

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

---

COURS  
D'ASTRONOMIE

PAR

H. ANDOYER

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

---

SECONDE PARTIE

ASTRONOMIE PRATIQUE

---

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN & FILS

LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

---

1909



# **COURS D'ASTRONOMIE**



FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

---

COURS  
**D'ASTRONOMIE**

PAR

**H. ANDOYER**

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

---

SECONDE PARTIE

**ASTRONOMIE PRATIQUE**

---

PARIS

**LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN & FILS**

LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1909



# COURS D'ASTRONOMIE

---

## DEUXIÈME PARTIE

---

### ASTRONOMIE PRATIQUE

Les problèmes de l'Astronomie pratique sont multiples; les méthodes imaginées pour les résoudre se perfectionnent chaque jour, mais deviennent de plus en plus nombreuses, en même temps qu'elles exigent de nouveaux instruments. Il est donc impossible dans ce cours, nécessairement restreint, d'aborder toutes les questions pratiques qui relèvent de l'Astronomie. Aussi ferons-nous un choix, et bien loin de prétendre épuiser le sujet, nous nous bornerons à quelques problèmes parmi les plus importants; nous les étudierons avec détails, en nous proposant, pour but principal, d'initier le lecteur aux méthodes générales de l'Astronomie, et de le mettre ainsi à même de poursuivre plus tard avec facilité des études plus spéciales.

## LIVRE PREMIER

---

### LES CALCULS

#### CHAPITRE PREMIER

---

##### PRINCIPES DE CALCUL — INTERPOLATION TABLES

**Mesure des grandeurs en astronomie.** — Les grandeurs qui interviennent le plus fréquemment en astronomie sont des longueurs, des angles ou des temps.

Le nombre qui mesure une grandeur déterminée change avec l'unité choisie : si  $m$  et  $m'$  sont les mesures d'une même grandeur rapportée à deux unités différentes  $U$  et  $U'$ , on a l'égalité  $mU = m'U'$ .

L'unité de longueur fondamentale est le mètre : Le *mètre légal* est la longueur, à la température de zéro degré centigrade, du prototype international, en platine iridié, qui a été sanctionné par la Conférence générale des poids et mesures, tenue à Paris en 1889, et qui est déposé au Pavillon de Breteuil, à Sèvres. La copie n° 8 de ce prototype international, déposée aux Archives Nationales, est l'étalon légal pour la France.

Une unité de longueur souvent employée en astronomie est le rayon équatorial  $a$  de l'ellipsoïde terrestre, soit 6 378 kilomètres, en chiffres ronds : le mètre diffère très peu de la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre.

Une autre unité de longueur d'un usage constant dans l'étude du mouvement des planètes et des comètes, est celle qui résulte de la



vaieur attribuée par Gauss à la constante d'attraction, ainsi que nous l'avons indiqué dans la Première Partie (p. 124) : cette longueur  $b$  diffère très peu du demi grand axe de l'orbite terrestre, de sorte que l'on a très sensiblement  $\frac{a}{b} = \sin \varpi_0$ , en désignant par  $\varpi_0$  la valeur moyenne de la parallaxe horizontale équatoriale du Soleil. La valeur de  $\varpi_0$  ayant été fixée à  $8''{,}80$  (I, p. 89) (1), on a donc en chiffres ronds :

$$b = 23439 \ a = 149500000 \text{ kilomètres.}$$

L'unité fondamentale de temps est le jour solaire moyen (I, p. 148) ; on emploie aussi pour les longues durées l'année julienne de 365,25 et le siècle julien de 100 années juliennes.

On partage le jour en 24 heures, l'heure en 60 minutes, la minute en 60 secondes, la seconde en parties décimales ; et l'on écrit par exemple  $1^{\text{j}} 18^{\text{h}} 40^{\text{m}} 53^{\text{s}}{,}08$ .

Il peut y avoir lieu de convertir la mesure d'un temps en jours et parties décimales de jours ; ou en heures et parties décimales d'heure ; etc., etc. ; on y parvient facilement à l'aide de petites tables appropriées. A leur défaut on remarquera que :

$$\begin{aligned} 1^{\text{j}} &= 24^{\text{h}} = 1440^{\text{m}} = 86400^{\text{s}} ; \\ 1^{\text{h}} &= \frac{1^{\text{j}}}{24} = 0{,}041666\dots \\ &= 60^{\text{m}} = 3600^{\text{s}} ; \\ 1^{\text{m}} &= \frac{1^{\text{j}}}{1440} = 0{,}00069444\dots \\ &= \frac{1^{\text{h}}}{60} = 0{,}016666\dots \\ &= 60^{\text{s}} ; \\ 1^{\text{s}} &= \frac{1^{\text{j}}}{86400} = 0{,}0000115740740\dots \\ &= \frac{1^{\text{h}}}{3600} = 0{,}0002777\dots \\ &= \frac{1^{\text{m}}}{60} = 0{,}016666\dots \end{aligned}$$

Quelquefois encore, on emploie comme unité de temps le jour sidéral, ou bien ses subdivisions ; nous avons déjà vu (I, p. 37)

---

(1) Cette indication renvoie à la première Partie du Cours.

comment on transforme une durée de temps sidéral en temps moyen, et inversement. Remarquons seulement à cet égard que :

$$\begin{aligned} 1^j \text{ (temps moyen)} &= 1^j (1 + 0,0027379) \text{ (temps sidéral)} \\ &= 1^j + 3^m 56^s,556 \text{ (temps sidéral)}; \\ 1^j \text{ (temps sidéral)} &= 1^j (1 - 0,0027304) \text{ (temps moyen)} \\ &= 1^j - 3^m 55^s,910 \text{ (temps moyen)}. \end{aligned}$$

Arrivons maintenant à la mesure des angles, qui demande quelques développements. L'unité d'angle proprement dite, celle qui sert toujours à exprimer la mesure d'un angle en analyse, est le *radian*, c'est à dire l'angle  $\rho$  qui intercepte entre ses côtés, sur une circonférence décrite de son sommet comme centre, un arc de longueur égale à celle du rayon de cette circonférence. En effet, toutes les formules d'analyse relatives aux dérivées ou aux développements en série des fonctions trigonométriques directes ou inverses, reposent sur cette proposition fondamentale : le rapport du sinus à l'angle tend vers l'unité quand l'angle tend vers zéro ; mais cette proposition n'a de sens qu'autant que la mesure de l'angle est exprimée à l'aide du radian comme unité.

Si l'on mesurait en réalité les angles de cette façon, nous n'aurions rien de plus à ajouter : mais il n'en est pas ainsi. On exprime d'habitude la mesure d'un angle en degrés, minutes, secondes et parties décimales de seconde, l'angle droit valant 90 degrés, le degré valant 60 minutes, la minute valant 60 secondes ; on dit alors que l'angle est exprimé *en arc*, et on écrit par exemple

$$278^\circ 45' 38'',83.$$

On exprime encore souvent un angle (spécialement les angles horaires, les ascensions droites et les longitudes géographiques) en *temps*, c'est-à-dire en heures, minutes, secondes et parties décimales de seconde, quatre angles droits valant 24 heures, l'heure valant 60 minutes, la minute valant 60 secondes ; et l'on écrit par exemple

$$18^h 35^m 2^s,59.$$

On remarquera avec soin que les minutes et secondes de temps ou d'arc ne se notent pas de la même façon.

Enfin on emploie quelquefois un système évidemment plus

rationnel, qui consiste à prendre pour unité fondamentale l'angle droit, et pour unités dérivées les parties décimales de l'angle droit : c'est la division *centésimale* du cercle, par opposition à la division ordinaire ou *sexagésimale*. Le grade est alors la centième partie de l'angle droit ; la minute centésimale est la centième partie du grade, et la seconde centésimale la centième partie de la minute ; et l'on écrit par exemple

$$76^{\text{g}}95'38^{\text{''}},6$$

ce qui est équivalent à  $76^{\text{g}},95386$ .

Il est nécessaire de savoir effectuer rapidement un changement d'unités dans la mesure d'un angle ; on peut s'aider à cet effet de tables auxiliaires ; à leur défaut on s'appuiera sur les principes suivants dont l'application est de chaque instant.

1° Conversion d'une mesure en arc en une mesure en temps ; et inversement.

On a

$$\begin{aligned} 1^{\text{h}} &= 15^{\text{g}}, & 1^{\text{m}} &= 15', & 1^{\text{s}} &= 15''. \\ 1^{\text{g}} &= \frac{1^{\text{h}}}{15} = 4^{\text{m}}, & 1' &= \frac{1^{\text{m}}}{15} = 4^{\text{s}}, & 1'' &= \frac{1^{\text{s}}}{15}. \end{aligned}$$

Si donc il s'agit de convertir en temps

$$173^{\text{g}}54'37^{\text{''}},95,$$

on dira :

$$\begin{aligned} 173 &= 15 \times 11 + 8 \text{ d'où } 11^{\text{h}}32^{\text{m}} && (\text{car } 8^{\text{g}} \text{ valent } (8 \times 4)^{\text{m}}) \\ 54 &= 15 \times 3 + 9 \text{ » } 3^{\text{m}}36^{\text{s}} && (\text{car } 9' \text{ valent } (9 \times 4)^{\text{s}}) \\ \frac{37,95}{15} &= 2,53 \text{ » } 2^{\text{s}},53 \\ 173^{\text{g}}54'37^{\text{''}},95 &= \underline{11^{\text{h}}35^{\text{m}}38^{\text{s}},53} \end{aligned}$$

Pour faire l'opération inverse, en gardant le même exemple, on dira :

$$\begin{aligned} 11 \times 15 &= 165 && \text{d'où } 165^{\text{g}} \\ 35 &= 4 \times 8 + 3 \text{ » } 8^{\text{g}}45' \\ 38,53 &= 4 \times 9 + 2,53 \text{ » } \underline{9'37^{\text{''}},95} \\ 11^{\text{h}}35^{\text{m}}38^{\text{s}},53 &= \underline{173^{\text{g}}54'37^{\text{''}},95} \end{aligned}$$

On abrégera en opérant mentalement.

2° Un angle étant exprimé en arc, l'exprimer en degrés et

parties décimales de degré, ou en minutes et parties décimales de minute, ou en secondes et parties décimales de seconde ; et inversement.

On a :

$$1^{\circ} = 60' = 3600'',$$

$$1' = \frac{1^{\circ}}{60} = 60'',$$

$$1'' = \frac{1^{\circ}}{3600} = \frac{1'}{60}$$

On procède pratiquement en ne convertissant jamais que des unités voisines, minutes et degrés, secondes et minutes, à l'aide du multiplicateur ou diviseur commode 60. Ainsi

$$\begin{aligned} 173^{\circ}54'37'',95 &= 173^{\circ}54',6325 = 173^{\circ},91054\dots \\ &= 10434'37'',95 = 10434',6325 \\ &= 626077'',95 \end{aligned}$$

Tous ces calculs se font à vue.

3° Conversion d'une mesure en arc en une mesure en grades, et inversement.

On a

$$1^{\circ} = \frac{10^{\text{g}}}{9}, \quad 1^{\text{g}} = \frac{9^{\circ}}{10}.$$

On passe donc immédiatement de la mesure en degrés et parties décimales de degré à la mesure en grades, et inversement. Ainsi

$$173^{\circ}54'37'',95 = 173^{\circ},91054\dots = 193^{\text{g}},23393\dots$$

Remarquons les rapports suivants entre les unités de même nom dans les deux systèmes :

$$\begin{aligned} 1' &= \frac{100^{\text{g}}}{54} = 1^{\text{g}},85185\dots & 1^{\text{g}} &= \frac{54'}{100} = 32'',4; \\ 1'' &= \frac{1000^{\text{g}}}{324} = 3^{\text{g}},086\dots, & 1'' &= \frac{324^{\text{g}}}{1000} = 0^{\text{g}},324. \end{aligned}$$

4° Conversion d'une mesure en arc en une mesure en radian, et inversement. L'angle droit est mesuré en radian par  $\frac{\pi}{2}$ ; on a donc

$$1^{\text{r}} = \frac{180^{\circ}}{\pi};$$

comme

$$\pi = 3,141\,592\,653\,589\,79\dots$$

et

$$\frac{1}{\pi} = 0,318\,309\,886\,183\,79\dots$$

il vient

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 57^\circ,295\,779\,513\dots \\ &= 3437',746\,77\dots \\ &= 206264'',806\dots \\ &= 57^\circ 17'44'',806\dots \end{aligned}$$

Inversement, on a

$$1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^2, \quad 1' = \left(\frac{\pi}{10800}\right)^2, \quad 1'' = \left(\frac{\pi}{648000}\right)^2.$$

En général pour évaluer un angle en radian, on exprime sa mesure en arc à l'aide de la seconde comme unité, et on divise par le nombre 206 264,806..., dont le logarithme est 5,314 425 1.

L'inverse de ce nombre est la mesure en radian de l'angle de 1'', et par conséquent diffère du nombre  $\sin 1''$  d'une quantité toujours négligeable; aussi désigne-t-on généralement le nombre 206 264,806...

par  $\frac{1}{\sin 1''}$ ; on a  $\log \sin 1'' = \bar{6},685\,574\,9$ .

On convertirait aussi facilement une mesure en grades en une mesure en radian, et inversement; il suffit d'observer que

$$1^\circ = \frac{200^\circ}{\pi} = 63^\circ,661\,9772\dots$$

Comme nous l'avons déjà dit, pour interpréter numériquement une formule analytique où des angles figurent en dehors des signes trigonométriques, il faut toujours regarder ces angles comme exprimés à l'aide du radian comme unité. Si donc, comme on le fait souvent dans la pratique, on veut y maintenir leur mesure en secondes, on ne pourra le faire qu'à condition de multiplier cette mesure par  $\sin 1''$ . On a par exemple les formules connues

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots;$$

si  $\alpha$  est la mesure d'un angle en secondes, on aura donc :

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= 1 - \frac{\alpha^2 \cdot \sin^2 1''}{2} + \frac{\alpha^4 \cdot \sin^4 1''}{24} - \dots, \\ \sin \alpha &= \alpha \sin 1'' - \frac{\alpha^3 \sin^3 1''}{6} + \dots\end{aligned}$$

Si cependant la formule était homogène par rapport aux différents angles qui figurent en dehors des signes trigonométriques, ainsi qu'il arrive généralement des formules dites différentielles, il est clair qu'on pourrait supposer ces angles exprimés à l'aide d'une même unité quelconque.

On rencontre souvent des formules telles que

$$x = a\varphi + b\varphi^2 + c\varphi^3 + \dots,$$

où  $x$  et  $\varphi$  sont des angles,  $a, b, c, \dots$  des coefficients numériques : comme on se représente ordinairement les angles exprimés en arc, on est amené, pour se rendre compte de l'ordre de grandeur des différents termes du second membre, à chercher ce que représente en arc le carré, le cube, ... d'un angle de  $1^\circ$  ou de  $1'$  ou de  $1''$ . Si  $\alpha$  est la mesure d'un angle en secondes, la puissance  $p^e$  de cet angle vaut en radian :  $\alpha^p \sin^p 1''$ , et par suite en arc :  $\alpha^p \sin^{p-1} 1''$ . On voit ainsi que le carré de l'angle de  $1^\circ$  vaut en arc  $63''$  environ ; son cube vaut  $1'', 1$  environ ; le carré de l'angle de  $10'$  vaut  $1'', 7$ , son cube vaut  $0'', 005$  ; etc.

Dans ce qui précède, nous avons regardé la seconde d'arc comme étant en somme l'unité principale pratique : c'est en effet ce qui arrive dans l'astronomie de précision. Pour des recherches moins précises, on emploie de préférence la minute d'arc : si alors  $\alpha$  est la mesure d'un angle en minutes, sa mesure en radian sera  $\frac{\alpha}{3437,74\dots}$ , ce que l'on écrira d'une façon suffisamment exacte sous la forme  $\alpha \cdot \sin 1'$  ; on a d'ailleurs :  $\log 3437,73\dots = 3,53627$ ,  $\log \sin 1' = \bar{4},46373$ . On procède ainsi en particulier en navigation, où l'unité de longueur, le mille marin, est précisément la longueur de l'arc d'une minute sur le méridien terrestre regardé comme circulaire, soit  $\frac{10\,000\,000^m}{5400} = 1851^m,85\dots$  : la mesure d'un arc de grand cercle en minutes à la surface de la Terre est donc aussi la mesure de sa longueur en milles.

**Notions sur les erreurs numériques.** — D'une façon générale, on ne peut opérer réellement dans un calcul que sur des valeurs approchées des nombres qui y figurent. Si  $a'$  est la valeur approchée d'un nombre dont la valeur exacte est  $a$ , la différence  $a - a'$ , c'est à-dire ce qu'il faut ajouter à la valeur approchée pour obtenir la valeur exacte, est l'*erreur absolue*, ou plus simplement, l'erreur commise sur  $a$ .

L'*erreur relative* commise en remplaçant la valeur exacte  $a$  par sa valeur approchée  $a'$  est la valeur absolue du quotient  $\frac{a - a'}{a}$ .

Les propositions fondamentales relatives à la théorie des erreurs numériques se résument dans les énoncés suivants :

1° L'erreur absolue d'une somme algébrique est égale à la somme algébrique des erreurs absolues des différents termes de la somme, car

$$a + b + c + \dots - (a' + b' + c' + \dots) = (a - a') + (b - b') + (c - c') + \dots$$

2° Si l'on considère les erreurs relatives comme de petites quantités du premier ordre, et que l'on consente à négliger les quantités du second ordre, l'erreur relative d'un produit ou d'un quotient est au plus égale à la somme des erreurs relatives des termes de ce produit ou de ce quotient. En effet, en désignant par  $d$  la caractéristique des différentielles, on a par exemple

$$\frac{d \frac{ab}{c}}{\frac{ab}{c}} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} - \frac{dc}{c}.$$

Comme corollaire de ce dernier énoncé, l'erreur relative de  $a^p$  est égale à  $p$  fois l'erreur relative de  $a$ , quel que soit  $p$ .

Ces théorèmes permettent de fixer une limite supérieure de l'erreur commise sur le résultat d'un calcul quand on connaît les erreurs des données, du moins quand le nombre des opérations à effectuer est petit. Mais dès que ce nombre devient un peu grand, l'application rigoureuse des propositions précédentes devient impraticable, et conduirait d'ailleurs à des résultats inadmissibles en général, ainsi que nous allons le montrer par un exemple.

Supposons donné un nombre approché à  $\frac{1}{100}$  près; il est bien

clair que si nous le multiplions par 100, nous ne pourrions dire qu'une chose, c'est que le résultat est approché à 1 près. Mais supposons donnés 100 nombres différents et d'origines diverses, approchés chacun à  $\frac{1}{100}$  près ; rigoureusement parlant, leur somme sera approchée à 1 près seulement ; il est à présumer cependant que l'approximation obtenue sera beaucoup plus grande, car il est *probable* que les erreurs commises sur les nombres donnés se compensent en grande partie.

Si alors on réfléchit aux conséquences des propositions énoncées, on verra que d'une façon générale, et à moins de circonstances particulièrement défavorables, on doit, dans un calcul, employer tous les nombres sur lesquels on opère successivement, avec le même nombre de chiffres significatifs, et que l'on peut compter dans le résultat sur l'exactitude d'autant de chiffres significatifs que l'on en a conservé partout. Les circonstances défavorables ici envisagées se produiront notamment lorsque les erreurs s'accumuleront en grande majorité dans le même sens, ce que l'on peut quelquefois prévoir, et ce qui d'autres fois ne sera qu'un hasard malheureux ; ou bien encore lorsqu'on rencontrera dans le courant du calcul une soustraction arithmétique entre deux nombres ayant en commun quelques-uns de leurs premiers chiffres : il est clair en effet que dans ce cas l'erreur relative de la différence est beaucoup plus grande que celle de chacun des deux termes. Cette dernière circonstance peut quelquefois être évitée par une transformation convenable du calcul ; dans d'autres cas, elle tient à la nature même de la question et est inéluctable. C'est ainsi que si l'on donne à  $\frac{1}{2}$  unité près de la dernière décimale  $\sqrt{50} = 7,0711$ , pour calculer  $\sqrt{50} - 7$ , on peut faire mieux que directement ; on a en effet

$$\sqrt{50} - 7 = \frac{1}{\sqrt{50} + 7} = \frac{1}{14,0711} = 0,0710676$$

avec une erreur relative inférieure à  $\frac{1}{250\,000}$  ; tandis que directement le résultat est 0,0711 avec une erreur relative inférieure à  $\frac{1}{1\,400}$  seulement. Mais si l'on avait à calculer la différence  $a - 7$



sachant simplement que la valeur approchée de  $a$  est 7,0711, sans autre renseignement, il est clair qu'il n'y aurait rien à gagner à opérer autrement que d'une façon directe.

On exécute donc généralement un calcul avec un nombre déterminé de chiffres : le choix de ce nombre dépend naturellement de la précision que l'on veut obtenir au résultat, mais dépend aussi de la précision des données, lorsque celles-ci, ainsi qu'il arrive généralement dans la pratique, ne sont connues que d'une façon approximative : il est manifeste en effet, qu'il n'y a pas lieu de calculer avec 7 chiffres si les données ont 4 chiffres exacts au plus. Il y a d'ailleurs avantage souvent à calculer avec un ou deux chiffres de plus qu'on n'en veut garder au résultat, lorsque le calcul est long, afin d'éviter l'accumulation des erreurs.

Si, d'une façon ou d'une autre, on est amené à supprimer des chiffres à la droite d'un nombre, afin de le ramener au nombre voulu de chiffres, on forcera d'une unité le dernier chiffre conservé toutes les fois que le premier des chiffres supprimés sera égal ou supérieur à 5 : de cette façon l'erreur sera autant que possible réduite à avoir pour limite supérieure  $1/2$  unité de l'ordre du dernier chiffre conservé. Il est clair d'ailleurs, que si l'on s'apercevait qu'en appliquant strictement cette règle, on accumule les erreurs dans le même sens, on pourrait s'en affranchir de façon à amener autant que possible, au contraire, la compensation probable des erreurs.

D'habitude, on calcule à l'aide de logarithmes, et nous verrons plus loin comment on apprécie les erreurs nouvelles introduites par l'usage des Tables. Cependant, dans bien des cas, il y a des multiplications ou des divisions qu'il est plus simple de faire directement surtout quand on se sert des opérations abrégées. Donnons seulement un exemple pour rappeler leur usage.

Soit à calculer  $ab$  avec deux chiffres décimaux, sachant que

$$a = 314,159 \qquad b = 2,71828.$$

On écrit le multiplicateur sous le multiplicande, en le renversant, et de façon que le chiffre des unités du multiplicateur soit sous le deuxième chiffre décimal du multiplicande ; puis on multiplie chaque chiffre du multiplicateur par la partie du multiplicande située à gauche et se terminant à ce chiffre ; on tient

d'ailleurs compte à vue de la retenue que fournirait la partie négligée du multiplicande; on écrit les produits partiels les uns au-dessous des autres, de façon qu'ils se terminent à la même colonne; on les additionne et on sépare deux chiffres décimaux à leur somme; on obtient ainsi le résultat avec une approximation toujours très satisfaisante.

$$\begin{array}{r}
 314,159 \\
 82817,2 \\
 \hline
 62832 \\
 21991 \\
 314 \\
 251 \\
 6 \\
 3 \\
 \hline
 853,97
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 314,159 \\
 2,71828 \\
 \hline
 2513272 \\
 628318 \\
 2513272 \\
 314159 \\
 2199113 \\
 628318 \\
 \hline
 853,97212652
 \end{array}$$

Pour justifier la règle il suffit de comparer l'opération abrégée à l'opération complète ordinaire : on voit que dans l'opération abrégée on ne fait que supprimer tout ce qui est inutile dans l'opération ordinaire pour obtenir le résultat cherché.

S'il s'agit maintenant de diviser 853,97 par 314,159, on fait l'opération inverse en employant les diviseurs successifs 31415, 3141, 314, 31, 3, et en tenant compte des retenues dues à la partie négligée du diviseur dans le calcul des restes :

$$\begin{array}{r|l}
 853,97 & 314,159 \\
 22565 & 2,7183 \\
 574 & \\
 260 & \\
 9 & \\
 0 &
 \end{array}$$

**Interpolation.** — Soit  $f(x)$  une fonction réelle de la variable réelle  $x$  dans l'intervalle où on l'envisage, admettant des dérivées de tous les ordres. Il faut pouvoir calculer  $f(x)$  pour toute valeur de  $x$  ; mais ce calcul serait souvent pénible, et même presque impraticable, s'il fallait le faire directement en partant de la définition de  $f(x)$ . Alors on réduit la fonction  $f(x)$  en table, et une telle table est construite généralement de façon à fournir les valeurs de  $f(x)$  pour une série d'arguments formant une progression arithmétique. L'*interpolation* permet alors de calculer la fonction

$f(x)$ , et même ses dérivées et ses intégrales, pour toute valeur de  $x$  avec une approximation que l'on peut évaluer.

Il existe bien des procédés d'interpolation : nous nous bornerons ici à la formule de Newton et à ses conséquences directes.

Définissons d'abord les *différences* d'une fonction  $f(x)$  relatives à l'intervalle constant  $h$ . La différence première est la fonction

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x);$$

la différence seconde est la différence de la différence première :

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x + h) - \Delta f(x);$$

et ainsi de suite.

Étant donnée une fonction réduite en table, l'intervalle de l'argument étant  $h$ , rien n'est plus simple que de former le tableau de ses différences successives :

Argument	Fonction	Diff. 1ère	Diff. 2ème	Diff. 3ème	Diff. 4ème
$x_0$	$f(x_0)$	$\Delta f(x_0)$	$\Delta^2 f(x_0)$	$\Delta^3 f(x_0)$	$\Delta^4 f(x_0)$
$x_0 + h$	$f(x_0 + h)$	$\Delta f(x_0 + h)$	$\Delta^2 f(x_0 + h)$	$\Delta^3 f(x_0 + h)$	$\Delta^4 f(x_0 + h)$
$x_0 + 2h$	$f(x_0 + 2h)$	$\Delta f(x_0 + 2h)$	$\Delta^2 f(x_0 + 2h)$	$\Delta^3 f(x_0 + 2h)$	»
$x_0 + 3h$	$f(x_0 + 3h)$	$\Delta f(x_0 + 3h)$	$\Delta^2 f(x_0 + 3h)$	»	»
$x_0 + 4h$	$f(x_0 + 4h)$	$\Delta f(x_0 + 4h)$	»	»	»
$x_0 + 5h$	$f(x_0 + 5h)$	»	»	»	»

Dans chaque colonne, chaque terme est la différence entre les deux termes de la colonne précédente placés en-dessous et en regard du terme considéré; ainsi :

$$\Delta^2 f(x_0 + h) = \Delta f(x_0 + 2h) - \Delta f(x_0 + h).$$

On vérifie immédiatement la relation connue

$$f(x_0 + ph) = f(x_0) + C_p^1 \Delta f(x_0) + C_p^2 \Delta^2 f(x_0) + C_p^3 \Delta^3 f(x_0) + \dots,$$

où  $p$  désigne un entier positif, et où  $C_p^q$  est le nombre des combinaisons simples de  $p$  objets  $q$  à  $q$ , de sorte que

$$C_p^q = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q}.$$

Rendons-nous compte tout d'abord de l'ordre de grandeur des différences des divers ordres. D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h),$$

en employant la notation ordinaire des dérivées, et désignant par  $\theta$  un nombre compris entre 0 et 1.

D'après ce résultat, on a alors :

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta [\Delta f(x)] = h [\Delta f(x+\theta h)]' \\ &= h [f'(x+\theta h+h) - f'(x+\theta h)] \\ &= h^2 f''(x+\theta h+\theta' h), \end{aligned}$$

en désignant par  $\theta'$  un nombre analogue à  $\theta$ .

Finalement,  $\lambda$  étant compris entre 0 et 2, on a

$$\Delta^2 f(x) = h^2 f''(x+\lambda h).$$

On peut continuer de même, et écrire :

$$\begin{aligned} \Delta^3 f(x) &= \Delta^2 [\Delta f(x)] = h^3 [\Delta f(x+\lambda h)]'' \\ &= h^3 [f''(x+\lambda h+h) - f''(x+\lambda h)] \\ &= h^3 f'''(x+\lambda h+\theta'' h) \\ &= h^3 f'''(x+\mu h), \end{aligned}$$

$\mu$  étant compris entre 0 et 3.

Généralement, on aura

$$\Delta^p f(x) = h^p f^{(p)}(x+\sigma h),$$

$\sigma$  étant un nombre compris entre 0 et  $p$ .

On voit par là que la différence  $p^{\text{ème}}$  de  $f(x)$  est de l'ordre du produit de  $h^p$  par la dérivée  $p^{\text{ème}}$  de  $f(x)$ .

Etablissons maintenant la formule de Newton sous sa forme la plus générale. Désignons par  $\psi_m(x)$  la fonction  $\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$ , où  $m$  représente un entier positif, et pour la généralité des notations, faisons

$$\psi_0(x) = 1, \quad \Delta^0 f(x) = f(x), \quad f^{(0)}(x) = f(x).$$

Ecrivons alors, en appelant  $q$  un entier positif ou nul, et  $p$  un entier supérieur ou égal à  $q$  :

$$h^q f^{(q)}(x_0 + zh) = \sum_{m=0}^{m=p} \frac{d^q \psi_m(x)}{dz^q} \Delta^m f(x_0) + A \frac{d^q \psi_{p+1}(x)}{dz^q},$$

$A$  étant une constante déterminée par cette égalité même. Envisageons la fonction d'une variable  $t$  :

$$\varphi(t) = h^q f^{(q)}(x_0 + th) - \sum_0^p \frac{d^q \psi_m(t)}{dt^q} \Delta^m f(x_0) - A \frac{d^q \psi_{p+1}(t)}{dt^q};$$

d'après la définition de  $A$ , on a  $\varphi(\alpha) = 0$ ; d'autre part on peut écrire

$$\varphi(t) = \frac{d^q}{dt^q} \left[ f(x_0 + th) - \sum_0^p \psi_m(t) \Delta^m f(x_0) - A \psi_{p+1}(t) \right].$$

Dans cette dernière formule, le crochet qui figure au second membre s'annule pour les valeurs  $0, 1, 2, \dots, p$  de  $t$  : ceci résulte de ce qui a été dit pour  $f(x_0 + ph)$ ,  $p$  étant un entier positif, et de la forme de  $\psi_{p+1}(t)$ ; l'application répétée du théorème de Rolle montre alors que  $\varphi(t)$  s'annule au moins pour  $p + 1 - q$  valeurs de  $t$ , comprises entre  $0$  et  $p$ , et en outre, d'après ce qui a été dit, pour  $t = \alpha$ .

Le même théorème montre encore par suite que la dérivée d'ordre  $p + 1 - q$  de  $\varphi(t)$  s'annule au moins une fois pour une valeur de  $t$  comprise entre le plus petit et le plus grand des nombres  $0, p, \alpha$ , soit  $\zeta$ ; mais d'après la définition des  $\psi_m$ , cette dérivée se réduit à

$$h^{p+1} f^{(p+1)}(x_0 + th) - A;$$

il vient donc

$$A = h^{p+1} f^{(p+1)}(x_0 + \theta h),$$

et l'on a en tenant compte de la valeur de  $\psi_m$ , la formule générale :

$$h^q f^{(q)}(x_0 + zh) = \Delta^q f(x_0) + \frac{d^q \psi_{q+1}(x)}{dz^q} \Delta^{q+1} f(x_0) + \dots + \frac{d^q \psi_p(x)}{dz^q} \Delta^p f(x_0) + h^{p+1} \frac{d^q \psi_{p+1}(x)}{dz^q} f^{(p+1)}(x_0 + \theta h).$$

Pour  $q = 0$ , on a la formule de Newton proprement dite :

$$f(x_0 + \alpha h) = f(x_0) + \frac{\alpha}{1} \Delta f(x_0) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 f(x_0) + \dots \\ + \psi_p(\alpha) \Delta^p f(x_0) + h^{p+1} \psi_{p+1}(\alpha) f^{(p+1)}(x_0 + \theta h).$$

Pour  $q = 1$ , on a la formule souvent employée :

$$hf'(x_0 + \alpha h) = \Delta f(x_0) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \Delta^2 f(x_0) + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + \frac{1}{3}\right) \Delta^3 f(x_0) \\ + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{3}{4} \alpha^2 + \frac{11}{12} \alpha - \frac{1}{4}\right) \Delta^4 f(x_0) + \dots$$

Quand il s'agit d'appliquer ces formules, on les considère en général comme des séries dont la convergence est révélée par l'allure que manifestent les termes successifs, et l'on ne se préoccupe pas du terme complémentaire : il serait d'ailleurs le plus souvent impossible de calculer ce terme, et tout ce qu'on en peut dire d'ordinaire, d'après ce qui a été démontré plus haut, c'est qu'il est de l'ordre de  $\Delta^{p+1}f(x_0)$ ; comme les différences successives de  $f(x)$  décroissent d'habitude assez rapidement, on voit que la convergence des séries employées est très suffisante pour obtenir sans peine un résultat pratiquement satisfaisant.

Intégrons actuellement par rapport à  $\alpha$  la formule même de Newton, entre les limites 0 et  $\alpha$ ; on a

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0 + \alpha h} f(x) dx = \alpha f(x_0) + \frac{\alpha^2}{2} \Delta f(x_0) + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2}{4}\right) \Delta^2 f(x_0) \\ + \left(\frac{\alpha^4}{24} - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^2}{6}\right) \Delta^3 f(x_0) + \dots \\ + \Delta^p f(x_0) \int_0^\alpha \psi_p(t) dt \\ + h^{p+1} \int_0^\alpha \psi_{p+1}(t) f^{(p+1)}(x_0 + \theta h) dt;$$

dans le dernier terme, ou terme complémentaire,  $\theta$  varie avec la variable d'intégration  $t$ . Supposons que  $t$  variant de 0 à  $\alpha$ , la quantité  $\psi_{p+1}(t) = \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-p)}{1 \cdot 2 \dots (p+1)}$  conserve un signe constant, ou en d'autres termes, que l'on ait  $\alpha < 1$ ; alors, d'après une pro-

position élémentaire de calcul intégral, le terme complémentaire pourra être mis sous la forme

$$h^{p+1}A \int_0^{\alpha} \psi_{p+1}(t) dt,$$

A ayant une valeur moyenne entre les diverses valeurs de

$$f^{(p+1)}(x_0 + \theta h),$$

et par suite pouvant être mis lui-même sous la forme  $f^{(p+1)}(x_0 + \lambda h)$ ,  $\lambda$  étant intermédiaire entre le plus petit et le plus grand des nombres 0,  $p$ ,  $\alpha$ .

En particulier, et sans nous préoccuper davantage du terme complémentaire, pour les mêmes raisons que précédemment, on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx &= f(x_0) + \frac{1}{2} \Delta f(x_0) - \frac{1}{12} \Delta^2 f(x_0) \\ &+ \frac{1}{24} \Delta^3 f(x_0) - \frac{19}{720} \Delta^4 f(x_0) + \dots; \end{aligned}$$

augmentons successivement  $x_0$  de  $h$  dans cette formule, jusqu'à écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_0+(n-1)h}^{x_0+nh} f(x) dx &= f(x_0+(n-1)h) \\ &+ \frac{1}{2} \Delta f(x_0+(n-1)h) - \frac{1}{12} \Delta^2 f(x_0+(n-1)h) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

$n$  désignant un entier positif, puis ajoutons les résultats ainsi obtenus; comme on vérifie immédiatement que l'on a

$$\Delta f(x_0) + \Delta f(x_0+h) + \dots + \Delta f(x_0+(n-1)h) = f(x_0+nh) - f(x_0),$$

il viendra

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x) dx &= \sum_{p=0}^{p=n-1} f(x_0+ph) + \frac{1}{2} [f(x_0+nh) - f(x_0)] \\ &- \frac{1}{12} [\Delta f(x_0+nh) - \Delta f(x_0)] \\ &+ \frac{1}{24} [\Delta^2 f(x_0+nh) - \Delta^2 f(x_0)] \\ &- \frac{19}{720} [\Delta^3 f(x_0+nh) - \Delta^3 f(x_0)] + \dots; \end{aligned}$$

Les coefficients numériques successifs de cette série sont d'ailleurs

$$\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{24}, \quad -\frac{19}{720}, \quad \frac{3}{160}, \quad -\frac{863}{60480}, \quad \frac{275}{24192}, \dots$$

Cette formule, jointe à celle qui donne  $\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0 + ah} f(x) dx$  pour  $0 < \alpha < 1$ , permet de calculer l'intégrale  $\int f(x) dx$  entre deux limites quelconques; procéder ainsi, c'est ce qu'on appelle faire une *quadrature mécanique*. Il faut d'ailleurs ajouter que l'on peut appliquer dans bien des cas des formules plus avantageuses, qui ne peuvent trouver leur place ici.

Il est clair encore que l'on peut aller plus loin dans la même voie en considérant l'intégrale  $\iint f(x) dx^2$ , et ainsi de suite.

Montrons l'application des formules précédentes dans le cas de la fonction simple  $\sin x$ ; je fais  $h = 3^\circ$ , et à l'aide d'une table des valeurs de  $\sin x$ , je forme le tableau suivant, où les différences sont exprimées en unités de la huitième décimale :

Angle	Sinus	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$	$\Delta^5$
60°	0,86602540	2498112	- 244218	- 6179	688	13
63°	0,89100652	2253894	- 250397	- 5491	701	»
66°	0,91354546	2003497	- 255888	- 4790	»	»
69°	0,93358043	1747609	- 260678	»	»	»
72°	0,95105652	1486931	»	»	»	»
75°	0,96592583	»	»	»	»	»

Proposons-nous d'abord de calculer  $\sin 62^\circ$ , de sorte que l'on doit se servir des nombres de la première ligne, et faire  $\alpha = \frac{2}{3}$ ; d'une façon générale, on doit prendre  $\alpha$  compris entre 0 et 1, afin de diminuer le plus possible le terme complémentaire. Ecrivons la formule de Newton sous la forme :

$$f(x_0 + ah) = f(x_0) + \alpha \left\{ \Delta + \frac{\alpha-1}{2} \left[ \Delta^2 + \frac{\alpha-2}{3} \left[ \Delta^3 + \frac{\alpha-3}{4} \left[ \Delta^4 + \frac{\alpha-4}{5} (\Delta^5 + \dots) \right] \right] \right] \right\};$$



Ici

$$z = \frac{2}{3}, \quad \frac{z-1}{2} = -\frac{1}{6}, \quad \frac{z-2}{3} = -\frac{4}{9},$$

$$\frac{z-3}{4} = -\frac{7}{12}, \quad \frac{z-4}{5} = -\frac{2}{3}, \dots;$$

on a donc, en commençant le calcul par la fin :

$$\begin{aligned} \frac{z-4}{5} \Delta^5 &= -9, & \Delta^4 + \dots &= 679, \\ \frac{z-3}{4} (\Delta^4 + \dots) &= -396, & \Delta^3 + \dots &= -6575, \\ \frac{z-2}{3} (\Delta^3 + \dots) &= 2922, & \Delta^2 + \dots &= -241296, \\ \frac{z-1}{2} (\Delta^2 + \dots) &= 40216, & \Delta + \dots &= 2538328 \\ \sigma(\Delta + \dots) &= 1692219, & \sin 62^\circ &= 0,88294759. \end{aligned}$$

C'est le résultat même que fournit la table.

Cherchons maintenant la dérivée de  $\sin x$  pour  $x = 62^\circ$ ;  $h$  vaut  $3^\circ$ , c'est à dire  $\frac{\pi}{60}$ ; on aura donc pour la dérivée cherchée en remplaçant  $z$  par  $\frac{2}{3}$  dans la formule générale :

$$\frac{60}{\pi} \left[ \Delta + \frac{1}{6} \Delta^2 - \frac{1}{9} \Delta^3 + \frac{25}{324} \Delta^4 - \frac{139}{2430} \Delta^5 + \dots \right].$$

On a le crochet par l'addition

$$\left. \begin{array}{r} + 2498112 \\ - 40703 \\ + 687 \\ + 53 \\ - 1 \end{array} \right\} = 2458148.$$

Multipliant par  $\frac{60}{\pi} = 19,09859$ , on a avec sept chiffres exacts pour le résultat cherché, c'est-à-dire  $\cos 62^\circ : 0,4694716$ .

Calculons enfin l'intégrale  $\int_0^{62^\circ} \sin x dx$ ; nous la décomposerons en deux parties :

$$J_1 = \int_0^{60^\circ} \sin x dx, \quad J_2 = \int_{60^\circ}^{62^\circ} \sin x dx.$$

Pour calculer la première partie, on applique la formule qui

donne  $\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx$  en faisant  $x_0 = 0$ ,  $n = 20$ . Il faut donc former d'abord le tableau analogue au précédent :

Angle	Sinus	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
0°	0	5233596	— 14346	— 14303	73
3°	0,05233596	5219250	— 28649	— 14230	»
6°	0,10452846	5190601	— 42879	»	»
9°	0,15643447	5147722	»	»	»
12°	0,20791169	»	»	»	»

Il faut calculer aussi la somme  $\sin 0^\circ + \sin 3^\circ + \sin 6^\circ + \dots + \sin 57^\circ$  ; ceci se fait directement, ou bien en employant la formule qui donne la somme des sinus d'arcs en progression arithmétique, ce qui conduit ici à  $\frac{\cos 1^\circ,5 - \cos 58^\circ,5}{2 \sin 1^\circ,5}$  ; d'une façon ou de l'autre on obtient 9,1141021.

Par suite

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{\pi}{60} [9,1141021 + 0,4330127 + 0,0022796 \\
 &\quad - 0,0000958 - 0,0000021 + 0,0000001] \\
 &= \frac{9,5492966}{19,0985932} = 0,50000000.
 \end{aligned}$$

Pour calculer maintenant  $J_2$ , on applique la formule qui donne

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x) dx, \text{ d'où ;}$$

$$J_2 = \frac{\pi}{60} \left\{ \frac{2}{3} \sin 60^\circ + \frac{2}{9} \Delta - \frac{5}{81} \Delta^2 + \frac{8}{243} \Delta^3 - \frac{157}{7290} \Delta^4 + \dots \right\};$$

le crochet donne

$$\left. \begin{array}{r}
 + 0,5773503 \\
 + \quad 55514 \\
 + \quad 1508 \\
 - \quad 20 \\
 - \quad 1
 \end{array} \right\} = 0,5830504;$$

multipliant par  $\frac{\pi}{60}$  ou 0,05235988, il vient  $J_2 = 0,03052845$ ; finalement l'intégrale cherchée vaut 0,53052845; elle est d'ailleurs égale à  $1 - \cos 62^\circ$ , et la table donne  $\cos 62^\circ = 0,46947156$ : l'erreur est d'une unité du huitième ordre décimal et rentre dans les erreurs inévitables.

La formule de Newton peut servir aussi à résoudre le problème inverse de celui qui vient de nous occuper, c'est à-dire à calculer  $x$  connaissant  $f(x_0 + \alpha h)$ : il suffira de la considérer comme une équation en  $\alpha$ , que l'on résoudra par approximations successives, en l'ordonnant par exemple par rapport à  $\alpha$ .

**Usage des tables de logarithmes.** — Appliquons les principes qui précèdent à l'emploi des tables usuelles de logarithmes et considérons d'abord les logarithmes des nombres. Raisonnons par exemple sur une table qui donne les logarithmes ordinaires des nombres depuis 1000 jusqu'à 10000 avec cinq décimales. La recherche du logarithme d'un nombre quelconque peut toujours se ramener à celle du logarithme d'un nombre de la forme  $x_0 + \alpha$ ,  $x_0$  étant un nombre de la table et  $\alpha$  étant compris entre 0 et 1; l'intervalle  $h$  de la table est d'ailleurs ici égal à 1. Appliquons d'abord rigoureusement la formule de Newton sous la forme

$$f(x_0 + \alpha h) = f(x_0) + \alpha \Delta f(x_0) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \frac{h^2 f''(x_0 + \theta h)}{2},$$

$\alpha$  et  $\theta$  étant compris entre 0 et 1.

Ici on a

$$h = 1, \quad f(x) = \log x, \quad f'(x) = \frac{M}{x}, \quad f''(x) = -\frac{M}{x^2},$$

en désignant par  $M$  le module des logarithmes décimaux, soit

$$M = 0,4342945;$$

$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$  est une quantité négative inférieure en valeur absolue

à  $\frac{1}{8}$ ; enfin  $x_0$  est supérieur ou égal à 1000.

Le terme complémentaire est donc toujours positif et inférieur à  $\frac{M}{8 \cdot 10^6}$ , ou à 0,00000,006. Il en résulte que dans le calcul des logarithmes des nombres à cinq décimales, on peut toujours négli-

ger sans aucune crainte le terme complémentaire et se contenter de l'interpolation *linéaire* qui correspond à la formule simple :

$$f(x_0 + \alpha h) = f(x_0) + \alpha \Delta f(x_0);$$

le fait que le terme complémentaire est toujours positif montre de plus que s'il y avait quelque doute sur l'opportunité de forcer le dernier chiffre conservé, il vaudrait mieux forcer.

Il faut maintenant observer que la table ne donne pas les valeurs rigoureuses de  $\log x_0$  et de  $\log(x_0 + 1)$ , c'est-à-dire de  $\log x_0$  et de  $\Delta \log x_0$ ; si  $f_0$  et  $f_1$  sont les nombres inscrits dans la Table pour  $\log x_0$  et  $\log(x_0 + 1)$ , on a :

$$\log x_0 = f_0 + \varepsilon, \quad \log(x_0 + 1) = f_1 + \varepsilon',$$

les erreurs  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$  étant inférieures en valeur absolue à  $\frac{1}{2}$  unité du cinquième ordre décimal. On a par suite

$$\begin{aligned} \log(x_0 + \alpha h) &= f_0 + \varepsilon + \alpha(f_1 - f_0 + \varepsilon' - \varepsilon) \\ &= f_0 + \alpha D + \alpha \varepsilon' + (1 - \alpha)\varepsilon. \end{aligned}$$

en appelant  $D$  la différence *tabulaire*  $f_1 - f_0$ .

Si enfin j'appelle  $k$  la valeur du produit  $\alpha D$  à  $\frac{1}{2}$  unité près du cinquième ordre, de sorte que

$$\alpha D = k + \varepsilon'', \quad \text{avec } |\varepsilon''| < \frac{1}{2 \cdot 10^5}$$

il vient :

$$\log(x_0 + \alpha h) = f_0 + k + \varepsilon'' + \alpha \varepsilon' + (1 - \alpha)\varepsilon.$$

En fait on prend pour valeur de  $\log(x_0 + \alpha h)$  le nombre  $f_0 + k$ ; l'erreur commise est donc  $\varepsilon'' + \alpha \varepsilon' + (1 - \alpha)\varepsilon$ ;  $\alpha$  et  $1 - \alpha$  étant positifs, elle est plus petite en valeur absolue que la somme des modules de ses termes, et *a fortiori* que  $\frac{1}{2 \cdot 10^5} (1 + \alpha + 1 - \alpha)$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{10^5}$ .

Ainsi l'erreur commise en se servant de la table est inférieure en valeur absolue à une unité du cinquième ordre décimal. C'est ce qu'on peut appeler l'erreur *instrumentale*, due à l'emploi de la table qui est un *instrument*, nécessairement imparfait.

A cette erreur viendra s'en ajouter une autre, si contrairement à

ce que nous avons supposé, le nombre donné  $x$  dont on cherche le logarithme n'est pas connu exactement ; cette nouvelle erreur due à l'erreur des données est distincte de la première qui ne tient qu'au mode de calcul : elle ne diminuera pas si l'on emploie un instrument plus parfait, par exemple une table à dix décimales. Pour apprécier cette erreur, on la considérera comme infiniment petite du premier ordre et on appliquera la méthode des formules différentielles, qui donne ici

$$d \log x = \frac{M}{x} dx ;$$

d'ailleurs  $\frac{M}{x}$  est sensiblement égal à la différence tabulaire  $D$ , d'après la formule de Newton appliquée au calcul des dérivées ; donc

$$d \log x = D \cdot dx,$$

ainsi qu'on le trouverait directement en partant de la formule de l'interpolation linéaire. Si l'on donne par exemple  $x$  avec cinq chiffres, de façon que  $dx$  soit inférieur à  $\frac{1}{2 \cdot 10}$ , l'erreur de  $\log x$  sera inférieure en valeur absolue à  $\frac{D}{2 \cdot 10}$  ; si  $D = 40$  unités du cinquième ordre décimal, cette limite est de deux unités du même ordre.

Etudions maintenant le problème inverse : soit  $y$  le logarithme donné d'un nombre de la forme  $x_0 + z$  ( $0 < z < 1$ ), et cherchons  $z$ . D'après la formule de l'interpolation linéaire, on aura avec une approximation plus que suffisante

$$z = \frac{y - f(x_0)}{\Delta f(x_0)},$$

ou bien

$$z = \frac{y - f_0 - \varepsilon}{D + \varepsilon' - \varepsilon};$$

en fait, on prend  $z = \frac{y - f_0}{D}$ , et l'on commet ainsi une erreur qu'il faut apprécier. Si  $\varepsilon' - \varepsilon$  est suffisamment petit par rapport à  $D$ , on peut écrire d'une façon sensiblement exacte

$$\frac{1}{D + \varepsilon' - \varepsilon} = \frac{1}{D} + \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{D^2},$$

et par suite

$$z = \frac{y - f_0}{D} - \frac{\varepsilon}{D} \left( 1 - \frac{y - f_0}{D} \right) - \frac{\varepsilon'}{D} \frac{y - f_0}{D},$$

en négligeant les termes du second ordre.

$\frac{y - f_0}{D}$  et  $1 - \frac{y - f_0}{D}$  étant positifs et inférieurs à 1,  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  étant en valeur absolue plus petits que  $\frac{1}{2 \cdot 10^5}$ , on voit que l'erreur commise en prenant  $z = \frac{y - f_0}{D}$ , a pour limite supérieure  $\frac{1}{2 \cdot 10^5 D}$ ; si l'on exprime, ainsi qu'on le fait d'habitude, D en unités du cinquième ordre décimal, cette limite devient  $\frac{1}{2D}$ . On voit qu'elle varie sensiblement avec D; petite au commencement de la table où D = 43, elle devient grande à la fin où D = 4.

Si l'on ne conserve que cinq chiffres au nombre cherché  $z$ , on commet encore une autre erreur en réduisant  $\frac{y - f_0}{D}$  à un seul chiffre. Enfin, si  $y$  est affecté de l'erreur  $dy$ , on voit que  $z$  sera affecté de l'erreur  $\frac{dy}{D}$ , qui grandit lorsque D diminue.

Si, comme il arrive avec d'autres tables, la différence D était encore plus petite que dans le cas qui nous occupe, les raisonnements que nous avons faits cesseraient d'être légitimes, et il est manifeste en effet que l'incertitude sur  $z$  serait considérable.

Passons maintenant à l'usage des tables de logarithmes pour les lignes trigonométriques, c'est-à-dire des tables de logarithmes pour les sinus et les tangentes, puisqu'on peut toujours considérer que l'on est ramené aux cas correspondants. Nous supposons encore qu'il s'agit d'une table à cinq décimales, établie de minute en minute sexagésimale; l'intervalle  $h$  de la table sera donc ici  $h' = \frac{\pi}{10800}$ , et un arc  $x$  quelconque sera de la forme  $x_0 + \alpha h$ ,  $x_0$  étant un nombre entier de minutes,  $\alpha$  un nombre compris entre 0 et 1.

La formule de Newton étant prise sous la forme exacte :

$$f(x_0 + \alpha h) = f(x_0) + \alpha \Delta f(x_0) + \frac{\alpha(\alpha - 1)h^2}{2} f''(x_0 + \theta h),$$

observons que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{d(\log \sin x)}{dx} &= M \cotg x, & \frac{d^2(\log \sin x)}{dx^2} &= -\frac{M}{\sin^2 x}, \\ \frac{d(\log \operatorname{tg} x)}{dx} &= 2M \operatorname{cosec} 2x, & \frac{d^2(\log \operatorname{tg} x)}{dx^2} &= -\frac{4M \cos 2x}{\sin^2 2x}, \end{aligned}$$

pour la table des sinus, le terme complémentaire est donc positif et inférieur à  $\frac{Mh^2}{8 \sin^2 x_0}$ ; pour la table des tangentes, en supposant  $x_0 < 45^\circ$ , ce qu'on peut toujours faire, le terme complémentaire est encore positif et inférieur à  $\frac{Mh^2 \cos 2x_0}{2 \sin^2 2x_0}$ .

Voici les valeurs approchées communes de ces limites pour les petites valeurs de  $x_0$  :

$x_0$	$\frac{Mh^2}{8 \sin^2 x_0}$
1°	0,00001.51
2°	0,00000.38
3°	0,00000.17
4°	0,00000.094
5°	0,00000.060

On voit par là que c'est tout au plus à partir de 3° que l'interpolation linéaire devient légitime. En fait, on ne l'applique pour les sinus que si  $x_0$  est supérieur à 3°, par suite pour les cosinus que si  $x_0$  est inférieur à 87°, pour les tangentes et cotangentes, que si  $x_0$  est compris entre 3° et 87°; dans les autres cas, on procédera comme il sera indiqué plus bas.

L'interpolation linéaire étant supposée légitime, tout ce qui a été dit plus haut sur les erreurs qui en résultent, quand il s'agissait de la table des logarithmes des nombres, subsistera ici. On voit en particulier que la détermination d'un angle par son log sin ou son log tang sera d'autant plus avantageuse que la différence tabulaire D sera plus grande; pour le log sin, cette différence exprimée en unités de la cinquième décimale diminue constamment comme l'indique le tableau suivant :

$x_0$	D	23°	30
3°	240	32°	20
6°	120	52°	10
12°	60	70°	5

Il en résulte qu'un angle est d'autant mieux déterminé par son log sin qu'il est plus petit ; ce logarithme étant supposé exact, on ne pourra plus compter sur la seconde à partir de  $23^\circ$  ; si en outre on craint une erreur d'une unité sur la cinquième décimale de ce logarithme, l'erreur à craindre sur l'angle sera de  $\frac{60''}{D}$ .

Pour le log tang, l'erreur tabulaire diminue jusqu'à  $x = 45^\circ$ , puis reprend les mêmes valeurs déjà parcourues :

$x_0$ .	. . . .	D	$23^\circ$ .	. . . .	35
$3^\circ$ .	. . . .	240	$32^\circ$ .	. . . .	28
$6^\circ$ .	. . . .	121	$45^\circ$ .	. . . .	25
$12^\circ$ .	. . . .	63			

Ce tableau montre bien que, si l'on calcule toujours avec le même nombre de décimales, il est plus avantageux de déterminer un angle par son log tang (ou log cotg) que par son log sin ou log cos : l'erreur à craindre, le logarithme donné étant supposé exact, ne dépasse guère  $1''$  dans le cas que nous étudions.

Ceci explique pourquoi l'on cherche toujours à déterminer de préférence un angle par sa tangente.

Examinons maintenant ce qu'il faut faire pour déterminer le logarithme du sinus ou de la tangente d'un angle  $x$  inférieur à  $3^\circ$ , tous les cas où l'usage de l'interpolation linéaire cesse d'être légitime se réduisant à ceux-là. On écrit

$$\sin x = x \cdot \frac{\sin x}{x}, \quad \text{tg } x = x \cdot \frac{\text{tg } x}{x},$$

en se fondant sur ce que les rapports  $\frac{\sin x}{x}$  et  $\frac{\text{tg } x}{x}$  restent très voisins de l'unité lorsque  $x$  est petit. Soit  $\alpha$  la mesure de l'angle  $x$  en secondes, et posons

$$S = \log \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad T = \log \frac{\text{tg } \alpha}{\alpha};$$

on aura

$$\log \sin x = \log \alpha + S, \quad \log \text{tg } x = \log \alpha + T.$$

Les nombres  $S$  et  $T$  sont faciles à réduire en table ; lorsque  $x$  varie de  $0^\circ$  à  $3^\circ$ , c'est-à-dire  $\alpha$  de 0 à 10800,  $S$  diminue de  $\bar{6}.68557$  à  $\bar{6}.68538$  et  $T$  augmente de  $\bar{6}.68557$  à  $\bar{6}.68597$  ; en leur ajou-



tant  $\log z$ , donné par la table des logarithmes des nombres, on aura  $\log \sin x$  et  $\log \operatorname{tg} x$ .

Pour résoudre le problème inverse, on déterminera d'abord avec la table trigonométrique ordinaire une valeur approchée de  $x$ , à l'aide de laquelle on aura exactement S ou T, à cause de la variation lente de ces nombres; on en déduira alors  $\log z$  et par suite  $z$  avec précision.

Voici enfin quelques remarques pratiques qu'il est bon de ne pas perdre de vue dans l'emploi des tables de logarithmes.

1° L'angle  $x$  appartenant au premier quadrant, il ne faut pas oublier que la différence tabulaire D est négative quand il s'agit du  $\log \cos$  ou du  $\log \operatorname{cotg}$ . Si cependant dans ces cas on veut que le calcul d'interpolation conduise toujours à une addition arithmétique, on mettra la formule d'interpolation linéaire sous la forme

$$f(x_0 + ah) = f(x_0 + h) - (1 - a)\Delta f(x_0),$$

équivalente à la forme ordinaire.

On peut d'ailleurs toujours faire ainsi, même pour  $\Delta f(x_0)$  positive, et cela peut présenter quelquefois des avantages.

2° Pour ramener un angle au premier quadrant, on en retranche, suivant les cas,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  ou  $270^\circ$  en observant que :

$$\begin{aligned} \sin x &= -\cos(90^\circ + x) = -\sin(180^\circ + x) = +\cos(270^\circ + x), \\ \cos x &= +\sin(90^\circ + x) = -\cos(180^\circ + x) = -\sin(270^\circ + x), \\ \operatorname{tg} x &= -\operatorname{cotg}(90^\circ + x) = +\operatorname{tg}(180^\circ + x) = -\operatorname{cotg}(270^\circ + x), \\ \operatorname{cotg} x &= -\operatorname{tg}(90^\circ + x) = +\operatorname{cotg}(180^\circ + x) = -\operatorname{tg}(270^\circ + x). \end{aligned}$$

Quand il s'agit du problème inverse, on sait dans quel quadrant est situé l'angle  $x$  quand on connaît le signe de deux de ses lignes trigonométriques; sinon, il peut y avoir ambiguïté, et l'on choisit à volonté. On peut d'ailleurs se servir aussi bien d'angles négatifs.

3° Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes; dans la pratique du calcul, cependant, on leur en donne de la façon suivante, afin de simplifier les opérations: si  $x$  est un nombre négatif, on peut le définir par son logarithme, en écrivant le logarithme de sa valeur absolue, et en faisant suivre ce logarithme d'un signe particulier, en général  $n$ , qui indique que le nombre correspondant doit être pris négativement. Si alors, en effet, on a soin d'observer que

dans une somme algébrique de logarithmes, deux signes  $n$  se détruisent, de sorte que la somme elle-même est affectée ou non du signe  $n$  suivant que les termes de la somme affectés de ce signe sont en nombre impair ou pair, il est clair que l'on a fait une convention légitime.

4° Il n'y a pas lieu d'attacher plus d'importance qu'il ne convient à l'usage des compléments arithmétiques, ou cologarithmes : il n'est pas plus difficile en effet de faire une soustraction de logarithmes qu'une addition, et ce n'est que dans des cas assez particuliers que l'emploi des compléments peut rendre de véritables services.

**Tables astronomiques.** — La nature de la fonction  $f(x)$  ne permet pas toujours, même pour un intervalle  $h$  restreint de l'argument, l'emploi de l'interpolation linéaire, si simple, légitime quand il s'agit des tables de logarithmes. Il faut alors recourir à la formule de Newton, prolongée autant qu'il est nécessaire. Un exemple suffira à le prouver : voici un tableau qui donne de 12 heures en 12 heures (temps moyen de Paris) l'ascension droite apparente de la Lune, et ses différences :

Date	$\alpha$ (C)	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$	$\Delta^5$
Janvier 1907						
1 0 heure	8 <sup>h</sup> 2 <sup>m</sup> 56 <sup>s</sup> ,32	25 <sup>m</sup> 31 <sup>s</sup> ,82	— 8 <sup>s</sup> ,70	— 1 <sup>s</sup> ,93	+ 1 <sup>s</sup> ,02	+ 0 <sup>s</sup> ,10
12 »	8 28 28,14	25 23,12	— 10,63	— 0,91	+ 1,12	»
2 0 »	8 53 51,26	25 12,49	— 11,54	+ 0,21	»	»
12 »	9 19 3,75	25 0,95	— 11,33	»	»	»
3 0 »	9 44 4,70	24 49,62	»	»	»	»
12 »	10 8 54,32	»	»	»	»	»

La différence cinquième est encore sensible.

Pour avoir cependant alors des tables d'un usage commode, on réduit l'intervalle  $h$ , non pas de façon que les différences secondes soient négligeables, ce qui serait souvent impraticable, mais au moins de façon que les différences troisièmes soient sans influence : c'est le principe adopté pour les tables astronomiques que publie la *Connaissance des Temps*. On y trouve par exemple l'ascension

droite de la Lune donnée d'heure en heure, de façon à ce qu'on puisse former un tableau analogue au suivant :

Date	$\alpha \text{C}$	$\Delta$	$\Delta^2$
Janvier 1907			
1 0 heure	8 <sup>h</sup> 2 <sup>m</sup> 56 <sup>s</sup> ,32	2 <sup>m</sup> 7 <sup>s</sup> ,92	— 0 <sup>s</sup> ,04
1 »	5 4,24	2 7,88	— 0,05
2 »	7 12,12	2 7,83	— 0,05
3 »	9 19,95	2 7,78	»
4 »	11 27,73	»	»

où les différences troisièmes sont négligeables.

Quand il en est ainsi, la table fournit généralement en regard des valeurs de  $f(x)$ , non pas celles des différences tabulaires, mais celles des dérivées de  $f(x)$ ; cette dérivée est d'ailleurs souvent exprimée en prenant pour  $x$  une certaine unité  $k$  différente de l'intervalle  $h$  de l'argument de la table et différente de l'unité fondamentale de  $x$  : c'est la *variation* de  $f(x)$  pour un accroissement  $k$  de l'argument. C'est ainsi que l'on trouvera réellement dans la *Connaissance des Temps* le tableau suivant, poursuivi pour tous les jours de l'année :

Date	$\alpha \text{C}$	Variation pour 1 <sup>m</sup>
Janvier 1907		
1 0 heure	8 <sup>h</sup> 2 <sup>m</sup> 56 <sup>s</sup> ,32	2 <sup>s</sup> ,1325
1 »	5 4,24	2,1317
2 »	7 12,12	2,1309
3 »	9 19,95	2,1301
4 »	11 27,73	2,1293

Ceci veut dire, par exemple, que la dérivée de l'ascension droite de la Lune par rapport au temps, est à la date 1907 Janvier 1, 0<sup>h</sup>, égale à 2<sup>s</sup>,1325 lorsqu'on prend la minute pour unité de temps.

D'après le choix fait de l'intervalle  $h$  de l'argument, la variation varie d'une façon sensiblement uniforme.

Voici maintenant la façon de se servir d'une telle table, et les avantages de la disposition adoptée. Les différences troisièmes étant

négligeables, on peut appliquer la formule de Newton sous la forme réduite

$$f(x_0 + \alpha h) = f(x_0) + \alpha \left[ \Delta f(x_0) + \frac{\alpha - 1}{2} \Delta^2 f(x_0) \right];$$

pour la même raison, la formule générale qui donne  $hf'(x_0 + \alpha h)$  se réduit à

$$hf'(x_0 + \alpha h) = \Delta f(x_0) + \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) \Delta^2 f(x_0),$$

ou bien en changeant  $\alpha$  en  $\frac{\alpha}{2}$ , à

$$hf' \left( x_0 + \frac{\alpha}{2} h \right) = \Delta f(x_0) + \frac{\alpha - 1}{2} \Delta^2 f(x_0);$$

on peut donc écrire encore

$$f(x_0 + \alpha h) = f(x_0) + \alpha hf' \left( x_0 + \frac{\alpha}{2} h \right).$$

Soit maintenant  $v(x)$  la variation de  $f(x)$  pour l'accroissement  $k$  de l'argument; on a  $v(x) = kf'(x)$ , et par suite finalement :

$$f(x_0 + \alpha h) = f(x_0) + \frac{\alpha h}{k} v \left( x_0 + \frac{\alpha}{2} h \right).$$

La fonction  $v(x)$  variant très sensiblement d'une façon uniforme et assez lente en général,  $v \left( x_0 + \frac{\alpha}{2} h \right)$  se calculera à simple vue par interpolation linéaire, et  $f(x_0 + \alpha h)$  en résultera immédiatement.

Si, par exemple, on veut, en se servant du dernier tableau écrit, calculer l'ascension droite de la Lune pour 1907 janvier 1. 0<sup>h</sup> 48<sup>m</sup>, de sorte que  $\alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\frac{\alpha h}{k} = 48$ , on aura d'abord

$$v \left( x_0 + \frac{\alpha}{2} h \right) = 2^s, 1325 + \frac{2}{5} \Delta v(x_0) = 2^s, 1322,$$

puis

$$f(x_0 + \alpha h) = 8^h 2^m 56^s, 32 + 48 \times 2^s, 1322 = 8^h 4^m 38^s, 67.$$

En résumé, on opère comme dans l'interpolation linéaire, mais après avoir interpolé la variation elle-même pour la moitié de  $z$ .

S'il s'agit du problème inverse, on déterminera d'abord une valeur approchée de  $z$  en ne tenant pas compte de la variation de  $v$ ; avec cette valeur approchée, on aura une valeur exacte de  $v(x_0 + \frac{\alpha}{2}h)$ , à cause de la lente variation de  $v$ , et par suite une valeur exacte de  $z$ .

---

## CHAPITRE II

---

### ERREURS D'OBSERVATION MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

**Erreurs systématiques et erreurs accidentelles.** — Si l'on mesure plusieurs fois, dans les mêmes conditions, avec quelque précision, une même grandeur, on obtient des résultats différents : il faut en conclure que les observations sont affectées d'erreurs. On peut répartir ces erreurs en deux catégories : les *erreurs systématiques* et les *erreurs accidentelles* ou *fortuites*. Les erreurs systématiques sont celles dont on peut prévoir les causes, par exemple les erreurs dues à des défauts de l'instrument employé, les erreurs dues à la réfraction, à l'aberration, etc., etc. : par suite, aussi, on peut les corriger et s'en affranchir par une étude convenable des causes qui les engendrent. Les erreurs fortuites sont celles qui se produisent sans qu'il soit possible de leur attribuer une cause déterminée dont on puisse calculer ou même simplement prévoir l'effet ; elles proviennent de l'imperfection des sens de l'observateur, des vibrations de l'instrument, des ondulations atmosphériques, etc. Nous supposons ici que les observations sont corrigées des erreurs systématiques, et qu'elles sont affectées seulement des erreurs accidentelles.

Le problème général suivant se pose alors : Si l'on fait plus d'observations qu'il n'est nécessaire pour déterminer analytiquement un certain nombre de grandeurs inconnues, les équations auxquelles on est ainsi conduit sont en nombre surabondant, et incompatibles, puisque les observations sont affectées d'erreurs ; quelles sont alors les meilleures valeurs à adopter pour les incon-

nues ? et sur quelle approximation peut-on compter quand on adopte ces valeurs ?

Pour soumettre ce problème à l'analyse, il faut faire un certain nombre d'hypothèses plus ou moins conformes à la réalité, et s'appuyer sur le calcul des probabilités. Nous nous bornerons ici à une brève exposition de la théorie universellement adoptée, sans aucune étude critique.

**Loi des erreurs.** — L'erreur  $\varepsilon = x - a$  que l'on commet sur la mesure d'une grandeur  $x$ , quand le résultat observé de cette mesure est  $a$ , ne peut pas en général prendre toutes les valeurs possibles. Si par exemple on détermine un instant défini, à l'aide d'une pendule battant la seconde, et en appréciant le temps à un dixième de seconde, les erreurs possibles forment une progression arithmétique dont la raison est  $0,1$  ; le nombre des erreurs possibles est d'ailleurs évidemment limité, car une grande erreur est impossible. On pourrait objecter qu'on peut se tromper en lisant par exemple la minute sur le cadran de la pendule ; mais c'est là une erreur de lecture, et non pas une erreur d'observation proprement dite ; une telle erreur est exclue de nos considérations.

Il est avantageux cependant de regarder l'erreur  $\varepsilon$  comme pouvant prendre toutes les valeurs possibles, et varier d'une façon continue.

L'erreur  $\varepsilon$  est *fortuite*, c'est-à-dire due au hasard : mais les événements dus à ce que nous appelons le hasard se groupent eux-mêmes suivant certaines lois, ainsi que nous l'enseigne le calcul des probabilités. On peut assimiler l'observation à un jeu dans lequel la chance de commettre une erreur plus petite que  $\varepsilon$ , c'est-à-dire comprise entre  $-\infty$  et  $\varepsilon$ , étant  $p$ , celle de commettre une erreur plus grande que  $\varepsilon$  serait  $1 - p$  : en d'autres termes on pourrait parier équitablement la somme  $p$  contre la somme  $1 - p$  que l'erreur sera plus petite que  $\varepsilon$ . Dans ces conditions, d'après le calcul des probabilités, dans une nombreuse série d'observations comparables, les erreurs plus petites que  $\varepsilon$  et celles plus grandes se répartiront de façon que le rapport de leurs nombres diffère peu de  $\frac{p}{1 - p}$ , et d'autant moins que le nombre total des observations sera plus grand.

On admet que  $p$  est une fonction analytique  $F(\varepsilon)$  de la seule

variable  $\varepsilon$  : c'est la *probabilité* d'une erreur inférieure à  $\varepsilon$ . Cette fonction doit évidemment vérifier certaines conditions ; d'après sa définition même, elle croît de 0 à 1 lorsque  $\varepsilon$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$  : 1 correspond comme toujours à la certitude.

La probabilité de commettre une erreur comprise entre  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon$  est égale à  $F(\varepsilon') - F(\varepsilon)$ , en supposant  $\varepsilon < \varepsilon'$ . Supposons la différence  $\varepsilon' - \varepsilon$  infiniment petite et égale à  $d\varepsilon$  ; désignons de plus par  $\varphi(\varepsilon)$  la dérivée de  $F(\varepsilon)$  ; la probabilité de commettre une erreur comprise entre  $\varepsilon$  et  $\varepsilon + d\varepsilon$  sera donc  $\varphi(\varepsilon) d\varepsilon$ . On dit plus brièvement pour exprimer ce fait, que  $\varphi(\varepsilon)$  définit la *loi de probabilité des erreurs*, ou que  $\varphi(\varepsilon)$  est la *loi des erreurs*.

On admet que les erreurs égales et de signes contraires sont également possibles : la fonction  $\varphi(\varepsilon)$  est donc paire.

Nous avons vu qu'en réalité les erreurs très grandes ne se présentent pas ; elles doivent donc avoir une probabilité négligeable ; la fonction  $\varphi(\varepsilon)$  doit par suite tendre rapidement vers zéro lorsque  $\varepsilon$  augmente.

D'après ces remarques, il est naturel de supposer avec *Gauss* que la fonction  $\varphi(\varepsilon)$  est de la forme  $Ce^{-h^2\varepsilon^2}$ ,  $e$  étant la base des logarithmes hyperboliques,  $C$  et  $h$  deux constantes positives. Ces deux constantes ne sont d'ailleurs pas indépendantes ; en effet, on a  $F(\varepsilon) = C \int_{-\infty}^{\varepsilon} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$  ; il en résulte bien  $F(-\infty) = 0$ , mais il faut de plus  $F(+\infty) = 1$ , ce qui donne l'équation

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = 1.$$

On sait par l'analyse que l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi};$$

il vient donc

$$\frac{C}{h} \sqrt{\pi} = 1, \quad \text{ou} \quad C = \frac{h}{\sqrt{\pi}};$$

finalement, on a, pour la loi des erreurs de Gauss, que nous adopterons :

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}.$$



Cette loi à laquelle on peut parvenir de bien d'autres façons est généralement vérifiée par l'expérience ; mais on ne peut en aucune façon la regarder comme correspondant à la vérité rigoureuse ; elle ne fournit qu'une approximation.

Pour vérifier expérimentalement la loi, on peut procéder ainsi. Observons une grandeur connue un grand nombre de fois  $n$  ; on commettra ainsi  $n$  erreurs, et d'après ce que nous avons dit, le nombre de ces erreurs comprises entre deux limites données  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  diffèrera peu, si la loi est vraie, de

$$n \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon, \text{ c'est-à-dire } \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{h\varepsilon}^{h\varepsilon'} e^{-t^2} dt.$$

Cette intégrale est facile à calculer à l'aide de tables appropriées, si l'on connaît  $h$ , que nous apprendrons plus loin à déterminer ; la comparaison entre la théorie et la réalité est donc aisée. En général, il existe entre elles une concordance plus parfaite qu'on ne pourrait l'espérer *a priori*.

**Courbe de probabilité.** — On peut représenter géométriquement les résultats précédents. Choisissons deux axes rectangu-

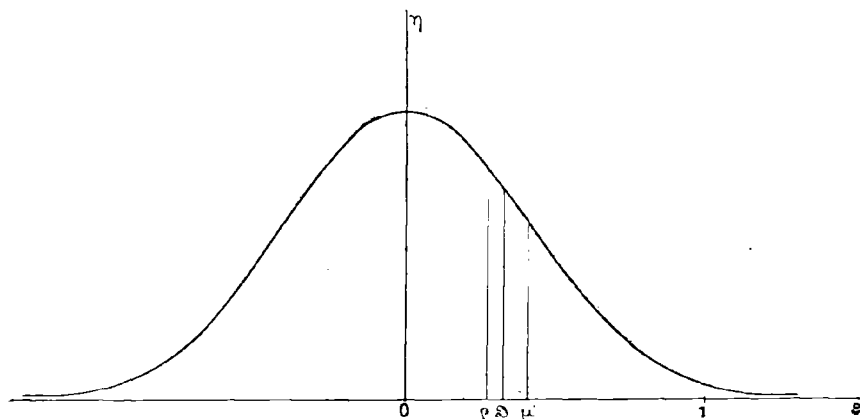


FIG. 1

lares  $O\varepsilon$ ,  $O\eta$ , et construisons la courbe définie par l'équation

$$\eta = \varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2};$$

cette courbe change avec  $h$ , mais garde toujours la même forme, car lorsque  $h$  varie, elle est soumise à la transformation homographique très simple qui consiste à altérer les coordonnées dans des rapports constants. Pour construire la figure ci-contre (*fig. 1*), on a pris  $h = \sqrt{\pi}$ , de sorte que pour  $\varepsilon = 0$ , on a  $\alpha = 1$  : on voit bien avec quelle rapidité la courbe devient asymptote à l'axe  $Oz$ , de façon à se confondre pratiquement avec lui. L'aire totale comprise entre la courbe et l'axe  $Oz$  est égale à 1 ; l'aire comprise entre la courbe, l'axe  $Oz$  et les ordonnées qui correspondent à deux abscisses données  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  représente la probabilité pour que l'erreur soit comprise entre  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ .

**Précision. Poids.** — Deux séries distinctes d'observations respectivement comparables n'ont pas nécessairement la même *précision*. Pour définir d'une façon plus exacte cette notion, on dit que les précisions des deux systèmes différents  $S$  et  $S'$  sont proportionnelles aux nombres  $k$  et  $k'$ , si la probabilité de commettre dans le système  $S$  une erreur inférieure en valeur absolue à  $z$  est la même que celle de commettre dans le système  $S'$  une erreur inférieure en valeur absolue à  $\frac{kz}{k'}$ .

Pour justifier cette définition, il faut montrer qu'elle est indépendante de l'erreur  $z$ . En effet, la loi de Gauss dépend d'un paramètre  $h$ , qui varie avec la série d'observations envisagée. Soient  $h$  et  $h'$  les deux paramètres qui caractérisent les séries  $S$  et  $S'$ . La probabilité d'une erreur inférieure en valeur absolue à  $z$  dans le système  $S$  est égale à

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{+z} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-hx}^{+hx} e^{-t^2} dt ;$$

de même la probabilité d'une erreur inférieure en valeur absolue à  $\frac{kz}{k'}$  dans le système  $S'$  est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{h'kz}{k'}}^{+\frac{h'kz}{k'}} e^{-t^2} dt ;$$

pour que ces deux probabilités soient égales, il faut et il suffit que l'on ait  $\frac{h}{h'} = \frac{k}{k'}$ , condition indépendante de  $z$ .

On voit en outre par là que le rapport des précisions des deux sys-

tèmes est égal au rapport des paramètres  $h$  et  $h'$  qui les caractérisent. On peut donc dire avec Gauss que  $h$  est la *mesure de la précision* des observations du système  $S$ .

On dit encore que les systèmes  $S$  et  $S'$  ont des *poids* proportionnels aux carrés  $h^2$  et  $h'^2$  des mesures de leur précision : on trouvera plus loin la justification de cette façon de s'exprimer. Il n'y a pas lieu de parler de poids d'une façon absolue : on ne considère que des poids relatifs.

**Valeur probable d'une quantité.** — On appelle généralement *valeur probable* d'une quantité la somme des produits que l'on obtient en multipliant les diverses valeurs que peut prendre cette quantité par leurs probabilités respectives.

Soit  $\varepsilon$  une quantité qui, comme l'erreur d'une observation, peut varier d'une façon continue ; soit de plus  $\varphi(\varepsilon) d\varepsilon$  la probabilité pour que cette quantité soit comprise entre  $\varepsilon$  et  $\varepsilon + d\varepsilon$ . La valeur probable d'une fonction quelconque  $f(\varepsilon)$  de  $\varepsilon$  sera évidemment l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon.$$

L'importance de la considération des valeurs probables résulte du théorème que nous allons démontrer.

En nous bornant au cas qui nous occupe, supposons que l'on fasse  $n$  observations comparables d'une même grandeur  $x$ , ce qui conduira à  $n$  erreurs  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  ; appelons  $s$  la moyenne arithmétique

$$\frac{1}{n} [f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) + \dots + f(\varepsilon_n)],$$

et  $p$  la valeur probable de la fonction  $f(\varepsilon)$  de l'erreur : il est clair que la valeur probable de  $s - p$  est nulle. Considérons maintenant la valeur probable de  $(s - p)^2$ , on a :

$$(s - p)^2 = \sum \left[ \frac{f(\varepsilon_i)}{n} \right]^2 + 2 \sum \frac{f(\varepsilon_i) f(\varepsilon_j)}{n^2} - 2 \sum \frac{p f(\varepsilon_i)}{n} + p^2,$$

les indices  $i$  et  $j$  prenant toutes les valeurs  $1, 2, \dots, n$  et étant différents. Appelons  $p'$  la valeur probable de la fonction  $[f(\varepsilon)]^2$ , et remarquons que la valeur probable du produit  $f(\varepsilon_i) f(\varepsilon_j)$  est égale, les erreurs d'observation  $\varepsilon_i$  et  $\varepsilon_j$  étant indépendantes, à l'intégrale double

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon_i) f(\varepsilon_j) \varphi(\varepsilon_i) \varphi(\varepsilon_j) d\varepsilon_i d\varepsilon_j,$$

c'est-à-dire à  $p^2$ . Remplaçant chaque terme de la somme précédente par sa valeur probable, on obtient alors pour la valeur probable cherchée de  $(s - p)^2$ , l'expression

$$\frac{np'}{n^2} + 2 \frac{n(n-1)p^2}{2n^2} - \frac{2np^2}{n} + p^2 = \frac{p' - p^2}{n}.$$

Ceci prouve, et c'est la proposition que nous avons en vue, que la valeur probable de  $(s - p)^2$  tend vers zéro lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

Comme  $(s - p)^2$  reste toujours positif, il en résulte évidemment que, si  $n$  est grand, la probabilité pour que la moyenne  $s$  diffère de  $p$  d'une quantité notable est très petite, et qu'en faisant  $s = p$ , on ne commet vraisemblablement qu'une faible erreur : l'approximation sur laquelle on peut compter en procédant ainsi, est d'ailleurs d'autant plus grande que  $n$  est plus grand.

**Moyenne erreur. Erreur moyenne. Erreur probable.** —

Dans une série  $S$  d'observations de précision  $h$ , la valeur probable d'une erreur  $\varepsilon$  est nulle, car  $\varphi(\varepsilon)$  étant une fonction paire, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$  est nulle.

On appelle *moyenne erreur*, et nous désignerons par  $\varepsilon$ , la valeur probable du module de l'erreur ; on a donc

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \left[ -\frac{e^{-h^2\varepsilon^2}}{h\sqrt{\pi}} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

On appelle *erreur moyenne*, et nous désignerons par  $\mu$  la racine carrée positive de la valeur probable du carré  $\varepsilon^2$  de l'erreur : il faut se garder de confondre cette quantité avec la précédente.

$$\text{On a : } \mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon ;$$

pour calculer cette intégrale, écrivons l'égalité déjà rencontrée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

et différencions par rapport à  $h$  ; il vient

$$2h \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{h^2},$$

et par suite

$$\mu^2 = \frac{1}{2h^2} \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Ajoutons à ces définitions celle de l'*erreur probable*; c'est la quantité  $\rho$  telle qu'il y ait chance égale pour que l'erreur  $\varepsilon$  soit inférieure ou supérieure à  $\rho$  en valeur absolue.

L'erreur probable est donc définie par l'égalité

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\rho}^{+\rho} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{2},$$

ou

$$\int_0^{\rho} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4};$$

les tables de l'intégrale  $\int_0^x e^{-t^2} dt$  fournissent la solution :

$$\rho = 0,4769 \frac{1}{h} \dots$$

On a marqué sur la figure 1 les ordonnées qui correspondent aux abscisses  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ . L'ordonnée qui correspond à  $\rho$  partage l'aire comprise entre la courbe et les demi-axes  $O\varepsilon$ ,  $O\eta$ , en deux parties équivalentes. Quant à  $\mu$ , on peut remarquer que c'est l'abscisse de l'unique point d'inflexion de la courbe situé à droite de  $O\eta$ ; si en effet

$$\eta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2},$$

on a

$$\frac{d\eta}{d\varepsilon} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2}, \quad \frac{d^2\eta}{d\varepsilon^2} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} (1 - 2h^2\varepsilon^2);$$

il y a donc inflexion pour  $\varepsilon = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}} = \pm \mu$ .

L'erreur probable, l'erreur moyenne, la moyenne erreur sont toutes trois inversement proportionnelles à la mesure de la précision : elles peuvent donc, aussi bien que le paramètre  $h$ , servir à évaluer la précision des observations de la série S.

En fait, on se sert actuellement, d'une façon pour ainsi dire exclusive, de la considération de l'erreur moyenne.

D'après le paragraphe précédent, si  $n$  observations comparables d'une même grandeur  $x$  ont donné lieu à des erreurs  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ , on pourra poser vraisemblablement, avec une approximation

d'autant plus grande que  $n$  sera plus grand

$$\mu^2 = \frac{1}{2h^2} = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2}{n},$$

on aura ainsi déterminé  $h$ , connaissant les erreurs. Mais il faut bien observer que cette détermination n'a rien de rigoureux : elle n'est qu'approximative, et serait même dénuée de toute valeur si l'on n'avait qu'un très petit nombre d'observations.

**Composition des erreurs.** — Etudions le problème général suivant : soient  $x, x', x'', \dots$  des grandeurs observées directement, et pour lesquelles on a trouvé des valeurs  $a, a', a'', \dots$  de sorte que les erreurs commises dans ces observations sont respectivement  $\varepsilon = x - a, \quad \varepsilon' = x' - a', \quad \varepsilon'' = x'' - a'', \dots$  On envisage une fonction  $f(x, x', x'', \dots)$  des grandeurs  $x, x', x'', \dots$  et l'on prend pour sa valeur la même fonction  $f(a, a', a'', \dots)$  des valeurs observées; on commet une certaine erreur

$$\alpha = f(x, x', x'', \dots) - f(a, a', a'', \dots);$$

on demande la loi de l'erreur  $\alpha$ .

Pour appliquer l'analyse à ce problème, que nous appelons celui de la *composition des erreurs*, il faut d'abord supposer, ainsi que nous le ferons encore dans la suite, que les erreurs  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$  sont assez petites pour qu'on puisse les considérer comme des quantités infiniment petites; de sorte que, dans une question déterminée, il suffira de tenir compte des valeurs principales de ces infiniment petits. Dans ces conditions, on peut écrire

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon + \frac{\partial f}{\partial x'} \varepsilon' + \frac{\partial f}{\partial x''} \varepsilon'' + \dots$$

On est donc ramené à calculer la loi de l'erreur  $\alpha$ , fonction linéaire et homogène des erreurs  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$ , de la forme

$$\alpha = \Lambda \varepsilon + \Lambda' \varepsilon' + \Lambda'' \varepsilon'' + \dots,$$

$\Lambda, \Lambda', \Lambda'', \dots$  étant des coefficients constants, les erreurs  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$  étant soumises à la loi de Gauss, et appartenant à des séries d'observations  $S, S', S'', \dots$  dont la précision est caractérisée par les constantes  $h, h', h'', \dots$

Dans ce qui suit, nous supposons qu'il s'agit seulement de trois séries S, S', S'', ...; la généralité du raisonnement, pas plus que celle du résultat, n'en souffrira.

