$$\frac{ee'}{c^2r^2}\left[r\,\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right]$$

(je représente par des ∂ les dérivées totales, et par des d les dérivées partielles).

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{dr}{ds}\,v + \frac{dr}{ds'}\,v' + \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\,v^2 + 2\,\frac{d^2r}{ds\,ds'}\,vv' + \frac{d^2r}{ds'^2}\,v'^2 + \underline{2\,\frac{d^2r}{ds\,dt}\,v + 2\,\frac{d^2r}{ds'\,dt}\,v'} + \frac{d^2r}{dt^2}$$
$$+ \frac{dr}{ds}\,\frac{dv}{dt} + \frac{dr}{ds'}\,\frac{dv'}{dt} + \frac{dr}{ds}\,\frac{dv}{ds}\,v + \frac{dr}{ds'}\,\frac{dv'}{ds'}\,v'$$

Maxwell oublie les deux termes soulignés.

Dans ds nous avons e d'électricité positive, animée de la

(1) Maxwell, *Electr. et Magn.*, trad. franç., t. II, § 856-860, p. 554-558, voir *Comptes Rendus*, t. CX, p. 825 (21 avril 1890).

vitesse v ; et e_1 de négative, animée de la vitesse v_1 ; dans ds', on a des quantités d'électricité e' et e'_1, animées de vitesses v' et v'_1.

Si R_1 est la répulsion de e sur e'
R_2 de e_1 sur e'
R_3 de e sur e'_1
R_4 de e_1 sur e'_1

la répulsion totale, précédemment trouvée, est

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4.$$

La force électromotrice d'induction est évidemment proportionnelle à la force qui tend à séparer l'électricité positive de l'électricité négative dans l'élément ds' ; ce sera $R_1 + R_2 - R_3 - R_4$; et il faudra multiplier par $\cos\theta' = \frac{dr}{ds'}$, pour avoir la composante de la force dans la direction du fil. La force électromotrice cherchée est donc égale à

$$k \cos\theta' (R_1 + R_2 - R_3 - R_4)$$

k étant un coefficient constant qui dépend de l'unité à laquelle sont rapportées les forces électromotrices.

Pour déterminer ce coefficient k examinons un cas particulier, par exemple celui où les masses électriques sont au repos et où les forces électromotrices se réduisent par conséquent aux forces électrostatiques.

Dans ce cas, si l'on pose pour abréger

$$H = \cos\theta' (R_1 + R_2 - R_3 - R_4)$$

il vient :

$$H = \frac{e + e_1}{r^2} (e' - e'_1) \frac{dr}{ds'} = - c (e' - e'_1) \frac{d\varphi}{ds'}$$

en représentant par φ le potentiel électrostatique

$$\varphi = \frac{1}{c} \frac{e + e_1}{r}$$

La force électromotrice électrostatique est d'ailleurs

$$E = - \frac{d\varphi}{ds'} ds' = \frac{H ds'}{e' - e'_1} \cdot \frac{1}{c}$$

et comme par définition $E = kH$, il vient :

$$k = c \frac{ds'}{(e' - e'_1)}$$

Nous pourrons donc en général déduire la force électromotrice E de la connaissance de

$$H = \cos \theta' (R_1 + R_2 - R_3 - R_4)$$

21. En se reportant aux expressions de $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$ on reconnaîtra que H contient des termes en v^2, v'^2, vv', v, v', et tous connus; et des termes en $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dv'}{dt'}$, $v \frac{dv}{ds}$ et $v' \frac{ds}{ds'}$.

Si on laisse de côté un coefficient dépendant seulement de la position et du mouvement relatifs des deux éléments ds et ds' mais qui est indépendant de e, e_1, v et v_1 et de e', e_1', v' et v_1' :

$$
\begin{array}{ll}
\text{les termes en } v^2 \text{ seront} & (ev^2 + e_1 v_1^2)(e' - e_1') \\
\text{en } vv' & (ev + e_1 v_1)(e'v' - e_1' v_1') \\
\text{en } v'^2 & (e + e_1)(e'v'^2 - e_1' v_1'^2) \\
\text{en } v & (ev + e_1 v_1)(e' - e_1') \\
\text{en } v' & (e + e_1)(e'v' - e_1' v_1') \\
\text{connus :} & (e + e_1)(e' - e_1')
\end{array}
$$

on aurait de même ce que donnent les termes en $\frac{dv}{dt}$, $v\frac{dv}{ds}$, etc.

Dans les courants voltaïques ordinaires, on a :

$$e = -e_1 \quad e' = -e_1' \quad v = -v_1 \quad v' = -v_1'$$

Tous les termes disparaissent, sauf le terme en v et le terme en $\frac{dv}{dt}$; les autres disparaissent, le terme en $v\frac{dv}{ds}$ disparaît pour la même raison que le terme en v^2. Les seuls termes qui importent dans l'expression de $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$ sont donc le terme $\frac{dr}{ds}\frac{dv}{dt}$ et le terme $2\frac{d^2 r}{dsdt}v$, qui est un de ceux que Maxwell a oubliés.

Dans $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ on aura à conserver $2\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt}v$.

$$\frac{\mathrm{H}}{e' - e_1'} = \frac{1}{c^2 r^2}\left[-\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt}(ev + e_1 v_1) + r\frac{dr}{ds}\left(e\frac{dv}{dt} + e_1\frac{dv_1}{dt}\right) + 2r\frac{d^2 r}{dsdt}(ev + e_1 v_1)\right]\frac{dr}{ds'}.$$

Or

$$ev + e_1 v_1 = cids$$

$$e\frac{dv}{dt} + e_1\frac{dv_1}{dt} = c\frac{di}{dt}ds$$

Donc

$$E = kH = \frac{dsds'}{c^2r^2}\left[-i\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt} + r\frac{dr}{ds}\frac{di}{dt} + 2ir\frac{d^2r}{dsdt}\right]\frac{dr}{ds'}$$

$$= dsds'\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{r}\right) + \underline{\frac{2idsds'}{r}\frac{dr}{ds'}\frac{d^2r}{dsdt}}$$

Maxwell néglige le second terme et écrit le premier:

$$dsds'\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}\cdot\frac{i}{r}\right),$$

ce qui n'est pas exact. Car

$$dsds'\frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{i}{r}\right].$$

$$= dsds'\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{i}\right)$$

$$+ \frac{idsds'}{r}\left[\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds'dt} + \frac{dr}{ds'}\frac{d^2r}{dsdt}\right]$$

En dernière analyse la somme algébrique des termes négligés s'écrit

$$-\frac{idsds'}{r}\left[\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds'dt} - \frac{dr}{ds'}\frac{d^2r}{dsdt}\right]$$

En intégrant par rapport à s et s', on a pour la force électromotrice totale, d'après Maxwell

$$E = \frac{d}{dt}\int\int\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}\frac{i}{r}dsds' = -\frac{d(Mi)}{dt},$$

ce qui n'est vrai que si l'intégrale des termes négligés

$$\int\int\frac{idsds'}{r}\left[\frac{dr}{ds'}\frac{d^2r}{dsdt} - \frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds'dt}\right]$$

est nulle. Or cette intégrale n'est nulle que si les deux circuits auxquels on étend l'intégration sont fermés.

Considérons :

$$\int \frac{ds'}{r}\frac{d^2r}{dsdt}\frac{dr}{ds'} = \left[\log r . \frac{d^2r}{dsdt}\right] - \int \log r \frac{d^3r}{dsds'dt}ds';$$

le premier terme est nul, la valeur étant la même aux deux limites. Intégrons par rapport à s, il vient :

$$\int\int \frac{dsds'}{r}\frac{d^2r}{dsdt}\frac{dr}{ds'} = -\int\int \log r \frac{d^3r}{dsds'dt}dsds'$$

c'est-à-dire que le premier membre est égal à une expression qui ne change pas quand on y permute s et s'. Par suite

$$\int\int \frac{dsds'}{r}\frac{d^2r}{dsdt}\frac{dr}{ds'} = \int\int \frac{dsds'}{r}\frac{d^2r}{ds'dt}\cdot\frac{dr}{ds}$$

Mais *ceci n'est vrai que pour deux courants fermés.*

CHAPITRE IV

THÉORIE DE HELMHOLTZ

22. L'expérience nous fait connaître l'action mutuelle de deux courants fermés ; pour en déduire l'action de deux éléments de courants, Ampère a été obligé de faire une hypothèse ; il suppose que cette action se réduit à une force dirigée suivant la droite qui joint ces deux éléments. Cette hypothèse n'est pas la seule qu'on puisse faire. Nous avons vu plus haut comment Weber, guidé par une théorie qui concorde avec celle d'Ampère dans le cas des courants fermés, a été conduit à admettre que deux éléments ont un potentiel mutuel qui a pour expression :

$$- ii' \frac{dsds'}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'}$$

D'un autre côté F. Neumann admet pour le potentiel mutuel de deux éléments l'expression :

$$ii'dsds' \frac{\cos \varepsilon}{r}.$$

Helmholtz cherche une formule générale comprenant celles de Weber et de Neumann et il fait à cet effet les hypothèses suivantes :

1° Il existe un potentiel mutuel de deux éléments de courants ;

2° Ce potentiel est inversement proportionnel à r.

Comme en vertu du principe des courants sinueux, ce potentiel doit être linéaire en $\cos \varepsilon$ et $\cos \theta \cos \theta'$ (Cf. § 1, page 6) Helmholtz est conduit à lui donner pour expression :

$$ii'dsds'\left(\mathrm{A}\frac{\cos \varepsilon}{r} + \mathrm{B}\,\frac{\cos \theta \cos \theta'}{r}\right)$$

où A et B sont des coefficients constants. Cette expression peut s'écrire, en vertu des formules (4) et (5), chapitre Ier,

$$ii'dsds'\left[(\mathrm{A} + \mathrm{B})\frac{\cos \varepsilon}{r} + \mathrm{B}\,\frac{d^2r}{dsds'}\right]$$

Si l'on a deux courants fermés leur potentiel électrodynamique mutuel sera l'intégrale double

$$\mathrm{T} = \int\int ii'dsds'\left[(\mathrm{A} + \mathrm{B})\,\frac{\cos \varepsilon}{r} + \mathrm{B}\,\frac{d^2r}{dsds'}\right]$$

Le second terme est nul, car

$$\int ds\,\frac{d^2r}{dsds'} = 0$$

si l'intégrale est prise le long d'un circuit fermé, et T se réduit à :

$$(\mathrm{A} + \mathrm{B})\int\int ii'dsds'\;\frac{\cos \varepsilon}{r}$$

L'expérience montre que l'on doit prendre $(A+B)=1$ (§ 10), mais tant que l'expérience porte sur des courants fermés, elle est impuissante à déterminer le coefficient B du terme $\frac{d^2r}{dsds'}$. C'est pourquoi dans diverses hypothèses, on a pu attribuer à B des valeurs différentes.

En posant, avec Helmholtz, $B = \frac{1-k}{2}$, l'expression du potentiel élémentaire devient :

$$ii'dsds'\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}+\frac{1-k}{2}\frac{d^2r}{dsds'}\right)$$

La formule de Weber est un cas particulier de celle de Helmholtz ; on la retrouve en donnant à k la valeur -1 ; alors le potentiel a la forme :

$$ii'dsds'\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}+\frac{d^2r}{dsds'}\right)=-\frac{ii'dsds'}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}$$

En faisant $k=1$, on a l'expression du potentiel qu'avait proposée Franz Neumann. En faisant $k=0$, dit Helmholtz, on retrouverait l'électrodynamique de Maxwell. Cette assertion de Helmholtz a été parfois mal comprise ; nous y reviendrons (§ 45).

23. La formule d'Ampère peut-elle être considérée comme un cas particulier de celle de Helmholtz ? En aucune façon. Nous avons vu, en effet, que dans la théorie d'Ampère l'action mutuelle de deux éléments n'a pas de potentiel. La formule d'Ampère est la seule qui explique les faits par une action entre deux éléments, réduite à une force dirigée suivant la droite qui les joint. Dès qu'on admet que cette action dérive d'un potentiel, comme le potentiel dépend de l'orientation des éléments, ses dérivées par rapport aux angles qui définissent cette orientation ne sont pas identiquement nulles, et il en est de même du travail virtuel qu'entraîne une variation infinitésimale de ces angles; c'est dire, que, outre la force dirigée suivant la droite de jonction, existent des couples qui tendent à faire tourner les éléments et dont les moments sont de l'ordre de grandeur de la force. M. Bertrand a fait à ce sujet des objections à la théorie de Helmholtz (*Comptes rendus*, t. 73, p. 965; t. 75, p. 860; t. 77, p. 1049); selon lui, tous ces couples, agissant sur tous les éléments d'un fil conducteur parcouru par un courant et soumis à l'action d'un autre courant ou de la terre, devraient immédiatement briser le fil et le réduire en poussière. Helmholtz répondait qu'une aiguille aimantée ne se brisait pas sous l'action de la terre, quoique sur chaque élément de longueur agît un couple dont le moment est de l'ordre de grandeur de l'élément. M. Bertrand a répliqué que personne ne croyait plus aujourd'hui à l'existence réelle des fluides magnétiques de Coulomb et que la réponse de Helmholtz n'avait pas de sens; il semble que Helmholtz aurait pu dire qu'on ne croyait pas davantage à l'existence objective d'un courant matériel circulant dans un conducteur.

Je ne veux pas m'immiscer dans cette polémique; je veux toutefois montrer en quoi consiste le malentendu qui sépare ces deux savants éminents.

Pour M. Bertrand, le courant se compose d'éléments extrêmement petits, dont le nombre est extrêmement grand quoique fini; à chacun d'eux est appliqué un couple dont les deux composantes ont une existence réelle et un point d'application parfaitement déterminé. Sur la figure, les éléments sont représentés par les quatre rectangles en trait plein et les couples qui leur sont appliqués sont A_1F_1, B_1G_1 ; A_2F_2, B_2G_2 ; A_3F_3, B_3G_3 ; A_4F_4, B_4G_4.

Dans ces conditions, il est clair que la rupture se produira suivant la ligne pointillée XY.

Pour M. von Helmholtz au contraire le couple n'est qu'une sorte de tendance à tourner qui a une existence propre indé-

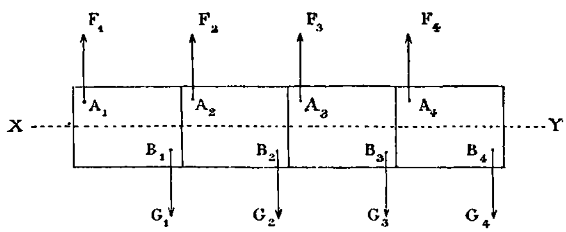

Fig. 7.

pendante de ses deux composantes, qui peuvent ne pas avoir de point d'application déterminé. Le couple existe toutes les fois que la rotation produit un travail.

En d'autres termes Helmholtz suppose que, si loin que l'on pousse la division de la matière, chaque partie restera toujours soumise à un couple. M. Bertrand croit au contraire qu'il arrivera un moment où les parties ultimes de la matière seront soumises à une force unique et qu'en adoptant une autre manière de voir, on est dupe d'une fiction mathématique qui cache la réalité des faits. Il ne serait peut-être pas impossible, même en acceptant le point de vue de M. Bertrand, d'imaginer une distribution des forces qui n'entraînerait pas la rupture des conducteurs. Mais elle serait probablement compliquée et peu naturelle.

Je me bornerai à rappeler que, dans la théorie de Weber, qui n'est qu'un cas particulier de celle de Helmholtz, on peut tout expliquer en supposant que l'action mutuelle de deux éléments se réduit à une force unique dirigée suivant la droite qui les joint. J'ai dit au n° 19 comment cela peut se concilier avec le fait de l'existence d'un potentiel qui est en apparence contradictoire.

24. Equations fondamentales. — Nous avons mis le potentiel électrodynamique mutuel de deux circuits sous la forme (§ 10)

$$(1) \qquad T = i\int(F dx + G dy + H dz)$$

dans le cas d'un circuit fermé.

Ici, on a, pour deux circuits quelconques :

$$(2) \qquad T = \int\int ii' ds ds' \left[\frac{\cos\varepsilon}{r} + \frac{1-k}{2}\frac{d^2r}{ds ds'}\right]$$

$$\cos\varepsilon \, ds ds' = dx dx' + dy dy' + dz dz'$$

$$\frac{d^2r}{ds ds'} ds = \frac{d^2r}{dx ds'} dx + \frac{d^2r}{dy ds'} dy + \frac{d^2r}{dz ds'} dz$$

Remplaçant dans T, nous pouvons donner à T la forme (1), déjà trouvée dans le cas d'un courant fermé, en posant :

$$(3) \qquad F = \int\frac{i' dx'}{r} + \frac{1-k}{2}\int i' ds' \frac{d^2r}{dx ds'}$$

Nous désignerons de même par G et H deux expressions analogues qu'on déduirait de la première par symétrie. Nous dirons que F, G, H sont les composantes du potentiel vecteur.

Posons

$$(4) \qquad \psi = \int i'ds' \frac{dr}{ds'}$$

intégrale étendue au contour C′ et nulle dans le cas d'un courant fermé :

$$\frac{d\psi}{dx} = \int i' \frac{d^2r}{dxds'} ds'$$

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} F &= \int \frac{i'dx'}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dx} \\ G &= \int \frac{i'dy'}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dy} \\ H &= \int \frac{i'dz'}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dz} \end{aligned} \right.$$

On peut écrire aussi :

$$(6) \qquad \psi = \int i' \left(\frac{dr}{dx'} dx' + \frac{dr}{dy'} dy' + \frac{dr}{dz'} dz' \right)$$

et en effet si on regarde x, y, z comme des constantes on a :

$$dr = \frac{dr}{ds'} ds' = \frac{dr}{dx'} dx' + \frac{dr}{dy'} dy' + \frac{dr}{dz'} dz'$$

25. Donnons à ces équations une forme applicable aux conducteurs à trois dimensions.

Si ρ est la densité de l'électricité libre, $\rho d\tau$ est la quantité d'électricité contenue dans le volume $d\tau$; $ud\omega$ est la quantité qui traverse dans l'unité de temps l'aire $d\omega$ normale à $0x$; de même $vd\omega$, l'aire $d\omega$ normale à $0y$; $wd\omega$, normale à $0z$; on a :

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = -\frac{d\rho}{dt}$$

C'est l'équation dite de continuité (Cf. Ier vol., n° 29).

Le fil conducteur peut être assimilé à un cylindre de section $d\omega$. L'élément de longueur étant ds, $d\tau = d\omega ds$.

La section par un plan perpendiculaire à dx est $\frac{d\tau}{dx}$

$$i = u\frac{d\tau}{dx}$$

$$\left\{\begin{array}{l} ud\tau = idx \\ vd\tau = idy \\ wd\tau = idz \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} u'd\tau' = i'dx' \\ v'd\tau' = i'dy' \\ w'd\tau' = i'dz' \end{array}\right.$$

$$\mathrm{T} = \int (\mathrm{F}u + \mathrm{G}v + \mathrm{H}w)\, d\tau$$

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{F} = \displaystyle\int \frac{u'd\tau'}{r} + \frac{1-k}{2}\frac{d\psi}{dx} \\[2ex] \mathrm{G} = \displaystyle\int \frac{v'd\tau'}{r} + \frac{1-k}{2}\frac{d\psi}{dy} \\[2ex] \mathrm{H} = \displaystyle\int \frac{w'd\tau'}{r} + \frac{1-k}{2}\frac{d\psi}{dz} \end{array}\right.$$

Transformons aussi ψ

$$\psi = \int \left(u'\frac{dr}{dx'} + v'\frac{dr}{dy'} + w'\frac{dr}{dz'}\right) d\tau'$$

Si nous cherchons le potentiel électrodynamique mutuel total nous avons à prendre l'élément différentiel

$$(\mathrm{F}u + \mathrm{G}v + \mathrm{H}w)\, d\tau$$

où F, G, H sont des intégrales étendues à tous les éléments $d\tau'$ de tous les conducteurs, $d\tau$ excepté. En opérant de la sorte on compte deux fois dans l'intégrale double le potentiel mutuel d'un couple d'éléments $d\tau$ et $d\tau'$. Donc il faut diviser par 2 l'intégrale ainsi calculée pour avoir T :

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\int (\mathrm{F}u + \mathrm{G}v + \mathrm{H}w)\, d\tau \tag{8}$$

On peut dire que l'intégrale est étendue à tout l'espace, car en dehors des conducteurs u, v, w sont nuls.

On pourra, dès lors, appliquer le théorème de Green, relatif à l'intégration par parties dans tout l'espace [1]

$$\int d\tau'.\, u' \frac{dr}{dx'} = -\int d\tau'.r\, \frac{du'}{dx'}$$

$$\psi = -\int r d\tau' \left(\frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'}\right) = \int r\, \frac{d\rho'}{dt}\, d\tau' \tag{9}$$

26. Considérons deux quantités d'électricité $e'e'$; elles se repoussent avec une force d'intensité $\frac{1}{\lambda}\frac{ee'}{r^2}$, λ étant une constante. Si l'on adopte les idées universellement reçues, λ est 1 dans le système d'unités électrostatiques et est le carré de la vitesse de la lumière dans le système électromagnétique. Je

[1] Nous intégrons par partie par rapport à x entre les limites $+\infty$ et $-\infty$ et, comme u' est supposé nul à l'infini, le terme tout connu disparait. Cf. Ier volume, page 12.

conserve λ parce que nous serons conduits à modifier un peu les idées reçues.

Le potentiel électrostatique φ est donné dès lors par :

$$\lambda\varphi = \int \frac{\rho'}{r}\, d\tau'$$

$$\lambda \frac{d\varphi}{dt} = \int \frac{1}{r} \frac{d\rho'}{dt}\, d\tau'$$

Or :

$$\Delta\psi = \int \Delta r \frac{d\rho'}{dt}\, d\tau'$$

et comme

$$\Delta r = \frac{2}{r}$$

$$\Delta\psi = \int \frac{2}{r} \frac{d\rho'}{dt}\, d\tau' = 2\lambda \frac{d\varphi}{dt}$$

Appliquons aux deux membres de chacune des équations (7) l'opérateur Δ

$$\Delta \int \frac{u' d\tau'}{r} = -\, 4\pi u$$

d'après le théorème de Poisson.

$$\Delta \frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx} \Delta\psi = 2\lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

10
$$\left\{ \begin{aligned} \Delta F &= -\, 4\pi u + (1 - k)\, \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt} \\ \Delta G &= -\, 4\pi v + (1 - k)\, \lambda \frac{d^2\varphi}{dydt} \\ \Delta H &= -\, 4\pi w + (1 - k)\, \lambda \frac{d^2\varphi}{dzdt} \end{aligned} \right.$$

Calculons

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=J$$

$$\frac{dF}{dx}=\int u'd\tau'\,\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\frac{1-k}{2}\,\frac{d^2\varphi}{dx^2}$$

Or

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx}=-\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}$$

$$\int u'd\tau'\,\frac{d\frac{1}{r}}{dx}=-\int u'd\tau'\,\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}=\int\frac{d\tau'}{r}\,\frac{du'}{dx'}.$$

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=\int\frac{d\tau'}{r}\left(\frac{du'}{dx'}+\frac{dv'}{dy'}+\frac{dw'}{dz'}\right)+\frac{1-k}{2}\,\Delta\psi$$

$$=-\int\frac{d\tau'}{r}\,\frac{d\rho'}{dt}+\frac{1-k}{2}\,\Delta\psi=-\lambda\,\frac{d\varphi}{dt}+(1-k)\,\lambda\,\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\text{(11).}\qquad J=\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=-k\lambda\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

On voit que J serait nul en particulier si on faisait $k=0$.

27. Équations de la loi de Ohm. — La formule $Ri=E-\frac{d\,(Mi')}{dt}$ s'applique aux courants fermés. Si on l'applique à une portion de courant, il faut tenir compte de la différence de potentiel aux extrémités.

$$Ri=\varphi_0-\varphi_1+E-\frac{d\,(Mi')}{dt}.$$

Si on a un élément rectiligne parallèle à Ox

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{d\varphi}{dx}\, dx$$

on peut poser

$$E = X dx$$

$$R = \frac{dx}{C d\omega}$$

C conductibilité spécifique ; d'où

$$Ri = \frac{i dx}{C d\omega} = \frac{u dx}{C}$$

Quant à la force électromotrice d'induction, on a ici :

$$T = iF dx = Mii'$$

$$\frac{d(Mi')}{dt} = dx \frac{dF}{dt}$$

Les équations de la loi de Ohm s'écrivent donc :

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{u}{C} &= -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt} + X \\ \frac{v}{C} &= -\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dG}{dt} + Y \\ \frac{w}{C} &= -\frac{d\varphi}{dz} - \frac{dH}{dt} + Z \end{aligned} \right.$$

On peut dire qu'il y a quatre forces électromotrices se faisant équilibre : la force électrostatique, la force d'induction, la force électromotrice extérieure (d'origine chimique, thermoélectrique, etc.), et la force électromotrice résistante, dont les composantes sont $-\frac{u}{C}, -\frac{v}{C}, -\frac{w}{C}$.

L'hypothèse sur laquelle reposent les formules (12), l'extension de la loi de Ohm aux conducteurs à trois dimensions semble très plausible, mais c'est une hypothèse, et M. Bertrand n'en admet pas la légitimité. Nous verrons qu'en faisant sur la généralité de la loi de Joule dans les conducteurs à trois dimensions une hypothèse qui paraît s'imposer [voir formule (18 *bis*), n° **31**], les formules (12) s'accordent avec le principe de la conservation de l'énergie. Il y a plus : on pourrait appliquer aux conducteurs à trois dimensions les équations de Lagrange et de la théorie de l'induction de Maxwell (Ier vol., n° **151**) ; si je ne donne pas dans ces leçons ce calcul, c'est qu'on a ici un nombre infini de paramètres, et que je serais forcé d'employer le calcul des variations.

Je me bornerai à dire que *si l'on admet la formule* (18 *bis*), le calcul conduirait aux équations (12).

28. Définition de la force magnétique. — Dans le cas où *tous les courants sont fermés*, la force magnétique est susceptible de deux définitions équivalentes :

1° On peut dire que la force magnétique, dont nous avons appelé les composantes α, β, γ, est la résultante de toutes les actions électromagnétiques appliquées à un pôle magnétique égal à 1. C'est la définition que nous avons donnée plus haut au § 8. Un pôle magnétique peut être assimilé à un solénoïde indéfini. En effet l'action d'un courant *fermé* sur un solénoïde fermé est nulle ; son action sur un solénoïde limité ne dépend par conséquent que de la position de ses deux extrémités qui peuvent être assimilées à deux pôles magnétiques égaux et de signe contraire ; son action sur un solénoïde indéfini est donc la même que sur un pôle magnétique unique situé à l'extrémité libre du solénoïde (Cf. Ier vol., n° **124**) ;

2° Considérons un élément magnétique et soient $A d\tau$, $B d\tau$, $C d\tau$, les composantes de son moment magnétique. Les actions subies par cet élément peuvent se réduire à une force unique appliquée au centre de gravité de l'élément et dont les composantes sont :

$$\left(\frac{d\alpha}{dx} A + \frac{d\alpha}{dy} B + \frac{d\alpha}{dz} C\right) d\tau$$

$$\left(\frac{d\beta}{dx} A + \frac{d\beta}{dy} B + \frac{d\beta}{dz} C\right) d\tau$$

$$\left(\frac{d\gamma}{dx} A + \frac{d\gamma}{dy} B + \frac{d\gamma}{dz} C\right) d\tau$$

et à un couple dont le moment a pour composantes :

$$(C\beta - B\gamma)\, d\tau, \quad (A\gamma - C\alpha)\, d\tau, \quad (B\alpha - A\beta)\, d\tau$$

En d'autres termes le moment de ce couple est normal au plan des deux vecteurs qui représentent le moment magnétique de l'élément et la force magnétique et est égal au produit de ces deux vecteurs par le sinus de leur angle.

Si l'élément change de direction sans que son centre de gravité se déplace et sans que la *grandeur* de son moment varie, le travail de ce couple est égal à la variation du produit de ces deux mêmes vecteurs par le cosinus de leur angle, c'est-à-dire à la variation de l'expression suivante :

$$(A\alpha + B\beta + C\gamma)\, d\tau$$

Imaginons maintenant un circuit fermé infiniment petit, parcouru par un courant d'intensité i; soit $d\omega$ l'aire de ce circuit; l, m, n les cosinus directeurs de son plan. Ce circuit sera équivalent à un élément magnétique dont le moment aura pour composantes :

$$A d\tau = i l d\omega, \qquad B d\tau = i m d\omega, \qquad C d\tau = i n d\omega$$

Les actions subies par ce circuit se réduiront donc à une force unique appliquée au centre de gravité du circuit et à un couple dont le moment aura pour composantes :

$$(12\,bis) \quad i d\omega (n\beta - m\gamma), \quad i d\omega (l\gamma - n\alpha), \quad i d\omega (m\alpha - n\beta)$$

Si le circuit change de direction sans que son centre de gravité se déplace, sans se déformer et sans que l'intensité i varie, le travail de ce couple sera la variation de l'expression :

$$(12\,ter) \qquad i d\omega (l\alpha + m\beta + n\gamma)$$

D'où la définition suivante de la force magnétique :

C'est un vecteur dont j'appellerai les composantes α, β, γ et *qui est tel que l'action exercée sur un circuit infiniment petit se réduise à une force appliquée au centre de gravité du circuit et à un couple dont le moment a pour composantes les expressions* (12 *bis*) *et dont le travail est égal à la variation de l'expression* (12 *ter*).

Imaginons maintenant un système S contenant des courants *non fermés.*

La première définition de la force magnétique n'a plus aucun sens.

Il est en effet impossible de réaliser un pôle magnétique isolé à l'aide d'un solénoïde indéfini. Voici pourquoi :

L'action d'un courant *non fermé* sur un solénoïde fermé n'est pas nulle ; son action sur un solénoïde non fermé ne dépend donc pas seulement de la position des deux extrémités mais de la forme du solénoïde ; et son action sur un solénoïde indéfini ne se réduit pas à une force unique appliquée à son extrémité libre.

Nous sommes donc conduits à adopter la seconde définition.

Cherchons l'expression du potentiel électrodynamique T d'un circuit fermé quelconque C par rapport au système S.

Supposons d'abord que le circuit C soit infiniment petit, l'action du système S sur ce circuit se réduira à une force appliquée à son centre de gravité et à un couple. Si le circuit change de direction sans se déformer, sans que l'intensité varie et sans que son centre de gravité se déplace, le travail de la force sera nul ; celui du couple sera *par définition* égal à la variation de l'expression (12 *ter*), c'est-à dire à :

$$i d\omega\,(\alpha\delta l + \beta\delta m + \gamma\delta n)$$

Si donc l'intensité i du courant, l'aire $d\omega$ du circuit, les coordonnées x, y, z de son centre de gravité ne changent pas ; si par conséquent les cosinus directeurs l, m, n varient seuls on aura :

$$\delta T = i d\omega\,(\alpha\delta l + \beta\delta m + \gamma\delta n).$$

On en déduit :

$$T = i d\omega\,(\alpha l + \beta m + \gamma n) + \text{fonction arbitraire de } i,\ d\omega, \text{ de } x, \text{ de } y \text{ et de } z.$$

Cette fonction arbitraire qui ne contient pas les cosinus directeurs l, m et n est évidemment nulle ; car T doit changer de signe quand le courant change de sens, ou ce qui revient au même, quand on fait tourner le circuit de 180° autour d'un axe situé dans son plan, ou ce qui revient encore au même, quand on change l, m, n en $-l$, $-m$, et $-n$.

On a donc finalement :

$$T = i d\omega\,(\alpha l + \beta m + \gamma n)$$

Si le circuit C est fini, on le décomposera en une infinité de circuits infiniment petits ainsi qu'il a été dit au n° **107** du Ier volume et on aura :

$$T = \int i d\omega\,(\alpha l + \beta m + \gamma n) \tag{13}$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\omega$ d'une aire A appartenant à une surface d'ailleurs quelconque passant par le circuit C et limitée par ce circuit.

Quant à l, m, n, ce sont les cosinus directeurs de l'élément $d\omega$ ou, ce qui revient au même de la normale à la surface à laquelle appartient l'aire A.

29. On a [équation (1)]

$$T = i\int (F dx + G dy + H dz)$$

$$= i\int d\omega \left[l\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right) + m\left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right) + n\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)\right]$$

Comme on a par définition de α, β, γ,

$$T = i\int (l\alpha + m\beta + n\gamma)\, d\omega, \tag{13}$$

il s'ensuit que

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ \beta &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ \gamma &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{aligned} \right.$$

Or nous avons déjà (10) et (11)

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta F &= -4\pi u + (1-k)\lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt} \\ \Delta G &= -4\pi v + (1-k)\lambda \frac{d^2\varphi}{dydt} \\ \Delta H &= -4\pi w + (1-k)\lambda \frac{d^2\varphi}{dzdt} \end{aligned} \right.$$

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = -k\lambda \frac{d\varphi}{dt}$$

Calculons $\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$

$$0 = \frac{d^2F}{dx^2} - \frac{d^2F}{dx^2}$$

$$\frac{d\gamma}{dy} = \frac{d^2G}{dxdy} - \frac{dF^2}{dy^2}$$

$$-\frac{d\beta}{dz} = \frac{d^2H}{dxdz} - \frac{d^2F}{dz^2}$$

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = \frac{dJ}{dx} - \Delta F = -k\lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt} + 4\pi u - (1-k)\lambda \frac{d}{d}$$

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} &= 4\pi u - \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt} \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} &= 4\pi v - \lambda \frac{d^2\varphi}{dydt} \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} &= 4\pi w - \lambda \frac{d^2\varphi}{dzdt} \end{aligned} \right.$$

Dans Maxwell, les derniers termes n'existent pas. Nous verrons en effet que Maxwell suppose $\lambda = 0$.

Les équations (15) se prêtent à la vérification suivante :

En différentiant la première des équations (15) par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, et ajoutant il vient :

$$0 = 4\pi\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) - \lambda\Delta\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

Or

$$\lambda\varphi = \int \frac{\rho' d\tau'}{r}$$

d'où

$$\lambda\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

$$\lambda\Delta\frac{d\varphi}{dt} = -4\pi\frac{d\rho}{dt}$$

d'où

$$(16) \qquad 4\pi\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} + \frac{d\rho}{dt}\right) = 0.$$

Nous retrouvons ainsi l'équation de continuité.

CONSERVATION DE L'ÉNERGIE ET STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE

30. Expression de l'énergie électrocinétique T et de l'énergie électrostatique U. — Je vais donner de T une expression nouvelle. Dans l'équation (8) je remplace u, v, w, par leurs valeurs tirées de (15)

$$T = \frac{1}{8\pi}\int \sum \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) F d\pi + \frac{1}{8\pi}\int \sum \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt} F d\tau$$

En intégrant par parties dans tout l'espace (Cf. Introduction), on a :

$$\int \frac{d\gamma}{dy} F d\tau = -\int \frac{dF}{dy} \gamma d\tau$$

La première des intégrales a donc pour valeur

$$\frac{1}{8\pi}\int \left[\alpha \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right) + \beta \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right) + \gamma \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)\right] d\tau$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\tau.$$

La seconde se transforme de même

$$\int F \frac{d^2\varphi}{dxdt} d\tau = -\int \frac{dF}{dx}\frac{d\varphi}{dt} d\tau$$

et

$$\frac{\lambda}{8\pi}\int \sum \frac{d^2\varphi}{dxdt} F d\tau = -\frac{\lambda}{8\pi}\int \frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right) d\tau$$

$$= \frac{k\lambda^2}{8\pi}\int \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 d\tau$$

$$(16) \quad T = \frac{1}{8\pi}\int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\tau + \frac{k\lambda^2}{8\pi}\int \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 d\tau$$

Si k est positif ou nul, tous les éléments de l'intégrale sont positifs, et si T est nul, c'est que tous ses éléments sont nuls; au contraire, si k est négatif, on ne peut affirmer que, du moment que T est nul, tous les éléments soient nuls et qu'il n'y ait pas de courant.

T, énergie électrocinétique, n'est qu'un des termes de l'énergie. L'autre terme est l'énergie électrostatique

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi d\tau$$

Or :

$$\lambda\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

$$U = \frac{\lambda}{8\pi}\int \Delta\varphi . \varphi d\tau.$$

D'après le théorème de Green,

$$\int \varphi . \Delta\varphi d\tau = -\int \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] d\tau$$

$$(17) \quad U = \frac{\lambda}{8\pi}\int \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] d\tau$$

U est essentiellement positif.

L'énergie totale T + U est positive si $k \geqslant 0$. Si k est < 0, T + U peut être de signe quelconque. Supposons que F, G, H, soient tels qu'on ait

$$F = \frac{d\chi}{dx}, \qquad G = \frac{d\chi}{dy}, \qquad H = \frac{d\chi}{dz}$$

χ fonction quelconque de x, y, z, les trois binômes (14) sont nuls, et le premier terme disparaît. Le second ne disparaît pas; supposons $\varphi = 0$ à l'origine des temps, T + U sera négatif; comme $\varphi = 0$ à l'origine des temps il n'y a pas d'électricité libre au début, mais il y en a tout de suite après, car $\frac{d\varphi}{dt}$ n'est pas nul.

