ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

SERIE QUARTA - TOMO V

(LXI DELLA RACCOLTA)

Fascicoli 1-2 - Novembre-Febbraio 1928

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

MCMXXVIII

CASA EDITRICE NICOLA ZANICHELLI - BOLOGNA

SOMMARIO

Sopra alcuni invarianti differenziali.

Memoria di GIOVANNI GONELLA (a Genova).

I.

§ 1. Le note formule di trasformazione degli integrali di spazio in integrali di superficie, conosciute sotto il nome di teoremi della divergenza, del gradiente e della rotazione, valgono sostanzialmente immutate anche per una regione piana connessa limitata da un contorno regolare. Esse cessano di valere per la trasformazione di integrali di superficie in integrali di linea su una superficie sghemba; ne valgono invece di più generali in cui figura la curvatura media della superficie. In queste compaiono, anzichè gli ordinari operatori gradiente, divergenza, rotazione, altri operatori che hanno come campo di applicazione gli spostamenti infinitesimi del punto sulla superficie, anzichè spostamenti arbitrari, e sono quindi rappresentati da espressioni invariantive per mutamento di coordinate superficiali.

Tali formule di trasformazione sono sostanzialmente contenute in una formula, citata più innanzi con (D), che nel 1916 P. APPELL chiedeva se fosse già nota (¹). Egli la enuncia senza dimostrazione dicendola solo deducibile dalla formula di GREEN. Effettivamente non è che un caso particolare di una formula di BUHL ricavata ingegnosamente per via completamente diversa (²).

Nel 1917 il prof. BURGATTI, richiamandosi a lavori precedenti del BURALI-FORTI, estendeva (³) i teoremi citati alle superficie sghembe coi procedimenti dell'analisi vettoriale. Poichè il teorema fondamentale è quello della divergenza, da cui collo stesso procedimento che nel piano si deducono gli altri due, le formole di BURGATTI equivalgono, come si vedrà, a quelle di APPELL.

(¹) *Intermédiaire des Mathém.*, 1916, n. 5, pag. 97.

(²) A. BUHL, *Géométrie et Analyse des intégrales doubles.* Coll. « Scientia », n. 36, Paris, Gauthier-Villars, 1920.

(³) *I teoremi del gradiente, della divergenza, della rotazione sopra una superficie e loro applicazioni ai potenziali* (Mem. Acc. dell'Ist. di Bologna, Classe Scienze fisiche, serie VII, Tomo IV, 1916-17, pag. 103).

Entrambi però fanno ricorso a valori di funzioni fuori della superficie, mentre le formule stesse sono esprimibili colle sole coordinate superficiali.

Mi propongo in questa breve nota di esprimere e dimostrare tali formule di trasformazione in coordinate generali ortogonali, senza far ricorso ad elementi estranei alla superficie, e dalle formule integrali ricaverò con procedimento uniforme e semplice le espressioni invariantive degli operatori superficiali analoghi al gradiente, divergenza, e rotazione. Quelle dell'ultima credo nuove. Mostrerò inoltre come seguano facilmente importanti formule spesso usate dal BELTRAMI e ricavate da lui a prezzo di calcoli laboriosi.

Lo scopo della presente è quindi principalmente metodologico. Perciò ritengo opportuno premettere anche la deduzione da proprietà integrali delle espressioni in coordinate generali della divergenza, della rotazione e del gradiente.

II.

§ 2. Sia un campo a tre dimensioni, riferito a un sistema generico di coordinate curvilinee ortogonali per cui l'elemento lineare assuma la forma

$$ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 + W^2 dw^2.$$

Se definiamo il gradiente di una funzione φ (regolare colle sue derivate prime in tutto lo spazio) come il vettore B, normale ad una superficie $\varphi = \text{cost}$, diretto nel senso in cui φ cresce ed avente per grandezza $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (restando con ciò ovviamente definito il senso della normale) dalla relazione

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial n}$$

ricaviamo subito che le componenti di B secondo le linee coordinate sono

$$B_u = \frac{1}{U}\frac{\partial \varphi}{\partial u}; \quad B_v = \frac{1}{V}\frac{\partial \varphi}{\partial v}; \quad B_w = \frac{1}{W}\frac{\partial \varphi}{\partial w} \tag{1}$$

e siccome tale vettore è definito in modo indipendente dal sistema di riferimento, possiamo concludere che

$$[\text{mod grad } \varphi]^2 = \frac{1}{U^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{W^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2 = \Delta_1 \varphi \tag{2}$$

è una espressione invariantiva rispetto all'elemento lineare ds^2.

Se C è il gradiente di un'altra funzione ψ, si ha notoriamente (cogli usuali simboli del calcolo vettoriale)

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{grad}\psi &= \operatorname{mod} B \cdot \operatorname{mod} C \cdot \cos(B,\ C) = \\ &= \frac{1}{U^2}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{1}{V^2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{1}{W^2}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\psi}{\partial w} = \Delta_1(\varphi,\ \psi).\end{aligned} \tag{3}$$

Resta così dimostrata la ben nota invariantività di quest'altra espressione (¹).

§ 3. Sia s una superficie chiusa racchiudente uno spazio S; l una linea chiusa che limita una superficie aperta σ; $u,\ v,\ w$ un sistema di linee che costituiscono nel campo che si considera un reticolato riducibile con deformazione continua a quello delle linee coordinate cartesiane. Pongo

$$I = \int_s A_n ds \qquad J = \int_l A_l dl \tag{4}$$

dove A_n ed A_l rappresentano le componenti di un vettore qualunque A, rispettivamente secondo la normale *esterna* ad s e la tangente, per ora comunque determinàta, ad l. Questi due integrali hanno un significato indipendente dalle coordinate.

Sussiste notoriamente l'identità:

$$\iiint_S \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial w}\right) du\, dv\, dw = \iint_s (P dv\, dw + Q dw\, du + R du\, dv) \tag{A}$$

dove $P,\ Q,\ R$ sono funzioni regolari, colle loro derivate prime, di $u,\ v,\ w$.

Trasformo per mezzo della (A) l'integrale I di (4). Considerando la proiezione dell'elemento superficiale ds sulle superficie coordinate passanti pel punto $u,\ v,\ w$ si ha, anche tenendo conto dei segni che si devono attribuire ai prodotti $dvdw,\ dwdu,\ dudv$ in (A)

$$VW dv\, dw = ds \cos(nu), \quad WU dw\, du = ds \cos(nv), \quad UV du\, dv = ds \cos(nw). \tag{5}$$

Indicando allora con $A_u,\ A_v,\ A_w$ le componenti di un vettore A funzione di $u,\ v,\ w$ secondo le linee coordinate positive uscenti dal punto stesso, e

(¹) Tale metodo è sostanzialmente adoperato dal DARBOUX e dal LAMÉ; cfr. DARBOUX, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes.* II ed., Livre II, Ch. II, pag. 193.

assumendo in (A)

$$P = A_u VW, \quad Q = A_v WU, \quad R = A_w UV$$

il 2° membro si identifica coll'integrale I e si ha (poichè $dS = UVWdudvdw$)

$$I = \iiint_S \left\{ \frac{\partial}{\partial u}(VWA_u) + \frac{\partial}{\partial v}(WUA_v) + \frac{\partial}{\partial w}(UVA_w) \right\} \frac{dS}{UVW}$$

Per l'arbitrarietà del campo S ed il significato invariantivo di I, in base a considerazioni ben note ([1]) posso concludere che è invariantiva rispetto a ds^2 l'espressione

$$\text{(B)} \qquad \operatorname{div} A = \frac{1}{UVW} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}(VWA_u) + \frac{\partial}{\partial v}(WUA_v) + \frac{\partial}{\partial w}(UVA_w) \right\}$$

che notoriamente rappresenta il coefficiente di dilatazione cubica quando lo spostamento è dato dal vettore A.

Se in particolare $A = \operatorname{grad} \varphi$ ne deduciamo subito che è invariante l'espressione

$$\text{(6)} \qquad \nabla_2 \varphi = \frac{1}{UVW} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{VW}{U}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{WU}{V}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{UV}{W}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) \right\}$$

che per $U = V = W = 1$ coincide coll'operatore di LAPLACE applicato alla funzione numerica φ ([2]).

§ 4. Ricorrendo alle formule di STOKES:

$$\text{(C)} \qquad \begin{aligned} &\iint_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial w}\right) dv\, dw + \left(\frac{\partial P}{\partial w} - \frac{\partial R}{\partial u}\right) dw\, du + \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du\, dv \right\} = \\ &= \int_l Pdu + Qdv + Rdw \end{aligned}$$

trasformo l'integrale J in modo analogo a I e ne deduco le corrispondenti proprietà invariantive.

([1]) Cfr. ad es. RIEMANN-WEBER, *Die Partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik*, Bd I, § 90, pag. 217.

([2]) Adopero la notazione $\nabla_2\varphi$ (MAXWELL) per distinguere opportunamente in seguito l'operatore di LAPLACE dal 2° parametro differenziale di BELTRAMI $\Delta_2\varphi$.

Tenuto conto delle (5) l'integrale J trasformato mediante (C) diviene:

$$(7)\qquad J=\iint_\sigma\left\{\left(\frac{\partial(WA_w)}{\partial v}-\frac{\partial(VA_v)}{\partial w}\right)\frac{\cos(nu)}{VW}+\left(\frac{\partial(UA_u)}{\partial w}-\frac{\partial(WA_w)}{\partial u}\right)\frac{\cos(nv)}{WU}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial(VA_v)}{\partial u}-\frac{\partial(UA_u)}{\partial v}\right)\frac{\cos(nw)}{UV}\right\}d\sigma.$$

Pel significato intrinseco del primo membro, l'integrale a secondo membro dipenderà solo dal vettore A e dalla superficie σ.

Formo ora per ogni vettore A ed ogni sistema di coordinate ortogonali u, v, w le seguenti espressioni:

$$(8)\qquad \begin{cases} R_u=\dfrac{1}{VW}\left[\dfrac{\partial(WA_w)}{\partial v}-\dfrac{\partial(VA_v)}{\partial w}\right] \\ R_v=\dfrac{1}{WU}\left[\dfrac{\partial(UA_u)}{\partial w}-\dfrac{\partial(WA_w)}{\partial u}\right] \\ R_w=\dfrac{1}{UV}\left[\dfrac{\partial(VA_v)}{\partial u}-\dfrac{\partial(UA_u)}{\partial v}\right] \end{cases}$$

che dipendono solo dalle componenti del vettore A e, nella forma, dai coefficienti dell'elemento lineare e possono interpretarsi come le componenti di un vettore. Dico che esso è indipendente dal sistema di coordinate (ortogonali) cioè che ad ogni vettore A, funzione di (u, v, w), corrisponde un vettore R le cui componenti si esprimono nella forma (8) rispetto ad un generico sistema di coordinate. Basta all'uopo mostrare che i vettori definiti formalmente dalle (8) corrispondenti ad un medesimo vettore A, ma in corrispondenza di due diversi sistemi di coordinate, coincidono. Ciò risulta senza calcoli dal fatto che le loro componenti secondo una direzione arbitraria coincidono.

Infatti se $R^{(1)}$ e $R^{(2)}$ sono tali due vettori, qualunque sia la superficie σ, gl'integrali

$$J_1=\iint_\sigma R_n^{(1)}d\sigma \quad \text{e} \quad J_2=\iint_\sigma R_n^{(2)}d\sigma$$

sono indipendenti dal sistema di riferimento, inoltre $R_n^{(1)}$ ed $R_n^{(2)}$ per il loro significato di proiezioni sulla normale n hanno in ogni punto di σ *(ciascuna)* un valore indipendente dal sistema coordinato. Potrò quindi scrivere per *ogni* pezzo di superficie aperta σ, contenente un punto (generico) dello spazio

$$\iint_\sigma(R_n^{(1)}-R_n^{(2)})d\sigma=0$$

da cui per note considerazioni $R_n^{(1)} = R_n^{(2)}$, e ciò, per l'arbitrarietà di σ, rispetto a tutte le direzioni n.

Il significato del vettore R si ha poi subito, assumendo un sistema di coordinate cartesiane. Esso è la rotazione di A, che rappresenta in idrodinamica il doppio della rotazione elementare delle molecole in moto ([1]).

III.

§ 5. Sia ora una superficie σ limitata da un contorno l: e riferiamone i punti ad un sistema di coordinate curvilinee ortogonali u e v di elemento lineare

$$ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2.$$

Per chiarezza indicherò sempre con u le linee $v = \text{cost.}$ e con v le linee $u = \text{cost.}$

Un punto di una regione Σ dello spazio contenente σ e tale che da ogni punto di essa si può condurre a σ *una* normale è individuato mediante la distanza normale n dalla superficie e le coordinate u, v del piede della normale. Pei segni conservo, in quanto applicabili, le convenzioni precedenti.

Noto, perchè ne userò in seguito, che, se u e v sono le linee di curvatura di σ, le tre famiglie: delle superficie parallele a σ, e dei due sistemi di rigate luogo delle normali a σ lungo le linee u, v, formano un sistema triplo ortogonale, a cui sono quindi applicabili i risultati precedenti.

L'elemento lineare di spazio assume in tal caso la forma:

$$ds^2 = U_1^2 du^2 + V_1^2 dv^2 + dn^2 \tag{10}$$

in cui, se U, V sono i valori di U_1, V_1 per $n = 0$; ed R, S i raggi principali di curvatura di σ nel punto (u, v) si ha ([2]):

$$U_1 = U\left(1 + \frac{n}{R}\right) \quad V_1 = V\left(1 + \frac{n}{S}\right) \tag{11}$$

e quindi

$$\left[\frac{\partial(U_1 V_1)}{\partial n}\right]_{n=0} = UV\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right). \tag{12}$$

([1]) Cfr. per la deduzione delle (8) l'op. cit. di RIEMANN-WEBER, che determina però le singole componenti facendo ordinatamente dw, du, $dv = 0$. Bd. I, § 90, pag. 217.

([2]) Cfr. ad es. SOMIGLIANA, *Sulle relazioni fra il principio di Huyghens e l'ottica geometrica*. Torino, Atti R. Acc. S., vol. LIV, pagg. 974-979. Esse sono d'altronde conseguenza delle formule di RODRIGUEZ.

L'ortogonalità delle linee u, v dà in ogni caso

$$U\frac{\partial u}{\partial l} = V\frac{\partial v}{\partial \nu} \quad U\frac{\partial u}{\partial \nu} = -V\frac{\partial v}{\partial l} \tag{13}$$

dove ν rappresenta la normale al contorno l, diretta tangenzialmente verso l'interno di σ.

§ 6. Sia φ un numero funzione regolare colle derivate parziali prime, delle coordinate u, v dei punti P della superficie σ e del contorno l.

Dirò *gradiente superficiale* di φ nel punto P il vettore parallelo al piano tangente in P a σ ed ivi normale alla $\varphi(u, v) = \text{cost.}$ passante per P, di grandezza eguale a $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu'}$ (dove ν' è la normale a φ nel verso delle φ crescenti). Le sue componenti in un sistema ortogonale sono

$$G_u = \frac{1}{U}\frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad G_v = \frac{1}{V}\frac{\partial \varphi}{\partial v}. \tag{14}$$

Se φ è anche funzione dei punti dello spazio Σ il gradiente superficiale è il vettore componente tangenziale di $\text{grad}_P\,\varphi$.

Le componenti cartesiane del vettore G sono

$$\left\{\begin{array}{l} G_x = \frac{1}{U}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{1}{U}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{V}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{1}{V}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{U^2}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{V^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = \Delta_1(\varphi x) \\ G_y = \Delta_1(\varphi y) \quad G_z = \Delta_1(\varphi z) \end{array}\right. \tag{15}$$

che, se φ è funzione dei punti di Σ, si possono anche scrivere

$$G_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{\partial x}{\partial n}; \quad G_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}; \quad G_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{\partial z}{\partial n} \tag{16}$$

donde le notissime di BELTRAMI [1]:

$$\Delta_1(\varphi x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{\partial x}{\partial n} \text{ e analoghe.} \tag{17}$$

---

[1] BELTRAMI, *Intorno ad alcuni nuovi teoremi del sig. C. Neumann sulle funzioni potenziali.* « Annali di matematica pura e applicata », s. II, t. X, pagg. 46-63, opere vol. 3°, LIII, pag. 305.

Il gradiente superficiale è stato definito dal BURALI-FORTI ([1]) che lo indica con Grad φ, studiato in seguito da MARCOLONGO ([2]) e da BURGATTI ([3]) che lo indicano con $\mathrm{grad}_3\,\varphi$. Seguirò la seconda notazione.

Va rilevato che, tanto MARCOLONGO che BURGATTI, ammettono, almeno implicitamente, la φ definita in tutta una regione contenente σ. La definizione del BURALI-FORTI è invece valida in ogni caso; ma, nell'ipotesi che φ sia definita solo sulla superficie, definisce gradiente il gradiente superficiale.

IV.

§ 7. In quanto segue $\bar{n}$ è, o un vettore unitario normale a una superficie e diretto verso l'esterno se la superficie è chiusa, o la normale alla faccia positiva se è aperta. Le altre notazioni conservano il significato precedente: A_ν, A_u, A_v, A_n le componenti di un vettore A nelle direzioni positive ν, u, v, n.

Ricordo la forma vettoriale dei teoremi citati nel § 1

$$\iint_s \varphi\bar{n}\,ds = \iiint_S \mathrm{grad}\,\varphi\, dS \quad \text{(teorema del gradiente)} \tag{18}$$

$$\iint_s \bar{n}\times A\,ds = \iiint_S \mathrm{div}\,A\, dS \quad \text{(teorema della divergenza)} \tag{19}$$

$$\iint_s \bar{n}\wedge A\,ds = \iiint_S \mathrm{rot}\,A\, dS \quad \text{(teorema della rotazione).} \tag{20}$$

Come è noto essi valgono mutando S in un'area piana, s nel contorno ed n nella normale al contorno, quando φ si consideri definita pei punti del piano ed A sia un vettore parallelo al piano.

Otterrò le formule più generali valide per una superficie sghemba, sottoposta a talune restrizioni che verrò man mano accennando, partendo dalla nota formula ([4])

$$\iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du\,dv = \int_l P du + Q dv \tag{D}$$

([1]) BURALI-FORTI, *Gradiente, rotazione, divergenza in una superficie.* Torino, Atti Acc. S., v. XLV, 1909, pagg. 388-400; *Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie col metodo vettoriale generale.* (Rend., Palermo, v. 33).

([2]) MARCOLONGO, *Su alcune proprietà superficiali.* Roma, Rend. Lincei, s. V, v. XXVI, 1917.

([3]) BURGATTI, l. c.

([4]) Cfr. RIEMANN-WEBER, l. c., § 40, pag. 91.

dove P e Q sono funzioni arbitrarie, purchè regolari colle loro derivate prime; ed operando in modo analogo a quanto ho fatto nella parte II.

Per evitare discussioni di segno immagino fin d'ora che il triedro l, ν, n sia congruente direttamente al triedro u, v, n e questo a quello di un sistema x, y, z di assi cartesiani ortogonali di cui tal volta farò uso.

Considero l'integrale

$$K_1 = \int_l \varphi A_\nu dl$$

di significato indipendente dalle coordinate.

Ricordando le (13) si ha

$$K = \int_l \varphi\left(A_u U\frac{\partial u}{\partial \nu} + A_v V\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)dl = \int_l \varphi\left(A_v U\frac{\partial u}{\partial l} - A_u V\frac{\partial v}{\partial l}\right)dl = \int_l \varphi A_v U du - \varphi A_u V dv.$$

Il secondo membro si identifica con quello di (D) posto

$$P = \varphi A_v U \quad Q = -\varphi A_u V$$

perciò, tenuto conto che $d\sigma = UVdudv$,

$$\text{(E)} \qquad -\int_l \varphi A_\nu dl = \iint_\sigma \frac{1}{UV}\left\{\frac{\partial(\varphi A_v U)}{\partial v} + \frac{\partial(\varphi A_u V)}{\partial u}\right\} d\sigma.$$

§ 8. In particolare per $\varphi = 1$

$$\text{(21)} \qquad -\int_l A_\nu dl = \iint_\sigma \frac{1}{UV}\left\{\frac{\partial(VA_u)}{\partial u} + \frac{\partial(UA_v)}{\partial v}\right\} d\sigma.$$

e più specialmente ancora se $A = \operatorname{grad}_\sigma \psi$:

$$\text{(22)} \qquad -\int_l \frac{\partial\psi}{\partial\nu} dl = \iint_\sigma \frac{1}{UV}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V}{U}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{U}{V}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\right\} d\sigma.$$

Per l'arbitrarietà di l ed il significato invariantivo del primo membro $(-K)$, si conclude che le espressioni da integrarsi nei secondi membri delle (21) e (22) non mutano col sistema di coordinate ortogonali sulla superficie σ; il secondo è l'espressione (in coordinate ortogonali) di un parametro differenziale secondo della ψ (notoriamente il secondo parametro differenziale di BELTRAMI).

Ora se un vettore A, funzione delle coordinate dei punti di σ è privo di componente normale, si ha (B):

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{UV}\left\{\frac{\partial(VA_u)}{\partial u} + \frac{\partial(UA_v)}{\partial v}\right\},$$

quindi, per $A = \operatorname{grad}_\sigma \varphi$

$$\Delta_2\varphi = \nabla_2\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}_\sigma \varphi =$$
$$= \frac{1}{UV}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V}{U}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{U}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right\}.$$

§ 9. Estendo i risultati del capitolo precedente, ed in particolare l'interpretazione della (E) cercando la trasformazione dell'integrale della divergenza ordinaria di un vettore, esteso alla superficie σ. L'utilità appare chiara a chi pensi che spesso nella fisica matematica occorre considerare vettori funzioni dei punti di una superficie, da considerarsi come tali senza fare ipotesi sulla loro esistenza all'infuori di essa.

Per interpretare i risultati riferirò inizialmente la superficie alle linee di curvatura. Dal confronto di (B) con (E) avuto riguardo alla (12) risulta subito:

$$\iint_\sigma \operatorname{div} A\, d\sigma = \iint_\sigma \frac{1}{UV}\left[\frac{\partial}{\partial u}(VA_u) + \frac{\partial}{\partial v}(UA_v) + \frac{\partial(U_1V_1A_n)}{\partial n}\right] d\sigma =$$
$$(23)\qquad = \iint_\sigma \frac{1}{UV}\left[\frac{\partial}{\partial u}(VA_u) + \frac{\partial}{\partial v}(UA_v)\right] d\sigma + \iint_\sigma \frac{\partial A_n}{\partial n}\, d\sigma + \iint_\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right) A_n d\sigma.$$

Poichè pel loro stesso significato $\frac{\partial A_n}{\partial n}$ e $\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right)A_n$ sono indipendenti dalla scelta del sistema (ortogonale) u, v su una *data* superficie σ e lo è pure (§ precedente) la

$$\frac{1}{UV}\left[\frac{\partial}{\partial u}(VA_u) + \frac{\partial}{\partial v}(UA_v)\right]$$

la formula scritta sussiste per un generico sistema di coordinate *ortogonali* u, v. Ma in virtù della (21) essa acquista la forma

$$(24)\qquad \iint_\sigma \left(\operatorname{div} A - \frac{\partial A_n}{\partial n}\right) d\sigma = \iint_\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right) A_n d\sigma - \int_l A_\nu dl.$$

Ora, sia dall'espressione generale (B) della divergenza, calcolata per $n=0$ dopo di aver riferito lo spazio al sistema triplo ortogonale in cui u, v sono le linee di curvatura della superficie parallela a σ, che direttamente dalla (23) ricorrendo alla considerazione dell'arbitrarietà di l e di σ, risulta:

$$\text{div}\, A - \frac{\partial A_n}{\partial n} = \frac{1}{UV}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(VA_u) + \frac{\partial}{\partial v}(UA_v)\right\} + \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{S}\right)A_n \tag{25}$$

in cui, per l'osservazione del capoverso precedente le u, v sono coordinate curvilinee ortogonali *generiche*. Il secondo membro conserva significato ed è invariante per trasformazione di coordinate u, v, anche quando il vettore A sia definito solo sulla superficie σ $\left(\text{nel qual caso non si può propriamente parlare nè di div}\, A \text{ nè di } \frac{\partial A_n}{\partial n}\right)$. Esso rappresenta in ogni caso il risultato cui si perviene operando per ottenere la divergenza di un vettore nel modo solito; ma limitando la variabilità del punto di cui il vettore è funzione ad un campo superficiale.

Definisco quindi *divergenza superficiale* di A e la indicherò con $\text{div}_\sigma A$ il numero

$$\text{div}_\sigma A = \frac{1}{UV}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(VA_u) + \frac{\partial}{\partial v}(UA_v)\right\} + \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{S}\right)A_n. \tag{26}$$

Introducendo questo operatore la (21) diviene

$$\iint_\sigma \text{div}_\sigma A\, d\sigma = \iint_\sigma \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{S}\right)A_n d\sigma - \int_l A_\nu dl \tag{27}$$

che generalizza il teorema del flusso come ha fatto notare il Burgatti (l. c.).

Se A è definito in tutta una regione a cui è interno σ si ha dalla definizione

$$\text{div}_\sigma A = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial n}\frac{\partial x}{\partial n}\right) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}\right) + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial n}\frac{\partial z}{\partial n}\right) \tag{28}$$

in particolare, se α, β, γ sono i coseni direttori della normale si trova la notissima

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \text{div}\, \bar{n} = \text{div}_\sigma \bar{n} = \frac{1}{R} + \frac{1}{S}.$$

A rigore, poichè α, β, γ sono definiti solo sulla superficie σ non si potrebbe parlare di $\text{div}\, \bar{n}$, e la formula vera è $\text{div}_\sigma \bar{n} = \frac{1}{R} + \frac{1}{S}$. In ogni punto P della regione Σ, già considerata, le α, β, γ sono definite come i coseni direttori dell'*unica* normale condotta per P alla σ, ed ha perciò senso parlare di $\operatorname{div}\bar{n}$ nei punti di σ, come pure affermare che è ivi $\frac{\partial A_n}{\partial n}=0$. Probabilmente sia l'APPELL (l. c.) che il BURGATTI (l. c.) ricorrono a tale inespressa considerazione.

In virtù della (28) la (24) assume la forma di APPELL

$$
\text{(F)}\quad \begin{aligned}\iint_\sigma\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)d\sigma=\iint_\sigma\left(\alpha\frac{\partial A_x}{\partial n}+\beta\frac{\partial A_y}{\partial n}+\gamma\frac{\partial A_z}{\partial n}\right)d\sigma+\\ +\iint_\sigma(A_x\alpha+A_y\beta+A_z\gamma)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{S}\right)d\sigma-\int_l A_\nu dl\end{aligned}
$$

§ 10. Sviluppando il secondo membro della (E) ottengo una notevole formula di BELTRAMI in cui è contenuto come caso particolare l'estensione del teorema del gradiente. Occorre, per l'interpretazione, ricordare la definizione di $\operatorname{grad}_\sigma\varphi$.

Ho immediatamente

$$
\text{(29)}\quad \iint_\sigma(\operatorname{grad}_\sigma\varphi\times A)d\sigma=-\iint_\sigma\frac{\varphi}{UV}\left\{\frac{\partial(VA_u)}{\partial u}+\frac{\partial(UA_v)}{\partial v}\right\}d\sigma-\int_l\varphi A_\nu dl
$$

che il BELTRAMI [1] dà sotto la forma

$$
\text{(30)}\quad \begin{aligned}\iint_\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}A_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}A_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}A_z\right)d\sigma=\\ =\iint_\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial n}A_n d\sigma-\iint_\sigma\frac{\varphi}{UV}\left\{\frac{\partial(VA_u)}{\partial u}+\frac{\partial(UA_v)}{\partial v}\right\}d\sigma-\int_l\varphi A_\nu dl.\end{aligned}
$$

Questa esige la considerazione di valori di φ fuori della superficie e contiene $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ che è inessenziale. Per quanto ciò non costituisca difficoltà pel BELTRAMI, che pensa una funzione φ definita in tutto lo spazio e coincidente colla data sulla superficie, non è privo d'interesse il segnalare la possibilità di dimostrare la formula senza introdurre neppure come ausiliari elementi estranei al problema.

---

(1) BELTRAMI, *Intorno ad alcuni teoremi del sig. Neumann*, l. c.; *Sulla teoria degli strati magnetici*. Rend. Ist. Lombardo, S. II, T. XVI (1883), pp. 202-205. Op. CLXXII, vol. IV, p. 1.

Mutando in (29) φ in $h\varphi$ e ponendo $A = \mathrm{grad}_\sigma \psi$ ho successivamente

$$-\int_l h\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} dl = \iint_\sigma \frac{h\varphi}{UV} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V}{U}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{U}{V}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) \right\} d\sigma +$$

$$+ \iint_\sigma \varphi \left\{ \frac{1}{U^2}\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{1}{V^2}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v} \right\} d\sigma + \iint_\sigma h \left\{ \frac{1}{U^2}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{1}{V^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v} \right\} d\sigma$$

e

$$\iint_\sigma h\Delta_1(\varphi\psi) d\sigma = -\iint_\sigma (h\varphi\Delta_2\psi + \varphi\Delta_1(h\psi)) d\sigma - \int_l h\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} dl \tag{31}$$

che si particolarizza per $\psi = x$, poichè $\Delta_2 x = -\frac{\partial x}{\partial n}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right)$ [1] in

$$\iint_\sigma h\,(\mathrm{grad}_\sigma \varphi)_x d\sigma = -\iint_\sigma \left[\varphi\,(\mathrm{grad}_\sigma h)_x - h\varphi \frac{\partial x}{\partial n}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right)\right] d\sigma - \int_l h\varphi \frac{\partial x}{\partial \nu} dl \tag{32}$$

con che acquistano significato geometrico le densità delle funzioni potenziali che compariscono nell' espressione delle derivate parziali di una funzione potenziale di semplice strato.

Come caso particolare, o direttamente dalla (E), in cui si ponga $A_\nu = \frac{\partial x}{\partial \nu}$ ho pure

$$\iint_\sigma (\mathrm{grad}_\sigma \varphi)_x d\sigma = \iint_\sigma \varphi \frac{\partial x}{\partial n}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right) d\sigma - \int_l \varphi \frac{\partial x}{\partial \nu} dl$$

la quale, essendo arbitrario l' asse x si esprime vettorialmente fornendo la formula che tiene luogo del teorema del gradiente

$$\iint_\sigma \mathrm{grad}_\sigma \varphi \, d\sigma = \iint_\sigma \varphi \bar{n} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right) d\sigma - \int_l \varphi \bar{\nu} dl \tag{33}$$

data sotto tal forma da Burgatti (l. c.).

---

(1) Tale proprietà si dimostra con Beltrami osservando che, assunte le linee di curvatura a coordinate

$$0 = \nabla_2 x = \frac{1}{UV}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V}{U}\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{U}{V}\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial n}\left(U_1 V_1 \frac{\partial x}{\partial n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{UV}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V}{U}\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{U}{V}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right] + \frac{\partial x}{\partial n}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right) + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right) = \Delta_2 x + \frac{\partial x}{\partial n}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right)$$

per l' invariantività di $\Delta_2 x$ e del 2° termine dell' ultimo membro la proprietà è valida per ogni sistema u, v.

§ 11. Pongo, sempre in (E), $A_\nu = 1$ e considero sulla superficie un sistema di linee ortogonali al contorno l, tali che per ogni punto della superficie (escluso al più un numero finito) ne passi una ed una sola. Sia ν' un vettore unitario funzione di (u, v) tangente alla linea del sistema passante per (u, v) che si riduce con continuità al vettore $\bar{\nu}$ prima definito, quando il punto (u, v) tende ad un punto del contorno. Ho subito:

$$-\int_l \varphi dl = \iint_\sigma \frac{\varphi}{UV}\left[\frac{\partial}{\partial u}(A_u V) + \frac{\partial}{\partial v}(UA_v)\right] d\sigma + \iint_\sigma \left(\frac{A_v}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{A_u}{U}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) d\sigma =$$

$$= \iint_\sigma \varphi \operatorname{div}_\sigma \bar{\nu}' d\sigma + \iint_\sigma (\operatorname{grad}_\sigma \varphi \times \bar{\nu}') d\sigma$$

dove A_u, A_v sono le componenti del vettore ν' e quindi

$$\iint_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial\nu'} d\sigma = -\iint_\sigma \varphi \operatorname{div}_\sigma \bar{\nu}' d\sigma - \int_l \varphi dl. \tag{34}$$

Se, in particolare, è $\varphi = 1$ si ha $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu'} = 0$ e

$$\iint_\sigma \operatorname{div}_\sigma \bar{\nu}' d\sigma = -\int_l dl = -L.$$

Quindi *per qualunque sistema di linee ν' è costante* lo

$$\iint_\sigma \operatorname{div}_\sigma \bar{\nu}' d\sigma.$$

§ 12. Per ricercare l'estensione del teorema della rotazione e studiare l'analogo dell'operatore di rotazione risalgo direttamente alla formula di RIEMANN (D) e per mezzo di qnesta trasformo

$$\int_l (\bar{\nu} \wedge A)_x dl.$$

Le componenti del vettore $\nu \wedge A$ secondo le tre direzioni l, ν, n uscenti dal punto P del contorno a cui esso corrisponde, sono i minori della matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ A_l & A_\nu & A_n \end{vmatrix}$$

quindi $(\nu \wedge A)_x = A_n \frac{\partial x}{\partial l} - A_l \frac{\partial x}{\partial n}$ e, successivamente

$$\int_l \left(A_n \frac{\partial x}{\partial l} - A_l \frac{\partial x}{\partial n}\right) dl = \int_l \left(A_n \frac{\partial x}{\partial u} du + A_n \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) - \int_l \left(A_u U \frac{\partial u}{\partial l} + A_v V \frac{\partial v}{\partial l}\right) \frac{\partial x}{\partial n} dl =$$

$$= \int_l A_n \frac{\partial x}{\partial u} du + A_n \frac{\partial x}{\partial v} dv - \int_l \left[A_u \frac{\partial x}{\partial n} U du + A_v \frac{\partial x}{\partial n} V dv\right].$$

Trasformo separatamente i termini per mezzo della (D). Pongo in primo luogo

$$P = A_n \frac{\partial x}{\partial u} \qquad Q = A_n \frac{\partial x}{\partial v}$$

e ricavo

$$\int_l A_n \frac{\partial x}{\partial u} du + A_n \frac{\partial x}{\partial v} dv = \iint_\sigma \left[\frac{\partial\left(A_n \frac{\partial x}{\partial v}\right)}{\partial u} - \frac{\partial\left(A_n \frac{\partial x}{\partial u}\right)}{\partial v}\right] \frac{d\sigma}{UV} =$$

$$= \iint_\sigma \left[\frac{1}{UV} \frac{\partial A_n}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{1}{UV} \frac{\partial A_n}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}\right] d\sigma$$

in secondo luogo

$$P = U A_u \frac{\partial x}{\partial n} \qquad Q = V A_v \frac{\partial x}{\partial n}$$

ed ho

$$-\int_l A_l \frac{\partial x}{\partial n} dl = \iint_\sigma \left[\frac{\partial\left(U A_u \frac{\partial x}{\partial n}\right)}{dv} - \frac{\partial\left(V A_v \frac{\partial x}{\partial n}\right)}{\partial u}\right] \frac{d\sigma}{UV} =$$

$$= \iint_\sigma \frac{1}{UV}\left(\frac{\partial (U A_u)}{\partial v} - \frac{\partial (V A_v)}{\partial u}\right) \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma + \iint_\sigma \left[\frac{A_u}{V} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right) - \frac{A_v}{U} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)\right] d\sigma .$$

Ma notoriamente [1]

$$\text{(35)} \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right) = -\frac{D}{U^2} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{D'}{V^2} \frac{\partial x}{\partial v} \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right) = -\frac{D'}{U^2} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{D''}{V^2} \frac{\partial x}{\partial v}$$

e

$$\text{(36)} \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{S} = -\frac{D''}{V^2} - \frac{D}{U^2}$$

(1) BIANCHI, *Geometria differenziale*, vol. I, § 65.

in cui D, D', D'' hanno il consueto significato di coefficienti della seconda forma fondamentale di GAUSS. Segue

$$-\int_l A_l \frac{\partial x}{\partial n} dl = \iint_\sigma \frac{1}{UV}\left[\frac{\partial(UA_u)}{\partial v} - \frac{\partial(VA_v)}{\partial u}\right]\frac{\partial x}{\partial n} d\sigma +$$

$$+\iint_\sigma \left[\frac{A_u}{V}\left(-\frac{D'}{U^2}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{D''}{V^2}\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{A_v}{U}\left(-\frac{D}{U^2}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{D'}{V^2}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right] d\sigma =$$

$$= \iint_\sigma \frac{1}{UV}\left[\frac{\partial(UA_u)}{\partial v} - \frac{\partial(VA_v)}{\partial u}\right]\frac{\partial x}{\partial n} d\sigma +$$

$$+\iint_\sigma \left[\left(-\frac{D'A_u}{UV} + \frac{DA_v}{U^2}\right)\frac{1}{U}\frac{\partial x}{\partial u} + \left(-\frac{D''A_u}{V^2} + \frac{D'A_v}{UV}\right)\frac{1}{V}\frac{\partial x}{\partial v}\right] d\sigma .$$

Tenendo conto della (36) si può scrivere finalmente la formula di trasformazione cercata

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_l (\bar{\nu} \wedge A)_x dl = \\ &= \iint_\sigma \left\{ \frac{1}{UV}\left[\frac{\partial(UA_u)}{\partial v} - \frac{\partial(VA_v)}{\partial u}\right]\frac{\partial x}{\partial n} + \left[-\frac{1}{V}\frac{\partial A_n}{\partial v} - \frac{D'A_u}{UV} - \frac{D''A_v}{V^2}\right]\frac{1}{U}\frac{\partial x}{\partial u} + \right. \\ &\left. + \left[\frac{1}{U}\frac{\partial A_n}{\partial u} + \frac{D'A_v}{UV} + \frac{DA_u}{U^2}\right]\frac{1}{V}\frac{\partial x}{\partial v}\right\} d\sigma + \\ &+ \iint_\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right)\left[-A_v \frac{1}{U}\frac{\partial x}{\partial u} + A_u \frac{1}{V}\frac{\partial x}{\partial v}\right] d\sigma . \end{aligned}\right.$$

Introduco il vettore di componenti rispetto alle u, v, n

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} R_u &= \frac{1}{V}\frac{\partial A_n}{\partial v} + \frac{D'A_u}{UV} + \frac{D''A_v}{V^2} \\ R_v &= -\frac{1}{U}\frac{\partial A_n}{\partial u} - \frac{D'A_v}{UV} - \frac{DA_u}{U^2} \\ R_n &= -\frac{1}{UV}\left[\frac{\partial(UA_u)}{\partial v} - \frac{\partial(VA_v)}{\partial u}\right] \end{aligned}\right.$$

che chiamerò (per ragioni da esporsi) *rotazione superficiale* di A e indicherò col simbolo $\mathrm{rot}_\sigma A$ (1).

(1) BURGATTI, (l. c.) egli però non ne dà l'espressione generale delle componenti.

Riservandomi di dimostrare che il vettore R così definito non è funzione del sistema di coordinate ortogonali (u, v) posso scrivere la (37) sotto la forma:

$$\iint_\sigma (\mathrm{rot}_\sigma A)_x d\sigma = \iint_\sigma (\bar{n} \wedge A)_x \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right) d\sigma - \int_l (\bar{\nu} \wedge A)_x dl$$

e analogamente mutando x in y e z. Di qui l'espressione vettoriale [1]

$$\iint_\sigma \mathrm{rot}_\sigma A \, d\sigma = \iint_\sigma (\bar{n} \wedge A) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right) d\sigma - \int_l (\bar{\nu} \wedge A) dl \tag{39}$$

che estende il teorema della rotazione.

Essendo arbitrario il contorno l ed indipendenti dalle coordinate $\nu \wedge A$ e $(n \wedge A)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right)$ si deduce senz'altro che i vettori $\mathrm{rot}_\sigma A$ definiti per mezzo delle loro componenti rispetto a due diversi sistemi di coordinate (ortogonali) u, v coincidono, e cioè il vettore R definito formalmente dalle (38) non è funzione del sistema di coordinate.

Per riconoscerne il significato ricorro allo speciale sistema formato dalle linee di curvatura. È in tal caso $D' = 0$ e quindi

$$\frac{1}{R} = -\frac{D}{U^2} \quad \frac{1}{S} = -\frac{D''}{V^2}$$

donde

$$R_u = \frac{1}{V}\frac{\partial A_n}{\partial v} - \frac{A_v}{S}; \quad R_v = -\frac{1}{U}\frac{\partial A_n}{\partial u} + \frac{A_u}{R}; \quad R_n = \frac{1}{UV}\left[\frac{\partial (VA_v)}{\partial u} - \frac{\partial (UA_u)}{\partial v}\right]. \tag{40}$$

Il confronto colle (8) conduce alla conclusione che, ove si possa parlare anche del vettore $\mathrm{rot}\, A$, la differenza $\mathrm{rot}\, A - \mathrm{rot}_\sigma A$ è il vettore di componenti $-\frac{\partial A_v}{\partial n}$, $+\frac{\partial A_u}{\partial n}$, 0, che sono i minori della matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial A_u}{\partial n} & \frac{\partial A_v}{\partial n} & \frac{\partial A_n}{\partial n} \end{vmatrix}$$

cioè

$$\mathrm{rot}_\sigma A = \mathrm{rot}\, A - \bar{n} \wedge \frac{\partial A}{\partial n} \tag{41}$$

---

[1] BURGATTI (l. c.). Egli però non ne dà l'espressione generale.

dato che, come facilmente si vede, le componenti di $\frac{\partial A}{\partial n}$ sono appunto

$$\frac{\partial A_u}{\partial n}\ \frac{\partial A_v}{\partial n}\ \frac{\partial A_n}{\partial n}.$$

La (41) è, sostanzialmente, assunta come definizione dal BURGATTI.

Le (38) forniscono una definizione che, per quanto faccia uso di coordinate, non ricorre ad elementi estranei alla superficie e dà le componenti della rotazione superficiale in coordinate generali, non ancor note.

§ 14. Posto φA in luogo di A le (38) danno subito

$$\operatorname{rot}_\sigma(\varphi A) = \varphi \operatorname{rot}_\sigma A + \operatorname{grad}_\sigma \varphi \wedge A \tag{42}$$

da cui, tenendo conto della (39)

$$\iint_\sigma (A \wedge \operatorname{grad}_\sigma \varphi)\, d\sigma = -\iint_\sigma \varphi(\bar{n} \wedge A)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right) d\sigma + \iint_\sigma \varphi \operatorname{rot}_\sigma A\, d\sigma + \int_l \varphi(\bar{\nu} \wedge A)\, dl. \tag{43}$$

Se φ è definito in tutto Σ, posso pure scrivere

$$\begin{aligned} &\iint_\sigma A \wedge \operatorname{grad} \varphi\, d\sigma = \\ &= \iint_\sigma \varphi\left[\operatorname{rot}_\sigma A - (\bar{n} \wedge A)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right)\right] d\sigma + \int_l \varphi(\bar{\nu} \wedge A)\, dl - \iint_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n}(\bar{n} \wedge A)\, d\sigma. \end{aligned} \tag{44}$$

Essa per $\varphi = \frac{1}{r}$ trovasi in BELTRAMI [1] con espressione più complessa e a prezzo di calcoli laboriosi per quanto eleganti e profondi. Se A è il momento magnetico di una distribuzione magnetica su σ la (44) dimostra il teorema che il potenziale vettore

$$\iint_\sigma \left(A \wedge \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) d\sigma$$

è somma di tre potenziali vettori di spazio, di semplice e di doppio strato e che i potenziali di doppio strato svaniscono nella magnetizzazione normale.

[1] *Sulla teoria degli strati magnetici*, l. c.

Sur l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes et les fonctions absolument continues de fonctions absolument continues

par M.lle NINA BARY et M. D. MENCHOFF (à Moscou).

Nous nous proposons d'étudier dans ce Mémoire l'intégrale de LEBESGUE-STIELTJES d'une fonction mesurable $f(x)$ par rapport à une fonction $\varphi(x)$ *absolument continue.*

Quand on définit l'intégrale de LEBESGUE-STIELTJES, on suppose habituellement que la fonction $\varphi(x)$ est à variation bornée; on pose alors

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$$

chacune des fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ étant non décroissante; on définit l'intégrale de LEBESGUE-STIELTJES d'une fonction $f(x)$ par rapport à une fonction non décroissante et l'on pose par définition

$$\text{L. S.}\int_a^b f d\varphi = \text{L. S.}\int_a^b f(x) d\varphi_1 - \text{L. S.}\int_a^b f(x) d\varphi_2 \text{ (1)}.$$

Dans le présent Mémoire nous imposons à la fonction $\varphi(x)$ la condition d'être *absolument continue,* mais la définition de l'intégrale que nous considérons (§ 1) est telle que l'intégrale

$$\int_a^b f(x) d\varphi$$

(1) M. RADON dans son Mémoire ***Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*** (Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Band 122, Abt. II^a, s. 1205-1438, Wien 1913) donne une définition très générale de l'intégrale de STIELTJES, mais lui aussi ne considère que le cas où chacune des intégrales $\int_a^b f d\varphi_1$ et $\int_a^b f d\varphi_2$ existe et définit l'intégrale $\int_a^b f d\varphi$ comme leur différence.

peut exister sans que les deux intégrales

$$\int_a^b f(x)d\varphi_1 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)d\varphi_2$$

existent.

En étudiant l'intégrale ainsi définie, nous voyons (§ 3) qu'il y a des cas où l'intégrale définie $\int_a^b f(x)d\varphi$ existe, tandis que l'intégrale indéfinie $\int_a^x f(x)d\varphi$ n'existe pas quelque soit x, $a < x < b$. D'ailleurs, même quand cette intégrale est déterminée et finie pour tout point x, $a \leq x \leq b$, elle peut représenter une fonction discontinue (§ 4).

On pourrait donc croire qu'une telle définition de l'intégrale de LEBESGUE-STIELTJES ne présente aucun intérêt. Mais il y a une classe remarquable de ces intégrales, ce sont les intégrales de la forme

$$\text{L. S.}\int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi;$$

elles présentent une généralisation très naturelle des intégrales de M. LEBESGUE. On démontre (§ 6) que *si l'intégrale indéfinie* $\int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi$ *existe pour tout* x, $a \leq x \leq b$, *elle représente une fonction absolument continue de fonction absolument continue et reciproquement, toute fonction absolument continue de fonction absolument continue est (à une constante additive près) une intégrale de Lebesgue-Stieltjes de la forme* $\int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi$ (de même qu'une intégrale indéfinie de M. LEBESGUE est une fonction absolument continue et réciproquement).

Nous donnons ensuite (§ 7) *une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue soit une fonction absolument continue de fonction absolument continue.* On en déduit sans peine (§ 9) que *toute intégrale indéfinie de M. Denjoy est une fonction absolument continue de fonction absolument continue.*

L'intégrale indéfinie de M. DENJOY a presque partout une dérivée déterminée et finie. Mais parmi les fonctions absolument continues de fonctions absolument continues, il y a des fonctions qui n'ont pas de dérivée sur un ensemble de mesure *positive* (§ 9).

On voit donc que cette classe de fonctions est beaucoup plus vaste que celle des fonctions absolument continues elle-mêmes. On pourrait croire que la classe des fonctions de la forme

$$f\{\varphi[\psi(x)]\}$$

f, φ et ψ étant absolument continues, présente une classe encore plus vaste. Nous démontrons (§ 9) qu'il n'en est pas ainsi : cette classe coïncide avec celles des fonctions absolument continues de fonctions absolument continues.

§ 1. **Définition de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes.** — Soit $f(x)$ une fonction mesurable et finie presque partout dans (a, b) et $\varphi(x)$ une fonction absolument continue dans (a, b).

Soit ε un nombre positif et

$$\ldots, l_{-n}, \ldots, \quad l_{-1}, \quad l_0, \quad l_1, \ldots, \quad l_n, \ldots$$

une échelle de nombres croissant de $-\infty$ à $+\infty$ par degrés $< \varepsilon$.

Désignons par l_n l'ensemble des points pour lesquels on a

$$l_{n-1} \leq f(x) < l_n$$

et par λ_n un nombre tel que

$$l_{n-1} \leq \lambda_n < l_n$$

et formons la série

$$S = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \lambda_n \operatorname{var}_{e_n} \varphi(x),$$

$\operatorname{var}_{e_n} \varphi(x)$ désignant la *variation algébrique* de $\varphi(x)$ sur l'ensemble e_n (1);

---

(1) Rappelons la définition de la *variation algébrique* (Ch. de la VALLÉE-POUSSIN, *Cours d'Analyse Infinitésimale,* t. 1, 3e édition, pag. 267) :

Soit $F(x)$ une fonction continue et E un ensemble mesurable. Enfermons E en une infinité dénombrable d'intervalles (a_n, b_n) sans points communs deux à deux et considérons la somme $\sum_{n=1}^{\infty} [F(b_n) - F(a_n)]$. Si cette série est absolument convergente, sa valeur est la *variation de $F(x)$ dans l'ensemble des intervalles (a_n, b_n)*. Si cette variation tend vers une limite toujours la même quand on fait tendre la somme $\Sigma(b_n - a_n)$ des longueurs des intervalles vers la mesure de E, cette limite est *la variation algébrique de $F(x)$ dans l'ensemble E.*

Il est important de remarquer que dans le cas que nous étudions, la variation de $\varphi(x)$ sur un ensemble peut être positise ou negative, puisqu'on ne suppose guère que la fonction $\varphi(x)$ soit toujours croissante ou toujours décroissante. C'est par cette raison que l'intégrale de LEBESGUE-STIELTJES $\int_a^b f(x)d\varphi$ peut exister sans que les deux intégrales $\int_a^b f(x)d\varphi_1$ et $\int_a^b f(x)d\varphi_2$ existent, où l'on a posé $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ étant non décroissantes.

supposons que cette série converge absolument et que sa somme S tende vers une limite finie quand ε tend vers zéro, cette limite étant toujours la même quel que soit le choix des nombres l_n et λ_n; nous dirons alors que *la fonction $f(x)$ est sommable par rapport à $\varphi(x)$* et nous donnerons à cette limite le nom *d'intégrale de Lebesgue-Stieltjes de la fonction $f(x)$ par rapport à la fonction $\varphi(x)$*

$$\lim S = \text{L. S.}\int_a^b f(x)d\varphi.$$

On sait [1] que la variation d'une fonction absolument continue $\varphi(x)$ sur un ensemble mesurable e est égale à

$$\operatorname*{var}_e \varphi(x) = \int_e \varphi'(x)dx$$

l'intégrale de cette formule étant une intégrale de M. Lebesgue.

La somme S qui sert à définir l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes devient alors

$$S = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \lambda_n \int_{e_n} \varphi'(x)dx.$$

On voit qu'en posant $\varphi(x) = x$ on réduit la somme S à la somme

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \lambda_n \text{ mes } e_n$$

dont la limite (si elle existe) est l'intégrale de M. Lebesgue de la fonction $f(x)$. *La variation de $\varphi(x)$ joue donc dans l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes le même rôle que la mesure dans l'intégrale de Lebesgue.* On sait, que la valeur de l'intégrale de Lebesgue n'est pas changée quand on modifie arbitrairement la fonction $f(x)$ sous le signe d'intégrale sur un ensemble de mesure nulle. Soit E un ensemble où l'on a presque partout

$$\varphi'(x) = 0.$$

La variation de $\varphi(x)$ est donc nulle sur E et sur chaque ensemble $E' \subset E$. Il suit de la définition même qu'en modifiant arbitrairement la fonction $f(x)$ sur E on ne change pas la valeur de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes $\int_a^b f(x)d\varphi$.

---

[1] Ch. De la Vallée-Poussin, *Cours d'Analyse*, t. 1, 3e édition, pag. 267.

Ainsi *les ensembles où l'on a presque partout* $\varphi'(x)=0$ *jouent dans l'étude de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes le même rôle que les ensembles de mesure nulle dans l'intégrale de Lebesgue*: il sont négligeables.

Cela posé, passons à l'étude de l'intégrale de LEBESGUE-STIELTJES.

§ 2. **Comparaison avec l'intégrale de M. Lebesgue.** — Nous allons démontrer d'abord le thèoréme suivant.

THÉORÈME 1. *Si le produit* $f(x)\varphi'(x)$ *est sommable dans* (a, b), *la fonction* $f(x)$ *est sommable par rapport à* $\varphi(x)$ *et l'on a*

$$\text{L. S.}\int_a^x f(x)d\varphi = \text{L.}\int_a^x f(x)\varphi'(x)dx. \qquad a \leq x \leq b.$$

En reprenant les nombres l_n, λ_n et e_n du § 1 et en désignant par $e_n(x)$ la partie de l'ensemble e_n située dans l'intervalle (a, x), on voit que la somme S qui sert à définir l'intégrale de LEBESGUE-STIELTJES peut être écrite sous la forme

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \lambda_n \int_{e_n(x)} \varphi'(x)dx. \qquad a \leq x \leq b.$$

D'autre part, l'intégrale de LEBESGUE du produit $f(x)\varphi'(x)$ qui existe, d'après l'hypothèse faite, peut se présenter dans la forme d'une série

$$S_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{e_n(x)} f(x)\varphi'(x)dx$$

car les ensembles $e_n(x)$ n'ont pas de points communs et leur somme coïncide avec l'intervalle (a, x). Le produit $f(x)\varphi'(x)$ étant sommable, cette série est absolument convergente.

La différence des termes généraux de la série absolument convergente $S_1(x)$ et de la série $S(x)$ est égale à

$$\int_{e_n(x)} [f(x) - \lambda_n]\varphi'(x)dx.$$

Mais les valeurs de la fonction $f(x)$ dans l'ensemble e_n, donc à fortiori dans $e_n(x)$, appartiennent à l'intervalle (l_{i-1}, l_i) de l'axe des Y ainsi que la valeur λ_n; donc la différence $f(x) - \lambda_n$ ne surpasse pas en valeur absolue la longueur de cet intervalle, mais cette dernière est inférieure à un nombre positif donné ε. Par suite, la différence des termes généraux des séries $S_1(x)$ et $S(x)$ ne surpasse pas la valeur

$$\varepsilon \int\limits_{e_n(x)} |\varphi'(x)|\,dx,$$

mais cette valeur est le terme général d'une série absolument convergente dont la somme est égale à

$$\varepsilon \int\limits_a^x |\varphi'(x)|\,dx.$$

Il s'en suit que la série considérée $S(x)$ est aussi absolument convergente et que sa somme a pour limite l'intégrale de Lebesgue du produit $f(x)\varphi'(x)$ dans (a, x) quand ε tend vers zéro. Nous avons donc démontré l'identité

$$\text{L. S.} \int\limits_a^x f(x)d\varphi = \text{L.} \int\limits_a^x f(x)\varphi'(x)dx. \qquad \text{(c. q. f. d.).}$$

Remarque. Si la fonction $f(x)$ est *bornée*, le produit $f(x)\varphi'(x)$ est sommable quelque soit la fonction absolument continue $\varphi(x)$. Il en suit qu'*une fonction bornée $f(x)$ est sommable par rapport à une fonction $\varphi(x)$ absolument continue arbitraire et son intégrale de Lebesgue-Stieltjes est égale à l'intégrale de Lebesgue du produit $f(x)\varphi'(x)$.*

§ 3. Dans le cas où le produit $f(x)\varphi'(x)$ est sommable dans (a, b), l'existence de l'intégrale définie $\int\limits_a^b f(x)d\varphi$ n'est qu'un cas particulier de l'existence de l'intégrale indéfinie $\int\limits_a^x f(x)d\varphi$ pour tout point x, $a \leq x \leq b$. Mais dans le cas où le produit $f(x)\varphi'(x)$ n'est pas sommable, il peut arriver que l'intégrale définie existe tandis que l'intégrale indéfinie n'existe pas, et cette circonstance peut se présenter même pour une fonction $f(x)$ *sommable.*

Nous allons construire *une fonction sommable $f(x)$ et une fonction absolument continue $\varphi(x)$ telles que l'intégrale*

$$\int\limits_0^1 f(x)d\varphi$$

existe, tandis que l'intégrale indéfinie $\int_0^x f(x)d\varphi$ *n'existe pas quelque soit* x, $0 < x < 1$.

Posons

$$a_n = \frac{1}{n+2}, \quad b_n = \frac{n+1}{n+2} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Soit

$$f(x) = \sqrt{n+2} \quad \text{sur} \quad (a_{n+1}, a_n) \quad \text{et} \quad (b_n, b_{n+1}) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

On voit sans peine que la fonction $f(x)$ est *sommable*. En effet, la longueur de chacun des intervalles (a_{n+1}, a_n) et (b_n, b_{n+1}) est égale à

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)}.$$

On a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_{n+1}}^{a_n} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{(n+2)(n+3)} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^{\frac{3}{2}}}$$

et la dernière série converge. On a la même inégalité pour la somme des intégrales de $f(x)$ sur les intervalles (b_n, b_{n+1}). Donc

$$\mathrm{L}.\int_0^1 f(x)dx$$

existe.

Soit maintenant

$$\psi(x) = +\sqrt{n+2} \quad \text{sur} \quad (a_{n+1}, a_n) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$
$$\psi(x) = -\sqrt{n+2} \quad \text{sur} \quad (b_n, b_{n+1}) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

La fonction $\psi(x)$ est sommable puisque

$$|\psi(x)| = f(x)$$

et $f(x)$ est sommable. Soit

$$\varphi(x) = \mathrm{L}.\int_0^x \psi(x)dx,$$

La fonction $\varphi(x)$ est absolument continue. Il est clair que

$$\text{L. S.}\int_0^1 f(x)d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+2}\left(\text{L.}\int_{a_{n+1}}^{a_n}\varphi'(x)dx + \text{L.}\int_{b_n}^{b_{n+1}}\varphi'(x)dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+2}\left(\int_{a_{n+1}}^{a_n}\psi(x)dx + \int_{b_n}^{b_{n+1}}\psi(x)dx\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)\left[+\frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right] = 0.$$

L'intégrale définie L. S. $\int_0^1 f(x)d\varphi$ existe donc et elle est égale à 0.

Soit maintenant x un point quelconque, $0 < x < 1$. Supposons d'abord qu'on ait pour un certain $n = n_0$

$$a_{n_0+1} \leq x \leq a_{n_0} \qquad \left(a_0 = \frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad x \leq \frac{1}{2}\right)$$

On a alors

$$\text{L. S.}\int_0^x f(x)d\varphi = \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\text{L. S.}\int_{a_{n+1}}^{a_n} f(x)d\varphi + \text{L. S.}\int_{a_{n_0+1}}^{x} f(x)d\varphi =$$

$$= \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\sqrt{n+2}\,\text{L.}\int_{a_{n+1}}^{a_n}\psi(x)dx + \sqrt{n_0+2}\int_{a_{n_0+1}}^{x}\psi(x)dx \geq \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}\ \sqrt{n+2}}{(n+2)(n+3)} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{n+3},$$

la série étant divergente on voit que L. S. $\int_0^x f(x)d\varphi$ n'existe pas.

Dans le cas où l'on a pour un certain $n = n_0$

$$b_{n_0} \leq x \leq b_{n_0+1} \qquad \left(b_0 = \frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad x \geq \frac{1}{2}\right)$$

on divise l'intégrale en deux parties:

$$\text{L. S.}\int_0^x f(x)d\varphi = \text{L. S.}\int_0^{\frac{1}{2}-x} f(x)d\varphi + \int_{\frac{1}{2}-x}^{x} f(x)d\varphi.$$

La première de ces intégrales n'existe pas, car on peut lui appliquer le raisonnement précédent, $\frac{1}{2} - x$ étant nécessairement contenu dans un certain

(a_{n+1}, a_n); quant à la seconde intégrale, elle est égale à zéro; la démonstration est tout à fait analogue à la démonstration de l'égalité

$$\int_0^1 f(x)d\varphi = 0.$$

On voit ainsi que l'intégrale indéfinie $\int_0^x f(x)d\varphi$ n'existe pas quel que soit x, $0 < x < 1$. (c. q. f. d.).

§ 4. On peut se poser la question suivante: en supposant que l'intégrale indéfinie de LEBESGUE-STIELTJES est déterminée et *finie* en chaque point de l'intervalle (a, b), peut-on affirmer qu'elle représente une fonction *continue*? Nous allons répondre *négativement* à cette question en définissant *une fonction sommable $f(x)$ et une fonction $\varphi(x)$ absolument continue telles que l'intégrale indéfinie*

$$\mathfrak{F}(x) = \text{L. S.}\int_0^x f(x)d\varphi$$

existe pour tout point x, $0 \leq x \leq 1$ et sa valeur est partout finie, mais $\mathfrak{F}(x)$ est discontinue au point $x = 1$.

Posons

$$a_n = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Soit

$$f(x) = n^{\frac{3}{2}} \quad \text{sur} \quad (a_n, a_{n+1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

On voit que $f(x)$ est sommable puisque la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{3}{2}} \frac{2n + 1}{n^2(n + 1)^2}$$

converge. Soit

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= + n^{\frac{3}{2}} \quad \text{sur} \quad \left(a_n, \frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right) \\ \psi(x) &= - n^{\frac{3}{2}} \quad \text{sur} \quad \left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}, a_{n+1}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Puisque $|\psi(x)| = f(x)$, la fonction $\psi(x)$ est sommable. Posons

$$\varphi(x) = \text{L.}\int_0^x \psi(x)dx,$$

$\varphi(x)$ est donc absolument continue. Il est évident que

$$\text{L. S.}\int_0^1 f(x)d\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{3}{2}} \left(\int_{a_n}^{\frac{a_n+a_{n+1}}{2}} \psi(x)dx + \int_{\frac{a_n+a_{n+1}}{2}}^{a_{n+1}} \psi(x)dx\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3\left(\frac{1}{2}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right) = 0.$$

L'intégrale définie $\int_0^1 f(x)dx$ existe donc et elle est égale à 0.

Soit maintenant x un point quelconque $0 \leq x < 1$. L'intégrale indéfinie

$$\int_0^x f(x)d\varphi$$

existe puisque $f(x)$ est bornée sur le segment $(0, x)$ et nous avons vu (§ 2) qu'une fonction bornée est sommable par rapport à une fonction $\varphi(x)$ absolument continue arbitraire. Mais on a quelque soit n

$$\mathfrak{J}\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right) = \text{L. S.}\int_0^{\frac{a_n+a_{n+1}}{2}} f(x)d\varphi = \text{L. S.}\int_0^{a_n} f(x)d\varphi + \text{L. S.}\int_{a_n}^{\frac{a_n+a_{n+1}}{2}} f(x)d\varphi =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k^{\frac{3}{2}} \left(\int_{a_k}^{\frac{a_k+a_{k+1}}{2}} \psi(x)dx + \int_{\frac{a_k+a_{k+1}}{2}}^{a_{k+1}} \psi(x)dx\right) + n^{\frac{3}{2}} \int_{a_n}^{\frac{a_n+a_{n+1}}{2}} \psi(x)dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k^3\left[\frac{1}{2}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\right] + n^3\frac{1}{2}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n(2n+1)}{2(n+1)^2}$$

Quand n tend vers l'infini, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = 1$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{F}\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n+1)}{2(n+1)^2} = 1$$

mais $\mathfrak{F}(1) = 0$, $\mathfrak{F}(x)$ est donc discontinue au point $x = 1$ (c. q. f. d.).

§ 5. Nous avons vu au § 4 que l'intégrale indéfinie de LEBESGUE-STIELTJES (supposée déterminée et finie en chaque point d'un intervalle) peut avoir des points de discontinuité. Nous allons démontrer maintenant que *si l'intégrale indéfinie de Lebesgue-Stieltjes existe en chaque point x, $a \leq x \leq b$, elle est ou bien continue, on bien une limite de fonctions continues* (c'est à dire une fonction de classe 1 au plus d'après la classification de M. BAIRE).

Sans restreindre la généralité des considérations *on peut supposer que la fonction $f(x)$ ne prend que des valeurs entières.* En effet, en désignant par $E[A]$ le plus grand entier contenu dans le nombre réel A, nous voyons qu'on peut diviser $f(x)$ en une somme de deux fonctions

$$f(x) = E[f(x)] + \theta(x)$$

dont la première est une fonction mesurable qui n'a que des valeurs entières et la seconde est une fonction mesurable *et bornée,* puisque $0 \leq \theta(x) < 1$.

D'après la remarque faite à la fin du § 2, la fonction $\theta(x)$ est donc sommable par rapport à une fonction absolument continue $\varphi(x)$ absolument quelconque et son intégrale indéfinie de LEBESGUE-STIELTJES coïncide avec l'intégrale de LEBESGUE du produit $\theta(x)\varphi'(x)$, il représente donc une fonction absolument continue. D'autre part il est evident que le théorème « l'intégrale d'une somme est égale à la somme des intégrales » subsiste pour les intégrales de LEBESGUE-STIELTJES. Donc il nous suffit de considérer des fonctions qui ne prennent que des valeurs entières.

Soit e_n l'ensemble des points où l'on a

$$f(x) = n, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

et $\psi_n(x)$ une fonction égale à $\varphi'(x)$ dans e_n et à zéro en dehors de e_n

$$(n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ldots).$$

On a alors

$$\text{L. S.}\int_a^x f(x)d\varphi = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} n \int_a^x \psi_n(x)dx$$

la derniére série étant absolument convergente quel que soit x, puisque nous avons supposé que l'intégrale indéfinie de Lebesgue-Stieltjes est déterminée et finie partout dans (a, b). Le terme général de cette série, étant une intégrale indéfinie de M. Lebesgue multipliée par n, est donc une fonction continue et l'on voit ainsi que l'intégrale indéfinie de Lebesgue-Stieltjes est la limite de fonctions continues, ce qui prouve la proposition énoncée. (c. q. f. d.).

§ 6. **Un cas remarquable d'intégrabilité au sens de Lebesgue-Stieltjes.** — Nous avons vu aux paragraphes précédents que l'intégrale indéfinie L. S.$\int_a^x f(x) d\varphi$ n'est pas nécessairement déterminée dans $a \leq x \leq b$ si l'intégrale définie $\int_a^b f(x) d\varphi$ existe, et quand elle est déterminée et finie, elle est généralement discontinue.

Considérons maintenant le cas où la fonction sous le signe d'intégrale est une fonction de la fonction $\varphi(x)$, c'est-à-dire considérons les intégrales de la forme

$$\text{L. S.}\int_a^x f[\varphi(x)]\, d\varphi.$$

Nous verrons que si les extrêmés absolus de $\varphi(x)$ sont aux bornes de l'intervalle (a, b), l'intégrale indéfinie existe pour tout point x, $a \leq x \leq b$ sous la seule condition d'existence de l'intégrale définie $\int_a^b f[\varphi(x)] d\varphi$; d'ailleurs, chaque fois que l'intégrale de la forme $\int_a^x f[\varphi(x)] d\varphi$ existe pour tout x, $a \leq x \leq b$, elle représente une fonction continue dans (a, b). Nous allons étudier maintenant les intégrales de cette forme, mais nous avons besoin de quelques définitions et lemmes préliminaires.

Un ensemble de points e, situé dans (a, b), sera dit *complet* par rapport à une fonction $\varphi(x)$, si l'on a toujours

$$\varphi(x') \neq \varphi(x'')$$

pour tout couple de points x' et x'' tels que x' appartient à e, et x'' à son complémentaire Ce par rapport à l'intervalle (a, b).

Lemme 1. *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction absolument continue définie dans un intervalle* (a, b), e *un ensemble complet par rapport à* $\varphi(x)$, $\mathcal{E}$ *l'ensemble* *des valeurs de $\varphi(x)$ sur e, enfin $\mathcal{E}^*$ la partie de $\mathcal{E}$ comprise entre les points $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. La variation de $\varphi(x)$ sur e est alors égale en valeur absolue à la mesure de $\mathcal{E}^*$ et elle a le signe de la différence $\varphi(b) - \varphi(a)$.*

En effet, soit $f(u)$ une fonction égale à 1 sur $\mathcal{E}$ et à zéro en dehors de $\mathcal{E}$. On voit de suite qu'en posant $A = \varphi(a)$ et $B = \varphi(b)$ on a

$$\text{mes}\, \mathcal{E}^* = \pm \text{L.}\int_A^B f(u)\,du$$

le signe $+$ devant l'intégrale correspond au cas $A < B$ et le signe $-$ au cas $B < A$. La fonction $f(u)$ est une fonction bornée. Par conséquent la régle d'intégration par substitution pour les intégrales de LEBESGUE s'applique [1]; on trouve donc en posant $u = \varphi(x)$

$$\text{mes}\, \mathcal{E}^* = \pm \text{L.}\int_A^B f(u)\,du = \pm \text{L.}\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx.$$

Si le point x appartient à e, $\varphi(x)$ appartient à $\mathcal{E}$ (d'aprés la définition de $\mathcal{E}$), donc $f[\varphi(x)] = 1$. L'ensemble e étant complet par hypothése, $\varphi(x)$ ne peut appartenir à $\mathcal{E}$ si $x < Ce$, donc pour tout point $x < Ce$, on a $f[\varphi(x)] = 0$. Il s'en suit

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx = \int_e 1 \cdot \varphi'(x)\,dx + \int_{Ce} 0 \cdot \varphi'(x)\,dx = \int_e \varphi'(x)\,dx = \text{var}\, \varphi(x).$$

On a donc

$$\text{mes}\, \mathcal{E}^* = \pm \underset{e}{\text{var}}\, \varphi(x)$$

Plus précisément

$$\underset{e}{\text{var}}\, \varphi(x) = + \text{mes}\, \mathcal{E}^* \quad \text{quand} \quad A < B, \quad \text{donc} \quad \varphi(a) < \varphi(b)$$

$$\underset{e}{\text{var}}\, \varphi(x) = - \text{mes}\, \mathcal{E}^* \quad \text{quand} \quad B < A, \quad \text{donc} \quad \varphi(b) < \varphi(a) \quad \text{(c. q. f. d.)}.$$

On déduit de ce lemme le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Pour que l'intégrale*

$$\text{L. S.}\int_a^b f[\varphi(x)]\,d\varphi$$

[1] CH. DE LA VALLÉE-POUSSIN, *Cours d'Analyse*, t. 1, 3e édition, pag. 283.

existe, il est nécessaire et suffisant que la fonction f soit sommable entre les limites $A = \varphi(a)$ et $B = \varphi(b)$; on a alors ·

$$\text{L. S.}\int_a^b f[\varphi(x)]d\varphi = \text{L.}\int_A^B f(u)du.$$

Supposons d'abord que l'intégrale $\int_a^b f[\varphi(x)]d\varphi$ existe. Divisons l'axe des y par une échelle de nombres $l_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ croissant de $-\infty$ à $+\infty$ par degrés $< \varepsilon$; soit e_n l'ensemble de tous les points x de l'intervalle (a, b) pour lesquels on a

$$l_{n-1} \leq f[\varphi(x)] < l_n;$$

on a d'après la definition même de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes

$$\text{L. S.}\int_a^b f[\varphi(x)]d\varphi = \lim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \lambda_n \underset{e_n}{\text{vàr}}\, \varphi(x),$$

λ_n étant un nombre compris entre l_{n-1} et l_n et la limite étant prise dans l'hypothèse que toutes les différences $l_n - l_{n-1}$ tendent uniformément vers zéro d'une manière quelconque. Cette limite existe, puisque l'intégrale $\text{L. S.}\int_a^b f[\varphi(x)]d\varphi$ existe per hypothèse.

Soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des valeurs de $\varphi(x)$ sur e_n et $\mathcal{E}^*_n$ la partie de $\mathcal{E}_n$ comprise entre les points $A = \varphi(a)$ et $B = \varphi(b)$. Chacun des ensembles e_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ est complet par rapport à la fonction $\varphi(x)$; en effet si l'on avait

$$\varphi(x') = \varphi(x''),$$

x' appartenant à e_n et x'' à son complémentaire par rapport à (a, b), on aurait aussi

$$f[\varphi(x')] = f[\varphi(x'')]$$

donc

$$l_{n-1} \leq f[\varphi(x'')] < l_n,$$

et x'' appartiendrait aussi à e_n, ce qui est impossible puisqu'il doit appartenir à son complémentaire.

Tous les ensembles e_n étant complets par rapport à $\varphi(x)$, le lemme sur la variation s'applique et l'on a

$$\left.\begin{aligned} \operatorname*{var}_{e_n} \varphi(x) &= + \operatorname{mes} \mathcal{E}^*_n \quad \text{quand} \quad A < B \\ \operatorname*{var}_{e_n} \varphi(x) &= - \operatorname{mes} \mathcal{E}^*_n \quad \text{quand} \quad A > B \end{aligned}\right. \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

On a donc

$$\text{L. S.}\int_a^b f[\varphi(x)]d\varphi = \pm \lim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \lambda_n \operatorname{mes} \mathcal{E}^*_n \qquad \begin{pmatrix} B - A > 0 \\ B - A < 0 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, d'après la définition même de $\mathcal{E}^*_n$, on voit que c'est l'ensemble de toutes les valeurs de u entre A et B, pour lesquelles on a

$$l_{n-1} \leq f(u) < l_n;$$

il s'en suit, d'aprés la définition même de l'intégrale de M. LEBESGUE,

$$\pm \lim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \lambda_n \operatorname{mes} \mathcal{E}^*_n = \int_A^B f(u)du;$$

on a donc

$$\text{L. S.}\int_a^b f[\varphi(x)]d\varphi = \text{L.}\int_A^B f(u)du.$$

La premiére partie du théorème est ainsi démontrée.

Réciproquement, si $f(u)$ est sommable dans (A, B), l'intégrale de LEBESGUE entre les limites A et B existe; on a

$$\text{L.}\int_A^B f(u)du = \pm \lim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \lambda_n \operatorname{mes} \mathcal{E}^*_n \quad \begin{pmatrix} + \text{ correspond au cas } B > A \\ - \text{ correspond au cas } B < A \end{pmatrix},$$

où l'on a désigné par $\mathcal{E}^*_n$ l'ensemble des points u entre A et B pour lesquels on a

$$l_{n-1} \leq f(u) < l_n,$$

et par λ_n un point tel que

$$l_{n-1} \leq \lambda_n < l_n.$$

Mais d'après le lemme 1, on a

$$\pm \operatorname{mes} \mathcal{E}^*_n = \operatorname*{var}_{e_n} \varphi(x) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

e_n étant l'ensemble de tous les points x entre a et b pour lesquels on a

$$l_{n-1} \leq f[\varphi(x)] < l_n .$$

Il s'en suit, d'après la définition de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes, que

$$\text{L.}\int_A^B f(u)du = \pm \lim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \lambda_n \operatorname{mes} \mathcal{E}_n^* = \lim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \lambda_n \operatorname*{var}_{e_n} \varphi(x) = \text{L. S.}\int_a^b f[\varphi(x)]d\varphi$$

et l'existence de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes est ainsi établie (c. q. f. d.).

On déduit de ce théorème les corollaires suivants:

Corollaire 1. *Pour que l'intégrale*

$$\text{L. S.}\int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi$$

existe pour tout x, $a \leq x \leq b$, il faut et il suffit que $f(u)$ soit sommable dans l'intervalle (m, M), m étant le minimum et M le maximum de $u = \varphi(x)$ dans (a, b); on a alors

$$\text{L. S.}\int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi = \text{L.}\int_A^u f(u)du$$

où $A = \varphi(a)$ et $u = \varphi(x)$.