Pour que l'erreur  $\alpha$  soit comprise entre deux limites données  $\alpha$  et  $\alpha'$ , on peut supposer que l'on a commis sur  $a, a', a''$  des erreurs comprises respectivement entre  $\varepsilon$  et  $\varepsilon + d\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon' + d\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$  et  $\varepsilon'' + d\varepsilon''$ , à la condition que la somme  $A\varepsilon + A'\varepsilon' + A''\varepsilon''$  soit comprise entre  $\alpha$  et  $\alpha'$ . La probabilité de ce fait est une probabilité composée, égale par suite, d'après les principes du calcul des probabilités, au produit des probabilités simples de chacun des événements composants, c'est-à-dire à

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \cdot \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2\varepsilon'^2} d\varepsilon' \cdot \frac{h''}{\sqrt{\pi}} e^{-h''^2\varepsilon''^2} d\varepsilon'',$$

ou bien

$$\frac{hh'h''}{(\sqrt{\pi})^3} e^{-f} d\varepsilon d\varepsilon' d\varepsilon'',$$

en désignant par  $f$  la forme quadratique définie des variables  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$  :

$$h^2\varepsilon^2 + h'^2\varepsilon'^2 + h''^2\varepsilon''^2.$$

La probabilité totale pour que l'erreur  $\alpha$  soit comprise entre  $\alpha$  et  $\alpha'$  est, d'après un autre principe du calcul des probabilités, la somme de ces probabilités élémentaires, c'est-à-dire l'intégrale triple

$$J = \frac{hh'h''}{(\sqrt{\pi})^3} \iiint e^{-f} d\varepsilon d\varepsilon' d\varepsilon'',$$

étendue aux valeurs de  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$  qui donnent à la somme

$$A\varepsilon + A'\varepsilon' + A''\varepsilon''$$

une valeur comprise entre  $\alpha$  et  $\alpha'$ .

Pour calculer J, faisons une substitution linéaire sur les variables  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ ; les nouvelles variables seront désignées par  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\alpha$  sera précisément la somme  $A\varepsilon + A'\varepsilon' + A''\varepsilon''$ . On aura des formules telles que

$$\begin{cases} \varepsilon = p\alpha + q\beta + r\gamma, \\ \varepsilon' = p'\alpha + q'\beta + r'\gamma, \\ \varepsilon'' = p''\alpha + q''\beta + r''\gamma. \end{cases}$$

Supposons de plus que, par cette substitution, la forme  $f$  reste une somme de carrés de la forme  $l^2z^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2$ .

Dans ces conditions, on aura, ainsi que l'apprend l'étude du changement de variables dans les intégrales multiples :

$$J = \frac{hk'h''}{(\sqrt{\pi})^3} \left| \begin{array}{ccc} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{array} \right| \iiint e^{-(l^2z^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2)} dz d\beta d\gamma,$$

le déterminant étant pris en valeur absolue, et l'intégrale sera étendue à toutes les valeurs possibles de  $\beta$  et de  $\gamma$ , et seulement aux valeurs de  $z$  comprises entre  $z$  et  $z'$ . On pourra par suite l'écrire sous la forme

$$J = \frac{hk'h''}{(\sqrt{\pi})^3} \left| \begin{array}{ccc} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{array} \right| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2\beta^2} d\beta \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\gamma^2} d\gamma \times \int_z^{z'} e^{-l^2\alpha^2} d\alpha.$$

Les deux premières intégrales simples valent respectivement, comme nous le savons,  $\frac{\sqrt{\pi}}{m}$ ,  $\frac{\sqrt{\pi}}{n}$ , ( $l$ ,  $m$ ,  $n$  étant positifs) de sorte qu'on a encore

$$J = \frac{hk'h''}{lmn} \left| \begin{array}{ccc} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{array} \right| \times \frac{l}{\sqrt{\pi}} \int_z^{z'} e^{-l^2\alpha^2} d\alpha.$$

On sait d'autre part que le discriminant d'une forme quadratique est un invariant du second ordre ; appliquant ce résultat à  $f$ , il vient

$$l^2m^2n^2 = k^2k'^2k''^2 \left| \begin{array}{ccc} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{array} \right|^2$$

et par suite

$$J = \frac{l}{\sqrt{\pi}} \int_z^{z'} e^{-l^2\alpha^2} d\alpha.$$

On voit déjà par là que l'erreur  $z$  suit aussi la loi de Gauss, avec  $l$  comme paramètre de précision : et c'est là une propriété fondamentale de la loi de Gauss.

Reste à déterminer  $l$  ; à cet effet considérons la forme  $f - l^2z^2$ , ou

$$h^2\varepsilon^2 + h'^2\varepsilon'^2 + h''^2\varepsilon''^2 - l^2(\Lambda\varepsilon + \Lambda'\varepsilon' + \Lambda''\varepsilon'')^2;$$



elle se réduit à une somme de deux carrés,  $m^2\beta^2 + n^2\gamma^2$ ; son déterminant est donc nul, ce qui fournit immédiatement la relation :

$$h^2 h' h''^2 - l^2 (\Lambda^2 h'^2 h''^2 + \Lambda'^2 h''^2 h^2 + \Lambda''^2 h^2 h'^2) = 0,$$

ou, plus symétriquement :

$$\frac{1}{l^2} = \frac{\Lambda^2}{h^2} + \frac{\Lambda'^2}{h'^2} + \frac{\Lambda''^2}{h''^2}.$$

Ainsi, l'erreur  $\alpha$  suit la loi de Gauss, et son paramètre de précision est déterminé par la relation simple ci-dessus.

Introduisons les erreurs moyennes  $\mu, \mu', \mu'', \dots$  relatives aux séries S, S', S'', ... en général; et soit M l'erreur moyenne qui correspond à  $\alpha$ , ou à la fonction  $f(a, a', a'', \dots)$ ; on aura

$$M^2 = \Lambda^2 \mu^2 + \Lambda'^2 \mu'^2 + \Lambda''^2 \mu''^2 + \dots,$$

ou

$$M = \sqrt{\Lambda^2 \mu^2 + \Lambda'^2 \mu'^2 + \Lambda''^2 \mu''^2 + \dots}$$

On arrive directement à cette dernière formule en cherchant la valeur probable de

$$\alpha^2 = \Lambda^2 \varepsilon^2 + \Lambda'^2 \varepsilon'^2 + \dots + 2\Lambda\Lambda'\varepsilon\varepsilon' + \dots,$$

et remarquant que la valeur probable de  $\varepsilon\varepsilon'$  est nulle, puisque les erreurs  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont indépendantes et ont chacune zéro pour valeur probable : mais on n'a pas ainsi la loi de l'erreur  $\alpha$ .

**Combinaison des observations. Méthode des moindres carrés.** — Soient  $p$  quantités indépendantes  $x, y, z, \dots$  et  $n$  fonctions linéaires et homogènes quelconques de ces quantités :

$$(1) \quad f_i \equiv a_i x + b_i y + c_i z + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

on suppose essentiellement  $n > p$ .

Soit de plus  $\psi$  une autre fonction linéaire et homogène quelconque donnée de  $x, y, z, \dots$

$$(2) \quad \psi \equiv qx + ry + sz + \dots$$

On peut exprimer  $\psi$  linéairement à l'aide des  $f_i$  d'une infinité de façons : en posant

$$(3) \quad \psi \equiv \Sigma \omega_i f_i,$$

où les  $\omega_i$  sont des constantes, il est nécessaire et suffisant, pour assurer l'identité, d'avoir les relations

$$(4) \quad q = \sum \omega_i a_i, \quad r = \sum \omega_i b_i, \quad s = \sum \omega_i c_i, \dots$$

Ceci posé, imaginons que l'on soumette à l'observation directe les grandeurs  $f_i$ ; appelons  $l_i$  les résultats observés,  $\varepsilon_i$  les erreurs commises de sorte que  $f_i = l_i + \varepsilon_i$ . Si dans les diverses expressions (3) de la fonction  $\psi$  on remplace les  $f_i$  par leurs valeurs observées  $l_i$ , on obtient autant de valeurs approchées pour la véritable valeur de  $\psi$ ; l'erreur commise est de la forme  $\sum \omega_i \varepsilon_i$ , et composée avec les erreurs  $\varepsilon_i$ .

Appelons  $p_1, p_2, \dots, p_n$  les poids relatifs des observations qui produisent les erreurs  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ; les paramètres de précision pour ces diverses erreurs seront de la forme  $h \sqrt{p_i}$ , en désignant par  $h$  la mesure de la précision des observations de poids un.

D'après le paragraphe précédent, l'erreur  $\sum \omega_i \varepsilon_i$  relative à la forme (3) de  $\psi$  suit la loi de Gauss, et si  $h \sqrt{\rho}$  désigne son paramètre de précision, on peut dire que  $\rho$  est le poids de la détermination adoptée pour  $\psi$ ; on a d'ailleurs

$$\frac{1}{\rho} = \sum \frac{\omega_i^2}{p_i}.$$

Les  $\omega_i$  n'étant pas des variables indépendantes, à cause des relations (4), l'expression de  $\frac{1}{\rho}$  est évidemment susceptible d'un minimum non nul : il existe donc une détermination de  $\psi$  de la forme (3) qui a un poids maximum; nous appellerons cette détermination la *détermination principale* de  $\psi$ , et nous la désignerons par  $\psi'$ .

Pour l'obtenir, il convient, comme on sait, d'écrire

$$(5) \quad \frac{1}{\rho} = \sum \frac{\omega_i^2}{p_i} + 2\alpha(q - \sum \omega_i a_i) + 2\beta(r - \sum \omega_i b_i) + 2\gamma(s - \sum \omega_i c_i) + \dots,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$  étant  $p$  inconnues auxiliaires, et de regarder alors  $\frac{1}{\rho}$  comme une fonction des  $n + p$  variables indépendantes  $\omega_i, \alpha, \beta, \gamma, \dots$

En égalant à zéro les dérivées partielles du second membre de



d'où enfin, pour la détermination principale de  $\psi$  :

$$(8) \psi' = q \sum \frac{1}{2} p_i f_i \frac{\delta g(a_i, b_i, c_i, \dots)}{\delta a_i} + r \sum \frac{1}{2} p_i f_i \frac{\delta g(a_i, b_i, c_i, \dots)}{\delta b_i} + \dots$$

Quant au poids de  $\psi'$ , c'est le maximum de  $\rho$ ; or d'après (5),  $\frac{1}{\rho}$  est une forme quadratique non homogène des variables  $\omega_i, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ , et, ici, toutes les dérivées partielles de cette forme sont nulles; si donc on la rend homogène par l'introduction d'une nouvelle variable, on sait, d'après le théorème d'Euler, que  $\frac{1}{\rho}$  sera égal ici à sa demi-dérivée partielle par rapport à la nouvelle variable, ce qui donne

$$\frac{1}{\rho} = \alpha q + \beta r + \gamma s + \dots,$$

c'est-à-dire d'après les valeurs ci-dessus de  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  et le même théorème d'Euler

$$(9) \quad \frac{1}{\rho} = g(q, r, s, \dots).$$

Si l'on prend en particulier pour  $\psi$  les quantités  $x, y, z, \dots$  elles-mêmes, on aura leurs déterminations principales  $x', y', z', \dots$  en prenant successivement dans la formule (8) les coefficients mêmes de  $q, r, s, \dots$ ; on a donc précisément  $\psi' = qx' + ry' + sz' + \dots$ , c'est-à-dire que la détermination principale de  $\psi$  est construite avec les déterminations principales de  $x, y, z, \dots$  précisément comme  $\psi$  avec  $x, y, z, \dots$ : c'est là un résultat important.

Quant aux poids  $\rho_x, \rho_y, \rho_z, \dots$  de  $x', y', z', \dots$  on trouve immédiatement par application de la formule (9)

$$\frac{1}{\rho_x} = (aa), \quad \frac{1}{\rho_y} = (bb), \quad \frac{1}{\rho_z} = (cc), \dots$$

Prenons maintenant pour  $\psi$  la fonction  $f_i$ ; sa détermination principale sera de la forme

$$f'_i = \Sigma a_{ik} f_k,$$

en étendant la sommation à toutes les valeurs de l'indice  $k$  et faisant

$$a_{ik} = \frac{1}{2} p_k \left( a_i \frac{\delta g(a_k, b_k, c_k, \dots)}{\delta a_k} + b_i \frac{\delta g(a_k, b_k, c_k, \dots)}{\delta b_k} + \dots \right);$$

en particulier on a donc

$$\sigma_{ii} = p_i g(a_i, b_i, c_i, \dots).$$

Si  $p_i$  est le poids de  $f_i$ , on a aussi

$$\frac{1}{p_i} = \sum \frac{\alpha_{ik}^2}{p_k} = g(a_i, b_i, c_i, \dots).$$

Envisageons actuellement la combinaison des  $f_i$  :

$$h_i \equiv f'_i - f_i;$$

elle est manifestement équivalente à zéro, de sorte que si l'on y remplace les  $f_i$  par les résultats d'observation  $l_i$ , elle prend une valeur égale et de signe contraire à l'erreur que l'on commet ainsi sur elle, soit

$$\varepsilon_i = \sum \alpha_{ik} \varepsilon_k.$$

On peut donc traiter  $h_i$  comme une erreur composée avec les erreurs  $\varepsilon_i$ ; elle suit la loi de Gauss, et si  $h \sqrt{\sigma_i}$  est son paramètre de précision, on peut dire que  $\sigma_i$  est son poids. On a d'ailleurs évidemment

$$\frac{1}{\sigma_i} = \frac{1}{p_i} + \sum \frac{\alpha_{ik}^2}{p_k},$$

ce qui, d'après ce qui précède, devient

$$\frac{1}{\sigma_i} = \frac{1}{p_i} - g(a_i, b_i, c_i, \dots).$$

On en déduit

$$\sum \frac{p_i}{\sigma_i} = n - \sum p_i g(a_i, b_i, c_i, \dots);$$

mais d'après la définition de  $g$ , on a

$$\sum p_i g(a_i, b_i, c_i, \dots) = (aa) [paa] + 2(ab) [pab] + \dots;$$

considérons alors le déterminant  $D$  comme une fonction de ses éléments  $[paa]$ ,  $[pab]$ , ...; c'en est une fonction homogène de degré  $p$ , et l'on a de plus

$$(aa) = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial [paa]}, \quad 2(ab) = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial [pab]}, \dots;$$

il vient donc d'après le théorème d'Euler

$$\sum p_i g(a_i, b_i, c_i, \dots) = p,$$

et par suite, on a l'importante formule

$$(10) \quad \sum \frac{p_i}{\sigma_i} = n - p.$$

Au lieu des poids, il est aisé d'introduire partout les erreurs moyennes. L'erreur moyenne d'une observation de poids quelconque  $\omega$  est  $\frac{1}{h\sqrt{2\omega}}$ ,  $h$  étant la précision des observations de poids un; en particulier, l'erreur moyenne de ces dernières observations étant  $m$ , on a  $m = \frac{1}{h\sqrt{2}}$ . L'erreur moyenne des observations d'erreur  $\varepsilon_i$  ou de poids  $p_i$  sera donc  $m_i = \frac{m}{\sqrt{p_i}}$ ; l'erreur moyenne  $\mu$  de la détermination principale de  $\psi$ , soit  $\psi'$ , est

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{p}} = m \sqrt{g(q, r, s, \dots)}.$$

Les erreurs moyennes de  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , ... sont

$$\mu_x = m \sqrt{aa'}, \quad \mu_y = m \sqrt{bb'}, \quad \dots$$

Si  $\mu_i$  désigne l'erreur moyenne de  $k_i$ , la formule (10) devient

$$(11) \quad \sum p_i \mu_i^2 = (n - p) m^2.$$

Comme  $k_i$  est une fonction linéaire et homogène des erreurs,  $\mu_i^2$  n'est autre chose que la valeur probable de  $k_i^2$ ; on a donc le théorème :

*La valeur probable de  $\sum p_i k_i^2$  vaut  $(n - p)$  fois le carré de l'erreur moyenne des observations de poids un.*

Les considérations que nous venons de développer sont purement théoriques; pour les établir, on ne suppose pas les observations faites, mais au contraire qu'elles sont à faire: on en laisse les résultats indéterminés. Occupons-nous maintenant de les appliquer à la résolution du problème pratique suivant :

$x, y, z, \dots$  sont des quantités inconnues; on a observé effectivement d'une façon directe les valeurs  $t_i$  des fonctions  $f_i$  de ces

inconnues, et on connaît les poids relatifs  $p_i$  de ces observations (1); pour déterminer la valeur d'une fonction  $\psi$  des inconnues, on a des équations

$$(12) \quad a_i x + b_i y + c_i z + \dots = l_i, \quad qx + ry + sz + \dots = \psi,$$

en nombre surabondant (puisque  $n > p$ ), et incompatibles, puisque les observations sont entachées d'erreurs; il faut cependant en déduire la meilleure valeur à adopter pour  $\psi$ , et aussi l'erreur moyenne de cette détermination.

Si l'on combine linéairement les équations (12) de toutes les façons possibles, de façon à éliminer  $x, y, z, \dots$ , on est amené à mettre la valeur de  $\psi$  sous l'une des formes en nombre infini

$$\psi = \Sigma \omega_i l_i$$

qui se déduisent de (3) en remplaçant les  $f_i$  par les  $l_i$ : il est naturel alors de considérer comme étant la meilleure valeur de  $\psi$ , celle qui se déduit de la détermination principale  $\psi'$  de  $\psi$  quand on y remplace les  $f_i$  par les  $l_i$ : ce choix, dicté par la propriété de  $\psi'$  d'avoir un poids maximum, est celui que nous adopterons. Si nous appelons  $\psi_0$  la valeur ainsi obtenue pour  $\psi$ , on a, d'après (8),

$$\psi_0 = q \sum \frac{1}{2} p_i l_i \frac{\partial g(a_i, b_i, c_i, \dots)}{\partial a_i} + r \sum \frac{1}{2} p_i l_i \frac{\partial g(a_i, b_i, c_i)}{\partial b_i} + \dots,$$

et l'erreur moyenne de  $\psi_0$  sera  $\mu = m \sqrt{g(q, r, s, \dots)}$ .

En particulier, les meilleures valeurs à adopter pour les inconnues elles-mêmes, soit  $x_0, y_0, z_0, \dots$ , sont les coefficients de  $q, r, s, \dots$  dans l'expression précédente de  $\psi_0$ , et l'on a  $\psi_0 = qx_0 + ry_0 + sz_0 + \dots$ .

Les erreurs moyennes de  $x_0, y_0, z_0, \dots$  sont

$$\mu_x = m \sqrt{(aa)}, \quad \mu_y = m \sqrt{(bb)}, \quad \dots$$

Mais il reste une inconnue à déterminer: c'est  $m$ , l'erreur moyenne des observations de poids  $un$ . Pour y arriver, nous utilise-

(1) Cette attribution de poids ne peut être rigoureuse en général; on la fait d'après les conditions dans lesquelles les observations ont été faites.

rons le dernier théorème énoncé : si dans  $k_i$  on remplace les  $f_i$  par les  $l_i$ , on obtient des valeurs

$$k_i = a_i x_o + b_i y_o + c_i z_o + \dots - l_i,$$

et l'on peut former la somme  $\Sigma p_i k_i^2$ ; en égalant cette somme à sa valeur probable  $(n - p) m^2$ , on obtient la détermination de  $m$  généralement adoptée

$$(13) \quad m = \sqrt{\frac{\Sigma p_i k_i^2}{n - p}};$$

mais, comme nous l'avons déjà vu dans un cas analogue, cette formule n'est nullement rigoureuse : elle ne fournit qu'une approximation d'autant plus grande vraisemblablement que le nombre  $n$  des observations sera plus grand.

Revenons aux valeurs  $x_o, y_o, z_o, \dots$ ; en développant les dérivées partielles de la fonction  $g(a_i, b_i, c_i, \dots)$  on voit qu'on peut écrire

$$(14) \quad \begin{cases} x_o = (aa) [pal] + (ab) [pbl] + (ac) [pcl] + \dots, \\ y_o = (ab) [pal] + (bb) [pbl] + (bc) [pcl] + \dots, \\ z_o = (ac) [pal] + (bc) [pbl] + (cc) [pcl] + \dots, \\ \dots \end{cases}$$

On reconnaît là les solutions d'un système analogue à (7) :

$$(15) \quad \begin{cases} [paa] x_o + [pab] y_o + [pac] z_o + \dots = [pal], \\ [pab] x_o + [pbb] y_o + [pbc] z_o + \dots = [pbl], \\ [pac] x_o + [pbc] y_o + [pcc] z_o + \dots = [pcl], \\ \dots \end{cases}$$

Ceci posé, donnons aux inconnues des valeurs quelconques  $x, y, z, \dots$ ; elles ne vérifient pas les équations du problème, de sorte que si l'on calcule les quantités  $a_i x + b_i y + c_i z + \dots - l_i$ , on trouve des valeurs non nulles que nous appellerons les *résidus* relatifs au choix fait de  $x, y, z, \dots$ , pour les diverses observations  $l_i$ . Considérons la somme

$$S = \Sigma p_i (a_i x + b_i y + c_i z + \dots - l_i)^2$$

que l'on obtient en additionnant les produits des carrés des résidus



par les poids des observations correspondantes : la somme  $S$  est évidemment susceptible d'un minimum, que l'on détermine en égalant à zéro les dérivées partielles de  $S$  par rapport à  $x, y, z, \dots$  ; or, ceci conduit précisément aux équations (15), ainsi qu'on le voit tout de suite ; on peut donc énoncer l'important théorème suivant :

*Les meilleures valeurs à adopter pour  $x, y, z, \dots$ , soit  $z_0, y_0, z_0, \dots$ , sont précisément celles qui rendent minimum la somme  $S$ .*

C'est là une propriété fondamentale qui aurait pu, en suivant une exposition différente, nous servir de point de départ : c'est elle qui donne son nom à la méthode suivie, dite *méthode des moindres carrés*.

Lorsqu'on choisit pour  $x, y, z, \dots$  les valeurs  $x_0, y_0, z_0, \dots$ , les résidus correspondants sont précisément les valeurs  $k_i$  considérées plus haut ; la somme  $\sum p_i k_i^2$  est donc précisément le minimum  $S_0$  de la somme  $S$  ; au lieu de calculer cette somme directement, on peut donc encore écrire, en remarquant que  $S$  est une forme quadratique non homogène de  $x, y, z, \dots$ , et appliquant des principes déjà utilisés :

$$S_0 = - \sum p_i l_i k_i = - [plk] ;$$

remplaçant les  $k_i$ , puis  $x_0, y_0, z_0, \dots$  successivement par leurs valeurs, ceci devient :

$$\begin{aligned} S_0 &= [pll] - x_0 [pal] - y_0 [pbl] - z_0 [pcl] \dots \\ &= [pll] - g ([pal], [pbl], [pcl] \dots). \end{aligned}$$

Appelons alors  $\Delta$  le déterminant que l'on obtient en bordant le déterminant  $D$  comme l'indique le symbole :

$$\Delta = \begin{vmatrix} & & & & [pal] \\ & & & & [pbl] \\ & & & & [pal] \\ & & & & \vdots \\ [pal] & [pbl] & [pcl] & \dots & [pll] \end{vmatrix} ;$$

on peut écrire finalement

$$(16) \quad S_0 = \sum p_i k_i^2 = \frac{\Delta}{D}.$$

En résumant, pour avoir les éléments de la solution complète du problème il faut : 1° résoudre les équations (15) ; 2° déterminer les coefficients  $(aa)$ ,  $(ab)$ , ..... qui correspondent aux éléments  $[paa]$ ,  $[pab]$ , ... du déterminant  $D$  ; 3° calculer  $S_0$  et par suite  $m$  par les formules (16) et (13).

D'une façon plus générale, on est amené pratiquement à résoudre le problème suivant. On a  $p + q$  inconnues  $X, Y, Z, \dots$  liées par  $q$  relations distinctes rigoureuses  $\Phi_j (X, Y, Z, \dots)$ , et on en a observé directement  $n$  fonctions  $F_i (X, Y, Z, \dots)$  ; on suppose  $n > p$ , et on cherche les meilleures valeurs des inconnues. Il est facile de ramener ce problème, le plus général possible, à celui que nous venons de traiter. On connaît toujours, ou bien l'on peut toujours déterminer des valeurs  $X_0, Y_0, Z_0, \dots$  suffisamment approchées des inconnues, pour qu'en posant  $X - X_0 = x, Y - Y_0 = y, Z - Z_0 = z, \dots$  on puisse négliger les quantités du second ordre par rapport aux nouvelles inconnues  $x, y, z, \dots$  ; il suffira, par exemple, pour obtenir de telles valeurs, de résoudre d'une façon approchée  $p + q$  des équations dont dépend le problème : au surplus, si une première approximation était insuffisante, on pourrait toujours en faire une nouvelle. En remplaçant  $X$  par  $X_0 + x$ ,  $Y$  par  $Y_0 + y, \dots$  et appliquant la formule de Taylor, on voit que les nouvelles inconnues  $x, y, z, \dots$  sont liées par des relations linéaires et qu'on en a observé des fonctions linéaires ; les  $q$  relations rigoureuses qui lient les  $p + q$  inconnues permettent d'en éliminer  $q$ , et il en reste alors  $p$  qui sont indépendantes, et dont on a observé  $n$  fonctions linéaires ; ces fonctions linéaires peuvent être réduites à la forme homogène, car on ne fait ainsi que modifier le résultat d'observation d'une constante additive, ce qui ne change rien à l'erreur commise. Finalement, on est ainsi complètement ramené au cas envisagé tout d'abord.

**Méthode de calcul.** — Nous avons ainsi résolu complètement le problème le plus général de la combinaison des observations, celui que nous avons posé au début du chapitre. Il est encore nécessaire cependant d'entrer dans quelques détails relativement à la pratique des calculs exigés par l'application de la méthode des moindres carrés : mais nous nous bornerons à l'exposition d'une méthode générale du calcul.

Si l'on multiplie les deux membres de l'une des équations primitives

$$a_i x + b_i y + c_i z + \dots = l_i$$

par un facteur  $\lambda_i$ , il sera nécessaire de multiplier en même temps le poids correspondant  $p_i$  par  $\frac{1}{\lambda_i^2}$ ; de cette façon en effet, et de cette façon seulement, rien ne sera changé aux coefficients des équations (15) dites équations *normales*. On peut profiter de cette remarque pour ramener tous les poids à l'unité : il suffit en effet de prendre  $\lambda_i = \sqrt{p_i}$ . Nous supposons cette transformation faite, et nous allons faire voir, en supposant  $p = 4$ , comment on procède en général à la détermination des éléments de la solution complète du problème.

Il faut résoudre les quatre équations

$$\begin{cases} [aa] x + [ab] y + [ac] z + [ad] t = [al], \\ [ab] x + [bb] y + [bc] z + [bd] t = [bl], \\ [ac] x + [bc] y + [cc] z + [cd] t = [cl], \\ [ad] x + [bd] y + [cd] z + [dd] t = [dl]; \end{cases}$$

il faut de plus déterminer les coefficients  $(aa)$ ,  $(ab)$ ,  $(ac)$  ... correspondant comme on l'a dit aux éléments du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] \\ [ab] & [bb] & [bc] & [bd] \\ [ac] & [bc] & [cc] & [cd] \\ [ad] & [bd] & [cd] & [dd] \end{vmatrix};$$

il faut enfin, pour  $S_0$ , calculer  $\frac{\Delta}{D}$ ,  $\Delta$  étant le déterminant  $D$  ainsi bordé :

$$\Delta = \begin{vmatrix} & & & & [al] \\ & & & & [bl] \\ & & & & [cl] \\ & & & & [dl] \\ & & & & [dl] \\ [al] & [bl] & [cl] & [dl] & [ll] \end{vmatrix}.$$

On fait ce calcul en procédant par réductions successives.

Supposant  $[aa] \neq 0$ , la première équation donne

$$x = \frac{[al]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}t;$$

portons cette valeur telle quelle, et sans faire aucune réduction, dans les trois dernières équations; on a le nouveau système analogue au premier :

$$\begin{cases} [bb.1]y + [bc.1]z + [bd.1]t = [bl.1], \\ [bc.1]y + [cc.1]z + [cd.1]t = [cl.1], \\ [bd.1]y + [cd.1]z + [dd.1]t = [dl.1]; \end{cases}$$

il suffit de poser, en désignant par  $g$  et  $h$  deux quelconques des lettres  $b, c, d, l$  :

$$[gh.1] = [gh] - \frac{[ag][ah]}{[aa]}.$$

Soient  $D_1$  et  $\Delta_1$  les déterminants analogues à  $D$  et  $\Delta$ , relatifs au nouveau système; d'après la théorie élémentaire des déterminants, on voit que l'on a

$$D = [aa] D_1, \quad \Delta = [aa] \Delta_1,$$

d'où

$$\frac{\Delta}{D} = \frac{\Delta_1}{D_1}.$$

Soient ensuite  $(bb.1), (bc.1), \dots$  les coefficients analogues à  $(aa), (ab), \dots$  relatifs au déterminant  $D_1$ ; on a aussi

$$(bb) = (bb.1), \quad (bc) = (bc.1), \dots;$$

considérons en effet  $(bc)$  par exemple; c'est

$$(bc) = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ad] \\ [ac] & [bc] & [cd] \\ [ad] & [bd] & [dd] \end{vmatrix};$$

et par une suite de transformations évidentes, on a

$$(bc) = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ad] \\ 0 & [bc.1] & [cd.1] \\ 0 & [bd.1] & [dd.1] \end{vmatrix} = -\frac{[aa]}{D} \begin{vmatrix} [bc.1] & [cd.1] \\ [bd.1] & [dd.1] \end{vmatrix} \\ = \frac{[aa]}{D} (bc.1) D_1 = (bc.1).$$

Si l'on désigne par  $g$  une des lettres  $b, c, d$ , on a aussi, toujours d'après la théorie élémentaire des déterminants,

$$(ag) [aa] + (bg) [ab] + (cg) [ac] + (dg) [ad] = 0,$$

d'où

$$(ag) = - (bg) \frac{[ab]}{[aa]} - (cg) \frac{[ac]}{[aa]} - (dg) \frac{[ad]}{[aa]};$$

enfin, on a encore :

$$(aa) [aa] + (ab) [ab] + (ac) [ac] + (ad) [ad] = 1,$$

d'où

$$(aa) = \frac{1}{[aa]} - (ab) \frac{[ab]}{[aa]} - (ac) \frac{[ac]}{[aa]} - (ad) \frac{[ad]}{[aa]}.$$

On voit donc comment des éléments de résolution relatifs au nouveau système, on peut tirer tous ceux relatifs au système primitif.

On peut alors continuer de la même façon. Dans l'hypothèse  $[bb.1] \neq 0$ , on a

$$y = \frac{[bl.1]}{[bb.1]} z - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} z - \frac{[bd.1]}{[bb.1]} t;$$

le système nouveau est

$$[cc.2] z + [cd.2] t = [cl.2], \\ [cd.2] z + [dd.2] t = [dl.2],$$

où l'on a posé,  $g$  et  $h$  étant deux des lettres  $c, d, l$ ,

$$[gh.2] = [gh.1] - \frac{[bg.1][bh.1]}{[bb.1]}.$$

Si  $D_2$  et  $\Delta_2$  sont les nouveaux déterminants et  $(cc.2), \dots$  les nouveaux coefficients, on a :

$$\frac{\Delta_1}{D_1} = \frac{\Delta_2}{D_2}, \\ (cc.1) = (cc.2), \quad (cd.1) = (cd.2), \quad (dd.1) = (dd.2);$$

puis  $g$  désignant une des lettres  $c$  et  $d$  :

$$(bg.1) = - (cg.1) \frac{[bc.1]}{[bb.1]} - (dg.1) \frac{[bd.1]}{[bb.1]},$$

enfin

$$(bb.1) = \frac{1}{[bb.1]} - (bc.1) \frac{[bc.1]}{[bb.1]} - (bd.1) \frac{[bd.1]}{[bb.1]}.$$

Continuons encore de même avec l'hypothèse  $[cc.2] \neq 0$ . On a :

$$z = \frac{[cl.2]}{[cc.2]} - \frac{[cd.2]}{[cc.2]} t,$$

et il reste l'équation

$$[dd.3] t = [dl.3],$$

en faisant,  $g$  et  $h$  étant deux des lettres  $d$  et  $l$  :

$$[gh.3] = [gh.2] - \frac{[cg.2][ch.2]}{[cc.2]}.$$

Si  $D_3$  et  $\Delta_3$  sont les nouveaux déterminants, et  $(dd.3)$  l'unique coefficient analogue à  $(aa)$  dans le système primitif, on a

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_2}{D_2} &= \frac{\Delta_3}{D_3}, \\ (dd.2) &= (dd.3), \\ (cd.2) &= - (dd.2) \frac{[cl.2]}{[cc.2]}, \\ (cc.2) &= \frac{1}{[cc.2]} - (cd.2) \frac{[cd.2]}{[cc.2]}. \end{aligned}$$

Enfin on a immédiatement

$$\begin{aligned} t &= \frac{[dl.3]}{[dd.3]}, \\ (dd.3) &= \frac{1}{[dd.3]}, \end{aligned}$$

et

$$\frac{\Delta_3}{D_3} = [ll.4],$$

en faisant encore

$$[ll.4] = [ll.3] - \frac{[dl.3][dl.3]}{[dd.3]}.$$

Il est facile alors, en remontant de proche en proche, d'avoir tous les éléments de la solution cherchée. On vérifiera l'ensemble du calcul en constatant ensuite que l'on a

$$\begin{aligned} [ll.4] &= \Sigma (a_i x + b_i y + c_i z + \dots - l_i)^2 \\ &= [ll] - g \left( [al], [bl], [cl], [dl] \right). \end{aligned}$$

**Applications.** — Appliquons ce qui précède à quelques cas particuliers simples. Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une seule inconnue  $x$ ; l'observation fournit les  $n$  équations approchées

$$a_i x = l_i,$$

de poids respectifs  $p_i$ , d'où la seule équation normale

$$[paa] x = [pal],$$

et

$$x = \frac{[pal]}{[paa]}.$$

On a de plus

$$S_0 = [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]}, \quad m = \sqrt{\frac{S_0}{n-1}}, \quad \mu_x = \frac{m}{\sqrt{[paa]}}.$$

Si en particulier les  $a_i$  sont tous égaux à l'unité, de sorte que l'on a observé directement la grandeur  $x$ , on a simplement

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}, \quad \mu_x = \frac{m}{\sqrt{p_1 + p_2 + \dots}}.$$

L'expression de poids est ainsi justifiée : si l'on imagine en effet sur une droite dirigée des points d'abscisses  $l_1, l_2, \dots$  auxquels sont appliqués des poids  $p_1, p_2, \dots$ ,  $x$  sera précisément l'abscisse du centre de gravité du système ainsi formé.

On appelle souvent *moyenne pondérée* des  $l_i$  l'expression de  $x$  trouvée ci-dessus.

Plus particulièrement, si les poids sont tous égaux à l'unité, on a

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n};$$

c'est le *principe de la moyenne arithmétique*, que l'on regarde souvent comme la base de la théorie des erreurs ; l'erreur moyenne d'une observation individuelle est  $m = \sqrt{\frac{S_0}{n-1}}$ , et l'erreur moyenne de la valeur adoptée pour  $x$  est  $\frac{m}{\sqrt{n}}$  ; en prenant la moyenne arithmétique entre les  $n$  résultats d'observations comparables, on diminue donc l'erreur moyenne dans le rapport de 1 à  $\sqrt{n}$ .

Si dans le problème général on a observé plusieurs fois la même fonction des inconnues, on peut remplacer les diverses équations qui en résultent par une seule, en prenant pour résultat de l'observation fictive correspondante la moyenne pondérée des résultats des observations primitives, et en lui donnant pour poids la somme des poids primitifs : il est facile de vérifier en effet que dans ces conditions les coefficients  $[paa]$ ,  $[pab]$ , ...  $[pal]$  des équations normales ne sont pas altérés. Cette remarque est surtout utilisée quand il s'agit de l'attribution des poids  $p_i$ .

Proposons-nous maintenant de *compenser* un triangle rectiligne dont on a mesuré les trois angles  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ; on a observé ces angles respectivement  $p$  fois,  $q$  fois,  $r$  fois, et toujours dans les mêmes conditions, de sorte que si  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont les moyennes arithmétiques des valeurs observées pour chaque angle, on peut dire que les observations donnent les trois équations

$$\begin{aligned} x &= \alpha, & \text{de poids } p, \\ y &= \beta, & \text{« } q, \\ z &= \gamma, & \text{« } r. \end{aligned}$$

De plus on a la relation rigoureuse

$$x + y + z = \pi ;$$

il s'agit de déterminer les meilleures valeurs à adopter pour  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Appliquons purement et simplement les méthodes générales. L'élimination de  $z$  donne entre les deux inconnues indépendantes  $x$  et  $y$  les trois équations

$$\begin{aligned} x &= \alpha, & \text{de poids } p, \\ y &= \beta, & \text{« } q, \\ -x - y &= \gamma - \pi, & \text{« } r; \end{aligned}$$



d'où les deux équations normales

$$\begin{aligned} (p + r)x + ry &= px + r(\pi - \gamma), \\ rx + (q + r)y &= q\beta + r(\pi - \gamma); \end{aligned}$$

on en déduit directement

$$x = \alpha + \frac{p}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}} (\pi - \alpha - \beta - \gamma),$$

et par symétrie y et z.

Les résidus relatifs aux trois équations se calculent immédiatement, et la somme des produits de leurs carrés par p, q, r est :

$$S_0 = (\pi - \alpha - \beta - \gamma)^2 \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}};$$

l'erreur moyenne m des observations de poids un est ici  $\sqrt{S_0}$ , et celle de x par exemple devient  $\sqrt{S_0} \sqrt{\frac{q+r}{pq+pr+qr}}$ , ou finalement

$$\mu_x = |\pi - \alpha - \beta - \gamma| \frac{\sqrt{\frac{1}{p} \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right)}}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}}.$$

Supposons encore qu'il s'agisse de compenser un quadrilatère convexe plan, ABCD, (*fig. 2*) dans lequel on a mesuré les huit angles  $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}, \hat{8}$ , marqués sur la figure. Quatre seulement de ces angles sont indépendants, par exemple 1, 2, 5, 6; pour déterminer en fonction de ceux-là les quatre autres, on peut écrire que dans chacun des triangles de la figure la somme des angles vaut  $\pi$ , ce qui donne :

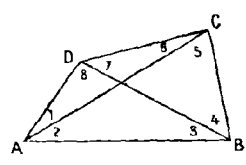


FIG. 2

$$\begin{aligned} \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{8} &= \pi, \\ \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} &= \pi, \\ \hat{1} + \hat{6} + \hat{7} + \hat{8} &= \pi, \\ \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} &= \pi; \end{aligned}$$

mais l'une de ces relations n'est pas distincte des autres. Pour trouver une nouvelle relation entre les huit angles, écrivons :

$$AC = AB \frac{\sin(\widehat{3} + \widehat{4})}{\sin \widehat{5}}, \quad BD = AB \frac{\sin(\widehat{1} + \widehat{2})}{\sin \widehat{8}}.$$

d'où

$$\frac{AC}{BD} = \frac{\sin \widehat{8} \sin(\widehat{3} + \widehat{4})}{\sin \widehat{5} \sin(\widehat{1} + \widehat{2})};$$

on aurait de même par exemple :

$$\frac{AC}{BD} = \frac{\sin \widehat{7} \sin(\widehat{3} + \widehat{4})}{\sin \widehat{2} \sin(\widehat{5} + \widehat{6})};$$

d'où

$$\frac{\sin \widehat{5} \sin \widehat{7} \sin(\widehat{1} + \widehat{2})}{\sin \widehat{2} \sin \widehat{8} \sin(\widehat{5} + \widehat{6})} = 1.$$

Si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$  sont les valeurs observées pour les angles, posons  $\widehat{1} = \alpha_1 + x_1, \widehat{2} = \alpha_2 + x_2, \dots$ ; les équations approchées du problème seront  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_8 = 0$ , correspondant aux observations; les équations rigoureuses seront par exemple :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_8 &= \pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_8, \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &= \pi - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7, \\ x_1 + x_6 + x_7 + x_8 &= \pi - \alpha_1 - \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8, \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \log \frac{\sin \alpha_3 \sin \alpha_7 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_8 \sin(\alpha_5 + \alpha_6)} + x_3 \cotg \alpha_3 + x_7 \cotg \alpha_7 \\ + (x_1 + x_2) \cotg(\alpha_1 + \alpha_2) - x_2 \cotg \alpha_2 - x_8 \cotg \alpha_8 \\ - (x_5 + x_6) \cotg(\alpha_5 + \alpha_6) = 0; \end{aligned}$$

le logarithme est décimal, et  $M$  est le module des logarithmes décimaux: il suffit de remarquer pour obtenir ce résultat que  $M \cotg x$  est la dérivée de  $\log \sin x$ , le logarithme étant décimal.

Enfin, comme exemple de calcul, choisissons celui de Gauss, qui donne les quatre équations de même poids à trois inconnues :

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 3, \\ 3x + 2y - 5z &= 5, \\ 4x + y + 4z &= 21, \\ -x + 3y + 3z &= 14; \end{aligned}$$

On a successivement

$$\begin{aligned}
 [aa] &= 27, & [ab] &= 6, & [ac] &= 0, & [al] &= 88, \\
 & & [bb] &= 15, & [bc] &= 1, & [bl] &= 70, \\
 & & & & [cc] &= 54, & [cl] &= 107, \\
 & & & & & & [ll] &= 671; \\
 \frac{[ab]}{[aa]} &= \frac{2}{9}, & \frac{[ac]}{[aa]} &= 0, & \frac{[al]}{[aa]} &= \frac{88}{27}; \\
 [bb.1] &= \frac{41}{3}, & [bc.1] &= 1, & [bl.1] &= \frac{454}{9}, \\
 & & [cc.1] &= 54, & [cl.1] &= 107, \\
 & & & & [ll.1] &= \frac{10373}{27}; \\
 \frac{[bc.1]}{[bb.1]} &= \frac{3}{41}, & \frac{[bl.1]}{[bb.1]} &= \frac{454}{123}, \\
 [cc.2] &= \frac{2211}{41}, & [cl.2] &= \frac{12707}{123}, \\
 & & [ll.2] &= \frac{24353}{123}; \\
 \frac{[cl.2]}{[cc.2]} &= \frac{12707}{6633}; \\
 [ll.3] &= \frac{1600}{19899}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{12707}{6633}, \\
 y &= \frac{454}{123} - \frac{3}{41}z = \frac{2617}{737}, \\
 x &= \frac{88}{27} - \frac{2}{9}y = \frac{49154}{19899}; \\
 (cc) &= \frac{41}{2211}, & (bc) &= -\frac{1}{737}, & (bb) &= \frac{54}{737}, \\
 (ab) &= -\frac{12}{737}, & (ac) &= \frac{2}{6633}, & (aa) &= \frac{809}{19899}; \\
 m &= \frac{40}{\sqrt{19899}} = 0,284; \\
 \mu_x &= 0,057, & \mu_y &= 0,077, & \mu_z &= 0,039.
 \end{aligned}$$

## LIVRE II

---

### LES INSTRUMENTS

#### CHAPITRE III

---

#### INSTRUMENTS ACCESSOIRES

Dans ce Livre, nous ne nous occuperons avec détails que des instruments fondamentaux employés en Astronomie pour exécuter des mesures, savoir : le théodolite, l'équatorial droit, l'instrument méridien, et le sextant ; pour les autres, nous nous bornerons à des indications sommaires. De plus, d'une façon générale, nous n'insisterons en aucune façon sur les détails de construction : quelques heures de pratique sont, à cet égard, plus profitables que l'étude de minutieuses descriptions.

Ce Chapitre est consacré aux instruments accessoires qui sont soit des organes essentiels, soit des compléments indispensables pour les instruments complets : nous n'insisterons que sur l'usage des cercles divisés, du niveau et du micromètre.

**Pendules et Chronomètres.** — A moins que l'on n'observe que des objets terrestres, fixes par rapport à l'observateur, ainsi qu'il arrive en Géodésie, il est nécessaire de déterminer le temps qui correspond à une observation déterminée. On se sert à cet effet soit d'une *pendule astronomique*, instrument fixe, soit d'un *chronomètre*, instrument transportable.

On sait que les petites oscillations d'un pendule sont isochrones ; il est facile de concevoir alors qu'on puisse, à l'aide d'un mécanisme approprié, indiquer le temps à l'aide d'un pendule abandonné à lui-même et exécutant des oscillations de faible amplitude. Toutefois, il est encore nécessaire d'entretenir le mouvement de ce pendule : il faut en effet réparer les pertes de force vive dues aux frottements, et maintenir l'amplitude des oscillations sensiblement constante. On se sert à cet effet d'un appareil moteur, soit généralement un poids qui tombe ; on peut aussi, comme le fait M. Lippmann, réaliser l'entretien du mouvement du pendule sans organe matériel de transmission, c'est-à-dire électriquement.

Les pendules astronomiques battent la seconde de temps sidéral ou de temps moyen, suivant leur usage, c'est-à-dire que la durée de chaque oscillation simple est d'une seconde de temps sidéral ou moyen. On lit l'heure à un instant donné sur le cadran, et on partage les secondes en dixièmes à l'aide de l'oreille. en écoutant les battements successifs, que l'on peut rendre distincts à assez grande distance, à l'aide de dispositifs convenables. On a ainsi le temps de la pendule employée. Le plus souvent, on doit noter ainsi l'instant du passage d'un astre derrière un fil très fin ; on s'aide alors de l'œil en appréciant les distances de l'astre au fil, dans les deux positions *a* et *b* qu'il occupe à la seconde ronde qui précède et qui suit l'instant du passage (*fig. 3*) ; si la distance de *a* au fil vaut  $\frac{4}{10}$  de *ab*, on note aussi  $\frac{4}{10}$  de seconde. Pour ces raisons, cette méthode est dite *méthode de l'œil et de l'oreille*.

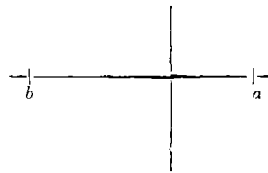


FIG. 3

Au lieu de se servir de l'oreille, on peut utiliser un *chronographe* : sur une bande de papier qui se déroule uniformément, les battements de la pendule s'inscrivent électriquement ; on peut aussi inscrire un instant donné en envoyant avec la main un signal dans l'appareil ; il est clair alors que la lecture de la bande permettra d'apprécier le temps de la pendule qui correspond à l'instant du signal. Ce procédé, qui peut atteindre une haute précision, n'est

employé que pour les observations méridiennes faites dans les Observatoires.

Dans les chronomètres, l'appareil régulateur est un *balancier* oscillant sous l'influence d'un ressort associé dit *spiral*; les oscillations d'un tel système convenablement construit sont isochrones, et d'ailleurs de grande amplitude. L'appareil moteur est un ressort qui se détend.

Les chronomètres battent ordinairement la demi-seconde ou les  $\frac{2}{5}$  de seconde.

Une pendule ou un chronomètre ne marque jamais exactement le temps qu'il est destiné à indiquer. Sa *correction* (ou encore son *état*) est la quantité qu'il faut ajouter à l'heure marquée pour avoir l'heure véritable (moyenne ou sidérale, suivant le cas) du lieu où l'instrument est installé. Une correction positive indique donc un retard, une correction négative correspond à une avance.

Quand il s'agit d'un chronomètre de voyage, la correction change continuellement en vertu de son déplacement à la surface de la terre : ce n'est donc plus l'élément essentiel à considérer : on appelle alors *état absolu* du chronomètre la quantité qu'il faut ajouter à l'heure marquée pour avoir l'heure véritable (moyenne ou sidérale) du méridien sur lequel l'instrument est réglé, par exemple, celui de Paris. Si  $L$  est la longitude du lieu d'observation, comptée comme nous l'avons toujours fait positivement vers l'Ouest; si  $C$  et  $E$  sont respectivement la correction et l'état absolu d'un chronomètre, on a toujours par suite la relation  $E = C + L$ .

La correction ou l'état absolu d'une pendule ou d'un chronomètre ne sont pas des quantités constantes, car un instrument n'est jamais parfait.

On appelle *marche diurne* ou simplement *marche* l'accroissement en un jour moyen de la correction ou de l'état absolu; d'une façon plus précise si  $E_1$  et  $E_2$  sont les états absolus à deux époques assez voisines  $t_1$  et  $t_2$  (exprimées en jours moyens), la marche moyenne  $m$  est le quotient  $\frac{E_2 - E_1}{t_2 - t_1}$ . On admet, d'après l'expérience, que cette marche varie d'une façon assez régulière pour qu'on puisse l'interpoler linéairement.

La marche d'une pendule en bon état et bien installée dépend de plusieurs causes : les plus importantes sont les variations de température et de pression ; il faut tenir compte aussi du temps écoulé depuis le moment où l'instrument a été construit ou bien remis en état, en d'autres termes de l'*âge des huiles*. En effet, les frottements se modifient avec le temps, et l'épaississement des huiles intervient comme un facteur important. On peut rendre très petite l'influence de la température à l'aide d'une bonne compensation ; dans ces conditions, la marche de la pendule doit être très petite et varier très lentement.

Dans un chronomètre, l'influence des changements de pression atmosphérique est négligeable ; mais la compensation par rapport à la température ne peut être obtenue aussi complètement que dans les pendules. Souvent les chronomètres sont réglés pour les deux températures de 0° et 30° centigrades ; alors ils avancent pour les températures intermédiaires, et retardent pour les autres.

La marche d'un chronomètre varie donc moins régulièrement que celle d'une pendule, et peut prendre des valeurs considérables.

Il faut d'ailleurs ajouter que, d'après leurs usages mêmes, les chronomètres sont exposés beaucoup plus que les pendules à des dérangements fortuits qui modifient brusquement leurs corrections et leurs marches. Malgré ces inconvénients, un bon chronomètre, bien étudié, dont l'état absolu est déterminé de temps en temps par les observations, permet, en tenant compte de sa marche, d'avoir l'heure avec une assez grande précision.

Il est toujours aisé de *comparer* entre eux des pendules ou des chronomètres différents, c'est-à-dire de déterminer leurs indications respectives à un même instant. L'opération pourra acquérir une haute précision si les deux instruments à comparer sont l'un de temps moyen et l'autre de temps sidéral, ou bien encore si l'un d'eux battant la seconde ou la demi seconde, l'autre bat les  $\frac{2}{5}$  de seconde ; il suffit pour le comprendre, d'observer que dans ces cas, le rythme des deux instruments est différent, et qu'il se produit fréquemment des coïncidences de battement faciles à apprécier.

Si les deux instruments à comparer ne sont pas immédiatement voisins, on se servira d'un chronomètre auxiliaire comparé successivement à chacun d'eux ; ou encore d'un simple *compteur*, c'est-

à-dire d'un chronomètre de construction moins soignée, susceptible de marquer le temps d'une façon uniforme pendant une courte durée.

On rapporterait de même au temps d'un chronomètre donné une observation faite à quelque distance de cet instrument, en se servant pour la faire d'un compteur que l'on aurait soin de comparer avant et après au chronomètre étalon.

**Mesure des angles. Cercles divisés.** — Nous ne nous occuperons pas de la mesure des longueurs, telle qu'on la pratique en géodésie, mais nous étudierons avec soin la mesure des angles, et l'usage des cercles divisés, sans insister toutefois sur les détails qui n'intéressent que la pratique.

Soit  $\Sigma$  un système de comparaison que nous regarderons comme fixe. Soit  $S$  un second corps mobile par rapport au premier, et assujéti, dans ce mouvement relatif, à tourner autour d'un axe fixe  $\omega\omega'$ , ce qui peut être réalisé mécaniquement d'une façon presque parfaite. Il faut déterminer l'angle dont tourne le système  $S$  pour passer d'une première position  $S_1$  à une seconde  $S_2$ . A cet effet,  $S$  est invariablement fixé à un disque circulaire plat, perpendiculaire à l'axe; ce disque  $C$ , qui peut être évidé partiellement, porte sur une couronne circulaire étroite dont le centre est sur l'axe en  $\omega$ , une graduation dont les traits sont dirigés suivant des rayons : c'est un *cercle divisé*. Nous supposerons ce cercle divisé d'une façon continue de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  : s'il n'en est pas ainsi, il est toujours facile de revenir à ce cas type. On installe en outre un repère fixe, c'est-à-dire invariablement lié à  $\Sigma$ , sous lequel ou en regard duquel les divisions successives de la graduation viennent défilier lorsque  $S$  tourne, et dont on puisse apprécier la coïncidence avec un trait de la division. Si alors les divisions  $\alpha$  et  $\beta$  se présentent au repère ou *index*,  $I$ , dans les deux positions successives  $S_1$  et  $S_2$ , il est clair que, pour passer de la première de ces positions à la seconde, le corps a tourné de l'angle  $\alpha - \beta$  dans le sens de la graduation. Ce dispositif peut être varié sans que son principe essentiel change; par exemple, la graduation peut être faite sur la *tranche* du disque circulaire, au lieu d'être faite sur le *limbe*. On peut aussi, et ce cas se présente souvent, fixer le cercle  $C$  au système  $\Sigma$  et l'index  $I$  au corps  $S$  : c'est alors l'index qui se meut devant la graduation, mais



cela importe peu, puisque le mouvement relatif seul du repère et de la graduation est à considérer. En d'autres termes, le rôle de  $\Sigma$  et de  $S$  ne fait que s'échanger. Observons seulement que dans les mêmes conditions que ci-dessus, c'est alors  $\beta - \alpha$  qui mesure la rotation de  $S$  dans le sens de la graduation, lorsque ce corps passe de la position  $S_1$  à la position  $S_2$ .

Pour étudier de plus près l'usage d'un cercle divisé, nous supposons d'abord l'instrument rigoureusement installé comme nous l'avons dit, et la graduation parfaite. Il ne reste alors qu'à savoir faire le plus exactement possible la lecture du cercle qui correspond à une position donnée du corps  $S$ , c'est-à-dire l'angle que fait  $\omega I$  avec le rayon  $\omega A$  qui aboutit à l'origine de la graduation (fig. 4). Il est d'ailleurs nécessaire d'observer une fois pour toutes que cette lecture peut toujours être, en pratique, altérée d'une quantité *constante*, c'est-à-dire qui reste toujours la même dans toutes les positions de  $S$  : en effet l'angle qui mesure la rotation de  $S$  entre deux positions successives est toujours une *différence* de lectures.

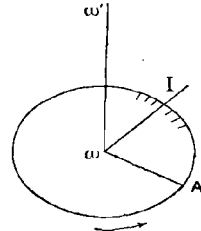


FIG. 4

D'une façon générale, l'index se trouve placé entre deux traits de la division, et il s'agit de déterminer sa distance au premier de ces traits, c'est-à-dire à celui de moindre rang. Si l'on n'a pour objet que des mesures grossières, on estime ce rapport à vue, en divisant par la pensée l'intervalle de deux traits en dix parties égales, par exemple.

Pour plus de précision on se sert d'un *vernier* (fig. 5).

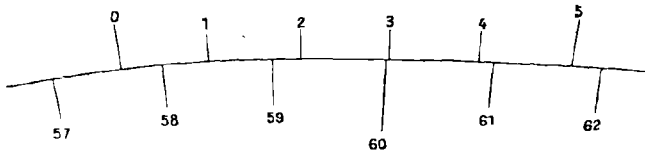


FIG. 5

Supposons que le cercle divisé se déplace le long d'un petit arc de cercle fixe, lui-même divisé en  $n$  parties égales, la longueur totale de ces  $n$  parties étant égale à la longueur totale de  $(n - 1)$

divisions du cercle : ce petit arc est un vernier. Les traits de division sur le vernier sont marqués de 0 à  $n$ , dans le même sens que la graduation du cercle ; le zéro du vernier est l'index. Cet index tombant entre deux traits consécutifs  $m, m + 1$ , du cercle divisé, il s'agit d'apprécier la distance  $\varepsilon$  qui le sépare du premier de ces traits, en prenant pour unité leur intervalle. Sur la figure, on a pris  $n = 5$  ; le zéro du vernier tombe entre les deux traits 57 et 58, et il faut déterminer la fraction  $\varepsilon$  de l'intervalle 57 — 58 comprise entre le trait 57 et le zéro du vernier.

D'une façon générale, considérons le trait  $k$  du vernier, et cherchons sa position par rapport au trait  $m + k$  de la division du cercle.

Les distances de ces deux traits au trait  $m$  pris pour origine, comptées positivement dans le sens de la graduation, sont respectivement  $\varepsilon + k \frac{n-1}{n}$ , et  $k$ , d'après l'unité choisie ; la différence de ces distances est  $\varepsilon - \frac{k}{n}$ .

Supposons alors que l'on ait  $\frac{p}{n} < \varepsilon < \frac{p+1}{n}$  ; le trait  $p$  du vernier sera encore en avant du trait correspondant de la division, tandis que le trait  $p + 1$  sera en arrière du trait correspondant, puisque l'on a  $\varepsilon - \frac{p}{n} > 0$ ,  $\varepsilon - \frac{p+1}{n} < 0$ . En d'autres termes l'intervalle  $(p, p + 1)$  du vernier sera compris tout entier dans une division du cercle, et ce sera le seul dans ce cas.

En observant donc, à l'aide d'une loupe, s'il est nécessaire, quelle est la division  $(p, p + 1)$  du vernier comprise tout entière dans une division de la graduation, on aura la valeur approchée à  $\frac{1}{n}$  près, soit  $\frac{p}{n}$ , de la distance  $\varepsilon$ .

Ainsi, sur la figure, on a  $\frac{3}{5} < \varepsilon < \frac{4}{5}$ .

En observant la façon dont les traits  $p$  et  $p + 1$  du vernier approchent des traits correspondants du cercle, on pourra même évidemment estimer  $\varepsilon$  avec une approximation supérieure, à  $\frac{1}{2n}$  près.

Pratiquement, la précision que peut donner l'emploi du vernier se trouve rapidement limitée, car les traits des divisions ayant une épaisseur non négligeable, dès que  $n$  est un peu grand, l'observa-

tion du vernier devient difficile et en partie illusoire. On s'en rend compte immédiatement en prenant un exemple : soit un cercle de 30 centimètres de diamètre divisé en 10', et muni d'un vernier au soixantième, c'est à dire que  $n = 60$ ; on peut donc observer à 10" près; mais l'observation est difficile, car la différence entre une division du cercle et une division du vernier, soit un arc de 10", vaut ici environ  $\frac{1}{140}$  de millimètre.

On obtient des résultats de beaucoup supérieurs en précision par l'usage d'un *microscope micrométrique*.

Un microscope fixe est installé perpendiculairement au plan du cercle, devant la division; l'image de celle-ci se fait à travers l'objectif, réelle et renversée, dans le plan conjugué, où se trouve le diaphragme, et est regardée avec un oculaire positif. Le grossissement est tel que l'on aperçoit dans le champ trois ou quatre traits consécutifs; ils paraissent d'ailleurs parallèles, puisqu'ils font entre eux de très petits angles. Dans le plan du diaphragme est installé un fil, ou plutôt un couple de fils d'araignée très fins et très rapprochés, que l'on peut faire mouvoir dans une direction perpendiculaire aux traits de la graduation, de façon qu'il reste parallèle à ces traits. On produit ce mouvement à l'aide d'une vis très bien travaillée, invariablement liée à un cadre rectangulaire sur lequel sont tendus les fils. On obtient le mouvement rectiligne de cette vis en guidant le mouvement du cadre, et en faisant tourner l'écrou, qui est assujéti à ne pouvoir que tourner sur lui-même, sans déplacement rectiligne. Comme dans tous les instruments de précision, des ressorts convenablement disposés suppriment tout temps perdu. Cet écrou porte un tambour divisé en un certain nombre de parties égales, dont on peut facilement apprécier le dixième; ce tambour tourne devant un index fixe, de façon que rien n'est plus facile que de déterminer le nombre de tours et de parties de tour dont il faut faire tourner l'écrou pour amener le couple de fils d'une position à une autre: on sait d'ailleurs que ce nombre est proportionnel au déplacement rectiligne de la vis.

On facilite le compte des tours en plaçant, dans le plan du diaphragme, un petit peigne métallique à dents très fines et équidistantes, tel que la distance de deux dents corresponde très exactement au déplacement produit par un tour: ce peigne porte au

centre du champ et au fond d'une dent un petit trou rond, qui peut servir de repère (*fig. 6*).

On dispose toujours la tête de vis dans le sens des divisions croissantes sur le cercle divisé, et le tambour est gradué de telle façon que le nombre de parties qu'on lit à l'index aille en croissant lorsque le couple de fils se rapproche de la tête de vis. Enfin, on fait en sorte que l'intervalle de deux divisions du cercle corresponde à très peu près à un petit nombre entier de tours. Nous supposons, par exemple, ainsi qu'il arrive souvent pour les cercles des instruments méridiens, le cercle divisé de 5' en 5'; que le tour vaut très sensiblement 1' et que le tambour est divisé en 60 parties, de telle sorte que chacune d'elles correspond à 1", et par suite qu'on peut apprécier le dixième de seconde d'arc à chaque pointé.

En regardant dans le microscope, et en supposant la tête de vis à droite, on aura par suite des diverses hypothèses faites, un tableau tel que celui que représente la figure, sauf que les chiffres relatifs à la graduation ne seront pas visibles.

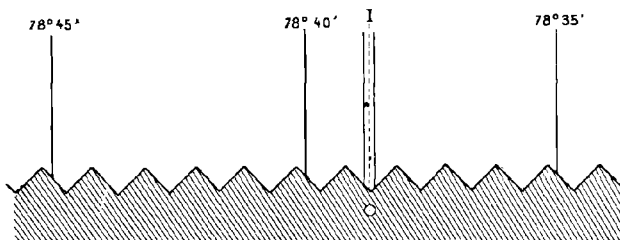


FIG. 6

Pour effectuer la lecture du cercle, supposons que le couple de fils étant dans une position très voisine du trou du peigne, le tambour de la vis marque 0 partie : si l'on place alors un fil fixe idéal équidistant des deux fils du couple dans cette position, c'est ce fil fixe idéal que l'on prend pour index I. Il est clair maintenant que pour avoir la lecture, tout revient à évaluer la distance qui sépare I du trait  $78^{\circ} 35'$ , c'est-à-dire du trait le plus voisin du trou vers la tête de vis ; cette distance est facile à évaluer en tours et parties de tour : le nombre des tours, 3, se lit sur le peigne ; le nombre des parties de tour, par exemple 37,3 se lit sur le tambour de la

vis quand on a amené le trait  $78^{\circ}35'$  entre les deux fils du couple mobile, aussi symétriquement que possible.

On pourrait de même mesurer la distance de I au trait  $78^{\circ}40'$ , situé de l'autre côté du trou; mais il faudrait considérer cette distance comme négative.

Il ne reste plus qu'à transformer en arc la distance  $3^{\text{h}}37^{\text{m}},3$ ; pour cela il faut connaître la valeur du tour de vis, qui est très voisine ici de 1' d'après ce qui a été dit; pour l'obtenir avec précision on évalue avec la vis la distance entre deux traits consécutifs, par exemple ceux qui sont de part et d'autre du trou; la valeur du tour de vis en résulte évidemment, et il est facile d'achever.

La détermination du tour de vis doit être faite plusieurs fois pendant chaque série d'observations, car les changements de température modifient la position respective du cercle et du microscope, et par suite aussi la valeur du tour de vis.

En réalité, on ne lit pas le trait  $78^{\circ}35'$  sur lequel on fait le pointé. On a un autre index, par exemple un simple trait I', qui est situé à une distance fixe du microscope et tel que sa distance circulaire  $\gamma$  à l'index I du microscope soit très sensiblement un nombre entier de divisions du cercle; c'est la lecture  $\alpha_0$  de cet index que l'on fait, à une division près par défaut.

Si alors  $\lambda$  est la lecture du microscope et si  $\tau$  est la valeur du tour de vis, la véritable lecture du cercle à l'index I est

$$\alpha = \alpha_0 + \gamma + \lambda\tau$$

En fait, la distance de l'index I' à l'index I défini par le microscope n'est pas rigoureusement égale à un nombre entier de divisions, mais peut en différer très légèrement. Il arrivera alors que si I' est très voisin d'un trait, I sera bien très voisin aussi du trait correspondant, mais pourra être placé par rapport à ce trait de façon opposée à celle dont I' est placé par rapport au trait qui l'avoisine: on prend alors comme lecture  $\alpha_0$  en I' celle du trait très voisin, et on fait la lecture du microscope sur le trait très voisin de I, cette lecture pouvant être négative; en pratique il n'y a aucune confusion à redouter.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé l'instrument parfait, ainsi que l'observation. Mais il n'en est pas ainsi, et nous

devons maintenant étudier les corrections qu'il faut faire subir à la lecture instrumentale telle que nous venons de l'obtenir, pour résoudre le problème proposé en tenant compte des imperfections. Nous continuerons d'abord à supposer l'observation parfaite, et nous dirons en dernier lieu comment, cette hypothèse n'étant pas réalisée, on essaye cependant d'obtenir les meilleurs résultats. Les principales sources d'erreurs sont 1° le défaut de perpendicularité du cercle et de l'axe ; 2° le défaut de centrage, c'est à dire le fait que le centre de la graduation n'est pas rigoureusement sur l'axe en  $\omega$  ; 3° les imperfections de la graduation ; 4° le jeu nécessaire des différentes pièces de l'instrument, et les variations de celui-ci avec le temps et les conditions extérieures, comme la température. On pourrait encore en signaler d'autres, au moins quand il s'agit d'observations de haute précision ; contentons-nous ici d'indiquer la *flexion*, lorsque le cercle n'est pas horizontal. On peut embrasser d'un seul coup les effets de ces différentes causes d'erreur, en disant que la lecture instrumentale  $z$ , faite au repère I, doit être augmentée d'une certaine *correction*  $f(z)$  toujours très petite, pour représenter réellement l'angle  $z'$  que fait  $\omega I$  avec  $\omega A$ , ou plus exactement le plan  $\omega \omega' I$  avec le plan  $\omega \omega' A$ , A étant toujours l'origine de la graduation ; c'est cet angle en effet qui définit la position actuelle du corps S.

Un fait fondamental ici, c'est que la correction  $f(z)$  est une fonction périodique de  $z$ , de sorte qu'on peut, comme l'on sait, la développer en série de Fourier, sous la forme

$$f(z) = a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos 2z + \dots \\ + b_1 \sin z + b_2 \sin 2z + \dots = \sum_0^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz).$$

Un second fait, non moins important, c'est que l'on peut admettre que cette série est rapidement convergente, c'est-à-dire que les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  décroissent rapidement quand l'indice  $n$  augmente.

Examinons en effet séparément l'influence des principales causes d'erreurs ; comme celles-ci sont toujours très petites, elles ne feront guère que s'ajouter quand toutes les causes agiront simultanément, et cette façon de procéder est légitime.

Considérons d'abord l'erreur d'*excentricité*, c'est-à-dire supposons simplement le cercle C mal centré, tout le reste demeurant parfait. Le centre O de la graduation ne coïncide pas avec le pied  $\omega$  de l'axe sur le cercle C ; la lecture  $\alpha$  fournit l'angle AOI, tandis que la vraie lecture  $\alpha'$  est l'angle A $\omega$ I (fig. 7).

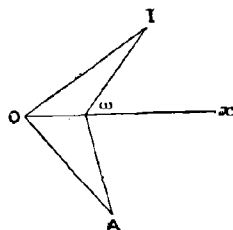


FIG. 7

Soit Ox la droite O $\omega$  prolongée,  $\varphi$  et  $\varphi'$  les angles fixes AOx, A $\omega$ x,  $e$  et  $d$  les longueurs fixes O $\omega$  et  $\omega$ I ; le rapport  $\frac{e}{d}$ , toujours

très petit, est l'*excentricité* du cercle. Dans le triangle O $\omega$ I, on a toujours la relation

$$\sin(\alpha' - \alpha - \varphi' + \varphi) = \frac{e}{d} \sin(\alpha - \varphi)$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \varphi' - \varphi + \frac{e}{d} \sin(\alpha - \varphi) + \frac{1}{6} \frac{e^3}{d^3} \sin^3(\alpha - \varphi) + \dots \\ &= \varphi' - \varphi + \left( \frac{e}{d} + \frac{1}{8} \frac{e^3}{d^3} + \dots \right) \sin(\alpha - \varphi) - \frac{1}{24} \frac{e^3}{d^3} \sin 3(\alpha - \varphi) + \dots \end{aligned}$$

Ici  $f(\alpha)$  est bien de la forme générale annoncée,  $n$  étant impair ou nul, et les seuls coefficients de quelque importance sont  $a_1$  et  $b_1$  à cause de la petitesse de  $\frac{e}{d}$ .

Voyons maintenant l'influence du défaut de perpendicularité du cercle et de l'axe : l'erreur qui en résulte est tout à fait analogue à ce que nous avons appelé la *réduction à l'équateur* dans l'étude du mouvement du Soleil ; elle est développable sous la forme générale ci-dessus,  $n$  étant cette fois pair, et les coefficients décroissent très rapidement ; les principaux d'entre eux sont  $a_2$  et  $b_2$ , du second ordre par rapport à l'inclinaison du plan du cercle sur le plan perpendiculaire à l'axe  $\omega\omega'$ .

Enfin considérons les erreurs de division. La graduation du cercle est obtenue au moyen d'une machine à diviser dont l'organe essentiel est une vis. Les imperfections de cette machine et de son établissement par rapport au cercle produisent dans la division de celui-ci des erreurs dont le caractère périodique est évident : les unes sont analogues à celles que nous venons d'étudier, les autres,

dues à l'emploi de la vis peuvent rendre sensibles des termes de rang assez élevé dans la série  $f(\alpha)$ .

Admettant donc finalement les propriétés de la fonction  $f(\alpha)$  indiquées plus haut, nous voyons que l'angle dont a tourné le corps S pour passer d'une position  $S_1$  à une position  $S_2$  a pour valeur

$$\alpha - \beta + f(\alpha) - f(\beta),$$

si  $\alpha$  et  $\beta$  sont les deux lectures correspondantes ; et tout revient par suite, maintenant, soit à déterminer la fonction  $f(\alpha)$ , soit à éliminer son influence.

Avant de résoudre ces questions, nous démontrerons une proposition auxiliaire. Soient  $p$  valeurs consécutives de  $\alpha$  :  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ , formant une progression arithmétique de raison  $\frac{2\pi}{p}$ , et envisageons la moyenne arithmétique  $\varepsilon$  des  $p$  valeurs correspondantes  $f(\alpha_i)$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{p} \sum_i f(\alpha_i) = \sum_n \frac{a_n}{p} (\cos n\alpha_1 + \cos n\alpha_2 + \dots + \cos n\alpha_p) \\ &\quad + \sum_n \frac{b_n}{p} (\sin n\alpha_1 + \sin n\alpha_2 + \dots + \sin n\alpha_p). \end{aligned}$$

En posant

$$t = \cos \frac{2\pi}{p} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{p},$$

on a, d'après l'hypothèse, et par application de la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} &(\cos n\alpha_1 + \cos n\alpha_2 + \dots + \cos n\alpha_p) \\ &\quad + \sqrt{-1} (\sin n\alpha_1 + \sin n\alpha_2 + \dots + \sin n\alpha_p) \\ &= (\cos n\alpha_1 + \sqrt{-1} \sin n\alpha_1) (1 + t^n + t^{2n} + \dots + t^{(p-1)n}). \end{aligned}$$

La dernière parenthèse est la somme des puissances  $n^{\text{èmes}}$  des racines de l'équation  $x^p - 1 = 0$  ; on sait qu'elle est nulle ou égale à  $p$  suivant que  $n$  n'est pas ou est un multiple de  $p$ . On a donc simplement

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{p} \sum_i f(\alpha_i) = a_0 + a_p \cos px_1 + a_{2p} \cos 2px_1 + \dots \\ &\quad + b_p \sin px_1 + b_{2p} \sin 2px_1 + \dots \end{aligned}$$



Si donc la série  $f(\alpha)$  est très rapidement convergente,  $\varepsilon$  diffère très peu de  $a_0$  dès que  $p$  a une valeur notable.

Ce théorème démontré, passons en revue quelques cas parmi ceux que l'on rencontre dans la pratique et indiquons les méthodes correspondantes.

Dans certains instruments, comme le sextant ou les cercles à réflexion, on ne dispose que d'un seul vernier : les mesures ne peuvent atteindre d'ailleurs qu'une précision médiocre, en raison des conditions d'installation et d'emploi. On peut améliorer les résultats fournis directement par l'observation en procédant d'une des trois façons suivantes.

1° On détermine directement, à une constante près, la correction  $f(\alpha)$  pour un certain nombre de lectures, et on en déduit la fonction  $f(\alpha)$  par interpolation. Il suffit à cet effet de mesurer avec l'instrument un angle  $\varphi$  bien connu par ailleurs avec une précision supérieure ; si cet angle mesure la rotation de S entre les deux positions  $S_1$  et  $S_2$ , aux lectures  $\alpha$  et  $\beta$ , on a comme plus haut une équation de la forme

$$\varphi = \alpha - \beta + f(\alpha) - f(\beta),$$

qui fournit la différence entre  $f(\alpha)$  et  $f(\beta)$ . On peut ainsi dresser un tableau des corrections  $f(\alpha)$ , en supposant par exemple  $f(0) = 0$ , et on appliquera ensuite à chaque lecture la correction correspondante prise dans ce tableau. On peut aussi pour plus de simplicité ne tenir compte que de l'erreur d'excentricité : ceci revient comme nous l'avons vu, à prendre  $f(\alpha)$  sous la forme simple  $a_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha$  (toujours à une constante près). Alors l'observation de l'angle  $\varphi$  donnera une équation de la forme

$$\varphi = \alpha - \beta + a_1 (\cos \alpha - \cos \beta) + b_1 (\sin \alpha - \sin \beta);$$

en multipliant de telles observations, on aura autant d'équations qu'on voudra entre  $a_1$  et  $b_1$ , et on les résoudra par la méthode des moindres carrés, afin d'avoir les meilleures valeurs à adopter pour ces constantes inconnues. L'étude des résidus que donneront ces valeurs dans les équations, montrera si l'hypothèse simple faite sur la forme de  $f(\alpha)$  est suffisamment légitime : on ne peut guère l'affirmer a priori, car si même on ne tient compte que de l'excentricité, celle-ci n'est pas nécessairement constante, comme nous

l'avons supposé plus haut ; elle est plutôt *fluctuante*, suivant l'expression de Faye, à cause du jeu des pièces.

2° On opère par *répétition*. Pour appliquer cette méthode, il faut que le cercle C soit non pas invariablement lié à S, mais puisse être fixé à volonté soit au corps S, soit au système fixe  $\Sigma$ . Voici alors comment on peut procéder pour mesurer l'angle  $\varphi$  dont tourne S pour passer de  $S_1$  à  $S_2$ .

On fixe d'abord C à S ; on a la lecture  $\alpha_1$  dans la position  $S_1$ , la lecture  $\beta_1$  dans la position  $S_2$ , d'où une première équation

$$\varphi = \alpha_1 - \beta_1 + f(\alpha_1) - f(\beta_1).$$

On fixe alors le cercle à  $\Sigma$  et on le rend indépendant de S ; puis on ramène S dans la position  $S_1$  : la lecture correspondante reste toujours  $\beta_1$ , puisqu'ici  $\Sigma$ , C et I forment un système invariable. Ceci fait, on fixe de nouveau C à S en le rendant indépendant de  $\Sigma$  et on ramène S en  $S_2$ , ce qui donne une nouvelle lecture  $\beta_2$ , et une nouvelle équation :

$$\varphi = \beta_1 - \beta_2 + f(\beta_1) - f(\beta_2).$$

On répète les mêmes opérations  $n$  fois de suite, et on a une dernière équation

$$\varphi = \beta_{n-1} - \beta_n + f(\beta_{n-1}) - f(\beta_n).$$

En additionnant toutes ces équations membre à membre, il vient

$$n\varphi = \alpha_1 - \beta_n + f(\alpha_1) - f(\beta_n),$$

d'où

$$\varphi = \frac{1}{n} (\alpha_1 - \beta_n) + \frac{1}{n} (f(\alpha_1) - f(\beta_n));$$

il faudra seulement avoir soin, pour que cette équation soit exacte, de faire croître ou décroître continûment les lectures successives  $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , sans supprimer les multiples de  $2\pi$  qui peuvent se présenter.

En réalité, on fait seulement les deux lectures initiale et finale  $\alpha_1$  et  $\beta_n$  ; on voit que la correction  $f(\alpha_1) - f(\beta_n)$  est divisée par  $n$  et par suite peut être rendue négligeable en prenant  $n$  suffisamment

grand ou bien encore tel que  $\alpha_i - \beta_n$  soit voisin d'un multiple de  $2\pi$  : tel est l'avantage de cette méthode.

Théoriquement la répétition peut sembler parfaite ; il n'en est rien pratiquement, car les différents mouvements que l'on doit faire modifient les conditions d'installation de l'instrument, et par suite rendent partiellement illusoire la précision sur laquelle on compte.

Aujourd'hui la répétition est pour ainsi dire abandonnée.

3° On opère par *réitération*. Ici il faut supposer que l'on peut modifier à volonté la position du cercle C par rapport à S. On fait une première opération dans une première position de C par rapport à S, ce qui donne une équation telle que

$$\varphi = \alpha_1 - \beta_1 + f(\alpha_1) - f(\beta_1).$$

On déplace alors C par rapport à S, de façon à changer leur position relative et on renouvelle l'opération ; on a de nouvelles lectures, et une nouvelle équation

$$\varphi = \alpha_2 - \beta_2 + f(\alpha_2) - f(\beta_2).$$

On recommence  $p$  fois de suite, et on a finalement par addition des diverses équations trouvées

$$\varphi = \frac{1}{p} (\Sigma \alpha_i - \Sigma \beta_i) + \frac{1}{p} \Sigma f(\alpha_i) - \frac{1}{p} \Sigma f(\beta_i).$$

Considérons d'abord la correction  $f(\alpha_i) - f(\beta_i)$  de chaque opération comme une erreur accidentelle ; on voit alors, d'après le chapitre précédent, que la réitération augmente la précision dans le rapport de  $\sqrt{p}$  à 1.

Ce n'est pas là un avantage considérable ; mais il est possible d'obtenir beaucoup mieux. On peut évidemment s'arranger de façon que les diverses lectures  $\alpha_i$  forment au moins très sensiblement une progression arithmétique de raison  $\frac{2\pi}{p}$  ; il en sera de même alors des lectures  $\beta_i$  et d'après le théorème démontré plus haut, on aura alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} (\Sigma f(\alpha_i) - \Sigma f(\beta_i)) = & a_p (\cos p\alpha_1 - \cos p\beta_1) + a_{2p} (\cos 2p\alpha_1 - \cos 2p\beta_1) + \dots \\ & + b_p (\sin p\alpha_1 - \sin p\beta_1) + b_{2p} (\sin 2p\alpha_1 - \sin 2p\beta_1) + \dots \end{aligned}$$

Si la série  $f(z)$  est rapidement convergente et si  $p$  est grand (20 par exemple), le terme inconnu de la valeur de  $\varphi$  devient donc négligeable.

La réitération exige beaucoup de lectures, tandis que la répétition n'en demande que deux ; mais elle élimine mieux l'influence de  $f(z)$ , et surtout elle a cette supériorité que les diverses opérations successives sont indépendantes les unes des autres, et que pendant la durée d'une opération individuelle, les liaisons de l'instrument ne changent pas.

La réitération est employée surtout en géodésie.

Considérons maintenant les instruments, comme le théodolite et le cercle méridien, dans lesquels on peut installer plusieurs verniers ou microscopes. En faisant les lectures à chacun d'eux, il est clair qu'on opère exactement comme par réitération. Si l'on a  $p$  microscopes, et que l'un d'eux donne pour lectures  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  dans les deux positions  $S_1$  et  $S_2$  de l'instrument, on a une série d'équations

$$\varphi = \alpha_i - \beta_i + f(\alpha_i) - f(\beta_i),$$

que l'on traite comme plus haut.

On dispose par suite toujours les microscopes régulièrement, c'est-à-dire aux sommets d'un polygone régulier de  $p$  côtés. L'avantage sur la réitération simple est évident, puisqu'on n'a pas à modifier les liaisons.

Si en particulier  $p = 2$ , les deux index sont diamétralement opposés, et ceci suffit pour éliminer l'erreur d'excentricité, puisque dans l'expression  $\frac{1}{p} \sum f(\alpha_i)$  ne restent alors que les cosinus et sinus des multiples pairs de la lecture.

Aussi choisit-on toujours pour  $p$  un nombre pair, de façon que la lecture à deux index opposés suffise pour éliminer la majeure partie de  $f(z)$ .

En réalité, on ne peut pas pratiquement donner de grandes valeurs à  $p$  ; suivant les dimensions de l'instrument, on fait  $p = 2, 4, \text{ ou } 6$ . On peut alors, pour obtenir encore une plus haute précision, appliquer les méthodes proprement dites de répétition ou de réitération, en faisant à chaque fois les lectures à tous les index. Si par exemple on a quatre microscopes, et que l'on fasse cinq réitérations, en augmentant successivement la lecture à l'un des

microscopes de 18°, cela reviendra en réalité à avoir utilisé 20 microscopes, ou à avoir fait 20 répétitions.

Dans les grands instruments méridiens, où l'on recherche le maximum de précision, le cercle est absolument invariable, pour des raisons de stabilité, par rapport au corps S; on ne peut donc que faire les lectures aux six microscopes, si l'on prend  $p = 6$ . Il reste encore alors des erreurs qui ne sont pas tout fait négligeables, au degré de précision que l'on recherche.

Pour en tenir compte, on les détermine directement : c'est un travail extrêmement long et pénible dont nous ne ferons qu'indiquer le principe en supposant un cercle divisé de 5' en 5'.

Une lecture individuelle  $\alpha$  doit subir la correction  $f(\alpha)$  pour être utilisée; cette lecture a été faite à l'aide d'un certain trait du cercle que nous désignerons par  $(h)$ ,  $h$  étant l'arc qui lui correspond, de sorte que  $\alpha$  diffère très peu de  $h$ ; la fonction  $f(\alpha)$ , qu'on peut supposer continue, diffère très peu de  $f(h)$ , et nous poserons  $f(\alpha) = f(h) + \varepsilon$ . Supposons que l'on observe simplement avec deux microscopes opposés, aux lectures  $\alpha$  et  $\alpha'$  dans la position S<sub>1</sub>,  $\beta$  et  $\beta'$  dans la position S<sub>2</sub>. L'angle  $\varphi$  dont tourne S pour passer de S<sub>1</sub> à S<sub>2</sub> est donné par l'équation :

$$\varphi = \frac{\alpha + \alpha'}{2} - \frac{\beta + \beta'}{2} + \frac{1}{2} [f(h) + f(h')] - \frac{1}{2} [f(k) + f(k')] + \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} - \frac{\eta + \eta'}{2},$$

en appelant  $h'$  et  $\varepsilon'$ ,  $k$  et  $\eta$ ,  $k'$  et  $\eta'$  les quantités qui jouent par rapport à  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$  le même rôle que  $h$  et  $\varepsilon$  par rapport à  $\alpha$ .

Les traits observés  $h'$  et  $h$ ,  $k'$  et  $k$  diffèrent respectivement de 180°, et le dernier terme  $\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} - \frac{\eta + \eta'}{2}$  est alors tout à fait négligeable; car si tenant compte uniquement de l'excentricité, on réduit  $f(\alpha)$  à sa partie principale  $a_0 + a_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha$ , ce terme serait nul si l'on avait  $\alpha' = \alpha + \pi$ ,  $\beta' = \beta + \pi$ , ce qui est très voisin de la vérité. On réduit donc l'équation précédente à la forme

$$\varphi = \frac{\alpha + \alpha'}{2} - \frac{\beta + \beta'}{2} + \frac{1}{2} [f(h) + f(h + \pi)] - \frac{1}{2} [f(k) + f(k + \pi)].$$

Ceci posé, installons d'une façon fixe deux couples de microscopes opposés I<sub>1</sub> et I'<sub>1</sub>, I<sub>2</sub> et I'<sub>2</sub>, disposés comme sur la figure (fig. 8);



Or, d'après la définition,  $C_0 = C_{180}$ ; de plus, on doit prendre  $C_0 = 0$ ; donc on peut déterminer  $\varepsilon$ ,  $C_{60}$  et  $C_{120}$ ; on peut d'ailleurs faire aussi  $h = 180^\circ$ , et on arrivera aux mêmes résultats.

Pour continuer, faisons par exemple  $h = 0$ ,  $n = 20^\circ$ ,  $p = 3$ ; on aura

$$\begin{cases} \varepsilon = \gamma_0 + C_{20} - C_0, \\ \varepsilon = \gamma_{20} + C_{40} - C_{20}, \\ \varepsilon = \gamma_{40} + C_{60} - C_{40}, \end{cases}$$

ce qui donnera,  $C_{60}$  étant connue, les corrections  $C_{20}$  et  $C_{40}$ , et d'une façon analogue, en modifiant  $h$ , les corrections de  $20^\circ$  en  $20^\circ$ .