31. Conservation de l'énergie. — Vérifions que l'énergie se conserve, c'est-à-dire que la variation de $T + U$ est égale au travail accompli par les forces électromotrices extérieures (chimiques, thermoélectriques, etc.), diminué de la chaleur dégagée dans les résistances en vertu de la loi de Joule.

$$(18)\ d(T+U) = -dt \int \frac{u^2+v^2+w^2}{C}\, d\tau + dt \int (Xu + Yv + Zw)\, d\tau$$

Reportons-nous aux équations (12) et multiplions la première par $-u\,d\tau$, la seconde par $-v\,d\tau$, la troisième $-w\,d\tau$, puis intégrons dans tout l'espace et ajoutons : il vient :

$$(18')\quad -\int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C}\, d\tau + \int (Xu + Yv + Zw)\, d\tau$$

$$= \int \left(u \frac{d\varphi}{dx} + v \frac{d\varphi}{dy} + w \frac{d\varphi}{dz}\right) d\tau + \int \left(u \frac{dF}{dt} + v \frac{dG}{dt} + w \frac{dG}{dt}\right).$$

Nous allons démontrer que la première intégrale du second membre est $\frac{dU}{dt}$, la seconde $\frac{dT}{dt}$.

Quant à l'intégrale $\int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C}\, d\tau$, c'est la chaleur de Joule. Une *ligne de courant* est une ligne qui satisfait aux équations différentielles $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$, c'est-à-dire qui a pour tangente en chaque point la vitesse de l'électricité.

Un conducteur à trois dimensions peut être considéré comme formé d'une infinité de conducteurs linéaires élémentaires ayant la forme de cylindres infiniment petits, de hauteur ds, de section droite $d\omega$, de volume $d\tau = ds d\omega$ et dont la hauteur est dirigée suivant les lignes de courant.

Admettons que la loi de Joule s'applique à ces conducteurs linéaires élémentaires.

Si l'on considère l'un d'eux, la chaleur dégagée dans sa résistance est $\mathrm{R}i^2 dt$; or

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{\mathrm{C} d\omega}$$

et

$$i^2 = (u^2 + v^2 + w^2)\, d\omega^2$$

Donc :

$$(18\ bis) \quad \mathrm{R}i^2 dt = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{\mathrm{C}}\, ds d\omega dt = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{\mathrm{C}}\, d\tau . dt.$$

32. Je me propose maintenant de démontrer que la première intégrale du deuxième membre est égale à $\frac{d\mathrm{U}}{dt}$.

Nous avons vu que

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\int \rho\varphi d\tau$$

Je dis que

$$\frac{d\mathrm{U}}{dt} = \int \frac{d\rho}{dt}\, \varphi d\tau$$

Car :

$$\frac{dU}{dt}=\frac{1}{2}\int\frac{d\rho}{dt}\varphi d\tau+\frac{1}{2}\int\varphi\frac{d\rho}{dt}d\tau$$

et d'autre part :

$$\int\frac{d\rho}{dt}\varphi d\tau=\int\rho\frac{d\varphi}{dt}d\tau.$$

En effet,

$$\varphi=\int\frac{\rho' d\tau'}{\lambda r}$$

et

$$(18\ ter)\qquad \int\int\frac{d\rho}{dt}\rho'\frac{d\tau d\tau'}{\lambda r}=\int\int\rho\frac{d\rho'}{dt}\frac{d\tau d\tau'}{\lambda r},$$

car la première intégrale ne change pas, si on permute ρ et ρ' en même temps que $d\tau$ et $d\tau'$, puisque les deux intégrations par rapport à $d\tau$ et $d\tau'$ s'étendent à tout l'espace.

Donc

$$\frac{dU}{dt}=\int\frac{d\rho}{dt}\varphi d\tau \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

D'autre part,

$$\frac{d\rho}{dt}=-\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)$$

Donc

$$\frac{dU}{dt}=\int\frac{d\rho}{dt}\varphi d\tau=-\int\varphi\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)d\tau$$

d'où en intégrant par parties dans tout l'espace

$$\frac{dU}{dt} = \int \left(u \frac{d\varphi}{dx} + v \frac{d\varphi}{dy} + w \frac{d\varphi}{dz} \right) d\tau$$

C. Q. F. D.

33. Passons à l'intégrale

$$\int \left(u \frac{dF}{dt} + v \frac{dG}{dt} + w \frac{dH}{dt} \right) d\tau$$

Nous avons vu que

$$T = \frac{1}{2} \int (Fu + Gv + Hw) d\tau$$

d'où

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \int \sum F \frac{du}{dt} d\tau + \frac{1}{2} \int \sum u \frac{dF}{dt} d\tau ;$$

je dis que ces deux intégrales sont égales. Pour le démontrer, posons :

$$F = F' + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dx} \qquad F' = \int \frac{u' d\tau'}{r}$$

L'identité à démontrer devient :

$$\int \sum F' \frac{du}{dt} d\tau + \frac{1-k}{2} \int \sum \frac{d\psi}{dx} \frac{du}{dt} d\tau$$

$$= \int \sum \frac{dF'}{dt} u d\tau + \frac{1-k}{2} \int \sum u \frac{d^2\psi}{dx dt} d\tau$$

1° On a :

$$\int \mathrm{F}' \frac{du}{dt}\, d\tau = \int u\, \frac{d\mathrm{F}'}{dt}\, d\tau,$$

car

$$\int\int u' \frac{du}{dt} \frac{d\tau d\tau'}{r} = \int\int u \frac{du'}{dt} \frac{d\tau d\tau'}{r}$$

Cette identité se démontrerait tout à fait comme l'identité (18 *ter*).

2° On a :

$$\int \sum \frac{d\psi}{dx} \frac{du}{dt}\, d\tau = \int \sum u\, \frac{d^2\psi}{dxdt}\, d\tau$$

car on a, en intégrant par parties dans tout l'espace :

$$\int \frac{d\psi}{dx} \frac{du}{dt}\, d\tau = -\int \psi\, \frac{d^2 u}{dxdt}\, d\tau$$

et :

$$\int \frac{d^2\psi}{dxdt}\, u d\tau = -\int \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{du}{dx}\, d\tau$$

et on n'a qu'à faire voir que :

$$\int \sum \psi\, \frac{d^2 u}{dxdt}\, d\tau = \int \sum \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{du}{dx}\, d\tau.$$

Or, on a :

$$\sum \frac{du}{dx} = -\frac{d\rho}{dt}$$

$$\sum \frac{d^2u}{dxdt} = -\frac{d^2\rho}{dt^2}$$

$$\psi = \int \frac{d\rho'}{dt} r d\tau',$$

et l'identité à démontrer revient à :

$$\int\int \frac{d\rho'}{dt}\frac{d^2\rho}{dt^2} r d\tau d\tau' = \int\int \frac{d\rho}{dt}\frac{d^2\rho'}{dt^2} r d\tau d\tau'$$

égalité qui se démontrerait comme l'égalité (18 *ter*).

En remplaçant les deux intégrales du second membre de (18′) par les valeurs ainsi trouvées, on a :

$$\frac{d(\mathrm{T}+\mathrm{U})}{dt} = -\int \frac{u^2+v^2+w^2}{\mathrm{C}} d\tau + \int (\mathrm{X}u + \mathrm{Y}v + \mathrm{Z}w) d\tau$$

Si on multipliait cette équation par dt, le premier membre représenterait l'accroissement de l'énergie tant électrodynamique qu'électrostatique, la seconde intégrale du second membre représenterait le travail des forces électromotrices extérieures (chimiques, thermoélectriques, etc.); la première intégrale du second membre représenterait l'énergie perdue sous forme de chaleur de Joule.

Cette équation exprime donc bien qu'il y a conservation de l'énergie.

34. Stabilité de l'équilibre. — Dans le cas où il n'y a aucune force électromotrice extérieure au système,

$$\frac{d(\mathrm{T}+\mathrm{U})}{dt}=-\int\frac{u^2+v^2+w^2}{\mathrm{C}}\,d\tau,$$

la dérivée de $\mathrm{T}+\mathrm{U}$ par rapport au temps est essentiellement négative.

Si la constante k de Helmholtz est $\geqslant 0$, l'équilibre est stable. En effet, $\mathrm{T}+\mathrm{U}$ est essentiellement positif et ne s'annule que s'il n'y a ni électricité libre ni courants dans l'espace ; si $\mathrm{T}+\mathrm{U}$ est très petit, c'est que les courants et la densité de l'électricité libre sont partout très petits. Partons de l'équilibre : $\mathrm{T}+\mathrm{U}=0$, et faisons subir une petite perturbation, $\mathrm{T}+\mathrm{U}$ prendra une valeur positive très petite ; mais si nous abandonnons le système à lui-même, $\mathrm{T}+\mathrm{U}$ va aller en diminuant, tout en restant positif ; $\mathrm{T}+\mathrm{U}$ restera donc très petit, ce qui ne peut avoir lieu que si les courants restent eux-mêmes très petits. Donc il y a stabilité.

Au contraire, si k est négatif, nous pouvons encore partir de l'équilibre absolu et faire subir au système une perturbation très petite ; mais nous pouvons toujours supposer cette perturbation telle que la valeur initiale très petite que prend $\mathrm{T}+\mathrm{U}$ soit négative. A partir de là, $\mathrm{T}+\mathrm{U}$ va diminuer ; sa valeur absolue va aller en croissant, et on s'éloignera de plus en plus de l'équilibre primitif. L'équilibre est instable.

Nous devons donc rejeter toute théorie qui donne à k une valeur négative, en particulier la théorie de Weber, qui se déduit de celle de Helmholtz, en faisant $k=-1$.

ÉTUDE DES MILIEUX MAGNÉTIQUES

35. Que deviennent, dans les milieux magnétiques, les équations (14) et (15)?

Définissons d'abord la force et l'induction magnétique en un point. La force magnétique sera la somme géométrique de deux vecteurs :

1° La force électromagnétique, due aux courants fermés ou non, et définie comme au § 28, telle qu'elle serait au point considéré si le milieu n'était pas magnétique : cette force pourra ne pas dériver d'un potentiel, cela aura lieu si au point considéré le courant électrique n'est pas nul ;

2° La force magnétique due aux aimants permanents ou non ; elle pourra se réduire à l'action qu'exerce l'aimantation induite par les courants dans la masse magnétique à l'intérieur de laquelle est pris le point considéré. Cette force dérive toujours d'un potentiel, du potentiel magnétique :

$$\Omega = -\int \left(\frac{dA'}{dx'} + \frac{dB'}{dy'} + \frac{dC'}{dz'}\right)\frac{1}{r}\, d\tau'$$

d'où

$$\alpha = \int \left(\frac{dA'}{dx'} + \frac{dB'}{dy'} + \frac{dC'}{dz'}\right)\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\, d\tau'$$

Quant à l'induction magnétique, elle est la somme géométrique de la force magnétique et de l'aimantation au point considéré multipliée par 4π.

36. Je dis que dans un milieu magnétique, les équations (14) doivent être remplacées par les équations :

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ b &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ c &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{aligned} \right.$$

et que les équations (15) sont encore vraies.

37. Considérons un aimant ; supposons qu'il n'y ait pas de courant extérieur. L'aimant peut être considéré comme constitué par un système de courants particulaires d'après les idées d'Ampère.

La composante F du potentiel vecteur dû à l'un de ces courants est :

$$F = i' \int \frac{dx'}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dx} ;$$

tous les courants particulaires étant fermés, la dérivée $\frac{d\psi}{dx}$ disparaît, et il reste

$$i' \int \frac{dx'}{r}$$

En transformant cette intégrale de ligne en une intégrale de surface il vient

$$F = i' \int \left(m' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} - n' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} \right) d\omega'$$

$d\omega'$ étant l'élément de l'aire embrassée par le courant; cette aire est infiniment petite; donc l'intégrale se réduit au seul élément

$$i'd\omega'\left(m'\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}-n'\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}\right).$$

Le courant est équivalent à un élément magnétique, dont le moment a pour composantes $A'd\tau'$, $B'd\tau'$, $C'd\tau'$

$$\left\{\begin{array}{l} A'd\tau' = i'l'd\omega' \\ B'd\tau' = i'm'd\omega' \\ C'd\tau' = i'n'd\omega' \end{array}\right.$$

par suite la composante F du potentiel vecteur dû à cet élément est

$$\left(B'\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}-C'\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}\right)d\tau'$$

Pour avoir la composante due à l'aimant entier il faut intégrer par rapport aux éléments $d\tau'$ du volume de l'aimant, ou, ce qui revient au même, intégrer dans tout l'espace car, à l'extérieur, $A' = B' = C' = 0$.

$$F=\int\left(B'\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}-C'\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}\right)d\tau'$$

Voici le point délicat du calcul : r est la distance de deux éléments $d\tau$ et $d\tau'$, et l'élément $d\tau$ est à l'intérieur de la masse; donc r peut être infiniment petit ; $\frac{1}{r}$ est alors infiniment grand :

s'il est infiniment grand du premier ordre, $\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}$ l'est du second, et $\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx'^2}$ du troisième; et ainsi de suite.

J'ai à prendre des intégrales triples; si j'ai sous le signe $\int$ des termes en $\frac{1}{r}$, l'intégrale est finie et déterminée, de même pour des termes en $\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}$, mais il n'en est plus ainsi si l'on a des dérivées secondes. Si on ne faisait pas attention à cette remarque, on démontrerait aisément que ΔV est nul même à l'intérieur du corps attirant, ce qui est faux.

Je dois donc m'arranger pour ne pas introduire, comme aux § 8 et § 9, les dérivées secondes de $\frac{1}{r}$ par rapport aux coordonnées.

On a, en intégrant par parties dans tout l'espace :

$$\int B' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} d\tau' = -\int \frac{1}{r}\frac{dB'}{dz'} d\tau'$$

On a donc en transformant l'expression de F que nous venons de trouver

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} F &= \int \left(\frac{dC'}{dy'} - \frac{dB'}{dz'}\right) \frac{1}{r}\, d\tau' \text{ et de même :} \\ G &= \int \left(\frac{dA'}{dz'} - \frac{dC'}{dx'}\right) \frac{1}{r}\, d\tau' \\ H &= \int \left(\frac{dB'}{dx'} - \frac{dA'}{dy'}\right) \frac{1}{r}\, d\tau' \end{aligned} \right.$$

Calculons

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$$

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dH}{dy} &= \int \frac{dB'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} d\tau' - \int \frac{dA'}{dy'} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} d\tau' \\ -\frac{dG}{dz} &= \int \frac{dC'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} d\tau' - \int \frac{dA'}{dz'} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} d\tau' \\ 0 &= \int \frac{dA'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau' - \int \frac{dA'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau' \end{aligned}\right.$$

Transformons ces intégrales :

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dy} = -\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}$$

parce que r est fonction de $x - x'$, $y - y'$ et $z - z'$. On a donc en tenant compte de cette identité et intégrant par parties par rapport à y' :

$$\frac{dB'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} d\tau' = -\int \frac{dB'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} d\tau' = \int \frac{d^2B'}{dx'dy'} \frac{1}{r} d\tau'$$

et, en intégrant de nouveau par parties par rapport à x'

$$= -\int \frac{dB'}{dy'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} d\tau' = \int \frac{dB'}{dy'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau'$$

De même,

$$\int \frac{dC'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} d\tau' = \int \frac{dC'}{dz'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau.$$

D'autre part, si on pose :

$$V = \int \frac{A' d\tau'}{r},$$

l'équation de Poisson nous donne :

$$\Delta V = -4\pi A.$$

D'autre part

$$\frac{dV}{dx} = \int A' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau' = -\int A' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} d\tau' = \int \frac{dA'}{dx'} \frac{1}{r} d\tau'$$

et

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \int \frac{dA'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau'.$$

Les équations (21) s'écrivent alors :

$$\left\{\begin{aligned} o &= \int \frac{dA'}{dx'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau' - \frac{d^2V}{dx^2} \\ \frac{dH}{dy} &= \int \frac{dB'}{dy'} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} d\tau' - \frac{d^2V}{dy^2} \\ -\frac{dG}{dz} &= \int \frac{dC'}{dz'} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau' - \frac{d^2V}{dz^2} \end{aligned}\right.$$

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \int \left(\frac{dA'}{dx'} + \frac{dB'}{dy'} + \frac{dC'}{dz'}\right) \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau' - \Delta V$$

$$= \alpha + 4\pi A = a.$$

38. Prenons maintenant un milieu magnétique parcouru par des courants finis ; u, v, w sont les composantes du courant ; α_1, β_1, γ_1 sont les composantes de la force électromagnétique due aux courants finis, F_1, G_1, H_1 les composantes de leur potentiel vecteur. De même, α_2, β_2, γ_2 seront les composantes de la force magnétique due aux courants particulaires ; a_2, b_2, c_2 les composantes de l'induction qui leur est due, et F_2, G_2, H_2 les composantes de leur potentiel vecteur. On a pour les composantes de la force magnétique totale, de l'induction totale et du potentiel vecteur total : $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ et deux équations analogues ;

$$a = \alpha_1 + a_2$$

et

$$F = F_1 + F_2.$$

On a, pour les courants finis, d'après le § 29

$$\alpha_1 = \frac{dH_1}{dy} - \frac{dG_1}{dz} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\gamma_1}{dy} - \frac{d\beta_1}{dz} = 4\pi u - \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

Pour les courants particulaires, d'après le § 36

$$a_2 = \frac{dH_2}{dy} - \frac{dG_2}{dz}, \qquad \text{et} \qquad \frac{d\gamma_2}{dy} - \frac{d\beta_2}{dz} = 0$$

d'où, en ajoutant :

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \qquad \text{et} \qquad \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi u - \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

ce qui était à démontrer.

CHAPITRE V

PASSAGE DE LA THÉORIE DE HELMHOLTZ A CELLE DE MAXWELL

39. Pour se rendre compte de la façon dont on peut passer de la théorie de Helmholtz à celle de Maxwell, qui n'en est qu'un cas particulier ou plus exactement qu'un cas limite, il faut connaître les diverses hypothèses faites au sujet du magnétisme induit et de la polarisation diélectrique. Le présent chapitre est intimement lié au chapitre III du premier volume où j'ai exposé des idées analogues à celles de Helmholtz sous une forme différente.

Avant d'aborder la question de la polarisation diélectrique, rappelons les théories du magnétisme induit. Nous commencerons par celle de Poisson, la plus importante au point de vue de ce qui va suivre. Mais comme les calculs ont été exposés en détail dans le premier volume, paragraphes 52 à 59, nous nous bornerons à rappeler succinctement les résultats. Je dois avertir toutefois que la théorie exposée dans les numéros cités, 52 à 59, se rapportant plus particulièrement aux diélectriques, il faut, pour en déduire la théorie du magnétisme qui n'en diffère pas au point de vue mathématique, changer quelques-unes des notations.

C'est ainsi que ce que j'ai appelé $-\frac{dU}{d\xi}$ et h dans ces paragraphes s'appellera ici α et ε. En effet U représentait le potentiel électrique ; il doit être remplacé ici par le potentiel magnétique dont les dérivées changées de signe ne sont autre chose que les composantes de la force magnétique. De même ce que nous appelions K s'appellera ici μ.

Induction magnétique. — Poisson attribue les phénomènes magnétiques à deux fluides, austral et boréal. Un corps magnétique est constitué par de petites sphères conductrices du magnétisme, distribuées irrégulièrement dans un espace intermédiaire isolant. Chaque sphère peut être regardée comme étant la superposition d'une sphère solide de fluide austral et d'une de fluide boréal : l'effet de l'aimantation est de faire glisser l'une de ces sphères par rapport à l'autre d'une quantité plus ou moins grande : on a ainsi des *couches de glissement* (1).

Poisson admet que les actions mutuelles de toutes les autres sphères sur l'une d'elles se neutralisent Si m est la masse de chacune des sphères, australe et boréale, et si ξ, η, ζ sont les composantes du déplacement du centre de la sphère qui glisse, on a

$$m\xi = \mathrm{A}d\tau$$
$$m\eta = \mathrm{B}d\tau$$
$$m\zeta = \mathrm{C}d\tau$$

(1) Voir pour cette théorie des couches de glissement, Ier vol., chap. III, p. 41.

$A d\tau$, $B d\tau$, $C d\tau$ étant les composantes du moment magnétique de cet élément sphérique.

Pour pouvoir définir la force magnétique en un point intérieur il faut supposer une cavité creusée autour du point, et la force dépend de la forme de cette cavité, contrairement à ce que croyait Poisson. Elle a pour composantes α, β, γ à l'intérieur d'un cylindre infiniment long par rapport à sa base et dont l'axe est dirigé suivant l'aimantation ; les composantes sont $\alpha + 4\pi A$, $\beta + 4\pi B$, $\gamma + 4\pi C$ à l'intérieur d'un cylindre infiniment plat, parallèle aussi à l'aimantation ; enfin, elles sont

$$\alpha + \frac{4}{3}\pi A, \qquad \beta + \frac{4}{3}\pi B, \qquad \gamma + \frac{4}{3}\pi C$$

à l'intérieur d'une sphère.

Décrivons autour du point o une sphère σ de volume $d\tau$, très petite d'une façon absolue, mais grande par rapport aux éléments sphériques ; écrivons qu'il y a équilibre à l'intérieur d'un de ces éléments, s. L'action des corps extérieurs à la sphère σ a pour composante parallèle à Ox, $\alpha + \frac{4}{3}\pi A$. A, B, C sont les composantes de la magnétisation. Si ε est le rapport du volume des petites sphères s au volume $d\tau$ de σ, l'aimantation de chacun de ces éléments s a pour composantes $\frac{A}{\varepsilon}$, $\frac{B}{\varepsilon}$, $\frac{C}{\varepsilon}$. L'action sur un point intérieur à s des éléments sphériques extérieurs à s, mais intérieurs à σ, est supposée nulle (Cf. Ier vol., n° 55). L'action de l'élément s lui-même a pour composante parallèle à Ox, $-\frac{4}{3}\pi\frac{A}{\varepsilon}$.

L'équilibre s'écrit ainsi :

$$\alpha + \frac{4}{3}\pi A - \frac{4}{3}\pi\frac{A}{\varepsilon} = 0 \tag{1}$$

$$\alpha = \frac{4}{3}\pi A \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$4\pi A = \frac{3\varepsilon\alpha}{1-\varepsilon}$$

$$a = \alpha + 4\pi A = \frac{1+2\varepsilon}{1-\varepsilon}\alpha = \mu\alpha$$

C'est $\frac{1+2\varepsilon}{1-\varepsilon} = \mu$, qu'on appelle la *perméabilité magnétique.*

J'insiste sur la signification de l'équation (1).

Une molécule magnétique située à l'intérieur de la sphère s qui est conductrice du magnétisme doit être en équilibre sous l'action de toutes les forces qui agissent sur elle. Si l'on considère seulement les composantes parallèles à l'axe des x, la somme de ces composantes doit être nulle. On a donc :

(Action des aimants extérieurs et des éléments magnétiques extérieurs à $\sigma = \alpha + \frac{4}{3}\pi A) +$ (action des éléments magnétiques intérieurs à σ et autres que $s = 0 + \left(\text{action de } s = -\frac{4}{3}\pi\frac{A}{\varepsilon}\right) = 0$.

La théorie présente des difficultés ; ε doit être $< \frac{\pi}{6}$, ce qui impose à μ une limite supérieure qui est dépassée pour le fer. On peut dire, il est vrai, que rien n'obligeait à considérer des éléments sphériques ; on peut, comme l'a fait M. Mathieu, prendre des éléments d'autres formes, et l'on échappe à cette difficulté. Une autre difficulté c'est que μ n'est pas une constante mais varie avec la force $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.

Weber suppose des éléments déjà polarisés, mais orientés d'une manière quelconque : la force magnétique les ramène à une direction commune, ce qui se rapproche des idées d'Ampère.

Quant au diamagnétisme, remarquons que pour s'en rendre compte dans les idées de Poisson, il faut admettre que le vide est susceptible de polarisation magnétique et que les corps diamagnétiques sont seulement moins magnétiques que le vide. Alors le μ du vide n'est plus 1 : on nous avait défini l'unité de magnétisme en admettant que deux pôles égaux à 1 s'attirent avec une force 1 à l'unité de distance ; si $\mu = 1$ pour le vide, l'attraction observée dans le vide est bien l'attraction réelle. Il n'en est plus de même si $\mu > 1$.

40. Polarisation diélectrique. — Mossotti est arrivé à rendre compte des phénomènes que présentent les diélectriques dans les idées de Coulomb, en transportant les théories de Poisson à l'électricité, et ces théories, qui ne sont plus que de l'archéologie en magnétisme, peuvent encore servir dans l'étude des diélectriques, sans pourtant correspondre probablement à aucune réalité objective.

Les diélectriques seraient composés de sphères conductrices plongées dans un milieu isolant. Ce qui joue le rôle de l'aimantation, c'est la *polarisation diélectrique*, que Maxwell appelle *déplacement électrique :* f, g, h.

$$m\xi = f d\tau$$
$$m\eta = g d\tau$$
$$m\zeta = h d\tau$$

Un diélectrique constitué de la sorte est tout à fait assimilable à un aimant; je veux dire que le fluide électrique y est distribué absolument de la même façon que le fluide magnétique dans un aimant constitué comme le suppose Poisson.

Le potentiel magnétique d'une masse magnétique m par rapport à un point extérieur est $\frac{m}{r}$. Le potentiel électrique d'une masse électrique m est de même, d'après les notations que nous avons adoptées, $\frac{m}{\lambda r}$.

Le potentiel d'une des sphères de Poisson par rapport à un point extérieur est, en appelant $A d\tau$, $B d\tau$, $C d\tau$ les composantes du moment magnétique de cette sphère :

$$d\tau'\left(A\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}+B\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}+C\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}\right)$$

De même le potentiel d'une des sphères de Mossotti par rapport à un point extérieur sera :

$$\frac{d\tau'}{\lambda}\left(f\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}+g\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}+h\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}\right)$$

De même donc que le potentiel d'un aimant est représenté par l'intégrale :

$$\Omega=\int d\tau'\left(A'\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}+B'\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}+C'\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}\right)$$

celui d'un diélectrique sera représenté par l'intégrale :

$$\varphi=\int\frac{d\tau'}{\lambda}\left(f'\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}+g'\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}+h'\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}\right)$$

La force magnétique (parallèle à l'axe de x) due à un aimant est en un point extérieur $\alpha = -\frac{d\Omega}{dx}$, la force électrostatique due à un diélectrique sera de même $-\frac{d\varphi}{dx}$.

Si l'on veut calculer cette force en un point intérieur, on retrouve l'analogie avec les aimants. Il faut pour la définir supposer une petite cavité creusée dans le diélectrique autour du point considéré ; on voit alors que la composante parallèle à l'axe des x est égale :

à $-\frac{d\varphi}{dx}$ si la cavité est un cylindre très allongé;

à $-\frac{d\varphi}{dx} + \frac{4\pi f}{\lambda}$ si elle est un cylindre très aplati;

à $-\frac{d\varphi}{dx} + \frac{4\pi f}{3\lambda}$ si elle est sphérique.

Ecrivons comme précédemment les équations de l'équilibre, il faut seulement ajouter ici les forces électromotrices d'induction, et d'autre part les forces électromotrices d'origine quelconque, chimique par exemple ou thermoélectrique, et dont j'appelle les composantes X, Y et Z.

α doit être ici remplacé par $-\frac{d\varphi}{dx}$, φ étant le potentiel électrostatique.

Une molécule électrique située à l'intérieur d'une des sphères s de Mossotti doit être en équilibre ; si donc on considère les forces électromotrices d'origine diverse auxquelles cette molécule est soumise et les composantes de ces forces suivant l'axe des x, la somme de ces composantes doit être nulle, ce qui nous donne une équation tout à fait analogue à l'équation (1); nous supposerons comme plus haut que l'on a creusé dans le diélectrique une cavité limitée par une sphère σ concentrique à s; on aura :

(action des conducteurs extérieurs et de la portion du diélectrique extérieure à $\sigma = -\frac{d\lambda}{dx} + \frac{4}{3}\pi\frac{f}{\lambda}\Big)$ + (action des sphères de Mossotti intérieures à σ et autres que $s = 0$) + $\left(\text{action de } s = -\frac{4}{3}\pi\frac{f}{\lambda\varepsilon}\right) + \left(\text{forces d'induction} = -\frac{dF}{dt}\right)$ + (forces électromotrices extérieures, d'origine diverse $= X) = 0$ c'est-à-dire :

$$-\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt} + X + \frac{4}{3}\pi\frac{f}{\lambda} - \frac{4}{3}\pi\frac{f}{\varepsilon\lambda} = 0$$

$$\frac{4}{3}\pi\frac{f}{\lambda}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt} + X;$$

ou en posant :

$$K = \frac{\lambda(1+2\varepsilon)}{1-\varepsilon},$$

on a :

$$\frac{4\pi f}{K-\lambda} = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt} + X. \tag{2}$$

K est le *pouvoir inducteur spécifique* du milieu.

Proposons-nous d'évaluer le courant de déplacement qui se produit dans un diélectrique quand son état de polarisation se modifie. Nous avons défini plus haut les composantes u, v et w du courant. Cette définition peut encore s'énoncer comme il suit : *$ud\tau$ est la projection sur l'axe des x de la quantité de mouvement de toutes les molécules électriques contenues dans l'élément de volume $d\tau$.* Considérons un élément $d\tau$ contenant une sphère de Mossotti. Quand cette sphère est polarisée on peut la regarder comme formée de deux sphères, l'une de fluide positif, l'autre de fluide négatif, dont les masses électriques sont égales et de signe contraire, qui ont même volume et dont les centres ne coïncident pas (voir Ier volume, n° 47). Soient $+m$ et $-m$ les masses des deux sphères ; soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées du centre de la sphère positive ; $x_2 = x_1 - \xi$, $y_2 = y_1 - \eta$, $z_2 = z_1 - \zeta$ celles du centre de la sphère négative.

Alors ξ, η, ζ, ont la même signification qu'au début du paragraphe.

On a pour la composante parallèle à Ox du courant dû au déplacement relatif des deux sphères :

$$u d\tau = m \frac{dx_1}{dt} - m \frac{dx_2}{dt} = m \frac{d\xi}{dt} = d\tau \frac{df}{dt}$$

De même

$$v = \frac{dg}{dt}$$

$$w = \frac{dh}{dt}$$

41. Le potentiel électrostatique φ est dû à l'électricité répandue dans les conducteurs et à celle qui polarise les diélectriques : ceux-ci se comportent comme des aimants.

On a donc

$$\varphi = \frac{1}{\lambda}\int \frac{\sigma' d\tau'}{dr} + \frac{1}{\lambda}\int \left(f' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + g' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} + h' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} \right) d\tau'$$

en appelant σ la densité au point (x, y, z) du conducteur.

Dans cette équation la première intégrale représente le potentiel dû à l'électricité libre des conducteurs, la seconde le potentiel dû à l'électricité polarisée dans les diélectriques.

D'ordinaire il n'y a d'électricité libre qu'à la surface des conducteurs. Appelons $[\sigma]$ la densité *superficielle* de cette électricité au point x, y, z de cette surface, $[\sigma']$ la densité superficielle au point x', y', z'. S'il y a de l'électricité non seulement à la surface, mais à l'intérieur des conducteurs j'appellerai de même σ la densité de *volume* de l'électricité au point x, y, z du conducteur.

Nous avons alors :

$$\lambda\varphi = \int \frac{\sigma' d\tau'}{r} + \int \frac{[\sigma'] d\omega'}{r} + \int \left(f' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + g' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} + h' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} \right) d\tau'$$

la première intégrale doit être étendue à tous les éléments de volume $d\tau'$ des conducteurs, la troisième à tous les éléments $d\tau'$ des diélectriques et la seconde à tous les éléments $d\omega'$ de la surface qui sépare les conducteurs des diélectriques.

La troisième intégrale peut se transformer par l'intégration par parties et donne :

$$(8) \quad \int \left(f' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + g' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} + h' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} \right) d\tau' = \int (l'f' + m'g' + n'h') d\omega' - \int \left(\frac{df'}{dx'} + \frac{dg'}{dy'} + \frac{dh'}{dz'} \right) d\tau'$$

Dans le second membre, la première intégrale doit être étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la surface qui limite les diélectriques et la seconde à tous les éléments de volume des diélectriques.

Pour abréger les écritures dans l'équation (3), j'ai supposé que les propriétés du diélectrique varient d'une manière continue de telle sorte que f, g, h soient des fonctions continues ; si donc on a plusieurs diélectriques différents je supposerai, ainsi que je l'ai expliqué dans la préface, qu'ils sont séparés les uns des autres par une *couche de passage* très mince. Au contraire je regarderai les diélectriques comme séparés des conducteurs par une surface géométrique de telle façon que les propriétés du milieu varient *brusquement* quand on traverse cette surface.

Posons maintenant

$$\rho = \sigma \text{ dans les conducteurs}$$

$$\rho = -\frac{df}{dx} - \frac{dg}{dy} - \frac{dh}{dz} \text{ dans les diélectriques;}$$

$$[\rho] = [\sigma] + lf + mg + nh$$

à la surface de séparation des conducteurs et des diélectrique ; il viendra :

$$\lambda\varphi = \int \rho' \frac{d\tau'}{r} + \int \frac{[\rho'] \, d\omega'}{r}$$

En d'autres termes tout se passera comme si l'on avait de l'électricité répandue dans tout l'espace avec une densité ρ et d'autre part de l'électricité répandue à la surface des conducteurs avec la densité superficielle $[\rho]$.

Il est aisé de se rendre compte de ce résultat :

Si l'on considère un aimant, on sait que tout se passe comme si la densité magnétique à l'intérieur était $-\frac{dA}{dx}-\frac{dB}{dy}-\frac{dC}{dz}$ et la densité superficielle à la surface de l'aimant égale à $Al + Bm + Cn$. Les diélectriques étant assimilables à des aimants, tout se passe comme si on avait à l'intérieur des diélectriques une densité électrique $-\frac{df}{dx}-\frac{dg}{dy}-\frac{dh}{dz}$ et à la surface une densité égale à $lf+mg+nh$.

Si on considère donc la surface de séparation d'un conducteur et d'un diélectrique, qui sera par exemple extérieur à cette surface, nous aurons à l'intérieur de cette surface une couche électrique infiniment mince de densité $[\sigma]$, provenant de l'électricité qui, libre de circuler dans le conducteur, s'est portée à sa surface ; et nous aurons d'autre part à l'extérieur de cette surface une couche infiniment mince, de densité $lf+mg+nh$, provenant de la polarisation du diélectrique.

Tout se passera en définitive comme si nous avions une couche unique de densité $[\rho]$.

Il importe de ne pas confondre ces deux densités superficielles $[\rho]$ et $[\sigma]$ dont la définition est très différente.

Dans un diélectrique, on a :

$$\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}=-\rho,$$

et en différentiant par rapport au temps, on retrouve l'équation de continuité :

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=-\frac{d\rho}{dt}$$

42. Il y a une remarque à faire. Une molécule électrique située à l'intérieur d'une sphère de Mossotti est soumise à une force électrostatique dont la composante parallèle à $0x$ est :

$$X = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{4\pi f}{K - \lambda} \tag{4}$$

On peut s'étonner de voir que la force n'est pas la dérivée du potentiel, changée de signe. C'est que le diélectrique n'est pas un milieu homogène, le potentiel vrai varie irrégulié-

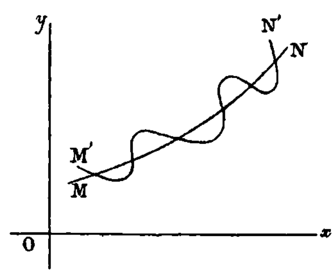

Fig. 8.

rement ; à l'état statique, par exemple, il est constant à l'intérieur de chacune des sphères de Mossotti et variable au dehors. Un observateur traversant le diélectrique en ligne droite verra le potentiel varier suivant une courbe telle que la courbe M'N' de la figure 8 ; cette courbe présente des sinuosités.

La fonction φ définie par les équations du n° 37 est au contraire continue ainsi que toutes ses dérivées; ce n'est qu'à cette condition qu'elle peut être introduite dans les calculs avec avantage ; cette fonction φ, qu'on pourrait appeler potentiel moyen, n'est donc pas rigoureusement égale au potentiel vrai, mais la différence est très petite et du même ordre de grandeur que la distance qui sépare deux sphères de Mossotti [1].

Ce potentiel vrai oscille autour d'une valeur moyenne qui est φ, les deux courbes représentant le potentiel vrai (M'N') et le potentiel moyen (MN) sont extrêmement voisines, *mais les tangentes sont très différentes,* et c'est pourquoi la force, qui est la dérivée du potentiel vrai (au signe près), est très différente de la dérivée du potentiel moyen.