En effet, soit a' un point de (a, b) tel que $\varphi(a') = m$ et b' un point de (a, b) tel que $\varphi(b') = M$). Si l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes existe pour *tout* point x, l'intégrale $\int_{a'}^{b'} f[\varphi(x)]d\varphi$ existe nécessairement et d'après le théorème 2 il en suit que $f(u)$ est sommable entre $m = \varphi(a')$ et $M = \varphi(b')$.

Réciproquement, si $f(u)$ est sommable dans (m, M), soit x un point quelconque de (a, b) et $u = \varphi(x)$, u est alors compris dans (m, M), puisque toutes les valeurs de $\varphi(x)$ dans (a, b) appartiennent à (m, M), et d'ailleurs $\text{L.}\int_A^u f(u)du$ existe. Il s'en suit, d'après le théorème 2, que $\int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi$ existe, et x étant quelconque, le corollaire 1 est démontré (l'égalité des valeurs des intégrales de Lebesgue et de Lebesgue-Stieltjes suit aussi du théoreme 2).

COROLLAIRE 2. *Si les extrêmés absolus de $\varphi(x)$ sont aux bornes de l'intervalle (a, b) et si l'intégrale*

$$\text{L. S.}\int_a^b f[\varphi(x)]d\varphi$$

existe, l'intégrale indéfinie

$$\text{L. S.}\int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi$$

existe pour tout x, $a \leq x \leq b$.

En effet, les valeurs M et m du corollaire 1 coincident dans le cas considéré avec $B = \varphi(b)$ et $A = \varphi(a)$. Puisque l'integrale

$$\text{L. S.}\int_a^b f[\varphi(x)]d\varphi$$

existe par hypothèse, il en suit que $f(u)$ est sommable dans (A, B), donc entre le minimum et le maximum de $\varphi(x)$ dans (a, b), ce qui entraîne (corollaire 1) l'existence de l'intégrale indéfinie

$$\text{L. S.}\int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi$$

pour tout point x, $a \leq x \leq b$.

THÉORÈME 3. *Si l'intégrale indéfinie*

$$\text{L. S.}\int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi$$

existe pour tout point x, $a \leq x \leq b$, elle représente une fonction absolument continue de fonction absolument continue. Réciproquement, toute fonction absolument continue de fonction absolument continue est (à une constante additive près) une intégrale indéfinie de Lebesgue-Stieltjes de cette forme.

En effet, d'après le corollaire 1, si cette intégrale indéfinie existe pour tout x, $f(u)$ est sommable dans (m, M) et l'on a

$$\text{L. S.}\int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi = \text{L.}\int_A^u f(u)du = F(u) - F(A) = F[\varphi(x)] - F[\varphi(a)],$$

où l'on a désigné par $F(u)$ l'intégrale indéfinie de $f(u)$ (au sens de M. Lebesgue). Il en suit que $F(u)$ est absolument continue; $\varphi(x)$ étant absolument continue par hypothèse, la première partie du théorème 3 est ainsi démontrée.

Supposons maintenant que $\mathfrak{F}(x)$ soit une fonction de la forme

$$\mathfrak{F}(x) = F[\varphi(x)],$$

$\varphi(x)$ étant absolument continue dans un intervalle (a, b) et $F(u)$ absolument continue dans (m, M), m et M étant respectivement le minimum et le maximum de $\varphi(x)$ dans (a, b).

Soit $A = \varphi(a)$; toute fonction absolument continue étant à une constante additive prés l'intégrale indéfinie de M. Lebesgue d'une fonction sommable, on peut écrire

$$F(u) \equiv F(A) + \mathrm{L.}\int_A^u f(u)du$$

en désignant par $f(u)$ la dérivée de $F(u)$ qui est nécessairement sommable.

Mais nous savons (corollaire 1) que l'existence de l'intégrale indéfinie

$$\mathrm{L.}\int_A^u f(u)du$$

entraîne celle de l'intégrale indéfinie

$$\mathrm{L.\,S.}\int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi$$

et l'égalité des valeurs de ces intégrales. Il en suit que l'on a

$$\mathfrak{F}(x) = F[\varphi(x)] = F(u) = F[\varphi(a)] + \int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi$$

et le théorème 3 est ainsi complètement démontré. (c. q. f. d.).

On voit donc que la classe des intégrales indéfinies de Lebesgue-Stieltjes de la forme $\int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi$ coïncide avec celle des fonctions absolument continues de fonctions absolument continues, de même que la classe des intégrales indéfinies de M. Lebesgue coïncide avec celle des fonctions absolument continues.

On peut poursuivre cette analogie en considérant les dérivées des intégrales étudiées. On sait que l'intégrale indéfinie de M. LEBESGUE a toujours une dérivée, presque partout déterminée, finie et égale à la fonction intégrée. Nous avons remarqué au § 1 que dans l'étude des intégrales de LEBESGUE-STIELTJES on peut considérer comme « ensembles de mesure nulle » les ensembles où l'on a presque partout

$$\varphi'(x) = 0.$$

Il est donc naturel de se poser la question si la dérivée de l'intégrale indéfinie

$$\mathfrak{J}(x) = \text{L. S.}\int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi$$

existe presque en tous les points où l'on a

$$\varphi'(x) \neq 0.$$

Il est aisé de voir que la réponse est affirmative. On a le théorème:

THÉORÈME 4. *L'intégrale indéfinie (supposée existante pour tout x $a \leq x \leq b$)*

$$\mathfrak{J}(x) = \text{L. S.}\int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi$$

a une dérivée $\mathfrak{J}'(x)$ déterminée et finie presque en tous les points x de l'ensemble R où la dérivée $\varphi'(x)$ existe et l'on a

$$\varphi'(x) \neq 0,$$

et cette dérivée vérifie l'égalité

$$\mathfrak{J}'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

En effet, d'aprés le théorème 3, on a

$$\mathfrak{J}(x) = F[\varphi(x)] - F[\varphi(a)].$$

D'aprés la régle de différentiation d'une fonction de fonction, $\mathfrak{J}'(x)$ est égale à

$$F'(\varphi)\varphi'(x)$$

en tout point où ces deux dérivées sont déterminées et finies.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les points u tels que $F'(u)$ n'existe pas on n'est pas égale à $f(u)$. On a évidemment

$$\text{mes}\, \mathcal{E} = 0$$

Soit E l'ensemble de tous les points x, tels que les valeurs de $\varphi(x)$ en ces points appartiennent à $\mathcal{E}$. Nous allons démontrer que la partie commune des ensembles R et E est un ensemble de mesure nulle. En effet, $\varphi(x)$ étant absolument continue et la mesure de l'ensemble $\mathcal{E}$ de ses valeurs sur E étant nulle, on a d'aprés un théorème de M. Ch. de la Vallée-Poussin ([1]) le résultat suivant: on bien mes $E = 0$, on bien la dérivée $\varphi'(x)$ est nulle presque en tous les points de E. Dans les deux cas, l'ensemble des points de E où la dèrivée $\varphi'(x)$ existe et n'est pas nulle est un ensemble de mesure nulle. Il en suit que la partie commune de E et de R est un ensemble de mesure nulle.

Soit x un point de R n'appartenant pas à E; $\varphi'(x)$ est déterminée et finie et $u = \varphi(x)$ n'appartient pas à $\mathcal{E}$, donc $F'(u) = f(u) = f[\varphi(x)]$; on a donc

$$\mathfrak{F}'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

cette égalité a donc lieu presque en tous les points de R. (c. q. f. d.).

On voit donc que si l'intégrale indéfinie de Lebesgue-Stieltjes de la forme $\int_a^x f[\varphi(x)]d\varphi$ existe pour tout point x, elle a une dérivée partout sauf sur un ensemble où la dérivée $\varphi'(x)$ est presque partout nulle, donc partout en dehors d'un ensemble qui est négligeable dans l'étude de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes. D'ailleurs cette dérivée est égale à la fonction intégrée multipliée par $\varphi'(x)$. Le multiplicateur $\varphi'(x)$ est remplacé par l'unité pour les intégrales de M. Lebesgue, ce qui est naturel car nous avons vu (§ 1) que l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes se réduit à celle de M. Lebesgue quand on pose $\varphi(x) = x$, donc $\varphi'(x) = 1$.

§ 7. **Propriété caractéristique des fonctions absolument continues de fonctions absolument continues.** — $\mathfrak{F}(x)$ étant une fonction continue, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit une intégrale de Lebesgue-Stieltjes de la forme $\int_a^x f[\varphi(x)d\varphi$, ou, ce qui est le même, pour

([1]) Ch. de la Vallée-Poussin, *Cours d'Analyse*, t. I, 3e édition, pag. 281-283.

qu'elle soit une fonction absolument continue de fonction absolument continue ?

Pour répondre à cette question, nous avons besoin de quelques lemmes préliminaires.

LEMME 2. *Soit $\mathfrak{F}(x)$ une fonction continue, E un ensemble de points, tel que $|\mathfrak{F}'(x)| < M$ sur E (M constante) et $\mathcal{E}$ l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur E. On a*

$$\operatorname{mes} \mathcal{E} \leq 2M \operatorname{mes} E.$$

Soit ξ un point de E et η un nombre positif aussi petit qu'on veut. Soit δ un intervalle contenant ξ ; pourvu que δ soit assez petit, on a pour tout point x de δ

$$\left| \frac{\mathfrak{F}(x) - \mathfrak{F}(\xi)}{x - \xi} \right| < M + \eta ;$$

$\mathfrak{F}(x)$ étant continue et ω_δ l'oscillation de $\mathfrak{F}(x)$ sur δ, on a

$$\omega_\delta = \mathfrak{F}(x'') - \mathfrak{F}(x')$$

x'' et x' étant deux points de δ ; on a donc

$$\left| \frac{\mathfrak{F}(x'') - \mathfrak{F}(\xi)}{x'' - \xi} \right| < M + \eta ; \quad \left| \frac{\mathfrak{F}(x') - \mathfrak{F}(\xi)}{x' - \xi} \right| < M + \eta .$$

Il en suit

$$\omega_\delta \leq |\mathfrak{F}(x'') - \mathfrak{F}(\xi)| + |\mathfrak{F}(\xi) - \mathfrak{F}(x')| < (M + \eta)\,|x'' - \xi| + (M + \eta)\,|x' - \xi|$$

mais puisque x' et x'' appartiennent à δ ainsi que le point ξ, on a

$$\omega_\delta < 2(M + \eta)\delta.$$

Soit E_n l'ensemble de tous les point ξ tels que l'inégalité précédente est vérifiée pour tout intervalle δ contenant ξ et de longueur $\leq \frac{1}{n}$ et $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur E_n. Supposons que le lemme soit démontré pour l'ensemble E_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) et démontrons qu'il l'est alors pour l'ensemble E.

En effet, E est la somme des E_n ; donc $\mathcal{E}$ la somme des $\mathcal{E}_n$. D'ailleurs on a

$$\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_n \subset \ldots .$$

On peut donc, quelque petit que soit σ, choisir l'entier n assez grand pour que l'on ait

$$\operatorname{mes} \mathcal{E} - \operatorname{mes} \mathcal{E}_n < \sigma.$$

En supposant que le lemme soit déja démontré pour l'ensemble E_n, on a

$$\operatorname{mes} \mathcal{E} - \sigma < \operatorname{mes} \mathcal{E}_n \leq 2M \operatorname{mes} E_n \leq 2M \operatorname{mes} E$$

et σ étant aussi petit qu'on vent, il en suit

$$\operatorname{mes} \mathcal{E} \leq 2M \operatorname{mes} E.$$

Il suffit donc de démontrer le lemme pour l'ensemble E_n.

Enfermons l'ensemble E_n en une infinité dénombrable d'intervalles sans points communs deux à deux

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots.$$

tels qu'on ait

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \operatorname{mes} E_n + \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ étant aussi petit qu'on veut. Il est évident qu'on peut toujours supposer que chacun des intervalles δ_n est de longueur $\leq \frac{1}{n}$ et qu'il contient nécessairement au moins un point ξ de E_n.

En désignant par ω_k l'oscillation de $\mathcal{F}(x)$ sur l'intervalle δ_k, on a donc l'inégalité

$$\omega_k < 2(M + \eta)\delta_k.$$

Il en suit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k < 2(M + \eta) \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < 2(M + \eta)(\operatorname{mes} E_n + \varepsilon).$$

Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des valeurs de $\mathcal{F}(x)$ sur E_n est contenu dans un système d'intervalles dont la longueur totale est inférieure à $2(M + \eta)(\operatorname{mes} E_n + \varepsilon)$ et puisque ε et η sont aussi petits qu'on veut, on a

$$\operatorname{mes} \mathcal{E}_n \leq 2M \operatorname{mes} E_n. \qquad \text{(c. q. f. d.).}$$

Corollaire 1. *$\mathcal{F}(x)$ étant une fonction continue dont la dérivée $\mathcal{F}'(x)$ est déterminée et finie sur un ensemble E de mesure nulle, l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de $\mathcal{F}(x)$ sur E est un ensemble de mesure nulle.*

En effet, on peut écrire

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n,$$

E_n étant la partie de E où la dérivée $\mathfrak{F}'(x)$ vérifie l'inégalité

$$|\mathfrak{F}'(x)| < n. \qquad (n = 1, 2, 3, ...).$$

Chacun des ensembles E_n est de mesure nulle. Soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur E_n. En appliquant le lemme 2, on a

$$\text{mes}\, \mathcal{E}_n \leq 2n \,\text{mes}\, E_n = 0. \qquad (n = 1, 2, 3, ...).$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur E étant contenu dans la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$ est donc aussi un esemble de mesure nulle. (c. q. f. d.).

COROLLAIRE 2. *$\mathfrak{F}(x)$ étant une fonction continue dont la dérivée $\mathfrak{F}'(x) = 0$ sur un ensemble E, l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur E est un ensemble de mesure nulle.*

On applique le lemme 2 en tenant compte du fait que M est maintenant aussi petit qu'on veut. La mesure de $\mathcal{E}$ étant aussi petite qu'on veut est nécessairement nulle. (c. q. f. d.).

Definition. Nous dirons avec M. LUSIN ([1]) qu'une fonction continue $\mathfrak{F}(x)$ *jouit de la propriété N* dans un intervalle (a, b) si l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur chaque ensemble de mesure nulle situé dans (a, b) (et d'ailleurs absolument quelconque) est nécessairement un ensemble de mesure nulle.

LEMME 3. *Soit $\varphi(x)$ une fonction continue jouissant de la propriété N et ayant presque partout une dérivée $\varphi'(x)$ qui est une fonction sommable. La fonction $\varphi(x)$ est alors absolument continue.*

Cette proposition a été démontrée par M. MENCHOFF dans un autre recueil ([2]), c'est pourquoi nous omettons ici sa démonstration.

LEMME 4. *Soit $u = \psi(y)$ une fonction absolument continue toujours croissante (ou toujours décroissante) et telle que $\psi'(y) \neq 0$ presque partout; la fonction inverse $y = F(u)$ est alors absolument continue.*

([1]) N. LUSIN, *L'intégrale et la série trigonométrique* (en russe), Moscou, 1915, pag. 109.

([2]) D. MENCHOFF, *Sur la représentation conforme des domaines plans*, Mathematische Annalen, Band 95, Heft 5, pag. 645.

Soit e un ensemble de points situé sur l'axe des y, mes $e > 0$. Supposons que la relation $u = \psi(y)$ lui fasse correspondre un ensemble e' de l'axe des u tel que mes $e' = 0$. Puisque $\psi(y)$ est absolument continue par hypothèse il en suit ([1]) que $\psi'(y) = 0$ presque partout sur e, ce qui contredit à la condition du lemme. Il correspond donc à chaque ensemble e situé sur l'axe des y et de mesure positive un ensemble e' de l'axe des u, dont la mesure est encore positive. En particulier, il correspond à deux points y_1 et y_2, $y_1 \neq y_2$ deux points u_1 et u_2, $u_1 \neq u_2$. La fonction inverse $y = F(u)$ est donc définie d'une manière univoque. Elle est continue et croissante (décroissante) puisqu'il en est ainsi pour $\psi(y)$. Elle a donc presque partout une dérivée et cette dérivée est sommable. Il suffit donc (en vertu du lemme 3) de démontrer qu'elle jouit de la propriété N. Mais cela est évident. En effet, soit e' un ensemble de mesure nulle de l'axe des u. L'ensemble e des valeurs de $y = F(u)$ sur e' est nécessairement de mesure nulle, car si l'on avait mes $e > 0$, on aurait aussi mes $e' > 0$, comme nous avons vu au commencement de la démonstration. (c. q. f. d.).

Lemme 5. *Soit $\varphi(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b). Supposons que sa dérivée $\varphi'(x)$ vérifie l'inégalité $|\varphi'(x)| < M$ (M constante absolue) sur un ensemble $\mathfrak{M}$ et que l'ensemble $\mathfrak{N}$ des valeurs de $\varphi(x)$ sur le complémentaire $C\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{M}$ est un ensemble de mesure nulle. Dans ces conditions, $\varphi(x)$ est absolument continue dans (a, b).*

En effet, soit x_1 et x_2 deux points quelconques de (a, b); soit $x_1 < x_2$. Considérons l'intervalle

$$\delta = (x_1, x_2).$$

L'ensemble des valeurs de $\varphi(x)$ sur δ est la somme de l'ensemble des valeurs de $\varphi(x)$ sur la partie $\mathfrak{M}_\delta$ de $\mathfrak{M}$ appartenant à δ et de l'ensemble des valeurs de $\varphi(x)$ sur la partie $C\mathfrak{M}_\delta$ de $C\mathfrak{M}$ appartenant à δ. La mesure du premier de ces ensembles est (d'après le lemme 2) $\leq 2M$ mes $\mathfrak{M}_\delta$, donc a fortiori $\leq 2M\delta$ et le second, étant une partie de $\mathfrak{N}$, est nécessairement de mesure nulle. On a donc

$$\omega_\delta \leq 2M\delta$$

ω_δ étant l'oscillation de $\varphi(x)$ sur δ. On en conclut

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq 2M\delta = 2M|x_1 - x_2|;$$

([1]) Ch. de la Vallée-Poussin, *Cours d'Analyse*, t. 1, 3e édition, pag. 28.

x_1 et x_2 étant deux points quelconques de (a, b), l'inégalité précédente est donc la condition bien connue de LIPSCHITZ et $\varphi(x)$ vérifiant la condition de LIPSCHITZ est nécessairement absolument continue. (c. q. f. d.).

Ces préliminaires terminés, nous pouvons démontrer le théorème fondamental suivant.

THÉORÈME 5 [1]. *Soit $\mathfrak{F}(x)$ une fonction continue, E l'ensemble de tous les points où la dérivée $\mathfrak{F}'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie et $\mathcal{E}$ l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur E. La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{F}(x)$ soit une fonction absolument continue de fonction absolument continue est que l'on ait mes $\mathcal{E} = 0$.*

1) *La condition est nécessaire.* La fonction $\mathfrak{F}(x)$ étant une fonction absolument continue de fonction absolument continue, on a

$$\mathfrak{F}(x) = F[\varphi(x)]$$

$F(u)$ et $\varphi(x)$ étant des fonctions absolument continues.

Soit e' l'ensemble de tous les points x tels que $\varphi'(x)$ n'existe pas on n'est pas finie et $\mathcal{E}'$ l'ensemble des valeurs de $\varphi(x)$ sur e'. En vertu de la continuité absolue de $\varphi(x)$ on a

$$\text{mes } e' = 0$$

et par conséquent (une fonction absolument continue jouit toujours de la propriété N)

$$\text{mes } \mathcal{E}' = 0.$$

Soit $\mathcal{E}''$ l'ensemble de tous les points u tels que $F'(u)$ n'existe pas ou n'est pas finie; $F(u)$ étant absolument continue, on a

$$\text{mes } \mathcal{E}'' = 0.$$

Soit enfin e'' l'ensemble de tous les points x tels que les valeurs de $\varphi(x)$ dans ces points appartiennent à $\mathcal{E}''$. Il est aisé de voir que l'ensemble E est contenu dans la somme $e' + e''$

$$E \subset e' + e''$$

(on a désigné par E l'ensemble des points où la dérivée $\mathfrak{F}'(x)$ n'existe pas

[1] Nous venons d'apprendre que M. ZARETSKY a obtenu récemment et indépendamment le même résultat; ce résultat n'avait pas encore été publié.

ou n'est pas finie). En effet, soit x_0 un point qui n'appartient pas à $e' + e''$ et $u_0 = \varphi(x_0)$. On a alors, d'après la règle de differentiation d'une fonction de fonction,

$$\mathfrak{F}'(x_0) = F'(u_0)\varphi'(x_0);$$

chacune des dérivées $F'(u_0)$ et $\varphi'(x_0)$ étant déterminée et finie, $\mathfrak{F}'(x_0)$ l'est aussi, donc x_0 n'appartient pas à E.

Il en suit que l'ensemblo $\mathcal{E}$ des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur E est contenu dans l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur $e' + e''$ et nous allons voir que cet ensemble est de mesure nulle. En effet, l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur $e' + e''$ coincide avec l'ensemble des valeurs de $F(u)$ sur $\mathcal{E}' + \mathcal{E}''$; mais nous avons vu que $\operatorname{mes} \mathcal{E}' = \operatorname{mes} \mathcal{E}'' = 0$, donc en vertu de la continuité absolue de $F(u)$, l'ensemble de ses valeurs sur $\mathcal{E}' + \mathcal{E}''$ est un ensemble de mesure nulle. (c. q. f. d).

2) *La condition est suffisante.* Supposons que la fonction $\mathfrak{F}(x)$ soit définie dans un intervalle (a, b). Soit μ le minimé et M le maximé de $\mathfrak{F}(x)$ dans (a, b). Si la fonction $\mathfrak{F}(x)$ est une constante, le théorème à démontrer devient trivial. Supposons donc qu'il n'en soit pas ainsi et, par conséquent, $\mu < M$.

En désignant par E l'ensemble de tous les points de (a, b) où la dérivée $\mathfrak{F}'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie et par $\mathcal{E}$ l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur E, on a par hypothèse,

$$\operatorname{mes} \mathcal{E} = 0.$$

Soit e l'ensemble de tous les points où l'on a $\mathfrak{F}'(x) = 0$. L'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur e est un ensemble e'; d'après le corollaire 2 du lemme 2 on a $\operatorname{mes} e' = 0$. Soit $\mathcal{E}' = \mathcal{E} + e'$. On a alors $\operatorname{mes} \mathcal{E}' = 0$, puisque $\operatorname{mes} \mathcal{E} = 0$ par hypothèse.

Soit y_0 un point fixe n'appartenant pas à $\mathcal{E}'$, $\mu \leq y_0 \leq M$. Pour tous les points x, tels que $\mathfrak{F}(x) = y_0$ la dérivée $\mathfrak{F}'(x)$ existe, est finie et diffère de zéro. La droite $y = y_0$ coupe la courbe $y = \mathfrak{F}(x)$ en un nombre *fini* de points. En effet, s'il y en avait une infinité, ils auraient au moins un point limite d'abscisse x_0 (d'après le principe de Bolzano-Weierstrass). En ce point x_0 la dérivée $\mathfrak{F}'(x_0)$ serait indéterminée ou nulle, ce qui est impossible puisque y_0 n'appartient pas à $\mathcal{E}'$, donc x_0 n'appartient ni à E ni à e. Il correspond donc à chaque point y n'appartenant pas à $\mathcal{E}'$ un nombre fini de points x, tels que $\mathfrak{F}(x) = y$.

Définissons une fonction $B(y)$ pour tous les points y n'appartenant pas à $\mathcal{E}'$ par la condition

$$B(y) = \max |\mathcal{F}'(x)|$$

pour tous les x tel que $\mathcal{F}(x) = y$.

La fonction $B(y)$ est ainsi définie presque partout dans (μ, M); elle est finie et essentiellement positive partout où elle existe, donc presque partout dans (μ, M) et il est aisé de voir qu'elle est mesurable.

Posons

$$A(y) = \frac{1}{B(y)} \quad \text{si} \quad B(y) \geq 1$$

$$A(y) = 1 \quad \text{si} \quad B(y) < 1.$$

La fonction $A(y)$ est ainsi définie presque partout sur (μ, M), elle est mesurable, finie et essentiellement positive partout où elle existe, donc presque partout (puisqu'il en est ainsi pour $B(y)$); enfin elle est bornée, car il suit de sa définition même qu'on a

$$0 < A(y) \leq 1 \qquad \mu \leq y \leq M.$$

Il en suit qu'elle est sommable dans (μ, M). Posons

$$u = \psi(y) = \int_{\mu}^{y} A(y)dy$$

et

$$\varphi(x) = \psi(y) = \psi[\mathcal{F}(x)].$$

Nous allons démontrer que la fonction $\varphi(x)$ est absolument continue.

Soit R' l'ensemble de tous les points y tels que la dérivée $\psi'(y)$ n'existe pas, n'est pas finie ou ne vérifie pas l'égalitè

$$\psi'(y) = A(y).$$

On a alors

$$\text{mes}\, R' = 0.$$

Soit R l'ensemble de tous les points x tels que les valeurs de $\mathcal{F}(x)$ dans ces points appartiennent à R'.

Considérons un point x_0 qui n'appartient ni à R ni à E. Nous allons démontrer que la dérivée $\varphi'(x_0)$ existe et est inférieure à 1 en valeur absolue.

En effet, x_0 n'appartenant ni à E ni à R, $\mathfrak{F}'(x_0)$ existe, $\psi'(y_0)$ existe aussi est elle est égale à $A(y_0)$, on a donc

$$\varphi'(x_0) = A(y_0)\mathfrak{F}'(x_0) = \frac{\mathfrak{F}'(x_0)}{B(y_0)} \quad \text{quand} \quad B(y_0) \geq 1$$
$$= \mathfrak{F}'(x_0) \quad \text{quand} \quad B(y_0) < 1$$

Mais $B(y_0)$ et le maximum des valeurs absolue de $|\mathfrak{F}'(x)|$ pour tous les points x, tels que $y_0 = \mathfrak{F}(x)$. Il en suit

$$B(y_0) \geq |\mathfrak{F}'(x_0)|$$

et l'on a donc dans les deux cas $[B(y_0) \geq 1$ et $B(y_0) < 1]$

$$|\varphi'(x_0)| \leq 1.$$

On déduit de cette inégalité la continuité absolue de $\varphi(x)$ de la manière suivante.

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des points de l'intervalle (a, b) n'appartenant ni à E ni à R. L'ensemble des valeurs de $\varphi(x)$ sur le complémentaire $C\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{M}$ coïncide avec l'ensemble des valeurs de $\psi(y)$ sur la somme $\mathcal{E} + R'$, et puisque $\text{mes}\,\mathcal{E} = \text{mes}\,R' = 0$ et $\psi(y)$ est absolument continue, cet ensemble est de mesure nulle. On applique alors le lemme 5 et l'on voit que $\varphi(x)$ est une fonction absolument continue (et d'ailleurs à nombres dérivés bornés).

Mais on a

$$\varphi(x) = \psi[\mathfrak{F}(x)].$$

La fonction $u = \psi(y)$ est absolument continue; on a

$$\psi'(y) = A(y) > 0$$

presque partout; $\psi(y)$ est donc croissante. Toutes les conditions du lemme 4 étant vérifiées, on en conclut que la fonction inverse

$$y = F(u)$$

est une fonction *absolument continue* et croissante. On a ainsi

$$y = \mathfrak{F}(x) = F(u) = F[\varphi(x)]$$

et la fonction $\mathfrak{F}(x)$ est une fonction absolument continue de fonction absolument continue. (c. q. f. d.).

Remarque. Il suit de la démonstration du théorème que toute fonction absolument continue de fonction absolument continue peut être présentée dans la forme

$$\mathfrak{F}(x) = F[\varphi(x)]$$

F et φ étant absolument continues et d'ailleurs F croissante et φ à nombres dérivés bornés.

§ 8. **Autres propriétés caractéristiques des fonctions absolument continues de fonctions absolument continues.** — On peut indiquer encore deux propriétés caractéristiques de ces fonctions.

Nous dirons avec M. BANACH (1) qu'une fonction continue $\mathfrak{F}(x)$ *jouit de la propriété* (T_1), si l'ensemble des valeurs que la fonction $\mathfrak{F}(x)$ prend une infinité de fois est de mesure nulle.

On peut démontrer que *pour qu'une fonction continue* $\mathfrak{F}(x)$ *soit une fonction absolument continue de fonction absolument continue il faut et il suffit qu'elle jouisse des propriétés* (N) *et* (T_1).

Nous omettons la démonstration qui est donnée d'ailleurs par M.lle N. BARY dans un autre recueil (2).

Enfin, M. BANACH a démontré (3) que l'ensemble des propriétés (N) et (T_1) est équivalent à la condition (S). On dit avec M. BANACH (4) qu'une fonction continue $\mathfrak{F}(x)$ *satisfait à la condition* (S) lorsqu'à chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\eta > 0$ de manière que l'inégalité $\text{mes}_e E < \eta$ entraîne $\text{mes}_e E_y < \varepsilon$, en désignant par E_y l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur E et par mes_e la mesure extérieure. On peut donc énoncer une troisième propriété caractéristique de la classe étudiée :

Pour qu'une fonction continue $\mathfrak{F}(x)$ *soit une fonction absolument continue de fonction absolument continue, il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition* (S).

§ 9. **La classe des fonctions absolument continues de fonctions absolument continues.** — La condition nécessaire et suffisante démontrée au § 7 nous permet d'apprécier la grandeur de la classe des fonctions absolument con-

(1) S. BANACH, *Sur une classe de fonctions continues*, Fundam. Math., t. 8, 1926, pag. 166-172.

(2) N. BARY, *Sur la représentation analytique d'une classe de fonctions continues.* Comptes Rendus, t. 183, pag, 469.

(3) Loc. cit.

(4) Loc. cit.

tinues de fonctions absolument continues. On déduit du théorème 5 les corollaires suivants:

Corollaire 1. *Toute fonction continue $\mathfrak{F}(x)$ qui jouit de la propriété N et dont la dérivée $\mathfrak{F}'(x)$ est presque partout déterminée et finie est une fonction absolument continue de fonction absolument continue.*

En effet, d'après l'hypothèse faite sur $\mathfrak{F}(x)$, l'ensemble E des points x où la dérivée $\mathfrak{F}'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie est un ensemble de mesure nulle. Mais puisque $\mathfrak{F}(x)$ jouit de la propriété N, l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur E est aussi un ensemble de mesure nulle. Il suit donc du théorème précédemment démontré que $\mathfrak{F}(x)$ est une fonction absolument continue de fonction absolument continue. (c. q. f. d.).

Corollaire 2. *L'intégrale indéfinie de M. Denjoy est une fonction absolument continue de fonction absolument continue.*

En effet, l'intégrale indéfinie de M. Denjoy a presque partout une dérivée déterminée et finie. Elle jouit d'ailleurs de la propriété N (1). Le corollaire 2 suit donc immédiatement du corollaire 1. (c. q. f. d.).

Nous avons vu (§ 6) que l'intégrale indéfinie de Lebesgue-Stieltjes de la forme $\int f(\varphi)d\varphi$ est une fonction absolument continue de fonction absolument continue et inversement, toute fonction absolument continue de fonction absolument continue est une intégrale de Lebesgue-Stieltjes de la forme $\int f(\varphi)d\varphi$. Le théorème 5 (et ceux du § 8) nous font maintenant connaître complètement la structure de cette intégrale et le corollaire 2 nous montre que la classe des intégrales indéfinies de M. Denjoy est contenue dans celle des intégrales de Lebesgue-Stieltjes de la forme $\int f(\varphi)d\varphi$.

Mais il n'en est ainsi que pour les intégrales de M. Denjoy au sens strict (2): quant à celles de M. M. Denjoy-Khintchine (3), nous allons voir bientôt qu'il existe parmi ces intégrales des fonctions qui ne sont pas des fonctions absolument continues de fonctions absolument continues.

(1) N. Lusin, *L'integrale et la série trigonométrique*, pag. 116 et 118.

(2) A. Denjoy, Comptes Rendus, t. 154, pag. 859 et 1075.

(3) A. Denjoy, *Annales de l'École Normale supérieure*, vol. 33, pag. 127 et vol. 34, pag. 181; A. Khintchine, Comptes Rendus, t, 162, pag. 287.

L'intégrale de M. Denjoy (au sens strict) a presque partout une dérivée déterminée et finie. Mais *il existe, quelque petit que soit* ε, *des fonctions absolument continues de fonctions absolument continues qui n'ont pas de dérivée sur un ensemble de mesure* $1 - \varepsilon$.

Pour construire une telle fonction, considérons l'intervalle $(0, 1)$; enlevons de cet intervalle un intervalle concentrique de longueur $\frac{\varepsilon}{2}$, puis de chacun des segments restés un intervalle concentrique de longueur $\frac{\varepsilon}{2\cdot 4}$, à la k-ième opération enlevons des 2^{k-1} segments restés des intervalles concentriques de longueur $\frac{\varepsilon}{2\cdot 4^{k-1}}$ et ainsi de suite infiniment. Soit $\delta_1^{(k)}$, $\delta_2^{(k)}, \dots \delta_{2^{k-1}}^{(k)}$ les intervalles enlevés à la k-ième opération; $c_1^{(k)}$, $c_2^{(k)}, \dots c_{2^{k-1}}^{(k)}$ leurs centres et $\rho_1^{(k)}$, $\rho_2^{(k)}, \dots \rho_{2^k}^{(k)}$ les segments restés. On a (¹)

$$\sum_{i=1}^{2^k} \rho_i^{(k)} = 1 - \sum_{s=1}^{k} \sum_{i=1}^{2^{s-1}} \delta_i^{(s)} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{s=1}^{k} \sum_{i=1}^{2^{s-1}} \frac{1}{4^{s-1}} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{s-1}^{k} \frac{2^{s-1}}{4^{s-1}} =$$

$$= 1 - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 1 - \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)$$

donc

$$\rho_i^{(k)} = \frac{1 - \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)}{2^k} \qquad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots 2^k \\ k = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right).$$

L'ensemble parfait P qu'on obtient en enlevant de $(0, 1)$ tous ces $\delta_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \dots 2^{k-1}, k = 1, 2, \dots)$ est un ensemble de mesure $1 - \varepsilon$. Soit $\mathfrak{F}(x)$ une fonction définie par les conditions

$$\mathfrak{F}(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \subset P$$

$$\mathfrak{F}(x) = 2^{3k} \left(x - a_i^{(k)}\right)\left(b_i^{(k)} - x\right) \quad \text{sur} \quad \delta_i^{(k)} = \left(a_i^{(k)}, b_i^{(k)}\right) \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots 2^{k-1} \\ k = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right).$$

Il en suit que

$$\mathfrak{F}\left(c_i^{(k)}\right) = 2^{3k} \frac{\delta_i^{(k)}}{2} \frac{\delta_i^{(k)}}{2} = 2^{3k} \frac{\varepsilon}{4^k} \frac{\varepsilon}{4^k} = 2^{3k} \frac{\varepsilon^2}{4^{2k}} = \frac{\varepsilon^2}{2^k}$$

(¹) En désignant par une même lettre un intervalle et sa longueur.

$\mathfrak{F}(x)$ est une fonction continue; elle a une dérivée déterminée et finie pour tout point x qui est intérieur à l'un des intervalles contigus de l'ensemble parfait P. Nous allons démontrer qu'elle n'a pas de dérivée pour tout point x de l'ensemble P.

On a

$$\frac{\mathfrak{F}(x+h)-\mathfrak{F}(x)}{h}=\frac{\mathfrak{F}(x+h)}{h} \quad \text{pour} \quad x \subset P.$$

Si le point $x+h$ tend vers le point x en restant toujours sur P, on a

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathfrak{F}(x+h)}{h}=0.$$

Mais le point $x+h$ peut tendre vers le point x en restant toujours dans un intervalle contigu à P. Le point x étant un point de P appartient à une infinité de segments $\rho_i^{(k)}(i=1, 2,\dots 2^k;\ k=1, 2, 3,\dots)$. Faisons parcourir à h une suite de valeurs h_k $(k=1, 2, 3,\dots)$ qu'on choisit de telle manière que $x+h_k$ soit égal à $c_j^{(k)}$, c'est à dire $x+h_k$ soit le centre d'un intervalle $\delta_j^{(k)}$. En choisissant convenablement l'indice j, on peut toujours supposer que l'intervalle $\delta_j^{(k)}$ ait une extrémité commune avec le segment $\rho_i^{(k)}$ qui contient le point x. Il est évident que h_k tend vers zéro, car on a

$$|h_k|\leq \frac{1}{2}\delta_i^{(k)}+\rho_i^{(k)}=\frac{\varepsilon}{4^k}+\frac{1-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2^k}}{2^k}.$$

Mais

$$\frac{\mathfrak{F}(x+h_k)}{h_k}=\frac{\mathfrak{F}(c_i^{(k)})}{h_k}=\frac{\varepsilon^2}{2^k h_k}\geq\frac{\varepsilon^2}{2^k\left(\frac{\varepsilon}{4^k}+\frac{1-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2^k}}{2^k}\right)}=\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2^{k-1}}}\geq\varepsilon^2.$$

On a donc

$$\overline{\lim_{k\to 0}}\frac{\mathfrak{F}(x+h_k)}{h_k}\geq\varepsilon^2.$$

Puisque ε est fixe, cette $\overline{\lim}$ n'est pas nulle, et comme on a

$$\lim_{k\to 0}\frac{\mathfrak{F}(x+h)}{h}=0$$

quand $x+h\subset P$ il en suit que la dérivée $\mathfrak{F}'(x)$ n'existe pas pour tout point x appartenant à P.

Mais l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur P contient un seul point, puisque $\mathfrak{F}(x) = 0$ sur P; il suit donc du théorème 5 que $\mathfrak{F}(x)$ est une fonction absolument continue de fonction absolument continue, et pourtant elle n'a pas de dérivée sur un ensemble de mesure $1 - \varepsilon$ (1). (c. q. f. d.).

On pourrait construire une fonction absolument continue de fonction absolument continue qui n'a même pas de dérivée asymptotiqne sur un ensemble de mesure $1 - \varepsilon$; nous omettons la construction d'un tel exemple.

Nous avons vu qu'une fonction absolument continue de fonction absolument continue peut ne pas avoir de dérivée sur un ensemble dont la mesure est $1 - \varepsilon$, ε étant aussi petit qu'on veut. Mais la dérivée existe nécessairement sur un ensemble de mesure positive, ce qui est encore un corollaire du théorème 5.

COROLLAIRE 3 (2). *Une fonction absolument continue de fonction absolument continue a nécessairement une dérivée déterminée et finie sur un ensemble de mesure positive.*

En effet, soit $\mathfrak{F}(x)$ une telle fonction. Supposons que la dérivée $\mathfrak{F}'(x)$ n'est déterminée et finie que sur un ensemble e de mesure nulle. L'ensemble e' des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur e est aussi de mesure nulle puisque $\mathfrak{F}(x)$ jouit de la propriété N. Le complémentaire de e par rapport à l'intervalle (a, b) où la fonction $\mathfrak{F}(x)$ est définie est l'ensemble E des point où $\mathfrak{F}(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie. L'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur E est de mesure nulle en vertu du théorème 5. Les valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur l'intervalle (a, b) appartiennent donc à l'ensemble $e' + \mathcal{E}$, et l'on a $\text{mes}(e' + \mathcal{E}) = 0$. $\mathfrak{F}(x)$ étant continue et l'ensemble de ses valeurs sur (a, b) de mesure nulle, elle est nécessairement constante. Mais dans ce cas la dérivée $\mathfrak{F}(x)$ existe partout, ce qui contredit à l'hypothèse faite au commencement de la démonstration. On voit

---

(1) M. RUZIEWICZ, (*Remarque à la Note de M. Banach « Sur une classe de fonctions continues »*, Fundam. Math., t. 8, 1927, pag. 173), a construit une fonction qui jouit la propriété (S) mais n'a pas de dérivée sur un ensemble de mesure positive. Puisque nous savons (§ 8) que toute fonction vérifiant la condition (S) est une fonction absolument continue de fonction absolument continue (et réciproquement) il en suit que l'exemple de M. RUZIEWICZ prouve aussi l'existence des fonctions absolument continues de fonctions absolument continues n'ayant pas de dérivée sur un ensemble de mesure positive.

(2) On pourrait déduire ce théorème d'un résultat de M. BANACH: toute fonction jouissant de la propriété (N) a une dérivée déterminée et finie sur un ensemble de mesure positive (S. BANACH, *Sur une classe de fonctions continues*, Fundam. Math., t. 8, 1926, pag. 169).

ainsi que l'ensemble des points ou la dérivée $\mathfrak{F}'(x)$ est déterminée et finie est nécessairement de mesure positive. (c. q. f. d.).

Corollaire 4. *Une fonction absolument continue de fonction absolument continue dont la dérivée est nulle presque partout où elle existe se réduit à une constante.*

En effet, soit $\mathfrak{F}(x)$ cette fonction. Supposons qu'elle soit définie dans un intervalle (a, b) et soit, par impossible, E l'ensemble des points où la dérivée $\mathfrak{F}'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie. L'ensemble $\mathfrak{E}$ des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur E est de mesure nulle (théorème 5); presque partout sur CE on a par hypothèse $\mathfrak{F}'(x) = 0$; donc l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur CE est aussi de mesure nulle en vertu du corollaire 2 du lemme 2 (§ 7). L'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur (a, b) est donc de mesure nulle et $\mathfrak{F}(x)$ se réduit à une constante (l'ensemble E est vide). (c. q. f. d.).

Il serait pourtant *impossible* de déduire le corollaire suivant: deux fonctions $\mathfrak{F}_1(x)$ et $\mathfrak{F}_2(x)$ dont chacune est une fonction absolument continue de fonctions absolument continue et telles que les dérivées $\mathfrak{F}_1'(x)$ et $\mathfrak{F}_2'(x)$ coïncident presque partout où elle existent ne diffèrent que par une constante. Une telle conclusion serait fausse, car la différence des fonctions $\mathfrak{F}_1(x)$ et $\mathfrak{F}_2(x)$ n'est pas en général une fonction absolument continue de fonction absolument continue. Il est aisé de voir *qu'il existe des fonctions absolument continues de fonctions absolument continues telles que la somme d'une telle fonction et de la variable indépendante x n'est plus une fonction absolument continue de fonction absolument continue.*

Pour le voir, reprenons l'ensemble parfait P de mesure $1 - \varepsilon$ que nous avons construit et la fonction $\mathfrak{F}(x)$ qui n'a pas de dérivée sur P. La fonction

$$\mathfrak{F}_1(x) = \mathfrak{F}(x) + x$$

n'est pas une fonction absolument continue de fonction absolument continue. En effet, en tout point de P, la dérivée $\mathfrak{F}'(x)$ n'existe pas, celle de x existe, donc celle de $\mathfrak{F}_1(x)$ n'existe pas non plus. Mais

$$\mathfrak{F}_1(x) = x$$

en tout point de P, donc l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}_1(x)$ sur P est un ensemble identique à P et sa mesure est égale à $1 - \varepsilon$. Il en suit que $\mathfrak{F}_1(x)$ n'est pas une fonction absolument continue de fonction absolument continue. (c. q. f. d.).

Il est aisé de voir d'ailleurs que $\mathfrak{F}_1(x)$ est une intégrale indéfinie de M. M. DENJOY-KHINTCHINE. C'est ce qu'on déduit immédiatement en remarquant qu'elle est absolument continue dans chaque intervalle contigu à P, qu'elle est égale à x en tout point de P et enfin que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\mathfrak{F}_1(b_n) - \mathfrak{F}_1(a_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$$

[$\delta_n = (a_n, b_n)$ étant un intervalle contigu à P] est convergente. Cet exemple nous montre donc *qu'il existe des intégrales indéfinies de M. M. Denjoy-Khintchine qui ne sont pas des fonctions absolument continues de fonctions absolument continues.*

Nous avons vu que la classe des fonctions absolument continues de fonctions absolument continues contient des fonctions qui n'ont pas de dérivée sur un ensemble de mesure $1 - \varepsilon$. Cette classe est donc beaucoup plus vaste que celle des fonctions absolument continues elles mêmes. Il est naturel de se poser la question s'il est possible d'obtenir une classe encore plus vaste en considérant les fonctions absolument continues des fonctions de la classe étudiée. La réponse est négative en vertu du théorème suivant.

COROLLAIRE 5. *Toute fonction de la forme*

$$\mathfrak{F}(x) = \psi\{f[\varphi(x)]\}$$

ψ, f et φ étant absolument continues peut être présentée dans la forme

$$\mathfrak{F}(x) = F[\Phi(x)]$$

les deux fonctions F et Φ étant encore absolument continues.

En effet, posons

$$y = \mathfrak{F}_1(x) = f[\varphi(x)].$$

Soit E_1 l'ensemble des points x où la dérivée $\mathfrak{F}_1'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie, $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}_1(x)$ sur E_1. En vertu du théorème 5, on a mes $\mathcal{E}_1 = 0$. Soit R' l'ensemble de tous les points y, où la dérivée $\psi'(y)$ n'existe pas ou n'est pas finie et R l'ensemble de tous les points x, tels que les valeurs de $\mathfrak{F}_1(x)$ en ces points appartiennent à R'. On a mes $R' = 0$, puisque $\psi(y)$ est absolument continue.

Pour tout point x_0 n'appartenant ni à R ni à E, on a

$$\mathfrak{F}'(x_0) = \psi'(y_0)\mathfrak{F}_1'(x_0)$$

la dérivée $\mathfrak{F}'(x_0)$ existe donc et elle est finie. L'ensemble E des points x où la dérivée $\mathfrak{F}'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie appartient donc à $E_1 + R$. L'ensemble $\bar{\mathfrak{E}}$ des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur E coïncide avec l'ensemble des valeurs de $\psi(y)$ sur $\mathfrak{E}$, en désignant par $\mathfrak{E}$ l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}_1(x)$ sur E. L'ensemble $\mathfrak{E}$ est contenu dans la somme $\mathfrak{E}_1 + R'$, on a donc $\operatorname{mes} \mathfrak{E} = 0$. En vertu de la continuité absolue de $\psi(y)$, l'ensemble $\bar{\mathfrak{E}}$ est donc aussi de mesure nulle et il suit alors du théorème 5 que $\mathfrak{F}(x)$ est une fonction absolument continue de fonction absolument continue. (c. q. f. d.).

Remarque. On pourrait démontrer le même théorème en tenant compte de la remarque à la fin du théorème 5. La fonction $\mathfrak{F}_1(x)$ peut être présentée dans la forme

$$\mathfrak{F}_1(x) = \bar{f}[\Phi(x)]$$

$\bar{f}$ étant *croissante*, et les deux fonctions $\bar{f}$ et Φ absolument continues ; on a alors

$$\mathfrak{F}(x) = \psi_1[\mathfrak{F}_1(x)] = \psi_1\{\bar{f}[\Phi(x)]\} = F[\Phi(x)]$$

la fonction $F = \psi_1(\bar{f})$ est une fonction absolument continue de fonction absolument continue et croissante, elle est donc absolument continue. Le théorème est ainsi démontré.

Deformazioni finite di sistemi continui.

Memoria 2ª dell'ing. R. ARIANO (a Milano) (1).

In questa Memoria faremo uso di variabili lagrangiane.

1. **Il potenziale interno.** — Allorchè in virtù dell'applicazione di forze esterne ad un sistema continuo si determina in questo una deformazione, possiamo dire che varia il *potenziale interno*, intendendo con questa espressione una funzione i cui accrescimenti (o decrementi) sono eguali al lavoro fatto dalle forze esterne (o dal sistema contro l'azione di queste). In altri termini con tale nome intendiamo denotare una funzione che esprime l'attitudine complessiva del sistema a produrre lavoro, vale a dire la sua totale *energia potenziale*, intesa non solo nel senso meccanico, ma anche nel senso elettrico, magnetico, ecc., e quindi l'eguaglianza sopraccennata non è che una diretta conseguenza del principio di conservazione dell'energia.

Riserve occorre fare nei riguardi di due tipi di energia: quella chimica e quella termica.

Per la prima infatti le variazioni non possono oggi attribuirsi ad uno spostamento semplicemente, nè possono per intero invocarsi le condizioni di continuità ammesse in questo lavoro. Non si esclude, ben inteso, che non si possano istituire ricerche in tale senso, ove si adottino opportune teorie o si emettano ipotesi acconcie sul modo di prodursi delle azioni chimiche. Tale ad esempio potrebbe essere l'ipotesi di una dipendenza di queste da azioni elettroniche, emessa dal LANGEVIN sin del 1905 (2), ed attualmente oggetto di molte e interessanti ricerche. Nè ciò sarebbe, sia qui detto, per incidenza, vana fatica teorica, chè il riaccostare la chimica alle varie branche della fisica è da prevedere non sia privo di utili risultati, e di utili indizi per ricercare nuove verità. Noi però non ci occuperemo di ciò, uscendo una tale trattazione dai limiti impostici, e perciò intenderemo che nel sistema studiato non vi siano variazioni di energia chimica.

---

(1) V. Memoria 1ª, questi « Annali », serie 4, t. II, pag. 217.
(2) « Annales de Chimie Physique », 1905, serie 8, t. V, pag. 70 e seguenti.

Anche variazioni di energia termica saranno da escludersi. Potrebbero invero al riguardo esumarsi teorie di fluidi calorifici o simili ma noi eviteremo questa difficoltà trattando solo di sistemi isotermici. Infatti ad una costanza di temperatura, pel secondo principio di termodinamica deve corrispondere una variazione nulla di energia calorifica, almeno fino a quando si tratta di deformazioni reversibili come sono tutte le trasformazioni elastiche.

Sicchè concludendo, ci riferiremo a variazioni di energia elettrica, magnetica, meccanica, luminosa (ammesso che di tale energia possa parlarsi), ma non di energia chimica, ed ammetteremo che il sistema sia a temperatura costante.

Poichè si è visto che la deformazione è completamente definita allorchè sono note le derivate di u, v, w rispetto ad a, b, c, anche il potenziale interno deve dipendere da esse, ed esserne completamente definito. Se quindi si indica il potenziale dell'unità di volume con W, deve essere

$$W = W(x_x, x_y, x_z, y_x, y_y, y_z, z_x, z_y, z_z) \tag{1}$$

dove si è fatto uso delle notazioni di Kirchoff, per esprimere ciò che è definito dalle seguenti eguaglianze:

$$\begin{cases} x_x = \dfrac{\partial u}{\partial a}; & y_x = \dfrac{\partial v}{\partial a}; & z_x = \dfrac{\partial w}{\partial a} \\ x_y = \dfrac{\partial u}{\partial b}; & y_y = \dfrac{\partial v}{\partial b}; & z_y = \dfrac{\partial w}{\partial b} \\ x_z = \dfrac{\partial u}{\partial c}; & y_z = \dfrac{\partial v}{\partial c}; & z_z = \dfrac{\partial w}{\partial c} \end{cases} \tag{2}$$

2. **Equazioni d'equilibrio.** — Si sia condotto il sistema nello stato deformato, e sia W il corrispondente valore del potenziale interno. Siano $\boldsymbol{F}dm$ i vettori delle forze agenti sulle masse elementari dm, e $\boldsymbol{G}d\sigma$ quelli delle forze agenti sugli elementi superficiali.

Siano X, Y, Z le componenti di $\boldsymbol{F}$ e L, M, N le componenti di $\boldsymbol{G}$ rispetto alla solita terna di assi coordinati fissi.

Supponiamo di imprimere al sistema deformato una deformazione infinitesima, virtuale, reversibile, isotermica.

Sia δW, la corrispondente variazione del potenziale interno, e siano δu, δv, δw le variazioni delle funzioni u, v, w vale a dire le componenti della variazione del vettore dello spostamento.

Pel teorema dei lavori virtuali è:

$$-\int \delta W d\tau + \int (F \times \delta u) \rho d\tau + \int (G \times \delta U) d\sigma = 0 \tag{3}$$

dove con $d\tau$ si indica l'elemento di volume.

Si differenzi la (1) e si applichi successivamente ai 9 integrali ricavati così dal 1° integrale della (3) la trasformazione di GAUSS, si scrivano poi i due prodotti scalari degli altri due integrali sotto forma cartesiana, e infine si raccolgano tutti i termini in due integrali: uno di volume e l'altro di superficie.

Eguagliando a zero separatamente le due parti relative a volumi e a superficie, notando che δu, δv, δw sono arbitrari, e ponendo:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial x_x} = X_x; \quad \frac{\partial W}{\partial y_x} = Y_x; \quad \frac{\partial W}{\partial z_x} = Z_x \\ &\frac{\partial W}{\partial x_y} = X_y; \quad \frac{\partial W}{\partial y_y} = Y_y; \quad \frac{\partial W}{\partial z_y} = Z_y \\ &\frac{\partial W}{\partial x_z} = X_z; \quad \frac{\partial W}{\partial y_z} = Y_z; \quad \frac{\partial W}{\partial z_z} = Z_z. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Si ricavano le equazioni generali di equilibrio:

$$\left\{\begin{aligned} &\rho X + \frac{\partial X_x}{\partial a} + \frac{\partial X_y}{\partial b} + \frac{\partial X_z}{\partial c} = 0 \\ &\rho Y + \frac{\partial Y_x}{\partial a} + \frac{\partial Y_y}{\partial b} + \frac{\partial Y_z}{\partial c} = 0 \\ &\rho Z + \frac{\partial Z_x}{\partial a} + \frac{\partial Z_y}{\partial b} + \frac{\partial Z_z}{\partial c} = 0 \end{aligned}\right. \tag{5}$$

valide in tutti i punti interni al sistema, che chiameremo *equazioni indefinite di equilibrio*, e

$$\left\{\begin{aligned} &L + X_x \cos(n, i) + X_y \cos(n, j) + X_z \cos(n, k) = 0 \\ &M + Y_x \cos(n, i) + Y_y \cos(n, j) + Y_z \cos(n, k) = 0 \\ &N + Z_x \cos(n, i) + Z_y \cos(n, j) + Z_z \cos(n, k) = 0 \end{aligned}\right. \tag{6}$$

che sono le equazioni da verificare in tutti i punti della superficie, e perciò chiameremo *condizioni ai limiti* o *al contorno*.

Le equazioni, come si vede, sono formalmente eguali a quelle che si ricavano nella classica teoria delle deformazioni infinitesime.

L' eguaglianza può essere resa completa dall' osservazione che anche per le deformazioni finite è

$$X_y = Y_x; \quad X_z = Z_x; \quad Y_z = Z_y.$$

Ciò sarà dimostrato in seguito.

3. **Significato fisico di X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z.** — Perchè siano verificate le condizioni di equilibrio alla traslazione, occorre che nei punti della superficie, oltre alle forze esterne $Ld\sigma$, $Md\sigma$, $Nd\sigma$, agiscano delle forze $X_n d\sigma$, $Y_n d\sigma$, $Z_n d\sigma$ tali che

$$(7) \qquad \begin{cases} L + X_n = 0 \\ M + Y_n = 0 \\ N + Z_n = 0. \end{cases}$$

Dette forze noi le chiameremo: *reazioni* del corpo. Dalle (6) e dalle (7) si ricava:

$$(8) \qquad X_n = X_x \cos(n, i) + X_y \cos(n, j) + X_z \cos(n, k),$$

e due analoghe per Y_n e Z_n.

Si noti che le relazioni (8) sono valide anche per punti interni al sistema considerato. È sempre infatti possibile immaginare che il sistema sia diviso in due da una superficie passante per un punto interno ad esso, immaginare asportata una delle due parti, sicchè il detto punto diventa superficiale, ed invocare un principio frequentemente richiamato in meccanica che può enunciarsi così « Allorchè un corpo in equilibrio è tagliato lungo una superficie e se ne asporta una delle due parti in cui resta diviso, in ognuna di queste parti può essere ristabilito l' equilibrio distribuendo, sulla superficie di separazione, delle forze univocamente determinate punto per punto » [1].

Come si vede quindi, ogni punto interno al sistema può essere considerato come superficiale, e come punto di applicazione di forze esterne, sicchè valgono per tutti i punti le relazioni (8).

Se in particolare consideriamo un elemento di piano parallelo al piano j, k, per tutti i suoi punti varrà la relazione che si desume facilmente dalle (8), facendovi

$$n = i:$$

$$X_n = X_x = \frac{\partial W}{\partial x_x}; \quad Y_n = Y_x = \frac{\partial W}{\partial y_x}; \quad Z_n = Z_x = \frac{\partial W}{\partial z_x}.$$

[1] Vedi Marcolongo, *Teoria Matematica dei corpi elastici isotropi,* Hoepli, 1906.

Ne deriva, poichè analoghe deduzioni possono farsi per piani paralleli ad (i, k) e a (i, j) che: *le derivate del potenziale interno rispetto alle nove variabili di cui esso è funzione* $(x_x, x_y, x_z, y_x, y_y, y_z, z_x, z_y, z_z)$, *misurano le componenti delle azioni che emanano dalla materia circostante in virtù della deformazione e che si esercitano su elementi piani normali alle direzioni degli assi coordinati.*

In altri termini, se attorno ad un punto si considera un cubetto, e si suppone che esso si impicciolisca tendendo, al limite, al detto punto, conservando sempre le sue facce normali alle direzioni degli assi, si può asportare la materia circostante, e tenere l'equilibrio nel cubetto applicando sulle facce del medesimo delle forze normali e delle altre tangenziali e precisamente:

1°) Sulle facce normali ad $\boldsymbol{i}$:

la forza normale X_x diretta secondo $\boldsymbol{i}$;
le forze tangenziali Y_x e Z_x dirette secondo $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$.

2°) Sulle faccie normali ad $\boldsymbol{j}$:

la forza normale Y_y diretta secondo $\boldsymbol{j}$;
le forze tangenziali X_y, Z_y dirette secondo $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{k}$.

3°) Sulle facce normali a $\boldsymbol{k}$:

la forza normale Z_z diretta secondo $\boldsymbol{k}$;
le forze tangenziali Z_x, Z_y dirette secondo $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$.

4. **Altre espressioni delle reazioni normali e tangenziali.** — Alle nove variabili indipendenti prima considerate, che sono le derivate di u, v, w rispetto ad a, b, c, si possono sostituire le sei variabili ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 che sono legate alle prime da note relazioni e quindi possono ricavarsi da esse, e ciò perchè, dopo quanto si è detto fin qui, è logico che la funzione W debba essere esprimibile a mezzo delle sei variabili or ora indicate, in quanto esse, come si è visto, definiscono completamente la deformazione.

Considereremo pertanto in questo paragrafo la funzione W definita da

$$W = W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3). \tag{9}$$

Porremo

$$\left\{\begin{array}{ll} E_1 = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_1} & G_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial W}{\partial \gamma_1} \\ E_2 = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_2} & G_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial W}{\partial \gamma_2} \\ E_3 = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_3} & G_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial W}{\partial \gamma_3}. \end{array}\right. \tag{10}$$

È facile ricavare le relazioni che intercedono fra le E, le G e X_x, X_y ecc.

Si trova infatti facilmente:

$$(11)\left\{\begin{aligned}
X_x &= \frac{\partial W}{\partial x_x} = \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial u}{\partial a}} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1}\frac{d\varepsilon_1}{d\frac{\partial u}{\partial a}} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2}\frac{d\varepsilon_2}{d\frac{\partial u}{\partial a}} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_3}\frac{d\varepsilon_3}{d\frac{\partial u}{\partial a}} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_1}\frac{d\gamma_1}{d\frac{\partial u}{\partial a}} + \\
&\quad + \frac{\partial W}{\partial \gamma_2}\frac{d\gamma_2}{d\frac{\partial u}{\partial a}} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_3}\frac{d\gamma_3}{d\frac{\partial u}{\partial a}} = E_1\left(1 + \frac{\partial u}{\partial a}\right) + G_2\frac{\partial u}{\partial c} + G_3\frac{\partial u}{\partial b} = \\
&\quad = E_1\frac{\partial x}{\partial a} + G_2\frac{\partial x}{\partial c} + G_3\frac{\partial x}{\partial b}.\\
&\text{Analogamente}\\
X_y &= \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial u}{\partial b}} = E_2\frac{\partial x}{\partial b} + G_3\frac{\partial x}{\partial a} + G_1\frac{\partial x}{\partial c}\\
X_z &= \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial u}{\partial c}} = E_3\frac{\partial x}{\partial c} + G_1\frac{\partial x}{\partial b} + G_2\frac{\partial x}{\partial a}.
\end{aligned}\right.$$

Y_x si ottiene da X_x sostituendo nel secondo membro di questo la y ad x; Z_x sostituendo la z ad x, e così via.

Si può dare alle (11) forma più sintetica introducendo i tre vettori ausiliari, di cui ci serviremo anche in appresso, definiti da:

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_1 &= E_1\boldsymbol{i} + G_3\boldsymbol{j} + G_2\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{B}_2 &= G_3\boldsymbol{i} + E_2\boldsymbol{j} + G_1\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{B}_3 &= G_2\boldsymbol{i} + G_1\boldsymbol{j} + E_3\boldsymbol{k}
\end{aligned}\right.$$

Si trova così:

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l}
X_x = \boldsymbol{B}_1 \times \mathrm{grad}_M x;\quad X_y = \boldsymbol{B}_2 \times \mathrm{grad}_M x;\quad X_z = \boldsymbol{B}_3 \times \mathrm{grad}_M x\\
\qquad\text{e simili.}
\end{array}\right.$$

5. **Relazioni fra X_y e Y_x. Loro significato.** — Da sei delle (11) si possono ricavare le E e le G. Sostituendole in una opportuna delle restanti tre, ed eseguendo delle semplici trasformazioni si dimostra agevolmente ad

esempio che

$$Y_x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & y_z & y_y & y_x \\ X_x & 0 & 0 & 0 & x_z & x_y & x_x \\ X_y & x_y & 0 & x_z & 0 & x_x & 0 \\ X_z & 0 & x_z & x_y & x_x & 0 & 0 \\ Y_y & y_y & 0 & y_z & 0 & y_x & 0 \\ Y_z & 0 & y_z & y_y & y_x & 0 & 0 \\ Z_z & 0 & z_z & z_y & z_x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

dove Δ è il determinante dei coefficienti delle sei eguaglianze (11) prescelte.

Analoghe espressioni possono ricavarsi per le altre funzioni X_y, Y_z, Z_x ecc. Il loro confronto mostra che

$$\left\{ \begin{aligned} Y_x &= X_y \\ Y_z &= Z_y \\ X_z &= Z_x . \end{aligned} \right. \tag{14}$$

Queste eguaglianze equivalgono in ultima analisi al teorema dei momenti che deve verificarci, pel *principio di solidificazione*, oltre che per sistemi rigidi, anche per sistemi deformabili. Infatti riferendo ad esempio i momenti all'asse *i*, deve essere valida pel detto teorema la relazione

$$\int_\sigma (bZ_n - cY_n)d\sigma + \int_\tau (bZ - cY)d\tau = 0$$

in cui con σ si indica una qualsiasi superficie nel corpo deformato in equilibrio e con τ il volume da essa racchiuso.

Indicando con α, β, γ i coseni direttori della normale a σ, considerata come positiva se diretta verso l'interno, per le (8) la relazione precedente equivale a

$$\int \alpha(bZ_x - cY_x)d\sigma + \int \beta(bZ_y - cY_y)d\sigma + \int \gamma(bZ_z - cY_z)d\sigma + \int (bZ - cY)d\tau = 0.$$

A mezzo delle solite formole di trasformazione degli integrali superficiali in integrali di spazio, la precedente relazione può trasformarsi in

$$-\int \left[\frac{\partial(bZ_x - cY_x)}{\partial a} + \frac{\partial(bZ_y - cY_y)}{\partial b} + \frac{\partial(bZ_z - cY_z)}{\partial c} \right] d\tau + \int (bZ - cY)d\tau = 0$$

o anche

$$-\int (Z_y - Y_z)\,d\tau + \int c\left(\frac{\partial Y_x}{\partial a} + \frac{\partial Y_y}{\partial b} + \frac{\partial Y_z}{\partial c} + Y\right) d\tau - \int b\left(\frac{\partial Z_x}{\partial a} + \frac{\partial Z_y}{\partial b} + \frac{\partial Z_z}{\partial c} + Z\right) d\tau = 0$$

e per le equazioni di equilibrio

$$\int (Z_y - Y_z)\,d\tau = 0$$

cioè

$$Z_y = Y_z .$$

6. **Altre espressioni delle equazioni di equilibrio.** — Si può dare alle equazioni generali di equilibrio prima ricavate, delle diverse espressioni, ponendo al posto delle X_x, X_y, X_z ecc. le E e le G sopra definite, o delle funzioni da queste ricavate.

Consideriamo dapprima le equazioni indefinite di equilibrio. Dalle (5) e dalle (14) si ricava

$$\rho X + \operatorname{div}_M \boldsymbol{B}_1 \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + \operatorname{div}_M \boldsymbol{B}_2 \cdot \frac{\partial x}{\partial b} + \operatorname{div}_M \boldsymbol{B}_3 \cdot \frac{\partial x}{\partial c} + \boldsymbol{B}_1 \times \frac{\partial}{\partial a} \operatorname{grad}_M x +$$

$$+ \boldsymbol{B}_2 \times \frac{\partial}{\partial b} \operatorname{grad}_M x + \boldsymbol{B}_3 \times \frac{\partial}{\partial c} \operatorname{grad}_M x = 0.$$

Essendo possibile invertire i segni di grad e di derivazione [1], la formola precedente equivale a:

$$\rho X + \operatorname{div}_M \boldsymbol{B}_1 \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + \operatorname{div}_M \boldsymbol{B}_2 \cdot \frac{\partial x}{\partial b} + \operatorname{div}_M \boldsymbol{B}_3 \cdot \frac{\partial x}{\partial c} + \boldsymbol{B}_1 \times \operatorname{grad}_M \frac{\partial x}{\partial a} +$$

$$+ \boldsymbol{B}_2 \times \operatorname{grad}_M \frac{\partial x}{\partial b} + \boldsymbol{B}_3 \times \operatorname{grad}_M \frac{\partial x}{\partial c} = 0.$$

Poichè inoltre vale la relazione

$$\operatorname{div}(m\boldsymbol{u}) = m \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} m \times \boldsymbol{u}$$

(dove m è una funzione numerica e $\boldsymbol{u}$ un vettore) si ha:

$$\rho X + \operatorname{div}_M\left(\frac{\partial x}{\partial a} \boldsymbol{B}_1 + \frac{\partial x}{\partial b} \boldsymbol{B}_2 + \frac{\partial x}{\partial c} \boldsymbol{B}_3\right) = 0.$$

---

[1] T. L., pag. 74 [3‴].

Analogamente si ricava:

$$\rho Y + \mathrm{div}_M\left(\frac{\partial y}{\partial a}\boldsymbol{B}_1 + \frac{\partial y}{\partial b}\boldsymbol{B}_2 + \frac{\partial y}{\partial c}\boldsymbol{B}_3\right) = 0$$

$$\rho Z + \mathrm{div}_M\left(\frac{\partial z}{\partial a}\boldsymbol{B}_1 + \frac{\partial z}{\partial b}\cdot\boldsymbol{B}_2 + \frac{\partial z}{\partial c}\boldsymbol{B}_3\right) = 0.$$

Introducendo infine i tre vettori ausiliari $\boldsymbol{V}_{1,i}$; $\boldsymbol{V}_{1,j}$; $\boldsymbol{V}_{1,k}$ definiti da:

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \boldsymbol{V}_{1,i} &= \frac{\partial x}{\partial a}\boldsymbol{B}_1 + \frac{\partial x}{\partial b}\boldsymbol{B}_2 + \frac{\partial x}{\partial c}\boldsymbol{B}_3 = X_x\boldsymbol{i} + X_y\boldsymbol{j} + X_z\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{V}_{1,j} &= \frac{\partial y}{\partial a}\boldsymbol{B}_1 + \frac{\partial y}{\partial b}\boldsymbol{B}_2 + \frac{\partial y}{\partial c}\boldsymbol{B}_3 = Y_x\boldsymbol{i} + Y_y\boldsymbol{j} + Y_z\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{V}_{1,k} &= \frac{\partial z}{\partial a}\boldsymbol{B}_1 + \frac{\partial z}{\partial b}\boldsymbol{B}_2 + \frac{\partial z}{\partial c}\boldsymbol{B}_3 = Z_x\boldsymbol{i} + Z_y\boldsymbol{j} + Z_z\boldsymbol{k} \end{aligned}\right.$$

si ricavano le tre equazioni generali di equilibrio:

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho X + \mathrm{div}_M \boldsymbol{V}_{1,i} &= 0 \\ \rho Y + \mathrm{div}_M \boldsymbol{V}_{1,j} &= 0 \\ \rho Z + \mathrm{div}_M \boldsymbol{V}_{1,k} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Le tre (16) possono scriversi sotto forma di un'unica relazione, moltiplicandole rispettivamente per $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ e sommandole. Si ha infatti

$$\rho\boldsymbol{F} + \boldsymbol{i}\cdot\mathrm{div}_M \boldsymbol{V}_{1,i} + \boldsymbol{j}\,\mathrm{div}_M \boldsymbol{V}_{1,j} + \boldsymbol{k}\,\mathrm{div}_M \boldsymbol{V}_{1,k} = 0.$$

Indichiamo con $k\beta$ l'omografia definita da:

$$(17)\qquad k\beta = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_{1,i} & \boldsymbol{V}_{1,j} & \boldsymbol{V}_{1,k} \\ \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

e notiamo che $k\beta$ è una dilatazione perchè il quadro determinante che la rappresenta simbolicamente è simmetrico rispetto alle diagonali. Quindi $k\beta = \beta$. Ne deriva che alle (16) si può dare la forma semplice

$$(18)\qquad \rho\boldsymbol{F} + \mathrm{grad}_M\,\beta = 0 \text{ [1]}.$$

[1] È noto che per le deformazioni infinitesime si ricava un'equazione simile. Si veda: BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*, vol. II (« Applications à la mécanique »).

Passiamo ora a considerare le condizioni al contorno. Dalla prima delle (6) e dalle (13) si ricava

$$L + \mathrm{grad}_M x \times [B_1 \cos(n, i) + B_2 \cos(n, j) + B_3 (n, k)] = 0.$$

È facile verificare che

$$V_{1,i} \times n = \mathrm{grad}_M x \times [B_1 \cos(n, i) + B_2 \cos(n, j) + B_3 \cos(n, k)].$$

Quindi le equazioni al contorno possono scriversi sotto la forma semplice:

$$(19) \qquad \begin{cases} L + V_{1,i} \times n = 0 \\ M + V_{1,j} \times n = 0 \\ N + V_{1,k} \times n = 0. \end{cases}$$

Queste tre equazioni possono scriversi più sinteticamente raccogliendole in una sola.

Infatti si noti che

$$V_{1,i} \times n \cdot i + V_{1,j} \times n \cdot j + V_{1,k} \times n \cdot k = [H(V_{1,i}, i) + H(V_{1,j}, j) + H(V_{1,k}, k)]\, n =$$
$$= [H(\beta i, i) + H(\beta j, j) + H(\beta k, k)]\, n = k\beta n = \beta n.$$

Se quindi moltiplichiamo rispettivamente per i, j, k le tre (19) e le sommiamo, tenendo presente la relazione precedente, ricaviamo

$$(20) \qquad G + \beta n = 0.$$

Riassumendo: *È possibile definire un' omografia* β, *tali che le equazioni di equilibrio sono esprimibili a mezzo delle forze esterne, e di espressioni semplicissime dipendenti da* β.

L' omografia β è nota, quando sono noti tre vettori $V_{1,i}$, $V_{1,j}$, $V_{1,k}$, sicchè in genere lo studio — dal punto di vista degli sforzi — di un sistema in equilibrio può ridursi alla ricerca dei tre vettori

$$V_{1,i};\quad V_{1,j};\quad V_{1,k},$$

così come si è visto nella Memoria precedente che lo studio delle deformazioni di un dato sistema può ridursi alla ricerca dei vettori:

$$V_i,\quad V_j,\quad V_k$$

in cui si trasforma una terna ortogonale.

Si noti che per le (15) i *vettori* $\mathbf{V}_{1,i}$, $\mathbf{V}_{1,j}$, $\mathbf{V}_{1,k}$ *sono i vettori delle reazioni agenti su elementi piani normali ad* **i**, **j**, **k**.

7. I vettori $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$ e le funzioni E_1, E_2, E_3, G_1, G_2, G_3. — La dimostrata uguaglianza delle tensioni tangenziali due a due, ci consente di ricavare alcune semplici e notevoli espressioni per i vettori $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$ e per le funzioni E_1, E_2, E_3, G_1, G_2, G_3.

Infatti dalle (14) si ricava

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{1,\boldsymbol{i}} &= X_x\boldsymbol{i} + X_y\boldsymbol{j} + X_z\boldsymbol{k} = \boldsymbol{B}_1 \times \operatorname{grad}_M x\cdot\boldsymbol{i} + \boldsymbol{B}_1 \times \operatorname{grad}_M y\cdot\boldsymbol{j} + \\ &+ \boldsymbol{B}_1 \times \operatorname{grad}_M z\cdot\boldsymbol{k} = [H(\operatorname{grad}_M x, \boldsymbol{i}) + H(\operatorname{grad}_M y, \boldsymbol{j}) + H(\operatorname{grad}_M z, \boldsymbol{k})]\,\boldsymbol{B}_1 = \\ &= \frac{dP}{dM}\boldsymbol{B}_1 = \alpha\cdot\boldsymbol{B}_1 \ (^1).\end{aligned} \tag{21}$$

Analogamente si ricava

$$\boldsymbol{V}_{1,\boldsymbol{j}} = \alpha\boldsymbol{B}_2$$
$$\boldsymbol{V}_{1,\boldsymbol{k}} = \alpha\boldsymbol{B}_3$$

ossia

$$\left\{\begin{aligned} \alpha^{-1}\beta\boldsymbol{i} &= \boldsymbol{B}_1 \\ \alpha^{-1}\beta\boldsymbol{j} &= \boldsymbol{B}_2 \\ \alpha^{-1}\beta\boldsymbol{k} &= \boldsymbol{B}_3 \end{aligned}\right. \tag{22}$$

cioè i vettori $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$ sono *i trasformati a mezzo dell'omografia* α^{-1} *dei vettori degli sforzi normali a tre elementi piani parallelli ai piani coordinati.*

Dalle (22) si ricava altresì

$$\alpha^{-1}\beta\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{i} = E_1$$

o anche

$$E_1 = \alpha^{-1}\beta\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \beta\boldsymbol{i} \times K\alpha^{-1}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{V}_{1,\boldsymbol{i}} \times \operatorname{grad}_P a.$$

Analogamente si ricava:

$$\left\{\begin{aligned} E_2 &= \boldsymbol{V}_{1,\boldsymbol{j}} \times \operatorname{grad}_P b \\ E_3 &= \boldsymbol{V}_{1,\boldsymbol{k}} \times \operatorname{grad}_P c \\ G_1 &= \boldsymbol{V}_{1,\boldsymbol{j}} \times \operatorname{grad}_P c = \boldsymbol{V}_{1,\boldsymbol{k}} \times \operatorname{grad}_P b \\ G_2 &= \boldsymbol{V}_{1,\boldsymbol{k}} \times \operatorname{grad}_P a = \boldsymbol{V}_{1,\boldsymbol{i}} \times \operatorname{grad}_P c \\ G_3 &= \boldsymbol{V}_{1,\boldsymbol{i}} \times \operatorname{grad}_P b = \boldsymbol{V}_{1,\boldsymbol{j}} \times \operatorname{grad}_P a. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Come si vede, i vettori $\boldsymbol{V}_{1,\boldsymbol{i}}$; $\boldsymbol{V}_{1,\boldsymbol{j}}$; $\boldsymbol{V}_{1,\boldsymbol{k}}$ permettono di esprimere le E e le G in modo analogo a quello che per le $\boldsymbol{B}_1$ assumono le componenti degli sforzi.