Pour avoir les corrections de  $5^\circ$  en  $5^\circ$ , on ne peut pas pratiquement faire  $n = 5^\circ$ , car les microscopes seraient trop rapprochés; on fait  $n = 25^\circ$ , et une opération pourra fournir,  $C_0$  et  $C_{100}$  étant connues, les corrections des traits  $25^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $75^\circ$ ; modifiant  $h$ , on aura toutes les corrections cherchées.

Les corrections de  $1^\circ$  en  $1^\circ$  s'obtiendront de même en faisant par exemple  $n = 19^\circ$ ; une opération fournira les inconnues  $C_{19}$ ,  $C_{38}$ ,  $C_{57}$ ,  $C_{76}$ , connaissant  $C_0$  et  $C_{95}$  par ce qui précède.

Enfin pour les corrections de  $5'$  en  $5'$  on pourrait de même prendre  $n = 19^\circ 5'$ ; une opération donnerait les corrections des traits tels que  $19^\circ 5'$ ,  $38^\circ 10'$ ,  $57^\circ 15'$ , ...  $209^\circ 55'$ , connaissant  $C_0$  et  $C_{229}$ . On peut aussi procéder plus simplement, mais c'est assez insister sur ces opérations, qui pour donner de bons résultats doivent être entourées des plus minutieuses précautions, afin d'éviter toute cause de perturbation. La méthode indiquée n'a d'ailleurs rien d'absolu et peut être modifiée, comme l'a montré M. Lœwy.

Remarquons que pour faire les déterminations précédentes, il n'est pas nécessaire d'avoir une valeur très exacte des tours de vis des microscopes; en effet ils sont toujours extrêmement voisins de  $r'$ , et si l'on a soin de prendre  $\varepsilon$  très petit, les lectures aux différents microscopes sont toujours voisines; comme elles n'interviennent dans les équations à résoudre que par leurs différences, on comprend facilement que la valeur exacte du tour de vis a une influence négligeable.

Quand il s'agit des observations ordinaires, il n'en est pas de même; on détermine alors les tours de vis comme nous l'avons dit, en tenant compte si l'on veut pour plus de précision des cor-

rections des traits observés. Toutefois, on ne fait pas cette détermination pour chaque microscope individuellement, mais pour leur moyenne, ce qui est légitime. En effet si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  sont les lectures des tambours aux divers microscopes en nombre  $p$ , et si  $\tau_1, \tau_2, \dots$  sont les tours de vis correspondants, on est amené comme nous l'avons vu à faire la moyenne  $\frac{1}{p} \Sigma \lambda_i \tau_i$ ; soit alors  $\lambda$  la moyenne arithmétique des  $\lambda_i$ ,  $\tau$  celle des  $\tau_i$ , et posons  $\lambda_i = \lambda + \lambda'_i$ ,  $\tau_i = \tau + \tau'_i$ , de sorte que  $\Sigma \lambda'_i = 0$ ,  $\Sigma \tau'_i = 0$ ; on a dans ces conditions  $\frac{1}{p} \Sigma \lambda_i \tau_i = \lambda \tau + \frac{1}{p} \Sigma \lambda'_i \tau'_i$ . Ce dernier terme est négligeable, quand l'instrument est bon, parce que les  $\lambda'_i$  et  $\tau'_i$  sont très petits; la quantité  $\tau$  est le tour de vis pour la moyenne des microscopes; on la détermine comme ci-dessus en évaluant la distance de deux traits consécutifs aux  $p$  microscopes, et égalant la moyenne multipliée par  $\tau$  à l'intervalle connu des deux traits.

Jusqu'ici nous avons supposé les lectures parfaites; mais en réalité il y a des erreurs de *pointé*; ces erreurs doivent être considérées comme accidentelles; on les diminuera en multipliant les observations et prenant la moyenne. Ainsi, dans la méthode de répétition, si l'on a fait  $p$  opérations, il est clair d'après la formule établie, et ce qui a été dit au chapitre précédent, que l'erreur moyenne d'une opération sera diminuée dans le rapport de 1 à  $\sqrt{p}$ .

En particulier, quand on étudie les erreurs de division d'un cercle, il faudra répéter un grand nombre de fois les mêmes opérations pour pouvoir compter sur quelque exactitude, car les erreurs de pointé sont du même ordre que les corrections des traits. Il sera d'ailleurs nécessaire d'établir une méthode convenable pour la combinaison des observations, de façon à assurer aux diverses corrections une erreur moyenne suffisamment petite.

**Niveau.** — Le *niveau à bulle* sert à rendre horizontal un plan, ou une droite, par suite aussi à rendre un axe vertical, et enfin, dans les recherches de précision, à mesurer l'inclinaison, supposée faible, d'une direction par rapport à l'horizon.

Il est formé d'un tube cylindrique en verre dont une étroite partie intérieure a été travaillée avec le plus grand soin de façon à



offrir la forme de la surface engendrée par un petit arc de cercle de très grand rayon tournant autour de sa corde (*fig. 9*). Ce tube a été rempli d'un liquide très mobile, tel que l'éther, de façon cependant qu'il subsiste une bulle de vapeur qui, d'après les lois de l'hydrostatique, se placera toujours au point le plus élevé; le plan de séparation du liquide et de la vapeur est horizontal.

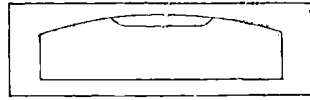


FIG. 9

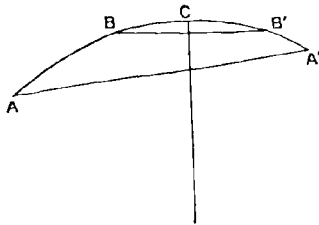


FIG. 10

Si donc le niveau est placé, ainsi qu'on a soin de le faire, de façon que la bulle se loge dans la partie travaillée du tube, et que l'on considère le plan vertical qui passe par l'axe  $AA'$  de cette partie ou *axe du niveau*, la bulle sera placée symétriquement par rapport à ce plan; ses extrémités dans ce plan étant B et B', la droite BB' sera horizontale; ou encore le rayon qui aboutit au milieu C de l'arc BB' sera vertical (*fig. 10*).

La surface extérieure du tube est graduée de façon que l'on puisse facilement lire les divisions et dixièmes de division qui correspondent aux extrémités B et B' de la bulle; les traits de division correspondent à des longueurs égales sur les arcs tels que ACA': en d'autres termes chaque *partie* du niveau a une certaine valeur constante que l'on exprime en arc.

Nous supposons dans ce qui suit la graduation faite d'une façon continue en parties positives et négatives, de façon que le zéro soit très sensiblement au milieu de l'arc AA' (*fig. 11*). Il n'en est pas toujours ainsi, mais il est toujours facile de se ramener en fait à ce cas théorique, mieux approprié à l'exposition qui suit.

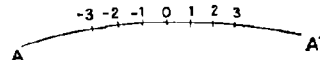


FIG. 11

Le niveau est engagé dans une monture métallique sur laquelle il n'y a pas lieu d'insister.

Voici la théorie, extrêmement simple, du niveau.

Soit une droite  $x'x$  invariablement liée au niveau, et située dans un même plan vertical avec l'axe  $AA'$  (*fig. 12*): cette droite est sensi-

blement parallèle à  $AA'$ , et la direction  $x'x$  est celle de la graduation croissante. Supposons alors que  $\alpha$  soit l'angle (positif ou négatif) de la direction  $x'x$  avec l'horizon  $H'H$ , que la bulle occupe une position  $BB'$ ,  $\lambda$  et  $\lambda'$  étant les lectures correspondantes; que  $\omega$  soit

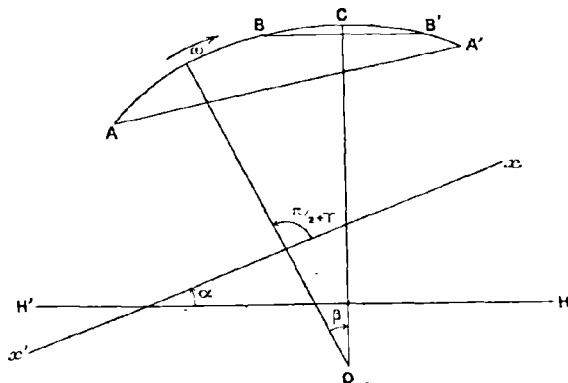


FIG. 12

l'origine de la graduation; que  $C$  étant le milieu de la bulle, et  $O$  le centre de l'arc  $AA'$ ,  $\beta$  soit l'angle  $\omega OC$ ; que l'angle de  $x'x$  avec  $O\omega$ , voisin de  $\frac{\pi}{2}$ , soit  $\frac{\pi}{2} + \gamma$ , enfin que  $\sigma$  soit la valeur angulaire d'une partie du niveau.

Prenons comme unité d'angle la valeur  $\sigma$  d'une partie du niveau; on a d'abord

$$\beta = \frac{\lambda + \lambda'}{2};$$

de plus en évaluant les angles du triangle formé par les droites  $x'x$ ,  $H'H$ , et  $O\omega$ , on a

$$\alpha = \beta - \gamma.$$

Il ne reste plus qu'à transformer le résultat en arc, en se servant de la valeur  $\sigma$ .

Ces relations, qui constituent toute la théorie du niveau, peuvent être conservées, en ne commettant que des erreurs négligeables, si  $AA'$  n'est pas rigoureusement dans le plan vertical contenant  $x'x$ .

Appliquons ce qui précède à quelques problèmes fondamentaux.

1° *Etude du niveau.* — Supposons que l'on puisse faire varier

l'inclinaison  $\alpha$  de  $x'x$ , de quantités connues exprimées en arc, et que chaque fois on fasse les lectures correspondantes. Il est clair que l'on pourra ainsi déterminer la valeur  $\sigma$  d'une partie du niveau. On pourra même de cette façon vérifier le niveau, en constatant que  $\sigma$  reste constant pour toutes les positions de la bulle; s'il n'en est pas ainsi rigoureusement, on pourra dresser une table de correction pour les diverses lectures, comme pour un cercle divisé.

Il faudra d'ailleurs observer que  $\sigma$  dépend de la température, et déterminer l'influence de celle-ci.

Pour faire varier  $\alpha$  de quantités connues, on peut par exemple faire tourner  $x'x$  autour de son point d'intersection avec  $II'H$  à l'aide d'une vis micrométrique; connaissant le pas de cette vis et sa distance à la charnière, il est facile de savoir la variation de  $\alpha$ . On peut aussi fixer le niveau et  $x'x$  à un cercle divisé vertical pouvant tourner autour d'un axe horizontal, et muni de microscopes; en faisant tourner très légèrement le cercle, on fera varier  $\alpha$ , et les lectures des microscopes fourniront cette variation.

Dans les grands niveaux très sensibles, le nombre des parties est grand, et la valeur de chacune d'elles ne dépasse pas une seconde.

2° *Rendre une droite horizontale ou mesurer son inclinaison.* — Soit la droite  $x'x$  sur laquelle on peut fixer le niveau comme précédemment: il s'agit de mesurer son inclinaison ou bien de la rendre horizontale: on suppose alors qu'au moyen d'une vis, par exemple, on peut faire varier l'angle.

Le niveau étant placé sur  $x'x$ , et  $\beta$  étant la lecture moyenne, c'est-à-dire la demi-somme des lectures  $\lambda$  et  $\lambda'$ , on a  $\alpha = \beta - \gamma$ . Retournons alors le niveau, de façon que  $AA'$  prenne la direction opposée à  $x'x$ ; l'inclinaison  $\alpha$  est remplacée par  $-\alpha$ , et si  $\beta'$  est la nouvelle lecture moyenne, on a:  $-\alpha = \beta' - \gamma$ . On en déduit

$$\alpha = \frac{\beta - \beta'}{2}, \quad \gamma = \frac{\beta + \beta'}{2};$$

on a ainsi l'inclinaison  $\alpha$ .

Si  $\alpha$  était rendu nul, on aurait de même dans la première et dans la seconde position du niveau les lectures  $\beta_1$  et  $\beta'_1$ , et par suite

$$0 = \frac{\beta_1 - \beta'_1}{2}, \quad \gamma = \frac{\beta_1 + \beta'_1}{2}.$$

d'où

$$\beta_1 = \beta'_1 = \frac{\beta + \beta'}{2}.$$

Il suffit donc d'agir sur la vis qui commande  $x'x$  de façon à avoir dans l'une ou l'autre position la lecture  $\frac{\beta + \beta'}{2}$ .

Si le niveau faisait corps avec  $x'x$ , ainsi qu'il arrive dans les théodolites, on ferait tourner l'ensemble de  $180^\circ$  autour d'un axe perpendiculaire à  $x'x$  dans le plan vertical  $AA'x'x$ , : rien ne serait changé à ce qui précède.

3° *Réglage du niveau.* — Nous avons supposé implicitement que la bulle tout entière restait logée dans la partie travaillée du tube du niveau, dans les deux positions de l'instrument; s'il en est ainsi,  $\beta$  et  $\beta'$  sont nécessairement petits et par suite  $\gamma$  : il faut donc en général que  $\gamma$  soit petit. On peut faire varier  $\gamma$  à l'aide d'une vis de réglage spéciale qui permet de modifier légèrement la position relative du niveau et de  $x'x$ . Il est évidemment avantageux de rendre  $\gamma$  nul ou à peu près; on dit alors que le niveau est *réglé* ou *rectifié*. Pour y arriver, plaçons-nous d'abord dans le cas où la bulle reste visible dans les deux positions, et soient  $\beta$  et  $\beta'$  les lectures correspondantes comme plus haut; on peut incliner  $x'x$  de façon que  $\beta = 0$ ; agissons alors sur la vis de réglage de façon que la lecture  $\beta'$  de la seconde position devienne  $\frac{\beta'}{2}$ , et soit  $\gamma_1$  la nouvelle valeur de  $\gamma$ ; on a d'abord  $\alpha = -\frac{\beta'}{2}$ , d'après ce qui précède, et en vertu de l'hypothèse  $\beta = 0$ ; on a aussi, d'après la théorie générale:

$$-\alpha = \frac{\beta'}{2} - \gamma_1;$$

donc  $\gamma_1 = 0$ , et le niveau est rectifié.

Pour amener l'horizontalité de  $x'x$ , il suffit maintenant d'obtenir zéro comme lecture dans la seconde position, en se servant de la vis qui commande  $x'x$ . Mais le plus souvent, surtout si le niveau est sensible, lorsqu'on aura amené la lecture  $\beta = 0$  dans la première position, et effectué le retournement, la bulle ira buter contre une extrémité du tube, de façon qu'il n'y aura pas de lecture correspondante; on agira alors sur la vis de réglage dans le sens conve-

nable pour ramener la bulle au milieu du tube, mais cependant pas assez pour y arriver; puis on ramènera la lecture zéro en agissant sur  $x'x$ . Revenant à la première position, on fera comme plus haut si la bulle reste visible; sinon on recommencera la même opération. Au bout de quelques tâtonnements, on arrivera au résultat cherché.

4° *Rendre un plan horizontal ou un axe vertical.* — Le plan P, en général celui d'un cercle divisé, peut tourner autour d'un axe fixe Oz qui lui est perpendiculaire (fig. 13); à la partie mobile est fixé un niveau d'axe très sensiblement perpendiculaire à Oz; la position de Oz peut varier à l'aide de trois vis calantes  $V_1, V_2, V_3$ , qui soutiennent l'axe, et disposées aux sommets d'un triangle équilatéral. Il s'agit de rendre le plan P horizontal, ou ce qui revient au même l'axe Oz vertical. On rendra d'abord horizontale la direction du plan P qui est parallèle à la ligne de deux vis  $V_1, V_2$ , en opérant comme plus haut; ceci fait, et le niveau étant réglé en même temps, il suffira de rendre horizontale la direction du plan P perpendiculaire à la ligne  $V_1V_2$ , ce qui se fera en se servant de la troisième vis  $V_3$ . Le plan P contenant alors deux directions horizontales, sera lui-même horizontal. Comme les diverses opérations faites ont une légère influence réciproque, on est obligé de recommencer jusqu'à ce qu'on obtienne un bon résultat.

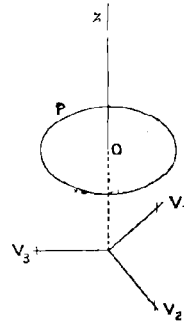


FIG. 13

5° *Nivellement d'un axe idéal.* — Dans les recherches de précision qui dépendent de l'emploi de l'instrument méridien, on doit résoudre un problème que l'on peut réduire aux termes suivants.

Un axe matériel a très sensiblement la forme d'un cylindre de révolution autour d'un axe idéal  $OO'$ , mais pour plus de précision, est assimilé à un tronc de cône d'ouverture très petite, et d'axe géométrique  $OO'$ .

Cet axe matériel tourne autour de la droite  $OO'$  fixe; son mouvement est guidé par deux coussinets C et C' fixes, en forme de V, sur lesquels il repose par ses extrémités ou tourillons (fig. 14). Ici nous supposons les coussinets réduits à des angles fixes situés dans des plans perpendiculaires à  $OO'$  et la ligne de leurs arêtes  $CC'$  est dans un même plan vertical avec  $OO'$ . Il s'agit de mesurer l'inclinaison

très faible de l'axe idéal  $OO'$ . A cet effet on se sert d'un niveau que l'on fait reposer sur l'axe matériel par des crochets  $A, A'$  que nous assimilerons aux coussinets  $C$  et  $C'$ , et sur lesquels nous ferons les mêmes hypothèses.

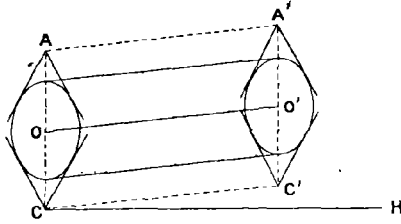


Fig. 14

Soient alors :  $a$  la longueur  $OO'$ ,  $r, r'$  les rayons des deux tourillons  $O$  et  $O'$ ;  $\gamma, \gamma'$ ,  $\alpha, \alpha'$ , les angles des coussinets et des crochets ;  $\varphi$  l'inclinaison fixe de la ligne  $CC'$  sur l'horizon  $CH$ ,  $\alpha$  l'inclinaison cherchée de  $OO'$  sur l'horizon. On a d'abord, avec une exactitude très suffisante, d'après la figure :

$$\alpha = \varphi + \frac{1}{a} \left( \frac{r'}{\sin \gamma'} - \frac{r}{\sin \gamma} \right).$$

Faisons maintenant un nivellement ordinaire en plaçant le niveau dans le sens  $OO'$ , et soit  $\beta_1$  la lecture moyenne obtenue ; si  $\gamma$  a le même sens que dans la théorie exposée ci-dessus,  $\alpha'$  étant remplacée par la ligne  $AA'$  fixée au niveau, la différence  $\beta_1 - \gamma$  fournit l'inclinaison de cette ligne  $AA'$ , égale évidemment à

$$\alpha + \frac{1}{a} \left( \frac{r'}{\sin \alpha'} - \frac{r}{\sin \alpha} \right).$$

Retournons le niveau :  $A$  et  $A'$  s'échangent, et l'on a de même,  $\beta_2$  étant la nouvelle lecture moyenne :

$$\alpha + \frac{1}{a} \left( \frac{r'}{\sin \alpha} - \frac{r}{\sin \alpha'} \right) = \gamma - \beta_2 ;$$

par suite

$$\alpha + \frac{r' - r}{2a} \left( \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha'} \right) = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = \beta.$$

Supposons maintenant que l'on retourne l'axe sur lui-même, de façon que  $O$  et  $O'$  s'échangent ; soit  $\alpha'$  la nouvelle inclinaison, de sorte que

$$\alpha' = \varphi + \frac{1}{a} \left( \frac{r}{\sin \gamma'} - \frac{r'}{\sin \gamma} \right) ;$$

les mêmes opérations que précédemment donneront, en échangeant  $r$  et  $r'$ ,

$$\alpha' + \frac{r' - r}{2a} \left( \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin A'} \right) = \frac{\beta' - \beta}{2} = \beta',$$

les mêmes lettres accentuées et non accentuées ayant des sens correspondants.

D'autre part, en éliminant  $\varphi$  entre les deux valeurs de  $z$  et de  $z'$ , on a :

$$\frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{r' - r}{2a} \left( \frac{1}{\sin C} + \frac{1}{\sin C'} \right).$$

Les angles  $A, A', C, C'$  sont sensiblement égaux à  $45^\circ$ ; en général, soit  $\omega$  leur valeur moyenne;  $r' - r$  étant très petit, on a, avec une exactitude suffisante :

$$\alpha = \beta - \frac{r' - r}{a \sin \omega}, \quad \alpha' = \beta' + \frac{r' - r}{a \sin \omega}, \quad \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{r' - r}{a \sin \omega},$$

d'où les valeurs des inconnues :

$$\frac{r' - r}{a \sin \omega} = \frac{\beta - \beta'}{4}, \quad \alpha = \beta - \frac{\beta - \beta'}{4}, \quad \alpha' = \beta' + \frac{\beta - \beta'}{4}.$$

On a ainsi déterminé les inclinaisons  $\alpha$  et  $\alpha'$ , et en même temps *l'inégalité des tourillons*.

En vérifiant que  $\alpha$  reste constant quand on fait tourner l'axe, on vérifiera en même temps la forme circulaire des tourillons.

Toutes ces opérations se font avec de grands niveaux très sensibles que l'on ne peut manipuler qu'en s'entourant de précautions; pour pouvoir les faire, il faut nécessairement supposer que l'instrument est déjà presque parfaitement réglé, c'est-à-dire que les quantités à mesurer sont extrêmement petites.

**Lunettes et Micromètres.** — Un instrument essentiel pour les observations est la *lunette astronomique*, que l'on étudie dans les traités de Physique : elle sert soit à grossir les objets de façon que l'on puisse étudier de plus près leur nature physique, soit à préciser les directions : c'est à ce dernier point de vue que nous nous placerons exclusivement.

L'objectif est construit de façon à éviter autant que possible les aberrations de sphéricité et d'achromatisme; c'est alors un système optique donnant des objets très éloignés des images réelles, situées dans le plan focal. Ces images sont renversées et regardées avec un oculaire positif, qui peut se déplacer s'il est nécessaire devant le plan focal.

Ainsi qu'on le sait, si  $N_1$  et  $N_2$  (*fig. 15*) sont les deux points nodaux du système objectif, et si un objet  $S$  fait son image en  $S'$ , le rayon  $SN_1$  est parallèle à la direction  $N_2S'$ . Par suite, si deux points  $S$  et  $S_1$  donnent des images  $S'$  et  $S'_1$ ,

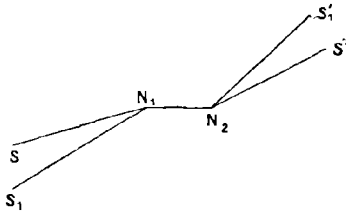


FIG. 15

l'angle  $S'N_2S'_1$  est égal à l'angle des deux directions  $N_1S$ ,  $N_1S_1$ , c'est-à-dire si  $S$  et  $S_1$  sont suffisamment éloignés, à l'angle des directions dans lesquelles on voit  $S$  et  $S_1$ , non seulement du point  $N_1$ , mais encore des points voi-

sins. Il faut d'ailleurs se souvenir que les rayons reçus par l'objectif sont toujours très peu inclinés sur son axe  $N_1N_2$ , de sorte que l'angle  $SN_1S_1$  peut toujours être regardé comme proportionnel à la distance linéaire  $S'S'_1$  des images.

Pour déterminer la position des images dans le plan focal, on se sert d'un *micromètre* : nous ne parlerons que du plus usité, celui à fils rectangulaires.

Supposons tracés dans le plan focal deux axes rectangulaires  $Ox$ ,  $Oy$ , réalisés à l'aide de fils d'araignée très fins, ou encore simplement idéaux (*fig. 16*) : d'abord, la droite  $ON_2$  qui joint l'origine de ces axes au second point nodal de l'objectif sera pour nous l'*axe optique* de la lunette. On peut maintenant fixer la position d'un point  $M$  quelconque du plan focal, ou encore du *champ* de la lunette, par ses coordonnées  $x$ ,  $y$  par rapport aux axes  $Ox$ ,  $Oy$ . Il reste à dire comment on mesure ces coordonnées. A cet effet, comme dans le microscope micrométrique, on peut faire mouvoir, à l'aide de vis  $V$ ,  $V'$  parfaitement travaillées, un fil parallèle à  $Oy$  et un fil parallèle à  $Ox$ ,

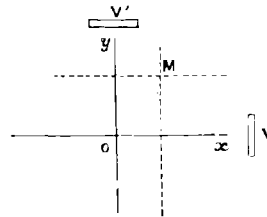


FIG. 16



et mesurer leurs déplacements, à l'aide de tambours convenablement disposés, en tours et parties de tour. Nous supposons que les lectures augmentent pour chaque vis quand le fil se déplace vers la tête de vis, celle-ci étant disposée vers l'extrémité  $x$  ou  $y$  : les axes  $Oy$ ,  $Ox$  sont alors déterminés par des lectures bien définies  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$  des deux vis,  $V$  et  $V'$ , sans qu'il soit nécessaire de les réaliser effectivement ; et si  $\lambda$ ,  $\mu$  sont les lectures de  $V$  et  $V'$  correspondant à un point  $M$ , les coordonnées de  $M$  seront  $x = \lambda - \lambda_0$ ,  $y = \mu - \mu_0$ , exprimées en tours de ces vis. Nous verrons plus tard comment on peut déterminer ces tours de vis.

Pour plus de commodité, on peut disposer des fils fixes parallèles à  $Ox$  et  $Oy$  : l'ensemble des fils constitue le *réticule*.

Souvent, on supprime les fils mobiles et on ne garde que des fils fixes ; un couple de fils particuliers rectangulaires définit alors les axes  $Ox$ ,  $Oy$ .

Pour orienter le réticule dans une direction déterminée, on peut le munir d'un *cercle de position* divisé par exemple en degrés ou demi-degrés.

Le champ de l'instrument a besoin d'être éclairé la nuit, afin de rendre les fils visibles : on y arrive facilement par un dispositif spécial ; quand les objets à examiner sont très peu lumineux, au lieu d'éclairer tout le champ, on éclaire seulement les fils de façon à les rendre brillants sur champ obscur.

La mise au point d'une lunette se fait facilement ; on règle d'abord l'oculaire, d'après sa vue propre, de façon à voir les fils avec le maximum de netteté ; on déplace ensuite le réticule et l'oculaire ensemble de façon à apercevoir l'image d'un objet très éloigné le plus distinctement possible : le plan du réticule coïncide alors avec le plan focal de l'objectif ; on s'assure qu'il en est bien ainsi, en vérifiant qu'il n'y a pas de *parallaxe des fils*, c'est-à-dire que l'image ne se déplace pas par rapport aux fils quand on déplace quelque peu l'œil.

Il est à peine utile de dire que les appareils objectif ou oculaire d'une lunette peuvent recevoir bien des modifications ; ainsi, dans le *télescope*, l'objectif est remplacé par un miroir sphérique ou plutôt parabolique ; pour faire certaines observations, il est indispensable d'employer un oculaire à prisme, c'est-à-dire de placer devant l'oculaire un prisme à réflexion totale, de façon à renvoyer

les rayons dans une direction plus commode à observer ; etc.  
Nous nous bornerons dans ce qui suivra aux lunettes telles que nous venons de les décrire ; et les micromètres seront toujours supposés construits avec une perfection suffisante, c'est-à-dire que les différents fils formeront réellement un réseau de droites parallèles et rectangulaires.

---

## CHAPITRE IV

### INSTRUMENTS COMPLETS

**Théodolite. Théorie générale.**— Les deux systèmes de coordonnées auxquels on peut pratiquement rapporter la position des astres (ou des objets terrestres) sont le système des coordonnées horizontales et celui des coordonnées horaires : ces systèmes sont en effet fixes en un lieu déterminé.

Nous comprendrons sous le nom général de *théodolites* les instruments destinés à mesurer les coordonnées horizontales, azimut et hauteur. On réserve cependant ce nom d'habitude aux instruments transportables de petites dimensions ; les instruments analogues fixes et de grandes dimensions, d'ailleurs assez peu employés, sont les *altazimuts*. On conçoit aussi qu'en privant un théodolite de certains de ses organes, il ne puisse plus servir qu'à mesurer les azimuts ou les hauteurs ; c'est alors un *cercle azimutal* ou un *cercle vertical*. Nous établirons dans ce qui suit la théorie générale du théodolite dans tous ses détails, afin d'éviter les redites dans les théories analogues qui suivront, relatives à l'équatorial et à l'instrument méridien : mais pour les applications, nous aurons surtout en vue l'instrument portatif.

Voici d'abord comment on peut concevoir un théodolite parfait.

Un premier axe  $zz'$ , dit *axe vertical*, coïncide avec la verticale ascendante  $Oz$  du lieu d'observation  $O$  (*fig. 17*). Autour de cet axe peut tourner un second axe  $h'h$ , dit *axe horizontal*, perpendiculaire à  $z'z$  et le rencontrant en  $O$ . Enfin, autour de  $h'h$  peut tourner un troisième axe  $l'l$ , perpendiculaire à  $h'h$  et le rencontrant en un point fixe  $O'$  de la demi-droite  $Oh$ . Cet axe  $l'l$  sert de *ligne de visée* :

c'est l'axe optique d'une lunette, dans laquelle on observe un objet  $S$  en mettant son image  $S'$  au centre du réticule, que nous supposons d'abord simplement formé de deux fils rectangulaires fixes.

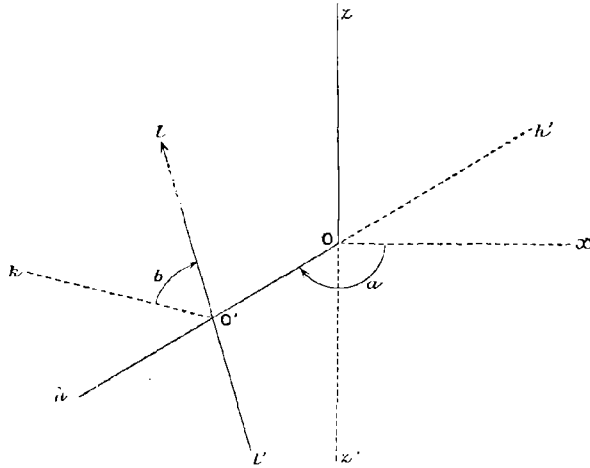


FIG. 17

Déterminer les coordonnées horizontales, azimut et hauteur,  $A$  et  $h$ , de l'objet éloigné  $S$ , situé dans la direction  $ll$ , par rapport au point  $O$ , pris comme lieu d'observation, tel est le problème à résoudre.

Si la distance  $OS$  est infinie par rapport à  $OO'$ , comme nous le supposons en premier lieu, tout revient à déterminer l'azimut et la hauteur de la direction  $ll$ . Marquons l'axe  $Ox$ , horizontal et dirigé vers le sud, origine des azimuts; marquons aussi la demi-droite  $O'k$  perpendiculaire à  $Oh$  dans le plan horizontal, et dirigée par rapport à  $Oh$  dans le sens des azimuts croissants. Supposons alors que deux cercles divisés, l'un horizontal, ayant son centre sur  $z'z$ , l'autre vertical, perpendiculaire sur  $Oh$  et ayant son centre sur  $h'h$ , fournissent l'angle  $a$  de  $Ox$  avec  $Oh$ , compté comme les azimuts dans le sens rétrograde, et l'angle  $b$  de  $O'k$  avec  $O'l$ , compté aussi dans le sens rétrograde par rapport à  $O'h$ . Pour en déduire les coordonnées  $A$  et  $h$  de la direction  $ll$ , il faut distinguer deux cas :

a)  $b$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ ; on a alors évidemment :

$$A = a + \frac{\pi}{2}, \quad h = b;$$

b)  $b$  est compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$ ; alors il vient

$$A = a - \frac{\pi}{2}, \quad h = \pi - b.$$

Comme toujours d'ailleurs, les égalités entre angles ont lieu à un multiple de  $2\pi$  près. On peut toujours observer une direction quelconque en se plaçant soit dans le cas (a), soit dans le cas (b), ou, comme nous dirons dans la *position* (a) ou dans la *position* (b) de l'instrument : ceci tient à l'ambiguïté qui subsiste dans la définition des coordonnées polaires, quand on n'assujettit pas la coordonnée  $\theta$  à être comprise entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$  (I, p. 31).

Si  $a$  et  $b$  correspondent à l'une des positions,  $a'$  et  $b'$  à l'autre, on a toujours les relations

$$a' - a = \pi, \quad b + b' = \pi.$$

Il est facile pratiquement de distinguer les deux positions (a) et (b), en remarquant que dans la position (a) l'extrémité  $h$  de l'axe horizontal  $h'h$  est à gauche de l'observateur, tandis qu'elle est à droite dans le cas (b); si  $O'$  coïncidait avec  $O$ , on choisirait une fois pour toutes arbitrairement un sens  $Oh$  sur l'axe horizontal.

Sur une sphère quelconque de centre  $O$  (fig. 18 et 19), marquons les points  $z, x, h, k, l$  où cette sphère est percée par  $Oz, Ox, Oh$  et les parallèles à  $O'h, O'l$  menées par  $O$ ; on obtiendra les deux figures

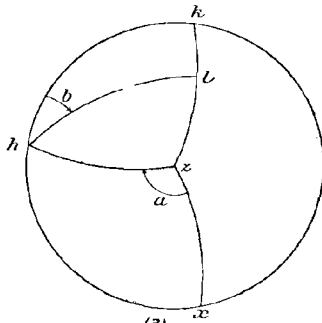


FIG. 18

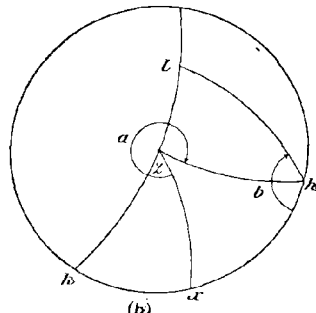


FIG. 19

sphériques ci-contre, correspondant aux cas (a) et (b);  $x, h, k,$  sont sur le grand cercle de pôle  $z$ ;  $k, l, z$  sont sur le grand cercle de pôle  $h$ ;  $a$  est l'angle de  $zx$  avec  $zh$ ,  $b$  l'angle de  $hk$  avec  $hl$ .

Un instrument parfait n'est pas réalisable pratiquement. Un théodolite réel peut être décrit comme il suit, en le réduisant à ses parties essentielles.

Soit  $O$  (*fig. 20*) le point auquel on veut réduire les observations, et  $Oxyz$  le système d'axes qui correspond aux coordonnées horizontales d'origine  $O$ , comme plus haut.

L'axe vertical de l'instrument  $z'_0z_0$  est fixe, mais ne coïncide pas rigoureusement avec  $Oz$ ; il en est seulement très voisin, et on obtient la position presque verticale à l'aide d'un niveau fixé à l'instrument, comme nous l'avons dit plus haut. Autour de  $z'_0z_0$

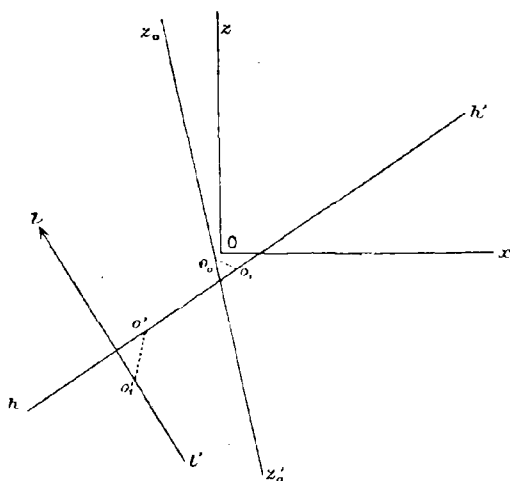


FIG. 20

peut tourner le second axe horizontal  $h'h$ , faisant avec  $z'_0z_0$  un angle constant très voisin d'un angle droit : si  $O_0O_1$  est la perpendiculaire commune à  $z'_0z_0$  et  $h'h$ , les deux points  $O_0$  et  $O_1$  sont très voisins de  $O$ .

Enfin autour de  $h'h$  peut tourner la ligne de visée  $ll$ , qui fait avec  $h'h$  un angle constant très voisin d'un angle droit : si  $O'O_1$  est la perpendiculaire commune à  $h'h$  et  $ll$ , ces deux points sont très voisins l'un de l'autre, et  $O'$  est un point fixe de la demi-droite  $O_1h$  à une distance déterminée de  $O_1$ .

L'instrument donne en plus comme indications, à l'aide de cercles divisés qu'on lit comme nous l'avons vu au chapitre précédent : 1° l'angle  $a$  que fait un plan fixe idéal contenant  $z'_0z_0$  avec le plan

mobile mené par  $z'_0 z_0$  parallèlement à  $h'h$  ; 2° l'angle  $b$  que fait un plan idéal fixe par rapport à  $h'h$  et contenant  $h'h$ , avec le plan mobile mené par  $h'h$  parallèlement à  $l'l$ . Ces angles sont comptés dans le sens rétrograde par rapport à  $O_0 z_0$  et  $O'h$  respectivement : un simple coup d'œil jeté sur l'instrument fera reconnaître si, pour obtenir ce résultat, il faut prendre les lectures des cercles telles quelles, ou bien les changer de signe.

Sur une sphère de centre  $O$ , les droites  $Oz$ ,  $Ox$  et les parallèles menées par  $O$  à  $z'_0 z_0$ ,  $h'h$ ,  $l'l$  ont des traces  $z$ ,  $x$ ,  $z_0$ ,  $h$ ,  $l$ , et l'on a

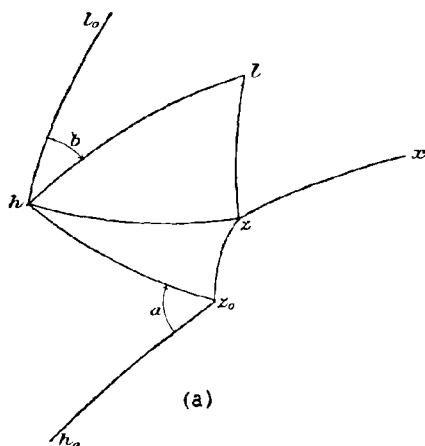


FIG. 21

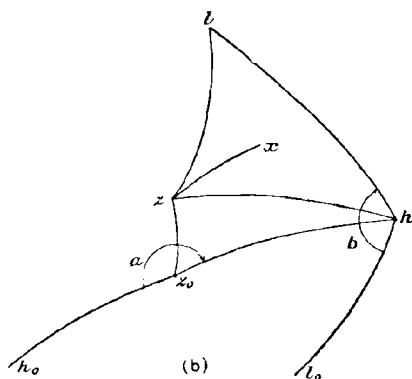


FIG. 22

les deux figures sphériques ci-contre (*fig. 21 et 22*) correspondant aux deux positions possibles (a) et (b).

$z_0 h_0$  et  $h l_0$  sont les arcs origines à partir desquels sont comptés les angles  $a$  ou  $h_0 \widehat{z_0 h}$ ,  $b$  ou  $l_0 \widehat{h l}$  ; comme toujours, nous supposons les figures sphériques vues extérieurement à la sphère.

Si l'instrument était parfait,  $z$  et  $z_0$  coïncideraient, les arcs  $z_0 h$  et  $h l$  seraient des quadrants,  $z_0 h_0$  coïnciderait avec  $z x$ , l'angle  $l_0 h z_0$  serait droit.

On peut encore distinguer les deux cas en remarquant que l'arc  $z l$  étant toujours compris entre 0 et  $\pi$ , l'angle  $l \widehat{h z}$  compté dans le sens rétrograde de  $h l$  vers  $h z$  est compris entre 0 et  $\pi$  dans la position (a) entre 0 et  $-\pi$  dans la position (b).

Le problème est de déterminer les coordonnées  $A$  et  $h$  du

point  $l$  connaissant  $a$  et  $b$ , et l'on a pour cela par définition :

$$A = x\hat{z}l \quad , \quad h = \frac{\pi}{2} - zl.$$

Pour arriver à la solution, il faut tout d'abord définir les parties fixes de la figure, c'est-à-dire les *constantes instrumentales*.

Pour définir  $z_0$  par rapport à  $zx$ , nous nous donnerons son azimut  $A_0$ , c'est-à-dire l'angle  $x\hat{z}z_0$ , et sa distance zénithale  $i$ , ou  $zz_0$  ;  $i$  est toujours un angle positif, très petit quand l'instrument est bien installé et rectifié. L'arc  $z_0h$  est constant et voisin de  $\frac{\pi}{2}$  ; nous l'appellerons  $\frac{\pi}{2} - i'$ ,  $i'$  étant encore un très petit angle positif ou négatif.

L'arc  $hl$  est constant et voisin aussi de  $\frac{\pi}{2}$  ; nous l'appellerons  $\frac{\pi}{2} + c$  :  $c$  est la *collimation* de la ligne de visée. L'angle positif ou négatif  $c$  reste toujours petit, mais peut cependant atteindre des valeurs notables, 20 minutes d'arc par exemple, tandis que  $i$  et  $i'$  ne dépassent pas 2 ou 3 minutes. Cela tient à ce que l'on n'observe pas toujours au centre du champ de la lunette, comme nous le verrons, sinon dans la théorie du théodolite, du moins dans les théories analogues qui suivront.

Les angles  $h_0\hat{z}_0z$  et  $l_0\hat{h}z_0$  seront désignés par  $a_0$  et  $b_0$ .

Il y a ainsi en tout six constantes instrumentales : trois angles petits,  $i, i', c$  et trois angles quelconques  $A_0, a_0, b_0$ . Nous supposons ces constantes connues pour établir la théorie générale, et nous verrons ensuite comment on les détermine, ou comment on les élimine par des observations convenablement combinées. Envisageons d'abord le triangle sphérique  $zz_0h$ , dont nous regarderons les côtés comme positifs, et dont les angles sont  $zhz_0, hz_0z, z_0\hat{z}h$ , comptés toujours dans le sens rétrograde, et comme ils sont écrits. On a :

$$zz_0 = i, \quad z_0h = \frac{\pi}{2} - i', \quad h\hat{z}_0z = a_0 - a,$$

et nous ferons

$$zh = \frac{\pi}{2} - \omega, \quad z_0\hat{z}h = \varphi, \quad z\hat{h}z_0 = \gamma.$$



On peut alors écrire le système de relations de Gauss

$$\begin{aligned}\sin \omega &= \sin i' \cos i + \sin i \cos i' \cos (a - a_0), \\ \sin \varphi \cos \omega &= \cos i' \sin (a_0 - a), \\ \cos \varphi \cos \omega &= \sin i \sin i' - \cos i \cos i' \cos (a - a_0),\end{aligned}$$

et en outre

$$\sin \chi \cos \omega = \sin i \sin (a_0 - a).$$

Les angles  $i$  et  $i'$  sont toujours très petits, et il en est de même par suite de  $\omega$  et de  $\chi$ . En considérant ces angles comme du premier ordre, et ne négligeant que des quantités d'un ordre supérieur de deux unités à l'ordre de celles que l'on conserve, on peut donc écrire simplement

$$\begin{aligned}\omega &= i' + i \cos (a - a_0), \\ \sin \varphi &= -\sin (a - a_0), \quad \cos \varphi = -\cos (a - a_0), \\ \chi &= -i \sin (a - a_0),\end{aligned}$$

d'où le premier groupe de formules

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi = \pi + (a - a_0), \\ \omega = i' + i \cos (a - a_0), \\ \chi = -i \sin (a - a_0). \end{cases}$$

Considérons maintenant le triangle sphérique  $zh\bar{l}$ , dont les côtés positifs sont

$$zh = \frac{\pi}{2} - \omega, \quad lh = \frac{\pi}{2} + c, \quad z\bar{l} = \frac{\pi}{2} - h;$$

les angles qui nous intéressent seront

$$l\widehat{h}z = b_0 - b - \chi, \quad h\widehat{z}\bar{l} = \Lambda - \Lambda_0 - \varphi.$$

L'angle  $h\widehat{z}\bar{l}$  est d'ailleurs voisin de  $\pm \frac{\pi}{2}$  suivant que l'on se trouve dans le cas (a) ou dans le cas (b); si donc nous le désignons par  $\pm \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$ , le signe supérieur correspondant, ainsi que dans tout ce qui suivra, au cas (a), et le signe inférieur au cas (b), on aura pour calculer  $\Lambda$  la formule

$$(2) \quad \Lambda = a - a_0 + \Lambda_0 \mp \frac{\pi}{2} \pm \varepsilon,$$

$\varepsilon$  étant petit et à déterminer.

De même l'angle  $l\hat{h}z$  est voisin de  $\pm \left(\frac{\pi}{2} - h\right)$ ; nous le désignerons par  $\pm \left(\frac{\pi}{2} - h'\right)$ , de sorte que  $h'$  sera voisin de  $h$ , et l'on aura

$$(3) \quad h' = \frac{\pi}{2} \pm [b - b_0 - i \sin(a - a_0)].$$

Il faut maintenant calculer  $\varepsilon$  et la différence  $h - h'$ ; on exprimera d'ailleurs ces quantités à l'aide de  $c$ ,  $\omega$  et  $h$ ; à la vérité  $h$  n'est pas connu par l'observation faite, mais est seulement voisin de  $h'$ ; malgré cela, il y a avantage à le conserver dans les formules de correction. Le triangle considéré  $zhl$  donne d'abord dans les deux cas :

$$-\sin c = \sin \omega \sin h - \cos \omega \cos h \sin \varepsilon,$$

d'où

$$\sin \varepsilon = \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} h + \operatorname{sec} \omega \sin c \operatorname{sec} h.$$

Comme  $\omega$  et  $c$  sont petits, il y a lieu de développer  $\varepsilon$  suivant les puissances de  $\omega$  et  $c$ , et comme  $\omega$  est très petit, on ne conservera parmi les termes du troisième ordre que ceux en  $c^3$ ; observant que

$$\varepsilon = \sin \varepsilon + \frac{1}{6} \sin^3 \varepsilon + \dots, \quad \sin c = c - \frac{c^3}{6} + \dots,$$

on obtient

$$(4) \quad \varepsilon = \omega \operatorname{tg} h + c \operatorname{sec} h + \frac{c^3}{6} \operatorname{sec} h \operatorname{tg}^2 h.$$

Cette formule est illusoire si  $h$  diffère très peu de  $\frac{\pi}{2}$ ; si  $h$  est voisin seulement de  $\frac{\pi}{2}$ , sans en trop approcher, le dernier terme peut être sensible; sinon, et surtout si  $h$  est petit, ce terme est négligeable. Il faut observer que si l'on commettait sur  $c$  une erreur de l'ordre de  $c^3$ , la formule serait encore applicable quand  $h$  est voisin de  $\frac{\pi}{2}$ , sans dommage sensible, car cette erreur est multipliée seulement par  $\operatorname{sec} h$ , tandis que le terme du troisième ordre est multiplié par  $\operatorname{sec} h \operatorname{tg}^2 h$  qui est beaucoup plus grand dans le cas considéré. Il ne faut pas oublier d'ailleurs qu'aux environs du zénith, la précision de l'observation est loin de correspondre à celle de la détermination de  $A$  ou  $\varepsilon$ ; elle est égale plutôt à la précision de  $\varepsilon \cos h$ .

On a encore dans le même triangle et dans tous les cas :

$$\sin h = -\sin \omega \sin c + \cos \omega \cos c \sin h';$$

la différence  $h - h'$  est donc du second ordre par rapport à  $\omega$  et  $c$ ; en négligeant les termes du quatrième ordre, on a

$$\sin h' = \sin h \left( 1 + \frac{c^2 + \omega^2}{2} \right) + c\omega,$$

d'où

$$(5) \quad h = h' - \frac{c^2 + \omega^2}{2} \operatorname{tg} h - c\omega \operatorname{séc} h.$$

Il est souvent utile d'avoir  $h - h'$  en fonction de  $\omega$  et  $\varepsilon$ , cette dernière quantité ayant déjà été calculée. La formule de trigonométrie sphérique

$$\cos a \cos B = \sin a \operatorname{cotg} c - \sin B \operatorname{cotg} C$$

appliquée convenablement au triangle  $zh'l$ , donne :

$$-\sin \omega \sin \varepsilon = \cos \omega \operatorname{tg} h - \cos \varepsilon \operatorname{tg} h',$$

d'où

$$\operatorname{tg} h' = \frac{\cos \omega}{\cos \varepsilon} \operatorname{tg} h + \sin \omega \operatorname{tg} \varepsilon.$$

La différence  $h - h'$  est développable suivant les puissances de  $\varepsilon$  et  $\omega$ , et ne contient que des termes d'ordre pair par rapport à ces quantités; à cause de la petitesse de  $\omega$ , on ne tiendra compte que de  $\varepsilon'$  dans les termes du quatrième ordre; et mettant en évidence  $\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}$ , on écrira

$$\operatorname{tg} h' = \operatorname{tg} h + \frac{2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{1 - 2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \operatorname{tg} h + \omega \varepsilon - \frac{\omega^2}{2} \operatorname{tg} h;$$

or de l'équation

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha + k,$$

on déduit sans peine :

$$x = \alpha + k \cos^2 \alpha - k^2 \sin \alpha \cos^3 \alpha + \dots;$$

on a donc finalement

$$(6) \quad h = h' - \omega \varepsilon \cos^2 h + \frac{\omega^2}{4} \sin 2h - \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2h - 2 \sin^4 \frac{\varepsilon}{2} \cos^2 h \sin 2h.$$

Le dernier terme est en général négligeable, à moins que  $\varepsilon$  ne soit grand.

En résumé, on a, pour résoudre le problème proposé, l'ensemble de formules :

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \omega = i' + i \cos (a - a_0), \\ A = a - a_0 + A_0 \mp \frac{\pi}{2} \pm \left[ \omega \operatorname{tg} h + c \operatorname{sec} h + \frac{c^3}{6} \operatorname{sec} h \operatorname{tg}^2 h \right], \\ h = \frac{\pi}{2} \pm [b - b_0 - i \sin (a - a_0)] - \frac{c^2 + \omega^2}{2} \operatorname{tg} h - c \omega \operatorname{sec} h, \\ \text{ou bien} \\ h = \frac{\pi}{2} \pm [b - b_0 - i \sin (a - a_0)] - \omega \varepsilon \cos^2 h + \frac{\omega^2}{4} \sin 2h \\ \quad - \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2h - 2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos^2 h \sin 2h, \\ \text{avec} \\ \varepsilon = \omega \operatorname{tg} h + c \operatorname{sec} h + \frac{c^3}{6} \operatorname{sec} h \operatorname{tg}^2 h. \end{array} \right.$$

L'angle variable  $\omega$  qui figure dans ces formules n'est autre que la hauteur du point  $h$ ; on peut donner une interprétation analogue de l'angle  $\chi$  égal à  $-i \sin (a - a_0)$ . Considérons à cet effet la direction  $Ok$ , perpendiculaire à  $h'h$ , perçant la sphère en  $k$ , et telle que l'angle  $k\hat{h}z_0$ , compté dans le sens rétrograde, soit constant et voisin de  $\frac{\pi}{2}$  (*fig. 23*) : si l'on désigne par  $b'_0$  l'angle  $l_0\hat{h}k$ , compté comme  $b$  et  $b_0$  à partir de  $hl_0$ ,  $b_0 - b'_0$  est donc voisin de  $\frac{\pi}{2}$ .

Le triangle rectilatère  $zhk$  donne alors en appelant  $\omega'$  la hauteur du point  $k$  :

$$\sin \omega' = \cos \omega \cos (b_0 - b'_0 - \chi);$$

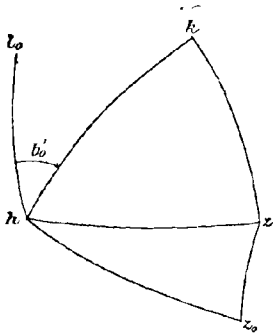


FIG. 23

d'où, avec une exactitude toujours suffisante

$$\omega' = \frac{\pi}{2} - (b_0 - b'_0 - \zeta);$$

par suite

$$b_0 + i \sin (a - a_0) = \frac{\pi}{2} + b'_0 - \omega',$$

et l'expression de  $h'$ , partie principale de  $h$ , devient

$$(8) \quad h' = \begin{cases} b - b'_0 + \omega' & (a) \\ \pi - (b - b'_0 + \omega') & (b) \end{cases}$$

suivant les cas (a) ou (b).

Nous avons supposé dans tout ce qui précède que l'objet S, que l'on observe dans la direction  $ll$ , était situé à une distance infinie par rapport à  $OO'$ ; il n'en est pas toujours ainsi, du moins dans les opérations géodésiques, de sorte que les coordonnées de la direction  $ll$  ne sont pas celles de la direction  $OS$ ; pour passer des unes aux autres, il faut tenir compte de l'excentricité de l'instrument, qui peut d'ailleurs être nulle si l'instrument est à *lunette centrée*.

On peut sans inconvénient ici, en vertu du principe général de l'indépendance des petites erreurs, et en raison de la précision que l'on peut obtenir dans le cas qui nous occupe, supposer que l'instrument est parfait par ailleurs; alors la ligne de visée  $ll$ , dirigée vers S, rencontre l'axe horizontal  $Oh$  en un point fixe  $O'$  (*fig. 24*) et lui est perpendiculaire. Il faut remplacer  $O'S$  par  $OS$ : ceci revient évidemment à dire que la ligne de visée n'est plus perpendiculaire à  $Oh$ , mais fait avec  $Oh$  l'angle  $SOh$ ; en d'autres termes, il faut supposer que l'instrument a une collimation égale à  $SOh - \frac{\pi}{2}$ , ou bien  $-\widehat{OSO'}$ ; d'ailleurs l'angle  $OSO'$  est assez petit pour qu'on puisse le prendre égal à  $\frac{OO'}{OS}$ . Par suite, et d'une façon générale, si l'on appelle  $d$  la distance  $OS$ ,  $e$  l'excentricité  $OO'$  de l'instrument, il faudra pour avoir les

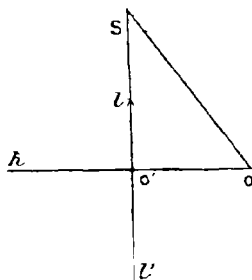


FIG. 24

formules correspondant à la direction OS, diminuer la collimation proprement dite de l'instrument de la quantité  $\frac{e}{d}$ .

Nous avons encore fait l'hypothèse que l'on observait l'image du point S en un point fixe du champ de la lunette, au centre C du réticule formé par deux fils rectangulaires : il est nécessaire, pour obtenir la théorie dans toute sa généralité, de nous affranchir maintenant de cette restriction.

Supposons d'abord le réticule (réel ou idéal), formé par deux fils rectangulaires orientés de la façon suivante (*fig. 25*) : le plan du réticule étant perpendiculaire à l'axe optique  $ll$  en C, le premier fil CX est parallèle au demi-axe horizontal Oh, mais de sens contraire ; le second fil CY est perpendiculaire au premier, et par rapport à l'observateur l'angle droit XCY est compté dans le sens rétrograde.

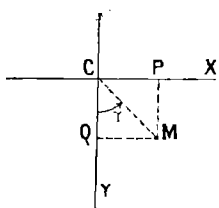


FIG. 25

Dans le cas le plus général, au lieu d'observer en C, on observe en un point différent du champ, soit M, dont la position peut être définie par ses coordonnées rectangulaires  $x, y$  par rapport aux axes CX, CY, comme nous l'avons dit au chapitre précédent ; ces quantités  $x$  et  $y$  sont supposées exprimées en arc : ce sont les angles ayant leur sommet au second point nodal de l'objectif, et sous-tendus par les longueurs MP, MQ.

Au lieu de  $x, y$  on peut employer encore des coordonnées polaires, soit la distance CM ou  $s$ , et l'angle de position  $\gamma$  ou YCM, compté de CY vers CX : dans ces conditions, on a  $x = s \sin \gamma, y = s \cos \gamma$ .

Reprenons maintenant la sphère de centre O déjà considérée, et menons par son centre les plans parallèles aux axes CX et CY (*fig. 26*) ; le prolongement du rayon parallèle à OC coupe la sphère en  $l$ , et la trace du prolongement au delà de O de la portion du plan OGC est l'arc de grand cercle  $lh$ , d'après la direction choisie pour CX ; de même à CY correspond l'arc de grand cercle  $lt$ , tel que l'angle  $tlh$ , décrit dans le sens rétrograde, soit

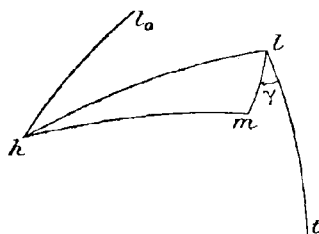


FIG. 26

égal à  $\frac{\pi}{2}$ ; le rayon OM correspond enfin à un point  $m$ , tel que l'arc  $lm$  soit égal à  $s$  et l'angle  $ilm$  à  $\gamma$ .

En réalité on observe la direction définie par  $m$ ; il faut donc passer du point  $l$  au point  $m$ . Ceci se fera évidemment en remplaçant l'arc  $hl$  par l'arc  $hm$ , et l'angle  $l_0hl$  par l'angle  $l_0hm$ . En d'autres termes, la collimation  $c$  et la lecture  $b$  qui correspondent au point  $l$  doivent être remplacées par  $c + \Delta c$  et  $b + \Delta b$  correspondant au point  $m$ .

Il est facile de calculer  $\Delta c$  et  $\Delta b$ . On a en effet dans le triangle  $lhm$  :

$$\begin{aligned} -\sin(c + \Delta c) &= -\sin c \cos s + \sin s \cos c \sin \gamma, \\ \sin \Delta b \cos(c + \Delta c) &= \sin s \cos \gamma, \end{aligned}$$

d'où en négligeant les quantités du troisième ordre :

$$(9) \quad \Delta c = -s \sin \gamma = -x, \quad \Delta b = s \cos \gamma = y.$$

Il faut donc finalement, pour passer du centre C du champ au point M, diminuer la collimation de  $x$  et augmenter la lecture de  $y$ , ce qui était à peu près évident géométriquement.

Enfin, il faut remarquer que l'orientation du réticule n'est pas absolument rigoureuse, et d'ailleurs peut parfaitement être quelconque. Supposons donc qu'en réalité la direction théorique de CX, c'est-à-dire la direction opposée à  $Oh$ , fasse avec la direction vraie de CX un angle  $i''$ , compté dans le sens de CY vers CX. L'angle que fait réellement CY avec CM étant toujours  $\gamma$ , l'angle théorique appelé ci-dessus  $\gamma$ , est alors  $\gamma + i''$ . Par suite on a

$$(10) \quad \begin{cases} \Delta c = -s \sin(\gamma + i'') = -x \cos i'' - y \sin i'', \\ \Delta b = s \cos(\gamma + i'') = -x \sin i'' + y \cos i''. \end{cases}$$

Si  $i''$  est petit, on peut prendre simplement :

$$\Delta c = -x - i''y, \quad \Delta b = y - i''x.$$

**Usage du théodolite.** — Les formules que nous venons d'établir dans le paragraphe précédent vont nous montrer quel est l'usage du théodolite pour faire une mesure d'azimut ou de hauteur; comment en particulier on peut déterminer les constantes instrumentales, ou bien tenir compte de leur influence par des observations conve-

nables ; comment enfin, on peut, par des combinaisons spéciales des observations, améliorer les résultats, en éliminant l'influence de certaines erreurs.

On commence naturellement par régler l'instrument aussi bien que possible : l'angle  $i'$  doit être très petit par construction. On rend l'angle  $i$  petit en faisant un nivellement : ce réglage se fait à l'aide d'un niveau mobile  $N$  pouvant se placer sur l'axe  $h'h$  et susceptible par conséquent de retournement, ou bien à l'aide d'un niveau fixe  $N'$ , invariablement lié à l'instrument, et placé le long du cercle vertical ; ce second niveau n'est pas susceptible de retournement dans une position donnée de l'instrument ; mais pour le réglage dont il s'agit ici, on retourne en fait ce niveau en faisant tourner  $h'h$  de  $180^\circ$  autour de l'axe vertical.

On oriente le réticule en rendant l'angle  $i''$  négligeable ; à cet effet, on s'assure que l'image d'un point fixe ne quitte pas le fil vertical quand on déplace légèrement la lunette autour de l'axe horizontal.

On rend aussi la collimation  $c$  relative au point de croisée des fils très petite et pour ainsi dire nulle en opérant ainsi. Observons un objet fixe d'azimut  $A$  et de hauteur  $h$  très petite, suffisamment éloigné, dans les deux positions de l'instrument ; si  $a_1$  et  $a_2$  sont les lectures correspondantes, on a dans ces conditions, avec une exactitude suffisante, les deux équations

$$A = a_1 - a_0 + A_0 - \frac{\pi}{2} + c \sec h,$$

$$A = a_2 - a_0 + A_0 + \frac{\pi}{2} - c \sec h ;$$

il en résulte

$$c \sec h = \frac{\pi + a_2 - a_1}{2} ;$$

pour annuler  $c$ , il suffit alors de déplacer le réticule de façon que, l'image étant toujours placée au centre, la seconde lecture devienne  $a_2 - \frac{\pi + a_2 - a_1}{2}$  ; la première devra être alors  $a_1 + \frac{\pi + a_2 - a_1}{2}$ .

L'instrument étant ainsi réglé, il y a lieu maintenant de déterminer les constantes, ou des quantités équivalentes.

Envisageons d'abord les trois constantes  $i$ ,  $i'$  et  $a_0$ . Si l'on veut les déterminer, on observe que la formule

$$\omega = i' + i \cos (a - a_0) = i' + i \cos a_0 \cos a + i \sin a_0 \sin a$$



nous montre qu'il suffit de déterminer l'inclinaison  $\omega$  du demi-axe horizontal  $Oh$  dans trois positions différentes de l'instrument ; ceci se fait à l'aide du niveau mobile  $N$ . En multipliant ces observations, on aura de bonnes déterminations moyennes de  $i$ ,  $i'$ ,  $a_0$ , si l'instrument est suffisamment stable.

En général, on ne procède pas ainsi ; on ne détermine directement ni  $i$ , ni  $i'$ , ni  $a_0$  ; mais on se sert des inclinaisons variables  $\omega$  et  $\omega'$  qui sont fournies, pour chaque observation, la première par le niveau mobile  $N$  qui peut se placer sur l'axe  $h'h$ , la seconde par le niveau fixe  $N'$  : on voit en effet, d'après ce qui a été dit à propos de la formule (8), que ce second niveau fournit bien la quantité  $\omega'$  qui correspond à une certaine constante  $b'_0$  remplaçant  $b_0$ . L'inclinaison  $\omega'$  est d'ailleurs inutile pour les mesures d'azimut. On doit observer encore que le niveau  $N'$  ne se retournant pas quand l'instrument est fixé, la lecture moyenne du niveau ne fournit  $\omega'$  qu'à une constante près, qui en réalité se fond avec la constante  $b'_0$ . La collimation  $c$  se détermine comme précédemment : il suffit qu'elle soit très petite, sans chercher à l'annuler rigoureusement.

Il reste enfin à considérer les constantes  $A_0 - a_0$  et  $b_0$  ou  $b'_0$  ; on n'en a d'ailleurs pas toujours besoin, car souvent d'une part, on ne cherche que les différences d'azimut entre deux directions, ce qui dispense évidemment de la connaissance de  $A_0 - a_0$  ; et d'autre part, en observant comme il sera dit plus bas, la connaissance de  $b_0$  ou  $b'_0$  est inutile. Si toutefois, on veut connaître ces constantes, il suffira de faire l'observation, comme nous allons l'indiquer, d'un objet ayant un azimut ou une hauteur connue à l'avance, par exemple la Polaire : les constantes cherchées en résulteront immédiatement.

Indiquons maintenant d'une façon plus précise l'emploi du théodolite pour résoudre quelques questions pratiques simples.

1° Il s'agit de déterminer la différence d'azimut de deux signaux terrestres fixes, ou plus généralement, les différences d'azimut de plusieurs signaux  $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4$  (fig. 27).

L'instrument étant dans une position donnée, on observe succes-

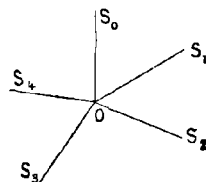


FIG. 27

sivement les signaux  $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4$ , dans l'ordre où ils se présentent, en les plaçant exactement sous le fil vertical ; chaque fois, on détermine la lecture  $a$  et l'inclinaison  $\omega$ . La seconde des formules (7) fournit alors, à une constante près, l'azimut de chaque signal, à la condition que l'on connaisse une valeur approchée de sa hauteur, qu'on peut toujours supposer obtenue préalablement : on néglige d'ailleurs les termes du troisième ordre. Pour achever une telle *série* ou *tour d'horizon*, on observe à nouveau le signal initial  $S_0$ , afin de s'assurer que l'instrument n'a pas varié pendant l'opération.

On recommence ensuite la série dans la seconde position de l'instrument et en tournant en sens inverse ; les moyennes des déterminations ainsi effectuées symétriquement seront préférables aux déterminations d'une seule série, et élimineront évidemment l'erreur due à l'excentricité de l'instrument.

Ensuite, on recommence autant de fois qu'il est nécessaire, 20 fois par exemple quand on veut une grande précision, cette double série, en déplaçant chaque fois le cercle divisé, comme nous l'avons vu à propos de la répétition.

Pour obtenir encore de meilleurs résultats, on n'observe pas avec un fil fixe, mais avec un fil mobile vertical, mû par une vis micrométrique. On détermine la lecture de la vis qui correspond à une position du fil de collimation nulle en opérant comme nous l'avons vu plus haut, c'est-à-dire en observant un même objet fixe, presque dans l'horizon, dans les deux positions de l'instrument ; la moyenne des lectures de la vis dans les deux positions donne la lecture cherchée. Pour déterminer la valeur du tour de vis, on évalue la distance angulaire réduite à l'horizon de deux signaux très rapprochés et très nets, d'une part en tours de vis, d'autre part directement à l'aide du cercle, en opérant comme ci-dessus : la comparaison des résultats donnera le tour de la vis.

L'avantage de l'observation au fil mobile consiste en ce que l'on peut, l'instrument restant fixe, répéter plusieurs fois le pointé sur l'image de l'objet observé ; on prend la moyenne des diverses lectures, et l'on en déduit immédiatement la collimation correspondante pour en faire usage dans la formule de réduction.

Souvent on n'emploie dans ces mesures qu'un cercle azimutal à

lunette centrée ; on ne peut pas alors en général faire tourner complètement la lunette autour de l'axe horizontal  $h'h$  ; mais dans ce cas, la lunette est mobile, et peut être enlevée des coussinets qui supportent ses deux tourillons : on peut donc encore réaliser la visée d'un objet dans les deux positions ( $a$ ) et ( $b$ ). On peut aussi, et c'est ce qu'on fait d'habitude, retourner la lunette, de façon à ce que les deux tourillons échangent leurs coussinets. On a alors en réalité quatre positions de l'instrument que l'on peut distinguer ainsi ; soient toujours  $h$  et  $h'$  les deux coussinets,  $h$  étant à gauche dans la position ( $a$ ), à droite dans la position ( $b$ ) ; soient en outre  $h_1$ ,  $h'_1$  les deux tourillons ; l'axe CX du réticule, qui est fixe avec la lunette, est supposé dirigé suivant  $h'_1$ . Si donc  $h_1$  et  $h$  coïncident, tout se passe comme il a été dit ; si au contraire  $h_1$  coïncide avec  $h'$ , on est toujours dans la position ( $a$ ) ou ( $b$ ), mais il est clair que la collimation qui correspond à un point quelconque du champ doit être prise changée de signe. On a alors, en employant le retournement, des résultats tout semblables à ceux que l'on obtient en observant dans les deux positions sans retournement.

D'une façon générale, la seconde formule (7) montre que si l'on observe au même point du champ dans les deux positions de l'instrument, ou de la lunette, on élimine la collimation, et par suite l'erreur d'excentricité de la lunette.

2° Soit à déterminer la hauteur d'un signal terrestre fixe.

On observe dans les deux positions de l'instrument en plaçant l'image au centre du champ. Soient  $b_1$  et  $b_2$  les deux lectures,  $\omega'_1$  et  $\omega'_2$  les inclinaisons fournies par le niveau N'. Dans un instrument bien construit et bien réglé, on peut négliger les corrections du second ordre, surtout  $h$  étant petit ; on a alors d'après (7) et (8)

$$h = b_1 - b'_0 + \omega'_1 = \pi - b_2 + b'_0 - \omega'_2,$$

d'où

$$h = \frac{\pi}{2} + \frac{b_1 - b_2}{2} + \frac{\omega'_1 - \omega'_2}{2},$$

ce qui donne  $h$  sans connaître  $b'_0$ . On a aussi d'ailleurs

$$\pi - b_1 - b_2 + 2b'_0 - \omega'_1 - \omega'_2 = 0,$$

ce qui fournit la constante  $b'_0$  dont on peut avoir besoin dans d'autres cas.

### 3° Observations astronomiques.

Ici l'objet observé est mobile, et il faut toujours marquer le temps de l'observation. On voit immédiatement alors comment les formules (7) et (8) fourniront l'azimut ou la hauteur, à un instant donné, d'un astre dont on aura observé le passage au fil vertical ou horizontal, aussi près que possible d'ailleurs du centre du champ.

Si l'on opère dans les deux positions de l'instrument, on a seulement, par la moyenne des équations correspondantes, la moyenne des azimuts ou des hauteurs de l'astre à deux instants peu éloignés ; si l'on peut connaître par ailleurs, avec une approximation suffisante, le mouvement de l'astre en azimut ou en hauteur entre les deux instants marqués, on aura facilement les coordonnées pour chacun de ces instants.

Il ne faut pas oublier d'ailleurs qu'une observation faite dans ces conditions fournit toujours uniquement les coordonnées apparentes locales de l'astre observé, et qu'il faudra ensuite leur appliquer toutes les corrections indiquées dans la première partie de ce cours pour obtenir des résultats comparables.

Il faudra tenir compte encore de la forme des astres, quand ils ont un diamètre apparent sensible.

Enfin remarquons que l'on observe souvent à plusieurs fils dont il est toujours facile de déterminer la distance, et qu'il faut ensuite, plutôt que de traiter chaque observation individuellement, réduire les observations aux divers fils à un seul (leur moyenne en général), ou bien à un seul instant ; mais il est impossible d'insister ici sur tous les calculs auxquels ces diverses réductions peuvent donner lieu. Nous ferons observer encore, pour terminer ces réflexions sur l'usage du théodolite, que dans la grande majorité des cas, cet instrument sert à faire non pas des observations absolues, mais des observations relatives, ainsi que nous le verrons plus tard : on s'arrange par exemple le plus souvent de façon à éviter la lecture des cercles, mais plutôt à observer des temps. Il est facile d'en comprendre les raisons, le théodolite étant un instrument de voyage et non d'observatoire.

**Equatorial.** — *L'équatorial droit* ou équatorial proprement dit est un instrument analogue au théodolite, mais destiné à la mesure des coordonnées horaires ou équatoriales. En général, un équa-

torial reçoit d'assez grandes dimensions ; en raison même de ces dimensions et de sa disposition par rapport à la verticale, il ne peut offrir une grande stabilité : aussi est-il mieux approprié aux mesures relatives qu'aux mesures absolues. Il rend aussi les plus grands services dans l'étude physique des astres, à cause de la puissance optique qu'on peut lui donner.

La disposition théorique de l'équatorial, et par suite la théorie de cet instrument, est en tout semblable à celle du théodolite, sauf que l'axe fondamental de l'instrument, que nous désignerons toujours par  $z'z$  est dirigé vers le pôle nord, et non vers le zénith (*fig. 28*) : cet axe fixe reçoit le nom d'*axe polaire* ou *axe horaire*. Le second axe  $h'h$  est toujours perpendiculaire au premier autour duquel il peut tourner : c'est l'*axe de déclinaison*, qui dans son mouvement reste parallèle au plan de l'équateur. Enfin autour de  $h'h$ , tourne la ligne de visée  $l'l$ , comme précédemment : l'objet observé est toujours à une distance infinie par rapport aux dimensions de l'instrument.  $Ox$  étant dirigé vers le point le plus

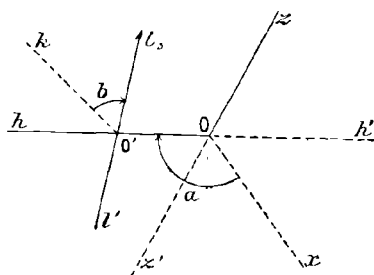


FIG. 28

élevé de l'équateur, un cercle divisé fournit toujours l'angle  $a$  de  $Ox$  avec  $Oh$ , compté dans le sens rétrograde, comme les angles horaires ;  $O'k$  étant perpendiculaire à  $Oh$  dans le plan de l'équateur, et étant dirigée par rapport à  $Oh$  dans le sens des angles horaires croissants, un second cercle divisé donne l'angle  $b$  de  $O'k$  avec  $O'l$ , compté aussi dans le sens rétrograde par rapport à  $Oh$ .

Pour en déduire les coordonnées horaires  $H$ , angle horaire, et  $\delta$ , déclinaison de la direction  $l'l$ , il faut encore distinguer deux cas.

(a)  $b$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ . Alors

$$H = a + \frac{\pi}{2}, \quad \delta = b;$$

(b)  $b$  est compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$ ; ici

$$H = a - \frac{\pi}{2}, \quad \delta = \pi - b.$$

On peut toujours, au moins théoriquement, observer une direction quelconque dans l'une ou l'autre des deux positions (*a*) et (*b*). Pour distinguer ces deux positions pratiquement, on observera que dans la première (*a*), l'extrémité objective de la lunette *l* précède l'extrémité *h* de l'axe de déclinaison, dans le sens du mouvement diurne ; tandis que dans la seconde position (*b*), la lunette *suit* l'axe de déclinaison.

Comme le théodolite, l'équatorial ne peut être installé rigoureusement : si  $\Pi_0$  et *i* sont l'angle horaire et la distance polaire de l'axe réel de l'instrument ; si l'angle des deux axes horaire et de déclinaison est  $\frac{\pi}{2} - \nu$  ; si l'angle *ll* avec *h'h* est égal à  $\frac{\pi}{2} + c$  ; si enfin  $a_0$  et  $b_0$  sont deux constantes définies comme précédemment, on aura pour déterminer les coordonnées d'une direction observée, les équations suivantes, calquées sur les équations (7) :

$$\begin{aligned}
 \omega &= \nu + i \cos (a - a_0), \\
 \left. \begin{aligned}
 H &= a - a_0 + \Pi_0 \mp \frac{\pi}{2} \pm \left[ \omega \operatorname{tg} \delta + c \operatorname{sec} \delta + \frac{c^3}{6} \operatorname{sec} \delta \operatorname{tg}^2 \delta \right], \\
 \delta &= \frac{\pi}{2} \pm \left[ b - b_0 - i \sin (a - a_0) \right] - \frac{c^2 + \omega^2}{2} \operatorname{tg} \delta - c \omega \operatorname{sec} \delta, \\
 \text{ou bien :} \\
 \delta &= \frac{\pi}{2} \pm \left[ b - b_0 - i \sin (a - a_0) \right] - \omega \varepsilon \cos^2 \delta + \frac{\omega^2}{4} \sin 2\delta \\
 &\quad - \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\delta - 2 \sin^4 \frac{\varepsilon}{2} \cos^2 \delta \sin 2\delta, \\
 \text{avec} \\
 \varepsilon &= \omega \operatorname{tg} \delta + c \operatorname{sec} \delta + \frac{c^3}{6} \operatorname{sec} \delta \operatorname{tg}^2 \delta,
 \end{aligned} \right\} (14)
 \end{aligned}$$

les signes supérieurs ou inférieurs correspondant respectivement aux deux positions (*a*) ou (*b*).

Ici  $\omega$  est la déclinaison du point *h*.

La masse ordinairement considérable des pièces qui constituent un équatorial, et la nature des mouvements que peuvent prendre ces pièces rendent sensible ici l'influence de l'action de pesanteur,

ou de la *flexion*. Laissant de côté la flexion des cercles qui n'intervient pas, puisque l'équatorial ne peut pas fournir une extrême précision dans la mesure des coordonnées absolues, il y a lieu de tenir compte de la flexion de l'axe de déclinaison et de celle de la lunette. Sous l'action de la pesanteur, l'axe de déclinaison se courbe légèrement, et le point  $O'$  où est fixée la lunette s'abaisse un peu; la direction  $Oh$  de la théorie générale se trouve remplacée par la direction de la tangente en  $O'$  à l'axe courbé, de sorte que les constantes  $i'$  et  $a_0$  reçoivent de petites modifications, dépendant de la position actuelle de l'instrument. On suppose ces modifications assez petites pour pouvoir être considérées comme des différentielles, et par suite on peut étudier séparément leur influence, en supposant l'instrument parfait par ailleurs. On fait l'hypothèse manifestement suggérée par la Mécanique, que la flexion a pour effet de modifier la hauteur astronomique de la direction  $Oh$  d'une quantité proportionnelle au sinus de sa distance zénithale, sans en modifier l'azimut : désignons donc par  $\Lambda'$ ,  $h'$ ,  $H'$ ,  $\delta'$  les coordonnées azimut, hauteur, angle horaire et déclinaison de la direction  $Oh$ ; les hypothèses faites reviennent à donner à ces coordonnées des accroissements différentiels définis par les conditions

$$d\Lambda' = 0, \quad dh' = -f' \cos h',$$

$f'$  étant une constante définissant la flexion.

Soient de plus  $\varphi$  la latitude du point  $O$ , et  $S'$  l'angle parallactique dans le triangle de position formé par le pôle, le zénith et le point  $h$  sur la sphère céleste; d'après les formules différentielles connues relatives à la transformation des coordonnées, on en déduit :

$$\begin{aligned} \cos \delta' . dH' &= -\sin S' . dh', \\ d\delta' &= \cos S' . dh'. \end{aligned}$$

Or ici, on a, d'après les définitions des constantes, et en se reportant à la théorie du théodolite :

$$H' = \pi + a - a_0 + H_0, \quad \delta' = \omega = i' + i \cos(a - a_0).$$

Il vient donc, en ne gardant que les termes du premier ordre :

$$\begin{aligned} da_0 &= -dH' = -f' \cos h' \sin S', \\ di' &= d\delta' = -f' \cos h' \cos S'; \end{aligned}$$

d'ailleurs le triangle de position donne ici

$$\begin{aligned}\cos h' \sin S' &= \cos \varphi \sin H' = -\cos \varphi \sin (a - a_0 + H_0), \\ \cos h' \cos S' &= \sin \varphi;\end{aligned}$$

par suite

$$da_0 = f' \cos \varphi \sin (a - a_0 + H_0), \quad dl' = -f' \sin \varphi,$$

et dans les formules (14), il faut par suite augmenter  $\omega$  de  $-f' \sin \varphi$  et  $H$  de  $-f' \cos \varphi \sin (a - a_0 + H_0)$ .

Considérons maintenant la flexion de la lunette; sous l'influence de la pesanteur, les deux parties  $O'l$ ,  $O'l'$  de la lunette s'abaissent, et par suite la position de la ligne de visée se trouve changée; les constantes  $c$  et  $b_0$  sont ici légèrement modifiées. Faisons la même hypothèse que ci-dessus sur la grandeur de ces modifications, et supposons encore que la flexion se traduise par un changement de la hauteur astronomique de la direction  $ll'$ , proportionnel au sinus de sa distance zénithale. Appelons  $h$  la hauteur de  $ll'$  et  $A$  son azimut: on aura donc

$$dA = 0, \quad dl = f \cos h,$$

$f$  étant une nouvelle constante correspondant à cette seconde flexion.

L'angle horaire et la déclinaison de  $ll'$  sont précisément  $H$  et  $\delta$ , et si  $S$  désigne l'angle parallactique correspondant à ce cas, on aura

$$\begin{aligned}dH &= -f \cos h \sin S \sec \delta, \\ d\delta &= f \cos h \cos S,\end{aligned}$$

et comme ici

$$\begin{aligned}\cos h \sin S &= \cos \varphi \sin H, \\ \cos h \cos S &= \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos H,\end{aligned}$$

il faut en somme augmenter dans les formules (14) les expressions de  $H$  et de  $\delta$  des quantités

$$\begin{aligned}dH &= -f \cos \varphi \sin H \sec \delta, \\ d\delta &= f (\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos H).\end{aligned}$$

Si finalement on ne laisse de côté que des termes toujours négli-



geables, on pourra écrire les formules (14) sous la forme plus simple suivante :

$$(15) \left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= [i' \mp i \sin (H - H_0) - f' \sin \varphi] \operatorname{tg} \delta + c \operatorname{séc} \delta \\ &\quad + \frac{c^3}{6} \operatorname{séc} \delta \operatorname{tg}^2 \delta, \\ H &= a - a_0 + H_0 \mp \frac{\pi}{2} \pm \varepsilon - f \cos \varphi \sin H \operatorname{séc} \delta \\ &\quad \mp f' \cos \varphi \cos H, \\ \delta &= \frac{\pi}{2} \pm (b - b_0) - i \cos (H - H_0) \\ &\quad \mp f (\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos H) \\ &\quad - \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\delta - 2 \sin^4 \frac{\varepsilon}{2} \cos^2 \delta \sin 2\delta; \end{aligned} \right.$$

les derniers termes de l'expression de  $\delta$  peuvent d'ailleurs être négligés d'habitude.

Il n'y a rien à changer à ce que nous avons dit d'une façon générale sur l'emploi du réticule dans le théodolite.

**Usage de l'équatorial.** — La monture équatoriale ou paralactique présente un avantage capital : elle permet de suivre un astre dans son mouvement diurne par le seul déplacement de la lunette en angle horaire ; toutefois, si la déclinaison de l'astre varie rapidement, de petits mouvements de rappel en déclinaison seront nécessaires pour le ramener continuellement au centre du champ. D'autre part, le mouvement de l'astre en angle horaire étant uniforme ou toujours très près de l'être, on peut à l'aide d'un mouvement d'horlogerie, réglé sur le temps sidéral, entraîner mécaniquement la lunette en angle horaire de telle façon que l'astre paraisse immobile ou sensiblement immobile dans le champ. Enfin, on doit observer encore que, pour tout point du ciel, la direction du mouvement diurne (I. p. 57) est fixe par rapport à l'instrument : c'est celle de l'axe de déclinaison.

Il est facile de comprendre les avantages qui résultent de ces remarques pour la commodité de l'observation.

Donnons quelques indications sommaires sur le réglage approximatif de l'équatorial.

Il faut d'abord placer l'axe horaire dans le méridien et à la hauteur du pôle. Pour placer cet axe dans le méridien, on rend l'axe

de déclinaison horizontal à l'aide d'un niveau ; puis l'instrument étant fixé en déclinaison, on s'arrange de façon qu'un astre connu passe au centre du champ précisément à l'heure de son passage au méridien : cette heure peut être déterminée à l'avance à l'aide de la Connaissance des Temps et des coordonnées géographiques du lieu.

L'axe qui a été primitivement placé à la hauteur du pôle d'une façon approchée à l'aide d'un niveau d'angle est ensuite réglé d'une façon plus précise. A cet effet, on observe d'abord une étoile assez haute et dans le voisinage du méridien (afin d'éviter la variation de réfraction), dans les deux positions de l'instrument ; les lectures du cercle de déclinaison fournissent alors  $b_0$ . Cette constante connue, on cale l'instrument en déclinaison à l'aide du cercle sur une étoile connue, et on amène cette étoile au centre du champ au moment de son passage au méridien.

La constante  $\alpha_0 - \Pi_0$  se détermine sans peine en observant une étoile connue et comparant l'angle horaire donné par le cercle avec l'angle horaire réel fourni par l'observation de la pendule et l'ascension droite de l'étoile.

On recommence plusieurs fois successivement ces opérations, de façon à obtenir un réglage suffisamment exact pour la pratique : on ne peut l'obtenir du premier coup, parce que les opérations successives que l'on fait ne sont pas rigoureuses et indépendantes les unes des autres.

On s'arrange d'habitude de façon que les constantes  $\alpha_0 - \Pi_0$  et  $b_0$  aient des valeurs simples, telles que l'on obtienne immédiatement des valeurs approchées de  $\Pi$  et  $\delta$  par les lectures. Enfin, il est superflu d'ajouter que ces méthodes peuvent être variées de bien des façons que suggérera l'examen attentif des formules (15) ; cette observation s'appliquera d'ailleurs aussi sans réserve à ce qui suit.

Le plus souvent, l'équatorial ne servant pas aux mesures absolues, il est inutile de déterminer les constantes instrumentales : cependant, dans certains cas on doit le faire, et de plus, il est toujours bon de s'assurer qu'elles sont assez petites pour n'avoir aucune influence sensible sur les observations différentielles.

Examinons donc sommairement comment on peut effectivement déterminer les diverses constantes qui figurent dans les formules (15). Comme le montrent ces formules, on y arrivera aisément en

combinant des observations faites dans les deux positions de l'instrument, à des angles horaires égaux à  $0$ ,  $\pi$ , ou  $\pm \frac{\pi}{2}$ . Comparant par exemple la déclinaison réelle et la déclinaison fournie par l'instrument pour une étoile connue très près du méridien, on aura une relation entre  $b_0$ ,  $i \cos H_0$  et  $f$ ; multipliant ces observations dans les deux positions (a) et (b), on déterminera ces trois constantes avec une précision suffisante.