43. Expression de l'énergie électrostatique dans le cas de diélectriques. — Une force électromotrice (X, Y, Z) appliquée à une masse d'électricité m placée en un point

[1] Si on considère par exemple un point situé en dehors de ces sphères le potentiel moyen est égal à *l'intégrale*

$$\int\left(f'\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}+g'\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}+h'\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}\right)d\tau'$$

et le potentiel vrai est égal à la *somme*

$$\sum\left(f'\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}+g'\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}+h'\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}\right)\Delta\tau'$$

obtenue en décomposant le volume du diélectrique en éléments $\Delta\tau'$ contenant chacun une sphère de Mossotti et une seule et par conséquent finis quoique extrêmement petits.

On voit ainsi avec quel degré d'approximation le « potentiel moyen » représente le « potentiel vrai ». Ces différences n'ont aucune importance, puisque d'une part rien n'empêche de supposer les sphères aussi petites qu'on le veut, et que d'autre part les hypothèses de Mossotti ne doivent être considérées que comme une manière commode de considérer les choses et n'ont probablement aucun rapport avec la réalité des faits. J'ai cru néanmoins devoir entrer dans tous ces détails afin de lever une apparente contradiction.

(x, y, z) produit dans le temps dt un travail.

$$m\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt$$

Pour toutes les masses de l'élément $d\tau$, le travail rapporté à l'unité de temps est :

$$X\sum m\frac{dx}{dt}=Xud\tau,$$

et pour le volume entier, on a le travail :

$$\int(Xu+Yv+Zw)\,d\tau$$

On a (4) p. 95 :

$$X=-\frac{d\varphi}{dx}-\frac{4\pi f(1-\varepsilon)}{3\lambda\varepsilon}=-\frac{d\varphi}{dx}-\frac{4\pi f}{K-\lambda}$$

$$Y=-\frac{d\varphi}{dy}-\frac{4\pi g}{K-\lambda}$$

$$Z=-\frac{d\varphi}{dz}-\frac{4\pi h}{K-\lambda}.$$

Le travail, changé de signe, est $\frac{dU}{dt}$ (en appelant U l'énergie électrostatique) ; donc :

$$\frac{dU}{dt}=\int\left(u\frac{d\varphi}{dx}+v\frac{d\varphi}{dy}+w\frac{d\varphi}{dz}\right)d\tau+\frac{4\pi}{K-\lambda}\int(uf+vg+wh)\,d\tau.$$

La première intégrale est égale à :

$$-\int\varphi\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)d\tau=\int\varphi\frac{d\rho}{dt}\,d\tau$$

Mais

$$\lambda\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

L'intégrale est donc :

$$-\frac{1}{4\pi}\int \lambda\varphi\frac{d\Delta\varphi}{dt}d\tau = -\frac{\lambda}{4\pi}\int \varphi.\Delta\frac{d\varphi}{dt}d\tau = \frac{\lambda}{4\pi}\int\sum\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dxdt}d\tau$$

$$= \frac{\lambda}{8\pi}\frac{d}{dt}\int\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]d\tau.$$

La seconde intégrale est :

$$\int\sum ufd\tau = \int\sum f\frac{df}{dt}d\tau = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int(f^2 + g^2 + h^2)\,d\tau$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\lambda}{8\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]d\tau$$
$$+\frac{2\pi}{K-\lambda}\frac{d}{dt}\int(f^2 + g^2 + h^2)\,d\tau.$$

Nous supposerons qu'à l'origine des temps tous les conducteurs partent de l'état neutre et qu'il ny a ni électricité libre ni courant.

On a donc pour $t = 0$:

$$U = 0$$

et pour une époque ultérieure quelconque :

$$U = \frac{\lambda}{8\pi}\int\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]d\tau$$
$$+\frac{2\pi}{K-\lambda}\int(f^2 + g^2 + h^2)\,d\tau.$$

44. Telle est l'expression générale de l'énergie électrostatique. Quand on a affaire à des phénomènes purement électrostatiques, l'expression se simplifie : on a en effet :

$$f = -\frac{d\varphi}{dx}\frac{4\pi}{K-\lambda},$$

et deux autres équations analogues d'où :

$$\frac{2\pi}{K-\lambda}f^2 = \frac{K-\lambda}{8\pi}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2$$

Il vient donc :

$$U = \int d\tau\left[\frac{\lambda}{8\pi}\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \frac{K-\lambda}{8\pi}\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right]$$

Ou enfin :

$$(5) \qquad U = \int \frac{d\tau . K}{8\pi}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]$$

D'autre part nous avons à l'intérieur des conducteurs :

$$(6) \qquad \varphi = \text{const.}$$

à l'intérieur des diélectriques, l'équation de Poisson nous donne :

$$\lambda\Delta\varphi = -4\pi\rho = 4\pi\sum\frac{df}{dx}$$

d'où :

$$\lambda\sum\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\sum\frac{d}{dx}\left[(K-\lambda)\frac{d\varphi}{dx}\right]$$

ou

$$\sum \frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\,\frac{d\varphi}{dx}\right) = 0 \tag{7}$$

Considérons maintenant un point de la surface de séparation des conducteurs et des diélectriques. Nous poserons, conformément à une notation généralement adoptée :

$$\frac{d\varphi}{dn} = l\,\frac{d\varphi}{dx} + m\,\frac{d\varphi}{dy} + n\,\frac{d\varphi}{dz} \tag{8}$$

Nous aurons alors (en nous rappelant que φ est constant à l'intérieur des conducteurs) en un point situé dans le diélectrique mais infiniment voisin de la surface de séparation :

$$\lambda\,\frac{d\varphi}{dn} = -\,4\pi\,[\rho]$$

Nous avons posé

$$[\rho] = [\sigma] + lf + mg + nh$$

nous supposions alors que l, m, n étaient les cosinus directeurs de la normale *dirigée vers le conducteur ;* si nous supposons comme dans la formule (8) que l, m, n sont les cosinus de la normale *dirigée vers le diélectrique*, il faudra écrire :

$$[\rho] = [\sigma] - \sum lf$$

d'où :

$$\lambda\frac{d\varphi}{dn} = -\,4\pi[\sigma] + 4\pi\sum lf = -\,4\pi[\sigma] - (\mathrm{K} - \lambda)\sum l\,\frac{d\varphi}{dx}$$

ou

$$\lambda\,\frac{d\varphi}{dn} = -\,4\pi[\sigma] - (\mathrm{K} - \lambda)\,\frac{d\varphi}{dn}$$

ou enfin :

$$(9) \qquad K\frac{d\varphi}{dn} = -4\pi[\sigma]$$

j'observe enfin que l'on a :

$$(10) \quad \text{charge d'un conducteur quelconque} = \int [\sigma] d\omega$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface de ce conducteur.

Les équations (6), (7), (9) et 10 suffisent pour nous faire connaître la fonction φ quand on connaît la charge de chaque conducteur.

L'équation (5) nous fait connaître ensuite l'énergie U et comme nous savons que le travail virtuel des attractions électrostatiques est égal à l'accroissement virtuel de cette énergie, nous pouvons en déduire la valeur de ces attractions.

Ainsi, si nous connaissons la charge et la position de chaque conducteur, les équations (5), (6), (7), (9) et (10) nous feront connaître les attractions électrostatiques. Mais dans ces équations la constante λ ne figure pas ; nous n'y voyons figurer que le pouvoir inducteur K.

Les attractions électrostatiques, pour des charges et des positions données des conducteurs, *qui sont l'unique objet des expériences électrostatiques*, ne dépendent donc pas de λ. Ces expériences ne peuvent donc pas nous faire connaître λ, mais seulement le pouvoir inducteur K qui est fonction à la fois de λ et de ε.

Nous désignerons par K_0 le pouvoir inducteur du vide et par ε_0 la valeur de ε relative au vide.

Dans les théories anciennes on suppose que le vide ne contient pas de sphères de Mossotti, qu'il ne s'y produit pas de polarisation diélectrique, c'est-à-dire que $\varepsilon_0 = 0$ d'où :

$$\lambda = K_0$$

et pour un diélectrique quelconque :

$$\varepsilon = \frac{K - K_0}{K + 2K_0}$$

Mais rien n'oblige à supposer $\varepsilon_0 = 0$. C'est ainsi que dans la théorie du magnétisme induit, après avoir supposé que pour le vide $\varkappa = 0$, $\mu = 1$ on a été conduit, pour expliquer le diamagnétisme, à supposer que le μ du vide est plus grand que 1, c'est-à-dire que le vide est faiblement magnétique (Cf. § 35). On peut faire ici une hypothèse analogue.

Comme les expériences électrostatiques ne nous font connaître que K et K_0, les *phénomènes électrostatiques peuvent s'expliquer quelle que soit la valeur plus petite que K_0, attribuée à* λ pourvu que l'on suppose en même temps :

$$\varepsilon_0 = \frac{K_0 - \lambda}{K_0 + 2\lambda} \text{ et pour un diélectrique quelconque (}^1\text{) } \varepsilon = \frac{K - \lambda}{K + 2\lambda}$$

K est exprimé en fonction de λ et de ε, mais ni λ, ni ε n'entrent

(1) Ces formules supposent que, comme Poisson et Mossotti, on attribue la forme sphérique aux parties conductrices du diélectrique. Cette hypothèse ne joue dans la théorie aucun rôle essentiel, elle sert seulement à simplifier les calculs. Si on supposait que la forme des parties conductrices est quelconque, on arriverait à un résultat analogue et on trouverait :

$$K = \lambda\varphi(\varepsilon)$$

$\varphi(\varepsilon)$ étant une fonction qui se comporte comme $\frac{1 + 2\varepsilon}{1 - \varepsilon}$, je veux dire qu'elle croît avec ε, qu'elle est égale à 1 pour $\varepsilon = 0$ et infinie pour $\varepsilon = 1$.

séparément dans l'expression de l'énergie électrostatique. Si on change λ en même temps que ε de manière à laisser K invariable, on ne changera rien à l'expression de ce que nous pouvons connaître expérimentalement. L'expérience ne nous fera donc pas connaître λ si nous nous en tenons aux phénomènes électrostatiques.

45. Dans les idées de Mossotti, ordinairement reçues, $\varepsilon = 0$. Alors $K_0 = \frac{\lambda(1+2\varepsilon)}{1-\varepsilon} = \lambda$. Deux unités d'électricité placées à l'unité de distance, se repoussent avec une force $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{K_0}$. Mais on peut aussi expliquer les phénomènes en admettant que ε_0 ne soit pas nul, même pour l'air et pour le vide. Alors $K_0 > \lambda$, et $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{K_0}$. La répulsion *réelle* entre deux unités d'électricité est plus grande que $\frac{1}{K_0}$, mais la répulsion *observée* dans le vide est toujours $\frac{1}{K_0}$: elle n'est pas modifiée. Elle est seulement plus petite que la répulsion réelle à cause de l'action de sens contraire due à la présence des sphères polarisées. *La théorie de Maxwell consiste à faire* $\lambda = 0$. Pour que K soit fini, il faut que ε soit égal à 1. C'est-à-dire que les parties conductrices occupent la totalité du volume du diélectrique. Cela revient à se représenter les diélectriques comme des cellules conductrices séparées par des cloisons isolantes d'épaisseur infiniment petite par rapport aux dimensions de ces cellules [1] (Cf. Ier vol., n° 61, sqq.). La répulsion réelle entre deux molécules unités serait infiniment grande, λ étant nul,

[1] Ceci ne doit pas être pris à la lettre. Il serait difficile d'admettre que le vide eût une semblable constitution. Il ne faut voir là qu'une façon d'exprimer ce fait que, dans le diélectrique, l'électricité ne circule pas, ne se déplace pas, il y a seulement polarisation.

mais la répulsion observée entre ces deux molécules, plongées dans le diélectrique, est finie.

Les phénomènes électrodynamiques ordinaires ne dépendent pas non plus de la valeur de λ et ne peuvent nous faire connaître cette valeur ; en effet, $\frac{dF}{dt}$ est nul pour des courants constants. L'équation (2), § 40, s'écrit donc :

$$\frac{4\pi f}{K - \lambda} = -\frac{d\varphi}{dx}$$

(puisque les forces électromotrices d'origine diverse que nous avons représentées par X sont généralement nulles).

On retombe donc sur les équations du n° 40.

Dans le cas des courants variables ordinaires, $\frac{dF}{dt}$ est généralement négligeable, il faudra avoir recours à des courants alternatifs très rapides, comme dans les expériences de Hertz si l'on veut que $\frac{dF}{dt}$ soit assez grand pour que l'influence du terme en λ se fasse sentir.

La théorie de Maxwell n'est donc en définitive qu'un *cas limite* plutôt qu'un cas particulier de la théorie de Helmholtz. Il faut pour passer de l'une à l'autre attribuer à λ une valeur *infiniment petite*.

Voyons ce que deviennent dans ce cas les diverses quantités que nous avons envisagées :

1° Le potentiel électrostatique φ, ainsi que les densités σ et $[\sigma]$ qui, d'après le n° 40, ne dépendent pas de la valeur attribuée à λ *restent finis ;*

2° Au contraire les densités que nous avons appelées ρ et $[\rho]$ sont des *infiniment petits* du même ordre que λ.

On peut s'étonner que le potentiel φ et les attractions électrostatiques restent finis bien que les densités électriques ρ et $[\rho]$ soient infiniment petites; mais je rappellerai :

1° Que nous avons trouvé :

$$\varphi = \int \frac{[\rho'] \, d\omega'}{\lambda r} + \int \frac{\rho' d\tau'}{\lambda r}$$

d'où il suit que φ est fini si ρ, $[\rho]$ et λ sont des infiniment petits de même ordre ;

2° Que le travail des forces électrostatiques qui est égal à la variation de la fonction U définie par l'équation (5) du n° 44 est également fini.

On peut d'ailleurs s'expliquer la chose d'une autre manière.

Rappelons, ainsi que je l'ai exposé dans le premier volume, que, d'après la manière de voir que nous avons été conduits à adopter, les diélectriques sont constitués par des cellules conductrices séparées par des cloisons infiniment minces et que chacune de ces cloisons isolantes représente un condensateur dont les deux cellules voisines sont les armatures.

Ces deux armatures ont des charges égales et de signe contraire q et $-q$; comme la cloison est infiniment mince, l'action de ces deux charges sur un point extérieur est du même ordre de grandeur que l'épaisseur δ de la cloison divisée par λ et multipliée par q; si donc, comme nous le supposons, δ et λ sont de même ordre, cette action sera de même ordre que q.

Il y a deux remarques à faire au sujet du calcul des actions électrostatiques :

1° Nous avons fait ce calcul en partant de l'expression U.

On emploie souvent en électrostatique une autre méthode qui est applicable à un conducteur *libre* placé dans un diélectrique impolarisable ($\varepsilon = o$). On considère les diverses molécules électriques répandues à la surface des conducteurs et les forces auxquelles elles sont soumises et on les compose d'après les lois de la statique. Cette méthode appliquée à un conducteur placé dans un diélectrique polarisable constitué d'après les idées de Mossotti donnerait des résultats erronés et si on l'appliquait au cas d'un diélectrique constitué conformément à la théorie de Maxwell et aux idées exposées dans le présent numéro, on trouverait une attraction infinie. En effet ce conducteur ne pourrait se déplacer sans déranger les sphères de Mossotti ou les cellule conductrices, ce qui produirait un travail électrostatique négatif et par conséquent une résistance dont il y a lieu de tenir compte ;

2° Il ne faudrait pas non plus pour calculer U partir de la formule :

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi d\tau$$

ce qui donnerait $U = o$ puisque $\rho = o$

En effet la fonction n'est pas continue puisqu'elle varie brusquement quand on passe d'une cellule à l'autre. Si nous revenons aux petits condensateurs dont je parlais tout à l'heure et si nous appelons q et q' les charges des deux armatures, φ et φ' leur potentiel ; $q + q'$ sera de l'ordre de λ, mais ce n'est pas une raison pour qu'il en soit de même de $q\varphi + q'\varphi'$ puisque $\varphi - \varphi'$ n'est pas un infiniment petit de l'ordre de λ.

On a d'ailleurs

$$\int \rho d\tau = \sum (q + q')$$

$$\int \rho\varphi d\tau = \sum (q\varphi + q'\varphi')$$

les intégrations étant étendues à un volume quelconque et les sommations à tous les petits condensateurs contenus dans ce volume.

On conçoit donc comment la première intégrale peut être nulle sans que la seconde le soit.

46. Vitesses de propagation des perturbations électromagnétiques. — Cherchons comment se propagent, dans les diverses théories électromagnétiques en présence, les perturbations électrodynamiques. Si les vitesses de propagation, qui sont fonctions des quantités λ, k et K sont accessibles à l'expérience, ce sera un moyen de déterminer quelqu'une de ces quantités.

On a dix équations aux dérivées partielles définissant les dix quantités u, v, w, α, β, γ, F, G, H et φ.

Considérons en effet un diélectrique de pouvoir inducteur K

$$\frac{4\pi f}{K - \lambda} = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt}.$$

En différentiant par rapport à t,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{4\pi u}{K - \lambda} &= -\frac{d^2\varphi}{dxdt} - \frac{d^2F}{d^2t} \\ \frac{4\pi v}{K - \lambda} &= -\frac{d^2\varphi}{dydt} - \frac{d^2G}{dt^2} \\ \frac{4\pi w}{K - \lambda} &= -\frac{d^2\varphi}{dzdt} - \frac{d^2H}{dt^2} \end{aligned}\right.$$

D'autre part, on a les équations (15) du § 29

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} + \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

les équations (19) du § 36 :

$$a = \mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$$

et

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = -k\lambda \frac{d\varphi}{dt}$$

Soit une perturbation électromagnétique dans le milieu diélectrique. Supposons qu'on ait une onde plane perpendiculaire à Ox : les quantités qui figurent dans les équations sont fonctions seulement de x et de t. Les équations deviennent :

$$\text{(I)} \quad \frac{4\pi u}{K-\lambda} = -\frac{d^2\varphi}{dxdt} - \frac{d^2F}{dt^2} \qquad \text{(VI)} \quad 4\pi w = \frac{d\beta}{dx}$$

$$\text{(II)} \quad \frac{4\pi v}{K-\lambda} = -\frac{d^2G}{dt^2} \qquad \text{(VII)} \quad \mu\alpha = 0$$

$$\text{(III)} \quad \frac{4\pi w}{K-\gamma} = -\frac{d^2H}{dt^2} \qquad \text{(VIII)} \quad \mu\beta = -\frac{dH}{dx}$$

$$\text{(IV)} \quad 4\pi u = \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt} \qquad \text{(IX)} \quad \mu\gamma = \frac{dG}{dx}$$

$$\text{(V)} \quad 4\pi v = -\frac{d\gamma}{dx} \qquad \text{(X)} \quad \frac{dF}{dx} = -k\lambda \frac{d\varphi}{dt}$$

1° Étudions d'abord l'onde longitudinale. Supposons

$$G = H = v = w = \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Il reste F, φ, u, et on n'a qu'à satisfaire aux trois équations (I), (IV) et (X) : les autres sont satisfaites d'elles-mêmes :

Comparons (I) et (IV)

$$\frac{\lambda}{K - \lambda} \cdot \frac{d^2\varphi}{dxdt} = - \frac{d^2\varphi}{dxdt} - \frac{d^2F}{dt^2}$$

d'où

$$\frac{d^2F}{dt^2} = - \frac{d^2\varphi}{dxdt}\left(1 + \frac{\lambda}{K - \lambda}\right) = - \frac{d^2\varphi}{dxdt} \cdot \frac{K}{K - \lambda}$$

D'autre part, d'après (X)

$$\frac{d^2F}{dx^2} = - k\lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d^2F}{dx^2} \frac{K}{(K - \lambda) k\lambda}$$

La vitesse de propagation des ondes longitudinales est :

$$V_1 = \sqrt{\frac{K}{(K - \lambda) k\lambda}}$$

2° Ondes transversales. On peut satisfaire aux équations en posant :

$$F = H = u = w = \alpha = \beta = \varphi = 0$$

Restent G, γ, v et les trois équations (II), (V) et (IX).

Comparant (II) et (V),

$$\frac{1}{K - \lambda} \frac{d\gamma}{dx} = \frac{d^2G}{dt^2}$$

Mais (IX)

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{\mu} \frac{d^2G}{dx^2}$$

d'où

$$\frac{d^2G}{dt^2} = \frac{1}{\mu (K - \lambda)} \frac{d^2G}{dx^2}$$

La vitesse de propagation est :

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{\mu (K - \lambda)}}$$

47. Il y a des cas où l'onde longitudinale ne peut se propager.

$$k = o$$
$$\lambda = o$$
$$K = \lambda$$

La vitesse de propagation est alors infinie. C'est l'hypothèse de Maxwell ; les vibrations sont alors transversales.

Pour les ondes transversales, si $\lambda = K$, la vitesse de progation est infinie. C'est ce qui a lieu dans l'ancienne théorie de Mossotti, d'après laquelle λ est égal à la valeur K_0 du pouvoir inducteur du vide ; $\mu_0 = 1$. Dans cette théorie, dans le vide (ou dans l'air), il n'y a pas propagation d'onde transversale, pas plus que d'onde longitudinale.

Dans la théorie de Maxwell, il n'y a que des vibrations transversales et leur vitesse de propagation V_2 est égale à la vitesse v de la lumière. Nous nous supposons placés dans le système électromagnétique, l'expérience nous apprend que K_0 est l'inverse du carré de la vitesse de la lumière ; $\mu_0 = 1$. Si on donne à λ la valeur o, on a $V_2 = v$. Si on donne à λ une valeur positive différente de o, on a pour V_2 une vitesse supérieure à celle de la lumière. La théorie de Maxwell se déduit donc de la théorie de Helmholtz en faisant $\lambda = o$.

48. Reprenons les équations avec cette valeur de λ.

$$\frac{4\pi f}{K} = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt}$$

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$$

$$a = \mu\alpha = \frac{dH}{dx} - \frac{dG}{dz}$$

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0.$$

Écrivons les trois équations analogues à la seconde de ces équations, et différentions-les respectivement par rapport à x, y, z; il vient

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dz} = 0$$

c'est-à-dire $\frac{d\rho}{dt} = 0$. L'électricité est incompressible ; tous les courants sont fermés.

ρ ne varie pas avec le temps ; si $\rho = 0$ à l'origine, la densité *vraie* de l'électricité est toujours nulle.

On voit en somme que si $\lambda = 0$, le k d'Helmholtz n'entre pas dans les équations. On passe donc à la théorie de Maxwell en faisant $\lambda = 0$ et en laissant k quelconque.

Helmholtz dit dans sa préface qu'on passe à la théorie de Maxwell en faisant $k = 0$. Ce n'est pas exact ; on obtient bien, en faisant $k = 0$, l'équation $J = 0$ (§ 26), mais pour déduire de la formule donnant V_2 la vitesse des ondes transversales telle qu'elle est dans Maxwell, on est obligé d'introduire des hypothèses complémentaires. C'est d'ailleurs ce qu'Helmholtz explique dans le courant de l'ouvrage en complétant ainsi l'assertion de sa préface qui a cependant trompé quelques personnes [1].

Au contraire, en faisant $\lambda = 0$, cela suffit. Il n'est pas étonnant qu'on n'ait pas à donner à k une valeur particulière pour faire rentrer la théorie de Maxwell dans celle de Helmholtz : Maxwell ne considère que des courants fermés, k doit donc toujours disparaître des équations.

Nous avons montré seulement jusqu'ici *en quoi consiste* la théorie de Maxwell et comment on peut la faire rentrer dans celle de Helmholtz. Il restera à donner les raisons qui doivent la faire adopter de préférence à toutes les autres.

49. Revenons aux ondes transversales : le courant est dirigé suivant oy et la force magnétique suivant oz ; ces deux perturbations, électrique et magnétique, sont dans le plan de l'onde, mais perpendiculaires entre elles.

La lumière, d'après Maxwell, est une perturbation électromagnétique; mais on peut supposer que le plan de polarisation de la lumière est perpendiculaire à la vibration électrique et contient la vibration magnétique, ou faire l'hypothèse inverse. La question de la direction de la vibration par rapport au plan de polarisation paraît plus accessible à l'expérience dans le cas de l'électricité que dans le cas de la lumière ; et l'on peut attendre d'expériences électromagné-

[1] Hemlholtz dit en effet que pour passer de sa théorie à celle de Maxwell il convient de faire :

$$k = 0, \qquad \varepsilon = \infty, \qquad \theta = \infty$$

ce qui avec nos notations revient à faire :

$$k = 0, \qquad \lambda = 0, \qquad \varkappa = \infty$$

Il n'y a aucune raison pour faire $k = 0$ ni $\varkappa = \infty$; du moment qu'on fait $\lambda = 0$, on retrouve la théorie de Maxwell quels que soient k et $\varkappa$.

tiques des arguments en faveur de l'une des deux hypothèses. Pour Maxwell, la vibration lumineuse est parallèle à la force magnétique ; et celle-ci est dans le plan de polarisation, conformément à l'hypothèse de Neumann et contrairement à celle de Fresnel ; le courant est perpendiculaire au plan de polarisation.

Une remarque encore sur la vitesse de propagation des ondes longitudinales. λ étant différent de o, on pourrait se débarrasser de ces ondes en faisant $k = 0$; mais on pourrait arriver au même résultat en faisant k négatif. On aurait alors des rayons évanescents et l'on retomberait sur les idées de Cauchy [1] mais dans ce cas l'équilibre est instable, comme nous l'avons démontré (§ 34).

J'ai exposé d'ailleurs dans la *Théorie mathématique de la Lumière* qu'avec les idées de Cauchy, l'éther serait en équilibre instable.

(1) *Théorie mathématique de la Lumière*, § 47, p. 55

CHAPITRE VI

L'UNITÉ DE LA FORCE ÉLECTRIQUE

50. Nous avons vu que jusqu'aux récentes expériences de Hertz on n'avait aucun moyen de déterminer expérimentalement λ. Quelles raisons y avait-t-il alors de préférer l'électrodynamique de Maxwell? D'abord le fait que v, rapport des unités, est égal à la vitesse de la lumière, s'explique très naturellement dans cette théorie ; il ne serait que l'effet du hasard si λ était différent de zéro.

Mais il y a un autre argument, qui est indiqué dans un mémoire de Hertz (1). Ce savant a mis les équations de Maxwell sous une forme symétrique et très élégante.

Considérons les équations du n° 48 qui donnent les

(1) Ueber die Beziehungen zwischen den Maxwell'schen electrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Electrodynamik. — *Wied. Ann.*, 23, p. 84 (1884).

composantes du déplacement électrique :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{4\pi f}{K} &= -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt} \\ \frac{4\pi g}{K} &= -\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dG}{dt} \\ \frac{4\pi h}{K} &= -\frac{d\varphi}{dz} - \frac{dH}{dt} \end{aligned}\right.$$

Différentions la seconde par rapport à z, la troisième par rapport à y, et retranchons :

$$(1) \qquad \frac{4\pi}{K}\left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz}\right) = -\frac{d^2H}{dydt} + \frac{d^2G}{dzdt} = -\frac{da}{dt}$$

On a deux équations analogues.

D'autre part, les équations donnant les composantes du courant en fonction de l'induction magnétique peuvent s'écrire :

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} 4\pi\,\frac{df}{dt} &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{dc}{dy} - \frac{db}{dz}\right) \\ 4\pi\,\frac{dg}{dt} &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{da}{dz} - \frac{dc}{dx}\right) \\ 4\pi\,\frac{dh}{dt} &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{db}{dx} - \frac{da}{dy}\right) \end{aligned}\right.$$

Je puis écrire l'équation (1) et la première des équations (2)

$$\begin{aligned} &(3) \qquad \frac{da}{dt} = -\frac{4\pi}{K}\left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz}\right) \\ &(4) \qquad \frac{df}{dt} = +\frac{1}{4\pi\mu}\left(\frac{dc}{dy} - \frac{db}{dz}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$
\begin{cases}
\dfrac{df}{dx}+\dfrac{dg}{dy}+\dfrac{dh}{dz}=0 & (5)\\[2ex]
\dfrac{da}{dx}+\dfrac{db}{dy}+\dfrac{dc}{dz}=0. & (6)
\end{cases}
$$

Les équations (4) et (6) se déduisent des équations (3) et (5) en permutant f, g, h, et a, b, c, en permutant en même temps $-\frac{4\pi}{K}$ et $\frac{1}{4\pi\mu}$. C'est là une correspondance remarquable entre le déplacement électrique et la force magnétique [1].

51. Cette réciprocité, mise en évidence par Hertz, peut s'énoncer sous une force indiquée par M. Blondlot [2].

Soit une masse électrique qui se déplace : les expériences de Rowland prouvent qu'un tel déplacement produit les effets électrodynamiques d'un courant : on crée donc un champ magnétique. Considérons d'autre part un pôle magnétique mobile ; s'il se déplace dans le voisinage de conducteurs il donne naissance à des effets d'induction ; dans la pensée de Maxwell le déplacement de ce pôle dans un diélectrique produit aussi dans le diélectrique des forces électromotrices d'induction : la seule différence est que dans le diélectrique

(1) La symétrie est encore plus évidente, si on considère avec Hertz, la *force magnétique* et la *force électrique*, et si l'on adopte le système d'unités de Hertz qui tient le milieu entre les deux système usuels, électrostatique et électromagnétique. Les équations (3) et (4) s'écrivent alors :

$$
\frac{1}{v}\frac{d\alpha}{dt}=-\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)
$$
$$
\frac{1}{v}\frac{dX}{dt}=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}
$$

(2) *Journal de physique*, 2e série, IX, p. 177.

ces forces électromotrices donnent lieu à un déplacement électrique au lieu de produire un courant de conduction ; le mouvement du pôle magnétique crée donc un champ électrique. On peut énoncer la réciprocité entre les phénomènes électriques et magnétiques, en disant que si les deux pôles, l'un électrique, l'autre magnétique, subissent le même déplacement, ils donnent naissance au même champ.

Un courant électrique produit les mêmes actions électromagnétiques que le déplacement de l'électricité par convection : on pourra par contre réaliser des *courants magnétiques* donnant les mêmes effets que le mouvement d'un pôle magnétique. Si le magnétisme d'un aimant AB va en diminuant, tout se passera comme si du fluide austral était transporté de son pôle austral A à son pôle boréal B. Les composantes du courant électrique étaient précédemment les dérivées des composantes de la polarisation diélectrique :

$$u = \frac{df}{dt}, \qquad v = \frac{dg}{dt}, \qquad w = \frac{dh}{dt};$$

de même ici, les composantes du courant magnétique seront les dérivées des composantes de la polarisation magnétique A, B, C ; elles seront donc $\frac{dA}{dt}, \frac{dB}{dt}, \frac{dC}{dt}$.

Cet aimant dont le magnétisme diminue est donc assimilable à un solénoïde non fermé parcouru par un courant électrique, dont l'intensité irait en diminuant.

52. Soit maintenant un solénoïde fermé dont le courant électrique va en diminuant ; il équivaut à un courant magnétique fermé. D'autre part un courant électrique fermé équivaudrait à un feuillet magnétique; un courant magnétique fermé équivaudrait de même à une double couche d'électricité distribuée sur une surface limitée à son contour, c'est-à-dire à un *feuillet électrique*.

Ainsi un solénoïde fermé parcouru par un courant variable produira le champ électrostatique que donnerait un courant magnétique fermé ou un feuillet électrique; vérifions-le par un calcul direct. Le potentiel dû à un système *d'éléments électriques*, formés chacun de deux masses d'électricités positive et négative égales en valeur absolue, est donné par :

$$\int \frac{\mu}{\lambda} d\tau \left(l' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + m' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} + n' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} \right)$$

$\mu d\tau$ étant le moment électrique de l'élément, et l', m', n' les cosinus directeurs de la direction de la polarisation au point (x', y', z'). Un feuillet électrique n'est autre chose par définition qu'un système d'éléments électriques orientés normalement à la surface du feuillet. A chacun des éléments de cette surface correspond ainsi un élément électrique. Dans un feuillet, il y a une infinité d'éléments superficiels : le moment d'un élément est $\Pi d\omega'$, $d\omega'$ étant l'aire de l'élément et Π un nombre constant définissant la puissance du feuillet.

$$(7) \quad \varphi = \frac{\Pi}{\lambda} \int \left(l' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + m' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} + n' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} \right) d\omega'$$

$l'm'n'$ désignant ici les cosinus de la normale à l'élément $d\omega'$.

53. Si on a un solénoïde fermé ayant pour directrice le contour du feuillet, la composante dF du potentiel vecteur dû à l'un des éléments particulaires, de surface $d\omega_1$, est, ainsi que nous l'avons vu au § 37, p. 77 :

$$dF = i d\omega_1 \left(m_1 \frac{d \frac{1}{r}}{dz'} - n_1 \frac{d \frac{1}{r}}{dy'} \right)$$

l_1, m_1, n_1 sont les cosinus de la normale à l'élément $d\omega_1$, c'est-à-dire de la tangente à la courbe directrice du solénoïde au point (x', y', z').

On a donc

$$l_1 = \frac{dx'}{\varepsilon}, \qquad m_1 = \frac{dy'}{\varepsilon}, \qquad n_1 = \frac{dz'}{\varepsilon}$$

ε étant la distance qui sépare deux courants élémentaires du solénoïde. Si on désigne par η l'aire $d\omega_1$ embrassée par le courant élémentaire, on a :

$$dF = \frac{i\eta}{\varepsilon} \left(\frac{d \frac{1}{r}}{dz'} dy' - \frac{d \frac{1}{r}}{dy'} dz' \right)$$

$\frac{\eta}{\varepsilon}$ est une constante ; car dans la définition ordinaire des solénoïdes on admet que η et ε sont deux constantes. En intégrant, on a, pour le solénoïde total :

$$F = \frac{i\eta}{\varepsilon} \int \left(\frac{d \frac{1}{r}}{dz'} dy' - \frac{d \frac{1}{r}}{dy'} dz' \right)$$

l'intégrale étant prise le long du contour fermé.

On peut la transformer en une intégrale de surface étendue à l'aire limitée à ce contour fermé. Elle devient :

$$F = \frac{i\eta}{\varepsilon} \int d\omega' \left[l' \left(-\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy'^2} - \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz'^2} \right) + m' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy'dx'} + n' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx'dz'} \right]$$

et comme $\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy'^2} = \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2}$, r étant fonction de $y - y'$:

$$F = \frac{i\eta}{\varepsilon} \int d\omega' \left[l' \left(-\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} - \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz^2} \right) + m' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dxdy} + n' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dxdz} \right]$$

$$(8) \qquad F = \frac{i\eta}{\varepsilon} \int d\omega' \left(l' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} + m' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dxdy} + n' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dxdz} \right),$$

car $\Delta \frac{1}{r} = 0$. La force électromotrice d'induction due aux variations d'intensité du solénoïde a sa première composante égale à $-\frac{dF}{dt}$; l'intensité variant seule et le solénoïde ne bougeant pas, l'intégrale du second membre est une constante ; et on a :

$$\frac{\frac{dF}{dt}}{\frac{di}{dt}} = \frac{F}{i}$$

54. Le feuillet donnant un potentiel φ, la composante de la force électrique parallèle à Ox sera, au signe près :

$$(9) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\Pi}{\lambda} \int \left(l' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} + m' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dxdy} + n' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dxdz} \right) d\omega'$$

C'est l'intégrale de l'équation (8). En comparant (8) et (9), on a :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\Pi\varepsilon}{\lambda\eta} \cdot \frac{F}{i} = \frac{\Pi\varepsilon}{\lambda\eta}\left(\frac{dF}{dt} : \frac{di}{dt}\right)$$

ou :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{di}{dt} \cdot \frac{\lambda\eta}{\Pi\varepsilon} \cdot \frac{d\varphi}{dx}.$$

Le feuillet électrique produit une force électromotrice $\left(-\frac{d\varphi}{dx}, -\frac{d\varphi}{dy}, -\frac{d\varphi}{dz}\right)$; le solénoïde fermé variable une force électromotrice $\left(-\frac{dF}{dt}, -\frac{dG}{dt}, -\frac{dH}{dt}\right)$; les champs électrostatiques produits ne diffèrent que par un facteur constant; et s'il est égal à 1 les champs sont identiques. Il faut pour cela que la puissance Π du feuillet satisfasse à la relation

$$\Pi = \frac{\lambda\eta}{\varepsilon}\frac{di}{dt}$$

Nous supposerons que i est variable, mais $\frac{di}{dt}$ constant : le champ produit ne changera pas avec le temps; on aura $\frac{dF}{dt}$ constant, et de même

$$f = -\frac{4\pi}{K - \lambda} \cdot \frac{dF}{dt}$$

Alors $\frac{df}{dt} = 0$; il n'y a pas de courant de déplacement : au contraire si $\frac{d^2i}{dt^2}$ n'était pas nul, il y aurait courant de déplacement et les phénomènes seraient notablement plus compliqués.

Pour un solénoïde fermé, $Fdx + Gdy + Hdz$ est une différentielle exacte ; l'action magnétique doit donc être nulle, car on a :

$$\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \text{ etc.}$$

La force électromotrice étant la dérivée par rapport au temps de $\int(Fdx + Gdy + Hdz)$, est $\frac{d}{dt}\int(Fdx + Gdy + Hdz)$, ce qui est nul pour un courant fermé.