---

(1) T. L., pag. 93 [b^1].

8. **Quadriche delle pressioni.** — Per renderci ragione della distribuzione degli sforzi all'interno del sistema deformato, faremo uso qui — come abbiamo fatto del resto nella Memoria precedente, trattando della distribuzione delle deformazioni — di rappresentazioni geometriche.

Ricordiamo che la reazione $V_{1,s}$ di componenti X_n, Y_n, Z_n che si esercita su di un elemento di superficie interno al corpo, o posto sul suo contorno, è dato dalle (8) che qui useremo indicando con λ, μ, ν i coseni direttori della normale.

Chiameremo questa reazione *pressione* o *tensione*, secondo che la sua direzione fa con la direzione della normale al detto elemento un angolo ottuso od acuto. (Il senso della normale va preso positivo verso l'esterno se l'elemento è al contorno, verso l'esterno della parte del sistema racchiusa dalla superficie cui il detto elemento appartiene, se esso è interno al sistema studiato).

La componente T_n di T nella direzione della normale è data da

$$\begin{aligned} T_n = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{n} &= X_n\lambda + Y_n\mu + Z_n\nu = \\ &= X_x\lambda^2 + Y_y\mu^2 + Z_z\nu^2 + (X_y + Y_x)\lambda\mu + (X_z + Z_x)\lambda\nu + \\ &= (Y_z + Z_y)\mu\nu = \varphi(\lambda, \mu, \nu) \end{aligned}$$

dove con φ si indica una funzione quadratica di λ, μ, ν.

Ne deriva il teorema:

La componente $\mathrm{T_n}$ *della pressione o tensione che si esercita su di un elemento di superficie di un sistema deformato è funzione quadratica dei coseni di direzione della normale al detto elemento e funzione lineare delle pressioni o tensioni che si esercitano sugli elementi piani normali alle direzioni degli assi coordinati.*

Per rappresentare nei dintorni di ogni punto del sistema iniziale la distribuzione degli sforzi che vi si determineranno in virtù della deformazione si può fare uso di una quadrica definita da

$$\rho^2 T_n = 1$$

ossia da:

(24)
$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 1$$

dove

$$\xi = \rho\lambda; \quad \eta = \rho\mu; \quad \zeta = \rho\nu$$

cioè dove ξ, η, ζ sono le coordinate dei punti della quadrica, i quali sono scelti in modo che

(25)
$$\rho = \frac{1}{\pm\sqrt{T_n}}.$$

A questa quadrica si dà il nome di *quadrica indicatrice delle pressioni*.

Essa gode la proprietà seguente:

« *Dato un piano passante per un punto* M *del sistema iniziale, il suo diametro coniugato rispetto alla quadrica delle pressioni dà la reazione che si eserciterà, a deformazione avvenuta, su di un elemento del detto piano preso nei dintorni di* M, *e la grandezza di questa reazione è eguale in valore assoluto al reciproco del quadrato del relativo raggio vettore della quadrica* ».

Ponendo:

$$\begin{cases} g_1 = \frac{1}{4}\left(Y_z + Z_y\right) = \frac{1}{2} Y_z; \quad g_2 = \frac{1}{4}\left(X_z + Z_x\right) = \frac{1}{2} X_z; \quad g_3 = \frac{1}{4}\left(X_y + Y_x\right) = \frac{1}{2} X_y \\ e_1 = \frac{1}{2} X_x; \quad e_2 = \frac{1}{2} Y_y; \quad e_3 = \frac{1}{2} Z_z \end{cases}$$

la (24) assume la forma:

$$2T_n = e_1\xi^2 + e_2\eta^2 + e_3\zeta^2 + 2g_1\eta\zeta + 2g_2\zeta\xi + 2g_3\xi\eta \tag{24'}$$

la cui analogia formale con la (6) della 1ª Memoria è evidente.

Si può quindi ricavare, da un ragionamento analogo a quello usato trattando della (6) della 1ª Memoria, la dimostrazione del teorema seguente:

Nell'intorno di ogni punto di un mezzo continuo deformato, esiste una terna di piani, su cui, a deformazione avvenuta, si esercitano azioni normali.

Essi pianî si dicono *piani principali di pressione*, e le pressioni relative, si chiamano *pressioni principali*.

Nelle varie direzioni uscenti da M, si può avere, a deformazione avvenuta:

a) solo *tensione*;

b) solo *compressione*;

c) una zona di tensione ed una di compressione, separate da una *zona di azione nulla*, costituita dal cono quadrico definito da

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0. \tag{26}$$

In corrispondenza ai primi due casi la forma quadratica φ sarà definita positiva o negativa (ellissoide reale o immaginario) e nel secondo caso sarà un iperbolide (ad uno o a due falde), avente il cono (26) come cono asintotico.

Si può estendere l'analogia formale fra rappresentazione geometrica della distribuzione degli sforzi e quella delle deformazioni, mercè l'introduzione del vettore $\boldsymbol{V}_{1,s}$ definito da

$$\boldsymbol{V}_{1,s} = \boldsymbol{V}_{1,i}\lambda + \boldsymbol{V}_{1,j}\mu + \boldsymbol{V}_{1,k}\nu \tag{27}$$

dove λ, μ, ν sono i coseni direttori della direzione normale all'elemento cui si riferisce il vettore $V_{1,s}$.

Il significato fisico di $V_{1,s}$ si ricava subito sostituendo nella (27) a $V_{1,i}$; $V_{1,j}$; $V_{1,k}$ i loro valori. Difatti si ricava:

$$V_{1,s} = i(X_x\lambda + X_y\mu + X_z\nu) + j(Y_x\lambda + Y_y\mu + Y_z\nu) + k(Z_x\lambda + Z_y\mu + Z_z\nu) = \\ = X_n i + Y_n j + Z_n k$$

cioè il vettore $V_{1,s}$ è *il vettore dell'azione che si eserciterà, a deformazione avvenuta, sull'elemento normale ad* **s**.

Consideriamo le due quadriche definite da

$$\rho_1^2 V_{1,s}^2 = 1 \tag{30}$$

$$\rho_2 = \mathrm{mod}\, V_{1,s}. \tag{31}$$

La prima è analoga formalmente all'ellissoide di dilatazione.

La seconda, analoga alla quadrica delle V, gode la proprietà di essere un ellissoide, in quanto è una quadrica priva di punti all'infinito, essendo privo di senso $V_{1,s} = \infty$. Essa dà l'azione che si desterà su ogni elemento del mezzo, a deformazione avvenuta.

La chiameremo *ellissoide di Lamé* o *ellissoide di elasticità*.

9. **Componenti degli sforzi.** — Analogamente alle funzioni ε e γ del 1° Capitolo, possiamo qui considerare le funzioni $\mathcal{E}$, Γ definite da:

$$\tag{32} \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \frac{1}{2}(V_{1,i}^2 - 1) \\ \mathcal{E}_2 &= \frac{1}{2}(V_{1,j}^2 - 1) \\ \mathcal{E}_3 &= \frac{1}{2}(V_{1,k}^2 - 1) \\ \Gamma_1 &= \frac{1}{2} V_{1,j} \times V_{1,k} \\ \Gamma_2 &= \frac{1}{2} V_{1,k} \times V_{1,i} \\ \Gamma_3 &= \frac{1}{2} V_{1,i} \times V_{1,j}. \end{aligned} \right.$$

Grazie ad esse si può dare ad esempio all'equazione della quadrica (30) la forma seguente:

$$V_{1,i}^2\xi^2 + V_{1,j}^2\eta^2 + V_{1,k}^2\zeta^2 + 4\Gamma_1\eta\zeta + 4\Gamma_2\zeta\xi + 4\Gamma_3\xi\eta = 1$$

che è evidentemente analoga a quella dell'ellissoide di dilatazione.

Chiameremo « *componenti degli sforzi* » le sei funzioni definite dalle (32). La loro importanza sarà mostrata subito dopo. Intanto vogliamo notare che con ragionamento totalmente coincidente con quello fatto trattando delle ε e delle γ si può dimostrare che se dalla terna i, j, k si passa alla terna i', j', k', tale che i coseni direttori sono dati dal quadro seguente

i'	A_1	A_2	A_3
j'	B_1	B_2	B_3
k'	C_1	C_2	C_3
	i	j	k

i coefficienti $\mathcal{E}$ e Γ si trasformano negli altri $\mathcal{E}'$ e Γ' definiti da:

(33)
$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_1 A_1^2 + \mathcal{E}_2 A_2^2 + \mathcal{E}_3 A_3^2 + 2\Gamma_1 A_2 A_3 + 2\Gamma_2 A_3 A_1 + 2\Gamma_3 A_1 A_2 \\ \text{e due analoghe per } \mathcal{E}_2' \text{ e } \mathcal{E}_3' \\ \Gamma_1' = \mathcal{E}_1 B_1 C_1 + \mathcal{E}_2 B_2 C_2 + \mathcal{E}_3 B_3 C_3 + \Gamma_1(B_2C_3 + B_3C_2) + \Gamma_2(B_3C_1 + B_1C_3) + \\ \qquad + \Gamma_1(B_1C_2 + B_2C_1) \\ \text{e due analoghe per } \Gamma_2' \text{ e } \Gamma_3'. \end{array}\right.$$

Nei riguardi dei coefficienti $\mathcal{E}$ e Γ possiamo dimostrare il seguente teorema: *Noti i sei coefficienti $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$, Γ_1, Γ_2, Γ_3 relativi ad una terna d'assi è nota la distribuzione delle reazioni a meno di una rotazione di assieme. Viceversa nota questa sono determinati i detti coefficienti.*

Infatti noti i detti sei coefficienti è nota l'equazione dell'ellissoide di Lamé che può essere tracciato per punti, e quindi sono noti gli sforzi che in virtù della deformazione si destano nelle varie direzioni. Inoltre questa dipendenza degli sforzi dai detti coefficienti è tale che ad ogni sistema di valori di questi non può che corrispondere un unico valore degli sforzi in ogni direzione; e infatti le (32) consentono di ricavare un unico sistema di valori per $V_{1,i}$; $V_{1,j}$; $V_{1,k}$ e quindi per $V_{1,s}$.

Notiamo però qui esplicitamente che le (32) consentono la determinazione dei moduli dei tre vettori $V_{1,i}$; $V_{1,j}$; $V_{1,k}$ e degli angoli che essi formano fra loro, sicchè l'ellissoide resta ricavato a meno di una rotazione rigida.

È evidente anche perciò l'analogia col teorema analogo dimostrato per le ε e le γ.

Viceversa è ovvio che nota la distribuzione degli sforzi, le (32) consentono il calcolo delle $\mathcal{E}$ e delle Γ.

Prima di chiudere questo paragrafo vogliamo notare che il significato fisico delle $\mathcal{E}$ e delle Γ risulta dalla loro stessa definizione. È infatti:

a) (34)
$$\operatorname{mod} V_{1,i} = \sqrt{1+2\mathcal{E}_1}$$

(relazioni analoghe valgono per $V_{1,j}$ e $V_{1,k}$) il che mostra che le $\mathcal{E}$ caratterizzano gli sforzi che si esercitano su elementi piani che nello stato iniziale erano normali agli assi coordinati, così come le ε caratterizzano le dilatazioni lineari relative agli assi coordinati

b) (35)
$$\cos(V_{1,i}\, V_{1,j}) = \frac{2\Gamma_3}{\sqrt{1+2\mathcal{E}_1}\,\sqrt{1+2\mathcal{E}_2}}$$

espressioni analoghe valgano per

$$\cos(V_{1,i}, V_{1,k}); \quad \cos(V_{1,j}, V_{1,k})$$

quindi le Γ caratterizzano gli angoli che formano fra loro le direzioni delle azioni che si esercitano su elementi piani che allo stato iniziale erano paralleli ai piani coordinati; così come le γ caratterizzavano gli angoli che formano fra loro i detti piani a deformazione avvenuta.

L'analogia delle considerazioni cinematiche con quelle statiche suggerirebbe la presa in esame delle espressioni:

$$V_{1,i} \wedge V_{1,j} \quad \text{(e simili)}; \quad V_{1,i} \wedge V_{1,j} \times V_{1,k}$$

analoghe dal punto di vista formale alla dilatazione superficiale e a quella cubica. Esse però — pure comparendo, come si vedrà in espressioni invariantive — non hanno un particolare significato fisico.

Noteremo infine che con procedimento del tutto analogo a quello indicato per le ε e le γ si può ricavare le seguenti relazioni cui devono soddisfare le $\mathcal{E}$ e le Γ perchè esse caratterizzino una distribuzione di sforzi corrispondenti all'equilibrio (1)

$$(36)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial H_1}{\partial a} - \dfrac{\partial^2 \mathcal{E}_1}{\partial b \partial c} = \Psi\begin{pmatrix} H_1 & \Delta_3' & B_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} - \Psi\begin{pmatrix} \Delta_2 & H_2 & \Delta_1' \\ \Delta_2' & \Delta_3 & H_3 \end{pmatrix} \\ \text{e due relazioni simili,} \\ 2\dfrac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial c \partial b} - \dfrac{\partial^2 \mathcal{E}_3}{\partial b^2} - \dfrac{\partial^2 \mathcal{E}_2}{\partial c^2} = \Psi\begin{pmatrix} B_3 & B_1 & B_2 \\ \Theta_2 & \Theta_3 & \Theta_1 \end{pmatrix} - 2\Psi(H_1, \Delta_3', \Delta_1) \\ \text{e due relazioni simili,} \end{array}\right.$$

dove

$$
(37)\quad \left\{
\begin{aligned}
& A_1 = \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial a}; \qquad B_1 = \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial b}; \qquad \Theta_1 = \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial c} \\
& A_2 = 2\frac{\partial \Gamma_3}{\partial a} - \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial b}; \quad B_2 = 2\frac{\partial \Gamma_1}{\partial b} - \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial c}; \quad \Theta_2 = 2\frac{\partial \Gamma_2}{\partial c} - \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial a} \\
& A_3 = 2\frac{\partial \Gamma_2}{\partial a} - \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial c}; \quad B_3 = 2\frac{\partial \Gamma_3}{\partial b} - \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial a}; \quad \Theta_3 = 2\frac{\partial \Gamma_1}{\partial c} - \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial b} \\
& \Delta_1 = \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial b}; \quad \Delta_2 = \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial c}; \quad \Delta_3 = \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial a} \\
& \Delta_1' = \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial a}; \quad \Delta_2' = \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial b}; \quad \Delta_3' = \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial c} \\
& H_1 = \left(-\frac{\partial \Gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial c}\right) \\
& H_2 = \left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial a} - \frac{\partial \Gamma_2}{\partial b} + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial c}\right) \\
& H_3 = \left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial b} - \frac{\partial \Gamma_3}{\partial c}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

e $\Psi(x, y, z)$ è la reciproca di $\psi(x, y, z)$ dove

$$
(38)\quad \begin{aligned}
\psi(x, y, z) = {} & V_{1,i}^2 x^2 + V_{1,j}^2 y^2 + V_{1,k}^2 z^2 + \\
& + 2 V_{1,i} \times V_{1,j} xy + 2 V_{1,j} \times V_{1,k} yz + 2 V_{1,k} \times V_{1,i} zx.
\end{aligned}
$$

Si può anche scrivere le predette relazioni sotto la forma seguente:

$$
(39)\quad \left\{
\begin{aligned}
& (I_3\beta)^2 \left[\frac{\partial H_1}{\partial a} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}_1}{\partial b \partial c}\right] = \begin{vmatrix} A_1 H - \Delta_2'\Delta_2 & 2\Gamma_3 & 2\Gamma_2 \\ A_2 H_1 - \Delta_3\Delta_2 & 1 + 2\Gamma_2 & 2\Gamma_1 \\ A_3 H_1 - H_3\Delta_2 & 2\Gamma_1 & 1 + 2\Gamma_3 \end{vmatrix} + \\
& + \begin{vmatrix} 1 + 2\mathcal{E}_1 & A_1\Delta_3' - \Delta_2' H_2 & 2\Gamma_2 \\ 2\Gamma_3 & A_2\Delta_3' - \Delta_3 H_2 & 2\Gamma_1 \\ 2\Gamma_2 & A_3\Delta_3' - H_3 H_2 & 1 + 2\mathcal{E}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 + 2\mathcal{E}_1 & 2\Gamma_3 & A_1\Delta_1 - \Delta_2'\Delta_1' \\ 2\Gamma_3 & 1 + 2\mathcal{E}_2 & A_2\Delta_1 - \Delta_3\Delta_1' \\ 2\Gamma_2 & 2\Gamma_1 & A_3\Delta_1 - H_3\Delta_1' \end{vmatrix} \\
& \text{e due simili} \\
& (I_3\beta)^2 \left(2\frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial b \partial c} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}_2}{\partial c^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}_3}{\partial b^2}\right) = \begin{vmatrix} B_1 A_1 - \Delta_2'^2 & 2\Gamma_3 & 2\Gamma_2 \\ B_1\Theta_2 - \Delta_3\Delta_2' & 1 + 2\mathcal{E}_2 & 2\Gamma_1 \\ B_1\Theta_3 - H_3\Delta_2' & 2\Gamma_1 & 1 + 2\mathcal{E}_3 \end{vmatrix} + \\
& + \begin{vmatrix} 1 + 2\mathcal{E}_1 & B_2\Theta_1 - \Delta_3\Delta_2' & 2\Gamma_2 \\ 2\Gamma_3 & B_2\Theta_2 - \Delta_3^2 & 2\Gamma_1 \\ 2\Gamma_2 & B_2\Theta_3 - \Delta_3 H_3 & 1 + 2\mathcal{E}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 + 2\mathcal{E}_3 & 2\Gamma_3 & B_3\Theta_1 - H_3\Delta_2' \\ 2\Gamma_3 & 1 + 2\mathcal{E}_3 & B_3\Theta_2 - H_3\Delta_3 \\ 2\Gamma_2 & 2\Gamma_1 & B_3\Theta_3 - H_3^2 \end{vmatrix} \\
& \text{e due simili.}
\end{aligned}
\right.
$$

(continua)

Théorie des densités dans le déplacement général

par V. HLAVATY (à Prague).

INTRODUCTION

Le développement du calcul différentiel absolu trouve sa raison d'être et dans la théorie des invariants et dans les recherches thèoriques du principe de la relativité. En regardant de près ces études, on y voit intervenir des grandeurs qui correspondent aux invariants relatifs de la théorie des invariants. Il est donc bien naturel d'introduire l'analyse différentielle des invariants relatifs dans le domaine du calcul différentiel absolu. C'est ce qu'a fait M. WEYL dans son excellent livre *Raum-Zeit-Materie* sous le nom des *densités* pour le déplacement spécial.

Mais pour considérer la question des *densités* par rapport au calcul différentiel absolu comme question résolue, il me semble nécessaire de constituer son algorithme, en fondant:

I) son algébre,

II) son analyse différentielle,

dans le déplacement général. Dans les lignes qui suivent, nous nous occupons de cette étude. Il résulte de la nature de ce problème que l'algorithme de l'analyse différentielle des densités doit être superposé à l'algorithme du calcul différentiel absolu, parce que celui-ci est restreint aux études des expressions co-et contrevariantes de *poids nul*. Nous nous proposons de trouver un tel algorithme qui nous permet de traiter n'importe quel problème touchant des expressions co-et contrevariantes de *poids quelconque* positif, négatif, nul pour le déplacement général qui ne détruit pas les incidences vectorielles.

Quant à la symbolique, nous nous servons de celle de M. RICCI, remaniée par M. SCHOUTEN dans son important livre *Ricci-Kalkül*, Springer, 1924, dont nous supposons la connaissance parfaite. Les résultats dans II.4 ne sont pas naturellement nouveaux et le lecteur intéressé les trouve exposés dans toute l'ampleur dans le livre cité.

I.

1. Notion des densités. — Désignons par x^ν les n paramètres de la variété à n dimensions, par $|\Delta|$ la valeur absolue du jacobien

$$\Delta = \frac{\partial('x^1, 'x^2, \ldots 'x^n)}{\partial(x^1, x^2, \ldots x^n)} \neq 0$$

de la transformation $'x = 'x(x)$. Nous supposerons que Δ ne se réduit pas a une constante. Une fonction $\overset{k}{\mathfrak{v}}$ qui se transforme d'après

$$'\overset{k}{\mathfrak{v}} = |\Delta|^k \overset{k}{\mathfrak{v}}$$

sera dite *densité scalaire de poids (positif) k.*

La valeur réciproque $\underset{k}{\mathfrak{v}} = \overset{-k}{\mathfrak{v}}$ se transforme d'après

$$'\underset{k}{\mathfrak{v}} = |\Delta|^{-k} \underset{k}{\mathfrak{v}}.$$

Une telle fonction sera dite *densité scalaire de poids (négatif) k.* L'ensemble des fonctions $\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\cdot\,\cdots\cdots\,\cdot\,\nu_1 \ldots \nu_s}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ qui se transforment d'après

$$\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\cdot\,\cdots\cdots\,\cdot\,\nu_1 \ldots \nu_s}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial' x^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha_p}}{\partial' x^{\lambda_p}} \frac{\partial' x^{\nu_1}}{\partial x^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial' x^{\nu_s}}{\partial x^{\beta_s}} |\Delta|^k \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\cdot\,\cdots\cdots\,\cdot\,\beta_1 \ldots \beta_s}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$$

sera dit *densité affinorielle de poids (positif) k.* L'ensemble des fonctions $\underset{k}{\mathfrak{w}}{}^{\cdot\,\cdots\cdots\,\cdot\,\nu_1 \ldots \nu_s}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ qui se transforment d'après

$$\underset{k}{\mathfrak{w}}{}^{\cdot\,\cdots\cdots\,\cdot\,\nu_1 \ldots \nu_s}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial' x^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha_p}}{\partial' x^{\lambda_p}} \frac{\partial' x^{\nu_1}}{\partial' x^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial' x^{\nu_s}}{\partial x^{\beta_s}} |\Delta|^{-k} \underset{k}{\mathfrak{w}}{}^{\cdot\,\cdots\cdots\,\cdot\,\beta_1 \ldots \beta_s}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$$

sera dit *densité affinorielle de poids (négatif) k.*

Nous désignerons les densités par une lettre allemande, en supprimant l'indice latin qui désigne le poids, s'il égale à $+1$. Les vecteurs (affineurs) seront écrits en types latins avec les indices grecs. Les types latins sans indices désignent des fonctions scalaires.

2. **Jaugeage.** — Le principe de M. KLEIN nous permet de « jauger » toute densité scalaire moyennant une densité « unité » $\mathfrak{e}$ et sa valeur réciproque $\mathfrak{e}^{-1}$. Si v, (w) est la fonction scalaire bien déterminée, les densités $\overset{k}{\mathfrak{v}}$, $\underset{k}{\mathfrak{w}}$ peuvent être mises sous la forme

(1) $$a)\ \overset{k}{\mathfrak{v}} = v\mathfrak{e}^{k}, \qquad b)\ \underset{k}{\mathfrak{w}} = w\mathfrak{e}^{-k}.$$

Dans $\mathfrak{e}^{k}$, $\mathfrak{e}^{-k}$, k resp. $-k$ est l'exposant. D'après le même principe, toute densité affinorielle peut être « jaugée » de la manière suivante

(2) $$\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\cdot\,\cdots\cdots\,\cdot\,\nu_1\dots\nu_s}_{\lambda_1\dots\lambda_p} = v^{\cdot\,\cdots\cdots\,\cdot\,\nu_1\dots\nu_s}_{\lambda_1\dots\lambda_p}\mathfrak{e}^{k}, \quad \underset{k}{\mathfrak{w}} = w^{\cdot\,\cdots\cdots\,\cdot\,\nu_1\dots\nu_s}_{\lambda_1\dots\lambda_p}\mathfrak{e}^{-k},$$

où $v^{\cdot\,\cdots\cdots\,\cdot\,\nu_1\dots\nu_s}_{\lambda_1\dots\lambda_p}$ resp. $w^{\cdot\,\cdots\cdots\,\cdot\,\nu_1\dots\nu_s}_{\lambda_1\dots\lambda_p}$ est l'affineur bien déterminé qui est du même ordre de co-et contrevariance que la densité en question. Le jaugeage nous sera utile au cours du calcul analytique. S'il n'y a aucune ambiguité à craindre, nous désignons même le poids négatif par l'indice latin, affecté au-dessus de la lettre. (Par ex.: $\overset{k}{\mathfrak{v}}$ pour $k < 0$ est de poids négatif).

3. **Opérations fondamentales de l'algèbre des densités** sont l'addition, soustraction et la multiplication. — S'il ne s'agit que des densités *scalaires*, on peut aussi introduire la division. Ces opérations n'ont pas besoin d'être éclaircies, si l'on tient compte du « jaugeage ». Elles se réduisent aux opérations fondamentales de l'algèbre affinorielle pour les densités affinorielles. Dans ce cas aussi bien que dans le cas des densités scalaires, l'addition la soustraction ne s'effectue que pour les densités de même poids.

II.

4. **Notes préliminaires.** — La différentielle covariante (δ) et la dérivée covariante (∇_μ) d'un vecteur arbitraire v^ν, (w_λ) sont données par

(a) $$\begin{aligned} &\delta v^\nu = dv^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda dx^\mu, \quad \delta w_\lambda = dw_\lambda - \Gamma^\nu_{\lambda\mu} w_\nu dx^\mu \\ &\nabla_\mu v^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} v^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda, \quad \nabla_\mu w_\lambda = \frac{\partial}{\partial x^\mu} w_\lambda - \Gamma^\nu_{\lambda\mu} w_\nu. \end{aligned}$$

Les n^3 coefficients $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ se transforment d'après

$$(b) \qquad {}'\Gamma^{\varkappa}_{\omega\pi} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial' x^{\omega}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial' x^{\pi}} \frac{\partial' x^{\varkappa}}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \frac{\partial' x^{\varkappa}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial' x^{\pi} \partial' x^{\omega}}.$$

Il s'ensuit que les coefficients $\Gamma_{\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}$ se transforment d'après

$$(b') \qquad {}'\Gamma_{\pi} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial' x^{\pi}} \Gamma_{\mu} - \frac{\partial}{\partial' x^{\pi}} \log |\Delta|.$$

Le mode de transformation de $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ nous fait voir que

$$(c) \qquad \Gamma^{\nu}_{[\lambda\mu]} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}) = S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$$

est un affineur.

5. **Déplacement de $\mathfrak{e}$.** — Pour connaître la différentielle covariante ou la dérivée covariante d'une densité quelconque, l'essentiel est de trouver celle de $\mathfrak{e}$ et de $\mathfrak{e}^{-1}$. Cette densité $\mathfrak{e}$ étant arbitraire, on peut la construire au moyen du déterminant u des composantes $\underset{a}{u}^{\nu}$ des n vecteurs contrevariants $\underset{a}{u}(a = 1, \ldots n)$. On choisit une constante arbitraire $\varepsilon \neq 0$ et on pose $\mathfrak{e} = |\varepsilon u|$. Il s'ensuit

$$\frac{1}{u} \nabla_{\mu} u = \frac{1}{|\varepsilon u|} \nabla_{\mu} |\varepsilon u| = \mathfrak{e}^{-1} \nabla_{\mu} \mathfrak{e}$$

et d'autre part, si l'on prend pour $\overset{a}{u}_{\nu}$ le vecteur covariant dont les composantes égalent les compléments algébriques de $\underset{a}{u}^{\nu}$ divisés par u

$$\frac{1}{u} \nabla_{\mu} u = \underset{a}{\Sigma} \overset{a}{u}_{\nu} \nabla_{\mu} \underset{a}{u}^{\nu} = \underset{a}{\Sigma} \overset{a}{u}_{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \underset{a}{u}^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \underset{a}{u}^{\lambda} \right) = \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} u + \Gamma_{\mu} = \mathfrak{e}^{-1} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \mathfrak{e} + \Gamma_{\mu}.$$

Il s'ensuit

$$(3) \qquad \nabla_{\mu} \mathfrak{e} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \mathfrak{e} + \Gamma_{\mu} \mathfrak{e} \quad \text{et} \quad \delta \mathfrak{e} = d\mathfrak{e} + \Gamma_{\mu} \mathfrak{e}\, dx^{\mu}.$$

L'expression $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \mathfrak{e} + \Gamma_{\mu} \mathfrak{e}$ se transforme d'après

$$\frac{\partial}{\partial' x^{\mu}} {}'\mathfrak{e} + {}'\Gamma_{\mu} {}'\mathfrak{e} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial' x^{\mu}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} |\Delta| \mathfrak{e} + |\Delta|\, \Gamma_{\alpha} \mathfrak{e} - |\Delta| \mathfrak{e} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \log |\Delta| \right) = |\Delta| \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial' x^{\mu}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \mathfrak{e} + \Gamma_{\alpha} \mathfrak{e} \right).$$

C'est donc une densité et $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\log \mathfrak{e} + \Gamma_\mu = e_\mu$ est un vecteur. Nous pouvons écrire

(4) $$\nabla_\mu \mathfrak{e} = e_\mu \mathfrak{e} = \mathfrak{e}_\mu, \quad \text{et} \quad \delta\mathfrak{e} = \mathfrak{e} e_\mu dx^\mu = \mathfrak{e}_\mu dx^\mu.$$

On déduit de la manière analogue, ou en se servant du fait que $(\nabla_\mu \mathfrak{e})\mathfrak{e}^{-1} + (\nabla_\mu \mathfrak{e}^{-1})\mathfrak{e} = 0$,

(5) $$\nabla_\mu \mathfrak{e}^{-1} = -\mathfrak{e}^{-1} e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\mathfrak{e}^{-1} - \Gamma_\mu \mathfrak{e}^{-1}.$$

En tenant compte de l'équation

(6) $$\nabla_\mu \mathfrak{e}^k = k\mathfrak{e}^{k-1}\nabla_\mu \mathfrak{e} \quad \text{et} \quad (\nabla_\mu \mathfrak{e}^k)\mathfrak{e}^{-k} + (\nabla_\mu \mathfrak{e}^{-k})\mathfrak{e}^k = 0 \qquad (k \gtrless 0)$$

on parvient à

(7) $$\nabla_\mu \mathfrak{e}^k = k\mathfrak{e}^k e_\mu = \frac{\partial \mathfrak{e}^k}{\partial x^\mu} + k\Gamma_\mu \mathfrak{e}^k \quad \text{et} \quad \delta\mathfrak{e}^k = k\mathfrak{e}^k e_\mu dx^\mu = d\mathfrak{e}^k + k\Gamma_\mu \mathfrak{e}^k dx^\mu, \quad (k \gtrless 0).$$

Ces équations, aussi bien que (3)-(6) nous représentent ce que nous appelons le déplacement des densités $\mathfrak{e}^k (k \gtrless 0)$.

6. **Déplacement d'une densité scalaire.** — En appliquant l'opérateur ∇_μ à (1), (*a*), on obtient

(8) $$\nabla_\mu \overset{k}{\mathfrak{v}} = (\nabla_\mu v)\mathfrak{e}^k + k\mathfrak{e}^k e_\mu = \frac{\partial \overset{k}{\mathfrak{v}}}{\partial x^\mu} + k\Gamma_\mu \overset{k}{\mathfrak{v}}$$

et

(9) $$\delta \overset{k}{\mathfrak{v}} = (dv)\mathfrak{e}^k + k\mathfrak{e}^k e_\mu dx^\mu = d\overset{k}{\mathfrak{v}} + k\Gamma_\mu \overset{k}{\mathfrak{v}} dx^\mu.$$

Ces équations sont de même valables pour $k < 0$.

La dérivée et la différentielle covariante de la densité $\overset{k}{\mathfrak{v}}\underset{l}{\mathfrak{w}}$ se calcule d'après la règle

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \overset{k}{\mathfrak{v}}\underset{l}{\mathfrak{w}} &= (\nabla_\mu \overset{k}{\mathfrak{v}})\underset{l}{\mathfrak{w}} + (\nabla_\mu \underset{l}{\mathfrak{w}})\overset{k}{\mathfrak{v}} = [\nabla_\mu vw + (k-l)vwe_\mu]\mathfrak{e}^{k-l} = \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\overset{k}{\mathfrak{v}}\underset{l}{\mathfrak{w}} + (k-l)\Gamma_\mu \overset{k}{\mathfrak{v}}\underset{l}{\mathfrak{w}} \\
\delta \overset{k}{\mathfrak{v}}\underset{l}{\mathfrak{w}} &= (\delta\overset{k}{\mathfrak{v}})\underset{l}{\mathfrak{w}} + (\delta\underset{l}{\mathfrak{w}})\overset{k}{\mathfrak{v}} = [dvw + (k-l)vwe_\mu dx^\mu]\mathfrak{e}^{k-l} = \\
&= d\overset{k}{\mathfrak{v}}\underset{l}{\mathfrak{w}} + (k-l)\Gamma_\mu \overset{k}{\mathfrak{v}}\underset{l}{\mathfrak{w}}.
\end{aligned} \qquad (k \gtrless l)$$

Si $\mathfrak{e}$ décrit un contour infinitésimal fermé, elle revient à son point de départ avec le changement qui se calcule au moyen de la formule

$$(10)\qquad \begin{aligned}(\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1)\mathfrak{e} &= \delta_1\mathfrak{e}e_\omega d_2x^\omega-\delta_2\mathfrak{e}e_\mu d_1x^\mu=(\delta_1\mathfrak{e})e_\omega d_2x^\omega+\mathfrak{e}d_1(d_2\log\mathfrak{e}+\Gamma_\omega d_2x^\omega)\\ &-(\delta_2\mathfrak{e})e_\mu d_1x^\mu-\mathfrak{e}d_2(d_1\log\mathfrak{e}+\Gamma_\mu d_1x^\mu)=2d_1x^\mu d_2x^\omega\frac{\partial}{\partial x^{[\mu}}\Gamma_{\omega]}\mathfrak{e}.\end{aligned}$$

7. **Bivecteur $V_{\omega\mu}$.** — Nous désignerons le bivecteur $2\frac{\partial}{\partial x^{[\mu}}\Gamma_{\omega]}$ par $V_{\omega\mu}$ et par $\mathfrak{V}_{\omega\mu}$ la densité $\mathfrak{e}V_{\omega\mu}$. Il s'ensuit pour (10)

$$(11)\qquad (\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1)\mathfrak{e}=\mathfrak{V}_{\omega\mu}d_1x^\mu d_2x^\omega.$$

On peut donner à $V_{\omega\mu}$ une autre forme qui rappelle la notion de la « Streckenkrümmung » de M. WEYL. Si $g_{\lambda\nu}$ est un affineur quelconque symétrique, g le déterminant de $g_{\lambda\nu}$ et $g^{\lambda\nu}$ le complément algébrique de $g_{\lambda\nu}$ dans g, divisé par g, on obtient sans difficulté

$$g^{\lambda\nu}\nabla_\mu g_{\lambda\nu}=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\log g-2\Gamma_\mu.$$

Or en désignant par Q_μ le vecteur $g^{\lambda\nu}\nabla_\mu g_{\lambda\nu}$ on peut écrire

$$(12)\qquad V_{\omega\mu}=\frac{\partial}{\partial x^{[\omega}}Q_{\mu]}=(\nabla_{[\omega}Q_{\mu]}-S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha}Q_\alpha).$$

Il est évident que si $\nabla_\mu g_{\lambda\nu}=\frac{1}{n}Q_\mu g_{\lambda\nu}$ et $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}=0$, l'affineur $V_{\omega\mu}$ correspond essentiellement à la « Streckenkrümmung ».

L'opérateur $\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1$ satisfait l'équation symbolique

$$(13)\qquad \begin{aligned}\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1 &= \delta_1 d_2x^\alpha\nabla_\alpha-\delta_2 d_1x^\alpha\nabla_\alpha=(\delta_1d_2x^\alpha-\delta_2d_1x^\alpha)\nabla_\alpha+\\ &+2d_1x^\mu d_2x^\omega\nabla_{[\mu}\nabla_{\omega]}=2d_1x^\mu d_2x^\omega(\nabla_{[\mu}\nabla_{\omega]}+S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha}\nabla_\alpha).\end{aligned}$$

En l'appliquant à (11), on obtient

$$(14)\qquad \mathfrak{V}_{\omega\mu}-2S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha}\mathfrak{e}_\alpha=2\nabla_{[\mu}\nabla_{\omega]}\mathfrak{e}.$$

Les équations (11) et (14) nous permettent d'écrire pour une densité scalaire quelconque

$$(15)\qquad (\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1)\overset{k}{\mathfrak{v}}=kV_{\omega\mu}\overset{k}{\mathfrak{v}}d_1x^\mu d_2x^\omega,\quad 2\nabla_{[\mu}\nabla_{\omega]}\overset{k}{\mathfrak{v}}=kV_{\omega\mu}\overset{k}{\mathfrak{v}}-2S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha}\nabla_\alpha\overset{k}{\mathfrak{v}},\quad (k\gtrless 0).$$

8. **Déplacement des densités affinorielles.** — Soit $\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^\nu = v^\nu \mathfrak{e}^k$ une densité vectorielle contrevariante de poids positif, ou négatif. L'application de l'opérateur ∇_μ à cette équation nous donne

$$\nabla_\mu \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^\nu = (\nabla_\mu v^\nu)\mathfrak{e}^k + k\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^\nu e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^\lambda + k\Gamma_\mu \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^\nu \qquad (k \gtreqless 0) \tag{16}$$

et par suite aussi

$$\delta \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^\nu = (\delta v^\nu)\mathfrak{e}^k + k\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^\nu e_\mu dx^\mu = d\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^\lambda dx^\mu + k\Gamma_\mu \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^\nu dx^\mu, \qquad (k \gtreqless 0). \tag{17}$$

En cas que l'on a affaire au déplacement symétrique ($\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}$, ou bien, d'après M. CARTAN, au « déplacement à torsion nulle ») la formule (16) nous donne

$$\nabla_\mu \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^\mu + (k+1)\Gamma_\mu \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^\mu, \qquad (k \gtreqless 0).$$

Si $k = -1$ on obtient la formule bien connue

$$\nabla_\mu \underset{1}{\mathfrak{v}}{}^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\underset{1}{\mathfrak{v}}{}^\mu.$$

On déduit da le manière analogue pour une densité vectorielle covariante $\overset{k}{\mathfrak{w}}_\lambda = w_\lambda \mathfrak{e}^k$

$$\nabla_\mu \overset{k}{\mathfrak{w}}_\lambda = (\nabla_\mu w_\lambda)\mathfrak{e}^k + k\overset{k}{\mathfrak{w}}_\lambda e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\overset{k}{\mathfrak{w}}_\lambda - \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\overset{k}{\mathfrak{w}}_\nu + k\Gamma_\mu \overset{k}{\mathfrak{w}}_\lambda. \tag{18}$$

L'alternation sur μ, λ nous donne

$$\nabla_{[\mu}\overset{k}{\mathfrak{w}}_{\lambda]} = (\nabla_{[\mu} w_{\lambda]})\mathfrak{e}^k + k\overset{k}{\mathfrak{w}}_{[\lambda} e_{\mu]} \tag{19}$$

et si w_λ est un vecteur gradient

$$\nabla_{[\mu}\overset{k}{\mathfrak{w}}_{\lambda]} = S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\,\alpha}\overset{k}{\mathfrak{w}}_\alpha + k\overset{k}{\mathfrak{w}}_{[\lambda} e_{\mu]}. \tag{19'}$$

En posant $w_\lambda = e_\lambda$ et $k = 1$ on obtient de (19)

$$\nabla_{[\mu}\mathfrak{e}_{\lambda]} = \nabla_{[\mu}\nabla_{\lambda]}\mathfrak{e} = (\nabla_{[\mu} e_{\lambda]})\mathfrak{e} \tag{20}$$

et si e_λ est un vecteur gradient

$$\nabla_{[\mu}\mathfrak{e}_{\lambda]} = \nabla_{[\mu}\nabla_{\lambda]}\mathfrak{e} = S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\,\alpha}\mathfrak{e}_\alpha. \tag{20'}$$

Dans ce cas, on a d'après (14), $\mathfrak{V}_{\omega\mu} = 0$. Et au contraire, si $\mathfrak{V}_{\omega\mu} = 0$, e_μ est le vecteur-gradient, comme il suit de l'équation (14) qui d'après (20) est équivalente à

$$\frac{1}{2}\mathfrak{V}_{\omega\mu} = \mathfrak{e}(\nabla_{[\mu} e_{\omega]} + S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\,\alpha} e_\alpha). \tag{21}$$

En effet, si $\mathfrak{V}_{\omega\mu} = 0$ on a $\nabla_{[\mu} e_{\omega]} = S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\,\alpha} e_\alpha$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial x^{[\mu}} e_{\omega]} = 0, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Si e_μ est le vecteur gradient, $e_\mu = \nabla_\mu f$, on peut toujours trouver une densité stationnaire, dont la dif., ainsi que la dérivée covariante est nulle. Il suffit, à cet effet, de poser

$$\mathfrak{v} = v\mathfrak{e} \quad \text{avec} \quad v = e^{-f}\,\text{const.}$$

Or

$$\delta\mathfrak{v} = \mathfrak{e}dv + v\delta\mathfrak{e} = \mathfrak{e}(dv + ve_\mu dx^\mu) = 0.$$

On pourrait même prendre cette densité pour la densité « unité ». Dans ce cas l'analyse des densités est bien simple. En designant cette densité stationnaire par $'\mathfrak{e}$, on a pour chaque densité $\overset{k}{\mathfrak{w}} = w'\mathfrak{e}^k$, $\overset{k}{\mathfrak{w}}{}_{\lambda_1\ldots\lambda_p}^{\cdot\cdots\cdot\,\nu_1\ldots\nu_s} = w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}^{\cdot\cdots\cdot\,\nu_1\ldots\nu_s}\,'\mathfrak{e}^k$

$$\delta\overset{k}{\mathfrak{w}} = (dw)'\mathfrak{e}^k, \quad \text{ou} \quad \delta\overset{k}{\mathfrak{w}}{}_{\lambda_1\ldots\lambda_p}^{\cdot\cdots\cdot\,\nu_1\ldots\nu_s} = \left(\delta w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}^{\cdot\cdots\cdot\,\nu_1\ldots\nu_s}\right)'\mathfrak{e}^k.$$

En posant

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma_{\lambda\omega}^\nu - \frac{\partial}{\partial x^\omega}\Gamma_{\lambda\mu}^\nu - \Gamma_{\alpha\omega}^\nu\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu\Gamma_{\lambda\omega}^\alpha,$$

on trouve sans difficulté

$$V_{\omega\mu} = R_{\omega\mu\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\,\alpha}.$$

$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu}$ est la quantité de courbure de déplacement étudié. La condition $R_{\omega\mu\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\,\alpha} = 0$ est bien connue comme suffisante et nécessaire pour que ce déplacement soit isométrique [1]. D'après ce que nous avons démontré, on peut donc dire :

L'isométrie du déplacement est nécessaire et suffisante pour que la densité unité puisse être supposée stationnaire.

[1] Le déplacement est dit isométrique, si un n-vecteur arbitraire revient sans changement à son point de départ, après avoir décrit un contour infinitésimal fermé. Pour la condition citée ci-dessus, voir le livre de M. Schouten, page 89.

Les relations (12) et (21) nous donnent

$$\nabla_{[\omega} q_{\mu]} = S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha} q_\alpha \qquad\qquad (q_\mu = Q_\mu + 2e_\mu).$$

Or, q_μ est un vecteur-gradient, $q_\mu = \nabla_\mu q$ et on peut le supposer toujours nul. En effet, si l'on opère sur $s g_{\lambda\mu} = 'g_{\lambda\mu}$, $s^{-1} g^{\lambda\nu} = 'g^{\lambda\nu}$, on obtient

$$'q_\mu = 'Q_\mu + 2e_\mu = n\nabla_\mu \log s + q_\mu.$$

Or en posant $s = e^{-\frac{q}{n}}$ const., on obtient $'q_\mu = 0$, et en supprimant l'accent on parvient au résultat cherché. On peut donc poser

$$e_\mu = -\frac{1}{2} Q_\mu. \tag{22}$$

Il s'ensuit que le déplacement conforme $\nabla_\mu g_{\lambda\nu} = \frac{1}{n} Q_\mu g_{\lambda\nu}$ et isométrique est nécessairement *métrique* sans être riemannien, en général. En effet, l'isométrie a pour conséquence que $\mathfrak{e}$ peut être supposée stationnaire, c'est-a-dire d'après (22) $Q_\mu = 0$, et on obtient $\nabla_\mu g_{\lambda\nu} = 0$, ce qui caractérise le déplacement métrique.

Les formules (16)-(18) nous servent à établir la différentielle et la dérivée covariante de chaque densité affinorielle. On déduit par exemple pour
$\overset{k}{\mathfrak{w}}{}_\mu^{\cdot\nu} = w_\mu^{\cdot\nu} \mathfrak{e}^k$

$$\left.\begin{aligned}
\nabla_\omega \overset{k}{\mathfrak{w}}{}_\mu^{\cdot\nu} &= \mathfrak{e}^k \nabla_\omega w_\mu^{\cdot\nu} + k\overset{k}{\mathfrak{w}}{}_\mu^{\cdot\nu} e_\omega = \frac{\partial}{\partial x^\omega} \overset{k}{\mathfrak{w}}{}_\mu^{\cdot\nu} + \Gamma_{\alpha\omega}^\nu \overset{k}{\mathfrak{w}}{}_\mu^{\cdot\alpha} - \Gamma_{\mu\omega}^\alpha \overset{k}{\mathfrak{w}}{}_\alpha^{\cdot\nu} + k\Gamma_\omega \overset{k}{\mathfrak{w}}{}_\mu^{\cdot\nu} \\
\delta \overset{k}{\mathfrak{w}}{}_\mu^{\cdot\nu} &= \mathfrak{e}^k \delta w_\mu^{\cdot\nu} + k\overset{k}{\mathfrak{w}}{}_\mu^{\cdot\nu} e_\omega dx^\omega = d\overset{k}{\mathfrak{w}}{}_\mu^{\cdot\nu} + dx^\omega (\Gamma_{\alpha\omega}^\nu \overset{k}{\mathfrak{w}}{}_\mu^{\cdot\alpha} - \Gamma_{\mu\omega}^\alpha \overset{k}{\mathfrak{w}}{}_\alpha^{\cdot\nu} + k\Gamma_\omega \overset{k}{\mathfrak{w}}{}_\mu^{\cdot\nu}),
\end{aligned}\right\} \quad (k \gtrless 0).$$

Si le déplacement est symétrique, on déduit pour $k = -1$ la formule bien connue

$$\nabla_\lambda \underset{1}{\mathfrak{w}}{}_\mu^{\cdot\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \underset{1}{\mathfrak{w}}{}_\mu^{\cdot\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \underset{1}{\mathfrak{w}}{}_\alpha^{\cdot\lambda}.$$

9. **Transformation du déplacement.** — Désignons par $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$, $^*\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ les coefficients de deux déplacements divers dans la variété étudiée. L'équation *b)* nous apprend que la différence $^*\Gamma_{\lambda\mu}^\nu - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ est un *affineur*

$$^*\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + A_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}.$$

En designant par A_μ le vecteur $A_{\alpha\mu}^{\cdot\cdot\alpha}$, on trouve sans difficulté

$$*V_{\omega\mu} = 2\frac{\partial}{\partial x^{[\mu}}{}^*\Gamma_{\omega]} = V_{\omega\mu} + 2(\nabla_{[\mu}A_{\omega]} + S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha}A_\alpha).$$

Or, pour que pendant la transformation du déplacement l'affineur $V_{\omega\mu}$ ne change pas, il est nécessaire et suffisant que A_μ soit un vecteur-gradient. Si la transformation du déplacement est isohodoïque (c'est-à-dire si elle conserve les lignes géodésiques), l'affineur $A_{\lambda\mu}^{\nu}$ est de la forme $A_\lambda^\nu p_\mu + A_\mu^\nu q_\lambda$ (¹). Or, la *transformation isohodoïque n'altère pas la densité* $\mathfrak{V}_{\omega\mu}$, *si* $\mathrm{A}_\mu = \mathrm{n}\mathrm{p}_\mu + \mathrm{q}_\mu$ *est le vecteur-gradient* (²).

10. **Courbures.** — Si une densité vectorielle $\overset{k}{\mathfrak{w}}_\lambda = w_\lambda \mathfrak{e}^k$ décrit un contour fermé infiniment petit, elle revient à son point de départ avec le changement qui se calcule à l'aide de

$$(23)\qquad (\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)\overset{k}{\mathfrak{w}}_\lambda = \mathfrak{e}^k(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)w_\lambda + w_\lambda(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)\mathfrak{e}^k = \\ = d_1x^\mu d_2x^\omega(-R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + kA_\lambda^\nu V_{\omega\mu})\overset{k}{\mathfrak{w}}_\nu, \qquad (k \gtreqless 0).$$

L'application de l'équation symbolique (13) à (23) nous donne

$$(24)\qquad 2\nabla_{[\mu}\nabla_{\omega]}\overset{k}{\mathfrak{w}}_\lambda = \overset{k}{\mathfrak{w}}_\nu(R_{\mu\omega\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + kA_\lambda^\nu V_{\omega\mu}) + 2S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\alpha}\nabla_\alpha\overset{k}{\mathfrak{w}}_\lambda \qquad (k \gtreqless 0).$$

Spécialement pour $k=1$, $\mathfrak{w}_\lambda = \mathfrak{e}_\lambda$

$$2\nabla_{[\mu}\nabla_{\omega]}\mathfrak{e}_\lambda = 2\nabla_{[\mu}\nabla_{\omega]}\nabla_\lambda\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_\nu(R_{\mu\omega\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + A_\lambda^\nu V_{\omega\mu}) + 2S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\alpha}\nabla_\alpha\mathfrak{e}_\lambda,$$

d'où il suit

$$(25)\qquad 2\nabla_{[\lambda}\nabla_\mu\nabla_{\omega]}\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_\nu(R_{[\mu\omega\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + A_{[\lambda}^\nu V_{\omega\mu]}) + 2(\nabla_\alpha\mathfrak{e}_{[\lambda})S_{\mu\omega]}^{\cdot\cdot\alpha}.$$

Mais d'autre part, l'application de l'opérateur ∇_λ à (14) et l'alternation des indices ω, μ, λ nous donne

$$(26)\qquad 2\nabla_{[\lambda}\nabla_\mu\nabla_{\omega]}\mathfrak{e} = \nabla_{[\lambda}\mathfrak{V}_{\omega\mu]} - 2S_{[\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha}\nabla_{\lambda]}\mathfrak{e}_\alpha - 2\mathfrak{e}_\alpha\nabla_{[\lambda}S_{\omega\mu]}^{\cdot\cdot\alpha}.$$

(¹) WEYL, *Mathematische Analyse des Raumproblems*, Springer 1923, pour le déplacement symétrique, page 64. Dans cette formule A_λ^ν est l'affineur unité

$$A_\lambda^\nu = \begin{cases} 0, & \lambda \neq \nu \\ 1, & \lambda = \nu \text{ (sans sommation).}\end{cases}$$

(²) Pour le déplacement affine isométrique un théorème analogue se trouve dans le livre de M. SCHOUTEN, page 129. Pour le cas le plus général voir aussi: HLAVATY, *Sur le déplacements isohodoïques.* (« L'Enseignement Mathématique », XXVI, 1927, n.° 1-3).

Or, en tenant compte de l'équation

$$R_{[\omega\mu\lambda]}{}^{\nu} = 4S_{[\omega\mu}{}^{\alpha}S_{\lambda]\alpha}{}^{\nu} + 2\nabla_{[\omega}S_{\mu\lambda]}{}^{\nu} \quad (^1)$$

on déduit de (25) et (26)

$$\boxed{\nabla_{[\lambda}\mathfrak{V}_{\omega\mu]} = -2S_{[\omega\mu}{}^{\alpha}\mathfrak{V}_{\lambda]\alpha} + e_{[\omega}\mathfrak{V}_{\mu\lambda]}.}$$

Cette équation nous représente l'analogie de l'identité de BIANCHI pour $\nabla_{[\xi}R_{\omega\mu]\lambda}{}^{\nu}$. Elle devient

$$\nabla_{[\lambda}\mathfrak{V}_{\omega\mu]} = e_{[\omega}\mathfrak{V}_{\mu\lambda]}$$

pour le déplacement symétrique, non-isométrique. Si le déplacement est isométrique, elle se réduit à l'identité $0 = 0$.

On déduit de même pour une densité vectorielle contrevariante :

$$(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\nu} = \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\lambda}d_1x^{\mu}d_2x^{\omega}(R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} + kA_{\lambda}^{\nu}V_{\omega\mu})$$

$$2\nabla_{[\mu}\nabla_{\omega]}\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\nu} = \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\lambda}(R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} + kA_{\lambda}^{\nu}V_{\omega\mu}) + 2S_{\mu\omega}{}^{\alpha}\nabla_{\alpha}\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\nu}$$

et en général pour une densité quelconque affinorielle, par exemple $\overset{k}{\mathfrak{w}}_{\mu}{}^{\nu}$:

$$\left.\begin{aligned}(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)\overset{k}{\mathfrak{w}}_{\lambda}{}^{\nu} &= d_1x^{\mu}d_2x^{\omega}[\overset{k}{\mathfrak{w}}_{\alpha}{}^{\nu}(R_{\mu\omega\lambda}{}^{\alpha} + kA_{\lambda}^{\alpha}V_{\omega\mu}) + \overset{k}{\mathfrak{w}}_{\lambda}{}^{\alpha}(R_{\omega\mu\alpha}{}^{\nu} + kA_{\alpha}^{\nu}V_{\omega\mu})]\\ 2\nabla_{[\mu}\nabla_{\omega]}\overset{k}{\mathfrak{w}}_{\lambda}{}^{\nu} &= \overset{k}{\mathfrak{w}}_{\alpha}{}^{\nu}(R_{\mu\omega\lambda}{}^{\alpha} + kA_{\lambda}^{\alpha}V_{\omega\mu}) + \overset{k}{\mathfrak{w}}_{\lambda}{}^{\alpha}(R_{\omega\mu\alpha}{}^{\nu} + kA_{\alpha}^{\nu}V_{\omega\mu}) + 2S_{\mu\omega}{}^{\alpha}\nabla_{\alpha}\overset{k}{\mathfrak{w}}_{\lambda}{}^{\nu}\end{aligned}\right\} \quad (k \gtrless 0).$$

Nous espérons, par les brèves indications précédentes, avoir suffisamment démontré la cohérence du calcul tensoriel et de celui des densités. On s'aperçoit que celui-là est un cas spécial de celui-ci.

Prague, juin 1926.

(1) SCHOUTEN, *Ricci-Kalkül*, page 88.

Sulla pressoflessione del cemento armato.

Memoria di A. SIGNORINI (a Napoli).

§ 1. **Sunto della Memoria. Il teorema di riduzione.**

1. La resistenza a trazione dei conglomerati (e delle murature in genere) è molto scarsa ed incerta: e questo costituisce il principale motivo per cui la risoluzione dei problemi della statica del cemento armato (e delle murature semplici) non può essere sistematicamente domandata alla teoria dell'elasticità (1).

Già da tempo i tecnici hanno concesso un'incondizionata patente d'esercizio ad una teoria della pressoflessione del cemento armato (e delle murature semplici) costruita combinando alcune proprietà dei solidi perfettamente elastici coll'ipotesi estremamente schematica di assoluta mancanza di resistenza a trazione nel conglomerato (e di perfetta validità della legge di HOOKE nella sollecitazione a compressione dello stesso materiale).

I fondamenti di tale teoria non sono stati finora sottoposti ad una prova di resistenza in riguardo alla loro capacità a ridurre il problema tecnico ad una questione puramente analitica: cioè, in riguardo alla loro capacità ad individuare una ed una sola soluzione del problema per qualunque tipo di trave (o pilastro) in cemento armato ed in qualunque caso di sollecitazione a pressoflessione.

Il desiderio di colmare tale lacuna mi indusse ad iniziare gli studi esposti nella presente Memoria, studi che in definitiva si sono informati al doppio

---

(1) Cfr. ad es. A. SIGNORINI, *Sulla statica del cemento armato.* [Rend. del Seminario Matematico della R. Università di Roma (1924-25), serie 2a, vol. III]. In questa conferenza sono enunciati quasi tutti i risultati della Memoria. Un sunto delle dimostrazioni relative al caso particolare delle murature semplici è già stato pubblicato nelle due Note: *Un teorema d'esistenza ed unicità nella statica dei materiali poco resistenti a trazione* e *Sulla pressoflessione delle murature* [Rend. della R. Accademia dei Lincei, vol. II, serie 6a (2° semestre 1925), pagg. 401-406 e 484-489]. I risultati della Memoria furono pure esposti in una comunicazione al 2° Congresso internazionale di Meccanica applicata [V. « Verhandlungen des zweiten internationalen Kongresses für Technische Mechanik », pagg. 278-283 (Orell Füssli, Zurigo, 1927)].

scopo di consolidare i fondamenti della teoria ordinaria e di mettere in evidenza tutta la sua portata.

Ho cercato di raggiungere il primo scopo sviluppando nelle sue parti essenziali la teoria che risulta dall'abbandono dell'usuale schema di rappresentazione delle prove di resistenza dei conglomerati (e delle murature).

Successivamente ho stabilito dei teoremi di confronto che riconducono i calcoli di stabilità relativi alla teoria generalizzata nell'ambito della teoria ordinaria, in modo semplice e facendo intervenire soltanto elementi facilmente e sicuramente deducibili dai diagrammi delle prove di resistenza: ed un teorema di riduzione che implica la perfetta equivalenza analitica della teoria ordinaria colla teoria meno semplicista in cui il conglomerato obbedisce alla legge di HOOKE (non solo nella sollecitazione a compressione, ma anche) fino ad un certo allungamento unitario positivo, a partire dal quale la tensione unitaria si conserva costante.

Si possono immaginare dei casi nei quali il prescindere dalla resistenza a trazione nel conglomerato risulta sfavorevole alla stabilità: ove essi presentassero un effettivo interesse pratico, il teorema di riduzione fornirebbe il procedimento più conveniente per i relativi calcoli di verifica e di progetto.

I titoli dei singoli numeri del presente paragrafo possono servire come un indice quasi completo.

2. Costituzione e sollecitazione del sistema. — Sia C un cilindro retto in cemento armato (trave o pilastro): precisamente supponiamo C costituito per una parte, C_c, da materiale omogeneo poco resistente a trazione (conglomerato) e per la parte residua, C_a, da un'armatura metallica, pure omogenea, risultante da un certo numero di cilindri ognuno dei quali abbia in comune con C tanto la direzione delle generatrici quanto l'altezza.

Dette S, S' le due basi di C, rappresenteremo con S_c, S_a le due regioni di S rispettivamente spettanti a C_c e C_a, cioè *la sezione del conglomerato* e *la sezione dell'armatura:* con G_c e G_a i baricentri di S_c ed S_a. Il caso particolare delle murature semplici corrisponderà ad $S_a \equiv 0$. Non può escludersi che l'area piana S sia molteplicemente connessa o, pur essendo semplicemente connessa, non sia convessa (travi a **T**, etc.): in relazione a ciò risulta conveniente definire come *contorno corretto* di S la curva piana convessa s inviluppata dalle tangenti ad S che non tagliano S. Sempre per amore di brevità, converrà pure — in corrispondenza alla regione generica σ_c di S_c e ad un qualunque valore positivo del parametro ν — adottare il simbolo

$$\sigma_c + \nu S_a$$

per indicare la superficie piana non omogenea ottenuta attribuendo a σ_c ed S_a densità rispettivamente eguali ad 1 e ν.

La più generale sollecitazione a pressoflessione del nostro cilindro corrisponde all'ipotesi che su S agisca un sistema di forze superficiali Σ equivalente alla pressione normale $\boldsymbol{P}$ applicata in un certo punto O del piano di S — *centro di pressione* —; su S' (o direttamente, o per effetto di un vincolo opportuno) sia distribuito un sistema di forze superficiali equivalente a $-\Sigma$; siano trascurabili le forze di massa e le forze agenti sulla superficie laterale (anche se il vincolo di S' corrisponde ad un incastro).

Per ridursi al caso della *flessione semplice* basterà supporre P infinitesima ed O infinitamente lontano, in modo però che il momento risultante di Σ (rispetto ad un punto qualunque di S) abbia un valore finito e $\neq 0$. Le condizioni che caratterizzano il caso della *pressione semplice* saranno specificate in appresso (V. n.[i] 3 e 7).

Contrassegneremo colla qualifica di *simmetrico* il caso che S_c ed S_a abbiano in comune un asse di simmetria (ortogonale od obliqua) passante per O: asse che evidentemente conterrà tutti e tre i punti O, G_c, G_a.

3. Ipotesi della teoria ordinaria. — Rappresentiamo con A il punto generico di C: con (x, y, z) una terna trirettangola di origine O avente l'asse positivo z orientato come la normale interna a C; con S_z la sezione normale generica del cilindro; con ε_z il coefficiente di dilatazione lineare nella direzione z (1) e con σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z le caratteristiche dello stress in A; con ε_{max} ed ε_{min} i valori algebrici del massimo e del minimo assoluto di ε_z in tutto C; con k_c il carico di sicurezza a compressione pel conglomerato; con k_p e k_t i carichi di sicurezza dell'armatura, rispettivamente a compressione ed a trazione.

Con queste notazioni le ipotesi della teoria ordinaria, quando debbano essere espresse in forma precisa e completa, possono enunciarsi nel modo appresso indicato.

A_1) *Indipendenza dello stress dalla distribuzione locale delle forze agenti sulle basi (Postulato di Saint-Venant).*

Per la base S le condizioni d'equilibrio possono identificarsi colle condizioni d'equivalenza tra la forza $-\boldsymbol{P}$ applicata in O ed il sistema delle forze interne applicate ai singoli elementi di S: ed analogamente per S'.

(1) Le altre caratteristiche dello strain rimangono *ignorate* in tutta la teoria.

A$_2$) *In tutto* C *è — come nella pressoflessione di un cilindro elastico —*

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0.$$

A$_3$) *Perfetta aderenza tra armatura e conglomerato e conservazione delle sezioni piane (Postulato di Bernoulli).*

In tutto C i valori di ε_z sono gli stessi che si avrebbero ove nella deformazione del cilindro ogni S_z ruotasse rigidamente di un angolo infinitesimo proporzionale a z attorno ad uno stesso asse l da scegliersi opportunamente nel piano di S — *asse limite* —.

A$_4$) *Validità della legge di Hooke nella sollecitazione delle armature.*

In C_a (qualunque sia il segno di ε_z)

$$\sigma_z = E_a \varepsilon_z$$

con $E_a =$ cost. positiva $=$ modulo di elasticità (normale) dell'armatura.

A$_5$) *Condizioni di stabilità per l'armatura*

$$- E_a \varepsilon_{min} \leq k_p, \quad T = E_a \varepsilon_{max} \leq k_t.$$

b$_1$) *Validità della legge di Hooke nella sollecitazione a compressione del conglomerato e sua assoluta mancanza di resistenza a trazione.*

In ogni punto di C_c ove sia $\varepsilon_z < 0$,

$$\sigma_z = E_m \varepsilon_z$$

con $E_m =$ cost. positiva $=$ modulo medio di elasticità (normale) del conglomerato: mentre in ogni punto di C_c ove sia $\varepsilon_z > 0$,

$$\sigma_z = 0.$$

b$_2$) *Condizione di stabilità pel conglomerato*

$$\tilde{\omega} = - E_m \varepsilon_{min} \leq k_c.$$

La denominazione *asse limite* è forse preferibile ad altre in uso per indicare la retta l, anche pel fatto che spontaneamente viene suggerita dal teorema enunciato al n.° 12 e dimostrato al n.° 33.

Invece, data in generale una superficie piana K (anche non omogenea) ed un punto A del suo piano, manterremo la denominazione classica *asse neutro di A rispetto a* K per indicare la retta antipolare di A rispetto all'ellisse centrale di K.

Non è escluso che l'asse limite possa ridursi alla retta all'infinito del piano (x, y) (caso della *pressione semplice*) e corrispondentemente la rotazione degeneri in una traslazione. Ad ogni modo, se l'asse neutro di O rispetto ad $S_c + \frac{E_a}{E_m} S_a$ non taglia S_c, l coincide con tale asse neutro, l'intera sezione è sollecitata a compressione, l'ipotesi b_1) rimane inavvertita. È pure ben noto che se fosse perfettamente elastico anche il materiale costituente C_c [cioè, al posto di b_1) si avesse $\sigma_z = E_m \varepsilon_z$ per ogni valore di ε_z] l'asse limite non differirebbe mai dall'asse neutro di O rispetto ad $S_c + \frac{E_a}{E_m} S_a$: del resto tutto ciò risulterà dalle considerazioni del n.° 27.

4. Ipotesi della teoria generale e relative notazioni. — Chiameremo *teoria generale* quella che risulta dalla sostituzione delle ipotesi b) colle seguenti B).

B_1) *Comportamento del conglomerato.*

In ogni punto di C_c è

$$\sigma_z = r[\varepsilon_z]$$

ove r rappresenta una funzione caratteristica del materiale — *funzione resistente* — che per $\varepsilon_z \neq 0$ ha sempre il segno di ε_z; per $\varepsilon_z <$ di un certo valore $\varepsilon_\tau \geq 0$ ha sempre derivata r' finita ($\leq r'_{max}$) e $\geq$ ad una certa costante positiva r'_{min} (¹); è continua anche per $\varepsilon_z = \varepsilon_\tau$ e per $\varepsilon_z > \varepsilon_\tau$ è costante ed eguale ad un certo valore τ (≥ 0).

B_2) *Condizione di stabilità pel conglomerato.*

$$\bar{\omega} = - r[\varepsilon_{min}] \leq k_c.$$

In corrispondenza alle ipotesi suindicate sarà comodo introdurre subito le notazioni

$$\begin{cases} \text{per } \varepsilon_z < 0, \quad r[\varepsilon_z] \equiv - p[-\varepsilon_z], \quad E_c = \dfrac{p[-\varepsilon_z]}{-\varepsilon_z}, \\ \text{per } \varepsilon_\tau > \varepsilon_z > 0, \quad r[\varepsilon_z] \equiv t[\varepsilon_z]; \end{cases}$$

ed osservare che in corrispondenza ad ogni $\varepsilon_z < 0$ risulta

$$r'_{min} \leq E_c \leq r'_{max}. \tag{1}$$

Inoltre chiameremo *funzione resistente ridotta* la funzione $-\bar{p}[-\bar{\varepsilon}_z]$ rappresentata dal diagramma della $r[\varepsilon_z]$ quando, con una traslazione, ai primi-

(¹) Dal lato fisico non si guadagnerebbe nulla in generalità permettendo alla r di tendere asintoticamente a τ per $\varepsilon_z = +\infty$: mentre la forma adottata nel testo rende più agili alcune locuzioni e dimostrazioni.

tivi assi coordinati (ε_z, r) si sostituiscano gli assi $(\bar{\varepsilon}_z, \bar{r})$ di origine (ε_τ, τ): ciò che equivale a porre

$$\bar{\varepsilon}_z = \varepsilon_z - \varepsilon_\tau, \quad -\bar{p}[\varepsilon_\tau - \varepsilon_z] = r[\varepsilon_z] - \tau.$$

Evidentemente sarà $\bar{p} \equiv 0$ per $\bar{\varepsilon}_z \geq 0$: mentre per $\varepsilon_z < 0$, ponendo

$$\bar{E}_c = \frac{\bar{p}[-\bar{\varepsilon}_z]}{-\bar{\varepsilon}_z} = \frac{\tau - r[\varepsilon_z]}{\varepsilon_\tau - \varepsilon_z},$$

risulterà sempre

$$r'_{min} \leq \bar{E}_c \leq r'_{max}. \tag{2}$$

La funzione resistente ridotta non differisce dalla funzione resistente effettiva tutte le volte che si prescinda dalla resistenza a trazione del conglomerato.

5. Casi particolari interessanti. — Le ipotesi B) si riducono alle b) non appena si supponga $p' = \text{cost.} = E_m$, $\tau = 0$: ed offrono un larghissimo margine per la più fedele rappresentazione dei risultati delle prove di resistenza, perchè non ritraggono neppure tutte le proprietà della r che sono suggerite dalle meno delicate esperienze.

Così, sul diagramma della funzione resistente di un qualunque conglomerato (o muratura in genere) si constata che E_c sempre decresce al crescere di $|\varepsilon_z|$: in particolare che, posto

$$E_0 = \lim_{|\varepsilon_z|=0} E_c = r'[-0], \quad k_c = p[\varepsilon_s], \quad E_s = \frac{k_c}{\varepsilon_s},$$

[non solo sussiste la (1), ma anche] per $-\varepsilon_s \leq \varepsilon_z \leq 0$ è sempre

$$E_s \leq E_c \leq E_0. \tag{$\mathcal{E}$}$$

Nel seguito useremo spesso anche le notazioni

$$\rho = \frac{E_s}{E_0}, \quad n = \frac{E_a}{E_0}.$$

Per i materiali ordinari è

$$\rho = \backsim \frac{9}{10}, \quad n = \backsim 10: \tag{3}$$

inoltre τ è sempre abbastanza piccolo in confronto al carico di rottura a compressione del conglomerato e *la condizione di stabilità* B_2) *assorbe* *la* 1ª *delle condizioni* A$_5$), perchè $\left(\text{mentre } \frac{E_a}{E_s} = \frac{n}{\rho} = \backsim 11\right) \frac{k_p}{k_c}$ non è mai molto discosto da 30 [1].

Per quanto la cosa non possa avere grande interesse pratico, non sarà superfluo il rilevare che le ipotesi A), B) si adattano non soltanto alle murature semplici ($S_a \equiv 0$) ed ai materiali elastici $\left(S_a \equiv 0, \ \frac{r[\varepsilon_z]}{\varepsilon_z} \equiv \text{cost.}\right)$, ma anche ($S_a \equiv 0$, $\tau = \infty$) ai materiali che, come la ghisa, resistono a trazione meno che a compressione, senza che si possa trattarli come materiali assolutamente privi di resistenza a trazione (Cfr. la nota al n.° 23).

Nel seguito avremo ripetutamente a riferirci, oltre che alla teoria ordinaria, ai seguenti casi particolari della teoria generale.

Teoria semilineare :

$$r[\varepsilon_z] = -p[|\varepsilon_z|] \text{ per } \varepsilon_z \leq 0, \quad r[\varepsilon_z] = E_0\varepsilon_z \text{ per } 0 \leq \varepsilon_z \leq \varepsilon_\tau > 0,$$
$$r[\varepsilon_z] = \tau = E_0\varepsilon_\tau \text{ per } \varepsilon_z \geq \varepsilon_\tau.$$

Teoria ridotta :

$$r[\varepsilon_z] = -p[|\varepsilon_z|] \text{ per } \varepsilon_z \leq 0, \quad r[\varepsilon_z] = 0 \text{ per } \varepsilon_z \geq 0.$$

Teoria lineare :

$$r[\varepsilon_z] = E_0\varepsilon_z \text{ per } -\infty < \varepsilon_z \leq \varepsilon_\tau > 0, \quad r[\varepsilon_z] = \tau = E_0\varepsilon_\tau \text{ per } \varepsilon_z \geq \varepsilon_\tau.$$

Teoria elastica :

$$r[\varepsilon_z] = E_0\varepsilon_z \text{ per } -\infty < \varepsilon_z < +\infty.$$

È evidente che la teoria ridotta e la teoria ordinaria rispettivamente si ricavano dalla teoria generale e dalla teoria lineare *prescindendo dalla resistenza a trazione* ($\tau = 0$) : mentre la teoria semilineare è quella che, in relazione alla scarsezza ed incertezza di dati circa la resistenza a trazione dei conglomerati (e delle murature in genere) si presenta come l'unica a cui ci si possa attenere in un qualunque concreto apprezzamento quantitativo sugli effetti della resistenza a trazione.

Si noti che, posto

$$\bar{E}_s = \frac{\tau + p[\varepsilon_s]}{\varepsilon_\tau + \varepsilon_s} = E_s \frac{\tau + k_c}{\rho\tau + k_c} > E_s,$$

---

[1] E un pò anche perchè, per ovvie ragioni costruttive, l'armatura è sempre protetta da un certo strato di conglomerato.

nella teoria semilineare [subordinatamente alla ($\mathfrak{S}$)] risulta

$$(\mathfrak{S}) \qquad \bar{E}_s \leq \bar{E}_c \leq E_0$$

tutte le volte che $-\varepsilon_T - \varepsilon_s \leq \bar{\varepsilon}_z \leq 0$.

6. Condizioni d'equilibrio nella teoria generale. — Sia L il piede della perpendicolare condotta da O all'asse limite l, (ξ, η) la coppia ortogonale di origine O, complanare e congruente ad (x, y), avente il suo asse positivo ξ sovrapposto al raggio OL (1).

Ponendo

$$\Xi = |OL|,$$

l'ipotesi A_3) può tradursi nell'eguaglianza

$$\varepsilon_z = \omega(\xi - \Xi), \tag{4}$$

pur d'intendere che ω sia una costante da scegliersi opportunamente.

Invero, se per un momento si rappresenta con $\boldsymbol{j}$ il versore di η (che è parallelo ad l) l'ipotesi in questione equivale ad ammettere che ε_z risulti lo stesso che si avrebbe ove lo spostamento del punto generico A di C fosse del tipo (2)

$$-\,\omega z \boldsymbol{j} \wedge LA.$$

Ora ad un tale spostamento corrispondono secondo la terna (ξ, η, z) le componenti

$$u = -\,\omega z^2, \quad v = 0, \quad w = \omega z(\xi - \Xi):$$

onde per convincersi dell'asserto basta ricordare che

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Da (4) ed A_1), B_1) segue che in tutto C

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0: \tag{5}$$

naturalmente la stessa 4) rende evidente che il caso della pressione semplice — $\Xi = \infty$ — è caratterizzato sia da $\omega = 0$ sia dall'essere ε_z indipendente da A.

(1) O non può appartenere ad l (Cfr. questo stesso numero, in fine).
(2) Con questa notazione risulta $\omega \geq 0$ (Cfr. questo stesso numero, in fine).

In conseguenza di A_2) e (5), le equazioni indefinite della statica dei sistemi continui in assenza di forze di massa, cioè

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y}+\frac{\partial\tau_y}{\partial z}=0\\ &\frac{\partial\tau_z}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_x}{\partial z}=0\\ &\frac{\partial\tau_y}{\partial x}+\frac{\partial\tau_x}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0,\end{aligned}\right.$$

sono soddisfatte in tutto C indipendentemente dal valore di ω e dalla posizione di l: al tempo stesso, per solo effetto di A_2) restano soddisfatte le condizioni ai limiti su tutta la superficie laterale di C_c e di C_a.