De même, en combinant des observations d'angle horaire au méridien pour des étoiles de déclinaisons très différentes, on déterminera sans peine les autres constantes  $a_0 - H_0$ ,  $i \sin H_0$ ,  $i'$ ,  $f'$ ,  $c$ . Si d'abord on observe une même étoile très près du méridien dans les deux positions de l'instrument, on aura une équation de la forme

$$a_0 - H_0 - i \sin H_0 \operatorname{tg} \delta = m,$$

$m$  étant connu; si  $\delta$  est nul, on en déduit  $a_0 - H_0$ ; si  $\delta$  est voisin de  $\frac{\pi}{2}$ , on a  $i \sin H_0$  avec précision. On continuera de même sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage.

L'équatorial étant spécialement destiné aux observations différentielles, c'est le micromètre qui en est la partie principale, et c'est lui qu'il faut étudier d'une façon toute spéciale. Nous supposons ce micromètre disposé comme nous l'avons déjà dit à propos du théodolite et dans sa description générale.

Deux fils réels ou idéaux CX, CY (fig. 29), placés au centre du champ constituent les axes de coordonnées; CX est dans sa position normale parallèle à  $Oh$  et de sens contraire; l'angle droit XCY est compté dans le sens rétrograde. Un cercle de position dont est muni le micromètre permet de déterminer l'orientation du réticule par rapport à une position fixe;  $i''$  désignera toujours l'angle, compté de CY vers CX que fait la direction normale d'un fil avec la direction vraie du même fil.

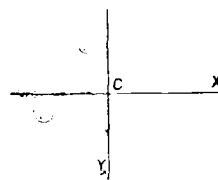


FIG. 29

Le réticule comprendra des fils fixes et des fils mobiles; quelquefois même il y aura deux fils mobiles, indépendants l'un de l'autre, parallèles à une même direction; dans ce cas, les déplacements de ces deux fils sont mesurés par deux vis différentes, et il

est toujours facile d'obtenir en grandeur et en signe la distance de chacun de ces fils à l'axe CX ou CY qui leur est parallèle.

Les fils seront fins ou gros, suivant la nature des observations ; les gros fils sont utilisés pour les observations d'astres très faibles, parce que leurs dimensions permettent de les apercevoir sur le fond du ciel même quand on supprime complètement l'éclairage du champ.

Lorsque le réticule est dans son orientation normale, le fil CY est la trace sur le plan focal du cercle horaire qui passe au point C, et par suite CX a pour direction celle du mouvement diurne en C. Pour obtenir cette orientation, on observera que si elle est réalisée, une étoile prise dans le méridien ou dans son voisinage immédiat, et assez éloignée du pôle, doit rester constamment sur le fil CY pendant qu'elle traverse le champ de la lunette, une fois qu'on l'a amenée sur ce fil. On arrive immédiatement à ce résultat d'une façon approximative ; pour obtenir ensuite plus de précision dans ce réglage, on place l'étoile sur le fil au moment de son entrée dans le champ, et on fait la lecture du cercle de position ; puis on tourne le micromètre de façon que l'étoile soit encore sur le fil au moment de sa sortie du champ, et on fait de nouveau la lecture du cercle de position : il est évident alors que la moyenne des deux lectures est celle qui correspond à la position cherchée du fil, c'est-à-dire la *lecture du mouvement diurne* ; s'il est besoin, on recommencera cette opération jusqu'à ce que l'étoile suive parfaitement le fil dans tout le champ. On opère ainsi dans le voisinage immédiat du méridien, et avec une étoile assez haute, pour éviter l'influence de la variation de réfraction ; on opère loin du pôle pour que l'étoile traverse le champ assez rapidement et ait dans cette traversée une trajectoire rectiligne.

Si l'équatorial était et restait parfaitement réglé, l'orientation une fois obtenue du réticule persisterait dans toute position. Mais il n'en est pas ainsi, et par suite, pour les observations précises, il faut régler le réticule pour chaque région du ciel. Si l'on opère en dehors du méridien, et toujours assez loin du pôle, en procédant comme il vient d'être dit, on obtiendra seulement la direction du mouvement diurne apparent, c'est-à-dire la direction réelle altérée par la réfraction. Nous avons vu dans la première partie du cours (p. 85) quelle était cette altération ; on voit d'autre part tout

de suite que l'angle de position (dans le système de coordonnées horaires) de la direction apparente du mouvement diurne sera toujours  $-\frac{\pi}{2} + i'$ , si  $i'$  désigne toujours l'angle de la position normale de CX avec sa position réelle fournie par le réglage ci-dessus ; en conservant les notations des pages 84 et 85 de la Première Partie, on a donc

$$i' = k \frac{\operatorname{cotg} n \cos N}{\cos \delta \sin^2 (N + \delta)},$$

et cela quelle que soit la position de l'instrument.

Si l'on opère près du pôle, la trajectoire de l'astre ne paraît plus rectiligne, mais courbée d'une façon plus ou moins sensible. Pour obtenir la direction du mouvement diurne apparent dans ce cas, relativement au centre du champ, on s'arrangera de façon que le fil CX bissecte l'étoile observée à son entrée et à sa sortie du champ dans deux positions symétriques par rapport au fil OY.

Les vis du micromètre en sont les organes fondamentaux, et il faut déterminer avec le plus grand soin la valeur moyenne du tour de chacune de ces vis, et pour plus de précision encore, étudier les erreurs mêmes de ces vis. Pour déterminer le tour d'une vis on peut employer diverses méthodes : nous en expliquerons deux parmi les plus employées.

Si F est le fil correspondant à la vis considérée V, et F' le fil perpendiculaire, on oriente d'abord le réticule avec soin de façon que le fil F' soit dirigé suivant le mouvement diurne vrai, et pour cela on opère dans le voisinage immédiat du méridien, sur une étoile connue. Le fil F ayant ainsi la position théorique CY, on observe l'étoile donnée en laissant l'instrument fixe, en deux positions différentes du champ, avec la vis V ; soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les lectures correspondantes de cette vis, dont le tour sera  $\tau$  ;  $H_1$  et  $H_2$  les angles horaires,  $\lambda_0$  la lecture qui correspond au fil F ou CY,  $c$  la collimation correspondant à CY, connue par ailleurs au moins à peu près, ou très petite. Pour appliquer la seconde équation (15) aux deux observations, on devra y remplacer  $c$ , d'après les relations (9), successivement par  $c - (\lambda_1 - \lambda_0) \tau$ ,  $c - (\lambda_2 - \lambda_0) \tau$  ; en retranchant alors les deux résultats, et négligeant la variation de H

entre les deux observations dans les termes de correction toujours très petits, on aura la relation

$$\pm (H_1 - H_2) = (\lambda_2 - \lambda_1) \tau \sec \delta \\ + \frac{1}{6} \sec \delta \operatorname{tg}^2 \delta \left[ (c - (\lambda_1 - \lambda_0) \tau)^3 - (c - (\lambda_2 - \lambda_0) \tau)^3 \right];$$

le dernier terme étant très petit et souvent négligeable, cette relation fournira facilement  $\tau$  quand on connaîtra  $H_1 - H_2$ ,  $\delta$  étant donnée par les éphémérides; pour avoir  $H_1 - H_2$ , il suffira d'avoir observé les temps qui correspondent aux deux observations à une pendule sidérale; la différence de ces temps est égale à  $H_1 - H_2$ .

Bien entendu, on multiplie beaucoup les observations de ce genre.

Le plus souvent on choisit une circumpolaire; une telle étoile traverse lentement le champ, et par suite on peut faire de nombreux pointés sans toucher à l'instrument; mais ce choix n'a rien d'absolument nécessaire: si d'ailleurs, l'étoile était trop près du pôle, les pointés manqueraient de précision.

Il faudra avoir soin de faire les observations d'un bout à l'autre du champ, et avec toute la partie utile de la vis, afin d'avoir réellement une valeur moyenne de  $\tau$  qui convienne à tous les cas où on devra l'employer. Ajoutons enfin qu'en toute rigueur, il y aurait lieu de tenir compte de l'influence de la réfraction: mais nous nous contenterons de le faire plus loin, dans le cas de la lunette méridienne.

Une seconde méthode consiste à faire des observations en déclinaison et non plus en angle horaire. Le fil F est orienté suivant le mouvement diurne, et à la position théorique CN; l'instrument restant fixe, on place successivement le fil mobile parallèle à F sur deux étoiles déterminées, de déclinaisons  $\delta_1$  et  $\delta_2$ ; si les lectures correspondantes de la vis sont  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , on en déduit une relation de la forme

$$\delta_1 - \delta_2 = \pm (\lambda_1 - \lambda_2) \tau.$$

Si donc on connaît exactement  $\delta_1 - \delta_2$ , on en déduira  $\tau$ . On a précisé dans ce but déterminé avec la plus grande exactitude les différences de déclinaison de quelques couples d'étoiles, en parti-

culier dans les Pléiades (Bessel, Wolf, etc.). Bien entendu, on devra se servir des déclinaisons apparentes, affectées de la réfraction. Les mêmes réflexions que plus haut trouvent encore ici leur application : on aura d'ailleurs d'autant plus de précision que la distance des deux étoiles sera plus grande, et alors, comme elles ne peuvent pas être vues toutes deux dans une même position de la lunette, on les relie par des étoiles intermédiaires convenablement choisies.

Le tour d'une vis varie légèrement avec la température; en multipliant les observations dans des saisons différentes, on déterminera le coefficient thermométrique correspondant.

Une vis n'est parfaite ni par sa construction, ni par son fonctionnement; il en résulte que son emploi produit, tout comme celui d'un cercle divisé, des erreurs dont il est bon de pouvoir s'affranchir, grâce à une étude préalable de la vis.

Ces erreurs sont de deux sortes; d'abord les différents pas de la vis ne sont pas tous égaux, d'où l'*inégalité du pas*; en outre à des fractions égales d'un tour de la vis ne correspondent pas des déplacements linéaires égaux; mais d'après la construction même de la vis, ces irrégularités se produisent de la même façon à chaque tour; ce sont les *erreurs périodiques* du tour de vis. En d'autres termes, si la lecture  $\lambda$  de la vis est de la forme  $n^{\text{tours}} + u$ ,  $u$  étant le nombre des parties réduit en angle, la correction de la lecture  $\lambda$  est de la forme  $f(n) + \varphi(u)$ ,  $\varphi$  étant une fonction périodique de  $u$  que l'on peut d'habitude réduire à la forme  $\alpha \cos u + \beta \sin u$ .

Le principe des méthodes employées pour déterminer les irrégularités d'une vis consiste à mesurer successivement avec les diverses parties de la vis ou d'un tour de vis un même intervalle fixe. Il faut avoir soin d'ailleurs de mettre rigoureusement dans un même plan l'image des fils micrométriques et l'image de l'intervalle fixe à mesurer : par exemple, si le micromètre a deux chariots mobiles, on placera sur le second des fils qui formeront l'intervalle à mesurer. Pour étudier l'inégalité du pas, on prend par exemple un premier intervalle fixe sensiblement équivalent à 10 tours de la vis, et on le mesure en partant successivement de lectures entières  $\lambda_0, \lambda_0 + 10', \lambda_0 + 20', \dots \lambda_0 + 10(n-1)'$ ; en prenant alors comme unité la valeur moyenne du tour de vis entre  $\lambda_0$  et  $\lambda_0 + 10n$ , ce qui revient à supposer sans erreurs les lectures  $\lambda_0$  et  $\lambda_0 + 10n$ , on obtiendra ainsi les corrections des lectures

intermédiaires de 10 tours en 10 tours; diminuant ensuite l'intervalle fixe, on aura les corrections des autres lectures entières. Pour déterminer les erreurs périodiques du tour, on pourra mesurer un intervalle fixe égal à un demi-tour de la vis avec les diverses parties d'un même tour; il est clair que chaque mesure donne une équation contenant les inconnues à déterminer, et qu'il sera aisé de combiner ensuite ces équations de façon à arriver au résultat cherché.

Les mesures absolues à l'équatorial n'appellent aucune remarque particulière; il est bien clair d'ailleurs que toujours l'équatorial doit être accompagné d'une pendule, sidérale de préférence, afin de noter l'heure des observations, et de l'angle horaire pouvoir déduire l'ascension droite. Inversement pour préparer l'observation et caler l'instrument au moins approximativement sur l'astre à observer, il faut avoir l'heure afin de pouvoir calculer l'angle horaire d'après l'ascension droite qui est seule connue à l'avance.

Les observations différentielles, qui fournissent les différences des coordonnées de deux astres voisins, peuvent se faire de plusieurs façons que nous allons passer en revue.

1° *Mesure des différences d'ascension droite par passages.*

La lunette étant fixe, et le fil CX orienté sur le mouvement diurne, c'est-à-dire dans sa position normale, on observe les heures sidérales  $t_1$  et  $t_2$  des passages au fil horaire CY de deux astres assez voisins  $S_1$  et  $S_2$ . Il est clair que les deux astres ont été observés au même angle horaire, puisqu'à cause de leur voisinage, les termes de correction dans les formules (15) peuvent être considérés comme les mêmes. Par suite la différence de leurs ascensions droites  $\alpha'_1 - \alpha'_2$  est égale à  $t_1 - t_2$ .

On peut choisir comme époque de l'observation la moyenne  $\frac{t_1 + t_2}{2}$ , la différence  $\alpha'_1 - \alpha'_2$  variant toujours très peu.

Bien entendu, on peut employer plusieurs fils horaires, et l'on doit multiplier les observations.

Pour avoir en même temps la différence de déclinaison  $\delta'_1 - \delta'_2$  des deux astres, on fait des pointés avec le fil mobile de déclinaison sur les astres  $S_1$  et  $S_2$  pendant qu'ils traversent le champ et aussi près que possible du milieu du champ; si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont les



distances ainsi déterminées des deux astres au fil CX, la dernière formule (15) montre que l'on a

$$\delta'_1 - \delta'_2 = \pm (y_1 - y_2),$$

suivant que l'on a observé dans la position (a) ou (b).

On fera alternativement les observations de passage et les pointés en déclinaison, de façon à pouvoir rapporter les résultats moyens des observations à l'instant moyen, et éliminer ainsi le mouvement propre de l'un des astres, si c'est une planète ou une comète.

Les différences de coordonnées ainsi obtenues se rapportent évidemment aux coordonnées affectées de la réfraction ; pour les délivrer de l'influence de la réfraction, il faut les corriger, en appliquant la réfraction différentielle, telle que nous l'avons expliquée dans la première partie de ce cours (p. 84). En conservant les mêmes notations, et remarquant que les astres ont été observés au même angle horaire, de sorte que  $\Delta H = 0$ , on aura donc pour les différences des coordonnées véritables les expressions :

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= t_1 - t_2 + \frac{k \cotg n \cos (N + 2\delta)}{\cos^2 \delta \sin^2 (N + \delta)} (\delta_1 - \delta_2), \\ \delta_1 - \delta_2 &= \pm (y_1 - y_2) + \frac{k(\delta_1 - \delta_2)}{\sin^2 (N + \delta)}, \end{aligned}$$

en prenant pour  $\delta$  une valeur moyenne entre  $\delta_1$  et  $\delta_2$ .

Toutefois ceci suppose encore que le fil CX du réticule est orienté suivant le mouvement diurne vrai. Imaginons maintenant qu'il fasse un petit angle  $i''$  avec sa position normale ; d'après les formules (10) il faudra augmenter la valeur de  $c$ , pour chaque observation, de  $-i''y$  ; par suite les angles horaires  $H'_1$  et  $H'_2$  correspondant aux deux observations ne seront pas rigoureusement égaux, et l'on aura

$$H'_1 - H'_2 = \mp (y_1 - y_2)i'' \sec \delta = -(\delta_1 - \delta_2)i'' \sec \delta ;$$

de sorte que la valeur indiquée ci-dessus pour  $\alpha_1 - \alpha_2$  devra être augmentée de  $i'' \sec \delta \times (\delta_1 - \delta_2)$ . Si en particulier le fil a été orienté sur le mouvement diurne apparent, on a  $i'' = k \frac{\cotg n \cos N}{\cos \delta \sin^2 (N + \delta)}$ , ainsi que nous l'avons déjà dit, et il vient

$$\alpha_1 - \alpha_2 = t_1 - t_2 + \frac{2k \cotg n \cos (N + \delta)}{\cos \delta \sin^2 (N + \delta)} (\delta_1 - \delta_2).$$

On doit observer que ces corrections dues à la réfraction ne sont notables pratiquement que si la différence de déclinaison est assez grande, et si l'on est près de l'horizon.

Enfin on doit encore rappeler que les coordonnées dont on a ainsi finalement les différences sont les coordonnées apparentes locales ; elles sont affectées de la parallaxe, s'il y a lieu à parallaxe, et sont rapportées à l'équinoxe et à l'équateur vrais.

2° *Mesure micrométrique des différences d'ascension droite.*

Dans cette méthode, on suppose que les deux astres sont suffisamment voisins l'un de l'autre en ascension droite comme en déclinaison pour être vus simultanément dans le champ de l'instrument. Dans ces conditions, on fait entraîner la lunette par le mouvement d'horlogerie de façon à voir constamment les deux astres dans le champ. Pour mesurer la différence d'ascension droite des deux astres, supposons d'abord qu'il y ait un seul fil mobile parallèle à CY, le fil CX étant orienté suivant le mouvement diurne ; on place alors et on maintient l'un des astres sur un fil fixe parallèle à CY, et pendant ce temps on pointe l'autre astre avec le fil mobile ; connaissant la lecture de la vis qui correspond au fil fixe employé, on a ainsi les distances  $x_1$  et  $x_2$  des deux astres  $S_1$  et  $S_2$ , à un même instant, au fil CY. Si le micromètre a deux fils mobiles parallèles à CY, on pointe les deux astres à la fois avec ces deux fils, et on obtient ainsi le même résultat. En même temps, on détermine la différence de déclinaison comme dans la première méthode, et l'on prend les mêmes précautions pour la disposition des observations. En se reportant aux formules (10) et (15), il faut ici remplacer  $c$  par  $c - x_1$  et  $c - x_2$ , respectivement pour les deux astres ; et comme  $x_1$  et  $x_2$  peuvent être notables, comme aussi les pointés en déclinaison ne sont pas faits près du centre du champ, mais dans les mêmes positions que les pointés en ascension droite, il peut y avoir lieu de tenir compte des termes d'ordre supérieur par rapport à  $c$  dans les formules (15) ; supposons, pour simplifier, la collimation proprement dite  $c$ , relative au fil CY, nulle, ou du moins très petite ; on aura immédiatement :

$$\alpha'_1 - \alpha'_2 = \pm (x_1 \sec \delta'_1 - x_2 \sec \delta'_2) \pm \frac{1}{6} (x_1^3 \sec \delta'_1 \operatorname{tg}^2 \delta'_1 - x_2^3 \sec \delta'_2 \operatorname{tg}^2 \delta'_2),$$

$$\delta'_1 - \delta'_2 = \pm (y_1 - y_2) - \frac{1}{2} (x_1^2 \operatorname{tg} \delta'_1 - x_2^2 \operatorname{tg} \delta'_2).$$

Bornons-nous aux termes du second ordre, et  $\delta'_0$  étant la moyenne entre  $\delta'_1$  et  $\delta'_2$ , faisons donc

$$\sec \delta'_1 = \sec \delta'_0 + \frac{1}{2} \sec \delta'_0 \operatorname{tg} \delta'_0 (\delta'_1 - \delta'_2),$$

$$\sec \delta'_2 = \sec \delta'_0 - \frac{1}{2} \sec \delta'_0 \operatorname{tg} \delta'_0 (\delta'_1 - \delta'_2);$$

il viendra simplement :

$$\alpha'_1 - \alpha'_2 = \pm (x_1 - x_2) \sec \delta'_0 \pm \frac{1}{2} (x_1 + x_2) (\delta'_1 - \delta'_2) \sec \delta'_0 \operatorname{tg} \delta'_0,$$

$$\delta'_1 - \delta'_2 = \pm (y_1 - y_2) - \frac{1}{2} (x_1^2 - x_2^2) \operatorname{tg} \delta'_0.$$

On voit par là qu'on aura le plus grand avantage, afin de rendre négligeables les termes de correction, à opérer symétriquement de part et d'autre du fil sans collimation C $\Upsilon$ , de façon que la somme  $x_1 + x_2$  soit presque nulle.

On tiendrait compte sans peine des termes du troisième ordre.

Pour affranchir les observations de la réfraction, on fera comme dans la première méthode ; mais comme on n'a pas observé au même angle horaire, il faudra ajouter les termes qui dépendent de  $\Delta z$ , soit :

$$k \left( \frac{\sin N}{\cos \delta \sin (N + \delta)} + \frac{\operatorname{cotg}^2 n}{\sin^2 (N + \delta)} \right) (\alpha_1 - \alpha_2) \quad \text{pour } \alpha_1 - \alpha_2,$$

$$k \frac{\operatorname{cotg} n \cos N}{\sin^2 (N + \delta)} (\alpha_1 - \alpha_2) \quad \text{pour } \delta_1 - \delta_2.$$

### 3° Mesure de l'angle de position et de la distance.

Les astres sont encore ici supposés voisins, et souvent même, comme il arrive dans les mesures d'étoiles doubles, il sont extrêmement voisins. La lunette étant entraînée par le mouvement d'horlogerie, on tourne le micromètre de façon que le fil CX devienne parallèle à la distance des deux astres, ce dont on s'assure en constatant qu'un fil mobile parallèle à CX peut bissecter à la fois les deux astres, ou bien encore que ceux-ci peuvent-être placés bien symétriquement entre deux fils parallèles à CX très rapprochés. Si l'on fait alors la lecture du cercle de position, il est clair que cette lecture, convenablement comparée à celle du mouvement diurne, fournira l'angle de position de l'un des astres  $S_1$  par rapport à l'autre  $S_2$  : cet angle est supposé défini dans le système des coordonnées horaires de pôle P, compté par suite depuis  $S_2P$  jusqu'à

$S_2S_1$ , dans le sens rétrograde. Pratiquement, il suffira d'un peu d'attention pour éviter une erreur grossière dans la détermination de cet angle conformément à sa définition. L'angle de position déterminé, la distance  $s$  des deux astres se mesure immédiatement avec les fils parallèles à  $CY$ , comme la différence d'ascension droite dans la méthode précédente. Les lectures de la vis ou des vis fournissent immédiatement la distance cherchée. S'il n'y avait pas de fil mobile parallèle à  $CY$ , on tournerait d'abord le micromètre de  $90^\circ$ , de façon à échanger les deux fils. Quand on dispose d'un seul fil mobile, il y a souvent avantage à mesurer la double distance de la façon suivante : un fil fixe étant placé sur  $S_1$ , on place le fil mobile sur  $S_2$ , et on fait la lecture de la vis ; puis en déplaçant la lunette, on échange le rôle des deux fils, et on fait de nouveau la lecture ; il est clair que la différence des deux lectures donne la double distance des deux astres.

L'angle de position et la distance obtenus doivent être affranchis de la réfraction : cette opération se fera d'après les formules établies dans la première partie du cours (p. 84). On tiendra compte facilement de l'inclinaison du fil, si le mouvement diurne apparent a servi à le régler.

Il nous reste à indiquer comment de la distance  $s$  et de l'angle de position  $P$  on peut déduire avec exactitude les différences d'ascension droite et de déclinaison des deux astres.

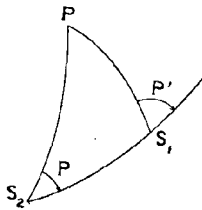


Fig. 30

Considérons le triangle  $PS_2S_1$ , (fig. 30)  $P$  étant le pôle et soit  $P'$  l'angle de  $PS_1$  avec le prolongement de  $S_2S_1$  ; les relations de Delambre ou de Néper donnent les équations

$$\sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \sin \frac{s}{2} \frac{\sin \frac{P' + P}{2}}{\cos \frac{\delta_0}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} = \operatorname{tg} \frac{s}{2} \frac{\cos \frac{P' + P}{2}}{\cos \frac{P' - P}{2}},$$

$$\sin \frac{P' - P}{2} = \operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{tg} \delta_0 \sin \frac{P' + P}{2},$$

en faisant  $\delta_0 = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$ .

Si l'on a observé  $P$ , et pour cela il a fallu mettre  $S_2$  bien au

centre du champ, la dernière équation donnera d'abord avec une précision suffisante :

$$\frac{P' - P}{2} = \frac{s}{2} \operatorname{tg} \delta_0 \sin P + \frac{s^2}{8} \operatorname{tg} \delta_0 \sin 2P,$$

d'où ensuite  $\frac{P' + P}{2} = P + \frac{P' - P}{2}$ , et le calcul de  $\alpha_1 - \alpha_2$  et  $\delta_1 - \delta_2$ .

Mais le plus souvent, on place le milieu de  $S_1 S_2$  le plus rigoureusement possible au centre du champ, et l'angle de position mesuré ne diffère alors que par des quantités du second ordre de  $\frac{P' + P}{2}$ ; le calcul est donc simplifié,  $\frac{P' - P}{2}$  se tirant immédiatement de la dernière équation.

Dans la presque totalité des cas, on aura une précision suffisante en faisant simplement

$$\alpha_1 - \alpha_2 = s \operatorname{séc} \delta_0 \sin \frac{P' + P}{2}, \quad \delta_1 - \delta_2 = s \cos \frac{P' + P}{2}.$$

L'observation des étoiles doubles rapprochées est difficile. Comme dans toutes les observations de haute précision, de nombreux facteurs agissent pour modifier les résultats suivant les circonstances. L'influence de *l'équation personnelle* en particulier peut devenir considérable. On désigne sous ce nom l'ensemble des erreurs qui sont propres à un observateur, et qui dépendent de sa façon d'apprécier les phénomènes. On s'en affranchit le plus possible, ici comme dans toutes les autres recherches de précision, par une étude de comparaison préalable : mais les limites que nous nous sommes imposées ne nous permettent pas d'entrer dans des détails : il suffira d'avoir signalé cet ordre d'idées, et nous n'y reviendrons pas.

**Instrument méridien.** — Un théodolite et un équatorial ont une position commune et une seule, lorsque l'axe désigné précédemment par  $hh'$  est à la fois dans l'horizon et dans l'équateur. Si alors on fixe cet axe invariablement dans cette position, de façon que la lunette seule reste mobile, on obtient *l'instrument méridien*.

Un tel instrument est donc constitué essentiellement de la façon

suivante. Un axe  $hh'$ , l'axe de l'instrument, est fixé invariablement, à la fois dans l'horizon et dans l'équateur, et par suite dans la direction Est-Ouest; autour de cet axe, en un point  $O$ , tourne la ligne de visée  $ll'$ , qui lui est perpendiculaire, et par suite décrit le plan du méridien; cette ligne de visée est l'axe optique d'une lunette dans laquelle on observe un astre  $S$  au centre du réticule. Enfin un cercle divisé, perpendiculaire sur  $hh'$  et tournant avec la lunette, fournit l'angle de  $ll'$  avec une direction fixe du méridien, et une pendule sidérale accompagne nécessairement l'instrument.

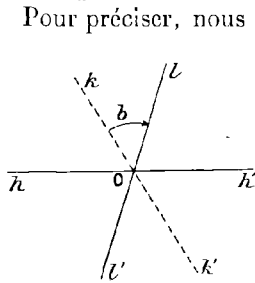


FIG. 31

l'extrémité fixe  $h$  de l'axe est dirigée vers l'Est, et  $h'$  vers l'Ouest (fig. 31); soit de plus la direction fixe  $Ok$  dirigée vers le point le plus haut de l'équateur, et supposons que le cercle fournisse directement l'angle  $b$  que fait  $Ok$  avec  $Ol$ , compté vers le pôle dans le sens rétrograde par rapport à  $Oh$ ; enfin soit  $t$  l'heure sidérale du lieu au moment de l'observation de l'astre suivant  $ll'$ .

Pour déduire de ces données l'ascension droite  $\alpha$  et la déclinaison  $\delta$  de l'astre, il faut distinguer deux cas, que nous désignerons dans la suite par les notations (a) et (b). Dans le cas (a), l'angle  $b$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ , de sorte que le passage au méridien observé est un passage supérieur correspondant à un angle horaire nul. On a alors

$$\alpha = t, \quad \delta = b.$$

Dans le cas (b), l'angle  $b$  est compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$ ; le passage observé est un passage inférieur, correspondant à un angle horaire égal à  $\pi$ ; alors évidemment

$$\alpha = \pi + t, \quad \delta = \pi - b.$$

Dans la grande majorité des cas, la lunette de l'instrument méridien est susceptible de retournement, à l'aide d'un appareil convenable, de sorte que ses deux tourillons peuvent échanger leurs coussinets. En réservant les lettres  $h$  et  $h'$  pour les deux coussinets Est et Ouest, absolument fixes, nous désignerons les deux tourillons de

l'axe de la lunette par  $h_1$  et  $h'_1$ , et dans la position *directe* décrite précédemment les tourillons  $h_1$  et  $h'_1$  coïncideront respectivement avec les coussinets  $h$  et  $h'$ , tandis que la lunette étant retournée, ou placée dans la position dite *inverse*,  $h_1$  coïncidera avec  $h'$ ,  $h'_1$  avec  $h$ .

Le cercle étant lié à la lunette, et donnant par sa lecture dans la position *directe* l'angle de  $Ok$  avec  $Ol$ , donnera par exemple dans la position *inverse* l'angle du prolongement  $Ok'$  de  $Ok$  avec  $Ol$ , compté toujours vers le pôle (suivant la position de l'index, la lecture pourra différer de cet angle d'une constante) : si  $b$  est encore cet angle, on aura dans le cas ( $a'$ ) d'un passage supérieur

$$\alpha = t, \quad \delta = \pi - b,$$

et dans le cas ( $b'$ ) d'un passage inférieur

$$\alpha = \pi + t, \quad \delta = b.$$

Ainsi, finalement, on a quatre cas possibles distingués par les lettres ( $a$ ), ( $a'$ ), ( $b$ ), ( $b'$ ).

La partie mobile d'un instrument méridien n'étant susceptible que d'un seul mouvement dans un plan vertical, il est clair que cet appareil peut acquérir une grande stabilité, même avec des dimensions considérables : c'est ce qui fait de la lunette méridienne l'instrument de précision par excellence des observatoires. La forme type de l'instrument méridien comporte d'abord un cube central creux ; de deux faces opposées de ce cube partent deux troncs de cône portant l'un l'objectif, l'autre l'oculaire ; de deux autres faces partent deux autres troncs de cônes portant à leurs extrémités les tourillons qui constituent l'axe ; ces tourillons se placent sur les coussinets, qui sont fixés à des piliers de solidité éprouvée. On donne à l'ensemble de l'instrument une symétrie aussi parfaite que possible, afin d'augmenter la stabilité, et en particulier d'éviter les différences de flexion entre les troncs de cônes opposés qui supportent la partie optique et les tourillons. C'est ainsi qu'un cercle divisé étant monté sur un des tourillons, on monte sur le second tourillon un cercle parfaitement semblable, de façon à réaliser la condition de symétrie : quelquefois ce second cercle est lui-même divisé. Le cercle est lu de chaque côté à l'aide de quatre ou six microscopes qui sont fixés d'une façon inébranlable à des piliers spéciaux.

Si le cercle divisé n'existe pas, on a une simple lunette méridienne ou *instrument des passages*, qui permet, avec l'aide d'une pendule, de déterminer les ascensions droites. On peut aussi n'employer qu'un cercle tournant autour d'un axe fixé à un mur orienté dans le méridien, ou *cercle mural*, et déterminer ainsi les déclinaisons. Ces deux appareils distincts, dont on faisait usage séparément autrefois, sont maintenant réunis en un seul, le cercle méridien complet.

La théorie de l'instrument méridien est un cas particulier de celle du théodolite ou de l'équatorial. Cependant, à cause des simplifications qui se présentent, et pour conserver les notations consacrées par un long usage, nous allons la reprendre directement en quelques mots.

L'instrument n'étant pas parfaitement installé, il faut tout d'abord définir les constantes instrumentales. L'extrémité  $h$  de l'axe n'est pas rigoureusement dans sa position théorique : on appelle respectivement  $-\frac{\pi}{2} - k$  son azimut,  $-i$  sa hauteur,  $-\frac{\pi}{2} - m$  son angle horaire,  $-n$  sa déclinaison, de sorte que  $i$  et  $n$  en particulier sont la hauteur et la déclinaison du tourillon situé à l'Ouest, toujours. Les diverses quantités  $k, i, m, n$  sont toujours très petites et ne dépassent pas quelques secondes dans un instrument bien installé ; aussi leurs carrés et produits sont absolument négligeables. Entre ces quantités et la latitude  $\varphi$  du point  $O$  existent des relations ; on a en effet comme on sait

$$\begin{aligned} \cos i \sin k &= -\cos \varphi \sin n + \sin \varphi \cos n \sin m, \\ \sin i &= \sin \varphi \sin n + \cos \varphi \cos n \sin m, \end{aligned}$$

d'où simplement

$$\begin{cases} k = -n \cos \varphi + m \sin \varphi, \\ i = n \sin \varphi + m \cos \varphi, \end{cases}$$

et inversement

$$\begin{cases} m = i \cos \varphi + k \sin \varphi, \\ n = i \sin \varphi - k \cos \varphi. \end{cases}$$

La ligne de visée  $ll'$  n'est pas rigoureusement perpendiculaire à l'axe  $hh'$  ; nous appellerons  $\frac{\pi}{2} - c$  l'angle  $h_1Ol$ , défini par le tourillon  $h_1$  qui coïncide avec  $h$  dans la position directe ;  $c$  est la *collimation* proprement dite ; pour établir la théorie, on doit admettre



que cet angle  $c$  peut acquérir des valeurs notables, parce qu'on n'observe pas uniquement au centre du champ. Enfin, la lecture du cercle (changée de signe s'il est nécessaire),  $b$ , fait connaître l'angle que fait un plan fixe passant par  $hh'$  avec le plan  $hh'l'$ , compté toujours dans le sens rétrograde par rapport au demi-axe  $Oh_1$  lié à la lunette et au cercle; si  $Oz$  est la direction du pôle, et si  $h_1Ol_0$  est le plan fixe à partir duquel est compté l'angle  $b$ ,  $b_0$  ou  $b'_0$  désignera l'angle de ce plan avec le plan  $h_1Oz$ , suivant que l'on sera dans la position directe ou dans la position inverse. En dernier lieu, si  $t$  est l'heure observée à la pendule sidérale au moment du passage, pour avoir le temps sidéral véritable, il faudra lui ajouter la correction de pendule  $C_p$ .

En projetant l'instrument sur une sphère de centre  $O$ , on a les

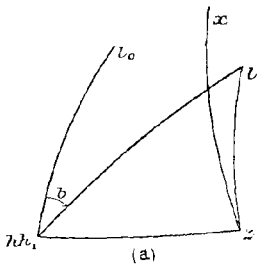


FIG. 32

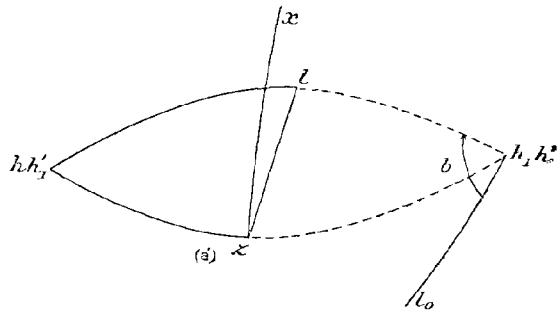


FIG. 34

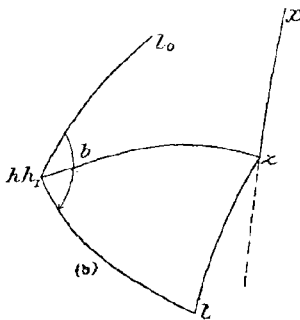


FIG. 33

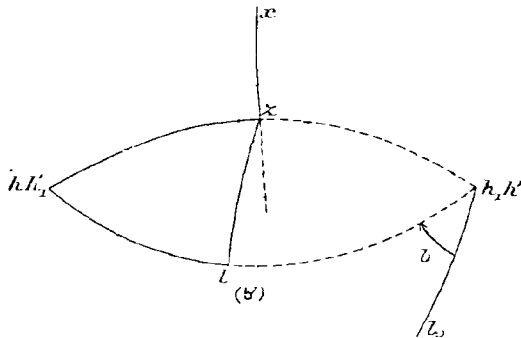


FIG. 35

figures ci-contre (32 à 35) correspondant aux cas (a), (b), (a'), (b');  $zx$  représente la direction du méridien. On considère le triangle  $h_1zl$ ,

dans lequel on a toujours pour la position directe, en comptant les côtés positivement et les angles dans le sens rétrograde :

$$\begin{aligned} hl &= \frac{\pi}{2} - c, & h\hat{z}l &= \frac{\pi}{2} + \text{II} + m, \\ lz &= \frac{\pi}{2} - \delta, & lhz &= b_0 - b, \\ zh &= \frac{\pi}{2} + n, \end{aligned}$$

H et  $\delta$  désignant l'angle horaire et la déclinaison de la direction observée en  $l$ .

Pour passer à la position inverse, il suffit de changer  $c$  en  $-c$ , et  $b_0 - b$  en  $b - b_0$ .

L'angle II est voisin de 0 ou de  $\pi$  suivant qu'on est à un passage supérieur ou à un passage inférieur ; nous poserons alors

$$\text{II} + m = \begin{cases} -\varepsilon \\ \pi + \varepsilon \end{cases} \text{ suivant le cas } \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix}$$

$\varepsilon$  étant toujours petit.

De même l'angle  $lhz$  est voisin de  $\pm \left( \frac{\pi}{2} - \delta' \right)$  suivant le cas (a) ou (b) ; nous ferons donc

$$b_0 - b = \pm \left( \frac{\pi}{2} - \delta' \right),$$

les signes supérieur et inférieur se rapportant respectivement aux cas (a) et (b). Nous supposons ici qu'on est toujours dans la position directe ; pour passer à la position inverse, on fera les changements indiqués plus haut.

Le triangle  $hzl$  donne alors les relations :

$$\begin{aligned} \sin c &= -\sin \delta \sin n + \cos \delta \cos n \sin \varepsilon, \\ \sin \delta &= -\sin c \sin n + \cos c \cos n \sin \delta', \\ -\sin n \sin \varepsilon &= \cos n \operatorname{tg} \delta - \cos \varepsilon \operatorname{tg} \delta'. \end{aligned}$$

On en tire, tout comme dans la théorie du théodolite,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= n \operatorname{tg} \delta + c \operatorname{sec} \delta + \frac{c^3}{6} \operatorname{sec} \delta \operatorname{tg}^2 \delta, \\ \delta - \delta' &= \frac{c^2 + n^2}{2} \operatorname{tg} \delta - cn \operatorname{sec} \delta, \end{aligned}$$

ou bien

$$\delta - \delta' = n \cos^3 \delta + \frac{n^2}{4} \sin 2\delta - \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\delta - 2 \sin^4 \frac{\varepsilon}{2} \cos^3 \delta \sin 2\delta.$$

Soit  $\alpha$  l'ascension droite de la direction  $Ol$ ; on aura finalement, en supprimant les termes d'ordre supérieur où figurent  $n$ , à cause de la petitesse de cette quantité, les formules suivantes d'un usage constant :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \begin{cases} t + C_p + m + n \operatorname{tg} \delta + c \operatorname{séc} \delta + \frac{c^3}{6} \operatorname{séc} \delta \operatorname{tg}^2 \delta & (a) \\ \pi + t + C_p + m - n \operatorname{tg} \delta - c \operatorname{séc} \delta - \frac{c^3}{6} \operatorname{séc} \delta \operatorname{tg}^2 \delta & (b); \end{cases} \\ \varepsilon = n \operatorname{tg} \delta + c \operatorname{séc} \delta + \frac{c^3}{6} \operatorname{séc} \delta \operatorname{tg}^2 \delta, \\ \delta = \frac{\pi}{2} \pm (b - b_0) - \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\delta - 2 \sin^4 \frac{\varepsilon}{2} \cos^2 \delta \sin 2\delta. \end{array} \right.$$

Pour la position inverse, on changera  $c$  en  $-c$  et  $b - b_0$  en  $-(b - b'_0)$ .

La formule de réduction pour les ascensions droites est due à Bessel; on peut la modifier en se servant des constantes  $i$  et  $k$ : le groupe de termes  $m \pm n \operatorname{tg} \delta$  devient alors

$$i \frac{\cos(\varphi \mp \delta)}{\cos \delta} + k \frac{\sin(\varphi \mp \delta)}{\cos \delta};$$

c'est la formule de Mayer.

En gardant  $i$  et  $n$ , le même groupe devient

$$i \operatorname{séc} \varphi - n (\operatorname{tg} \varphi \mp \operatorname{tg} \delta);$$

c'est la formule de Hansen. Ces différentes formules peuvent trouver une application avantageuse suivant les cas, comme on le verra plus loin.

Dans la formule relative aux déclinaisons, les termes de correction constituent la *réduction au méridien*.

Les observations méridiennes sont immédiatement corrigées par l'observateur de l'aberration diurne; l'angle horaire de l'observation étant nul ou égal à  $\pi$ , on voit alors d'après ce qui a été dit à ce sujet dans la première partie du cours (p. 105), qu'il faudra ajouter au second membre de la première formule (16), pour avoir l'ascension droite corrigée, le petit terme  $\mp k' \rho \cos \varphi' \operatorname{séc} \delta$  suivant qu'on est dans la position (a) ou (b),  $\varphi'$  étant la latitude géocentrique. On peut confondre le rayon vecteur  $\rho$  avec l'unité, et tout revient à remplacer  $c$  par  $c - k' \cos \varphi'$  dans les formules.

Les observations doivent aussi être corrigées de la réfraction. D'après les formules établies dans la première partie (p. 79), il faudra d'abord ajouter à la déclinaison calculée par la dernière formule (16) la quantité  $d\delta$  égale à  $\mp k \operatorname{tg}(\varphi \mp \delta)$ ; toutefois cette expression n'est qu'approchée; pour avoir un résultat plus exact, il faut ajouter ou retrancher la réfraction  $R$  relative à la hauteur méridienne au moment de l'observation; cette hauteur est égale comme on sait à

$$\frac{\pi}{2} - |\varphi - \delta| \quad \text{ou à} \quad |\varphi + \delta| - \frac{\pi}{2},$$

suivant que le passage observé est supérieur ou inférieur;  $R$  est à retrancher pour un passage supérieur du côté du Sud ou pour un passage inférieur du côté du Nord, à ajouter dans les cas contraires.

Pour la correction d'ascension droite, il faut d'abord ajouter à  $\alpha$ , donnée par la première formule (16), la quantité

$$d\alpha = \mp \frac{k \cos \varphi \sin H}{\cos(\varphi \mp \delta)} \sec \delta,$$

où l'on pourra sans inconvénient réduire  $H$  à sa partie principale —  $c \sec \delta$ , ou  $\pi + c \sec \delta$ , suivant le cas (a) ou (b); ce qui donne

$$d\alpha = \pm kc \frac{\cos \varphi \sec^2 \delta}{\cos(\varphi \mp \delta)}.$$

De plus, il faut observer que le terme  $\pm c \sec \delta$ , qui figure dans la correction de  $\alpha$  doit être calculé en réalité avec la valeur apparente de  $\delta$ , et non avec sa valeur vraie; si donc on veut le calculer avec la valeur vraie de  $\delta$ , il faut le remplacer par

$$\pm c \sec(\delta \pm k \operatorname{tg}(\varphi \mp \delta)),$$

d'après la valeur de  $d\delta$  indiquée plus haut; ceci donne un nouveau terme à ajouter à  $d\alpha$ , savoir

$$kc \sin \delta \sec^2 \delta \operatorname{tg}(\varphi \mp \delta);$$

faisant la somme indiquée, on a pour correction définitive de  $\alpha$  :

$$\pm kc \sec \delta :$$

de sorte que tout revient simplement à remplacer  $c$  par  $c(1 \mp k)$  dans les formules (16).

Il faut encore tenir compte des flexions. Pour cela, il suffit de se reporter à ce que nous avons dit pour l'équatorial. La flexion latérale, ou flexion de l'axe, sans influence sur  $\delta$ , donnera dans  $\alpha$  un terme correctif égal à

$$\pm f' \sin \varphi \operatorname{tg} \delta + f' \cos \varphi,$$

L'angle horaire H étant 0 ou  $\pi$  suivant le cas. Ce terme peut s'écrire

$$\frac{f' \cos(\varphi \mp \delta)}{\cos \delta},$$

et l'on voit d'après, la formule de Mayer, que tout revient à augmenter l'inclinaison  $i$  de  $f'$ . Il est clair d'ailleurs qu'en passant de la position directe à la position inverse, il faudra changer le signe de  $f'$ .

La flexion de la lunette, ou flexion horizontale, sera ici sans influence sur l'ascension droite, sin H étant nul, mais donnera dans  $\delta$  un terme correctif égal à  $f \sin(\varphi \mp \delta)$ , ainsi qu'il est évident *a priori*.

Il y a lieu de tenir compte encore ici de la flexion du cercle divisé, qui a pour effet évident de changer légèrement la signification de la lecture  $b$ ; pour avoir l'angle que représente théoriquement cette lecture, et qui a été défini plus haut, il est nécessaire de lui faire subir une correction  $db$ , due à l'action de la pesanteur. Comme la lunette est liée au cercle, on peut évidemment réunir ensemble les effets de la flexion du cercle et de la flexion de la lunette, et c'est ce que nous allons faire, suivant l'habitude générale. La correction  $db$  peut être regardée comme une fonction périodique de la lecture, c'est-à-dire de l'angle que fait le plan  $h_1Ol$  avec le plan fixe  $h_1Ol_0$ , compté dans le sens rétrograde par rapport à  $Oh_1$ ; supposons alors que nous prenions pour  $Ol_0$  la direction du zénith, et cela dans la position directe comme dans la position inverse, de sorte que tout se passe de la même façon par rapport à la direction de la pesanteur dans les deux positions; de cette façon  $db$  sera la même fonction de  $b$  dans les deux positions. On a alors suivant les cas :

$$\begin{array}{ll} (a) & b = \delta - \varphi, & (a') & b = \varphi - \delta, \\ (b) & b = \pi - \delta - \varphi, & (b') & b = \varphi + \delta - \pi; \end{array}$$

prenant  $db$  sous la forme d'une série trigonométrique de Fourier :

$$db = -p_1 \sin b - p_2 \sin 2b - p_3 \sin 3b - \dots \\ - q_0 + q_1 \cos b + q_2 \cos 2b + q_3 \cos 3b + \dots,$$

les  $p_i$  et  $q_i$  étant des constantes, on en déduit pour la correction  $d\delta$  qu'il faut apporter à la valeur de  $\delta$  telle que la donne la dernière équation (16), et suivant les cas :

$$\begin{aligned} (a) \quad d\delta &= p_1 \sin(\varphi - \delta) + p_2 \sin 2(\varphi - \delta) + \dots \\ (a') \quad &\mp q_0 \pm q_1 \cos(\varphi - \delta) \pm q_2 \cos 2(\varphi - \delta) \pm \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad d\delta &= p_1 \sin(\varphi + \delta) - p_2 \sin 2(\varphi + \delta) + \dots \\ (b') \quad &\pm q_0 \pm q_1 \cos(\varphi + \delta) \mp q_2 \cos 2(\varphi + \delta) \pm \dots \end{aligned}$$

D'ailleurs, la correction  $db$  est nulle pour  $b = 0$ , d'après les hypothèses faites, et par suite

$$q_0 = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$$

Revenant alors au cas général, où les index fournissant la lecture sont placés d'une façon quelconque, on pourra, comme on le voit, négliger  $q_0$  qui ira se confondre avec  $b_0$  ou  $b'_0$ , suivant la position de l'instrument.

Si l'on ne tient compte, comme précédemment, que de la flexion de la lunette, on voit que cela revient simplement à faire  $p_1 = f$ , les autres coefficients étant nuls.

La lunette méridienne est munie d'un réticule que nous supposons toujours disposé de la même façon, le fil CX étant parallèle à la direction  $Oh'_1$  (car elle est invariablement liée à la lunette), et l'angle XCY étant compté dans le sens rétrograde. Si l'on a observé en un point M de coordonnées  $x$  et  $y$  par rapport aux axes du réticule, il faut (comme on le voit en faisant attention à la définition actuelle de  $c$ ) remplacer  $c$  par  $c + x$  et  $b$  par  $b + y$ , et cela dans tous les cas. Si le fil a une inclinaison  $i''$ , on en tiendra compte comme on a déjà dit. Supposons  $y$  et  $i''$  assez petits et la collimation proprement dite  $c$  relative au fil CY nulle ou très petite; on aura alors,  $x$  pouvant être grand, avec une approximation souvent suffisante, dans la position directe,

$$\varepsilon = + x \cos i'' \sec \delta,$$

et la lecture  $b$  devra être augmentée de  $y - x \sin i''$ . Il peut être commode d'exprimer cette correction à l'aide de  $\varepsilon$  : elle devient alors  $y - \varepsilon \operatorname{tg} i'' \cos \delta$ .

Pour la position inverse la correction de la lecture sera

$$y + \varepsilon \operatorname{tg} i'' \cos \delta.$$

Il peut être utile d'observer à l'instrument méridien une étoile par réflexion dans un bain de mercure placé à la distance convenable, facile à déterminer, devant l'objectif. Remarquons que les formules qui permettent le passage des coordonnées horizontales aux coordonnées horaires restent vérifiées quand, laissant l'azimut  $A$  et la déclinaison  $\delta$  fixes, on change la hauteur  $h$  en  $-h$ , la latitude  $\varphi$  en  $-\varphi$  et l'angle horaire  $H$  en  $\pi - H$ . Comme la réflexion sur l'horizon a pour effet de changer de signe la hauteur d'une direction tout en conservant l'azimut, on voit par là que tout se passera comme si la latitude  $\varphi$  était changée en  $-\varphi$ , et si le passage supérieur ou inférieur était changé en passage inférieur ou supérieur.

Le changement de latitude ne modifie pas les constantes  $i$  et  $k$ , mais modifie  $m$  et  $n$ , qui deviendront  $m_1$  et  $n_1$  :

$$m_1 = i \cos \varphi - k \sin \varphi, \quad n_1 = -i \sin \varphi - k \cos \varphi;$$

de plus la constante  $b_0$ , qui est en somme la lecture qui convient à la direction du pôle, ou *collimation polaire*, prendra pour les observations par réflexion, une nouvelle valeur  $b_1$ . On trouve alors l'ensemble de formules suivantes, en distinguant toujours par (a) et (b) les passages supérieur et inférieur.

$$\alpha = \frac{\circ}{\pi} \left\{ + t + C_2 - m_1 \pm \varepsilon \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \right.$$

$$\varepsilon = n_1 \operatorname{tg} \delta + c \operatorname{sec} \delta + \frac{c^3}{6} \operatorname{sec} \delta \operatorname{tg}^3 \delta,$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} \mp (b - b_1) - \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\delta - 2 \sin^4 \frac{\varepsilon}{2} \cos^2 \delta \sin 2\delta.$$

Il reste à déterminer  $b_1$  en fonction de  $b_0$ ; ici  $b_1$  est la lecture qui correspond au pôle, la latitude étant supposée être  $-\varphi$ ; par suite, il est clair, d'après les hypothèses faites sur la disposition de l'instrument, que  $b_1 - b_0 = 2\varphi$ , puisque  $\varphi$  est la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon.

Il y a lieu cependant d'observer que la réflexion du rayon lumi-

neux ne se produit pas en réalité au point O de latitude  $\varphi$ , mais en un point voisin  $O_1$ , de latitude  $\varphi + d\varphi$ , où est placé le bain de mercure; la quantité  $d\varphi$  se calcule d'ailleurs immédiatement connaissant la distance  $OO_1$  et son sens. Il en résulte que la réflexion sur le bain de mercure fait tourner la direction du pôle non pas de l'angle  $2\varphi$ , mais de l'angle  $2(\varphi + d\varphi)$ , et qu'il faudra prendre  $b_1 = b_0 + 2\varphi + 2d\varphi$ ,  $d\varphi$  variant avec la position du bain.

Les corrections d'observation diurne et de réfraction se feront comme précédemment, puisqu'elles ne dépendent pas de la position de l'instrument.

Pour tenir compte de la flexion latérale, on changera le signe de  $f'$ ; comme on peut remarquer que la nouvelle formule donnant l'ascension droite ne diffère de l'ancienne que par le signe de l'inclinaison  $i$ , on voit que  $i$  est toujours à remplacer par  $i + f'$ .

Quant à l'effet de la flexion horizontale, on voit qu'il faudra pour passer des observations directes aux observations par réflexion, changer le signe des coefficients  $p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots$  sans modifier les coefficients  $p_2, p_3, \dots, q_1, q_2, \dots$ .

**Usage de l'instrument méridien.** — La méthode d'observation à l'instrument méridien est extrêmement simple : elle consiste simplement à déterminer le temps où l'on voit l'astre (que nous supposons une étoile) en un point donné du champ, de coordonnées  $x, y$  données par les vis du micromètre. Le réticule est supposé orienté suivant le mouvement diurne, ce qui se fait facilement comme à l'équatorial : ici CX doit être horizontal et CY vertical. Si le micromètre ne peut pas tourner sur lui-même, il peut subsister une petite inclinaison  $i'$ .

Pour la détermination des ascensions droites, on observe en général les passages à plusieurs fils fixes parallèles à CY, afin de réduire les erreurs par la multiplication des observations. Supposons que ces fils correspondent à des lectures  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  de la vis, dont le tour sera  $\tau$  : on prend alors comme fil CY, le fil idéal dont la lecture serait la moyenne  $\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p}{p}$ ; c'est le *fil moyen*.

En général à une lecture  $\lambda$  de la vis correspond alors une valeur de  $x$  égale à  $\tau(\lambda - \lambda_0)$  : en particulier si  $x_1, x_2, \dots, x_p$  correspondent aux différents fils fixes, on a  $x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0$ .



On désigne alors par collimation proprement dite de l'instrument la valeur de  $c$  qui correspond au fil moyen, et en général, dans les formules (16), il faut remplacer  $c$  par  $c + x$ .

Si l'on a observé ainsi aux fils fixes une étoile aux temps  $t_1, t_2, \dots, t_p$ , on a alors en faisant la moyenne des équations correspondantes, par exemple dans le cas (a),

$$\alpha = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_p}{p} + C_p + m + n \operatorname{tg} \delta + c \operatorname{séc} \delta,$$

lorsque, ce qui arrive le plus souvent le terme en  $c^2$  est négligeable : c'est ce qu'on appelle réduire l'observation au fil moyen, puisqu'on est amené simplement ainsi au même résultat que si l'on avait observé au seul fil moyen. Ce procédé d'observation ne convient pas aux circumpolaires : en effet le temps que met l'astre pour passer du fil  $x$  au fil  $x'$  est évidemment sensiblement égal à  $|x - x'| \operatorname{séc} \delta$ , et par suite devient grand près du pôle : l'observation serait donc incommode, et manquerait de précision, le temps du passage à un fil ne pouvant être bien déterminé. Dans ce cas, on fait des pointés sur l'étoile avec un fil mobile, à différents instants, et on réduit ensuite chaque observation séparément, en tenant compte des termes du troisième ordre qui cessent d'être négligeables.

L'observation en déclinaison se fait avec un fil mobile : on fait quelques pointés successifs vers le centre du champ, et on prend la moyenne pour l'ajouter à la lecture  $b$  du cercle ; s'il y a lieu, on tient compte de l'inclinaison du fil. Pour pouvoir faire la réduction au méridien, on marque le temps des pointés, afin d'avoir  $\varepsilon$  avec une approximation suffisante.

Les constantes de l'instrument méridien et de la pendule qui l'accompagne doivent être déterminées avec précision : dans un instrument bien installé, elles sont très petites et varient peu. Pour faire cette détermination, il est clair qu'il suffit de combiner convenablement les observations sur des astres réels ou fictifs de façon que les équations (16) permettent le calcul des diverses constantes qui y figurent dans des conditions favorables : conditions qui changent suivant la constante dont on recherche spécialement la valeur, puisque d'une façon générale, il faudra pour obtenir ces conditions rendre prépondérante l'influence de cette constante.

Dans la détermination des constantes, on utilise des observations auxiliaires, dont il faut d'abord dire un mot. On observe au nadir à l'aide d'un bain de mercure placé sous le centre de l'instrument ; la lunette étant dirigée vers ce bain de mercure, et le champ étant convenablement éclairé et observé à l'aide d'un oculaire spécialement approprié, dit oculaire nadiral, on peut voir en même temps le réticule directement et par réflexion sur le bain de mercure : il est évident alors qu'un point du champ qui coïncide avec son image définit une direction rigoureusement verticale, dirigée vers le nadir.

On observe aussi souvent un astre fictif fixe que l'on peut réaliser soit à l'aide d'une *mire*, soit à l'aide d'un *collimateur*. Une mire est une plaque métallique percée d'un trou rond, dans lequel on peut tendre deux fils fixes en croix, et qui est installée le plus solidement possible sur un pilier, construit de façon à pouvoir être regardé comme invariable. Ce pilier est situé à une certaine distance de l'instrument, dans le méridien, à 100 ou 200 mètres par exemple. Les rayons lumineux issus de la mire, convenablement éclairée s'il est nécessaire, sont reçus par un objectif spécial, dit objectif de mire, à long foyer et placé non loin de l'instrument ; ils sont ainsi rendus parallèles et définissent par suite une étoile fictive située à l'infini, mais fixe, observable à la lunette tout comme une étoile réelle.

Un collimateur remplit la même fonction qu'une mire, mais d'une façon différente. C'est une lunette astronomique à court foyer, installée dans le voisinage de l'instrument et ayant son axe dans le méridien ; dans le plan focal de l'objectif est une croisée de fils que l'on peut déplacer légèrement de façon à lui donner telle orientation qui conviendra, et dont le déplacement peut quelquefois être défini à l'aide d'un micromètre. Cette croisée de fils, éclairée convenablement, envoie des rayons qui sortent parallèlement du collimateur et qui, pouvant être reçus par la lunette méridienne, définissent encore une étoile fictive.

Les conditions d'installation d'une mire et d'un collimateur sont très différentes : l'étoile fictive définie par le collimateur n'est pas, d'après l'installation de cet instrument, invariable comme celle définie par la mire ; elle ne peut être regardée comme fixe que pendant un temps assez court.

En réglant un collimateur sur le bain de mercure, de façon que les images directe et réfléchiée de la croisée de fils, observées dans le collimateur, coïncident, on obtient un collimateur zénithal, définissant une étoile placée rigoureusement au zénith. Mais en général, un collimateur fournit, comme une mire, une direction sensiblement horizontale.

Il peut être utile aussi d'employer deux collimateurs réglés l'un sur l'autre, et placés de part et d'autre de l'instrument, de telle façon que les directions qu'ils définissent soient les mêmes et de sens contraires; il suffira pour cela que l'image de la croisée de fils de l'un d'eux vue dans le second coïncide avec la croisée de fils propre à ce second: on pourra d'ailleurs, malgré la présence de l'instrument, observer l'un des collimateurs avec l'autre, en ouvrant des fenêtres ménagées à cet effet dans le cube central de la lunette. De cette façon on pourra observer avec la lunette deux directions rigoureusement opposées.

Il est à peine utile de remarquer que pour appliquer les formules (16) aux observations d'astres fictifs, il n'y aura lieu de tenir compte de l'aberration diurne, ni de la réfraction astronomique.

Indiquons maintenant les principales méthodes que l'on emploie pour la détermination des différentes constantes, en faisant tout d'abord abstraction des corrections dues à la flexion.

1° *Tours de vis.* — Pour déterminer un tour de vis, on peut procéder comme nous l'avons dit dans la théorie de l'équatorial. Si l'instrument étant fixé, on observe en ascension droite un même astre mobile en différents points du champ, par exemple aux deux fils verticaux de lectures  $\lambda$  et  $\lambda'$ , la comparaison des deux observations faites aux temps voisins  $t$  et  $t'$  donnera la relation suivante, où le signe douteux dépend de la position de l'instrument :

$$0 = \pm (t' - t) + \tau(\lambda' - \lambda) \sec \delta + \frac{\sec \delta \operatorname{tg}^2 \delta}{6} \left[ [c + \tau(\lambda' - \lambda_0)]^3 - [c + \tau(\lambda - \lambda_0)]^3 \right];$$

cette relation fournira  $\tau$ , connaissant la valeur approchée de  $c$ , toujours très petite et d'influence négligeable ici en général. Pour les mêmes raisons évidentes que dans le cas de l'équatorial, on choisit une circumpolaire, et on prend les mêmes précautions.

On tient compte de la réfraction et de l'aberration diurne comme

nous l'avons dit, et cette remarque qui s'applique aux cas semblables sera faite une fois pour toutes.

Telle est la méthode pour mesurer le tour d'une vis par des observations en ascension droite. Mais on peut employer surtout des observations en déclinaison. Si d'ailleurs le micromètre peut tourner sur lui-même, on peut faire jouer à une vis quelconque le rôle de vis d'ascension droite ou de vis de déclinaison à volonté, en passant de l'une des positions à l'autre par une rotation de  $90^\circ$ .

Comme dans le cas de l'équatorial, on peut déterminer le tour d'une vis de déclinaison en mesurant la distance connue de deux étoiles. On peut aussi observer une même étoile en déplaçant légèrement l'instrument en hauteur, de façon à faire varier la lecture  $b$  du cercle; le déplacement de l'instrument sera ainsi mesuré par le cercle et par la vis, ce qui déterminera le tour de cette dernière. On observe encore de préférence une circumpolaire qui reste longtemps dans le champ et y décrit une trajectoire de courbure sensible: les différentes observations seront corrigées avec soin séparément de la réduction au méridien et de la réfraction, celle-ci pouvant varier légèrement pendant la durée de l'observation.

On peut aussi observer de la même façon une mire ou un collimateur qui fournit une image fixe, et en déplaçant l'instrument; le déplacement de l'image est encore mesuré à la fois par le cercle et par la vis.

2° *Inclinaison du fil.* — L'inclinaison  $i''$  du fil horizontal, lorsqu'on ne peut l'annuler, se détermine aisément en observant une même étoile en déclinaison, aux deux extrémités du champ; les pointés seront différents, et comme on doit trouver la même valeur de  $\delta$ , la comparaison des deux observations donnera  $i''$  avec une approximation suffisante.

On choisira de préférence une étoile zénithale afin de s'affranchir le plus possible de l'influence du changement de réfraction.

3° *Collimation.* — Observant un même astre en ascension droite dans les deux positions directe et inverse de l'instrument, c'est-à-dire avant et après retournement de la lunette, on voit tout de suite que la combinaison des deux résultats donnera une équation propre à déterminer la collimation  $c$ , de la forme

$$0 = \pm (t - t') + (2c + x + x') \sec \delta + \frac{\sec \delta \operatorname{tg}^2 \delta}{6} [(c + x)^2 + (c + x')^2],$$

si  $t$  et  $t'$  sont les temps,  $x$  et  $x'$  les coordonnées qui définissent les fils où l'on a observé.

On choisira une circumpolaire, de façon à augmenter le coefficient de l'inconnue  $c$ , et à avoir le temps d'opérer le retournement. On fera dans chaque position plusieurs pointés, que l'on pourra combiner de façon à faire une observation moyenne.

On peut avantageusement remplacer ici l'observation d'une étoile réelle par celle d'une étoile fictive, en opérant toujours par retournement. Si l'on égale les valeurs de l'angle horaire fixe de l'étoile fictive tirées des deux observations, on a simplement, en négligeant les termes du troisième ordre (ce qui est possible d'après le mode d'installation des mires ou collimateurs)

$$2c + x + x' = 0,$$

$x$  et  $x'$  définissant les fils où l'on observe l'étoile fictive dans les deux positions.

Si l'on appelle *fil sans collimation* celui qui correspond à la valeur  $-c$  de  $x$ , on voit que  $\frac{x + x'}{2}$  définit ici ce fil ; la lecture correspondante de la vis est donc  $\frac{\lambda + \lambda'}{2}$ ,  $\lambda$  et  $\lambda'$  étant les lectures observées dans les deux positions de l'instrument : ces lectures sont obtenues en prenant les moyennes de plusieurs pointés.

Si l'on dispose de deux collimateurs ou mires, l'une au Nord, l'autre au Sud, on devra trouver la même valeur pour la collimation, et vérifier ainsi, ce que nous avons supposé implicitement, que, par le retournement, les constantes  $m$  et  $n$  ne changent pas. Supposons en effet que  $m$  et  $n$  conviennent à la position directe, et se changent en  $m'$ ,  $n'$  pour la position inverse ; l'observation de la mire Sud supposée dans l'horizon est celle d'un passage supérieur, en raisonnant dans le cas où la latitude est positive, et l'on a

$$\delta = -\frac{\pi}{2} + \varphi, \quad m \cos \delta + n \sin \delta = k, \quad m' \cos \delta + n' \sin \delta = k',$$

$k$  et  $k'$  désignant les azimuts de l'instrument dans les deux positions directe et inverse.

Donc  $x$  et  $x'$  définissant les deux observations, on aura

$$2c + x + x' + k - k' = 0.$$

De la même façon, l'observation de la mire Nord donnera, en appelant  $x_1$  et  $x'_1$  les valeurs de  $x$  qui correspondent aux deux observations directe et inverse :

$$2c + x_1 + x'_1 - k + k' = 0.$$

Par suite les moyennes  $\frac{x + x'}{2}$  et  $\frac{x_1 + x'_1}{2}$  ne sont pas égales et leur différence donne la variation d'azimut  $k' - k$ .

On voit par là l'avantage d'avoir deux mires pour vérifier la bonne installation de l'instrument.

On peut encore observer le nadir dans les deux positions directe et inverse ; appelons alors  $x$  et  $x'$  les valeurs de  $x$  qui correspondent aux points du champ où le fil horaire mobile coïncide avec son image dans les deux positions, et remarquons qu'au nadir on observe en somme un passage inférieur, l'angle horaire étant exactement  $\pi$ , et la déclinaison  $-\varphi$  ; on a alors dans la position directe

$$i - (c + x) = 0,$$

et dans la position inverse

$$i + (c + x') = 0,$$

d'où encore

$$2c + x + x' = 0.$$

En même temps, on voit que l'on a aussi pour déterminer l'inclinaison la relation :

$$2i - x + x' = 0;$$

de plus chacune des deux équations, prise seule, permet de calculer l'une des deux quantités  $c$  et  $i$  connaissant l'autre. Si la lunette n'est pas susceptible de retournement, on pourra donc encore employer l'observation au nadir, à la condition de connaître  $i$ .

On peut aussi se servir de deux collimateurs pointés l'un sur l'autre. Les observations correspondantes étant l'une de passage supérieur, l'autre de passage inférieur, on a encore, si  $x$  et  $x'$  sont les valeurs de  $x$  données par les deux observations,

$$2c + x + x' = 0.$$

4° *Inclinaison.* — L'observation au nadir fournit déjà un moyen

de déterminer l'inclinaison, soit directement, soit en supposant la collimation connue, ainsi que nous venons de le voir.

On détermine le plus souvent l'inclinaison à l'aide d'un nivellement, que l'on exécute avec un grand niveau pouvant se placer sur l'axe. On peut aussi de cette façon, comme nous l'avons vu à propos du niveau, déterminer l'inégalité des tourillons, et bien vérifier leur forme parfaitement circulaire.

5° *Azimat*. — On peut déterminer directement l'azimat  $k$  par l'observation d'étoiles fondamentales, c'est-à-dire d'étoiles de coordonnées parfaitement connues, dont on trouve les positions apparentes pour tous les jours de l'année dans les éphémérides.

Observons plusieurs fondamentales, et supposons les observations réduites au fil moyen, et corrigées de l'inclinaison. La formule de Mayer fournira des équations de la forme

$$C_p + k \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} = u,$$

$u$  désignant une quantité connue.

Ces équations fourniront les deux inconnues  $C_p$  et  $k$ ; on aura soin d'ailleurs de prendre des étoiles de déclinaisons très différentes, par exemple une circumpolaire et une étoile équatoriale, afin que les fonctions linéaires de  $C_p$  et de  $k$  qui sont dans les premiers membres soient aussi distinctes que possible. Les étoiles zénithales, pour lesquelles  $\varphi = \delta$ , détermineront très bien  $C_p$ .

Les diverses observations faites s'étendant sur une certaine durée, la correction de pendule  $C_p$  variera avec le temps; on aura donc en réalité une troisième inconnue, la marche de la pendule, supposée constante, qui sera aussi déterminée par les équations.

Si l'on ne veut pas employer une fondamentale, observons une circumpolaire à deux passages successifs, l'un supérieur, l'autre inférieur, au méridien; en faisant les corrections dues à l'inclinaison et à la collimation, en tenant compte aussi du petit changement d'ascension droite apparente qui peut se produire entre les deux observations, et de la marche de la pendule supposée connue par ailleurs, on aura, toujours d'après la formule de Mayer, une équation de la forme

$$k \left( \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\cos \delta} - \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} \right) = u,$$

d'où

$$k = \frac{u}{2 \cos \varphi \operatorname{tg} \delta}.$$

On peut encore observer une mire établie aussi fixement que possible. Si c'est une mire Sud dans l'horizon, d'azimut fixe très petit  $A$  par rapport à l'instrument, son angle horaire  $H$  est égal à  $A \sec \delta$ , ou à  $\pi - A \sec \delta$  suivant que  $\varphi$  est  $> 0$  ou  $< 0$ , et l'on trouve aisément comme plus haut, en désignant par  $x$  la position du fil horaire qui correspond à l'observation de la mire, la relation

$$A + k + c + x = 0.$$

Si l'on retourne l'instrument, et que  $x'$  soit la nouvelle valeur de  $x$ , on a encore

$$A + k - c - x' = 0.$$

Une mire Nord donnerait des résultats analogues.

Les équations précédentes ne déterminent pas  $k$ , mais seulement  $A + k$ . Mais il faut observer que  $A$  varie extrêmement peu, si l'instrument et la mire sont bien installés ; si donc on a déterminé une fois la valeur de  $A$  à l'aide d'une bonne détermination de  $k$  obtenue par d'autres moyens, on pourra ensuite se servir de cette valeur pour déterminer les variations de  $k$ .

Remarquons enfin qu'en observant diverses fondamentales à des hauteurs très différentes, et utilisant la formule de Mayer, on pourra déterminer par les équations obtenues, non seulement  $k$  et  $C_p$ , mais aussi  $i$ .

6° *Déclinaison et angle horaire.* — Les constantes  $m$  et  $n$  dérivent directement de  $b$  et de  $k$  : mais il peut y avoir avantage à les déterminer directement. La constante  $m$  est inséparable de la correction de pendule  $C_p$ , comme le montrent les premières formules (16), et par suite ne peut être obtenue directement, à moins que l'on n'ait déjà déterminé  $C_p$  comme plus haut : mais en combinant les valeurs de  $n$  et de l'inclinaison, ou de l'azimut, on aura  $m$ . Pour obtenir  $n$  directement, on combine les observations de deux étoiles fondamentales ; en retranchant les équations (16) correspondantes, on aura en effet, la collimation étant supposée connue, un résultat de la forme

$$n(\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \delta') = u,$$



$u$  étant une quantité connue,  $\delta$  et  $\delta'$  désignant les déclinaisons des deux étoiles. En prenant une étoile circumpolaire et une étoile équatoriale, on sera dans des conditions favorables pour déterminer  $n$ .

On peut aussi de la même façon déterminer la constante  $n_1$  qui correspond aux observations faites par réflexion : la connaissance de  $n$  et de  $n_1$  donnera  $i$ ,  $k$ ,  $m$  et  $m_1$ , à l'aide de la latitude  $\varphi$ .

7° *Correction de pendule.* — La valeur de la correction  $C_p$  se déduit immédiatement de l'observation des fondamentales, connaissant les autres constantes ; si l'on ne connaît que  $i$  et  $c$ , les étoiles zénithales donnent directement  $C_p$ .

Les étoiles équatoriales, ou horaires, sont celles qui traversent le plus vite le champ, et par suite celles dont le passage aux fils s'observe avec la plus grande précision ; en les observant, on élimine le plus possible l'influence de  $n$  et  $C_p + m$  se trouve très bien déterminée. On en déduit donc très exactement la marche de la pendule. En observant par réflexion, on aurait de même  $C_p + m_1$ .

8° *Collimation polaire.* — L'observation de toute fondamentale en déclinaison fournit la collimation polaire  $b_0$ . Si l'on veut se servir d'une même étoile, de façon à éviter l'incertitude qui peut exister sur la déclinaison, on observera une circumpolaire à ses deux passages au méridien ; la comparaison des deux observations convenablement corrigées fournira encore  $b_0$ .

On déterminera de même la constante  $b_1$  relative aux observations par réflexion.

9° *Latitude.* — La connaissance de  $b_0$  et de  $b_1$  fournit la latitude, ainsi qu'il résulte de ce qui a été dit plus haut. On voit d'ailleurs que la somme  $b_0 + b_1$  ou  $2(b_0 + \varphi)$ , obtenue par l'observation d'une même étoile vue directement et par réflexion, est indépendante de la déclinaison de l'étoile et de la réfraction.

L'observation au nadir est ici encore précieuse. Supposons que  $b$  soit la lecture du cercle qui correspond rigoureusement au nadir, c'est-à-dire à la position où le fil mobile de déclinaison coïncide avec son image dans le bain de mercure, au centre du champ ; l'angle horaire étant nul, et la déclinaison du nadir étant  $-\varphi$ , on aura

$$-\varphi = \frac{\pi}{2} - b + b_0,$$

et par suite, on aura encore  $b_0 + \varphi$ .

Un collimateur zénithal fournirait encore le même résultat.

10° *Flexion.* — Donnons à ce sujet seulement quelques indications. Envisageons d'abord la flexion latérale ; pour tenir compte de cette flexion  $f'$ , on peut, avons-nous dit, augmenter ou diminuer l'inclinaison  $i$  de  $f'$  suivant que l'on observe dans la position directe ou dans la position inverse. L'existence de cette flexion sera donc révélée en constatant des différences dans les valeurs de  $i$  déterminées par des observations d'étoiles dans les deux positions de l'instrument. On peut encore, si l'on veut, observer que pour tenir compte de  $f'$ , on peut augmenter la collimation  $c$  de  $\pm f' \cos(\varphi \mp \delta)$ , les signes supérieurs ou inférieurs correspondant aux passages supérieurs ou inférieurs. Par suite l'existence de  $f'$  sera encore révélée en constatant des différences dans les valeurs de la collimation obtenues à diverses hauteurs de l'instrument.

S'il s'agit maintenant de la flexion horizontale et de celle du cercle, on voit sans peine, d'après les formules écrites plus haut, que l'on pourra arriver à déterminer les principaux coefficients de cette flexion en combinant ensemble des observations directes et par réflexion faites dans les deux positions de l'instrument : on peut aussi, si l'instrument est construit de façon convenable, échanger l'oculaire et l'objectif, supposés parfaitement symétriques, et obtenir ainsi de nouvelles positions de comparaison. Laissant de côté ce dernier procédé, supposons donc qu'on observe une même étoile, par exemple à son passage supérieur, dans les deux positions ( $a$ ) et ( $a'$ ) de l'instrument, et aussi par réflexion, dans chacune de ces positions ; on aura en appelant  $u, u', u_1, u'_1$  des quantités connues, des équations correspondantes telles que :

$$\begin{aligned} \delta &= u + p_1 \sin(\varphi - \delta) + p_2 \sin 2(\varphi - \delta) + \dots \\ &\quad + q_1 \cos(\varphi - \delta) + q_2 \cos 2(\varphi - \delta) + \dots, \\ \delta &= u' + p_1 \sin(\varphi - \delta) + p_2 \sin 2(\varphi - \delta) + \dots \\ &\quad - q_1 \cos(\varphi - \delta) - q_2 \cos 2(\varphi - \delta) - \dots, \\ \delta &= u_1 - p_1 \sin(\varphi - \delta) + p_2 \sin 2(\varphi - \delta) - \dots \\ &\quad + q_1 \cos(\varphi - \delta) - q_2 \cos 2(\varphi - \delta) + \dots, \\ \delta &= u'_1 - p_1 \sin(\varphi - \delta) + p_2 \sin 2(\varphi - \delta) - \dots \\ &\quad - q_1 \cos(\varphi - \delta) + q_2 \cos 2(\varphi - \delta) - \dots \end{aligned}$$

La moyenne de ces valeurs de  $\delta$  ne dépend plus que des

coefficients  $p_2, p_3, \dots$ , et l'on élimine ainsi la majeure partie de l'effet de la flexion.

On a aussi

$$0 = \frac{u - u_1}{2} + p_1 \sin(\varphi - \delta) + q_2 \cos 2(\varphi - \delta) + \dots,$$

$$0 = \frac{u' - u'_1}{2} + p_1 \sin(\varphi - \delta) - q_2 \cos 2(\varphi - \delta) + \dots,$$

$$0 = \frac{u - u'}{2} + q_1 \cos(\varphi - \delta) + q_2 \cos 2(\varphi - \delta) + \dots,$$

$$0 = \frac{u_1 - u'_1}{2} + q_1 \cos(\varphi - \delta) - q_2 \cos 2(\varphi - \delta) + \dots,$$

et l'on pourra ainsi déterminer tous les coefficients  $q_1, q_2, q_3, \dots$  et  $p_1, p_3, \dots$  sans connaître exactement les déclinaisons  $\delta$ ; pour avoir  $p_2, p_4, \dots$  il faudra connaître  $\delta$ .

L'emploi de deux collimateurs pointés l'un sur l'autre fournira encore des équations utiles pour la détermination de la flexion; les deux directions qu'ils définissent ont des déclinaisons égales et de signes contraires, et en combinant les résultats des deux observations de façon à éliminer ces déclinaisons, on aura des relations entre les coefficients de la flexion.

Nous n'entrerons pas dans de plus amples détails: ce qui précède suffit pour faire comprendre les méthodes que l'on emploie pour étudier un instrument, et il serait inutile d'insister davantage sur les multiples précautions dont il faut s'entourer dans des recherches aussi délicates, pour éviter toute cause de perturbation.

Il nous reste encore une question à traiter. Nous avons supposé jusqu'ici que l'on observait une étoile, dont l'image peut être regardée comme un point, et dont les coordonnées sont invariables pendant au moins un certain temps, en même temps qu'indépendantes du lieu d'observation: il faut résoudre maintenant d'une façon générale le problème de l'observation d'un astre à diamètre apparent, à mouvement propre, et à parallaxe sensible, tel que le Soleil, la Lune, etc. Nous nous bornerons au cas où l'astre peut être considéré comme de forme circulaire: les modifications à apporter à ce qui suivra, dans le cas contraire, s'apercevront d'elles mêmes.

Nous limitant au cas d'un passage supérieur dans la position directe, imaginons qu'on ait observé le passage du bord d'un astre à un fil quelconque de collimation  $c$ ; si  $H'$  est l'angle horaire

apparent de ce bord, et  $\delta''$  la déclinaison correspondante, on aura

$$H'' = -m - n \operatorname{tg} \delta'' - c \operatorname{séc} \delta'',$$

les termes du troisième ordre étant toujours négligeables ici.

Soit  $H'$  l'angle horaire géocentrique de ce même bord, et  $\delta'$  sa déclinaison, qui est la même que celle du centre; comme on est tout près du méridien, on a avec une approximation toujours suffisante, même pour la Lune.

$$H' = H'' - \rho \sin \varpi \cos \varphi' \operatorname{séc} \delta \sin H'',$$

les lettres ayant la même signification que dans la première partie du Cours, au Chapitre de la Parallaxe. En négligeant le carré de  $\varpi$ , on a aussi

$$\delta'' = \delta - \rho \sin \varpi \sin (\varphi' - \delta),$$

puisqu'on est dans le méridien.

En exprimant  $\delta''$  à l'aide de  $\delta$  et remplaçant  $H''$  par sa valeur, il vient alors, en négligeant les termes du second ordre par rapport à  $m, n, c, \varpi$ :

$$\begin{aligned} H' &= -m(1 - \rho \sin \varpi \cos \varphi' \operatorname{séc} \delta) \\ &\quad - n(\operatorname{tg} \delta - \rho \sin \varpi \sin \varphi' \operatorname{séc} \delta) \\ &\quad - c \operatorname{séc} \delta (1 - \rho \sin \varpi \cos (\varphi' - \delta)). \end{aligned}$$

L'angle horaire géocentrique  $H$  du centre de l'astre au temps de l'observation,  $t + C_p$ , est alors  $H = H' \mp s \operatorname{séc} \delta$ ,  $s$  désignant le demi-diamètre apparent géocentrique, et les signes supérieur ou inférieur convenant respectivement à l'observation du premier ou du second bord (le premier bord est le bord occidental, qui passe le premier au méridien). Soit  $\lambda$  la dérivée de l'ascension droite du centre par rapport au temps sidéral; la dérivée analogue de l'angle horaire est  $1 - \lambda$ , et si  $\alpha$  est l'ascension droite géocentrique du centre de l'astre au moment de son passage au méridien, on a donc

$$H = (t + C_p - \alpha) (1 - \lambda),$$

d'où finalement

$$\alpha = t + C_p \pm \frac{s \operatorname{séc} \delta}{1 - \lambda} - \frac{H'}{1 - \lambda}.$$

Supposons maintenant que l'on ait observé en déclinaison le bord Sud ou Nord de l'astre, à un certain moment connu, et soit

$\delta''$  la déclinaison correspondante, corrigée de la réfraction. Pour calculer la réduction au méridien, toujours extrêmement petite ici, on se servira de l'angle horaire du centre au moment de l'observation, et on le confondra avec la quantité  $\varepsilon$  des formules (16),  $m$  étant ici négligeable; d'après ce qui précède, cet angle horaire sera égal au produit de  $1 - \lambda$  par la différence entre le temps de l'observation et le moment du passage du centre au méridien. Appelons alors  $r, s, \delta$ , la distance, le demi-diamètre apparent et la déclinaison géocentriques du centre de l'astre;  $r', s', \delta'$  les mêmes quantités relatives au lieu d'observation (en tenant compte seulement de la parallaxe, et non de la réfraction). On a d'abord

$$r \sin s = r' \sin s';$$

puis, comme on est très près du méridien, les équations générales des problèmes de parallaxe (I, p. 47) donnent

$$\begin{aligned} r' \cos \delta' &= r \cos \delta - a\rho \cos \varphi', \\ r' \sin \delta' &= r \sin \delta - a\rho \sin \varphi'; \end{aligned}$$

on en déduit, en multipliant par  $-\sin \delta''$ ,  $\cos \delta''$ , et ajoutant :

$$r' \sin (\delta' - \delta'') = r \sin (\delta - \delta'') - a\rho \sin (\varphi' - \delta'');$$

mais  $\delta' - \delta'' = \pm s'$  suivant que le bord observé est Sud ou Nord; donc, d'après ce qui a été dit, il vient en divisant par  $r$  :

$$\sin (\delta - \delta'') = \pm \sin s + \rho \sin \varpi \sin (\varphi' - \delta'').$$

Cette relation fournit  $\delta'$ , pour le moment de l'observation.

Soit alors  $\mu$  la dérivée de la déclinaison par rapport au temps sidéral,  $\alpha$  l'ascension droite du centre au moment du passage au méridien,  $t + C_p$  le temps de l'observation; pour avoir la déclinaison géocentrique du centre de l'astre au moment de son passage au méridien, il faudra lui ajouter la correction

$$\mu (\alpha - t - C_p).$$

Ces formules ne doivent être appliquées rigoureusement que pour la Lune dont on ne peut observer qu'un bord, et dont la parallaxe est grande; encore peut-on simplifier un peu leur calcul par des dispositions convenables. Pour les astres comme le Soleil, dont on

peut observer les deux bords, et dont la parallaxe est très petite, il est évident qu'il y aura de nombreuses simplifications, surtout en combinant les observations des deux bords.

**Instrument des passages dans un vertical quelconque ou dans le premier vertical.** — Les qualités de stabilité de l'instrument méridien en font, comme nous l'avons déjà dit, l'instrument par excellence de l'astronomie de précision. Ces qualités subsisteront si l'instrument, au lieu d'être orienté dans le méridien, est orienté dans un plan vertical fixe : ce sera alors en somme un théodolite ou altazimut centré, établi dans un azimut fixe. Le cercle horizontal sera donc supprimé, et l'observation en azimut consistera simplement à noter les temps des passages des astres aux fils verticaux du réticule ; quant au cercle vertical, il pourra exister ou non : s'il existe, on s'en servira comme dans le théodolite.