L'action inductrice d'un solénoïde fermé variable sur un courant *fermé* est donc nulle, mais ce n'est pas une raison pour que cette action sur un courant *ouvert* soit encore nulle et par conséquent pour que ce solénoïde ne produise pas un champ électrique.

55. La considération de pareils solénoïdes fermés variables, équivalents à des feuillets, va nous permettre de décider entre les diverses théories électrodynamiques, en nous fondant sur une hypothèse à laquelle Hertz a donné le nom de « principe de l'unité de la force électrique ».

Ce principe doit être rapproché d'un autre qui est admis par tout le monde et qu'on peut appeler le « principe de l'unité de force magnétique ». La force magnétique en un point étant donnée en grandeur et en direction, son origine importe peu ; la connaissance du champ magnétique suffit à déterminer ce qui s'y passe, indépendamment de la cause qui le produit. On sait que l'action d'un courant électrique fermé peut se remplacer par celle d'un feuillet magnétique équivalent ; si on remplace deux feuillets par deux courants respectivement équivalents au point de vue des actions qu'ils exercent, l'équivalence subsistera au point de vue des actions qu'ils subissent dans un champ magnétique et par suite les deux courants exerceront l'un sur l'autre exactement la même action que les deux feuillets.

Ce principe pourra paraître trop évident pour qu'il soit utile de l'énoncer. « Puisque chaque courant agit comme l'un des feuillets sur l'autre feuillet, dira-t-on, n'est-il pas de toute évidence que leur action réciproque sera la même que celle des deux feuillets? » Aux personnes qui seraient tentées de raisonner ainsi, je rappellerai seulement l'anecdote des clefs d'Arago, si spirituellement racontée par M. Bertrand dans la préface de sa *Thermodynamique*.

Nous admettrons pour l'électricité un principe analogue à celui que tout le monde admet pour le magnétisme. Un aimant en forme d'anneau dont le magnétisme varie, ou, ce qui revient au même, un solénoïde fermé parcouru par un courant variable, équivaut à un feuillet électrique de puissance convenable, au point de vue du champ électrique auquel il donne naissance. Il agira donc comme ce feuillet sur un autre feuillet électrique; et, en vertu du principe de l'action et de la réaction, subira de la part de ce second feuillet une réaction égale et contraire à l'action exercée. Ainsi un solénoïde fermé variable éprouve dans un champ électrique une action mécanique; et comme un pareil solénoïde crée un champ électrique, deux solénoïdes fermés variables exercent l'un sur l'autre une action mécanique identique à celle qu'exercent deux feuillets électriques équivalents. Tel est le principe de l' « unité de force électrique ».

Or de toutes les théories électrodynamiques, — celles dans lesquelles on avait $\lambda = K_0$ pouvoir inducteur spécifique du vide (ou de l'air), celle de Maxwell où l'on a $\lambda = 0$, et les théories nouvelles qui consisteraient à donner à λ des valeurs intermédiaires, — la théorie de Maxwell s'accorde seule avec le principe de l'unité de force électrique. Dans l'ancienne électrodynamique, l'action réciproque de deux solénoïdes fermés est en effet toujours nulle, que les solénoïdes soient parcourus par des courants constants ou variables. Dans les nouvelles théories où λ serait intermédiaire entre 0 et K_0, on aurait, pour l'action réciproque de deux solénoïdes fermés variables, un coefficient différent de celui qui affecte l'action de deux feuillets électriques respectivement équivalents.

56. Calculons le travail produit dans le déplacement relatif de deux feuillets : le travail τ est la variation dU de l'énergie électrostatique. De même, cherchons le travail produit dans le déplacement de deux solénoïdes : ils sont parcourus par des courants i et i', alimentés par des piles de forces électromotrices E et E' et passant dans des résistances R et R' ; la variation de l'énergie se compose de la variation dT de l'énergie électrocinétique, plus la variation dU' de l'énergie électrostatique. On a donc :

$$\tau' + Ei\,dt + E'i'dt - Ri^2dt - R'i'^2dt = dT + dU'$$

$$T = \frac{1}{2}(Li^2 + 2Mii' + Ni'^2) \quad \text{et ici} \quad = \frac{1}{2}(Li^2 + Ni'^2)$$

Car $M = 0$, puisqu'un solénoïde fermé ne produit aucune action sur un courant fermé extérieur.

La loi de Ohm donne

$$\left\{\begin{aligned} E - Ri &= \frac{d\,(Li)}{dt} \\ E' - R'i' &= \frac{d\,(Ni')}{dt} \end{aligned}\right.$$

Nous supposons que les solénoïdes *se déplacent sans se déformer.* Alors $d\mathrm{T} = \mathrm{L}idi + \mathrm{N}i'di'$

$$\tau' + \mathrm{L}idi + \mathrm{N}i'di' = \mathrm{L}idi + \mathrm{N}i'di' + d\mathrm{U}'$$
$$\tau' = d\mathrm{U}'$$

Le travail effectué est égal à la variation de l'énergie électrostatique.

Comparons U et U'. On a, en général (p. 98) (§ 43)

$$\mathrm{U} = \frac{\lambda}{8\pi}\int\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]d\tau + \frac{2\pi}{\mathrm{K}-\lambda}\int(f^2+g^2+h^2)d\tau$$

D'autre part,

$$f = -\frac{\mathrm{K}-\lambda}{4\pi}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dt} + \frac{d\varphi}{dx}\right)$$

Donc

$$\mathrm{U} = \frac{\lambda}{8\pi}\int \varepsilon^2 d\tau + \frac{\mathrm{K}-\lambda}{8\pi}\int\zeta^2 d\tau$$

en posant :

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2$$

ε est la force électromotrice électrostatique ; et

$$\zeta^2 = \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\mathrm{F}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\mathrm{G}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} + \frac{d\mathrm{H}}{dt}\right)^2$$

ζ est la force électromotrice *totale* (force électromotrice électrostatique + force d'induction).

Dans le premier cas, deux feuillets : $\varepsilon \doteq \zeta$

$$U = \frac{K}{8\pi} \int \zeta^2 d\tau$$

Dans le second cas, pas de force électromotrice autre que celle d'induction :

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 ; \quad \varepsilon = 0.$$

Les solénoïdes sont supposés équivalents aux feuillets, c'est-à-dire que la valeur de la force électromotrice totale ζ en un point est la même dans ce second cas que dans le premier.

$$U' = \frac{K - \lambda}{8\pi} \int \zeta^2 d\tau$$

$$\frac{U}{U'} = \frac{K}{K - \lambda} \qquad \frac{\tau}{\tau'} = \frac{dU}{dU'} = \frac{K}{K - \lambda}$$

Si le principe adopté est vrai, c'est-à-dire si les deux solénoïdes exerçent l'un sur l'autre la même action que les deux feuillets équivalents, on doit avoir $\tau = \tau'$; donc il faut que $dU = dU'$, par suite que $\lambda = 0$. *La théorie de Maxwell est donc seule compatible avec le principe de l'unité de la force électrique.*

Un autre cas intéressant à examiner, mais plus compliqué, serait celui où l'on aurait un solénoïde variable et un feuillet.

Pour calculer le travail dû à l'action mutuelle de ce solénoïde et de ce feuillet, on peut encore appliquer le principe de la conservation de l'énergie ; mais le calcul est beaucoup plus délicat que dans les deux cas que nous venons de traiter ; il faut tenir compte en effet de l'action électrodynamique des courants de convection dus au déplacement des masses électriques qui constituent le feuillet. (voir chapitre XII, note 1.)

Dans les idées de Hertz, outre l'action électrodynamique qui s'exerce entre deux courants, il existe donc entre ces courants, dans le cas où ils sont variables, une action électrostatique. Il n'est peut-être pas impossible de mettre cette action en évidence par l'expérience. Ne peut-on pas interpréter de la sorte les curieuses expériences d'Elihu Thomson? Dans la masse conductrice se produisent des courants d'induction sous l'influence du champ alternatif auquel elle est soumise; on peut supposer dans les idées de Hertz qu'il y a action électrostatique directe du courant alternatif inducteur sur les courants variables, fermés ou non, développés par induction dans la masse conductrice.

CHAPITRE VII

DESCRIPTION SUCCINCTE DES EXPÉRIENCES DE M. HERTZ [1]

57. La diffusion des idées de Maxwell a eu la plus heureuse influence sur les progrès de la science. Elle a suscité un grand nombre de recherches dans le but de vérifier les théories du savant anglais et, plus particulièrement, la théorie électromagnétique de la lumière, l'une des plus hardies conceptions de son puissant génie.

Mais jusqu'à ces dernières années les vérifications portaient exclusivement sur des points bien éloignés des hypothèses fondamentales et il eût été bien téméraire d'affirmer la possibilité de la production de la lumière au moyen des perturbations électriques. Ce n'est qu'en 1888 que M. Hertz, en produisant des perturbations d'une période de quelques cent millioniènes de secondes, en a rendu vraisemblable la réalisation. De plus, il a ouvert aux chercheurs un nouveau champ d'investigations leur permettant d'aborder des vérifications directes de la théorie électromagnétique de la lumière. On

[1] Ce chapitre est entièrement l'œuvre personnelle de M. Blondin.

ne peut dire si les tentatives récentes faites dans ce but confirment ou non la théorie dans tous ses détails, la précision des mesures laissant encore beaucoup à désirer. En tout cas les expériences de M. Hertz, en démontrant l'identité du mode de propagation de la lumière et des perturbations électriques, sont une confirmation éclatante de l'hypothèse qui sert de base à la théorie.

58. Description des appareils. — L'appareil employé par M. Hertz pour produire des perturbations de très courte durée

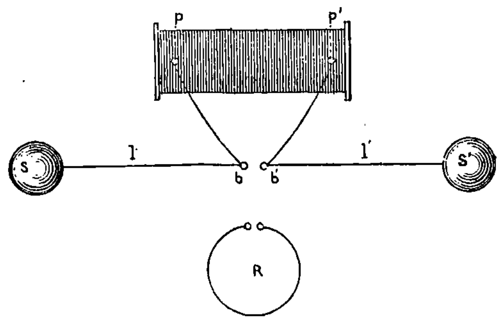

Fig. 9.

a reçu le nom *d'excitateur*. Il se compose d'une forte bobine de Ruhmkorff dont les pôles P et P' (*fig.* 9) sont reliés à deux tiges de cuivre horizontales l et l' de $0^{cm},5$ de diamètre. Les deux extrémités en regard de ces tiges sont terminées par deux boules de laiton parfaitement poli b et b' de 3 centimètres de diamètre, et laissant entre elles un intervalle de $0^{cm},75$ environ. Aux deux autres extrémités se trouvent deux sphères de zinc de 30 centimètres de diamètre ; la distance de leurs centres, qu'on peut varier à volonté, est d'environ 1 mètre.

Pour la commodité de certaines expériences M. Hertz a un peu modifié ce dispositif. Dans quelques-unes il a remplacé les deux sphères par deux plaques de laiton carrées de 40 centimètres de côté et disposées, tantôt horizontalement, tantôt verticalement, suivant l'axe des tiges l et l'; la distance des centres de ces plaques est encore d'environ 1 mètre. Enfin dans d'autres expériences les pôles de la bobine sont simplement reliés à deux cylindres de laiton de 13 centimètres de longueur et de 3 centimètres de diamètre ; les deux parties en regard sont terminées par des surfaces sphériques de 2 centimètres de rayon.

59. Le fonctionnement de l'excitateur est assez complexe.

Supposons d'abord les sphères séparées de la bobine et portées à des potentiels différents. Si la différence de ces potentiels est suffisante pour donner lieu à une étincelle entre les boules b et b' les sphères se déchargent et si les valeurs de la résistance R, de la self-induction L et de la capacité C satisfont à l'inégalité

$$R < \frac{4L}{C},$$

cette décharge est oscillatoire. Cette condition se trouvant remplie par suite des dimensions données à l'appareil, il se produit une série d'oscillations et, par conséquent, des perturbations électriques dont la période est, d'après la formule de sir W. Thomson,

$$2\pi \sqrt{LC}.$$

Les valeurs de L et C en unités électromagnétiques étant très petites, cette période est de l'ordre des cent millioniêmes de seconde. Elle est même encore environ dix fois plus petite avec la dernière modification décrite.

Mais la durée de cette décharge oscillatoire est excessivement courte ; il faut donc, pour rendre le phénomène observable, charger les sphères à des intervalles de temps très rapprochés. C'est alors qu'intervient le rôle de la bobine. Le courant d'induction produit par cet appareil est lui-même oscillatoire et, d'après les expériences de M. Bernstein et de M. Mouton, sa période est de l'ordre des cent millièmes de seconde. Par conséquent en reliant les sphères aux pôles de la bobine, ces sphères se trouvent chargées environ cent mille fois par seconde.

60. Si on place dans le voisinage de l'excitateur un circuit presque fermé présentant entre ses extrémités un intervalle d'une fraction de millimètre, on voit généralement un flux d'étincelles jaillir à la coupure. Mais pour une même position du circuit la longueur et l'éclat des étincelles varient avec sa forme et ses dimensions; pour chaque forme, la forme circulaire par exemple, il existe une dimension pour laquelle l'étincelle présente un maximum très marqué. Un fait du même genre se rencontre en acoustique : un résonnateur sphérique n'entre en vibration sous l'influence d'un son de période donnée que si son rayon a une valeur convenable. De là le nom de *résonnateur* qui a été donné au circuit secondaire dans lequel l'excitateur produit des étincelles; on dit qu'il est à *l'unisson* de l'excitateur quand sa forme et ses dimensions sont celles qui répondent au maximum de l'étincelle.

Dans les premières recherches de M. Hertz le résonnateur est un fil de $0^{cm},2$ de diamètre plié en carré de 60 centimètres de côté ; un micromètre à étincelles placé à la coupure permet de mesurer la longueur des étincelles avec la dernière précision. Grâce aux dimensions choisies le résonnateur est presque à l'unisson avec l'excitateur ; on achève le réglage au moyen de deux petites lames métalliques soudées aux extrémités du résonnateur et dont on agrandit ou diminue la surface, de façon à faire varier la capacité, jusqu'à ce qu'on obtienne une longueur d'étincelles maximum.

Dans la plupart de ses expériences ultérieures M. Hertz a adopté la forme circulaire. Pour l'excitateur à sphères ou à plaques le résonnateur à l'unisson R (*fig.* 10) est un fil de $0^{cm},2$ de diamètre formant un cercle de 35 centimètres de diamètre. Avec la dernière modification de l'excitateur, pour laquelle les vibrations ont une plus courte durée, le fil du résonnateur n'a que $0^{cm},1$ de diamètre et le diamètre du cercle qu'il forme n'est que de $7^{cm},5$. Avec ce même excitateur M. Hertz a encore employé un résonnateur disposé comme il suit : deux fils rectilignes de $0^{cm},5$ de diamètre et de 50 centimètres de longueur sont placés dans le prolongement l'un de l'autre avec une distance de 5 centimètres entre leurs extrémités en regard ; de ces deux extrémités partent deux fils de $0^{cm},1$ de diamètre et de 15 centimètres de longueur, perpendiculaires aux premiers et parallèles entre eux et qui se terminent par un micromètre à étincelles.

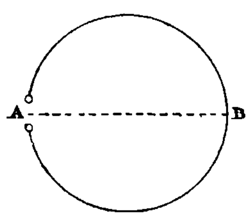

Fig. 10.

61. Exploration du champ produit par l'excitateur. — Par suite de la symétrie de l'excitateur par rapport à la droite qui joint les centres des deux sphères les phénomènes doivent être les mêmes dans tous les plans qui passent par cet axe ; il suffit donc d'explorer la moitié de l'un de ces plans, le plan horizontal pour plus de commodité. Mais le plan vertical mené par le milieu de l'excitateur est un plan de symétrie de cet appareil ; l'intersection de ce plan avec le plan horizontal est donc un axe de symétrie que M. Hertz appelle la *base*, pour les phénomènes qui se produisent dans ce dernier plan. Par suite l'exploration se trouve réduite au quadrant du plan horizontal compris entre l'axe de l'excitateur et la base.

M. Hertz emploie dans ce but le résonnateur circulaire de 35 centimètres de rayon ; un support convenablement disposé permet de lui faire prendre une position quelconque, son centre étant toujours maintenu dans le plan horizontal passant par l'axe de l'excitateur. Les résultats qu'il a obtenus peuvent être résumés ainsi qu'il suit :

1° Le plan du résonnateur étant vertical, si on fait tourner cet appareil autour de son centre de manière à ce que le diamètre passant par la coupure, que nous appellerons *axe de symétrie* du résonnateur, décrive une révolution complète, les étincelles varient de longueur ; elles présentent des longueurs maxima, égales entre elles dans les deux positions pour lesquelles l'axe de symétrie est vertical, elles cessent de se produire quand cet axe est horizontal ; dans les positions intermédiaires leur longueur est d'autant plus grande que l'axe de symétrie est plus près d'être vertical ;

2° La longueur des étincelles au moment où elles atteignent leur maximum dépend, pour une même position du centre du résonnateur, de l'azimut du plan de cet appareil. On le montre en faisant tourner le résonnateur autour de son axe de symétrie maintenu verticalement ; on constate que, pour une révolution complète, les étincelles passent deux fois par un maximum et deux fois par un minimum. Les azimuts pour lesquels se produisent les maxima diffèrent de 180° ; il en est de même de ceux auxquels répondent les minima ; de plus la différence d'azimut pour un maximum et un minimum est de 90° ;

3° La position dans l'espace du résonnateur quand les étincelles passent par un maximum ou passent par un minimum dépend de la position du centre de cet appareil par rapport à l'excitateur.

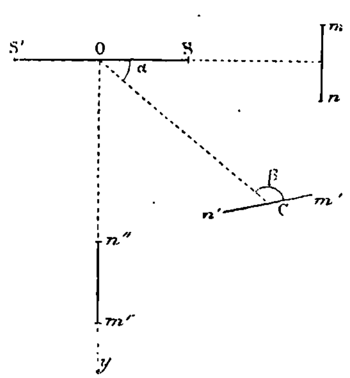

Fig. 11.

Si nous désignons par α l'angle que forme l'axe SS' (*fig.* 11) de l'excitateur avec la droite OC qui joint le milieu de cet axe et le centre du résonnateur et par β l'angle du plan de ce dernier appareil, au moment d'un minimum, avec la droite OC, la valeur de β croît de 90° à 180° quand l'angle α croît de 0° à 90° pourvu que la distance OC soit inférieure à 3 mètres. Pour des distances plus considérables les positions du résonnateur sont sensiblement parallèles entre elles et perpendiculaires à SS'. Mais quelle que soit la distance les minima sont nuls quand le centre du résonnateur se trouve sur la base Oy et que son plan passe par cette ligne ;

4° Lorsque le plan du résonnateur est horizontal la longueur des étincelles dépend aussi de la position de l'axe de symétrie. La figure 12 montre en a_1, a'_1, a_2... les positions de la coupure auxquelles correspondent les longueurs maxima; et en b_1, b'_1, b_2... ceux auxquelles correspondent les longueurs minima. On voit qu'en passant de la position I à la position III de l'excitateur, les positions de la coupure relative aux minima se rapprochent l'une de l'autre tout en comprenant entre elles la position relative à un maximum. Dans la position III ces trois positions de la coupure se confondent et l'on n'observe plus qu'un maximum en a_3';

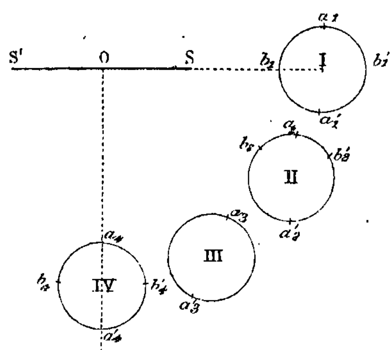

Fig. 12.

5° Il existe à une distance d'environ 3 mètres de l'excitateur une série de points, formant une zone fermée, pour lesquels on ne peut constater ni maximum ni minimum dans la longueur des étincelles, quelles que soient les positions du plan du résonnateur et de son axe de symétrie.

Ce dernier résultat a une grande importance théorique ; M. Hertz, au moyen de considérations que nous n'avons pas à exposer ici, a démontré que les actions électriques se propagent dans l'air avec une vitesse finie.

62. Modification du champ par les diélectriques. — Mais les résultats que nous venons d'exposer supposent l'excitateur placé dans un espace indéfini, ou tout au moins, ainsi que cela avait lieu dans les expériences de M. Hertz, dans une salle de très grandes dimensions et absolument nue. C'est qu'en effet le champ est profondément modifié par la présence d'objets conducteurs dans le voisinage de l'excitateur.

Cette influence perturbatrice des corps conducteurs, que M. Hertz avait observée dès ses premières expériences, doit évidemment être attribuée à l'action qu'exercent sur le résonnateur les courants induits dans ces conducteurs par l'excitateur. Or, d'après Maxwell, les courants de déplacement qui se produisent dans les diélectriques jouissent, comme les courants de conduction, de la propriété inductive. Il suffisait donc, pour vérifier cette hypothèse, de chercher si un diélectrique placé dans le voisinage de l'excitateur a une influence perturbatrice analogue à celle des conducteurs. C'est ce qu'a fait M. Hertz.

La seule difficulté des expériences résultait de la nécessité d'employer une masse considérable de matière diélectrique. M. Hertz a d'abord opéré avec du papier. Dans ce but il disposa un tas de livres formant un parallélépipède rectangle de $1^m,5$ de long, $0^m,5$ de large et de 1 mètre de hauteur sur lequel il plaça l'excitateur à plaques horizontales. Il constata que les maxima et minima des étincelles ne correspondaient plus aux mêmes positions du plan de l'excitateur et de son axe de symétrie que dans les expériences précédentes. En particulier, si on place verticalement le plan de l'excitateur, on obtient des étincelles lorsque l'axe de symétrie est horizontal ; elles prennent une longueur minimum si on fait tourner la coupure vers le bas d'un angle qui, pour certaines positions de l'excitateur, atteint 23°, mais elles ne cessent pas complètement ; les deux maxima correspondent encore à la position verticale de l'axe de symétrie, mais ils ne sont plus égaux : quand la coupure est en bas les étincelles sont moins longues que lorsqu'elle est en haut.

En remplaçant le papier par un parallélépipède d'asphalte de mêmes dimensions les résultats furent aussi probants. Il en fut de même avec un parallélépipède de poix artificielle.

Mais on pouvait objecter que les effets observés provenaient des matières conductrices disséminées dans les substances impures employées. Aussi M. Hertz répéta-t-il les mêmes expériences en prenant des diélectriques pouvant s'obtenir parfaitement purs comme le soufre, la paraffine, le pétrole. Toutefois, pour éviter l'emploi d'une trop grande quantité de ces substances, il se servit d'un excitateur et d'un résonnateur de dimensions moitié plus petites que celles des appareils employés dans les précédentes expériences. L'observation des étincelles devint beaucoup plus délicate, mais les résultats restèrent aussi concluants. L'action inductive des courants de déplacement se trouvait complètement démontrée.

63. Propagation dans les fils métalliques. — Par une nouvelle série d'expériences, M. Hertz parvient à démontrer un autre point important : la vitesse de propagation des perturbations électriques dans un fil métallique est finie.

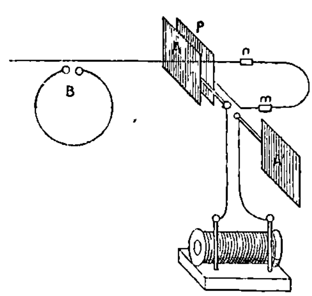

Fig. 13.

Dans ces expériences, M. Hertz employait l'excitateur à plaques verticales (*fig.* 13); derrière l'une d'elles était disposée une plaque P de mêmes dimensions reliée par un fil *mn* à un fil isolé, de 12 mètres de longueur, tendu horizontalement dans le plan vertical de symétrie de l'excitateur, à 40 centimètres au-dessus de la base.

Disposons le résonnateur B de façon que, son centre étant sur la base et la coupure au point le plus haut, son plan soit vertical et passe par le fil. Dans ces conditions aucune étincelle ne se produirait si le fil n'existait pas. Or, on constate qu'en général de vives étincelles éclatent à la coupure ; elles sont donc dues uniquement à l'action du fil.

En déplaçant le résonnateur, toujours maintenu dans le même plan, depuis l'extrémité libre du fil jusqu'à l'excitateur, on observe qu'il ne se produit pas d'étincelles près de l'extrémité libre et aux points situés à des distances multiples de $2^{m},8$ de cette extrémité. Pour les autres positions il y a production d'étincelles, et la longueur de celles-ci augmente à mesure qu'on s'approche du milieu des intervalles formés par les points précédents. Ces points sont donc analogues aux nœuds d'une corde vibrante, pour cette raison ils ont reçu le même nom. D'ailleurs l'analogie se poursuit, car si on coupe le fil en un nœud les phénomènes restent les mêmes en tout point compris entre l'excitateur et le point de section ; au-delà de ce point la partie coupée continue à être le siège des mêmes phénomènes mais avec une intensité moindre.

Mais cette analogie n'est pas seulement apparente ; elle est réelle si on admet que la vitesse de propagation des perturbations électriques est finie. Les nœuds résultent de l'interférence des ondes directes propagées par le fil avec les ondes réfléchies à son extrémité ; la simplicité de l'explication est une preuve de l'existence d'une vitesse de propagation finie.

On peut même en calculer la valeur si on connaît la période de la perturbation. M. Hertz admettant que la période est de $1,4 . 10^{-8}$ secondes, une demi-longueur d'onde de $2^{m},1$ correspond à une vitesse de 200,000 kilomètres. Cette valeur est du même ordre que celles qui ont été trouvées par MM. Fiezeau et Gounelle et par M. W. Siemens pour les vitesses de propagation dans les fils de fer et les fils de cuivre.

D'ailleurs la vitesse doit être indépendante de la nature du fil, car M. Hertz a constaté que la distance entre deux nœuds consécutifs reste la même quand on remplace le fil par un autre de diamètre différent ou d'une autre nature.

64. Vitesse de propagation dans l'air. — A la suite de ces expériences M. Hertz étudia les phénomènes produits par un fil infiniment long, pour lequel, par conséquent, il n'y a pas de réflexion des ondes sur elles-mêmes. Ce fil indéfini était réalisé pratiquement en prolongeant le fil des expériences précédentes de 60 mètres au dehors de la salle et en mettant son extrémité en communication avec la terre.

Si nous plaçons les résonnateurs dans le plan vertical passant par le fil, la coupure au point le plus haut et le centre sur la base de l'appareil, l'action du fil se fait seule sentir. Si à partir de cette position nous faisons tourner le résonnateur de 90° autour de son axe vertical, l'action du fil doit être nulle, par raison de symétrie, puisque le résonnateur est alors perpendiculaire au fil ; dans cette position les étincelles sont donc dues uniquement à l'excitateur. L'action du fil et celle de l'excitateur au centre du résonnateur sont par conséquent égales lorsque les étincelles ont la même longueur dans les deux positions rectangulaires que nous venons de considérer; on arrive facilement à réaliser cette condition en écartant ou rapprochant la plaque P de la plaque A ; supposons qu'elle soit réalisée.

Pour toute position intermédiaire du résonnateur les deux actions se superposent et la longueur des étincelles doit présenter un maximum ou un minimum pour l'une de ces positions. On constate le maximum et le minimum ; le maximum quand la normale au résonnateur est d'un certain côté du plan vertical qui contient le fil, du côté de la plaque A par exemple ; le minimum quand la normale est de l'autre côté, du côté de A′. Les phénomènes dus uniquement à l'excitateur étant symétriques par rapport au plan vertical passant par le fil, ces résultats montrent que ceux qui sont dus à ce fil ne présentent pas la même symétrie.

D'ailleurs ces phénomènes changent avec le point considéré. On constate en effet que si on déplace le résonnateur le long du fil les maxima changent de valeur et ne correspondent plus à un même angle de la normale avec la base ; pour certaines portions du fil les maxima se produisent quand la normale est dirigée vers A ; pour les portions comprises entre les précédentes, ils ont lieu quand la normale est dirigée vers A′ ; les maxima ne deviennent égaux que pour les points dont la distance est de $7^m,5$.

Ainsi tous les $7^m,5$ le phénomène reprend la même intensité mais pour une position différente de la normale par rapport à la base. Quelle en est la cause ?

Nous savons que dans le fil la demi-longueur d'onde est égale à $2^m,8$; deux points du fil distants de $2^m,8$ exercent donc des actions différentes. Si la vitesse de propagation des actions de l'excitateur était infinie, le changement de direction de la normale pour les positions correspondant aux maxima serait uniquement dû au fil et ce changement devrait avoir lieu tous les $2^m,8$. Il en serait encore de même si la vitesse de propagation dans l'air était la même que dans le fil. L'expérience donnant un résultat contraire à ces conclusions nous devons admettre que la vitesse dans l'air est finie et différente de la vitesse dans les métaux. C'est à l'interférence des ondes transmises directement par l'air et des ondes transmises par le fil que doit donc être attribuée la production des phénomènes observes.

On peut en déduire la valeur de la vitesse de propagation dans l'air ; il suffit d'écrire que les interférences changent de signe chaque fois que l'un des mouvements a gagné une demi-longueur d'onde sur l'autre. Si on appelle λ et λ' les demi-longueurs d'onde dans l'air et dans le fil et d la distance trouvée, on doit avoir

$$n\lambda = (n + 1)\,\lambda' = d.$$

λ' étant égal à $2^m,8$ et d à $7^m,5$ on en déduit $\lambda = 4^m,5$ et, en admettant toujours la même valeur pour la période de vibration, on trouve 320,000 kilomètres pour la vitesse dans l'air. On voit que cette vitesse est sensiblement égale à celle de la lumière; en tous cas elle est du même ordre de grandeur (1).

65. Réflexion des ondes. — Les considérations qui précèdent pouvant prêter à la critique, M. Hertz a cherché

(1) D'après une lettre que M. Hertz m'a fait l'honneur de m'écrire, l'éminent physicien ne considère plus aujourd'hui comme absolument probantes les expériences décrites dans ce paragraphe. Il a, en effet, regardé les nœuds observés comme produits par l'interférence des ondes transmises par le fil et des ondes transmises directement par l'air. Il faudrait encore tenir compte de l'influence des ondes réfléchies sur les parois de la salle, ondes dont des expériences ultérieures lui ont fait connaître l'existence (H. P.).

une disposition expérimentale mettant immédiatement en évidence la propagation dans l'air avec une vitesse finie. Il y est parvenu en faisant réfléchir les ondes et en faisant interférer les ondes directes avec les ondes réfléchies.

La réflexion était obtenue au moyen d'une feuille de zinc de très grandes dimensions fixée contre un des murs de la salle d'expériences et mise en communication avec le sol. L'excitateur dont l'axe était disposé verticalement était placé à une distance de 13 mètres du miroir métallique.

Si on place le centre du résonnateur sur la normale au miroir passant par le milieu de l'excitateur, ligne que nous appellerons *normale d'incidence*, et si on dispose son plan perpendiculairement à cette normale, on constate qu'au voisinage immédiat de la paroi il ne se produit pas d'étincelles ou du moins des étincelles très faibles, quelle que soit la position de la ligne de symétrie; il en est encore de même à des distances de $4^m,1$ et de $8^m,5$. Pour les distances intermédiaires les étincelles ont une longueur maximum quand l'axe de symétrie est horizontal.

Si nous maintenons cet axe dans cette position et si nous déplaçons l'excitateur parallèlement à lui-même, son centre restant sur la normale d'incidence, à partir du miroir, on observe que les étincelles d'abord très petites augmentent de longueur et présentent un maximum à une distance de $1^m,72$; elles décroissent ensuite, deviennent nulles à $4^m,10$, puis croissent et passent par un nouveau maximum quand la distance atteint $6^m,30$ environ. Les mêmes phénomènes se reproduisent donc en des points distants de $4^m,5$ environ.

Plaçons maintenant le résonnateur dans le plan vertical passant par la normale d'incidence et mettons l'axe de symétrie parallèlement à cette normale ; généralement les étincelles n'ont pas la même longueur suivant que la coupure est dirigée du côté du miroir ou du côté de l'excitateur. Si on déplace le résonnateur parallèlement à lui-même les plus longues étincelles se produisent quand la coupure est du côté du miroir, tant que la distance à celui-ci est inférieure à $1^m,72$; pour une distance comprise entre $1^m,72$ et $4^m,10$ le maximum a lieu du côté dirigé vers le miroir; un nouveau changement se produit à la distance de $6^m,30$ environ, les phénomènes se reproduisent encore tous les $4^m,5$ à peu près.

Il semble donc, d'après ces résultats, que la longueur d'onde dans l'air est égale à $4^m,50$. M. Hertz est parvenu à établir, par diverses considérations sur lesquelles nous n'insisterons pas, que cette longueur doit être prise pour la demi-longueur d'onde ; le nombre trouvé précédemment se trouverait ainsi confirmé. Il convient toutefois de faire remarquer que les valeurs que nous avons citées pour les distances de l'excitateur à la paroi au moment où un phénomène change de sens sont assez mal déterminées et que, par suite, on ne peut avoir grande confiance dans les conséquences numériques qu'en tire M. Hertz ; ce qu'il y a de certain c'est que la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur de celle qui résulterait d'une vitesse de propagation égale à celle de la lumière.

66. Rayons de force électrique. – Mais qu'il y ait ou non égalité entre ces vitesses, le mode de propagation par ondes des perturbations électriques ne peut laisser aucun doute. Il est donc permis de considérer des *rayons de force électrique* au même titre que des rayons lumineux et l'on doit s'attendre à ce que les rayons de force électrique se réfléchissent et se réfractent suivant les mêmes lois que ces derniers. M. Hertz a vérifié cette identité de propriétés.

Les perturbations sont produites avec l'excitateur que nous avons décrit en dernier lieu ; les deux cylindres sont disposés verticalement suivant la ligne focale d'un miroir parabolique en zinc de 2 mètres de hauteur et de $1^m,2$ d'ouverture. Les phénomènes sont étudiés au moyen du résonnateur circulaire de $7^{cm},5$ de diamètre ou mieux du résonnateur rectiligne ; les deux tiges verticales de ce résonnateur sont placées suivant la ligne focale d'un miroir parabolique de mêmes dimensions que le précédent et les deux fils horizontaux qui y sont fixés traversent le miroir ; de cette manière le micromètre à étincelles se trouve derrière le miroir et son observation se fait commodément.

Propagation rectiligne. — Les rayons réfléchis par le miroir parabolique de l'excitateur se propagent très sensiblement en ligne droite. Diverses expériences le prouvent.

En premier lieu on constate que l'étincelle du résonnateur devient très faible dès que le plan de symétrie de son miroir ne coïncide pas avec le plan de symétrie de l'autre miroir.

Si on fait coïncider ces deux plans et qu'on interpose entre les miroirs une feuille de zinc de 2 mètres de haut sur 1 mètre de large l'étincelle disparaît. Elle disparaît également quand un aide se place entre les miroirs. L'interposition d'une matière isolante, une planche de bois par exemple, ne produit aucun effet.

Polarisation. — Par suite de la forme de l'excitateur les vibrations du rayon de force électrique s'effectuent dans un plan passant par le rayon. Ce rayon est donc analogue à un rayon lumineux polarisé rectilignement ; il jouit de propriétés semblables.

Si on fait tourner le miroir récepteur autour d'un axe horizontal on voit les étincelles diminuer de longueur et disparaître quand les plans de symétrie sont à angle droit ; un fait semblable se produit quand un rayon lumineux complètement polarisé par réflexion sur un miroir plan tombe sur un second miroir ; il y a extinction quand les deux plans d'incidence sont rectangulaires.

Remettons les plans de symétrie des miroirs en coïncidence et interposons un cadre en bois sur lequel sont tendus des fils métalliques parallèles. Si ces fils sont perpendiculaires aux lignes focales les étincelles ne varient pas de longueur ; si elles leur sont parallèles les étincelles cessent de se produire ; pour une position intermédiaire les étincelles reparaissent mais sont plus courtes que si le cadre était enlevé. Ce cadre agit donc sur le rayon électrique de la même manière qu'une tourmaline sur un rayon lumineux polarisé rectilignement.

Réflexion. — Ayant placé les deux miroirs paraboliques côte à côte de manière que leurs plans de symétrie se coupent à 3 mètres de distance environ, M. Hertz dispose suivant la ligne d'intersection un miroir vertical en zinc dont le plan est perpendiculaire au plan bissecteur. Les étincelles se produisent alors dans le résonnateur ; elles disparaissent si on fait tourner le plan réflecteur autour d'un axe vertical d'un angle d'une quinzaine de degrés. Les lois de la réflexion de la lumière sont donc applicables aux ondes électriques. Diverses autres expériences faites dans des conditions différentes confirment cette identité de propriétés.

Réfraction. — Pour s'assurer que les ondes électriques se réfractent, M. Hertz s'est servi d'un grand prisme d'asphalte de $1^m,50$ de hauteur et dont l'angle était de 30°. Ce prisme était placé à $2^m,6$ de l'excitateur. Le résonnateur placé de l'autre côté donnait des étincelles de longueur maximum quand l'angle de son plan de symétrie avec celui de l'excitateur atteignait 22° Elles disparaissaient quand on interposait un écran métallique sur le trajet du rayon, soit avant, soit après le prisme; la transmission s'effectuait donc bien à travers le prisme.