Vuol dire che — *finchè si prescinde dalle condizioni di stabilità* — le condizioni d'equilibrio di C si riassumono in quelle che traducono la A_1), cioè nelle tre equazioni

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} -P&=\int_S\sigma_z dS\\ 0&=\int_S\xi\sigma_z dS\\ 0&=\int_S\eta\sigma_z dS,\end{aligned}\right.$$

ove $\sigma_z=E_a\omega(\xi-\Xi)$ oppure $\sigma_z=r[\omega(\xi-\Xi)]$ a seconda che A appartiene ad S_a o ad S_c.

Osserviamo subito che da queste equazioni, pel solo fatto che in ogni punto di S la σ_z deve avere il segno di $\omega(\xi-\Xi)=\varepsilon_z$, necessariamente segue che:

1°) in S esiste sempre una regione $\mathcal{S}$ sollecitata a compressione ($\varepsilon_z\leq 0$);

2°) $\Xi>0$;

3°) rispetto ad l la $\mathcal{S}$ giace dalla banda di O;

4°) $\omega\Xi>0$, cioè (non essendosi ancora escluso il caso della pressione semplice) $\omega\geq 0$.

7. Pressione semplice. — Sia ε_P il numero positivo definito dall'equazione

$$(7)\qquad S_c p[\varepsilon_P]+S_a E_a\varepsilon_P=P,$$

G_P il baricentro di $S_c+\dfrac{E_a\varepsilon_P}{p[\varepsilon_P]}S_a$. Nella teoria lineare (e quindi anche nella teoria ordinaria) G_P coinciderà col baricentro G di $S_c + nS_a$: così pure nel caso delle murature semplici G_P non potrà differire da $G \equiv G_c$: invece in generale la posizione di G_P dipenderà dalla grandezza di P.

Il caso della pressione semplice richiede la coincidenza di O con G_P.

Invero basta supporre

$$\varepsilon_z = \text{cost.} = -c,$$

perchè la $(6)_1$ fornisca $c > 0$, e quindi da (6) sia permesso dedurre

$$(8) \qquad \begin{cases} P = S_c p[c] + S_a E_a c \\ 0 = p[c]\displaystyle\int_{S_c} \xi dS_c + E_a c \int_{S_a} \xi dS_a \\ 0 = p[c]\displaystyle\int_{S_c} \eta dS_c + E_a c \int_{S_a} \eta dS_a . \end{cases}$$

Da $(8)_1$ e (7) segue

$$c = \varepsilon_P,$$

ciò che indica che nel caso della pressione semplice in tutto C deve essere $\varepsilon_z = -\varepsilon_P$: successivamente le $(8)_2$ e $(8)_3$ si identificano colle equazioni che esprimono l'asserto.

Nel seguito escluderemo il caso della pressione semplice supponendo sempre $O \neq G_P$, $\omega > 0$: ed intenderemo che si sia disposto dell'arbitrarietà dell'orientamento dell'asse positivo x facendolo coincidere col raggio OG_P.

Evidentemente nel caso simmetrico l'asse di simmetria non potrà differire da x.

8. Enunciato del teorema d'esistenza ed unicità. — Sia (ξ_i, η_i) la coppia ortogonale di origine O, complanare e congruente ad (x, y), definita dal valore i dell'anomalia del suo asse positivo ξ_i rispetto ad (x, y) [1]: in modo che, ponendo

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta \qquad (\rho \geq 0;\ -\pi \leq \vartheta < \pi),$$

si abbia

$$(9) \qquad \xi_i = \rho \cos(\vartheta - i), \quad \eta_i = \rho \sin(\vartheta - i).$$

Indichiamo con $\mathfrak{J}$ il valore di i pel raggio OL [2]. I due parametri Ξ, $\mathfrak{J}$ bastano ad individuare la posizione di l nel piano di S: e col concorso di ω

(1) È sottintesa la condizione consueta $-\pi \leq i < \pi$.

(2) Onde $\xi \equiv \xi_{\mathfrak{J}}$, $\eta \equiv \eta_{\mathfrak{J}}$.

perfettamente caratterizzano lo stress di C. Anzi, se — in corrispondenza a valori qualunque delle tre variabili i, q, δ — poniamo

$$\mathfrak{I}_{m,n}(i, q, \delta) = -\int_{S_c} r[q(\xi_i - \delta)]\xi_i^m \eta_i^n dS_c + E_a q \int_{S_a} (\delta - \xi_i)\xi_i^m \eta_i^n dS_a, \qquad (m, n = 0, 1, 2, ...) \tag{10}$$

le condizioni d'equilibrio di C si riducono a

$$(\mathfrak{S}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{I}_{0,0}(\mathfrak{I}, \omega, \Xi) = P, \\ \mathfrak{I}_{1,0}(\mathfrak{I}, \omega, \Xi) = 0, \\ \mathfrak{I}_{0,1}(\mathfrak{I}, \omega, \Xi) = 0. \end{cases}$$

Nel § 2 dimostreremo il ***Teorema d'esistenza ed unicità.*** *Escluso il caso delle murature semplici* ($S_a \equiv 0$, τ *quantità finita*), *qualunque sia la posizione di* O *nel piano di* S *e la grandezza di* **P**, *il sistema* ($\mathfrak{S}$) *nelle tre incognite* $\mathfrak{I}$, ω, Ξ *ammette una ed una sola soluzione che soddisfi alle condizioni*

$$(\mathfrak{C}) \qquad -\pi \leq \mathfrak{I} < \pi, \quad \omega > 0, \quad \Xi > 0.$$

Nello stabilire questo teorema sarà anche dimostrato che

$$(\mathfrak{I}) \qquad -\frac{\pi}{2} < \mathfrak{I} < \frac{\pi}{2}.$$

Nel caso delle murature semplici il teorema ora enunciato — insieme a tutte le conclusioni della Memoria — sussiste ancora, come subito preciseremo [1], subordinatamente ad un ben prevedibile vincolo per la posizione di O (vincolo che, per $\tau = 0$, si riduce al dover essere O interno ad s).

9. Nello stabilire il teerema d'esistenza ed unicità si dimostra (cfr. n.i 19 e 26) che, pensando fissato il carico $\boldsymbol{P}$ ed invece disponibile la posizione del centro di pressione, per tutti i valori di i tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ — e soltanto per essi — esiste una sollecitazione Σ_i del nostro cilindro che simultaneamente soddisfa alle due condizioni:

1°) che il suo centro di pressione O_i appartenga alla retta η_i;

---

[1] V. n.° 10, ($\mathfrak{M}$).

2°) che il suo asse limite l_i sia normale ed incidente all'asse positivo ξ_i.

Al tempo stesso si dimostra che per ognuno dei considerati valori di i tale sollecitazione è unica: e che l_i si può anche interpretare come l'asse limite corrispondente al caso in cui, lasciando il centro di pressione in O, si trasformi S in una sezione S_i simmetrica rispetto alla retta ξ_i, imprimendo alle singole striscie infinitesime di S_a e di S_c parallele ad η_i una conveniente traslazione nella direzione η_i.

La semplice infinità di punti O_i è proprio quella che nella teoria ordinaria viene presa in esame dai tecnici per la riduzioue del problema dal caso generale al caso simmetrico (Cfr. n.° 27).

La dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità si completa stabilendo che al variare di i da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ il punto O_i descrive una curva chiusa c, partendo dalla posizione G_P e ritornandovi dopo essersi sovrapposto una ed una sola volta ad O (per $i = \mathfrak{J}$): la tangente in O alla c risulta parallela all'asse limite, etc. (Cfr. n.° 26).

10. Il teorema di riduzione (¹). — Vogliamo subito mettere in evidenza che dal lato analitico la teoria generale è perfettamente equivalente alla teoria ridotta — in particolare, la teoria lineare è perfettamente equivalente alla teoria ordinaria —.

Sia G_τ il baricentro di $S_c + \frac{E_a \varepsilon_\tau}{\tau} S_a$. Nella teoria semilineare (in particolare, nella teoria lineare) sarà $E_a \varepsilon_\tau = n\tau$ e G_τ coinciderà col baricentro G di $S_c + nS_a$: così pure nel caso delle murature semplici G_τ non potrà differire da $G \equiv G_c$.

Chiamiamo *carico ridotto* il vettore $\overline{\boldsymbol{P}}$ orientato come $\boldsymbol{P}$, di grandezza

$$\overline{P} = P + \tau S_c + E_a \varepsilon_\tau S_a\,;$$

centro di pressione ridotto il baricentro $\overline{O}$ dei due punti O e G_τ rispettivamente caricati dei pesi P ed $E_a \varepsilon_\tau S_a + \tau S_c$: *asse limite ridotto* la retta $\overline{l}$ del piano di S (parallela ad l e situata rispetto ad l dalla banda opposta di O) d'equazione

$$\xi = \Xi + \frac{\varepsilon_\tau}{\omega} = \Xi_r.$$

(¹) Si esclude il caso $S_a \equiv 0$, $\tau = \infty$. (Cfr. n.° 5).

Facendo intervenire anche la funzione resistente ridotta, il sistema $(\mathfrak{S})$ si può scrivere

$$\begin{cases} P+\tau S_c+E_a\varepsilon_\tau S_a=\int\limits_{S_c}\bar{p}[\omega(\Xi-\xi_{\mathfrak{J}})+\varepsilon_\tau]dS_c+E_a\int\limits_{S_a}[\omega(\Xi-\xi_{\mathfrak{J}})+\varepsilon_\tau]dS_a \\ \tau S_c(\xi_{\mathfrak{J}})_{G_c}+E_a\varepsilon_\tau S_a(\xi_{\mathfrak{J}})_{G_a}=\int\limits_{S_c}\xi_{\mathfrak{J}}\bar{p}[\omega(\Xi-\xi_{\mathfrak{J}})+\varepsilon_\tau]dS_c+E_a\int\limits_{S_a}\xi_{\mathfrak{J}}[\omega(\Xi-\xi_{\mathfrak{J}})+\varepsilon_\tau]dS_a \\ \tau S_c(\eta_{\mathfrak{J}})_{G_c}+E_a\varepsilon_\tau S_a(\eta_{\mathfrak{J}})_{G_a}=\int\limits_{S_c}\eta_{\mathfrak{J}}\bar{p}[\omega(\Xi-\xi_{\mathfrak{J}})+\varepsilon_\tau]dS_c+E_a\int\limits_{S_a}\eta_{\mathfrak{J}}[\omega(\Xi-\xi_{\mathfrak{J}})+\varepsilon_\tau]dS_a, \end{cases}$$

ovvero (ricordando la definizione di $\bar{O}$ e combinando la 2ª e 3ª equazione colla 1ª)

$$\begin{cases} \bar{P}=\int\limits_{S_c}\bar{p}[\omega(\Xi_r-\xi_{\mathfrak{J}})]dS_c+E_a\omega\int\limits_{S_a}[\Xi_r-\xi_{\mathfrak{J}}]dS_a \\ 0=\int\limits_{S_c}\{\xi_{\mathfrak{J}}-(\xi_{\mathfrak{J}})_{\bar{O}}\}\bar{p}[\omega(\Xi_r-\xi_{\mathfrak{J}})]dS_c+E_a\omega\int\limits_{S_a}\{\xi_{\mathfrak{J}}-(\xi_{\mathfrak{J}})_{\bar{O}}\}[\Xi_r-\xi_{\mathfrak{J}}]dS_a \\ 0=\int\limits_{S_c}\{\eta_{\mathfrak{J}}-(\eta_{\mathfrak{J}})_{\bar{O}}\}\bar{p}[\omega(\Xi_r-\xi_{\mathfrak{J}})]dS_c+E_a\omega\int\limits_{S_a}\{\eta_{\mathfrak{J}}-(\eta_{\mathfrak{J}})_{\bar{O}}\}[\Xi_r-\xi_{\mathfrak{J}}]dS_a : \end{cases}$$

ed anche, rappresentando con $(\bar{\xi}_{\mathfrak{J}}, \bar{\eta}_{\mathfrak{J}})$ la coppia di assi in cui si trasporta $(\xi_{\mathfrak{J}}, \eta_{\mathfrak{J}})$ per la traslazione $O\bar{O}$ e con $\bar{\Xi}$ il valore di $\bar{\xi}_{\mathfrak{J}}$ comune a tutti i punti di $\bar{l}$,

$$(11)\qquad \begin{cases} \bar{P}=\int\limits_{S_c}\bar{p}[\omega(\bar{\Xi}-\bar{\xi}_{\mathfrak{J}})]dS_c+E_a\omega\int\limits_{S_a}[\bar{\Xi}-\bar{\xi}_{\mathfrak{J}}]dS_a \\ 0=\int\limits_{S_c}\bar{\xi}_{\mathfrak{J}}\bar{p}[\omega(\bar{\Xi}-\bar{\xi}_{\mathfrak{J}})]dS_c+E_a\omega\int\limits_{S_a}\bar{\xi}_{\mathfrak{J}}[\bar{\Xi}-\bar{\xi}_{\mathfrak{J}}]dS_a \\ 0=\int\limits_{S_c}\bar{\eta}_{\mathfrak{J}}\bar{p}[\omega(\bar{\Xi}-\bar{\xi}_{\mathfrak{J}})]dS_c+E_a\omega\int\limits_{S_a}\bar{\eta}_{\mathfrak{J}}[\bar{\Xi}-\bar{\xi}_{\mathfrak{J}}]dS_a . \end{cases}$$

Vuol dire che $\mathfrak{J}$, ω, $\bar{\Xi}$ rendono soddisfatto il sistema che si ricava da $(\mathfrak{S})$ sostituendo funzione resistente, carico e centro di pressione effettivi coi corrispondenti elementi ridotti: e soddisfano anche a tutte le $(\mathfrak{C})$ perchè, subordinatamente all'essere $\omega > 0$, delle (11) stesse si può trarre $\bar{\Xi} > 0$ (Cfr. n.° 6, in fine).

Le precedenti osservazioni si riassumono nel seguente

Teorema di riduzione. — *Assegnati* P *ed* O, *la determinazione dello stress può sempre effettuarsi riferendosi alla teoria ridotta invece che alla teoria generale: basta sostituire* P, O *con* $\overline{\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{O}}$ *e simultaneamente assumere come funzione resistente la funzione resistente ridotta.*

Applicando il teorema di riduzione, l resta sostituito da $\bar{l}$, ε_z da $\bar{\varepsilon}_z = \varepsilon_z - \varepsilon_\tau$, σ_z da

$$\bar{\sigma}_z = \sigma_z - \tau \quad \ldots S_c,$$
$$\bar{\sigma}_z = \sigma_z - E_a \varepsilon_\tau \ldots S_a:$$

onde le condizioni di stabilità assumono la forma

$\bar{A}_5)$ $$-E_a \bar{\varepsilon}_{min} \leq k_p + E_a \varepsilon_\tau, \quad E_a \bar{\varepsilon}_{max} \leq k_t - E_a \varepsilon_\tau$$

$\bar{B}_2)$ $$\bar{p}[-\bar{\varepsilon}_{min}] \leq k_c + \tau.$$

La teoria ridotta delle murature semplici esclude l'equilibrio di C se il centro di pressione è esterno al contorno corretto di S (1); invece nello stabilire il teorema d'esistenza ed unicità si dimostra (V. n.° 23) che se il centro di pressione è interno ad s la stessa teoria (ed anche la corrispondente teoria generale) fornisce una ed una sola espressione per lo stress. Riferendoci alla teoria generale delle murature semplici e supponendo O esterno ad s, indichiamo con I il punto comune ad s ed al segmento $OG = OG_\tau$. Il centro di pressione ridotto $\bar{O}$ sarà interno ad s allora ed allora soltanto che sia

$$|OI| < |O\bar{O}| = \frac{\tau S}{P + \tau S} |OG|$$

cioè

$(\mathfrak{M})$ $$\frac{|OI|}{|IG|} < \frac{\tau S}{P}.$$

In base al teorema di riduzione (ed al fatto che se O è interno ad s, $\bar{O}$ è senz'altro interno ad s) la $(\mathfrak{M})$ dà la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza ed unicità della soluzione del sistema $(\mathfrak{S})$-$(\mathfrak{C})$ nella teoria generale delle murature semplici.

11. Un teorema di massimo nella teoria lineare. — Nel corso della dimostrazione del teorema d'esistenza ed unicità, si stabilisce una certa relazione

(1) Infatti il centro di un sistema di forze parallele e *concordi* applicate ad S necessariamente è interno ad s.

che nel caso particolare della teoria ordinaria mette in evidenza come *tra tutte le sollecitazioni Σ_i la $\Sigma_{\mathfrak{J}}$ (cioè la sollecitazione effettiva) è quella cui corrisponde la massima pressione unitaria in* O.

Ma, sempre restando nel campo della teoria ordinaria, per ognuna delle sollecitazioni Σ_i il valore della pressione unitaria in O risulta proporzionale al lavoro di deformazione. Onde resta stabilito un teorema che ricorda ([1]) il celebre teorema di MENABREA nella statica elastica:

Tra tutte le sollecitazioni Σ_i è la sollecitazione effettiva quella cui corrisponde il **massimo** *lavoro di deformazione.*

Il teorema di riduzione permette l'immediata generalizzazione dei precedenti teoremi dalla teoria ordinaria alla teoria lineare.

12. L'asse limite come limite dell'asse neutro. — Nella teoria ordinaria si hanno, come è noto, varî procedimenti grafici per la determinazione dell'asse limite di una sezione qualunque, comunque sollecitata. Un procedimento specialmente adatto pel calcolo numerico risulta dal teorema che ora enuncio riferendomi al caso simmetrico.

Sia n_1 l'asse neutro di O rispetto ad $S_c + \frac{E_a}{E_m} S_a$. Se n_1 non taglia S_c, notoriamente l coincide con n_1. Ponendoci nel caso contrario, rappresentiamo con $\mathfrak{S}_{\beta_1}$ ciò che resta di S_c quando se ne sopprima tutta la regione situata rispetto ad n_1 dalla banda opposta di O: e sia n_2 l'asse neutro di O rispetto a $\mathfrak{S}_{\beta_1} + \frac{E_a}{E_m} S_a$.

Si dimostra (V. n.° 33) che n_2 taglia $\mathfrak{S}_{\beta_1}$ e dopo questo, pensando costruita con procedimento ricorrente tutta la successione di assi neutri $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$ si riconosce che al crescere indefinito di s l'asse neutro n_s va costantemente (ma non indefinitamente) approssimandosi ad O: dal che si ricava che esiste per esso una posizione limite la quale non differisce dall'asse limite l della sezione inizialmente assegnata.

Naturalmente, quando si voglia eliminare il passaggio al limite e ci si accontenti di conoscere una sottile striscia nella quale sia compreso l'asse limite, il procedimento ora indicato si può ridurre alla costruzione di un certo numero d'assi neutri.

([1]) L'analogia è puramente formale. Nel teorema di MENABREA si considerano infiniti valori di un certo integrale in corrispondenza ad un'unica sollecitazione attiva: qui invece si prendono in esame ∞^1 sollecitazioni, le Σ_i, a ciascuna delle quali viene coordinato il solo valore del corrispondente lavoro di deformazione effettivo.

13. Teoria ordinaria e teoria elastica: un apparente paradosso. — Il teorema del numero precedente implica che — ove l non coincida con n_1 — O giace rispetto ad l dalla banda opposta di n_1: cioè, *la sostituzione della teoria elastica alla teoria ordinaria* (*a parità di* O, P, S_a, S_c, E_m, E_a) *allontana l'asse limite dal centro di pressione* [1].

La stessa sostituzione (V. n.° 35) *impiccolisce il massimo della trazione unitaria nell'armatura:* favorendo così il verificarsi della seconda condizione di stabilità A_5). Onde resta messo in evidenza che pel cemento armato l'adozione sistematica della teoria elastica, non solo darebbe luogo ad un'approssimazione molto più grossolana di quella inerente alla teoria ordinaria, ma sarebbe pure da ritenersi nociva alla stabilità.

Lo stesso può dirsi per le murature semplici perchè (indipendentemente dall'essere $S_a \neq 0$) si stabilisce (V. n.° 36) *che se* O *è interno ad s, la sostituzione della teoria elastica alla teoria ordinaria* (nonostante che allontani l'asse limite dal centro di pressione) *impiccolisce il massimo* $\bar{\omega}$ *della pressione unitaria nel conglomerato.*

Invece (per $S_a \neq 0$) se O è esterno ad s può darsi che il valore di $\bar{\omega}$ fornito dalla teoria ordinaria risulti *minore* di quello fornito dalla teoria elastica ed anche dalla teoria lineare: cioè, si possono immaginare dei casi (V. n.° 36) nei quali il prescindere dalla resistenza a trazione nel conglomerato risulta sfavorevole alla stabilità.

Questa conclusione perde ogni apparenza di paradosso quando si rifletta che l'ipotesi di assoluta mancanza di resistenza a trazione nel conglomerato porta ad equilibrare il carico P con un sistema di sforzi paralleli che nel conglomerato hanno *tutti* il senso della loro risultante.

14. Primo teorema di confronto: O interno ad s. — Stabilito il teorema generale d'esistenza ed unicità, non ho affatto pensato a ricavare dalla sua dimostrazione un esatto procedimento di calcolo per le tre incognite ω, Ξ, $\mathfrak{J}$ e per i conseguenti valori dei massimi di tensione da introdurre nelle condizioni di stabilità. Un tale procedimento sarebbe risultato troppo complesso per una qualunque applicazione alla tecnica: ed anche dal lato puramente teorico la sua complessità sarebbe apparsa ingiustificata in causa del necessario intervento di un'espressione esatta per ambedue le funzioni sperimentali p e t. Ho quindi preferito cercare se era possibile ottenere condizioni sufficienti per il

[1] Questo risultato può essere esteso al confronto della teoria generale colla teoria ordinaria. [V. n.° 39, (83) e n.° 42, (96)].

verificarsi delle condizioni di stabilità in riguardo alla teoria generale, col semplice uso della teoria ordinaria riferita, non ai dati effettivi della questione, ma a dati ausiliari; precisamente a dati ausiliari ricavati dai dati effettivi con qualche semplice correzione che non facesse intervenire altro che elementi facilmente e sicuramente deducibili dai diagrammi delle prove di resistenza.

Naturalmente in una simile ricerca mi sono limitato al caso simmetrico, che dal lato teorico è forse il solo che interessi e del resto è sempre quello cui in ultima analisi ci si trova ricondotti partendo dal caso generale; ed ho anche potuto valermi sistematicamente della ($\mathcal{S}$), proprietà comune a tutti i materiali ordinari, e non preoccuparmi affatto della prima delle condizioni di stabilità A_5) (Cfr. n.° 5).

I risultati si presentano in forma notevolmente diversa a seconda che il centro di pressione è interno oppure esterno ad s. Per le murature semplici è solo il primo caso che interessa: invece pel cemento armato è specialmente il secondo, in quanto include il caso della flessione semplice.

Supposto O interno ad s ed S simmetrica rispetto all'asse OG_P, sia S^* la sezione in cui si trasforma la sezione effettiva quando — senza distruggerne la simmetria rispetto ad OG_P — si accorcino nel rapporto $\rho = \dfrac{E_s}{E_0}$ tutte le corde della sezione del conglomerato parallele ad y e corrispondenti a valori negativi di x (cioè, situate rispetto ad O dalla banda opposta di G_P) (¹). Chiamiamo problema ausiliare quello che corrisponde all'applicazione della teoria ordinaria alla sezione S^* sollecitata in O dal solito carico P, ove si assuma $E_m = r'[-0] = E_0$ e si sostituisca k_t con ρk_t: lasciando naturalmente la denominazione di problema effettivo all'applicazione della teoria generale alla sezione e sollecitazione effettiva.

Sussiste allora il

***Primo teorema di confronto:* 0 *interno ad* s.** — *Basta che siano soddisfatte le condizioni di stabilità nel problema ausiliare, perchè lo stesso si verifichi nel problema effettivo.*

Le correzioni che intervengono in questo teorema non fanno uso di alcun elemento relativo all'incerto diagramma delle t, ma si servono solo del rapporto ρ, di cui è facile ricavare dalle prove di resistenza un valore molto approssimato, o almeno un buon limite inferiore, che serve egualmente per lo scopo voluto. La stessa correzione è di tal forma che si adatta non solo alle verifiche di stabilità, ma anche ai calcoli di progetto.

(¹) Nella teoria lineare S^* non differisce da S.

15. Secondo teorema di confronto: *O* esterno ad *s*. — Abbiamo già avvertito (Cfr. n.° 13, in fine) che quando il centro di pressione è esterno al contorno corretto di S non sempre il prescindere dalla resistenza a trazione del conglomerato risulta favorevole alla stabilità. Quando O è esterno ad s non si può dunque pretendere di stabilire un teorema di confronto che riconduca *in ogni caso* le verifiche di stabilità della teoria generale nell'ambito della teoria ordinaria, senza alcun intervento della resistenza a trazione del conglomerato.

D'altro canto basta apportare ad O, P, k_c, k_t ed alla funzione resistente le semplici correzioni specificate al n.° 10 perchè la teoria generale resti automaticamente sostituita dalla teoria ridotta [1].

Sembra dunque perfettamente soddisfacente segnare il termine della nostra ricerca col seguente

***Secondo teorema di confronto:* O *esterno ad* s.** — *Basta che la sezione* S *sollecitata in* O *dal carico* $\frac{\mathrm{P}}{\rho}$ *sia stabile in riguardo alla teoria ordinaria (ove si assuma* $\mathrm{E_m} = \mathrm{E_0}$*) perchè lo stesso si verifichi per la sezione e sollecitazione effettiva in riguardo alla teoria ridotta.*

§ 2. Il teorema d'esistenza ed unicità.

16. In corrispondenza a valori qualunque delle tre variabili i, q, δ poniamo

$$(12)\qquad f_{m,n}(i, q, \delta) = \int_{S_c} r'[q(\xi_i - \delta)]\xi_i^m \eta_i^n dS_c + E_a \int_{S_a} \xi_i^m \eta_i^n dS_a, \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

rilevando subito che se la retta λ (del piano (xy)) d'equazione $q(\xi_i - \delta) = \varepsilon_\tau$ taglia S_c, la r' è discontinua in S_c: in quanto allora λ divide S_c in due regioni, in una delle quali $r' \geq r'_{min} > 0$, mentre nell'altra $r' \equiv 0$. Nonostante ciò, l'incondizionata continuità della funzione resistente permette sempre di derivare le (10) come se la r' non presentasse alcuna singolarità. Precisamente, derivando (10) rispetto a q e confrontando il risultato ottenuto con (12), si trova subito

$$(13)\qquad \frac{\partial \mathfrak{F}_{m,n}}{\partial q} = \delta f_{m,n} - f_{m+1,n}.$$

[1] Partendo dalla teoria semilineare (Cfr. n.° 5) alla $(\mathcal{E})$ viene a corrispondere la $(\bar{\mathcal{E}})$.

In modo analogo, osservando che da (9) segue $\frac{\partial \xi_i}{\partial i} = \eta_i$, $\frac{\partial \eta_i}{\partial i} = -\xi_i$, si ottiene

(14) $$\frac{\partial \mathfrak{F}_{m,n}}{\partial i} = -q f_{m,n+1} + m \mathfrak{F}_{m-1,n+1} - n \mathfrak{F}_{m+1,n-1},$$

(15) $$\frac{\partial \mathfrak{F}_{m,n}}{\partial \delta} = q f_{m,n}.$$

17. Assumendo

$$\begin{cases} k = r'[q(\xi_i - \delta)] \geq 0 & \dots S_c \\ k = E_a > 0 & \dots S_a, \end{cases}$$

risulta

$$f_{m,n} = \int_S \xi_i^m \eta_i^n k dS.$$

Ne segue che la forma quadratica nelle tre variabili x_0, x_1, x_2,

$$\sum_{0}^{2}{}_{r,s} f_{r,s} x_r x_s = \int_S k \{ x_0 + x_1 \xi_i + x_2 \eta_i \}^2 dS$$

è definita ([1]) positiva: e ciò basta per affermare che, oltre alla diseguaglianza evidente

(16) $$f_{0,0} > 0$$

ed alla diseguaglianza di SCHWARZ

(17) $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{0,0} & f_{1,0} \\ f_{1,0} & f_{2,0} \end{vmatrix} > 0,$$

sussiste anche l'altra

(18) $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{0,0} & f_{1,0} & f_{0,1} \\ f_{1,0} & f_{2,0} & f_{1,1} \\ f_{0,1} & f_{1,1} & f_{0,2} \end{vmatrix} > 0.$$

18. Apparirà manifesto che (16), (17), (18) devono intervenire in modo essenziale nella dimostrazione del teorema d'esistenza ed unicità, non appena

---

([1]) Se $S_a \equiv 0$, k è identicamente nulla in S tutte le volte che in ogni punto di S è $q(\xi_i - \delta) \geq \varepsilon_T$: ma risulta del tutto superfluo il preoccuparsi di una tale eventualità [Cfr. n.° 20, (26)].

si rilevi che da (13), (14), (15) segue

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_{0,0}}{\partial \delta} = q f_{0,0}, \quad \frac{\partial(\mathfrak{F}_{0,0}, \mathfrak{F}_{1,0})}{\partial(q, \delta)} = q \Delta_2, \tag{19}$$

ed anche

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial(\mathfrak{F}_{0,0}, \mathfrak{F}_{1,0}, \mathfrak{F}_{0,1})}{\partial(i, q, \delta)} = -q^2 \Delta_3 - q \mathfrak{F}_{0,1} \begin{vmatrix} f_{0,0} & f_{0,1} \\ f_{1,0} & f_{1,1} \end{vmatrix} - q \mathfrak{F}_{1,0} \Delta_2 :$$

onde basta che sia $q > 0$ ed $\mathfrak{F}_{0,1}$, $\mathfrak{F}_{1,0}$ abbiamo valori nulli (o convenientemente prossimi a zero) perchè risulti $\mathfrak{D} < 0$.

Ma non si può ricavare da questa osservazione una dimostrazione immediata, se pure non perfettamente rigorosa, del teorema di esistenza ed unicità: perchè in ambedue i casi in cui la risoluzione del sistema ($\mathfrak{S}$) si effettua a vista (cioè quando $P = 0$ e quando $O \equiv G_P$) risulta $\omega = 0$, $\mathfrak{D} = 0$.

19. Pensiamo fissato il valore di i e consideriamo il sistema in q, δ

$$\begin{cases} P = \mathfrak{F}_{0,0}(i, q, \delta) \\ 0 = \mathfrak{F}_{1,0}(i, q, \delta) \\ q > 0. \end{cases} \tag{20}$$

Basandoci sulle (16) e (17), ricorrendo anche direttamente alle proprietà della r specificate sotto B_1) ed approfittando del fatto che la convenzione $y_{G_P} = 0$, $x_{G_P} > 0$ dà luogo a $(\xi_i)_{G_P} > 0$ quando e soltanto quando $-\frac{\pi}{2} < i < \frac{\pi}{2}$, dimostreremo che (conformemente a quanto abbiamo affermato al n.° 9) sussiste il seguente

Lemma. — Se i non è interno all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ il sistema (20) non ammette alcuna soluzione; nel caso opposto lo stesso sistema ammette una ed una sola soluzione

$$q = \omega_i > 0, \quad \delta = \Xi_i,$$

la quale gode delle proprietà seguenti

$$\begin{cases} \Xi_i > 0 \\ \lim\limits_{i = \mp \frac{\pi}{2}} \omega_i = 0 \\ \lim\limits_{i = \mp \frac{\pi}{2}} (\omega_i \Xi_i) = \varepsilon_P. \end{cases} \tag{21}$$

Successivamente, per ogni valore di i interno a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, porremo

(22) $$\mathfrak{M}_i = \mathfrak{F}_{0,1}(i, \omega_i, \Xi_i)$$

e proveremo che

(23) $$\frac{d}{di}\left(\frac{\mathfrak{M}_i}{\omega_i}\right) < 0,$$

mentre

(24) $$\lim_{i=\mp\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\mathfrak{M}_i}{\omega_i}\right) = \pm\infty .$$

Questi risultati implicano l'esistenza $\left[\text{entro } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right]$ di una ed una sola radice dell'equazione $\mathfrak{M}_i = 0$ e quindi corrispondono ad una simultanea dimostrazione della $(\mathfrak{J})$ e del teorema d'esistenza ed unicità: perchè il Lemma garantisce che è perfettamente legittimo sostituire le $(\mathfrak{S})$ e $(\mathfrak{C})$ con

$$\begin{cases} \omega = \omega_{\mathfrak{J}} \\ \Xi = \Xi_{\mathfrak{J}} \\ 0 = \mathfrak{M}_{\mathfrak{J}} . \end{cases}$$

20. Introduciamo le notazioni $-\alpha_i$, β_i per rappresentare i valori algebrici del minimo e del massimo di ξ_i nell'intera S: per ogni valore di i interno a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ β_i risulterà positivo e lo stesso accadrá di α_i ove O non sia esterno ad s.

Attribuito a q un valore positivo (e pensando i comunque fissato) prendiamo in esame l'equazione in δ_q

(25) $$P = \mathfrak{F}_{0,0}(i, q, \delta_q).$$

Basta aver presenti le proprietà specificate per la funzione resistente sotto B_1) per riconoscere che (per ogni valore positivo di q)

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_{0,0}(i, q, -\alpha_i) \leq 0 \\ \mathfrak{F}_{0,0}(i, q, +\infty) = +\infty : \end{cases}$$

onde ricordando la $(19)_1$ si può asserire che per ogni valore positivo di q la (25) ammette una ed una sola radice δ_q la quale soddisfa sempre alla condizione

(26) $$\delta_q > -\alpha_i .$$

Anzi da (25) si ricava

$$P < q(\delta_q + \alpha_i)\{r'_{max} S_c + E_a S_a\},$$

in particolare

(27) $$\lim_{q=0} \delta_q = \infty.$$

Successivamente dalla stessa (25) si trae

$$P = \lim_{q=0} \{p[q\delta_q]S_c + q\delta_q E_a S_a\},$$

cioè [Cfr. (7)]

(28) $$\lim_{q=0} (q\delta_q) = \varepsilon_P.$$

Osserveremo infine che derivando (25) rispetto a q si ottiene [Cfr. (13) e (15)]

$$0 = \left(\frac{\partial \mathfrak{F}_{0,0}}{\partial q}\right)_{\delta=\delta_q} + \frac{d\delta_q}{dq}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_{0,0}}{\partial \delta}\right)_{\delta=\delta_q} = \delta_q f_{0,0}(i, q, \delta_q) - f_{1,0}(i, q, \delta_q) + \frac{d\delta_q}{dq} q f_{0,0}(i, q, \delta_q).$$

Più concisamente scriveremo

(29) $$0 = f_{0,0} \frac{d(q\delta_q)}{dq} - f_{1,0}.$$

21. Sempre pensando i arbitrariamente fissato, consideriamo la funzione della variabile q

(30) $$\mathcal{G}(q) = \mathfrak{F}_{1,0}(i, q, \delta_q).$$

Procedendo come alla fine del numero precedente si trova

$$\frac{d\mathcal{G}}{dq} = f_{1,0} \frac{d(q\delta_q)}{dq} - f_{2,0}$$

e successivamente [Cfr. (29) e (17)]

(31) $$\frac{d\mathcal{G}}{dq} = \frac{1}{f_{0,0}}\{f_{1,0}^2 - f_{0,0} f_{2,0}\} = -\frac{1}{f_{0,0}} \Delta_2 < 0.$$

D'altra parte da (30) e (27) segue

$$\mathcal{G}_0 = \lim_{q=0} \mathcal{G}(q) = \lim_{q=0} \left\{p[q\delta_q]\int_{S_c} \xi_i dS_c + E_a q\delta_q \int_{S_a} \xi_i dS_a\right\} = p[\varepsilon_P]\int_{S_c} \xi_i dS_c + E_a \varepsilon_P \int_{S_a} \xi_i dS_a:$$

onde basta aver presenti la definizione di G_P e la convenzione in base alla quale si è fissato l'orientamento dell'asse positivo x, per riconoscere che

(32) $$\mathcal{G}_0 = P(\xi_i)_{\sigma_P}$$

e risulta positivo quando e soltanto quando i è interno all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dopo questo la (31) rende evidente che:

1°) se i non è interno a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ il sistema (20) non ammette alcuna soluzione;

2°) se i è interno a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la condizione

(33) $$\mathcal{G}_\infty = \lim_{q=\infty} \mathcal{G}(q) < 0$$

è necessaria e sufficiente affinchè l'equazione $\mathcal{G}(q) = 0$ ammetta una ed una sola radice positiva ω_i e simultaneamente il sistema (20) ammetta una ed una sola soluzione

$$q = \omega_i > 0, \quad \Xi_i = [\delta_q]_{q=\omega_i}.$$

22. Sia $\mathcal{S}_{i,\delta}$ la regione di S_c compresa tra le rette $\xi_i = -\alpha_i$, $\xi_i = \delta$; $\mathcal{T}_{i,\delta}$ la regione residua di S_c (¹). Rappresentiamo con $C_{i,\delta}$, con C_i, con A_i il momento d'inerzia di $\mathcal{S}_{i,\delta}$, di S_c, di S_a rispetto al *proprio* asse baricentrale parallelo a ξ_i: e con c_{min}, C_{min}, A_{min}, $\mathcal{S}_{min}$ rispettivamente il minimo valore assunto da $C_{i,0}$, C_i, A_i e dell'area $\mathcal{S}_{i,0}$ al variare di i da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Inoltre teniamo presente che assumendo

$$\begin{cases} k = r'[q(\xi_i - \delta)] & \dots S_c \\ k = E_a & \dots S_a \end{cases}$$

risulta

$$f_{0,0} = \int_S k\,dS, \quad f_{1,0} = \int_S k\xi_i\,dS, \quad f_{2,0} = \int_S k\xi_i^2\,dS:$$

e, per un momento, poniamo

$$\bar{\xi}_i = \frac{\int_S k\xi_i\,dS}{\int_S k\,dS} = \frac{f_{1,0}}{f_{0,0}}.$$

(¹) Naturalmente si deve intendere $\mathcal{S}_{\mathfrak{J},\Xi} = \mathcal{S}$, $\mathcal{S}_{i,\delta} \equiv 0$ se $\delta < -\alpha_i$, $\mathcal{S}_{i,\delta} \equiv S_c$ se $\delta > \beta_i$, etc.

L'applicazione ripetuta di un celebre teorema di EULERO dà

$$\Delta_2 = \int_S k dS \left\{ \int_S k\xi_i^2 dS - \bar{\xi}_i^2 \int_S k dS \right\} = \int_S k dS \int_S k(\xi_i - \bar{\xi}_i)^2 dS >$$

$$> E_a S_a \int_{S_a} E_a(\xi_i - \bar{\xi}_i)^2 dS_a + r'_{min} \mathfrak{S}_{i,\delta_q} \int_{\mathfrak{S}_{i,\delta}} r'_{min}(\xi_i - \bar{\xi}_i)^2 dS_c ,$$

$$\Delta_2 > E_a^2 S_a A_i + r'^2_{min} \mathfrak{S}_{i,\delta_q} C_{i,\delta_q} . \tag{34}$$

D'altra parte, essendo in generale

$$\delta \mathfrak{J}_{0,0}(i, q, \delta) - \mathfrak{J}_{1,0}(i, q, \delta) \geq 0, \tag{35}$$

da (30) e (25) segue

$$\mathfrak{G}(q) < P\delta_q ,$$

ciò che implica che per tutti i valori di q pei quali è $\mathfrak{G}(q) > 0$ deve essere $\delta_q > 0$.

Si può dunque affermare che per gli stessi valori di q

$$\Delta_2 > E_a^2 S_a A_i + r'^2_{min} \mathfrak{S}_{i,0} C_{i,0} \tag{36}$$

ed anche

$$\Delta_2 > E_a^2 S_a A_{min} + r'^2_{min} \mathfrak{S}_{min} c_{min} .$$

Successivamente la (31) porta a concludere che, indipendentemente dal valore di i, fin quando è $\mathfrak{G}(q) > 0$ è pure

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dq} < - \frac{E_a^2 S_a A_{min} + r'^2_{min} \mathfrak{S}_{min} c_{min}}{E_a S_a + r'_{max} S_c} . \tag{37}$$

23 (¹). La (37) rende evidente che la (33) è soddisfatta per ogni valore di i tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ tanto nel caso del cemento armato ($S_a \neq 0$) quanto in quello delle murature semplici se O è interno ad s [perchè la condizione che O sia interno ad s equivale all'essere $\alpha_i \geq$ ad una certa costante positiva per ogni valore di i e quindi ha come necessaria conseguenza $\mathfrak{S}_{min} > 0$, $c_{min} > 0$].

(¹) Le conclusioni di questo numero si applicano anche al caso $S_a \equiv 0$, $\tau = \infty$ (Cfr. n.° 5) perchè riprendendo le considerazioni del numero precedente si riconosce subito che nelle (34), (36) si possono sostituire $\mathfrak{S}_{i,\delta_q}$, C_{i,δ_q}, $\mathfrak{S}_{i,0}$ $C_{i,0}$ rispettivamente con S_c, C_i, S_c, C_i, arrivando alla conclusione che $r'_{max} \frac{d\mathfrak{G}}{dq} < - r'^2_{min} C_{min}$.

Inoltre, sia nell' uno che nell' altro caso, essendo (Cfr. (32))

$$\lim_{i=\mp\frac{\pi}{2}} \mathcal{G}_0 = 0,$$

la (37) rigorosamente fornisce

(21)$_2$
$$\lim_{i=\mp\frac{\pi}{2}} \omega_i = 0:$$

dopodichè la semplice ripetizione delle considerazioni usate per stabilire (27) e (28) porta a (21)$_3$, cioè al termine della dimostrazione del *Lemma* [perchè (21)$_1$ è evidente conseguenza di $\mathcal{G}(q) < P\delta_q$].

24. Iniziamo lo studio del comportamento della funzione $\mathfrak{M}_i$.

Evidentemente per $i = \mp\frac{\pi}{2}$ è $\eta_i \equiv \pm x$. Quindi da (22) — in base a (21)$_2$, (21)$_3$ ed alla definizione di G_P — segue

(38)
$$\lim_{i=\mp\frac{\pi}{2}} \mathfrak{M}_i = \pm p[\varepsilon_P]\int_{S_c} x dS_c \pm E_a \varepsilon_P \int_{S_a} x dS_a = \pm P \,|\, OG_P \,|.$$

Richiamando ancora (21)$_2$ si conclude

(24)
$$\lim_{i=\mp\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\mathfrak{M}_i}{\omega_i}\right) = \pm\,\infty.$$

25. Per provare la (23) deriviamo rispetto ad i tutte e tre le equazioni

(39)
$$\begin{cases} P = \mathfrak{F}_{0,0}(i,\ \omega_i,\ \Xi_i) \\ 0 = \mathfrak{F}_{1,0}(i,\ \omega_i,\ \Xi_i) \\ \mathfrak{M}_i = \mathfrak{F}_{0,1}(i,\ \omega_i,\ \Xi_i). \end{cases}$$

Ricorrendo a (13), (14), (15) [e tenendo conto delle stesse (39)] si trova, con evidente significato dei simboli,

(40)
$$\begin{cases} 0 = f_{0,0}\dfrac{d(\omega_i\Xi_i)}{di} - f_{1,0}\dfrac{d\omega_i}{di} - \omega_i f_{0,1} \\ -\ \mathfrak{M}_i = f_{1,0}\dfrac{d(\omega_i\Xi_i)}{di} - f_{2,0}\dfrac{d\omega_i}{di} - \omega_i f_{1,1} \\ \dfrac{d\mathfrak{M}_i}{di} = f_{0,1}\dfrac{d(\omega_i\Xi_i)}{di} - f_{1,1}\dfrac{d\omega_i}{di} - \omega_i f_{0,2}. \end{cases}$$

Risolvendo le prime due di queste equazioni rispetto a $\frac{d(\omega_i \Xi_i)}{di}$ e $-\frac{d\omega_i}{di}$, si ottiene

$$(41)\qquad \begin{cases} \Delta_2 \dfrac{d(\omega_i \Xi_i)}{di} = \omega_i(f_{0,1} f_{2,0} - f_{1,1} f_{1,0}) + \mathfrak{M}_i f_{1,0} \\ -\Delta_2 \dfrac{d\omega_i}{di} = \omega_i(f_{0,0} f_{1,1} - f_{1,0} f_{0,1}) - \mathfrak{M}_i f_{0,0}: \end{cases}$$

mentre dall'intero sistema risulta

$$\omega_i \Delta_3 = -\frac{d\mathfrak{M}_i}{di}\Delta_2 - \mathfrak{M}_i(f_{0,0} f_{1,1} - f_{0,1} f_{1,0})$$

cioè

$$(42)\qquad \Delta_2 \frac{d\mathfrak{M}_i}{di} = -\omega_i \Delta_3 + \mathfrak{M}_i(f_{1,0} f_{0,1} - f_{0,0} f_{1,1}).$$

Basta allora osservare che

$$\frac{d}{di}\left(\frac{\mathfrak{M}_i}{\omega_i}\right) = \frac{1}{\omega_i^2}\left\{\omega_i \frac{d\mathfrak{M}_i}{di} - \mathfrak{M}_i \frac{d\omega_i}{di}\right\},$$

per concludere [Cfr. (42) e $(41)_2$]

$$(43)\qquad \Delta_2 \omega_i^2 \frac{d}{di}\left(\frac{\mathfrak{M}_i}{\omega_i}\right) = -\Delta_3 \omega_i^2 - \mathfrak{M}_i^2 f_{0,0}.$$

Quest'equazione rende evidente la (23) non appena si ripensi a (17) e (18). Il teorema d'esistenza ed unicità resta così completamente dimostrato.

26. Sia l_i la retta d'equazione $\xi_i = \Xi_i$ ed $a_i(\xi_i)$ [ovvero $c_i(\xi_i)$] la somma delle lunghezze dei segmenti eventualmente comuni ad S_a (ovvero ad S_c) ed alla retta normale all'asse ξ_i nel punto di ascissa ξ_i (1).

Dimostrato il teorema d'esistenza ed unicità, l'osservazione finale del n.° 7 — combinata col fatto che nelle $(\mathfrak{S})_1$ ed $(\mathfrak{S})_2$ non figura la $\eta_{\mathfrak{F}}$ — permette di affermare che l_i è la posizione assunta dall'asse limite quando — lasciando invariati il carico, il centro di pressione, la $a_i(\xi_i)$ e la $c_i(\xi_i)$ — si trasformi la S in una sezione S_i simmetrica rispetto all'asse ξ_i.

Un'altra semplice proprietà degli assi l_i può mettersi in evidenza facendo corrispondere al valore generico di i in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ il punto O_i di coordinate

(1) Ciò che implica $a_i(\xi_i) = 0$, $c_i(\xi_i) = 0$ non appena sia $\xi_i < -\alpha_i$ oppure $\xi_i > \beta_i$.

$\xi_i = 0$, $\eta_i = H(i)$, dove

$$H(i) = \frac{\mathfrak{M}_i}{P}. \tag{44}$$

Invero, chiamando (ξ'_i, η'_i) la coppia ortogonale in cui si trasporta (ξ_i, η_i) per effetto della traslazione $O \rightarrow O_i$, si ha

$$\xi'_i = \xi_i, \quad \eta'_i = \eta_i - H(i):$$

e, tenuto conto di (22), $(20)_1$ e (10), la (44) può scriversi

$$0 = -\int_{S_c} \eta'_i r[\omega_i(\xi'_i - \Xi_i)] dS_c + E_a \omega_i \int_{S_a} \eta'_i (\Xi_i - \xi'_i) dS_a.$$

Vuol dire che l_i rappresenta la posizione dell'asse limite nella sollecitazione Σ_i del cilindro C, corrispondente al solito carico $\boldsymbol{P}$, ma al centro di pressione O_i.

Risultando $H(i) = 0$ allora ed allora soltanto che $i = \mathfrak{J}$ ed avendosi [Cfr. (38)]

$$\lim_{i = \mp \frac{\pi}{2}} \frac{\mathfrak{M}_i}{P} = \pm |\, OG_P |,$$

al variare di i da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ il punto O_i partirà dalla posizione G_P per ritornarvi dopo essersi sovrapposto ad O una ed una sola volta (per $i = \mathfrak{J}$). Rispetto alla curva c luogo di O_i, la retta η_i — in quanto congiunge O con O_i — rappresenta la generica secante per O: onde la tangente in O alla c (coincide colla retta $\eta_{\mathfrak{J}}$, cioè) è parallela all'asse limite.

Restano così giustificate tutte le affermazioni del n.° 9.

La curva c gode di altre proprietà interessanti. Ad es. si può stabilire che la sua tangente in G_P è ortogonale alla retta OG_P allora ed allora soltanto che questa coincide con uno degli assi principali d'inerzia di $S_c + \frac{E_a}{p'[\varepsilon_P]} S_a$ rispetto ad O, ecc.

§ 3. Teoremi della teoria lineare.

27. Il teorema di riduzione (n.° 10) stabilisce una perfetta equivalenza analitica tra la teoria ordinaria e la teoria lineare: motivo per cui nelle dimostrazioni e negli enunciati di questo paragrafo ci atterremo alla teoria ordinaria, con tutto vantaggio della semplicità.

Passando dalla teoria generale alla teoria ordinaria $[p \equiv -E_m \varepsilon_z,\ t \equiv 0]$ il sistema ($\mathbb{S}$) si riduce alla forma ([1])

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{P}{\omega} &= E_m \int_{\mathcal{S}_{\mathfrak{J},\Xi}} (\Xi - \xi) dS_c + E_a \int_{S_a} (\Xi - \xi) dS_a, \\ 0 &= E_m \int_{\mathcal{S}_{\mathfrak{J},\Xi}} \xi(\Xi - \xi) dS_c + E_a \int_{S_a} \xi(\Xi - \xi) dS_a, \\ 0 &= E_m \int_{\mathcal{S}_{\mathfrak{J},\Xi}} \eta(\Xi - \xi) dS_c + E_a \int_{S_a} \eta(\Xi - \xi) dS_a, \end{aligned}\right.$$

si riduce cioè ad un sistema di due equazioni per le due incognite ([2]) $\mathfrak{J}$, Ξ.

Posto $\delta = \Xi - \xi =$ distanza del punto generico di S da l, le ultime due equazioni esprimono che O coincide col centro del sistema di forze-momenti statici ([3]) δdS_c, $\delta \frac{E_a}{E_m} dS_a$ applicate ai singoli elementi di $\mathcal{S}_{\mathfrak{J},\Xi} + \frac{E_a}{E_m} S_a$: ne risulta notoriamente l'identità di l coll'asse neutro di O rispetto a $\mathcal{S}_{\mathfrak{J},\Xi} + \frac{E_a}{E_m} S_a$ $\left(\text{che non differisce da } S_c + \frac{E_a}{E_m} S_a \text{ se } l \text{ non taglia } S_c\right)$.

In particolare resta stabilito che l_i coincide sempre coll'asse neutro di O_i rispetto a $\mathcal{S}_{i,\Xi_i} + \frac{E_a}{E_m} S_a$: e simultaneamente (Cfr. n.° 26) che l_i rappresenta anche l'asse neutro di O rispetto alla superficie non omogenea (simmetrica rispetto a ξ_i) ottenuta attribuendo densità rispettivamente eguali ad 1 ed $\frac{E_a}{E_m}$, alle due regioni di S_i che (nella trasformazione di S in S_i) rispettivamente corrispondono a $\mathcal{S}_{i,\Xi_i}$ ed S_a.

([1]) Nella teoria elastica varrebbero ancora le (45) purchè si identificasse $P_{\mathfrak{J},\Xi}$ con S_c; donde deriverebbe l'identità di l coll'asse neutro di O rispetto ad $S_c + \frac{E_a}{E_m} S_a$.

([2]) La stessa circostanza semplificativa si presenterebbe nella teoria delle murature semplici assumendo $t \equiv 0$, p proporzionale ad una qualunque potenza di $|\varepsilon_z|$ (come, ad es., quando si adotta la legge di BACH).

([3]) Cfr. ad es. GUIDI, *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni,* vol. I (8ª ediz., Torino, 1917) pag. 112 e segg.

28. Nella teoria ordinaria le equazioni che definiscono ω_i, Ξ_i (Cfr. n.° 19) possono scriversi

$$(46)\qquad \begin{cases} P = \omega_i \{ f^*_{00}\Xi_i - f^*_{10} \} \\ 0 = f^*_{10}\Xi_i - f^*_{20} \end{cases}$$

con

$$(47)\qquad f^*_{m,n}(i, \Xi_i) = E_m \int_{\mathcal{S}_{i,\Xi_i}} \xi_i^m \eta_i^n dS_c + E_a \int_{S_a} \xi_i^m \eta_i^n dS_a \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Simultaneamente si ha [Cfr. (22)]

$$(48)\qquad \mathfrak{M}_i = \omega_i \{ f^*_{0,1}\Xi_i - f^*_{1,1} \}:$$

mentre da $(46)_2$ risulta $\left(\text{naturalmente, per } -\frac{\pi}{2} < i < \frac{\pi}{2}\right)$

$$(49)\qquad \begin{cases} f^*_{1,0} > 0, \\ \Xi_i = \dfrac{f^*_{20}}{f^*_{10}}. \end{cases}$$

Combinando (48) con $(49)_2$ si ottiene

$$\mathfrak{M}_i = \frac{\omega_i}{f^*_{1,0}} \{ f^*_{0,1} f^*_{2,0} - f^*_{1,1} f^*_{1,0} \},$$

ciò che permette di dedurre da $(41)_1$ che

$$\Delta_2 \frac{d(\omega_i \Xi_i)}{di} = 2 f^*_{1,0} \mathfrak{M}_i;$$

in particolare [Cfr. (17) e $(49)_1$] che entro $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la $\frac{d(\omega_i \Xi_i)}{di}$ ha sempre il segno di $\mathfrak{M}_i$.

D'altra parte, per l'attuale Σ_i, $(\sigma_z)_0$ non differisce da $(\varepsilon_z)_0 = -\omega_i \Xi_i$ altro che per un fattore costante ([1]).

Si può dunque concludere che:

« Tra tutte le sollecitazioni Σ_i la sollecitazione effettiva (cioè $\Sigma_{\mathfrak{J}}$) è caratterizzata dal fatto che rende massima la pressione unitaria in O ([2]).

([1]) Non val la pena d'insistere sul fatto che O può non appartenere ad S.

([2]) Invece in generale $\Xi_{\mathfrak{J}}$ non dà il minimo di Ξ_i. Perchè ciò si verifichi è necessario che uno degli assi centrali di $P_{\mathfrak{J},\Xi} + \frac{E_a}{E_m} S_a$ passi per O: condizione che nella teoria elastica si riduce all'appartenenza di O ad uno degli assi centrali di $S_c + \frac{E_a}{E_m} S_a$.

29. Riferendosi a Σ_i (ed all'unità di lunghezza del nostro cilindro) poniamo

$$\mathfrak{L}_i = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}_{i,\Xi_i}} \varepsilon_z\sigma_z dS_c + \frac{1}{2}\int_{S_a} \varepsilon_z\sigma_z dS_a = \text{lavoro di deformazione.}$$

Avremo [Cfr. (47)]

$$\mathfrak{L}_i = \frac{\omega_i^2}{2}\left\{E_m\int_{\mathcal{S}_{i,\Xi_i}}(\Xi_i-\xi_i)^2 dS_c + E_a\int_{S_a}(\Xi_i-\xi_i)^2 dS_a\right\} =$$

$$= \frac{\omega_i^2}{2}\left\{\Xi_i(f^*_{0,0}\Xi_i - f^*_{10}) - (f^*_{10}\Xi_i - f^*_{20})\right\}\cdot$$

ed infine [Cfr. (46)]

$$\mathfrak{L}_i = \frac{P\Xi_i\omega_i}{2}.$$

Il teorema or ora dimostrato si può dunque enunciare anche nella forma seguente:

« tra tutte le sollecitazioni Σ_i, la sollecitazione effettiva è caratterizzata dal fatto che rende *massimo* il lavoro di deformazione ».

30. Volendo approfondire la trattazione del caso simmetrico, conviene introdurre le notazioni semplificative $\mathcal{S}_\delta = \mathcal{S}_{0,\delta}$, $c(x) \equiv c_0(\xi_0)$, $a(x) \equiv a_0(\xi_0)$ (V. n.i 22 e 26) ed anche le seguenti — in corrispondenza ad ogni valore positivo del parametro ν e dell'intero r —:

$$\left\{\begin{aligned}
&m_r(\delta,\nu) = \int_{\mathcal{S}_\delta} x^r dS_c + \nu\int_{S_a} x^r dS_a = \int_{-\alpha_0}^{\delta} x^r c(x)dx + \nu\int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x^r a(x)dx,\\
&D(\delta,\nu) = m_0(\delta,\nu)m_2(\delta,\nu) - m_1^2(\delta,\nu),\\
&F_r(\delta,\nu) = \delta m_r(\delta,\nu) - m_{r+1}(\delta,\nu) = \int_{-\alpha_0}^{\delta}(\delta - x)x^r c(x)dx + \nu\int_{-\alpha_0}^{\beta_0}(\delta - x)x^r a(x)dx,\\
&q(\delta,\nu) = \delta F_0(\delta,\nu) - F_1(\delta,\nu) = \delta^2 m_0(\delta,\nu) - 2\delta m_1(\delta,\nu) + m_2(\delta,\nu).
\end{aligned}\right.$$

$m_0(\delta, \nu)$, $m_1(\delta, \nu)$, $m_2(\delta, \nu)$ vengono così a rappresentare rispettivamente l'area, il momento statico ed il momento d'inerzia di $\mathcal{S}_\delta + \nu S_a$ rispetto all'asse y:

mentre

$$\frac{dm_r}{d\delta} = \delta^r c(\delta), \tag{50}$$

$$\frac{dF_r}{d\delta} = m_r(\delta), \tag{51}$$

$$\frac{dq}{d\delta} = 2F_0(\delta). \tag{52}$$

Risultando

$$q(\delta, \nu) = \int_{-\alpha_0}^{\delta} (\delta - x)^2 c(x) dx + \nu \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} (\delta - x)^2 a(x) dx,$$

resta stabilita — per ogni δ — la diseguaglianza [Cfr. (35)]

$$q(\delta, \nu) = \delta F_0(\delta, \nu) - F_1(\delta, \nu) > 0 \tag{53}$$

ed insieme l'altra [1]

$$\frac{dD}{d\delta} = c(\delta) q(\delta, \nu) > 0. \tag{54}$$

31. Passando dal caso generale al caso simmetrico della teoria ordinaria ($\mathfrak{J} = 0$) le (45) forniscono

$$\left\{ \begin{aligned} P &= \omega E_m F_0(\Xi), \\ 0 &= F_1(\Xi), \end{aligned} \right. \tag{55}$$

pur d'intendere

$$\nu = \frac{E_a}{E_m}:$$

ciò che riduce l'espressione di ε_z e le condizioni di stabilità [2] alla forma rispettiva

$$\varepsilon_z = -\frac{P(\Xi - x)}{E_m F_0(\Xi)}$$

$$T = \frac{E_a}{E_m} \frac{P(\beta_0 - \Xi)}{F_0(\Xi)} \leq k_t \text{ (condizione di stabilità per l'armatura)}$$

$$\tilde{\omega} = \frac{P(\Xi + \alpha_0)}{F_0(\Xi)} \leq k_c \text{ (condizione di stabilità pel conglomerato).}$$

---

[1] Non val la pena d'insistere sul fatto che nelle (53) e (54) per $S_a \equiv 0$ e $\delta < -\alpha_i$ il segno $>$ va sostituito con $=$ [Cfr. (26)].

[2] Si prescinde dalla 1ª delle A_5) (Cir. n.º 5).

Al tempo stesso la convenzione $x_{G_P} > 0$ resta espressa da

$$m_1(\beta_0) > 0. \tag{56}$$

32. Verifichiamo che l'equazione fondamentale

$$F_1(\delta) = 0,$$

subordinatamente all'essere $m_1(\beta_0) > 0$, ammette una ed una sola radice positiva, che per $\alpha_0 < 0$ è sempre compresa tra $-\alpha_0$ e β_0.

Poichè

$$\frac{dF_1}{d\delta} = m_1(\delta), \quad \frac{d^2F_1}{d\delta^2} = \delta c(\delta),$$

al variare di δ da 0 a $+\infty$ la $F'_1(\delta)$ non potrà cambiar di segno più di una volta e per $\delta \geq \beta_0$ coinciderà sempre con $F'_1(\beta_0) = m_1(\beta_0) > 0$.

D'altra parte (¹)

$$F_1(0) = -m_2(0) < 0:$$

onde resta verificato che l'equazione fondamentale ammette una ed una sola radice positiva, Ξ. Se $\alpha_0 < 0$ tale radice è certamente compresa tra $-\alpha_0$ e β_0 perchè

$$\left| \begin{aligned} & F_1(-\alpha_0) = -\nu \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x(x+\alpha_0)a(x)dx < 0 \\ & F_1(\beta_0) = \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x(\beta_0 - x)\{c(x) + \nu a(x)\}dx > 0: \end{aligned} \right.$$

ed è l'*unica* radice dell'equazione fondamentale perchè per $\delta \leq 0 < -\alpha_0$

$$F'_1(\delta) = m_1(\delta) = \nu \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x a(x) dx > 0.$$

In ogni caso, almeno per $\delta > 0$, sarà

$$F_1(\delta) \lesseqgtr 0 \quad \text{a seconda che} \quad \delta \lesseqgtr \Xi. \tag{57}$$

La (58) rende agevole il calcolo numerico di Ξ: anzi, quando

$$F_1(\beta_0) < 0, \quad \text{cioè} \quad \beta_0 < \frac{m_2(\beta_0)}{m_1(\beta_0)},$$

(¹) Naturalmente si esclude il caso $S_a = 0$, $\alpha_0 < 0$.

essa fornisce $\Xi > \beta_0$ e successivamente

$$m_r(\Xi) = m_r(\beta_0) \qquad (r = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

$$\Xi = \frac{m_2(\Xi)}{m_1(\Xi)} = \frac{m_2(\beta_0)}{m_1(\beta_0)}.$$

È il caso in cui la S_c non è tagliata dall'asse neutro n_1 di O rispetto ad $S_c + \nu S_a$ e quindi n_1 coincide con l.

33. Sempre restando nel caso simmetrico della teoria ordinaria, riprendiamo in esame l'equazione fondamentale $F_1(\delta) = 0$, supponendo

(58) $$F_1(\beta_0) > 0, \quad \text{cioè} \quad \beta_0 > \frac{m_2(\beta_0)}{m_1(\beta_0)}, \quad \Xi < \beta_0 .$$

Definiamo la successione $\beta_1,\ \beta_2, \ldots,\ \beta_s, \ldots$ mediante la relazione ricorrente

(59) $$\beta_s = \frac{m_2(\beta_{s-1})}{m_1(\beta_{s-1})} \qquad (s = 1,\ 2, \ldots):$$

ciò che equivale a considerare la successione $n_1,\ n_2, \ldots,\ n_s, \ldots$ degli assi neutri di O rispetto ad

$$S_c + \frac{E_a}{E_m} S_a \equiv \mathcal{S}_{\beta_0} + \frac{E_a}{E_m} S_a, \quad \mathcal{S}_{\beta_1} + \frac{E_a}{E_m} S_a, \ldots, \quad \mathcal{S}_{\beta_{s-1}} + \frac{E_a}{E_m} S_a, \ldots$$

Risulterà

(60) $$\beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_s > \ldots > 0.$$

Infatti, essendo

(61) $$m_1(\beta_0) > 0, \quad \beta_0 > \frac{m_2(\beta_0)}{m_1(\beta_0)} = \beta_1 > 0,$$

sarà pure

$$\int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x(x - \beta_1)c(x)dx + \frac{E_a}{E_m}\int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x(x - \beta_1)a(x)dx = 0,$$

cioè

$$\int_{\beta_1}^{\beta_0} x(x - \beta_1)c(x)dx + m_2(\beta_1) - \beta_1 m_1(\beta_1) = 0:$$

e quindi

$$m_2(\beta_1) - m_1(\beta_1) < 0,$$

mentre $\beta_1 > 0$. Ne segue

$$m_1(\beta_1) > 0, \quad \beta_1 > \frac{m_2(\beta_1)}{m_1(\beta_1)} = \beta_2 > 0. \tag{62}$$

Il confronto di (62) con (61) basta per mettere in evidenza che la (60) può essere completamente dimostrata per induzione.

Da (60) segue l'esistenza di un limite per β_s al crescere indefinito di s: successivamente (59) e (57) dimostrano che

$$\lim_{s=\infty} \beta_s = \Xi, \tag{63}$$

cioè che « al variare di s da 1 ad ∞, l'asse neutro n_s si approssima costantemente ed indefinitamente all'asse limite ».

34. Pel seguito, conviene fare l'osservazione seguente.

Determinato Ξ, modifichiamo comunque i valori della funzione positiva $c(x)$ nell'intervallo (Ξ, β_0), senza toccare i valori della stessa funzione nell'intervallo (α_0, Ξ) e neppur quelli della $a(x)$ in tutto l'intervallo (α_0, β_0). Per la sezione modificata l'asse limite corrispondente al centro di pressione O sarà ancora la retta $x = \Xi$. Dal lato meccanico, la cosa è intuitiva: ma è resa evidente anche dal teorema d'unicità, non appena si ricordi che l'equazione che definisce Ξ può scriversi

$$\Xi = \frac{m_2(\Xi)}{m_1(\Xi)}.$$

§ 4. Teoremi di confronto.

35. Mantenendo le notazioni del numero precedente e l'ipotesi (58) applichiamo la teoria elastica alla sezione $\mathfrak{S}_{\beta_{s-1}} + \frac{E_a}{E_m} S_a$ sollecitata dal solito carico P applicato in O. Come asse limite troveremo l'asse neutro di O rispetto a $\mathfrak{S}_{\beta_{s-1}} + \frac{E_a}{E_m} S_a$, cioè la retta $x = \beta_s$: onde il massimo T_s della trazione unitaria nell'armatura ed il massimo $\tilde{\omega}_s$ della pressione unitaria nel conglomerato saranno rispettivamente rappresentati da

$$\left\{ \begin{aligned} T_s &= \frac{P(\beta_0 - \beta_s)}{\beta_s m_0(\beta_{s-1}) - m_1(\beta_{s-1})} = \frac{P\{\beta_0 m_1(\beta_{s-1}) - m_2(\beta_{s-1})\}}{D(\beta_{s-1})} \\ \tilde{\omega}_s &= \frac{P(\alpha_0 + \beta_s)}{\beta_s m_0(\beta_{s-1}) - m_1(\beta_{s-1})} = \frac{P\{\alpha_0 m_1(\beta_{s-1}) + m_2(\beta_{s-1})\}}{D(\beta_{s-1})}. \end{aligned} \right. \tag{64}$$

In conseguenza di (54) si trova subito

$$D^2(\delta)\frac{d}{d\delta}\frac{\beta_0 m_1 - m_2}{D} = (\beta_0 - \delta)\delta c(\delta)D(\delta) - (\beta_0 m_1 - m_2)c(\delta)q(\delta) =$$
$$= c(\delta)[-\beta_0(m_1\delta - m_2)(m_0\delta - m_1) + (m_1\delta - m_2)^2]:$$

cioè

$$D^2(\delta)\frac{d}{d\delta}\frac{\beta_0 m_1 - m_2}{D} = -c(\delta)F_1(\delta)\{\beta_0 F_0(\delta) - F_1(\delta)\}. \tag{65}$$

Essendo sempre [Cfr. (53)]

$$F_1(\delta) < \delta F_0(\delta) \tag{66}$$

da (65) segue che quando $\Xi < \delta < \beta_0$ certamente

$$\frac{d}{d\delta}\frac{\beta_0 m_1 - m_2}{D} < 0.$$

Ricordando allora le $(64)_1$, (60) e (63) si conclude

$$T_1 < T_2 < \dots < T_s < \dots < T:$$

in particolare che *sostituendo alla teoria ordinaria la teoria elastica* (¹) *il massimo della trazione unitaria nell'armatura impiccolisce sempre.*

36. Cambiando in (65) β_0 in $-\alpha_0$ si ottiene

$$D^2\frac{d}{d\delta}\frac{m_1\alpha_0 + m_2}{D} = -c(\delta)F_1(\delta)\{\alpha_0 F_0(\delta) + F_1(\delta)\}: \tag{67}$$

donde risulta che se $\alpha_0 > 0$ la condizione $\delta > \Xi$ è sufficiente perchè sia

$$\frac{d}{d\delta}\frac{m_1\alpha_0 + m_2}{D} < 0.$$

Vuol dire che quando $\alpha_0 > 0$ dalle $(64)_2$ (60) e (63) discende

$$\tilde\omega_1 < \tilde\omega_2 < \dots < \tilde\omega_s < \dots < \tilde\omega:$$

e si può affermare che *se* O *è interno ad s, sostituendo alla teoria ordinaria la teoria elastica* (¹) *il massimo della pressione unitaria nel conglomerato diminuisce.*

(¹) A parità di O, P, S_a, S_c, E_m, E_a.

Invece quando $\alpha_0 < 0$ — e quindi $\Xi < \beta_0$ (¹) — se pure non è

$$\tilde{\omega}_1 > \tilde{\omega}, \tag{68}$$

è sempre possibile modificare S_c — senza distruggere la connessione di S — in modo da render soddisfatta la (68).

Per convincerci di questo riprendiamo la (67) ponendo $-\alpha_0 = \alpha > 0$ ed $M(\delta) = F_1(\delta) - \alpha F_0(\delta)$: in guisa da avere

$$D^2 \frac{d}{d\delta} \frac{m_1\alpha_0 + m_2}{D} = -\, c(\delta) F_1(\delta) M(\delta). \tag{69}$$

Risultando

$$\begin{cases} M(\delta) = \int\limits_\alpha^\delta (x - \alpha)(\delta - x) c(x) dx + \dfrac{E_a}{E_m} \int\limits_\alpha^\beta (x - \alpha)(\delta - x) a(x) dx \\ \dfrac{dM}{d\delta} = \int\limits_\alpha^\delta (x - \alpha) c(x) dx + \dfrac{E_a}{E_m} \int\limits_\alpha^\beta (x - \alpha) a(x) dx, \end{cases}$$

insieme ad

$$M(\Xi) = F_1(\Xi) - \alpha F_0(\Xi) = -\, \alpha F_0(\Xi) < 0$$

si avrà $M(\beta) > 0$ e per $\delta > \alpha$ (in particolare, per $\delta > \Xi$) $\dfrac{dM}{d\delta} > 0$.

Ciò basta per asserire che nell'intervallo (Ξ, δ) esiste uno ed un sol valore Ξ' pel quale $M(\Xi') = 0$ e (nello stesso intervallo) è

$$M(\delta) \lesseqgtr 0 \quad \text{a seconda che} \quad \delta \lesseqgtr \Xi'. \tag{70}$$

Anzi, tale valore Ξ' (Cfr. n.° 34) resta invariato comunque si modifichi la funzione positiva $c(x)$ nel primitivo intervallo (Ξ', β): naturalmente posseggono la stessa invarianza

$$\tilde{\omega}' = P \frac{m_1(\Xi')\alpha_0 + m_2(\Xi')}{D(\Xi')}$$

ed $h = \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}$.

Integrando (69) da Ξ a Ξ' e ricordando la (70) si trova

$$h > 0:$$

integrando la stessa (69) da Ξ a β_0

$$\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega} = h - \int\limits_{\Xi'}^{\beta} \frac{1}{D^2(\delta)} c(\delta) F_1(\delta) M(\delta) d\delta. \tag{71}$$

(¹) Cfr. n.° 32.

Ora (Cfr. n.° 30) per $\Xi' < \delta < \beta$

$$D(\delta) > D(\Xi'),$$

$$F_1(\delta) < \beta(\beta - \alpha)S_c + \frac{E_a}{E_m}\beta\int_\alpha^{\beta_0} x a(x)dx = H,$$

$$M(\delta) < \frac{1}{4}(\beta - \alpha)^2 S_c + \frac{E_a}{E_m}\int_\alpha^{\beta}(\beta - x)(x - \alpha)a(x)dx = K:$$

onde da (71) si può trarre

$$\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega} > h - \frac{H\cdot K}{D^2(\Xi')}\int_{\Xi'}^{\beta} c(\delta)d\delta = h - \frac{H\cdot K}{D^2(\Xi')}(S_c - \mathfrak{S}_{\Xi'}).$$

Partendo da una qualunque sezione, si potrà dunque sempre ottenere che risulti $\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega} > 0$, semplicemente riducendo convenientemente piccola l'area $S_c - \mathfrak{S}_{\Xi'}$ — senza toccare i valori della $c(x)$ nell'intervallo (α, Ξ') e neppure quelli della $a(x)$ nell'intero intervallo (α, β_0) —.

La conclusione è indipendente dal valore di P: in modo che, scegliendo P convenientemente piccolo, si potrà anche ottenere che la trazione massima nel conglomerato risulti $< \tau$.

Con ciò agli effetti della sollecitazione presa in esame la teoria elastica verrà a confondersi [1] colla teoria lineare e si potrà affermare che *se O è esterno ad s, anche la sostituzione della teoria lineare alla teoria elastica può fare ingrandire il massimo della pressione unitaria nel conglomerato.*

37. Nel caso simmetrico della teoria generale i valori di ω e Ξ, subordinatamente alla condizione di esser positivi, restano individuati dal sistema [2].

$$(72)\quad \begin{cases} P = \displaystyle\int_{-\alpha_0}^{\Xi} p[\omega(\Xi - x)]c(x)dx - \int_{\Xi}^{\beta_0} t[\omega(x - \Xi)]c(x)dx + \omega E_a\int_{-\alpha_0}^{\beta_0}(\Xi - x)a(x)dx \\ 0 = \displaystyle\int_{-\alpha_0}^{\Xi} xp[\omega(\Xi - x)]c(x)dx - \int_{\Xi}^{\beta_0} xt[\omega(x - \Xi)]c(x)dx + \omega E_a\int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x(\Xi - x)a(x)dx. \end{cases}$$

---

(1) Si ripensi al teorema d'unicità.

(2) Cfr. $(\mathfrak{S})$, per $\mathfrak{J} = 0$.

Contemporaneamente, ove si ritenga la 1ª delle A_5) assorbita da B_2), le condizioni di stabilità si riducono a

(73) $E_a\omega(\beta_0 - \Xi) \leq k_t$ (condizione di stabilità per l'armatura),

(74) $p[\omega(\Xi + \alpha_0)] \leq k_c$ (condizione di stabilità pel conglomerato).

Abbiamo pure già avvertito che nella dimostrazione dei due teoremi di confronto sistematicamente supporremo verificata la

$$(\mathfrak{S}) \qquad E_s \leq E_c \leq E_0$$

per $-\varepsilon_s \leq \varepsilon_z \leq 0$.