Examinons le parti que l'on peut tirer des observations en azimut. L'instrument étant de tous points semblable à l'instrument méridien précédemment décrit, appelons  $k$  et  $-i$  l'azimut et la hauteur,  $m$  et  $-n$  l'angle horaire et la déclinaison de la direction  $Oh$  définie par le coussinet fixe  $h$ . On a d'abord entre ces quantités et la latitude  $\varphi$ , les relations

$$\begin{aligned}\sin n &= \sin i \sin \varphi + \cos i \cos k \cos \varphi, \\ \cos n \sin m &= \sin k \cos i, \\ \cos n \cos m &= -\sin i \cos \varphi + \cos i \cos k \sin \varphi,\end{aligned}$$

et la constante  $i$ , toujours très petite, est susceptible d'être déterminée par un nivellement.

Si maintenant l'angle  $h_1Ol$  est toujours  $\frac{\pi}{2} - c$ , on a dans le triangle  $h_1zl$ , et dans la position directe où le tourillon  $h_1$  repose dans le coussinet  $h$  :

$$hl = \frac{\pi}{2} - c, \quad lz = \frac{\pi}{2} - \delta, \quad zh = \frac{\pi}{2} + n, \quad h_1zl = \Pi - m,$$

$\Pi$  étant l'angle horaire de l'astre, d'où la relation

$$\sin c = -\sin n \sin \delta + \cos n \cos \delta \cos (\Pi - m);$$

ce sont là toutes les équations du problème.

Supposons d'abord, pour simplifier, l'inclinaison  $i$  et la collimation  $c$  négligeables ; on aurait simplement

$$\sin n = \cos k \cos \varphi, \quad \cos n \cos m = \cos k \sin \varphi,$$

et par suite

$$\operatorname{tg} \delta \cos m = \operatorname{tg} \varphi \cos (H - m).$$

Cette relation permet de calculer l'une des quantités  $\varphi$ ,  $\delta$  ou  $H$  en fonction des deux autres. Pour connaître les circonstances favorables à cette détermination, différencions en faisant varier ces trois quantités : on a :

$$\frac{2d\delta}{\sin 2\delta} - \frac{2d\varphi}{\sin 2\varphi} + \operatorname{tg} (H - m) dH = 0,$$

avec

$$\operatorname{tg}^2 (H - m) = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \delta \cos^2 m} - 1;$$

o voit par là que si l'on veut déterminer  $H$  en diminuant le plus possible l'influence des erreurs  $d\delta$  et  $d\varphi$  que l'on peut commettre sur la déclinaison et la latitude, il faut que  $\cos m$  soit le plus petit possible ; en d'autres termes l'instrument doit être installé près du méridien : on a le meilleur résultat avec l'instrument méridien. Si au contraire on veut déterminer  $\varphi$  ou  $\delta$  et diminuer le plus possible l'influence de l'erreur sur l'angle horaire,  $\cos m$  devra être le plus grand possible, et l'on devra installer l'instrument dans le voisinage du premier vertical : c'est ce que l'on fait quelquefois. On obtient ainsi de bonnes déterminations de la latitude ou des déclinaisons, en substituant à l'emploi toujours si délicat des cercles divisés, celui plus précis, semble-t-il, de la pendule. Pour certaines recherches particulières sur la variation de la déclinaison d'une étoile, on a employé aussi avec succès l'instrument des passages dans le premier vertical.

Il est facile de voir d'ailleurs que l'on ne peut procéder ainsi commodément que si la latitude n'est pas trop faible.

Tenons compte maintenant de l'inclinaison  $i$  et de la collimation, et nous bornant au cas de l'instrument établi dans le premier vertical, supposons  $k$  petit ainsi que  $i$  et  $c$  ; on aura avec une précision suffisante

$$\sin n = i \sin \varphi + \cos \varphi, \quad \cos n \cos m = -i \cos \varphi + \sin \varphi,$$

et par suite

$$\begin{aligned} \sin c &= -\sin \delta (i \sin \varphi + \cos \varphi) + \frac{\cos \delta \cos (\text{II} - m)}{\cos m} (-i \cos \varphi + \sin \varphi) \\ &= -\sin \delta \cos (\varphi - i) + \frac{\cos \delta \cos (\text{II} - m)}{\cos m} \sin (\varphi - i); \end{aligned}$$

posons alors

$$\begin{aligned} \sin \delta &= f \sin F, \\ \frac{\cos \delta \cos (\text{II} - m)}{\cos m} &= f \cos F, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \sin (\varphi - i) \frac{\cos (\text{II} - m)}{\cos m} &= f' \sin F', \\ \cos (\varphi - i) &= f' \cos F', \end{aligned}$$

en choisissant  $F$  voisin de  $\varphi$ , ou  $F'$  voisin de  $\delta$ ; il vient

$$\sin c = f \sin (\varphi - i - F) = f' \sin (F' - \delta),$$

et par suite, suivant que l'on cherche la latitude ou la déclinaison,

$$\varphi = F + i + \frac{c}{f}, \quad \text{ou} \quad \delta = F' - \frac{c}{f'}.$$

en négligeant les corrections d'ordre supérieur.

L'inclinaison  $i$  est donnée comme nous l'avons dit par un nivellement; la collimation peut être déterminée directement, ou indirectement, ou encore éliminée par le retournement. Si  $t$  est l'heure de l'observation à la pendule sidérale et  $C_p$  la correction de celle-ci,  $\alpha$  l'ascension droite de l'astre, on a  $\text{II} = t + C_p - \alpha$ , et il faut encore connaître la constante  $m$  pour pouvoir faire le calcul. Supposons à cet effet que l'on ait une seconde observation de la même étoile de l'autre côté du méridien; elle fournira une seconde équation de la forme

$$\sin c = -\sin n \sin \delta + \cos n \cos \delta \cos (\text{II}' - m),$$

et par suite, par soustraction, on aura

$$\cos (\text{II} - m) = \cos (\text{II}' - m),$$

$$\text{d'où } m = \frac{\text{II} + \text{II}'}{2}.$$

On voit ainsi que  $m$  dépendra de la correction  $C_p$  de la pendule,



tandis que  $H - m$  n'en dépendra pas ; ceci a peu d'importance puisque  $m$  étant très petit, son cosinus est voisin de 1, et est déterminé avec une précision de beaucoup supérieure à celle de l'arc, de sorte que le calcul pourra être fait exactement avec une valeur approchée de  $C_p$ .

Pour plus de précision on pourra tenir compte de la marche de la pendule dans l'intervalle des deux observations.

Nous n'entrerons pas dans d'autres détails sur l'usage de cet instrument, les réductions des observations aux divers fils exigeant quelques longueurs.

**Méthode de Talcott pour la détermination de la latitude.** — En terminant ce chapitre, nous rattacherons à la théorie du théodolite et de l'instrument méridien l'intéressante méthode de *Talcott* pour la détermination des latitudes ou des déclinaisons. Supposons un théodolite installé dans de bonnes conditions de stabilité, possédant une bonne lunette d'assez grandes dimensions, mais dont les cercles ne sont employés que comme cercles de calage, et non pour faire les mesures ; supposons de plus l'instrument muni d'un micromètre avec fil mobile horizontal mù par une vis très soignée ; enfin le niveau fixé au cercle vertical sera particulièrement bien travaillé et d'une très grande sensibilité.

Dans ces conditions, choisissons deux étoiles  $S$  et  $S_1$  de déclinaisons  $\delta$  et  $\delta_1$ , qui culminent non loin du zénith, mais la première du côté du Sud, la seconde du côté du Nord, à la même hauteur à quelques minutes près, et l'une peu après l'autre. On pourra alors observer facilement les hauteurs méridiennes  $h$  et  $h_1$  de ces deux étoiles, en déplaçant seulement l'instrument en azimut, mais sans toucher aucunement au calage de la lunette. Si par exemple on opère dans la position  $(a)$  de l'instrument, on aura en négligeant les corrections du second ordre, très petites si l'on observe au centre du champ,

$$\begin{aligned} h &= b - b'_0 + y + \omega', \\ h_1 &= b - b'_0 + y_1 + \omega'_1, \end{aligned}$$

d'après les formules générales ;  $b$  désigne la lecture du cercle,  $b'_0$  une constante ;  $y$  et  $y_1$  sont les lectures au micromètre,  $\omega'$  et  $\omega'_1$  les lectures au niveau, toutes réduites en arc. Par suite, il vient

$$h - h_1 = y - y_1 + \omega' - \omega'_1 ;$$

mais, d'après l'hypothèse, on a

$$h = \frac{\pi}{2} - \varphi + \delta, \quad h_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi - \delta_1,$$

et par suite

$$\delta + \delta_1 - 2\varphi = y - y_1 + \omega' - \omega'_1.$$

On a ainsi une relation entre  $\delta$ ,  $\delta_1$  et  $\varphi$  qui est obtenue avec une haute précision, puisqu'elle ne dépend que des lectures du niveau et du micromètre. L'influence de la réfraction est d'ailleurs éliminée, puisqu'on a observé à la même hauteur, et dans les mêmes conditions atmosphériques, les deux observations se succédant à peu de distance l'une de l'autre; pour plus de précision on pourra tenir compte de la réfraction différentielle due à la petite différence  $h - h_1$ . Le fait que les observations sont rapprochées permet encore de compter sur la parfaite stabilité de l'instrument pendant l'opération entière.

On fait l'observation au méridien même: il suffit pour cela de calculer à l'avance les moments des passages des étoiles au méridien. Si l'on était amené à observer en dehors du méridien, mais à peu de distance, il serait toujours facile de réduire les observations à ce qu'elles seraient au méridien, connaissant l'angle horaire. Cette réduction serait différente suivant la méthode employée: si le fil vertical qui définit le centre du champ est fixe dans le méridien, et que l'on observe à quelque distance de ce fil, on fera la réduction au méridien comme dans les observations de déclinaison au méridien; si au contraire l'instrument se déplaçant en azimut, on observe toujours au centre du champ, on réduira la hauteur observée à la hauteur méridienne en procédant comme nous le verrons plus tard au sujet des observations circumméridiennes. Il est clair qu'avec un instrument des passages, muni d'une lunette retournable, on pourra procéder de la même façon, à la condition que le cercle vertical soit muni d'un niveau très sensible.

Comme on le voit, le succès de la méthode tiendra à la perfection du niveau et du micromètre, qui seront étudiés avec le plus grand soin.

Au lieu de faire les observations directement, on pourra les faire photographiquement sur une même plaque dans les deux positions de l'instrument; la mesure du cliché fournira ensuite le résultat cherché.

## CHAPITRE V

### INSTRUMENTS DIVERS

**Sextant.** — Le sextant est un instrument essentiellement portable, susceptible d'être tenu à la main, et destiné à mesurer la distance angulaire de deux directions quelconques. Il offre un avantage capital, qui en fait l'instrument d'observation par excellence à la mer : c'est de représenter à la fois les deux objets dont on cherche la distance, et de les réunir l'un à l'autre indépendamment de tout mouvement de l'observateur.

Un sextant est essentiellement composé d'un secteur divisé AOB (*fig. 36*) dont l'angle est de  $60^\circ$  à  $80^\circ$ . Au centre O et perpendiculairement au plan de ce secteur est disposé un miroir plan M, dit *grand miroir*, qui peut tourner autour de la perpendiculaire en O au plan AOB, dit *plan du sextant*. Sur OB, et toujours perpendiculairement au plan du sextant, est disposé un second miroir plan fixe *m*, dit *petit miroir*, parallèle au rayon OA, origine de la graduation. En face de ce miroir *m* est disposée une lunette fixe L, dont l'axe optique parallèle au plan du sextant sert de ligne de visée.

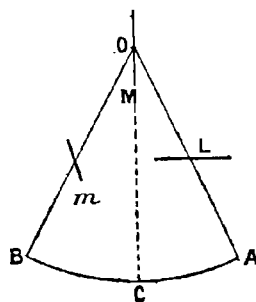


FIG. 36

Le miroir M a sa face réfléchissante tournée du côté de OB ; quant au miroir *m*, il est réfléchissant sur une de ses moitiés seulement, et transparent sur l'autre, de façon que l'on puisse recevoir dans la lunette des rayons réfléchis sur ce miroir et des rayons qui le traversent ; la face réfléchissante est tournée vers la lunette. Enfin le grand miroir est porté par une alidade OC, et le secteur est

graduée de telle façon qu'en C on lise, à l'aide d'un vernier, non pas l'angle AOC, mais le double de cet angle : en d'autres termes les chiffres de la graduation correspondent au double de la valeur réelle des divisions : cet angle AOC est d'ailleurs l'angle des deux miroirs.

Supposons alors que la lecture du sextant soit  $\alpha$ , (*fig. 37*) de sorte que l'angle des deux miroirs est  $\frac{\alpha}{2}$ ; on aperçoit directement dans la lunette un objet quelconque S' situé dans la direction de la ligne de visée; mais on aperçoit aussi l'image d'un objet S, qui envoie

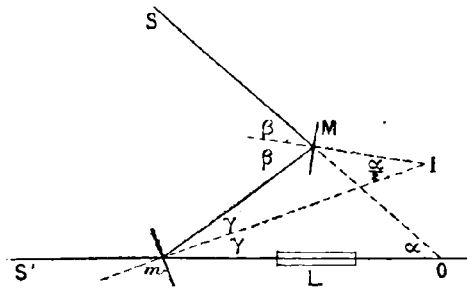


FIG. 37

des rayons doublement réfléchis d'abord sur le miroir M, puis sur le miroir  $m$ , comme l'indique la figure. Soit I le point de rencontre des normales aux deux miroirs, O le point de rencontre de MS avec  $mS'$ ;  $\beta$  et  $\gamma$  les angles d'incidence ou réflexion en M et  $m$ :

L'angle en I est  $\frac{\alpha}{2}$  par hypothèse; alors les triangles  $IMm$ ,  $OMm$  donnent

$$\beta = \frac{\alpha}{2} + \gamma, \quad \widehat{SOS'} = 2\beta - 2\gamma = \alpha;$$

la lecture  $\alpha$  du sextant est donc l'angle des deux directions des objets S et S', vus respectivement des points M et  $m$ , ou de tout même point voisin, si comme nous le supposons, ces objets sont à une distance infinie par rapport aux dimensions de l'instrument.

Inversement, pour déterminer la distance des objets S et S', on visera S' directement à travers le petit miroir  $m$ , puis plaçant le plan du sextant parallèlement au plan qui contient l'objet S et la ligne de visée, on fera mouvoir le grand miroir M jusqu'à ce que l'image de S coïncide avec celle de S' : la lecture du sextant sera alors la distance cherchée.

L'angle  $\gamma$  est fixe, en général  $15^\circ$  environ ; la plus grande distance que l'on puisse mesurer avec l'instrument correspond à l'incidence rasante sur M, soit  $\beta = \frac{\pi}{2}$  ; c'est donc  $\pi - 2\gamma$ . Si la graduation du cercle est prolongée au-delà de A, en sens contraire, on peut supposer que l'on mesure des distances  $\alpha$  négatives, en prenant alors la lecture négativement : l'angle S'OS serait alors de sens contraire à celui qu'il a généralement. La distance limite que l'on peut ainsi mesurer théoriquement correspond à l'incidence normale en M, et alors  $\alpha = -2\gamma$ . Mais ceci ne pourrait être réalisé pratiquement, et l'on se contente de graduer ainsi au-delà de A une petite portion du cercle, quelques degrés au plus : c'est l'*excédant*.

Le sextant n'est évidemment pas un instrument de haute précision : cependant il peut donner d'excellents résultats entre les mains d'un observateur habile et exercé.

Pour faire la théorie du sextant, c'est-à-dire étudier l'influence des défauts d'installation de l'instrument sur les mesures, nous supposons d'abord que la lecture  $\alpha$  fournit exactement le double de l'angle des deux miroirs, et que ceux-ci se comportent effectivement comme des miroirs théoriquement parfaits.

D'un point fixe quelconque O comme centre décrivons une sphère (*fig. 38*) ; la trace sur cette sphère d'un plan mené par O parallèlement au plan du sextant est un grand cercle de pôle  $z$  ; pro-

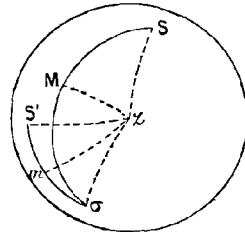


FIG. 38

jetons de même sur la sphère du point O comme centre la direction de la ligne de visée en  $S'$ , celle de la normale au petit miroir, prise dans le sens  $Im$ , en  $m$  ; celle du rayon intermédiaire  $Mm$  en  $\sigma$  ; celle de la normale au grand miroir prise dans le sens  $IM$  en  $M$  ; enfin celle de l'objet  $S$  en  $S$ . Si l'instrument était parfaitement installé, tous ces points seraient sur le grand cercle de pôle  $z$ ,  $m$  et  $M$  étant les milieux de  $S'\sigma$  et  $S\sigma$  (*fig. 39*) ; mais s'il n'en est pas ainsi, ces différents points seront seulement voisins du grand cercle de pôle  $z$ , et d'après

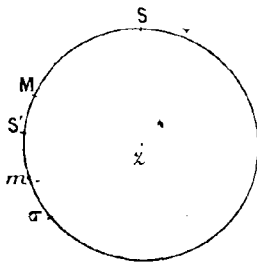


FIG. 39

les hypothèses faites,  $m$  et  $M$  seront toujours les milieux des arcs de grand cercle  $S'\sigma$  et  $S\sigma$ , et la demi-lecture  $\frac{\alpha}{2}$  sera l'angle  $mzM$ . Si  $\frac{\pi}{2} - i$ ,  $\frac{\pi}{2} - j$ ,  $\frac{\pi}{2} - k$ , sont les arcs  $zM$ ,  $zm$ ,  $zS'$ , les petites quantités  $i$ ,  $j$ ,  $k$  sont les constantes instrumentales ; elles mesurent l'inclinaison sur le plan du sextant des normales au grand et au petit miroir, et de la ligne de visée respectivement.

Le problème consiste à calculer la distance  $SS'$  connaissant  $\alpha$ ,  $i$ ,  $j$ ,  $k$ .

Nous appellerons  $\gamma$  l'arc constant  $S'm = m\sigma$ , et nous ferons

$$\beta = \sigma M = MS, \quad z\sigma = \frac{\pi}{2} - \omega, \quad zS = \frac{\pi}{2} - h.$$

Si l'on considère d'abord les deux triangles  $zS'm$ ,  $z\sigma m$ , ils donnent

$$\begin{aligned} \sin k &= \cos \gamma \sin j + \sin \gamma \cos j \cos S'mz, \\ \sin \omega &= \cos \gamma \sin j + \sin \gamma \cos j \cos \sigma mz, \end{aligned}$$

et par suite

$$\sin k + \sin \omega = 2 \cos \gamma \sin j,$$

d'où, en négligeant les quantités du troisième ordre par rapport à  $i$ ,  $j$ ,  $k$  :

$$\omega + k = 2j \cos \gamma ;$$

pour la même raison, on aura

$$\omega + h = 2i \cos \beta.$$

Le triangle  $mz\sigma$  donne encore :

$$\cos \gamma = \sin j \sin \omega + \cos j \cos \omega \cos mz\sigma ;$$

d'où l'on tire

$$\gamma = mz\sigma + \left( \frac{j^2 + \omega^2}{2} \cotg \gamma - j\omega \operatorname{cosec} \gamma \right).$$

Pour la même raison

$$2\gamma = S'z\sigma + \left( \frac{k^2 + \omega^2}{2} \cotg 2\gamma - k\omega \operatorname{cosec} 2\gamma \right),$$

et l'on a successivement d'une façon analogue ou directement :

$$\begin{aligned} M\hat{z}\sigma &= \frac{\alpha}{2} + m\hat{z}\sigma, \\ \beta &= M\hat{z}\sigma + \frac{i^2 + \omega^2}{2} \cotg\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) - i\omega \operatorname{coséc}\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right), \\ 2\beta &= S\hat{z}\sigma + \frac{h^2 + \omega^2}{2} \cotg(\alpha + 2\gamma) - h\omega \operatorname{coséc}(\alpha + 2\gamma), \\ S\hat{z}S' &= S\hat{z}\sigma - S'\hat{z}\sigma, \\ SS' &= S\hat{z}S' + \frac{h^2 + k^2}{2} \cotg \alpha - hk \operatorname{coséc} \alpha; \end{aligned}$$

il en résulte donc

$$\begin{aligned} SS' &= \alpha + \left(\frac{h^2 + k^2}{2} \cotg \alpha - hk \operatorname{coséc} \alpha\right) \\ &\quad - \left(\frac{h^2 + \omega^2}{2} \cotg(\alpha + 2\gamma) - h\omega \operatorname{coséc}(\alpha + 2\gamma)\right) \\ &\quad + \left(\frac{k^2 + \omega^2}{2} \cotg 2\gamma - k\omega \operatorname{coséc} 2\gamma\right) \\ &\quad + 2\left(\frac{i^2 + \omega^2}{2} \cotg\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) - i\omega \operatorname{coséc}\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right)\right) \\ &\quad - 2\left(\frac{j^2 + \omega^2}{2} \cotg \gamma - j\omega \operatorname{coséc} \gamma\right); \end{aligned}$$

éliminant  $\omega$  et  $h$ , il vient finalement, après réductions :

$$\begin{aligned} SS' &= \alpha - k^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 2i^2 \operatorname{coséc} \alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma\right) \\ &\quad + 2j^2 \operatorname{coséc} \alpha \cos \gamma \cos(\alpha - \gamma) + 2ik \operatorname{séc} \frac{\alpha}{2} \sin \gamma \\ &\quad + 2jk \operatorname{séc} \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma\right) - 4ij \operatorname{coséc} \alpha \cos \gamma \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma\right). \end{aligned}$$

Cette formule montre que l'influence des erreurs  $i$ ,  $j$ ,  $k$  est toujours très petite et même négligeable dès que l'instrument est convenablement réglé. On pourrait craindre cependant que l'erreur devînt grande pour  $\alpha$  petit; mais alors, le procédé employé devient illusoire. On peut remarquer d'ailleurs que la difficulté disparaît si  $i = j$ , et cette condition est très près d'être vérifiée par le réglage.

Examinons maintenant les autres causes d'erreur. Le grand miroir M est une lame de verre V, à deux faces planes E et I (*fig.* 40), la première extérieure, la seconde intérieure, et cette dernière seule

réfléchissante. Un rayon lumineux issu de S tombe en P sur la face E et s'y réfracte, puis se réfléchit en Q sur la face I, et se réfracte

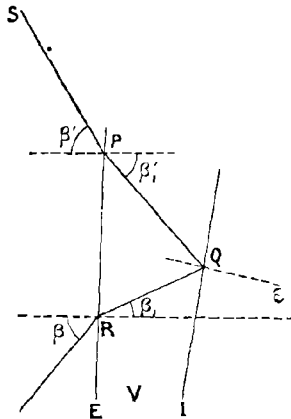


FIG. 40

à nouveau en R sur la face E. Désignons par  $\beta$  l'angle d'incidence extérieur en R, par  $\beta'$  l'angle d'incidence analogue en P; nous avons fait en somme l'hypothèse  $\beta' = \beta$ , ce qui n'est vrai que si les deux faces E et I du miroir sont rigoureusement parallèles. S'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire si le miroir a une forme légèrement prismatique (au sens physique du mot), il est clair qu'il faut augmenter la lecture du sextant de la différence  $\beta' - \beta$  pour avoir la véritable distance cherchée  $SS'$ , l'installation de l'instrument restant parfaite par ailleurs.

Appelons  $n$  l'indice de réfraction par rapport à l'air du verre qui constitue M;  $\varepsilon$  l'angle toujours très petit du prisme formé par M, c'est-à-dire l'angle des deux faces E et I, pris positivement dans le cas de la figure, où le rayon issu de S entre dans la partie la plus épaisse du miroir, et négativement dans le cas contraire;  $\beta_1$  et  $\beta'_1$  les angles de réfraction en R et P. Les angles d'incidence et de réflexion en Q sont respectivement  $\beta'_1 - \varepsilon$  et  $\beta_1 + \varepsilon$ ; par suite on a les équations

$$\sin \beta = n \sin \beta_1, \quad \sin \beta' = n \sin \beta'_1, \quad \beta_1 + \varepsilon = \beta'_1 - \varepsilon.$$

Donc, en négligeant le carré de  $\varepsilon$ , il vient

$$\begin{aligned} \sin \beta' &= n \sin (\beta_1 + 2\varepsilon) = \sin \beta + 2n\varepsilon \cos \beta_1, \\ \beta' - \beta &= 2n\varepsilon \frac{\cos \beta_1}{\cos \beta} = 2\varepsilon \sqrt{1 + (n^2 - 1) \sec^2 \beta}, \end{aligned}$$

et comme, avec les notations employées plus haut,  $\beta = \frac{\alpha}{2} + \gamma$ , la correction de la lecture deviendra

$$\beta' - \beta = 2\varepsilon \sqrt{1 + (n^2 - 1) \sec^2 \left( \frac{\alpha}{2} + \gamma \right)};$$

l'indice  $n$  du verre est d'ailleurs  $\frac{3}{2}$  environ.



On voit que cette correction est du premier ordre par rapport à  $\varepsilon$ , et peut grandir notablement avec la distance mesurée  $z$ .

On pourrait raisonner de même sur le petit miroir, supposé aussi de forme légèrement prismatique; mais ce serait sans intérêt, parce que la correction qui en résulterait serait constante, indépendante de  $z$ , et par suite affecterait de même toutes les lectures, ce qui n'a pas d'inconvénient, ainsi qu'on le verra plus loin.

Enfin, il faut observer que la lecture ne fournira l'angle désigné réellement par  $z$  qu'à une constante près, si l'origine de la graduation ne correspond pas rigoureusement à la position de parallélisme des deux miroirs; qu'elle sera affectée des erreurs de graduation, et aussi de l'erreur d'excentricité, si l'axe de rotation du grand miroir ne passe pas rigoureusement par le centre de la graduation.

La ligne de visée d'un sextant n'a pas besoin d'être définie avec une grande précision, puisque l'erreur produite par son inclinaison sur le plan du sextant n'est que du second ordre. Aussi se contente-t-on d'observer la coïncidence des deux images vers le centre du champ; pour plus de commodité, on place dans le plan focal un réticule composé de quatre fils rectangulaires et parallèles définissant un carré, et c'est toujours vers le centre de ce carré que l'on observe; pour faciliter certaines observations, on place deux des fils parallèlement au plan du sextant.

Dans tout ce qui précède nous avons supposé les objets S et S' à distance infinie; il n'en est pas toujours ainsi. Imaginons donc que S' étant à une distance quelconque et l'objet S à une distance finie, on veuille avoir la distance angulaire SS' vue du centre  $m$  du petit miroir; il faudra faire subir à la lecture  $z$  une petite correction, dite *correction de parallaxe*.

Pour la déterminer, considérons le triangle SMm (*fig. 41*); il est clair que l'angle  $Sms'$  est égal à l'angle de SM avec S'm, soit  $z$ , augmenté de l'angle en S. Soit alors  $Sm = d$ ,  $Mm = e$ ; on a

$$\sin S = \frac{e}{d} \sin 2\beta,$$

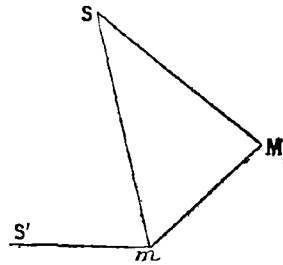


FIG. 41

et par suite, avec une approximation toujours suffisante

$$S = \frac{e}{d} \sin (\alpha + 2\gamma).$$

**Usage du sextant.** — La méthode d'observation avec le sextant résulte immédiatement de ce que nous avons dit : quelques indications complémentaires très succinctes suffiront, sans entrer dans les détails que la pratique seule peut rendre intéressants. L'objet le plus brillant est toujours celui que l'on observe par double réflexion, à cause de la perte de lumière ainsi produite. Dans les observations du Soleil, ou de la pleine Lune, il est nécessaire d'affaiblir l'éclat des images : on y arrive, soit à l'aide d'un oculaire spécial, soit à l'aide de verres colorés diversement teintés que l'on place convenablement sur le trajet des rayons lumineux. Il faut aussi, pour faire de bonnes observations, donner aux deux images très sensiblement le même éclat : on y arrive à l'aide des mêmes verres, ou encore en déplaçant quelque peu la lunette latéralement, de façon que son objectif ne reçoive pas la même quantité de rayons directs et de rayons réfléchis. Les verres colorés doivent être à faces parfaitement parallèles; sinon, ils produiraient des erreurs analogues à celle que nous avons calculée en supposant le miroir de forme légèrement prismatique.

Pour observer une hauteur, on mesurera la plus courte distance de l'objet à l'horizon : on s'assurera qu'on est dans la position convenable lorsqu'en balançant l'instrument autour de la lunette, l'image de l'objet  $S$  semble décrire une courbe tangente à l'image de la ligne d'horizon, prise pour  $S'$ . Ceci ne peut se faire qu'en mer, et quand la ligne d'horizon est nettement définie : encore faudra-t-il tenir compte de la dépression de l'horizon.

On détermine encore une hauteur à l'aide d'un horizon artificiel, bain de mercure ou glace rendue horizontale par un nivellement. En mesurant la distance de l'objet à son image réfléchie sur l'horizon artificiel, il est clair qu'on obtiendra la double hauteur de l'objet.

Souvent, on observe la hauteur maxima d'un astre; on suit alors le mouvement de l'astre, en le ramenant tangent à l'horizon ou en coïncidence avec son image réfléchie, jusqu'à ce que change le sens du mouvement qu'il faut à cet effet imprimer au grand miroir : il est évident que l'on obtient ainsi la hauteur maxima.

Le sextant doit être bien réglé, car on ne tient pas compte des erreurs dues aux inclinaisons  $i$ ,  $j$ ,  $k$ . On rend le grand miroir perpendiculaire au plan du sextant en se servant de deux viseurs bien égaux (fig. 42) : un viseur est un angle dièdre droit, dont les faces sont des rectangles égaux. On place l'alidade au milieu du sextant, la lunette étant retirée; puis on dispose deux viseurs égaux sur le limbe, symétriquement par rapport au plan du grand miroir. On peut alors, en plaçant convenablement l'œil, voir l'un des viseurs directement et l'autre par réflexion : il faut, si le miroir est perpendiculaire au plan du sextant, que les arêtes supérieures, telles que AB, des deux viseurs ainsi observés, paraissent dans le prolongement l'une de l'autre; cette condition est d'ailleurs suffisante.

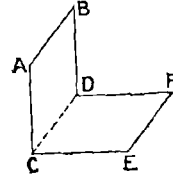


FIG. 42

Le grand miroir M étant réglé, il suffira pour régler le petit  $m$ , de faire en sorte que M puisse être placé parallèlement à  $m$ . Pour cela, il est nécessaire et suffisant que l'image directe et l'image par réflexion d'un même objet très éloigné puissent être mises en coïncidence, de façon à se recouvrir parfaitement.

Pour rendre la ligne de visée parallèle au plan du sextant, on pose celui-ci sur une table horizontale, et l'on marque deux points qui soient situés à des distances différentes, mais qui aient une même hauteur au-dessus du plan du sextant, environ celle du centre du grand miroir M : ces deux points doivent produire leurs images directes à la même place dans le champ.

Les erreurs d'excentricité et de graduation sont étudiées empiriquement comme nous l'avons dit à propos des cercles divisés, en mesurant avec l'instrument des angles différents, parfaitement connus : on ne peut les éliminer ici à l'aide de verniers opposés, la disposition de l'instrument ne le permettant pas.

L'erreur due à la forme prismatique du grand miroir ou des verres colorés peut être éliminée, s'il y a lieu, en les retournant convenablement; nous avons vu en effet qu'elle changeait de signe avec l'angle  $\varepsilon$ . Mais la plupart du temps, les verres sont assez parfaits pour qu'il n'y ait pas lieu de s'arrêter à ces précautions.

Il ne nous reste plus qu'à dire comment on détermine l'erreur instrumentale ou erreur de collimation  $\alpha_0$ , c'est-à-dire la lecture qui correspond à la position de parallélisme des miroirs : cette

lecture doit être retranchée de toute autre lecture pour fournir la distance  $z$  correspondante. On peut chercher, comme plus haut, la position de  $M$  telle que les deux images d'un même objet très éloigné se recouvrent exactement. On obtient plus de précision en observant le Soleil de la façon suivante.

Si l'on amène l'image directe du Soleil en contact avec son image doublement réfléchi, il est clair que l'angle  $z$  correspondant, corrigé de l'erreur de collimation, et pris en valeur absolue, mesure le diamètre apparent  $2s$  du Soleil. Or, ceci peut se réaliser de deux façons, en intervertissant la disposition des deux images ; si donc  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les deux lectures instrumentales, on aura par exemple

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 2s \quad \alpha_2 - \alpha_0 = -2s, \quad \text{et par suite } \alpha_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Comme vérification, on a aussi  $\alpha_1 - \alpha_2 = 4s$ , et l'on comparera ce résultat avec la valeur de  $s$  fournie par les éphémérides. La correction  $\alpha_0$  étant toujours petite, il faudra avoir soin de tenir compte des signes de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Pour plus de précision, on mesurera ainsi le diamètre horizontal du Soleil, plutôt que le diamètre vertical, afin d'éviter l'influence de la réfraction : il suffira à cet effet de rendre horizontale la distance des centres des images. Enfin, comme toujours, l'observation devra être répétée plusieurs fois.

La lecture  $\alpha_0$  étant ainsi déterminée à l'aide de l'observation, tout comme une autre lecture, on voit qu'il n'y a pas lieu de tenir compte d'une imperfection instrumentale produisant une erreur constante ; et pour tenir compte d'une imperfection instrumentale produisant une erreur variable avec la lecture, soit  $f(\alpha)$ , il faudra prendre pour lecture définitivement corrigé  $\alpha - \alpha_0 + f(\alpha) - f(\alpha_0)$ .

**Cercle à réflexion.** — Nous ne dirons que quelques mots, ainsi que l'avons déjà annoncé, au sujet de quelques instruments intéressants, mais d'un usage moins général que ceux que nous avons étudiés en détail. Le cercle à réflexion est de tout point analogue au sextant : mais au lieu d'un simple secteur, l'instrument comporte un cercle entier divisé de  $0^\circ$  à  $720^\circ$ , d'après ce qui a été dit sur le mode de graduation ; de plus le petit miroir, toujours solidaire de la lunette, n'est plus fixé à l'instrument, mais peut se déplacer. On peut se servir du cercle à réflexion comme du sextant : il suffit de déterminer la lecture  $\alpha_0$  qui correspond au parallélisme

des miroirs, et de laisser ensuite fixe le petit miroir : si l'on peut faire la lecture  $\alpha$  avec deux verniers opposés, on éliminera l'erreur d'excentricité. Mais le principal avantage de l'instrument est de permettre la répétition, ce qui peut se faire par observations directes ou par observations croisées. Nous supposons toujours, comme dans ce qui précède, que l'objet S est à droite de l'observateur, l'objet S' à gauche. Pour opérer directement, soit  $\alpha_0$  la lecture pour une position quelconque du grand miroir M ; visons alors S' directement, et déplaçons la lunette et le petit miroir  $m$  jusqu'à ce que les deux images directe et doublement réfléchie de S' viennent en coïncidence, et fixons le petit miroir en cette position, de sorte qu'il est alors parallèle à M. Déplaçons maintenant M jusqu'à ce que l'image directe de S' coïncide avec l'image doublement réfléchie de S ; si  $\alpha_1$  est alors la lecture, la distance SS' est  $\alpha_1 - \alpha_0$ .

Recommençons maintenant toute l'opération exactement de la même façon ; on amène de nouveau  $m$  à être parallèle à M, puis on déplace M ; la nouvelle lecture étant  $\alpha_2$ , la distance SS' est encore  $\alpha_2 - \alpha_1$ . Si l'on fait  $n$  opérations semblables, il est clair que la distance cherchée sera  $\frac{\alpha_n - \alpha_0}{n}$ , et qu'il suffira d'avoir fait les lectures  $\alpha_0$  et  $\alpha_n$ .

Pour opérer par observations croisées, supposons que  $\alpha_1$  soit la lecture pour une position initiale quelconque de M ; visons directement S, et déplaçons  $m$  jusqu'à ce que l'image de S coïncide avec l'image doublement réfléchie de S' : si  $\alpha_0$  désignait la lecture correspondant au parallélisme de M avec  $m$  dans sa position actuelle, la distance SS' serait ici  $\alpha_0 - \alpha_1$ , puisqu'on a visé directement l'objet de droite. Le petit miroir restant fixe, visons maintenant S' directement, et déplaçons M de façon que l'image de S' coïncide avec l'image doublement réfléchie de S ; si  $\alpha_2$  est la lecture correspondante, la distance SS' sera cette fois  $\alpha_2 - \alpha_0$  ; par suite la double distance sera  $\alpha_2 - \alpha_1$ . On pourra recommencer de la même façon  $n$  fois, et la différence des lectures extrêmes,  $\alpha_{n+1} - \alpha_1$ , représentera  $2n$  fois la distance cherchée. Cette seconde méthode donne l'angle double par deux pointés, tandis que dans la première, deux pointés sont nécessaires pour chaque angle simple. Au surplus, nous renverrons à ce que nous avons déjà dit à propos de la méthode de répétition.

**Héliomètre.** — L'héliomètre est un équatorial destiné aux mesures différentielles ; mais ici l'appareil micrométrique est porté par l'objectif et non par l'oculaire. A cet effet l'objectif de la lunette a été scié, suivant un plan passant par l'axe optique, en deux moitiés qui peuvent être déplacées l'une le long de l'autre au moyen de vis micrométriques (*fig. 43*). Lorsque les deux moitiés de l'objectif sont dans leur position primitive, elles fournissent une seule image d'un astre ; mais si on les déplace l'une par rapport à l'autre, cette image unique se dédouble, chacune des moitiés en donnant une séparément.

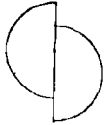


Fig. 43

L'héliomètre sert à déterminer l'angle de position et la distance de deux astres voisins. Pour y parvenir, on place d'abord les deux demi-objectifs dans leur position primitive, et l'on fait tourner le système d'un angle que l'on peut mesurer avec un cercle de position, de façon que la ligne de section devienne parallèle à la ligne qui joint les images des deux astres. On déplace ensuite l'une des moitiés de l'objectif, ou les deux, et alors le premier astre fournit deux images  $a$  et  $a'$ , le second en donne deux aussi  $b$  et  $b'$ ,  $a$  et  $b$  d'un côté,  $a'$  et  $b'$  de l'autre correspondant à une même demi-lentille. On fait alors coïncider  $a$  avec  $b'$  ou  $b'$  avec  $a$ , et il est clair que le mouvement relatif des deux demi-objectifs, mesuré par les vis, est propre à déterminer la distance des deux astres, de même que l'orientation de l'objectif fournira l'angle de position. Il vaut mieux, comme le montrerait la théorie, établir la coïncidence des deux images sur l'axe optique même de l'objectif complet, et c'est pour cette raison que l'on ne se contente pas de déplacer l'une des demi-lentilles, mais que l'on fait mouvoir les deux à la fois de quantités égales et de sens contraires. On voit que l'héliomètre, et c'est là son avantage spécial, permet de mesurer d'assez grandes distances, même avec un oculaire à fort grossissement qui ne donnerait qu'un champ très réduit, puisqu'il suffit d'observer un seul point du champ, celui où s'établit la coïncidence. D'autre part, l'instrument offre des inconvénients évidents au point de vue optique.

L'héliomètre est particulièrement approprié à la mesure du diamètre du Soleil, d'où son nom ; à cet effet, on amènera les deux images du Soleil à être tangentes entre elles.

**Sidérostat.** — Les observations à l'équatorial sont souvent peu commodes. Pour y remédier, on a construit des instruments dont nous indiquerons seulement le principe, dans lesquels l'observateur reste fixe, les rayons lumineux étant ramenés par un dispositif convenable suivant une direction invariable. Voici le principe du sidérostat ou héliostat. Les rayons issus de l'astre  $S$  sont reçus sur un miroir  $M$ , réfléchis dans une direction fixe  $MR$  (*fig. 44*) et recueillis dans une lunette; on peut suivre l'astre dans son mouvement diurne en imprimant au miroir un mouvement convenable à l'aide du dispositif suivant par exemple. Soit  $O$  un point fixe pris sur  $MR$  derrière le miroir du centre  $M$ ; par  $O$  menons la parallèle au rayon

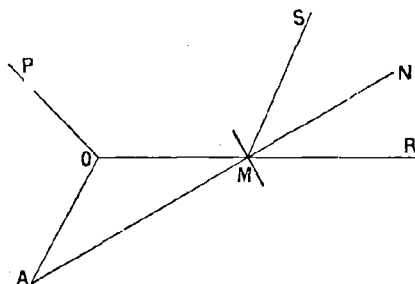


Fig. 44

incident  $SM$ , qui rencontre la normale  $MN$  au miroir en  $A$  : le triangle  $OAM$  est isocèle évidemment. Réciproquement, supposons que  $OA$  soit assujéti à tourner autour de la parallèle  $OP$  à l'axe du monde passant par  $O$ , en faisant avec  $OP$  un angle constant égal à la distance polaire de l'astre  $S$ , et de façon que le plan  $OAP$  contienne constamment la direction de l'astre  $S$  : ce mouvement est facilement réalisable à l'aide d'un mécanisme d'horlogerie et une monture parallactique, comme dans le cas d'un équatorial. Si alors l'axe  $MN$  du miroir est assujéti à rencontrer toujours  $OA$  au point  $A$  tel que  $OA = OM$ , par une liaison convenable, il est clair que les rayons issus de  $S$  se réfléchiront sur  $M$  suivant  $MR$ .

Si la lunette est dirigée suivant l'axe du monde, l'appareil se simplifie et devient le *sidérostat polaire* : la direction  $MN$  de l'axe du miroir fait un angle constant avec celle de l'axe du monde, de sorte que le miroir tourne simplement autour de la ligne des pôles.

Dans un sidérostat réglé sur un astre donné, cet astre seul reste immobile ; l'image du ciel semble tourner autour.

**Cœlostât.** — Le cœlostât comporte essentiellement un miroir mobile, contenant la direction de l'axe du monde, et tournant autour de cet axe avec une vitesse moitié moindre que celle du mouvement diurne, de sorte qu'une rotation complète est effectuée en 48 heures sidérales. Il est clair que dans ces conditions l'image d'un point quelconque du ciel reste immobile. On peut alors orienter le miroir de façon à recevoir l'image d'un astre donné dans une lunette horizontale, ce qui facilite les observations.

**Équatorial coudé.** — L'équatorial coudé a été imaginé par M. Lœwy. En voici le principe : une lunette astronomique est mobile dans le plan de l'équateur, et un miroir plan est placé en avant de l'objectif, incliné à  $45^\circ$  sur l'axe de la lunette, mobile d'ailleurs autour de cet axe. Ce miroir renvoie dans la direction de l'axe de la lunette les rayons qui proviennent, suivant sa position, des divers points du ciel situés dans le cercle horaire perpendiculaire à celui qui contient la lunette. Enfin, un second miroir invariablement lié à la lunette, incliné à  $45^\circ$  sur son axe et sur la ligne des pôles, renvoie les rayons lumineux suivant l'axe du monde, de façon que l'oculaire de l'instrument soit installé à demeure. L'instrument entier étant entraîné par un mouvement d'horlogerie, l'image d'un même astre sera constamment visible.

Pratiquement on est amené à placer l'objectif le premier sur le trajet des rayons lumineux, pour soustraire le premier miroir à l'action dangereuse des agents atmosphériques.

**Astrolabe à prisme.** — Cet instrument, portatif et d'un emploi particulièrement commode, est dû à MM. Claude et Driencourt. Il sert à observer l'instant où la hauteur apparente d'un astre atteint une valeur rigoureusement invariable, voisine de  $60^\circ$ , et de cette façon permet d'appliquer la méthode des hauteurs égales qui sera développée plus loin. Malgré ses petites dimensions, il fournit facilement des résultats d'une haute précision, comparable à celle des instruments méridiens, et il a l'avantage de ne pas exiger de lectures de cercles, mais seulement l'appréciation du temps.

Devant l'objectif d'une lunette horizontale L, est placé un prisme de verre équiangle, dont l'une des faces, BC, est perpendiculaire à l'axe optique de la lunette (*fig. 45*). Un astre S (*fig. 46*) situé à la hau-



teur de  $60^\circ$  dans le plan vertical de cet axe optique envoie des rayons qui pénètrent normalement dans le prisme par la face AB, vont subir la réflexion totale sur la face AC, et sortent enfin normalement par la face BC, suivant l'axe de la lunette. Si maintenant on place un bain de mercure devant l'appareil, l'image  $S'$  de l'astre dans ce bain envoie des rayons qui se comportent comme les précédents, le rôle des faces AB et AC étant renversé. On a donc dans la lunette les deux images de  $S$  et  $S'$  qui sont confondues ou du moins très près de l'être. On observe l'instant où les images passent au centre du champ à la même hauteur, et l'on a ainsi le temps où l'astre  $S$  a une certaine hauteur, non pas rigoureusement égale à  $60^\circ$  à cause des imperfections de l'appareil, mais très voisine ; opérant de

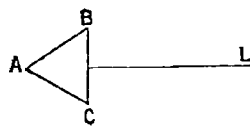


FIG. 45

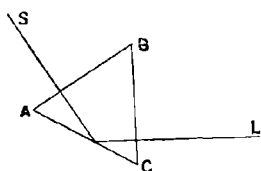


FIG. 46

même sur d'autres astres, on aura les moments où ils ont, rigoureusement, cette fois, la même hauteur que le premier.

On voit qu'un nouvel avantage de l'instrument résulte de ce que la réfraction n'intervient que par ses variations suivant les conditions météorologiques, puisque l'on observe toujours à la même hauteur : ces variations sont d'ailleurs très petites, puisque la hauteur est grande.

**Astrophotographie.** — Nous ne citerons ici que pour mémoire cette branche de l'Astronomie pratique, qui prend chaque jour plus d'extension. D'une façon générale, les équatoriaux, ou bien les sidérostats et célostats, sont les instruments que l'on emploie pour photographier les astres ; les objectifs des lunettes doivent être des objectifs spéciaux, et la plaque photographique est placée au foyer. Dans l'équatorial photographique de MM. Henry, employé pour la Carte du Ciel, on trouve deux lunettes accolées l'une à l'autre : la première est photographique, la seconde est une lunette ordinaire, qui sert à maintenir la pose : à cet effet on entraîne l'appareil à l'aide du mouvement d'horlogerie, et pour remédier aux imperfections de ce mouvement, on maintient constamment, à l'aide des vis de rappel, une même étoile de repère au centre du

champ, à la croisée des fils d'un réticule. De cette façon, la plaque photographique suit rigoureusement le mouvement diurne, et l'on peut prolonger les poses autant qu'on le veut, en les partageant même en plusieurs séances, si l'on veut leur donner une très longue durée.

Les clichés obtenus sont ensuite mesurés à l'aide d'appareils micrométriques, et les différentes étoiles qui s'y trouvent sont rapportées à quelques unes d'entre elles, parmi les plus brillantes, dites étoiles de repère, et dont la position est déterminée par ailleurs avec précision à l'aide d'observations méridiennes.

---

## LIVRE III

---

### LES OBSERVATIONS

#### CHAPITRE VI

---

#### DÉTERMINATION DES CONSTANTES FONDAMENTALES DE L'ASTRONOMIE

**Constantes de l'Astronomie.** — L'objet propre de l'Astronomie est la connaissance de l'univers et des lois de son mouvement. Laissant ici de côté une branche importante, l'Astrophysique, qui s'occupe de la constitution même des astres, on peut dire que le problème fondamental est celui-ci, ainsi que nous l'avons déjà indiqué : savoir déterminer les apparences des astres à un instant donné et dans un lieu donné. Une fois d'ailleurs ce problème résolu, un autre se présente, qui en est l'inverse : d'après les apparences des astres à une certaine époque et en un certain lieu, déterminer cette époque et ce lieu. Ce second problème est l'objet propre de l'*Astronomie géographique ou nautique*, et nous le traiterons dans le Chapitre suivant.

Pour arriver à la solution du problème fondamental, il faut, comme nous l'avons vu dans la première partie de ce Cours, faire d'abord certaines hypothèses suggérées par l'expérience, et accepter les résultats purement théoriques qui en découlent, et qui appartiennent à proprement parler à la Physique, à la Géodésie, et surtout à la Mécanique Céleste.

Ces résultats admis, on peut alors, et c'est ce que nous avons fait dans l'Astronomie théorique, résoudre les différents problèmes particuliers qui se présentent relativement à l'apparence des astres. Les solutions, pour pouvoir être traduites en nombres et acquérir ainsi une valeur pratique, nécessitent la connaissance de certains nombres fixes, les *Constantes de l'Astronomie*.

Les observations ont pour but la détermination de ces constantes, et aussi la vérification des hypothèses admises comme point de départ. Laissant ici de côté ce dernier point de vue, nous nous occuperons uniquement dans ce Chapitre de la détermination des constantes de l'Astronomie.

Chaque observation précise, réduite comme nous l'a appris la théorie des instruments, et comparée à la théorie, fournit une relation entre diverses constantes : on conçoit donc sans peine que la détermination des différentes constantes inconnues de l'Astronomie sera un problème d'approximations successives. Leurs valeurs résulteront d'un grand nombre d'observations combinées entre elles de la façon la plus convenable, et la précision de ces valeurs sera limitée par celle des observations ; pour discuter cette précision, on devra donc s'appuyer sur la théorie des erreurs d'observation, sans oublier toutefois que les conclusions auxquelles conduit cette théorie sont plus d'une fois illusoire.

Pour déterminer une constante particulière, il faudra évidemment, d'une façon générale, grouper ensemble un grand nombre d'observations choisies de telle manière que l'influence de cette constante y soit prépondérante, et que, pour calculer les équations qui correspondent à ces observations, on puisse se contenter de valeurs approchées pour les constantes autres que celles que l'on cherche. Il faudra surtout s'attacher à éviter les erreurs systématiques, telles que l'équation personnelle, ou du moins, à les prévoir et à les étudier, pour pouvoir en tenir compte.

On peut classer les constantes de l'Astronomie de la façon suivante :

I. **CONSTANTES PHYSIQUES.** — Sous ce nom nous entendons les différentes constantes dont dépend la théorie de la réfraction et celle de l'aberration.

II. **CONSTANTES MÉCANIQUES.** — Ce sont les masses des corps célestes, les moments d'inertie principaux de la Terre et de la Lune ; l'intensité de la pesanteur ; etc.

De ces constantes dépendent, d'après la théorie de la rotation de la Terre sur elle-même, les constantes de la précession et de la nutation, ainsi que la question de la variation des latitudes.

III. PARALLAXES. — Ce sont les constantes relatives aux distances, et on peut y joindre les constantes géodésiques.

IV. — Éléments des orbites de la Terre, des autres planètes et de leurs satellites, des comètes.

Éléments de la rotation des corps célestes autour de leurs centres de gravité.

L'obliquité de l'écliptique et la position de l'équinoxe sont ici particulièrement importantes; d'elles dépendent encore la précession et la nutation.

V. — Coordonnées des étoiles, des nébuleuses; éléments du mouvement des étoiles doubles. Mouvements propres des étoiles; mouvement d'ensemble du système solaire.

On voit que le champ est vaste: aussi devons nous nous borner à quelques indications sommaires sur les principaux points, en nous contentant de faire comprendre l'esprit des méthodes employées.

**Réfraction.** — La théorie de la réfraction dépend de plusieurs constantes physiques, dont la principale est la constante proprement dite de la réfraction. Mais cette théorie est empirique et s'appuie sur des hypothèses qui ne sont certainement pas toutes vérifiées: elle a besoin d'être contrôlée par l'expérience; après avoir établi une table des réfractions, il faut déterminer les corrections les plus probables qu'il faut lui apporter.

Pour y arriver, on observe une circumpolaire à ses deux culminations, supérieure et inférieure.

Désignons par  $h'$ ,  $h'_1$  les hauteurs fournies par l'instrument méridien aux deux passages supérieur et inférieur, et non corrigées de la réfraction; elles résultent des lectures faites au cercle et aux microscopes, à ces deux moments, et de la lecture nadirale, après réduction au méridien, corrections de flexion, etc. Si les réfractions tabulaires correspondantes sont  $R$  et  $R_1$  et les réfractions vraies  $R + dR$ ,  $R_1 + dR_1$ , les hauteurs vraies sont  $h' - R - dR$ ,  $h'_1 - R_1 - dR_1$ ; soit  $\varphi$  la valeur adoptée pour la latitude, supposée positive,  $\varphi + d\varphi$  la latitude vraie. Les deux passages étant supposés

se faire du côté du Nord, on aura en désignant encore par  $\delta$  et  $\delta_1$  les déclinaisons correspondantes de l'étoile :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \delta + \varphi + d\varphi &= h' - R - dR, \\ -\frac{\pi}{2} + \delta_1 + \varphi + d\varphi &= h'_1 - R_1 - dR_1, \end{aligned}$$

d'où :

$$2d\varphi + dR + dR_1 = u,$$

$u$  désignant d'une façon générale une quantité connue. Pour former  $u$ , on n'a pas besoin de connaître exactement  $\delta$  et  $\delta_1$ , mais seulement leur différence extrêmement petite, de sorte qu'une valeur approchée de la déclinaison de l'étoile suffit.

Dans ces équations de condition, on pourra exprimer  $dR$  et  $dR_1$  à l'aide des accroissements des constantes de la réfraction, si l'on en admet la théorie.

En choisissant des étoiles culminant à des hauteurs différentes, on aura ainsi un grand nombre d'équations qui fourniront les inconnues cherchées, et en même temps la correction de latitude  $d\varphi$ . On détermine donc aussi de cette façon la latitude d'une façon précise.

M. Lœwy a encore fait connaître la méthode suivante pour déterminer la réfraction par des mesures différentielles, en s'affranchissant des causes d'erreur inhérentes à la lecture des cercles divisés et à la flexion. Un prisme d'angle  $\alpha$ , dont les deux faces sont argentées, est placé devant l'objectif d'une lunette ; il peut renvoyer alors dans cette lunette les images de deux astres situés dans le plan d'une section principale à une distance angulaire égale à  $2\alpha$ , ou très voisine de  $2\alpha$ . En choisissant deux astres situés à grande distance, par exemple l'un dans le voisinage de l'horizon à son lever, l'autre au voisinage du zénith, après sa culmination, on pourra à l'aide de mesures micrométriques, suivre les variations de leur distance apparente, jusqu'au moment où ils seront sensiblement à la même hauteur : comme ces variations résultent de la différence de réfraction aux diverses hauteurs, on aura ainsi un excellent moyen de déterminer les constantes de la théorie de la réfraction.

**Aberration.** — La constante de l'aberration,  $k$ , est en conservant les notations de la première Partie, comme nous le ferons toujours,

$$k = \frac{nb}{V \cos \varphi}.$$

On voit qu'elle est liée à la vitesse de la lumière et à la parallaxe du Soleil; connaissant deux de ces trois quantités, l'autre en résultera.

Le fait que la lumière n'a pas une vitesse infinie a été découvert par Roemer en 1675, en constatant que les éclipses des satellites de Jupiter ne se produisaient pas toujours à l'heure prédite par les éphémérides; quand la planète était le plus près de la terre, l'éclipse était en avance de 8 minutes environ; au contraire, quand Jupiter était le plus éloigné de la Terre, il y avait un retard égal. La lumière met donc environ 16 minutes à parcourir le diamètre de l'orbite terrestre.

Par la discussion de très nombreuses éclipses, Delambre trouva pour l'équation de la lumière, c'est-à-dire la quantité  $\frac{b}{V}$ , la valeur 493<sup>s</sup>,2; comme  $n$  est très bien connu ainsi que  $\varphi$ , il en résultait  $k = 20''$ ,26.

On peut déterminer directement la constante de l'aberration par les observations d'étoiles. Faisons d'abord des observations d'ascension droite. Soit  $\alpha'$  l'ascension droite observée à une certaine époque d'une étoile déterminée,  $\alpha$  l'ascension droite vraie de cette étoile à la même époque (c'est-à-dire l'ascension droite moyenne adoptée au commencement de l'année, augmentée de la précession, de la nutation et du mouvement propre);  $k$  la valeur adoptée pour la constante de l'aberration,  $k + dk$  sa véritable valeur;  $d\alpha$  la correction pour l'ascension droite moyenne adoptée. On a la relation

$$\alpha' = \alpha + d\alpha - (k + dk) (\cos \varepsilon \cos \alpha \cos (\odot) + \sin \alpha \sin (\odot)) \sec \delta,$$

puisque, comme il a été dit, le petit terme en  $\sin \varphi$  dû à l'aberration entre dans la définition de l'ascension droite moyenne.

En faisant

$$\cos \varepsilon \cos \alpha = m \cos M, \quad \sin \alpha = m \sin M,$$

on a une équation de condition de la forme

$$m \cos (\odot - M) \sec \delta \cdot dk - d\alpha = u.$$

On aura un grand nombre d'équations analogues fournies par les observations réparties pendant toute l'année ; les plus avantageuses seront celles où le coefficient de  $dk$  sera le plus grand en valeur absolue ; elles correspondront aux époques pour lesquelles  $\odot = M$ , ou bien  $\odot = M + \pi$ , distantes de six mois ; leur combinaison donnera évidemment  $k$  avec la précision maxima. On voit encore qu'il faudra choisir une belle étoile, les observations devant être faites de jour comme de nuit ; et aussi qu'il faudra choisir une étoile voisine du pôle, afin que le facteur séc  $\delta$  devienne grand.

On peut opérer de même en observant les déclinaisons. En appelant  $\delta'$  la déclinaison observée,  $\delta$  la déclinaison vraie,  $d\delta$  la correction pour la déclinaison moyenne adoptée, on a

$$\delta' = \delta + d\delta - (k + dk) [\sin \varepsilon \cos \delta \cos \odot + \sin \delta \cos \alpha \sin \odot - \cos \varepsilon \sin \delta \sin \alpha \cos \odot],$$

d'où, en faisant

$$\sin \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \sin \delta \sin \alpha = m' \cos M', \quad \sin \delta \cos \alpha = m' \sin M',$$

l'équation de condition

$$m' \cos (\odot - M') dk - d\delta = u :$$

on en tire les mêmes conclusions que ci-dessus.

Les méthodes précédentes nécessitent l'emploi de mesures absolues, toujours difficiles, surtout quand il s'agit des déclinaisons : dans ce dernier cas, en utilisant l'instrument des passages établi dans le premier vertical, on peut éviter l'emploi des cercles divisés, et le remplacer par l'observation des temps.

M. Loewy a proposé aussi l'emploi de mesures différentielles, en s'appuyant sur le même principe que pour la réfraction : l'aberration change la distance de deux astres éloignés sur lesquels elle agit de façon différente ; en observant la variation de cette distance, comme dans le cas de la réfraction, on pourra déterminer la constante de l'aberration. Mais ici les observations devront être poursuivies pendant un certain temps, trois mois au moins.

**Parallaxe des étoiles.** — Nous avons fait abstraction de la parallaxe de l'étoile observée dans ce qui précède : on peut le faire, car si l'effet de l'aberration est maximum sur une coordonnée,



celui de la parallaxe est nul. Si d'ailleurs on veut tenir compte de la parallaxe, il faudra ajouter respectivement aux premiers membres des équations de condition, les quantités :

$$-\omega \frac{R}{b} m \sin (\odot - M) \sec \delta, \quad -\omega \frac{R}{b} m' \sin (\odot - M').$$

Ces équations sont alors propres à déterminer l'inconnue  $\omega$  en même temps que les précédentes inconnues ; elles seront avantageuses à cet effet lorsqu'on aura  $\odot = M \pm \frac{\pi}{2}$ , ou bien  $\odot = M' \pm \frac{\pi}{2}$ , d'autant plus qu'alors l'effet de l'aberration sera nul.

On peut encore, comme l'a fait Bessel, chercher à déterminer la parallaxe relative de deux étoiles par des mesures différentielles. Bessel choisit l'étoile  $\beta$  du Cygne, S, qui étant brillante et douée d'un grand mouvement propre, est vraisemblablement rapprochée, et doit présenter une parallaxe sensible.

Dans le voisinage, soit une étoile  $S_0$  beaucoup plus faible, et que l'on peut par suite supposer de parallaxe nulle. La distance  $SS_0$  doit varier notablement dans le courant d'une année, non seulement en vertu du mouvement propre, mais aussi en vertu de la parallaxe : en déterminant cette variation, on mettra en évidence la parallaxe.

Soient  $\alpha, \delta, \alpha_0, \delta_0$  les coordonnées moyennes des deux étoiles, à une certaine époque choisie comme origine du temps (*fig. 47*) :  $s$  leur distance vraie à cette époque ; P l'angle de position de  $S_0$  par rapport à S compté dans le sens des coordonnées horaires ;  $\mu, \nu$  les composantes du mouvement propre de S à la même époque, en ascension droite et en déclinaison. Si, à l'époque  $t$ , la parallaxe augmente la distance  $s$  de  $ds$ , et si  $d's$  est l'accroissement de  $s$  dû au mouvement propre, la distance observée corrigée de l'aberration et de la réfraction différentielles sera égale à  $s + ds + d's$ , ce qui donnera les équations de condition. Les distances sont observées à l'héliomètre avec la plus grande précision.

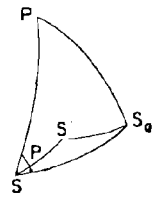


FIG. 47

Tout revient maintenant à calculer  $ds$  et  $d's$ . On a :

$$s \sin P = (\alpha_0 - \alpha) \cos \delta, \quad s \cos P = \delta_0 - \delta;$$

si donc  $d\alpha$  et  $d\delta$  sont les corrections de coordonnées dues à la parallaxe, il vient

$$ds = -d\alpha \cdot \cos \delta \sin P - d\delta \cdot \cos P;$$

faisant

$$\begin{aligned} m \cos M &= \sin P \sin \alpha + \cos P \sin \delta \cos \alpha, \\ m \sin M &= -\sin P \cos \varepsilon \cos \alpha + \cos P (-\sin \varepsilon \cos \delta + \cos \varepsilon \sin \delta \sin \alpha), \end{aligned}$$

on a immédiatement

$$ds = \frac{R}{b} \cos (\odot - M).$$

Pour calculer  $d's$ , faisons

$$\sigma \sin Q = \mu \cos \delta, \quad \sigma \cos Q = \nu;$$

l'étoile S est venue en S' et l'on a  $SS' = \sigma t$ ,  $P'SS' = Q$ , d'après cela ; le triangle  $SS'S_0$  donne donc

$$\cos (s + d's) = \cos (\sigma t) \cos s + \sin (\sigma t) \sin s \cos (P - Q),$$

d'où, avec une approximation plus que suffisante,

$$d's = -\sigma t \cos (P - Q) + \frac{\sigma^2 t^2 \sin^2 (P - Q)}{2}.$$

On a ainsi tout ce qui est nécessaire pour former les équations de condition, dont la résolution fournira  $\varpi$  et  $\sigma \cos (P - Q)$ . Pour déterminer  $\varpi$ , on combinera surtout les équations qui correspondent aux époques où l'on a  $\odot = M$  ou  $\odot = M + \pi$ .

Il n'est pas besoin d'insister pour faire comprendre combien ces recherches sont délicates, puisque  $\varpi$  n'atteint jamais une seconde ; aussi leur succès dépend-il absolument de l'exactitude des mesures de distances ; une telle exactitude exige une étude approfondie de l'organe principal qui sert à ces mesures, c'est-à-dire de la vis micrométrique employée à les faire.

**Nutation.** — Dans les équations de condition formées précédemment, nous avons supposé la nutation parfaitement connue ; on pouvait le faire, les observations étant poursuivies pendant un court espace de temps relativement à la période de la nutation qui est de 18 ans  $\frac{2}{3}$  environ. Mais les mêmes observations deviennent

propres à déterminer la constante de la nutation, si elles sont continuées pendant un laps de temps suffisamment long, égal au moins à une période de la nutation.

La Mécanique Céleste nous apprend que les termes de la nutation peuvent se répartir en deux groupes distincts ; les uns, les termes lunaires, sont proportionnels à la constante même de la nutation,  $h$ , c'est-à-dire au coefficient de  $\cos \Omega$  dans la nutation de l'obliquité,  $\Omega$  étant la longitude moyenne du nœud ascendant de la Lune ; les autres, les termes solaires, sont proportionnels à une seconde constante analogue à la première, et liée linéairement à cette première, en même temps qu'à la constante de la précession, par une relation à coefficients suffisamment connus. Dans la question qui nous occupe, la constante de la précession peut être regardée comme parfaitement connue, d'autant plus que les termes solaires qui seuls en dépendent ont une période courte, de dix mois, et que, eu égard au temps pendant lequel on prolonge les observations, les erreurs produites par une correction éventuelle de la constante de la précession pourront être assimilées à des erreurs accidentelles. Dans ces conditions, il est clair que si  $dh$  est la correction à faire subir à la valeur  $h$  adoptée pour la constante de la nutation, les équations de condition fournies par des observations d'ascension droite ou de déclinaison pourront se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + d\alpha + a.dk + b\pi + c.dh, \\ \delta' &= \delta + d\delta + a'.dk + b'\pi + c'.dh, \end{aligned}$$

les coefficients  $a, b, c, a', b', c'$  étant faciles à calculer d'après les coordonnées de l'étoile. Nous avons fait ce calcul précédemment pour  $a, b, a', b'$ , qui se rapportent à l'aberration et à la parallaxe : on procédera de même pour  $c$  et  $c'$ , mais en tenant compte de la façon dont la nutation dépend de  $h$ .

Comme précédemment, il sera avantageux d'observer, en ascension droite au moins, les étoiles voisines du pôle ; il y aura lieu d'ailleurs de tenir compte avec soin des mouvements propres.

**Précession.** — Soient  $\alpha_1, \delta_1$ , et  $\alpha_2, \delta_2$  les coordonnées moyennes d'une même étoile pour deux époques suffisamment éloignées  $t_1$  et  $t_2$  ; si  $a$  et  $b$  sont pour cette étoile les variations annuelles en ascension droite et en déclinaison pour l'époque moyenne  $t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$ ,

on a donc, comme on sait (du moins si l'étoile n'est pas trop voisine du pôle)

$$a = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1}, \quad b = \frac{\delta_2 - \delta_1}{t_2 - t_1}.$$

Ces variations annuelles comprennent, comme nous le savons, l'effet de la précession et celui du mouvement propre; les coordonnées  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  ont été obtenues par l'observation, et corrigées de l'aberration et de la nutation.

Si l'on observe un grand nombre d'étoiles réparties d'une façon sensiblement uniforme dans le ciel, on peut admettre que leurs mouvements propres seront distribués d'une façon quelconque, et on pourra les négliger, en les assimilant à des erreurs fortuites. Si alors  $m$  et  $n$  sont les quantités qui définissent la précession pour l'époque  $t_0$ , et si  $\alpha_0, \delta_0$  sont les coordonnées moyennes observées de l'étoile pour cette même époque, on a des équations de la forme

$$m + n \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0 = a, \quad n \cos \alpha_0 = b;$$

celles relatives aux ascensions droites déterminent  $m$  et  $n$ , celles relatives aux déclinaisons donneront  $n$ ; il vaudra mieux traiter séparément ces deux groupes d'équations, qui résultent d'observations affectées d'erreurs systématiques très différentes. Les formules relatives à la précession permettent alors de calculer sans peine la constante de la précession, connaissant l'obliquité de l'écliptique à l'époque  $t_0$ , et, quand il s'agit de  $m$ , la précession planétaire: celle-ci est fournie par la théorie du Soleil, et son exactitude dépend surtout de celle des masses des planètes.

En revenant maintenant aux équations primitives, dans lesquelles on tiendra compte des mouvements propres, il est clair que ceux-ci pourront être déterminés à leur tour.

Nous avons supposé que les mouvements propres pouvaient être regardés comme distribués au hasard: il n'en est pas véritablement ainsi. Le mouvement propre d'une étoile paraît résulter en réalité de deux mouvements distincts: un mouvement *particulier*, réellement propre, dans l'espace, et un mouvement apparent, dû au mouvement du système solaire; ce dernier mouvement est commun à toutes les étoiles, mais se manifeste de façons différentes suivant la position de l'étoile dans le ciel et sa distance. Si le mouvement du

système solaire est dirigé vers un point fixe du ciel, l'*apex*, le mouvement propre apparent de chaque étoile sera dirigé vers le point diamétralement opposé, l'*antiapex*; c'est ce que l'on constate en effet, d'une façon sensiblement approchée, et l'on trouve que l'*apex* est situé aux environs de l'étoile  $\lambda$  Hercule, par  $270^\circ$  d'ascension droite et  $30^\circ$  de déclinaison boréale.

Il est facile maintenant de voir que pour traiter convenablement les équations fournies par la comparaison des coordonnées moyennes des étoiles à différentes époques, il faut non seulement y introduire l'effet de la précession, mais encore celui du mouvement du système solaire, et enfin celui du mouvement particulier de l'étoile. Le problème se complique ainsi beaucoup, d'autant que l'effet du mouvement du Soleil dépend de la distance de l'étoile. Si donc on veut déterminer la précession avec exactitude, il faudra choisir des étoiles qui soient vraisemblablement à la même distance du Soleil, et qui par conséquent soient à peu près de même éclat, probablement.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce point qui dépend de l'Astronomie stellaire, branche de l'Astrophysique.

**Obliquité.** — Soit, à une certaine époque,  $\varepsilon$  l'obliquité apparente de l'écliptique,  $\alpha$  l'ascension droite apparente et  $\delta$  la déclinaison apparentes du Soleil; si le Soleil était rigoureusement dans l'écliptique, on aurait entre ces trois quantités la relation

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \varepsilon \sin \alpha;$$

pour tenir compte de la latitude toujours très petite,  $\beta$ , du Soleil, on a l'équation exacte

$$\sin \beta = \cos \varepsilon \sin \delta - \sin \varepsilon \cos \delta \sin \alpha,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \varepsilon \sin \alpha + \frac{\sin \beta}{\cos \delta \cos \varepsilon};$$

en faisant  $\operatorname{tg} \delta' = \operatorname{tg} \varepsilon \sin \alpha$ , on a donc, en tenant compte de la petitesse de  $\beta$ :

$$\delta = \delta' + \beta \frac{\cos \delta}{\cos \varepsilon}.$$

d'où  $\delta'$ , connaissant  $\delta$ .

On doit remarquer que l'on a pu prendre, pour établir les relations précédentes, les coordonnées apparentes du Soleil, sans les corriger de l'aberration, parce que l'aberration a pour unique effet de déplacer la position du Soleil dans l'écliptique, mais non en latitude.

L'équation

$$\operatorname{tg} \delta' = \operatorname{tg} \varepsilon \sin \alpha$$

est propre à déterminer l'obliquité  $\varepsilon$ , quand on connaît  $\delta'$  et  $\alpha$ . Pour nous rendre compte des conditions favorables à cette détermination, formons d'abord la relation différentielle correspondante, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres, et confondant  $d\delta'$  avec  $d\delta$ , soit :

$$\frac{2d\varepsilon}{\sin 2\varepsilon} = \frac{2d\delta}{\sin 2\delta} - \operatorname{cotg} \alpha \cdot d\alpha.$$

L'erreur provenant de  $d\alpha$  sera donc minima pour  $\alpha$  voisin de  $\pm \frac{\pi}{2}$ ; celle provenant de  $d\delta$  sera de même minima lorsque  $\delta$  sera maximum en valeur absolue; ces deux conditions sont réalisées en même temps aux environs d'un solstice. C'est donc en observant la déclinaison du Soleil aux environs des solstices que l'on déterminera avec le plus de précision l'obliquité : c'était évident a priori, puisqu'au solstice même, la déclinaison du Soleil est maxima et égale à l'obliquité.

Le facteur  $\sin \alpha$  étant alors voisin de  $\pm 1$ , la relation

$$\operatorname{tg} \delta' = \operatorname{tg} \varepsilon \sin \alpha$$

permettra un développement avantageux sous la forme connue

$$\varepsilon = \delta' + q \sin 2\varepsilon - \frac{q^2}{2} \sin 4\varepsilon + \dots,$$

en faisant

$$q = \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right);$$

ceci n'a lieu que pour le solstice d'été, où l'on a  $\delta' > 0$ ,  $\alpha$  voisin de  $+\frac{\pi}{2}$ ; mais la formule subsistera pour le solstice d'hiver, en remplaçant  $\delta'$  par sa valeur absolue ainsi que  $\alpha$ , ce dernier angle étant pris voisin de  $-\frac{\pi}{2}$ .

La déclinaison  $\varepsilon$  est fournie directement par l'observation méridienne ; l'ascension droite  $\alpha$  est fournie par l'observation ou par les tables du Soleil ; elle n'a pas besoin d'une très grande précision. En effet une erreur  $d\alpha$  produit sur  $\varepsilon$  l'erreur  $-\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cotg \alpha d\alpha$  ; si donc on observe pendant dix jours avant ou après le solstice,  $\alpha$  ne diffère de  $\pm \frac{\pi}{2}$  que de  $10^\circ$  au plus, et dans ces conditions le maximum de l'erreur  $d\varepsilon$  devient, en valeur absolue, 0,064  $d\alpha$  seulement.

Examinons maintenant ce qu'est l'erreur  $d\delta$  qui se reporte intégralement sur  $\varepsilon$ , en valeur absolue, puisque  $\delta$  est ici très voisin de  $\pm \varepsilon$ .

La déclinaison  $\delta$  est obtenue à l'instrument méridien, qui fournit directement la hauteur  $h$  par la lecture du cercle et le nadir. Si  $\varphi$  est la latitude, et si l'on suppose la culmination observée du côté du Sud, on a donc  $\delta = \varphi + h - \frac{\pi}{2}$ , de sorte qu'une erreur  $d\varphi$  sur la latitude se reportera entièrement sur  $\delta$ . La hauteur observée  $h$  doit encore être corrigée de la réfraction  $R$  ; si celle-ci est en réalité  $R + dR$ ,  $\delta$  est affectée de l'erreur  $-dR$  ; de même en tenant compte de la flexion et des défauts propres à l'instrument employé, on est amené à corriger  $h$ , et par suite  $\delta$ , d'une certaine quantité  $f(h)$  fonction de la hauteur.

Enfin il faut encore réduire l'observation au centre de la Terre, et pour cela augmenter  $h$  de  $\varpi \cos h$ ,  $\varpi$  étant la parallaxe horizontale du soleil ; une erreur  $d\varpi$  sur  $\varpi$  donnera donc dans  $h$ , et par suite dans  $\delta$ , l'erreur  $d\varpi \cos h$ , de sorte que, en résumé, on peut prendre  $d\delta$  sous la forme

$$d\delta = d\varphi - dR + d\varpi \cos h + f(h) ;$$

il est bien clair d'ailleurs que nous ne tenons compte ici que des erreurs systématiques qui peuvent affecter  $\delta$  ; les erreurs accidentelles seront éliminées, comme toujours, par la multiplicité des observations.

On voit que l'erreur  $d\varphi$  sera éliminée par l'observation aux deux solstices ; mais les autres erreurs ne pourront être éliminées complètement, car aux deux solstices, les hauteurs diffèrent de  $47^\circ$  environ.

L'obliquité apparente obtenue par chaque observation sera corrigée de la nutation et fournira l'obliquité moyenne, que l'on pourra rapporter ensuite, à l'aide de la précession, à une même époque voisine. En comparant les valeurs de l'obliquité moyenne obtenues à des époques éloignées, on déterminera la variation séculaire de l'obliquité.

**Equinoxe.** — Pour connaître complètement la position relative de l'équateur et de l'écliptique, il faut, outre l'obliquité, déterminer l'équinoxe.

Ceci revient évidemment à déterminer l'ascension droite d'une étoile donnée. Choisissons donc une étoile brillante que l'on puisse observer de jour comme de nuit, et par suite toute l'année, et rapprochée de l'équateur.

Supposons qu'un même jour, on observe à la lunette méridienne le passage du Soleil et celui de l'étoile, à l'aide d'une pendule sidérale, réglée sur le mouvement de l'étoile, de façon qu'on puisse tenir compte de sa marche. Soient  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\beta$  l'ascension droite apparente, la déclinaison apparente et la latitude du Soleil au moment  $t$ , donné par la pendule, de sa culmination en un lieu donné; la déclinaison  $\delta'$  est observée avec le plus grand soin au cercle méridien, et corrigée comme précédemment de la réfraction et de la parallaxe; soit de plus  $\alpha_0$  l'ascension droite apparente de l'étoile, dont le passage est observé au temps  $t_0$ . En désignant toujours par  $\varepsilon$  l'obliquité de l'écliptique au moment de l'observation du Soleil, soit, comme plus haut,  $\delta'$  la déclinaison corrigée à cause de la latitude,  $\delta' = \beta \frac{\cos \delta}{\cos \varepsilon}$ ; on aura

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \delta'}{\operatorname{tg} \varepsilon},$$

ce qui fournit  $\alpha$ . De plus, on a la relation

$$\alpha_0 - \alpha = t_0 - t,$$

d'où

$$\alpha_0 = \alpha + t_0 - t.$$

Cette détermination de  $\alpha_0$  est affectée de la même erreur que  $\alpha$ ;



et comme on l'a vu déjà, si  $d\varepsilon$  est l'erreur de l'obliquité,  $d\delta$  celle de la déclinaison observée, on a

$$dz = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\sin 2\delta} d\delta - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\sin 2\varepsilon} d\varepsilon,$$

avec

$$d\delta = d\varphi - dR + d\omega \cos h + f(h).$$

On voit par là que les erreurs seront éliminées dans leur ensemble en combinant deux observations faites non loin des deux équinoxes, lorsque le soleil a la même déclinaison, et par suite la même hauteur méridienne. En effet, pour deux telles époques, les ascensions droites sont supplémentaires, et les corrections  $dz$  sont par suite égales et de signes contraires.

Les erreurs restantes seront celles qui résultent de la différence des corrections de réfraction et de la variation de la fonction  $f(h)$  en raison du changement de saison et de température.

Chaque valeur de  $\alpha$ , est transformée en ascension droite moyenne relative à une certaine époque voisine, et c'est la moyenne de ces valeurs que l'on adopte.

On détermine ainsi directement et d'une façon absolue, les ascensions droites d'un certain nombre d'étoiles, réparties dans tout le ciel; ou plutôt, afin d'éviter les erreurs qui proviennent de ce que les observations de jour et celles de nuit ne sont pas tout à fait comparables, on détermine à l'aide de la pendule et d'observations répétées les ascensions droites relatives de ces étoiles, c'est-à-dire en somme leurs différences d'ascension droite, et en observant à un certain instant le passage du Soleil au méridien en même temps que sa déclinaison, de façon à obtenir comme plus haut son ascension droite, on en conclut la valeur exacte de la correction de la pendule à cet instant, et par suite les ascensions droites absolues des étoiles étudiées.

**Etoiles.** — On détermine directement les coordonnées d'un certain nombre d'étoiles, dites *fondamentales*; les déclinaisons sont obtenues au cercle méridien, connaissant la latitude, déterminée elle-même comme nous l'avons déjà vu, par les observations des circumpolaires ou par tout autre moyen susceptible de précision: nous en verrons quelques-uns dans le Chapitre suivant. Pour avoir

les ascensions droites, on combine les observations méridiennes des étoiles avec celles du Soleil, comme nous venons de le voir.

Pour les autres étoiles, on détermine leurs coordonnées relativement aux fondamentales, par les observations méridiennes de temps et de déclinaison, les constantes nécessaires pour la réduction de ces observations étant fournies par les fondamentales. On peut ainsi former des catalogues, renfermant les ascensions droites et déclinaisons d'un certain nombre d'étoiles, réduites à une certaine époque; la comparaison des observations faites à différentes époques fournira les mouvements propres.

Il est clair qu'un catalogue déterminé, formé dans un observatoire déterminé avec un instrument déterminé, et autant que possible par le même observateur, présentera des erreurs systématiques qui lui seront propres. On pourra essayer de déterminer ces erreurs par la comparaison de divers catalogues renfermant des étoiles communes en assez grand nombre; ou plutôt on déterminera ainsi les erreurs relatives de ces catalogues entre eux. Si l'on admet un catalogue étalon, formé après la discussion d'un très grand nombre d'observations comparées entre elles, et dont on considère les données comme exactes, on pourra lui rapporter tout autre catalogue et déterminer ainsi les erreurs systématiques communes à toutes les étoiles de ce catalogue; ces erreurs varient d'ailleurs suivant les régions du ciel.

Un catalogue ne peut contenir que les coordonnées d'un nombre assez limité d'étoiles, jusqu'à la neuvième ou dixième grandeur, lorsqu'il est très étendu.

Pour déterminer une autre étoile, on la rapportera, par exemple à l'aide de mesures micrométriques faites à l'équatorial, à une ou plusieurs étoiles connues.

On agit de même pour les étoiles doubles et les nébuleuses; dans les étoiles doubles, il y a lieu de mesurer en outre la distance des deux composantes et leur angle de position relatif, afin d'étudier les variations de ces éléments.

Pour obtenir des résultats d'ensemble plus complets, on dresse une carte photographique du ciel, et des mesures micrométriques effectuées sur les clichés eux-mêmes déterminent les positions des astres les plus faibles par rapport à ceux dont les coordonnées sont parfaitement connues par les observations directes.

**Planètes. Comètes. Satellites. Masses.** — Les éléments du mouvement des planètes, des comètes et des satellites sont déduits des observations, par la comparaison de celles-ci aux résultats théoriques de la Mécanique Céleste.

Les grosses planètes et les astéroïdes d'un éclat suffisant sont observés directement à l'instrument méridien; les autres sont comparés à des étoiles connues, par des mesures micrométriques faites à l'équatorial, ou sur des clichés photographiques.

Trois observations rapprochées suffisent théoriquement pour déterminer la section conique qui est l'orbite osculatrice d'une planète ou d'une comète à une époque donnée, ainsi que nous le verrons dans le Chapitre complémentaire. Les observations prolongées pendant de longues périodes de temps mettent en évidence les perturbations, et permettent une détermination exacte des éléments moyens.

Les observations des phénomènes particuliers tels qu'éclipses, occultations, passages de Vénus ou de Mercure sur le Soleil, donnent évidemment d'excellents points de repère pour la théorie de la Lune ou de ces dernières planètes.

Les dimensions du Soleil, de la Lune, des grosses planètes, et les éléments du mouvement de ces corps sur eux-mêmes sont encore obtenus à l'aide d'observations micrométriques portant sur la forme de leurs disques et sur le déplacement des accidents de leurs surfaces.

Comme les perturbations dépendent des masses des corps troublants, on voit que leur étude permettra de déterminer ces masses. Il est d'ailleurs plus facile de suivre une autre voie quand il s'agit d'une planète possédant des satellites : il suffit en effet, dans ce cas, d'appliquer la troisième loi de Képler au mouvement d'un satellite, en admettant que la constante d'attraction reste la même dans tout l'univers; toutefois, on ne détermine ainsi que la somme des masses de la planète et de son satellite. Le rapport de la masse de la Terre à celle de la Lune, les rapports mutuels des moments d'inertie principaux de la Terre sont très bien déterminés par les constantes de la nutation et de la précession.

L'étude du mouvement de l'axe du monde, ou du déplacement du pôle à la surface de la Terre, revient à celle de la variation des latitudes. Pour obtenir des résultats dignes de quelque confiance,

l'Association géodésique internationale a institué un programme pour la détermination exacte de la latitude, ou plutôt de la variation de la latitude, par la méthode de Talcott, que l'on applique simultanément dans quelques observatoires répartis tout le long d'un même parallèle ; en combinant les observations ainsi faites, on s'affranchit de la réfraction, puisque la latitude reste la même, et on peut déterminer complètement le déplacement du pôle, puisque son effet est observé sur des méridiens très distincts.

**Parallaxes.** — Les observations que nous venons de décrire, combinées avec la même loi de Képler et les résultats de la Mécanique Céleste, permettent de connaître avec beaucoup de précision les rapports des distances mutuelles des astres, soit ces distances elles-mêmes exprimées à l'aide de l'unité de longueur que nous avons définie dans la première Partie à propos du mouvement des planètes.

Mais il est nécessaire d'obtenir davantage et de connaître les rapports de ces distances aux dimensions de la Terre elle-même. On y arrivera en déterminant la parallaxe du Soleil ou de tout autre corps du système solaire, puisqu'il suffira de connaître l'expression d'une telle distance à l'aide du rayon de la Terre comme unité, pour avoir toutes les autres, d'après ce qui précède.

La géodésie permettra enfin d'exprimer les dimensions de la Terre à l'aide de notre unité pratique de longueur, le mètre.

Ce qui précède ne saurait d'ailleurs s'appliquer à la Lune, dont la parallaxe est beaucoup plus grande que celle du Soleil et des planètes, et a besoin d'être connue avec une précision relative bien plus considérable.

a) *Lune.* — Occupons-nous donc d'abord de la détermination directe de la parallaxe lunaire. Désignons par  $M$  la masse de la Terre,  $m$  celle de la Lune, et soit  $a$  le demi-grand axe de l'orbite lunaire, défini par la relation

$$n^2 a^3 = f(M + m),$$

où  $n$  désigne le moyen mouvement sidéral de la Lune, parfaitement connu. Si le rayon équatorial de la Terre est pris pour unité, et si  $r$  est la distance de la Terre à la Lune, la parallaxe (horizontale équatoriale) de la lune est  $\varpi$ , définie par  $\sin \varpi = \frac{1}{r}$ .