67. Expériences de MM. Sarasin et de la Rive. — Pendant que M. Hertz entreprenait de nouvelles expériences, les expériences fondamentales que nous venons d'exposer étaient répétées par un grand nombre de savants.

Ces nombreuses recherches amenèrent la découverte de faits intéressants ; ainsi on reconnut que les tubes de Geissler pouvaient servir de résonateurs; M. Lodge parvint à concentrer les actions électriques suivant la ligne focale d'une lentille cylindrique aplatie. Mais ces résultats sont d'ordre secondaire. Il en est tout autrement de celui qui a été annoncé, en janvier dernier, par MM. Sarasin et de la Rive.

En répétant les expériences de M. Hertz sur les fils conducteurs non isolés à leurs extrémités, ces physiciens ont reconnu que la position des nœuds pouvait être constatée à l'aide de résonateurs de dimensions différentes. Pour chaque résonnateur la distance des nœuds est la même tout le long des fils, sauf à l'extrémité où l'on trouve une perturbation analogue à celle que présentent les tuyaux sonores ; mais cette distance est différente suivant le résonateur employé, elle augmente avec les dimensions de cet appareil.

L'importance de ce résultat est évidente. Si la longueur d'onde $\lambda = VT$ dépend du résonateur employé, l'un des facteurs V ou T doit varier. Admettre que la vitesse V de propagation dépende du procédé d'observation est évidemment absurde ; il faut donc admettre que c'est la période de la vibration T qui varie. C'est à cette hypothèse que MM. Sarazin et de la Rive se rallient. Ils admettent que le système ondulatoire produit par l'excitateur contient toutes les longueurs d'onde possibles entre certaines limites et que chaque résonateur choisit dans cet ensemble complexe l'ondulation dont la période correspond à la sienne propre.

De cette conclusion il résulte immédiatement que les valeurs numériques que M. Hertz a déduites de ses expériences pour la vitesse de propagation des perturbations électriques dans l'air et dans les fils n'ont aucune signification puisque ces valeurs dépendent de la position des nœuds et, par suite du résonnateur employé. Toutefois il n'en reste pas moins démontré expérimentalement que la propagation s'effectue par ondes et, nécessairement, avec une vitesse finie qui est du même ordre de grandeur que la vitesse de la lumière. Les expériences de M. Hertz conservent donc une importance considérable et méritent bien l'immense retentissement qu'elles ont eu. Nous reviendrons d'ailleurs plus loin sur les divergences de détail signalées plus haut et sur les difficultés que soulèvent les résultats inattendus de MM. Sarasin et de la Rive (1).

(1) Voir la discussion de ces expériences au Chapitre XII.

CHAPITRE VIII

L'EXCITATEUR DE HERTZ

68. Guidé par les considérations théoriques précédemment exposées (1), Hertz a institué des expériences destinées à permettre de prononcer entre l'électrodynamique ancienne et celle de Maxwell, et il a réussi à mettre en évidence la propagation des ondes électromagnétiques. Ces expériences ont été décrites dans le chapitre VII (2), nous discuterons maintenant les conséquences qu'en a déduites Hertz, ainsi que les objections qu'on peut faire à sa méthode.

69. Nous étudierons d'abord l'appareil au moyen duquel il

(1) Chap. vi, p. 114-127.

(2) Hertz, *Annales de Wiedemann*; t. XXXI, *Ueber sehr Schnelle electrische Schwingungen*, p. 421 ; t. XXXIV, *Ueber die Einwirkungeiner geradlinigen electrischen Schwingung auf eine benachbarte Strombahn*, p. 155; t. XXXIV, *Ueber die Ausbreitungsgeschwindigkeit der electrodynamischen Wirkungen*, p. 551 ; t. XXXIV, *Ueber electrodynamische Wellen im Luftraume und deren Reflexion*, p. 609; t. XXXVI, *Die Kräfte electrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell schen Theorie*, p. 1 ; t. XXXVI, *Ueber Strahlen electrischer Kraft*, p. 769.

produit des vibrations électromagnétiques très rapides, son *excitateur*. Il se compose d'un fil de cuivre de 5 millimètres de diamètre, aux extrémités duquel sont soudées deux sphères de zinc de 15 centimètres de rayon, la distance de leurs centres, dans le premier appareil de Hertz, était de $1^m,50$; en son milieu, le fil est interrompu sur une longueur de quelques millimètres, et entre les bornes peuvent éclater des étincelles : ces deux bornes sont reliées aux deux pôles d'une bobine de Ruhmkorff.

Calculons, d'après Hertz, la durée d'une oscillation électrique dans ce système.

Si l'on a un condensateur dont les armatures sont à des potentiels V_1 et V_2, dont la charge est q, et la capacité C, en réunissant les deux armatures par un conducteur de résistance R, on obtiendra dans ce conducteur un courant i ; et si L est le coefficient de self-induction du système, on aura, à chaque instant :

$$(1) \qquad \mathrm{R}i = -\mathrm{L}\frac{di}{dt} + \mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2$$

en même temps que :

$$\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2 = -\frac{q}{\mathrm{C}}$$

et :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

En éliminant i et $V_1 - V_2$, on obtient l'équation différentielle :

$$(2) \qquad \mathrm{LC}\frac{d^2q}{dt^2} + \mathrm{RC}\frac{dq}{dt} + q = 0$$

L'équation caractéristique correspondante

$$LCh^2 + RCh + 1 = 0$$

admet pour racines

$$h = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}.$$

Les racines sont réelles si

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

L'intégrale générale de (2) est alors :

$$q = A_1 e^{h_1 t} + A_2 e^{h_2 t}$$

et il n'y a pas d'oscillation.

Au contraire, si $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, les racines sont imaginaires. Posons

$$h = -\alpha \pm i\beta$$

$$-\alpha = -\frac{R}{2L} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4LC - R^2C^2}}{2LC}$$

L'intégrale générale est alors

$$q = Ae^{-\alpha t}\cos(\beta t + \gamma)$$

A et γ étant les deux constantes arbitraires.

La période T du mouvement oscillatoire est donnée par

$$\beta T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\beta}$$

et dans le cas où R est négligeable,

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Le décrément logarithmique

$$\alpha T = \pi R \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

70. Assimilons l'excitateur à un condensateur; et, pour en avoir la capacité, négligeons la capacité du fil. L'action réciproque des deux sphères peut aussi être négligée; et Hertz se contente de dire que dès lors la capacité du condensateur est égale à la capacité de chacune des sphères, laquelle a pour mesure électrostatique le rayon évalué en centimètres : ici on a donc $C = 15$ (1).

Cette valeur est erronée; en effet, si l'on considère l'ensemble des deux sphères comme un condensateur, la capacité de ce condensateur sera par définition le rapport de la charge d'une des sphères à la différence de potentiel des deux sphères. Si on appelle q et $-q$ les charges des deux sphères, V et $-$V leurs potentiels on aura en mesure électrostatique

$$q = V.\ 15 \text{ centimètres.}$$

La différence de potentiel sera 2V et la capacité du condensateur sera

$$\frac{q}{2V} = 7{,}5 \text{ centimètres}$$

(1) *Wied. Ann.* t. XXXI, p. 444.

71. Pour calculer la self-induction L on peut négliger les deux sphères qui constituent une faible partie de la longueur de l'appareil : la densité du courant électrique y est d'ailleurs plus faible que dans le fil. Nous avons donc à calculer la self-induction d'un cylindre d'un demi-centimètre de diamètre et de 150 centimètres de long.

On a

$$T = L\frac{i^2}{2} = \frac{1}{2}\int (Fu + Gv + Hw)\, d\tau$$

Si nous prenons l'axe du cylindre pour axe Ox,

$$v = w = 0$$

et

$$Li^2 = \int Fu d\tau$$

Le courant n'est pas uniformément réparti sur la section du fil et l'on a :

$$i = \int u d\omega$$

intégrale étendue à tous les éléments $d\omega$ de l'aire de la section droite du fil.

$$F = \int \frac{u' d\tau'}{r} + \frac{1-k}{2}\frac{d\psi}{dx} = F' + \frac{1-k}{2}\frac{d\psi}{dx}$$

$$\psi = \int \frac{d\rho'}{dt} r d\tau',$$

ρ étant la densité de l'électricité libre. Ici il n'y a d'électricité sensible qu'aux deux extrémités; donc :

$$\psi = \frac{dq_1}{dt} r_1 + \frac{dq_2}{dt} r_2$$

r_1 et r_2 étant les distances du point considéré du fil aux deux sphères ; et q_1 et q_2 les charges de ces deux sphères :

$$\frac{dq_1}{dt} = -\frac{dq_2}{dt}$$

puisque l'électricité passe d'une des sphères à l'autre. Prenons pour origine l'une des extrémités, nous aurons en appelant l la longueur du fil :

$$r_1 = x, \quad r_2 = l - x$$
$$r_1 - r_2 = 2x - l$$

et

$$\psi = \frac{dq_1}{dt}(2x - l) = -i(2x - l)$$
$$\frac{d\psi}{dx} = -2i$$

72. Calculons maintenant $F' = \int \frac{u' d\tau'}{r}$

Soient (x', y', z') le centre de gravité de l'élément $d\tau'$; r sa distance au point (x, y, z). Soit δ la distance du point (x, y, z) à la parallèle à l'axe des x passant par (x', y', z') de sorte que (*fig.* 14) :

$$\delta^2 = (y - y')^2 + (z - z')^2$$

Imaginons qu'on ait décomposé le conducteur cylindrique en une infinité de cylindres élémentaires de telle façon que l'élément $d\tau'$ soit un cylindre dont les génératrices soient parallèles à l'axe des x, dont la section droite soit $d\omega'$ et la hauteur dx' ; on aura :

$$d\tau' = d\omega' dx'$$

$$F' = \int \frac{u' d\omega' dx'}{r} = \int u' d\omega' \int \frac{dx'}{r}$$

car u' n'est pas fonction de x', et si l'on intègre d'abord par rapport à dx', on peut faire sortir u' du signe $\int$. On a d'ailleurs :

$$r^2 = \delta^2 + (x - x')^2$$

$$\int_0^l \frac{dx'}{\sqrt{\delta^2 + (x' - x)^2}} = \left\{ \log \left[x' - x + \sqrt{\delta^2 + (x' - x)^2} \right] \right\}_0^l$$

$$= \log \frac{l - x + \sqrt{\delta^2 + (l - x)^2}}{-x + \sqrt{\delta^2 + x^2}}$$

On peut négliger δ devant x et l ; alors on a :

$$\log \frac{\left[l - x + \sqrt{\delta^2 + (l - x)^2}\right] \left[x + \sqrt{\delta^2 + x^2}\right]}{\delta^2} = \log \frac{4x(l - x)}{\delta^2}$$

$$F' = \int u' d\omega' . \log \frac{4(xl - x^2)}{\delta^2}$$

Nous pouvons admettre que la densité du courant u' sur l'aire $d\omega'$ ne dépend que de la distance à l'axe.

Menons par le point x, y, z un plan perpendiculaire à l'axe des x ; ce plan coupera le conducteur suivant un cercle. Décomposons ce cercle C en une infinité d'éléments et soit $d\omega'$ celui de ces éléments dont les coordonnées sont x', y' et z'.

Sa distance au point x, y, z sera δ. Imaginons maintenant une matière attirante distribuée à la surface de ce cercle C de façon que sa densité au point (x', y', z'), centre de gravité de $d\omega'$, soit précisément u'. Cette matière sera ainsi distribuée *en couches circulaires concentriques*. Supposons que cette matière fictive attire le point x, y, z suivant une loi convenable qu'il me reste à définir.

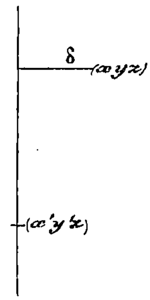

Fig. 14.

F' sera manifestement le potentiel dû à l'attraction de cette matière au point x, y, z si l'on suppose la loi d'attraction telle que le potentiel dû à une masse 1 située à une distance δ soit égal à $\log \frac{4(xl - x^2)}{\delta^2}$; *c'est un potentiel logarithmique;* et l'on sait que le potentiel logarithmique d'une matière distribuée en couches circulaires homogènes par rapport à un point extérieur est le même que si toute la matière était concentrée au centre. On a donc, en un point extérieur

$$F' = \int u' d\omega' + \log \frac{4(xl - x^2)}{\delta_0^2}$$

en désignant par δ_0 la distance de ce point extérieur x, y, z au centre du cercle, c'est-à-dire au point (x, o, o). Pour un point situé à la surface $\delta_0 = \frac{d}{2}$ et

$$F' = i \log \frac{16(xl - x^2)}{d^2}$$

Cette valeur est vraie en un point de la surface. En est-il ainsi pour un point intérieur? Non, s'il s'agit d'un courant répandu dans la masse du fil. Mais pour un courant alternatif rapide, il est presque entièrement à la surface. On peut donc supposer tout le courant à la surface, et alors à l'intérieur $u' = 0$, et F' a une valeur constante égale à celle qui a été donnée pour un point de la surface

$$F = i\left[\log \frac{16\,(xl - x^2)}{d^2} + k - 1\right]$$

$$\int F u d\tau = \int d\omega u . dx F = \int d\omega . u \int_0^l F dx = i \int_0^l F . dx$$

$$Li^2 = i^2 \int_0^l \left[\log \frac{16\,(xl - x^2)}{d^2} + k - 1\right] dx$$

L'intégrale indéfinie est :

$$x\left[\log \frac{16}{d^2} + k - 1\right] + x(\log x - 1) - (l - x)[\log (l - x) - 1]$$

$$L = 2l\left[\log \frac{4}{d} + \frac{k-1}{2}\right] + 2l(\log l - 1)$$

$$= 2l\left[\log \frac{4l}{d} - 1 + \frac{k-1}{2}\right]$$

Hertz donne

$$2l\left[\log \frac{4l}{d} - 0{,}75 + \frac{1-k}{2}\right]$$

la raison de la différence est, je crois, que Hertz fait le calcul en supposant la densité du courant constante dans l'intérieur du conducteur.

C'est pour cette raison que Hertz donne comme second terme $-0{,}75$ au lieu de -1; s'il donne comme troisième terme $\frac{1-k}{2}$ au lieu de $\frac{k-1}{2}$ cela tient vraisemblablement à une erreur de signe dans le calcul de ψ. Ces divergences ne portent d'ailleurs que sur des quantités négligeables.

En remplaçant l et d par leurs valeurs, et faisant $k = 1$, comme dans la théorie de Neumann, on a :

$$L = 1902 \text{ cm.}$$

En faisant $k = 0$, on augmenterait L de 150 centimètres.

Portons ces valeurs de L et de C dans T :

$$t = 2\pi \sqrt{LC}$$

en unités électromagnétiques ; si C′ est la capacité en mesure électrostatique

$$C = \frac{C'}{V^2}$$

ou :

$$VT = 2\pi \sqrt{LC'} = 2\pi \sqrt{1902 \times 7{,}5} = 7^{m}{,}51$$

V étant le rapport des unités. Hertz donne un nombre différent $5^{m}{,}31$, parce qu'il considère la vibration simple et que, d'autre part, il a commis dans le calcul de la capacité une erreur que j'ai signalée au n° **70** : pour la durée T il donne 1,77 en cent millionièmes de seconde ; il faudrait de même dire 2,51 pour une période *complète*.

Tout cela suppose R négligeable : pour qu'il y ait oscillation, il faut que $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, c'est-à-dire < 969 ohms. Il suffit pour que la formule précédente soit valable, que R^2 soit négligeable en présence du carré de 969 ohms : le décrément logarithmitique sera $\frac{R}{308 \text{ ohms}}$ (1).

73. Rôle de l'interrupteur. — On peut assimiler l'excitateur à un pendule qui oscille, et le rôle de l'interrupteur consiste uniquement à écarter le pendule de sa position d'équilibre par une force perturbatrice qui disparaisse dans un temps très court, et très court par rapport à la durée d'oscillation. Créer une force perturbatrice qui disparaisse dans un temps très petit relativement à un cent millionnième de seconde ne peut être réalisé par aucun moyen mécanique. Aussi a-t-on recours à une bobine de Ruhmkorff; les deux bornes se chargent d'électricités contraires, très lentement eu égard à la durée d'oscillation de l'excitateur. Il arrive un moment où, la différence de potentiel atteignant une certaine valeur, 100 unités électrostatiques environ, l'étincelle éclate; la force contrélectromotrice qui s'opposait au passage continu d'électricité d'une des parties du fil à l'autre disparaît brusquement : tout se passe comme si l'on supprimait une sorte de frottement au départ et les oscillations commencent.

La brièveté de la disparition dépend d'une foule de circonstances mal connues, de l'illumination de l'interrupteur par des rayons ultra-violets, du degré de poli des surfaces des bornes, etc. Dans un article récent, qui a été fort remarqué (2) M. Brillouin s'est placé à un point de vue différent de celui de Hertz : il assimile l'interrupteur à une anche et l'appareil

(1) Hertz donne 686 et 213 au lieu de 969 et 308 à cause de l'erreur commise sur la capacité.

(2) *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 1re année, p. 141.

fonctionnerait bien quand la période de l'interrupteur serait la même que celle de l'excitateur.

Pour bien faire comprendre la différence des deux points de vue, je me bornerai à faire remarquer que, d'après les idées de M. Brillouin, une étincelle réglée pour un excitateur donné ne fonctionnerait plus avec un excitateur de période différente plus courte ou plus longue, tandis que, d'après les idées de M. Hertz, elle devrait certainement fonctionner pour tous les excitateurs de période plus longue.

Il est difficile de se prononcer sur la question : il paraît cependant peu probable que M. Brillouin ait raison et il est plus naturel de se rallier aux idées de Hertz. En tous cas, l'on n'a pas à faire intervenir l'interrupteur, dans le calcul de la période : il suffit que la résistance totale du fil, en y comprenant l'interrupteur, soit toujours négligeable par rapport à $2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

74. Objections au calcul de Hertz. — Le calcul qui précède prête à plusieurs objections. On n'a pas fait intervenir la bobine de Ruhmkorff dans le calcul de L, et pourtant elle a une self-induction énorme. Le courant peut ne pas aller d'un bout à l'autre du fil; enfin, l'on n'a pas tenu compte des courants de déplacement produits dans le diélectrique : il y a radiation électrique et l'énergie ne se dissipe pas seulement par dépense de chaleur dans le fil, mais encore par rayonnement de force électrique; or, dans le calcul du décrément logarithmique, on n'a tenu compte que de la perte de chaleur; le décrément est plus grand en réalité.

75. Hertz ne tient aucun compte de la bobine de Ruhmkorff dans le calcul de la période. L'influence perturbatrice exercée par la bobine sur la durée propre de l'oscillation de l'excitateur, est tout à fait négligeable. Considérons en effet l'excitateur AB,

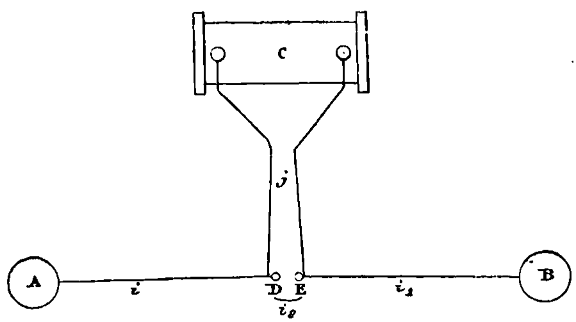

Fig. 15.

interrompu en DE ; soit i le courant qui parcourt la branche AD ; i_1 celui qui parcourt EB ; i_2 celui qui passe de D en E, et j celui qui parcourt le fil secondaire ECD de la bobine C. Les lois de Kirchhoff donnent :

$$i_2 = i + j$$
$$i_1 = i_2 - j$$

d'où

$$i_1 = i.$$

Nous avons ainsi deux courants : l'un i qui va de A en B, l'autre, d'intensité j, qui suit le circuit fermé DECD : les deux circuits ont d'ailleurs une partie commune DE.

Appliquons les lois de Ohm : si L est la self-induction de AB, N celle de la bobine, et M l'induction mutuelle des deux circuits ; C la capacité des boules, R la résistance de AB, et S celle du circuit DECD; enfin, q la charge de la première des deux sphères, on a :

$$\left\{\begin{aligned} Ri &= -L\frac{di}{dt} - M\frac{dj}{dt} - \frac{q}{C} \\ Sj &= -M\frac{di}{dt} - N\frac{dj}{dt} \end{aligned}\right.$$

On sait que $i = \frac{dq}{dt}$.

$$\left\{\begin{aligned} & CL\frac{d^2q}{dt^2} + CR\frac{dq}{dt} + CM\frac{dj}{dt} + q = 0 \\ & N\frac{dj}{dt} + Sj + M\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \end{aligned}\right.$$

Intégrons :

$$\left\{\begin{aligned} q &= e^{\alpha t} \\ j &= \lambda e^{\alpha t} \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} & CL\alpha^2 + CR\alpha + 1 + CM\lambda\alpha = 0 \\ & \lambda(N\alpha + S) + M\alpha^2 = 0 \end{aligned}\right.$$

Éliminons λ :

$$(CL\alpha^2 + CR\alpha + 1)(N\alpha + S) - CM^2\alpha^3 = 0$$

L, C et R sont petits, N et S sont grands; M est très petit, même par rapport à L. Dans une première approximation, on pourra donc négliger le second terme et l'équation se décompose : en égalant à O le premier facteur, on a :

$$CL\alpha^2 + CR\alpha + 1 = 0 \tag{1}$$

Ce qui est l'équation précédemment étudiée, obtenue quand on néglige la self-induction de la bobine. On a sensiblement

$$\alpha = \frac{\pm i}{\sqrt{\mathrm{CL}}}.$$

En remplaçant α par cette valeur, nous obtiendrons une seconde approximation : nous pouvons écrire :

$$\mathrm{CL}\alpha^2 + \mathrm{CR}\alpha + 1 = \frac{\mathrm{CM}^2\alpha^3}{\mathrm{N}\alpha + \mathrm{S}} \tag{2}$$

Remplaçons α dans le second membre par cette valeur $\frac{\pm i}{\sqrt{\mathrm{CL}}}$: nous avons alors une équation dont le terme connu est 1 moins une certaine constante, et l'erreur commise en prenant pour racines les racines de l'équation (2) est de l'ordre de grandeur du second membre de l'équation (2). Ce second membre est approximativement $\frac{\mathrm{CM}^2\alpha^2}{\mathrm{N}}$, α étant très grand, c'est-à-dire : $-\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{NL}}$, et l'erreur qu'on commet en le négligeant est absolument insignifiante, précisément parce que la self-induction N de la bobine de Ruhmkorff est énorme.

Tout se passe comme si, à la boule d'un premier pendule, on en attachait un second; si les boules suspendues aux deux pendules sont à peu près de même masse, les périodes sont très altérées; si, au contraire, le premier pendule étant très long et sa boule de masse considérable, le second est court et de faible masse, sa durée d'oscillation sera peu altérée par le mouvement du premier pendule.

Le calcul qui précède est extrêmement grossier puisque nous ne tenons aucun compte des effets énormes de capacité qui se produisent dans la bobine. Mais le résultat ne serait pas modifié si on en tenait compte ; la capacité se comporterait comme la self-induction et n'exercerait aucune influence sur la durée de la période, *précisément parce qu'elle est très grande.*

Nous avons vu que par suite d'une erreur commise par ce savant dans le calcul de la capacité, la valeur que donne Hertz pour la période T doit être divisée par $\sqrt{2}$ et, comme la longueur d'onde dans l'air reste égale au nombre que Hertz a trouvé expérimentalement, la vitesse de propagation qu'il en déduit doit être multipliée par $\sqrt{2}$. Or il trouve une vitesse de propagation dans l'air très voisine de celle de la lumière, c'est-à-dire de 300,000 kilomètres par seconde : la vitesse déduite de ses expériences correctement interprétées serait donc non plus 300,000, mais $300{,}000 \times \sqrt{2}$. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Ne peut-on du moins espérer qu'une autre correction vienne compenser celle-là ? C'est peu probable. On a négligé dans le calcul de la self-induction les courants de déplacement qui vont d'une boule à l'autre à travers le diélectrique : mais J.-J. Thomson a montré que la période est peu altérée de ce chef. En effet le terme qui changera dans l'expression de F, ce sera F', $\frac{d\psi'}{dx}$ restera invariable. F', c'est l'intégrale $\int \frac{u' d\tau'}{r}$ étendue à tous les courants de déplacement et de conduction ; et on ne l'a étendue qu'aux courants de conduction. Mais il semble bien que le terme qui leur correspond soit de beaucoup le plus important. Le fil est, en effet, de petit diamètre ; un point quelconque de la surface ou de l'intérieur est beaucoup plus près des courants de conduction que des courants de déplacement, qui sont disséminés dans tout l'espace; et quant à ceux qui passent très près du point, leur intensité est beaucoup plus faible que celle des courants de conduction correspondants. C'est là sans doute un raisonnement grossièrement approximatif, mais il suffit à montrer qu'on n'aura pas à multiplier la période par un facteur de l'ordre de $\sqrt{2}$.

76. Une autre correction serait peut-être nécessaire, ainsi que l'a montré J.-J. Thomson. Le courant ne va pas tout entier d'une boule à l'autre : une fraction du courant aboutit à la surface du fil. Thomson admet arbitrairement que la variation du courant le long du fil est représentée par une fonction sinusoïdale : la période serait alors plus grande que celle que donne Hertz, c'est bien dans ce sens qu'il faudrait une correction pour rétablir l'accord entre la vitesse des ondes électromagnétiques dans l'air, et celle de la lumière : seulement le facteur par lequel il faut multiplier la période n'est que 1,05, et l'on est encore loin de compte.

Ainsi l'un des résultats, généralement considérés comme les plus importants de Hertz, ne serait dû qu'à une faute de calcul. Nous verrons par la suite, que dût-on le rejeter définitivement, les expériences de Hertz n'en conservent pas moins un très grand intérêt, et que les conclusions qu'on peut en tirer au point de vue des théories électrodynamiques n'en sont pas moins rigoureuses.

77. La force électrique aboutit normalement aux conducteurs. — Une question importante se pose encore au sujet de l'excitateur. Comment est réparti le courant dans la section du fil? Nous allons montrer que, d'une manière générale, quand un conducteur est le siège de courants alternatifs extrêmement rapides, le courant de conduction est presque tout entier à la surface du conducteur. J'emploierai constamment, pour l'étude des équations différentielles linéaires qui se rencontrent dans ces questions et qui admettent pour intégrales des fonctions périodiques, la méthode qui consiste à introduire des exponentielles imaginaires (1).

Cette méthode consiste à chercher à satisfaire aux équations du champ électromagnétique par des fonctions *imaginaires* contenant en facteur une exponentielle imaginaire. Comme les équations sont linéaires et à coefficients réels, les parties réelles de ces fonctions y satisferont également. Il suffira donc, une fois le calcul terminé, de conserver les parties réelles des fonctions auxquelles on sera parvenu. Cette méthode simplifie beaucoup les écritures, toutes les fois qu'on a à étudier un phénomène périodique.

La composante F du potentiel vecteur, par exemple, est une fonction périodique du temps, à période $\frac{2\pi}{p}\cdot$ Posons donc

$$F = F_0 e^{ipt}$$

$$\frac{dF}{dt} = ipF$$

$$\frac{d^2F}{dt} = -p^2F.$$

La période étant très petite, p est un nombre très grand, ce qui simplifiera les calculs.

Nous supposerons toujours $\mu = 1$. Pour presque tous les corps, μ est très voisin de 1 ; et pour le fer, tout se passe comme pour un conducteur quelconque, ainsi que Hertz l'a montré par expérience (2); sans doute, l'aimantation par in-

(1) Voir *Théorie mathématique de la lumière*, § 50, p. 58. et *passim*.
(2) *Wied. Ann.*, t. XXXIV, p 558.

fluence n'est pas instantanée, et elle n'a pas le temps de se produire pour des courants d'induction aussi rapides.

Soient X, Y, Z les composantes de la force électrique

$$X = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\varphi}{dx};$$

pour un conducteur $X = \frac{u}{C}$; en intégrant le long d'un contour fermé quelconque,

$$(1) \qquad \int (Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{1}{C}\int (udx + vdy + wdz)$$

Or

$$\int \left(\frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dy}\,dy + \frac{d\varphi}{dz}\,dz\right) = 0\,;$$

donc le premier membre devient :

$$-\int \left(\frac{dF}{dt}\,dx + \frac{dG}{dt}\,dy + \frac{dH}{dt}\,dz\right)$$

ce qui est égal à

$$-\,ip\int (Fdx + Gdy + Hdz)$$

Donc :

$$\int (Fdx + Gdy + Hdz) = \frac{i}{pC}\int (udx + vdy + wdz)$$

p est très grand, le second membre est donc très petit. S'il est nul, on a :

$$\int (Fdx + Gdy + Hdz) = 0$$

c'est-à-dire qu'à l'intérieur d'un conducteur $Fdx + Gdy + Hdz$ est une différentielle exacte.

On a d'ailleurs, dans les hypothèses de Maxwell,

$$\alpha = \frac{a}{\mu} = a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = 0$$

alors α, β, γ sont nuls; et de même u, v, w, puisque

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \text{ etc.}$$

Donc, à l'intérieur des conducteurs, pas de courant : il n'y en a que dans le diélectrique et à la surface des conducteurs. On arriverait au même résultat en faisant C infini, c'est-à-dire en supposant le conducteur parfait. C'est pourquoi l'on peut dire qu'en cela les conducteurs se comportent comme conducteurs parfaits.

78. On peut objecter, il est vrai, que $\int(udx + vdy + wdz)$ pourrait être très grand : alors le second membre de l'équation (1) n'est pas très petit. L'objection tombe si l'on remarque que $\int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C}$ qui représente la chaleur de Joule, serait alors très grand, ce qui est impossible parce que la perte d'énergie étant très grande, une pareille situation ne pourrait se maintenir que pendant un temps très court.

D'ailleurs l'expérience confirme pleinement ce résultat en montrant qu'on peut remplacer un conducteur par un autre de nature et, par suite, de conductibilité différentes, sans changer en rien les phénomènes.

Mais le raisonnement par lequel on a montré que le premier membre de l'équation (1) est très petit n'est-il pas applicable à un diélectrique ?

$$\int (\mathrm{F}dx + \mathrm{G}dy + \mathrm{H}dz) = \frac{4\pi i}{p\mathrm{K}} \int (fdx + gdy + hdz)$$

et, en différentiant par rapport au temps :

$$\int (\mathrm{F}dx + \mathrm{G}dy + \mathrm{H}dz) = \frac{4\pi}{p^2\mathrm{K}} \int (udx + vdy + wdz) ;$$

si p est grand, $p^2\mathrm{K}$ est très grand. Il semblerait donc qu'il n'y ait pas de courant dans le diélectrique; mais le raisonnement n'est plus applicable : d'abord, $p^2\mathrm{K}$ n'est pas très grand comme $p\mathrm{C}$; s'il y a 100 millions de vibrations par seconde,

$$p = 2\pi.10^8.$$

C, pour un métal comme le cuivre, est de l'ordre de $\frac{1}{10^4}$. K est, en unités C. G. S., l'inverse du carré de la vitesse de la lumière.

Donc

$$\frac{p^2\mathrm{K}}{4\pi}, \quad \text{c'est} \quad \frac{\pi}{18} \cdot 10^{-4}$$

et

$$p\mathrm{C} \quad \text{c'est} \quad 2\pi.\, 10^4.$$

En outre, lors même que $p^2\mathrm{K}$ serait très grand, l'on pourrait dire qu'ici rien n'empêche de supposer très grand $\int (udx + vdy + wdz)$; on n'a plus à craindre, comme dans le cas des conducteurs, d'avoir une chaleur de Joule infinie.

79. Ainsi, à l'intérieur d'un conducteur, pas de courant, pas de force électromotrice. La fonction φ est continue quand on traverse la surface et si on prend la normale pour axe des z, les deux dérivées $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dy}$, ainsi que leurs dérivées par rapport au temps, sont continues : mais $\frac{d\varphi}{dz}$ est discontinue.

Quant aux composantes F, G, H, elles sont continues, car

$$F = \int \frac{u' d\tau'}{r}$$ est le potentiel dû à une matière attirante de densité u, et ce potentiel est continu lors même que la distribution de la matière attirante est superficielle : mais il n'en est pas de même de ses dérivées par rapport aux coordonnées. Les dérivées par rapport au temps de F, G, H sont également continues.

Ainsi la force d'induction est continue quand on traverse la surface, la force électrostatique est discontinue, en ce sens que sa composante normale est discontinue. Il en est de même, par suite, de la force électromotrice totale. Et puisqu'en un point intérieur cette force totale est nulle et que les composantes tangentielles sont continues, c'est dire qu'à l'extérieur la force électrique aboutit normalement à la surface du conducteur : dans le cas d'oscillations extrêmement rapides, nous aurons donc à imposer comme condition aux limites aux lignes de force électrique, d'aboutir normalement aux conducteurs; c'est là une conséquence nécessaire du fait que le courant de conduction est localisé à la surface du conducteur et c'est une conséquence très importante : l'expérience d'ailleurs, et nous aurons l'occasion de revenir sur ce point, ne l'a pas vérifiée parfaitement ou, tout au moins, laisse place au doute.

Les lignes de force magnétique au contraire sont tangentes à la surface du conducteur. Il nous suffit pour le démontrer de faire voir que le flux de force magnétique qui traverse une portion quelconque de la surface du conducteur est nul. Or ce flux est égal à l'intégrale

$$\int (\mathrm{F}dx + \mathrm{G}dy + \mathrm{H}dz) = \frac{1}{ip}\int \left(\frac{d\mathrm{F}}{dt}\,dx + \frac{d\mathrm{G}}{dt}\,dy + \frac{d\mathrm{H}}{dt}\,dz\right)$$

prise le long du contour de cette portion de surface.

Or :

$$\mathrm{X} = -\frac{d\mathrm{F}}{dt} - \frac{d\varphi}{dx} \text{ et } \int \left(\frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dy}\,dy + \frac{d\varphi}{dz}\,dz\right) = 0$$

Le flux cherché est donc égal à

$$-\frac{1}{ip}\int (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$

Or la force électrique étant normale au conducteur, on a : $\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0$; donc le flux est nul.

C. Q. F. D.

CHAPITRE IX

ÉTUDE DU CHAMP PRODUIT PAR L'EXCITATEUR

80. Donnons, d'après Hertz, le calcul du champ électromagnétique produit par l'excitateur.

Considérons un excitateur de révolution autour de OZ ; le champ sera aussi de révolution. Les lignes de force électrique et magnétique, passant par un point donné, étant symétriques par rapport au plan méridien contenant ce point, il s'ensuit que toutes les lignes de force ou bien sont contenues dans des plans méridiens, ou bien sont normales à tous les plans méridiens qu'elles rencontrent, c'est-à-dire sont des parallèles.

Les lignes de force électrique, étant normales aux conducteurs, d'après la théorie précédente, ne peuvent être des parallèles : elles seront donc contenues dans des plans méridiens, et les parallèles seront des lignes de force magnétique.

On a donc

$$\gamma = 0$$

et, d'après cela, l'équation (6) § 50, p. 116, se réduit à :

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} = 0;$$

équation qui exprime que $\alpha dy - \beta dx$ est une différentielle exacte, si x et y sont seuls considérés comme variables. Désignons par $\frac{d\Pi}{dt}$ la fonction intégrale :

$$\alpha dy - \beta dx = d\frac{d\Pi}{dt}$$

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{d^2\Pi}{dydt} \\ \beta &= -\frac{d^2\Pi}{dxdt} \\ \gamma &= 0. \end{aligned}\right.$$

Quant aux composantes du déplacement électrique, les équations (4), § 50, p. 115, donnent:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} 4\pi\frac{df}{dt} &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = \frac{d^3\Pi}{dxdzdt} \\ 4\pi\frac{dg}{dt} &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = \frac{d^3\Pi}{dydzdt} \\ 4\pi\frac{dh}{dt} &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = -\frac{d^3\Pi}{dx^2dt} - \frac{d^3\Pi}{dy^2dt} \end{aligned}\right.$$

La première des équations (2) montre que

$$4\pi f - \frac{d^2\Pi}{dxdz}$$

est une fonction indépendante du temps ; elle ne jouera donc aucun rôle dans le phénomène périodique qu'il s'agit d'étudier, et l'on peut la supposer nulle.