38. Passando alla dimostrazione del 1° teorema di confronto [1] contrassegneremo con * tutti gli elementi del relativo problema ausiliare, che differiscono o possono differire dai loro corrispondenti nel problema effettivo (applicazione della teoria generale alla sezione e sollecitazione effettive): in particolare porremo

$$\begin{cases} c_*(x) \equiv \dfrac{E_s}{E_0} c(x) & \text{per} \quad x < 0 \\ c_*(x) \equiv c(x) & \text{per} \quad x > 0 \end{cases}$$

e successivamente

$$m_r^*(\delta, \nu) = \int_{-\alpha_0}^{\delta} x^r c_*(x) dx + \nu \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x^r a(x) dx, \quad \text{ecc.}$$

Procediamo per assurdo, ammettendo in un primo tempo che, pur essendo verificate le condizioni di stabilità nel problema ausiliare, nel problema effettivo risulti $k_c = p[\omega(\Xi + \alpha_0)]$, cioè

$$(75) \qquad \omega(\Xi + \alpha_0) = \varepsilon_s = \frac{k_c}{E_s},$$

in corrispondenza ad una grandezza del carico minore di quella assegnata: grandezza che continueremo a rappresentare con P, mantenendo in relazione ad essa tutte le notazioni abituali. Evidentemente le condizioni di stabilità nel problema ausiliare non cesseranno di esser soddisfatte per una tale diminuzione del carico.

Nell'ipotesi (75), anzi, nell'ipotesi meno restrittiva

$$(76) \qquad p[\omega(\Xi + \alpha_0)] \leq k_c,$$

---

[1] Enunciato al n.° 14 ($\alpha_0 > 0$).

la ($\mathcal{E}$) permette di asserire che per ogni valore di x in $(-\alpha_0, \Xi)$ è

$$E_s \leq \frac{p[\omega(\Xi - x)]}{\omega(\Xi - x)} \leq E_0. \tag{77}$$

In conseguenza, scrivendo la $(72)_2$ nella forma

$$0 = \int_{-\alpha_0}^{0} xp[\omega(\Xi - x)]c(x)dx + \int_{0}^{\Xi} xp[\omega(\Xi - x)]c(x)dx -$$

$$- \int_{\Xi}^{\beta_0} xt[\omega(x - \Xi)]c(x)dx + \omega E_a \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x(\Xi - x)a(x)dx,$$

si riconosce che

$$0 < \omega E_s \int_{-\alpha_0}^{0} x(\Xi - x)c(x)dx + \omega E_0 \int_{0}^{\Xi} x(\Xi - x)c(x)dx + \omega E_a \int_{-\alpha_0}^{\beta_0} x(\Xi - x)a(x)dx:$$

cioè — essendo $\omega > 0$, $\dfrac{E_a}{E_0} = n$ —

$$0 < F_1^*(\Xi, n) = \Xi m_1^*(\Xi, n) - m_2^*(\Xi, n). \tag{78}$$

39. Da (78), poichè $\Xi > 0$, segue

$$m_1^*(\Xi, n) > 0 \tag{79}$$

e successivamente

$$m_1^*(\beta_0, n) > 0. \tag{80}$$

Invero se $\Xi \geq \beta_0$ la (79) s'identifica colla (80): mentre se $\Xi < \beta_0$ da $\dfrac{dm_1^*}{d\delta} = \delta c(\delta)$ si può sicuramente trarre $m_1^*(\Xi, n) < m_1^*(\beta_0, n)$ e ricondurre così ancora la (80) alla (79).

La (80) — in quanto afferma che l'asse positivo x risulta orientato da O verso il baricentro di $S_c^* + nS_a$ — dà la condizione voluta per poter scrivere le relazioni fondamentali del problema ausiliare nella forma [1]

$$F_1^*(\Xi^*, n) = 0, \quad \omega^* = \frac{P}{E_0 F_0^*(\Xi^*, n)}. \tag{81}$$

$$\frac{E_a}{E_0} \frac{P(\beta_0 - \Xi^*)}{F_0^*(\Xi^*, n)} \leq \frac{E_s}{E_0} k_t, \quad \frac{P(\Xi^* + \alpha_0)}{F_0^*(\Xi^*, n)} \leq k_c. \tag{82}$$

[1] Cfr. n.° 31.

Dal confronto di $(81)_1$ con (78) segue (Cfr. (57) del paragrafo precedente)

$$\Xi > \Xi^*: \tag{83}$$

ciò che corrisponde all'affermare che l'asse limite del problema ausiliare risulta compreso tra O e l'asse limite del problema effettivo.

Anche in questo numero non abbiamo supposto necessariamente verificata la (75), ma solo la (76).

40. Moltiplichiamo $(72)_1$ per Ξ e successivamente sottragghiamo membro a membro $(72)_2$. Avremo così

$$P\Xi = \int_{-\alpha_0}^{\Xi}(\Xi - x)p[\omega(\Xi - x)]c(x)dx + \\ + \int_{\Xi}^{\beta_0}(x - \Xi)t[\omega(x - \Xi)]c(x)dx + \omega E_a\int_{-\alpha_0}^{\beta_0}(\Xi - x)^2 a(x)dx. \tag{84}$$

Tenendo conto che la t è sempre positiva e che da (75) ed ($\mathcal{E}$) — oltre che (77) — discende

$$p[\omega(\Xi - x)] > \frac{k_c}{\Xi + \alpha_0}(\Xi - x)$$

per ogni x in $(-\alpha_0, \Xi)$, dalla (84) si trae

$$P\Xi > \frac{k_c}{\Xi + \alpha_0}\int_{-\alpha_0}^{\Xi}(\Xi - x)^2 c(x)dx + \frac{k_c}{\Xi + \alpha_0}\frac{E_a}{E_s}\int_{-\alpha_0}^{\beta_0}(\Xi - x)^2 a(x)dx > \\ > \frac{k_c}{\Xi + \alpha_0}\left\{\int_{-\alpha_0}^{\Xi}(\Xi - x)^2 c_*(x)dx + n\int_{-\alpha_0}^{\beta_0}(\Xi - x)^2 a(x)dx\right\}$$

cioè (Cfr. n.° 30)

$$k_c < P\frac{\Xi(\Xi + \alpha_0)}{q_*(\Xi, n)}. \tag{85}$$

Tenendo presente che $\dfrac{dq}{d\delta} = 2F_0(\delta)$, si trova subito

$$q^2_*(\delta)\frac{d}{d\delta}\frac{\delta(\delta + \alpha_0)}{q_*(\delta)} = (2\delta + \alpha_0)q_*(\delta) - 2\delta(\delta + \alpha_0)F_0^*(\delta) = \\ = \alpha_0[q_*(\delta) - 2\delta F_0^*(\delta)] + 2\delta[q_*(\delta) - \delta F_0^*(\delta)],$$

cioè

$$q^2_*(\delta)\frac{d}{d\delta}\frac{\delta(\delta+\alpha_0)}{q_*(\delta)}=-\alpha_0[\delta F_0{}^*(\delta)+F_1{}^*(\delta)]-2\delta F_1{}^*(\delta).$$

Ora [Cfr. $(81)_1$] per $\delta>\Xi^*>0$, non solo è $F_1{}^*(\delta, n)>0$, ma anche [Cfr. (66) o (53)] $F_0{}^*(\delta, n)>0$: onde si conclude (¹) che almeno per $\delta>\Xi^*$

$$\frac{d}{d\delta}\frac{\delta(\delta+\alpha_0)}{q_*(\delta, n)}<0.$$

Ciò permette di dedurre da (83)

$$\frac{\Xi(\Xi+\alpha_0)}{q_*(\Xi, n)}<\frac{\Xi^*(\Xi^*+\alpha_0)}{q_*(\Xi^*, n)}. \tag{86}$$

Osservando infine che $q_*(\Xi_*, n)=\Xi^*F_0{}^*(\Xi^*, n)-F_1{}^*(\Xi^*, n)=\Xi_*F_0{}^*(\Xi_*, n)$, si riesce a sostituire alla (85) la diseguaglianza

$$k_c<P\frac{\Xi^*+\alpha_0}{F_0{}^*(\Xi^*, n)},$$

la quale è in contrasto colla $(82)_2$.

Vuol dire che il verificarsi della condizione di stabilità pel conglomerato nel problema ausiliare, è sufficiente perchè nel problema effettivo, in corrispondenza al carico assegnato e ad ogni carico minore, sia

$$p[\omega(\Xi+\alpha_0)]<k_c \tag{87}$$

ed insieme valgano tutte le proprietà indicate ai n.ⁱ 38 e 39 come conseguenze dell'ipotesi (76).

41. Completiamo la dimostrazione del 1° teorema di confronto, stabilendo che il verificarsi della $(82)_1$, insieme ad

$$p[\omega(\Xi+\alpha_0)]<k_c \tag{87}$$

$$\Xi>\Xi^*, \tag{83}$$

è sufficiente perchè risulti

$$E_a\omega(\beta_0-\Xi)\leq k_t: \tag{73}$$

anche se $\Xi<\beta_0$.

(¹) In questo punto è essenziale l'ipotesi $\alpha_0>0$: nell'ipotesi opposta, almeno per δ convenientemente prossimo a Ξ^* risulta $\frac{d}{d\delta}\frac{\delta(\delta+\alpha_0)}{q_*(\delta, n)}>0$.

Anche qui procederemo per assurdo, ammettendo che in corrispondenza ad una grandezza del carico minore di quella assegnata sussista l'eguaglianza

$$E_a\omega(\beta_0 - \Xi) = k_t. \tag{88}$$

Riprendendo la (84) — che ha validità generale — in conseguenza di (87) si trova

$$P\Xi > \omega\left\{E_s\int_{-\alpha_0}^{\Xi}(\Xi - x)^2 c(x)dx + E_a\int_{-\alpha_0}^{\beta_0}(\Xi - x)^2 a(x)dx\right\} >$$

$$> \omega E_s\left\{\int_{-\alpha_0}^{\Xi}(\Xi - x)^2 c_*(x)dx + \frac{E_a}{E_0}\int_{-\alpha_0}^{\beta_0}(\Xi - x)^2 a(x)dx\right\}$$

cioè

$$P\Xi > \omega E_s q_*(\Xi, n):$$

onde si riconosce che la (88) non può sussistere senza che sia

$$k_t < P\frac{E_a}{E_s}\frac{(\beta_0 - \Xi)\Xi}{q_*(\Xi, n)}. \tag{89}$$

D'altra parte [Cfr. (52)]

$$q^2_*(\delta, n)\frac{d}{d\delta}\frac{\delta}{q_*(\delta, n)} = q_*(\delta) - 2\delta F_0^*(\delta) = -\delta F_0^*(\delta) - F_1^*(\delta):$$

mentre per $\delta > \Xi^*$ si ha simultaneamente $F_1^*(\delta) > 0$, $\delta F_0^*(\delta) > 0$.

Vuol dire che — senza neppur bisogno di utilizzare direttamente l'ipotesi $\alpha_0 > 0$ — si arriva a concludere che per $\delta > \Xi^*$

$$\frac{d}{d\delta}\frac{\delta}{q_*(\delta, n)} < 0: \tag{90}$$

in particolare [Cfr. (83)]

$$\frac{\Xi}{q_*(\Xi, n)} < \frac{\Xi^*}{q_*(\Xi^*, n)} = \frac{1}{F_0^*(\Xi^*, n)}. \tag{91}$$

Questa diseguaglianza permette di dedurre da (89) [Cfr. ancora (83)]

$$\rho k_t < P\frac{E_a}{E_0}\frac{\beta_0 - \Xi_*}{F_0^*(\Xi_*, n)}:$$

ciò che è in contrasto con $(82)_1$, c. d. d.

Così il 1° teorema di confronto resta completamente dimostrato.

42. Passiamo a trattare il caso che O sia esterno ad S, cioè $-\alpha_0 = \alpha > 0$.

Attualmente, essendo la x positiva in tutta S, risulta evidente la diseguaglianza

(92) $$m_1(\beta_0, n) > 0:$$

mentre il solo ricorso alla ($\mathcal{G}$) permette di trarre da $(72)_2$

$$0 < E_0\int_\alpha^\Xi x(\Xi - x)c(x)dx + E_a\int_\alpha^{\beta_0} x(\Xi - x)a(x)dx$$

ovvero

(93) $$0 < F_1(\Xi, n).$$

Verificandosi la (92) le equazioni fondamentali del problema ausiliare — applicazione della teoria ordinaria alla sezione effettiva sollecitata in O dal carico $\frac{P}{\rho}$, per $E_m = E_0$ — possono scriversi nella forma (¹)

(94) $$F_1(\Xi_*, n) = 0, \quad \omega_* = \frac{P}{E_0 F_0(\Xi_*, n)}$$

(95) $$\frac{E_a}{E_0}\frac{P}{\rho}\frac{\beta_0 - \Xi_*}{F_0(\Xi_*, n)} \leq k_t, \quad \frac{P}{\rho}\frac{\Xi_* - \alpha}{F_0(\Xi_*, n)} \leq k_c.$$

Il semplice confronto di (93) con $(94)_1$ fornisce (²)

(96) $$\Xi > \Xi_*.$$

43. Volendo dimostrare il 2° teorema di confronto, limitiamoci alla teoria ridotta e procediamo per assurdo (³) ammettendo che — in corrispondenza alla grandezza effèttiva del carico P o ad una grandezza minore — la $(95)_2$ possa coesistere con

(97) $$\omega(\Xi - \alpha) = \varepsilon_s.$$

Posto $n' = \frac{E_a}{E_s}$, limitando la $(72)_2$ alla teoria ridotta $[t \equiv 0]$, ricordando che attualmente $x > 0$ in tutta S, utilizzando infine la (97) e la ($\mathcal{G}$), si trova

$$0 > \int_\alpha^\Xi x(\Xi - x)c(x)dx + n'\int_\alpha^{\beta_0} x(\Xi - x)a(x)dx$$

(¹) Cfr. n.i 15 e 31.
(²) Cfr. n.° 32, (57).
(³) Cfr. n.i 38 e 41.

ovvero

$$0 > F_1(\Xi, n').$$

Se dunque si rappresenta con Ξ'_* la radice [certamente positiva (1)] dell'equazione

$$0 = F_1(\Xi'_*, n'),$$

si può asserire che

$$\Xi < \Xi'_*. \tag{98}$$

D'altra parte la (97), combinata come di solito colla ($\mathfrak{S}$), permette pure di dedurre da (84) (Cfr. n.° 40)

$$k_c < P \frac{\Xi(\Xi - \alpha)}{q(\Xi, n)}, \tag{99}$$

mentre (Cfr. n.° 41) per $\delta > \Xi_*$

$$\frac{d}{d\delta} \frac{\delta}{q(\delta, n)} < 0:$$

in particolare

$$\frac{\Xi}{q(\Xi, n)} < \frac{\Xi_*}{q(\Xi_*, n)} = \frac{1}{F_0(\Xi_*, n)}. \tag{100}$$

Da (99), (98) e (100) segue

$$k_c < \frac{\Xi'_* - \alpha}{\Xi_* - \alpha} \frac{\Xi_* - \alpha}{F_0(\Xi_*, n)}. \tag{101}$$

Nel numero seguente dimostreremo che

$$\frac{\Xi'_* - \alpha}{\Xi_* - \alpha} < \frac{n'}{n} = \frac{1}{\rho}. \tag{102}$$

Questa diseguaglianza mette in evidenza l'incompatibilità di (101) con $(95)_2$: cioè prova che il verificarsi della condizione di stabilità pel conglomerato nel problema ausiliare è sufficiente affinchè, applicando la teoria ridotta alla sezione effettiva sollecitata in O dal carico P o da un carico minore, risulti

$$p[\omega(\Xi - \alpha)] < k_c. \tag{103}$$

Dopo questo per giungere alla completa dimostrazione del 2° teorema di

(1) Cfr. ancora n.° 32.

confronto basta riprendere le considerazioni del n.° 41, sostituendo $(82)_1$, (87), (83) con $(95)_1$, (103), (96).

44. Riprendiamo in esame la solita equazione

$$(104) \qquad 0 \equiv F_1(\delta, \nu) = \int_\alpha^\delta x(\delta - x)c(x)dx + \nu \int_\alpha^{\beta_0} x(\delta - x)a(x)dx$$

per un qualunque valore positivo di ν: la sua radice δ, sempre $> \alpha > 0$, per $\nu = n$ e $\nu = n' > n$ rispettivamente s'identifica con Ξ_* e Ξ'_*.

Derivando (104) rispetto a ν si trova

$$0 = \frac{d\delta}{d\nu} m_1(\delta, \nu) + \int_\alpha^{\beta_0} x(\delta - x)a(x)dx:$$

equazione che combinata colla (104) stessa fornisce

$$(105) \qquad \frac{d\delta}{d\nu} m_1(\delta, \nu) = \frac{1}{\nu} \int_\alpha^\delta x(\delta - x)c(x)dx:$$

in particolare $\frac{d\delta}{d\nu} > 0$, conformemente a $\Xi_* < \Xi'_*$.

Ma (104) può anche scriversi

$$(106) \qquad \delta m_1(\delta, \nu) = \int_\alpha^\delta x^2 c(x)dx + \nu \int_\alpha^{\beta_0} x^2 a(x)dx,$$

mentre

$$(107) \qquad \alpha m_1(\delta, \nu) < \int_\alpha^\delta x^2 c(x)dx + \delta\nu \int_\alpha^{\beta_0} x a(x)dx.$$

Sottraendo (107) da (106) si trova

$$(\delta - \alpha)m_1(\delta, \nu) > \nu \int_\alpha^{\beta_0} x(x - \delta)a(x)dx$$

e successivamente [Cfr. ancora (104)]

$$(\delta - \alpha) m_1(\delta, \nu) > \int_\alpha^\delta x(\delta - x) c(x) dx > 0. \tag{108}$$

Basta allora dividere (105) per (108) per trovare

$$\frac{1}{\delta - \alpha} \frac{d\delta}{d\nu} < \frac{1}{\nu},$$

cioè

$$\frac{d}{d\nu} \log \frac{\delta - \alpha}{\nu} < 0:$$

in particolare

$$\frac{\Xi_* - \alpha}{n} > \frac{\Xi'_* - \alpha}{n'}. \tag{102}$$

Sui veli elastici.

Memoria di B. FINZI (a Milano).

Un pezzo di superficie elastica, isotropa, che diremo σ, sia in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze. Lo spostamento di un generico punto P di σ sia infinitesimo e tangente a σ in P. Tale condizione si verifica, ad esempio, se un velo elastico è teso su di una superficie rigida (1).

Mi propongo di caratterizzare deformazioni e sforzi in un generico punto P di σ. Se σ è superficie piana, il problema coincide con quello della deformazione elastica piana, ed è problema questo di cui si conosce la soluzione (2). Non mi risulta invece che sia nota la soluzione del problema (più generale) del quale mi voglio occupare.

§ 1. Equazioni indefinite.

Sia $\boldsymbol{s}$ lo spostamento elastico di un punto P di σ, λ e μ le due costanti d'isotropia di LAMÉ. L'omografia degli sforzi sarà (3)

$$\beta = -\lambda \operatorname{div} \boldsymbol{s} - 2\mu \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} + \mu(\operatorname{rot} \boldsymbol{s}) \wedge .$$

Sia $\boldsymbol{F}$ la forza unitaria di massa, ρ la densità: l'equazione vettoriale indefinita di equilibrio sarà (4)

$$\rho \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \beta, \tag{1}$$

cioè (5)

$$\rho \boldsymbol{F} + (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{s} - \mu \operatorname{rot}^2 \boldsymbol{s} = 0. \tag{1'}$$

---

(1) Lo studio generale dei veli flessibili fu fatto dal prof. B. CALDONAZZO, *Sulla meccanica della superficie*. Monitore Tecnico, n. 1 e 2, 1920.

(2) J. CL. MAXWELL, Edinburgh Roy. Soc. Trans. 26 (1872), p. 1; M. LÉVY, Paris, C. R. 26 (1898), p. 1236; J. H. MICHELL, London Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 100. Cfr. anche Encyk. der math. Wiss. Band IV, Teilband 4, p. 161.

(3) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*. II, Pavia 1913, p. 29.

(4) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, loc. cit., p. 26.

(5) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, loc. cit., pag. 31.

Sia

$$(2) \qquad ds^2 = \sum_{ik}^{2}{}_{1} a_{ik} dx_i dx_k$$

il quadrato dell'elemento lineare su σ. Consideriamo altresì lo spazio definito dalla seguente forma differenziale quadratica:

$$(3) \qquad dS^2 = \sum_{ik}^{3}{}_{1} b_{ik} dx_i dx_k .$$

Le superficie $x_3 = \text{cost.}$ siano parallele a σ. Le loro traiettorie ortogonali saranno rette: le rette x_3. Se (ad esempio) la superficie $x_3 = 0$ coincide con σ, si avrà:

$$b_{ik} = a_{ik} \text{ per } x_3 = 0 \ (i, k = 1, 2), \quad b_{i3} = 0 \ (i = 1, 2), \quad b_{33} = 1.$$

Definiscano u_1, u_2, u_3 covariantemente nella metrica (3) il vettore $\boldsymbol{s}$ (¹). Poichè il sistema u_i è definito soltanto nei punti di σ, le equazioni indefinite dell'equilibrio elastico della superficie σ si otterranno dalla (1') ponendo in essa $x_3 = 0$ e supponendo nulla ogni dipendenza da x_3: quindi u_i indipendente da x_3. Ricordando che $\boldsymbol{s}$ è tangente a σ, dovremo dunque porre nella (1'):

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0.$$

Siano ω^1, ω^2, ω^3 le componenti controvarianti di rot $\boldsymbol{s}$: nei punti di σ si avrà (²):

$$\omega^1 = \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right),$$

e quindi (ricordando le note relazioni tra le componenti covarianti e le controvarianti di uno stesso vettore):

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right).$$

Il vettore rot $\boldsymbol{s}$ è dunque normale a σ, e il suo modulo è dato dal valore assoluto di ω, essendo ω definito dalla seguente relazione:

$$(4) \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right).$$

(¹) T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto.* Roma 1925, p. 113 e 139.
(²) T. Levi-Civita, loc. cit., p. 183.

Le componenti controvarianti di $\operatorname{rot}^2 \boldsymbol{s}$ saranno allora (sempre nei punti di σ):

$$\nu^1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \omega}{\partial x_2}, \quad \nu^2 = -\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \quad \nu^3 = 0$$

e quindi

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(a_{11} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - a_{12} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right), \quad \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(a_{21} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - a_{22} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right), \quad \nu_3 = 0.$$

Osserviamo ora che il coefficiente di dilatazione, che chiamiamo θ, non è altro che $\operatorname{div} \boldsymbol{s}$. Le componenti covarianti di $\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{s}$ saranno allora $\frac{\partial \theta}{\partial x_i}$ (1).

Analogamente al caso della deformazione piana, supponiamo che le forze unitarie di massa abbiano componente tangenziale a σ nulla (2). Ne segue $F_1 = F_2 = 0$. Dalla (1') si otterranno allora, nel caso in esame, le seguenti due relazioni:

$$(5) \qquad \begin{cases} (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial \theta}{\partial x_1} - \dfrac{\mu}{\sqrt{a}} \left(a_{11} \dfrac{\partial \omega}{\partial x_2} - a_{12} \dfrac{\partial \omega}{\partial x_1} \right) = 0, \\[2ex] (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial \theta}{\partial x_2} - \dfrac{\mu}{\sqrt{a}} \left(a_{21} \dfrac{\partial \omega}{\partial x_2} - a_{22} \dfrac{\partial \omega}{\partial x_1} \right) = 0. \end{cases}$$

Queste saranno le equazioni indefinite d'equilibrio elastico della superficie σ (3).

Per procedere oltre, è opportuno porre il ds^2, definito dalla (2), sotto forma isoterma: se $x_1 + ix_2$ è variabile complessa su σ, sarà

$$(6) \qquad ds^2 = l^2(dx_1^2 + dx_2^2) \ (^4),$$

essendo

$$l^2 = \frac{1}{\Delta_1 x_1} = \frac{1}{\Delta_1 x_2}.$$

Le (5) allora assumono la seguente forma:

$$(7) \qquad \begin{cases} (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial \theta}{\partial x_1} - \mu \dfrac{\partial \omega}{\partial x_2} = 0, \\[2ex] (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial \theta}{\partial x_2} + \mu \dfrac{\partial \omega}{\partial x_1} = 0. \end{cases}$$

---

(1) T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 176.

(2) Nel caso del velo elastico teso su di una superficie rigida, e non soggetto ad alcuna forza attiva, tale condizione equivale a considerare la superficie rigida liscia.

(3) La terza equazione che si ottiene dalla (1') proiettando sulla normale a σ, definisce F_3. Nel caso di un velo teso su di una superficie rigida, essa determinerà la reazione del vincolo. Di questa reazione ci occuperemo in appendice al § 3.

(4) L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*. Pisa 1920, I, p. 124.

Queste due relazioni ci dicono che $w = (\lambda + 2\mu)\theta + i\mu\omega$ è funzione della variabile complessa $x_1 + ix_2$. Diremo allora — *qualunque* sia il sistema coordinato x_1, x_2 (anche non isotermo) — che w è funzione di variabile complessa su σ, e quindi $(\lambda + 2\mu)\theta$ e $\mu\omega$ sono soluzioni coniugate dell'equazione $\Delta_2\Phi = 0$, essendo $\Delta_2\Phi$ il ben noto invariante $\sum_{ik}^{2}{}_{1} a^{ik}\Phi_{ik}$. Dunque

$$\Delta_2\theta = 0, \quad \Delta_2\omega = 0. \tag{8}$$

In particolare, riferendoci alla forma (6), si avrà [1]:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2} = 0, \\ &\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} = 0, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

come, del resto, si poteva tosto dedurre dalle (7).

§ 2. **Funzioni ausiliarie.**

Introduciamo due funzioni ausiliarie φ e ψ, tali che

$$\left\{\begin{aligned} 2\mu u_1 &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \\ 2\mu u_2 &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Riferiamoci alla metrica (6): in virtù della (4) si avrà:

$$2\mu l^2\omega = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2},$$

cioè [2]

$$\Delta_2\psi = 2\mu\omega. \tag{11}$$

Ricordando che $\theta = \operatorname{div} \boldsymbol{s}$, e quindi [3]

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{r}^{2}{}_{1} \frac{\partial(\sqrt{a}\,u^r)}{\partial x_r},$$

---

(1) Cfr. ad es. L. BIANCHI, loc. cit., p. 86.
(2) Cfr. ad es. L. BIANCHI, loc. cit., p. 86.
(3) T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 174, cfr. formula 17″.

si avrà:

$$\theta = \frac{1}{2\mu} \Delta_2 \varphi,$$

cioè

(12) $$\Delta_2 \varphi = 2\mu\theta.$$

Ma, in virtù della prima delle (8), $\Delta_2 \theta = 0$: dunque $\Delta_2 \Delta_2 \varphi = 0$; cioè, ponendo $\Delta_4 = \Delta_2 \Delta_2$:

(13) $$\Delta_4 \varphi = 0.$$

Ma anche $\Delta_2 \omega = 0$; dunque

(14) $$\Delta_4 \psi = 0.$$

Le funzioni ausiliarie φ e ψ sono dunque biarmoniche sulla superficie [1]: soluzioni cioè dell'equazione differenziale di quarto ordine:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}}{l^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}}{l^2} = 0.$$

In più le due funzioni φ e ψ non sono indipendenti, perchè le due funzioni armoniche $\Delta_2 \psi$ e $\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \Delta_2 \varphi$ sono coniugate.

§ 3. Sforzi.

Consideriamo un solido elastico. Π sia il potenziale elastico. Lo sforzo che si esercita su di una superficie di normale n, ha per proiezione ortogonale secondo la tangente alla linea x_p (riferendoci alla metrica (3)) la seguente espressione:

$$\frac{1}{\sqrt{b_{pp}}} \sum_{1}^{3}{}_{qs} \frac{\cos \widehat{nx_s}}{\sqrt{b^{ss}}} b_{qp} \Pi^{qs} \quad [2].$$

Π^{qs} rappresenta la derivata controvariante di

$$\Pi^q = \sum_{1}^{3}{}_h b^{hq} \frac{\partial \Pi}{\partial x_h}.$$

---

(1) B. FINZI, *Funzioni biarmoniche sopra una superficie.* Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, serie VI, vol. VI (1927), p. 210.

(2) Questa formula e le seguenti, fino alla (15), sono state tolte dalle lezioni di teoria dell'elasticità che il compianto prof. RICCI svolse all'Università di Padova.

Se la superficie considerata è una superficie $x_r = \text{cost.}$, sarà $\cos\widehat{nx_s} = 0$ per $s \neq r$, $\cos\widehat{nx_s} = \frac{1}{\sqrt{b_{rr}b^{rr}}}$ per $s = r$ [1]. Allora la proiezione ortogonale secondo la linea x_p dello sforzo esercitantesi su di una superficie x_r sarà:

$$\frac{1}{\sqrt{b_{pp}}}\sum_1^3{}_q \frac{1}{b^{rr}\sqrt{b_{rr}}} b_{qp}\Pi^{qr}.$$

Se Γ_{rp} è il tensore che caratterizza tale sforzo, sarà

$$\frac{\Gamma_{rp}}{\sqrt{b_{pp}b_{rr}}} = \frac{1}{\sqrt{b_{pp}}}\sum_1^3{}_q \frac{1}{b^{rr}\sqrt{b_{rr}}} b_{qp}\Pi^{qr}$$

e quindi

(15) $$b^{rr}\Gamma_{rp} = \sum_1^3{}_q b_{qp}\Pi^{qr}.$$

Sulla superficie σ allora, il tensore che caratterizza gli sforzi sarà definito dalla seguente relazione

$$a^{rr}\Gamma_{rp} = \sum_1^2{}_q a_{qp}\Pi^{qr} \qquad (p, r = 1, 2).$$

In particolare poi, riferendoci alla forma isoterma (6), si avrà:

(16) $$\Gamma_{rp} = l^4\Pi^{pr} \qquad (p, r = 1, 2).$$

Deriviamo covariantemente u_r: se $\left\{ \begin{matrix} rs \\ j \end{matrix} \right\}$ rappresenta un simbolo di CHRISTOFFEL di seconda specie, si avrà [2]:

$$u_{rs} = \frac{\partial u_r}{\partial x_s} - \Sigma_j \left\{ \begin{matrix} rs \\ j \end{matrix} \right\} u_j.$$

Poniamo

(17) $$2\xi_{rs} = u_{rs} + u_{sr};$$

sarà:

(18) $$\Pi^{pr} = -\lambda\theta a^{pr} - 2\mu\xi^{pr} \quad (^3).$$

---

(1) Cfr. ad es. E. BELTRAMI, *Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità*. Memorie della R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie IV, tomo VI, p. 405, formula (2)a.

(2) T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 168.

(3) Anche questa formula è stata tratta dalle citate lezioni di RICCI. Essa è tosto dedotta se si ricorda che $\Pi^{rs} = \frac{d\Pi}{d\xi_{rs}}$ e $2\Pi = -\lambda\theta^2 - 2\mu J$ dove la dilatazione $\theta = \Sigma_{pq}a^{pq}\xi_{pq}$, e $J = \Sigma_{pq}\xi^{pq}\xi_{pq}$.

In virtù delle (16), (17), (18), si avrà:

$$(19)\qquad \begin{cases} \Gamma_{11} = -\lambda l^2\theta - 2\mu u_{11}, \\ \Gamma_{22} = -\lambda l^2\theta - 2\mu u_{22}, \\ \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = -\mu(u_{12} + u_{21}). \end{cases}$$

Valutiamo ora l'invariante lineare del tensore Γ_{pr} $(p, r = 1, 2)$:

$$\Gamma = \sum_{1}^{2}{}_{rp} a^{rp}\Gamma_{rp}.$$

Riferendoci alla metrica (6), si avrà:

$$\Gamma = -2\lambda\theta - 2\mu\frac{u_{11} + u_{22}}{l^2}.$$

Ma, su σ, [1]

$$\theta = \sum_{1}^{2}{}_{rp} a^{rp} u_{rp} = \frac{u_{11} + u_{22}}{l^2};$$

dunque

$$\Gamma = -2(\lambda + \mu)\theta;$$

e, in virtù della (12)

$$(20)\qquad \Gamma = -\frac{\lambda + \mu}{\mu}\Delta_2\varphi.$$

L'invariante del tensore degli sforzi su σ è dunque uguale (a meno di un fattore costante) all'invariante differenziale secondo della funzione ausiliaria φ.

Esprimiamo ora le componenti covarianti del tensore degli sforzi mediante le funzioni φ e ψ:

Riferendoci alla metrica (6), e derivando covariantemente u_i, si avrà:

$$(21)\qquad \begin{cases} u_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} - \dfrac{1}{2l^2}\left(\dfrac{\partial l^2}{\partial x_1}u_1 - \dfrac{\partial l^2}{\partial x_2}u_2\right), \\ u_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{1}{2l^2}\left(\dfrac{\partial l^2}{\partial x_1}u_1 - \dfrac{\partial l^2}{\partial x_2}u_2\right), \\ u_{12} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} - \dfrac{1}{2l^2}\left(\dfrac{\partial l^2}{\partial x_2}u_1 + \dfrac{\partial l^2}{\partial x_1}u_2\right), \\ u_{21} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{1}{2l^2}\left(\dfrac{\partial l^2}{\partial x_2}u_1 + \dfrac{\partial l^2}{\partial x_1}u_2\right). \end{cases}$$

---

(1) T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 174, formula 17.

Le (19), ricordando la (12), le (21) e le (10), si scriveranno dunque così:

$$(22)\quad \begin{cases} -\Gamma_{11}=\dfrac{\lambda}{2\mu}\,l^2\Delta_2\varphi+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}-\dfrac{1}{2l^2}\left(\dfrac{\partial l^2}{\partial x_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\dfrac{\partial l^2}{\partial x_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}-\dfrac{\partial l^2}{\partial x_1}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}-\dfrac{\partial l^2}{\partial x_2}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\right), \\ -\Gamma_{22}=\dfrac{\lambda}{2\mu}\,l^2\Delta_2\varphi+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}+\dfrac{1}{2l^2}\left(\dfrac{\partial l^2}{\partial x_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\dfrac{\partial l^2}{\partial x_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}-\dfrac{\partial l^2}{\partial x_1}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}-\dfrac{\partial l^2}{\partial x_2}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\right), \\ -\Gamma_{21}=-\Gamma_{12}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right)-\dfrac{1}{2l^2}\left(\dfrac{\partial l^2}{\partial x_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\dfrac{\partial l^2}{\partial x_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}-\dfrac{\partial l^2}{\partial x_2}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}+\dfrac{\partial l^2}{\partial x_1}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) \end{cases}$$ [1].

Queste relazioni determinano Γ_{rp} mediante espressioni lineari nelle derivate prime e seconde delle funzioni biarmoniche φ e ψ.

Velo teso su di una superficie liscia. — Lo stato di tensione di un velo teso su di una superficie liscia sarà definito dalle (22) con la limitazione però che gli sforzi abbiano in ogni punto del velo carattere di tensione. Determiniamo ora la reazione opposta dal vincolo:

Il Prof. CALDONAZZO [2] stabilì le equazioni indefinite di equilibrio di un velo flessibile qualsiasi. Egli ottenne tre equazioni indefinite [3] di cui le prime due non sono altro che la proiezione sulle linee x_1 e x_2 della nostra (1): ad esse la nostra soluzione — riguardante i veli elastici — manifestamente soddisfa. La terza delle (15) di CALDONAZZO ci permetterà di calcolare la reazione che il vincolo liscio esercita sul velo. Tale reazione sarà diretta come la normale alla superficie σ: indichiamola con F. Poichè nessuna forza attiva agisce sul velo, sarà $F=F_3$, cioè, in virtù della terza delle (15) di CALDONAZZO:

$$F=-\frac{T_{11}}{R_1}-\frac{T_{22}}{R_2}-2\frac{T_{12}}{\tau}.$$

In questa formula le linee x_1 e x_2 sono supposte ortogonali, $\dfrac{1}{R_1}$ e $\dfrac{1}{R_2}$ sono

---

[1] Se φ_{ik}, ψ_{ik} rappresentano le derivate seconde covarianti di φ e ψ, si può dare alle (22) la seguente forma:

$$(22')\quad \begin{cases} -\Gamma_{11}=\dfrac{\lambda}{2\mu}\,l^2\Delta_2\varphi+\varphi_{11}-\psi_{21}=\dfrac{\lambda+2\mu}{2\mu}\,\varphi_{11}+\dfrac{\lambda}{2\mu}\,\varphi_{22}-\psi_{21}, \\ -\Gamma_{12}=-\Gamma_{21}=\dfrac{1}{2}(\varphi_{12}+\varphi_{21}+\psi_{11}-\psi_{22}), \\ -\Gamma_{22}=\dfrac{\lambda}{2\mu}\,l^2\Delta_2\varphi+\varphi_{22}+\psi_{12}=\dfrac{\lambda+2\mu}{2\mu}\,\varphi_{22}+\dfrac{\lambda}{2\mu}\,\varphi_{11}+\psi_{12}. \end{cases}$$

[2] Loc. cit.

[3] Loc. cit., formula (15).

le curvature normali delle linee x_1 e x_2, e $\frac{1}{\tau}$ è la torsione geodetica delle linee stesse. Le componenti di tensione T_{ik} sono definite dalla relazione

$$T_{ik}=\frac{\Gamma_{ik}}{\sqrt{a_{ii}a_{kk}}}.$$

Sia

$$\sum_{1}^{2}{}_{ik}c_{ik}dx_i dx_k$$

quella che è nota con il nome di seconda forma differenziale quadratica, relativa alla superficie σ [1]. Sarà [2]:

$$\frac{1}{R_1}=-\frac{c_{11}}{a_{11}},\quad \frac{1}{R_2}=-\frac{c_{22}}{a_{22}},\quad \frac{1}{\tau}=-\frac{c_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}};$$

e quindi

$$F=\sum_{1}^{2}{}_{ik}\frac{c_{ik}\Gamma_{ik}}{a_{ii}a_{kk}}.$$

In particolare, riferendoci alla forma (6), si avrà:

$$F=\frac{1}{l^4}\sum_{1}^{2}{}_{ik}c_{ik}\Gamma_{ik}.$$

Questa relazione, ricordando le (22), risolve il problema propostoci.

§. 4. **Condizioni al contorno.**

Sia H_p il sistema covariante che definisce le componenti dello sforzo che si esercita su di una superficie di normale $\boldsymbol{n}$. In virtù di una formula già ricordata (tratta dalle lezioni di RICCI), si avrà:

$$H_p=\sum_{1}^{3}{}_{qs}\frac{\cos\widehat{nx_s}}{\sqrt{b^{ss}}}b_{pq}\Pi^{qs}, \qquad (p=1,2,3)$$

e sulla superficie σ:

$$H_p=\sum_{1}^{2}{}_{qs}\frac{\cos\widehat{nx_s}}{\sqrt{a^{ss}}}a_{pq}\Pi^{qs}, \qquad (p=1,2).$$

(1) L. BIANCHI, loc. cit., capitolo IV.
(2) L. BIANCHI, loc. cit., p. 192 e p. 297.

Se dn è l'elemento di linea appartenente a σ e normale a una data linea γ di σ, $\cos \widehat{nx_s} = \dfrac{\sqrt{a_{ss}}\,dx_s}{dn}$, e quindi lo sforzo su γ sarà definito da

$$H_p = \sum_1^2{}_{qs} \sqrt{\frac{a_{ss}}{a^{ss}}}\, a_{pq} \frac{dx_s}{dn} \Pi^{qs}.$$

Nella metrica (6) allora

$$H_p = \sum_1^2{}_s l^4 \frac{dx_s}{dn} \Pi^{ps},$$

e, ricordando la (16):

$$H_p = \Gamma_{1p} \frac{dx_1}{dn} + \Gamma_{2p} \frac{dx_2}{dn}.$$

Sia ora γ il contorno di σ: se son date le forze al contorno di σ, sarà (su γ):

$$\begin{cases} H_1 = \Gamma_{11} \dfrac{dx_1}{dn} + \Gamma_{21} \dfrac{dx_2}{dn}, \\ H_2 = \Gamma_{12} \dfrac{dx_1}{dn} + \Gamma_{22} \dfrac{dx_2}{dn}, \end{cases}$$

o anche, ricordando le (22),

$$(23)\quad \begin{cases} -H_1 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} \dfrac{dx_1}{dn} + \dfrac{\lambda}{2\mu} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} \dfrac{dx_1}{dn} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \dfrac{dx_2}{dn} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right) \dfrac{dx_2}{dn} - \\ \qquad - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1 \partial x_2} \dfrac{dx_1}{dn} - \dfrac{1}{2l^2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} \dfrac{dl^2}{dn} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} \dfrac{dl^2}{d\gamma} - \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} \dfrac{dl^2}{dn} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} \dfrac{dl^2}{d\gamma}\right), \\ -H_2 = \dfrac{\lambda}{2\mu} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} \dfrac{dx_2}{dn} + \dfrac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} \dfrac{dx_2}{dn} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \dfrac{dx_1}{dn} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right) \dfrac{dx_1}{dn} + \\ \qquad + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1 \partial x_2} \dfrac{dx_2}{dn} + \dfrac{1}{2l^2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} \dfrac{dl^2}{d\gamma} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} \dfrac{dl^2}{dn} - \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} \dfrac{dl^2}{d\gamma} - \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} \dfrac{dl^2}{dn}\right) \text{ (1)}. \end{cases}$$

A queste due relazioni, lineari nelle derivate prime e seconde, debbono soddisfare al contorno le due funzioni biarmoniche φ e ψ.

---

(1) Ricordando le (22'), ed indicando con ρ^1 e ρ^2 i parametri della direzione $\boldsymbol{n}$, scriveremo le (23) così:

$$(23')\quad \begin{cases} -H_1 = \rho^1\left(\dfrac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \varphi_{11} + \dfrac{\lambda}{2\mu} \varphi_{22} - \psi_{21}\right) + \dfrac{1}{2} \rho^2(\varphi_{12} + \varphi_{21} + \psi_{11} - \psi_{22}), \\ -H_2 = \rho^2\left(\dfrac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \varphi_{22} + \dfrac{\lambda}{2\mu} \varphi_{11} + \psi_{12}\right) + \dfrac{1}{2} \rho^1(\varphi_{12} + \varphi_{21} + \psi_{11} - \psi_{22}). \end{cases}$$

Osserviamo che le due condizioni al contorno, pur individuando u_1 e u_2 su σ, non individuano però le due funzioni φ e ψ. Infatti: ci vogliono due condizioni al contorno per individuare la funzione biarmonica φ (ad esempio) ([1]), e ricordando che l'armonica $\Delta_2\varphi$ è coniugata di $\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\Delta_2\psi$, ci vorrà una ulteriore condizione al contorno per individuare ψ: in totale tre condizioni. Le (23) lasciano dunque arbitraria una condizione al contorno.

Caratterizziamo l'arbitrarietà delle funzioni φ e ψ: Dimostriamo intanto che se φ' e ψ' sono soluzioni del problema, lo sono anche $\varphi''=\varphi'+f$, $\psi''=\psi'+g$, se f e g sono funzioni armoniche coniugate. Infatti: se φ' e ψ' sono soluzioni, sarà $\Delta_4\varphi'=0$, $\Delta_4\psi'=0$, e $\Delta_2\varphi'$ sarà armonica coniugata di $\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\Delta_2\varphi'$. Essendo, per le ipotesi fatte, $\Delta_2 f=\Delta_2 g=0$, sarà dunque ancora $\Delta_4\varphi''=\Delta_4\psi''=0$, e $\Delta_2\varphi''$ sarà coniugata di $\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\Delta_2\psi''$. In più, se al contorno le (23) sono soddisfatte per $\varphi=\varphi'$, $\psi=\psi'$, lo saranno ancora per $\varphi=\varphi''=\varphi'+f$, $\psi=\psi''=\psi'+g$: basta infatti ricordare che, essendo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{\partial g}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial g}{\partial x_1}=0,$$

allorchè si pone nelle (22) al posto di φ, f, al posto di ψ, g, il corrispondente $\Gamma_{\nu p}$ si annulla. Con esso si annulla il corrispondente H_p. La linearità delle equazioni (23) dimostra allora la tesi.

Dimostriamo ora che la soluzione trovata è la più generale: dimostriamo cioè che se φ', ψ' è una soluzione particolare, la soluzione più generale è la seguente:

$$\varphi=\varphi'+f,\quad \psi=\psi'+g; \tag{24}$$

dove $f+ig$ è funzione della variabile complessa x_1+ix_2. Siano, infatti, $\begin{cases}\varphi'\\ \psi'\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi''\\ \psi''\end{cases}$ due soluzioni distinte del problema: in virtù delle (10) si avrà:

$$\begin{cases} 2\mu u'_1=\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x_1}-\dfrac{\partial\psi'}{\partial x_2}\\[2mm] 2\mu u'_2=\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\psi'}{\partial x_1}\end{cases}\qquad \begin{cases} 2\mu u''_1=\dfrac{\partial\varphi''}{\partial x_1}-\dfrac{\partial\psi''}{\partial x_2}\\[2mm] 2\mu u''_2=\dfrac{\partial\varphi''}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\psi''}{\partial x_1}\end{cases}.$$

[1] B. FINZI, loc. cit.

Se le condizioni al contorno individuano un unico valore per u_1 e per u_2, sarà $u'_1 = u''_1$, $u'_2 = u''_2$, cioè

$$\frac{\partial(\varphi'' - \varphi')}{\partial x_1} - \frac{\partial(\psi'' - \psi')}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial(\varphi'' - \varphi')}{\partial x_2} + \frac{\partial(\psi'' - \psi')}{\partial x_1} = 0.$$

Ma queste non sono altro che le condizioni di monogenità per le due funzioni $\varphi'' - \varphi'$ e $\psi'' - \psi'$. Ne segue allora che

$$\varphi'' = \varphi' + f, \quad \psi'' = \psi' + g.$$

Le (24) rappresentano dunque la soluzione più generale del nostro problema. Diremo dunque che, in generale, φ e ψ sono definite a meno di una funzione di variabile complessa su σ. Per assegnare questa funzione occorrerebbe dare una terza condizione al contorno da unirsi alle (23). Quest'ultima condizione sarebbe però inessenziale per la determinazione di spostamenti e sforzi elastici, in quanto che — qualunque sia f (e quindi g) — unico è il valore di u_i, definito dalle (10), e unico quello di Γ_{rp}, definito dalle (22).

§ 5. **Superficie sviluppabili.**

Supponiamo, in particolare, che la superficie σ sia sviluppabile. In tal caso è sempre determinabile un sistema isotermo per cui $l = 1$. Mostreremo come possa determinarsi una funzione ψ tale che, pur essendo essa biarmonica insieme a φ, e tale che $\Delta_2\psi$ sia coniugato armonico di $\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\Delta_2\varphi$, nelle (22) compaia soltanto la funzione biarmonica φ, da determinarsi mediante le (23).

Poniamo, infatti,

$$(25) \qquad \begin{cases} \xi = -\psi_2 + \dfrac{\lambda + 2\mu}{\mu}\varphi_1 \\ \eta = \quad \psi_1 + \dfrac{\lambda + 2\mu}{\mu}\varphi_2 \end{cases}$$

(l'indice 1 o 2 rappresenta la derivazione rispetto ad x_1 o ad x_2). La (11) e la (12) diverranno allora:

$$(26) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\eta}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\xi}{\partial x_2} = 2\mu\omega \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x_2} = 2(2\mu + \lambda)\theta. \end{cases}$$

Ricordiamo che $w = (\lambda + 2\mu)\theta + i\mu\omega$ è funzione della variabile complessa $z = x_1 + ix_2$: ne segue che, pur essendo ξ e η soluzioni delle (26), potremo prendere $\xi + i\eta$ funzione di z. All'uopo dovrà essere

$$\eta_1 + \xi_2 = 0, \quad \xi_1 - \eta_2 = 0 \tag{27}$$

cioè (ricordando la posizione (25)):

$$\begin{cases} 2\varphi_{12} = -\dfrac{\mu}{\lambda + 2\mu}(\psi_{11} - \psi_{22}) \\ 2\psi_{12} = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\mu}(\varphi_{11} - \varphi_{22}). \end{cases} \tag{28}$$

In virtù delle (27), le (26) ci permetteranno di calcolare $\xi + i\eta$. Sarà:

$$\xi + i\eta = \int w dz = \int \left[\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \Delta_2\varphi + i \text{ coniugato} \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \Delta_2\varphi \right\} \right] dz,$$

e quindi (dalle (25))

$$\psi_1 = \eta - \frac{2\mu + \lambda}{\mu}\varphi_2, \quad \psi_2 = -\xi + \frac{2\mu + \lambda}{\mu}\varphi_1 .$$

Queste relazioni determinano (a meno di costanti inessenziali) la funzione biarmonica ψ, una volta nota la funzione biarmonica φ.

Calcoliamo ora gli sforzi: in virtù della seconda delle (28), le (22) diverranno:

$$-\Gamma_{11} = \frac{\mu + \lambda}{\mu}\varphi_{22}, \quad -\Gamma_{22} = \frac{\mu + \lambda}{\mu}\varphi_{11}, \quad -\Gamma_{12} = -\Gamma_{21} = -\frac{\mu + \lambda}{\mu}\varphi_{12} .$$

La funzione $-\dfrac{\mu + \lambda}{\mu}\varphi$ non è altro dunque che la funzione χ di AIRY [1]. Scriveremo dunque:

$$\begin{cases} \Gamma_{11} = \dfrac{\partial^2\chi}{\partial x_2^2} \\ \Gamma_{22} = \dfrac{\partial^2\chi}{\partial x_1^2} \end{cases} \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = -\frac{\partial^2\chi}{\partial x_1 \partial x_2} . \tag{29}$$

Poste le (22) sotto la forma (29), le condizioni al contorno (le (23)) ci permetteranno, notoriamente [2], di caratterizzare i valori che χ e la sua derivata

(1) Brit. Ass. Report, 1862.
(2) J. H. MICHELL, loc. cit.

normale assumono al contorno. Precisamente si avrà al contorno:

$$(30) \quad \begin{cases} \chi = \displaystyle\int_0^\gamma \left[\frac{dx_2}{d\gamma} \int_0^\gamma H_1 d\gamma - \frac{dx_1}{d\gamma} \int_0^\gamma H_2 d\gamma \right] d\gamma + A x_1 + B x_2 + C, \\ \displaystyle\frac{d\chi}{dn} = \frac{dx_1}{d\gamma} \int_0^\gamma H_1 d\gamma + \frac{dx_2}{d\gamma} \int_0^\gamma H_2 d\gamma - A \frac{dx_2}{d\gamma} + B \frac{dx_1}{d\gamma}. \end{cases} \qquad (A, B, C \text{ costanti}).$$

Osserviamo che, essendo biarmonica φ, lo sarà pure χ. Sarà dunque, essendo $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2}\right) = 0;$$

cioè χ è biarmonica nel piano su cui σ può svilupparsi [1]. I valori che χ e $\frac{d\chi}{dn}$ assumono al contorno determineranno allora la funzione χ in ogni punto di σ, e quindi le condizioni al contorno individueranno la biarmonica φ.

Osserviamo che le (26), (29), (30) sono del tutto identiche alle relazioni analoghe relative alla deformazione elastica piana. Concludendo, potremo allora dire: dato uu velo elastico sviluppabile, lo stato di deformazione e di tensione è dato dalle stesse formule che caratterizzano deformazioni e tensioni di un velo piano, purchè si scelga un tal sistema coordinato sulla sviluppabile che il quadrato del suo elemento lineare abbia la forma $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$.

Esempio. — A mo' d'illustrazione delle considerazioni precedenti consideriamo il seguente semplice esempio:

In un velo elastico piano sia praticato un foro circolare. O sia il centro del foro, R ne sia il raggio. Consideriamo due assi cartesiani ortogonali di centro O, che diciamo x e y. Supponiamo il velo indefinitamente esteso in ogni senso; e supponiamo ancora che per $|x| \to \infty$ sia nullo lo sforzo che si esercita su di una parallela all'asse x, e lo sforzo che si esercita su di una parallela all'asse y sia diretto come l'asse x, abbia modulo costante T, e carattere di tensione.

Assumiamo l'asse x come asse polare, O come polo: siano r e ϑ le coordinate polari di un punto del piano. La funzione di AIRY, per il problema ela-

---

[1] Cfr. B. FINZI, loc. cit.

stico piano in esame, sarà [1]:

$$\chi = \frac{1}{4} T\left(r^2 - 2R^2 \log r - \frac{(r^2 \quad R^2)^2}{2} \cos 2\vartheta\right). \tag{31}$$

Consideriamo ora una superficie cilindrica: se dx_1 è l'elemento di direttrice e dx_2 l'elemento di generatrice, sarà: $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$.

Immaginiamo di avvolgere il velo piano precedentemente considerato sulla superficie cilindrica, che supporremo rigida e liscia. L'avvolgimento avvenga in modo tale che l'asse delle x si avvolga su di una linea x_1, e quindi l'asse delle y su di una linea x_2. La funzione χ relativa al velo elastico cilindrico sarà identica a quella definita dalla (31), purchè si sostituisca in essa ad x, x_1, ad y, x_2. Sarà dunque:

$$\chi = \frac{1}{4} T\left(x_1^2 + x_2^2 - R^2 \log (x_1^2 + x_2^2) - \frac{(x_1^2 + x_2^2 - R^2)^2}{2} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}\right). \tag{31'}$$

Le (29) allora ci permetteranno di determinare lo stato di tensione in ogni punto del velo elastico cilindrico, purchè in esse si ponga per χ l'espressione fornita dalla (31') [2].

Da quanto constatammo precedentemente si deduce allora che, in un punto P del velo, lo stato di tensione è lo stesso, sia se il velo è teso su di un piano, sia se esso è teso su di una superficie cilindrica.

***

Quanto constatammo nel caso particolare precedente può estendersi in generale, osservando che lo stato di tensione e di deformazione di un velo elastico dipende unicamente dalle condizioni al contorno e dalla prima forma differenziale quadratica, caratterizzante la metrica del velo [3]. Diremo allora che lo stato di tensione e di deformazione di un velo σ' in un suo punto P, non muta se si tende il velo su di una superficie σ'' applicabile su σ', purchè — ben si intende — restino inalterate le condizioni al contorno.

Milano, 31 ottobre 1927.

---

(1) G. Castelfranchi, *Sulla determinazione degli sforzi nelle moderne caldaie a vapore ad altissima pressione.* Milano, Hoepli 1926, pp. 45-56.

(2) La reazione F esercitata dal vincolo sarà (come constatammo in appendice al § 3) $F = \sum_{ik}{}_1^2 c_{ik} \Gamma_{ik}$. Ma se $\frac{1}{\rho}$ è la curvatura della direttrice, sarà $c_{11} = \frac{1}{\rho}$, $c_{12} = c_{22} = 0$, e quindi $F = \frac{\Gamma_{11}}{\rho}$.

(3) Solo la reazione del vincolo dipende dalla seconda forma differenziale quadratica, non lo stato di tensione e di deformazione del velo.

Teoria delle sostituzioni che operano su una infinità numerabile di elementi.

Memoria 2ª (*) di Luigi Onofri (a Bologna).

CAPITOLO III.

ISOMORFISMI

A) Isomorfismo oloedrico.

59. Due gruppi o pseudogruppi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aventi il medesimo ordine si dicono *isomorfi oloedricamente* quando si può stabilire fra le loro operazioni una corrispondenza biunivoca tale che al prodotto di due sostituzioni qualsiasi di $\mathfrak{A}$ corrisponda in $\mathfrak{B}$ il prodotto delle corrispondenti.

Per indicare che due complessi $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, appartenenti rispettivamente ad $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, sono formati con operazioni corrispondenti scriveremo:

$$\mathfrak{C} \backsim \mathfrak{D}.$$

60. *Due complessi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ isomorfi oloedricamente sono entrambi gruppi, oppure sono pseudogruppi della medesima specie.*

Supponiamo che in $\mathfrak{A}$ esista l'operazione identica; dalla corrispondenza

$$1 \backsim b$$

discende:

$$1 \cdot 1 \backsim b \cdot b, \quad b^2 = b, \quad b = 1,$$

onde anche in $\mathfrak{B}$ esiste l'identità.

Sia poi a una operazione di $\mathfrak{A}$ che possiede l'inversa in $\mathfrak{A}$; dalle corrispondenze:

$$a \backsim b, \quad a^{-1} \backsim b_1$$

(*) Vedi Memoria 1ª, « Annali di Matematica », Serie IV, Tomo IV, Fasc. 1-2, p. 73.

si deducono le altre:

$$a \cdot a^{-1} = 1 \backsim b \cdot b_1, \quad b_1 = b^{-1},$$

e quindi l'operazione b possiede l'inversa in $\mathfrak{B}$.

In particolare, se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ sono rispettivamente gli pseudogruppi composti $G + G'$, $\Gamma + \Gamma'$, si ha:

$$G \backsim \Gamma, \quad G' \backsim \Gamma'.$$

61. Ad esempio, i complessi $\mathfrak{A}$ e $t^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot t$ sono isomorfi oloedricamente secondo la corrispondenza:

$$(o) \qquad a \backsim t^{-1} \cdot a \cdot t.$$

Se $\mathfrak{A}$ é invariante per t, la (o) definisce un isomorfismo fra $\mathfrak{A}$ e sè stesso, se invece $\mathfrak{A}$ è riducibile (ampliabile) mediante t, la (o) definisce un isomorfismo fra $\mathfrak{A}$ ed una sua parte propria (fra $\mathfrak{A}$ ed un complesso che lo contiene).

62. Siano $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ due complessi appartenenti rispettivamente ad $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ e tali che $\mathfrak{C} \backsim \mathfrak{D}$.

Vogliamo dimostrare che: *se $\mathfrak{C}$ è invariante in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ è invariante in $\mathfrak{B}$.*

Inverò, prese due operazioni qualsiasi b, d di $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ e posto:

$$a \backsim b, \quad c \backsim d,$$

si ha, per l'invarianza di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A}$:

$$a \cdot c = c_1 \cdot a, \quad c \cdot a = a \cdot c_2;$$

da cui, per il supposto isomorfismo:

$$b \cdot d = d_1 \cdot b, \quad d \cdot b = b \cdot d_2.$$

In modo analogo si prova la riducibilità (l'ampliabilità) di $\mathfrak{D}$ mediante $\mathfrak{B}$, ammesso che $\mathfrak{C}$ sia riducibile (ampliabile) mediante $\mathfrak{A}$.

È infine da notare che se $\mathfrak{C}$ è invariante massimo in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ è pure invariante massimo in $\mathfrak{B}$.

63. Le proposizioni dei precedenti n.i 60, 62 dimostrano l'equivalenza dei due complessi isomorfi $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ rispetto al modo con cui le operazioni di ciascun complesso si compongono tra loro. È pertanto lecito di riportarsi, per lo studio di un complesso $\mathfrak{A}$, ad un complesso $\mathfrak{B}$ isomorfo ad $\mathfrak{A}$.

Ad esempio, si può sostituire ad $\mathfrak{A}$ uno speciale complesso, detto *congiunto di $\mathfrak{A}$*, formato con sostituzioni i cui elementi sono le operazioni del gruppo $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1})$.

Per effettuare in ogni caso la costruzione di questo complesso è necessario introdurre delle operazioni diverse da quelle finora considerate, e precisamente delle sostituzioni su insiemi di elementi aventi potenze diverse dal numerabile.

La definizione di queste nuove operazioni si ottiene da quella del n.° 1 sostituendo all' insieme numerabile un insieme qualunque. Tutte le proprietà e le definizioni che abbiamo dato, e che non siano inerenti alla natura delle sostituzioni, restano valide per queste nuove operazioni [1].

64. Dato un complesso $\mathfrak{A}$, formiamo il gruppo $G = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1})$ e facciamo corrispondere alla sostituzione generica g di G quella operazione k che sostituisce ad ogni x di G l'operazione $x \cdot g$ pure di G. Scriveremo:

$$k = \begin{pmatrix} x \\ x \cdot g \end{pmatrix}.$$

Il complesso K di tutte queste operazioni k ha, evidentemente, la medesima potenza di G ed è isomorfo a G secondo la corrispondenza superiormente definita.

Infatti al prodotto $g \cdot g_1$ corrisponde l'operazione:

$$k' = \begin{pmatrix} x \\ x \cdot g \cdot g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \cdot g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x \cdot g_1 \end{pmatrix} = k \cdot k_1 .$$

Consideriamo ora il complesso $\mathfrak{K}$ formato con le operazioni di K che corrispondono alle operazioni di $\mathfrak{A}$.

Tale complesso è isomorfo ad $\mathfrak{A}$, è della sua stessa specie, e prende il nome di *congiunto a destra di* $\mathfrak{A}$.

Il *congiunto a sinistra* si ottiene in modo analogo moltiplicando le operazioni di G a sinistra anzichè a destra, e ponendo la corrispondenza: $g \backsim \begin{pmatrix} x \\ g^{-1} \cdot x \end{pmatrix}$.

B) Isomorfismo meriedrico.

65. Dati due gruppi o pseudogruppi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ diremo che $\mathfrak{A}$ è *isomorfo meriedricamente* a $\mathfrak{B}$ quando:

a) ad ogni sostituzione di $\mathfrak{A}$ ne corrisponde una ed una sola in $\mathfrak{B}$, mentre ad una di $\mathfrak{B}$ ne corrispondono diverse in $\mathfrak{A}$;

[1] Lo studio sistematico di queste sostituzioni esce dai limiti imposti alla presente Teoria: esse serviranno esclusivamente per la costruzione di complessi isomorfi a complessi dati (vedi anche i N.i 75, 76).

b) al prodotto di due qualsiasi sostituzioni di $\mathfrak{A}$ corrisponde il prodotto delle corrispondenti di $\mathfrak{B}$.

Il simbolo $\backsim$ introdotto al n.° 59 servirà, anche per questo isomorfismo, ad indicare la corrispondenza fra le operazioni di $\mathfrak{A}$ e quelle di $\mathfrak{B}$.

66. Con un ragionamento analogo a quello fatto al n.° 60, si prova per l'attuale isomorfismo che:

α) *Se in $\mathfrak{A}$ figura l'operazione identica, la sua corrispondente in $\mathfrak{B}$ è pure l'identità.*

β) *Se* a *è una operazione di $\mathfrak{A}$ che ha l'inversa in $\mathfrak{A}$, la corrispondente* b *di $\mathfrak{B}$ ha l'inversa in $\mathfrak{B}$.*

Poichè alla identità in $\mathfrak{B}$ corrispondono varie operazioni di $\mathfrak{A}$, le proposizioni precedenti non sono generalmente invertibili; e cioè:

α') l'esistenza della identità in $\mathfrak{B}$ non porta all'esistenza della identità in $\mathfrak{A}$;

β') il complesso $\mathfrak{B}$ può contenere simultaneamente le operazioni b, b^{-1} senza che le operazioni di $\mathfrak{A}$ corrispondenti a b abbiano l'inversa in $\mathfrak{A}$.

Da queste considerazioni si deduce come l'isomorfismo meriedrico permetta, a differenza di quello oloedrico, la diversità di specie nei complessi corrispondenti $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, e come siano solamente possibili i seguenti tipi d'isomorfismo:

$$(Q)\qquad \begin{array}{lcl} \mathfrak{A} & & \mathfrak{B} \\ \text{gruppo} & \backsim & \text{gruppo} \\ \text{pseudogruppo composto} & \backsim & \left\{\begin{array}{l}\text{gruppo}\\ \text{pseudogruppo composto}\end{array}\right. \\ \text{pseudogruppo semplice} & \backsim & \left\{\begin{array}{l}\text{gruppo}\\ \text{pseudogruppo composto}\\ \text{pseudogruppo semplice}\end{array}\right. \end{array}$$

Più avanti studieremo singolarmente questi vari isomorfismi e daremo degli esempi per ciascuno di essi.

67. Siano $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ due complessi appartenenti rispettivamente ad $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ e tali che $\mathfrak{C} \backsim \mathfrak{D}$.

Se $\mathfrak{C}$ è invariante in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ è invariante in $\mathfrak{B}$ (per la dimostr. vedi n.° 62), mentre se $\mathfrak{D}$ è invariante in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ può non essere tale in $\mathfrak{A}$.

Ciò si verifica nel seguente:

Esempio. Con il gruppo totale A sugli elementi 0, 1, 2,..., n,.... e con il ciclo:

$$g = (...., a_{-n},..., a_{-1}, 0, 1,...., n,....)$$

si formino gli pseudogruppi:

$$\Gamma'' = A + g \cdot A + ... + g^r \cdot A + ..., \quad \Lambda'' = 1 + g + ... + g^r + ...$$

La corrispondenza $g^r \cdot A \backsim g^r$ stabilisce fra Γ'' e Λ'' un isomorfismo tale che alla identità in Λ'' corrisponde il gruppo riducibile A (n.° 50).

Se $\mathfrak{C}$ è riducibile, $\mathfrak{D}$ è invariante o riducibile.

Infatti, se b, d sono due operazioni qualsiasi di $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ e se:

$$a \backsim b, \quad c \backsim d,$$

si ha:

$$c \cdot a = a \cdot c_1, \quad \text{da cui} \quad d \cdot b = b \cdot d_1.$$

In modo simile si prova che *se $\mathfrak{C}$ è ampliabile, $\mathfrak{D}$ è invariante od ampliabile.*

68. Studiamo dapprima l'isomorfismo meriedrico fra due gruppi A e B.

Sia $\mathfrak{D}$ un complesso contenuto in B, e sia $\mathfrak{C}$ il complesso di tutte le operazioni di A corrispondenti a $\mathfrak{D}$.

Mediante facilissime considerazioni si dimostra che:

o) *I complessi $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ sono entrambi gruppi, oppure sono pseudogruppi della stessa specie.*

ω) *Se $\mathfrak{D}$ è invariante in B, $\mathfrak{C}$ è invariante in A.*

Questa proposizione è degna di rilievo perchè, come si è visto al n.° 67, essa può cadere in difetto quando i complessi isomorfi sono degli pseudogruppi.

Dalle o), ω) si deduce, ponendo $\mathfrak{D} = 1$, che tutte le operazioni di A corrispondenti all'unità in B formano un gruppo invariante K. In conseguenza di ciò ad ogni operazione di B corrispondono in A tutte e sole le operazioni di un quasi-gruppo di una decomposizione di A rispetto a K.

L'ordine del gruppo K si dirà *grado di meriedria.*

69. Consideriamo ora l'isomorfismo fra uno pseudogruppo composto

$$A'' = A + A'$$

ed un gruppo B.

Sia a' una operazione qualunque di A' e sia b la sua corrispondente in B; da:

$$a' \backsim b, \quad a'' \backsim b^{-1}, \quad a' \cdot a'' \backsim 1$$

consegue che: *le operazioni di* A'' *corrispondenti all'unità in* B *costituiscono uno pseudogruppo composto* K''.

Indichiamo poi con B_1 il gruppo formato con le operazioni di B corrispondenti alle operazioni di A, e con A_1'' lo pseudogruppo composto formato con tutte le operazioni di A'' a cui corrispondono le operazioni di B_1.

Vogliamo dimostrare che:

a) *lo pseudogruppo* A_1'' *è decomponibile rispetto a* K'';

b) *ad ogni operazione di* B_1 *corrispondono in* A'' *tutte e sole le operazioni di un quasi-pseudogruppo di detta decomposizione.*

Sia b_1 una operazione di B_1 e siano a_1, a due operazioni di A_1'', A corrispondenti a b_1. Da:

$$a^{-1} \backsim b_1^{-1}, \quad a_1 \backsim b_1 \quad \text{segue} \quad a^{-1} \cdot a_1 = k \backsim 1,$$

onde tutte le operazioni di A_1'' corrispondenti a b_1 appartengono al complesso $a \cdot K''$.

L'insieme di tutti i complessi del tipo di $a \cdot K''$ costituisce perciò una decomposizione a sinistra di A_1'' rispetto a K''. In modo analogo si prova la decomponibilità a destra di A_1'' rispetto a K''.

Inoltre, poichè ciascuna di queste decomposizioni ha per potenza l'ordine di B_1, si può asserire che: *gli indici di* K'' *in* A_1'' *sono eguali.*

ESEMPIO. Siano A e B due gruppi isomorfi oloedricamente e sia γ una operazione senza periodo o con periodo infinito commutabile con tutte le operazioni di A.

Ponendo:

$$[a, \ a \cdot \gamma, \ldots., \ a \cdot \gamma^r, \ldots.] \backsim b,$$

dove $a \backsim b$ nell'isomorfismo fra A e B, si viene a stabilire un isomorfismo meriedrico fra lo pseudogruppo:

$$A'' = A + A \cdot \gamma + \ldots. + A \cdot \gamma^r + \ldots.$$

ed il gruppo B.

70. Siano $A'' = A + A'$ e $B'' = B + B'$ due pseudogruppi composti isomorfi meriedricamente.

Le operazioni di A'' corrispondenti alle operazioni di B costituiscono un gruppo od uno pseudogruppo composto $\mathfrak{A}$; ed il gruppo A, corrispondendo ad un sottogruppo di B, deve essere contenuto in $\mathfrak{A}$.

Si ha pertanto, se $\mathfrak{A}$ è un gruppo, $\mathfrak{A} = A$.

Se $\mathfrak{A}$ è uno pseudogruppo composto, l' isomorfismo fra $\mathfrak{A}$ e B è sicuramente meriedrico (n.° 69), mentre se $\mathfrak{A} = A$ il suddetto isomorfismo può essere anche oloedrico (vedi esempi al n.° 74).

Sia A_1' lo pseudogruppo semplice formato con le operazioni di A'' che corrispondono a quelle di B'.

L' isomorfismo che intercede fra A_1' e B' è del tipo di quelli che verranno studiati al n.° 73; esso deve risultare necessariamente meriedrico se si vuole che tale sia l' isomorfismo fra A'' e B''.

Invero, se fra A_1' e B' vi fosse isomorfismo oloedrico, alla identità in B'' corrisponderebbe la sola identità in A'' e perciò ad ogni operazione di B'' corrisponderebbe una sola operazione di A''.

71. Studiamo ora gli isomorfismi fra uno pseudogruppo semplice A' ed un gruppo B, oppure fra il suddetto pseudogruppo ed un altro pseudogruppo composto o semplice.

Esaminiamo dapprima l' isomorfismo fra A' e B.

Le operazioni di A' che hanno per corrispondente l' identità in B costituiscono uno pseudogruppo semplice K'.

Inoltre, dalle corrispondenze :

$$K' \backsim 1, \quad a \backsim b, \quad K' \cdot a \backsim b,$$

si deduce che ad ogni operazione b di B corrispondono infinite operazioni di A'.

È importante notare che il complesso $K' \cdot a$, non contenendo a, è formato soltanto con una parte dell' insieme delle operazioni di A' che corrispondono a b.

Esempio. I complessi :

$$A' = [a, a^2, \ldots, a^r, \ldots], \quad B = [1, b] \qquad (b^2 = 1)$$

sono isomorfi secondo le corrispondenze :

$$[a^2, a^4, \ldots, a^{2n}, \ldots] \backsim 1, \quad [a, a^3, \ldots, a^{2n-1}, \ldots] \backsim b.$$

72. Passiamo all' isomorfismo tra uno pseudogruppo semplice A' ed uno composto $B'' = B + B'$.

All' unità in B'' corrisponde uno pseudogruppo semplice K' di A', e conseguentemente ad ogni operazione di B'' corrispondono infinite operazioni di A'.

I complessi C' e C_1', formati con le operazioni di A' che corrispondono rispettivamente a B ed a B', sono due pseudogruppi semplici.

Ecco un esempio di questo isomorfismo:

$$A' = \left\{ \begin{array}{lll} a, & a^2,\ldots., & a^r,\ldots. \\ h \cdot a, & h \cdot a^2,\ldots., & h \cdot a^r,\ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h^s \cdot a, & h^s \cdot a^2,\ldots., & h^s \cdot a^r,\ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right. \backsim B'' = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ b \\ \ldots. \\ b^s \\ \ldots. \end{array} \right. \quad (h \cdot a = a \cdot h).$$

73. Resta da esaminare l'isomorfismo fra due pseudogruppi semplici A' e B'.

Negli isomorfismi finora studiati tra due complessi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ (a parte quello del n.° 70 che, come abbiamo detto, dipende dal presente isomorfismo) ad ogni operazione di $\mathfrak{B}$ corrispondono in $\mathfrak{A}$ operazioni in numero infinito oppure in egual numero finito.

Nell'attuale isomorfismo può invece darsi che il numero delle operazioni di A' corrispondenti alle operazioni di B' varî da operazione ad operazione.

ESEMPIO I. Sia:

$$A' = \left\{ \begin{array}{lll} a, & a^2,\ldots., & a^r,\ldots. \\ h \cdot a, & h \cdot a^2,\ldots., & h \cdot a^r,\ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h^s \cdot a, & h^s \cdot a^2,\ldots., & h^s \cdot a^r,\ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right. \qquad (h \cdot a = a \cdot h)$$

e

$$B' = [b,\ b^2,\ldots.,\ b^s,\ldots].$$

Ponendo la corrispondenza:

$$[h^{m-1} \cdot a,\ h^{m-2} \cdot a^2,\ldots.,\ h^{m-n} \cdot a^n,\ldots.,\ a^m] \backsim b^m,$$

si viene a stabilire fra A' e B' un isomorfismo tale che alla operazione b^m di B' corrispondono in A', m operazioni.

ESEMPIO II. Sia A_1' lo pseudogruppo che si ottiene togliendo dal precedente A' le operazioni $h \cdot a$, $h^2 \cdot a,\ldots.$, $h^s \cdot a,\ldots.$.

Le corrispondenze:

$$a \backsim b, \quad [a^r,\ h \cdot a^r,\ldots.,\ h^s \cdot a^r,\ldots.] \backsim b^r \qquad (r > 1)$$

definiscono un isomorfismo fra A_1' e B' in cui a b corrisponde la sola a e ad ogni altra potenza di b corrispondono infinite operazioni.

74. Torniamo al caso studiato al n.° 70.

L'isomorfismo fra A_1' e B' può essere di uno qualunque dei tipi or ora accennati; perciò le operazioni di A'', corrispondenti ad ogni operazione di B'', possono variare in numero da operazione ad operazione.

Si ottengono facilmente degli esempi di questo isomorfismo aggiungendo l'identità ai complessi costruiti al n.° 73, ed unendo alle corrispondenze là poste la $1 \backsim 1$.

In questi esempi si ha $\mathfrak{A} = A$, mentre nel caso seguente:

$$A'' = \begin{cases} 1, & a, \quad a^2,\dots, \quad a^r,\dots \\ h, & h\cdot a, \quad h\cdot a^2,\dots, \quad h\cdot a^r,\dots \\ \dots & \dots \\ h^s, & h^s\cdot a, \quad h^s\cdot a^2,\dots, \quad h^s\cdot a^r,\dots \\ \dots & \dots \end{cases} \backsim B'' = \begin{cases} 1 \\ b \\ \dots \\ b^s \\ \dots \end{cases} \quad (h\cdot a = a\cdot h)$$

si ha:

$$\mathfrak{A} = [1, a, a^2,\dots, a^r,\dots].$$

75. Al n.° 63 abbiamo introdotto delle sostituzioni su insiemi non numerabili di elementi e ci siamo serviti di esse per costruire dei complessi isomorfi oloedricamente a dati complessi di sostituzioni.

Vogliamo ora costruire, dato un gruppo o pseudogruppo $\mathfrak{A}$, un complesso $\mathfrak{K}$ di queste operazioni isomorfo meriedricamente ad $\mathfrak{A}$.

Sia $\Sigma(H\cdot g)$ una decomposizione del gruppo $G = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1})$ rispetto ad un suo sottogruppo qualsiasi H.