L'inverse  $\frac{1}{r}$  du rayon vecteur est affecté d'inégalités périodiques, et sa partie constante, ou valeur moyenne, est  $\frac{1}{r_0}$  : on a d'ailleurs par la théorie  $\frac{1}{r_0} = \frac{1}{a} (1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon$  étant très petit et connu. La *constante de la parallaxe lunaire* est alors, par définition, l'angle  $\varpi_0$  tel que

$$\sin \varpi_0 = \frac{1}{r_0} = \frac{1}{a} (1 + \varepsilon).$$

C'est cette constante qu'il faut déterminer.

D'une façon générale, pour déterminer directement la parallaxe d'un astre, deux méthodes s'offrent naturellement : ou bien on observe en un même lieu la variation d'influence de la parallaxe sur les coordonnées de l'astre pendant son mouvement diurne, ou bien on observe en deux lieux différents simultanément, et les variations observées ainsi dans les valeurs des coordonnées étant dues à l'influence de la parallaxe, on peut encore en conclure celle-ci.

C'est cette seconde méthode que l'on a appliquée à la Lune, la première nécessitant des mesures absolues toujours sujettes à caution, et surtout des corrections absolues de réfraction, toujours incertaines.

Considérons deux lieux A et A<sub>1</sub>, de latitudes  $\varphi$  et  $\varphi_1$ , la première positive, la seconde négative, de longitudes peu différentes, et tels que la Lune culmine au Sud du zénith pour le premier, au Nord pour le second. Observons la Lune à son passage au méridien en chacun de ces lieux, le même jour : soit  $h'$  la hauteur méridienne apparente du bord visible (inférieur ou supérieur) en A, corrigée de la réfraction, et  $\delta'$  la déclinaison apparente de ce bord, de sorte que

$$h' = \frac{\pi}{2} + \delta' - \varphi;$$

en A<sub>1</sub>, le même bord est supérieur ou inférieur, et si l'on marque de l'indice 1 les quantités correspondantes, on a

$$h'_1 = \frac{\pi}{2} - \delta'_1 + \varphi_1.$$

Pour s'affranchir de l'erreur constante des tables de réfraction et en grande partie des erreurs instrumentales, on observe en même-

temps aux deux stations la hauteur méridienne d'une même étoile connue, voisine de la Lune, et ayant sensiblement la même déclinaison : on a donc directement la correction de réfraction pour la hauteur de cette étoile, et l'on en déduit la correction de réfraction pour la Lune, en prenant seulement dans la table des réfractons la variation de réfraction, beaucoup mieux connue que la réfraction absolue ; il est clair aussi qu'en procédant de cette façon, on n'a pas à tenir compte des erreurs de flexion, qui sont les mêmes pour l'étoile et pour la Lune.

Désignons maintenant par  $\delta$  et  $\delta_1$  les déclinaisons géocentriques du centre de la Lune relatives aux deux observations, par  $\varpi$  et  $\varpi_1$ ,  $s$  et  $s_1$ , les parallaxes horizontales équatoriales et les demi-diamètres apparents géocentriques correspondants, par  $\varphi'$  et  $\varphi'_1$  les latitudes géocentriques, par  $\rho$  et  $\rho_1$  les distances au centre de la Terre (le rayon équatorial étant pris pour unité) ; par  $\gamma$  et  $\gamma_1$  les différences  $\varphi - \varphi'$  et  $\varphi_1 - \varphi'_1$ . La formule (2) établie dans la Première Partie (p. 95), à propos de la réduction des observations de hauteur de la Lune, donnera en remarquant qu'on a observé respectivement dans les azimuts  $0$  et  $\pi$  :

$$\begin{aligned}\sin(\delta - \delta') &= \varepsilon \sin s + \rho \sin \varpi \cos(h' + \gamma), \\ \sin(\delta_1 - \delta'_1) &= \varepsilon \sin s_1 - \rho \sin \varpi_1 \cos(h'_1 - \gamma_1),\end{aligned}$$

$\varepsilon$  étant égal à  $\pm 1$  suivant que c'est le bord inférieur ou le bord supérieur qui a été observé en A. D'ailleurs on sait que  $\sin s = k \sin \varpi$ ,  $k$  désignant le rayon linéaire de la Lune.

En faisant

$$m = \rho \cos(h' + \gamma) + \varepsilon k, \quad m_1 = \rho_1 \cos(h'_1 - \gamma_1) - \varepsilon k,$$

on en déduit, avec une précision plus que suffisante,

$$\begin{aligned}\delta - \delta' &= m \sin \varpi + \frac{1}{6} m^3 \sin^3 \varpi, \\ \delta_1 - \delta'_1 &= -m_1 \sin \varpi_1 - \frac{1}{6} m_1^3 \sin^3 \varpi_1.\end{aligned}$$

Soient  $t$  et  $t_1$  les heures des deux observations, rapportées au même méridien, et  $t_0$  leur moyenne ; si  $D$  est la déclinaison de la Lune pour l'époque  $t_0$ , et  $D'$  sa dérivée à cette époque, on aura

avec une exactitude suffisante, en ne négligeant que des termes du troisième ordre,

$$\delta_1 - \delta = (t_1 - t) D',$$

puisque par hypothèse  $t_1 - t$  est petit,  $A$  et  $A_1$  étant sensiblement sur le même méridien : les tables de la Lune fournissent d'ailleurs  $D'$  avec une précision suffisante pour que ce calcul soit exact.

De même si  $P$  est la parallaxe à l'époque  $t_0$  et  $P'$  sa variation, on a :

$$\begin{aligned} \sin \varpi &= \sin P + \cos P (t - t_0) P', \\ \sin \varpi_1 &= \sin P + \cos P (t_1 - t_0) P', \end{aligned}$$

et les équations établies plus haut donnent par soustraction :

$$\begin{aligned} (m + m_1) \sin P + (t_1 - t) D' - (\delta'_1 - \delta') + \frac{m_1 - m}{2} \cos P (t_1 - t) P' \\ + \frac{m^3 + m_1^3}{6} \sin^3 P = 0. \end{aligned}$$

Dans cette équation où l'on a laissé de côté quelques termes négligeables d'ordre supérieur, tout est connu sauf  $\sin P$ , car les petits termes qui la terminent peuvent être calculés avec une valeur approchée de  $P$  et la valeur de  $P'$  fournie par les tables. On doit observer d'ailleurs que le coefficient  $m + m_1$  de  $\sin P$  est indépendant de  $k$ , de sorte que  $k$  ne figure que dans les petits termes déjà considérés, et n'a pas besoin d'être connu avec une haute précision.

La forme de l'orbite de la Lune est assez bien connue pour que l'on ait avec certitude le rapport  $\frac{\sin P}{\sin \varpi_0}$ ,  $\varpi_0$  étant la constante de la parallaxe lunaire ; donc finalement l'équation propre à déterminer  $\varpi_0$ , qui résulte de la combinaison des deux observations, est de la forme

$$(m + m_1) \sin \varpi_0 + u = 0,$$

$u$  étant une quantité connue.

Le coefficient  $m + m_1$  est égal à

$$\rho \cos (h' + \gamma) + \rho_1 \cos (h'_1 - \gamma_1),$$

et par suite dépend de l'aplatissement terrestre qui n'est pas très bien connu : aussi sera-t-il préférable d'introduire cet aplatissement  $\alpha$  comme une nouvelle inconnue.

On sait que l'on a les formules

$$\rho \cos \varphi' = \cos \psi, \quad \rho \sin \varphi' = (1 - \alpha) \sin \psi, \quad \operatorname{tg} \psi = (1 - \alpha) \operatorname{tg} \varphi;$$

en négligeant  $\alpha^2$ , il vient donc

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi - \frac{\alpha}{2} \sin 2\varphi, & \varphi \cos \varphi' &= \cos \varphi + \frac{\alpha}{2} \sin \varphi \sin 2\varphi, \\ \rho \sin \varphi' &= \sin \varphi - \frac{\alpha}{2} \cos \varphi \sin 2\varphi - \alpha \sin \varphi, \end{aligned}$$

et par suite

$$\rho \cos (h' + \gamma) = \cos h' - \alpha [\sin h' \sin 2\varphi + \cos h' \sin^2 \varphi];$$

on a de même

$$\rho_1 \cos (h'_1 - \gamma_1) = \cos h'_1 - \alpha [-\sin h'_1 \sin 2\varphi_1 + \cos h'_1 \sin^2 \varphi_1];$$

l'équation de condition devient donc finalement :

$$u + (\cos h' + \cos h'_1) \sin \varpi_0 - \alpha \sin \varpi_0 [\sin h' \sin 2\varphi + \cos h' \sin^2 \varphi - \sin h'_1 \sin 2\varphi_1 + \cos h'_1 \sin^2 \varphi_1] + u = 0,$$

et la résolution de toutes les équations analogues fournira les deux inconnues  $\varpi_0$  et  $\alpha$  : toutefois, comme les coefficients de  $\alpha$  seront en fait peu différents dans les diverses équations,  $\alpha$  sera mal connu, et il vaudra mieux regarder les équations comme permettant d'exprimer  $\sin \varpi_0$  en fonction de l'aplatissement  $\alpha$  : on y substituera ensuite la valeur adoptée par ailleurs pour  $\alpha$ .

C'est ainsi que les observations de Lacaille faites au Cap de Bonne-Espérance pendant les années 1751, 1752 et 1753, et combinées avec des observations faites en même temps à Paris (Cassini), à Greenwich (Bradley), à Berlin (Lalande) et à Bologne (Zanotti), ont permis la détermination de la parallaxe lunaire.

Les éclipses de Soleil, les occultations d'étoiles par la Lune, facilement observables en grand nombre surtout pendant les éclipses totales de Lune, fournissent comme nous l'avons déjà dit d'excellentes positions de la Lune. On conçoit donc aisément que la comparaison de telles observations faites simultanément en divers lieux de la Terre fournira de bonnes équations de condition, dans lesquelles entreront comme inconnues principales les erreurs des tables de la Lune, la correction de la constante de parallaxe adoptée, et les



corrections des longitudes admises pour les lieux d'observation. En traitant convenablement un grand nombre de telles équations, on pourra donc en particulier déterminer la parallaxe lunaire. Mais nous n'entrerons pas dans les détails assez longs de cette intéressante méthode.

Une autre méthode, de principe tout différent, est la suivante. Soit  $\varpi_1$  la parallaxe lunaire qui correspond au demi-grand axe  $a$  de l'orbite, de sorte que

$$\sin \varpi_1 = \frac{1}{a} = \left[ \frac{n^2}{f(M+m)} \right]^{\frac{1}{3}};$$

on sait que  $\varpi_0$  résulte facilement de  $\varpi_1$ .

La constante d'attraction  $f$  qui figure dans cette formule est susceptible d'être déterminée par les observations de la longueur du pendule simple battant la seconde, à la surface de la Terre. Si en effet cette longueur est  $l$  et si  $g$  est l'accélération de la pesanteur, on a  $l = \frac{g}{\pi^2}$ , l'unité de temps étant la seconde. Or la pesanteur est la résultante de la force d'attraction  $g_0$  du globe terrestre, et de la force centrifuge due à la rotation de la Terre autour de son axe, soit  $\omega^2 \rho \cos \varphi'$ ,  $\omega$  étant la vitesse angulaire de la Terre,  $\varphi'$  la latitude géocentrique,  $\rho$  le rayon vecteur du lieu d'observation. La théorie du potentiel nous apprend par ailleurs que pour le sphéroïde terrestre, l'attraction  $g_0$  est égale à  $\frac{fM}{\rho^2}$ , lorsque le lieu d'observation est tel que le sinus de sa latitude géocentrique soit égal à  $\sqrt{\frac{1}{3}}$ . Réduisant donc les observations à un tel lieu, on aura en projetant sur la verticale, avec une exactitude suffisante,

$$g = \frac{fM}{\rho^2} - \omega^2 \rho \cos^2 \varphi',$$

d'où

$$f = \frac{\rho^2}{M} (\pi^2 l + \omega^2 \rho \cos \varphi'),$$

et par suite

$$\sin \varpi_1 = \left[ \frac{n^2}{\rho^2 (\pi^2 l + \omega^2 \rho \cos \varphi') \left(1 + \frac{M}{m}\right)} \right]^{\frac{1}{3}}.$$

Si donc le rapport  $\frac{m}{M}$  de la masse de la Lune à celle de la Terre est connu, par exemple par la théorie de la précession et de la nutation, on voit que l'on peut calculer la parallaxe lunaire.

*b) Soleil ou Planètes.* — Nous parlerons d'abord des méthodes qui servent à déterminer directement la parallaxe du Soleil, ou celle d'une planète ; comme nous l'avons dit, la connaissance de la parallaxe d'un astre du système solaire entraîne celle de la parallaxe de tous les autres. Toutefois il est clair qu'il y a avantage à déterminer directement une parallaxe grande, afin de diminuer l'erreur relative des observations. On choisira donc un astre aussi rapproché que l'on pourra de la Terre. Les planètes Vénus et Mars sont parmi les grosses planètes celles qui passent le plus près de la Terre, et dans les oppositions favorables leur parallaxe est relativement considérable ; mais les pointés sur ces planètes, qui ont un disque apparent sensible, manquent de précision ; il vaut donc mieux choisir une petite planète, malgré son plus grand éloignement en général. La découverte en 1898 de la planète (433) *Eros*, dont l'orbite est située en grande partie entre celles de Mars et de la Terre, et qui peut se rapprocher sensiblement de la Terre dans les oppositions favorables, lorsqu'elle est en même temps au périhélie, permet maintenant d'appliquer la méthode dans de bonnes conditions.

Si l'on veut comparer entre elles les observations faites en un même lieu, on déterminera avec le plus grand soin, par des mesures micrométriques directes ou photographiques, les différences d'ascension droite ou de déclinaison entre la planète et des étoiles de comparaison bien connues. Ces différences varient avec le temps d'abord en vertu du mouvement propre de la planète, et en second lieu en vertu de la variation de la parallaxe diurne. Si les observations sont suffisamment rapprochées, l'effet du mouvement propre peut être considéré comme parfaitement connu, et en corrigeant les observations de cet effet, les différences restantes sont de la forme  $\omega(p - p')$ ,  $\omega$  étant la parallaxe (horizontale équatoriale) à l'époque des observations, et  $p$  et  $p'$  étant des facteurs de parallaxe correspondant aux moments des deux observations. On a d'ailleurs comme l'on sait, en adoptant les notations employées

dans la première Partie au Chapitre de la parallaxe, pour les observations d'ascension droite :

$$p_x = \rho \cos \varphi' \sec \delta \sin (\alpha - t),$$

et pour les observations de déclinaison :

$$p_\delta = -\rho \sin \varphi' \cos \delta + \rho \cos \varphi' \sin \delta \cos (\alpha - t);$$

les différences observées fourniront donc  $\varpi$ , et l'on en déduira la parallaxe moyenne de la planète, puis celle du Soleil, l'orbite de la planète étant bien connue.

Pour qu'une équation de condition donne un bon résultat, il faut que le coefficient de  $\varpi$ , soit  $p - p'$ , y soit le plus grand possible ; comme ce coefficient ne dépend que de  $\rho \cos \varphi'$ , il y aura donc d'abord avantage à choisir un lieu de latitude peu élevée. Il faudra ensuite combiner des observations d'ascension droite faites de part et d'autre du méridien, et aussi loin que possible du méridien, afin que la différence des sinus des angles horaires soit grande ; ou bien des observations de déclinaison faites l'une au méridien, l'autre aussi loin que possible du méridien, pour une raison analogue. Mais comme  $\sin \delta$  n'a jamais de grandes valeurs, on voit aisément que les observations de déclinaison sont moins bonnes que celles d'ascension droite. Il faudra d'ailleurs multiplier beaucoup les observations, et s'entourer de minutieuses précautions dans le détail desquelles nous ne pouvons entrer, pour obtenir des résultats satisfaisants.

Au lieu de mesurer directement les différences d'ascension droite et de déclinaison, on pourra faire porter l'observation directe sur la distance et l'angle de position.

Si maintenant l'on veut combiner des observations faites en deux lieux différents, on fera ces observations au même moment, très sensiblement, les coordonnées étant déterminées soit directement à l'instrument méridien, soit par des mesures micrométriques directes ou photographiques rapportées à des étoiles de repère connues. Les différences de coordonnées obtenues, corrigées de l'effet très petit du mouvement propre, s'exprimeront comme précédemment et seront traitées de la même façon : mais cette fois les facteurs de parallaxe varieront d'un lieu à l'autre non seulement

à cause de la variation d'angle horaire, mais aussi à cause de la différence de latitude, de sorte que la première partie du facteur relatif à la déclinaison ne s'éliminera plus d'elle-même.

Pour avoir de bons résultats en ascension droite, il faudra que les angles horaires soient très différents, et par suite que la différence de longitude des deux lieux d'observation soit grande, puisque les observations sont faites sensiblement au même instant ; il faudra d'ailleurs très bien connaître cette différence de longitude.

En déclinaison, on aura les meilleurs résultats en observant au méridien, en deux lieux de latitudes très différentes et situés sensiblement sur le même méridien : on est d'ailleurs ainsi ramené à la méthode suivie dans le cas de la Lune.

L'opposition d'Eros en 1900-1901 a été particulièrement favorable : on a accumulé à ce moment un nombre énorme d'observations qui ne sont pas encore réduites et discutées ; mais il y a tout lieu d'espérer un plein succès de cette campagne, organisée par M. Loewy.

On peut craindre une cause d'erreur systématique dans la détermination de la parallaxe solaire à l'aide des planètes : si la planète observée et les étoiles de comparaison n'ont pas la même coloration, leurs lumières seront inégalement dispersées par l'atmosphère terrestre, et les résultats peuvent être faussés ; mais cette crainte paraît pouvoir être écartée, d'après les observations les plus récentes.

De même que les occultations d'étoiles par la Lune permettent de déterminer la parallaxe de la Lune, on peut employer une occultation d'étoile par une planète à la détermination de la parallaxe de cette planète, et par suite de celle du Soleil : mais ces phénomènes sont trop exceptionnels pour donner à la méthode une valeur pratique. Toutefois, on peut rattacher au même ordre d'idées la célèbre méthode de détermination de la parallaxe solaire par l'observation des passages de Vénus, due à Halley. Il suffit de se reporter à ce que nous avons dit dans la première Partie au sujet de ces phénomènes, malheureusement trop rares, pour comprendre que la comparaison de leurs observations faites en divers lieux de la Terre permet la détermination de la différence des parallaxes du Soleil et de Vénus, et par suite de la parallaxe solaire. Les équations de condition fournies par les observations, et formées rigou-

reusement, sont peu simples et comportent comme inconnues, outre les parallaxes, les corrections des longitudes adoptées pour les lieux d'observation ; aussi nous bornerons-nous à montrer le principe de la méthode en faisant de nombreuses simplifications.

Soient à l'instant  $t$ , exprimé en temps sidéral du premier méridien,  $s$  la distance géocentrique des centres S et V du Soleil et de Vénus, P l'angle de position de Vénus par rapport au Soleil, compté dans le sens des coordonnées horaires (*fig. 48*) ; si  $\alpha, \delta, \alpha', \delta'$  sont les ascensions droites et déclinaisons géocentriques du Soleil et de Vénus, on a sensiblement :

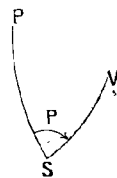


FIG. 48

$$\begin{aligned} s \sin P &= (\alpha' - \alpha) \cos \delta, \\ s \cos P &= \delta' - \delta. \end{aligned}$$

Si l'on observe au même instant en un lieu de longitude  $L$ , de latitude géocentrique  $\varphi'$ , à la distance  $\rho'$  du centre de la Terre, la distance des centres deviendra  $s + ds$ , et l'on aura, en négligeant de petits termes :

$$ds = (d\alpha' - d\alpha) \cos \delta \sin P + (d\delta' - d\delta) \cos P,$$

la caractéristique  $d$  indiquant les corrections dues à la parallaxe.

Par suite, avec une approximation suffisante ici, puisque  $s$  est petit,

$$ds = (\varpi' - \varpi) \left\{ -\rho \cos \varphi' \sin (t - L - \alpha) \sin P + \rho \sin \varphi' \cos \delta \cos P - \rho \cos \varphi' \sin \delta \cos (t - L - \alpha) \cos P \right\},$$

en appelant  $\varpi$  et  $\varpi'$  les parallaxes du Soleil et de Vénus à l'époque du passage.

Cette formule fournit approximativement la variation de la distance  $s$  ; elle suffit pour faire voir que si l'on détermine  $s$  en deux lieux différents, au même instant, on en pourra conclure  $\varpi' - \varpi$  : des mesures micrométriques directes ou photographiques, faites pendant toute la durée du phénomène, permettront d'avoir  $s$  à un instant quelconque, et par conséquent d'appliquer la méthode.

On peut aussi observer les moments des contacts extérieurs ou intérieurs de la planète et du Soleil : la distance apparente  $s + ds$  a alors une valeur donnée, égale à la somme ou à la différence des

demi-diamètres apparents, et il est facile de ramener au même instant les observations faites en différents lieux, car on a des données très suffisantes pour connaître avec précision la variation de la distance des deux astres avec le temps, de sorte que de la distance observée à un certain moment on peut déduire la distance que l'on observerait à un instant voisin.

Les passages de Vénus sont difficiles à observer avec précision et n'ont pas donné tout ce qu'on en attendait.

Comme nous l'avons déjà dit, la parallaxe du Soleil est liée à la constante de l'aberration et à la vitesse de la lumière, d'où une méthode physique pour la déterminer.

Il existe encore d'autres méthodes fondées sur la Mécanique Céleste. La masse du système formé par la Terre et la Lune, rapportée à celle du Soleil comme unité, peut être déterminée par l'étude des perturbations exercées par ce système sur les planètes voisines.

Si  $M_0$  est alors la masse du Soleil,  $n_0$  son moyen mouvement très bien connu,  $\varpi_0$  sa parallaxe moyenne, on a d'après la troisième loi de Képler

$$\sin \varpi_0 = \left[ f \left( M_0 + \frac{n_0^2}{M + m} \right) \right]^{\frac{1}{3}},$$

et comme on a aussi pour la Lune, avec les notations employées plus haut :

$$\sin \varpi_1 = \left[ f (M + m) \right]^{\frac{1}{3}},$$

on en déduit

$$\sin \varpi_0 = \sin \varpi_1 \left[ \frac{n_0^2}{n^2} \frac{M + m}{M_0 + M + m} \right]^{\frac{1}{3}}.$$

Si donc on connaît la parallaxe lunaire par l'une ou l'autre des méthodes expliquées précédemment, et le rapport  $\frac{M + m}{M_0}$  par la théorie des planètes, on aura immédiatement  $\varpi_0$ .

Entre autres inégalités, le mouvement de la Lune en longitude en présente une très sensible dite *inégalité parallaxique*, et dont le coefficient est proportionnel au rapport  $\frac{\sin \varpi_0}{\sin \varpi_1}$ ; si donc on détermine exactement cette inégalité par les observations, on en déduira la parallaxe du Soleil connaissant celle de la Lune.

Le mouvement de la Terre en longitude est lui-même affecté d'une inégalité lunaire dont le coefficient est proportionnel au rapport  $\frac{\sin \varpi_0}{\sin \varpi_1}$  et au rapport des masses de la Lune et de la Terre ; si donc ce rapport est déterminé, par exemple par la constante de la nutation, et si l'on connaît  $\varpi_1$ , on déduira  $\varpi_0$  de l'observation de cette inégalité. A la vérité, cette inégalité est faible ( $6''$ ,5 environ), mais facile à bien déterminer à cause de la simplicité de la théorie du Soleil.

Nous nous bornerons à ces indications sur le problème général de la détermination des constantes astronomiques, qui pour être traité complètement exigerait de longs développements, en particulier sur l'histoire de l'Astronomie.

---

## CHAPITRE VII

### ASTRONOMIE GÉOGRAPHIQUE ET NAUTIQUE

**Éléments géographiques d'un lieu. Généralités.** — En un lieu donné  $M$  à la surface de la Terre, les éléments dont la connaissance est nécessaire pour fixer la position de ce lieu par rapport au ciel, à un instant donné, ou ce que nous appellerons les *éléments absolus* de ce lieu, sont sa latitude  $\varphi$ , la direction du méridien, et le temps local que nous désignerons par  $t$  ou  $T$ , suivant qu'il sera sidéral ou moyen. Mais pour déterminer complètement ce lieu à la surface de la Terre, il faut encore connaître sa longitude par rapport au méridien origine (pour nous celui de Paris, auquel se rapportent les données de la *Connaissance des Temps*), et son altitude. Ce sont des éléments *relatifs*. Nous ne parlerons pas de la détermination des altitudes dans ce qui suivra ; la longitude du lieu sera  $l$ , comptée positivement vers l'Ouest, comme nous l'avons toujours fait.

Le but de ce Chapitre est l'explication des principales méthodes astronomiques que l'on peut employer pour la détermination des éléments géographiques d'un lieu. Nous supposerons d'une façon générale que l'on dispose pour l'observation des instruments les plus simples, théodolite, sextant, cercle méridien portatif, et d'un chronomètre de marche suffisamment connue. Nous désignerons par  $t_i$  ou  $T_i$  l'indication du chronomètre, suivant qu'il est de temps sidéral ou de temps moyen, par  $C$  sa correction, par  $E$  son état absolu ; on pourra d'ailleurs se servir d'un chronomètre de temps moyen pour faire des observations en temps sidéral, en ayant soin de tenir compte de l'avance du temps sidéral sur le temps moyen, soit  $9^s,856$  par heure de temps moyen.

Si  $t_0$  ou  $T_0$  est le temps sidéral ou moyen du premier méridien,



on a comme on sait les relations

$$t = t_i + C, \quad t_0 = t_i + E, \quad t_0 = t + L, \quad E = C + L,$$

où l'on peut remplacer  $t$  par la lettre  $T$ .

On observera toujours des astres dont les coordonnées seront connues par les éphémérides ;  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $H$ ,  $h$ ,  $A$ , désigneront respectivement l'ascension droite, la déclinaison, l'angle horaire, la hauteur et l'azimut. Si  $H_0$  est l'angle horaire au premier méridien pour l'instant de l'observation, on a  $H_0 = H + L$ . Les résultats des observations seront toujours supposés, à moins que le contraire ne soit spécifié, corrigés des erreurs instrumentales, et lorsqu'il s'agit de hauteurs, ce qui est le cas le plus fréquent, corrigés aussi de la réfraction ; il faudra tenir compte aussi de la dépression de l'horizon dans le cas des hauteurs déterminées en mer avec le sextant à l'aide de l'horizon apparent ; cette dernière correction offre toujours une assez grande incertitude, ce qui diminue la précision des observations. Quand il s'agit du Soleil, dont l'observation est particulièrement fréquente, on réduit l'observation au centre de l'astre soit en observant les deux bords et combinant convenablement les résultats, soit en observant un seul bord et tenant compte du demi-diamètre apparent fourni par les éphémérides, et de son altération par la réfraction s'il y a lieu ; il faut en outre tenir compte de la parallaxe, si l'observation doit être réduite au centre de la Terre. On fera de même pour la Lune, dont on ne peut observer qu'un seul bord, et l'observation sera réduite rigoureusement, s'il est nécessaire, au centre de l'astre, comme nous l'avons vu dans la première partie, et rapportée soit au centre de la Terre, soit au lieu même d'observation.

Tous ces détails de préparation des observations ne nous retiendront pas davantage : nous avons en effet expliqué déjà tout ce qui est nécessaire à ce propos. En pratique, ils sont considérablement simplifiés par l'usage de tables appropriées dont nous ne ferons que signaler l'existence : il est d'ailleurs souvent superflu de chercher dans ces réductions une rigueur qui serait peu proportionnée à l'exactitude des observations : mais rien ne peut suppléer à ce sujet à l'expérience acquise par une longue pratique chez un observateur habile.

Une observation quelconque fournit une relation entre des

quantités connues par les éphémérides et les éléments géographiques du lieu. Mais les différentes observations que l'on peut faire ne sont pas également appropriées à la détermination de tel ou tel élément inconnu ; d'ailleurs on n'est pas toujours en mesure de choisir une mode d'observation déterminé, l'état du ciel et les ressources dont on dispose s'y opposant. L'important est donc de savoir profiter le mieux possible des diverses observations que l'on peut faire, en se rendant compte de la précision qui leur correspond dans les résultats. C'est dans cet esprit que nous allons passer en revue les principales méthodes de l'Astronomie géographique et nautique, en laissant de côté bien des détails qui n'intéressent que la pratique pure.

Une dernière remarque terminera ces généralités : en fait on a toujours une connaissance approchée des éléments qui caractérisent le lieu où l'on se trouve, de sorte que d'une façon générale les observations servent plutôt à déterminer des corrections que des quantités complètement inconnues : souvent donc il y aura lieu d'employer dans les calculs les relations différentielles plutôt que les équations mêmes qui correspondent directement aux observations. Si cependant l'emploi de ces équations s'imposait, les éléments à déterminer n'étant connus qu'avec une approximation trop grossière, cette approximation suffirait pour lever l'ambiguïté qui peut se présenter lorsque le problème admet plusieurs solutions.

En particulier, nous supposerons que l'observateur possède toujours avec une certaine approximation l'heure du méridien de Paris, de façon à pouvoir calculer par les éphémérides les coordonnées d'un astre à mouvement propre pour l'instant de l'observation. Il suffit pour réaliser cette condition, que l'observateur soit muni de plusieurs chronomètres réglés sur l'heure du premier méridien, à marche connue et bien étudiée, vérifiée de temps à autre ; par leur contrôle mutuel, on évitera les erreurs provenant des causes fortuites de dérangement.

**Détermination des éléments absolus. Problèmes préliminaires.** — Nous laisserons ici de côté les méthodes propres aux observatoires, ou aux stations de quelque durée, fondées sur l'emploi de l'instrument méridien (susceptible d'ailleurs d'être installé dans le premier vertical), ou du théodolite muni d'un micromètre (mé-

thode de Talcott). Nous avons déjà dit à ce sujet tout ce qui est nécessaire.

A côté de ces méthodes de grande précision, il y en a d'autres plus rapides et mieux appropriées à la pratique journalière : ce sont celles que nous allons passer en revue, en les classant d'après la nature des observations qu'elles utilisent, et nous attachant surtout à celles qui peuvent donner une exactitude satisfaisante.

Les instruments portatifs à la disposition des observateurs étant le théodolite et le sextant, les observations portent uniquement sur les hauteurs surtout, et plus rarement sur les azimuts ou les distances. Il convient donc tout d'abord de rappeler l'ensemble des formules qui relient entre elles les coordonnées horizontales et les coordonnées horaires. Dans le triangle de position PZS (*fig. 49*) formé par le pôle P, le zénith Z et l'astre S, mettons les lettres A, B, C respectivement en P, Z, S; les éléments du triangle seront alors, avec les notations ordinaires, et sans qu'il y ait confusion possible sur le double sens de la lettre A :

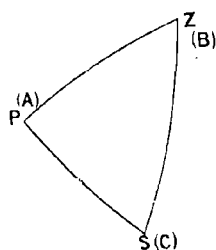


FIG. 49

$$\begin{aligned} A = H, & \quad a = \frac{\pi}{2} - h, \\ B = \pi - A, & \quad b = \frac{\pi}{2} - \delta, \\ C = S, & \quad c = \frac{\pi}{2} - \varphi. \end{aligned}$$

Toutes les formules de la trigonométrie sphérique sont applicables à ce triangle; si  $p$  est le demi-périmètre, en faisant :

$$s = \frac{\varphi + \delta + h}{2} - \frac{\pi}{4},$$

on a

$$p = \frac{\pi}{2} - s, \quad p - a = h - s, \quad p - b = \delta - s, \quad p - c = \varphi - s.$$

Dans chaque cas particulier, on aura à calculer certains éléments du triangle connaissant trois des six éléments, et l'on prendra les formules les mieux appropriées à ce calcul. Il n'y aura pas lieu, bien souvent, de se borner à la recherche de certains éléments

donnés, mais il sera utile de posséder *tous* les éléments du triangle ; car on en a besoin pour former les relations différentielles, et par suite se rendre compte de l'influence des diverses erreurs : il ne faut pas oublier cependant que, dans ce dernier calcul, on pourra se contenter de valeurs approchées pour les éléments.

Voici, rassemblées, les formules qui peuvent être le plus utiles :

$$\begin{aligned} \frac{\sin H}{\cos h} &= \frac{\sin A}{\cos \delta} = \frac{\sin S}{\cos \varphi}, \\ \sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H, \\ \cos h \cos A &= -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos H, \\ \cos h \cos S &= \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos H, \end{aligned}$$

avec les relations différentielles

$$\begin{aligned} \cos h \cdot dA &= \cos S \cos \delta \cdot dH + \sin S \cdot d\delta - \sin h \sin A \cdot d\varphi, \\ dh &= -\sin S \cos \delta \cdot dH + \cos S \cdot d\delta - \cos A \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

Joignons-y deux systèmes de formules de Delambre, souvent applicables, et permettant toujours d'utiles vérifications :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi-h}{4}\right) \sin\frac{A+S}{2} = \sin\frac{H}{2} \cos\frac{\varphi+\delta}{2}, \\ \sin\left(\frac{\pi-h}{4}\right) \cos\frac{A+S}{2} = \cos\frac{H}{2} \sin\frac{\varphi-\delta}{2}, \\ \cos\left(\frac{\pi-h}{4}\right) \sin\frac{A-S}{2} = \sin\frac{H}{2} \sin\frac{\varphi+\delta}{2}, \\ \cos\left(\frac{\pi-h}{4}\right) \cos\frac{A-S}{2} = \cos\frac{H}{2} \cos\frac{\varphi-\delta}{2}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi-\delta}{4}\right) \sin\frac{H+S}{2} = \sin\frac{A}{2} \cos\frac{\varphi-h}{2}, \\ \cos\left(\frac{\pi-\delta}{4}\right) \cos\frac{H+S}{2} = \cos\frac{A}{2} \sin\frac{\varphi+h}{2}, \\ \sin\left(\frac{\pi-\delta}{4}\right) \sin\frac{H-S}{2} = \sin\frac{A}{2} \sin\frac{\varphi-h}{2}, \\ \sin\left(\frac{\pi-\delta}{4}\right) \cos\frac{H-S}{2} = \cos\frac{A}{2} \cos\frac{\varphi+h}{2}. \end{array} \right.$$

Il convient encore, avant l'exposition des méthodes qui doivent nous occuper, de résoudre quelques questions préliminaires.

Il y a souvent intérêt, comme nous l'avons déjà dit bien des fois, à substituer au calcul direct l'usage de développements en série rapidement convergents : c'est ainsi que l'on peut procéder pour le calcul de la hauteur par la formule

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H,$$

lorsque  $\cos H$  est voisin de  $\pm 1$ , ou bien  $\cos \delta$  voisin de zéro.

Supposons donc d'abord l'observation faite près du méridien, de sorte que  $H$  est petit pour un passage supérieur, ou bien voisin

de  $\pi$  pour un passage inférieur ; dans ce second cas nous remplacerons  $\Pi$  par  $\pi + \Pi$ , de sorte que  $\Pi$  sera toujours petit, et nous écrirons

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta \pm \cos \varphi \cos \delta \cos \Pi,$$

les signes supérieur et inférieur correspondant respectivement aux cas d'un passage supérieur ou inférieur, ainsi que dans ce qui suivra.

Appelons  $h_1$  la hauteur méridienne, égale à

$$\begin{array}{llll} \frac{\pi}{2} - \varphi + \delta & \text{pour un passage supérieur du côté du Sud,} & & \\ \frac{\pi}{2} + \varphi - \delta & \text{»} & \text{»} & \text{Nord,} \\ -\frac{\pi}{2} + \varphi + \delta & \text{»} & \text{inférieur} & \text{» Nord,} \\ -\frac{\pi}{2} - \varphi - \delta & \text{»} & \text{»} & \text{» Sud ;} \end{array}$$

on pourra toujours écrire

$$\sin h = \sin h_1 \mp 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{\Pi}{2} ;$$

sous cette forme déjà, il sera facile de calculer  $h_1 - h$  si l'on dispose d'une table des sinus naturels.

On peut encore écrire si l'on veut

$$\sin \frac{h_1 - h}{2} = \pm \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{\Pi}{2}}{\cos \frac{h_1 + h}{2}} .$$

Enfin, une formule établie dans la première partie du cours permet d'écrire le développement en série

$$\begin{aligned} h_1 = h \pm \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos h_1} 2 \sin^2 \frac{\Pi}{2} - \left( \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos h_1} \right)^2 \operatorname{tg} h_1 \cdot 2 \sin^4 \frac{\Pi}{2} \\ \pm \left( \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos h_1} \right)^3 (1 + 3 \operatorname{tg}^2 h_1) \frac{4}{3} \sin^6 \frac{\Pi}{2} - \dots ; \end{aligned}$$

c'est la formule de réduction des observations *circumméridiennes* ; elle permet de calculer la hauteur méridienne  $h_1$  connaissant la hauteur  $h$  à un instant voisin et l'angle horaire correspondant  $\Pi$ .

Le calcul est facilité par des tables qui donnent en secondes d'arc les quantités  $2 \sin^2 \frac{H}{2}$  et  $2 \sin^4 \frac{H}{2}$  (ou leurs logarithmes),  $H$  étant exprimé en temps.

De petites tables fournissent aussi les limites relatives à  $H$  entre lesquelles on peut se contenter du premier ou des deux premiers termes de la réduction, quand on veut obtenir une approximation donnée.

Considérons maintenant le cas où la déclinaison  $\delta$  est voisine de  $\frac{\pi}{2}$ , la latitude étant supposée positive ; la hauteur est alors voisine de  $\varphi$ , et l'on peut poser  $\varphi = h - x$ ,  $\delta = \frac{\pi}{2} - p$ ,  $x$  et  $p$  étant petits. En écrivant

$$\sin h = \sin (h - x) \cos p + \cos (h - x) \sin p \cos H,$$

développant suivant les puissances de  $p$  et de  $x$ , puis résolvant par rapport à  $x$ , on obtiendra sans peine le développement suivant fort convergent

$$\begin{aligned} h - \varphi &= p \cos H - \frac{p^2}{2} \operatorname{tg} h \sin^2 H + \frac{p^3}{3} \sin^2 H \cos H \\ &- \frac{p^4}{8} \operatorname{tg}^3 h \sin^4 H + \frac{p^4}{24} (4 - 9 \sin^2 H) \operatorname{tg} h \sin^2 H + \dots; \end{aligned}$$

avec la Polaire, on commet toujours une erreur moindre qu'une seconde d'arc, en se bornant aux deux premiers termes en  $p$  et  $p^2$ .

Voici un autre problème qu'il est encore bon de résoudre préalablement une fois pour toutes. On répète souvent, afin d'augmenter la précision, une même observation plusieurs fois à des instants rapprochés ; si par exemple on observe une hauteur, on la mesure une dizaine de fois, plus ou moins, successivement, en notant toujours l'heure de l'observation ; au fond, ceci ne fait qu'une observation. Au lieu de traiter ensuite chaque observation individuellement pour prendre finalement la moyenne des diverses valeurs qu'on en tire pour une même quantité inconnue, il peut être préférable de chercher à remplacer l'ensemble des observations faites par une seule observation fictive, dont il faut déduire les éléments des observations réellement faites : on gagne ainsi du temps, et on perd peu en précision.

Supposons donc que, pour un même astre, on ait des valeurs

correspondantes  $h, H, A ; h_1, H_1, A_1 ; \dots h_n, H_n, A_n$ , de la hauteur, de l'angle horaire et de l'azimut, et désignons par  $i$  l'un quelconque des indices 1, 2, ...,  $n$ . Pour plus de généralité, supposons encore que l'astre ayant un mouvement propre, les déclinaisons soient  $\delta, \delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$ .

Par hypothèse les angles horaires  $H_i$  sont suffisamment rapprochés. En considérant l'angle horaire et la déclinaison comme des variables indépendantes, et remarquant que la variation de déclinaison est toujours beaucoup plus petite que celle d'angle horaire, on peut écrire avec une précision suffisante.

$$h_i = h + \frac{\partial h}{\partial H} (H_i - H) + \frac{\partial h}{\partial \delta} (\delta_i - \delta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial H^2} (H_i - H)^2,$$

$$A_i = A + \frac{\partial A}{\partial H} (H_i - H) + \frac{\partial A}{\partial \delta} (\delta_i - \delta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial H^2} (H_i - H)^2 ;$$

on a d'ailleurs, d'après les formules différentielles,

$$\frac{\partial h}{\partial H} = - \sin A \cos \varphi, \quad \frac{\partial A}{\partial H} = \frac{\cos S \cos \delta}{\cos h},$$

d'où l'on tire par un calcul facile :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial H^2} = - \frac{\cos \varphi \cos \delta \cos A \cos S}{\cos h} = - \frac{\cos \varphi \sin A \cos A \cos S}{\sin H},$$

$$\cos^2 h \frac{\partial^2 A}{\partial H^2} = \cos \delta \sin S (\sin \delta \cos h - 2 \sin h \cos \delta \cos S).$$

On peut modifier de bien des façons la forme de ces expressions ; en particulier on peut éliminer  $S$  par l'une ou l'autre des relations

$$\cos H = \cos A \cos S + \sin A \sin S \sin h,$$

ou

$$\cos \varphi \cos A = - \sin \delta \cos h + \sin h \cos \delta \cos S,$$

d'où

$$\frac{\partial^2 h}{\partial H^2} = - \cos \varphi \sin A (\cotg H - \cos \varphi \cos \delta \operatorname{tg} h \sec h \sin H),$$

$$\cos^2 h \frac{\partial^2 A}{\partial H^2} = - \cos \varphi \sin A (\sin \delta \cos h + 2 \cos \varphi \cos A),$$

Considérons maintenant  $\delta$  comme une fonction de  $H$  ; on peut remplacer  $\delta_i - \delta$  par  $\frac{d\delta}{dH} (H_i - H)$ ,  $\frac{d\delta}{dH}$  étant la dérivée de la déclinaison par rapport à l'angle horaire.

raison par rapport à l'angle horaire, fournie par les éphémérides.

Les relations écrites donnent par addition :

$$\begin{aligned} \sum \frac{h_i}{n} &= h + \left( \frac{\partial h}{\partial \Pi} + \frac{\partial h}{\partial \delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \Pi} \right) \left( \sum \frac{H_i}{n} - \Pi \right) + \frac{\partial^2 h}{\partial \Pi^2} \sum \frac{(H_i - \Pi)^2}{2n}, \\ \sum \frac{A_i}{n} &= A + \left( \frac{\partial A}{\partial \Pi} + \frac{\partial A}{\partial \delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \Pi} \right) \left( \sum \frac{H_i}{n} - \Pi \right) + \frac{\partial^2 A}{\partial \Pi^2} \sum \frac{(H_i - \Pi)^2}{2n}. \end{aligned}$$

Supposons alors que l'on choisisse l'époque origine de façon que l'on ait  $\Pi = \sum \frac{H_i}{n}$ ; et remarquons que l'on peut, au degré d'approximation considéré, remplacer  $\frac{(H_i - \Pi)^2}{2}$  par  $2 \sin^2 \frac{H_i - \Pi}{2}$ , quantité facile à calculer d'après les tables de réduction pour les observations circumméridiennes; il viendra

$$\begin{aligned} h &= \sum \frac{h_i}{n} - \frac{\partial^2 h}{\partial \Pi^2} \sum \frac{2 \sin^2 \frac{H_i - \Pi}{2}}{n}, \\ A &= \sum \frac{A_i}{n} - \frac{\partial^2 A}{\partial \Pi^2} \sum \frac{2 \sin^2 \frac{H_i - \Pi}{2}}{n}. \end{aligned}$$

On peut aussi choisir l'époque origine de façon que  $h = \sum \frac{h_i}{n}$ ; il viendra alors

$$\Pi = \sum \frac{H_i}{n} + \frac{\partial^2 h}{\partial \Pi^2} \frac{\partial h}{\partial \Pi} + \frac{\partial h}{\partial \delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \Pi} \sum \frac{2 \sin^2 \frac{H_i - \Pi}{2}}{n};$$

on fera de même si l'on a choisi  $A = \sum \frac{A_i}{n}$ , pour déterminer  $\Pi$ .

Naturellement, pour calculer la correction toujours petite, on pourra se servir de valeurs approchées pour les quantités qui y figurent.

On peut encore observer que la réfraction variant peu dans l'intervalle des observations, il sera de même inutile de corriger chacune des hauteurs observées de la réfraction individuellement; on appliquera seulement à la valeur moyenne  $h$  la réfraction correspondante, sauf peut-être dans le cas d'une grande précision, ou encore d'observations assez voisines de l'horizon.

Il résulte en particulier de ce qui précède que si l'on a observé des hauteurs avec un théodolite le même nombre de fois dans cha-



cune des deux positions de l'instrument, il sera inutile de connaître la constante de la lecture du cercle vertical : elle s'éliminera en effet d'elle-même en faisant la moyenne des lectures observées, corrigées des indications du niveau. La méthode précédente fournira l'angle horaire correspondant à cette hauteur moyenne, ou inversement la hauteur correspondant à l'angle horaire moyen. Plus particulièrement, si l'on a observé l'un des bords du Soleil dans une position, l'autre bord dans l'autre position, la moyenne des lectures correspondra évidemment au centre du Soleil, sans qu'il soit besoin de tenir compte du diamètre apparent.

Enfin, nous résoudrons encore dès maintenant, et afin de n'avoir plus à y revenir, la question suivante, importante en navigation. On a observé la hauteur  $h'$  d'un astre  $S$  en un lieu  $M'$  ; quelle hauteur  $h$  aurait-on observée en un lieu voisin  $M$  ? Considérons le triangle  $Szz'$  (fig. 50) déterminé sur la sphère céleste par la direction de l'astre et les directions des verticales des deux lieux  $M$  et  $M'$ , et représentons de plus la trace  $z'x'$  du plan parallèle au méridien de  $M'$ .

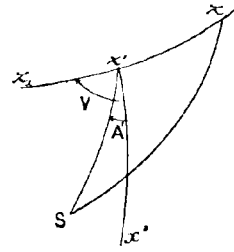


FIG. 50

Dans le triangle  $Szz'$ , on a

$$Sz = \frac{\pi}{2} - h, \quad Sz' = \frac{\pi}{2} - h' ;$$

supposons que l'on connaisse encore l'arc  $zz' = s$ , l'azimut  $A'$  de l'astre  $S$  en  $M'$ , et l'azimut  $V$  de la direction  $zz'$  prolongée au-delà de  $z'$ , en  $M'$ . On a alors

$$\sin h = \sin h' \cos s - \sin s \cos h' \cos (V - A') ;$$

$s$  étant petit par hypothèse, négligeons les termes du troisième ordre par rapport à  $s$ , et écrivons

$$\sin h = \sin h' - s \cos h' \cos (V - A') - \frac{s^2}{2} \sin h' ;$$

on en tirera par une formule connue :

$$h = h' - s \cos (V - A') - \frac{1}{2} s^2 \operatorname{tg} h' \sin^2 (V - A').$$

Cette formule résout la question posée ; car  $s$  correspond à la distance des deux lieux  $M$  et  $M'$  exprimée en arc ; l'angle  $V$  est connu d'après la direction du mouvement du navire, et l'angle  $A'$  est facile à observer, au moins d'une façon suffisamment approchée.

Arrivons maintenant aux méthodes mêmes de détermination des éléments géographiques absolus d'un lieu donné.

**Observation d'une culmination.**— Il est facile d'observer avec précision la hauteur maxima ou minima d'un astre ; il suffit de commencer l'observation un peu avant que cette hauteur soit atteinte, et de suivre le mouvement de l'astre en hauteur à l'aide de la vis de rappel qui commande les petits mouvements de l'instrument, en tournant cette vis toujours dans le même sens, jusqu'au moment où il deviendrait nécessaire d'agir dans l'autre sens. Soit alors  $h$  la hauteur observée ; si  $h_1$  désigne la hauteur méridienne de l'astre, dont nous avons rappelé la valeur ci-dessus en fonction de  $\delta$  et de  $\varphi$  suivant les cas, on aura, s'il s'agit d'une étoile fixe et si l'on suppose l'observateur fixe, l'égalité  $h_1 = h$ , et l'on en déduira la latitude  $\varphi$ , connaissant la déclinaison  $\delta$ .

Cette même observation déterminerait le temps local et la direction du méridien, si l'on notait en même temps l'indication du chronomètre et la direction du vertical de l'observation : mais on n'obtiendrait qu'une approximation grossière, car le mouvement en hauteur étant très peu sensible près du méridien, on n'aurait aucune précision dans l'estimation des temps et de la position.

Supposons maintenant que l'astre observé ait un mouvement propre, l'observateur étant toujours fixe ; dans ces conditions, la hauteur maxima ou minima ne correspond pas exactement au moment du passage au méridien : d'après la valeur de  $dh$ , on a, pour caractériser le moment de la vraie culmination, la relation

$$-\sin S \cos \delta \cdot dH + \cos S \cdot d\delta = 0,$$

d'où :

$$\sin H = \frac{\cos h}{\cos \varphi \cos \delta} \cos S \frac{d\delta}{dH}.$$

On en déduit avec une approximation suffisante d'après la formule de réduction des observations circumméridiennes, et en

remarquant que  $\Pi$  est très petit (ou très voisin de  $\pi$ ), et que  $\cos S$  est très voisin de  $\pm 1$  :

$$h_1 = h \pm \frac{1}{2} \frac{\cos h}{\cos \varphi \cos \delta} \left( \frac{d\delta}{d\Pi} \right)^2.$$

La latitude est suffisamment connue pour pouvoir calculer le terme correctif; la quantité  $\frac{d\delta}{d\Pi}$  est la dérivée de la déclinaison par rapport à l'angle horaire, immédiatement fournie par les éphémérides.

Dans l'expression de  $h_1$  en fonction de la latitude et de la déclinaison, figure la déclinaison  $\delta$  qui se rapporte au moment de l'observation; si l'on veut y introduire la déclinaison  $\delta_1$  qui se rapporte au moment du passage au méridien, on observe que l'on a, en appelant  $\Pi_1$  l'angle horaire correspondant,

$$\delta = \delta_1 + (\Pi - \Pi_1) \frac{d\delta}{d\Pi};$$

en tenant compte des valeurs de  $\Pi$  et de  $\Pi_1$  dans les divers cas possibles, on voit sans peine que l'on a toujours

$$h_1 = h \mp \frac{1}{2} \frac{\cos h}{\cos \varphi \cos \delta_1} \left( \frac{d\delta}{d\Pi} \right)^2;$$

cette fois,  $h_1$  est la hauteur méridienne exprimée en fonction de la latitude et de la déclinaison méridienne  $\delta_1$ .

Supposons enfin l'observateur en mouvement, ainsi qu'il arrive en mer. Soit  $\Pi_0$  l'angle horaire de l'astre par rapport au premier méridien, et considérons  $\delta$ ,  $\varphi$  et  $L$  comme fonctions de  $H_0$ ; comme on a  $\Pi + L = H_0$ , la valeur générale de  $dh$  montre que le maximum (ou minimum) de  $h$  a lieu pour

$$0 = -\sin S \cos \delta (dH_0 - dL) + \cos S \cdot d\delta - \cos A \cdot d\varphi,$$

d'où :

$$\sin \Pi = \frac{\cos h}{\cos \varphi \cos \delta} \frac{\cos S \cdot d\delta - \cos A \cdot d\varphi}{dH_0 - dL}.$$

On aura ainsi l'angle horaire  $\Pi$  en remplaçant  $\sin \Pi$  par  $\Pi$  ou  $\pi - \Pi$ ,  $\cos S$  et  $\cos A$  par  $+1$  ou  $-1$ , suivant les cas; on appliquera ensuite la formule de réduction des circumméridiennes comme

plus haut, mais en calculant  $h_1$  à l'aide de la déclinaison  $\delta$  relative à l'observation.

Le plus souvent l'utilité de ces corrections sera illusoire, eu égard à la précision des observations.

**Observation d'une hauteur et du chronomètre.** — L'observation d'une hauteur (et par là nous pouvons entendre que plusieurs observations voisines ont été fondues en une seule comme nous l'avons dit plus haut) fournit l'équation

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H,$$

entre les éléments  $\varphi$  et  $H$ ; ce dernier équivaut ici à la connaissance du temps local, puisque si  $t_i$  est l'indication observée du chronomètre, supposé sidéral, on a  $t_i + C = \alpha + H$ , d'où la correction  $C$ ; si le chronomètre est de temps moyen, le temps sidéral local  $\alpha + H$  sera converti d'abord en temps moyen (ce qui nécessite une connaissance approchée de la longitude), et en comparant le résultat à  $T_i$ , on aura encore la correction.

Si l'on a observé le Soleil, au lieu d'employer l'ascension droite, on utilisera l'équation du temps  $e$ , facile à interpoler pour le moment de l'observation, et le temps moyen  $T$  sera égal à  $e - H$ , d'où résulte immédiatement la correction d'un chronomètre de temps moyen.

Supposons l'une des deux quantités  $\varphi$  ou  $H$  connue; on peut alors déterminer l'autre: mais avant tout, rendons-nous compte de l'influence des erreurs de l'observation et des données. En supposant la déclinaison parfaitement connue, on a la formule différentielle

$$\begin{aligned} dh &= - \sin S \cos \delta \cdot dH - \cos A \cdot d\varphi \\ &= - \sin A \cos \varphi \cdot dH - \cos A \cdot d\varphi, \end{aligned}$$

d'où

$$d\varphi = - \sec A \cdot dh - \cos \varphi \operatorname{tg} A \cdot dH,$$

et

$$dH = - \frac{dh}{\sin A \cos \varphi} - \frac{d\varphi}{\operatorname{tg} A \cos \varphi}.$$

On voit immédiatement par là que l'observation conviendra d'autant mieux à la détermination de  $\varphi$  que l'azimut sera plus voi-

sin de 0 ou de  $\pi$ , c'est-à-dire que l'on sera plus près du méridien ; au contraire, pour avoir des circonstances favorables à la détermination de H, il faudra que A soit le plus voisin possible de  $\pm \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire que l'on soit près du premier vertical.

L'erreur  $dH$  ou  $d\varphi$  est sans influence dans le méridien ou dans le premier vertical ; mais l'erreur  $dh$  se reporte toujours avec un coefficient au moins égal à 1 sur  $\varphi$  ou H ; son influence sur H est d'autant plus grande que la latitude est plus élevée.

Enfin, on voit encore que si l'on observe une étoile qui ne puisse pas passer au premier vertical, il y aura lieu de la prendre dans le voisinage de sa plus grande digression.

Étudions maintenant la résolution de l'équation fondamentale, en supposant d'abord le temps connu. Le procédé général consiste à poser

$$\sin \delta = m \sin M, \quad \cos \delta \cos H = m \cos M,$$

d'où

$$\cos (\varphi - M) = \frac{\sin h}{m}.$$

Il peut y avoir une double solution ; mais l'ambiguïté n'existe pas pratiquement, si l'on a observé loin du premier vertical.

Imaginons maintenant que l'on ait observé près du méridien. Ceci peut se faire d'abord avec une étoile voisine du pôle, de préférence la Polaire, au moins dans l'hémisphère Nord. On a alors, comme nous l'avons vu, avec une précision suffisante

$$\varphi = h - p \cos H + \frac{p^2}{2} \operatorname{tg} h \sin^2 H,$$

$p$  désignant la distance polaire de l'étoile.

Des tables publiées par les éphémérides facilitent le calcul de cette formule : elles sont spécialement destinées à l'usage des navigateurs.

Considérons maintenant le cas d'une étoile quelconque prise dans le voisinage du méridien, c'est-à-dire ce qu'on appelle les *observations circumméridiennes*.

La hauteur méridienne  $h_1$  est déterminée par la hauteur observée  $h$ , d'après la formule établie plus haut

$$h_1 = h \pm \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos h_1} \cdot 2 \sin^2 \frac{H}{2} - \left( \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos h_1} \right)^2 \operatorname{tg} h_1 \cdot 2 \sin^4 \frac{H}{2},$$

et de  $h_1$  on conclut la latitude; on se borne toujours aux termes ici écrits, le dernier étant lui-même souvent négligeable. Si  $h_1$  qui figure dans la première correction était insuffisamment connu en première approximation, on recommencerait le calcul.

Si l'on a plusieurs observations successives, on aura en faisant la moyenne

$$h_1 = \sum \frac{h}{n} \pm \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos h_1} \sum \frac{2 \sin^2 \frac{\Pi}{2}}{n} - \left( \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos h_1} \right)^2 \operatorname{tg} h_1 \sum \frac{2 \sin^4 \frac{\Pi}{2}}{n};$$

mais il vaut souvent mieux réduire chaque observation séparément, afin d'estimer l'erreur moyenne, d'après les résidus.

Ce qui précède suppose implicitement que l'on a observé une étoile. Imaginons maintenant que l'astre observé ait un mouvement propre, soit par exemple le Soleil, ainsi qu'il arrive fréquemment.

Pour réduire en bloc les observations, il faudra, dans la dernière formule établie, prendre pour  $\delta$ , tant dans  $h_1$  que dans les coefficients des termes de correction, la déclinaison du Soleil pour l'instant moyen des observations. Si l'on veut réduire chaque observation individuellement, il faudra au contraire prendre pour  $\delta$  la déclinaison du Soleil qui correspond au moment de chaque observation.

Il peut être plus commode de se servir uniformément de la déclinaison méridienne  $\delta_0$  partout. On procède alors comme il suit : le passage étant supposé supérieur, on a comme plus haut  $\delta = \delta_0 + \frac{d\delta}{d\Pi} \Pi$ , et par suite l'équation

$$\sin h = \sin \varphi \sin \left( \delta_0 + \frac{d\delta}{d\Pi} \Pi \right) + \cos \varphi \cos \left( \delta_0 + \frac{d\delta}{d\Pi} \Pi \right) \cos \Pi;$$

ou en développant par rapport à  $\frac{d\delta}{d\Pi} \Pi$ , et négligeant le carré de cette quantité,

$$\begin{aligned} \sin h = \sin \varphi \sin \delta_0 + \cos \varphi \cos \delta_0 \cos \Pi + \Pi \frac{d\delta}{d\Pi} \sin (\varphi - \delta_0) \\ + 2 \cos \varphi \sin \delta_0 \sin^2 \frac{\Pi}{2} \frac{d\delta}{d\Pi}; \end{aligned}$$

le dernier terme est toujours très petit, et on peut le négliger d'autant plus qu'il change de signe avec  $\Pi$ , de sorte que si l'on a eu soin de répartir les observations de part et d'autre du méridien

d'une façon à peu près symétrique, son influence s'annule dans la moyenne des résultats. Posons alors

$$\sin H_0 = \frac{\sin(\varphi - \delta_0)}{\cos \varphi \cos \delta_0} d\delta,$$

de sorte que  $H_0$  est précisément l'angle horaire qui correspond à la hauteur maxima, d'après ce qu'on a vu plus haut. On peut écrire

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta_0 + \cos \varphi \cos \delta_0 (\cos H + H \sin H_0);$$

or

$$\cos(H - H_0) = \cos H \left(1 - 2 \sin^2 \frac{H_0}{2}\right) + \left(H - \frac{H^3}{6} \dots\right) \sin H_0;$$

en négligeant pour la même raison que ci-dessus le terme en  $H^3$ , et remplaçant  $\cos H$  par sa valeur approchée 1 dans le coefficient du très petit terme en  $\sin^2 \frac{H_0}{2}$ , on a

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta_0 + \cos \varphi \cos \delta_0 (\cos(H - H_0) + 2 \cos \varphi \cos \delta_0 \sin^2 \frac{H_0}{2});$$

le dernier terme est ici conservé pour le cas où l'on recherche une extrême précision, parce que, quoique fort petit, son influence reste la même pour chaque observation.

On peut donc écrire finalement

$$\sin h = \cos(\varphi - \delta_0) - 2 \cos \varphi \cos \delta_0 \sin^2 \frac{H - H_0}{2} + 2 \cos \varphi \cos \delta_0 \sin^2 \frac{H_0}{2};$$

ou encore

$$\sin h = \cos(\varphi - \delta'_0) - 2 \cos \varphi \cos \delta_0 \sin^2 \frac{H - H_0}{2},$$

en faisant

$$\delta'_0 = \delta_0 + \frac{\cos \varphi \cos \delta_0}{\sin(\varphi - \delta_0)} \cdot 2 \sin^2 \frac{H_0}{2}.$$

Posant donc  $h_1 = \frac{\pi}{2} - (\varphi - \delta'_0)$ , suivant que le passage a lieu du côté du Sud ou du côté du Nord, on a comme dans le cas général, la formule de réduction

$$h_1 = h + \frac{\cos \varphi \cos \delta_0}{\cos h_1} 2 \sin^2 \frac{H - H_0}{2} - \left(\frac{\cos \varphi \cos \delta_0}{\cos h_1}\right)^2 \operatorname{tg} h_1 \cdot 2 \sin^4 \frac{H - H_0}{2} + \dots$$

En résumé on opère, à un détail près relatif à  $\delta'_0$ , comme pour une étoile fixe, mais en comptant les angles horaires à partir du moment de la hauteur maxima.

La formule de réduction des observations circumméridiennes, réduite à sa partie principale, est

$$h_1 = h \pm \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos h_1} 2 \sin^2 \frac{H}{2};$$

elle montre que, pour éviter les grandes corrections, il faudra prendre des astres qui ne culminent pas dans le voisinage du zénith. En différentiant par rapport à  $H$ , on a

$$dh_1 = \pm \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos h_1} \sin H \cdot dH,$$

et l'on voit par là qu'une erreur sur l'heure sera d'autant moins influente sur la moyenne des résultats, que les observations auront été disposées plus symétriquement par rapport au méridien.

On peut obtenir des résultats satisfaisants avec les observations circumméridiennes, même lorsqu'on ignore la correction du chronomètre, à la condition de ne pas rechercher une grande précision; et l'on peut même obtenir de cette façon une valeur approchée de la correction du chronomètre. Supposons par exemple que l'on ait deux observations de hauteurs,  $h$  et  $h'$ ; les angles horaires correspondants sont  $H$  et  $H'$ , et l'on connaît seulement la différence  $H' - H$  donnée par l'observation. En posant  $p = \pm \frac{\cos \varphi \cos \delta}{2 \cos h_1}$ , on a avec une précision suffisante ici :

$$h_1 = h + pH^2, \quad h_1 = h' + pH'^2,$$

d'où, en retranchant :

$$\frac{H' + H}{2} = \frac{\frac{1}{4}(h - h')}{p \frac{H' - H}{2}},$$

et en ajoutant :

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{h + h'}{2} + p \left( \frac{H' - H}{2} \right)^2 + p \left( \frac{H' + H}{2} \right)^2 \\ &= \frac{h + h'}{2} + p \left( \frac{H' - H}{2} \right)^2 + \frac{\left[ \frac{1}{4}(h - h') \right]^2}{p \left( \frac{H' - H}{2} \right)^2}; \end{aligned}$$



on a donc ainsi  $h_1$  et aussi  $\frac{H + H'}{2}$ , ce qui fournit la correction du chronomètre.

On peut même supposer qu'ayant trois observations de hauteurs  $h, h', h''$ , on ait seulement des nombres proportionnels aux temps qui séparent les observations deux à deux ; c'est ce qui arriverait si l'on se servait d'un compteur de temps quelconque.

On a alors, en appelant  $H, H', H''$  les angles horaires,

$$h_1 = h + pH^2, \quad h_1 = h' + pH'^2, \quad h_1 = h'' + pH''^2,$$

et de plus

$$\frac{H' - H}{k'} = \frac{H'' - H}{k''} = \lambda,$$

$k'$  et  $k''$  étant des nombres connus.

On a alors facilement les éléments de la solution par les formules :

$$H' + H = \frac{h - h'}{pk'\lambda}, \quad H'' + H = \frac{h - h''}{pk''\lambda},$$

$$\frac{h - h'}{k'} - \frac{h - h''}{k''} = p(k' - k'')\lambda^2.$$

Si, en particulier, on avait  $k' = -1, k'' = 1$ , de façon que les observations fussent équidistantes, il viendrait simplement

$$p\lambda^2 = h - \frac{h' + h''}{2},$$

$$h_1 = h + \frac{\left[ \frac{1}{4}(h' - h'') \right]^2}{h - \frac{h' + h''}{2}}.$$

On étendrait facilement l'emploi des mêmes principes au cas de plusieurs observations.

Examinons maintenant la détermination du temps, en supposant la latitude connue. On peut calculer l'angle horaire simplement par la formule

$$\cos H = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta},$$

qui sera surtout avantageuse si l'on veut réduire individuellement plusieurs observations d'une même étoile. Mais on a aussi

$$\sin \frac{H}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\cos \varphi \cos \delta}}, \quad \operatorname{tg} \frac{H}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}}.$$

en remplaçant  $p$ ,  $p - a$ ,  $p - b$ ,  $p - c$  par les valeurs indiquées précédemment.

En particulier, on peut supposer qu'on a observé en mer le lever ou le coucher d'un astre ; on calcule alors la hauteur véritable  $h$  comme nous l'avons indiqué dans la première Partie du cours ; mais on n'a ainsi que peu de précision, à cause de l'incertitude de la dépression de l'horizon et de la réfraction horizontale.

On peut facilement faire concourir à la détermination de l'heure deux observations du même astre, faites à quelque temps l'une de l'autre. Les deux équations

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \Pi, \\ \sin h' &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \Pi',\end{aligned}$$

donnent en effet, par soustraction,

$$\sin \frac{\Pi + \Pi'}{2} = \frac{\sin \frac{h - h'}{2} \cos \frac{h + h'}{2}}{\cos \varphi \cos \delta \sin \frac{\Pi' - \Pi}{2}}$$

et tout est connu dans le second membre.

On pourrait aussi ajouter et écrire

$$\begin{aligned}\cos \frac{\Pi + \Pi'}{2} &= \frac{\frac{\sin h + \sin h'}{2} - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta \cos \frac{\Pi - \Pi'}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{h + h'}{2} \cos \frac{h - h'}{2} - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta \cos \frac{\Pi - \Pi'}{2}},\end{aligned}$$

si c'est plus avantageux.

Si l'astre a un mouvement propre, supposons que sa déclinaison  $\delta$  augmente de  $d\delta$  en passant de la première à la seconde observation, et soit  $h' - dh$  la hauteur que l'on aurait observée la seconde fois si la déclinaison n'avait pas varié ; d'après la formule différentielle, on a en appelant  $S$  l'angle à l'astre,  $dh = \cos S \cdot d\delta$  ; on remplacera donc simplement dans les formules précédentes  $h'$  par  $h' - \cos S \cdot d\delta$ .

**Observation d'une plus grande digression.** — Nous allons examiner maintenant le parti que l'on peut tirer d'une observation en azimut faite avec un théodolite ou un cercle azimutal. Si la direction du méridien est connue, l'azimut sera lui-même connu par l'observation ; sinon, la comparaison de la lecture faite au cercle horizontal avec l'azimut véritable permettra de déterminer la lecture qui correspond au méridien, et par suite la direction du méridien.

D'une façon générale, les observations en azimut ont l'avantage d'être à peu près indépendantes de la réfraction ; mais l'influence des erreurs instrumentales est plus grande que sur les observations de hauteur, et il faut tenir compte de ces corrections avec le plus grand soin.

La lecture d'azimut relative à la plus grande digression d'une étoile circumpolaire se fait avec grande précision, puisqu'alors l'azimut est maximum ou minimum. On a, pour cette position de l'étoile, la relation

$$\sin A \cos \varphi = \pm \cos \delta,$$

suivant qu'on est à l'Ouest ou à l'Est ; si donc on connaît  $\varphi$ , on aura l'azimut  $A$ , d'où la direction du méridien ; si on connaît  $A$ , on en déduira  $\varphi$ .

La relation différentielle

$$\cotg A \cdot dA - \operatorname{tg} \varphi \cdot d\varphi = 0,$$

montre que pour déterminer l'azimut on devra prendre  $A$  petit, et par suite l'étoile voisine du pôle ; au contraire, pour déterminer  $\varphi$ , on devra prendre l'étoile passant au méridien le plus près possible du zénith.

Supposons que nous ayons deux observations semblables, donnant les deux relations

$$\begin{aligned} \sin A \cos \varphi &= \varepsilon \cos \delta, \\ \sin A' \cos \varphi &= \varepsilon' \cos \delta', \end{aligned}$$

$\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  étant égaux à  $\pm 1$ , suivant les cas. On peut alors déterminer à la fois  $\varphi$  et la direction du méridien ; on connaît en effet, par l'observation du cercle horizontal, la différence  $A - A'$ , et comme

$$\frac{\sin A}{\sin A'} = \frac{\varepsilon \cos \delta}{\varepsilon' \cos \delta'},$$

on en tire facilement  $A$  et  $A'$ , et finalement  $\varphi$ ; si par exemple  $\varepsilon\varepsilon' = -1$ , on a

$$\operatorname{tg} \frac{A + A'}{2} = - \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta - \delta'}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta + \delta'}{2}} \operatorname{tg} \frac{A - A'}{2};$$

si en particulier  $\delta = \delta'$ , on a  $A + A' = 0$ .

Supposons encore qu'au lieu d'avoir observé l'azimut même de la plus grande digression, soit  $A$ , on ait observé un azimut voisin  $A'$ ; il est facile de réduire  $A'$  à  $A$ , du moins connaissant le temps. En effet, si  $H$  et  $H'$  sont les angles horaires,  $h$  la hauteur correspondant à  $A$ , on a, d'après une formule établie ci-dessus, et en remarquant qu'ici l'angle à l'astre  $S$  est droit :

$$A = A' \pm \frac{\sin \delta \cos \delta}{\cos h} \cdot 2 \sin^2 \frac{H' - H}{2};$$

d'ailleurs ici :

$$\cos H = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \delta}, \quad \cos h = \cos \varphi \sin H.$$

**Observation de l'azimut et du chronomètre.** — L'équation qui convient à ce cas est évidemment

$$\cos \varphi \operatorname{tg} \delta - \sin \varphi \cos H + \sin H \cotg A = 0,$$

avec la relation différentielle

$$\cos h \cdot dA - \cos \delta \cos S \cdot dH + \sin h \sin A \cdot d\varphi - \sin S \cdot d\delta = 0.$$

On peut ainsi, sans qu'il soit nécessaire de développer les formules, 1° déterminer  $\varphi$  connaissant  $A$  et  $H$ ; et alors il faut observer près du zénith et près du premier vertical;

2° déterminer  $H$  connaissant  $\varphi$  et  $A$ ; on doit alors observer près du zénith et près du méridien;

3° déterminer  $A$  connaissant  $\varphi$  et  $H$ ; dans ce cas, il faut observer une étoile voisine du pôle, de façon que  $\sin A$  et  $\cos \delta$  soient tous deux petits. En particulier, dans notre hémisphère, on prendra la Polaire; pour les observations de médiocre précision, on trouvera dans la Connaissance des Temps une table fournissant précisément l'azimut de la Polaire en fonction de la latitude et de l'angle horaire, de sorte que tout calcul sera évité.

**Observation de la hauteur et de l'azimut.** — L'équation fondamentale qui correspond à ce cas sera :

$$\sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos A,$$

avec la relation différentielle

$$\sin H \cos \varphi \cdot dA + \cos S \cdot dh + \cos H \cdot d\varphi - d\delta = 0.$$

On peut ainsi déterminer A connaissant  $\varphi$  et  $h$  ; il vaudra mieux alors se servir des relations

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-c)}{\cos \varphi \cos h}}, \text{ ou } \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-b)}{\sin(p-a) \sin(p-c)}}.$$

Pour avoir des circonstances favorables à cette détermination, l'angle horaire devra être voisin de  $\pm \frac{\pi}{2}$  ; en particulier, on pourra se servir du lever ou du coucher d'un astre, mais comme nous l'avons déjà vu, sans pouvoir compter sur une grande précision. On pourra aussi déterminer  $\varphi$  connaissant  $h$  et  $A$ , et alors on devra être dans le voisinage du méridien pour avoir de bonnes conditions. Si  $A$  était nul, ou égal à  $\pi$ , on aurait simplement

$$\sin \delta = \mp \cos(h \pm \varphi) ;$$

si donc  $A$  est voisin de 0 ou de  $\pi$ , (et dans ce dernier cas on remplacera  $A$  par  $A + \pi$ , de façon que  $A$  soit toujours petit) on écrira

$$\sin \delta = \sin \delta_1 \pm 2 \cos \varphi \cos h \sin^2 \frac{A}{2},$$

$\delta_1$ , étant égal à  $-\frac{\pi}{2} \pm (\varphi + h)$  pour un passage supérieur ou inférieur du côté du Sud, à  $\frac{\pi}{2} \pm (\varphi - h)$  pour un passage supérieur ou inférieur du côté du Nord, et l'on pourra traiter cette équation comme l'équation analogue relative aux observations circumméridiennes, pour déterminer  $\varphi$  et même la direction du méridien, si celle-ci n'est qu'imparfaitement connue ; ces indications suffisent sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans d'autres détails, parce que ces observations sont rares, et en général peu avantageuses.

**Observation de la variation du mouvement en hauteur ou en azimut.**— Supposons que dans un temps relativement court  $dH$ , on ait observé la variation de hauteur  $dh$ , ou d'azimut  $dA$ , d'un astre ; on pourra écrire avec quelque approximation :

$$dh = -\sin A \cos \varphi \cdot dH, \quad \cos h \, dA = \cos S \cos \delta \cdot dH,$$

ou plutôt

$$\cos h \, dA = \left( \frac{\sin \varphi}{\cos h} - \sin \delta \operatorname{tg} h \right) dH,$$

à cause de la relation

$$\sin \varphi = \sin \delta \sin h + \cos h \cos \delta \cos S.$$

On en tire

$$\cos \varphi = -\frac{dh}{\sin A \cdot dH}, \quad \sin \varphi = \sin \delta \sin h + \frac{\cos^2 h \cdot dA}{dH}.$$

La première formule donnera  $\varphi$ , si l'on connaît  $A$  ; si l'on a observé près du premier vertical, on pourra remplacer  $\sin A$  par  $\pm 1$ .

La deuxième formule donnera encore  $\varphi$ , si l'on connaît  $h$  en même temps. Ces observations qui ne donnent qu'une faible approximation sont faciles avec le Soleil ; il suffit d'observer le temps  $dH$  qui sépare les passages des deux bords à un même fil fixe horizontal ou vertical ; si  $s$  est le demi-diamètre apparent, on a alors  $|dh| = 2s$ , ou bien  $|\cos h \cdot dA| = 2s$ .

Si dans l'observation de  $dH$  on a observé en même temps  $h$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin S &= -\frac{dh}{dH}, \\ \sin \varphi &= \sin \delta \sin h + \cos \delta \cos h \cos S, \end{aligned}$$

et calculer ainsi  $\varphi$  par l'intermédiaire de  $S$ .

En particulier, ceci peut être appliqué à l'observation du temps que le Soleil met à disparaître de l'horizon.

**Observation d'une distance.** — Pour déterminer la direction du méridien, il n'est pas nécessaire d'avoir un cercle azimutal ou un théodolite ; l'observation en azimut peut être remplacée par l'observation de la position relative d'un astre et d'un objet fixe. Supposons donc que  $S'$  soit un objet terrestre fixe, de hauteur connue  $h'$  ; si l'on connaît son azimut  $A'$ , on connaîtra par là même la direction du méridien. Soit alors un astre  $S$ , et supposons qu'à un ins-

tant donné on mesure sa distance angulaire  $D$  à  $S'$  ; connaissant le temps et la latitude, on peut calculer la hauteur  $h$  et l'azimut  $A$  de l'astre ; on doit d'ailleurs employer ici les coordonnées apparentes, affectées de la réfraction et de la parallaxe, ce qui sera toujours facile à obtenir ; au surplus on peut supposer que la hauteur  $h$  a été mesurée directement en même temps que  $D$ . Dans ces conditions, on connaît dans le triangle  $ZSS'$  les trois côtés  $ZS = \frac{\pi}{2} - h$ ,  $ZS' = \frac{\pi}{2} - h'$ ,  $SS' = D$ , et il est facile d'en conclure l'angle en  $Z$ , égal à  $A - A'$ , par une des formules connues, par exemple en faisant  $s = \frac{1}{2}(h + h' + D)$  :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A - A'}{2} = \frac{\sin(s - h) \sin(s - h')}{\cos s \cos(s - D)}$$

comme on a déterminé  $A$ , on en tire  $A'$ , en faisant attention aux signes, c'est-à-dire à la disposition des objets observés.

**Observation de deux hauteurs et du chronomètre.** — On peut déterminer à la fois la latitude et le temps local en combinant ensemble deux observations de hauteur portant sur deux astres quelconques, avec les indications correspondantes du chronomètre. C'est là un important problème général, connu souvent sous le nom de *problème de Douwes* ; ses nombreux cas particuliers sont surtout intéressants.

Si  $S$  et  $S'$  sont les positions des deux astres sur la sphère céleste aux instants des deux observations, le problème revient à la construction ou à la résolution du quadrilatère sphérique  $PZSS'$  (*fig. 51*).

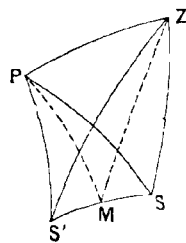


FIG. 51

Géométriquement la solution est simple : le triangle  $PSS'$  est connu puisque  $PS$ ,  $PS'$  sont les distances polaires des deux astres, l'angle  $SPS'$  la différence des angles horaires, qui résulte de la différence des temps des deux observations. Le point  $Z$  est alors fourni par l'intersection de deux petits cercles décrits de  $S$  et  $S'$  comme pôles avec les distances zénithales observées comme rayons sphériques. On voit par là que le problème sera susceptible d'une double solution en général ; mais pratiquement,

il n'y aura pas d'ambiguïté. On voit encore immédiatement que le point  $Z$  sera d'autant mieux déterminé que l'angle sous lequel se couperont les deux petits cercles, égal à l'angle  $SZS'$ , sera plus voisin d'être droit, c'est-à-dire que la différence des azimuts des deux observations sera plus voisine d'un angle droit : en effet, un point est d'autant mieux déterminé graphiquement par l'intersection de deux lignes que l'angle de ces deux lignes est moins aigu.

On peut donner du problème une autre interprétation géométrique qui a une grande portée pratique, comme la suite le montrera. Remarquons que la latitude  $\varphi$  et le temps sidéral local  $t$ , en un lieu donné et à un instant déterminé, ne sont autres que la déclinaison et l'ascension droite du zénith  $Z$  du lieu. Supposons donc que le chronomètre étant sidéral, et de marche nulle (il est toujours facile de tenir compte de la marche durant l'intervalle des observations), on ait déterminé la hauteur  $h$  d'un astre  $S$  au temps

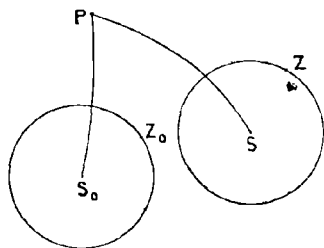


FIG. 52

$t_i$  du chronomètre : cette observation fournit un lieu géométrique du zénith  $Z$  au temps  $t_i$ , sur la sphère céleste, soit le petit cercle tracé du point  $S$  comme centre avec le rayon sphérique  $\frac{\pi}{2} - h$ , et que nous appellerons le *cercle de hauteur* relatif à l'observation faite (*fig. 52*). Fixons-nous maintenant

une heure voisine  $t_{i_0}$  du chronomètre, et cherchons un lieu géométrique sur la sphère céleste du zénith  $Z_0$  correspondant à l'époque  $t_{i_0}$  ; il suffit évidemment de conserver le cercle de hauteur précédent, et de faire tourner son centre autour du pôle  $P$ , de façon à l'amener en une position  $S_0$  telle que l'angle  $S_0 P S$  soit égal à l'angle  $Z_0 P Z$ , c'est-à-dire à  $t_i - t_{i_0}$  ; en d'autres termes, il faut substituer à l'ascension droite  $\alpha$  de l'astre  $S$  une ascension droite fictive égale à  $\alpha + t_{i_0} - t_i$ .

Une seconde observation portant sur un autre astre  $S'$ , et réduite au temps  $t_{i_0}$ , fournira de même un second lieu de  $Z_0$  ; l'intersection convenable des deux cercles de hauteur donnera le point cherché  $Z_0$ , par suite la latitude, complément de  $PZ_0$ , et le temps sidéral vrai  $t_0$  au temps  $t_{i_0}$ , d'où la correction du chronomètre.



Il est encore facile de représenter l'azimut qui correspond à chaque observation. L'azimut A de la première observation est le supplément de l'angle PZS, reproduit en  $PZ_0S_0$  (fig. 53); c'est donc encore, si l'on veut, l'angle compté dans le sens rétrograde que fait la direction  $Z_0x$  du parallèle en  $Z_0$ , prise dans le sens direct, avec la direction  $Z_0T$  tangente au cercle de hauteur en  $Z_0$ , prise dans le sens rétrograde par rapport au centre  $S_0$ .

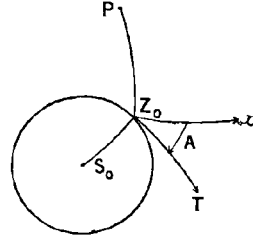


FIG. 53

Venons maintenant à la solution analytique du problème général.

Soient  $h, h'$  les hauteurs observées de S et de S', dont les coordonnées sont respectivement  $\alpha, \delta$ , et  $\alpha', \delta'$ ; si  $t_i$  et  $t'_i$  sont les heures du chronomètre sidéral de correction C, H et H' les angles horaires, on a

$$\begin{aligned} H &= t_i + C - \alpha, & H' &= t'_i + C - \alpha', \\ H' - H &= u = t'_i - t_i - (\alpha' - \alpha); \end{aligned}$$

$u$  est une quantité connue, et il faut déterminer H ou H' ainsi que la latitude  $\varphi$ .

Dans le triangle PS'S, cherchons le côté  $SS' = D$  et l'angle  $PS'S = P$ ; on a

$$\begin{aligned} \cos D &= \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos u, \\ \sin D \sin P &= \cos \delta \sin u, \\ \sin D \cos P &= \sin \delta \cos \delta' - \sin \delta' \cos \delta \cos u; \end{aligned}$$

ou bien en posant

$$m \sin M = \sin \delta, \quad m \cos M = \cos \delta \cos u,$$

il vient

$$\begin{aligned} \sin D \sin P &= \cos \delta \sin u, \\ \sin D \cos P &= m \sin (M - \delta'), \\ \cos D &= m \cos (M - \delta'). \end{aligned}$$

On connaît maintenant dans le triangle ZSS' les trois côtés, et si Q désigne l'angle ZS'S, on peut calculer Q par la formule

$$\sin h = \cos D \sin h' + \sin D \cos h' \cos Q,$$

ou telle autre que l'on pourra préférer, par exemple

$$\operatorname{tg}^2 \frac{Q}{2} = \frac{\cos s \sin (s - h')}{\cos (s - D) \sin (s - h)},$$

avec

$$s = \frac{1}{2}(h + h' + D).$$

L'angle Q n'est déterminé qu'au signe près.

Le triangle PZS' donne enfin

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin \delta' \sin h' + \cos \delta' \cos h' \cos (P - Q), \\ \cos \varphi \sin H' &= \cos h' \sin (P - Q), \\ \cos \varphi \cos H' &= \sin h' \cos \delta' - \sin \delta' \cos h' \cos (P - Q); \end{aligned}$$

en posant

$$n \sin N = \sin h', \quad n \cos N = \cos h' \cos (P - Q),$$

on a encore

$$\begin{aligned} \cos \varphi \sin H' &= \cos h' \sin (P - Q), \\ \cos \varphi \cos H' &= n \sin (N - \delta'), \\ \sin \varphi &= n \cos (N - \delta'); \end{aligned}$$

le problème est ainsi achevé.

Pour lever l'ambiguïté sur le signe de Q, remarquons que le triangle ZSS' donne encore

$$\sin Q = \frac{\cos h \sin (\Lambda' - \Lambda)}{\sin D};$$

donc, en prenant toujours sin D positif, on voit que sin Q aura le signe de sin ( $\Lambda' - \Lambda$ ); or, en général il n'y a pas doute sur le signe de cette dernière quantité, à moins que  $\Lambda' - \Lambda$  ne soit voisin de 0 ou de  $\pi$ , ce qui serait une mauvaise condition comme nous l'avons déjà dit.