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} 4\pi f &= \frac{d^2\Pi}{dxdz} \\ 4\pi g &= \frac{d^2\Pi}{dydz} \\ 4\pi h &= -\frac{d^2\Pi}{dx^2} - \frac{d^2\Pi}{dy^2} \end{aligned}\right.$$

81. Dans l'équation (3) du § 50, p. 115, remplaçons α, g, h, par leurs valeurs en fonction de Π. L'équation :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{4\pi}{K}\left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz}\right).$$

nous donne :

$$K\frac{d^3\Pi}{dydt^2} = \frac{d^3\Pi}{dx^2dy} + \frac{d^3\Pi}{dy^3} + \frac{d^3\Pi}{dz^2dy} = \frac{d\Delta\Pi}{dy}$$

ou

$$\frac{d}{dy}\left(K\frac{d^2\Pi}{dt^2} - \Delta\Pi\right) = 0$$

De même,

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{d^2\Pi}{dt^2} - \Delta\Pi\right) = 0$$

Donc $K\frac{d^2\Pi}{dt^2} - \Delta\Pi = f(z, t)$, et ne dépend ni de x ni de y. On peut supposer cette fonction f nulle, car si on ajoute à Π une fonction arbitraire de z et de t cela ne change rien au champ ; car toutes les composantes α, β, γ, f, g, h, contiennent en facteur les dérivées de Π prises au moins une fois par rapport à x ou à y.

Ainsi

$$K\frac{d^2\Pi}{dt^2} = \Delta\Pi \tag{4}$$

Il est à remarquer que Π n'est pas une fonction quelconque de x, y, z ; puisque le champ se reproduit par une rotation quelconque autour de oz. Π est fonction de z et de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, ou, si l'on veut, de z et de $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$.

82. Cherchons les équations des lignes de force électrique : les équations différentielles sont :

$$\frac{dx}{f} = \frac{dy}{g} = \frac{dz}{h} \tag{5}$$

Cherchons l'équation de la ligne contenue dans le plan des zx : $y = 0$, $x = \rho$.

Les équations (5) deviennent :

$$y = 0$$
$$hdx - fdz = 0$$

ou :

$$\frac{d^2\Pi}{dxdz}\,dz + \left(\frac{d^2\Pi}{dx^2} + \frac{d^2\Pi}{dy^2}\right)dx = 0\ .$$

En prenant pour coordonnées z et ρ, cette équation devient :

$$\frac{d^2\Pi}{d\rho dz}\,dz + \left(\frac{d^2\Pi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\Pi}{d\rho}\right)d\rho = 0$$

Rendons différentielle exacte, en multipliant par ρ

$$\rho\,\frac{d^2\Pi}{d\rho dz}\,dz + \left(\rho\,\frac{d^2\Pi}{d\rho^2} + \frac{d\Pi}{d\rho}\right)d\rho = 0$$

et, en intégrant :

$$\rho\,\frac{d\Pi}{d\rho} = \text{const.}$$

Avec les coordonnées x et y, l'équation d'une ligne de force contenue dans un plan méridien quelconque est donc :

$$x\,\frac{d\Pi}{dx} + y\,\frac{d\Pi}{dy} = \text{const.} \tag{6}$$

83. Un cas particulier intéressant est celui où Π est fonction seulement de r, distance à l'origine ; une transformation bien connue donne :

$$\Delta \Pi = \frac{d^2\Pi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Pi}{dr}$$

Π est alors défini par l'équation :

$$K \frac{d^2\Pi}{dt^2} = \frac{d^2\Pi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Pi}{dr}$$

L'équation prend une forme plus simple en posant :

$$\Pi = \frac{\theta}{r}; \text{ elle devient :}$$

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} = K \frac{d^2\theta}{dt^2}; \tag{7}$$

c'est l'équation des cordes vibrantes, dont l'intégrale est :

$$\theta = \theta_1\left(r + \frac{t}{\sqrt{K}}\right) + \theta_2\left(r - \frac{t}{\sqrt{K}}\right) \tag{8}$$

84. Excitateur sphérique de Lodge. — Appliquons à un exemple susceptible d'être traité complètement. Soit une sphère conductrice plongée dans un champ électrique uniforme ; de l'électricité positive se porte sur un hémisphère, de l'éléctricité négative sur l'autre, et l'équilibre est supposé atteint à l'origine du temps. On supprime brusquement le champ : il en résulte des vibrations électriques dans le conducteur et dans le diélectrique environnant. Lodge a étudié ce cas expérimentalement.

La sphère plongée dans un champ uniforme se comporte comme un *élément électrique* orienté suivant le champ

$$4\pi f = -K\frac{d\varphi}{dx},$$

ici pas de courant. donc F, G, H sont nuls.

$$\varphi = C\frac{d\frac{1}{r}}{dz},$$

C étant une constante que nous pouvons prendre égale à $-\frac{1}{K}$, de manière à n'avoir pas de coefficient dans les formules :

$$4\pi f = \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}$$

$$4\pi g = \frac{d^2\frac{1}{r}}{dydx}$$

$$4\pi h = \frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2} = -\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} - \frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}, \text{ car } \Delta\frac{1}{r} = 0$$

En comparant aux équations (3), nous voyons que la valeur initiale de Π est $\Pi = \frac{1}{r}$; celle de θ est $\theta = 1$, et la valeur initiale de $\frac{d\theta}{dt}$ est o, puisqu'au début il y a équilibre et que l'équilibre persiste.

On supprime le champ électrique ; θ va commencer à varier, d'après la formule :

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} = K\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Etablissons les conditions aux limites : on a à l'origine une sphère de rayon a; écrivons qu'à la surface les lignes de force électrique sont normales à la sphère :

$$\frac{f}{x}=\frac{g}{y}=\frac{h}{z}$$

En considérant seulement les deux rapports extrêmes,

$$\frac{4\pi f}{x}=\frac{4\pi h}{z} \tag{9}$$

Transformons, en convenant de représenter par des lettres accentuées les dérivées successives de θ par rapport à r :

$$\frac{d\Pi}{dx}=\left(\frac{\theta'}{r}-\frac{\theta}{r^2}\right)\frac{x}{r}=\left(\frac{\theta'}{r^2}-\frac{\theta}{r^3}\right)x$$

$$\frac{d^2\Pi}{dxdz}=\left(\frac{\theta''}{r^2}-\frac{3\theta'}{r^3}+\frac{3\theta}{r^4}\right)\frac{xz}{r}=4\pi f$$

$$\frac{4\pi f}{x}=\frac{z}{r}\left(\frac{\theta''}{r^2}-\frac{3\theta'}{r^3}+\frac{3\theta}{r^4}\right)$$

De même

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2}=\left(\frac{\theta'}{r^2}-\frac{\theta}{r^3}\right)+\frac{x^2}{r}\left(\frac{\theta''}{r^2}-\frac{3\theta'}{r^3}+\frac{3\theta}{r^4}\right)$$

expression que nous pouvons écrire pour abréger

$$=\mathrm{B}+\frac{x^2}{r}\mathrm{A}$$

On aurait de même :

$$\frac{d^2\Pi}{dy^2}=\mathrm{B}+\frac{y^2}{r}\mathrm{A}$$

et l'équation (9) devient :

$$\frac{z}{r}A = -\frac{2}{z}B - \frac{x^2+y^2}{rz}A = -\frac{2}{z}B - \frac{r^2}{rz}A + \frac{z}{r}A$$

ou :

$$2B + rA = o$$

En substituant et multipliant par r, il vient :

$$\theta'' - \frac{\theta'}{r} + \frac{\theta}{r^2} = o$$

Cette équation doit être vérifiée pour $r = a$:

$$(10) \qquad \theta'' - \frac{\theta'}{a} + \frac{\theta}{a^2} = o$$

85. D'après ces conditions déterminons θ, c'est-à-dire les deux fonctions θ_1 et θ_2 qui entrent dans l'équation (8). A l'origine du temps $t = o$, $\theta = 1$, et $\frac{d\theta}{dt} = o$

$$\theta_1(r) + \theta_2(r) = 1$$

$$\theta_1'(r) - \theta_2'(r) = o$$

d'où

$$\theta_1(r) - \theta_2(r) = \text{const.}$$

$\theta_1(r)$ et $\theta_2(r)$ sont égaux à une constante près : si on ajoute une constante à θ_1 et qu'on la retranche à θ_2, on ne change rien à θ ; on peut donc prendre à l'origine du temps :

$$\theta_1 = o, \qquad \theta_2 = 1,$$

Ceci est vrai pour r quelconque *pourvu que r soit $> a$.*

Faisons croître t à partir de o ; à l'instant t, la fonction

$\theta_1\left(r+\frac{t}{\sqrt{K}}\right)$ a la même valeur pour une distance r, qu'elle avait à l'instant o pour la distance $r'=r+\frac{t}{\sqrt{K}}$. Si r était $>a$, à plus forte raison $r'>a$, puisque t est positif : donc θ_1 reste nul en tout point extérieur à la sphère. θ_2 conserve de même la valeur constante 1 tant que $r-\frac{t}{\sqrt{K}}>a$. Pour les valeurs de r comprises entre a et $a+\frac{t}{\sqrt{K}}$, θ se réduit à θ_2 ; mais θ_2 n'est plus égal à 1 : cette fonction est alors déterminée par l'équation différentielle (10).

86. Posons $r-\frac{t}{\sqrt{K}}=\xi$, et cherchons à satisfaire à l'équation en posant :

$$\theta = e^{\alpha\xi}$$

$$\alpha^2-\frac{\alpha}{a}+\frac{1}{a^2}=\text{o}$$

$$\alpha=\frac{1}{2a}\pm\frac{i}{2a}\sqrt{3}$$

$$\theta = e^{\frac{\xi}{2a}\pm\frac{i\xi}{2a}\sqrt{3}} = \text{pour une valeur donnée de } r,$$

$$Ae^{-\frac{t}{2a\sqrt{K}}\pm\frac{it}{2a\sqrt{K}}\sqrt{3}}$$

La période T de la vibration est donnée par :

$$\frac{T\sqrt{3}}{2a\sqrt{K}}=2\pi$$

et la longueur d'onde $\lambda=\frac{4\pi a}{\sqrt{3}}$.

Le décrément logarithmique est donné par le coefficient de t dans la partie réelle de l'exposant de e ; il est ici $\frac{1}{2a\sqrt{K}} \times T = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, ce qui est une valeur très considérable, et l'amplitude, après une oscillation, est réduite à une faible fraction de sa valeur : c'est pourquoi les excitateurs sphériques de Lodge semblent peu propres à permettre des expériences d'interférence, la vibration qui suit étant trop petite pour interférer avec celle qui précède.

Pour des valeurs de l'argument inférieures à a, la fonction θ se réduit donc à une exponentielle, dont la partie réelle peut se mettre sous la forme :

$$e^{-h\xi} \cos m\xi$$

On a un mouvement vibratoire dont l'amplitude va constamment en décroissant, et le problème est complètement traité. En résumé, à l'extérieur d'une sphère dont le rayon va sans cesse en croissant avec le temps, il n'y a pas de perturbation. Il y a donc une série d'ondes sphériques se propageant avec la vitesse de la lumière.

On a supposé qu'on partait d'un certain état initial; en réalité, l'excitateur sphérique peut donner lieu à des vibrations de périodes différentes. A chaque fonction sphérique Π correspond une vibration particulière, un harmonique différent, de période plus courte que la période précédente, et en même temps de décrément logarithmique plus grand ; ces harmoniques s'éteignent donc tout de suite.

87. Application à l'excitateur de Hertz. — Le calcul est tout à fait analogue. Hertz traite le problème suivant : on a un élément électrique variable, placé à l'origine et orienté suivant Oz ; deux masses $+$ E et $-$ E sont à une distance l infiniment petite, et le moment El est fonction périodique du temps. Quel est le champ électromagnétique produit?

Pour pouvoir assimiler l'excitateur à un pareil élément, il faudrait que l pût être considéré comme très petit ; or l est de l'ordre de grandeur de 1 mètre ; mais les expériences étant peu précises, on obtiendra, en partant de ces hypothèses, une approximation bien suffisante.

Π va être fini et continu dans tout l'espace, ainsi que ses dérivées premières, sauf au voisinage de l'origine où est l'élément. Etudions ce qui se passe au voisinage de l'origine :

$$\frac{4\pi f}{K} = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\varphi}{dx} \tag{11}$$

$$F = \int \frac{u' d\tau'}{r}$$

On doit comprendre dans u' le courant de déplacement dans le diélectrique et le courant qui circule dans l'excitateur lui-même ; dans l'excitateur, le courant est dirigé suivant Oz et son intensité est $\frac{d\,(El)}{dt}$: il n'a donc pas de composante u' et F se réduit aux termes provenant des courants de déplacement, F est par suite fini, de même que G.

Mais pour $H = \int \frac{w' d\tau'}{r}$ le terme $\frac{d\,(El)}{dt}$ provenant du courant dans l'excitateur est infini ; et par suite H est infini aussi, à l'origine.

$$H = \text{quantité finie} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\,(El)}{dt}.$$

De même pour φ :

$$\varphi = \frac{d\frac{1}{r}}{dz} El$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz} El$$

$\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$ sont infinies à l'origine.

Il en est donc de même de $4\pi f$, $4\pi g$, $4\pi h$; mais dans ces fonctions, on connaît la valeur des termes qui deviennent infinis à l'origine.

88. Supposons donc que El soit fonction périodique du temps.

$$El = \mu \sin pt.$$

$$\varphi = -\frac{\mu \sin pt}{K} \frac{d\frac{1}{r}}{dz}$$

Toutes les fonctions Π, f, g, h, vont être aussi des fonctions périodiques de la forme $A \sin (pt + k)$, et l'on aura par exemple :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -p^2 f$$

La troisième des équations (3) (p. 172) peut s'écrire, en ayant égard à (4) :

$$4\pi h = \frac{d^2\Pi}{dz^2} - K\frac{d^2\Pi}{dt^2}$$

Mais

$$\frac{d^2\Pi}{dt^2} = -p^2\Pi$$

Donc :

$$4\pi h = \frac{d^2\Pi}{dz^2} + Kp^2\Pi.$$

Nous avons à satisfaire aux équations (11) :

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} 4\pi f &= -K\frac{dF}{dt} - K\frac{d\varphi}{dx} \\ 4\pi g &= -K\frac{dG}{dt} - K\frac{d\varphi}{dy} \\ 4\pi h &= -K\frac{dH}{dt} - K\frac{d\varphi}{dz} \end{aligned}\right.$$

F est le potentiel dû à une matière attirante de densité u, et comme il n'y a pas de courant de conduction parallèle à Ox, il n'y a que des courants de déplacement $u = \frac{df}{dt}$; employons une notation nouvelle et convenons d'écrire (pour exprimer que F est le potentiel d'une matière attirante de densité $\frac{df}{dt}$) :

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} F &= P\left(\frac{df}{dt}\right) \\ G &= P\left(\frac{dg}{dt}\right) \end{aligned}\right.$$

Mais pour H, il faut tenir compte du courant de conduction : si on le suppose concentré à l'origine, il a pour masse

$$il = l\frac{dE}{dt}$$

$$(13)\qquad H = P\left(\frac{dh}{dt}\right) + \frac{l\frac{dE}{dt}}{r}$$

89. Pour satisfaire à ces conditions, Hertz pose :

$$(14). \qquad \Pi = \frac{\mu \sin(pt - pr\sqrt{K})}{r}$$

La fonction Π satisfait d'abord à l'équation (4) puisqu'elle est de la forme $\dfrac{f\left(r - \dfrac{t}{\sqrt{K}}\right)}{r}$.

Posons maintenant $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$

$$\begin{cases} \Pi_2 = \dfrac{\mu \sin pt}{r} \\ \Pi_1 = \dfrac{\mu}{r}\left[\sin(pt - pr\sqrt{K}) - \sin pt\right] \end{cases}$$

la quantité entre crochets s'annule pour $r = 0$; donc Π_1 ne devient pas infini à l'origine et peut, par suite, être développé suivant les puissances croissantes de r.

$$\varphi = -\frac{1}{K}\frac{d\Pi_2}{dz}$$

$$(15) \qquad \begin{cases} -K\dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{d^2\Pi_2}{dxdz} \\ -K\dfrac{d\varphi}{dz} = \dfrac{d^2\Pi_2}{dz^2} \end{cases}$$

$$4\pi f = \frac{d^2\Pi}{dxdz} = -K\frac{dF}{dt} - K\frac{d\varphi}{dx}$$

$$= -K\frac{dF}{dt} + \frac{d^2\Pi_2}{dxdz},$$

ce qui donne

$$-K\frac{dF}{dt} = \frac{d^2\Pi_1}{dxdz}$$

Et de même :

$$\frac{d^2\Pi}{dz^2} + Kp^2\Pi = - K\frac{dH}{dt} + \frac{d^2\Pi_2}{dz^2};$$

d'où :

$$- K\frac{dH}{dt} = \frac{d^2\Pi_1}{dz^2} + Kp^2\Pi_1 + Kp^2\Pi_2$$

Je vais montrer que ces formules concordent bien avec les formules (12), (13) et (14).

$$(16)\left\{\begin{aligned} &-K\frac{dF}{dt} = -KP\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right) = Kp^2P(f) \\ &-K\frac{dH}{dt} = -KP\left(\frac{d^2h}{dt^2}\right) - K\frac{l\dfrac{d^2E}{dt^2}}{r} = -Kp^2P(h) + Kp^2\Pi_2, \end{aligned}\right.$$

car

$$\frac{l\dfrac{d^2E}{dt^2}}{r} = -\frac{p^2lE}{r} = -\frac{p^2\mu\sin pt}{r} = -p^2\Pi_2$$

On doit avoir :

$$(17)\qquad\left\{\begin{aligned} &Kp^2P(f) = \frac{d^2\Pi_1}{dxdz} \\ &Kp^2P(h) = \frac{d^2\Pi_1}{dz^2} + Kp^2\Pi_1 \end{aligned}\right.$$

En effet :

$$\Delta\Pi_2 = 0$$

$$\Delta\Pi_1 = \Delta\Pi = K\frac{d^2\Pi}{dt^2} = - Kp^2\Pi$$

$$\Delta\frac{d^2\Pi_1}{dxdz} = - Kp^2\frac{d^2\Pi}{dxdz} = - Kp^2.4\pi f.$$

$$\Delta\frac{d^2\Pi_1}{dz^2} = - Kp^2\frac{d^2\Pi}{dz^2}.$$

et

$$\Delta \left(\frac{d^2\Pi_1}{dz^2} + Kp^2\Pi_1\right) = - Kp^2 \left(\frac{d^2\Pi}{dz^2} + Kp^2\Pi\right)$$
$$= - Kp^2 . 4\pi h$$

Or l'équation de Poisson nous apprend que ;

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} P(\Delta\psi),$$

quand ψ et ses dérivées sont finies dans tout l'espace. Donc :

$$\frac{d^2\Pi_1}{dxdz} = -\frac{1}{4\pi} P \left(\Delta \frac{d^2\Pi_1}{dxdz}\right) = -\frac{1}{4\pi} P (- p^2K . 4\pi f)$$
$$= Kp^2P (f).$$

et de même :

$$\frac{d^2\Pi_1}{dz^2} + Kp^2\Pi_1 = -\frac{1}{4\pi} P (- p^2K . 4\pi h) = Kp^2P (h)$$

ce qui était à vérifier.

Dès lors, la comparaison des équations (15), (16) et (17) donne immédiatement :

$$- K \frac{dF}{dt} - K \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2\Pi_2}{dxdz} + \frac{d^2\Pi_1}{dxdz} = \frac{d^2\Pi}{dxdz} = 4\pi f,$$

et deux équations analogues pour g et h.

Le résultat de Hertz est donc pleinement justifié car la fonction Π définie par l'équation (14) satisfait bien à toutes les conditions du problème.

RADIATION DE L'ÉNERGIE

90. L'énergie électromagnétique dont l'excitateur est la source se dissipe en vibrations, de même que l'énergie d'une source lumineuse. Il importe de se rendre compte de cette dissipation d'énergie.

On a :

$$\mathrm{T} + \mathrm{U} = \int \left(\frac{\Sigma \alpha^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{\mathrm{K}} \sum f^2 \right) d\tau$$

Reportons-nous aux équations (3) et (4) du chapitre VI (p. 115, § 50), et considérons le vecteur dont les composantes A, B, C sont définies par les équations :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{KA} &= \beta h - \gamma g \\ \mathrm{KB} &= \gamma f - \alpha h \\ \mathrm{KC} &= \alpha g - \beta f \end{aligned} \right.$$

J'appellerai ce vecteur le vecteur radiant : il est le *produit géométrique* de la force magnétique et du déplacement électrique (au facteur K près) : il est perpendiculaire aux deux systèmes de lignes de force, électrique et magnétique.

On vérifie sans peine l'identité :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{\mathrm{K}} (f^2 + g^2 + h^2) \right] = \frac{d\mathrm{A}}{dx} + \frac{d\mathrm{B}}{dy} + \frac{d\mathrm{C}}{dz}$$

d'où l'on conclut :

$$\frac{d(\mathrm{T} + \mathrm{U})}{dt} = \int \left(\frac{d\mathrm{A}}{dx} + \frac{d\mathrm{B}}{dy} + \frac{d\mathrm{C}}{dz} \right) d\tau$$

Considérons la quantité d'énergie contenue dans une surface fermée : l'intégrale de volume peut se transformer en une intégrale étendue à l'aire de la surface fermée.

$$\frac{d(\mathrm{T}+\mathrm{U})}{dt}=\int(l\mathrm{A}+m\mathrm{B}+n\mathrm{C})\,d\omega=\int \mathrm{A}_n d\omega$$

A_n étant la composante normale à la surface, du vecteur radiant : tout se passe donc comme si dans le temps dt une quantité d'énergie $dt\int \mathrm{A}_n d\omega$ s'échappait, *rayonnait* au travers de la surface $\int d\omega$.

On peut remarquer que l'énergie rayonnée à travers une surface conductrice est nulle, puisque le vecteur radiant est partout tangent à la surface, comme perpendiculaire aux lignes de force électrique, qui sont normales.

91. En revenant à la fonction Π précédemment étudiée, cherchons la quantité d'énergie rayonnée à travers une sphère de très grand rayon.

Le parallélogramme construit sur les deux vecteurs : force magnétique et déplacement électrique, est un rectangle, car les lignes de force magnétique sont des parallèles et les lignes de force électrique sont dans des plans méridiens. Prenons une sphère de très grand rayon, la force magnétique en un point de la surface est toujours tangente · la force électrique qui n'est pas tangente en général, fait avec le plan tangent un angle d'autant plus petit que le rayon est plus grand, et pour un rayon très-grand elle peut être considérée comme tangente à la sphère : le vecteur radiant est donc normal. Sa direction étant connue, calculons sa grandeur.

Les composantes de la force magnétique sont $-\frac{d\Pi}{dy}$ et $\frac{d\Pi}{dx}$; dans le calcul de Π s'introduiront des termes en $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r^3}$; nous négligerons les termes contenant les puissances de $\frac{1}{r}$ supérieures à la première, et nous aurons comme valeur approchée de la force magnétique :

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r} p^2 \sqrt{K}.\Pi$$

Le déplacement électrique est égal à la force magnétique $\times \frac{K}{4\pi}$, dans le cas d'une onde plane. Cette relation, qui n'est plus rigoureuse ici, est encore exacte au degré d'approximation du calcul : car pour un point très éloigné, le déplacement est sensiblement dans le plan de l'onde. et l'onde est assimilable à une onde plane.

Le vecteur radiant étant le produit des deux autres vecteurs, divisé par K, a pour expression

$$\frac{K}{4\pi} \frac{x^2+y^2}{r^2} p^4 \Pi^2$$

Hertz a calculé l'intégrale obtenue en multipliant par $d\omega$, et intégrant sur la surface de la sphère ; il a trouvé :

$$\frac{2\pi}{3} E^2 l^2 \left(p\sqrt{K}\right)^3$$

pour la valeur électrostatique de l'énergie rayonnée pendant une demi-oscillation.

92. Réduisons en nombres : le rayon des sphères est 15, la longueur $l = 100$; la charge maximum atteinte par chacune des deux parties de l'excitateur était 60 unités, ce qui donne pour le potentiel maximun E_0, $E_0 = 60 \times 15 = 900$. On avait, d'après ces données, environ 2,400 unités C. G. S. d'énergie rayonnée par demi-oscillation [1].

L'énergie initiale, avant toute vibration, était.

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \times 900 \times 60 = 54000 \text{ unités.}$$

Cela montre avec quelle rapidité les vibrations diminuent ; une partie de l'énergie est transformée en chaleur dans la résistance du fil de l'excitateur ; il y aurait environ 100 unités dépensées par ohm : pour une résistance qui a sensiblement 3 ohms, il y aura 300 unités ; en tout 2,700 unités d'énergie perdues dans une demi-oscillation, c'est-à-dire $\frac{1}{20}$ de l'énergie potentielle initiale. On aurait une dizaine d'oscillations sensibles, à peine. Le décrément logarithmique est pourtant beaucoup plus faible que dans le cas de l'excitateur sphérique, ce qui ne doit pas nous surprendre, car nous avions en facteur p^2 dans le décrément relatif à l'excitateur sphérique, et la quantité d'énergie perdue par demi-oscillation est d'autant plus grande que la période est plus courte.

Mais il y a plus, je viens de donner les chiffres de Hertz ; il les a obtenus, en partant de la $\frac{1}{2}$ longueur d'onde $4^m,80$ qu'il avait trouvée d'une part par un calcul vicié, comme nous l'avons vu, par une erreur sur la capacité ; d'autre part par des expé-

(1) Hertz. *Wied. Ann.* t. 35, p. 12.

riences directes. Si l'on venait a découvrir que ces expériences sont elles-mêmes sujettes à quelques causes d'erreur et à adopter la longueur d'onde corrigée $4^{m},80 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$, la radiation pendant une demi oscillation serait de $2,400 \times 2\sqrt{2}$ unités et le nombre des oscillations sensibles que Hertz évalue approximativement à 10 ne serait plus que de $\frac{10}{2\sqrt{2}} = 3$ environ ; dans ces conditions d'ailleurs, le décrément logarithmique ne pouvant plus être regardé comme petit, il conviendrait de reprendre tout le calcul.

PROPAGATION D'UNE PERTURBATION ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS UN FIL MÉTALLIQUE RECTILIGNE

93. Les lacunes sont nombreuses et considérables dans l'œuvre de Hertz, et l'on est loin encore de la netteté qu'on désirerait y trouver. Un des points qui restent le plus obscurs est la question de la propagation des ondes dans un fil métallique; je vais exposer les expériences sans chercher à accumuler les conjectures, et à dissimuler mon embarras.

Prenons le fil métallique pour axe des x. La perturbation n'est pas localisée dans le fil; il y a dans le diélectrique des courants de déplacement qui doivent se propager avec la même vitesse que la perturbation produite au sein même du fil. Le champ étant de révolution, sa connaissance se ramène à la détermination d'une fonction Π satisfaisant à l'équation

$$\Delta\Pi = K \frac{d^2\Pi}{dt^2}$$

La perturbation étant supposée périodique et propagée avec une vitesse constante, Π est proportionnel à $\cos(mz - pt)$; comme Π n'est fonction que de z, t, et $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, il est nécessairement de la forme

$$\Pi = \psi(\rho) \cos(mz - pt) \tag{1}$$

On a :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\Pi}{dt^2} &= -p^2\Pi \\ \frac{d^2\Pi}{dz^2} &= -m^2\Pi \end{aligned} \right. \tag{2}$$

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} + \frac{d^2\Pi}{dy^2} = \frac{d^2\Pi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\Pi}{d\rho} = (m^2 - Kp^2)\,\Pi$$

par suite, le facteur qui multiplie $\psi(\rho)$ étant indépendant de ρ :

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\psi}{d\rho} = (m^2 - Kp^2)\,\psi \tag{3}$$

Nous avons de plus, pour déterminer ψ, la condition que ψ s'annule pour $\rho = \infty$. Cette fonction se rattache aux fonctions de Bessel.

94. Soit le long de OZ une masse attirante telle que la quantité de matière comprise entre z' et $z' + dz'$ soit $\cos nz'.dz'$. Le potentiel sera

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos nz'dz'}{r}$$

où

$$r^2 = x^2 + y^2 + (z - z')^2 = \rho^2 + (z - z')^2$$

Je pose

$$z' = z + \zeta$$
$$r^2 = \rho^2 + \zeta^2$$

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(nz + n\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}}$$

$$= \cos nz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n\zeta d\xi}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}} - \sin nz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin n\zeta d\zeta}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}$$

La seconde intégrale est nulle, car r ne change pas par le changement de ζ en $-\zeta$; $\sin n\zeta$ changeant de signe, les éléments se détruisent deux à deux.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n\zeta d\zeta}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}} = 0(\rho)$$

est fonction seulement de ρ.

V étant un potentiel,

$$\Delta V = \frac{d^2V}{z\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dV}{d\rho} - n^2V = 0$$

θ ne différant de V que par un facteur indépendant de ρ, on a de même :

$$\frac{d^2\theta}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\theta}{d\rho} - n^2\theta = 0$$

Cette équation est identique à celle qui donne ψ, si l'on fait

$$n^2 = m^2 - Kp^2.$$

On a donc intégré l'équation (3), on doit prendre pour ψ l'intégrale qui s'annule à l'infini : θ satisfait à cette condition, donc $\psi = \theta$,

$$\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n\zeta d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}}, \qquad \text{où} \qquad n = \sqrt{m^2 - Kp^2}.$$

Il est à remarquer que ψ, par suite Π, ne s'annule pas pour de petites valeurs de ρ : en fait, il ne s'annule pour aucune valeur finie, mais ce qui importe c'est qu'il n'est pas nul pour ρ très petit. θ est en effet très grand ; le point attiré étant très-voisin de la matière attirante, le potentiel est très grand, il est de l'ordre de grandeur de $2\delta \log r$, δ étant la densité dans le voisinage et r la plus courte distance à la ligne attirante.

95. Nous déterminerons la vitesse de propagation par la condition que les lignes de force électrique aboutissent normalement à la surface du fil conducteur. Il faut donc qu'à la surface $h = o$.

Or :

$$4\pi h = \frac{d^2\Pi}{dz^2} + Kp^2\Pi = (Kp^2 - m^2)\,\Pi$$

Π ne pouvant être nul à la surface, il faut nécessairement que :

$$Kp^2 - m^2 = o$$

$$\frac{p}{m} = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

La vitesse de propagation dans le fil est égale à la vitesse de la lumière et à la vitesse de propagation des ondes dans l'air. Un corollaire immédiat est que h est constamment nul; les lignes de force électrique sont dans des plans perpendiculaires au fil.

La valeur de ψ dans ce cas est donnée par :

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\psi}{d\rho} = 0$$

d'où

$$\psi = \log \rho$$

Malheureusement les expériences faites sur cette question semblent donner des résultats contradictoires. Hertz a mesuré la vitesse de propagation dans un fil en faisant interférer l'onde directe avec l'onde réfléchie à l'extrémité du fil : alors que dans l'air, on aurait dans ces circonstances entre deux nœuds consécutifs une distance de 4^m50, on trouve ici 2^m80; le rapport $\frac{45}{28}$ est celui qui d'après les expériences de Hertz mesure le rapport de la vitesse de propagation dans l'air à la vitesse de propagation dans un fil métallique conducteur.

96. On ne peut pas expliquer cette divergence par l'existence de plusieurs harmoniques, et en disant que l'on a mesuré dans un des deux cas la longueur d'onde correspondante à un son plus haut que le fondamental. L'explication est insuffisante, car Hertz a obtenu simultanément ces deux vibrations, l'une dans l'air, l'autre dans le conducteur, et ces deux vibrations devaient être de même période *puisqu'il les a fait interférer*. La résistance du conducteur est sans effet, puisque Hertz a pris soin de montrer que la longueur d'onde

(1) *Wied Ann.* t. XXXIV, p. 556 et XXXVI, p. 17.

reste la même quand on change le diamètre et la nature du fil.

Faut-il donc admettre que la vitesse de propagation peut être différente dans le fil et dans l'air? On est tenté de le croire, si l'on observe qu'en faisant subir à la vitesse de propagation dans le fil la correction signalée plus haut, relative au calcul de la période (§ 70, p. 151 et § 75, p. 163), on trouve par cette vitesse le nombre $200.000 \times \sqrt{2} = 282.000$, nombre aussi voisin de la vitesse de la lumière que celui qu'ont donné les premières déterminations du rapport des unités. Or les vitesses dans le fil conducteur et dans l'air sont bien les mêmes, et leur valeur commune est bien celle de la vitesse de la lumière, quand on adopte la théorie de Maxwell, mais il n'en est pas ainsi dans toutes les théories. Les théories de Weber, de Neumann, et autres analogues, dans lesquelles $\lambda = K_0$, sont définitivement condamnées par les expériences de Hertz, qui établissent d'une façon indiscutable que les ondes électromagnétiques se propagent avec une vitesse finie, tandis que ces théories donnent pour la vitesse de propagation dans les diélectriques une valeur infinie. Ne devra-t-on pas recouvrir par conséquent à des théories intermédiaires, attribuant à la vitesse dans les diélectriques une valeur finie plus grande que celle de la lumière, et donnant une valeur voisine de la vitesse de la lumière à la vitesse dans les fils conducteurs? Il semble qu'on est en effet réduit à se tourner du côté de ces théories électrodynamiques nouvelles.

Cette nécessité serait cruelle, ce serait en effet renoncer à toute théorie électromagnétique de la lumière; mais en y regardant de près, nous verrons que ces électrodynamiques nouvelles rendent encore moins compte des faits que celles de Maxwell. Observons pour le moment qu'il y a encore, dans cette question de la propagation dans un fil, bien des circonstances inconnues. Un savant viennois, M. Lecher, (1) a récemment obtenu, par une méthode nouvelle, une vitesse de propagation égale à celle de la lumière : il prend deux fils rectilignes parallèles, aux extrémités desquels sont deux récipients contenant des gaz raréfiés qui s'illuminent par la décharge ; en réunissant les deux fils par un pont mobile, et en faisant glisser ce pont, on constate des variations dans l'illumination des gaz raréfiés ; ces variations se reproduisent périodiquement quand le pont glisse d'un mouvement continu le long des fils rectilignes : de là une méthode pour mesurer la longueur d'onde. Ayant trouvé ainsi pour la vitesse de propagation dans un conducteur un nombre voisin de la vitesse de la lumière M. Lecher se croit en désaccord avec M. Hertz. Ainsi que nous venons de le voir ce désaccord n'est qu'apparent et disparaît dès qu'on corrige l'erreur de Hertz sur la capacité. Mais voilà que, d'autre part, Hertz a pu réduire la longueur d'onde à 30 centimètres en enroulant le fil en spirale. MM. Sarrazin et de la Rive ont obtenu d'autres longueurs d'onde avec des résonateurs différents : peut-être y a-t-il une série continue d'harmoniques formant comme un spectre. Ce qu'il y a de plus naturel, dans l'état actuel de la question, c'est de conserver la théorie de Maxwell, et de faire porter nos doutes sur la légitimité de l'application des conditions aux limites à la surface des conducteurs. On devrait alors cesser d'admettre que les lignes de force électrique sont normales aux conducteurs.

(1) *Sitzungsberichte der K. Acad. d. Wissenschaften in Wien.* Bd XCIX, Abth. II, April 1890. Voy. aussi *Wied. Ann.* t. XLI, p. 850 : *la Lumière électrique.* t. XXXIX, p. 89.

CHAPITRE X

LE RÉSONATEUR DE HERTZ

97. L'appareil à l'aide duquel Hertz explore le champ est un circuit métallique, en général circulaire, présentant en un point un interrupteur à étincelles. Comment se comporte-t-il dans un champ variable ?

Pour un point intérieur, on a $f = 0$;

$$\frac{dF}{dt} + \frac{d\varphi}{dx} = 0 \tag{1}$$

Prenons pour origine le point considéré et pour axe des x la tangente au fil en ce point : $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{ds}$, s étant la longueur de l'axe du fil, comptée par exemple, à partir de l'interruption.

Dans l'expression de F, il faut distinguer plusieurs termes ; l'un dû aux courants existant dans le champ, avant l'introduction du résonateur par le fait de l'excitateur primaire, soit F′ ; un autre dû aux courants secondaires produits par l'action perturbatrice du résonateur, dont la présence déforme les lignes de force voisines, soit F''; un autre enfin, dû aux courants de conduction développés dans le résonateur même, soit F'''. De ces trois termes, le second F'' est absolument négligeable.

Le potentiel φ se composera de deux termes : φ' dû à l'action propre de l'excitateur, φ'' dû à l'électricité répandue sur la surface du résonateur.

L'équation (1) devient :

$$\frac{dF'''}{dt} + \frac{d\varphi''}{dx} = -\frac{dF'}{dt} - \frac{d\varphi'}{dx} \tag{2}$$

Appelons X le second membre : c'est la force électrique due à l'excitateur, et existant dans le champ avant l'introduction du résonateur.