Alla operazione generica γ di G facciamo corrispondere quella operazione k che sostituisce ad ogni quasi-gruppo $\mathfrak{Q}$ il quasi-gruppo $\mathfrak{Q}\cdot\gamma$. Scriveremo:

$$k = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ \mathfrak{Q}\cdot\gamma \end{pmatrix}.$$

Poichè al prodotto $\gamma\cdot\gamma_1$ corrisponde l'operazione:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ \mathfrak{Q}\cdot\gamma\cdot\gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ \mathfrak{Q}\cdot\gamma \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ \mathfrak{Q}\cdot\gamma_1 \end{pmatrix},$$

si può asserire che G è isomorfo al gruppo K formato con tutte le operazioni k.

Vediamo quali sono le operazioni di G corrispondenti all'unità in K.

Se δ è una di queste operazioni, deve aversi per un generico $\mathfrak{Q} = H\cdot g$:

$$\mathfrak{Q}\cdot\delta = \mathfrak{Q}, \quad H\cdot g\cdot\delta = H\cdot g, \quad \delta = g^{-1}\cdot h\cdot g.$$

L'operazione δ è dunque comune a tutti i trasformati di H mediante G e quindi fa parte del loro sottogruppo comune Δ.

Inversamente, se δ appartiene a Δ e se $\mathfrak{Q} = H \cdot g$ è un quasi-gruppo generico, si ha:

$$\mathfrak{Q} \cdot \delta = H \cdot g \cdot \delta = H \cdot g \cdot g^{-1} \cdot h \cdot g = H \cdot g = \mathfrak{Q},$$

cioè a δ corrisponde l'identità in K.

Concludendo: *l'isomorfismo che intercede fra* G *e* K *ha per grado di meriedria l'ordine di* Δ.

Consideriamo ora il complesso $\mathfrak{K}$ formato con le operazioni di K che corrispondono alle operazioni di $\mathfrak{A}$.

Il complesso $\mathfrak{K}$ è isomorfo ad $\mathfrak{A}$ e, secondo la sua specie, prende il nome di *gruppo o pseudogruppo complementare a destra di* $\mathfrak{A}$ *rispetto ad* H.

Scriveremo:

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{A}}{H}.$$

76. Partendo da una decomposizione a sinistra, anzichè da una a destra, facendo corrispondere a γ l'operazione $\begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ \gamma^{-1} \cdot \mathfrak{Q} \end{pmatrix}$, ed operando per tutto il resto in modo analogo, si ottiene un complesso $\mathfrak{K}_1$ isomorfo ad $\mathfrak{A}$ e detto *complementare a sinistra.*

I complessi $\mathfrak{K}$ e $\mathfrak{K}_1$ sono oloedricamente isomorfi.

77. Se il complesso $\mathfrak{A}$ non è un gruppo, vi è dubbio circa la specie di $\frac{\mathfrak{A}}{H}$: essa dipende anche dal gruppo H che si è scelto.

Affinchè $\frac{\mathfrak{A}}{\mathrm{H}}$ *sia un gruppo occorre e basta che ogni quasi-gruppo di una decomposizione* $\Sigma(\Delta \cdot g')$ *di* G *rispetto a* Δ *abbia qualche operazione in comune con* $\mathfrak{A}$.

Invero, se $\frac{\mathfrak{A}}{H}$ è un gruppo, il complesso G_1, formato con tutte le operazioni di G corrispondenti a $\frac{\mathfrak{A}}{H}$, è pure un gruppo (n.° 68); e poichè $\mathfrak{A}$ è contenuto in G_1, dovrà essere:

$$G_1 = (\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}^{-1}) = G.$$

La condizione è poi manifestamente sufficiente.

Se invece vi è qualche quasi-gruppo $\Delta \cdot g'$ che non ha operazioni in comune con $\mathfrak{A}$, il complesso $\dfrac{\mathfrak{A}}{H}$ è uno pseudogruppo semplice o composto. E precisamente: se $\mathfrak{A}$ e Δ hanno operazioni comuni, $\dfrac{\mathfrak{A}}{H}$ è uno pseudogruppo composto, altrimenti, $\dfrac{\mathfrak{A}}{H}$ è semplice.

78. TEOREMA. *Affinchè* $\dfrac{\mathfrak{A}}{H}$ *sia abeliano occorre e basta che* H *contenga il commutatore* G_c *di* $G = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1})$.

Si osservi anzitutto che se $\dfrac{\mathfrak{A}}{H}$ è abeliano, tale è anche $\dfrac{G}{H}$ e reciprocamente.

Nell' ipotesi che $\dfrac{\mathfrak{A}}{H}$ sia abeliano, ad una commutatrice di G corrisponde in $\dfrac{G}{H}$ l' identità, onde G_c appartiene ad H.

Inversamente, se G_c appartiene ad H, Δ contiene G_c (n.[i] 52, 58), e perciò ogni commutatrice di $\dfrac{G}{H}$ è eguale all' unità.

Ciò prova che $\dfrac{G}{H}$ e $\dfrac{\mathfrak{A}}{H}$ sono abeliani.

CAPITOLO IV.

LE SERIE DI COMPOSIZIONE

A) I complessi invarianti.

79. Se un dato complesso $\mathfrak{A}$ è invariante per le operazioni di un complesso $\mathfrak{T}$, il complesso $\mathfrak{A}^{-1}$, formato con le inverse delle operazioni di $\mathfrak{A}$, è pure invariante per $\mathfrak{T}$.

Da ciò consegue l' invarianza per $\mathfrak{T}$ dei complessi $(\mathfrak{A})$ e $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1})$ generati dalle operazioni di $\mathfrak{A}$ e di $\mathfrak{A}^{-1}$.

Inoltre, per cose note (n.° 51), i complessi $(\mathfrak{A})$ e $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1})$ sono invarianti anche per il gruppo $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1})$.

Consideriamo ora i gruppi chiusi $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1}\}$, $\{\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1}\}$.

Una operazione qualunque $\tau = \prod_{r=1}^{\infty} t_r$ di $\{\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1}\}$ trasforma l'operazione generica a di $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1})$ in una operazione di $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1}\}$ perchè la trasformata $\tau^{-1}\cdot a\cdot\tau$ è il limite della successione:

$$(\alpha) \qquad t_1^{-1}\cdot a\cdot t_1, \quad t_2^{-1}\cdot t_1^{-1}\cdot a\cdot t_1\cdot t_2, \ldots.$$

i cui termini, per quanto s'è detto superiormente, appartengono ad $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1})$.

Sia poi $k = \prod_{r=1}^{\infty} a_r$ un prodotto infinito convergente formato con operazioni di $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1})$. La trasformata di k mediante τ appartiene ad $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1}\}$ perchè i fattori del prodotto:

$$\prod_{r=1}^{\infty} \tau^{-1}\cdot a_r\cdot\tau = \tau^{-1}\cdot k\cdot\tau$$

appartengono, come già s'è visto, al gruppo chiuso $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1}\}$.

Possiamo dunque affermare che: *se $\mathfrak{A}$ è invariante per $\mathfrak{T}$, il gruppo $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1}\}$ è invariante per $\{\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1}\}$.*

OSSERVAZIONE. I complessi $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1})$, invarianti per $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1})$, non sono, in generale, invarianti per $\{\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1}\}$.

Invero, la trasformata $\tau^{-1}\cdot a\cdot\tau$, essendo il valore di un prodotto infinito di operazioni di $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1})$, non sempre appartiene ad $(\mathfrak{A})$ e ad $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1})$.

80. Dalle precedenti proposizioni si deduce immediatamente che:
I complessi:

$$|(\mathfrak{A}), (\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1})|, \quad |(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1}), (\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1})|, \quad |\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1}\}, (\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1})|$$

sono invarianti per $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1})$ *ed il gruppo:*

$$|\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1}\}, \{\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1}\}|$$

è invariante per $\{\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1}\}$.

81. TEOREMA I. *Se ciascuno dei complessi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$ è invariante per l'altro il prodotto* a·t *è commutabile a meno di una operazione del gruppo:*

$$D = |(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1}), (\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1})|.$$

Per le ipotesi fatte la commutatrice di a e t:

$$a^{-1}\cdot t^{-1}\cdot a\cdot t = a^{-1}\cdot(t^{-1}\cdot a\cdot t) = (a^{-1}\cdot t^{-1}\cdot a)\cdot t$$

appartiene ai gruppi $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1})$, $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1})$ e perciò appartiene a D. Posto quindi $d = a^{-1} \cdot t^{-1} \cdot a \cdot t$, si ha:

$$a \cdot t = t \cdot a \cdot d.$$

82. TEOREMA II. *Se $\mathfrak{A}$ è invariante per $\mathfrak{T}$, i complessi:*

$$\frac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{T}}{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1})}, \quad \frac{\mathfrak{T}}{|(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1}), (\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1})|}$$

sono isomorfi oloedricamente.

Poniamo, per semplicità di scrittura:

$$A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{-1}), \quad T = (\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1}), \quad \mathfrak{L} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{T}, \quad L = (\mathfrak{L}, \mathfrak{L}^{-1}), \quad D = |A, T|.$$

Se nella eguaglianza:

$$L = A \cdot T$$

sostituiamo al gruppo T una sua decomposizione:

$$(o) \qquad T = \Sigma (D \cdot \tau)$$

rispetto a D, otteniamo:

$$(\omega) \qquad L = A \cdot \Sigma(D \cdot \tau) = \Sigma(A \cdot D \cdot \tau) = \Sigma(A \cdot \tau).$$

Dalle (o) e (ω) discende che i gruppi complementari $\frac{L}{A}, \frac{T}{D}$ hanno il medesimo ordine e che fra essi si può stabilire un isomorfismo oloedrico ponendo in corrispondenza quelle loro operazioni che corrispondono rispettivamente ai quasi-gruppi $A \cdot \tau$ e $D \cdot \tau$.

Consideriamo ora una operazione $t = d \cdot \tau$ appartenente a $\mathfrak{T}$ ed al quasi-gruppo $D \cdot \tau$ di (o). Il prodotto:

$$a \cdot t = a \cdot d \cdot \tau,$$

di una qualsiasi operazione a di $\mathfrak{A}$ per t, appartiene al complesso $\mathfrak{L}$ ed al quasi-gruppo $A \cdot \tau$ di (ω).

Inversamente, se l'operazione $a \cdot t$ di $\mathfrak{L}$ appartiene al quasi-gruppo $A \cdot \tau$, si ha:

$$a \cdot t = \alpha \cdot \tau, \quad a^{-1} \cdot \alpha = t \cdot \tau^{-1} = d, \quad d \cdot \tau = t,$$

e cioè nel quasi-gruppo $D \cdot \tau$ figura l'operazione t di $\mathfrak{T}$.

Da ciò consegue che le operazioni dei complessi $\frac{\mathfrak{L}}{A}$ e $\frac{\mathfrak{T}}{D}$ si corrispondono nell' isomorfismo che intercede fra $\frac{A}{L}$ e $\frac{T}{D}$, e che perciò $\frac{\mathfrak{L}}{A}$ e $\frac{\mathfrak{T}}{D}$ sono oloedricamente isomorfi.

83. Sia G_m un sottogruppo invariante massimo di un gruppo G, e sia Γ un altro sottogruppo invariante di G non contenuto in G_m.

Dal teorema precedente, applicato ai complessi $\mathfrak{A} = G_m$, $\mathfrak{T} = \Gamma$, si deduce che i gruppi $\frac{G}{G_m}$, $\frac{\Gamma}{|\Gamma, G_m|}$ sono isomorfi oloedricamente.

Inoltre, poichè G_m è massimo in G, il gruppo $\frac{\Gamma}{|\Gamma, G_m|}$ non può avere sottogruppi invarianti all'infuori della identità, e quindi $|\Gamma, G_m|$ è massimo in Γ.

B) Le serie di composizione.

84. Dato un gruppo o pseudogruppo $\mathfrak{C}$, diremo che esso ammette una *serie di composizione* quando esiste una successione di complessi:

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{C}_2, \quad \mathfrak{C}_3, \ldots, \quad \mathfrak{C}_n, \ldots$$

tale che:

a) ciascun $\mathfrak{C}_n$ sia della stessa specie di $\mathfrak{C}$ e sia invariante massimo nel precedente;

b) presa una operazione qualsiasi c di $\mathfrak{C}$ (esclusa l' identità se esiste in $\mathfrak{C}$) esista un complesso $\mathfrak{C}_{\bar{n}}$ tale che esso ed i seguenti non contengano c.

85. I complessi complementari:

$$\frac{\mathfrak{C}}{(\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_2^{-1})}, \quad \frac{\mathfrak{C}_2}{(\mathfrak{C}_3, \mathfrak{C}_3^{-1})}, \ldots, \quad \frac{\mathfrak{C}_n}{(\mathfrak{C}_{n+1}, \mathfrak{C}_{n+1}^{-1})}, \ldots$$

verranno chiamati *complessi fattoriali* ed i loro ordini si diranno *fattori di composizione.*

Se $\mathfrak{C}$ è un gruppo, i fattori di composizione coincidono con gli indici di $\mathfrak{C}_2$ in $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_3$ in $\mathfrak{C}_2$, ecc.

86. Se in (α) esistono dei complessi eguali ad 1, la serie può arrestarsi al primo di essi: $\mathfrak{C}_r$, e si può scrivere:

$$(\alpha') \qquad \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{C}_2, \ldots, \quad \mathfrak{C}_{r-1}, \quad 1.$$

In tal caso si dirà che $\mathfrak{C}$ ammette una *serie finita di composizione.*

Uno pseudogruppo non può ammettere una serie finita perchè ciascun complesso di (α) è uno pseudogruppo e, come tale, non può ridursi alla identità.

87. Per un complesso $\mathcal{C}$ di infinite operazioni, a differenza di quanto avviene per i gruppi finiti, non è sempre possibile di costruire delle serie di composizione. Questa impossibilità si presenta quando per il complesso $\mathcal{C}$ non si può soddisfare ad una delle condizioni *a)* e *b)* del n.° 84.

Ad esempio, i complessi costruiti al n.° 55, non possedendo complessi invarianti massimi, non soddisfano alla condizione *a)* e perciò non ammettono serie di composizione.

In altri casi può invece essere soddisfatta la *a)* ma non la *b)* : ciò si verifica per il gruppo costruito nel seguente:

Esempio. Sia G il gruppo dell' Es. I, n.° 55, e sia h una operazione a periodo infinito o senza periodo, commutabile con le operazioni di G.

Con il gruppo G e con l'operazione h formiamo il nuovo gruppo abeliano:

$$H = G + G\cdot h + \dots + G\cdot h^n + \dots + G\cdot h^{-1} + \dots + G\cdot h^{-n} + \dots .$$

Indichiamo con H_m un sottogruppo invariante massimo di H e con G_1 il gruppo comune a G e ad H_m.

Se nella decomposizione:

$$H_m = \Sigma(G_1 \cdot k)$$

di H_m rispetto a G_1, sostituiamo a G_1 un sottogruppo G_2 di G contenente G_1 (n.° 55), otteniamo il gruppo:

$$H_{m_1} = \Sigma(G_2 \cdot k)$$

che contiene H_m ed è invariante in H.

Il gruppo H_m deve dunque, per essere massimo, contenere tutto G. Inoltre, poichè H è abeliano, il gruppo H_m dovrà avere indice primo p in H (n.° 56) e quindi dovrà presentarsi sotto la forma:

$$(o) \quad H_m = G + G\cdot h^p + \dots + G\cdot h^{rp} + \dots + G\cdot h^{-p} + \dots + G\cdot h^{-rp} + \dots .$$

Dalla (o) si deduce, ponendo $h^p = l$, che il gruppo H_m è dello stesso tipo di H e quindi che un sottogruppo massimo di H_m deve avere una forma analoga alla (o). È pertanto possibile di costruire per H delle successioni di gruppi contenenti G e ciascuno dei quali è invariante massimo nel precedente.

Queste successioni, soddisfacendo alla condizione *a)* ma non alla *b)* del n.° 84, non costituiscono serie di composizione di H.

88. Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$ due complessi isomorfi oloedricamente, e sia:

$$(\alpha) \qquad \mathcal{C},\ \mathcal{C}_2,\ldots,\ \mathcal{C}_n,\ldots$$

una serie di composizione di $\mathcal{C}$.

La successione:

$$(\beta) \qquad \mathcal{K},\ \mathcal{K}_2,\ldots,\ \mathcal{K}_n,\ldots,$$

ottenuta sostituendo in (α) ad ogni $\mathcal{C}_n$ il corrispondente $\mathcal{K}_n$ di $\mathcal{K}$, è una serie di composizione di $\mathcal{K}$.

Invero, ciascun $\mathcal{K}_n$ è invariante massimo nel precedente $\mathcal{K}_{n-1}$ (n.° 62), e una operazione k, scelta ad arbitrio in $\mathcal{K}$, appartiene solo a quei primi r complessi di (β) che corrispondono agli r complessi di (α) contenenti l'operazione $c \backsim k$.

89. Consideriamo ora un gruppo C isomorfo meriedricamente ad un altro gruppo K, e indichiamo con H quel sottogruppo di C che corrisponde alla identità in K.

Affinchè esista una serie di composizione di C *contenente* H, *occorre e basta che* H *e* K *abbiano ciascuno una serie di composizione e che la serie di* K *sia finita.*

Se

$$(\alpha) \qquad C,\ C_2,\ldots,\ C_r,\ H,\ H_2,\ldots$$

è una serie di C contenente H, la successione:

$$(\beta) \qquad K,\ K_2,\ldots,\ K_r,\ 1,$$

formata con i sottogruppi di K corrispondenti a C, $C_2,\ldots$, è una serie finita di composizione per K.

Inoltre, è evidente che, per l'esistenza di (α), il gruppo H deve possedere una serie di composizione.

Inversamente, ammesso l'esistenza di (β) e di una serie per H, nella successione corrispondente a (β):

$$(\alpha') \qquad C,\ C_2,\ldots,\ C_r,\ H$$

ciascun gruppo è invariante massimo nel precedente, e perciò, completando la (α') con la serie di H, si ottiene una serie per C.

OSSERVAZIONE I. Volendo verificare se per un gruppo C esiste una serie di composizione contenente un suo sottogruppo invariante H, basterà porre $K = \dfrac{C}{H}$ e riferirsi al teorema ora dimostrato.

OSSERVAZIONE II. Questo teorema cade generalmente in difetto se, in luogo del gruppo C, si considera uno pseudogruppo $\mathfrak{C}$.

Prendiamo, per esempio, i complessi:

$$C'' = [1, g, \dots, g^r, \dots], \quad K = [1, k] \qquad (k^2 = 1)$$

isomorfi meriedricamente secondo le corrispondenze:

$$H'' = [1, g^2, \dots, g^{2n}, \dots] \backsim 1, \quad [g, g^3, \dots, g^{2n+1}, \dots] \backsim k.$$

Poichè H'' e K ammettono rispettivamente le seguenti serie di composizione:

$$H'', \quad [1, g^4, \dots, g^{2n}, \dots], \quad [1, g^6, \dots, g^{2n}, \dots], \dots,$$
$$K, \ 1;$$

le condizioni del precedente teorema sono soddisfatte; nonostante ciò il complesso H'' non figura in nessuna serie di composizione di C''.

Invero, un complesso C_1'' di C'' contenente H'' è necessariamente del tipo:

$$C_1'' = [1, g^2, g^4, \dots, g^{2n}, g^{2n+1}, g^{2n+2}, \dots],$$

e come tale non ammette H'' per sottopseudogruppo invariante massimo.

90. Sia

$$G = [1, g, \dots, g^r, \dots; g^{-1}, \dots, g^{-r}, \dots]$$

il gruppo generato da una operazione g senza periodo o con periodo infinito.

Poichè G è abeliano, un suo qualsiasi sottogruppo:

$$G_{p_1} = [1, g^{p_1}, \dots, g^{np_1}, \dots; g^{-p_1}, \dots, g^{-np_1}, \dots],$$

avente indice primo p_1, è invariante massimo in G (n.° 56).

Il gruppo G_{p_1}, essendo generato dalla operazione g^{p_1}, è della medesima specie di G, e perciò un suo qualsiasi sottogruppo G_{p_2}, avente indice primo p_2, sarà massimo in G_{p_1}.

Continuando in tal guisa si vede agevolmente che una successione di gruppi:

$$(\alpha) \qquad G, \quad G_{p_1}, \quad G_{p_2}, \dots, \quad G_{p_\rho}, \dots,$$

ciascuno dei quali ha indice primo nel precedente, costituisce una serie di composizione di G.

Poichè la scelta della successione dei fattori di composizione di (α):

$$p_1, \quad p_2, \dots, \quad p_\rho, \dots$$

è in nostro arbitrio, l'esempio ora portato ci mostra come un gruppo infinito possa avere infinite serie di composizione, e come per esso non sia generalmente valido il noto teorema di JORDAN-HÖLDER che assicura l'invarianza dei fattori di composizione e l'isomorfismo dei gruppi fattoriali in due diverse serie di un gruppo finito.

91. Vogliamo ora far vedere che questo teorema può cadere in difetto soltanto per quei complessi che hanno serie formate con infiniti termini od, in altre parole, vogliamo dimostrare il seguente:

TEOREMA. *Sia* G *un gruppo infinito avente una serie finita di composizione:*

$$(\alpha) \qquad G, \ G_2, \ldots, \ G_{m-1}, \ 1.$$

Una qualsiasi altra successione di gruppi:

$$(\beta) \qquad G, \ H_2, \ldots, \ H_{m-1}, \ H_m, \ldots,$$

tale che ciascuno di essi sia invariante massimo nel precedente, è una serie di composizione di G *formata di* m *termini* (*cioè* $H_m = 1$), *ed i gruppi fattoriali di* (α) *sono isomorfi oloedricamente ai gruppi fattoriali di* (β).

Il teorema è evidente per quei gruppi che hanno serie formate con due soli termini.

Supponiamo ora che il teorema sia dimostrato per tutti quei gruppi che ammettono una serie di composizione formata con $m-1$ termini, e sotto tale ipotesi, dimostriamolo per un gruppo G qualunque che abbia una serie di m termini.

Anzitutto osserviamo che il gruppo H_2 può supporsi diverso da G_2 perchè, in caso contrario, avendo G_2 una serie di $m-1$ termini, il teorema sarebbe già dimostrato.

Costruiamo poi i gruppi:

$$\begin{aligned} C_1 &= |H_2, \ G_2|, \\ C_2 &= |C_1, \ G_3| = |H_2, \ G_2, \ G_3|, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{m-2} &= |C_{m-3}, \ G_{m-1}| = |H_2, \ G_2, \ G_3, \ldots, \ G_{m-1}|. \end{aligned}$$

Il gruppo C_1 è invariante massimo in G_2 e H_2, perchè questi sono tali in G (n.° 83), il gruppo C_2 è, per la medesima ragione, massimo in C_1 e G_3, ed il gruppo generico C_r, ammesso che C_{r-1} sia massimo in C_{r-2}, G_r, risulta invariante massimo in C_{r-1} e G_{r+1}.

Possiamo dunque affermare che ciascun C_r è invariante massimo nel precedente C_{r-1}.

Inoltre, affinchè un gruppo C_s si riduca alla sola operazione identica è necessario che:

$$G_{s+1} = G_{m-1},$$

onde l'unico C_s eguale ad 1 è il gruppo ultimo C_{m-2}.

Da ciò consegue che le due successioni:

$$(a) \qquad G, \quad G_2, \quad C_1, \quad C_2, \ldots, \quad C_{m-3}, \quad 1,$$

$$(b) \qquad G, \quad H_2, \quad C_1, \quad C_2, \ldots, \quad C_{m-3}, \quad 1$$

costituiscono due serie di composizione di G.

I gruppi fattoriali di queste serie sono isomorfi oloedricamente perchè (n.° 83):

$$\frac{G}{G_2} \backsim \frac{H_2}{C_1}, \quad \frac{G}{H_2} \backsim \frac{G_2}{C_1}.$$

Dalla (b) si deduce che il gruppo H_2 possiede una serie di $m-1$ termini, e perciò (essendo il teorema vero per quei gruppi che hanno serie di $m-1$ termini) che il gruppo H_m deve ridursi alla identità.

La (β) rappresenta quindi una serie di G formata con m gruppi.

Per le già note ipotesi fatte circa la validità del teorema, i gruppi fattoriali di (α) e di (β) sono rispettivamente isomorfi a quelli di (a) e di (b), e poichè, come abbiamo visto, i gruppi fattoriali di (a) e di (b) sono fra loro isomorfi, saranno pure tali i gruppi di (α) e di (β).

In virtù di questi risultati e per il principio d'induzione, il teorema enunciato può ritenersi vero in generale.

92. Diremo che un gruppo o pseudogruppo $\mathcal{C}$ è *risolubile* se esiste una serie di composizione di $\mathcal{C}$ i cui fattori sono numeri primi.

Esempio I. Il gruppo G costruito al n.° 90 è risolubile.

Esempio II. Lo pseudogruppo:

$$G'' = [1, g, g^2, \ldots, g^r, \ldots]$$

è risolubile poichè ammette la serie:

$$G'', \quad [1, g^2, \ldots, g^r, \ldots], \quad [1, g^3, \ldots, g^r, \ldots], \ldots$$

i cui fattori sono tutti eguali ad 1.

93. TEOREMA I. *Un complesso abeliano $\mathcal{C}$, avente una serie di composizione, è risolubile.*

Se $\mathcal{C}$ è un gruppo, il teorema discende immediatamente dalla proposizione del n.° 56.

Supponiamo invece che $\mathcal{C}$ sia uno pseudogruppo semplice o composto e indichiamo con $\mathcal{C}_2$ un suo sottopseudogruppo invariante massimo.

Sia c una operazione di $\mathcal{C}$ non appartenente a $\mathcal{C}_2$ e senza inversa in $\mathcal{C}$. Una sua qualsiasi potenza c^r, con $r \geq 2$, deve appartenere a $\mathcal{C}_2$ perchè, se ciò non fosse, lo pseudogruppo:

$$(\mathcal{C}_2,\ c^r)$$

conterrebbe $\mathcal{C}_2$ e non coinciderebbe con $\mathcal{C}$.

Da ciò consegue che il gruppo:

$$G = (\mathcal{C}_2,\ \mathcal{C}_2^{-1}),$$

contenendo le operazioni c^{r+1}, c^{-r}, contiene anche il loro prodotto $c = c^{r+1} \cdot c^{-r}$.

Si può dunque affermare che nel gruppo G figura qualsiasi operazione di $\mathcal{C}$ senza inversa in $\mathcal{C}$.

Sia poi k una operazione di $\mathcal{C}$ con l'inversa in $\mathcal{C}$. Il prodotto $k \cdot c$, non avendo l'inversa in $\mathcal{C}$, appartiene al gruppo G, e perciò in questo gruppo figura anche l'operazione $k = k \cdot c \cdot c^{-1}$.

Nel gruppo G è dunque compreso tutto il complesso $\mathcal{C}$, e poichè $\mathcal{C}_2$ è contenuto in $\mathcal{C}$, dovrà aversi:

$$(\mathcal{C}_2,\ \mathcal{C}_2^{-1}) = (\mathcal{C},\ \mathcal{C}^{-1}).$$

In modo analogo si prova, essendo:

(α) $$\mathcal{C},\quad \mathcal{C}_2,\quad \mathcal{C}_3, \ldots,\quad \mathcal{C}_n, \ldots$$

la serie di composizione di $\mathcal{C}$, che:

$$(\mathcal{C}_n,\ \mathcal{C}_n^{-1}) = (\mathcal{C}_{n-1},\ \mathcal{C}_{n-1}^{-1}),$$

cioè che i fattori di composizione di (α) sono tutti eguali ad 1.

94. TEOREMA II. *Se un gruppo* G *è risolubile, è pure risolubile qualunque suo sottogruppo* H.

Sia

(α) $$G,\quad G_2,\quad G_3, \ldots,\quad G_n, \ldots$$

una serie di composizione di G e siano:

$$p_1, \quad p_2, \dots, \quad p_{n-1}, \dots$$

i fattori di composizione che, per ipotesi, sono tutti numeri primi.

Con il gruppo dato H e con il primo gruppo G_i di (α) che non contiene per intero H si formi il nuovo gruppo:

$$K = G_i \cdot H.$$

Fra l'indice q di K in G_{i-1} e l'indice r di G_i in K passa evidentemente la relazione:

$$p_{i-1} = q \cdot r;$$

la quale, per essere p_{i-1} primo, è soddisfatta soltanto da $q = 1$, $r = p_{i-1}$. Ciò prova che il gruppo K coincide con G_{i-1}.

Inoltre, essendo $\frac{G_{i-1}}{G_i}$ isomorfo oloedricamente a $\frac{H}{|G_i, H|}$ (Teor. n.° 82), il gruppo $H_1 = |G_i, H|$ ha indice primo eguale a p_{i-1} in H e perciò H_1 è invariante massimo in H.

In modo del tutto analogo si può mostrare l'esistenza di un sottogruppo H_2 invariante massimo di H_1 ed avente indice primo, e così continuando si viene a costruire una serie di composizione di H i cui fattori sono tutti numeri primi. Il gruppo H è dunque risolubile.

95. Dato un gruppo o pseudogruppo $\mathcal{C}$, diremo che esso ammette una *serie principale di composizione* quando esiste una successione di complessi:

$$(\alpha) \qquad \mathcal{C}, \quad \mathcal{C}_2, \quad \mathcal{C}_3, \dots, \quad \mathcal{C}_n, \dots$$

soddisfacente alla condizione *b)* del n.° 84 e tale che:

a) ciascun $\mathcal{C}_n$ sia della stessa specie di $\mathcal{C}$ e sia invariante in $\mathcal{C}$;

b) non esista alcun complesso $\mathfrak{D}$ di $\mathcal{C}_{n-1}$ invariante per $\mathcal{C}$ e contenente $\mathcal{C}_n$.

96. Come già abbiamo fatto per le serie ordinarie di composizione, distingueremo le serie principali in *finite* ed *infinite*, e chiameremo *complessi fattoriali principali* i complessi:

$$\frac{\mathcal{C}}{(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_2^{-1})}, \quad \frac{\mathcal{C}_2}{(\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_3^{-1})}, \dots .$$

Il teorema di JORDAN-HÖLDER, che abbiamo dato per le serie ordinarie, si può dimostrare in modo del tutto analogo e sotto le medesime ipotesi per le serie principali.

97. *Se un gruppo* G *ammette la serie principale:*

$$(\alpha) \qquad G, \quad G_2, \quad G_3, \ldots, \quad G_n, \ldots,$$

e se il gruppo $\dfrac{G_r}{G_{r+1}} = K$ *possiede una serie ordinaria finita:*

$$K, \quad K_2, \ldots, \quad K_{m-1}, \quad 1,$$

la successione dei gruppi corrispondenti di G_r *:*

$$G_r, \quad G_r^{(2)}, \ldots, \quad G_r^{(m-1)}, \quad G_{r+1}$$

è tale che due gruppi qualsiasi:

$$\frac{G_r^{(s)}}{G_r^{(s+1)}}, \quad \frac{G_r^{(t)}}{G_r^{(t+1)}}$$

sono isomorfi oloedricamente.

La dimostrazione di questo teorema, che qui per brevità omettiamo, è del tutto identica alla dimostrazione dell'analoga proposizione relativa ai gruppi finiti.

Se poi tutti i gruppi fattoriali principali di (α) hanno serie ordinarie finite, è possibile, per il Teor. del n.° 89, costruire una serie ordinaria di composizione di G contenente tutti i gruppi di (α); ed inversamente, se esiste una tale serie ordinaria, i gruppi fattoriali principali di (α) hanno serie finite.

Da tutto ciò segue che:

Se un gruppo G *ammette una serie principale* (α), *in qualsiasi serie ordinaria di* G *contenente tutti i gruppi di* (α)*:*

$$G; \quad G_2, \; G_2^{(2)}, \; G_2^{(3)}, \ldots; \quad G_3, \; G_3^{(2)} \ldots; \quad \ldots; \quad G_r, \; G_r^{(2)}, \ldots \; G_r^{(m)}; \quad G_{r+1} \ldots$$

i complessi fattoriali da $\dfrac{G_r}{G_r^{(2)}}$ *a* $\dfrac{G_r^{(m)}}{G_{r+1}}$ *sono isomorfi oloedricamente.*

Sulle superficie minime proiettive

Memoria di G. THOMSEN (a Hamburg)

Nella classica teoria delle superficie la famiglia delle superficie minime è caratterizzata da un gran numero di proprietà geometriche notevoli. Ciò sta in rapporto col fatto, che le superficie minime sono le estremali del più semplice problema variazionale, che sia invariante per il gruppo dei movimenti.

In modo analogo nella geometria proiettiva differenziale ([1]) gode di proprietà notevoli la famiglia delle superficie estremali del problema variazionale più semplice invariante per proiettività. Queste superficie le diremo *superficie minime proiettive.*

Siano

$$(1) \qquad F_2 = \sum_{r,s-1}^{2} a_{rs}\, du^r\, du^s \qquad F_3 = \sum_{r,s,t} a_{rst}\, du^r\, du^s\, du^t$$

le due forme fondamentali del FUBINI ([2]), e poniamo

$$(2) \qquad S = \begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{221} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}!$$

Allora l'integrale doppio più semplice invariante rispetto al gruppo proiettivo è dato da

$$(3) \qquad \Omega = \iint S \cdot A^{-\frac{3}{2}}\, du\, dv.$$

([1]) I fondamenti della geometria proiettiva differenziale si trovano rappresentati nei due tomi del libro di G. FUBINI e E. CECH: *Geometria proiettiva differenziale*, Bologna, Nicola Zanichelli. In seguito questi due tomi sono citati per F-C, I e F-C, II.

([2]) Cfr. F-C, I, pag. 65 le formule (5), (6) che valgono nelle coordinate omogenee del punto x della superficie, normate arbitrariamente.

Questo integrale dipende come le a_{rst} dalle derivate fino al terz'ordine delle coordinate del punto x della superficie. Escludendo il caso $S=0$ delle superficie rigate [1] noi troviamo, come vedremo nel § 2, una famiglia di superficie, caratterizzata da un'equazione differenziale del sesto ordine nelle coordinate del punto x. Nel § 5 caratterizzeremo queste « superficie minime proiettive » essenzialmente colla proprietà geometrica seguente:

Secondo il DEMOULIN [2], il sistema delle quadriche di LIE [3] appartenenti ad una superficie $x(u, v)$ possiede nel caso generale, oltre alla superficie x stessa, 4 falde dell'inviluppo, complessivamente 5 falde. *Ora le superficie minime proiettive si caratterizzano — prescindendo da una certa eccezione — mediante le proprietà, che le linee asintotiche si corrispondono su tutte le falde focali esistenti del sistema delle quadriche di Lie.* (Nel caso generale la corrispondenza sussiste per tutte 5 le falde focali) [4].

§ **1.** Siano x^α ($\alpha=1, 2, 3, 4$) le quattro coordinate omogenee del punto della superficie $x^\alpha(u, v)$. Poniamo in (3)

$$F=S\cdot A^{-\frac{3}{2}}. \tag{4}$$

Poichè in F entrano le derivate della x^α fino al terz'ordine, devono valere per le estremali del problema variazionale $\delta\Omega=0$ le seguenti equazioni di EULERO e LAGRANGE:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x^\alpha}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial u^i}\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}}+\sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^k}\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^i\partial u^k}}-\\ &\qquad-\sum_{i,k,l=1}^{2}\frac{\partial^3}{\partial u^i\partial u^k\partial u^l}\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial u^i\partial u^k\partial u^l}}=0\end{aligned}\right. \tag{5}$$

dov'è posto $u=u^1$, $v=u^2$.

Dopo aver sostituito nelle (5) l'espressione di F formata in coordinate e parametri generali, immaginiamo introdotti in questa equazione (5) i parametri

---

[1] Cfr. F-C, I, pag. 85.

[2] Cfr. A. DEMOULIN, » Comptes Rendus », Paris, 147 (1908), pagg. 493-496.

[3] Cfr. per l'informazione su questo concetto, F-C, I, pag. 125.

[4] Un'altra caratterizzazione geometrica delle superficie minime proiettive si trova in un lavoro di G. THOMSEN nelle « Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Universität Hamburg », tomo IV, 1925, pag. 233.

asintotici, per i quali vale notoriamente

$$a_{11} = a_{22} = a_{112} = a_{122} = 0 \tag{6}$$

e inoltre per il punto x le coordinate normali del FUBINI [1], in modo che oltre alla (6) valga anche

$$a_{111}\, a_{222} = a_{12}^3. \tag{7}$$

Da ciò si traggono per il calcolo le semplificazioni seguenti:

Per formare le equazioni (5) si devono calcolare espressioni della forma $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, dove y indica una delle coordinate x^α od una delle loro derivate fino al terz'ordine. Secondo la (6) si ha

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} \cdot A^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} S \cdot A^{-\frac{5}{2}} \frac{\partial A}{\partial y}. \tag{8}$$

Se immaginiamo formata la $\dfrac{\partial S}{\partial y}$, differenziando il determinante (2) e introducendo dopo i parametri asintotici (6), l'espressione si riduce a tre termini soltanto:

$$\frac{\partial S}{\partial y} = - a_{12}\, a_{222} \frac{\partial a_{111}}{\partial y} - a_{12}\, a_{111} \frac{\partial a_{222}}{\partial y} - a_{111}\, a_{222} \frac{\partial a_{12}}{\partial y}. \tag{9}$$

Nella stessa maniera l'espressione di $\dfrac{\partial A}{\partial y}$ si riduce a

$$\frac{\partial A}{\partial y} = - 2 a_{12} \frac{\partial a_{12}}{\partial y}, \tag{10}$$

donde ricaviamo secondo la (4)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\sqrt{-1}}{a_{12}^3} \left\{ a_{12}\, a_{222} \frac{\partial a_{111}}{\partial y} + a_{12}\, a_{111} \frac{\partial a_{222}}{\partial y} - 2 a_{111}\, a_{222} \frac{\partial a_{12}}{\partial y} \right\}. \tag{11}$$

Come è noto, nella teoria proiettiva delle superficie valgono le equazioni seguenti [2] per parametri qualsiasi e per coordinate non necessaria-

---

[1] Cfr. pag. 86, F-C, I.

[2] Cfr. F-C, I, pagg. 65-66.

mente normali:

$$(12)\quad \begin{cases} a_{12} = \dfrac{\mathfrak{B}}{\sqrt[4]{\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2}} \\ a_{111} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2}} \left\{ |x\, x_u\, x_v\, x_{uuu}| - \dfrac{3}{2}\dfrac{\partial \mathfrak{A}}{\partial u} + \dfrac{3}{8}\mathfrak{A}\dfrac{\partial \lg(\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2)}{\partial u} \right\} \\ a_{222} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2}} \left\{ |x\, x_u\, x_v\, x_{vvv}| - \dfrac{3}{2}\dfrac{\partial \mathfrak{C}}{\partial v} + \dfrac{3}{8}\mathfrak{C}\dfrac{\partial \lg(\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2)}{\partial v} \right\}, \end{cases}$$

dove è posto

$$(13)\qquad \mathfrak{A} = |x\, x_u\, x_v\, x_{uu}|, \quad \mathfrak{B} = |x\, x_u\, x_v\, x_{uv}|, \quad \mathfrak{C} = |x\, x_u\, x_v\, x_{vv}|,$$

e dove ogni linea dei determinanti $|x\, x_u\, x_v\, x_{uu}|$, ecc. è formata con le singole quattro coordinate e le loro derivate.

Formando ora le derivate di a_{12}, a_{111}, a_{222} rispetto ad y e introducendo alla fine parametri asintotici e coordinate normali, si ricava:

$$(14)\qquad 2\frac{\partial a_{12}}{\partial y} = \frac{a_{12}}{\mathfrak{B}}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y}$$

e inoltre

$$(15)\qquad \begin{aligned} 2\frac{\partial a_{111}}{\partial y} = -\frac{a_{111}}{\mathfrak{B}}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + a_{12}\Big\{ -\frac{\partial}{\partial y}|x\, x_u\, x_v\, x_{uuu}| + 3\frac{\partial}{\partial y}|x\, x_u\, x_{uu}\, x_{uv}| + \\ + \frac{3}{2}\frac{\mathfrak{B}u}{\mathfrak{B}}\frac{\partial}{\partial y}|x\, x_u\, x_v\, x_{uu}| \Big\} \end{aligned}$$

e per $\dfrac{\partial a_{222}}{\partial y}$ una equazione del tutto analoga.

Mettendo le espressioni (14), (15) ecc. nella (11), si trova

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} = -\dfrac{2}{\beta\gamma}\dfrac{\partial}{\partial y}|x\, x_u\, x_v\, x_{uv}| + \dfrac{1}{2\beta^2\gamma}\Big\{ -\dfrac{\partial}{\partial y}|x\, x_u\, x_v\, x_{uuu}| \\ \quad + 3\dfrac{\partial}{\partial y}|x\, x_u\, x_{uu}\, x_{uv}| + 3\Theta_u\dfrac{\partial}{\partial y}|x\, x_u\, x_v\, x_{uu}| \Big\} \\ \quad + \dfrac{1}{2\beta\gamma^2}\Big\{ -\dfrac{\partial}{\partial y}|x\, x_u\, x_v\, x_{vvv}| + 3\dfrac{\partial}{\partial y}|x\, x_v\, x_{uv}\, x_{vv}| \\ \quad + 3\Theta_v\dfrac{\partial}{\partial y}|x\, x_u\, x_v\, x_{vv}| \Big\} \end{cases}$$

dove si è posto in accordo colle notazioni del FUBINI [1]:

$$a_{12} = \beta\gamma\,; \quad a_{111} = \beta^2\gamma\,; \quad a_{222} = \beta\gamma^2 \tag{17}$$

e per brevità

$$\Theta = \lg \beta\gamma. \tag{18}$$

§ 2. Adesso dobbiamo formare l'espressione (16) per le diverse grandezze y, rispetto alle quali la funzione F deve essere derivata, e introdurre queste $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ nella (5).

Perciò facciamo ancora l'osservazione seguente: Essendo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_{\rm I}$, $\mathfrak{b}_{\rm II}$, $\mathfrak{b}_{\rm III}$, quattro punti colle coordinate omogenee $\mathfrak{a}^\alpha$, $\mathfrak{b}_{\rm I}^\alpha$, ecc., le quattro grandezze η_α, definite da

$$\eta_\alpha = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{a}^\alpha} |\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}_{\rm I},\ \mathfrak{b}_{\rm II},\ \mathfrak{b}_{\rm III}| \tag{19}$$

sono i complementi algebrici del determinante $|\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}_{\rm I},\ \mathfrak{b}_{\rm II},\ \mathfrak{b}_{\rm III}|$ corrispondenti agli elementi $\mathfrak{a}_\alpha$ della prima colonna o anche i minori della matrice $\|\mathfrak{b}_{\rm I},\ \mathfrak{b}_{\rm II},\ \mathfrak{b}_{\rm III}\|$, presi con un corrispondente fattore ± 1. Simbolicamente scriveremo invece di (19):

$$\eta = \|\mathfrak{b}_{\rm I},\ \mathfrak{b}_{\rm II},\ \mathfrak{b}_{\rm III}\|. \tag{20}$$

Le grandezze η^α rappresentano le coordinate omogenee del piano passante per i tre punti $\mathfrak{b}_{\rm I}$, $\mathfrak{b}_{\rm II}$, $\mathfrak{b}_{\rm III}$, (almeno se le $\mathfrak{b}$ sono linearmente indipendenti). Le $\mathfrak{a}^\alpha$ nell'equazione (19), che dà il significato dell'equazione simbolica (20), sono grandezze puramente ausiliarie e del tutto arbitrarie.

È essenziale solamente la posizione nel determinante del « punto ausiliario » $\mathfrak{a}$. Se per esempio poniamo

$$\zeta_\alpha = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{a}^\alpha} |\mathfrak{b}_{\rm I},\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b}_{\rm II},\ \mathfrak{b}_{\rm III}|,$$

ricaviamo

$$\zeta = -\,|\mathfrak{b}_{\rm I},\ \mathfrak{b}_{\rm II},\ \mathfrak{b}_{\rm III}| = -\,\eta \tag{21}$$

in causa della nostra definizione (19) dell'equazione simbolica (21).

---

[1] Cfr. F-C, I, pag. 89.

Usando queste notazioni, si trae dalla (5) mediante la (16)

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
& -\frac{2}{\beta\gamma}\|x_u\,x_v\,x_{uv}\| + \frac{1}{2\beta^2\gamma}[-\|x_u\,x_v\,x_{uuu}\| + 3\,\|x_u\,x_{uu}\,x_{uv}\| \\
& \quad + 3\Theta_u\|x_u\,x_v\,x_{uu}\|] + \frac{1}{2\beta\gamma^2}[-\|x_u\,x_v\,x_{vvv}\| + 3\|x_v\,x_{uv}\,x_{vv}\| \\
& \quad + 3\Theta_v|\,x_u\,x_v\,x_{vv}\|] \\
& \quad -\frac{\partial}{\partial u}\left\{+\frac{2}{\beta\gamma}\|x\,x_v\,x_{uv}\| + \frac{1}{2\beta^2\gamma}[+\|x\,x_v\,x_{uuu}\| - 3\|x\,x_{uu}\,x_{uv}|\right. \\
& \quad \left. -3\Theta_u\|x\,x_v\,x_{uu}\|] + \frac{1}{2\beta\gamma^2}[+\|x\,x_v\,x_{vvv}\| - 3\Theta_v\|x\,x_v\,x_{vv}\|]\right\} \\
& \quad -\frac{\partial}{\partial v}\left\{-\frac{2}{\beta\gamma}\|x\,x_u\,x_{uv}\| + \frac{1}{2\beta^2\gamma}[-\|x\,x_u\,x_{uuu}\| + 3\Theta_u|\,x\,x_u\,x_{uu}\ ]\right. \\
& \quad \left. +\frac{1}{2\beta\gamma^2}[-\|\,x\,x_u\,x_{vvv}\| - 3\|x\,x_{uv}\,x_{vv}\| + 3\Theta_v\|x\,x_u\,x_{vv}\|]\right\} \\
& \quad +\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left\{\frac{1}{2\beta^2\gamma}[3\|x\,x_u\,x_{uv}\| - 3\Theta_u\|x\,x_u\,x_v\|]\right\} + \\
& \quad +\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left\{\frac{1}{2\beta\gamma^2}[-3\|x\,x_v\,x_{uv}\| - 3\Theta_v\|x\,x_u\,x_v\|]\right\} \\
& \quad +\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left\{\frac{2}{\beta\gamma}\|x\,x_u\,x_v\| - \frac{3}{2\beta^2\gamma}\|x\,x_u\,x_{uu}\| + \frac{3}{2\beta\gamma^2}\|x\,x_v\,x_{vv}\|\right\} \\
& \quad -\frac{\partial^3}{\partial u^3}\left\{\frac{1}{2\beta^2\gamma}\|x\,x_u\,x_v\|\right\} - \frac{\partial^3}{\partial v^3}\left\{\frac{1}{2\beta\gamma^2}\|x\,x_u\,x_v\|\right\} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Mediante le equazioni fondamentali:

$$
(23)\qquad \left\{
\begin{aligned}
x_{uu} &= \Theta_u\,x_u + \beta\,x_v + p_{11}\,x \\
x_{vv} &= \gamma\,x_u + \Theta_v\,x_v + p_{22}\,x,
\end{aligned}
\right.
$$

valide per parametri asintotici e coordinate normali, si possono esprimere nella teoria proiettiva delle superficie tutte le derivate del punto x come combinazioni lineari delle quattro:

$$x, \quad x_u, \quad x_v, \quad x_{uv}.$$

Secondo la regola

$$\|\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ A\mathfrak{c} + B\mathfrak{d}\| = A\cdot\|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\| + B\|\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}\|,$$

valida per ogni quaterna di punti $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ e per coefficienti A, B qualsiasi, noi possiamo ormai rappresentare tutti i nostri piani (che sono rappresentati in (22) con matrici), come combinazioni lineari dei quattro piani seguenti:

$$
(24)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \| x \quad x_u\, x_v \, \| \\
\mathfrak{B} &= \| x \quad x_u\, x_{uv} \| \\
\mathfrak{C} &= \| x \quad x_v\, x_{uv} \| \\
\mathfrak{D} &= \| x_u\, x_v\, x_{uv} \| .
\end{aligned}\right.
$$

Il calcolo fornisce:

$$
(25)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2\beta^2\gamma^2}\left(2\Theta_u\gamma p_{11} - \gamma\frac{\partial p_{11}}{\partial u} + 2\Theta_v\beta p_{22} - \beta\frac{\partial p_{22}}{\partial v}\right)\mathfrak{A} - \frac{3}{2}\frac{p_{11}}{\beta^2\gamma}\mathfrak{B} \\
&\quad + \frac{3}{2}\frac{p_{22}}{\beta\gamma^2}\mathfrak{C} - \frac{\partial}{\partial u}\Big\{\frac{1}{2\beta^2\gamma^2}(2\Theta_u{}^2\gamma - \Theta_{uu}\gamma - p_{11}\gamma + 2\Theta_v\beta\gamma \\
&\quad - \beta\gamma_v)\mathfrak{A} - \frac{3}{2}\frac{\Theta_u}{\beta^2\gamma}\mathfrak{B} + \frac{3}{2\beta\gamma}\mathfrak{C}\Big\} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial v}\Big\{\frac{1}{2\beta^2\gamma^2}(2\Theta_v{}^2\beta - \Theta_{vv}\beta - p_{22}\beta + 2\Theta_u\beta\gamma - \gamma\beta_u)\mathfrak{A} \\
&\quad - \frac{3}{2\beta\gamma}\mathfrak{B} + \frac{3}{2}\frac{\Theta_v}{\beta\gamma^2}\mathfrak{C}\Big\} + \frac{\partial^2}{\partial u^2}\Big\{ - \frac{3}{2}\frac{\Theta_u}{\beta^2\gamma}\mathfrak{A} + \frac{3}{2\beta^2\gamma}\mathfrak{B}\Big\} \\
&\quad + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\Big\{ - \frac{3}{2}\frac{\Theta_v}{\beta\gamma^2}\mathfrak{A} \quad \frac{3}{2\beta\gamma^2}\mathfrak{C}\Big\} + \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\Big\{ - \frac{1}{\beta\gamma}\mathfrak{A}\Big\} \\
&\quad - \frac{\partial^3}{\partial u^3}\Big\{\frac{1}{2\beta^2\gamma}\mathfrak{A}\Big\} - \frac{\partial^3}{\partial v^3}\Big\{\frac{1}{2\beta\gamma^2}\mathfrak{A}\Big\} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Adesso dobbiamo ancora eseguire le differenziazioni nella (25). A questo scopo giovano le equazioni

$$
(26)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{A}_u &= \Theta_u\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \\
\mathfrak{A}_v &= \Theta_v\mathfrak{A} - \mathfrak{C} \\
\mathfrak{B}_u &= (p_{11} + \beta_v + \Theta_v\beta)\mathfrak{A} + 2\Theta_u\mathfrak{B} + \mathfrak{BC} \\
\mathfrak{B}_v &= (\Theta_{uv} + \beta\gamma)\mathfrak{A} + \Theta_v\mathfrak{B} - \mathfrak{D} \\
\mathfrak{C}_u &= -\ (\Theta_{uv} + \beta\gamma)\mathfrak{A} + \Theta_u\mathfrak{C} + \mathfrak{D} \\
\mathfrak{C}_v &= -\ (p_{22} + \gamma_u + \Theta_u\gamma)\mathfrak{A} + \gamma\mathfrak{B} + 2\Theta_v\mathfrak{C},
\end{aligned}\right.
$$

che si ricavano per differenziazione delle (24) mediante le (23).

Ora, eseguendo in (25) le differenziazioni, si possono esprimere sempre le derivate delle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ — (le derivate della $\mathfrak{D}$ non vi compaiono) — mediante le $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ stesse in modo da ricavare una combinazione lineare di questi quattro piani, nella quale si annulleranno i quattro coefficienti. Il calcolo dice che i coefficienti delle $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ svaniscono identicamente. Ponendo il coefficiente di $\mathfrak{A}$ eguale a zero, si ricava l'equazione differenziale delle superficie minime proiettive

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\gamma \frac{\partial p_{11}}{\partial u} + \beta \frac{\partial p_{22}}{\partial v} + 2\gamma_u p_{11} + 2\beta_v p_{22} \\
&\quad + \beta\gamma \frac{\partial}{\partial u}\left\{ \frac{1}{2\beta^3}(\beta\beta_{uu} - 2\beta_u^3 - 2\beta^2\Theta_{uu} - 2\beta^2\Theta_u^2 + 3\beta\beta_u\Theta_u)\right\} \\
&\quad + \beta\gamma \frac{\partial}{\partial v}\left\{ \frac{1}{2\gamma^3}(\gamma\gamma_{vv} - 2\gamma_v^3 - 2\gamma^2\Theta_{vv} - 2\gamma^2\Theta_v^2 + 3\gamma\gamma_v\Theta_v)\right\} \\
&\quad + \beta\gamma \left\{ \frac{3}{2}\Theta_{uv} + \left(\Theta_v - \frac{1}{2}\frac{\gamma_v}{\gamma}\right)\left(\Theta_u - \frac{1}{2}\frac{\beta_u}{\beta}\right)\right\} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Poichè i coefficienti p_{11}, p_{22} della terza forma fondamentale del FUBINI ([1]), formata per le coordinate normali, dipendono dalle derivate quinte di x, mentre β, γ e Θ dipendono dalle terze derivate, questa equazione è del sesto ordine.

§ **3.** Ora vogliamo ridurre la nostra equazione differenziale (27) ad una forma più semplice. Poniamo

$$
(28)\qquad \lambda = \sqrt[3]{\beta^2\gamma}; \qquad \bar{\lambda} = \sqrt[3]{\beta\gamma^2}
$$

sicchè si ha

$$
(29)\qquad \beta = \lambda^2/\bar{\lambda}; \qquad \gamma = \bar{\lambda}^2/\lambda; \qquad \Theta = \lg \lambda\bar{\lambda}.
$$

Allora eseguendo una sostituzione dei parametri asintotici:

$$
u = f(u^*), \qquad v = \varphi(v^*)
$$

le λ, λ si trasformano secondo

$$
(30)\qquad \lambda = \lambda^* : \frac{df}{du}; \qquad \bar{\lambda} = \lambda^* : \frac{d\varphi}{dv}.
$$

Ora, essendo T un invariante differenziale della superficie, si possono formare mediante le prime derivate di T e le λ, $\bar{\lambda}$ a causa della loro legge di trasformazione (30), due nuove grandezze

$$
(31)\qquad T_1 = \frac{T_u}{\lambda}; \qquad T_2 = \frac{T_v}{\bar{\lambda}}
$$

([1]) Cfr. F-C, I, pag. 78.

che sono anch'esse invarianti, a meno di fattori puramente numerici. Noi chiameremo T_1 e T_2 le derivate invarianti di T [1]. Dunque mediante, le λ, $\bar{\lambda}$ si possono ricavare da un invariante dato sempre altri invarianti formati con derivate. Per esempio si possono formare gli invarianti:

$$T_{11} = \frac{\partial T_1}{\partial u} : \lambda ; \qquad T_{12} = \frac{\partial T_1}{\partial v} : \bar{\lambda} \text{ ecc.}$$

Per una superficie esistono due invarianti differenziali proiettivi, che dipendono dalle derivate fino al quarto ordine. Noi possiamo rappresentarli mediante i due invarianti irrazionali:

$$q = \frac{1}{3\bar{\lambda}}\left(2\Theta_v - \frac{\gamma_v}{\gamma}\right); \qquad \bar{q} = \frac{1}{3\lambda}\left(2\Theta_u - \frac{\beta_u}{\beta}\right), \tag{32}$$

(invarianti sempre a meno di coefficienti numerici). Formando secondo le (31) q_1, q_2, $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$ e introducendo inoltre

$$\left\{\begin{aligned} w &= \frac{2\lambda p_{11}}{\beta^2\gamma} - \frac{3}{2}(2\bar{q}_1 + \bar{q}^2 - 2q) \\ \bar{w} &= \frac{2\bar{\lambda} p_{22}}{\beta\gamma^2} - \frac{3}{2}(2q_2 + q^2 - 2\bar{q}) \end{aligned}\right. \tag{33}$$

i sei invarianti q_1, q_2, $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$, w, $\bar{w}$ possono servire, come si dimostra facilmente, alla rappresentazione dei sei invarianti indipendenti del quinto ordine, esistenti oltre le q, $\bar{q}$ stesse.

Ora si può provare per il calcolo che la nostra equazione delle superficie minime proiettive (27), nelle nostre nuove notazioni, assume la forma

$$w_1 + \bar{w}_2 + 4\bar{q}w + 4q\bar{w} = 0, \tag{34}$$

dov'è posto

$$w_1 = w_u/\lambda ; \qquad \bar{w}_2 = \bar{w}_v/\bar{\lambda}.$$

Notoriamente per le equazioni fondamentali (23) valgono le tre condi-

[1] Riguardo all'uso di queste derivate invarianti, cfr. G. THOMSEN, l. c. Un metodo simile per la costruzione d'invarianti si trova da E. BOMPIANI. Appendice di F-C, II, pag. 685 e seguenti.

zioni d' integrabilità

$$(35)\quad \begin{cases} \underline{a}| \quad 2\dfrac{\partial p_{22}}{\partial u} = \Theta_{uvv} - \Theta_v\Theta_{uv} - \gamma_{uu} - \dfrac{\partial}{\partial u}(\gamma\Theta_u) + \beta\gamma_v + 2\beta\gamma_u \\ \underline{b}| \quad 2\dfrac{\partial p_{11}}{\partial v} = \Theta_{uuv} - \Theta_u\Theta_{uv} - \beta_{vv} - \dfrac{\partial}{\partial v}(\beta\Theta_v + \gamma\beta_u + 2\beta\gamma_u \\ \underline{c}| \quad \dfrac{\partial^2 p_{22}}{\partial u^2} - \Theta_u\dfrac{\partial p_{22}}{\partial u} - \beta\dfrac{\partial p_{22}}{\partial v} - 2\beta_v p_{22} = \\ \qquad = \dfrac{\partial^2 p_{11}}{\partial v^2} - \Theta_v\dfrac{\partial p_{11}}{\partial v} - \gamma\dfrac{\partial p_{11}}{\partial u} - 2\gamma_u p_{11} \text{ [1]}. \end{cases}$$

che risultano dall' identità $x_{uuvv} = x_{vvuu}$.

Sostituendo $\dfrac{\partial^2 p_{22}}{\partial u^2}$ e $\dfrac{\partial^2 p_{11}}{\partial v^2}$ e anche $\dfrac{\partial p_{22}}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial p_{11}}{\partial v}$ in (35) $\underline{c}|$ mediante le (35) $\underline{a}|$ e $\underline{b}|$ per le sole β, γ, Θ e le loro derivate, si ricavano tre equazioni, contenenti soltanto le prime derivate delle p_{11} e p_{22}.

Esse si scrivono coi nostri invarianti (33) nella forma semplice

$$(36)\quad \begin{cases} \underline{a}| \quad w_2 + 2qw = h_1 + 3\bar{q}h \\ \underline{b} \quad \bar{w}_1 + 2\bar{q}\bar{h} = h_2 + 3q\bar{h} \\ \underline{c} \quad w_1 + 4\bar{q}w = \bar{w}_2 + 4q\bar{w}, \end{cases}$$

dove è posto

$$(37)\quad \begin{cases} h = q_1 - 2q_2 - qq + 1 \\ \bar{h} = \bar{q}_2 - 2\bar{q}_1 - q\bar{q} + 1, \end{cases}$$

le h, $\bar{h}$ essendo invarianti, dipendenti solamente dalle β, γ e le loro derivate.

A causa della condizione d' integrabilità (36) $\underline{c}|$ la nostra equazione (34) delle superficie minime proiettive si può scrivere in una delle due forme seguenti:

$$(38)\quad \begin{cases} w_1 + 4\bar{q}w = 0 \\ \bar{w}_2 + 4q\bar{w} = 0. \end{cases}$$

Per l' introduzione delle derivate invarianti, usate in questo paragrafo, non è necessario che la superficie sia data a priori riferita in forma esplicita ai suoi parametri asintotici. Essendo data la superficie in parametri qualsiasi, e indicando con a_{rs}, a_{rst} i coefficienti delle

---

[1] Cfr. F-C, I, pag. 94.

due prime forme di FUBINI, si pone

$$a_{rs} = n_r \bar{n}_s + n_s \bar{n}_r.$$

Mediante questa equazione le due forme lineari irrazionali $\sum_r n_r du^r$ e $\sum_r \bar{n}_r du^r$ sono fissate a meno di un fattore arbitrario $\varkappa$, pel quale si possono ancora le n_r, mentre le $\bar{n}_r$ si devono moltiplicare nello stesso tempo pel fattore $1 : \varkappa$.

Questo fattore $\varkappa$ si può determinare a meno di un fattore numerico radice cubica dell'unità, se si suppone che sia anche:

$$a_{rst} = n_r n_s n_t + \bar{n}_r \bar{n}_s \bar{n}_t,$$

e allora anche le n_r, $\bar{n}_r$ sono determinate a meno di un fattore numerico. Introducendo mediante le equazioni

$$\Sigma n^r n_r = 1 ; \qquad \Sigma n^r \bar{n}_r = 0$$
$$\Sigma \bar{n}^r \bar{n}_r = 1 ; \qquad \Sigma \bar{n}^r n_r = 0$$

le nuove grandezze n^r, $\bar{n}^r$ si può definire la derivazione invariante di T per mezzo delle:

$$T_1 = \sum_r n^r \frac{\partial T}{\partial u^r}; \qquad T_2 = \sum_r \bar{n}^r \frac{\partial T}{\partial u^r}.$$

Se le u^i sono parametri asintotici, si ha $n_2 = \bar{n}_1 = 0$ e ponendo $n_1 = \lambda$; $\bar{n}_2 = \bar{\lambda}$, si ricavano le formule date poco sopra in questo stesso paragrafo.

Le formule della teoria proiettiva delle superficie si possono anche scrivere facendo uso soltanto di derivazioni invarianti. Si devono considerare sempre anche per il punto x le derivate invarianti x, x_1, x_2, x_{11} ecc. Perciò si deve osservare che la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 T}{\partial v \partial u},$$

colle derivate invarianti, assume la forma:

$$(*) \qquad T_{12} + q T_1 = T_{21} + \bar{q} T_2,$$

q e $\bar{q}$ essendo i nostri invarianti (32).

Le equazioni (23) si scrivono nella forma

$$(**) \qquad \begin{cases} x_{11} = \frac{1}{4}(2w + 6\bar{q}_1 + 3\bar{q}^2 - 6q)x + \bar{q}x_1 + x_2 \\ x_{22} = \frac{1}{4}(2\bar{w} + 6q_2 + 3q^2 - 6\bar{q})x + x_1 + qx_2 \end{cases}$$

e le equazioni d'integrabilità (36) si possono ricavare direttamente scrivendo la condizione $x_{uuvv} = x_{vvuu}$ mediante la (*) in derivate invarianti e applicandola alla (**).

§ 4. La quadrica di LIE, appartenente ad un punto u, v della superficie $x(u, v)$, si può rappresentare mediante due parametri ρ e $\bar{\rho}$ nella forma [1]

$$(39) \qquad z(\rho, \bar{\rho}) = \left[\frac{1}{2}(h + \bar{h} - 3) + \rho\bar{\rho}\right]x + \frac{\rho}{\lambda} x_u + \frac{\bar{\rho}}{\bar{\lambda}} x_v + \frac{x_{uv}}{\beta\gamma},$$

[1] Cfr. F-C, I, pag. 125.

dove z è il punto generale della quadrica e h, $\bar{h}$ λ, $\bar{\lambda}$ sono le grandezze introdotte nel § 3.

Nella rappresentazione parametrica (39) della quadrica di LIE non sono inclusi per valori finiti di ρ e di $\bar{\rho}$ nè il punto x, nè i punti delle due tangenti asintotiche, uscenti da x, le quali sono generatrici della quadrica di LIE. Quindi calcolando da (39) i punti delle falde focali del sistema delle quadriche di LIE, non si ricava la superficie di partenza.

Un punto della quadrica di LIE è allora e soltanto allora un punto d'una falda focale, se esso appartiene anche alle quadriche di LIE infinitamente vicine. Noi dobbiamo determinare ρ e $\bar{\rho}$ in funzione di u e v in modo che per il punto $u = u_0$, $v = v_0$, che noi stiamo osservando, siano

$$z_u \text{ e } z_v \text{ proporzionali a } z. \tag{40}$$

Da (40) si ricavano mediante (39) sei equazioni nelle ρ, $\bar{\rho}$. Due di quelle si possono scrivere nella forma

$$\left\{\begin{aligned} &(2\rho + 3q)^2 = 2w && (41)\\ &(2\bar{\rho} + 3\bar{q})^2 = 2w && (42)\end{aligned}\right.$$

colle q, $\bar{q}$, w, $\bar{w}$ determinate nel § 3.

Le altre quattro equazioni, che servono alla determinazione delle ρ_u, ρ_v, $\bar{\rho}_u$, $\bar{\rho}_v$ nel punto $u_0\ v_0$ non hanno interesse per noi, perchè vogliamo determinare soltanto le due coordinate ρ e $\bar{\rho}$, che fissano un punto d'una falda focale sopra la nostra quadrica di LIE (39), e non i valori delle coordinate corrispondenti, che fissano lo stesso punto sopra le quadriche infinitamente vicine. Generalmente la (41) ha due soluzioni ρ_1 e ρ_2 e anche la (42) ha due soluzioni $\bar{\rho}_1$ e $\bar{\rho}_2$, pertanto abbiamo quattro punti

$$\left\{\begin{aligned} &z^{11} = z(\rho^1, \bar{\rho}^1); \qquad z^{12} = z(\rho^1, \bar{\rho}^2)\\ &z^{21} = z(\rho^2, \bar{\rho}^1); \qquad z^{22} = z(\rho^2, \bar{\rho}^2),\end{aligned}\right. \tag{43}$$

che descrivono quattro falde focali.

Per $w = 0$ coincidono le due radici ρ e per $\bar{w} = 0$ le due radici $\bar{\rho}$. Per $\{w = 0, \bar{w} \neq 0\}$ o $\{w \neq 0, \bar{w} = 0\}$ abbiamo dunque oltre alla superficie x stessa soltanto 2 falde focali, ma per $w = \bar{w} = 0$ solamente una. In questo ultimo caso la quadrica di LIE è notoriamente anche per questa seconda superficie focale la quadrica di LIE.

Questo caso $w = \overline{w} = 0$ è l'unico, per il quale le quadriche di LIE di una superficie sono ancora quadriche di LIE per più di una falda focale. Dalle (36) e (38) vediamo, che le superficie

$$w\overline{w} = 0 \tag{44}$$

con meno di cinque falde focali appartengono alla nostra classe delle superficie minime proiettive.

La quadrica di LIE in coordinate ζ di piano tangente si presenta in una maniera del tutto corrispondente alla equazione (39) in coordinate di punto. Si ha

$$\zeta(\rho, \overline{\rho}) = \left[\frac{1}{2}(h + \overline{h} - 3) + \rho\overline{\rho}\right]\xi + \frac{\lambda}{\rho}\xi_u + \frac{\overline{\rho}}{\lambda}\xi_v + \frac{\xi_{uv}}{\beta\gamma} \tag{45}$$

dove le ξ sono le coordinate normali (¹) di FUBINI del piano tangente alla superficie x.

Per queste coordinate valgono le equazioni fondamentali (²), duali alle (23):

$$\left\{\begin{aligned} \xi_{uu} &= \Theta_u\xi_u - \beta\xi_v + (p_{11} + \beta_v + \beta\Theta_v)\xi \\ \xi_{vv} &= -\gamma\xi_u + \Theta_v\xi_v + (p_{22} + \gamma_u + \gamma\Theta_u)\xi. \end{aligned}\right. \tag{46}$$

Ai quattro sistemi di soluzioni delle equazioni (41), (42) corrispondono in (45) i quattro piani tangenti

$$\left\{\begin{aligned} \zeta^{11} &= \zeta(\rho^1, \overline{\rho}^1); \qquad \zeta^{12} = \zeta(\rho^1, \overline{\rho}^2) \\ \zeta^{21} &= \zeta(\rho^2, \overline{\rho}^1); \qquad \zeta^{22} = \zeta(\rho^2, \overline{\rho}^2) \end{aligned}\right. \tag{47}$$

delle superficie focali.

§ **5.** Se si corrispondono le linee asintotiche su tutte le superficie focali del sistema delle quadriche di LIE della nostra superficie x, allora devono valere per i parametri asintotici u, v di x le equazioni

$$\left\{\begin{aligned} (z_u^{ik}, \zeta_u^{ik}) &= 0 \\ (z_v^{ik}, \zeta_v^{ik}) &= 0, \end{aligned}\right. \tag{48}$$

— [prese per tutte e quattro le coppie d'indici $(i, k) = (1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2)$] — dove per un punto z e un piano ζ il simbolo $(z\zeta)$ indica la forma bilineare delle loro coordinate.

(¹) Cfr. F-C, I, pag. 86.
(²) Cfr. F-C, I, pag. 90.

Dalle otto equazioni (48) si ricavano le quattro condizioni indipendenti

$$(49)\qquad \begin{cases} \underline{\mathrm{a}}| & (w_1 + 4\bar{q}w)(\overline{w}_1 + 2\overline{q}\overline{w}) = 0 \\ \underline{\mathrm{b}}| & (\overline{w}_2 + 4q\overline{w})(w_2 + 2qw) = 0 \\ \underline{\mathrm{c}}| & (w_1 + 4\bar{q}w)\cdot h = 0 \\ \underline{\mathrm{d}}| & (\overline{w}_2 + 4q\overline{w})\cdot \bar{h} = 0. \end{cases}$$

Noi distinguiamo due casi.

A) $w_1 + 4\bar{q}w = 0$. Allora si trae dalla (36) $\underline{\mathrm{c}}|$, che anche $\overline{w}_2 + 4q\overline{w} = 0$ e tutte le equazioni (49) sono soddisfatte. A causa della (38) abbiamo in questo caso le superficie minime proiettive.

Si vede che, nel caso in cui esistono meno di cinque falde focali del sistema delle quadriche di LIE (44), si corrispondono sempre sulle falde esistenti le linee asintotiche.

B) $w_1 + 4\bar{q}w \neq 0$. In questo caso deve essere, a causa della (36) $\underline{\mathrm{c}}|$ anche $\overline{w}_2 + 4q\overline{w} \neq 0$.

Da (49) $\underline{\mathrm{c}}|$ e (49) $\underline{\mathrm{d}}|$ segue

$$h = \bar{h} = 0.$$

Allora però si trae dalle (36) $\underline{\mathrm{a}}|$ e (36) $\underline{\mathrm{b}}|$, che anche (49) $\underline{\mathrm{a}}|$ e (49) $\underline{\mathrm{b}}|$ sono soddisfatte spontaneamente.

Naturalmente il caso B) è molto più speciale del caso A), perchè la classe delle superficie B è caratterizzata da due equazioni differenziali simultanee

$$(50)\qquad h = 0; \qquad \bar{h} = 0,$$

le quali, secondo (37), sono del quint'ordine, mentre le superficie A sono caratterizzate da una sola equaziono del sest'ordine (34), che equivale alle due (38) a causa delle condizioni d'integrabilità.

Dalle (37) e (32) si calcola che il sistema (50) è equivalente al seguente:

$$\frac{\partial^2 \lg \beta}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \lg \gamma}{\partial u\, \partial v} = \beta\gamma.$$

Quindi a causa del § 18, c) del libro F-C, I, noi abbiamo le superficie, di cui tutte le asintotiche appartengono a complessi lineari.

Cerchiamo le superficie che appartengono e al caso A) e al caso B). Noi abbiamo

$$h = \bar{h} = w_1 + 4\bar{q}w = \overline{w}_2 + 4q\overline{w} = 0$$

e a causa delle (36) anche

$$w_2 + 2qw = \overline{w}_1 + 2\overline{q}\,\overline{w} = 0.$$

Se noi per le due equazioni

$$\begin{cases} w_1 + 4\overline{q}w = \dfrac{w_u}{\lambda} + 4\overline{q}w = 0 \\ w_2 + 2qw = \dfrac{w_v}{\overline{\lambda}} + 2qw = 0, \end{cases}$$

valide per la funzione w, calcoliamo la condizione d'integrabilità $w_{uv} = w_{vu} = 0$, noi troviamo

$$w(2\overline{q}_2 - q_1 + q\overline{q}) = 0.$$

L'ultimo fattore però a causa delle (37) è uguale a $1 - h$ e a causa della $h = 0$ è diverso da zero. Donde segue $w = 0$ e in una maniera analoga si deduce $\overline{w} = 0$.

Quindi le sole superficie minime proiettive di cui le asintotiche appartengono a complessi lineari, sono superficie speciali del tipo $w = \overline{w} = 0$, che corrisponde al caso, in cui esistono in somma soltanto due superficie focali [1].

Dunque nel caso di cinque diverse falde focali nessuna superficie colle asintotiche in complessi lineari può essere anche superficie minima proiettiva; nel caso di due o tre falde focali, come già sappiamo, tutte le superficie sono superficie minime proiettive.

Terminiamo enunciando due proposizioni su superficie minime proiettive speciali:

1°) Il TERRACINI ha mostrato, come si possano costruire geometricamente le superficie, sulle quali le asintotiche di uno dei due sistemi appartengono a complessi lineari (cfr. F-C, II, pag. 773). Cercando le superficie di questa classe, che sono nello stesso tempo superficie minime proiettive, noi troviamo superficie speciali della classe $w\overline{w} = 0$. Mentre il TERRACINI nel suo caso generale prende per la costruzione una schiera di complessi lineari, del tutto arbitraria, dipendente da un parametro, nel nostro caso speciale dobbiamo prendere una schiera di complessi lineari, tale che due complessi

[1] In questo caso la seconda falda focale è un piano e si ricavano le cosidette « Uneigentlichen Affinsphären » di W. BLASCHKE (Vorles. üb. Diff. Geom., II, Berlin, 1923, § 78), le loro trasformate per proiettività e le superficie duali.

consecutivi determinano una congruenza lineare speciale (con una sola direttrice). Per il rimanente la costruzione è la stessa.

2°) Le sole superficie minime proiettive, che sono nello stesso tempo superficie minime affini (1) sono le cosidette « Uneigentlichen Affinsphären » (2) di W. BLASCHKE.

(1) Su questo concetto cfr. W. BLASCHKE (Vorlesungen über Differential Geometrie, II, Berlin, 1923, § 68.

(2) Cfr. W. BLASCHKE, l. c., § 78. Già H. BEHNCKE ha osservato, che queste superficie e anche le cosidette « Eigentlichen Affinsphären » sono estremali del nostro problema variazionale. Cfr. W. BLASCHKE, l. c., § 76 e anche pag. 248, n.° 7.

Sulla dimensione dei sistemi lineari sopra le varietà algebriche a $k+1$ dimensioni contenenti un fascio di S_k.

Memoria di ARTURO MARONI (a Firenze).