Voici une seconde solution d'après Chauvenet. Soit M le milieu de l'arc SS' (fig. 51), et appelons  $h_0$ ,  $\delta_0$ ,  $H_0$  la hauteur, la déclinaison, l'angle horaire de M;  $P_0$ ,  $Q_0$  les angles PMS, ZMS. La formule

$$\cos D = \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos u$$

peut s'écrire

$$\sin^2 \frac{D}{2} = \sin^2 \frac{\delta - \delta'}{2} \cos^2 \frac{u}{2} + \cos^2 \frac{\delta + \delta'}{2} \sin^2 \frac{u}{2}.$$

ce qui devient à l'aide d'un angle auxiliaire  $\chi$  :

$$\begin{aligned} \sin \frac{D}{2} \sin \chi &= \sin \frac{\delta - \delta'}{2} \cos \frac{u}{2}, \\ \sin \frac{D}{2} \cos \chi &= \cos \frac{\delta + \delta'}{2} \sin \frac{u}{2}. \end{aligned}$$

Les triangles PMS, PMS' donnent

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \delta_0 \cos \frac{D}{2} + \cos \delta_0 \sin \frac{D}{2} \cos P_0, \\ \sin \delta' &= \sin \delta_0 \cos \frac{D}{2} - \cos \delta_0 \sin \frac{D}{2} \cos P_0, \end{aligned}$$

d'où, par addition et soustraction,

$$\sin \delta_0 = \frac{\sin \frac{\delta + \delta'}{2} \cos \frac{\delta - \delta'}{2}}{\cos \frac{D}{2}}, \quad \cos P_0 = \frac{\cos \frac{\delta + \delta'}{2} \sin \frac{\delta - \delta'}{2}}{\sin \frac{D}{2} \cos \delta_0}.$$

De la même façon, on a

$$\sin h_0 = \frac{\sin \frac{h + h'}{2} \cos \frac{h - h'}{2}}{\cos \frac{D}{2}}, \quad \cos Q_0 = \frac{\cos \frac{h + h'}{2} \sin \frac{h - h'}{2}}{\sin \frac{D}{2} \cos h_0}.$$

L'angle  $u$  étant supposé compris entre 0 et  $\pi$ , ainsi qu'on peut toujours le faire, on choisira  $P_0$  de la même façon ; quant à  $Q_0$ , on le déterminera évidemment comme plus haut, de façon que  $\sin Q_0$  ait le signe de  $\sin (A' - A)$ .

Le triangle PMZ donne actuellement :

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin \delta_0 \sin h_0 + \cos \delta_0 \cos h_0 \cos (P_0 - Q_0), \\ \cos \varphi \sin H_0 &= \cos h_0 \sin (P_0 - Q_0), \\ \cos \varphi \cos H_0 &= \sin h_0 \cos \delta_0 - \sin \delta_0 \cos h_0 \cos (P_0 - Q_0); \end{aligned}$$

en posant, ce qui est possible évidemment,

$$\begin{aligned} \cos \omega \sin \psi &= \cos h_0 \cos (P_0 - Q_0), \\ \cos \omega \cos \psi &= \sin h_0, \\ \sin \omega &= \cos h_0 \sin (P_0 - Q_0), \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}\cos \varphi \sin H_0 &= \sin \omega, \\ \cos \varphi \cos H_0 &= \cos \omega \cos (\psi + \delta_0), \\ \sin \varphi &= \cos \omega \sin (\psi + \delta_0),\end{aligned}$$

d'où  $\varphi$  et  $H_0$ .

Pour trouver finalement les angles horaires, faisons

$$x = H_0 - \frac{1}{2}(H + H'),$$

de sorte que

$$H = H_0 - x - \frac{u}{2}, \quad H' = H_0 - x + \frac{u}{2}.$$

Les triangles PMS, PMS' donnent

$$\sin \left( \frac{u}{2} + x \right) = \sin \frac{D}{2} \frac{\sin P_0}{\cos \delta}, \quad \sin \left( \frac{u}{2} - x \right) = \sin \frac{D}{2} \frac{\sin P_0}{\cos \delta'},$$

d'où

$$\frac{\sin \left( \frac{u}{2} + x \right)}{\sin \left( \frac{u}{2} - x \right)} = \frac{\cos \delta'}{\cos \delta},$$

et par suite

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\delta + \delta'}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta - \delta'}{2} \operatorname{tg} \frac{u}{2}.$$

Cette solution, peut-être plus longue, est mieux appropriée aux cas particuliers qui vont suivre.

Etablissons maintenant les relations différentielles du problème. On a, en supposant les positions des astres parfaitement connues,

$$\begin{aligned}\cos A \cdot d\varphi + \sin A \cos \varphi \cdot dH + dh &= 0, \\ \cos A' \cdot d\varphi + \sin A' \cos \varphi \cdot dH' + dh' &= 0;\end{aligned}$$

d'ailleurs les erreurs sur les temps d'observation étant  $dt_i$  et  $dt'_i$ , et celle de la correction  $dC$ , on a :

$$dH = dt_i + dC, \quad dH' = dt'_i + dC;$$

et par suite, les équations

$$\begin{aligned}\cos A \cdot d\varphi + \sin A \cos \varphi \cdot dC + dh + \sin A \cos \varphi \cdot dt_i &= 0, \\ \cos A' \cdot d\varphi + \sin A' \cos \varphi \cdot dC + dh' + \sin A' \cos \varphi \cdot dt'_i &= 0,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sin (A' - A) d\varphi &= - \sin A' \cdot dh + \sin A \cdot dh' \\ &\quad + \sin A \sin A' \cos \varphi (dt'_i - dt_i). \\ \sin (A' - A) dC &= \sec \varphi \cos A' \cdot dh - \sec \varphi \cos A \cdot dh' \\ &\quad + \sin A \cos A' \cdot dt_i - \sin A' \cos A \cdot dt'_i. \end{aligned}$$

Il faudra donc, pour diminuer le plus possible les erreurs, choisir la différence  $A' - A$  des azimuts voisine de  $\pm \frac{\pi}{2}$ , ainsi que nous l'avons déjà reconnu. Si alors l'une des observations, la première par exemple, est faite près du méridien, la seconde aura lieu près du premier vertical ; l'erreur de la latitude sera sensiblement celle de la hauteur  $h$ , celle de la correction ne dépendra guère que de celles de  $h'$  et de  $t'_i$ . Ces résultats étaient faciles à prévoir, d'après ce que nous avons dit au sujet de la mesure d'une seule hauteur.

Envisageons maintenant le cas où l'astre observé est le même les deux fois, et supposons d'abord que ce soit une étoile fixe, de sorte que  $\delta = \delta'$ . Dans ces conditions, la seconde solution générale se simplifie : on a successivement

$$\begin{aligned} u = t'_i - t_i, \quad \sin \frac{D}{2} &= \cos \delta \sin \frac{u}{2}, \quad \sin \delta_0 = \frac{\sin \delta}{\cos \frac{D}{2}}, \quad P_0 = \frac{\pi}{2}, \\ \sin \omega &= \cos h_0 \cos Q_0 = \frac{\cos \frac{h+h'}{2} \sin \frac{h-h'}{2}}{\sin \frac{D}{2}}, \\ \cos \psi &= \sin h_0 \sec \omega = \frac{\sin \frac{h+h'}{2} \cos \frac{h-h'}{2}}{\cos \omega \cos \frac{D}{2}}; \end{aligned}$$

l'angle  $\omega$  est choisi entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ , et alors  $\sin \psi$  a le signe de  $\sin Q_0$ , soit celui de  $\sin (A' - A)$ , d'après ce que l'on a vu ; finalement :

$$\begin{aligned} \cos \varphi \sin H_0 &= \sin \omega, & x &= 0, \\ \cos \varphi \cos H_0 &= \cos \omega \cos (\psi + \delta_0), & \Pi &= \Pi_0 - \frac{u}{2}, \\ \sin \varphi &= \cos \omega \sin (\psi + \delta_0), & \Pi' &= \Pi_0 + \frac{u}{2}. \end{aligned}$$

Le triangle PMS étant rectangle en M, on a d'ailleurs directement

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos \frac{u}{2}};$$

et comme on a aussi

$$\cos \frac{D}{2} = \frac{\sin \delta}{\sin \delta_0},$$

on peut ne pas calculer D, mais écrire tout de suite

$$\sin \omega = \frac{\cos \frac{h+h'}{2} \sin \frac{h-h'}{2}}{\cos \delta \sin \frac{u}{2}}, \quad \cos \psi = \frac{\sin \frac{h+h'}{2} \cos \frac{h-h'}{2} \sin \delta_0}{\cos \omega \sin \delta}.$$

Supposons maintenant que l'astre ait un mouvement propre, soit par exemple le Soleil ; comme son mouvement en déclinaison entre les deux observations est toujours assez petit, nous pourrions en négliger le carré. Faisons donc d'abord le calcul précédent en prenant pour  $\delta$  la valeur moyenne des déclinaisons du Soleil qui correspondent aux deux observations : puis appelant  $d\delta$  la demi-différence de ces deux déclinaisons entre la seconde et la première observation, cherchons les corrections  $d\varphi$  et  $dC$  qu'il faut faire subir, à cause de  $d\delta$ , aux valeurs trouvées pour  $\varphi$  et pour la correction C du chronomètre. On peut à cet effet revenir à la solution générale du problème, y remplacer  $\delta$  et  $\delta'$  par  $\delta - d\delta$  et  $\delta + d\delta$ , et voir comment se modifie dans ces conditions les éléments de la solution particulière étudiée plus haut. On a ainsi d'abord

$$d\chi = - \frac{d\delta}{\cos \delta \operatorname{tg} \frac{u}{2}},$$

et en négligeant le carré de  $d\delta$ , on voit que rien n'est changé au calcul de D et  $\delta_0$  ; mais si  $P_0 = \frac{\pi}{2} + dP_0$ , on a

$$dP_0 = d\delta \frac{\cos \delta}{\sin \frac{D}{2} \cos \delta_0} = d\delta \frac{1}{\cos \delta_0 \sin \frac{u}{2}};$$

$h_0$  et  $Q_0$  ne changent pas ; par suite, il vient

$$\cos \varphi \, d\varphi = - \cos \delta_0 \cos h_0 \cos Q_0 \cdot dP_0,$$

d'où :

$$d\varphi \approx - \frac{\sin \omega}{\cos \varphi \sin \frac{u}{2}} d\delta.$$

On a encore dans le triangle PMZ, en appelant  $A_0$  l'azimut de M :

$$\cos \varphi \cdot dH_0 = \cos h_0 \cos A_0 \cdot dP_0,$$

en se servant des côtés PM et ZM qui ne varient pas ; et comme

$$\cos h_0 \cos A_0 = - \sin \delta_0 \cos \varphi + \sin \varphi \cos \delta_0 \cos H_0,$$

il vient :

$$dH_0 = \frac{d\delta}{\sin \frac{u}{2}} (- \operatorname{tg} \delta_0 + \operatorname{tg} \varphi \cos H_0).$$

De plus, on a ici :

$$x = - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \frac{u}{2} \cdot d\delta,$$

et il vient finalement après réductions :

$$dC = dH_0 - x = d\delta \left( - \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \frac{u}{2}} + \frac{\operatorname{tg} \varphi \cos H_0}{\sin \frac{u}{2}} \right).$$

On arriverait aux mêmes résultats en partant des formules différentielles qui conviennent au problème général, mais en tenant compte uniquement cette fois des corrections de déclinaison ; elles sont généralement

$$\begin{aligned} \cos A \cdot d\varphi + \sin A \cos \varphi \cdot dC - \cos S \cdot d\delta &= 0, \\ \cos A' \cdot d\varphi + \sin A' \cos \varphi \cdot dC - \cos S' \cdot d\delta' &= 0, \end{aligned}$$

et ici, d'après nos notations, on doit remplacer  $d\delta$  par  $- d\delta$  et  $d\delta'$  par  $+ d\delta$ , d'où :

$$\begin{aligned} d\varphi &= - d\delta \frac{\sin A' \cos S + \sin A \cos S'}{\sin (A' - A)}, \\ dC &= d\delta \frac{\cos A' \cos S + \cos A \cos S'}{\cos \varphi \sin (A' - A)}. \end{aligned}$$

après remplacement de  $\sin A$ ,  $\cos A$ ,  $\sin S$ ,  $\cos S$ , ... par leurs valeurs en fonction de  $\varphi$ ,  $\delta$ ,  $H_0$ , et quelques réductions, on retombera sur les valeurs ci-dessus.

Un autre cas particulier est celui où les deux astres observés ont la même hauteur, de sorte que  $h = h'$ ; ceci est avantageux pour la précision des observations, parce que la réfraction est la même à très peu près; mais les simplifications ne sont pas grandes, on a simplement  $Q_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Le cas particulier vraiment important est celui que l'on obtient en réunissant les deux précédents. Reprenons donc celui que nous avons traité en détail, et supposons en outre  $h' = h$ , de sorte que l'on a observé le même astre à la même hauteur des deux côtés du méridien: c'est la *méthode des hauteurs correspondantes*.

On a alors, l'astre étant une étoile fixe,  $\omega = 0$  et par suite  $\sin H = 0$ , de sorte que  $H_0$  correspond au méridien, ce qui était évident *a priori*. D'ailleurs ce résultat est indépendant de la hauteur  $h$ ; on peut donc, si l'on n'a en vue que la détermination de l'heure, ne pas faire la lecture du cercle divisé qui donne  $h$ : il suffit de conserver pour les deux observations le même calage pour ce cercle. C'est ce fait qui donne une grande précision à la méthode, car on s'affranchit ainsi de toutes les erreurs dues à l'emploi du cercle, et de celles dues à la réfraction, en supposant que les circonstances atmosphériques sont les mêmes aux deux observations.

Si l'on connaît  $h$ , on a :

$$\sin \varphi = \sin (\psi + \delta_0), \quad \cos \varphi = \pm \cos (\psi + \delta_0),$$

suivant que  $H_0$  est égal à 0 ou à  $\pi$ ; pour  $H_0 = 0$ , on a donc  $\varphi = \psi + \delta_0$ , et pour  $H_0 = \pi$ , on a  $\varphi = \pi - (\psi + \delta_0)$ .

D'ailleurs

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos \frac{u}{2}}, \quad \cos \psi = \frac{\sin h \sin \delta_0}{\sin \delta};$$

$\sin \psi$ , a le signe de  $\sin (A' - A)$ .

Si l'on a observé le Soleil, la correction  $d\varphi$  qui résulte de l'emploi pour  $\delta$  de la déclinaison moyenne, c'est-à-dire la déclinaison méridi-



dienne pour le passage qui prend place entre les deux observations, est nulle ; mais on a :

$$dC = d\delta \left( -\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{u}{2}} \pm \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right);$$

c'est l'équation des hauteurs correspondantes, ou encore la correction du midi ou du minuit, suivant que  $H_0$  est égal à 0 ou  $\pi$  ; son calcul est facilité en pratique par des tables.

Si l'on a observé avec un chronomètre de temps moyen, donnant les indications  $T_i$  et  $T'_i$ , et si  $e$  et  $e'$  sont les équations du temps correspondantes, on a en appelant  $C$  la correction vraie du chronomètre,

$$\begin{cases} C = H + e - T_i \\ C = H' + e' - T'_i \end{cases} \quad \text{d'où} \quad C = \frac{H + H'}{2} + \frac{e + e'}{2} - \frac{T_i + T'_i}{2};$$

pour  $\frac{e + e'}{2}$ , on peut prendre l'équation du temps  $e_0$  à midi (ou à minuit) vrai, à cause de la symétrie des observations par rapport au méridien ; quant à  $\frac{H + H'}{2}$ , sa valeur est  $H_0 + dC$ ,  $dC$  étant la quantité calculée ci-dessus ; donc

$$C = -\frac{T_i + T'_i}{2} + H_0 + e_0 + dC;$$

on voit que  $-dC$  est ce qu'il faut ajouter à la moyenne des indications du chronomètre pour obtenir son indication à midi (ou minuit) vrai, et à proprement parler, c'est  $-dC$  qui est la correction du midi ou du minuit.

Il peut se faire que les hauteurs observées ne soient pas rigoureusement égales, soit à cause de la variation de réfraction, soit à cause des corrections instrumentales, soit parce qu'on n'a pu qu'observer des hauteurs voisines. Faisons donc  $h' - h = dh$  : on voit immédiatement que  $dh$  n'aura aucun effet sur la latitude, et que l'on aura

$$dC = dH_0 = \pm \frac{\omega}{\cos \varphi},$$

avec

$$\omega = - \frac{\cos h}{\cos \delta \sin \frac{u}{2}} dh;$$

d'où finalement

$$dC = \mp \frac{\cos h}{\cos \varphi \cos \delta \sin \frac{u}{2}} dh,$$

suivant que  $\Pi_0$  est égal à 0 ou à  $\pi$ .

Quelles sont les conditions les plus favorables pour déterminer ainsi le temps et la latitude ? Il est clair, d'après ce qui a été dit en général, qu'il faudra faire les observations environ à  $45^\circ$  du méridien en azimut.

Remarquons en terminant ce sujet, que les résultats relatifs à la méthode des hauteurs correspondantes auraient pu être établis directement avec la plus grande facilité : nous laisserons ce soin au lecteur.

**Observation de deux hauteurs et de la différence d'azimut.**

— On peut observer à des instants différents les hauteurs de deux astres, et obtenir leur différence d'azimut par les indications d'un cercle horizontal. On a alors un problème en tout semblable au problème de Douwes ; on résoudra d'abord le triangle  $ZSS'$ , puis le triangle  $PSS'$ , enfin le triangle  $PZS'$  ; les rôles du pôle et du zénith seront simplement échangés. Nous n'insisterons donc pas davantage sur les détails de cette question, et nous nous bornerons à quelques indications générales sur les observations assez délicates où l'on fait intervenir les azimuts : il est d'ailleurs clair que la multiplicité des méthodes d'observation que l'on peut imaginer est pour ainsi dire illimitée, et qu'il doit nous suffire de donner les développements relatifs aux plus usuelles, de façon à servir de modèle pour tous les autres cas possibles.

La méthode des hauteurs correspondantes s'applique très bien ici, s'il s'agit de déterminer simplement la direction du méridien, sans qu'il soit nécessaire de connaître effectivement les hauteurs. En particulier, on fera de bonnes observations d'azimut, en observant les deux plus grandes digressions d'une étoile circumpolaire, de part et d'autre du méridien.

Si l'on applique la méthode des hauteurs correspondantes en azimut au Soleil, il faut tenir compte de son mouvement propre ;

si les azimuts sont  $A$  et  $A'$ , et si  $\delta$  est la déclinaison moyenne,  $d\delta$  sa demi-variation entre les deux observations, on a

$$\begin{aligned} \sin(\hat{c} - d\delta) &= \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A, \\ \sin(\hat{c} + d\delta) &= \sin \varphi \sin h' - \cos \varphi \cos h' \cos A', \end{aligned}$$

d'où

$$\cos \delta \cdot d\delta = \cos \varphi \cos h \sin \frac{A' - A}{2} \sin \frac{A' + A}{2};$$

donc,  $A'$  étant sensiblement égal à  $-A$ , on a

$$\frac{A' + A}{2} = \frac{\cos \delta \cdot d\delta}{\cos \varphi \cos h \sin A};$$

et il est facile d'en conclure la lecture du cercle qui correspond au méridien, connaissant les lectures qui correspondent aux deux observations.

Dans la méthode actuelle, on pourra faire les deux observations dans le même azimut; on est ramené ainsi à l'observation dans un même vertical; les deux astres seront en général différents, mais il sera possible de prendre la même étoile, si elle est circumpolaire. Le problème de Douwes n'offre pas le même avantage.

Un autre problème général intéressant est celui où l'on connaîtrait pour deux astres différents, la différence des hauteurs, la différence des azimuts, et celle des angles horaires, fournie par l'observation du chronomètre. Dans ce cas, en se reportant à la figure du paragraphe précédent (*fig.* 51), on résoudrait d'abord le triangle  $PSS'$ ; puis dans le triangle  $ZSS'$  on connaîtrait un côté,  $SS' = D$ , l'angle opposé égal à  $A' - A$ , et la différence des deux autres côtés; on en déduirait, en faisant toujours  $Q = ZS'S$ ; et  $Q' = Z\hat{S}S'$ :

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}(Q + Q') &= \frac{\cos \frac{h' - h}{2} \cos \frac{A' - A}{2}}{\cos \frac{D}{2}}, \\ \sin \frac{1}{2}(Q - Q') &= \frac{\sin \frac{h' - h}{2} \cos \frac{A' - A}{2}}{\sin \frac{D}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{h + h'}{2} &= \frac{\cos \frac{Q + Q'}{2}}{\cos \frac{Q - Q'}{2}} \operatorname{cotg} \frac{D}{2}. \end{aligned}$$

Il serait alors facile d'achever à l'aide du triangle  $PS'Z$  comme ci-dessus.

**Observation de deux hauteurs égales à des temps donnés.**

— L'avantage de la méthode des hauteurs correspondantes pour la détermination du temps ou du méridien est grand : il résulte de ce que les observations sont indépendantes de l'emploi des cercles divisés et de la réfraction. On doit donc songer à conserver cet avantage, et à envisager de nouvelles méthodes fondées sur le même principe.

Ici, nous allons supposer que l'on a observé deux astres  $S$  et  $S'$  à la même hauteur inconnue  $h$ , mais à des temps connus, de sorte que les angles horaires  $H$  et  $H'$  sont connus. Si nous reprenons l'interprétation géométrique que nous avons donnée précédemment des observations de hauteur, nous voyons que le zénith  $Z_0$  est ici, puisqu'on connaît le temps, sur un demi-grand cercle horaire connu passant par  $P$ ; quant aux cercles de hauteur, on connaît leurs centres  $S_0$  et  $S'_0$ , mais on sait seulement qu'ils ont même rayon; le point  $Z_0$  est donc équidistant de  $S_0$  et  $S'_0$ , et par suite sur un grand cercle perpendiculaire sur  $S_0S'_0$  en son milieu: l'intersection de ce grand cercle et du demi cercle horaire précité donne sans ambiguïté  $Z_0$ .

La solution analytique est particulièrement simple. On a

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H, \\ \sin h &= \sin \varphi \sin \delta' + \cos \varphi \cos \delta' \cos H',\end{aligned}$$

d'où par soustraction :

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varphi (\sin \delta' - \sin \delta) &= \cos \delta \cos H - \cos \delta' \cos H' \\ &= \frac{1}{2} (\cos \delta - \cos \delta') (\cos H + \cos H') + \frac{1}{2} (\cos \delta + \cos \delta') (\cos H - \cos H'),\end{aligned}$$

ou bien

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{\delta + \delta'}{2} \cos \frac{H' + H}{2} \cos \frac{H' - H}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\delta' - \delta}{2} \sin \frac{H' + H}{2} \sin \frac{H' - H}{2}.$$

Si donc on pose :

$$\begin{aligned}m \sin M &= \sin \frac{H' - H}{2} \operatorname{cotg} \frac{\delta' - \delta}{2}, \\ m \cos M &= \cos \frac{H' - H}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta' + \delta}{2},\end{aligned}$$

il vient finalement

$$\operatorname{tg} \varphi = m \cos \left( \frac{\Pi + \Pi'}{2} - M \right).$$

Pour obtenir la relation différentielle qui convient à ce problème, reprenons les relations différentielles générales du problème de Douwes, et faisons-y  $dh' = dh$ , puis éliminons  $dh$ ; on aura

$$(\cos A - \cos A') \operatorname{sec} \varphi . d\varphi = \sin A' . dt_i' - \sin A . dt_i + (\sin A' - \sin A) dC;$$

ici  $dC$  désigne l'erreur dont est affectée la correction supposée connue du chronomètre. On sera dans les meilleures conditions si  $\cos A - \cos A'$  est le plus grand possible, c'est-à-dire si les observations sont faites dans le voisinage du méridien, mais l'une du côté du Sud, l'autre du côté du Nord; d'autant plus que, dans le voisinage du méridien, les coefficients  $\sin A$  et  $\sin A'$  sont très petits. Le coefficient de  $dC$  devient encore nul pour  $\cos \frac{1}{2}(A + A') = 0$ , ce qui a lieu quand les deux observations sont faites symétriquement par rapport au premier vertical.

On voit que cette discussion nous ramène en somme à la méthode de Talcott.

Au lieu d'avoir des hauteurs rigoureusement égales, on peut avoir des hauteurs seulement très voisines; nous en avons déjà vu les raisons, et nous pouvons ajouter que cela se produira encore si, comme dans la méthode de Talcott, on observe avec un théodolite muni d'un micromètre, et que, toujours sans changer le calage de la lunette, on n'observe pas au même point du champ: la différence des hauteurs est fournie par les indications du micromètre, celles du niveau, et la variation de réfraction.

On ramène toujours un tel cas au précédent, en modifiant simplement l'angle horaire de l'une des observations, d'après la formule différentielle  $dh + \sin A \cos \varphi . d\Pi = 0$ : si une hauteur observée  $h'$  doit être ramenée à  $h$ , on prendra donc pour angle horaire, au lieu de  $\Pi'$ , la valeur  $\Pi' + \frac{h' - h}{\sin A' \cos \varphi}$ ,  $A'$  étant l'azimut toujours facile à calculer préalablement avec une approximation suffisante.

Si l'on veut faire directement la correction de latitude qui en résulte, on a

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} (\sin \delta' - \sin \delta) = \cos \delta' \sin \Pi' . d\Pi' = \cos h \sin A' . d\Pi',$$

d'où

$$dH' = \frac{h - h'}{\sin A' \cos \varphi};$$

par suite

$$d\varphi = \frac{\cos \varphi \cos h \cdot (h' - h)}{2 \sin \frac{\delta' - \delta}{2} \cos \frac{\delta + \delta'}{2}}.$$

Dans ce qui suivra, nous supposerons les angles horaires corrigés comme nous venons de le dire, pour ramener les hauteurs à être rigoureusement égales.

**Observation de trois hauteurs égales et du chronomètre.**

— C'est là un problème fondamental dont Gauss a le premier donné la solution directe. Ici nous supposons que trois astres S, S', S'' de coordonnées connues  $\alpha, \delta, \alpha', \delta', \alpha'', \delta''$  ont été observés à la même hauteur  $h$ ; les heures du chronomètre sidéral sont  $t_i, t'_i, t''_i$ ; la correction du chronomètre est C; la latitude est  $\varphi$ ; les angles horaires sont  $\Pi = t_i + C - \alpha, \Pi'_i = t'_i + C - \alpha', \Pi''_i = t''_i + C - \alpha''$ ; enfin les azimuts sont A, A', A''. Il faut déterminer C et  $\varphi$ , et subsidiairement la hauteur inconnue  $h$ .

Si nous revenons d'abord à notre interprétation géométrique, nous voyons que le zénith  $Z_0$  est déterminé par trois cercles de hauteur, ayant même rayon inconnu, mais de centres connus  $S_0, S'_0, S''_0$ . Le point  $Z_0$  est donc le centre du petit cercle circonscrit au triangle  $S_0S'_0S''_0$ : il y a deux solutions, symétriques par rapport au centre de la sphère céleste.

Voici la solution de Gauss. Faisons  $\Pi' - \Pi = u', \Pi'' - \Pi = u''$ ;  $u'$  et  $u''$  sont des quantités connues; en comparant les deux premières observations, on est amené à poser, d'après le numéro précédent :

$$m' \sin M' = \sin \frac{u'}{2} \cotg \frac{\delta' - \delta}{2}, \quad m' \cos M' = \cos \frac{u'}{2} \tg \frac{\delta + \delta'}{2},$$

et il en résulte

$$\tg \varphi = m' \cos \left( \Pi + \frac{u'}{2} - M' \right);$$

la comparaison de la première et de la troisième observation donne de même

$$m'' \sin M'' = \sin \frac{u''}{2} \cotg \frac{\delta'' - \delta}{2}, \quad m'' \cos M'' = \cos \frac{u''}{2} \tg \frac{\delta + \delta''}{2},$$

$$\tg \varphi = m'' \cos \left( \Pi + \frac{u''}{2} - M'' \right).$$

Tout revient donc à la résolution de l'équation

$$m' \cos \left( H + \frac{u'}{2} - M' \right) = m'' \cos \left( H + \frac{u''}{2} - M'' \right);$$

faisons

$$M' + M'' - \frac{u' + u''}{2} = 2P,$$

$$M'' - M' - \frac{u'' - u'}{2} = 2Q;$$

on a

$$m' \cos (H - P + Q) = m'' \cos (H - P - Q);$$

donc

$$\operatorname{tg} (H - P) = \frac{m' - m''}{m' + m''} \operatorname{cotg} Q;$$

si  $\frac{m''}{m'} = \operatorname{tg} \chi$ , on a d'ailleurs

$$\frac{m' - m''}{m' + m''} = \operatorname{tg} (45^\circ - \chi).$$

On a ainsi  $H$ , et ensuite  $\varphi$ , ce qui résoud le problème. Il y a théoriquement deux solutions, puisque  $H$  n'est déterminé qu'à  $\pi$  près; aux deux valeurs de  $H$  correspondent des valeurs de  $\varphi$ , égales et de signes contraires: tout ceci coïncide avec ce que nous avons vu géométriquement.

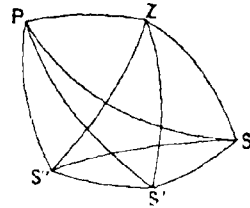


Fig. 54

On peut résoudre le même problème par les très élégantes formules de Cagnoli.

Appelons comme d'habitude  $S, S', S''$  les trois angles  $PSZ, PS'Z, PS''Z$  (fig. 54); et soit d'abord, à cause des hauteurs égales,

$$Z\hat{S}'S'' = Z\hat{S}''S' = P, \quad Z\hat{S}S'' = Z\hat{S}''S = P', \quad Z\hat{S}S' = Z\hat{S}'S = P'';$$

on a

$$\begin{aligned} S &= P' - P\hat{S}S'' = P'' - P\hat{S}S', \\ S' &= -P'' + P\hat{S}'S = P - P\hat{S}'S'', \\ S'' &= -P + P\hat{S}''S' = -P' + P\hat{S}''S. \end{aligned}$$

Si donc on fait encore

$$Q = \frac{1}{2}(P\hat{S}''S' - P\hat{S}'S''), \quad Q' = \frac{1}{2}(P\hat{S}''S - PSS''), \quad Q'' = \frac{1}{2}(P\hat{S}'S - P\hat{S}S'),$$

on a

$$S' + S'' = 2Q, \quad S'' + S = 2Q', \quad S + S' = 2Q'',$$

et

$$S + S' + S'' = Q + Q' + Q''.$$

Pour avoir  $S, S', S''$ , il suffit donc d'avoir  $Q, Q', Q''$ , qui sont immédiatement donnés par les formules de Néper

$$\operatorname{tg} Q = \operatorname{cotg} \frac{u'' - u'}{2} \frac{\sin \frac{\delta'' - \delta'}{2}}{\cos \frac{\delta'' + \delta'}{2}},$$

$$\operatorname{tg} Q' = \operatorname{cotg} \frac{u''}{2} \frac{\sin \frac{\delta'' - \delta}{2}}{\cos \frac{\delta'' + \delta}{2}},$$

$$\operatorname{tg} Q'' = \operatorname{cotg} \frac{u'}{2} \frac{\sin \frac{\delta' - \delta}{2}}{\cos \frac{\delta' + \delta}{2}}.$$

On a alors, par exemple,

$$\cos \varphi \sin H = \cos h \sin S, \quad \cos \varphi \sin (H + u') = \cos h \sin S',$$

d'où

$$\sin H \sin S' = \sin (H + u') \sin S,$$

$$\operatorname{tg} \left( H + \frac{u'}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{u'}{2} \frac{\operatorname{tg} \frac{S' + S}{2}}{\operatorname{tg} \frac{S' - S}{2}};$$

ou à l'aide de  $Q, Q', Q''$ ,

$$\operatorname{tg} \left( H + \frac{u'}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{u'}{2} \operatorname{tg} Q'' \operatorname{cotg} (Q - Q'),$$

ou encore

$$\operatorname{tg} \left( H + \frac{u'}{2} \right) = \operatorname{cotg} (Q - Q') \frac{\sin \frac{\delta' - \delta}{2}}{\cos \frac{\delta' + \delta}{2}}.$$



On aurait évidemment deux autres formules analogues en combinant autrement les observations.

Enfin, le triangle PSZ par exemple (ou de même l'un des analogues) donne

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi + h) &= \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\cos \frac{H+S}{2}}{\cos \frac{H-S}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi - h) &= \operatorname{cotg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\sin \frac{H-S}{2}}{\sin \frac{H+S}{2}}, \end{aligned}$$

d'où enfin la latitude  $\varphi$ , et en même temps la hauteur inconnue  $h$ .

Si la hauteur  $h$  avait été observée, sans cependant qu'on en fit usage, on aurait l'erreur de l'instrument, en comparant l'observation au calcul.

Les angles  $Q, Q', Q''$  et par suite  $S, S', S''$  ne sont déterminés qu'à  $\pi$  près ; mais cela n'importe pas pour le calcul de  $\operatorname{tg} \left( H + \frac{u'}{2} \right)$  ;  $H$  est déterminé à  $\pi$  près ; une fois  $H$  fixé, il faut prendre  $S$ , comme l'on sait, de façon que  $\sin S$  et  $\sin H$  aient le même signe ; et  $\frac{1}{2} (\varphi + h), \frac{1}{2} (\varphi - h)$  étant compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ , il ne subsiste aucune ambiguïté. Pratiquement il ne peut y en avoir sur le choix de  $H$ .

D'après le numéro précédent, les relations différentielles du problème sont

$$\begin{aligned} (\cos A - \cos A') \operatorname{séc} \varphi d\varphi + (\sin A - \sin A') dC + \sin A dt_i - \sin A' dt'_i &= 0, \\ (\cos A - \cos A'') \operatorname{séc} \varphi d\varphi + (\sin A - \sin A'') dC + \sin A dt_i - \sin A'' dt''_i &= 0; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta \operatorname{séc} \varphi \cdot d\varphi &= \Sigma \sin A (\sin A'' - \sin A') dt_i, \\ \Delta \cdot dC &= \Sigma \sin A (\cos A' - A'') dt_i, \end{aligned}$$

en faisant

$$\Delta = \sin (A'' - A') + \sin (A - A'') + \sin (A' - A).$$

le signe  $\Sigma$  indiquant la somme des termes semblables obtenus par permutation circulaire de  $A, A', A''$ , et  $t_i, t'_i, t''_i$ .

Les meilleures conditions de détermination de  $\varphi$  et de  $C$  auront lieu quand  $\Delta$  sera maximum : posons

$$A'' - A' = x, \quad A - A'' = y;$$

on a

$$\Delta = \sin x + \sin y - \sin(x + y);$$

le maximum a lieu pour

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \cos x - \cos(x + y) = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y} = \cos y - \cos(x + y) = 0,$$

ce qui donne ou bien  $x = y = 0$ , ou bien  $x = y = \pm \frac{2\pi}{3}$ ; cette dernière solution convient seule, et l'on voit que les trois différences d'azimuts doivent être voisines de  $120^\circ$ .

On fait à l'avance le choix des étoiles à observer de façon que les intervalles  $u'$ ,  $u''$  soient petits, ce qui est avantageux pour bien des raisons évidentes; on voit d'ailleurs que les étoiles à mouvement lent en hauteur seront tout aussi bonnes que celles dont le mouvement est rapide; car, si d'un côté on apprécie mal le moment où la hauteur  $h$  est atteinte quand le mouvement en hauteur est lent, d'autre part, l'erreur  $dt_i$  ainsi commise est sans grande influence, puisque, dans les formules différentielles, elle figure toujours multipliée par  $\sin A$ , et que si  $h$  varie peu, l'azimut est voisin de 0 ou de  $\pi$ . On pourra donc par exemple choisir la Polaire pour l'un des astres à observer. Pour calculer les relations différentielles, et se rendre compte des erreurs à craindre, on déterminera les azimuts d'une façon approchée, et on remarquera que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \sec \varphi \cdot d\varphi &= \sum \frac{\sin A \cos \frac{A'' + A'}{2}}{2 \sin \frac{A - A'}{2} \sin \frac{A - A''}{2}} dt_i, \\ dC &= \sum \frac{\sin A \sin \frac{A'' + A'}{2}}{2 \sin \frac{A - A'}{2} \sin \frac{A - A''}{2}} dt_i. \end{aligned}$$

**Emploi simultané de plusieurs observations.** — Comme nous l'avons déjà dit, on se trouve le plus souvent en possession de valeurs déjà très approchées des éléments à déterminer, temps

et latitude. On peut d'ailleurs réaliser cette hypothèse en faisant au préalable les observations directes nécessaires pour connaître ces éléments. Soient donc  $\varphi$  et  $C$  les valeurs approchées de la latitude et de la correction du chronomètre, et  $\varphi + d\varphi$ ,  $C + dC$ , leurs valeurs vraies, les corrections  $d\varphi$  et  $dC$  étant assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés et leur produit.

Une observation quelconque étant faite, on peut alors procéder de la façon indirecte suivante pour en tirer parti ; calculons ce que serait le résultat de l'observation avec les valeurs approchées  $\varphi$  et  $C$ , puis comparons ce résultat avec le résultat véritable ; il est manifeste que l'emploi de la relation différentielle qui convient à l'observation faite permettra d'établir une équation linéaire par rapport aux corrections  $d\varphi$  et  $dC$  ; chaque observation fournira une telle équation ; en combinant ensuite toutes ces équations de la façon la plus avantageuse, par exemple par la méthode des moindres carrés, on obtiendra les valeurs les plus convenables à adopter pour les inconnues  $d\varphi$  et  $dC$ , et on pourra espérer s'affranchir des erreurs fortuites qui affectent les diverses observations en multipliant celles-ci raisonnablement. Le cas le plus important, et que nous développerons seul, est celui où l'on observe des hauteurs, en même temps que le chronomètre. L'angle horaire  $H$  est égal à  $t_i + C - \alpha$  ; on calcule alors la hauteur  $h$  et l'azimut  $A$  sans peine, connaissant  $\varphi$ ,  $\delta$  et  $h$ , par les formules de Gauss ou celles de Delambre ; l'azimut n'a d'ailleurs pas besoin d'être connu avec grande précision ; appelons  $d'h$  la différence entre la hauteur observée et la hauteur calculée ; on a, en ne tenant pas compte des erreurs d'observation, l'équation

$$d'h + \cos A \cdot d\varphi + \sin A \cos \varphi \cdot dC = 0 ;$$

c'est la relation entre  $d\varphi$  et  $dC$  qui correspond à l'observation faite.

On voit qu'une seule observation faite dans le méridien donnera  $d\varphi$  ; faite dans le premier vertical, elle donnera  $dC$ .

Pour combiner les différentes observations et résoudre les équations correspondantes de la façon la plus avantageuse, on peut s'aider d'une méthode graphique, suggérée par la forme même de l'équation. Prenons deux axes de coordonnées rectangulaires dans un plan  $Ox$ ,  $Oy$  (*fig.* 55), et considérons la droite  $D$  qui aurait pour équation

$$x \sin A + y \cos A + d'h = 0 ;$$

cette droite est facile à construire : il suffit de mener la demi-droite  $Oz$  telle que l'angle de  $Oy$  avec  $Oz$  compté vers  $Ox$  soit égal à l'azimut  $A$ , puis de prendre sur la droite

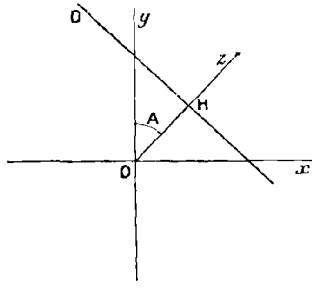


FIG. 55

$Oz$  orientée dans le sens  $Oz$  un segment  $\overline{OH}$  égal à  $-dh$ ; la perpendiculaire sur  $Oz$  en  $H$  est la droite  $D$ .

Si maintenant nous considérons  $\cos \varphi \cdot dC$  et  $d\varphi$  comme les coordonnées d'un point du plan, ce point sera sur la droite  $D$ .

Construisons toutes les droites analogues à  $D$  fournies par les observations : si celles-ci étaient parfaites,

toutes ces droites se couperaient en un même point dont il ne resterait plus qu'à mesurer les coordonnées pour avoir  $\cos \varphi \cdot dC$  et  $d\varphi$ ; mais à cause des erreurs d'observation, ces droites se coupent mutuellement en des points distincts, voisins cependant les uns des autres : on prendra alors à vue un point *moyen* entre ces différents points et c'est celui que l'on adoptera pour en mesurer les coordonnées.

L'interprétation géométrique des observations de hauteur conduit directement à cette méthode graphique. Supposons que  $O$  soit la position approchée connue du zénith  $Z_0$  du lieu d'observation au temps défini par l'indication  $t_0$  du chronomètre; par ce point  $O$  passe le cercle de hauteur ayant  $S_0$  comme centre et pour rayon le complément de la hauteur calculée; le cercle de hauteur véritable qui correspond à l'observation et qui passe par  $Z_0$  a le même centre  $S_0$ , et son rayon est égal au précédent diminué de  $dh$ . Confondons alors, puisque  $Z_0$  est très voisin de  $O$ , la surface de la sphère dans les environs de  $O$  avec son plan tangent en  $O$ , et prenons deux axes de coordonnées rectangulaires, le premier  $Ox$  ayant pour direction la tangente au parallèle de  $O$ , menée dans le sens direct, le second  $Oy$  dirigé vers le pôle; le point  $Z_0$  a précisément alors pour coordonnées  $\cos \varphi \cdot dC$  et  $d\varphi$ , comme nous l'avons déjà vu bien souvent. Confondons de plus le cercle de hauteur qui passe par  $Z_0$  avec sa tangente en  $S_0$ ; celle-ci fera avec  $Ox$  l'angle  $A$ , comme nous l'avons déjà dit, compté dans le sens rétrograde à partir de  $Ox$ , vers la tangente menée dans le sens rétrograde par rapport à  $S_0$ ; sa distance à

L'origine  $O$  sera précisément, toujours au second ordre près, la distance —  $d'h$  du cercle de hauteur véritable au cercle de hauteur passant par  $O$  : cette tangente sera donc précisément la droite  $D$  envisagée ci-dessus ; ce sera un lieu géométrique de  $Z_0$ . Le point  $Z_0$  sera le point moyen que l'on obtient en combinant ensemble les diverses droites  $D$ , appelées, pour une raison évidente, *droites de hauteur*.

Notre construction graphique revient donc finalement à la détermination géométrique de  $Z_0$  par l'emploi des cercles de hauteur, auxquels on substitue les droites de hauteur, c'est-à-dire leurs tangentes en  $Z_0$ .

Deux droites de hauteur déterminent le point  $Z_0$ , au moins théoriquement, et cela d'autant mieux qu'elles sont plus voisines d'être rectangulaires.

Au lieu de calculer la hauteur que l'on observerait avec  $\varphi$  et  $C$ , on peut se servir de la hauteur observée, et calculer alors par exemple la latitude à l'aide de  $C$  ; si l'on appelle  $d'\varphi$  la différence entre la latitude approchée et la latitude calculée, on a ici l'équation

$$\cos A(d\varphi + d'\varphi) + \sin A \cos \varphi . dC = 0.$$

La droite de hauteur  $D$  rencontre  $Oy$  au point d'ordonnée —  $d'\varphi$ , et est facile à construire, sa direction étant donnée par l'azimut  $A$ .

De même on peut calculer  $C$  à l'aide de la hauteur observée et de la latitude approchée  $\varphi$  ; si  $d'C$  est la différence entre la valeur approchée de  $C$  et sa valeur calculée, on a cette fois

$$\cos A . d\varphi + \sin A \cos \varphi (dC + d'C) = 0,$$

et la droite de hauteur rencontre  $Ox$  au point d'abscisse —  $\cos \varphi . d'C$ .

Supposons maintenant que l'on ait fait plusieurs observations de hauteurs égales, sans qu'on connaisse exactement la valeur commune de ces hauteurs : c'est la méthode de Gauss généralisée, et nous avons vu qu'elle est particulièrement facile à appliquer avec l'astrolabe à prisme de MM. Claude et Driencourt. Voici alors comment on peut traiter les observations, d'après ces auteurs eux-mêmes, qui ont réussi à obtenir une haute précision, comparable à celle de nos meilleurs instruments méridiens.

Soit  $h$  une valeur approchée de la hauteur commune, et  $h + dh$  la hauteur véritable à laquelle on a observé : dans l'astrolabe à prisme la hauteur  $h$  est toujours très voisine de  $60^\circ$ . Calculons

comme précédemment la hauteur que l'on observerait si  $\varphi$  et  $C$  étaient vraiment la latitude et la correction du chronomètre, et appelons toujours  $d'h$  la différence entre  $h$  et la hauteur calculée ; on aura l'équation différentielle

$$dh + d'h + \cos A \cdot d\varphi + \sin A \cos \varphi \cdot dC = 0 ;$$

il faut au moins trois équations semblables pour calculer les trois inconnues  $dh$ ,  $d\varphi$ ,  $dC$ . Construisons encore la droite  $D$  qui, par rapport aux axes considérés plus haut, a pour équation

$$x \sin A + y \cos A + d'h = 0 ;$$

ici cette droite est tangente au cercle qui aurait pour centre le point de coordonnées  $\cos \varphi \cdot dC$  et  $d\varphi$ , pour rayon la valeur absolue de  $dh$  : si donc on a trois droites  $D$ , on tracera le cercle inscrit dans le triangle formé par ces trois droites : les coordonnées de son centre fourniront les inconnues  $dC$  et  $d\varphi$ , son rayon donnera  $dh$ , et cette construction graphique sera évidemment d'autant plus précise que le triangle sera plus voisin d'être équilatéral, résultat que nous avons établi analytiquement par ailleurs.

Si l'on a plus de trois observations, on cherchera à tracer le cercle qui se rapproche le plus d'être tangent à toutes les droites  $D$ , et ce cercle une fois tracé, on en déduira de même les inconnues.

En reprenant l'interprétation géométrique donnée précédemment, on voit qu'ici on ne connaît pas les cercles de hauteur qui correspondent aux observations ; on connaît seulement leurs centres et on sait de plus qu'ils ont le même rayon, dont une valeur approchée est  $\frac{\pi}{2} - h$  ; si nous traçons les cercles qui correspondent à ce rayon approché, il est clair qu'ils seront tous tangents à un même petit cercle enveloppe ayant pour centre  $Z_0$  et pour rayon  $|dh|$  ; en remplaçant les cercles par les droites de hauteur, toutes ces droites sont tangentes au cercle enveloppe, et tout revient à déterminer celui-ci pour avoir  $Z_0$  : on est donc conduit à la même construction que ci-dessus.

On peut varier la construction des droites  $D$  en calculant la latitude à l'aide de  $h$  et de  $C$ , ou encore  $C$  à l'aide de  $h$  et de  $\varphi$ , comme plus haut.

**Applications à la navigation. Cartes marines.** — Toutes les méthodes précédemment expliquées peuvent s'appliquer aussi bien en mer qu'à terre. Sans entrer en aucune façon dans les détails propres à la navigation, nous allons montrer seulement comment on peut s'arranger de façon à en conclure immédiatement la position du navire, c'est-à-dire du lieu d'observation, sur la Terre, et à représenter cette position sur une carte. Dans la pratique, on simplifiera le plus possible les calculs, pour des raisons évidentes de commodité, et on se conformera aux règles en usage sur la façon de compter les angles. Comme nous ne recherchons pas ici l'extrême précision, mais que nous nous proposons seulement de faire comprendre les points essentiels de l'Astronomie nautique, nous supposerons dans ce qui suit la Terre sphérique.

A cause des propriétés de l'aiguille aimantée, on se dirige en navigation avec la boussole, ou *compas*, et il est commode de suivre, pour aller d'un point à un autre, non pas le chemin le plus court, qui serait un arc de grand cercle, mais une courbe, appelée *loxodromie*, et qui coupe tous les méridiens sous le même angle. Cherchons d'abord l'équation de la loxodromie.

Un point M de la Terre est défini par sa latitude  $\varphi$  et sa longitude L. Soit Mz (*fig. 56*) une loxodromie passant par M et coupant le méridien Mt (dirigé vers le Sud) suivant l'angle V, celui-ci étant compté comme les azimuts à partir de Mt vers Mz, dans le sens rétrograde. Soit M' un point voisin projeté en M'' sur le parallèle passant par M; dans le triangle infinitésimal MM'M'', on a, en appelant s l'arc de la courbe parcourue dans le sens Mz,

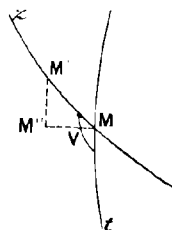


FIG. 56

$$MM'' = \cos \varphi dL = ds \sin V, \quad M'M'' = d\varphi = - ds \cos V,$$

d'où 
$$dL = - \operatorname{tg} V \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

Posant pour intégrer  $u = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$ , il vient

$$dL = - \operatorname{tg} V \frac{du}{u},$$

et enfin 
$$L - L_0 = \operatorname{tg} V \left[ \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) - \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right],$$

les logarithmes étant népériens, et  $L_0, \varphi_0$  un point initial.

Par deux points  $L, \varphi$  et  $L_0, \varphi_0$  passent une infinité de loxodromies, car on peut augmenter  $L$  d'un multiple quelconque de  $2\pi$ ; on ne considère jamais que celle qui correspond à l'hypothèse où  $L - L_0$  est moindre que  $2\pi$  en valeur absolue.

L'arc de la courbe est donné par la formule  $s - s_0 = \frac{\varphi_0 - \varphi}{\cos V}$ ,  $s_0$  correspondant au point initial  $L_0, \varphi_0$ .

La quantité  $\log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$  est la *latitude croissante*,  $\lambda$ , qui correspond à  $\varphi$ ; elle varie de  $-\infty$  à  $+\infty$  quand  $\varphi$  varie de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $+\frac{\pi}{2}$ ; elle a le même signe que  $\varphi$ , et à  $-\varphi$  correspond  $-\lambda$ .

On a  $d\lambda = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$ , ce qui justifie le nom de latitude croissante.

L'équation de la loxodromie, en fonction de la longitude et de la latitude croissante, est linéaire et de la forme

$$L - L_0 = \operatorname{tg} V (\lambda_0 - \lambda).$$

L'unité de distance employée en navigation est le *mille marin*, c'est-à-dire la longueur d'un arc d'une minute sur un grand cercle de la sphère terrestre, soit  $1851^m,85$ ; il est commode alors d'exprimer les longitudes, les latitudes, et même les latitudes croissantes en minutes d'arc, afin d'établir une correspondance parfaite entre l'unité d'angle, l'unité de distance et l'unité de latitude croissante.

L'expression de  $\lambda$  en minutes d'arc est évidemment

$$\frac{10800 M}{\pi} \log_{10} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right),$$

en prenant cette fois des logarithmes décimaux, et appelant  $M$  le module de ces logarithmes.

La latitude croissante  $\lambda$  est une fonction de  $\varphi$ , réduite en tables.

Les *cartes marines* construites suivant la projection de *Mercator* représentent les points de la Terre sur un plan de la façon suivante : étant donné un système d'axes rectangulaires dans le plan, le point de la Terre de longitude  $L$  et de latitude  $\varphi$  est représenté par le point d'abscisse  $L$  et d'ordonnée  $\lambda$ , l'unité d'abscisse étant égale à l'unité d'ordonnée. Les méridiens équidistants sont ainsi représentés par des droites parallèles à l'axe  $Oy$  équidistantes, et



les parallèles par des droites parallèles à  $Ox$ , mais non équidistantes, puisqu'à une différence infiniment petite  $d\varphi$  correspond  $d\lambda = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$ .

La carte est peu appropriée à la représentation des régions très voisines des pôles.

La loxodromie qui passe par deux points  $M_0$  et  $M$  est représentée sur la carte par la droite  $M_0M$  (*fig. 57*); l'angle  $V$  correspondant est le supplément de l'angle de  $Oy$  avec  $M_0M$ , compté de  $Oy$  vers  $Ox$ .

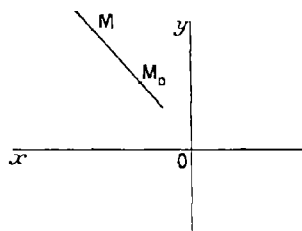


FIG. 57

La route à suivre pour aller d'un point à un autre se trouve ainsi immédiatement tracée sur la carte, et l'angle  $V$  correspondant est l'angle de route.

Entre deux points éloignés, on ne suit pas toujours la loxodromie, mais plutôt l'arc de grand cercle : c'est la navigation *orthodromique*. Mais pratiquement on partage la route ainsi déterminée en un certain nombre d'arcs partiels d'étendue moins grande, et entre les extrémités d'un même arc, on suit la loxodromie.

Connaissant l'angle de route  $V$ , comment doit-on se guider avec le compas ?

La *déclinaison magnétique*  $D$  est l'azimut de la pointe Sud de l'aiguille aimantée ; elle est donnée par les cartes en chaque lieu, ou plutôt fournie par les indications des cartes qui donnent l'azimut de la pointe Nord, compté à partir du Nord vers l'Est ou vers l'Ouest.

La *déviatiion*  $\delta$  est la correction qu'il faut faire subir à la déclinaison magnétique  $D$ , pour avoir l'azimut véritable de l'aiguille aimantée sur le navire : elle est produite par les masses de fer souvent considérables que comporte le bâtiment, et elle varie suivant des lois assez simples avec la position du navire sur le globe, et surtout son orientation : son étude et sa détermination plus ou moins empirique forment l'objet de la *régulation des compas*, qui n'a pas sa place ici.

L'azimut vrai de la pointe Sud de l'aiguille aimantée sur le navire est donc  $D + \delta$  ; c'est la *variation* du compas. Soit alors  $V_0$  la route au compas, c'est-à-dire l'azimut du *cap* du navire, en d'autres

termes de la direction de son axe prise vers l'avant ; on a évidemment pour l'angle de route l'expression

$$V = V_0 + D + \delta.$$

Toutefois, surtout sur les bâtiments à voiles, il faut encore tenir compte de la *dérive*  $d$ , causée par l'action du vent de travers ; la direction de la route du navire n'est pas celle de son axe, et l'on a

$$V = V_0 + D + \delta + d ;$$

la dérive est mesurée grossièrement par l'observation du sillage du navire : la dérive est exactement l'angle compté comme les azimuts depuis l'axe du navire dirigé vers l'arrière jusqu'au sillage. Enfin tout ceci correspond au mouvement relatif du navire par rapport à l'eau ; en réalité celle-ci est en mouvement, et on en peut tenir compte par l'étude des courants.

Dans la navigation à l'*estime* on se sert de l'angle de route et du chemin parcouru ; celui-ci est connu par la vitesse du navire, que l'on détermine à l'aide du *loch*, ou bien, sur les bateaux à vapeur, d'après le nombre des tours d'hélice en un temps donné.

Si à un moment donné le navire est au point  $L_0, \varphi_0$ , où sera-t-il après avoir parcouru le chemin  $s$ , sous l'angle de route  $V$  ? Les formules

$$\varphi - \varphi_0 = -s \cos V, \quad L - L_0 = -(\lambda - \lambda_0) \operatorname{tg} V$$

résolvent la question. Si  $\varphi - \varphi_0$  est assez petit, on peut prendre d'une façon approchée  $\lambda - \lambda_0 = \frac{\varphi - \varphi_0}{\cos \varphi_m}$ ,  $\varphi_m$  étant la moyenne entre  $\varphi_0$  et  $\varphi$ , en vertu de la relation différentielle entre  $\varphi$  et  $\lambda$  ; par suite  $L - L_0 = \sin V \frac{s}{\cos \varphi_m}$ . Inversement ces formules permettent de calculer  $s$  et  $V$  connaissant  $L - L_0$  et  $\varphi - \varphi_0$  : leur calcul est rendu très simple par les tables de point, ou par le quartier de réduction.

Sur la carte, connaissant  $V$ , on trace immédiatement la route du navire ; il faut prendre alors pour passer du point  $M_0(L_0, \varphi_0)$  au point  $M(L, \varphi)$ , sur la droite qui représente la route, et à l'échelle de la carte, une longueur  $s'$  manifestement égale  $\frac{L - L_0}{\sin V}$ , c'est-à-dire à  $\frac{s}{\cos \varphi_m}$  ; en effet  $s'$  doit se projeter sur  $Ox$  suivant  $L - L_0$ .

L'erreur relative de la navigation à l'estime peut être évaluée à  $\frac{1}{20}$  en gros ; il est clair qu'elle augmente rapidement avec le temps, quand on n'a pas l'occasion de la rectifier.

Dans la navigation astronomique, on détermine le *point*, c'est-à-dire la position du navire par des observations astronomiques, surtout des observations de hauteurs. Comme nous supposons le temps du premier méridien donné avec une grande exactitude par les chronomètres du bord, on voit que la détermination du temps local revient à celle de la longitude, puisque E étant l'état absolu supposé connu d'un chronomètre, et C sa correction, on a toujours  $E = C + L$ . Naturellement on profitera de toutes les occasions favorables pour vérifier l'état absolu, par exemple en prenant l'heure locale dans un lieu de longitude connue : ces observations permettront de déterminer la marche du chronomètre d'une façon suffisamment précise.

On procédait dans l'ancienne navigation surtout par rectifications progressives, en se plaçant successivement dans les conditions favorables à la détermination de l'heure ou de la latitude. Comme on se sert surtout du Soleil, on observe le Soleil à midi, et l'on en déduit la latitude ; on prend ensuite une hauteur du Soleil dans le voisinage du premier vertical, et on en déduit l'heure, en se servant de la latitude déterminée à midi et corrigée de l'estime faite avec soin du chemin parcouru depuis midi. Une observation du matin donne le même résultat, et ainsi de suite. Nous avons dit précédemment tout ce qui convient relativement à ces observations successives au même lieu.

Pour contrôler la déviation, ce qui est souvent utile, on peut faire des observations d'azimut ; en même temps que l'on fait une observation de hauteur du Soleil, on relève l'azimut de cet astre, d'une façon simplement approchée, par rapport à l'axe du navire. La hauteur observée permet de calculer l'azimut vrai de l'astre ; en le comparant à l'azimut observé, on aura la direction du cap du navire, soit  $V_0 + D + \delta$  ; connaissant  $V_0$  et D, on aura ainsi  $\delta$ .

Bien entendu, quand on est en vue d'une côte, on s'aide des détails de cette côte pour se guider ou déterminer sa position : mais les questions qui rentrent dans cet ordre d'idées sont étrangères à l'Astronomie.

Dans la navigation moderne, on tire parti des observations de hauteur faites à n'importe quel moment pour déterminer à la fois la latitude et la longitude, en les combinant deux à deux, ou trois à trois. Nous avons vu comment on pouvait s'y prendre pour résoudre cette question par l'analyse; il suffira d'ajouter que la correction du chronomètre étant égale à  $E - L$ , l'erreur  $dC$  doit être remplacée par  $-dL$ . Mais il convient de reprendre rapidement la question au point de vue géométrique, de façon à donner la solution la mieux appropriée au problème actuel.

Ayant observé la hauteur  $h$  d'un astre de coordonnées  $\alpha$ ,  $\delta$ , et l'indication du chronomètre sidéral étant  $t_i$ , l'angle horaire  $\Pi$  est égal à  $t_i + E - L - \alpha$ ; si l'on se sert d'un chronomètre de temps moyen, d'indication  $T_i$ , l'angle horaire est plus simplement  $T_i + E - L - \alpha$ , en appelant  $e$  l'équation du temps. Dans tous les cas nous pouvons poser  $\Pi = \Pi_0 - L$ ,  $\Pi_0$  étant l'angle horaire connu par rapport au premier méridien. L'observation fournit alors l'équation

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos (\Pi_0 - L),$$

avec la relation différentielle générale

$$dh + \cos A \cdot d\varphi - \sin A \cos \varphi \cdot dL = 0,$$

où  $A$  est l'azimut.

L'équation fondamentale définit sur la sphère terrestre un *cercle de hauteur* ayant pour centre le point  $S_0$  dont la longitude est  $H_0$  et la latitude  $\delta$ , et pour rayon sphérique  $\frac{\pi}{2} - h$ . La projection sur la carte de ce cercle de hauteur est la *courbe de hauteur* qui correspond à l'observation; le point  $M$  où l'on a fait l'observation, reporté sur la carte, se trouve sur cette courbe de hauteur. La méthode la plus simple consisterait donc à tracer deux courbes de hauteur correspondant à deux observations rapportées au même lieu; ce lieu se trouverait sur la carte au point d'intersection des deux courbes. Elle est peu pratique, car les courbes de hauteur ne sont pas simples: étudions-les cependant d'une façon générale, d'après M. E. Guyou.

Il faut joindre à l'équation fondamentale la relation

$$\lambda = \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right),$$

d'où l'on tire, en désignant par  $e$  la base des logarithmes népériens,

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = e^\lambda,$$

et

$$\sin \varphi = -\cos \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{e^\lambda + e^{-\lambda}},$$

$$\cos \varphi = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) = \frac{2}{e^\lambda + e^{-\lambda}};$$

l'équation sur la carte de la courbe de hauteur est par suite

$$e^\lambda (\sin h - \sin \delta) + e^{-\lambda} (\sin h + \sin \delta) - 2 \cos \delta \cos (H_0 - L) = 0.$$

Nous distinguerons alors trois cas, en supposant nécessairement  $h$  positif.

1° Soit  $h > |\delta|$ . Déterminons  $\lambda_0$  de façon que

$$e^{\lambda_0} = \sqrt{\frac{\sin h + \sin \delta}{\sin h - \sin \delta}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(h + \delta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(h - \delta)}};$$

puis faisons le changement de coordonnées défini par

$$\lambda = \lambda' + \lambda_0, \quad L = L' + H_0,$$

de façon à conserver la direction des axes.

L'équation de la courbe de hauteur devient

$$e^{\lambda'} + e^{-\lambda'} = \frac{2 \cos \delta}{\sqrt{\sin^2 h - \sin^2 \delta}} \cos L';$$

elle ne dépend que d'un seul paramètre, le coefficient de  $\cos L'$ .

La courbe a une forme analogue à celle d'une ellipse avec les mêmes symétries; comme  $\frac{e^{\lambda'} + e^{-\lambda'}}{2}$  a pour minimum l'unité,  $\cos L'$  varie entre 1 et  $\frac{\sqrt{\sin^2 h - \sin^2 \delta}}{\cos \delta}$ ; par suite  $L'$  varie de  $-L_1$  à  $+L_1$ ,

si  $L_1$  est l'angle positif aigu tel que  $\cos L_1 = \frac{\sqrt{\sin^2 h - \sin^2 \delta}}{\cos \delta}$ .

A chaque valeur de  $L$  correspondent deux valeurs de  $\lambda'$  égales et de signes contraires, croissant en valeur absolue en même temps.

que  $\cos L'$ ; pour  $L' = \pm L_1$ , on a  $\lambda' = 0$ ; pour  $L' = 0$ ,  $|\lambda'|$  a son maximum, soit  $\lambda_1$ , tel que

$$e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1} = \frac{2 \cos \delta}{\sqrt{\sin^2 h - \sin^2 \delta}};$$

il en résulte

$$e^{\lambda_1} = \sqrt{\frac{\cos \delta + \cos h}{\cos \delta - \cos h}} = \sqrt{\cotg \frac{1}{2}(h + \delta) \cotg \frac{1}{2}(h - \delta)};$$

donc encore

$$e^{\lambda_0 + \lambda_1} = \cotg \frac{1}{2}(h - \delta) \quad , \quad e^{\lambda_0 - \lambda_1} = \tg \frac{1}{2}(h + \delta).$$

2° Soit  $h < |\delta|$ . Faisons alors

$$e^{\lambda_0} = \sqrt{\frac{\sin \delta + \sin h}{\sin \delta - \sin h}} = \sqrt{\frac{\tg \frac{1}{2}(\delta + h)}{\tg \frac{1}{2}(\delta - h)}};$$

puis, comme plus haut,

$$\lambda = \lambda' + \lambda_0, \quad L = L' + \Pi_0;$$

l'équation de la courbe de hauteur devient, suivant que  $\delta$  est positif ou négatif,

$$e^{\lambda} - e^{-\lambda} \pm \frac{2 \cos \delta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 h}} \cos L' = 0.$$

Ici  $L'$  peut prendre toutes les valeurs possibles, par exemple de  $-\pi$  à  $+\pi$ , et il suffit de considérer les valeurs positives de  $L'$  à cause de la symétrie; à chaque valeur de  $L'$  correspond une seule valeur de  $\lambda'$  qui croît ou décroît quand  $L'$  varie de 0 à  $\pi$ ; pour deux valeurs supplémentaires de  $L'$ , les valeurs de  $\lambda'$  sont égales et de signes contraires; pour  $L' = \frac{\pi}{2}$ , on a  $\lambda' = 0$ ; pour  $L' = \pi$ ,  $|\lambda'|$  atteint son maximum  $\lambda_1$ , tel que

$$e^{\lambda_1} - e^{-\lambda_1} = \frac{2 \cos \delta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 h}},$$

d'où

$$e^{\lambda_1} = \sqrt{\frac{\cos h + \cos \delta}{\cos h - \cos \delta}} = \sqrt{\cotg \frac{1}{2}(\delta + h) \cotg \frac{1}{2}(\delta - h)},$$

de sorte que

$$e^{\lambda_0 + \lambda_1} = \cotg \frac{1}{2}(\delta - h), \quad e^{\lambda_0 - \lambda_1} = \tg \frac{1}{2}(\delta + h).$$

La courbe a la forme d'une sinusoïde.

3° Soit enfin  $h = |\delta|$ . L'équation est

$$e^{\mp \lambda} \mp \cotg \delta \cos (H_0 - L) = 0,$$

suivant que  $\delta$  est positif ou négatif; faisons  $e^{\pm \lambda_0} = \pm \cotg \delta$ , puis  $\lambda = \lambda' + \lambda_0$ ,  $L = L' + H_0$ : l'équation se réduit à  $e^{\mp \lambda'} = \cos L'$ .

Toutes les courbes ainsi définies sont égales;  $L'$  varie entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ ; pour  $L' = 0$ , on a  $\lambda' = 0$ ; pour  $L' = \pm \frac{\pi}{2}$ , on a  $\lambda' = \pm \infty$ , suivant que  $\delta$  est positif ou négatif. Il y a une symétrie évidente, et la courbe a la forme d'une parabole qui serait resserrée entre deux asymptotes parallèles.

Puisque l'emploi des courbes de hauteur elles-mêmes est peu pratique, on lui substituera celui des *droites de hauteur*, ce qui revient à remplacer la courbe par sa tangente. On procédera tout comme nous l'avons déjà expliqué, avec les quelques modifications de détail que nous allons indiquer.

Soient  $\varphi$  et  $L$  les coordonnées du point estimé, représenté par  $O$  sur la carte;  $\varphi + d\varphi$ ,  $L + dL$  celles du lieu où l'on se trouve réellement au moment pour lequel on réduit les observations; calculons la hauteur  $h'$  que l'on observerait au point  $(\varphi, L)$  et en même temps l'azimut  $A$ , et faisons  $h - h' = dh$ . On a

$$dh + \cos A \cdot d\varphi - \sin A \cos \varphi \cdot dL = 0,$$

ou bien

$$dh \cdot \sec \varphi + \cos A \cdot d\lambda - \sin A \cdot dL = 0.$$

Si donc on trace par le point  $O$  (*fig. 58*) deux axes de coordonnées rectangulaires  $Ox$ ,  $Oy$  parallèles aux images des parallèles et des méridiens sur la carte, on voit que le lieu cherché est représenté par un point  $M$  situé sur la droite d'équation

$$dh \cdot \sec \varphi + \cos A \cdot y - \sin A \cdot x = 0.$$

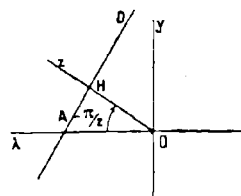


FIG. 58

Pour construire cette droite de hauteur D, on mènera la direction Oz, telle que l'angle  $x\hat{O}z$  soit égal à  $A - \frac{\pi}{2}$ , et l'on prendra sur cette direction un point H tel que le segment OH soit égal à  $d' h. \sec \varphi$ ; la perpendiculaire à Oz en H est la droite D.

Le point M est situé quelque part sur cette droite; si l'on a deux droites de hauteur, il est à leur intersection; si l'on en a plusieurs, on prendra le point moyen déterminé par leurs intersections mutuelles. Si l'on a une seule droite, on dit que H est le *point rapproché* correspondant, parce qu'il est toujours plus près du point vrai que le point estimé.

Pour porter  $d' h. \sec \varphi$  sur Oz, il suffira de porter un segment qui représente  $dh$  à l'échelle de la carte dans les environs du point O.

Nous avons ici construit la droite de hauteur en utilisant à la fois la latitude et la longitude estimées; mais, par analogie avec ce que nous avons déjà vu, on peut ne se servir que d'une seule de ces quantités. Si l'on emploie la longitude estimée, on calculera la latitude  $\varphi'$  et l'azimut A en partant de la hauteur observée et de l'angle horaire; si alors  $\varphi - \varphi' = d'\varphi$ , on a

$$\cos A (d\varphi + d'\varphi) - \sin A \cos \varphi dL = 0,$$

et l'équation de la droite de hauteur est

$$y - \operatorname{tg} A. x + \frac{d'\varphi}{\cos \varphi} = 0;$$

pour la construire, il suffit de mener une droite faisant avec Ox l'angle A, par un point de Oy ayant pour ordonnée  $-\frac{d'\varphi}{\cos \varphi}$ , c'est-à-dire  $-d'\lambda$ ,  $d'\lambda$  étant l'accroissement de latitude croissante qui correspond à  $d'\varphi$ . Il est évident que cette construction laissera peu d'incertitude sur  $d\varphi$  si la droite D est presque parallèle à Ox, c'est-à-dire si l'angle A est petit ou voisin de  $\pi$ , ou enfin, comme nous le savions déjà, si l'observation est faite près du méridien.

De même, si l'on emploie la latitude estimée, on calculera la longitude  $L'$  à l'aide de la hauteur observée et de  $\varphi$ , ainsi que l'azimut; si alors  $L - L' = d'L$ , on a

$$\cos A. d\varphi - \sin A \cos \varphi (dL + d'L) = 0,$$



et l'équation de la droite de hauteur est .

$$y - \operatorname{tg} A(x + d'L) = 0;$$

elle fait toujours l'angle  $A$  avec  $Ox$ , mais est déterminée cette fois par son point d'intersection avec cet axe, d'abscisse  $-d'L$ ; elle déterminera bien  $dL$  si elle est voisine d'être parallèle à  $Oy$ , c'est-à-dire si l'observation est voisine du premier vertical.

Il est encore clair que si les erreurs de l'estime sont assez fortes, il sera bon de procéder par approximations successives dans l'application des méthodes précédentes; car dans ce cas, la substitution des droites aux courbes de hauteur devient moins légitime.

Mais nous n'entrerons pas dans ces détails, et en terminant ce sujet, nous indiquerons seulement comment on peut à l'aide du *transport des droites de hauteur*, se dispenser de réduire au même lieu des observations faites en des lieux différents.

Supposons donc deux observations de hauteur faites à des temps successifs  $t$  et  $t'$ , en deux lieux différents, mais voisins, représentés sur la carte par les points  $M$  et  $M'$  (*fig. 59*). Construisons les droites de hauteur  $D$  et  $D'$  relatives à ces deux observations, séparément, à l'aide des données fournies par l'estime pour chacune des deux époques. Le point  $M$  est sur la droite  $D$ , le point  $M'$  sur la droite  $D'$ ; d'autre part l'observation de la route et de la vitesse dans l'intervalle des deux observations fait connaître en grandeur et en direction le vecteur  $MM'$ ; il suffit donc de transporter la droite  $D$  parallèlement à elle-même en  $D_1$  par une translation définie par le vecteur  $MM'$ , pour avoir un second lieu géométrique de  $M'$ : ce point se trouvera à l'intersection des droites  $D'$  et  $D_1$ .

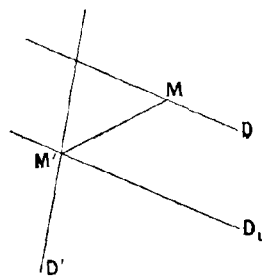


FIG. 59

**Détermination des longitudes. Méthodes générales. —**

La longitude étant un élément relatif, tout problème de longitude revient à la détermination d'une différence de longitude, c'est-à-dire encore à la différence des temps que l'on compte aux deux lieux que l'on doit rapporter l'un à l'autre, à un même instant; le temps employé peut d'ailleurs être aussi bien le temps sidéral que le temps

moyen, ou le temps vrai, ou le temps défini par un astre quelconque, puisque celui-ci est à proprement parler l'angle horaire de cet astre, corrigé s'il y a lieu de la parallaxe.

La première méthode qui se présente pour la détermination des longitudes consiste par suite dans le transport de l'heure. Un chronomètre est réglé sur le temps sidéral par exemple d'un lieu A, et sa marche déterminée; on le transporte en B, et on détermine en ce point la correction du chronomètre par l'une des méthodes exposées plus haut, en particulier par des observations méridiennes susceptibles d'une grande précision; en comparant le temps local ainsi déterminé au temps du chronomètre, on en déduit évidemment de la façon la plus simple la différence de longitude des lieux A et B; pour contrôle, on ramène le chronomètre en A, et on détermine de nouveau son état absolu et sa marche.

Tel est le principe sur lequel on s'appuie en navigation, comme nous l'avons déjà dit, pour déterminer la longitude par l'observation du temps local.

Tel est aussi le principe des expéditions chronométriques pour la détermination des longitudes; mais nous n'entrerons pas ici dans les détails de la discussion qu'elles exigent, et qui ne rentrent pas dans l'Astronomie proprement dite.

Une autre méthode est celle des signaux, que nous signalerons aussi brièvement; par cette méthode, on détermine en somme un même instant pour les deux stations dont on veut déterminer la différence de longitude; en supposant le temps local parfaitement déterminé dans chaque station, on en déduit immédiatement le résultat cherché. Les signaux qui déterminent un même instant peuvent être des signaux terrestres, principalement des signaux optiques instantanés, qui peuvent être perçus à la fois au même instant dans les deux stations, en raison de la très grande vitesse de la lumière; si les stations sont trop éloignées, on les rattache entre elles par des stations intermédiaires. On pourra faire usage aussi de signaux célestes, c'est-à-dire de phénomènes célestes nettement définis, et visibles rigoureusement au même instant de tous les points de la Terre; par exemple le commencement ou la fin d'une éclipse de Lune; les phénomènes que présentent les satellites de Jupiter, commencement ou fin de l'éclipse d'un satellite, de son occultation par la planète, de son passage ou du passage de son

ombre sur le disque de la planète. Tous ces phénomènes sont prévus par les éphémérides, en temps du premier méridien ; si donc on a exactement le temps local au moment où ils se produisent en un lieu donné, on en conclura immédiatement la longitude de ce lieu. Toutefois, cette méthode n'est pas susceptible d'une grande précision, car les observations sont difficiles, et les phénomènes que nous venons d'indiquer dépendent dans une grande mesure de l'appréciation personnelle. De plus, les éphémérides de ces phénomènes ne sont pas d'une exactitude absolue, et pour éviter les erreurs, il faut plutôt comparer entre elles les observations d'un même phénomène faites en deux lieux différents. Cependant, on obtient ainsi une approximation souvent suffisante, surtout en observant la disparition et la réapparition du premier satellite de Jupiter, quand il est éclipsé ; le phénomène est fréquent, et d'une soudaineté suffisante pour pouvoir être assez bien apprécié : en l'observant en deux lieux différents dans les mêmes conditions, on éliminera le plus possible les erreurs de la méthode.

Enfin, dans les déterminations de précision, on se sert de signaux télégraphiques. Le principe de cette méthode est intuitif : les deux observateurs placés aux deux stations déterminent l'heure locale avec le plus grand soin à l'aide d'observations méridiennes, et entre temps échangent des signaux électriques en notant les heures correspondantes. On obtient ainsi facilement de bons résultats ; mais pour atteindre une haute précision, il faut pratiquement s'entourer des plus minutieuses précautions, et en réalité, l'application de la méthode est alors très délicate. Disons seulement qu'il faut de toute nécessité disposer les observations avec une symétrie parfaite par rapport aux deux stations ; les signaux doivent être envoyés et reçus alternativement par chaque observateur, afin d'éviter, par la moyenne des résultats correspondants, les erreurs qui proviennent de l'appréciation des signaux, et aussi d'éliminer l'influence de la vitesse de transmission, qui est inconnue ; les deux observateurs doivent aussi permuter les stations, de façon à éliminer leurs erreurs personnelles ; ils doivent se servir d'instruments aussi comparables que possible ; etc.

C'est par cette méthode que l'on a déterminé les différences de longitude des grands observatoires, et malgré les précautions prises, malgré l'habileté des observateurs, on est loin de pouvoir répondre du dixième de seconde de temps.

**Usage des observations de la Lune. Distances Lunaires.**

— Il peut être utile de déterminer la longitude d'un lieu directement, sans connaître exactement l'heure du premier méridien, par des observations astronomiques proprement dites. L'observation des éclipses des satellites de Jupiter répond à cette condition, mais ne peut pas se faire à n'importe quel moment ; d'ailleurs, comme nous l'avons dit, on n'en tire pas complète satisfaction. Le seul astre dont on puisse utiliser les observations régulièrement (sauf aux environs de la nouvelle Lune), est la Lune, parce que, seule, elle a un mouvement propre suffisamment rapide.

Toutes les méthodes de détermination de longitude par les observations de la Lune reposent sur le principe suivant : supposant parfaitement connus le temps local et la latitude (s'il y a lieu), on détermine à un instant donné une coordonnée ou une certaine fonction bien définie des coordonnées de la Lune, et à l'aide des éphémérides, on calcule d'autre part le temps du premier méridien qui correspond à la coordonnée ou fonction des coordonnées observée ; la longitude s'en déduit immédiatement. L'ascension droite de la Lune, par exemple, varie en moyenne de 2 secondes (de temps) par minute ; si donc on détermine cette ascension droite à un dixième de seconde près, on connaît l'heure du premier méridien et par suite la longitude à 3 secondes près.

En pratique, on est loin d'arriver à cette précision ; l'influence des corrections de réfraction, de parallaxe, des erreurs instrumentales, de la différence d'éclairement de la Lune et des astres auxquels on la compare, de l'équation personnelle, est grande ; de plus les éphémérides de la Lune, même en tenant compte des corrections empiriques indiquées par M. Newcomb, ne sont pas parfaitement exactes. Même en multipliant les observations, on n'arrive pas toujours à des résultats très satisfaisants. Quoiqu'il en soit, nous allons exposer maintenant les méthodes classiques fondées sur l'observation de la Lune.

En mer, avec un sextant, ce sont surtout les distances lunaires que l'on observe, ou plutôt que l'on observait, car cette méthode est maintenant abandonnée, la durée du voyage entre deux escales successives étant toujours assez courte pour que l'on puisse avoir pleine confiance dans les indications des chronomètres. Nous avons déjà dit dans la première Partie de ce cours, comment, ayant observé

la distance apparente des deux bords les plus rapprochés de la Lune et du Soleil, on pouvait en déduire la distance géocentrique  $D$  des centres des deux astres au même instant, en faisant toutes les corrections nécessaires de réfraction et de parallaxe : le calcul peut d'ailleurs être dirigé de bien des façons différentes, et abrégé à l'aide de tables spéciales. On peut substituer au Soleil une belle étoile ; le calcul est un peu simplifié. Il ne reste plus qu'à savoir à quelle heure du premier méridien correspond la distance  $D$  ; à cet effet certaines éphémérides publient des tables où l'on trouve cette distance  $D$  toute calculée de 3 heures en 3 heures, par exemple ; il ne reste donc plus qu'à interpoler la table, de façon à déterminer l'heure qui correspond à la distance déduite de l'observation ; pour faire cette interpolation, on procédera par approximations successives, car la considération des différences premières ne suffit pas ; il faut tenir compte des différences secondes et même quelquefois des différences troisièmes : des tables auxiliaires facilitent cette interpolation. A défaut de tables fournissant la distance  $D$  (la *Connaissance des Temps* a cessé d'en publier depuis 1905), on calcule soi-même les valeurs de  $D$  pour des époques équidistantes voisines du moment de l'observation (qui est toujours connu avec quelque approximation), à l'aide des coordonnées connues de la Lune et du Soleil (ou de l'étoile), et on interpole les résultats ; les époques peuvent être choisies assez rapprochées pour que l'interpolation soit facile. La variation d'une distance lunaire au Soleil ou à une étoile zodiacale est en gros de 30' par heure ; si donc, la distance est observée à 10" près, la longitude sera déterminée à 20" près, en temps : la position du navire en longitude en résulte à 5 milles près.

**Culminations de la Lune.** — Supposons qu'en un lieu donné  $M$ , on ait observé le temps local du passage de la Lune au méridien, avec un instrument méridien bien installé : il est facile d'en conclure la longitude du lieu par rapport au premier méridien, à l'aide des éphémérides.

Indiquons avant tout comment sont disposées les éphémérides de la Lune dans la *Connaissance des Temps*. On y trouve d'abord l'ascension droite et la déclinaison apparentes géocentriques d'heure en heure, en temps moyen de Paris, avec leurs variations pour une minute de temps moyen, comme nous l'avons déjà dit au Chapitre I.

On y trouve en outre le temps moyen local, l'ascension droite et la déclinaison pour le moment du passage de la Lune au méridien, dans les différents lieux dont la longitude Ouest par rapport à Paris est successivement  $12^h, 13^h, 14^h, \dots, 23^h, 0^h, 1^h, 2^h, \dots, 10^h, 11^h$ .

Il est facile de voir comment on peut passer de la première éphéméride à la seconde. Soient à Paris, à un instant donné,  $t, T, \alpha, \delta, H$ , le temps sidéral, le temps moyen, l'ascension droite, la déclinaison et l'angle horaire de la Lune, de sorte que  $t = \alpha + H$ . Le premier tableau donne  $\alpha$  et  $\delta$  en fonction de  $T$ , et leurs dérivées  $\frac{d\alpha}{dT}, \frac{d\delta}{dT}$ , d'heure en heure. Quand la Lune passe au méridien du lieu de longitude  $H$ , son angle horaire à Paris est précisément  $H$ ; le second tableau donne donc en somme  $\alpha$  et  $\delta$  en fonction de  $H$ , et leurs dérivées  $\frac{d\alpha}{dH}, \frac{d\delta}{dH}$ . Pour calculer ces dernières en fonction des premières, observons que

$$dH = dt - d\alpha, \quad \text{et que} \quad dt = (1 + k)dT,$$

où  $k = 0,0027379$ ; donc

$$\frac{d\alpha}{dH} = \frac{\frac{d\alpha}{dT}}{1 + k - \frac{d\alpha}{dT}}, \quad \frac{d\delta}{dH} = \frac{\frac{d\delta}{dT}}{1 + k - \frac{d\delta}{dT}}.$$

Enfin soit  $T_0$  le temps moyen local du passage au méridien dans le lieu de longitude  $H$ ;  $T$  étant le temps moyen correspondant de Paris, on a  $T_0 = T - H$ , et on en déduit, pour la variation de  $T_0$ ,

$$dT_0 = dT - dH = \frac{dH + d\alpha}{1 + k} - dH,$$

d'où

$$\frac{dT_0}{dH} = \frac{d\alpha}{dH} - k \frac{1 + \frac{d\alpha}{dH}}{1 + k};$$

la variation de  $T_0$  étant, comme celle de  $\alpha$ , exprimée en secondes de temps, et calculée pour une minute de temps, et  $\frac{d\alpha}{dH}$  étant en gros égal à  $\frac{1}{30}$ , on voit que l'on a toujours  $\frac{dT_0}{dH} = \frac{d\alpha}{dH} - 0^s,17$ ; ce dernier nombre est en somme égal à  $60k \left(1 + \frac{1}{30}\right)$ .

Enfin le premier tableau donne encore le demi-diamètre et la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune de  $12^h$  en  $12^h$  de temps moyen ; le deuxième tableau donne les mêmes quantités d'heure en heure de longitude ; il donne en plus la durée du passage méridien du demi-diamètre, égal comme nous l'avons vu à propos des observations méridiennes de la Lune, à  $\frac{s \sec \delta}{1 - \lambda}$ ,  $s$  étant le demi-diamètre, et  $\lambda$  la dérivée de l'ascension droite par rapport au temps sidéral.

Le dernier tableau est supprimé aux environs de la nouvelle Lune, étant alors sans objet pratique.

Ceci dit, voici comment on peut se servir de l'éphéméride pour déterminer la longitude par l'observation d'une culmination lunaire.

Une première méthode, de précision médiocre, est la suivante : supposons qu'on ait observé à la lunette méridienne, bien réglée, le temps moyen local du passage au méridien de l'un des bords de la Lune ; le temps observé étant comparé au temps  $T_0$  de l'éphéméride pour le passage de l'observation, on aura tout de suite une valeur approchée de la durée du passage du demi-diamètre ; c'est un intervalle de temps sidéral, que l'on peut ici sans inconvénient considérer comme un intervalle de temps moyen ; en l'ajoutant ou retranchant au temps observé, suivant que celui-ci se rapporte au premier ou au second bord, on trouve le temps du passage du centre au méridien ; en le comparant d'une façon précise à l'éphéméride fournissant  $T_0$ , et interpolant en se servant de la variation de  $T_0$ , on aura immédiatement la longitude cherchée.

Pour obtenir plus de précision, on observe l'heure sidérale locale du passage du bord au méridien du lieu dont on cherche la longitude, et au moyen de la durée du passage du demi-diamètre, on détermine l'heure sidérale du passage du centre, en tenant compte de toutes les corrections instrumentales, comme nous l'avons vu au sujet des observations méridiennes de la Lune. On a ainsi l'ascension droite de la Lune, au moment de l'observation ; elle tombera entre deux ascensions droites consécutives de l'éphéméride calculée pour les méridiens successifs, et la longitude cherchée entre les longitudes des deux méridiens correspondants : en interpolant avec précision, en tenant compte de la variation

d'ascension droite, l'éphéméride qui donne  $\alpha$  en fonction de  $H$ , on aura la longitude avec exactitude : on recommencera le calcul s'il est nécessaire, pour avoir plus exactement le temps du passage du demi-diamètre, et on tiendra compte des corrections de M. Newcomb, s'il s'agit d'une observation tout à fait précise.