Négligeons la capacité des bornes de l'interrupteur. Si ρds est la quantité d'électricité répandue sur l'élément de longueur ds du fil, et si r est son rayon, supposé très petit, le potentiel φ'' en un point de son axe est sensiblement $\frac{2\rho}{K}\log r$; la valeur de F''', qui est le potentiel d'une matière attirante de densité u, est de même $2i \log r$ (1), en appelant i l'intensité

(1) En effet le diamètre du fil étant fort petit par rapport à sa longueur, la portion de ce fil voisine du point considéré peut être assimilée à un cylindre très délié. Les formules précédentes, ne sont pas homogènes car r qui entre sous le signe log est une longueur et non un nombre. Un calcul plus précis donnerait la formule suivante qui est homogène :

$$2i \log \frac{r}{L} + \text{des termes qui s'annulent avec } r.$$

L étant une longueur constante très grande par rapport à r. En négligeant les termes qui s'annulent avec r il reste

$$2i (\log r - \log L)$$

ou puisque log L est négligeable devant $\log r$:

$$2i \log r.$$

du courant. En effet le fil peut être assimilé à un cylindre très délié de sorte que le potentiel en un point extérieur est le même que si toute la masse attirante était concentrée sur l'axe de ce cylindre. Par suite ce potentiel a pour expression :

$$2 \log r \int u d\omega$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la section du fil. Mais au point considéré, la tangente ayant été momentanément prise pour axe des x, on a $v = w = 0$ d'où :

$$i = \int u d\omega.$$

De même en ce point on a $G''' = H''' = 0$, de sorte que si l'on convient d'appeler E le potentiel vecteur dont les composantes sont F''', G''' et H''', on aura :

$$E = F''' \text{ et } \frac{dE}{ds} = \frac{dF'''}{dx}$$

Et l'équation de continuité, qui se réduit ici à :

$$\frac{di}{ds} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

donne entre E et φ'' la relation :

$$\frac{dE}{ds} + K \frac{d\varphi''}{dt} = 0 \tag{3}$$

L'équation (2) peut s'écrire :

$$\frac{dE}{dt} + \frac{d\varphi''}{ds} = X$$

car

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi''}{dx}.$$

Éliminons E, en différentiant (2) par rapport à t, (3) par rapport à s, et retranchan cette équation (3) multipliée par $\frac{1}{K}$.

$$\frac{d^2E}{dt^2} - \frac{1}{K}\frac{d^2E}{ds^2} = \frac{dX}{dt}$$

Mais E est égal à i, au facteur contant près $2\log r$; d'où, en posant

$$2\log r = C$$

$$(4) \qquad \frac{d^2i}{ds^2} - K\frac{d^2i}{dt^2} = -\frac{K}{C}\frac{dX}{dt}$$

98. Supposons que X varie suivant une fonction sinusoïdale du temps : X est une fonction de l'arc s, comptée sur le fil du résonateur à partir de l'interrupteur, et peut être représentée par :

$$X = \cos pt \times \frac{C}{pK}\varphi(s)$$

Alors

$$-\frac{K}{C}\frac{dX}{dt} = \sin pt . \varphi(s)$$

$\varphi(s)$ est évidemment une fonction périodique de s, admettant pour période la longueur totale S du résonateur ; $\varphi(s)$ pourra donc se développer en série de Fourier :

$$\varphi(s) = A + B\cos ms + C\sin ms + \ldots..$$

en posant $m = \frac{2\pi}{S}$. Je ne conserve que ces trois termes : on n'aura évidemment qu'un résultat approché, mais nous n'en sommes pas à cela près.

Donc :

$$\frac{d^2i}{ds^2} - K \frac{d^2i}{dt^2} = \sin pt\,(A + B \cos ms + C \sin ms)$$

Intégrons :

$$(5) \qquad i = \sin pt \left(\frac{A}{-Kp^2} + \frac{B \cos ms + C \sin ms}{m^2 - Kp^2}\right)$$

sera la solution correspondante au régime permanent.

99. Discutons ce résultat ; faisons $s = o$, c'est-à-dire plaçons-nous à l'interrupteur ; le courant en ce point P est mesuré par l'étincelle ; il est donné par :

$$(6) \qquad i = \sin pt \left(\frac{A}{-Kp^2} + \frac{B}{m^2 - Kp^2}\right)$$

la longueur maximum d'étincelle est proportionnelle à la quantité entre parenthèses : or considérons le point P′ diamétralement opposé à P ; en ce point $\sin ms = o$, $\cos ms = -1$,

$$\varphi(s) = A - B.$$

La force électromotrice en P′ est donc proportionnelle à $A - B$. Si l'on supposait que $-Kp^2$ et $m^2 - Kp^2$ fussent égaux et de signes contraires, la parenthèse serait proportionnelle à $A - B$ et la longueur de l'étincelle mesurerait bien la force électrique au point P' diamétralement opposé. En fait, il n'y a aucune raison pour que les dénominateurs soient égaux, mais ils sont de signes contraires dans les expériences de Hertz, la parenthèse de l'équation (6) est donc proportionnelle à $A - B \times$ un certain coefficient.

Je ne trouve pas ici d'expression assez vague pour exprimer ma pensée; je pourrais dire que l'étincelle *a une tendance* à varier comme $A - B$. Hertz semble en effet se contenter de dire : plus l'étincelle sera forte en P, plus sera grande la force électrique en P' (1).

Mais si les deux dénominateurs de la parenthèse (6) étaient de même signe, on aurait au contraire $A + B \times$ un coefficient, et l'étincelle tendrait à varier comme $A + B$, c'est-à-dire comme la force électrique au point P.

100. Outre cette absence de rigueur, il y a un reproche qu'on pourrait adresser à cette théorie : elle repose sur l'équation $F = \int \frac{u d\tau}{r}$ et suppose par conséquent que, dans le cas d'oscillations très rapides, la force électrique aboutit normalement aux conducteurs; et nous avons vu combien cette hypothèse est sujette à caution.

En y regardant d'un peu près, on voit que la théorie du résonateur ne serait pas changée, si l'on abandonnait cette hypothèse ; on aurait toujours au premier membre de l'équation (5) une expression linéaire aux dérivées partielles de i

(1) *Wied. Ann.*, t. XXXIV, p. 163. — Pour certaines positions particulières du résonateur l'on peut déduire, et Hertz déduit, en effet, des conséquences plus rigoureuses de l'étude de l'étincelle, mais dans le cas général son raisonnement revient bien à celui-là.

par rapport à s et à t; et la forme de l'intégrale ne serait pas changée : seulement on aurait aux dénominateurs de la parenthèse de l'équation (6) des polynômes en m et en p, plus compliqués, ce qui n'empêcherait pas de répéter, sans y rien changer, la discussion grossière qui a été faite précédemment.

101. Hertz se borne en somme à une comparaison pour caractériser le rôle de son résonateur : il le compare à une corde vibrante qui serait fixée à ses deux extrémités, — ces extrémités correspondant aux deux bornes de l'interrupteur, — et qui oscillerait sous l'influence de forces périodiques. Cette comparaison est fort juste : elle traduit l'analyse précédente en langage ordinaire ; où il a tort, c'est quand il croit que les oscillations de la corde ont toujours lieu dans le même sens que la force qui les détermine : elles peuvent parfaitement être en sens contraire. Considérons un pendule, soumis à une force proportionnelle à $\sin pt$; soit θ l'angle, toujours très petit, du pendule avec sa position d'équilibre.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + m^2\theta = \mathrm{A}\sin pt$$

m dépend uniquement de la période du pendule oscillant seul.

L'intégrale, pour le régime établi, est :

$$\frac{\mathrm{A}\sin pt}{m^2 - p^2}$$

pour avoir l'intégrale générale, il suffirait d'ajouter

$$+ \mathrm{C}\cos mt + \mathrm{C'}\sin mt.$$

θ est-il toujours de même signe que $\sin pt$? Cela revient à demander si $\frac{A}{m^2 - p^2}$ est toujours de même signe que A. Si $m < p$, le déplacement et la force sont en sens contraires ; de même, dans le résonateur, tout dépend du signe de $m^2 - Kp^2$.

CHAPITRE XI

RÉFLEXION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

102. L'application de la théorie de Maxwell aux expériences de Hertz soulève des difficultés. Les théories intermédiaires entre l'ancienne électrodynamique et celle de Maxwell, et qui consistent à donner à λ une valeur comprise entre o et l'inverse du carré de la vitesse de la lumière, ne rendent pas mieux compte des faits.

Dans un conducteur parfait — ou, ce qui revient au même, dans un conducteur ordinaire, si l'on suppose les oscillations extrêmement rapides — la force magnétique et le courant sont nuls à l'intérieur : il n'y a de courant qu'à la surface. La première de ces propositions — force magnétique nulle à l'intérieur — s'accorde avec toutes les théories ; il n'en est pas de même de la seconde ; on a en général :

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} + \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

à l'intérieur du conducteur considéré, $\alpha = \beta = \gamma = o$, il reste

$$4\pi u = \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

pour Maxwell, $\lambda = 0$, d'où $u = 0$; mais si λ n'est pas nul, u ne l'est pas non plus en général.

Or l'un des faits expérimentaux les mieux prouvés est l'imperméabilité des conducteurs aux radiations électriques. Hertz l'a mis en évidence en faisant réfléchir les ondes électromagnétiques contre la surface d'une plaque métallique.

103. Considérons une plaque métallique, comprise entre les plans $x = 0$ et $x = h$. Imaginons une perturbation électromagnétique qui y arrive, se propageant en onde plane transversale : va-t-elle passer ?

Deux cas sont à distinguer :

1° La vibration électrique est perpendiculaire au plan d'incidence, la force magnétique dans le plan d'incidence. Toutes les théories s'accordent à montrer que la vibration ne passera pas et que le potentiel électrostatique φ sera nul au-delà du plan $x = 0$;

2° La force magnétique est perpendiculaire au plan d'incidence, le déplacement électrique lui est parallèle. C'est ce cas qui constitue l'*experimentum crucis*.

Prenons pour plan $z = 0$ le plan d'incidence

$$H = h = w = 0,$$

car le déplacement électrique, le courant et le potentiel vecteur sont dans le plan d'incidence ; F, G, f, g, u, v, sont différents de 0 en général ; $\alpha = \beta = 0$, car la force magnétique est normale au plan d'incidence ; $\gamma = 0$. La théorie présente les plus grandes analogies avec la théorie optique de la réflexion et de la réfraction [1].

Je me servirai encore d'exponentielles imaginaires dont les parties réelles représenteront les quantités physiques qui interviennent. Je vais supposer toutes les fonctions à considérer, proportionnelles à une fonction de x, multipliée par $e^{i(by-pt)}$. Si je prends par exemple F, j'ai :

$$\frac{dF}{dz} = 0, \frac{dF}{dt} = - ipF, \frac{dF}{dy} = ibF$$

La fonction d'x est elle-même une somme d'exponentielles réelles ou imaginaires : on aura deux sortes de termes ; les uns de la forme :

$$e^{i(ax+by-pt)} \tag{1}$$

les autres de la forme :

$$e^{ax+i(by-pt)} \tag{2}$$

les premiers correspondant à une onde plane telle que l'équation du plan de l'onde soit $ax + by =$ constante, et se propageant avec une vitesse $\frac{p}{\sqrt{a^2+b^2}}$, vers la droite si $a > 0$, vers la gauche si $a < 0$; les seconds termes correspondant à un plan d'onde imaginaire, c'est-à-dire à un rayon évanescent.

104. Notre plaque conductrice arrêtant tout rayon électrique, quelle que soit sa conductibilité, on peut supposer cette

[1] *Théorie mathématique de la lumière*, § 208, p. 336.

conductibilité infinie : l'écran serait d'ailleurs d'autant plus imperméable que la conductibilité serait plus grande.

Avec cette hypothèse, nous trouvons, en éliminant tout, sauf γ :

$$\Delta\gamma = (K - \lambda)\frac{d^2\gamma}{dt^2} \tag{3}$$ [1]

Il faudrait en réalité $\mu\,(K - \lambda)$; mais nous avons vu qu'on peut supposer, dans le cas d'oscillations très rapides, $\mu = 1$ pour tous les corps.

Pour le potentiel électrostatique φ, on aurait :

$$\Delta\varphi = \frac{k\lambda\,(K - \lambda)}{K}\frac{d^2\varphi}{dt^2}; \tag{4}$$

en fait, c'est seulement la dérivée par rapport au temps de la différence des deux membres de l'équation (4) qui est nulle : mais une fonction quelconque est égale au facteur près, $-ip$, à sa dérivée par rapport au temps; la fonction est donc nulle elle-même, et l'on a bien l'équation (4).

105. Or :

$$4\pi u = 4\pi\frac{df}{dt} = \frac{d\gamma}{dy} + \lambda\frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

$$4\pi g = 4\pi\frac{dg}{dt} = -\frac{d\gamma}{dx} + \lambda\frac{d^2\varphi}{dydt}$$

et dans le diélectrique, on a :

$$\frac{4\pi f}{K - \lambda} = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\varphi}{dx}$$

(1) Voir p. 110, § 46.

d'où :

$$\frac{d^2F}{dt^2} = -\frac{4\pi \frac{df}{dt}}{K-\lambda} - \frac{d^2\varphi}{dxdt}.$$

$$= -\frac{1}{K-\lambda}\frac{d\gamma}{dy} - \left(\frac{\lambda}{K-\lambda} + 1\right)\frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

$$(5) \qquad \frac{d^2F}{dt^2} = -\frac{1}{K-\lambda}\frac{d\gamma}{dy} - \frac{K}{K-\lambda}\frac{d^2\varphi}{dxdt}.$$

De même :

$$(6) \qquad \frac{d^2G}{dt^2} = \frac{1}{K-\lambda}\frac{d\gamma}{dx} - \frac{K}{K-\lambda}\frac{d^2\varphi}{dydt}$$

Que deviennent ces équations dans le conducteur? On a, pour un point intérieur :

$$\frac{dF}{dt} + \frac{d\varphi}{dx} = 0\,;$$

tout se passe donc comme si K était infini et les équations (5) et (6) deviennent :

$$\frac{d^2F}{dt^2} = -\frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

$$\frac{d^2G}{dt^2} = -\frac{d^2\varphi}{dydt}$$

106. Cherchons les valeurs de φ et de γ dans les trois régions.

L'équation (3) exprime que la force magnétique se propage avec la vitesse des vibrations dites transversales; l'équation (4), que le potentiel électrostatique se propage avec la vitesse des vibrations longitudinales.

Remplaçons $\frac{d^2\gamma}{dy^2}$ et $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$, ainsi que $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ et $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ par leurs valeurs en fonction de γ et de φ, il vient :

$$(7) \qquad \frac{d^2\gamma}{dx^2} + [b^2 - p^2 (\mathrm{K} - \lambda)] \gamma = 0$$

$$(8) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left[b^2 - p^2 \frac{k\lambda (\mathrm{K} - \lambda)}{\mathrm{K}}\right] \varphi = 0$$

Posons :

$$b^2 - p^2 (\mathrm{K} - \lambda) = a^2$$

Les deux intégrales fondamentales de (7) sont e^{iax} et e^{-iax}.

Pour $x < 0$,

$$\gamma = \mathrm{A}e^{iax} + \mathrm{B}e^{-iax}$$

où A et B sont fonctions seulement de y et de t

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_0 \quad e^{i(by-pt)}$$

A_0 étant une constante.

Pour $0 < x < \varepsilon$, $\gamma = 0$.

De l'autre côté de la plaque, pour $x > \varepsilon$, on aura :

$$\gamma = \mathrm{A}' e^{iax} + \mathrm{B}' e^{-iax},$$

où A′ et B′ sont des fonctions de même forme que A et B, mais ayant des valeurs différentes.

De même pour φ, posons :

$$b^2 - p^2 \frac{k\lambda (\mathrm{K} - \lambda)}{\mathrm{K}} = \pm c^2 \ (^1)$$

(1) Ici nous ne connaissons pas *a priori* le signe du premier membre et nous sommes obligés de mettre $\pm c^2$; précédemment nous avions toujours $b^2 - p^2 (\mathrm{K} - \lambda)$ positif, car l'onde transversale incidente que nous nous donnons a une vitesse toujours réelle.

Si c'est le signe $+$ qui convient, l'intégrale générale de (8) est :

$$\varphi = \mathrm{C}e^{icx} + \mathrm{D}e^{-icx}.$$

Si c'est le signe —, l'intégrale est :

$$\varphi = \mathrm{C}e^{cx} + \mathrm{D}e^{-cx}$$

Dans le conducteur, entre les plans $x = 0$ et $x = \varepsilon$, on a $\mathrm{K} = \infty$, et le coefficient de φ dans l'équation (8) se réduit a :

$$b^2 - p^2 k\lambda = \pm d^2.$$

Et l'intégrale est :

$$\varphi = \mathrm{C}'e^{idx} + \mathrm{D}'e^{-idx}$$

ou

$$\varphi = \mathrm{C}'e^{dx} + \mathrm{D}'e^{-dx}$$

suivant qu'il faut prendre $+ d^2$ ou $- d^2$.

Enfin pour $x > \varepsilon$, de l'autre côté de la plaque, on aura, suivant les cas :

$$\varphi = \mathrm{C}''e^{icx} + \mathrm{D}''e^{-icx}$$

ou :

$$\varphi = \mathrm{C}''e^{cx} + \mathrm{D}''e^{-cx}.$$

107. Les deux termes qui entrent dans l'expression de γ, pour $x < 0$, correspondent : l'un, $\mathrm{A}e^{iax}$, au rayon incident, l'autre, $\mathrm{B}e^{-iax}$, au rayon réfléchi : pour $x > \varepsilon$, on a encore deux termes : l'un $\mathrm{A}'e^{iax}$ correspond au rayon réfracté, l'autre $\mathrm{B}'e^{-iax}$ ne correspond à rien, par suite il doit être nul.

De même pour φ. Le facteur $b^2 - p^2 \dfrac{k\lambda\,(\mathrm{K} - \lambda)}{\mathrm{K}}$ étant supposé d'abord positif, le premier terme Ce^{icx} correspond au rayon incident, le second, De^{-icx} au rayon réfléchi.

Supposons que nous ayons une onde transversale incidente : il n'y a pas d'onde longitudinale incidente, et le terme Ce^{icx} doit être nul ; mais il y aura en général une onde longitudinale réfléchie et une réfractée. Dans le conducteur, on aura les deux termes, car il y aura l'onde réfractée et l'onde réfléchie sur la seconde face. De l'autre côté du conducteur, on aura seulement le terme $C''e^{icx}$ correspondant à l'onde longitudinale réfractée.

Dans le cas où le facteur $b^2 - p^2 \frac{k\lambda(K - \lambda)}{K}$ serait négatif; on aurait, pour $x < 0$ seulement le terme Ce^{cx} (en prenant c positif); car le terme De^{-cx} deviendrait infini pour $x = -\infty$, il doit donc être nul.

Dans la plaque, les deux termes subsisteraient et, à la sortie, on aurait seulement le terme $D''e^{-cx}$ car le terme $C''e^{cx}$ deviendrait infini pour $x = +\infty$.

En résumé deux cas sont à distinguer :

1° $$b^2 - p^2 \frac{k\lambda(K - \lambda)}{K} > 0$$

On a alors :

	Ondes transversales	Ondes longitudinales
A gauche de la plaque	$\gamma = Ae^{iax} + Be^{-iax}$	$\varphi = De^{-icx}$
Dans la plaque	$\gamma = 0$	$\varphi = C'e^{idx} + D'e^{-idx}$
		ou $\varphi = C'e^{dx} + D'e^{-dx}$
A droite de la plaque	$\gamma = A'e^{iax}$	$\varphi = C''e^{icx}$

2° $$b^2 - p^2 \frac{k\lambda(K - \lambda)}{K} < 0.$$

On a alors :

	Ondes transversales	Ondes longitudinales
A gauche de la plaque	$\gamma = \mathrm{A}e^{iax} + \mathrm{B}e^{-iax}$	$\varphi = \mathrm{C}e^{cx}$
Dans la plaque	$\gamma = 0$	$\varphi = \mathrm{C}'e^{dx} + \mathrm{D}'e^{-dx}$
A droite de la plaque	$\gamma = \mathrm{A}'e^{iax}$	$\varphi = \mathrm{D}''e^{-dx}$

On a d'ailleurs à droite de la plaque suivant les cas :

$$4\pi u = ib\mathrm{A}'e^{iax} + \lambda \mathrm{C}''cpe^{icx}$$

ou

$$4\pi u = ib\mathrm{A}'e^{iax} + \lambda.\mathrm{D}''cipe^{-cx}$$

108. Que faut-il pour qu'il n'y ait pas courant au-delà de la plaque ? Il faut que les valeurs obtenues pour u et v soient identiquement nulles. Nous allons montrer que, si l'on ne suppose pas $\lambda = 0$, on n'obtient ce résultat qu'en supposant nulle l'onde incidente.

Pour que le courant soit identiquement nul au-delà de la plaque, il faut que les coefficients A', C'' et D'' soient nuls ; dans la théorie de Maxwell on pourrait laisser C'' et D'' différents de o, car le terme en $\lambda \dfrac{d^2\varphi}{dxdt}$ s'annule sans qu'on ait besoin d'annuler φ. Observons maintenant que F, G et φ doivent être des fonctions continues.

Considérons le plan $x = \varepsilon$; en un point situé à droite, par conséquent au-delà de la plaque, on doit avoir $\mathrm{F} = \mathrm{G} = 0$; comme F et G sont continus, ils sont nuls aussi en un point très voisin du plan, mais situé à gauche.

Si F est nul, $\dfrac{d^2\mathrm{F}}{dt^2} = -ip\mathrm{F}$ est nul, donc $\dfrac{d^2\varphi}{dxdt} = 0$; car à l'intérieur de la plaque on a

$$\frac{dF}{dt} + \frac{d\varphi}{dx} = o$$

d'où

$$\frac{d^2F}{dt^2} + \frac{d^2\varphi}{dxdt} = o$$

et $ip \dfrac{d\varphi}{dx} = o$. $\dfrac{d\varphi}{dx}$ est donc nul dans le conducteur au voisinage de la seconde surface.

On démontrerait de même que $\dfrac{d^2\varphi}{dydt}$ est nul. Donc $pb\varphi = o$, par suite $\varphi = o$. φ et $\dfrac{d\varphi}{dx}$ étant nuls en un point du conducteur et φ étant une somme de deux exponentielles, les deux coefficients sont forcéments nuls. Ainsi φ est nul, comme γ, à l'intérieur du conducteur.

109. Raisonnons de même, en considérant la première surface $x = o$; pour un point infiniment voisin de la surface, mais à l'extérieur du conducteur, F et G sont nuls, puisqu'ils sont continus en traversant la surface : et qu'ils sont nuls dans le conducteur.

$\dfrac{d^2F}{dt^2}$ et $\dfrac{d^2G}{dt^2}$ sont nuls ; et φ doit être nul pour la même raison. On en peut conclure que $\dfrac{d\varphi}{dx} = o$, car $\varphi = Ce^{icx}$ ou Ce^{cx}, et $\dfrac{d\varphi}{dx} = ic\varphi$ ou $c\varphi$ suivant le cas.

$$\frac{d^2\varphi}{dydt} = -\ pb\varphi\ = o$$

$$\frac{d^2\varphi}{dxdt} = -\ ip\,\frac{d\varphi}{dx} = o$$

Nous avons donc :

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d^2G}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dxdt} = \frac{d^2\varphi}{dydt} = 0$$

et si l'on compare avec les équations (5) et (6) il vient $\frac{d\gamma}{dx} = \frac{d\gamma}{dy} = 0$; d'où $\gamma = 0$; et γ étant une somme de deux exponentielles, γ et $\frac{d\gamma}{dx}$ ne peuvent être simultanément nuls qu'autant que les deux coefficients sont nuls. γ est donc identiquement nul. Il faut donc, pour n'avoir aucune onde réfractée passant à travers la plaque, supprimer l'onde incidente. Une onde transversale incidente quelconque passera toujours à travers la plaque à moins que $\lambda = 0$.

110. Ne pourrait-on pas dire toutefois : Mais nous avons à l'intérieur du conducteur

$$\varphi = C'e^{dx} + D'e^{-dx}$$

si d était très grand, C' étant très petit, le terme $D'e^{-dx}$ donnerait un potentiel sensible dans le voisinage de la première surface, mais qui s'éteindrait au voisinage de la seconde. Cette hypothèse est à rejeter; en effet K étant essentiellement positif, ainsi que λ, d est $< b$, et b est comparable à l'inverse de la longueur d'onde : il faudrait, pour que le potentiel fût insensible à la seconde surface, avoir des plaques d'une épaisseur notablement plus grande que la longueur d'onde, et celle-ci est de l'ordre de 10 mètres : or les expériences ont porté sur des plaques de quelques millimètres à peine.

111. Les expériences de Hertz condamnent donc l'électrodynamique ancienne et les théories intermédiaires. Reste la théorie de Maxwell; il est peu probable, quoique le contraire ne soit pas prouvé, qu'elle arrive à rendre compte de tout; il faudra sans doute la modifier; mais on n'aura vraisemblablement qu'à la modifier sans changer le point essentiel, c'est-à-dire qu'on conservera les deux systèmes d'équations :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{4\pi}{K}\left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz}\right)$$

$$4\pi\frac{df}{dt} = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$$

Tout le reste, en effet, ne constitue que des hypothèses secondaires, auxquelles on peut renoncer. L'une de ces hypothèses, nous l'avons déjà dit, est celle qui fait aboutir les lignes de force électrique normalement à la surface des conducteurs. On a en somme une réflexion métallique des ondes électromagnétiques à la surface des conducteurs, et M. Potier a remarqué que la théorie de Maxwell, appliquée à l'optique, ne rend pas bien compte de la réflexion métallique. Depuis longtemps, en tous cas, l'on sait que la théorie de Maxwell n'est qu'une première approximation, bonne tout au plus pour le vide, car elle ne rend pas compte de la dispersion.

112. Comment se fait-il que nous puissions si facilement faire bon marché de l'hypothèse des lignes de force électrique normales aux conducteurs? C'est que nous nous sommes appuyés sur ce qu'on avait

$$F = \int \frac{u' d\tau'}{r}$$

mais cette dernière égalité n'est pas elle-même si évidente.

Posons :

$$F' = \int \frac{u' d\tau'}{r}$$

Nous avons bien

$$\int (F dx + G dy + H dz) = \int (F' dx + G' dy + H' dz)$$

si l'intégrale est étendue à un contour fermé quelconque ; et, dans Helmholtz, l'égalité est établie pour un contour quelconque, même non fermé : alors l'identité $F = F'$, $G = G'$, $H = H'$, en résulte immédiatement. Mais, en partant des hypothèses de Maxwell, nous n'avons le droit d'écrire cette identité que pour une ligne fermée ; et elle prouve seulement que la différence des deux éléments différentiels est une différentielle exacte. On a :

$$F = F' + \frac{d\chi}{dx}$$

$$G = G' + \frac{d\chi}{dy}$$

$$H = H' + \frac{d\chi}{dx}$$

χ étant une fonction arbitraire. Telles sont en effet les formules auxquelles on est conduit quand on ne passe pas par la théorie de Helmholtz. La fonction χ ne jouant aucun rôle dans les phénomènes electrodynamiques ordinaires, Maxwell fait arbitrairement $\chi = 0$; mais, et il le dit expressément, cette hypothèse ne s'impose pas à lui [1].

[1] Voir Chapitre XII, Note 2.

CHAPITRE XII

NOTES ET COMPLÉMENTS

Je crois devoir ajouter aux chapitres précédents, qui contiennent mes leçons du second semestre 1890, quelques notes complémentaires, portant sur des points que je n'ai pu développer dans mon cours faute de temps, ou devenues nécessaires par suite des progrès de la science.

NOTE I

LA THÉORIE DE HELMHOLTZ ET LE PRINCIPE DE NEWTON

Admettant le principe de « l'unité de la force électrique », j'ai montré plus haut que l'action mutuelle de deux solénoïdes fermés variables doit être la même que celle des deux feuillets électriques équivalents, ou bien encore qu'elle doit être la même que l'action d'un des solénoïdes sur le feuillet électrique équivalent à l'autre.

En appliquant le principe de la conservation de l'énergie, j'ai calculé l'action mutuelle de deux solénoïdes fermés variables de même que celle de deux feuillets électriques et j'ai montré ainsi que la théorie de Maxwell est seule compatible avec le postulat de l'unité de la force électrique.

On peut se proposer de calculer par une méthode analogue l'action d'un feuillet électrique sur un solénoïde variable; on ne tarde pas alors à s'apercevoir que le principe de la conservation de l'énergie doit être appliqué avec une grande attention si l'on ne veut pas oublier des termes importants et qu'en particulier il faut tenir compte des actions électrodynamiques des courants de convection.

Mais lors même qu'on prend ces précautions on arrive à des résultats contradictoires suivant qu'on suppose le feuillet fixe et le solénoïde mobile, ou inversement le solénoïde mobile et le feuillet fixe. On est ainsi conduit à conclure que *les hypothèses fondamentales de la théorie de Helmholtz sont incompatibles avec l'égalité de l'action et de la réaction.*

C'est ce qu'il est aisé de vérifier directement.

L'énergie électrodynamique T nous est donnée en effet par l'intégrale suivante, en supposant par exemple $k = 1$ (théorie de Neumann)

$$T = \frac{1}{2} \int \int \frac{uu' + vv' + ww'}{r} d\tau d\tau'$$

l'intégrale double étant étendue à tous les éléments $d\tau$ et $d\tau'$ du volume des corps parcourus par les courants.

Imaginons maintenant que ces corps, au lieu d'être immobiles, soient animés d'un même mouvement de translation dont la vitesse ξ est parallèle à l'axe des x. Nous aurons alors en chaque point, outre le courant de conduction (ou de déplacement), un courant de convection dont les composantes seront :

$$\rho\xi, \; 0, \; 0$$

de sorte que l'expression de T deviendra :

$$\frac{1}{2}\int\int\frac{(u+\rho\xi)(u'+\rho'\xi)+vv'+ww'}{r}\,d\tau d\tau'.$$

Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction exigerait que cette expression fût égale à la somme de deux termes, le premier indépendant de ξ, le second ne dépendant que de ξ ; c'est-à-dire que l'intégrale :

$$\int\int\frac{u\rho'+u'\rho}{r}\,d\tau d\tau'$$

devrait être nulle.

Les fonctions u et ρ étant entièrement arbitraires, il est clair qu'il n'en est pas ainsi en général.

Si k n'est pas égal à 1, il faut ajouter à l'expression de T l'intégrale suivante :

$$\frac{1-k}{2}\int\int r\,\frac{d\rho}{dt}\frac{d\rho'}{dt}\,d\tau d\tau'$$

qui devient si les conducteurs sont mobiles :

$$\frac{1-k}{2}\int\int r\left(\frac{d\rho}{dt}-\frac{d\rho}{dx}\xi\right)\left(\frac{d\rho'}{dt}-\frac{d\rho'}{dx'}\xi\right)d\tau d\tau'.$$

Si donc le principe de Newton était applicable, le coefficient de ξ dans l'expression de T devrait être nul, c'est-à-dire qu'on devrait avoir :

$$\int\int\left[\frac{u\rho'+u'\rho}{r}-\frac{r}{2}(1-k)\left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho'}{dt}+\frac{d\rho}{dr}\frac{d\rho'}{dx'}\right)\right]d\tau d\tau'=0.$$

Il est manifeste que cette condition n'est pas remplie et que *la théorie de Helmholtz ne peut se concilier avec le principe de Newton qu'en subissant des modifications convenables.*

Il est cependant un cas particulier où cette difficulté ne se présenterait pas, c'est précisément celui de la théorie de Maxwell où

$$\rho=\rho'=0.$$

Quand on est arrivé à cette conclusion, on ne peut s'empêcher de faire une remarque. Nous avons dit que la théorie de Weber n'est qu'un cas particulier de celle de Helmholtz et cependant cette théorie ne peut être en désacord avec le principe de Newton, puisqu'elle repose sur cette hypothèse que l'action mutuelle de deux molécules électriques dépend seulement de leur distance et de leur mouvement relatif.

Comment concilier cette apparente contradiction ?

Pour cela je n'ai qu'à rappeler ce fait. Pour faire concorder la théorie de Weber avec celle de Helmholtz nous avons dû faire certaines hypothèses que nous avons exprimées au § 15 par les équations suivantes p. 36 :

$$ev^2+e_1v_1^2=0, \qquad e'v'^2+e_1'v_1'^2=0$$

Ces relations ne peuvent être satisfaites rigoureusement surtout s'il y a des courants de convection, mais ainsi que je l'ai expliqué au § 19 leurs premiers membres sont assez petits pour pouvoir être négligés dans les calculs sans altérer aucune des conséquences vérifiables par l'expérience.

C'est donc dans les termes négligés de la sorte que se trouve la différence entre les théories de Weber et de Helmholtz ; c'est donc à eux qu'on doit attribuer le désaccord entre celle de Helmholtz et le principe de Newton.

Les termes complémentaires qu'il faudrait ajouter aux épuations de Helmholtz pour les rendre compatibles avec le principe de l'égalité de l'action et de la réaction sont donc trop petits pour être décelés par aucune expérience réalisable.

Il est clair qu'on peut les choisir d'une infinité de manières; une de ces manières consiste, comme nous venons de le voir, à restituer dans la théorie de Weber les termes que nous avions d'abord négligés.

La question mérite d'être examinée de plus près.

Reprenons les notations dont nous avons fait usage dans l'étude de la théorie de Weber ; ce sont les mêmes que celles qu'a employées Maxwell dans ce même exposé.

L'expression de T est alors :

$$\sum \frac{ee'}{2c^2 r} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2.$$

Si l'on considère deux éléments de courant mobiles, on a :

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{dr}{dt} + v \frac{dr}{ds} + v' \frac{dr}{ds'}$$

de sorte que le potentiel mutuel T de deux éléments de courant, peut s'écrire :

$$\sum \frac{ee'}{2c^2 r} \left(\frac{dr}{dt} + v \frac{dr}{ds} + v' \frac{dr}{ds'} \right)^2.$$

Si l'on suppose comme nous l'avons fait :

$$e + e_1 = e' + e'_1 = ev^2 + e_1v_1^2 = e'v'^2 + e'_1v'^2_1 = 0$$
$$ev + e_1v_1 = cids \qquad e'v' + e'_1v'_1 = ci'ds'$$

les termes indépendants de v et de v' disparaissent ainsi que les termes en v, v', v^2, v'^2, et il reste :

$$\frac{ii'dsds'}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}$$

ce qui est l'expression de Helmholtz pour $k = -1$.

Considérons maintenant l'action d'une charge électrique mobile envisagée comme un courant de convection sur un élément de courant mobile ds.

Soit v' la vitesse du conducteur mobile qui porte la charge électrique e'. Je désignerai par ds' l'élément d'arc de la trajectoire de cette charge mobile.

La formule :

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{dr}{dt} + v\frac{dr}{ds} + v'\frac{dr}{ds'}$$

est encore applicable, à la condition que $\frac{dr}{dt}$ représente la partie de la variation de r qui est due au déplacement *absolu* du courant mobile et non à son déplacement *relatif* par rapport à la charge mobile, puisque nous avons déjà tenu compte du déplacement de cette charge par le terme $v'\frac{dr}{ds'}$.

On aura encore

$$e + e_1 = ev^2 + e_1v_1^2 = 0 \qquad ev + e_1v_1 = cids$$

mais on n'aura plus

$$e' + e'_1 = e'v'^2 + e'_1 v'^2_1 = 0.$$

Les termes indépendants de v et de v' disparaîtront donc ainsi que les termes en v', en v^2 et en v'^2, mais les termes en v ne disparaîtront plus et l'on aura :

$$T = \frac{e'i}{cr}\frac{dr}{ds}\left(\frac{dr}{dt} + v'\frac{dr}{ds'}\right).$$

La formule de Helmholtz donnerait :

$$T = \frac{e'i}{cr}\frac{dr}{ds}\left(v'\frac{dr}{ds'}\right).$$

A la vérité le terme négligé est très-petit (à cause du dénominateur c), mais dans l'espèce il en est de même du terme conservé, puisque v' est du même ordre de grandeur que $\frac{dr}{dt}$.

Maintenant le principe de Newton exige que T dépende seulement du déplacement *relatif* du conducteur mobile siège du courant, par rapport au conducteur mobile siège de la charge e' ; c'est-à-dire de $\frac{dr}{dt} + v'\frac{dr}{ds'}$. La formule de Helmholtz est donc inconciliable avec ce principe ; la formule de Weber *complète* peut seule s'accorder avec lui.

Ainsi la théorie de Helmholtz que son auteur a établie seulement, comme l'indique le titre de son ouvrage : « pour les conducteurs en repos, » doit subir des modifications importantes quand les conducteurs sont en mouvement.

Revenons maintenant à la question dont j'ai parlé au début de cette note, je veux dire à l'action d'un solénoïde fermé variable sur un feuillet électrique. Si l'on calcule cette action à l'aide de la formule de Weber complète on arrive à un résultat conforme au principe de « l'unité de la force électrique ». Il n'en est plus de même si on applique cette même formule de Weber à l'action mutuelle de deux solénoïdes fermés variables.

Cette action ainsi calculée est nulle comme avec la formule de Helmholtz. La conclusion du chapitre n'est donc pas modifiée et la théorie de Maxwell reste seule compatible avec « l'unité de la force électrique ».

Pour les considérations qui précèdent nous nous sommes placés au point de vue de la théorie de Weber, c'est-à-dire que nous avons supposé $k = -1$. On aurait pu arriver à des résultats analogues avec une valeur quelconque de k.

Helmholtz a fait voir en effet qu'on peut retrouver son expression du potentiel élémentaire (k étant quelconque) en partant d'une formule d'attraction analogue à celle de Weber, mais où entrent non seulement r et ses deux premières dérivées par rapport à t, mais encore la dérivée troisième.