L'estensione del teorema RIEMANN-ROCH alle varietà di dimensione maggiore di 2 sembra offrire difficoltà non lievi ([1]). Non sembrerà perciò inutile lo stabilire una limitazione per la dimensione dei sistemi lineari, sopra classi particolari di varietà. In questo lavoro stabilisco appunto una tale limitazione per i sistemi lineari (irriducibili e privi di gruppo-base assegnato) sopra le varietà M_{k+1} (a $k+1$ dimensioni) sulle quali esistono ∞^1 S_k, costituenti un fascio di genere p (v. formula (9)).

La formula che dà tale limitazione viene ulteriormente precisata sulle varietà Γ_{k+1}, che rappresentano, *senza eccezione*, le coppie di punti di un S_k e di una curva di genere p; inoltre su tali varietà viene anche determinato come si compongono tutti i sistemi lineari (v. n.$^{\text{i}}$ 10, 11, 12, 13).

Ne segue che su queste medesime varietà resta stabilito il significato della sovrabbondanza per un sistema lineare qualunque, privo di gruppo base, in perfetta analogia di quello che accade sopra una rigata algebrica contenente un fascio di curve direttrici, privo di punti fissi.

Nell'ultima parte del lavoro esprimo il minimo della dimensione di un sistema lineare, dato su di una varietà M_{k+1}, mediante i generi aritmetici virtuali ([2]) delle varietà del sistema e delle varietà dei sistemi caratteristici, giungendo così a quella forma del teorema RIEMANN-ROCH che il prof. SEVERI ha intuito in generale per le varietà a più dimensioni ([3]).

([1]) Si veda la Memoria del prof, SEVERI: *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXVIII. 1909; nella quale il teorema RIEMANN-ROCH è ottenuto per i sistemi aggiunti sulle varietà a tre dimensioni.

([2]) Per genere aritmetico virtuale di una varietà si intende, in questo lavoro, il numero definito al n.° 4 della Memoria citata ([1]) del prof. SEVERI.

([3]) SEVERI, Memoria citata ([1]), § 31.

Sistemi lineari di varietà linearmente seganti.

1. Indicheremo con M_{k+1} una varietà a $k+1$ dimensioni sulla quale esiste un fascio, di genere p, di spazi, S_k, a k dimensioni. Questi S_k si diranno gli spazi generatori della M_{k+1}. La quale si indicherà anche con M^n_{k+1}, quando occorra metterne in evidenza l'ordine n.

Sulla M^n_{k+1} si abbia un sistema lineare $|M_k|$, di varietà a k dimensioni, ciascuna delle quali seghi ogni spazio generatore della M^n_{k+1} in un S_{k-1}; diremo brevemente che tali varietà sono *linearmente seganti*. È noto [4] che se r e d sono la dimensione e il grado del sistema completo $|M_k|$, si ha la relazione:

$$r \geq d - (k+1)p + k \tag{1}$$

nella quale vale il segno di uguaglianza allorchè il sistema $|M_k|$ sega, su di una curva γ incontrante ogni S_k della M_{k+1} in $k+1$ punti indipendenti, una serie lineare non speciale. Ciò avviene certamente se l'ordine m delle varietà M_k, oppure il grado d del sistema $|M_k|$, sono sufficientemente elevati: basterà che m o d siano tali che il numero dei punti d'intersezione di una M_k con la γ superi $2\pi - 2$, essendo π il genere della γ stessa [5]. Quando nella (1) vale il segno $=$ diremo che il sistema $|M_k|$ è *regolare*.

2. Dalle ricerche del SEGRE risulta che per la validità della (1) si deve supporre che il sistema $|M_k|$ abbia dimensione non inferiore a $k+1$, che non abbia gruppo base, e che non sia composto. Ma è facile mostrare che la (1)

---

[4] V. SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*. Annali di Matematica, serie II, tomo XXII, n.° 91.

[5] Ricordiamo che l'ordine della intersezione di due varietà V_1 e V_2 esistenti sulla M^n_{k+1} è dato dalla formula:

$$\nu_2 m_1 + \nu_1 m_2 - \nu_1 \nu_2 n$$

ove m_1 ed m_2 sono gli ordini rispettivi delle varietà V_1 e V_2 e ν_1, ν_2 sono, rispettivamente. gli ordini delle varietà in cui V_1 e V_2 incontrano un S_k generico della M^n_{k+1}. (V. BEPPO LEVI, *Dell'intersezione di due varietà contenute in una varietà semplicemente infinita di spazi*. Atti della R. Accad. di Torino, vol. XXXIV, 1899). Se ne deduce che è:

$$d = (k+1)m - kn$$

e che, se μ è l'ordine della curva γ, il numero i delle intersezioni di questa con una M^m_k è:

$$i = (k+1)m + \mu - (k+1)n = d + \mu - n\,;$$

perciò si può supporre $i > 2\pi - 2$ quando m e d siano abbastanza grandi.

vale per qualunque sistema irriducibile, privo di gruppo base assegnato. Infatti, sia $|M_k|$ un tale sistema. Si consideri sulla M^n_{k+1} un altro sistema $|M'_k|$ di varietà linearmente seganti, il cui grado d' e la cui dimensione r' verifichino la relazione:

$$r' \geq d' - (k+1)p + k. \tag{2}$$

Sia M_k una varietà non spezzata di $|M_k|$, e sia $|M_{k-1}|$ il sistema segato su di essa da $|M'_k|$: diremo r_1 e d_1 la dimensione e il grado di $|M_{k-1}|$. Se m ed m' sono rispettivamente gli ordini delle varietà M_k ed M'_k, abbiamo (v. nota (5)):

$$d = (k+1)m - kn; \quad d' = (k+1)m' - kn;$$

inoltre l'ordine, m_1, delle varietà del sistema $|M_{k-1}|$ è:

$$m_1 = m + m' - n.$$

Risulta quindi:

$$d_1 = km_1 - (k-1)m = \frac{d + kd'}{k+1}.$$

Perciò, se si suppone d' sufficentemente elevato, anche d_1 sarà abbastanza grande perchè il sistema $|M_{k-1}|$ sia regolare (6). Ne segue che sarà:

$$r_1 \leq d_1 - kp + k - 1$$

e quindi $|M'_k|$ conterrà parzialmente $|M_k|$ quando sia:

$$d' - (k+1)p + k > d_1 - kp + k - 1$$

ossia:

$$d' > d + (k+1)(p-1).$$

Supponiamo che d' sia tale da soddisfare anche questa relazione (vedi nota (6)). Le varietà del sistema residuo $|M'_k - M_k|$ sono gruppi di $m' - m = \dfrac{d'-d}{k+1}$ S_k generatori. Ora, l'imporre alle varietà di $|M'_k|$ il passaggio per un S_k generatore equivale ad imporre al massimo $k+1$ condizioni, quindi sarà:

$$r \geq r' - (k+1)\frac{d'-d}{k+1}.$$

Da questa, in virtù della (2), segue appunto:

$$r \geq d - (k+1)p + k \qquad \text{c. v. d.}$$

(6) Se ciò non avvenisse, potremmo sempre metterci in questa condizione sommando $|M_k'|$ con un numero convenientemente grande di S_k generatori.

Sistemi lineari di varietà pluriseganti.

3. Passiamo a considerare, sulla M^n_{k+1}, varietà di dimensione k seganti ogni S_k generatore in uua ipersuperficie di ordine ν (> 1). Diremo che queste varietà sono ν-*seganti*; e se m è l'ordine di una di esse, la indicheremo col simbolo $M^{m,\nu}_k$.

Si consideri il sistema lineare segato sulla M^n_{k+1} da tutte le forme F^ν (di ordine ν) dello spazio S_r a cui appartiene la M^n_{k+1}; sia $|M^{\nu n,\nu}_k|$ questo sistema. Esso è di grado:

$$D = \nu^{k+1} \cdot n \tag{3}$$

e sega ogni S_k della M^n_{k+1} nel sistema lineare *completo* delle forme di ordine ν dell'S_k stesso, il quale ha la dimensione:

$$t = \binom{\nu + k}{k} - 1 \tag{4}$$

ed il grado ν^k.

Detta R la dimensione del sistema $|M^{\nu n,\nu}_k|$, riferiamo proiettivamente le sue varietà agli iperpiani di un S_R. Avremo in S_R una varietà V^D_{k+1}, di ordine D e dimensione $k+1$, immagine della M^n_{k+1}, la quale V^D_{k+1} sarà il luogo di ∞^1 varietà razionali $L^{\nu k}_k$, di dimensione k e di ordine ν^k, corrispondenti agli S_k della M^n_{k+1}. Ciascuna delle varietà $L^{\nu k}_k$ appartiene ad un S_t: abbiamo dunque, in S_R, una varietà a $t+1$ dimensioni, M^N_{t+1}, riempita dagli ∞^1 S_t cui appartengono le ∞^1 varietà $L^{\nu k}_k$.

4. Valutiamo l'ordine N della M^N_{t+1}. Esso è il numero dei punti comuni alla M^N_{t+1} e ad un S_{R-t-1} generico di S_R, ed è anche il numero che indica quanti sono gli iperpiani di S_R appartenenti alla stella che ha per sostegno un S_{R-t-1} e contenenti un S_t della M^N_{t+1}. Questo numero N è quindi uguale al numero delle forme di ordine ν di S_r appartenenti ad un sistema lineare ∞^t (nessuna forma del quale passi per la M^n_{k+1}) e contenenti un S_k generatore della M^n_{k+1}.

Per determinare questo numero, si prenda a considerare, in S_r, un S_{r-k-2} che non incontri la M^n_{k+1}, e un S_{k+1} non incidente con l'S_{r-k-2}. In questo spazio S_{k+1} si fissino l punti: $A_1, A_2, \ldots A_l$, essendo:

$$l = \binom{\nu - 1 + k + 1}{k+1} = \binom{\nu + k}{k+1}.$$

I punti A_1, A_2,... A_l siano scelti in modo che per essi non passi una forma di ordine $\nu - 1$ dell'S_{k+1}; allora essi impongono condizioni indipendenti alle forme di ordine ν dell'S_{k+1} che debbano contenerli (7).

Ne segue che la dimensione del sistema, $|\Phi|$, delle forme di ordine ν di S_{k+1}, passanti pei punti A_1, A_2,... A_l è:

$$\binom{\nu+k+1}{k+1} - 1 - l = \binom{\nu+k+1}{k+1} - \binom{\nu+k}{k+1} - 1 = \binom{\nu+k}{k} - 1 = t.$$

I coni che dallo spazio S_{r-k-2} sopra considerato proiettano le forme del sistema $|\Phi|$, costituiscono dunque un sistema lineare ∞^t di forme di ordine ν dell'S_r, nessuna delle quali contiene la M_{k+1}^n. Se uno di questi coni contiene uno spazio generatore, S_k^*, della M_{k+1}^n, esso contiene anche l'S_{r-1} che proietta lo spazio S_k^* dall'S_{r-k-2}, e sega quindi lo spazio S_{k+1} in una forma del sistema $|\Phi|$ spezzata in una forma di ordine $\nu - 1$ ed in un S_k, proiezione dello S_k^*. Tale S_k dovrà passare per uno almeno dei punti A_1, A_2,... A_l, perchè non esistono forme di ordine $\nu - 1$ passanti per gli l punti. Se esso passa per A_i, lo spazio S_k^* della M_{k+1}^n incontra allora lo spazio S_{r-k-1} che dall'S_{r-k-2} proietta A_i. Inversamente, si consideri lo spazio S_{r-k-1} che si ottiene proiettando dall'S_{r-k-2} uno qualunque, A_i, degli l punti A_1, A_2,... A_l, e sia S_k^* uno degli n spazi generatori della M_{k+1}^n incontranti questo S_{r-k-1}. Tale S_k^* appartiene al cono di ordine ν che dall'S_{r-k-2} proietta la forma del sistema $|\Phi|$ spezzata nell'S_k (passante per A_i) proiezione dello S_k^*, e nella forma di ordine $\nu - 1$ dell'S_{k+1} che passa per gli $l - 1$ rimanenti dei punti A_1, A_2,... A_l. Il numero cercato N è perciò uguale al numero dei punti in cui gli l S_{r-k-1}, proiettanti dall'S_{r-k-2} i punti A_1, A_2,... A_l, incontrano complessivamente la M_{k+1}^n. Si ha dunque:

$$N = l \cdot n = \binom{\nu+k}{k+1} n. \tag{5}$$

5. Sia $M_k^{m,\nu}$ una varietà ν-segante, di ordine m, della M_{k+1}^n. Alla $M_k^{m,\nu}$ corrisponde, sulla V_{k+1}^D di S_R, una varietà $V_k^{m_1}$, di ordine:

$$m_1 = \nu^k \cdot m \tag{6}$$

avente comune con ogni S_t della M_{t+1}^N una sezione della corrispondente $L_k^{\nu k}$, fatta con un S_{t-1} dell'S_t. Il luogo di questi ∞^1 S_{t-1} è una varietà M_t^μ, linear-

(7) Infatti la forma di ordine $\nu - 1$ passante per $l - 1$ qualunque di quei punti, insieme con un S_k che non passi per il punto rimanente, costituisce una forma di ordine ν la quale passa per $l - 1$ qualunque dei punti stessi e non per l'ulteriore.

mente segante della M_{t+1}^N, e segante la V_{k+1}^D nella $V_k^{m_1}$. Per determinare l'ordine μ di questa M_t^μ si applichi la formula di BEPPO LEVI (citata nella nota ([5])), per trovare l'ordine della intersezione delle varietà M_t^μ e V_{k+1}^D, contenute nella M_{t+1}^N e segantisi nella $V_k^{m_1}$. Si ha:

$$\nu^k \cdot \mu + D - \nu^k N = m_1$$

da cui, ricordando le (3), (5), (6), si ricava:

$$\mu = m + \binom{\nu + k}{k + 1} n - \nu n. \tag{7}$$

6. Se alla varietà $M_k^{m,\nu}$ facciamo percorrere, sulla M_{k+1}^n, un sistema lineare completo $|M_k^{m,\nu}|$, anche la varietà $V_k^{m_1}$, corrispondente sulla V_{k+1}^D alla $M_k^{m,\nu}$, percorre un sistema lineare completo $|V_k^{m_1}|$. Le varietà M_t^μ, linearmente seganti della M_{t+1}^N, le quali segano sulla V_{k+1}^D le varietà del sistema $|V_k^{m_1}|$, percorrono allora sulla M_{t+1}^N un sistema algebrico. *Vogliamo provare che questo sistema algebrico è anch'esso lineare e completo.*

Cominciamo col dimostrare che: *ogni sistema lineare completo* $|M_t|$, *di varietà linearmente seganti della* M_{t+1}^N, *irriducibile e privo di gruppo base assegnato, sega sulla* V_{k+1}^D *un sistema lineare* $|V_k|$, *che è pure completo.*

Supporremo dapprima che il sistema $|M_t|$ abbia una dimensione $r_1 \geq t+1$, che non sia composto, e che non abbia punti fissi nemmeno accidentali. Sotto quest'ultima ipotesi il sistema $|M_t|$ sega su *ogni* S_t della M_{t+1}^N il sistema *completo* degli S_{t-1}. Se riferiamo proiettivamente le varietà di $|M_t|$ agli iperpiani di un S_{r_1}, la M_{t+1}^N viene trasformata in una M'_{t+1} di S_{r_1}, e contemporaneamente la V_{k+1}^D viene trasformata in una V'_{k+1} segante ogni S_t della M'_{t+1} in una varietà razionale normale L'_k (corrispondente di una $L_k^{\nu k}$), *appartenente all'* S_t. Se il sistema $|V_k|$ non è completo, la varietà V'_{k+1} non è normale e può considerarsi come proiezione di una V''_{k+1} appartenente ad uno spazio S_{r_2} ($r_2 > r_1$), fatta da un $S_{r_2-r_1-1}$ non incontrante la V''_{k+1}. Ciascuna L'_k risulta allora la proiezione di una L''_k, della V''_{k+1}, appartenente pur essa ad un S_t (perchè le L'_k sono normali); questi S_t riempiono una varietà M''_{t+1}, appartenente ad S_{r_2}, della quale la M'_{t+1} è la proiezione in S_{r_1} fatta dallo spazio $S_{r_2-r_1-1}$. Ora, questo $S_{r_2-r_1-1}$ non può incontrare la M''_{t+1}; perchè se esso fosse incidente con un S_t della M''_{t+1}, questo S_t verrebbe proiettato, in S_{r_1}, in uno spazio di dimensione inferiore a t, al quale apparterrebbe la relativa L'_k, mentre, per le ipotesi fatte, ciascuna L'_k (nessuna esclusa) deve appartenere ad un S_t. Ne segue che la varietà M'_{t+1} non è normale se non lo è la V'_{k+1}, e perciò il sistema $|M_t|$ non è completo se non lo è $|V_k|$. Se dunque $|M_t|$ è completo, anche $|V_k|$ lo è.

Se poi il sistema $|M_t|$ ha dimensione minore di $t+1$, o è composto, o ha un gruppo base accidentale, esso può considerarsi come residuo di un certo numero h di S_t generatori, rispetto ad un sistema $|\overline{M}_t|$ che non abbia più tali particolarità (confr. n° 2). Il sistema completo $|\overline{M}_t|$ sega allora sulla V_{k+1}^D un sistema lineare completo $|\overline{V}_k|$. Se $|M_t|$ è completo, il sistema $|V_k|$ è il residuo, rispetto a $|\overline{V}_k|$, delle h $L_k^{\nu k}$ appartenenti agli h S_t sunnominati, e quindi è anch'esso completo.

Ciò premesso, torniamo a considerare il sistema lineare completo $|V_k^{m_1}|$, di cui al principio del presente numero. Sia M_t^μ una varietà linearmente segante della M_{t+1}^N, segante una $V_k^{m_1}$ sulla V_{k+1}^D, e sia $|M_t^\mu|$ il sistema lineare completo della M_{t+1}^N, al quale essa appartiene. Questo sistema $|M_t^\mu|$ sega la V_{k+1}^D nel sistema lineare completo contenente totalmente la $V_k^{m_1}$ considerata, cioè nel sistema $|V_k^{m_1}|$, e perciò coincide col sistema algebrico delle varietà M_t^μ seganti le varietà del sistema $|V_k^{m_1}|$. Così resta dimostrata la proposizione enunciata al principio del presente numero.

7. La dimensione r del sistema $|V_k^{m_1}|$ (corrispondente al sistema completo $|M_k^{m,\nu}|$ della M_{k+1}^n) uguaglia dunque la dimensione del sistema completo $|M_t^\mu|$ della M_{t+1}^N, il quale sega il sistema $|V_k^{m_1}|$ sulla V_{k+1}^D. Essendo $|M_t^\mu|$ un sistema di varietà linearmente seganti, se d è il suo grado abbiamo (v. n°. 1):

$$r \geq d - (t+1)p + t. \tag{8}$$

Ma è:

$$d = (t+1)\mu - tN.$$

Ossia, per le (4), (5), (7):

$$d = (t+1)(m + N - \nu n) - tN = (t+1)m - (t+1)\nu n + N =$$
$$= \binom{\nu+k}{k} m - \left\{ \binom{\nu+k}{k}\nu - \binom{\nu+k}{k+1} \right\} n = \binom{\nu+k}{k} m - k\binom{\nu+k}{k+1} n.$$

Sostituendo nella (8) si ha dunque la relazione:

$$r \geq \binom{\nu+k}{k} m - k\binom{\nu+k}{k+1} n - \binom{\nu+k}{k}(p-1) - 1 \tag{9}$$

la quale lega i caratteri di un qualunque sistema lineare completo $|M_k^{m,\nu}|$, della varietà M_{k+1}^n purchè sia irriducibile e privo di gruppo base assegnato.

Poichè nella (8) vale il segno di uguaglianza quando il grado d sia sufficentemente elevato, così anche nella (9) varrà il segno di uguaglianza per valori abbastanza alti dell'ordine m delle varietà $M_k^{m,\nu}$. Si dirà in tal caso che il sistema $|M_k^{m,\nu}|$ è regolare; altrimenti diremo che è sovrabbondante.

8. Terminiamo questo capitolo con alcune brevi considerazioni relative al modo di costruire i sistemi lineari (di varietà di ordine sufficentemente elevato) su di una M_{k+1}.

Su di una M_{k+1} consideriamo due varietà ν-seganti: $M_k^{m_1\nu}$ ed $M_k^{m_2\nu}$. Poichè queste segano varietà equivalenti sugli S_k generatori (cioè sulle varietà di un fascio), ne segue che esse o sono equivalenti o differiscono per S_k generatori [8]. In ogni caso potremo porre:

$$|M_k^{m_1\nu} - M_k^{m_2\nu}| = |G_h - G_l| \tag{10}$$

G_h e G_l essendo gruppi, rispettivamente, di h e di l S_k generatori; i quali apparterranno totalmente alla medesima serie lineare allora e solo allora che $M_k^{m_1\nu}$ e $M_k^{m_2\nu}$ siano equivalenti. Evidentemente sarà sempre:

$$h - l = m_1 - m_2 .$$

La (10) può anche scriversi:

$$|M_k^{m_1\nu}| = |M_k^{m_2\nu} + G_h - G_l| . \tag{10'}$$

Se ora supponiamo che sia:

$$h \geq l + p$$

cioè:

$$m_1 \geq m_2 + p$$

la serie lineare determinata dal gruppo G_h contiene parzialmente G_l. Indicando con $|G_{h-l}| = |G_{m_1-m_2}|$ la serie residua, la (10') diviene:

$$|M_k^{m_1\nu}| = |M_k^{m_2\nu} + G_{m_1-m_2}| . \tag{11}$$

Questa relazione (11) seguita sempre a valere (se è $m_1 \geq m_2 + p$) quando si tenga fisso il sistema $|M_k^{m_2\nu}|$ e si faccia variare $|M_k^{m_1\nu}|$ entro il sistema continuo, $\{M_k^{m_1\nu}\}$, di tutte le varietà ν-seganti dell'ordine m_1; sicchè tutti i sistemi lineari di tale sistema continuo possono ottenersi da un unico sistema

(8) V. SEVERI, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*. Atti del R. Istituto Veneto di Sc. lett. ed arti, 1906, tomo LXV, parte seconda.

lineare, $|M_k^{m_2\nu}|$, mediante addizione di serie lineari (dell'ordine $m_1 - m_2$) di S_k generatori.

Viceversa, è evidente che la somma di $|M_k^{m_2\nu}|$ con una serie lineare di S_k generatori dell'ordine $m_1 - m_2$, dà appunto un sistema lineare di varietà ν-seganti dell'ordine m_1. Il sistema continuo $\{M_k^{m_1\nu}\}$, quando m_1 sia abbastanza elevato, contiene dunque ∞^p sistemi lineari; quante, cioè, sono le serie lineari di ordine $m_1 - m_2$ contenute nell'ente ∞^1 formato dagli S_k generatori.

Ne segue (v. (9)) che la dimensione R del sistema continuo $\{M_k^{m_1\nu}\}$ soddisfa la relazione seguente, quando m_1 è abbastanza elevato:

$$R \geq \binom{\nu+k}{k} m_1 - k\binom{\nu+k}{k+1} n - \binom{\nu+k}{k}(p-1) - 1 + p$$

ossia:

$$R \geq \binom{\nu+k}{k} m_1 - k\binom{\nu+k}{k+1} n - \left[\binom{\nu+k}{k} - 1\right](p-1) \text{ [9]}. \tag{12}$$

Osservazione I. Il procedimento esposto in questo numero con particolare riferimento alle M_{k+1} rientra nel concetto generale che si segue per la costruzione del sistema continuo completo contenente una data V_{k-1} sopra una V_k, quando si conosca già un sistema continuo completo sulla V_k.

Osservazione II. Siano $M_k^{m_1\nu_1}$ ed $M_k^{m_2\nu_2}$ due varietà a k dimensioni della M_{k+1}^n. Dette $M_k^{\nu_1 n, \nu_1}$, $M_k^{\nu_2 n, \nu_2}$ le intersezioni della M_{k+1}^n con due forme, rispettivamente degli ordini ν_1 e ν_2, avremo:

$$M_k^{m_1\nu_1} \equiv M_k^{\nu_1 n, \nu_1} + G_{h_1} - G_{l_1} \qquad (h_1 - l_1 = m_1 - \nu_1 n)$$
$$M_k^{m_2\nu_2} \equiv M_k^{\nu_2 n, \nu_2} + G_{h_2} - G_{l_2} \qquad (h_2 - l_2 = m_2 - \nu_2 n)$$

ove G_{h_1}, G_{l_1}, G_{h_2}, G_{l_2} indicano rispettivamente gruppi di h_1, l_1, h_2, l_2 spazi generatori. Ne segue che l'ordine i della varietà d'intersezione delle due varietà $M_k^{m_1\nu_1}$ ed $M_k^{m_2\nu_2}$ è dato da:

$$\begin{aligned} i &= \nu_1\nu_2 n + \nu_2(h_1 - l_1) + \nu_1(h_2 - l_2) = \\ &= \nu_1\nu_2 n + \nu_2(m_1 - \nu_1 n) + \nu_1(m_2 - \nu_2 n) = \\ &= \nu_2 m_1 + \nu_1 m_2 - \nu_1\nu_2 n. \end{aligned}$$

Si ha così la formula di B. LEVI, citata nella nota [5].

---

[9] Nel caso particolare di $\nu = 1$, la (12) diviene:

$$R \geq (k+1)m_1 - kn - kp + k.$$

Questa formula trovasi nella Memoria del sig. PAGLIANO: *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni costituite da una semplice infinità di piani.* Annali di Matematica, tomo V, serie III.

I sistemi lineari sulla varietà rappresentante, senza eccezioni, le coppie di punti di un S_k e di una curva di genere p.

9. Sopra una varietà Γ_{k+1}, la quale rappresenti, *senza eccezione*, le coppie di punti di uno spazio $\overline{S}_k$ e di una curva C di genere p, si può facilmente stabilire come si compongono i sistemi lineari, e si può precisare la formula (9). Questo appunto vogliamo mostrare nel presente capitolo.

È ovvio che una tale varietà Γ_{k+1} contiene un fascio, di genere p, di varietà razionali, N_k, a k dimensioni (ciascuna N_k essendo immagine della totalità delle coppie di punti che hanno un punto fisso sulla curva C); e contiene inoltre un sistema ∞^k di curve, Γ_1, birazionalmente identiche alla C (ciascuna Γ_1 essendo immagine della totalità delle coppie di punti che hanno un punto fisso sull'$\overline{S}_k$), il qual sistema è di indice 1 e privo di punti base. Perciò la Γ_{k+1} è birazionalmente identica ad ogni M_{k+1} contenente un fascio di S_k riferibile birazionalmente (come ente ∞^1) alla curva C.

Le varietà Γ_k, della Γ_{k+1}, le quali rappresentano le coppie di punti della curva C e di un S_{k-1} dello $\overline{S}_k$, formano un sistema ∞^k, di grado 0, composto con le curve Γ_1.

Un modello proiettivo della Γ_{k+1}, in cui le varietà N_k sono degli S_k, si può facilmente costruire nel modo seguente ([10]). Sulla curva C si consideri una serie lineare completa non speciale $g_{n_1}^{n_1-p}$; poi in uno spazio di dimensione $\rho=(k+1)(n_1-p)+k$ si prendano $k+1$ S_{n_1-p} indipendenti e si riferiscano proiettivamente gli iperpiani di ciascuno di questi S_{n_1-p} ai gruppi della $g_{n_1}^{n_1-p}$. Si avranno $k+1$ curve di ordine n_1: $C_1, C_2, \ldots C_{k+1}$, contenute nei $k+1$ S_{n_1-p}, immagini della curva C, le quali risulteranno fra loro in corrispondenza proiettiva. Gli S_k congiungenti i punti delle curve $C_1, C_2, \ldots C_{k+1}$ corrispondenti ad un medesimo punto della curva C generano una varietà a $k+1$ dimensioni, che indicheremo con Γ_{k+1}^n, *il cui ordine è* $n=(k+1)n_1$. Infatti, la proposizione è ben nota per $k=1$, e facilmente la si prova per un valore arbitrario di k, supponendola vera pel valore $k-1$. Basta osservare che un $S_{\rho-1}$ passante per le curve $C_1, C_2 \ldots C_k$ sega la Γ_{k+1} nella varietà Γ_k luogo degli S_{k-1} che uniscono i punti corrspondenti delle curve $C_1, C_2, \ldots C_k$ (la quale Γ_k ha, per il supposto, l'ordine kn_1) e negli n_1 S_k generatori passanti per gli n_1 punti d'incontro dell'$S_{\rho-1}$ con la ulteriore curva C_{k+1}.

([10]) Nel caso $k=1$ la costruzione è indicata dal SEGRE: *Ricerche generali sulle curve e le superficie rigate algebriche*. Math. Annalen, Bd. 32, parte I, n.° 6.

Gli n_1 S_k generatori della Γ^n_{k+1} uscenti dagli n_1 punti di una sezione iperpiana di una delle curve C_1, C_2,... C_{k+1} (e quindi incontranti ciascuna di queste curve nei punti di una sezione iperpiana) appartengono ad uno spazio di dimensione $(k+1)(n_1 - p) - 1$ [11]. Gli iperpiani di S_ρ passanti per questo spazio sono ∞^k e segano la Γ^n_{k+1} in varietà linearmente seganti, Γ_k, dell'ordine kn_1, formanti un sistema lineare completo $|\Gamma_k|$ [12], la cui dimensione è k, ed il cui grado è 0. Il sistema $|\Gamma_k|$ non ha punti fissi accidentali, appunto perchè il suo grado è 0. Esso è composto con un sistema di ∞^k curve di ordine n_1 (curve che chiameremo Γ_1), tale che per ogni punto della Γ_{k+1} passa una ed una sola di tali curve. Infatti, per un punto A preso ad arbitrio sulla Γ_{k+1} passano ∞^{k-1} varietà di $|\Gamma_k|$, le quali passano tutte per la curva, Γ_1, intersezione di k indipendenti di esse, curva che ha appunto l'ordine n_1. Al sistema delle curve Γ_1 appartengono anche le curve C_1, C_2,... C_{k+1}.

Evidentemente, ad ogni punto A della Γ_{k+1} corrisponde un punto della curva C ed un punto di un S_k generatore fissato a piacere (il punto in cui questo S_k è incontrato dalla Γ_1 uscente da A), e viceversa; e questa corrispondenza non ha eccezioni.

La intersezione di $i+1$ Γ_k indipendenti ($i < k$) è una Γ_{k-i} dell'ordine $(k-i)n_1$, analoga alla Γ_{k+1}, rappresentante, senza eccezione, le coppie di punti di un S_{k-i-1} e della curva C.

10. Osserviamo che la Γ_{k+1} costruita nel numero precedente non ha punti singolari, se si ha cura di scegliere la serie $g^{n_1-p}_{n_1}$ in modo che le curve C_1, C_2,... C_{k+1} non abbiano punti multipli [13]. Per un punto multiplo della Γ_{k+1} dovrebbero infatti passare più S_k generatori: ma due S_k generatori qualunque di questa varietà non possono incontrarsi, altrimenti i $2(k+1)$ punti in cui essi si appoggiano alle curve C_1, C_2,... C_{k+1} non sarebbero indipendenti, e allora non sarebbero indipendenti nemmeno i $k+1$ S_{n_1-p} cui appartengono le curve medesime.

Da questa osservazione, e dal fatto che ogni M_{k+1} è birazionalmente

---

[11] Tale è la dimensione dello spazio cui appartengono $k+1$ S_{n_1-p-1} se essi sono indipendenti; e nel nostro caso lo sono, altrimenti non sarebbero indipendenti i $k+1$ S_{n_1-p} contenenti le curve C_1, C_2,... C_{k+1}.

[12] Il sistema $|\Gamma_k|$ è completo, perchè lo è il sistema di tutte le sezioni iperpiane della Γ_{k+1}, la quale è normale in S_ρ essendo normali le curve C_1, C_2,... C_{k+1}, e contenute in spazi indipendenti.

[13] Basta a tal uopo prendere $n_1 > 2p$. Vedi SEGRE, Memoria citata [10], n.° 13, parte I.

identica ad una Γ_{k+1}, (v. n.° 9), segue che ogni M_{k+1} può essere trasformata birazionalmente in una varietà analoga priva di punti singolari.

11. Si vuol dimostrare che: *sulla* Γ_{k+1}, *ogni sistema lineare di varietà* ν-*seganti* $|M_k^{m,\nu}|$, *privo di gruppo base assegnato, è la somma del sistema* $|\nu\Gamma_k|$ *con una serie lineare di* S_k *generatori.*

La relazione (10) del n.° 8, applicata ad un sistema qualsiasi $|M_k^{m,\nu}|$ di varietà ν-seganti della Γ_{k+1}, ed al sistema $|\nu\Gamma_k|$, può scriversi:

$$|M_k^{m,\nu} + G_l| = |\nu\Gamma_k + G_h|.$$

Ora su di una Γ_1, il sistema $|M_k^{m,\nu} + G_l|$ segna una serie lineare di cui fan parte i gruppi che si ottengono sommando i punti in cui la Γ_1 è incontrata da una $M_k^{m,\nu}$ con i gruppi segnati dalla serie $|G_l|$; e siccome, d'altra parte, il sistema $|\nu\Gamma_k + G_h|$ sega la Γ_1 nella serie segnata da $|G_h|$(perchè le Γ_k che non contengono la Γ_1 non hanno con essa punti comuni), si conclude che la serie $|G_l|$ è contenuta parzialmente nella $|G_h|$. Indicando con $|G_{h-l}|$ la serie residua, abbiamo dunque:

$$|M_k^{m,\nu}| = |\nu\Gamma_k + G_{h-l}|$$

che è quanto volevasi dimostrare ([14]).

12. *Il sistema lineare* $|M_{k-1}|$, *segato su di una* Γ_k *da un sistema lineare completo* $|M_k|$ *di varietà* ν-*seganti, è anche esso completo.*

Infatti, consideriamo una qualunque varietà $\overline{M}_{k-1}$ del sistema completo $|\overline{M}_{k-1}|$, cui appartiene $|M_{k-1}|$, e fissiamo sulla Γ_{k+1} una Γ_1 non giacente sulla Γ_k considerata. Da un punto A della Γ_1 si proietti la varietà, di dimensione $k-2$ e di ordine ν, intersezione della $\overline{M}_{k-1}$ con l'S_k della Γ_{k+1} uscente da A; e lo stesso si faccia per ogni altro punto della Γ_1. Si ottengono ∞^1 coni di ordine ν e dimensione $k-1$, i quali riempiono una varietà a k dimensioni, che diremo M'_k. Mentre la $\overline{M}_{k-1}$ percorre il sistema $|\overline{M}_{k-1}|$, la varietà M'_k percorre anch'essa un sistema lineare $|M'_k|$. Sia (v. n.° 11) g_h^ρ la serie lineare di S_k generatori, la quale sommata col sistema $|\nu\Gamma_k|$ dà il sistema $|M_k|$; si abbia cioè:

$$|M_k| = |\nu\Gamma_k + g_h^\rho|.$$

([14]) Su di una Γ_{k+1} la base è dunque formata da una Γ_k e da un S_k generatore.

Allora anche fra le varietà di $|M_{k-1}|$ ve ne sono di quelle spezzate in ν Γ_{k-1} ed in h S_{k-1} costituenti nell'ente ∞^1 un gruppo della g_h^ρ. Le varietà di $|M'_k|$, ottenute nel modo sopra indicato dalle M_{k-1} così spezzate risultano formate da ν Γ_k e da h S_k generatori della Γ_{k+1} costituenti un gruppo della g_h^ρ. Ne segue che il sistema $|M'_k|$ è contenuto totalmente in $|M_k|$; e siccome $|M'_k|$ sega sulla Γ_k il sistema completo $|\overline{M}_{k-1}|$, questo coincide dunque con $|M_{k-1}|$, c. v. d.

13. Dato sulla Γ_{k+1} il sistema lineare completo:

$$|M_k| = |\nu\Gamma_k + g_h^\rho|$$

indichiamo con $r_{k,\nu}$ la sua dimensione. *Si vuol dimostrare che, supposta completa la serie* g_h^ρ, *si ha:*

$$r_{k,\nu} = \binom{\nu + k}{k}(\rho + 1) - 1. \tag{13}$$

La proposizione è vera per $k = 1$ ([15]); basterà perciò dimostrare che è vera per un valore di k, supponendola vera pel valore $k - 1$. Il sistema $|M_k|$ sega, su di una Γ_k, il sistema completo (n.° 12) $|M_{k-1}| = |\nu\Gamma_{k-1} + g_h^\rho|$, la cui dimensione è, per il supposto:

$$r_{k-1,\nu} = \binom{\nu + k - 1}{k - 1}(\rho + 1) - 1;$$

ed il sistema residuo:

$$|M_k - \Gamma_k| = |(\nu - 1)\Gamma_k + g_h^\rho|$$

ha per dimensione $r_{k,\nu-1}$. Si ha dunque la relazione:

$$r_{k,\nu} = r_{k,\nu-1} + \binom{\nu + k - 1}{k - 1}(\rho + 1).$$

Si scriva ν volte questa relazione, diminuendo, ogni volta, di una unità il valore di ν, e si sommi, tenendo conto che:

$$r_{k,1} = \rho + \binom{k}{k - 1}(\rho + 1)$$

(perchè, se il sistema $|M_k|$ è di varietà linearmente seganti, la differenza $|M_k - \Gamma_k|$ è la serie g_h^ρ degli S_k generatori).

([15]) Si veda la mia Nota: *Intorno alla determinazione dei sistemi lineari di curve sopra le superficie rigate algebriche.* Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Sc. e lett., serie II, vol. XXXVI, 1903.

Si ottiene:

$$r_{k,\nu}=\sum_{i=0}^{\nu}\binom{i+k-1}{k-1}(\rho+1)-1=\binom{\nu+k}{k}(\rho+1)-1 \qquad \text{c. v. d.}$$

14. Sulla Γ_{k+1}^{n} consideriamo un sistema lineare completo $|M_k^{m,\nu}|$ di varietà ν-seganti, di ordine m, privo di gruppo base assegnato. Sia:

$$|M_k^{m,\nu}|=|\nu\Gamma_k+g_h^{\rho}|.$$

Se l'ordine della Γ_{k+1}^{n} è:

$$n=(k+1)n_1,$$

e quindi l'ordine di una Γ_k è kn_1, abbiamo:

$$h=m-\nu k n_1=m-\frac{\nu k n}{k+1}.$$

Detto i l'indice di specialità della serie g_h^{ρ} si ha dunque:

$$\rho=h-p+i=m-\frac{\nu k n}{k+1}-p+i.$$

Sostituendo questa espressione di ρ nella formula (13), che dà, per la dimensione r del sistema $|M_k^{m,\nu}|$:

$$r=\binom{\nu+k}{k}(\rho+1)-1$$

si ottiene:

$$(14) \qquad r=\binom{\nu+k}{k}m-k\binom{\nu+k}{k+1}n-\binom{\nu+k}{k}(p-1)\quad 1+\binom{\nu+k}{k}i.$$

Confrontando questa formula con la (9) si vede che, sulla Γ_{k+1}, la differenza fra il primo ed il secondo membro della (9) stessa (la sovrabbondanza del sistema) è uguale a $\binom{\nu+k}{k}i$. Se, dunque, la serie lineare di S_k generatori, la quale entra a comporre il sistema $|M_k^{m,\nu}|$ è non speciale ($i=0$), il sistema è regolare.

Genere aritmetico di una M_{k+1}.

15. Ci proponiamo, ora, di trasformare il secondo membro delle relazioni (9) e (14), introducendovi i generi aritmetici virtuali delle varietà del sistema $|M_k^{m,\nu}|$, al quale le dette relazioni si riferiscono, ed i generi aritmetici virtuali delle varietà dei relativi sistemi caratteristici.

Incominceremo col calcolare il genere aritmetico virtuale di una M_{k+1}.

Premettiamo l'osservazione che il genere aritmetico virtuale di una M_{k+1} uguaglia quello della Γ_{k+1} priva di singolarità, alla quale la M_{k+1} è riferibile birazionalmente (v. n.° 10) ([16]). Ne segue che il genere aritmetico virtuale ed il genere aritmetico effettivo di una M_{k+1} coincidono; perciò d'ora in poi, a proposito delle M_{k+1}, parleremo di *genere aritmetico*, senz'altro.

16. Vogliamo dimostrare che: *il genere aritmetico,* p_{k+1}, *di una* M_{k+1}, *i cui* S_k *siano gli elementi di un ente* ∞^1 *di genere* p, *è dato dalla formula:*

$$p_{k+1} = (-1)^k \cdot p. \tag{15}$$

La proposizione è vera per $k = 1$, essendo $-p$, come è ben noto, il genere aritmetico di una superficie rigata la quale, come ente semplicemente infinito, sia di genere p. Inoltre, la proposizione stessa è vera anche per $k = 2$,

---

([16]) L'uguaglianza dei generi aritmetici di due varietà in corrispondenza birazionale è stata dimostrata da F. SEVERI (Memoria citata ([1])) per le varietà a tre dimensioni, e da G. ALBANESE per le varietà a più di tre dimensioni. V. Rendiconti Lincei, Marzo 1924, pag. 211 (per le varietà a quattro dimensioni); e Annali delle Università Toscane, 1924 (per le varietà ad un numero qualunque di dimensioni).

Nel caso di due M_{k+1} riferibili birazionalmente, l'uguaglianza dei loro generi aritmetici virtuali può anche essere dimostrata semplicemente nel modo che segue, senza bisogno di ricorrere ai teoremi generali dell'ALBANESE.

Si osservi, in primo luogo, che *tutte le* M_{k+1} *linearmente seganti di una medesima* M_{k+2} *hanno lo stesso genere aritmetico virtuale.* Infatti, se M_{k+1} ed M'_{k+1} sono due varietà linearmente seganti di una medesima M_{k+2}, i sistemi lineari $|M_{k+1}|$ ed $|M'_{k+1}|$, determinati sulla M_{k+2} dalle due date varietà, possono ottenersi l'uno dall'altro mediante somma e sottrazione di S_{k+1} generatori (v. n.° 8). Allora, dalla formula che dà il genere aritmetico virtuale di una varietà spezzata (v. SEVERI, Memoria citata ([1]), n.° 5) segue subito che M_{k+1} ed M'_{k+1} hanno lo stesso genere aritmetico virtuale.

Ciò visto, mostriamo che *una qualsiasi* M_{k+1} *ha lo stesso genere aritmetico virtuale di una* Γ_{k+1} *ad essa riferibile birazionalmente.* Sulla M_{k+1} si consideri una M_k linearmente segante, e sulla Γ_{k+1} si considerino k curve Γ_1, che chiameremo $C_1, C_2, \ldots C_k$, incontranti ogni S_k della Γ_{k+1} in k punti indipendenti. Stabilita una corrispondenza birazionale fra gli S_k generatori della M_{k+1} e quelli della Γ_{k+1}, resta stabilita una corrispondenza birazionale anche fra i punti della curva C_1 e gli S_{k-1} generatori della M_k, essendo corrispondenti un punto della C_1 ed un S_{k-1} della M_k quando si trovano in S_k corrispondenti. Proiettando da ogni punto della C_1 l'S_{k-1} corrispondente della M_k, si ottengono ∞^1 S_k che formano una varietà M'_{k+1} (avente comune con la Γ_{k+1} la curva C_1): gli spazi generatori di questa M'_{k+1} corrispondono biunivocamente a quelli della data M_{k+1} in modo che un S_k di quest'ultima e l'S_k corrispondente della M'_{k+1} hanno in comune un S_{k-1} della M_k, ed appartengono quindi ad un S_{k+1}. Il luogo di questi S_{k+1} è una M_{k+2} alla quale appartengono la M_{k+1} e la M'_{k+1}: queste hanno dunque lo stesso genere aritmetico virtuale, per l'osservazione precome si rileva (facendovi $p_a = 0$) dalla formula:

$$P_a = (p-1)p_a + p \ \text{(17)}$$

la quale dà il genere aritmetico della varietà a tre dimensioni che rappresenta le coppie di punti di una superficie di genere aritmetico p_a e di una curva di genere p.

Basterà dunque dimostrare il teorema per le M_{k+1}, supponendolo vero per le M_{h+1} $(h < k)$. E per provare che esso vale per una qualunque M_{k+1}, basterà provarlo per le Γ_{k+1} prive di singolarità. Consideriamo dunque una Γ^n_{k+1} priva di singolarità (v. n.i 9 e 10), con $n = (k+1)n_1$, appartenente ad un $S_r [r = (k+1)(n_1 - p) + k]$, la quale sia di genere p, se si considerano come elementi i suoi S_k generatori. Su di essa le forme di ordine l dell'S_r segano un sistema lineare $|M_k^{ln,l}|$, che, non avendo la Γ^n_{k+1} punti singolari, sarà completo se l è sufficentemente elevato (18). Inoltre, il sistema $|M_k^{nl,l}|$ sarà anche regolare per l abbastanza alto. Infatti, se $|M^n_k|$ è il sistema segato sulla Γ^n_{k+1} dagli iperpiani dell'S_r, avremo (n.° 11):

$$|M^n_k| = |\Gamma_k + g^\rho_h|$$

e quindi sarà:

$$|M_k^{ln,l}| = |lM^n_k| = |l\Gamma_k + g^{\rho'}_{hl}|$$

ove $g^{\rho'}_{hl}$ indica la serie lineare multipla secondo il numero l della g^ρ_h. Per l abbastanza grande (basterà che sia $hl > 2p - 2$), la $g^{\rho'}_{hl}$ sarà non speciale; e

---

messa. Si consideri, ora, sulla M'_{k+1}, una M'_k linearmente segante che passi per la curva C_1, e da ciascun punto della C_2 si proietti l'S_{k-1} corrispondente della M'_k: si ottiene una nuova varietà M''_{k+1} la quale si trova, rispetto alla M'_{k+1}, nella stessa relazione che la M'_{k+1} rispetto alla M_{k+1}, e perciò la M''_{k+1} ha lo stesso genere aritmetico virtuale della M'_{k+1}. Inoltre, la M''_{k+1} ha in comune con la Γ_{k+1} la Γ_2 passante per C_1 e C_2.

Si prosegua ora nello stesso modo; si prenda, cioè, sulla M''_{k+1} una M''_k linearmente segante che passi per C_1 e per C_2, e si proietti da ogni punto di C_3 l'S_{k-1} corrispondente della M''_k: si otterra una M'''_{k+1} avente lo stesso genere aritmetico virtuale detla M''_{k+1}, e avente comune con la Γ_{k+1} la Γ_3 passante per le curve C_1, C_2, C_3. Così seguitando, si viene a costruire una successione di varietà: M_{k+1}, M'_{k+1}, M''_{k+1},... $M^{(k)}_{k+1}$, ciascuna delle quali ha il genere aritmetico virtuale uguale a quello della precedente. L'ultima di esse, la $M^{(k)}_{k+1}$, ha comune con la Γ_{k+1} la Γ_k determinata dalle curve C_1, C_2,... C_k. Allora anche la $M^{(k)}_{k+1}$ e la Γ_{k+1} appartengono ad una medesima M_{k+2} (perchè due loro S_k corrispondenti si segano in un S_{k-1} generatore della Γ_k, e perciò stanno in un S_{k+1}): ne segue che la Γ_{k+1} ha lo stesso genere aritmetico virtuale della $M^{(k)}_{k+1}$, e quindi anche della data M_{k+1}.

(17) V. Severi, Memoria citata (1), n.° 28.

(18) Severi, Memoria citata (1), n.° 2.

allora il sistema $|M_k^{ln,l}|$ risulterà regolare (v. n.° 14). Ciò posto, la dimensione del sistema $|M_k^{ln,l}|$ è espressa da (v. (14)):

$$\binom{l+k}{k}ln - k\binom{l+k}{k+1}n - \binom{l+k}{k}(p-1) - 1 = \binom{l+k}{k+1}n - \binom{l+k}{k}(p-1) - 1$$

e perciò la postulazione $\gamma(l)$ della Γ_{k+1} per le forme di ordine l che debbano contenerla è:

$$\gamma(l) = \binom{l+k}{k+1}n - \binom{l+k}{k}(p-1). \tag{16}$$

D'altra parte si ha anche, per l abbastanza grande [19]:

$$\begin{aligned}\gamma(l) = (p_0+1)\binom{l+k+1}{k+1} - (p_0+p_1)\binom{l+k}{k} + \dots +\\ + (-1)^k(p_{k-1}+p_k)\binom{l+1}{1} + (-1)^{k+1}\cdot(p_k+p_{k+1})\end{aligned} \tag{17}$$

ove $p_0(=n-1)$, p_1, p_2,..., p_{k-1}, p_k sono i generi aritmetici delle sezioni della Γ_{k+1} con spazi delle rispettive dimensioni $r-k-1$; $r-k$; $r-k+1$;...; $r-2$; $r-1$. Per l'ipotesi fatta (che, cioè, la proposizione da dimostrare sia vera per le varietà luogo di spazi, di dimensione inferiore a $k+1$) si ha:

$$p_1 = -p_2 = p_3 = \dots = (-1)^{k-1}p_k = p$$

e quindi la (17) diviene:

$$\begin{aligned}\gamma(l) &= \binom{l+k+1}{k+1}n - (n-1+p)\binom{l+k}{k} + (-1)^{k+1}[(-1)^{k-1}p + p_{k+1}] =\\ &= \binom{l+k}{k+1}n - \binom{l+k}{k}(p-1) + (-1)^{k+1}[(-1)^{k-1}p + p_{k+1}].\end{aligned} \tag{18}$$

Dal confronto delle formule (16) e (18) risulta appunto:

$$p_{k+1} = (-1)^k p \qquad \text{c. v. d.}$$

Caratteri aritmetici di un sistema lineare dato sulla M_{k+1}^n.

17. Dato, su di una M_{k+1}^n, un sistema lineare $|M_k^{m,\nu}|$, di varietà ν-seganti dell'ordine m, vogliamo ora calcolarne i *caratteri aritmetici*, e cioè: il genere aritmetico virtuale di una $M_k^{m,\nu}$; il genere aritmetico virtuale della varietà intersezione di due $M_k^{m,\nu}$; quello della intersezione di tre $M_k^{m,\nu}$; ecc.

---

[19] SEVERI, Memoria citata [1], n.° 4.

Incominciamo col calcolare il genere aritmetico virtuale di una $M_k^{m,\nu}$, che indicheremo col simbolo $p_k(m, \nu)$. Si vuol dimostrare che vale la formula:

$$(19) \qquad p_k(m, \nu) = \binom{\nu-1}{k} m - k \binom{\nu}{k+1} n + \binom{\nu-1}{k}(p - 1) + (-1)^{k-1} \cdot p.$$

Osserviamo, in primo luogo, che sommando il sistema $|M_k^{m,\nu}|$ con h S_k generatori si ottiene un sistema, $|M_k^{m+h,\nu}|$, di varietà ν-seganti dell'ordine $m+h$; e che il genere aritmetico virtuale di una $M_k^{m+h,\nu}$ risulta espresso da:

$$(20) \qquad p_k(m+h, \nu) = p_k(m, \nu) + h\binom{\nu-1}{k}$$

come si ottiene dalla formula che dà il genere aritmetico virtuale di una varietà spezzata, tenendo conto che il genere aritmetico virtuale di una forma dell'ordine ν di un S_k è $\binom{\nu-1}{k}$.

Fissata una varietà linearmente segante della M_{k+1}^n, per es. una sezione iperpiana M_k^n, si sommi il sistema $|M_k^{m,\nu}|$ con una serie lineare g_h^ρ di S_k generatori, tale che il sistema ottenuto $|M_k^{m+h,\nu}|$ contenga parzialmente la M_k^n, ciò che è sempre possibile ([20]).

Si consideri una $M_k^{m+h,\nu}$ spezzata nella M_k^n ed in una varietà residua $M_k^{m+h-n,\nu-1}$, e si applichi ad essa la formula che dà il genere aritmetico virtuale di una varietà composta, ricordando che il genere aritmetico virtuale della M_k^n è $(-1)^{k-1}\cdot p$ (v. n.° 16), ed osservando che l'intersezione della M_k^n con la $M_k^{m+h-n,\nu-1}$ è una $M_{k-1}^{m+h-n,\nu-1}$. Si ha:

$$p_k(m+h, \nu) = (-1)^{k-1}p + p_k(m+h-n, \nu-1) + p_{k-1}(m+h-n, \nu-1)$$

ossia, tenendo conto della (20):

$$(21) \quad p_k(m, \nu) = (-1)^{k-1}p + p_k(m+h-n, \nu-1) + p_{k-1}(m+h-n, \nu-1) - h\binom{\nu-1}{k}.$$

Da questa relazione è facile ricavare che se la (19) vale per un certo valore di k (e per ogni ν), essa vale anche pel valore successivo di k e per ν qualunque. Allora, siccome la (19) stessa è vera per $k=1$ (qualunque sia ν), perchè in tal caso essa riducesi alla nota formula che dà il genere di

([20]) Infatti dal n.° 8 risulta che sommando il sistema $|M_k^{m,\nu}|$ con una certa serie lineare di S_k generatori, si può far sì che il sistema somma contenga parzialmente una varietà ν-segante formata dalla M_k^n e da una arbitraria varietà $(\nu-1)$-segante.

una curva senza punti multipli tracciata su di una superficie rigata [21], si conclude che la (19) è vera in generale.

18. Indicheremo con M_{k-i} la varietà intersezione di $i+1$ $M_k^{m,\nu}$ del sistema $|M_k^{m,\nu}|$, e indicheremo con $p_{k-i}(m,\nu)$ il suo genere aritmetico virtuale (che talvolta verrà anche indicato semplicemente con p_{k-i}). Diremo, poi, $|M_{k-i}^{(t)}|$ il sistema lineare segato su di una M_{k-i+1} dal sistema $|tM_k^{m,\nu}|$ (multiplo secondo il numero t del sistema $|M_k^{m,\nu}|$), e indicheremo con $p_{k-i}(m,\nu,t)$ (o anche, semplicemente, con $p_{k-i}(t)$) il genere aritmetico virtuale delle varietà $M_{k-i}^{(t)}$. Per $i=0$, s'intenderà che $p_k(m,\nu,t)=p_k(t)$ indichi il genere aritmetico virtuale delle varietà del sistema $|tM_k^{m,\nu}|$. Inoltre, sarà manifestamente: $p_{k-i}(m,\nu,1)=p_{k-i}(m,\nu)$, cioè: $p_{k-i}(1)=p_{k-i}$.

Applicando la formula che dà il genere aritmetico virtuale di una varietà composta, alla relazione:

$$|M_{k-i}^{(t+1)}|=|M_{k-i}^{(t)}+M_{k-i}|$$

si ha:

$$p_{k-i}(t+1)=p_{k-i}(t)+p_{k-i}+p_{k-(i+1)}(t).$$

Da questa si trae facilmente, per induzione:

$$p_{k-i}(t)=\{p_k(t)-1\}^{(i)}-\{p_k(0)-1\}^{(i)} \tag{22}$$

nella quale il simbolo $\{p_k(t)-1\}^{(i)}$ indica il polinomio che si ottiene dallo sviluppo binomiale della potenza $\{p_k(t)-1\}^i$, sostituendo $p_k(t+l)$ al posto di $\{p_k(t)\}^l$. Inoltre, nel caso in cui $t=0$, si deve porre, dopo fatto lo sviluppo, $p_k(0)=0$.

Dalla (22) si ha, per $t=1$:

$$p_{k-i}(1)=p_{k-i}=\{p_k(1)-1\}^{(i)}-\{p_k(0)-1\}^{(i)}=\{p_k(0)-1\}^{(i+1)}.$$

Cioè:

$$p_{k-i}=\sum_{l=0}^{i}(-1)^l\binom{i+1}{l}p_k(i+1-l). \tag{23}$$

In questa formula, si ricordi, al posto di $p_k(i+1-l)$ si deve porre il valore fornito dalla (19), nella quale si ponga $(i+1-l)m$ al posto di m ed $(i+1-l)\nu$ in luogo di ν.

---

[21] V. SEGRE, Memoria citata [10], parte II, n.° 1. (Math. Annalen, Bd. 34). La formula del SEGRE per le rigate potrebbe anch'essa ricavarsi dalla (21) procedendo per induzione da $\nu-1$ a ν, osservando che, in tal caso, la varietà $M_{k-1}^{m+h-n,\nu-1}$ si riduce ad $m+h-n$ punti e che, perciò, $p_{k-1}(m+h-n,\nu-1)=m+h-n-1$.

19. Sempre riferendoci al sistema $|M_k^{m,\nu}|$ sulla M_{k+1}^n, e conservando le notazioni del numero precedente, consideriamo l'espressione:

$$\delta = p_0 - p_1 + p_2 - \dots + (-1)^k p_k + (-1)^{k+1} p_{k+1} + k + 1 =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} p_{k-i} + (-1)^{k+1} p_{k+1} + k + 1,$$

in cui p_{k+1} indica (come al n.° 16) il genere aritmetico virtuale della M_{k+1}^n, ossia è $p_{k+1} = (-1)^k \cdot p$.

Si ha, dalla formula (23):

$$\delta = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-1} \sum_{l=0}^{i} (-1)^l \binom{i+1}{l} p_k(i+1-l) - p + k + 1.$$

E da questa, con facili trasformazioni si ottiene:

$$\delta = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k+2}{l} p_k(k+1 \quad l) - p + k + 1.$$

Ponendo in quest'ultima le espressioni di $p_k(k+1-l)$, fornite dalla (19), viene:

$$\delta = am - kbn + c(p-1) + dp - p + k + 1$$

ove:

$$a = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k+2}{l} \binom{(k+1-l)\nu - 1}{k} (k+1-l)$$
$$b = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k+2}{l} \binom{(k+1-l)\nu}{k+1}$$
$$c = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k+2}{l} \binom{(k+1-l)\nu - 1}{k}$$
$$d = (-1)^{k-1} \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k+2}{l}.$$

Ora, si trova senza difficoltà che è identicamente:

$$a = \binom{\nu+k}{k}; \quad b = \binom{\nu+k}{k+1}; \quad c = k + 2 - \binom{\nu+k}{k}; \quad d = -(k+1).$$

Perciò, sostituendo nell'espressione di δ, abbiamo:

$$\delta = \binom{\nu+k}{k} m - k\binom{\nu+k}{k+1} n + \left\{ k + 2 - \binom{\nu+k}{k} \right\} (p-1) - (k+1)p - p + k + 1$$

ossia :

$$\delta = \binom{\nu + k}{k} m - k \binom{\nu + k}{k + 1} n - \binom{\nu + k}{k} (p - 1) - 1.$$

L'espressione δ è dunque uguale al secondo membro della (9), la quale perciò può scriversi :

$$(9') \qquad r \geq p_0 - p_1 + p_2 - \dots + (-1)^k p_k + (-1)^{k+1} p_{k+1} + k + 1$$

ed assume quindi, per le M_{k+1}, la forma del teorema RIEMANN-ROCH prevista dal prof. SEVERI.

Facendo l'analoga sostituzione nella formula (14), si ha che:

Su di una Γ_{k+1}, *la dimensione* r *di un qualsiasi sistema lineare completo di varietà* ν*-seganti, privo di gruppo base, è data da :*

$$(14') \qquad r = p_0 - p_1 + p_2 - \dots + (-1)^k p_k + (-1)^{k+1} p_{k+1} + k + 1 + \binom{\nu + k}{k} i$$

ove i *è l'indice di specialità della serie lineare di* S_k *generatori, la quale sommata col sistema* $|\nu\Gamma_k|$ *dà il sistema considerato ; e* p_0, p_1, p_2,... *sono i generi aritmetiei virtuali dei sistemi caratteristici.*

Sur une classe de fonctions croissantes

Memoria di N. Podtiaguine (a Praga)

M. E. Bortolotti dans sa Note, insérée dans les « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » [1] a donné une définition nouvelle de l'ordre de la croissance des fonctions. Cette définition est assez féconde et conduit à des résultats intéressants. Je me propose ici d'indiquer ceux qui sont les plus remarquables.

I. **L'ordre de la croissance.** — Soient $y = y(x)$ et $y_1 = y_1(x)$ deux fonctions d'une variable réelle x. Supposons que ces fonctions, étant finies pour toutes valeurs finies de x, tendent vers $+\infty$ avec x et admettent des dérivées *positives* y' et y_1'. Nous dirons, avec M. Bortolotti, que *l'ordre de grandeur de la fonction* y *par rapport à la fonction* y_1 *est égal à* k, si la fonction

$$\nu = \frac{y'}{y} : \frac{y_1'}{y_1}$$

tend vers une limite k finie et différente de zéro quand x tend vers l'infini.

Nous dirons de même que cet ordre est égal à $\omega^n k$, si toutes les fonctions

$$\nu, \quad \nu_1 = \frac{\nu'}{\nu} : \frac{y_1'}{y_1}, \quad \nu_2 = \frac{\nu_1'}{\nu_1} : \frac{y_1'}{y_1}, \quad \nu_3 = \frac{\nu_2'}{\nu_2} : \frac{y_1'}{y_1}, \ldots, \quad \nu_{n-1} = \frac{\nu'_{n-2}}{\nu_{n-2}} : \frac{y_1'}{y_1}$$

tendent vers $+\infty$ avec x, mais la fonction

$$\nu_n = \frac{\nu'_{n-1}}{\nu_{n-1}} : \frac{y_1'}{y_1}$$

tend vers une limite k finie et différente de zéro.

Enfin, nous dirons que l'ordre de grandeur de y par rapport à y_1 est égal à $k^{-1}\omega^{-n}$, si l'ordre de grandeur de y_1 par rapport à y est égal à $\omega^n k$.

---

[1] Vol. XVII, serie 5ª, 1° sem., pp. 244-245.

Par exemple, l'ordre de grandeur de la fonction

$$y = x^m e^{ax^k}$$

par rapport à la fonction

$$y_1 = bx^p,$$

où a, b, m, k et p sont des nombres positifs quelconques, est égal à $\omega \frac{k}{p}$, puisque on a dans ce cas

$$\nu = \frac{1}{p}(m + akx^k), \quad \nu_1 = \frac{k}{p\left(\frac{m}{akx^k} + 1\right)}$$

et, par conséquent,

$$\lim_{x=\infty} \nu = +\infty, \quad \lim_{x=\infty} \nu_1 = \frac{k}{p}.$$

Supposons maintenant que l'ordre de grandeur de la fonction y par rapport à la fonction y_1 soit égal à $\omega^n k$. Les fonctions

(1) $$y, \quad \nu, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \ldots, \quad \nu_{n-1}, \quad \nu_n$$

définies plus haut possédent quelques propriétés assez remarquables.

Propriété 1. *Le rapport de chacune des fonctions* (1) *à la puissance quelconque de la fonction précédente tend vers zéro quand* x *tend vers l'infini.*

On a, tout d'abord,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu_n}{\nu_{n-1}^{\varepsilon}} = 0,$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, car

$$\lim_{x=\infty} \nu_n = k, \quad \lim_{x=\infty} \nu_{n-1} = +\infty.$$

On trouve, par la règle connue

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log \nu_{n-1}}{\varepsilon \log \nu_{n-2}} = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{x=\infty} \frac{\dfrac{\nu'_{n-1}}{\nu_{n-1}} : \dfrac{y_1'}{y_1}}{\dfrac{\nu'_{n-2}}{\nu_{n-2}} : \dfrac{y_1'}{y_1}} = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{x=\infty} \frac{\nu_n}{\nu_{n-1}} = 0.$$

Il existe, par conséquent, une valeur de x, à partir de laquelle on a

$$\frac{\log \nu_{n-1}}{\varepsilon \log \nu_{n-2}} < \varepsilon_1,$$

quelque petit que soit le nombre positif ε_1. Nous aurons donc, à partir de cette valeur de x,

$$\frac{\nu_{n-1}}{\nu_{n-2}^{\varepsilon}} < (\nu_{n-2}^{\varepsilon})^{\varepsilon_1 - 1}.$$

Il en résulte que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu_{n-1}}{\nu_{n-2}^{\varepsilon}} = 0,$$

car nous pouvons toujours prendre ε_1 tellement petit que la différence $\varepsilon_1 - 1$ soit négative.

On démontrera de même que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu_{n-2}}{\nu_{n-3}^{\varepsilon}} = 0, \quad \lim_{x=\infty} \frac{\nu_{n-3}}{\nu_{n-4}^{\varepsilon}} = 0, \ldots, \quad \lim_{x=\infty} \frac{\nu}{y^{\varepsilon}} = 0.$$

PROPRIÉTÉ 2. *Chacun des rapports*

$$\frac{\nu\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}{y}, \quad \frac{\nu_1\nu_2\nu_3\ldots\nu_n}{\nu}, \quad \frac{\nu_2\nu_3\nu_4\ldots\nu_n}{\nu_1}, \ldots, \quad \frac{\nu_n}{\nu_{n-1}} \tag{2}$$

tend vers zéro quand x *tend vers* $+\infty$.

On a, d'après la propriété 1

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log(\nu\nu_1\nu_2\ldots\nu_{n-1})}{\log y} = \lim_{x=\infty} \frac{\dfrac{\nu'}{\nu} + \dfrac{\nu_1'}{\nu_1} + \dfrac{\nu_2'}{\nu_2} + \ldots + \dfrac{\nu'_{n-1}}{\nu_{n-1}}}{\dfrac{y'}{y}} =$$

$$= \lim_{x=\infty} \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_n}{\nu} = 0.$$

Il en résulte que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu\nu_1\nu_2\ldots\nu_{n-1}}{y} = 0$$

et, par conséquent,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}{y} = 0,$$

car la fonction ν_n tend vers une limite finie k.

La démonstration est la même pour tous les autres rapports (2).

PROPRIÉTÉ 3. *Le rapport de chacune des fonctions*

$$y, \quad \nu, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \ldots, \quad \nu_{n-2}$$

au logarithme de la fonction précédente croît indéfiniment avec x.

En effet,

$$\lim_{x=\infty}\frac{\nu}{\log y}=\lim_{x=\infty}\frac{\nu'}{\frac{y'}{y}}=\lim_{x=\infty}\frac{\nu':\frac{y_1'}{y_1}}{\nu}=\lim_{x=\infty}\nu_1=+\infty.$$

Puis

$$\lim_{x=\infty}\frac{\nu_1}{\log\nu}=\lim_{x=\infty}\frac{\nu_1'}{\frac{\nu'}{\nu}}=\lim_{x=\infty}\nu_2=+\infty$$

et ainsi de suite.

Propriété 4. *Chacun des rapports*

$$\frac{\nu^a}{\log y},\quad\frac{\nu_1^{\,a}}{\log\nu},\quad\frac{\nu_2^{\,a}}{\log\nu_1},\ldots,\quad\frac{\nu_n^{\,a}}{\log\nu_{n-1}},$$

où a *est un nombre quelconque moindre que un, tend vers zéro quand* x *tend vers l'infini.*

Pour le premier de ces rapports on a, d'après la propriété 1,

$$\lim_{x=\infty}\frac{\nu^a}{\log y}=\lim_{x=a}\frac{a\nu^{a-1}\nu':\frac{y_1'}{y_1}}{\frac{y'}{y}:\frac{y_1'}{y_1}}=a\lim_{x=\infty}\frac{\nu_1}{\nu^{1-a}}=0.$$

La démonstration est la même pour tous les rapports suivants, sauf le dernier. Mais pour ce rapport la proposition est évidente.

Propriété 5. *Le rapport*

$$\frac{\nu_{n-1}}{\log\nu_{n-2}}$$

tend vers k *quand* x *tend vers l'infini.*

En effet,

$$\lim_{x=\infty}\frac{\nu_{n-1}}{\log\nu_{n-2}}=\lim_{x=\infty}\frac{\nu'_{n-1}:\frac{y_1'}{y_1}}{\frac{\nu'_{n-2}}{\nu_{n-2}}:\frac{y_1'}{y_1}}=\lim_{x=\infty}\nu_n=k.$$

Propriété 6. *Chacune des expressions*

$$\frac{\nu}{\nu_1\log y},\quad\frac{\nu_1}{\nu_2\log\nu},\quad\frac{\nu_2}{\nu_3\log\nu},\ldots,\quad\frac{\nu_{n-1}}{\nu_n\log\nu_{n-2}}$$

tend vers l'unité quand x *tend vers* $+\infty$.

Pour la première d'entre elles, on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu}{\nu_1 \log y} = \lim_{x=\infty} \frac{\frac{\nu}{\nu_1}}{\log y} = \lim_{x=\infty} \frac{\frac{\nu'}{\nu_1} - \frac{\nu\nu_1'}{\nu_1^2}}{\frac{y'}{y}} = \lim_{x=\infty} \left[\frac{\nu}{\nu_1} \cdot \frac{\frac{\nu'}{\nu} - \frac{\nu_1'}{\nu_1}}{\frac{y'}{y}} \right] =$$

$$= \lim_{x=\infty} \left[\frac{\nu}{\nu_1} \cdot \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu} \right] = \lim_{x=\infty} \left[1 - \frac{\nu_2}{\nu_1} \right] = 1.$$

La démonstration est analogue pour toutes les expressions suivantes, sauf la dernière. On a pour elle

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu_{n-1}}{\nu_n \log \nu_{n-2}} = \lim_{x=\infty} \frac{1}{\nu_n} \cdot \lim_{x=\infty} \frac{\nu_{n-1}}{\log \nu_{n-2}} = \frac{1}{k} \cdot k = 1,$$

car la propriété 5 nous donne

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu_{n-1}}{\log \nu_{n-2}} = k.$$

PROPRIÉTÉ 7. *Chacune des expressions*

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{\log \nu}{\log_2 y}, & \frac{\log \nu_1}{\log_2 \nu}, & \frac{\log \nu_2}{\log_2 \nu_1}, \ldots, & \frac{\log \nu_{n-2}}{\log_2 \nu_{n-3}}, & \frac{\log \nu_{n-1}}{\log_2 \nu_{n-2}}, \\
 & \frac{\log \nu_1}{\log_3 y}, & \frac{\log \nu_2}{\log_3 \nu}, \ldots, & \frac{\log \nu_{n-2}}{\log_3 \nu_{n-4}}, & \frac{\log \nu_{n-1}}{\log_3 \nu_{n-3}}, \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \frac{\log \nu_{n-2}}{\log_n y}, & \frac{\log \nu_{n-1}}{\log_n \nu}, \\
 & & & & \frac{\log \nu_{n-1}}{\log_{n+1} y}
\end{array}$$

tend vers l'unité quand x *tend vers* $+\infty$.

Pour la première des ces expressions nous avons, en tenant compte de la propriété 6,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log \nu}{\log_2 y} = \lim_{x=\infty} \frac{\frac{\nu'}{\nu}}{\frac{y'}{y \log y}} = \lim_{x=\infty} \frac{\nu_1 \log y}{\nu} = 1.$$

Pour $p = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, nous avons de même

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log \nu_p}{\log_2 \nu_{p-1}} = \lim_{x=\infty} \frac{\nu_{p+1} \log \nu_{p-1}}{\nu_p} = 1.$$

Considérons maintenant un des rapports

$$\frac{\log \nu_p}{\log_3 \nu_{p-2}}$$

où $p = 2, 3, 4, ..., n-1$. Nous aurons

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log \nu_p}{\log_3 \nu_{p-2}} = \lim_{x=\infty} \frac{\dfrac{\nu'_p}{\nu_p}}{\dfrac{\nu'_{p-2}}{\nu_{p-2} \log \nu_{p-2} \log_2 \nu_{p-2}}} = \lim_{x=\infty} \frac{\nu_{p+1} \log \nu_{p-2} \log_2 \nu_{p-2}}{\nu_{p-1}} =$$

$$= \lim_{x=\infty} \frac{\nu_{p+1} \log \nu_{p-1}}{\nu_p} \cdot \lim_{x=\infty} \frac{\nu_p \log \nu_{p-2}}{\nu_{p-1}} \cdot \lim_{x=\infty} \frac{\log_2 \nu_{p-2}}{\log \nu_{p-1}} = 1,$$

car, à cause de la propriété 6, on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu_{p+1} \log \nu_{p-1}}{\nu_p} = 1, \quad \lim_{x=\infty} \frac{\nu_p \log \nu_{p-2}}{\nu_{p-1}} = 1$$

et, comme nous venons de voir, on a aussi

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log_2 \nu_{p-2}}{\log \nu_{p-1}} = 1.$$

Le reste se démontre d'une manière analogue.

PROPRIÉTÉ 8. *Chacune des expressions*

$$\frac{\nu_1 \log y}{\nu}, \quad \frac{\nu_2 \log y \log_2 y}{\nu}, \quad \frac{\nu_3 \log y \log_2 y \log_3 y}{\nu}, ..., \quad \frac{\nu_n \log y \log_2 y .... \log_n y}{\nu}$$

tend vers l'unité quand x *tend vers l'infini.*

En effet, on a pour $p = 2, 3, 4, ..., n$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu_p \log y \log_2 y .... \log_p y}{\nu} = \lim_{x=\infty} \frac{\nu_p \log \nu_{p-2}}{\nu_{p-1}} \cdot \lim \frac{\nu_{p-1} \log \nu_{p-3}}{\nu_{p-2}} .... \lim_{x=\infty} \frac{\nu_2 \log \nu}{\nu_1} \cdot$$

$$\cdot \lim_{x=\infty} \frac{\nu_1 \log y}{\nu} \cdot \lim_{x=\infty} \frac{\log_2 y}{\log \nu} \cdot \lim_{x=\infty} \frac{\log_3 y}{\log \nu_1} .... \lim_{x=\infty} \frac{\log_p y}{\log \nu_{p-2}} = 1.$$

PROPRIÉTÉ 9. *L'expression*

$$\frac{\nu}{\log y \log_2 y .... \log_n y}$$

tend vers k *quand* x *tend vers* $+\infty$.

En effet, on a d'après la propriété précédente

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu}{\log y \log_2 y .... \log_n y} = \lim_{x=\infty} \frac{\nu}{\nu_n \log y \log_2 y .... \log_n y} \cdot \lim_{x=\infty} \nu_n = k.$$

PROPRIÉTÉ 10. *Quelque soit le nombre entier positif* p *et quelque petit que soit le nombre positif* ε, *l'expression*

$$\frac{\nu}{\log y \log_2 y \ldots \log_{p-1} y (\log_p y)^{1+\varepsilon}} \tag{3}$$

tend vers zéro quand x *tend vers l' infini.*

Supposons d'abord que $p \leq n$. Dans ce cas l'expression (3) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\nu}{\nu_p \log y \log_2 y \ldots \log_p y} \cdot \frac{\nu_p}{(\log_p y)^{\varepsilon}}.$$

Or, d'après la propriété 8, on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu}{\nu_p \log y \log_2 y \ldots \log_p y} = 1.$$

Nous allons montrer, d'autre part, que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu_p}{(\log_p y)^{\varepsilon}} = 0. \tag{4}$$

C'est évident, si $p = n$. Pour $p < n$, on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log \nu_p}{\log (\log_p y)^{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{x=\infty} \frac{\log \nu_p}{\log_{p+1} y} = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{x=\infty} \frac{\log \nu_p}{\log_{p+2} y} \cdot \lim \frac{\log_{p+2} y}{\log_{p-1} y} = 0,$$

car la propriété 7 nous donne

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log_{p+2} y}{\log \nu_p} = 1.$$

Il en résulte l'égalité (4).

Dans le cas, où $p > n$, l'expression (3) peut se mettre sous la forme suivante:

$$\frac{\nu}{\nu_n \log y \log_2 y \ldots \log_n y} \cdot \frac{\nu_n}{\log_{n+1} y \log_{n+2} y \ldots (\log_p y)^{1+\varepsilon}}.$$

Nous avons vu que la première des ces fractions tend vers l'unité. La seconde tend évidemment vers zéro, puisque la fonction ν_n est finie.