Pour faciliter le calcul des constantes instrumentales, et en particulier de la correction de la pendule ou du chronomètre, on observe en même temps que la Lune des étoiles situées sur un parallèle voisin de celui de la Lune et à peu de distance en ascension droite : ce sont des *étoiles de culmination de la Lune* ; elles sont indiquées par l'éphéméride, en même temps que leurs positions. En procédant de cette façon, on a l'avantage d'avoir à modifier très peu la position de l'instrument au courant des diverses observations, et l'on peut compter par suite sur une plus grande stabilité.

D'autre part, l'observation des étoiles de culmination et de la Lune, faite le même jour dans les observatoires fixes et dans les lieux dont on veut déterminer la longitude, donne une plus grande précision à cette opération. En comparant en effet la variation d'ascension droite de la Lune pour une minute de longitude, avec la variation de la différence entre l'ascension droite de la Lune et celle d'une étoile de culmination, on s'affranchit évidemment de l'erreur qui résulte de la différence entre la position réelle de la Lune et sa position théorique.

Nous n'entrerons pas dans la discussion qui serait nécessaire pour juger de l'influence des différentes causes d'erreur dans cette méthode, à laquelle s'appliquent les réflexions générales déjà indiquées.

**Hauteurs de la Lune.** — La hauteur de la lune ayant été observée, on peut en conclure l'angle horaire, par suite l'ascension droite, puisque nous supposons connus le temps et la latitude : par l'ascension droite, on détermine le temps ou l'angle horaire du premier méridien, à l'aide de l'éphéméride, et par suite la longitude.

Il est clair que l'on ne peut faire ici qu'un calcul d'approximations successives, puisque pour avoir certains éléments du calcul, savoir le demi-diamètre, la parallaxe, et surtout la déclinaison, il faut avoir déjà une connaissance approchée de la longitude.



Pour avoir des circonstances favorables, il faut évidemment pouvoir déterminer l'angle horaire avec précision, c'est-à-dire observer dans le voisinage du premier vertical.

Cette méthode n'est pas susceptible d'une grande précision, mais on peut l'améliorer en faisant surtout des observations différentielles : on observe alors la différence de hauteur, supposée très petite, entre un bord de la Lune et une étoile voisine, la lunette du théodolite restant invariablement calée pendant les deux observations ; la différence des hauteurs est fournie par les lectures du niveau, et par les lectures du micromètre, si l'instrument est muni d'un micromètre comme quand il s'agit d'appliquer la méthode de Talcott. L'opération peut être répétée plusieurs fois à des hauteurs différentes ; il y a avantage en particulier à combiner des observations faites symétriquement par rapport au méridien, mais loin du méridien. Sans insister davantage sur les détails de l'observation elle-même, examinons comment on peut la traiter.

Employons nos notations ordinaires, et soient d'abord  $t, t'$  les valeurs du temps sidéral local, supposé parfaitement connu, aux moments des deux observations, la première de la Lune, la seconde de l'étoile. Soit  $L$  la longitude supposée du lieu ; le temps sidéral du premier méridien est  $t + L$ , pour lequel on prend dans l'éphéméride de la Lune les éléments  $\alpha, \delta, \varpi$  parallaxe horizontale équatoriale,  $s$  demi-diamètre ; on connaît aussi les coordonnées  $\alpha', \delta'$  de l'étoile. Les angles horaires correspondant aux observations sont alors  $H = t - \alpha, H' = t' - \alpha'$  ; avec ces éléments et la latitude  $\varphi$ , on calcule les hauteurs  $h$  et  $h'$  des deux astres, en même temps que les azimuts  $A$  et  $A'$ , et les angles parallactiques  $S$  et  $S'$  : les hauteurs  $h$  et  $h'$  seules sont calculées avec grande précision.

Des hauteurs  $h$  et  $h'$  on déduit la hauteur apparente  $h_1$  du bord observé de la Lune, affectée de la parallaxe et de la réfraction, et la hauteur  $h_1'$  de l'étoile, affectée de la réfraction. Pour calculer  $h_1$ , on a par exemple d'après la première Partie du cours, la formule

$$\sin (h - h_1 + R) = \varepsilon \sin S + \rho \sin \varpi \sin (\gamma - h_1 + R),$$

avec

$$\gamma = 90^\circ - (\varphi - \varphi') \cos A,$$

$\rho$  et  $\varphi'$  étant les coordonnées polaires géocentriques du lieu,  $R$  la réfraction pour la hauteur apparente  $h''$  ;  $\varepsilon$  est  $\pm 1$  suivant qu'on

a observé le bord inférieur ou le bord supérieur : le calcul se fait aisément par approximations successives et peut être simplifié, surtout si l'on a déjà par l'observation même une valeur approchée de  $h_1$ . La différence  $h_1 - h_1'$ , dont nous avons besoin, peut s'écrire sous la forme  $(h_1 - R) - h' + (R - R')$ ,  $R'$  étant la réfraction pour la hauteur vraie  $h'$ , puisque l'on a simplement  $h_1' = h' + R'$ ; on voit ainsi que  $h_1 - h_1'$  ne dépend en réalité que de la très petite différence de réfraction  $R - R'$ , facile à calculer avec précision.

Si la longitude  $L$  était exacte, la différence ainsi calculée  $h_1 - h_1'$  serait égale à celle fournie par l'observation; sinon, il faut lui ajouter une certaine quantité  $dh_1$  pour retrouver le résultat de l'observation; si cette quantité  $dh_1$  est celle dont augmente  $h_1$  quand on change la longitude  $L$  en  $L + dL$ ,  $dL$  sera la correction de la longitude supposée; la véritable longitude sera  $L + dL$ .

Connaissant  $dh_1$ , il sera facile d'en tirer  $dL$ , si ces quantités sont assez petites pour être considérées comme des différentielles : sinon on procédera par approximations successives. Appelons  $\lambda$  et  $\beta$  les dérivées de l'ascension droite et de la déclinaison de la lune par rapport au temps sidéral; si  $L$  devient  $L + dL$ , le temps du premier méridien est augmenté de  $dL$ ; par suite  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $H$  subissent les accroissements  $\lambda dL$ ,  $\beta dL$ ,  $-\lambda dL$ . Donc, d'après la formule différentielle

$$dh = -\sin S \cos \delta . dH + \cos S . d\delta,$$

( $\varphi$  étant ici invariable), on aura en confondant  $dh$  avec  $dh_1$  :

$$dh_1 = (\lambda \sin S \cos \delta + \beta \cos S) dL,$$

ce qui donnera  $dL$ .

**Azimuths de la Lune.** — On peut procéder avec les azimuths tout comme avec les hauteurs, surtout par observations différentielles; ici l'instrument reste invariablement fixé en azimuth pendant toute l'observation, et l'on observe la différence d'azimut, supposée très petite, entre un bord de la Lune et une étoile voisine, à peu près à la même hauteur; cette différence est fournie par les corrections instrumentales dépendant du grand niveau mobile et de la collimation. L'opération peut être répétée plusieurs

fois dans des azimuts différents ; il y a avantage à combiner des observations faites symétriquement par rapport au méridien, mais près du méridien. On fera la réduction de l'observation tout comme précédemment ; avec la longitude approchée et les temps d'observation, on résoud encore les triangles de position relatifs à la Lune et à l'étoile, en calculant cette fois les azimuts avec précision. Des azimuts calculés  $A$  et  $A'$ , on déduit sans peine les azimuts  $A_1$ ,  $A'_1$ , tels qu'on a dû les observer ; l'influence de la réfraction est négligeable, de sorte que  $A'_1 = A'$ , et l'on a en tenant compte de la parallaxe et du demi-diamètre :

$$A_1 = A \pm \frac{s}{\cos h} + \frac{\rho \mp (\varphi - \varphi') \sin A}{\cos h},$$

le signe supérieur ou inférieur convenant au premier ou au second bord. Si  $dA_1$  est ce qu'il faut ajouter à la différence calculée  $A_1 - A'_1$  pour retrouver le résultat fourni par l'observation,  $dA_1$  provient de l'erreur de longitude  $dL$ , et comme l'on a

$$\cos h \cdot dA = \cos S \cos \delta \cdot dH + \sin S \cdot d\delta,$$

il vient, pour déterminer  $dL$ , l'équation

$$\cos h \cdot dA_1 = (-\lambda \cos S \cos \delta + \beta \sin S) dL.$$

**Occultations d'étoiles par la Lune.** — L'observation de l'occultation d'une étoile par la Lune se fait bien, car c'est un phénomène presque instantané ; la disparition de l'étoile s'observe d'ailleurs mieux que la réapparition, surtout quand elle se fait derrière le bord obscur. L'observation des occultations fournit donc de bonnes déterminations de longitude, surtout quand on la poursuit pendant quelque temps, ce qui est facile : il faut d'ailleurs supposer l'éphéméride exacte. Nous allons, en terminant, indiquer brièvement la méthode, en nous appuyant sur ce que nous avons déjà dit à propos des occultations dans la première Partie du cours.

Une éclipse de Soleil pourrait être traitée de la même façon ; mais c'est un phénomène trop peu fréquent pour qu'il soit utile de s'y arrêter ici.

En se reportant à ce que nous avons dit à propos des éclipses.

du Soleil, qui comprennent les occultations comme cas particulier, on peut résumer ainsi la partie qui nous intéresse. L'ascension droite, la déclinaison et la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune à un moment quelconque, voisin de l'occultation, sont  $\alpha, \delta, \varpi$  (on tient compte pour les calculer des corrections de M. Newcomb);  $\alpha', \delta'$  sont les coordonnées apparentes de l'étoile. En prenant des axes de coordonnées convenables, on envisage les quantités  $p$  et  $q$  suivantes (qui remplacent ce que nous avons appelé  $x$  et  $y$  dans la théorie générale, afin d'adopter, au moins en grande partie, les notations de la Connaissance des Temps) :

$$p = \frac{\cos \delta \sin (\alpha - \alpha')}{\sin \varpi},$$

$$q = \frac{\sin \delta \cos \delta' - \sin \delta' \cos \delta \cos (\alpha - \alpha')}{\sin \varpi}.$$

Soit maintenant  $H$  l'angle horaire au même instant de l'astre occulté, pour le méridien origine (celui de Paris); on considère les quantités analogues relatives au lieu d'observation (remplaçant les coordonnées  $\xi$  et  $\eta$  envisagées dans la théorie générale) :

$$u = \rho \cos \varphi' \sin (H - L),$$

$$v = \rho \sin \varphi' \cos \delta' - \rho \cos \varphi' \sin \delta' \cos (H - L);$$

$\rho$  et  $\varphi'$  sont les coordonnées polaires géocentriques du lieu d'observation, de longitude  $L$  comptée vers l'Ouest; (on fait abstraction de la réfraction dans le calcul de  $\rho$ ). Si, pour le lieu considéré, il y a au moment défini par  $t$  immersion ou émergence de l'astre derrière la Lune, on a la relation

$$(p - u)^2 + (q - v)^2 = k^2,$$

en désignant par  $k$  le rayon linéaire de la Lune, mesuré à l'aide du rayon équatorial de la Terre, de sorte que  $\log k = \bar{1},43545$ .

Prenons comme origine du temps l'heure  $T_0$ , temps moyen de Paris, de la conjonction vraie de la Lune et de l'étoile en ascension droite; et appelons  $p_0, q_0$  les valeurs correspondantes de  $p$  et de  $q$ : on a  $p_0 = 0$ . Appelons  $p'$  et  $q'$  les variations du premier ordre de  $p$  et de  $q$  pour un intervalle d'une heure de temps moyen,  $p''$  et  $q''$  leurs variations correspondantes du second ordre, de sorte que, pour

l'époque  $\tau$  comptée à partir de  $T_0$ , et exprimée en heures de temps moyen, on ait toujours

$$\begin{aligned} p &= p'\tau + p''\tau^2, \\ q &= q_0 + q'\tau + q''\tau^2; \end{aligned}$$

les termes d'ordre supérieur sont négligeables en effet.

Supposons que le temps moyen local de l'observation de l'immersion ou de l'émergence soit  $T$ , et que  $L$  étant une valeur approchée de la longitude, la véritable longitude soit  $L + dL$ ,  $dL$  étant assez petit pour pouvoir être regardé comme une différentielle. L'heure de l'observation, en temps moyen de Paris, est égale à  $T + L + dL$ , de sorte que la valeur de  $\tau$  correspondante est  $T - T_0 + L + dL$ ; appelons  $P$  et  $Q$  les valeurs de  $p$  et de  $q$  calculées exactement avec la valeur approchée  $T - T_0 + L$  de  $\tau$ ; les vraies valeurs de  $p$  et de  $q$  pour le moment de l'observation pourront être prises sous la forme  $p = P + p'.dL$ ,  $q = Q + q'.dL$ .

Les quantités  $u$  et  $v$  peuvent être calculées exactement, car  $H - L$  est l'angle horaire local de l'étoile au moment de l'observation, égal par conséquent au temps sidéral local correspondant, diminué de l'ascension droite  $\alpha'$ . On a donc finalement, pour déterminer l'inconnue  $dL$ , l'équation

$$(P + p'.dL - u)^2 + (Q + q'.dL - v)^2 = k^2.$$

Posons

$$\begin{aligned} P - u &= m \sin M, & p' &= n \sin N, \\ Q - v &= m \cos M, & q' &= n \cos N; \end{aligned}$$

en introduisant un angle auxiliaire  $\psi$ , tout revient à

$$\begin{aligned} m \sin M + n \sin N.dL &= k \sin \psi, \\ m \cos M + n \cos N.dL &= k \cos \psi, \end{aligned}$$

d'où comme l'on sait :

$$\begin{aligned} \sin (\psi - N) &= \frac{m \sin (M - N)}{k}, \\ dL &= \frac{m \sin (M - \psi)}{n \sin (\psi - N)}; \end{aligned}$$

d'après la signification géométrique de  $\psi$ , facile à retrouver en se reportant à la théorie générale, on verra que pour une immersion

on doit prendre  $\cos(\psi - N)$  négatif, et positif pour une émérsion, si toutefois  $n$  est choisi positif.

Lorsque la longitude ne sera pas connue avec une exactitude suffisante, on trouvera pour  $dL$  une valeur notable ; dans ce cas il faudra recommencer les calculs en prenant pour point de départ la longitude  $L + dL$  ; la deuxième correction sera plus faible, et le plus souvent ces deux opérations successives suffiront.

La Connaissance des Temps renferme tous les éléments nécessaires pour faire les calculs précédents ; pour toutes les occultations de belles étoiles qui peuvent se produire dans l'année, elle donne les éléments fondamentaux  $\alpha'$ ,  $\delta'$ ,  $T_0$ ,  $q_0$ ,  $p'$ ,  $q'$ ,  $p''$ ,  $p''$ ,  $n$  et  $N$ .

Une même occultation n'est pas visible en tous les points de la Terre : un calcul préparatoire en tout semblable à celui des éclipses de Soleil, mais plus simple, fera connaître si le phénomène est visible, et dans ce cas, permettra de se préparer à l'observation. Mais il n'est pas utile d'entrer dans de nouveaux détails à ce sujet : il suffit de se reporter à la première Partie de ce Cours, et aux instructions de la Connaissance des Temps.

## CHAPITRE COMPLÉMENTAIRE

---

Dans ce dernier Chapitre, qui servira de complément à ce Cours, nous nous proposons d'étudier, le plus brièvement possible, un problème d'Astronomie pratique d'application fréquente, celui de la détermination de l'orbite elliptique ou parabolique d'une petite planète ou d'une comète nouvellement découverte, au moyen de trois observations complètes de cet astéroïde, c'est-à-dire en fait de trois déterminations de son ascension droite et de sa déclinaison apparentes en des lieux terrestres donnés, à trois dates données voisines.

Nous nous bornerons à ce problème, sans nous préoccuper de tous ceux qui en dérivent quand on veut faire concourir un nombre quelconque d'observations, faites à des époques plus ou moins éloignées, à la détermination d'une orbite; et nous exposerons essentiellement la solution classique de Gauss (1), en n'invoquant que les notions simples développées au chapitre IX de la première Partie de ce cours.

**Rappel des notations.** — Il s'agit en somme du problème des deux corps, réduits à des points matériels P, S; la masse  $m$  de P, l'astéroïde, est supposée nulle; la masse  $m_0$  de S, le Soleil, est l'unité de masse.

La trajectoire relative de P par rapport à S est une section conique admettant S comme foyer, et décrite suivant la loi des aires.

---

(1) *Theoria motus corporum cælestium in sectionibus conicis solem ambientium*, Hambourg, 1809.

L'unité de temps est le jour solaire moyen. La constante de l'attraction, désignée généralement par  $k^2$ , a la valeur que lui a attribuée Gauss, définie par

$$\log k = \bar{2},2355814,$$

les logarithmes étant décimaux, comme dans tout ce qui suivra.

Si  $k''$  est la mesure de  $k$  en secondes d'arc, nombre souvent nécessaire, on a

$$\log k'' = 3,5500066.$$

L'unité de longueur résulte de la valeur de  $k$ , ainsi qu'il a été déjà dit.

L'orbite étant supposée elliptique, les éléments qui définissent sa forme sont son demi-grand axe  $a$ , son excentricité  $e$ , représentée aussi par  $\sin \varphi$ ; si  $p$  est le paramètre de l'orbite, on a

$$p = a(1 - e^2) = a \cos^2 \varphi;$$

si  $\mu$  est le moyen mouvement diurne, on a  $\mu = ka^{\frac{3}{2}}$ . La constante des aires, soit le double de l'aire du secteur décrit par le rayon vecteur de P autour de S pendant l'unité de temps, a pour valeur  $k\sqrt{p}$ .

L'orbite parabolique est un cas limite, pour  $e = 1$ ;  $a$  est infini,  $\mu$  est nul; la distance périhélic, soit  $q$ , est  $\frac{p}{2}$ .

L'orbite est définie en position par la longitude  $\varkappa$  de son nœud ascendant, son inclinaison  $i$ , (positive et inférieure à  $\pi$ ), la longitude  $\varpi$  du périhélic; le système fondamental de coordonnées est en général celui que détermine l'écliptique et l'équinoxe moyens à une époque déterminée, sans que ce choix ait rien de nécessaire. Un élément équivalent à  $\varpi$  est la distance  $\omega$  du nœud ascendant au périhélic, souvent employée; on a  $\omega = \varpi - \varkappa$ .

L'anomalie vraie au temps  $t$  et le rayon vecteur SP seront désignés par  $v$  et  $r$ , l'anomalie excentrique par  $u$ , l'anomalie moyenne par  $M$ ;  $\sigma$  sera l'*argument de la latitude*, soit l'angle  $v + \omega$  ou  $v + \varpi - \varkappa$ , distance du nœud ascendant à la position P.

Enfin, dans le cas de l'ellipse, si  $\varepsilon$  est la longitude moyenne de l'époque, c'est-à-dire à l'origine du temps choisie, on aura

$$M = \mu t + \varepsilon - \varpi;$$



on peut d'ailleurs avantageusement remplacer ici  $\varepsilon$  par l'anomalie moyenne de l'époque, soit  $M_0 = \varepsilon - \varpi$ , de sorte que  $M = \mu t + M_0$ . Dans le cas de la parabole, si T est l'époque du passage au périhélie, on aura

$$t - T = \frac{q^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}}{k} \left( \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} \right).$$

Il est inutile de rappeler les autres formules dont nous aurons besoin, et que l'on trouvera toutes au Chapitre IX de la première Partie.

**Problème auxiliaire : Détermination d'une orbite dans son plan par deux positions héliocentriques complètes.** — Dans ce problème, dont la solution nous sera nécessaire plus tard, on suppose connus, à deux époques données  $t$  et  $t'$ , les rayons vecteurs  $r$  et  $r'$ , et les arguments de la latitude,  $\sigma$  et  $\sigma'$ , de l'astéroïde, en deux positions successives P et P', voisines : on a donc  $t < t'$ , et l'angle au Soleil, PSP', n'est pas grand; de plus, l'astéroïde va directement de P en P', sans effectuer une révolution totale autour du Soleil. Ces données fournissent manifestement quatre équations qui permettent de déterminer les éléments de l'orbite dans son plan, soient  $\omega$ ,  $M_0$ ,  $a$ ,  $e$ , l'orbite étant supposée elliptique.

Prenons comme inconnues auxiliaires les anomalies vraies, excentriques et moyennes,  $v$ ,  $u$ ,  $M$ , d'une part,  $v'$ ,  $u'$ ,  $M'$ , d'autre part, aux deux époques  $t$  et  $t'$ ; et posons en même temps

$$(1) \quad \frac{v+v'}{2} = F, \quad \frac{v'-v}{2} = f, \quad \frac{u+u'}{2} = G, \quad \frac{u'-u}{2} = g, \quad k(t'-t) = \theta.$$

Les inconnues proprement dites se réduiront à  $a$ ,  $e$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $g$ ; en effet, relativement aux autres, on a

$$\sigma = v + \omega, \quad \sigma' = v' + \omega,$$

d'où

$$(2) \quad f = \frac{1}{2} (\sigma' - \sigma), \quad \omega = \frac{\sigma' + \sigma}{2} - F,$$

de sorte que  $f$  est connu, et que  $\omega$  résulte de  $F$ .

En outre,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = u - e \sin u, \quad M' = u' - e \sin u', \\ M_0 = \frac{M' + M}{2} - \mu \frac{t' + t}{2}, \end{array} \right.$$

de sorte que  $M, M', M_0$  résultent immédiatement de  $a, e, u, u'$ .

Les équations proprement dites du problème seront par suite les quatre relations qui ont lieu entre  $a, e$  d'une part, les anomalies vraies et les anomalies excentriques d'autre part; èt une cinquième, qui correspond à la connaissance de l'intervalle de temps  $t' - t$ .

Pour les quatre premières, on peut choisir les relations connues :

$$(4) \quad \begin{cases} \sqrt{r'} \sin \frac{v'}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{u'}{2}, \\ \sqrt{r'} \cos \frac{v'}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{u'}{2}, \\ \sqrt{r} \sin \frac{v}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{u}{2}, \\ \sqrt{r} \cos \frac{v}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{u}{2}, \end{cases}$$

qui entraînent les deux suivantes :

$$(4^{bis}) \quad r = a(1 - e \cos u), \quad r' = a(1 - e \cos u').$$

La cinquième équation correspond à

$$M' - M = \mu(t' - t) = u' - u - e(\sin u' - \sin u),$$

et s'écrit par suite sous la forme

$$(5) \quad \theta a^{-\frac{3}{2}} = 2g - 2e \sin g \cos G.$$

Puisque l'angle  $g$  entre seul en dehors des signes trigonométriques, c'est lui qu'il faut garder comme inconnue principale.

Une combinaison évidente des équations (4) donne

$$\sqrt{rr'} \cos f = a \cos g - ae \cos G.$$

les relations (4<sup>bis</sup>) donnent aussi

$$r + r' = 2a - 2ae \cos g \cos G.$$

On tire de ces deux équations

$$(6) \quad \begin{cases} e \cos G = \cos g - \frac{1}{a} \sqrt{rr'} \cos f, \\ a \sin^2 g = \frac{r+r'}{2} - \sqrt{rr'} \cos f \cos g. \end{cases}$$

Posons

$$(7) \quad 1 + 2l = \frac{r + r'}{2\sqrt{rr'} \cos f},$$

de sorte que, d'après les hypothèses faites,  $l$  est une petite quantité positive; il viendra

$$(8) \quad a \sin^2 g = 2\sqrt{rr'} \cos f \left( l + \sin^2 \frac{g}{2} \right).$$

Portons les valeurs (6) et (8) de  $e \cos G$  et de  $a$  dans (5), et posons

$$(9) \quad m = \frac{\theta}{(2\sqrt{rr'} \cos f)^2};$$

on a finalement pour l'équation cherchée en  $g$  :

$$(10) \quad m = \left( l + \sin^2 \frac{g}{2} \right)^2 + \left( l + \sin^2 \frac{g}{2} \right)^3 \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g};$$

les radicaux sont d'ailleurs partout positifs.

Pour faciliter le calcul précis de  $l$ , on peut faire

$$(11) \quad \sqrt[4]{\frac{r'}{r}} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \chi \right),$$

d'où l'on tire

$$(7^{bis}) \quad l = \frac{\operatorname{tg}^2 2\chi + \sin^2 \frac{f}{2}}{\cos f}.$$

On peut aussi faire

$$(12) \quad \sqrt{\frac{r'}{r}} = \operatorname{tg} \psi,$$

puis déterminer deux angles auxiliaires  $h$  et  $H$ , dont le dernier nous servira ultérieurement, par les relations commodes pour le calcul :

$$(12^{bis}) \quad \begin{cases} \sin h \cos H = \sin f, \\ \sin h \sin H = \cos f \cos 2\psi, \\ \cos h = \cos f \sin 2\psi; \end{cases}$$

il vient alors

$$(7^{ter}) \quad l = \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{\cos h}.$$

Nous aurons besoin encore d'une nouvelle quantité  $y$ , définie comme le rapport de l'aire du secteur elliptique SPP' à l'aire du triangle SPP' limité par les mêmes rayons vecteurs. Le double de l'aire du secteur étant  $k(t' - t)\sqrt{p}$ , on a donc

$$(13) \quad y = \frac{\theta \sqrt{a(1-e^2)}}{rr' \sin \frac{1}{2} f}.$$

Une combinaison immédiate des équations (4) donne

$$\sqrt{rr'} \sin f = a \sqrt{1-e^2} \sin g,$$

de sorte que

$$y = \frac{\theta}{2\sqrt{rr'} \cos f \sqrt{a} \sin g},$$

et d'après (8) et (9)

$$(14) \quad y = \frac{m}{(l + \sin^2 \frac{g}{2})^2}.$$

On déterminera simultanément  $y$  et  $g$ , en posant

$$(15) \quad x = \sin^2 \frac{g}{2}, \quad X = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g},$$

et résolvant les deux équations simultanées qui résultent de (10) et (14) :

$$(16) \quad y^3 \cdot y^2 = m^2 X, \quad x = \frac{m^2}{y^2} - l.$$

La quantité  $X$  est une fonction de  $x$ ; mais il n'est pas pratique de la calculer, pour une valeur donnée de  $x$ , par l'intermédiaire de  $g$ , à l'aide des formules directes (15) : en effet,  $g$  étant toujours fort petit dans les hypothèses faites, les tables trigonométriques ordinaires ne permettent aucune précision dans le calcul de la différence  $2g - \sin 2g$ , qui est du troisième ordre par rapport à  $g$ .

On constate aisément d'autre part que  $X$  est développable en série entière ordonnée suivant les puissances de  $x$ ;  $x$  étant petit, cette série permettra aisément le calcul de  $X$ . Pour déterminer cette série, différencions la relation

$$X \sin^3 g = 2g - \sin 2g;$$

il vient

$$\frac{dX}{dx} \frac{dx}{dg} \sin^3 g + 3X \sin^2 g \cos g - 2 + 2 \cos 2g = 0;$$

introduisant partout  $x$ , et remplaçant  $\frac{dx}{dg}$  par  $\frac{1}{2} \sin g$ , on a

$$2x(1-x) \frac{dX}{dx} + (3-6x)X - 4 = 0.$$

Faisons maintenant, puisque  $X$  est d'ordre nul par rapport à  $x$ ,

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \dots,$$

et substituons cette expression dans l'équation différentielle qui précède ; on obtiendra la série de relations

$$\begin{aligned} 3\alpha - 4 = 0, & \quad 5\beta - 6\alpha = 0, & \quad 7\gamma - 8\beta = 0, \\ 9\delta - 10\gamma = 0, & \quad 11\varepsilon - 12\delta = 0, \dots \end{aligned}$$

d'où

$$X = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} x + \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} x^2 + \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} x^3 + \dots,$$

la loi des coefficients étant évidente.

Formant  $\frac{1}{X}$ , on a aussi le développement plus rapidement convergent :

$$\frac{1}{X} = \frac{3}{4} - \frac{9}{10} x + \frac{9}{175} x^2 + \frac{26}{875} x^3 + \dots,$$

sans qu'il soit nécessaire pour notre objet d'aller plus loin.

Posons alors, avec Gauss :

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{1}{X} = \frac{3}{4} - \frac{9}{10} (x - \xi), \\ \xi = \frac{2}{35} x^2 \left( 1 + \frac{26}{45} x + \dots \right); \end{cases}$$

$\xi$  est une quantité très petite, réduite en table par Gauss ; à défaut de table, la formule précédente permet de la calculer sans peine quand  $x$  est suffisamment petit.

Dans  $\frac{1}{X}$  remplaçons  $x$  par sa valeur (16), et posons

$$(18) \quad h = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l + \xi};$$

la première équation (16) devient, toutes réductions faites,

$$(19) \quad y^3 - y^2 - hy - \frac{1}{9}h = 0.$$

Cette équation du troisième degré dépend du seul paramètre positif  $h$ , et a une seule racine positive, convenant seule au problème proposé; Gauss a réduit aussi cette racine en table, avec l'argument  $h$ ; à défaut de table, on remarquera que  $y$  dépasse l'unité de peu, et l'on résoudra l'équation (19) par approximations successives, en écrivant par exemple

$$(19^{bis}) \quad y - 1 = h \frac{y + \frac{1}{9}}{y^2}.$$

En définitive, pour résoudre les équations (16), on calculera  $x$  et  $y$  par approximations successives comme il suit: on néglige d'abord  $\xi$ , et l'on calcule  $h$  avec (18),  $y$  avec (19),  $x$  avec (16); de cette valeur approchée de  $x$ , on tire par (17) une valeur approchée de  $\xi$ , et on recommence le calcul jusqu'à ce que  $\xi$  ne change plus; enfin, de  $x$  on tire  $g$ .

Il reste à calculer les éléments de l'orbite, ou ce qui revient au même comme nous l'avons vu, les quatre quantités  $a, e, F, G$ .

On peut y arriver de bien des façons: en voici une très avantageuse.

Reprenons les équations (4), et remplaçons- $y$ , sans qu'il soit nécessaire de les récrire, les quantités  $\sqrt{1+e}$  et  $\sqrt{1-e}$  par les expressions manifestement égales  $\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}$ ,  $\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}$ ; combinons-les alors par addition en les multipliant respectivement par des multiplicateurs formant les quatre systèmes suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{F+g}{2}, \quad \cos \frac{F+g}{2}, \quad -\sin \frac{F-g}{2}, \quad -\cos \frac{F-g}{2}; \\ \cos \frac{F+g}{2}, \quad -\sin \frac{F+g}{2}, \quad -\cos \frac{F-g}{2}, \quad \sin \frac{F-g}{2}; \\ \sin \frac{F-g}{2}, \quad \cos \frac{F-g}{2}, \quad -\sin \frac{F+g}{2}, \quad -\cos \frac{F+g}{2}; \\ \cos \frac{F-g}{2}, \quad -\sin \frac{F-g}{2}, \quad -\cos \frac{F+g}{2}, \quad \sin \frac{F+g}{2}. \end{array} \right.$$

Il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} (\sqrt{r'} - \sqrt{r}) \cos \frac{f-g}{2} &= 2\sqrt{a} \sin g \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{F+G}{2}, \\ (\sqrt{r'} + \sqrt{r}) \sin \frac{f-g}{2} &= 2\sqrt{a} \sin g \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{F+G}{2}, \\ (\sqrt{r'} - \sqrt{r}) \cos \frac{f+g}{2} &= 2\sqrt{a} \sin g \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{F-G}{2}, \\ (\sqrt{r'} + \sqrt{r}) \sin \frac{f+g}{2} &= 2\sqrt{a} \sin g \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{F-G}{2}. \end{aligned} \right.$$

En introduisant l'angle  $\chi$  défini par (11), on a

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{r'} + \sqrt{r} &= \sqrt[4]{rr'} \left( \sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}} \right) = \sqrt[4]{rr'} \cdot 2 \operatorname{séc} 2\chi, \\ \sqrt{r'} - \sqrt{r} &= \sqrt[4]{rr'} \left( \sqrt{\frac{r'}{r}} - \sqrt{\frac{r}{r'}} \right) = \sqrt[4]{rr'} \cdot 2 \operatorname{tg} 2\chi; \end{aligned} \right.$$

donc finalement, on peut écrire :

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{a} \sin g \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{F+G}{2} &= \sqrt[4]{rr'} \cos \frac{f-g}{2} g \operatorname{tg} 2\chi, \\ \sqrt{a} \sin g \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{F+G}{2} &= \sqrt[4]{rr'} \sin \frac{f-g}{2} g \operatorname{séc} 2\chi, \\ \sqrt{a} \sin g \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{F-G}{2} &= \sqrt[4]{rr'} \cos \frac{f+g}{2} g \operatorname{tg} 2\chi, \\ \sqrt{a} \sin g \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{F-G}{2} &= \sqrt[4]{rr'} \sin \frac{f+g}{2} g \operatorname{séc} 2\chi; \end{aligned} \right.$$

ces formules fournissent immédiatement, et dans les meilleures conditions, sans aucune ambiguïté, les quatre inconnues  $F$ ,  $G$ ,  $a$ ,  $\varphi$ .

Comme vérification du calcul, on a directement d'après (8), (9) et (14) la relation

$$\sqrt{a} \sin g = \frac{\theta}{\gamma} \cdot \frac{1}{2\sqrt{rr'} \cos f}.$$

On peut encore calculer les éléments de la façon suivante. D'après (13), on a

$$\sqrt{p} = \frac{\gamma}{\theta} rr' \sin 2f,$$

d'où  $p$ . On a ensuite, d'après l'équation de la trajectoire,

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v, \quad \frac{p}{r'} = 1 + e \cos v',$$

d'où, par addition et soustraction,

$$\begin{cases} e \sin f \sin F = \frac{p}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right), \\ e \cos f \sin F = \frac{p}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) - 1; \end{cases}$$

en utilisant l'angle  $\psi$  défini par (12), on a

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) = \frac{1}{2\sqrt{rr'}} (\operatorname{tg} \psi - \operatorname{cotg} \psi) = -\frac{1}{\sqrt{rr'}} \operatorname{cotg} 2\psi, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) = \frac{1}{2\sqrt{rr'}} (\operatorname{tg} \psi + \operatorname{cotg} \psi) = \frac{1}{\sqrt{rr'}} \operatorname{coséc} 2\psi; \end{cases}$$

en se servant alors de  $h$  et  $H$  définis par (12 bis), on peut écrire

$$(21) \quad \begin{cases} e \sin F = -\frac{p}{\sqrt{rr'} \cos h} \operatorname{tg} H, \\ e \cos F = \frac{p}{\sqrt{rr'} \cos h} - \frac{1}{\cos f}. \end{cases}$$

Ces formules donnent  $e$  et  $F$ ; on a ensuite  $a = \frac{p}{\cos^2 \varphi}$ , et on achève en calculant directement les anomalies excentriques; les vérifications du calcul sont en évidence.

Le problème proposé est ainsi complètement résolu, au moins dans le cas de l'ellipse. Un simple passage à la limite nous permettra maintenant de traiter le cas de la parabole.

Pour que l'orbite soit effectivement une parabole, il faut une équation de condition entre les données du problème; or, si l'on étend à la parabole, comme cas limite, la notion d'anomalie excentrique, il est clair que l'on doit alors considérer cette anomalie comme étant nulle. Si donc on fait  $g = 0$  dans l'équation (10), et que l'on observe que  $X$  devient alors  $\frac{4}{3}$ , on a immédiatement la condition cherchée sous la forme

$$(22) \quad m = l^4 + \frac{4}{3} l^3;$$



remplaçant  $m$  par sa valeur (9), on a ainsi  $\theta$  en fonction de  $r, r'$  et  $f$ .

Ici tout revient à déterminer  $F$  et la distance périhélie  $q = \frac{p}{2}$ ; en effet, connaissant  $v$  et  $v'$ , on aura  $\omega$  comme dans le cas de l'ellipse, et le temps  $T$  du passage au périhélie sera

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} T &= t - \frac{q^2 \sqrt{2}}{k} \left( \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} \right) \\ &= t' - \frac{q^2 \sqrt{2}}{k} \left( \operatorname{tg} \frac{v'}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v'}{2} \right). \end{aligned} \right.$$

L'inconnue auxiliaire  $\gamma$ , rapport du secteur au triangle, se réduit ici à  $ml^{-\frac{1}{2}}$ , d'après (14), puisque  $g = 0$ ; la formule (13) donne alors, toutes réductions faites

$$(24) \quad q = \frac{\sin^2 f \sqrt{rr'}}{4l \cos f}.$$

Enfin, on aura  $F$  par les formules (21); ou bien encore, en divisant membre à membre les deux premières formules (20) et faisant  $g = G = 0$ , on aura

$$(25) \quad \operatorname{tg} \frac{F}{2} = \operatorname{cotg} \frac{f}{2} \sin 2\chi.$$

**Problème général.** a) **Préparation des données.** — Le problème général dont nous poursuivons la solution s'énonce ainsi : déterminer les éléments de l'orbite d'un astéroïde dont on a observé les coordonnées apparentes à trois époques successives voisines en des lieux terrestres déterminés.

Avant d'aborder la solution proprement dite du problème, il est nécessaire de préparer convenablement les données.

Les coordonnées observées, celles qui sont publiées par l'observateur, sont toujours l'ascension droite et la déclinaison apparentes, soient  $\alpha$  et  $\delta$ ,  $\alpha'$  et  $\delta'$ ,  $\alpha''$  et  $\delta''$  pour les trois observations successives; on y joint naturellement la date de chaque observation en temps moyen local.

La première chose à faire est d'exprimer ces dates en temps moyen d'un même lieu, celui qui correspond au méridien principal

adopté ; il faut de plus les exprimer en jours moyens, en choisissant pour origine un instant fixe, déterminé, qui sera l'époque. On aura ainsi les nombres  $t, t', t''$ , dates des trois observations ; ces nombres sont voisins, et l'on a  $t < t' < t''$ , d'après l'hypothèse. Dans une première détermination d'orbite, l'intervalle extrême  $t'' - t$  varie entre 10 et 60 jours environ.

Il est nécessaire ensuite de rapporter les trois positions observées à un même système de coordonnées ; pour définir ce système, on choisit un certain équinoxe moyen, par exemple celui du commencement de l'année tropique qui contient les trois observations, si celles-ci ont été faites dans la même année ; sinon, on prend l'équinoxe moyen de l'origine de l'année tropique qui commence entre les observations extrêmes. Si de plus il s'agit de la détermination d'une orbite tout à fait inconnue, ainsi que nous le supposons, on corrige les observations de l'aberration des fixes. On obtient ainsi, en faisant suivant les règles connues les corrections de précession, de nutation et d'aberration, des positions  $\alpha_0$  et  $\delta_0, \alpha'_0$  et  $\delta'_0, \alpha''_0$  et  $\delta''_0$ , rapportées à l'équinoxe moyen et à l'équateur moyen d'une époque déterminée, et qui, d'après la théorie de l'aberration planétaire, ont la signification suivante : la direction définie par  $\alpha_0, \delta_0$  par exemple, est celle qui, le Soleil étant considéré comme fixe, joint le lieu d'observation M au temps  $t$ , à la position qu'occupait l'astre P au temps  $t_0$ ,  $t - t_0$  désignant le temps d'aberration, c'est-à-dire le produit de  $498^s,4$  par la distance MP ou  $\rho$ , qui est inconnue. En d'autres termes, la droite de coordonnées angulaires  $\alpha_0, \delta_0$  menée par la position du point M au temps  $t$ , est un lieu géométrique de la position de l'astéroïde au temps  $t_0$ .

Le plus souvent, sans que ceci ait rien de nécessaire, on emploie les coordonnées écliptiques ; on transformera donc enfin les coordonnées  $\alpha_0$  et  $\delta_0, \dots$  en coordonnées écliptiques, longitude et latitude, que nous désignerons par  $\lambda$  et  $\beta, \lambda'$  et  $\beta', \lambda''$  et  $\beta''$ , en se servant de la valeur de l'obliquité moyenne correspondant à l'équinoxe moyen choisi : ces nouvelles coordonnées seront encore moyennes et relatives à ce même équinoxe.

Il faut maintenant déterminer les coordonnées polaires, longitude, latitude et rayon vecteur, de chacun des lieux d'observation, M par exemple, à l'époque correspondante  $t$ , par rapport au système de coordonnées employé, l'origine de ce système étant le

Soleil S (*fig. 60*). Les éphémérides permettent facilement le calcul, direct ou indirect, de la longitude et de la latitude géocentriques du Soleil à l'époque  $t$ , rapportées à l'équinoxe et à l'écliptique moyens choisis ; en augmentant la longitude de  $\pi$ , et changeant la latitude de signe, on aura la longitude  $L_0$  et la latitude  $B_0$  du centre T de la terre à l'époque  $t$ , rapportées à ces mêmes coordonnées ; de plus, les éphémérides permettent de calculer pour la même époque, le rayon vecteur  $R_0$ , c'est-à-dire la distance ST, ou plutôt son logarithme,  $\log R_0$ .

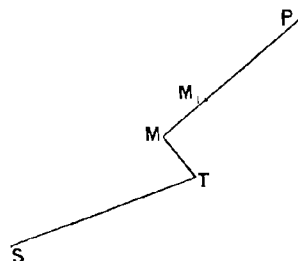


FIG. 60

On détermine ensuite les coordonnées géocentriques du lieu M ; les coordonnées équatoriales vraies de M par rapport à T au temps  $t$  sont le temps sidéral local, toujours facile à calculer, la latitude géocentrique  $\varphi'$  et le rayon vecteur  $ah$  en désignant par  $a$  le rayon équatorial de la Terre ;  $\varphi'$  et  $h$  sont déterminés en fonction de la latitude  $\varphi$  et de l'altitude de M, comme on le sait.

On transforme l'ascension droite et la déclinaison de M en longitude et en latitude par un calcul rapide, et on corrige enfin la longitude obtenue de la précession et de la nutation, afin de la ramener à l'équinoxe choisi. On a ainsi, rapportées au système de coordonnées adoptées, les coordonnées  $l$ ,  $b$  et  $ah$  du point M, par rapport au centre T de la Terre ; la latitude  $b$  n'a pas eu besoin d'être corrigée de la précession, car une grande précision est inutile ici.

Si maintenant L, B, R sont les coordonnées de M par rapport à S, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} R \cos L \cos B = R_0 \cos L_0 \cos B_0 + ah \cos l \cos b, \\ R \sin L \cos B = R_0 \sin L_0 \cos B_0 + ah \sin l \cos b, \\ R \sin B = R_0 \sin B_0 + ah \sin b. \end{array} \right.$$

formules où l'on doit faire  $a = \sin \bar{\omega}_0$ , en désignant par  $\bar{\omega}_0$  la parallaxe horizontale équatoriale moyenne du Soleil, soit  $8'',80$ .

En appliquant les formules différentielles de parallaxe et remarquant la petitesse de  $a$  et celle de  $B_0$ , on a simplement

$$\left\{ \begin{array}{l} L = L_0 + \frac{h\varpi_0}{R_0} \cos b \sin (l - L_0), \\ B = B_0 + \frac{h\varpi_0}{R_0} \sin b, \\ \log R = \log R_0 + \frac{h\varpi_0}{R_0} M \cos b \cos (l - L_0); \end{array} \right.$$

dans les deux premières de ces formules, on fera  $\varpi_0 = 8''80$ , et les corrections de  $L_0$  et  $B_0$  seront exprimées en secondes d'arc ; dans la troisième formule on fera  $\varpi_0 = 8,80 \times \sin 1''$  et  $M$  sera le module des logarithmes décimaux. On a :

$$\log 8,80 = 0,9445, \quad \log M \times \sin 1'' = \bar{6},3234.$$

Il est clair maintenant que l'on peut remplacer le point  $M$  par tel point  $M_1$  que l'on voudra, pris sur la direction  $MP$  (*fig.* 60), à la condition seulement de regarder l'observation comme faite en  $M_1$ , non plus au temps  $t$ , mais au temps  $t - \overline{MM_1} \times 498^s,4$ , en comptant le vecteur  $\overline{MM_1}$  positivement dans la direction  $MP$ . Il y a alors avantage, afin de simplifier un peu les calculs, à choisir pour  $M_1$  le point d'intersection de  $MP$  avec l'écliptique passant par le Soleil : c'est ce qu'on appelle faire la réduction au lieu fictif, d'après Gauss ; l'avantage consiste en ce que la latitude de  $M_1$  sera nulle.

Appelons  $L_1$  et  $R_1$  la longitude et le rayon vecteur de  $M_1$  par rapport à  $S$ , et  $h_1$  le vecteur  $MM_1$  ; on a

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 \cos L_1 = R \cos L \cos B + h_1 \cos \lambda \cos \beta, \\ R_1 \sin L_1 = R \sin L \cos B + h_1 \sin \lambda \cos \beta, \\ 0 = R \sin B + h_1 \sin \beta. \end{array} \right.$$

$L, B, R$  étant les coordonnées de  $M$  déjà calculées.

On en déduit d'abord

$$h_1 = -R_0 \frac{\sin B_0}{\sin \beta} - h \frac{\sin \varpi_0 \sin b}{\sin \beta},$$

et il faut en conclure, à cause du dénominateur  $\sin \beta$ , que cette

réduction n'est possible avantagusement que si la latitude  $\beta$  n'est pas trop petite.

A cause de la petitesse de  $B_0$  et de  $\varpi_0$ , on écrira

$$h_1 = - \frac{R_0 \sin 1''}{\sin \beta} \left( B_0 + \frac{h\varpi_0 \sin b}{R_0} \right),$$

$B_0$  et  $\varpi_0$  étant exprimés en secondes.

Les formules différentielles de la parallaxe donneront ensuite

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = L_0 + \frac{h\varpi_0}{R_0} \cos b \sin(l - L_0) - \cotg \beta \left( B_0 + \frac{h\varpi_0}{R_0} \sin b \right) \sin(\lambda - L_0), \\ \log R_1 = \log R_0 + M \sin 1'' \frac{h\varpi_0}{R_0} \cos b \cos(l - L_0) \\ \qquad - M \sin 1'' \cotg \beta \left( B_0 + \frac{h\varpi_0}{R_0} \sin b \right) \cos(\lambda - L_0), \end{array} \right.$$

$B_0$  et  $\varpi_0$  étant toujours exprimés en secondes.

Le nouveau temps, devant remplacer  $t$ , sera enfin

$$t - h_1 498^s,4 = t + C \cdot \frac{R_0}{\sin \beta} \left( B_0 + \frac{h\varpi_0}{R_0} \sin b \right),$$

où  $B_0$  et  $\varpi_0$  sont toujours exprimés en secondes, et où l'on a fait  $C = \frac{\sin 1'' \times 498^s,4}{86,400}$ , puisque l'unité de temps est le jour; on a d'ailleurs  $\log C = \bar{8},4466$ .

Les données étant ainsi préparées, on peut dire finalement, en modifiant légèrement les notations s'il est nécessaire, que l'on a trois points  $M, M', M''$  définis par leurs coordonnées par rapport au Soleil,  $L, B, R; L', B', R'; L'', B'', R''$ ; puis, par ces trois points, trois directions,  $MP, M'P', M''P''$ , définies par leurs coordonnées angulaires  $\lambda, \beta; \lambda', \beta'; \lambda'', \beta''$ ; enfin que l'astéroïde se trouve successivement sur chacune de ces trois droites à des époques  $t - \Delta t, t' - \Delta t', t'' - \Delta t''$ , en désignant par  $t, t', t''$  des époques connues, par  $\Delta t, \Delta t', \Delta t''$ , les temps d'aberration inconnus, obtenus en multipliant  $MP, M'P', M''P''$  par  $498^s,4$ ; on a d'ailleurs, afin de tout réduire en jours moyens,  $\log \frac{498^s,4}{86,400} = \bar{3},76107$ . Quand on aura pu appliquer la réduction au lieu fictif, la latitude  $B$  correspondante sera nulle, d'où une petite simplification.

Mais pour rester dans le cas général, nous ne ferons aucune hypothèse sur  $B, B', B''$ , de sorte que ce que nous dirons s'appliquerait aussi bien si l'on choisissait d'autres coordonnées.

**b) Mise du problème en équations.** — Nous emploierons les notations suivantes. Les coordonnées héliocentriques de  $M$  seront  $X, Y, Z$ , de sorte que

$$X = R \cos L \cos B, \quad Y = R \sin L \cos B, \quad Z = R \sin B;$$

les coordonnées héliocentriques de  $P$  seront  $x, y, z$ , de sorte que si  $r, l, b$  désignent le rayon vecteur  $SP$ , la longitude et la latitude héliocentriques de  $P$ , on a

$$x = r \cos l \cos b, \quad y = r \sin l \cos b, \quad z = r \sin b;$$

les cosinus directeurs de la direction  $MP$  seront  $\xi, \eta, \zeta$ , de sorte que

$$\xi = \cos \lambda \cos \beta, \quad \eta = \sin \lambda \cos \beta, \quad \zeta = \sin \beta.$$

La distance  $MP$ , dite *géocentrique*, par extension, quoique  $M$  ne soit pas le centre de la Terre, sera  $\rho$ .

On aura par suite les relations

$$(1) \quad x = X + \rho \xi, \quad y = Y + \rho \eta, \quad z = Z + \rho \zeta.$$

La longitude du nœud ascendant et l'inclinaison de l'orbite étant  $\varpi$  et  $i$ , si  $\sigma$  désigne l'argument de la latitude de  $P$ , on a les relations

$$(2) \quad \operatorname{tg} i \sin (l - \varpi) = \operatorname{tg} b,$$

$$(3) \quad \cos i \operatorname{tg} \sigma = \operatorname{tg} (l - \varpi).$$

On aura des définitions et des relations analogues, mais avec un ou deux accents, pour les positions  $P'$  et  $P''$ .

On fera de plus

$$2f = \sigma'' - \sigma', \quad 2f' = \sigma'' - \sigma, \quad 2f'' = \sigma' - \sigma,$$

de sorte que

$$f' = f + f'';$$

les temps d'aberration  $\Delta t, \Delta t', \Delta t''$ , résultant de  $\rho, \rho', \rho''$  comme il a été dit, et on pose

$$\begin{aligned} \theta &= k(l'' - \Delta t'' - t' + \Delta t'), & \theta' &= k(l'' - \Delta t'' - t + \Delta t), \\ \theta'' &= k(l' - \Delta t' - t + \Delta t), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\theta' = \theta + \theta'';$$

enfin  $\gamma, \gamma', \gamma''$ , seront les rapports des aires des secteurs  $SP'P''$ ,  $SP''P$ ,  $SP'P$  aux aires des triangles correspondants : on sait les calculer, d'après le numéro précédent, connaissant  $r, r', r'', f, f', f''$ ,  $\theta, \theta', \theta''$ .

Supposons  $\rho, \rho', \rho''$  connus : toutes les quantités inconnues que nous avons définies en résulteront. En effet les relations (1) donneront  $r, l, b$ , et les quantités analogues ; deux des équations (2), par exemple

$$\operatorname{tg} i \sin (l - \varepsilon) = \operatorname{tg} b, \quad \operatorname{tg} i \sin (l'' - \varepsilon) = \operatorname{tg} b'',$$

donneront ensuite  $i$  et  $\varepsilon$  ; pour la commodité du calcul, on aura par addition et soustraction,

$$(4) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} i \sin \left( \frac{l+l''}{2} - \varepsilon \right) = - \frac{\sin (b'' + b)}{2 \cos b \cos b'' \cos \frac{l''-l}{2}} l', \\ \operatorname{tg} i \cos \left( \frac{l+l''}{2} - \varepsilon \right) = - \frac{\sin (b'' - b)}{2 \cos b \cos b'' \sin \frac{l''-l}{2}} l'; \end{cases}$$

la troisième équation (2), soit

$$\operatorname{tg} i \sin (l' - \varepsilon) = \operatorname{tg} b',$$

devra d'ailleurs se trouver vérifiée ; enfin les relations (3) fourniront  $\sigma, \sigma', \sigma''$ .

On achèvera alors le problème en déterminant les quatre éléments restants de l'orbite, comme il a été dit au numéro précédent, par la connaissance de  $r, r'', f'$  et  $\theta'$ .

Comme vérification, en calculant directement à l'aide des éléments trouvés le rayon vecteur  $r'$  et l'argument de la latitude  $\sigma'$  pour l'époque intermédiaire  $t' - \Delta t'$ , on devra retomber sur les valeurs déjà obtenues pour ces deux quantités : ce calcul se fera à l'aide des formules connues du mouvement elliptique.

Ordinairement d'ailleurs, avec les valeurs ainsi obtenues pour  $r'$  et  $\sigma'$  à l'aide des éléments trouvés, valeurs qui peuvent différer légèrement de celles que l'on devrait retrouver, on calcule  $l'$  et  $b'$  à l'aide de (2) et (3), puis  $\lambda'$  et  $\beta'$  à l'aide de (1), et l'on compare les valeurs ainsi obtenues à celles qui sont données immédiatement par l'observation : c'est ce qu'on appelle faire la représentation de l'observation moyenne à l'aide des éléments calculés.

Tout revient donc à déterminer  $\rho$ ,  $\rho'$ ,  $\rho''$  de façon que les vérifications ci dessus indiquées se produisent effectivement. Il est tout d'abord nécessaire que les positions P, P', P'' soient dans un même plan avec le Soleil S, c'est-à-dire que  $\rho$ ,  $\rho'$ ,  $\rho''$  vérifient la condition

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait des relations de la forme

$$(5) \quad \begin{cases} x' = nx + n''x'', \\ y' = ny + n''y'', \\ z' = nz + n''z'', \end{cases}$$

en désignant par  $n$  et  $n''$  deux paramètres arbitraires, en fonction desquels ces équations permettent d'exprimer  $\rho$ ,  $\rho'$  et  $\rho''$ .

La signification de ces paramètres  $n$  et  $n''$  est facile à déterminer; en effet les deux dernières relations (5) donnent

$$n = \frac{y'z'' - y''z'}{yz'' - y''z}, \quad n'' = \frac{yz' - y'z}{yz'' - y''z};$$

or les quantités  $\frac{1}{2}(y'z'' - y''z')$ ,  $\frac{1}{2}(yz'' - y''z)$ ,  $\frac{1}{2}(yz' - y'z)$ , sont les aires des triangles SP'P'', SPP'', SPP' projetés sur le plan des  $yz$ ; ces triangles étant dans un même plan, leurs aires sont proportionnelles à celles de leurs projections, et par suite on a

$$n = \frac{tr. SP'P''}{tr. SPP''}, \quad n'' = \frac{tr. SPP'}{tr. SPP''},$$

ou encore

$$(6) \quad n = \frac{r'r'' \sin 2f}{r r'' \sin 2f''}, \quad n'' = \frac{r r' \sin 2f''}{r r'' \sin 2f},$$

et ces équations sont vérifiées d'elles-mêmes.



Il faut maintenant choisir  $n$  et  $n''$  de façon que les orbites déterminées par  $r', r'', f$  et  $\theta$  d'une part,  $r, r', f''$  et  $\theta''$  d'autre part coïncident : elles coïncideront alors nécessairement avec celle qui est déterminée par  $r, r'', f'$  et  $\theta'$ . Pour exprimer que les deux premières orbites dont nous venons de parler coïncident, il suffit d'éliminer  $p, e$  et  $\omega$  entre les deux systèmes de relations qui les déterminent, et qui se déduisent d'après ce qu'on a vu au numéro précédent (deuxième mode de calcul des éléments) à

$$(7) \quad \begin{cases} r' r'' \sin 2f = \frac{\theta}{y} \sqrt{p}, & r r' \sin 2f'' = \frac{\theta''}{y''} \sqrt{p}, \\ \frac{p}{r} = 1 + e \cos (\sigma - \omega), & \frac{p}{r'} = 1 + e \cos (\sigma' - \omega), \\ & \frac{p}{r''} = 1 + e \cos (\sigma'' - \omega). \end{cases}$$

Pour éliminer  $e$  et  $\omega$ , éliminons linéairement  $e \cos \omega$  et  $e \sin \omega$  entre les trois dernières relations : il vient

$$\begin{vmatrix} \frac{p}{r} - 1 & \cos \sigma & \sin \sigma \\ \frac{p}{r'} - 1 & \cos \sigma' & \sin \sigma' \\ \frac{p}{r''} - 1 & \cos \sigma'' & \sin \sigma'' \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$p \left[ \frac{\sin 2f}{r} - \frac{\sin 2f'}{r'} + \frac{\sin 2f''}{r''} \right] = \sin 2f - \sin 2f' + \sin 2f'';$$

à cause de la relation  $f'' = f + f'$ , le second membre se met sous la forme  $4 \sin f \sin f' \sin f''$ , et en mettant au premier membre  $\frac{\sin 2f'}{r'}$  en facteur, il vient d'après (6) :

$$(7^{bis}) \quad p \frac{\sin 2f'}{r'} (n + n'' - 1) = 4 \sin f \sin f' \sin f''.$$

Il reste à éliminer  $p$  entre les deux premières relations (7) et (7<sup>bis</sup>). Les deux premières relations (7) donnent d'abord par division :

$$(8) \quad \frac{n''}{n} = \frac{\theta''}{\theta} \cdot \frac{y}{y''},$$

et par multiplication

$$p = \frac{\gamma\gamma''}{\theta\theta''} r r'^2 r'' \sin 2f \sin 2f'' ;$$

portant cette valeur dans (7<sup>bis</sup>) et réduisant, il vient finalement

$$(9) \quad n + n'' - 1 = \frac{\theta\theta''}{\gamma\gamma''} \frac{1}{2 r r' r'' \cos f' \cos f'' \cos f''} ;$$

les équations (8) et (9) sont celles qui doivent être vérifiées par les paramètres  $n$  et  $n''$ .

c) **Calcul des distances géocentriques.** — Avant d'aborder la résolution proprement dite du problème, il faut résoudre les équations (5) de façon à exprimer explicitement  $\rho, \rho', \rho''$  en fonction de  $n$  et  $n''$ . Ces équations s'écrivent

$$\begin{cases} n\rho\xi - \rho'\xi' + n''\rho''\xi'' + nX - X' + n''X'' = 0, \\ n\rho\eta - \rho'\eta' + n''\rho''\eta'' + nY - Y' + n''Y'' = 0, \\ n\rho\zeta - \rho'\zeta' + n''\rho''\zeta'' + nZ - Z' + n''Z'' = 0; \end{cases}$$

en représentant un déterminant tel que

$$\begin{vmatrix} \xi & \xi' & \xi'' \\ \eta & \eta' & \eta'' \\ \zeta & \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix}$$

par la notation  $(\xi\xi'\xi'')$ , on en tire

$$\rho' (\xi\xi'\xi'') = n (\xi X\xi'') - (\xi X'\xi'') + n'' (\xi X''\xi''),$$

puis  $\rho'$  étant ainsi connu :

$$\begin{cases} n\rho (\xi X''\xi'') = \rho' (\xi' X''\xi'') - n (X X''\xi'') + (X' X''\xi''), \\ n''\rho'' (\xi X\xi'') = \rho' (\xi X\xi') - n'' (\xi X X'') + (\xi X X'). \end{cases}$$

Nous écrirons ces résultats sous la forme

$$(10) \quad \begin{cases} \rho' = bn - b' + b''n'', \\ n\rho = a'\rho' - an + a'', \\ n''\rho'' = c'\rho' - c''n'' + c, \end{cases}$$

et il reste à indiquer comment on calculera pratiquement les coefficients de ces équations.

Considérons à cet effet un déterminant D de la forme

$$D = \begin{vmatrix} \cos a \cos b & \cos a' \cos b' & \cos a'' \cos b'' \\ \sin a \cos b & \sin a' \cos b' & \sin a'' \cos b'' \\ \sin b & \sin b' & \sin b'' \end{vmatrix};$$

$k$  et  $\chi$  désignant deux arbitraires, on peut évidemment remplacer les éléments de la dernière ligne par  $\sin b - k \cos b \sin (a - \chi)$ ,  $\sin b' - k \cos b' \sin (a' - \chi)$ ,  $\sin b'' - k \cos b'' \sin (a'' - \chi)$ . Déterminons alors  $k$  et  $\chi$  par les relations

$$k \sin (a' - \chi) = \operatorname{tg} b', \quad k \sin (a'' - \chi) = \operatorname{tg} b'',$$

que l'on écrira commodément pour le calcul, en ajoutant et retranchant, sous la forme

$$\begin{cases} k \sin \left( \frac{a' + a''}{2} - \chi \right) = - \frac{\sin (b'' + b')}{2 \cos b' \cos b'' \cos \frac{a'' - a'}{2}}, \\ k \cos \left( \frac{a' + a''}{2} - \chi \right) = \frac{\sin (b'' - b')}{2 \cos b' \cos b'' \sin \frac{a'' - a'}{2}}; \end{cases}$$

déterminons de plus un angle  $b_1$  tel que

$$k \sin (a - \chi) = \operatorname{tg} b_1.$$

Dans ces conditions, on trouve immédiatement

$$\begin{aligned} D &= \sin (a'' - a') \cos b \cos b' \cos b'' (\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} b_1) \\ &= \sin (a'' - a') \cos b' \cos b'' \frac{\sin (b - b_1)}{\cos b_1}. \end{aligned}$$

D'après cela, pour calculer les coefficients des équations (10), on fera

$$\begin{aligned} k_1 \sin (\lambda - \chi_1) &= \operatorname{tg} \beta, & k_2 \sin (\lambda'' - \chi_2) &= \operatorname{tg} \beta'', & k_3 \sin (\lambda - \chi_3) &= \operatorname{tg} \beta, \\ k_1 \sin (\lambda'' - \chi_1) &= \operatorname{tg} \beta', & k_2 \sin (\lambda'' - \chi_2) &= \operatorname{tg} \beta'', & k_3 \sin (\lambda - \chi_3) &= \operatorname{tg} \beta, \\ k_1 \sin (\lambda' - \chi_1) &= \operatorname{tg} \beta'_1, & k_2 \sin (\lambda - \chi_2) &= \operatorname{tg} \beta_2, & k_3 \sin (\lambda'' - \chi_3) &= \operatorname{tg} \beta''_3, \\ k_1 \sin (\lambda - \chi_1) &= \operatorname{tg} \beta_1, & k_2 \sin (\lambda' - \chi_2) &= \operatorname{tg} \beta'_2, & k_3 \sin (\lambda' - \chi_3) &= \operatorname{tg} \beta'_3, \\ k_1 \sin (\lambda' - \chi_1) &= \operatorname{tg} \beta'_1, & k_2 \sin (\lambda - \chi_2) &= \operatorname{tg} \beta_2, & k_3 \sin (\lambda'' - \chi_3) &= \operatorname{tg} \beta''_3, \\ k_1 \sin (\lambda'' - \chi_1) &= \operatorname{tg} \beta''_1, & k_2 \sin (\lambda' - \chi_2) &= \operatorname{tg} \beta'_2, & k_3 \sin (\lambda' - \chi_3) &= \operatorname{tg} \beta'_3, \end{aligned}$$

et l'on aura évidemment :

$$\left\{ \begin{array}{l} b = R \frac{\sin(B - B_1)}{\cos B_1} \cdot \frac{\sin(\beta' - \beta_1')}{\cos \beta_1'}, \quad b' = R' \frac{\sin(B' - B_1')}{\cos B_1'} \cdot \frac{\sin(\beta' - \beta_1')}{\cos \beta_1'}, \\ b'' = R'' \frac{\sin(B'' - B_1'')}{\cos B_1''} \cdot \frac{\sin(\beta' - \beta_1')}{\cos \beta_1'}; \\ a' = \frac{\sin(\beta' - \beta_2')}{\cos \beta_2'} \cdot \frac{\sin(\beta - \beta_2)}{\cos \beta_2}, \quad a = R \frac{\sin(B - B_2)}{\cos B_2} \cdot \frac{\sin(\beta - \beta_2)}{\cos \beta_2}, \\ a'' = R' \frac{\sin(B' - B_2')}{\cos B_2'} \cdot \frac{\sin(\beta - \beta_2)}{\cos \beta_2}; \\ c' = \frac{\sin(\beta' - \beta_3')}{\cos \beta_3'} \cdot \frac{\sin(\beta'' - \beta_3'')}{\cos \beta_3''}, \quad c'' = R'' \frac{\sin(B'' - B_3'')}{\cos B_3''} \cdot \frac{\sin(\beta'' - \beta_3'')}{\cos \beta_3''}, \\ c = R' \frac{\sin(B' - B_3')}{\cos B_3'} \cdot \frac{\sin(\beta'' - \beta_3'')}{\cos \beta_3''}. \end{array} \right.$$

Les calculs se simplifieront quand on aura comme d'habitude  $B = B' = B'' = 0$ .

On peut d'ailleurs modifier de bien des façons le calcul précédent : mais nous nous contenterons de ces indications, sans nous préoccuper non plus des difficultés de calcul que l'on peut rencontrer, et qui diminuent la précision des résultats.

d) **Résolution des équations du problème.** — On ne peut songer à résoudre le problème directement : il faut nécessairement procéder par approximations successives. Pour juger la valeur de ces approximations, nous regarderons  $\theta$  et  $\theta'$  comme des quantités infiniment petites du premier ordre, et nous ordonnerons les approximations suivant ces quantités.

Il faut tout d'abord évaluer l'ordre des coefficients qui figurent dans les équations (10). Il est manifeste, d'après les notions élémentaires de géométrie infinitésimale, que le déterminant  $(\xi\xi'\xi'')$  est du troisième ordre, et que les déterminants  $(\xi X\xi'')$ ,  $(X X''\xi'')$  et les analogues sont du premier ordre; les coefficients  $b$ ,  $b'$ ,  $b''$  de la première équation (10) sont donc de l'ordre — 2, tandis que les coefficients  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$ ,  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  des deux dernières équations (10) sont de l'ordre zéro; de plus on observera que les valeurs principales des rapports  $\frac{b''}{b}$ ,  $\frac{a''}{a}$ ,  $\frac{c}{c''}$  sont respectivement 1,  $\frac{\theta}{\theta'}$ ,  $\frac{\theta''}{\theta'}$ ; il suffit pour démontrer ces propriétés de remarquer que les différences  $X'' - X$  et  $X'' - X'$  par exemple sont proportionnelles à  $\theta''$  et  $\theta$ .

Enfin, observons que les quantités  $\gamma - 1$  et  $\gamma'' - 1$  sont du second ordre, ainsi qu'il résulte du numéro précédent.

Il est naturel tout d'abord de regarder comme inconnues principales  $n$  et  $n''$ , pour lesquelles les équations (8) et (9) fournissent avant tout calcul des valeurs approchées au second ordre près, résultant de

$$\frac{n'}{n} = \frac{\theta''}{\theta}, \quad n + n'' - 1 = 0.$$

Mais l'on n'obtiendrait ainsi que des résultats illusoire : car si l'on commet en général une erreur d'ordre  $p$  sur  $n$  et  $n''$ , il en résultera d'après (10) des erreurs d'ordre  $p - 2$  sur  $\rho, \rho', \rho''$ , par suite aussi sur  $r, r', r''$ ; si l'on calcule alors à l'aide de (8) et (9) de nouvelles valeurs pour  $n$  et  $n''$ , elles ne seront pas plus approchées que celles qui ont servi de point de départ, et par suite, on n'aura pas une méthode d'approximations successives.

Posons alors avec Gauss :

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{n''}{n} = P, \\ n + n'' - 1 = \frac{Q}{2r'^3}, \end{cases}$$

d'où inversement,

$$(12) \quad n = \frac{1}{1 + P} \left( 1 + \frac{Q}{2r'^3} \right), \quad n'' = nP;$$

d'après (8) et (9) on a d'ailleurs

$$(13) \quad P = \frac{\theta''}{\theta} \cdot \frac{\gamma}{\gamma''}, \quad Q = \frac{\theta\theta''}{\gamma\gamma''} \frac{r'^2}{rr''} \frac{1}{\cos f \cos f' \cos f''}.$$

On voit qu'en faisant simplement  $P = \frac{\theta''}{\theta}$ ,  $Q = \theta\theta''$ , on commet sur  $P$  une erreur du second ordre et sur  $Q$  une erreur du troisième ordre.

Supposons donc en général que l'on ait pour  $P$  et  $Q$  des valeurs affectées la première d'une erreur d'ordre  $p$ , la seconde d'une erreur d'ordre  $p + 1$ , et voyons comment on devra diriger le calcul pour obtenir des valeurs plus approchées, et par suite résoudre finalement le problème.

La première équation (10) s'écrit

$$(14) \quad \varphi' = \frac{b + b''P}{1 + P} - b' + \frac{Q}{2r'^3} \frac{b + b''P}{1 + P},$$

et contient les deux inconnues  $\varphi'$  et  $r'$  : ces deux inconnues sont d'ailleurs liées par la relation suivante

$$(15) \quad r'^2 = R'^2 + \varphi'^2 + 2\varphi'R' \cos \psi',$$

ainsi qu'il résulte des équations (1), en posant

$$(16) \quad \cos \psi' = \cos \lambda' \cos \beta' \cdot \cos L' \cos B' + \sin \lambda' \cos \beta' \cdot \sin L' \cos B' + \sin \beta' \sin B'.$$

Nous reviendrons tout à l'heure sur la résolution des deux équations simultanées (14) et (15). Cherchons d'abord les ordres des erreurs commises sur les coefficients de (14) :  $b - b''$  étant de l'ordre  $-1$ , puisque la valeur principale de  $\frac{b''}{b}$  est 1, il en résulte que l'erreur commise sur  $\frac{b + b''P}{1 + P}$  est d'ordre  $p - 1$  ; quant à celle commise sur  $Q \frac{b + b''P}{1 + P}$ , elle est évidemment aussi du même ordre  $p - 1$ .

Il faut en conclure que l'on obtiendra pour  $\varphi'$  et  $r'$  des valeurs affectées d'erreurs d'ordre  $p - 1$  ; il en sera de même des valeurs obtenues pour  $\varphi$  et  $\varphi''$ ,  $r$  et  $r''$ , en employant d'abord les deux dernières équations (10), et achevant le calcul comme on a dit plus haut.

Mais considérons  $\frac{\varphi}{\varphi'}$ , qui peut s'écrire  $\frac{a'}{n} + \frac{a'' - an}{n\varphi'}$  ; remarquons que les valeurs  $n$  et  $n''$  que l'on emploie ici, et qui sont déterminées par (12), sont affectées d'erreurs d'ordre  $p$  ; observons de plus que la valeur principale de  $n$  est  $\frac{\theta}{\delta'}$ , la même que celle du rapport  $\frac{a''}{a}$  ; il en résulte que la valeur de  $\frac{\varphi}{\varphi'}$  n'est affectée que d'une erreur d'ordre  $p$  ; il en est de même de  $\frac{\varphi''}{\varphi}$ , et aussi évidemment de  $\frac{r}{r'}$  et de  $\frac{r''}{r'}$ .

Si alors on calcule à l'aide de (13) de nouvelles valeurs pour  $P$  et  $Q$ , on voit immédiatement que les erreurs commises seront respectivement des ordres  $p + 1$  et  $p + 2$ . On a donc établi ainsi une véritable méthode d'approximations successives.

On commencera donc le calcul avec les valeurs approchées déjà

indiquées de P et Q, soit  $P = \frac{\theta''}{\theta}$ ,  $Q = \theta\theta''$ . Toutefois, il faut observer que  $\theta$  et  $\theta''$  dépendent de  $\rho$ ,  $\rho'$ ,  $\rho''$  à cause des temps d'aberration  $\Delta t$ ,  $\Delta t'$ ,  $\Delta t''$ ; on négligera d'abord ces temps, et on en tiendra compte ensuite à chaque approximation, en se servant des valeurs obtenues pour les distances géocentriques. En effectuant alors les calculs indiqués au paragraphe (b), mais sans déterminer les éléments, on pourra calculer de nouvelles valeurs de P et de Q, avec lesquelles on recommencera de la même façon, jusqu'à ce qu'on juge l'approximation suffisante : arrivé à ce point, on terminera le calcul par la détermination définitive des éléments et la représentation de l'observation moyenne, ainsi qu'il a été dit précédemment.

Une dernière remarque importante est relative au cas où l'on aurait  $\theta = \theta''$ ; les observations sont alors équidistantes.

Il est clair ici d'après les valeurs de P et Q que, dès la première approximation, on ne commettra sur ces quantités que des erreurs respectivement du troisième et du quatrième ordre, et par suite les résultats conclus seront exacts au premier ordre près; de plus on verra sans peine qu'à chaque approximation nouvelle, on gagnera deux ordres, et non pas un seul, comme dans le cas général. Il y a donc un avantage manifeste à choisir, autant qu'on le pourra, des observations vérifiant sensiblement la condition d'équidistance.

Il ne nous reste plus qu'à indiquer comment on résout les deux équations simultanées (14) et (15). En posant

$$p = \frac{b + b''P}{1 + P} = b', \quad q = \frac{Q}{2} \frac{b + b''P}{1 + P},$$

on a d'abord

$$\rho' = p - \frac{q}{r^3}.$$

En portant cette valeur dans (15), on voit que le problème dépend d'une équation du huitième degré : mais on doit observer qu'il doit toujours y avoir une valeur de  $\rho'$  très petite et à rejeter. En effet, les trois lieux d'observations M, M', M'' étant sensiblement trois positions du centre de la Terre dans son mouvement elliptique autour du Soleil, peuvent être pris sensiblement pour P, P', P''; et cette solution ne convient évidemment pas au problème, qui est ainsi ramené au septième degré.

On fait la résolution effective des équations, en procédant comme il suit.

D'abord, on calculera  $\psi'$  avec plus de précision en écrivant (16) sous la forme

$$\cos \psi' = \sin \beta' \sin B' + \cos \beta' \cos B' \cos (\lambda' - L'),$$

et lui adjoignant les deux formules contenant un angle auxiliaire  $\chi'$  :

$$\begin{cases} \sin \psi' \sin \chi' = \cos \beta' \sin (\lambda' - L'), \\ \sin \psi' \cos \chi' = \sin \beta' \cos B' - \cos \beta' \sin B' \cos (\lambda' - L'); \end{cases}$$

le calcul se simplifie si, comme d'habitude,  $B' = 0$ .

On choisira  $\psi'$  de façon à avoir  $\sin \psi' > 0$ .

L'équation (15) donne

$$\rho' = -R' \cos \psi' \pm \sqrt{r'^2 - R'^2 \sin^2 \psi'}.$$

Prenons alors une inconnue auxiliaire  $z'$  telle que

$$(17) \quad r' = \frac{R' \sin \psi'}{\sin z'};$$

en ne fixant pas le signe de  $\cos z'$ , il en résulte

$$(18) \quad \rho' = -R' \cos \psi' + R' \sin \psi' \frac{\cos z'}{\sin z'} = \frac{R' \sin (\psi' - z')}{\sin z'}.$$

Portant la valeur (16) de  $r'$  dans (14), et égalant la valeur ainsi obtenue pour  $\rho'$  à la précédente, il vient l'équation en  $z'$  :

$$\frac{q \sin^4 z'}{R'^3 \sin^3 \psi'} = (p + R' \cos \psi') \sin z' - R' \sin \psi' \cos z'.$$

Faisant alors

$$s \cos \zeta = p + R' \cos \psi', \quad s \sin \zeta = R' \sin \psi', \quad m = \frac{q}{s R'^3 \sin^3 \psi'},$$

on a l'équation définitive suivante, due à Gauss :

$$(19) \quad \sin (z' - \zeta) = m \sin^4 z'.$$

Tout revient à résoudre cette équation, car connaissant  $z'$ , les formules (17) et (18) fourniront  $r'$  et  $\rho'$ . D'ailleurs, comme  $\rho'$  et  $r'$  sont positifs, on devra avoir  $\sin z' > 0$  et  $\sin (\psi' - z') > 0$ , ce



qui exige  $0 < z' < \psi'$ . Enfin, puisque  $z' = \psi'$  pour  $\rho' = 0$ , l'équation (19) admet une racine très voisine de  $\psi'$ , qui est à rejeter.

L'équation (19) sera résolue facilement par approximations successives, ainsi que le montre sa forme si simple. On pourra s'aider dans cette résolution de tables appropriées, et à leur défaut, de la discussion sommaire que nous allons faire maintenant, pour terminer.

L'équation (19) rendue rationnelle en  $\sin z'$  s'écrit

$$(19^{bis}) \quad m^2 \sin^8 z' - 2m \cos \zeta \sin^5 z' + \sin^2 z' - \sin^2 \zeta = 0.$$

D'après le théorème de Descartes, elle a une seule racine positive si l'on a  $m \cos \zeta < 0$ , et au plus trois racines positives si  $m \cos \zeta > 0$ .

Comme, d'après ce qui précède, l'équation a toujours dans les hypothèses faites une racine positive à rejeter, et que par la nature même du problème, il y a une autre racine positive, on doit nécessairement supposer  $m \cos \zeta > 0$ , et l'équation (19<sup>bis</sup>) a trois racines positives dont une à rejeter.

En d'autres termes, on doit avoir pour l'équation (19) deux racines comprises entre 0 et  $\pi$  et sensiblement différentes de  $\psi'$  : une de ces racines est inférieure à  $\psi'$  et convient au problème ; si les deux racines sont inférieures à  $\psi'$ , le problème est susceptible de deux solutions, et il faut une nouvelle observation pour pouvoir décider quelle est celle qui fournit réellement l'orbite de l'astre observé.





# TABLE DES MATIÈRES

---

## DEUXIÈME PARTIE

### ASTRONOMIE PRATIQUE

---

#### LIVRE PREMIER

##### LES CALCULS

---

#### CHAPITRE PREMIER

##### PRINCIPES DE CALCUL, INTERPOLATION, TABLES

	Pages.
Mesure des grandeurs en Astronomie . . . . .	2
Notions sur les erreurs numériques. . . . .	9
Interpolation . . . . .	12
Usage des tables de logarithmes . . . . .	21
Tables astronomiques . . . . .	28

#### CHAPITRE II

##### ERREURS D'OBSERVATION. MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Erreurs systématiques et erreurs accidentelles. . . . .	32
Loi des erreurs . . . . .	33
Courbe de probabilité . . . . .	35
Précision. Poids. . . . .	36
Valeur probable d'une quantité . . . . .	37
Moyenne erreur. Erreur moyenne. Erreur probable. . . . .	38
Composition des erreurs . . . . .	40
Combinaison des observations. Méthode des moindres carrés . . . . .	43
Méthode de calcul . . . . .	52
Applications . . . . .	57

## LIVRE II

## LES INSTRUMENTS

## CHAPITRE III

## INSTRUMENTS ACCESSOIRES

	Pages
Pendules et Chronomètres. . . . .	62
Mesure des angles, Cercles divisés . . . . .	66
Niveau. . . . .	82
Lunettes et Micromètres . . . . .	89

## CHAPITRE IV

## INSTRUMENTS COMPLETS

Théodolite. Théorie générale. . . . .	93
Usage du théodolite. . . . .	105
Equatorial. . . . .	110
Usage de l'équatorial . . . . .	115
Instrument méridien . . . . .	127
Usage de l'instrument méridien . . . . .	138
Instrument des passages dans un vertical quelconque ou dans le premier vertical . . . . .	152
Méthode de Talcott pour la détermination de la latitude . . . . .	155

## CHAPITRE V

## INSTRUMENTS DIVERS

Sextant. . . . .	157
Usage du sextant. . . . .	164
Cercle à réflexion . . . . .	166
Héliomètre . . . . .	168
Sidérostat. . . . .	169
Cœlostat . . . . .	170
Equatorial coudé. . . . .	170
Astrolabe à prisme . . . . .	170
Astrophotographie . . . . .	171

## LIVRE III

## LES OBSERVATIONS

## CHAPITRE VI

## DÉTERMINATION DES CONSTANTES FONDAMENTALES DE L'ASTRONOMIE

	Pages
Constantes de l'Astronomie . . . . .	173
Réfraction . . . . .	185
Aberration . . . . .	177
Parallaxe des étoiles . . . . .	178
Nutation . . . . .	180
Précession . . . . .	181
Obliquité . . . . .	183
Equinoxe . . . . .	186
Etoiles . . . . .	187
Planètes. Comètes. Satellites. Masses . . . . .	189
Parallaxes . . . . .	190

## CHAPITRE VII

## ASTRONOMIE GÉOGRAPHIQUE ET NAUTIQUE

Eléments géographiques d'un lieu. Généralités . . . . .	202
Détermination des éléments absolus. Problèmes préliminaires . . . . .	204
Observation d'une culmination . . . . .	212
Observation d'une hauteur et du chronomètre . . . . .	214
Observation d'une plus grande digression . . . . .	221
Observation de l'azimut et du chronomètre . . . . .	222
Observation de la hauteur et de l'azimut . . . . .	223
Observation de la variation du mouvement en hauteur ou en azimut . . . . .	224
Observation d'une distance . . . . .	224
Observation de deux hauteurs et du chronomètre . . . . .	225
Observation de deux hauteurs et de la différence d'azimut . . . . .	236
Observation de deux hauteurs égales à des temps donnés . . . . .	238
Observation de trois hauteurs égales et du chronomètre . . . . .	240
Applications à la navigation. Cartes marines . . . . .	249
Détermination des longitudes. Méthodes générales . . . . .	259
Usage des observations de la Lune. Distances lunaires . . . . .	262
Culminations de la Lune . . . . .	263

	Pages
Hauteurs de la Lune . . . . .	266
Azimuths de la Lune. . . . .	268
Occultations d'étoiles par la Lune . . . . .	269

#### CHAPITRE COMPLÉMENTAIRE

Rappel des notations . . . . .	273
Problème auxiliaire. Détermination d'une orbite dans son plan par deux positions héliocentriques complètes . . . . .	275
Problème général. <i>a)</i> Préparation des données . . . . .	283
<i>b)</i> Mise du problème en équations . . . . .	288
<i>c)</i> Calcul des distances géocentriques . . . . .	292
<i>d)</i> Résolution des équations du problème . . . . .	294



## A LA MÊME LIBRAIRIE

---

- LADENBURG (A.).** — Histoire du développement de la Chimie depuis Lavoisier jusqu'à nos jours, trad. **CORVISY** 1909 . . . . . 15 fr. » »
- DUHEM (P.).** — Les sources des Théories physiques. Les origines de la Statique. 2 vol., 1905-1906. . . . . 21 fr. » »
- CHWOLSON (O. D.).** — Traité de Physique, trad. Ed. **DAVAUX**. 4 vol. grand in-8, se vendant séparément. Tome I. 1908. 1050 pages . . . . . 42 fr. » »
- Tome II, Optique. 1909. *Sous presse.*
- KENIGS (G.).** — Leçons de Cinématique théorique, avec notes de MM. **DARBOUX** et **COSSERAT**. Grand in-8, 500 pages. 1897 . . . . . 15 fr. » »
- GOUSAT (E.).** — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. 2 volumes grand in-8, 1896-98 . . . . . 18 fr. » »
- BRILLOUIN (M.).** — Leçons professées au Collège de France, sur la propagation de l'Électricité, Histoire et théorie. 400 pages. Nombreuses figures et planches, grand in-8°, 1903. 15 fr. » »
- HADAMARD (J.).** — Leçons professées au Collège de France sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique, grand in-8, 400 pages, figures. 1903 . . . . . 18 fr. » »
- DUHEM (P.).** — L'Évolution de la Mécanique, in-8, 350 pages. 1903. . . . . 5 fr. » »
- TANNERY (J.).** — Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable. 2<sup>me</sup> édition en 2 volumes. Tome I, 1904. 14 fr. » »
- MACH (E.).** — La Mécanique, Exposé historique et critique de son développement. Trad. sur la 4<sup>e</sup> édit. par Ed. **BERTRAND** (avec introduction de Em. **PICARD**), 500 pages avec figures et portraits, 1904 . . . . . 15 fr. » »
- ROUSE BALL (W.).** — Histoire des Mathématiques. Traduction **FREUND**. 2 vol. grand in-8, 1906-1908. . . . . 20 fr. » »
- MAILLARD.** — Cours d'Astronomie de l'Université de Lausanne. Tome I, 1906. . . . . 7 fr. 50
- GRUEY (L.-J.).** — Exercices astronomiques, grand in-8, 346 p., 22 pl. gravées. . . . . 15 fr. » »
- D'ABBADIE (A.).** — Géodésie d'Éthiopie ou triangulation d'une partie de la Haute-Éthiopie, publié par R. Radau. Grand in-4 de 504 pages, avec 11 cartes et 10 planches. . . . . 30 fr. » »
- LAMÉ (G.)** — Examens des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie. Réimpression facsimilé (1903) de ce rarissime ouvrage . . . . . 5 fr. » »
- ROUSE BALL.** — Récréations mathématiques 2 vols. 10 fr. » »
- FABRY (E.).** — Traité de Mathématiques générales, avec préface de M. **DARBOUX**. 1908, (480 pages). . . . . 9 fr. » »
- LE CHATELIER.** — Leçons sur le carbone, la combustion et les lois chimiques. 1908. . . . . 12 fr. » »

SAINT-AMAND, GREG. — IMPRIMERIE BISSIERE