NOTE II

SUR LA DÉMONSTRATION DE CE FAIT QUE LA FORCE ÉLECTRIQUE EST NORMALE AUX CONDUCTEURS

La théorie de Maxwell entraine-t-elle comme conséquence nécessaire que les lignes de force électrique aboutissent normalement à la surface des conducteurs, si ces conducteurs sont parfaits ou si les oscillations sont très rapides? Tout dépend de la façon dont cette théorie est comprise ; au § 112 je me suis placé à un certain point de vue et j'ai montré que cette conséquence ne s'imposait pas. Mais plaçons-nous à un point de vue différent, plus conforme peut-être à la véritable pensée de Maxwell et nous arriverons à un résultat opposé.

Nous supposerons pour simplifier que l'on ait affaire à un système de conducteurs *parfaits* séparés les uns des autres par un diélectrique unique, par exemple par l'air. Nous avons le droit de considérer les conducteurs comme parfaits, puisque nous savons que, dans le cas d'oscillations très rapides, tous les conducteurs se comportent comme s'ils étaient parfaits.

L'énergie électrostatique est égale à :

$$U = \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau$$

et l'énergie électromagnétique à

$$T = \frac{1}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\tau$$

si l'on suppose $\mu = 1$.

La première intégrale doit être étendue au volume du diélectrique et la seconde à l'espace entier.

On a d'autre part :

$$4\pi u = 4\pi \frac{df}{dt} = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$$

$$4\pi v = 4\pi \frac{dg}{dt} = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dy}$$

$$4\pi w = 4\pi \frac{dh}{dt} = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}.$$

Posons :

$$\alpha = \frac{dX}{dt}, \qquad \beta = \frac{dY}{dt}, \qquad \gamma = \frac{dZ}{dt},$$

et supposons qu'à l'origine des temps tout soit au repos et qu'on ait :

$$X = Y = Z = f = g = h = 0$$

il viendra [1] :

$$4\pi f = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}$$

$$4\pi g = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dy}$$

$$4\pi h = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}$$

[1] Cette analyse ne s'applique qu'aux cas où la charge électrostatique totale de tous les conducteurs est nulle.

et :

$$U = \int \frac{2\pi}{K} \sum f^2 d\tau = \int \frac{1}{8\pi K} \sum \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right)^2 d\tau$$

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \sum \alpha^2 d\tau = \frac{1}{8\pi} \int \sum \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 d\tau.$$

Les conducteurs étant parfaits, il n'y a pas de résistance passive ni de production de chaleur et nous pouvons appliquer le *principe de moindre action* de Hamilton sans faire intervenir le travail de ces résistances passives, ce qui compliquerait beaucoup les calculs.

Dans les idées de Maxwell, l'énergie électromagnétique T n'est autre chose que la force vive de l'éther et l'énergie électrostatique U est l'énergie potentielle de l'éther (voir 1er volume, § 152, page 168).

L'action hamiltonnienne est donc représentée par l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$

prise par rapport au temps entre deux limites quelconques.

La variation :

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta U)\, dt$$

doit donc être nulle *pourvu que l'on ait*

$$\delta X = \delta Y = \delta Z = 0$$

pour $t = t_0$ *et pour* $t = t_1$.

On sait en effet que le théorème de Hamilton consiste en ceci que l'action est minimum quand les coordonnées des divers points du système ont des valeurs données pour $t = t_0$ et pour $t = t_0$.

Or dans les idées de Maxwell, les coordonnées des diverses molécules d'éther dépendent de X, Y, Z ; ainsi les valeurs de X, Y, Z pour $t = t_0$ et $t = t_1$ doivent être considérées comme des données de la question et, par conséquent, leurs variations doivent être regardées comme nulles.

On a alors en intégrant par parties

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int \frac{d\tau}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\alpha \delta \frac{dX}{dt}\right) dt$$

$$= \int \frac{d\tau}{4\pi} \left[\sum \alpha \delta X\right]_{t=t_0}^{t=t_1} - \int \frac{d\tau}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{d\alpha}{dt} \delta X\right) dt$$

Comme δX est nul pour $t = t_0$ et $t = t_1$, il reste

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = -\int \frac{d\tau}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{d\alpha}{dt} \delta X\right) dt.$$

Nous avons d'autre part :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{4\pi dt}{K} \int \sum f \delta f d\tau$$

l'intégration étant étendue au volume du diélectrique.

Il vient

$$4\pi \int \sum f \delta f d\tau = \int \sum f \left(\frac{d\delta Z}{dy} - \frac{d\delta Y}{dz}\right) d\tau.$$

Or, en appliquant le procédé de l'intégration par parties, on trouve :

$$\int f \frac{d\delta Z}{dy} d\tau = \int mf\delta Z d\omega - \int \delta Z \frac{df}{dy} d\tau$$

L'intégrale du premier membre et la seconde du second membre sont étendues à tous les éléments de volume $d\tau$ du diélectrique. Quant à la première intégrale du second membre, elle est étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface qui sépare le diélectrique des conducteurs; enfin l, m, n sont les cosinus directeurs de l'élément $d\omega$.

On trouverait de même :

$$\int f \frac{d\delta Y}{dz} d\tau = \int nf\delta Y d\omega - \int \delta Y \frac{df}{dz} d\tau.$$

On a donc :

$$K\delta U = \int \sum (mf\delta Z - nf\delta Y)\delta\omega - \int \sum \left(\delta Z \frac{df}{dy} - \delta Y \frac{df}{dz}\right) d\tau.$$

Il revient au même d'écrire :

$$K\delta U = \int \sum [\delta X(ng - mh)]\, d\omega - \int \sum \left[\delta X \left(\frac{dg}{dz} - \frac{dh}{dy}\right)\right] d\tau.$$

L'équation de Hamilton (qui exprime que la variation de l'action est nulle) peut donc s'écrire, en la multipliant par $4\pi K$, en désignant pour abréger par H_1, H_2 et H_3 trois intégrales que je vais définir :

$$\int_{t_0}^{t_1} (H_1 + H_2 + H_3)\, dt = 0.$$

Je pose :

$$H_1 = K\int d\tau \sum \left(\delta X \frac{d\alpha}{dt}\right)$$

$$H_2 = 4\pi \int d\omega \sum \delta X \, (ng - mh)$$

$$H_3 = 4\pi \int d\tau \sum \delta X \left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz}\right)$$

L'intégrale H_1 est étendue à l'espace tout entier, l'intégrale H_2 à la surface des conducteurs, et l'intégrale H_3 au diélectrique.

Comme cette relation doit être satisfaite quelles que soient les variations δX, δY et δZ, d'après les règles du calcul des variations on doit avoir pour toutes les valeurs du temps

$$H_1 + H_2 + H_3 = 0$$

et cela quelles que soient les variations δX, δY, δZ.

Posons alors :

$$H_1 = H_1' + H_1''$$

H_1' et H_1'' représentant la même intégrale que H_1, étendue pour H_1' au volume des conducteurs et pour H_1'' au volume du diélectrique.

Comme δX, δY et δZ sont arbitraires, on devra avoir séparément d'après les règles du calcul des variations :

$$H_1' = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_1'' + H_3 = 0.$$

Donc, on aura, toujours d'après ces mêmes règles :

1° A l'intérieur des conducteurs : (parce que $H_1' = 0$) $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ ou puisque tout est au repos à l'origine des temps :

$$\alpha = \beta = \gamma = 0, \quad u = v = w = 0.$$

Il n'y a pas de courant à l'intérieur des conducteurs :

2° A l'intérieur des diélectriques (parce que $H''_1 + H_3 = 0$) :

$$K \frac{d\alpha}{dt} = 4\pi \left(\frac{dg}{dz} - \frac{dh}{dy}\right)$$

C'est l'équation (3) du § 50, p. 115;

3° A la surface de séparation (parce que $H_2 = 0$)

$$ng - mh = 0$$

et de même

$$nf - lh = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{f}{l} = \frac{g}{m} = \frac{h}{n}$$

ce qui exprime que les lignes de force électrique sont normales à la surface des conducteurs.

NOTE III

SUR LE CALCUL DE LA PÉRIODE

Les incertitudes qui subsistent au sujet du calcul de la période, et sur lesquelles j'ai insisté à la fin du cours, montrent assez quel intérêt il y aurait à posséder une méthode qui permettrait de calculer rigoureusement la période d'un excitateur donné. L'importance du sujet m'engage à publier les résultats que j'ai obtenus dans cet ordre d'idées, quelque incomplets qu'ils soient.

Le problème à résoudre peut s'énoncer comme il suit :

Trouver un nombre μ, et six fonctions X, Y, Z, L, M, N des trois coordonnées x, y, et z qui satisfassent aux conditions suivantes :

1° Ces six fonctions sont analytiques en tous les points de l'espace occupé par le diélectrique ;

2° Si cet espace s'étend à l'infini, ces six fonctions doivent s'annuler à l'infini ;

3° En tous les points du diélectrique elles doivent satisfaire aux équations suivantes :

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
X &= \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}, & K\mu^2 L &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \\
Y &= \frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}, & K\mu^2 M &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \\
Z &= \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}, & K\mu^2 N &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}
\end{aligned}
$$

d'où :

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}=0.$$

4° A la surface des conducteurs et en particulier de l'excitateur, le vecteur dont les composantes sont X, Y, Z est normal à cette surface.

Le nombre μ et nos six fonctions peuvent d'ailleurs être soit réels, soit imaginaires. Cela posé, si l'on fait :

$$\begin{aligned} 4\pi f &= \text{partie réelle de } e^{i\mu t}X, & \alpha &= \text{partie réelle de } i\mu e^{i\mu t}L \\ 4\pi g &= \text{partie réelle de } e^{i\mu t}Y, & \beta &= \text{partie réelle de } i\mu e^{i\mu t}M \\ 4\pi h &= \text{partie réelle de } e^{i\mu t}Z, & \gamma &= \text{partie réelle de } i\mu e^{i\mu t}N \end{aligned}$$

le déplacement électrique (f, g, h) et la force magnétique (α, β, γ) satisferont aux équations de Maxwell. On aura ainsi défini une perturbation électromagnétique périodique compatible avec ces équations.

La période sera égale à 2π divisé par la partie réelle de μ.

Si le nombre μ est réel, l'amplitude des oscillations est constante.

Si le nombre μ est imaginaire, cette amplitude décroît suivant une loi exponentielle ; il y a un *décrément logarithmique* dépendant de la partie imaginaire de μ.

Cela posé deux cas sont à distinguer :

1° Ou bien l'excitateur est placé dans une chambre entièrement close à parois conductrices de sorte que l'espace occupé par le diélectrique est fini ;

2° Ou bien l'excitateur est placé dans un espace indéfini occupé par le diélectrique.

Le premier cas est beaucoup plus simple. Malheureusement c'est le second qui a été réalisé dans les expériences; les salles où on opérait étaient assez grandes par rapport aux dimensions de l'excitateur pour pouvoir être assimilées à un espace indéfini. Je reviendrai sur ce point dans un instant.

Les différences entre les deux cas sont très grandes.

Dans le premier cas, l'énergie ne peut se dissiper au dehors par rayonnement; l'amplitude des oscillations est donc constante et μ est réel.

Dans le second cas, au contraire, il y a rayonnement et, par conséquent il y a un décrément logarithmique et μ est imaginaire.

Dans le premier cas, μ étant réel, on peut toujours supposer que les six fonctions sont également réelles; car si six fonctions imaginaires satisfaisaient aux équations (1), il en serait de même de leurs parties réelles.

Si les six fonctions sont réelles, cela signifie que la *phase* est la même en tous les points du diélectrique.

Au contraire dans le second cas la phase est différente aux divers points du diélectrique et les six fonctions sont imaginaires.

D'ailleurs une comparaison simple permet de se rendre compte de ce fait. Si un diapason vibre dans une atmosphère indéfinie, le son se propagera dans toutes les directions avec une vitesse déterminée et la phase ne sera pas la même aux divers points de cette atmosphère mais dépendra de la distance au diapason.

Si au contraire ce diapason vibre dans un espace clos, par exemple dans l'espace compris entre deux plans parallèles le son se réfléchira sur ces deux plans, et les ondes réfléchies interféreront de manière à produire des nœuds et des ventres ou ce qu'on appelle un système d'*ondes stationnaires*. La phase sera la même en tous les points.

Cet état définitif où les ondes sont stationnaires ne peut s'établir bien entendu qu'au bout d'un certain temps; car il faut que le son émané du diapason (ou, dans le cas qui nous occupe, la perturbation émanée de l'excitateur) ait eu le temps de se propager jusqu'à la paroi réfléchissante. Il faut ensuite, pour que les ondes stationnaires soient appréciables, que la perturbation ne soit pas, avant d'atteindre la paroi réfléchissante, assez affaiblie par le rayonnement pour devenir insensible. C'est pour cette raison que si la salle où on opère est très grande, tout se passe comme si l'on était placé dans un espace indéfini. C'est donc le second cas qui est réalisé dans les expériences et qui est, par conséquent, de beaucoup le plus intéressant. C'est malheureusement au premier cas que j'ai dû me borner.

Considérons donc une chambre close limitée intérieurement par la surface de l'excitateur, extérieurement par des parois conductrices qui, au point de vue analytique, joueront le même rôle que cette surface, et remplie par un diélectrique.

Soient L, M, N trois fonctions quelconques assujetties seulement aux conditions suivantes que j'appellerai les conditions (2) :

1° Elles sont analytiques et uniformes dans tout le diélectrique ;

2° On a dans le diélectrique

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0\,;$$

3° Le vecteur (L, M, N) en tous les points de la surface des conducteurs est normal à cette surface ;

4° L'intégrale :

$$T = \int (L^2 + M^2 + N^2)\, d\tau$$

étendue au diélectrique entier est égale à 1.

Cela posé, envisageons l'intégrale :

$$U = \int \left[\left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy} \right)^2 \right] d\tau$$

Cette intégrale ne peut s'annuler. En effet, si elle s'annulait on aurait :

$$\frac{dN}{dy} = \frac{dM}{dz}, \qquad \frac{dL}{dz} = \frac{dN}{dx}, \qquad \frac{dM}{dx} = \frac{dL}{dy}$$

et par conséquent :

$$L dx + M dy + N dz = d\varphi$$

$d\varphi$ étant la différentielle exacte d'une fonction φ qui doit être uniforme puisque les fonctions L, M, N le sont (cette dernière partie de la démonstration suppose que la chambre est un « espace simplement connexe », c'est-à-dire n'a pas, par exemple la forme d'un tore). On a donc

$$L = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad M = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad N = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Les conditions (2) signifient alors que $\Delta\varphi$ est nul en tous les points du diélectrique et $\frac{d\varphi}{dn}$ nul en tous les points de la surface qui le limite. Mais cela ne peut avoir lieu que si φ est une constante, c'est-à-dire si

$$L = M = N = 0.$$

Il est aisé de voir que cela est impossible puisque $T = 1$.

L'intégrale U, ne pouvant s'annuler, admet un minimum. Il existe donc trois fonctions L, M, N pour lesquelles ce minimum est atteint.

Ces fonctions doivent être telles que $\delta U = o$, toutes les fois que $\delta T = o$; que :

$$\frac{d\delta L}{dx} + \frac{d\delta M}{dy} + \frac{d\delta N}{dz} = \sum \frac{d\delta L}{dx} = o \tag{3}$$

et que le vecteur (δL, δM, δN) est tangent à la surface des conducteurs en tous les points de cette surface.

Cette dernière condition s'exprime par l'équation :

$$l\delta L + m\delta M + n\delta N = \sum l\delta L = o. \tag{4}$$

Posons pour abréger :

$$X = \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}, \quad Y = \frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}, \quad Z = \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}.$$

Il viendra :

$$\delta T = 2 \int (L\delta L + M\delta M + N\delta N)\, d\tau$$

$$\delta U = 2 \int (X\delta X + Y\delta Y + Z\delta Z)\, d\tau.$$

La valeur de δU peut être transformée par l'intégration par parties ; on trouve :

$$\int X\delta X d\tau = \int X\,(m\delta N - n\delta M)\, d\omega - \int \left(\delta N \frac{dX}{dy} - \delta M \frac{dX}{dz}\right) d\tau$$

de sorte que la condition $\delta U = 0$ peut s'écrire :

$$\frac{\delta U}{2} = \int \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ l & m & n \\ \delta L & \delta M & \delta N \end{vmatrix} d\omega - \int \sum \left[\delta L \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right)\right] d\tau = 0$$

Cette condition doit être remplie quelles que soient les variations δL, δM, δN, pourvu qu'elles satisfassent aux relations (3) et (4) et à la relation $\delta T = 0$.

Le calcul des variations nous permet d'en conclure ce qui suit :

On peut trouver un nombre $K\mu^2$ et deux fonctions φ et ψ telles que la condition :

$$(5) \quad \frac{\delta U}{2} - \frac{K\mu^2}{2} \delta T + \int \varphi \sum \left(\frac{d\delta L}{dx}\right) d\tau + \int \psi \sum (l\delta L)\, d\omega = 0$$

soit remplie quand les variations δL, δM et δN sont *absolument quelconques*. Nous transformerons encore l'une de ces intégrales par l'intégration par parties en écrivant :

$$\int \varphi \sum \left(\frac{d\delta L}{dx}\right) d\tau = \int \varphi \sum (l\delta L)\, d\omega - \int \sum \left(\delta L \frac{d\varphi}{dx}\right) d\tau.$$

L'équation (5) peut alors s'écrire ;

$$\int d\tau \sum \left[\delta L \left(\frac{dZ}{dz} - \frac{dY}{dx} - K\mu^2 L - \frac{d\varphi}{dx}\right)\right] +$$

$$+ \int d\omega \left[\delta L \left(Yn - Zm + [\varphi + \psi]\, l\right)\right] = 0.$$

On doit donc avoir dans tous les points du diélectrique

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
K\mu^2 L &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} - \frac{d\varphi}{dx} \\
K\mu^2 M &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} - \frac{d\varphi}{dy} \\
K\mu^2 N &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} - \frac{d\varphi}{dz}
\end{aligned}
$$

et en tous les points de la surface des conducteurs :

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
Zm - Yn &= l\,(\varphi + \psi) \\
Xn - Zl &= m\,(\varphi + \psi) \\
Yl - Xm &= n\,(\varphi + \psi)
\end{aligned}
$$

Si l'on ajoute les trois équations (7) après les avoir respectivement multipliées par l, m, n, il vient :

$$(l^2 + m^2 + n^2)(\varphi + \psi) = 0$$

Donc $\varphi + \psi$ est nul en tous les points de la surface des conducteurs et on a :

$$(8)\qquad \frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n}$$

ce qui est une des conditions que nous nous sommes imposées.

On peut en tirer la conséquence suivante :

Envisageons l'intégrale

$$\int (X dx + Y dy + Z dz) = \int \sum X dx$$

prise le long d'une courbe fermée quelconque tracée sur la surface des conducteurs. Cette intégrale est nulle puisque le vecteur X, Y, Z est normal au conducteur, ce qui est exprimé par l'équation (8). Si nous transformons cette intégrale simple en intégrale double par la formule connue, il vient :

$$\int \sum l\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) d\omega = 0$$

et comme cela a lieu pour un contour formé quelconque :

$$\sum l\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) = 0 \tag{9}$$

Ajoutons les équations (6) après les avoir différentiées par rapport à x, y et z, il vient

$$K\mu^2 \sum \frac{dL}{dx} = -\Delta\varphi.$$

Mais on a par hypothèse :

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0$$

Il reste donc :

$$\Delta\varphi = 0.$$

En un point de la surface des conducteurs, on a, en ajoutant les équations (6) multipliées respectivement par l, m, n et tenant compte de la relation (9) :

$$K\mu^2 \sum lL = -\frac{d\varphi}{dn}$$

mais on a par hypothèse en tous les points de la surface :

$$lL + mM + nN = 0$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

On en conclut que φ est une constante ; on a donc

$$K\mu^2 L = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dx}$$

et deux autres équations analogues. Nos six fonctions X,Y,Z, L,M,N satisfont donc bien aux conditions imposées.

Remarquons maintenant que nous avons :

$$U = \int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\tau = \int \sum X \left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}\right) d\tau$$

ou en intégrant par parties d'après les mêmes règles que plus haut :

$$U = \int \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ l & m & n \\ L & M & N \end{vmatrix} d\omega - \int \sum L \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) d\tau.$$

La première des intégrale est nulle, la seconde est égale à $- K\mu^2 T$.

On a donc :

$$\frac{U}{T} = K\mu^2.$$

D'où la règle suivante : le nombre $K\mu^2$ dont dépend la période la plus grave, est le minimum de l'expression $\frac{U}{T}$ formée à l'aide de trois fonctions L, M, N satisfaisant aux conditions (2).

On pourrait démontrer d'une manière analogue qu'il existe une infinité de périodes possibles qu'on pourrait appeler des harmoniques supérieures. Mais l'expérience n'ayant rien révélé de pareil, il faut admettre que ces harmoniques sont trop faibles ou trop rapidement décroissantes pour pouvoir être decelées avec les moyens dont nous disposons. Je n'insisterai donc pas sur ce point.

NOTE IV

SUR QUELQUES EXPÉRIENCES RÉCENTES

MM. Sarrazin et de la Rive ont fait au mois de mai dernier (*Archives de Genève*, juin 1890, t. XXIII, page 557) des expériences dont l'importance est considérable. Ils ont fait interférer l'onde émanée d'un excitateur avec la même onde réfléchie sur un mur. C'est la répétition de l'expérience classique de M. Hertz, mais ils ont opéré avec des excitateurs et avec des résonateurs différents et ils ont vu ainsi que la longueur d'onde observée dépend des dimensions du résonateur et est à peu près indépendante des dimensions de l'excitateur. C'est le phénomène de la résonance multiple sur lequel je reviendrai dans la note suivante.

Mais voici le point sur lequel je désirerais attirer l'attention. Opérant avec l'excitateur de Hertz et avec un résonateur de 75 centimètres de diamètre, c'est-à-dire à peu près semblable à celui de Hertz, les savants Génevois ont obtenu un internœud de 3 mètres ; M. Hertz avait trouvé $4^m,80$. Le premier de ces deux résultats s'accorde suffisamment avec la théorie, il n'en est pas de même du second Mais toute considération théorique mise à part, il y a lieu de s'étonner de voir des expériences exécutées dans des conditions en apparence identiques donner des résultats aussi divergents. Il y a donc lieu de réserver ses conclusions en attendant que ce point ait été élucidé.

Dans une lettre que M. Hertz m'a fait l'honneur de m'adresser, et qu'il veut bien m'autoriser à citer ici, l'illustre physicien s'exprime ainsi à ce sujet :

« Il m'est difficile de croire que je me sois trompé dans la deuxième méthode au point de trouver $4^m,80$ au lieu de 3 mètres, mais puisque toute la vraisemblance théorique est du côté de MM. de la Rive et Sarrazin, j'ai bien songé à ce qui en pourrait être la cause et voilà deux manières dont on peut expliquer la différence. Les ondes se produisent entre deux faces parallèles d'une salle ; je n'ai tenu compte que d'une seule face dite réfléchissante. Supposons d'abord que la longueur de la salle soit égale à un multiple exact de la longueur d'onde, disons à trois longueurs d'onde. Nous aurons deux nœuds très prononcés qui auront la distance exacte. Si la longueur de la salle est égale à quatre longueurs d'onde, nous aurons trois nœuds très prononcés. Mais supposons que la longueur de la salle ait une valeur intermédiaire et plus rapprochée de la première, nous aurons deux nœuds moins distincts dont la distance sera plus grande que la véritable longueur d'onde. Cette explication me paraîtrait bonne, si la différence n'était pas trop grande.

» L'autre est celle-ci : Ma table de zinc réfléchissante était établie dans une niche du mur, il serait possible que les points proéminents du mur aient eu l'effet d'éloigner les nœuds du mur et de donner une longueur trop grande aux longueurs mesurées des ondes. Mais il est vrai aussi que la niche était large de 5 à 6 mètres et il ne me semblait pas et ne semble pas très vraisemblable que cette circonstance ait eu un grand effet.

» Je ne sais donc pas exactement la cause de mon erreur, mais je crois qu'il y en a. J'ai depuis longtemps cherché en vain pour trouver une cause plausible pour la différence de la vitesse dans l'air et dans les fils, j'ai trouvé moi-même, avant MM. Sarrazin et de la Rive, qu'il n'y a pas de différence pour les ondes courtes de 30 centimètres de longueur ; enfin les expériences de ces messieurs donnent la même vitesse aussi pour les ondes de grande longueur et contredisent mes expériences. »

Devons-nous donc croire que, les dimensions de la niche étant du même ordre de grandeur que la longueur d'onde, il a pu se produire des phénomènes de diffraction et que M. Hertz a observé des franges de diffraction et non les franges d'interférence proprement dite? Il serait bien prématuré de se prononcer sur ce point. Il convient d'imiter la sage réserve de M. Hertz et de s'abstenir de conclure jusqu'à ce que de nouvelles expériences aient éclairci la question.

J'ai parlé aussi plus haut d'un mémoire de M. Lecher (*Sitzungsberichte de l'Académie de Vienne*, avril 1890) et j'ai dit que ce savant ayant mesuré par un procédé nouveau la vitesse de propagation d'une perturbation dans un conducteur, a trouvé que cette vitesse était celle de la lumière. Très étonné de se trouver en contradiction avec M. Hertz, il a vainement cherché la cause de cette divergence. Elle s'explique aujourd'hui très aisément. M. Lecher ayant appliqué correctement la formule de Thomson pour la période de vibration (où M. Hertz avait oublié le facteur $\sqrt{2}$,) son résultat se trouve en accord suffisant avec le résultat corrigé de M. Hertz.

NOTE V

SUR LA RÉSONANCE MULTIPLE

MM. Sarrasin et de la Rive ont observé que dans les phénomènes d'interférence, la longueur d'onde observée dépend des dimensions du résonateur et fort peu de celles de l'excitateur. C'est le phénomène qu'ils ont appelé résonance multiple et dont ils ont donné l'interprétation suivante :

L'excitateur ne donnerait naissance ni à une vibration unique de période parfaitement déterminée, ni même à un certain nombre d'harmoniques distinctes ; son spectre, si j'ose m'exprimer ainsi, ne serait formé ni d'une, ni de plusieurs raies fines et distinctes ; ce serait un spectre continu ou plutôt il serait formé d'une bande très large dont les bords seraient fortement estompés.

Il convient d'ajouter que cette bande paraît beaucoup plus large dans les expériences où l'on fait interférer les ondes dans un fil métallique que dans celles où on les fait interférer dans l'air. Le résonateur renforcerait ensuite, parmi toutes les vibrations émises par l'excitateur, celle qui serait d'accord avec sa période propre.

Cette interprétation est évidemment en désaccord avec la théorie ; mais ce n'est pas là un argument à invoquer contre elle ; car cette théorie est encore bien mal établie et lors même qu'elle le serait, elle ne serait encore qu'une première approximation.

J'ai proposé néanmoins une explication différente que j'ai communiquée par lettre à quelques savants. Bien que je ne l'ai mise en avant que timidement, je crois devoir la reproduire ici.

Dans la vibration émise par un excitateur, deux choses sont à considérer, la période et le décrément logarithmique. Diverses raisons me portent à penser que ce décrément est beaucoup plus grand pour l'excitateur que pour le résonateur. L'intensité des vibrations émises par l'excitateur irait donc en diminuant très rapidement de telle sorte qu'elles seraient de durée très courte et peu capables d'interférer. Il n'en serait pas de même des vibrations propres du résonateur. Qu'arriverait-il alors? Le résonateur serait mis en train par l'excitateur, pourvu que les périodes ne soient pas très différentes, puis il continuerait à vibrer après que l'excitateur serait revenu au repos ; mais il vibrerait alors *avec sa période propre* et ce sont ces dernières vibrations, d'une durée beaucoup plus longue et susceptibles d'interférer, que l'on observerait.

M. Hertz à qui j'avais communiqué cette manière de voir m'a répondu ce qui suit :

« Les expériences de MM. Sarrasin et de la Rive sur l'usage de divers résonateurs me plaisent beaucoup et me semblent fort belles, mais leur explication par un spectre continu émis par le primaire me déplaît absolument. Ma manière de voir est certainement très rapprochée de la vôtre ; peut-être est-elle tout à fait la même. Si le primaire produisait une vibration régulière et continue, représentée par la sinusoïde A, il ferait vibrer les résonateurs en harmonie mille fois mieux que les autres. S'il ne produisait qu'un simple choc, il ferait vibrer tous les résonateurs également bien. La vérité est entre ces deux extrêmes; la vibration du primaire aura la forme B (une courbe représentant une série d'oscillations d'amplitude décroissante). Elle fera donc vibrer tous les résonateurs, mais ceux qui sont en harmonie mieux que les autres.

« Ou la même chose prise mathématiquement : si nous voulons représenter la forme A comme une somme de sinus, nous n'aurons qu'un seul membre. Si nous voulons représenter la forme B, nous devrons employer une intégrale de Fourier qui contiendra un nombre infini de sinus de toutes longueurs. Mais on ne saurait dire pour cela que la forme B n'ait pas de période distincte ni qu'elle soit équivalente à un spectre continu. »

Bien qu'exprimée en termes absolument différents, l'opinion de M. Hertz est donc parfaitement d'accord avec celle que j'ai cru pouvoir émettre plus haut.

Quoique la complication des phénomènes se prête assez mal au calcul, je ne crois pas inutile de donner ici un petit développement analytique qui se rapporte à un cas plus simple que la réalité mais certainement analogue.

L'équation qui exprime un mouvement vibratoire décroissant quelconque peut toujours se ramener à la forme

$$y'' - 2\alpha y' + \beta y = 0$$

y désignant une variable convenablement choisie qui définit l'amplitude de la vibration ; y' et y'' ses dérivées par rapport au temps, α et β des constantes. L'intégrale de cette équation est

$$y = e^{-\alpha t}(\mathrm{A}\cos mt + \mathrm{B}\sin mt) \qquad m = \sqrt{\beta - \alpha^2}$$

m définit ainsi la période et α le décrément. Si ce décrément est négligeable (et nous supposons par une approximation grossière qu'il en est ainsi pour les résonateurs) $\alpha = o$, $\beta = m^2$ et il reste

$$y'' + m^2 y = o.$$

Si le mouvement est troublé par une perturbation émanée de l'excitateur et que a et n désignent respectivement deux nombres dont dépendent le décrément et la période propres de l'excitateur, cette équation deviendra :

$$y'' + m^2 y = \mathrm{A}e^{-at}\cos nt + \mathrm{B}e^{-at}\sin nt$$

L'intégrale de cette équation est :

$$y = \mathrm{A}_1 e^{-at}\cos nt + \mathrm{B}_1 e^{-at}\sin nt + \mathrm{C}\cos mt + \mathrm{D}\sin mt$$

avec les conditions :

$$\mathrm{A}_1(m^2 + a^2 - n^2) - 2an\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}$$
$$\mathrm{B}_1(m^2 + a^2 - n^2) + 2an\mathrm{A}_1 = \mathrm{B}.$$

Si l'on suppose qu'à l'origine des temps on ait :

$$y = y' = o$$

il viendra :

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{C} = 0 \qquad - \mathrm{A}_1 a + \mathrm{B}_1 n + \mathrm{D}m = o.$$

Au bout d'un temps très grand, les termes qui contiennent l'exponentielle e^{-at} disparaîtront de sorte qu'il restera

$$y = \mathrm{C}\cos mt + \mathrm{D}\sin mt$$

et que l'amplitude de l'oscillation sera proportionnelle à :

$$\sqrt{C^2 + D^2}$$

Si a est très petit et m très voisin de n ; cette quantité diffère très peu de :

$$\sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{(m^2 + a^2 - n^2)^2 + 4a^2n^2}}.$$

L'amplitude de la vibration excitatrice restant constante, celle de la vibration résultante est en raison inverse du radical

$$\sqrt{(m^2 + a^2 - n^2)^2 + 4a^2n^2}.$$

Quand m varie, ce radical admet un minimum égal à $2\,an$ pour $m^2 = n^2 - a^2$. Ce minimum correspond au résonateur en harmonie.

Si a est nul, ce minimum est nul, l'amplitude correspondante infinie et le résonateur en harmonie vibre, comme le dit M. Hertz, mille fois mieux que les autres.

Si a n'est pas nul, ce minimum n'est pas nul et l'amplitude de vibration du résonateur en harmonie est plus grande que celle des autres, mais du même ordre de grandeur.

Doit-on admettre que l'excitateur a un décrément plus grand quand on lui adjoint deux fils conducteurs très longs pour mesurer la propagation dans les fils, que quand il en est débarrassé? Cela expliquerait pourquoi la « bande spectrale » apparente est plus large dans le premier cas que dans le second.

Doit-on admettre qu'un résonateur rectiligne et ouvert a un décrément plus grand qu'un résonateur circulaire? Cela expliquerait peut-être pourquoi l'on n'a pu obtenir d'interférences dans les fils avec les résonateurs rectilignes.

Mais toutes ces questions sont bien prématurées et ce n'est que dans un grand nombre d'années qu'il pourra être utile de les poser. D'ailleurs d'autres explications sont possibles.

NOTE VI

SUR LA PROPAGATION DES ONDES DANS LES FILS SINUEUX

La vitesse de propagation d'une onde dans un fil présentant de petites sinuosités peut s'évaluer de deux manières différentes. Le chemin parcouru par cette onde peut se compter en effet, soit en suivant toutes les sinuosités du fil, soit en projetant ce chemin sur la droite parallèle à la direction moyenne du fil. La vitesse évaluée de la seconde manière sera évidemment beaucoup plus faible.

Les expériences de M. Hertz ont prouvé que la vitesse évaluée de la première manière est plus grande que la vitesse mesurée dans un fil tendu, tandis que la vitesse évaluée de la seconde manière est au contraire plus petite que dans un fil tendu et souvent beaucoup plus petite.

En appelant *ds* l'élément d'arc du fil et *i* l'intensité du courant dans ce fil, on arriverait en répétant le raisonnement que nous avons fait dans la théorie du résonateur à l'équation suivante :

$$\frac{d^2i}{ds^2} = K^2 \frac{d^2i}{dt^2}.$$

Cette équation prouve que la vitesse évaluée de la première manière est égale à $\frac{1}{K}$ c'est-à-dire à la vitesse de la lumière, ou encore à la vitesse dans un fil tendu.

Mais le raisonnement qui nous a conduit à cette équation suppose que le diamètre du fil est très petit ; mais ce n'est pas tout à fait le cas ici, car si le fil est tordu en hélice comme dans les expériences de M. Hertz, le pas de cette hélice sera trop petit pour qu'on puisse négliger devant lui le diamètre du fil.

Si le diamètre du fil est presque égal au pas de l'hélice de façon que les spires se touchent presque, il semble que le fil doit se rapprocher de la condition d'un fil tendu et que par conséquent la vitesse évaluée de la seconde manière doit se rapprocher de $\frac{1}{K}$. On expliquerait ainsi le résultat obtenu par M. Hertz. Mais ce n'est là qu'un aperçu et il conviendrait d'étudier la question avec attention.

NOTE VII

SUR LA RÉFLEXION DES ONDES

La plupart des expérimentateurs ont trouvé que les ondes se réfléchissent totalement sur une surface conductrice, quelque mince qu'elle soit, et qu'aucune étincelle n'est perceptible de l'autre côté d'une pareille surface. Cela est vrai même avec les électrolytes et si MM. Bichat et Blondlot ont trouvé que l'eau de rivière est transparente, elle cesse de l'être dès qu'on y ajoute une trace d'acide.

Au contraire M. Joubert a reconnu qu'un mur de zinc de 1/2 millimètre d'épaisseur de 4 mètres de hauteur et de 8 mètres de largeur affaiblit les étincelles sans les détruire complètement et qu'on peut encore les observer de l'autre côté de ce mur ; cette divergence est due sans doute à l'emploi du résonateur rectiligne plus sensible que les résonateurs circulaires. Ce phénomène est en désaccord avec la théorie de Maxwell à moins qu'on ne puisse l'expliquer par la diffraction, la hauteur du mur n'étant que d'une demi longueur d'onde ; mais nous ne sommes pas encore en état de décider cette question.

CONCLUSIONS

La théorie est incomplète, les expériences sont peu nombreuses et contradictoires. Il est donc imposible de décider s'il y a accord ou désaccord. Je termine encore par un point d'interrogation. Toutefois, s'il m'est défendu de conclure, je puis parler de l'impression qui me causent les plus récents progrès de la science, et que le lecteur partagera sans doute après avoir lu ces notes. Cette impression encore bien vague est que l'ensemble des résultats est plus favorable aujourd'hu à la théorie de Maxwell qu'il y a quelques mois au moment où j'ai clos mon cours.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE III

CHAPITRE IV

CHAPITRE V

CHAPITRE VI

CHAPITRE VII

CHAPITRE VIII

CHAPITRE IX

CHAPITRE X

CHAPITRE XI

CHAPITRE XII

Tours. — Imprimerie Deslis Frères.