PROPRIÉTÉ 11. *L'ordre de grandeur du logarithme de chacune des fonctions*

$$y, \nu, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}$$

par rapport à la fonction suivante est égal à l'unité.

En effet, l'ordre de grandeur de la fonction $\log \nu_{p-1}$ par rapport à la fonction ν_p ($p = 1, 2, 3, \ldots, n-1$) par définition est égal à la limite de l'expression

$$\frac{\frac{d}{dx}(\log \nu_{p-1})}{\log \nu_{p-1}} : \frac{\nu_p'}{\nu_p}.$$

Or, cette expression est égale à

$$\frac{\nu'_{p-1}}{\nu_{p-1}\log \nu_{p-1}} : \frac{\nu'_p}{\nu_p} = \frac{\nu_p}{\log \nu_{p-1}} : \nu_{p+1} = \frac{\nu_p}{\nu_{p+1}\log \nu_{p-1}}$$

et tend, par suite, vers l'unité (propriété 6).

PROPRIÉTÉ 12. *L'ordre de grandeur de* $\log_p y$ ($p = 2, 3, 4, \ldots, n$) *par rapport à la fonction* ν_{p-1} *est égal à l'unité.*

On a, en effet,

$$\lim_{x=\infty}\left[\frac{\frac{d}{dx}(\log_p y)}{\log_p y} : \frac{\nu'_{p-1}}{\nu_{p-1}}\right] = \lim_{x=\infty}\left[\frac{y'}{y\log y \log_2 y \ldots \log_p y} : \frac{\nu'_{p-1}}{\nu_{p-1}}\right] =$$

$$= \lim_{x=\infty}\frac{\nu}{\nu_p \log y \log_2 y \ldots \log_p y} = 1.$$

II. **Croissance régulière.** — Dans le cas, où $y_1(x) = x$, c'est-a-dire quand on compare la croissance de la fonction $y_{(x)}$ à celle de x, les fonctions $\nu, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ prennent la forme plus simple:

$$\nu = \frac{xy'}{y}, \quad \nu_1 = \frac{x\nu'}{\nu}, \quad \nu_2 = \frac{x\nu_1'}{\nu_1}, \ldots, \quad \nu_n = \frac{x\nu'_{n-1}}{\nu_{n-1}}.$$

Nous dirons que la croissance de la fonction y est *régulière,* si l'ordre de grandeur de y par rapport à x est égal à k, ou $\omega^n k$, ou encore $k^{-1}\omega^{-n}$. La fonction dont la croissance est régulière sera appelée par nous aussi *régulière.*

Toute fonction régulière dans le sens que nous venons de donner est régulière aussi dans le sens de M. É. BOREL (¹). En effet, supposons d'abord que l'ordre de grandeur de la fonction y soit égal à $\omega^n k$. Nous aurons dans ce cas

$$\lim_{x=\infty}\nu = +\infty, \quad \lim_{x=\infty}\nu_1 = +\infty, \quad \lim_{x=\infty}\nu_2 = +\infty, \ldots, \quad \lim_{x\ \infty}\nu_{n-1} = +\infty$$

$$\lim_{x=\infty}\nu_n = k.$$

(¹) *Leçons sur la théorie de la croissance.* Paris, 1910, pp. 36, 39-40; *Leçons sur les fonctions entières.* Paris, 1900, p. 107.

et, par suite,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log_{n+1} y(x)}{\log x} = \lim_{x=\infty} \frac{xy'}{y \log y \log_2 y \ldots \log_n y} = \lim_{x=\infty} \frac{\nu}{\log y \log_2 y \ldots \log_n y} = k,$$

à cause de la propriété 9. Il existe donc toujours une valeur de x, à partir de laquelle on a constamment

$$e_n(x^{k-\varepsilon}) < y < e_n(x^{k+\varepsilon}),$$

quelque petit que soit le nombre positif ε. Donc la fonction y est une fonction régulière au sens de M. BOREL.

Si l'ordre de grandeur de la fonction y est égal à $k\omega^{-n}$, on aura, à partir d'une valeur de x, les inégalités

$$(\log_n x)^{k-\varepsilon} < y < (\log_n x)^{k+\varepsilon}.$$

Nous allons maintenant démontrer quelques théorèmes concernant les fonctions régulières définies plus haut. Ces théorèmes caractérisent bien la régularité de leur croissance.

THÉORÈME 1. *Si la fonction* $y = y(x)$ *ne décroît jamais et si la fonction*

$$\nu(x) = \frac{xy'}{y}$$

est finie pour $x = +\infty$, *on a toujours*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y[x + y_1(x)]}{y(x)} = 1,$$

$y_1(x)$ *étant une fonction positive quelconque, vérifiant l'égalité*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1(x)}{x} = 0 \ (^1).$$

Remarquons que ce théorème n'exige point que la fonction y soit régulière : il faut seulement que la fonction $\nu(x)$ soit finie pour $x = \infty$.

Supposons donc que nous ayons pour toutes les valeurs de x l'inégalité

$$\nu(x) < k,$$

k étant un nombre fini. En posant

$$\varphi(x) = \frac{y[x + y_1(x)]}{y(x)},$$

---

(1) Ce théorème a été démontré par M. BORTOLOTTI pour le cas $y_1(x) = 1$. (« Annali di Matematica », tomo XXI, serie III, pag. 295).

nous pouvons écrire

$$\varphi(x) - 1 = \frac{y(x + y_1) - y(x)}{y(x)} = \frac{y_1}{x + \theta y_1} \cdot \frac{y(x + \theta y_1)}{y(x)} \cdot \nu(x + \theta y_1),$$

où $0 < \theta < 1$.

Mais la fonction $y(x)$ ne décroît jamais. Donc

$$\frac{y(x + \theta y_1)}{y(x)} \leq \varphi(x)$$

et l'égalité ci-dessus nous donne

$$\varphi(x) - 1 < \frac{k y_1}{x + \theta y_1} \varphi(x),$$

d'où

$$\varphi(x) < \frac{1}{1 - \dfrac{y_1 k}{x + \theta y_1}},$$

si la différence

$$1 - \frac{y_1 k}{x + \theta y_1}$$

est supérieure à zéro. Mais à cause de l'hypothèse faite sur la fonction $y_1(x)$, cette différence tend vers l'unité quand x tend vers l'infini. Nous avons donc, à partir d'une certaine valeur de x,

$$\varphi(x) < 1 + \varepsilon,$$

quelque petit que soit le nombre positif ε donné à l'avance. Il en résulte que

$$\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 1,$$

car on a toujours

$$\varphi(x) \geq 1.$$

Corollaire. *Toute fonction régulière* y(x), *dont l'ordre de grandeur est égal à un nombre* k *moindre que un, vérifie l'égalité*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y[x + y(x)]}{y(x)} = 1.$$

Cela résulte du fait que, si

$$\lim_{x=\infty} \frac{x y'(x)}{y(x)} = k,$$

on a aussi

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log y(x)}{\log x} = \lim_{x=\infty} \frac{xy'(x)}{y(x)} = k$$

et, par conséquent, à partir d'une certaine valeur de x, auront lieu les inégalités

$$x^{k-\varepsilon-1} < \frac{y(x)}{x} < x^{k+\varepsilon-1},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε donné à l'avance. Puisque $k < 1$, on aura donc

$$\lim_{x=\infty} \frac{x(y)}{x} = 0.$$

THÉORÈME 2. *Toute fonction régulière* y(x) *dont l'ordre de grandeur est égal à* ω^nk, n *étant un nombre entier et positif et* k *un nombre positif quelconque, vérifie l'égalité*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y\left\{x + \dfrac{y_1(x)}{\log y(x) \log_2 y(x) \ldots\ldots \log_n y(x)}\right\}}{y(x)} = 1,$$

$y_1(x)$ *étant une fonction positive quelconque, vérifiant la condition*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1(x)}{x} = 0.$$

Supposons d'abord que $n = 1$. En posant

$$\nu(x) = \frac{xy'(x)}{y(x)}, \quad \varphi(x) = \frac{y\left[x + \dfrac{y_1(x)}{\log y(x)}\right]}{y(x)},$$

on trouve comme tout-à-l'heure

$$\varphi(x) - 1 < \frac{y_1(x)}{x + \theta \dfrac{y_1(x)}{\log y(x)}} \cdot \frac{\nu\left[x + \theta \dfrac{y_1(x)}{\log y(x)}\right]}{\log y(x)} \varphi(x) \qquad [0 < \theta < 1]$$

ou

$$(5) \qquad \varphi(x)\left\{1 - \frac{y_1(x)}{x + \theta \dfrac{y_1(x)}{\log y(x)}} \cdot \frac{\nu\left[x + \theta \dfrac{y_1(x)}{\log y(x)}\right]}{\log y(x)}\right\} < 1.$$

Or,

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1(x)}{x + \theta \dfrac{y_1(x)}{\log y(x)}} = 0.$$

D'autre part, nous pouvons écrire

$$\frac{\nu\left[x + \theta \dfrac{y_1(x)}{\log y(x)}\right]}{\log y(x)} = \frac{\nu\left[x + \theta \dfrac{y_1(x)}{\log y(x)}\right]}{\nu(x)} \cdot \frac{\nu(x)}{\log y(x)}.$$

L'ordre de grandeur de la fonction $y(x)$ étant égal à ωk, on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu(x)}{\log y(x)} = k.$$

En outre, le théorème 1 nous donne

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu\left[x + \theta \dfrac{y_1(x)}{\log y(x)}\right]}{\nu(x)} = 1,$$

car l'ordre de grandeur de la fonction régulière $\nu(x)$ est égal au nombre fini k et on a, d'autre part,

$$\lim_{x=\infty} \left[\left(\theta \frac{y_1(x)}{\log y(x)}\right) : x\right] = \theta \lim_{x=\infty} \frac{y_1(x)}{x} \lim_{x=\infty} \frac{1}{\log y(x)} = 0.$$

On a donc

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu\left[x + \theta \dfrac{y_1(x)}{\log y(x)}\right]}{\log y(x)} = k$$

et, par conséquent,

$$\lim_{x=\infty} \left\{ \frac{y_1(x)}{x + \theta \dfrac{y_1(x)}{\log y(x)}} \cdot \frac{\nu\left[x + \theta \dfrac{y_1(x)}{\log y(x)}\right]}{\log y(x)} \right\} = 0.$$

L'inégalité (5) nous donne alors, à partir d'une certaine valeur de x,

$$\varphi(x) < \frac{1}{1 - \dfrac{y_1(x)}{x + \theta \log y(x)} \cdot \dfrac{\nu\left[x + \theta \dfrac{y_1(x)}{\log y(x)}\right]}{\log y(x)}}.$$

Il existe donc toujours une valeur de x à partir de laquelle on a constamment

$$\varphi(x) < 1 + \varepsilon,$$

quelque petit que soit le nombre positif ε donné à l'avance. Il en résulte que

$$\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 1,$$

car on a toujours

$$\varphi(x) \geq 1.$$

Notre théorème est donc démontré pour $n = 1$. Supposons maintenant qu'il soit vrai pour n égal à un nombre positif entier quelconque p et démontrons que dans ce cas il sera vrai pour n égal à $p + 1$.

Supposons donc que la fonction $y(x)$ soit une fonction régulière dont l'ordre de grandeur soit égal à $\omega^{p+1}k$. En posant

$$\frac{y_1(x)}{\log y(x) \log_2 y(x) \ldots\ldots \log_{p+1} y(x)} = z(x), \qquad \frac{y[x + z(x)]}{y(x)} = \varphi(x),$$

on trouve comme plus haut

$$1 < \varphi(x) < 1 : \left\{ 1 - \frac{y_1(x)}{x + \theta z(x)} \cdot \frac{\nu[x + \theta z(x)]}{\log y(x) \log_2 y(x) \ldots\ldots \log_{p+1} y(x)} \right\}, \tag{6}$$

si la différence

$$1 - \frac{y_1(x)}{x + \theta z(x)} \cdot \frac{\nu[x + \theta z(x)]}{\log y(x) \log_2 y(x) \ldots\ldots \log_{p+1} y(x)}$$

est supérieure à zéro. Or,

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1(x)}{x + \theta z(x)} = 0.$$

D'autre part, nous pouvons écrire

$$\frac{\nu[x + \theta z(x)]}{\log y(x) \log_2 y(x) \ldots\ldots \log_{p+1} y(x)} = \frac{\nu[x + \theta z(x)]}{\nu(x)} \cdot \frac{\nu(x)}{\log y(x) \log_2 y(x) \ldots\ldots \log_{p+1} y(x)}. \tag{7}$$

Mais la fonction $\nu(x)$ est une fonction régulière et son ordre de grandeur est égal à $\omega^p k$. Nous avons supposé que notre théorème est vrai pour ces fonctions. Nous devons donc avoir

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu\left[x + \dfrac{y_1(x)}{\log \nu(x) \log_2 \nu(x) \ldots\ldots \log_p \nu(x)}\right]}{\nu(x)} = 1.$$

On a, d'autre part,

$$1 < \frac{\nu[x + \theta z(x)]}{\nu(x)} < \frac{\nu\left[x + \dfrac{y_1(x)}{\log \nu(x) \log_2 \nu(x) \ldots \log_p \nu(x)}\right]}{\nu(x)},$$

car la fonction $\nu(x)$ croît toujours avec x et on a, à partir d'une certaine valeur de x,

$$y(x) > \nu(x), \quad \log_{p+1} y(x) > 1.$$

Il en résulte que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu[x + \theta z(x)]}{\nu(x)} = 1.$$

Nous avons ensuite (Propriété 9)

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu(x)}{\log y(x) \log_2 y(x) \ldots \log_{p+1} y(x)} = k.$$

Donc l'égalité (7) nous donne

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu[x + \theta z(x)]}{\log y(x) \log_2 y(x) \ldots \log_{p+1} y(x)} = k,$$

et les inégalités (6) nous montrent que

$$\lim \varphi(x) = 1.$$

Notre théorème est donc vrai pour chaque valeur entière et positive de n.

COROLLAIRE. *Toute fonction régulière* y(x) *d'ordre de grandeur égal à* $\omega^n k$ *vérifie l'égalité*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y\left[x + \dfrac{y_1(x)}{\log y(x) \log_2 y(x) \ldots \log_{p-1} y(x) [\log_p y(x)]^{1+\varepsilon}}\right]}{y(x)} = 1,$$

quelque petit que soit le nombre positif ε *donné à l'avance,* p *étant un nombre entier et positif quelconque et* $y_1(x)$ *une fonction positive quelconque vérifiant l'égalité*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1(x)}{x} = 0.$$

En effet, quelque soit le nombre positif entier p et quelque petit que soit le nombre positif ε, on a toujours, à partir d'une certaine valeur de x,

$$\log y(x) \log_2 y(x) \ldots \log_{p-1} y(x) [\log_p y(x)]^{1+\varepsilon} > \log y(x) \log_2 y(x) \ldots \log_n y(x).$$

THÉORÈME 3. *Toutes fonctions régulières* y(x) *et* $y_1(x)$ *dont les ordres de grandeur sont égaux respectivement aux nombres positifs* k *et* k_1, *vérifient, à partir d'une certaine valeur de* x, *les inégalités*

$$[y(x)]^{k_1-\varepsilon} < y[x + y_1(x)] < [y(x)]^{k_1+\varepsilon},$$

si $k > 1$, *et les inégalités*

$$[y(x)]^{1-\varepsilon} < y[x + y_1(x)] < [y(x)]^{1+\varepsilon},$$

si $k \leq 1$, *quelque petit que soit le nombre positif* ε *donné à l'avance.*

En effet, posons

$$x + y_1(x) = z(x), \quad \frac{xy'(x)}{y(x)} = \nu(x)$$

et cherchons la limite du rapport

$$\frac{\log y(z)}{\log y(x)}$$

pour $x = +\infty$. On a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log y(z)}{\log y(x)} = \lim_{x=\infty} \left\{ \left[\frac{y'(z)}{y(z)} : \frac{y'(x)}{y(x)}\right] \cdot z'(x) \right\} = \lim_{x=\infty} \frac{\nu(z)}{\nu(x)} \cdot \lim_{x=\infty} \frac{xz'(x)}{z(x)}, \tag{8}$$

si les dernières limites existent.

Or,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu(z)}{\nu(x)} = \frac{k}{k} = 1.$$

Nous avons ensuite

$$\frac{xz'(x)}{z(x)} = \frac{\dfrac{x}{y_1(x)} + \dfrac{xy_1'(x)}{y_1(x)}}{\dfrac{x}{y_1(x)} + 1}.$$

Donc si nous supposons que $k_1 > 1$, nous aurons

$$\lim_{x=\infty} \frac{xz'(x)}{z(x)} = k_1,$$

car l'egalité.

$$\lim_{x=\infty} \frac{xy_1'(x)}{y_1(x)} = k_1$$

nous donne

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log y_1(x)}{\log x} = \lim_{x=\infty} \frac{xy_1'(x)}{y_1(x)} = k_1$$

et, par conséquent, il existe toujours une valeur de x à partir de laquelle on a constamment

$$x^{k_1-1-\varepsilon_1} < \frac{y_1(x)}{x} < x^{k_1-1+\varepsilon_1}, \tag{9}$$

quelque petit que soit le nombre positif ε_1. Il en résulte que

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1(x)}{x} = +\infty$$

et, par conséquent,

$$\lim_{x=\infty} \frac{x}{y_1(x)} = 0.$$

En supposant maintenant $k < 1$, nous aurons

$$\lim_{x=\infty} \frac{xz'(x)}{z(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{1 + \dfrac{xy_1'(x)}{y_1(x)} \cdot \dfrac{y_1(x)}{x}}{1 + \dfrac{y_1(x)}{x}} = 1,$$

car dans ce cas les inégalités (9) nous donnent

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1(x)}{x} = 0.$$

Enfin, si $k_1 = 1$, nous aurons aussi

$$\lim_{x=\infty} \frac{xz'(x)}{z(x)} = \lim_{x=\infty} \left[1 + \frac{\dfrac{xy_1'(x)}{y_1(x)} - 1}{\dfrac{x}{y_1(x)} + 1} \right] = 1,$$

puisque on a toujours

$$\frac{x}{y_1(x)} + 1 > 0.$$

D'après ce que nous venons de voir, l'égalité (8) nous donne, dans le cas $k_1 > 1$,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log y\,(z)}{\log y\,(x)} = k_1.$$

Il existe donc toujours dans ce cas une valeur de x à partir de laquelle on a

$$[y(x)]^{k_1-\varepsilon} < y[x + y_1(x)] < [y(x)]^{k_1+\varepsilon},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε.

Si maintenant $k \leq 1$, la même égalité (8) nous donnè

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log y(z)}{\log y(x)} = 1.$$

Nous aurons donc, à partir d'une certaine valeur de x,

$$[y(x)]^{1-\varepsilon} < y[x + y_1(x)] < y(x)^{1+\varepsilon},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε donné à l'avance. Le théorème est donc bien démontré.

COROLLAIRE. *Toute fonction* y(x) *à croissance régulière dont l'ordre de grandeur est fini vérifie, à partir d'une certaine valeur de* x, *les inégalités*

$$[y(x)]^{k-\varepsilon} < y[x + y(x)] < [y(x)]^{k+\varepsilon},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε_1, k *étant l'ordre de grandeur de la fonction* y(x) *ou un, si cet ordre est inférieur à l'unité.*

THÉORÈME 4. *Toute fonction régulière* y(x) *dont l'ordre de grandeur est égal à* ωk, *où* k *est un nombre positif quelconque, vérifie, à partir d'une certaine valeur de* x, *l'inégalité*

$$y[x + y_1(x)] < [y(x)]^{1+\varepsilon},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, $y_1(x)$ *étant une fonction positive vérifiant la condition*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1(x)}{x} = 0.$$

En posant, en effet,

$$\nu(x) = \frac{xy'(x)}{y(x)},$$

on trouve, d'après la propriété 5 de la fonction $\nu(x)$,

$$\lim_{x=\infty} \frac{x \cdot \frac{d}{dx}[\log y(x)]}{\log y(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{\nu(x)}{\log y(x)} = k.$$

La fonction $\log y(x)$ est donc régulière et son ordre de grandeur est égal à un nombre fini k. Nous pouvons, par conséquent, appliquer à cette fonction le théorème 1 qui donne

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log y\,[x + y_1(x)]}{y(x)} = 1,$$

d'où résulte immediatement l'inégalité cherchée.

THÉORÈME 5. *Toute fonction régulière* y(x) *dont l'ordre de grandeur est égal à* $\omega^n k$, n *étant un nombre positif entier et* k *un nombre positif quelconque, vérifie, à partir d'une certaine valeur de* x, *l'inégalité*

$$y\left\{x+\frac{y_1(x)}{\log_2 y(x)\log_3 y(x)\ldots\log_n y(x)}\right\}<[y(x)]^{1+\varepsilon},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, $y_1(x)$ *étant une fonction régulière dont l'ordre de grandeur est égal à un nombre positif inférieur à l'unité.*

Posons

$$u(x)=\log_2 y(x)\log_3 y(x)\ldots\log_n y(x);\quad z(x)=x+\frac{y_1(x)}{u(x)}$$

et considérons le rapport

$$\frac{\log y(z)}{\log y(x)}.$$

On a

$$(10)\qquad \lim_{x=\infty}\frac{\log y(z)}{\log y(x)}=\lim_{x=\infty}\left\{\left[\frac{y'(z)}{y(z)}:\frac{y'(x)}{y(x)}\right]\cdot z'(x)\right\}=\lim_{x=\infty}\frac{\nu(z)}{\nu(x)}\cdot\lim_{x=\infty}\frac{xz'(x)}{z(x)},$$

où

$$\nu(x)=\frac{xy'(x)}{y(x)}.$$

Nous savons (Propriété 7) que

$$\lim_{x=\infty}\frac{\log_2 y(x)}{\log \nu(x)}=1.$$

Il en résulte que

$$\lim_{x=\infty}\frac{\log_3 y(x)}{\log_2 \nu(x)}=1,\quad \lim_{x=\infty}\frac{\log_4 y(x)}{\log_3 \nu(x)}=1,\ldots,\quad \lim_{x=\infty}\frac{\log_n y(x)}{\log_{n-1} \nu(x)}=1.$$

Il existe donc toujours une valeur de x à partir de laquelle on a constamment

$$\begin{aligned}
&\log_2 y(x) > (1-\varepsilon_1)\log \nu(x),\\
&\log_3 y(x) > (1-\varepsilon_1)\log_2 \nu(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\log_n y(x) > (1-\varepsilon_1)\log_{n-1} \nu(x),
\end{aligned}$$

quelque petit que soit le nombre positif ε donné à l'avance. En multipliant ces inégalités entre elles nous trouvons

$$\log_2 y(x)\log_3 y(x)\ldots\log_n y(x) > (1-\varepsilon_1)^{n-1}\log \nu(x)\log_2 \nu(x)\ldots\log_{n-1}\nu(x).$$

La fonction $\nu(x)$ étant toujours croissante, nous avons donc

$$(11) \qquad 1 < \frac{\nu(z)}{\nu(x)} < \frac{\nu\left[x + \frac{y_1(x)}{(1-\varepsilon_1)^{n-1}\log \nu(x) \log_2 \nu(x) \dots \log_{n-1} \nu(x)}\right]}{\nu(x)}.$$

Mais la fonction $\nu(x)$ est, en outre, une fonction régulière dont l'ordre de grandeur est égal à $\omega^{n-1}k$. Nous pouvons donc lui appliquer le théorème 2 qui donne

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu\left[x + \frac{y_1(x)}{(1-\varepsilon_1)^{n-1}\log \nu(x) \log_2 \nu(x) \dots \log_{n-1} \nu(x)}\right]}{\nu(x)} = 1,$$

car on a évidemment

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1(x)}{(1-\varepsilon_1)^{n-1}x} = 0,$$

lorsque l'ordre de grandeur de $y_1(x)$ est inférieur à l'unité.

Les inégalités (11) nous donnent alors

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu(z)}{\nu(x)} = 1.$$

Cherchons maintenant la limite de l'expression

$$\frac{xz'(x)}{z(x)}$$

pour $x = +\infty$. On a

$$(12) \qquad \frac{xz'(x)}{z(x)} = \frac{x + \frac{xy_1'}{u} - \frac{xy_1u'}{u^2}}{x + \frac{y_1}{u}} = \frac{1 + \frac{y_1}{x}\left[\frac{1}{u}\cdot\frac{xy_1'}{y_1} - \frac{xu'}{u^2}\right]}{1 + \frac{y_1}{x}\cdot\frac{1}{u}}.$$

Puisque l'ordre de grandeur de la fonction $y_1(x)$ est positif et inférieur à l'unité, on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1(x)}{x} = 0$$

et l'expression

$$\frac{xy_1'(x)}{y_1(x)}$$

tend vers une limite positive moindre que un ou vers zéro quand x augmente indéfiniment.

D'autre part, nous avons

$$\frac{xu'}{u^2}=\frac{x}{u}\left[\frac{y'}{y\log y\log_2 y}+\frac{y'}{y\log y\log_2 y\log_3 y}+\dots+\frac{y'}{y\log y\log_2 y\dots\log_n y}\right]$$

ou

$$\frac{xu'}{u^2}=\frac{\nu}{\log y\log_2 y\dots\log_n y}\left[\frac{1}{\log_2 y}+\frac{1}{\log_2 y\log_3 y}+\dots+\frac{1}{\log_2 y\log_3 y\dots\log_n y}\right].$$

Or, (propriété 9)

$$\lim_{x=\infty}\frac{\nu}{\log y\log_2 y\dots\log_n y}=k.$$

Donc

$$\lim_{x-\infty}\frac{xu'}{u}=0.$$

L'égalité (12) nous donne, par conséquent,

$$\lim_{x=\infty}\frac{xz'(x)}{z(x)}=1$$

et d'après l'égalité (10), nous trouvons

$$\lim_{x=\infty}\frac{\log y(z)}{\log y(x)}=1.$$

Il en résulte l'inégalité cherchée.

COROLLAIRE. *Toute fonction régulière* y(x) *dont l'ordre de grandeur est égal à* ω^nk *vérifie, à partir d'une certaine valeur de* x, *l'inégalité*

$$y\left\{x+\frac{y_1(x)}{\log_2 y(x)\log_3 y(x)\dots\log_{p-1} y(x)\,[\log_p y(x)]^{1+\eta}}\right\}<[y(x)]^{1+\varepsilon},$$

quelques petits que soient les nombres positifs η *et* ε, $y_1(x)$ *étant une fonction régulière dont l'ordre de grandeur est égal à un nombre positif inférieur à l'unité et* p *un nombre positif entier quelconque.*

THÉORÈME 6. *Toute fonction régulière* y(x) *dont l'ordre de grandeur est égal à* $k\omega^{-1}$, *où* k *est un nombre positif quelconque, vérifie l'égalité*

$$\lim_{x=\infty}\frac{y(x+ax)}{y(x)}=1,$$

a étant un nombre positif quelconque.

En posant

$$\varphi(x)=\frac{y(x+ax)}{y(x)}$$

on trouve comme auparavant

$$\varphi(x)\left[1-\frac{a}{1+\theta a}\nu(x+\theta a x)\right]<1. \qquad (0<\theta<1)$$

Mais par supposition

$$\lim \nu(x)=0.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\varphi(x)<\frac{1}{1-\frac{a}{1+\theta a}\nu(x+\theta a x)},$$

d'où

$$\lim_{x=\infty}\varphi(x)=1,$$

puisque on a toujours

$$\varphi(x)>1.$$

THÉORÈME 7. *Toute fonction régulière* y(x) *dont l'ordre de grandeur est égal à* $k\omega^{-n}$, *où* k *est un nombre positif quelconque et* n *un nombre positif entier, vérifie l'égalité*

$$\lim_{x=\infty}\frac{y(x+ax\log x\log_2\ldots\log_{n-1}x)}{y(x)}=1,$$

a étant un nombre positif quelconque.

En posant

$$\log x\log_2 x\ldots\log_{n-1}x=z(x),\quad \varphi(x)=\frac{y[x+axz(x)]}{y(x)},$$

$$\nu(x)=\frac{xy'(x)}{y(x)}$$

nous trouvons comme toujours

$$(13)\qquad 1<\varphi(x)<1:\left\{1-\frac{az(x)}{1+\theta az(x)}\nu\left[x+\theta axz(x)\right]\right\}, \qquad (0<\theta<1)$$

si la différence

$$1-\frac{az(x)}{1+\theta az(x)}\nu[x+\theta axz(x)]$$

est supérieure à zéro. Mais, en posant

$$\mu(x)=\frac{1}{\nu(x)}=\frac{1}{x}:\frac{y'}{y},\quad \mu_1(x)=\frac{\mu'}{\mu}:\frac{y'}{y},\quad \mu_2(x)=\frac{\mu'}{\mu_1}:\frac{y'}{y},\ldots,\quad \mu_n(x)=\frac{\mu'_{n-1}}{\mu_{n-1}}:\frac{y'}{y},$$

on a

$$\lim_{x=\infty} \mu(x) = +\infty, \quad \lim_{x=\infty} \mu_1(x) = +\infty, \quad \lim_{x=\infty} \mu_2(x) = +\infty, \ldots, \quad \lim_{x=\infty} \mu_{n-1}(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x=\infty} \mu_n(x) = \frac{1}{k}$$

et (propriété 9)

$$\lim_{x=\infty} \frac{\mu(x)}{\log x \log_2 x \ldots \log_n x} = \frac{1}{k}. \tag{14}$$

D'autre part, nous pouvons écrire

$$\frac{az(x)}{1 + \theta a z(x)} \nu[x + \theta a x z(x)] = \frac{a}{1 + \theta a z(x)} \cdot \frac{z(x)}{\mu[x + \theta a x z(x)]}.$$

On a toujours, à partir d'une certaine valeur de x,

$$\frac{a}{1 + \theta a z(x)} < a.$$

Donc l'expression

$$\frac{a}{1 + \theta a z(x)}$$

est finie. Nous avons, en outre,

$$\frac{z(x)}{\mu[x + \theta a x z(x)]} < \frac{z(x)}{\mu(x)},$$

car la fonction $\mu(x)$ croît toujours avec x. Mais on a d'après l'égalité (14)

$$\lim_{x=\infty} \frac{z(x)}{\mu(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{\log x \log_2 x \ldots \log_{n-1} x \log_n x}{\mu(x)} \cdot \lim_{x=\infty} \frac{1}{\log_n x} = 0.$$

Les inégalités (13) nous montrent alors que

$$\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 1.$$

III. **Remarque.** M. TH. VAROPOULOS (¹) a démontré le théorème suivant sur les fonctions croissantes $\mu(r)$ quelconques:

Étant donné un nombre θ positif et supérieur à l'unité quelconque, s'il existe des valeurs de r *ne satisfaisant pas à l'inégalité*

$$\mu\left[r + \frac{1}{\log \mu(r) \log_2 \mu(r) \ldots \log_\nu \mu(r)^a}\right] < \theta \mu(r), \tag{15}$$

(¹) Comptes Rendus, tome 174, 1922, p. 1323; Thèse, Paris, 1923, pp. 6-11.

$a > 1$ *quelconque, et* ν *un nombre entier aussi grand que l'on veut mais fixe, ces valeurs exceptionnelles remplissent des intervalles d'étendue totale finie.*

Ce théorème n'est autre chose que le théorème classique de M. É. BOREL [1] perfectionné:

Une fonction croissante quelconque vérifie l'inégalité

$$\mu\left\{r + \frac{1}{[\log \mu(r)]^{\eta}}\right\} < [\mu(r)]^{1+\varepsilon},$$

quelques petits que soient les nombres positifs η *et* ε, *partout, sauf, au plus, dans des intervalles exceptionnels d'étendue totale finie.*

M. BLUMENTHAL a montré sur un exemple [2] que peuvent exister en réalité de tels intervalles exceptionnels. En d'autres termes, les fonctions croissantes peuvent bien présenter des vitesses de croissance exceptionnelles.

Or, le corollaire du théorème 2 nous montre que les fonction régulières, comme nous les avons définies, n'ont pas des intervalles exceptionnels et l'inégalité (15) de M. VAROPOÚLOS se vérifie partout, à partir d'une certaine valeur de r. La croissance de nos fonctions régulières, à ce point de vue, est donc bien régulière.

(1) Acta Mathematica, tome XX, pp. 375-377.

(2) *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini.* Paris, 1910, pp. 39-41.

Intorno alle congruenze sulle cui superficie focali si corrispondono le linee di curvatura

Memoria di PASQUALE CALAPSO (a Messina)

Nel presente lavoro mi propongo la formazione delle congruenze rettilinee sulle cui superficie focali si corrispondono le linee di curvatura (*congruenze* B).

Se si escludono le congruenze di GUICHARD (vedasi BIANCHI, *Lezioni*, vol. I, anno 1902, pag. 325), sulle focali di una congruenza B si corrispondono due sistemi coniugati distinti (quello corrispondente alle sviluppabili e quello delle linee di curvatura) e perciò *tutti* i sistemi coniugati; frattanto la B è una *congruenza* W.

Per questa considerazione ho richiamato dapprima alcune proprietà delle congruenze W in generale.

Denotando con S ed S' le superficie focali di una qualunque congruenza W, è noto che S è suscettibile di una deformazione infinitesima nella quale lo spostamento di ogni punto avviene parallelamente alla normale nel punto corrispondente di S'; similmente S' è suscettibile di una analoga deformazione infinitesima; ne risultano due superficie Σ e Σ' che (rispettivamente) corrispondono per ortogonalità di elementi ad S ed S'.

È noto altresì che la *funzione caratteristica* Φ della deformazione infinitesima di S ora considerata è la distanza dell'origine dal piano tangente ad una superficie S_0, corrispondente ad S per parallelismo di normali; similmente la *funzione caratteristica* Ψ della deformazione analoga di S' è la distanza dell'origine dal piano tangente ad una superficie S_0' corrispondente ad S' per parallelismo di normali. Le superficie S ed S_0 sono *associate* per deformazione infinitesima; similmente S' ed S_0'; ed anche Σ e Σ'.

La congruenza W avente S ed S' come focali è determinata da una qualunque delle dette coppie di superficie associate; ma è *da osservare* che se la congruenza W considerata è generale, le superficie Σ e Σ' formano una coppia *qualunque* di superficie associate.

È anche noto che alle asintotiche di S corrisponde in Σ e Σ' il loro sistema coniugato comune; se u e v sono i parametri di tal sistema, in punti corrispondenti di Σ e Σ' le tangenti alle linee u e le tangenti alle linee v sono parallele. Diciamo *paralleli* i detti sistemi corrispondenti di Σ e Σ'.

Ma qui, dovendo guardare in particolar modo le linee di curvatura delle focali, occorre anzitutto vedere come si comportano in Σ e Σ' le linee corrispondenti ad un sistema coniugato di S.

Per il sistema coniugato di S, che corrisponde alle asintotiche di S_0, la proprietà è nota (BIANCHI, *Lezioni*, vol. II, anno 1903, pag. 14); al sistema coniugato comune ad S ed S_0 corrisponde il sistema delle asintotiche di Σ ed un sistema coniugato di Σ'. Ma la proprietà generale che qui è osservata e che interessa particolarmente le presenti ricerche è che *ad un qualunque sistema coniugato di* S *corrispondono in* Σ *e* Σ' *sistemi anti-paralleli* (cioè in punti corrispondenti la tangente alla linea u di Σ è parallela alla tangente alla linea v di Σ' e la tangente alla linea v di Σ è parallela alla tangente alla linea u di Σ'). Anzi se il sistema coniugato su S è generale, i sistemi corrispondenti in Σ e Σ' formano una coppia *qualunque* di sistemi anti-paralleli.

Si presenta allora il problema di caratterizzare i sistemi di Σ e Σ' che corrispondono alle linee di curvatura delle focali.

Per venire alla condizione richiesta ho considerato il punto (x, y, z) che genera la superficie Σ, come proiezione di un punto (x, y, z, t) di uno spazio a quattro dimensioni che genera un sistema (H) *isotropo*; un sistema di linee di Σ l'ho chiamato *principale* (rispetto a Σ') se è anti-parallelo al sistema corrispondente di Σ', e se ammette come corrispondente in (H) un sistema ortogonale.

Definendo in modo analogo il sistema principale di Σ' si ha:

Alle linee di curvatura di S *corrisponde il sistema principale di* Σ', *ed alle linee di curvatura di* S' *corrisponde il sistema principale di* Σ.

Premesse queste generalità sulle congruenze W, ho trattato il caso in cui sulle superficie focali si corrispondono le linee di curvatura, ossia il caso in cui sulle superficie Σ e Σ' si corrispondono i sistemi principali; la condizione di tale corrispondenza si traduce in una relazione differenziale tra le funzioni caratteristiche, cioè

$$\frac{\sqrt{k_2}}{\Phi^2}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\frac{\sqrt{k_1}}{\Psi^2}\frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}=0$$

nella quale k_1 e k_2 indicano le curvature di S ed S', ed u, v sono i parametri delle linee di curvatura di queste superficie.

E qui è opportuno ricordare che in riguardo al problema della formazione delle congruenze B, sono state segnalate le classi seguenti:

Le congruenze pseudosferiche; le congruenze di Thybaut; le congruenze W *di cui una focale è una sfera*; ma nulla si è saputo se le dette classi esauriscano (o no) la soluzione del problema.

Risulta dalle presenti ricerche che i casi segnalati sono soltanto *soluzioni particolari del problema*; la soluzione generale dipende da quattro funzioni arbitrarie di una sola variabile.

Il metodo seguito mi ha dato occasione di osservare una classe *nuova* di congruenze B, in cui le deformazioni infinitesime delle superficie focali si riducono ad un movimento; tali congruenze sono caratterizzate da un'equazione alle derivate parziali seconde a cui deve soddisfare la superficie focale.

La ricerca si chiude con la discussione delle proprietà che caratterizzano le congruenze pseudosferiche e le congruenze di THYBAUT come congruenze B.

§ 1. **Sistemi anti-paralleli.**

1. Due sistemi (x, y, z) e (X, Y, Z), dipendenti da due parametri α, β, si dicono *anti-paralleli* se in punti corrispondenti la tangente alla linea α dell'un sistema è parallela alla tangente alla linea β dell'altro sistema, e la tangente alla linea β del primo è parallela alla tangente alla linea α dell'altro.

La superficie luogo del punto (x, y, z) e l'altra luogo del punto (X, Y, Z) si corrispondono per parallelismo di normali, ma nelle presenti ipotesi non formano una coppia qualunque di superficie corrispondentisi per parallelismo di normali.

Si presenta così la questione *date che siano due superficie Σ e Σ', corrispondentisi per parallelismo di normali, decidere se ammettano sistemi anti-paralleli.*

2. Partiamo dalle equazioni generali in coordinate curvilinee qualunque

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial X}{\partial v} &= M\frac{\partial x}{\partial u} + N\frac{\partial x}{\partial v}\end{aligned}\right.$$

esprimenti soltanto che le normali alle due superficie sono parallele, e cerchiamo quando esiste una trasformazione

$$(2)\qquad \alpha = \alpha(uv), \quad \beta = \beta(uv)$$

in guisa da aversi

(3) $$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = \lambda \frac{\partial x}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial X}{\partial \beta} = \mu \frac{\partial x}{\partial \alpha}.$$

Esprimendo le (1) nelle nuove variabili α e β ed osservando le (3) troviamo

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial \beta}{\partial u} = A\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial u}\right) + B\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)$$

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial \alpha}{\partial v} + \mu \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial \beta}{\partial v} = M\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial u}\right) + N\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)$$

donde risultano le equazioni separate

$$\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial u} = A \frac{\partial \beta}{\partial u} + B \frac{\partial \beta}{\partial v}$$

$$\mu \frac{\partial \beta}{\partial u} = A \frac{\partial \alpha}{\partial u} + B \frac{\partial \alpha}{\partial v}$$

$$\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial v} = M \frac{\partial \beta}{\partial u} + N \frac{\partial \beta}{\partial v}$$

$$\mu \frac{\partial \beta}{\partial v} = M \frac{\partial \alpha}{\partial u} + N \frac{\partial \alpha}{\partial v}.$$

Eliminando fra queste λ e μ otteniamo

$$B \frac{\partial \alpha}{\partial v}\frac{\partial \beta}{\partial v} - M \frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial \beta}{\partial u} + A \frac{\partial \alpha}{\partial v}\frac{\partial \beta}{\partial u} - N \frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial \beta}{\partial v} = 0$$

$$B \frac{\partial \alpha}{\partial v}\frac{\partial \beta}{\partial v} - M \frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial \beta}{\partial u} + A \frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial \beta}{\partial v} - N \frac{\partial \alpha}{\partial v}\frac{\partial \beta}{\partial u} = 0$$

donde

$$(A + N)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial \alpha}{\partial v}\frac{\partial \beta}{\partial u}\right) = 0$$

perciò

(4) $$N = -A.$$

Inversamente se questa è soddisfatta, basta assumere su Σ il sistema di linee dato dall'equazione differenziale

(5) $$\Omega_1 du^2 + 2\Omega_2 du dv + \Omega_3 dv^2 = 0$$

in cui

(6) $$B\Omega_3 - M\Omega_1 + 2A\Omega_2 = 0;$$

il sistema di linee considerato ed il sistema corrispondente di Σ' sono antiparalleli.

3. La interpretazione della (4) è facile; essa esprime che le superficie Σ e Σ' sono *associate* per deformazione infinitesima [1]; in tali condizioni esistono *infiniti* sistemi anti-paralleli corrispondentemente alle soluzioni Ω_1, Ω_2, Ω_3 dell'equazione (6), e fra questi si ha il sistema delle asintotiche di Σ ed il sistema corrispondente di Σ' ed ancora il sistema delle asintotiche di Σ' ed il sistema corrispondente di Σ.

§ 2. **Sistemi principali.**

4. Al punto (x, y, z) che descrive la superficie Σ facciamo corrispondere il punto (x, y, z, t) dello spazio a quattro dimensioni che descrive un sistema (H) *isotropo*, perciò

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0 \tag{7}$$

ed introduciamo l'elemento lineare di (H) che scriviamo sotto la forma

$$ds^2 = P_1 du^2 + 2Q_1 dudv + R_1 dv^2. \tag{8}$$

Un sistema di linee sulla superficie Σ si dirà *principale* (rispetto a Σ') se è anti-parallelo al sistema corrispondente di Σ', e di più ammette come corrispondente in (H) un sistema ortogonale.

Esprimendo le due condizioni abbiamo il sistema

$$\left\{\begin{array}{l} M\Omega_1 - 2A\Omega_2 - B\Omega_3 = 0 \\ R_1\Omega_1 - 2Q_1\Omega_2 + P_1\Omega_3 = 0 \end{array}\right. \tag{9}$$

da cui si deducono i rapporti delle quantità incognite Ω_1, Ω_2, Ω_3; dopo ciò l'equazione del sistema principale di Σ è

$$(BQ_1 + AP_1)du^2 + (BR_1 + MP_1)dudv + (MQ_1 - AR_1)dv^2 = 0. \tag{10}$$

5. Similmente al punto (X, Y, Z) che descrive la superficie Σ' facciamo corrispondere il punto (X, Y, Z, T) dello spazio a quattro dimensioni, che descrive un sistema *isotropo* (H') il cui elemento lineare indichiamo con

$$ds'^2 = Pdu^2 + 2Qdudv + Rdv^2; \tag{11}$$

definiamo in modo analogo il sistema principale di Σ', dopo di che troveremo per tale sistema l'equazione differenziale

$$(BQ + AP)du^2 + (BR + MP)dudv + (MQ - AR)dv^2 = 0. \tag{12}$$

---

[1] BIANCHI, *Lezioni*, vol. II, anno 1903, pag. 9.

§ 3. Le congruenze *W* in generale.

6. Una congruenza W è sempre deducibile da una coppia di superficie associate Σ e Σ' col metodo di Darboux [1].

Riscriviamo il sistema (1), tenendo conto della (4), sotto la forma

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = A\dfrac{\partial x}{\partial u} + B\dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial v} = M\dfrac{\partial x}{\partial u} - A\dfrac{\partial x}{\partial v} \end{cases} \qquad (A^2 + BM \neq 0)$$

e deduciamo (per quadratura) una nuova superficie S, ponendo

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = Y\dfrac{\partial z}{\partial u} - Z\dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2mm] \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = Y\dfrac{\partial z}{\partial v} - Z\dfrac{\partial y}{\partial v}, \end{cases}$$

il che è lecito, giacchè per le (13) le condizioni d'integrabilità sono soddisfatte; poscia formiamo ancora una superficie S' definita dalle formule

$$(15)\qquad \bar{x}' = \bar{x} + yZ - Yz\,;$$

le superficie S ed S' sono focali di una congruenza W.

Dalle (15) per derivazione si ricavano le formule

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}'}{\partial u} = y\dfrac{\partial Z}{\partial u} - z\dfrac{\partial Y}{\partial u} \\[2mm] \dfrac{\partial \bar{x}'}{\partial v} = y\dfrac{\partial Z}{\partial v} - z\dfrac{\partial Y}{\partial v} \end{cases}$$

che per le (13) si possono anche scrivere

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}'}{\partial u} = A\left(y\dfrac{\partial z}{\partial u} - z\dfrac{\partial y}{\partial u}\right) + B\left(y\dfrac{\partial z}{\partial v} - z\dfrac{\partial y}{\partial v}\right) \\[2mm] \dfrac{\partial \bar{x}'}{\partial v} = M\left(y\dfrac{\partial z}{\partial u} - z\dfrac{\partial y}{\partial u}\right) - A\left(y\dfrac{\partial z}{\partial v} - z\dfrac{\partial y}{\partial v}\right). \end{cases}$$

Si sa (e per altro si verifica subito) che *le quantità* X, Y, Z *sono i parametri direttori della normale alla superficie* S, *e similmente* x, y, z

---

[1] Darboux, *Leçons*, quatrième partie, 1896, chapitre III.

sono i parametri direttori della normale alla superficie S'; *di più* Σ *e* Σ' *corrispondono per ortogonalità di elementi ad* S *ed* S' *rispettivamente.*

7. Qui occorre formare gli elementi relativi alle due superficie focali. Indichiamo secondo l'uso con

$$\begin{matrix} E, & F, & G \\ D, & D', & D'' \\ e, & f, & g \end{matrix}$$

i coefficienti della prima, seconda e terza forma fondamentale della superficie S, e con la notazione analoga munita di un indice gli elementi relativi alla superficie S'.

Le (14), ove si tenga conto delle (13), si scrivono nel modo seguente

$$(A^2+BM)\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = A\left(Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u}\right) + B\left(Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v}\right)$$
$$(A^2+BM)\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = M\left(Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u}\right) - A\left(Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v}\right)$$

dalle quali segue facilmente

$$(18) \qquad \left\{\begin{aligned} \tau E &= A^2P + 2ABQ + B^2R \\ \tau F &= AMP + (BM - A^2)Q - ABR \\ \tau G &= M^2P - 2AMQ + A^2R \end{aligned}\right.$$

$$\left[\tau = -\frac{(A^2+BM)^2}{T^2}\right].$$

Per il calcolo dei coefficienti D, D', D'' basta tenere presente che i coseni direttori della normale sono

$$\frac{X}{iT}, \quad \frac{Y}{iT}, \quad \frac{Z}{iT} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

ed osservando le (13) e (14) si trova con facile calcolo

$$(19) \qquad D = -\lambda B, \quad D' = \lambda A, \quad D'' = \lambda M$$

in cui

$$(20) \qquad \lambda = \frac{1}{iT}\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix};$$

oppure, introducendo i coefficienti della terza forma fondamentale, avremo

$$\frac{D}{\sqrt{eg-f^2}}=\frac{-BT^2}{A^2+BM},\quad \frac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}=\frac{MT^2}{A^2+BM},\quad \frac{D'}{\sqrt{eg-f^2}}=\frac{AT^2}{A^2+BM}$$

donde segue l'espressione della curvatura di S sotto la forma

$$K_1=-\frac{A^2+BM}{T^4}. \tag{21}$$

8. Per l'altra superficie focale S' si ottengono con procedimento analogo le espressioni fondamentali, e si trova

$$\begin{cases} \tau_1 E_1 = A^2P_1 + 2ABQ_1 + B^2R_1 \\ \tau_1 F_1 = AMP_1 + (BM - A^2)Q_1 - ABR_1 \\ \tau_1 G_1 = M^2P_1 - 2AMQ_1 + A^2R_1 \end{cases} \qquad \left(\tau_1 = -\frac{1}{t^2}\right) \tag{22}$$

$$D_1 = -\mu B,\quad D_1' = \mu A,\quad D_1'' = \mu M \tag{23}$$

$$\mu = -\frac{1}{it}\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{24}$$

ed infine

$$\frac{D_1}{\sqrt{e_1g_1-f_1^2}}=-Bt^2,\quad \frac{D_1''}{\sqrt{e_1g_1-f_1^2}}=Mt^2,\quad \frac{D_1'}{\sqrt{e_1g_1-f_1^2}}=At^2$$

donde segue ancora l'espressione della curvatura di S' sotto la forma

$$k_2=-\frac{1}{(A^2+BM)t^4}. \tag{25}$$

Da questa e dalla (21) si ottiene altresì

$$k_1k_2=\frac{1}{T^4t^4}. \tag{26}$$

§ 4. **Ulteriori proprietà delle congruenze W.**

9. A complemento dei risultati precedenti formiamo le funzioni caratteristiche delle deformazioni infinitesime delle superficie focali.

È noto che S è suscettibile di una deformazione infinitesima nella quale lo spostamento di ogni punto avviene parallelamente alla normale nel punto corrispondente di S'; similmente S' è suscettibile di un'analoga deformazione infinitesima.

Cerchiamo la funzione caratteristica Ψ relativa alla deformazione infinitesima di S'. A tale scopo osserviamo che dalla funzione richiesta è deducibile la superficie Σ' corrispondente ad S' per ortogonalità di elementi; perciò si dovrà avere

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -t^2 \left\{ B\left[\Psi \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x}{it}\right) - \frac{x}{it}\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right] + A\left[\Psi \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x}{it}\right) - \frac{x}{it}\frac{\partial \Psi}{\partial u}\right]\right\}$$

e confrontando colla prima delle (13), troviamo

$$\Psi = \frac{1}{it}. \tag{27}$$

Similmente la funzione caratteristica Φ, relativa alla deformazione infinitesima di S, è data dalla formula

$$\Phi = \frac{1}{iT}; \tag{28}$$

dopo ciò la (26) prende la forma

$$\Phi^4\Psi^4 = K_1 K_2 \tag{29}$$

10. È noto altresì [1] che la funzione caratteristica Φ è la distanza dell'origine dal piano tangente ad una superficie S_0, associata ad S; similmente Ψ è la distanza dell'origine dal piano tangente ad una superficie S_0', associata ad S'. Se ne deducono le coordinate del punto che descrive S_0 e le coordinate del punto che descrive S_0' sotto la forma

$$x_0 = -\frac{\dfrac{\partial Y}{\partial u}\dfrac{\partial Z}{\partial v} - \dfrac{\partial Y}{\partial v}\dfrac{\partial Z}{\partial u}}{\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}} \tag{30}$$

$$x_0' = -\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} - \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial u}}{\begin{vmatrix} x & y & z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}} \tag{31}$$

---

[1] BIANCHI, *Lezioni*, Spoerri 1903, vol. II, § 225.

donde risultano i teoremi di DARBOUX, cioè: *Le superficie* S_0 *e* Σ' (*e le superficie* S_0' *e* Σ) *sono polari reciproche rispetto alla sfera*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0,$$

e risulta ancora il teorema da me stabilito in una precedente Memoria [1], cioè: *I punti corrispondenti di* S_0 *ed* S_0' *sono allineati con un punto fisso.*

11. Notiamo infine alcune nuove proprietà a complemento del teorema riportato dal BIANCHI (loc. cit., pag. 14).

Se le linee u, v sono coniugate su S, si ha

$$A = 0$$

e le (13) danno

$$\frac{\partial X}{\partial u} = B\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = M\frac{\partial x}{\partial u};$$

segue: *ad un qualunque sistema coniugato su* S *corrispondono in* Σ *e* Σ' *sistemi anti-paralleli.*

Se più particolarmente u, v sono le linee di curvatura di S, sarà contemporaneamente

$$A = 0, \quad F = 0;$$

segue allora

$$Q = 0;$$

quindi *alle linee di curvatura di* S *corrisponde in* Σ' *il sistema principale; similmente alle linee di curvatura di* S' *corrisponde in* Σ *il sistema principale.*

§ 5. Le congruenze *B*.

12. In questo paragrafo ci occuperemo in particolar modo del caso in cui sulle superficie focali S ed S' si corrispondono le linee di curvatura. Dopo i risultati del numero precedente occorre esprimere che sulle superficie Σ e Σ' si corrispondono i sistemi principali.

Tenendo presenti la (10) e la (12), la corrispondenza dei detti sistemi principali si traduce nell'unica relazione

$$B(QR_1 - Q_1R) + A(PR_1 - P_1R) - M(PQ_1 - P_1Q) = 0 \tag{32}$$

[1] *Sulle reti e congruenze coniugate e sulle trasformazioni delle superfici per congruenze* W. Serie IV, tomo IV (1926-1927), p. 136.

oppure

$$B(FR_1 \quad GQ_1) + A(ER_1 \quad GP_1) \quad M(EQ_1 - FP_1) = 0 \tag{33}$$

giacchè i primi membrl non differiscono che per il fattore $A^2 + BM$.

13. Se in particolare u e v sono i parametri del sistema principale di Σ e di Σ', si avrà

$$\frac{\partial X}{\partial u} = B\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = M\frac{\partial x}{\partial u} \tag{34}$$

e l'ortogonalità delle linee u e v sui sistemi isotropi (H) ed (H') dà la relazione

$$\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} = BM\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial v}; \tag{35}$$

oppure, introducendo le funzioni caratteristiche, si scriverà

$$\frac{1}{\Phi^4}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{BM}{\Psi^4}\frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{\partial \Psi}{\partial v}. \tag{36}$$

D'altra parte dalla (21) e (25) segue

$$\Psi^2\sqrt{K_1} = \pm BM\sqrt{K_2}\Phi^2. \tag{37}$$

Limitandoci al caso reale togliamo l'incertezza del segno, osservando che le curvature delle focali di una congruenza W sono sempre entrambe positive od entrambe negative; dovremo allora considerare due casi:

1°) K_1, K_2 positive, il che importa che il prodotto BM è negativo; allora se $\sqrt{K_1}$, $\sqrt{K_2}$ indicano i valori aritmetici si dovrà scrivere

$$\Psi^2\sqrt{K_1} = -BM\sqrt{K_2}\Phi^2$$

ed eliminando BM fra questa e la (36) si ottiene

$$\frac{\sqrt{K_2}}{\Phi^2}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\sqrt{K_1}}{\Psi^2}\frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{\partial \Psi}{\partial v} = 0; \tag{38}$$

2°) K_1, K_2 negative, il che importa BM positivo; allora indicando con $\sqrt{K_1}$, $\sqrt{K_2}$ quantità puramente immaginarie a coefficiente positivo, la (37) si dovrà scrivere

$$\Psi^2\sqrt{K_1} = BM\sqrt{K_2}\Phi^2$$

donde

$$\frac{\sqrt{K_2}}{\Phi^2}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\sqrt{K_1}}{\Psi^2}\frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{\partial \Psi}{\partial v} = 0. \tag{39}$$

Frattanto una congruenza B è una congruenza W, in cui le curvature delle focali e le funzioni caratteristiche soddisfano la (38) [o la (39) secondo il segno delle curvature], u e v essendo i parametri delle linee di curvatura di una focale.

§ 6. **Teorema di esistenza.**

14. È qui il caso di discutere *l'esistenza ed il grado di generalità* delle congruenze B.

A tale scopo, proponiamoci la formazione delle superficie Σ e Σ' assumendo le quattro funzioni incognite

$$X = X(xy), \quad Y = Y(xy), \quad Z = Z(xy), \quad z = z(xy),$$

l'ultima delle quali dà l'equazione cartesiana della superficie Σ; allora le espressioni di E, F, G, P_1, Q_1, R_1 si dovranno calcolare facendo

$$x = u, \quad y = v$$

e si trova:

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} -t^2 P_1 &= (x^2 + y^2)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2zx\frac{\partial z}{\partial x} + y^2 + z^2 \\ -t^2 Q_1 &= (x^2 + y^2)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - yz\frac{\partial z}{\partial x} - zx\frac{\partial z}{\partial y} - xy \\ -t^2 R_1 &= (x^2 + y^2)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2zy\frac{\partial z}{\partial y} + x^2 + z^2 \end{aligned}\right.$$

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} E &= (X^2 + Y^2)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2ZX\frac{\partial z}{\partial x} + Y^2 + Z^2 \\ F &= (X^2 + Y^2)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - YZ\frac{\partial z}{\partial x} - ZX\frac{\partial z}{\partial y} - XY \\ G &= (X^2 + Y^2)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2ZY\frac{\partial z}{\partial y} + Z^2 + X^2\,; \end{aligned}\right.$$

inoltre si dovrà porre

$$\frac{\partial X}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = B, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = M, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = -A;$$

sicchè esprimendo che le superficie Σ, Σ' sono associate, e che è soddisfatta la (33), perveniamo al sistema seguente

$$
(42)\qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial Z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial Y}{\partial x} \\[2ex]
\dfrac{\partial Z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial X}{\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial X}{\partial x} \\[2ex]
\dfrac{\partial X}{\partial x}=-\dfrac{\partial Y}{\partial y} \\[2ex]
\dfrac{\partial Y}{\partial x}(FR_1 - GQ_1)+\dfrac{\partial X}{\partial x}(ER_1-GP_1)-\dfrac{\partial X}{\partial y}(EQ_1 \quad FP_1)=0,
\end{cases}
$$

da cui dipende la soluzione del problema.

Per l'integrazione, scriviamo questo sistema sotto forma più comoda nel seguente modo: ricaviamo dalla prima $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, cioè

$$
\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\dfrac{\partial Y}{\partial x}}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial x}\right),
$$

e sostituendo questa espressione nella quarta, risolviamo quest'ultima rispetto a $\dfrac{\partial X}{\partial y}$; così (a convenienti valori iniziali) la prima e la quarta danno $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial X}{\partial y}$ espresse in *funzioni olomorfe* degli argomenti

$$
x,\quad y,\quad z,\quad X,\quad Y,\quad Z
$$

$$
\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial X}{\partial x},\quad \frac{\partial Y}{\partial x},\quad \frac{\partial Z}{\partial x};
$$

poscia la seconda e la terza danno $\dfrac{\partial Y}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Z}{\partial y}$.

Per i teoremi generali di CAUCHY segue allora che *assegnate ad arbitrio quattro funzioni della sola* x

$$
\Phi_1(x),\quad \Phi_2(x),\quad \Phi_3(x),\quad \Phi_4(x)
$$

esiste un sistema di funzioni X, Y, Z, z, *soddisfacenti le* (42), *che per un fissato valore di* y *si riducono appunto alle funzioni assegnate.*

Il problema delle congruenze B dipende perciò da quattro funzioni arbitrarie.

§ 7. Soluzioni particolari del problema.

15. Il metodo qui esposto per la formazione delle congruenze B permette di osservare una classe di tali congruenze, caratterizzata dal fatto che le deformazioni infinitesime delle superficie focali si riducono ad un movimento.

Vedremo subito che tutte le congruenze B soddisfacenti la detta condizione dipendono da due funzioni arbitrarie.

Si è visto che la funzione caratteristica relativa alla deformazione infinitesima di S è

$$\Phi = \frac{1}{iT}$$

ed i coseni direttori della normale ad S sono

$$\frac{X}{iT}, \quad \frac{Y}{iT}, \quad \frac{Z}{iT};$$

dovendo la deformazione infinitesima ridursi ad un movimento, basterà porre

$$\frac{Z}{iT} = a\Phi$$

essendo a costante arbitraria, perciò

$$Z = a;$$

dopo ciò le (42) danno pure $z = \text{cost.}$, e noi porremo

$$z = b.$$

Con questi valori le (40) e (41) prendono la forma

$$-t^2P_1 = y^2 + b^2, \quad -t^2Q_1 = -xy, \quad -t^2R_1 = x^2 + b^2$$
$$E = Y^2 + a^2, \quad F = -XY, \quad G = X^2 + a^2,$$

ed il sistema (42) prende la forma seguente

$$(43) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial x} = -\dfrac{\partial X}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x}[xy(X^2 + a^2) - XY(x^2 + b^2)] + \dfrac{\partial X}{\partial x}[(x^2 + b^2)(Y^2 + a^2) - (y^2 + b^2)(X^2 + a^2)] + \\ \qquad + \dfrac{\partial X}{\partial y}[xy(Y^2 + a^2) - XY(y^2 + b^2)] = 0. \end{cases}$$

16. Questo sistema è riducibile ad una sola equazione che caratterizza le superficie focali.

Infatti le (14) danno

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \quad Y,$$
$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial y} = -a, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = X,$$

donde segue intanto

$$\bar{x} = -ay, \quad \bar{y} = ax;$$

poscia, ponendo nelle solite notazioni di MONGE,

$$p = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}}, \quad q = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}}$$
$$r = \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \bar{x}^2}; \quad s = \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}, \quad t = \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \bar{y}^2}$$

si ha:

$$X = -ap, \quad Y = -aq$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -a^2 t, \quad \frac{\partial X}{\partial x} = -a^2 s, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = a^2 r$$

e le (43) si riducono alla sola equazione

$$(44) \qquad \begin{aligned}(\bar{x}^2 + a^2 b^2)[s(1+p^2) - rpq] - (\bar{y}^2 + a^2 b^2)[s(1+q^2) - tpq] + \\ + \bar{x}\bar{y}[t(1+p^2) - r(1+q^2)] = 0.\end{aligned}$$

Per ogni superficie integrale S di questa equazione si ha una congruenza B, di cui S è focale; la seconda focale S' è una nuova superficie integrale della stessa equazione.

L'applicazione del metodo esposto per la formazione delle congruenze B, aventi come focale una superficie integrale della (44), richiede che la superficie integrale si formi a convenienti valori iniziali a fine di escludere i casi degeneri.

Per osservare a fondo tale circostanza introduciamo i parametri direttori del raggio

$$(45) \qquad \bar{X} = ay - bY, \quad \bar{Y} = bX - ax, \quad \bar{Z} = xY - yX$$

e formiamo il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{X} & \bar{Y} & \bar{Z} \\ \frac{\partial \bar{X}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{Y}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{X}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{Y}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{Z}}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Per il calcolo di questo determinante, scriviamo le espressioni delle derivate delle (45), cioè

$$\frac{\partial \overline{X}}{\partial x} = -b\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial \overline{Y}}{\partial x} = b\frac{\partial X}{\partial x} - a, \quad \frac{\partial \overline{Z}}{\partial x} = Y + x\frac{\partial Y}{\partial x} - y\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \overline{X}}{\partial y} = a + b\frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial \overline{Y}}{\partial y} = b\frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial \overline{Z}}{\partial y} = -x\frac{\partial X}{\partial x} - X - y\frac{\partial X}{\partial y}.$$

Sostituendo in Δ ed effettuando lo sviluppo, troviamo

$$\Delta = \frac{\partial X}{\partial y}(ay - bY)^2 - 2\frac{\partial X}{\partial x}(ay - bY)(bX - ax) - \frac{\partial Y}{\partial x}(bX - ax)^2. \tag{46}$$

Consideriamo ancora l'espressione

$$A^2 + BM = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} \tag{47}$$

ed i valori (20). (24) di λ e μ che nel caso presente sono

$$\lambda = \frac{a}{\sqrt{X^2 + Y^2 + a^2}}, \quad \mu = \frac{-b}{\sqrt{x^2 + y^2 + b^2}}. \tag{48}$$

Ora nell'integrazione del sistema (43) i valori iniziali di

$$x, \quad y, \quad X, \quad Y, \quad \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x}$$

sono arbitrari; per evitare i casi degeneri questi dovranno prendersi in guisa che le quantità

$$X^2 + Y^2 + a^2, \quad x^2 + y^2 + b^2$$

e le (46) e (47) siano diverse da zero.

Si vede pure senza difficoltà che, disponendo convenientemente dei valori iniziali, nessuna delle superficie focali è una sfera.

§ 8. Le congruenze pseudosferiche e le congruenze di Thybaut, come congruenze *B*.

17. Terminiamo questo lavoro caratterizzando le congruenze pseudosferiche e le congruenze di THYBAUT come particolari congruenze B.

E qui conviene ricordare il teorema di PICONE ([1]) che caratterizza le congruenze pseudosferiche come congruenze W; cioè:

Una congruenza W *per la quale una delle falde focali è una superficie pseudosferica ed è costante il tratto focale, è una congruenza pseudosferica.*

([1]) PICONE, *Sulle congruenze rettilinee* W. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 37 (anno 1914) pag. 224.

Poichè una congruenza pseudosferica è B, invertiamo sotto certo aspetto il teorema di PICONE nel seguente modo:

Una congruenza B, *per la quale è costante il segmento focale, è pseudosferica.*

Per la dimostrazione indichiamo con τ il segmento focale e, facendo uso delle (15), esprimiamo che è costante; avremo

$$t^2T^2 - (xX + yY + zZ)^2 = c \qquad (c = \text{cost}). \tag{49}$$

Deriviamo questa rispetto ad u e rispetto a v, e facciamo uso delle (13) nell'ipotesi che u e v siano i parametri delle linee di curvatura delle focali (il che importa $A = 0$); avremo così

$$tT\left(T\frac{\partial t}{\partial u} + t\frac{\partial T}{\partial u}\right) + (xX + yY + zZ)\left(Bt\frac{\partial t}{\partial v} + \frac{T}{M}\frac{\partial T}{\partial v}\right) = 0$$

$$tT\left(T\frac{\partial t}{\partial v} + t\frac{\partial T}{\partial v}\right) + (xX + yY + zZ)\left(Mt\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{T}{B}\frac{\partial T}{\partial u}\right) = 0.$$

D'altra parte per la (35) si può scrivere

$$\frac{\partial T}{\partial u} = B\omega\frac{\partial t}{\partial v}, \quad \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{M}{\omega}\frac{\partial t}{\partial u}. \tag{50}$$

dopo di che le precedenti danno

$$\frac{\partial}{\partial u}(tT)[tT + \frac{1}{\omega}(xX + yY + zZ)] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(tT)[tT + \omega(xX + yY + zZ)] = 0.$$

Ma nessuno dei moltiplicatori di $\frac{\partial}{\partial u}(tT)$ e $\frac{\partial}{\partial v}(tT)$ può essere nullo, avendo escluso che la congruenza sia generata dalle tangenti alle linee di curvatura di un sistema di una superficie focale; segue

$$tT = \text{cost}$$

e per la (27) e (28)

$$\Phi\Psi = \text{cost}. \tag{51}$$

Si conclude, per la (29), che il prodotto delle curvature delle focali è costante; ma tenendo conto della (39) e della (51) le curvature sono uguali, dunque la congruenza è pseudosferica.

Allo stesso modo si dimostra che *se in una congruenza* B *è costante l'angolo dei piani focali, la congruenza è pseudosferica.*

18. Veniamo ora alle congruenze di THYBAUT.

Io ho già stabilito ([1]) che le congruenze di THYBAUT sono congruenze B per le quali il segmento focale e l'angolo dei piani focali sono legati dalla relazione

$$\tau = \frac{1}{m} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \qquad (m = \text{cost}).$$

Per trasformazione omotetica possiamo supporre $m = \frac{1}{2}$, e considerando le espressioni di τ e σ, che si deducono dalle formule precedenti, cioè:

$$\tau^2 = t^2 T^2 - (\Sigma xX)^2, \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\sigma}{2} = \frac{tT - \Sigma xX}{tT + \Sigma xX}$$

risulta la relazione

$$tT + \Sigma xX = 2. \tag{52}$$

Se ora deriviamo questa rispetto ad u e rispetto a v, osservando le (50) e le (34) troviamo senza difficoltà

$$\omega = 1,$$

e riunendo le (34) e (50) otteniamo il sistema

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= B \frac{\partial x}{\partial v}, \ldots, & \frac{\partial T}{\partial u} &= B \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= M \frac{\partial x}{\partial u}, \ldots, & \frac{\partial T}{\partial v} &= M \frac{\partial t}{\partial u}. \end{aligned} \right. \tag{53}$$

Inversamente se queste sono soddisfatte, unitamente alle relazioni

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 &= 0 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 &= 0, \end{aligned} \right. \tag{54}$$

il primo membro della (52) ha nulle le derivate rispetto ad u e v e perciò si può disporre delle condizioni iniziali in guisa che essa sia soddisfatta.

19. Se operiamo una trasformazione di coordinate curvilinee, prendendo a nuove coordinate le linee integrali dell'equazione

$$B du^2 - M dv^2 = 0,$$

([1]) « Annali di Matematica », tomo XXIV, serie III, pag. 31.

e continuiamo a chiamare u e v i parametri delle nuove linee, le (53) prendono la forma

$$(55)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = A\dfrac{\partial x}{\partial u}, \ldots, & \dfrac{\partial T}{\partial u} = A\dfrac{\partial t}{\partial u} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = -A\dfrac{\partial x}{\partial v}, \ldots, & \dfrac{\partial T}{\partial v} = -A\dfrac{\partial t}{\partial v} \end{cases}$$

ed il sistema attuale u, v è ortogonale, perchè la curvatura media delle superficie focali è nulla.

Poniamo

$$(56)\qquad \begin{cases} X = x_{11} + ix_{21}, & x = x_{11} - ix_{21} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T = x_{14} + ix_{24}, & t = x_{14} - ix_{24} \end{cases} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

ed interpretiamo $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14})$ ed $(x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24})$ come coordinate (di WEIERSTRASS) di punto in uno spazio ellittico; tali punti descrivono due reti O di tale spazio, polari l'una dell'altra.

Ne risulta che le coordinate x_{1i}, x_{2i} sono caratterizzate da un determinante ortogonale di quarto ordine di GUICHARD

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix}$$

i cui elementi soddisfano ad equazioni della forma

$$(57)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_{ri}}{\partial u} = a_r\xi_i, \quad \dfrac{\partial x_{ri}}{\partial v} = b_r\eta_i \\ \dfrac{\partial \xi_i}{\partial u} = -a_1x_{1i} - a_2x_{2i} - p\eta_i, \quad \dfrac{\partial \xi_i}{\partial v} = q\eta_i \\ \dfrac{\partial \eta_i}{\partial u} = p\xi_i, \quad \dfrac{\partial \eta_i}{\partial v} = -b_1x_{1i} - b_2x_{2i} - q\xi_i \end{cases}$$

e le cui condizioni d'integrabilità sono

$$(58)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a_r}{\partial v} = pb_r, \quad \dfrac{\partial b_r}{\partial u} = qa_r \\ \dfrac{\partial p}{\partial v} + \dfrac{\partial q}{\partial u} + a_1b_1 + a_2b_2 = 0. \end{cases}$$

Esprimendo ora che sono soddisfatte le (55), troviamo

$$a_1 + ia_2 = A(a_1 - ia_2)$$
$$b_1 + ib_2 = -A(b_1 - ib_2)$$

donde

(59) $$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Si ottiene così il risultato (noto per altra via) che *la formazione delle congruenze di Thybaut equivale alla formazione delle reti* O, *a curvatura assoluta nulla, di uno spazio ellittico* (1).

Per la simmetria che presenta il caso attuale, dalla detta rete *O* si deducono quattro congruenze di Thybaut e perciò otto superficie minime dello spazio euclideo, che sono *focali* delle dette congruenze.

Messina, 8 gennaio 1927.

(1) Bianchi, *Lezioni*. Vol. I, anno 1902, pag. 492.

Il lutto gravissimo che, nella triste notte fra il 5 ed il 6 Giugno 1928 colpiva la Scienza italiana colla morte del Senatore

LUIGI BIANCHI

è particolarmente sentito dalla Direzione degli « Annali di Matematica », cui Egli apparteneva da lunghi anni e alla quale ha atteso con opera costante, illuminata ed efficace.

Dello Scienziato, del Maestro, dell'Uomo insigne parlerà negli « Annali » uno dei più distinti ed affezionati Suoi discepoli: intanto vada alla desolata Sua Famiglia e ai Suoi colleghi di Pisa il senso di profondo compianto, alla Sua memoria il saluto affettuoso e riverente dei Suoi collaboratori nella Direzione.

Complément au Mémoire « Sur la Géométrie des groupes simples »

par E. CARTAN (à Paris)

Dans mon Mémoire intitulé *La Géométrie des groupes simples,* paru récemment dans les « Annali di Matematica » [1], j'ai introduit ce que j'ai appelé le polyèdre fondamental (P) du groupe adjoint d'un groupe simple. J'ai vérifié dans chaque cas particulier que ce polyèdre, supposé situé dans l'espace euclidien à l dimensions, l désignant le rang du groupe, est limité par $l+1$ faces hyperplanes [2]. Il y a intérêt à donner de ce théorème une démonstration générale; c'est ce que je me propose de faire ici. Je montrerai en même temps comment ce théorème se relie à un autre théorème général relatif à la représentation linéaire des groupes semi-simples.

§ I.

1. Une première propriété à démontrer est que le domaine que j'ai appelé (D) est limité par l faces hyperplanes [3]. Ici il s'agit d'un théorème qui peut être énoncé indépendamment de son rapport avec la théorie des groupes simples, et qui est le suivant:

Etant donné, dans l'espace euclidien à l *dimensions, un groupe discontinu fini* $\mathcal{G}'$ *engendré par un certain nombre de symétries prises par rapport à des hyperplans passant par l'origine (et par les opérations qui s'en déduisent en les composant de toutes les manières possibles un nombre quelconque de fois), les hyperplans par rapport auxquels s'effectuent les symétries contenues dans le groupe partágent l'espace en un certain nombre de régions (angles polyédres) dont chacune est limitée exactement par* l *faces.*

Remarquons en passant que toutes ces régions sont égales entre elles et que le groupe $\mathcal{G}'$ admet comme opérations génératrices les symétries prises par rapport aux faces qui limitent une des régions.

[1] T. IV, 1927, pp. 209-256.

[2] Loc. cit., p. 218 et suivantes.

[3] Loc. cit., p. 215.

2. Supposons que l'une des régions (D) soit limitée par $L > l$ faces. Elle peut être définie par un système de L inégalités

$$\varphi^1 > 0, \quad \varphi^2 > 0, \ldots, \quad \varphi^L > 0, \tag{1}$$

les φ^i étant des formes linéaires par rapport aux coordonnées courantes.

Je vais d'abord démontrer que dans l'équation

$$\varphi^1 - m\varphi^2 = 0 \tag{2}$$

de l'hyperplan symétrique de $\varphi^1 = 0$ par rapport à $\varphi^2 = 0$, le coefficient m ne peut être positif. Supposons en effet $m > 0$. Les inégalités

$$\varphi^2 > 0, \quad \varphi^3 > 0, \ldots, \quad \varphi^L > 0 \tag{3}$$

ne peuvent pas entraîner l'égalité (2), puisque l'hyperplan (2) ne peut avoir aucun point intérieur à (D); elles confèrent donc à la forme $\varphi^1 - m\varphi^2$ un signe constant. Le même raisonnement peut se faire en partant des inégalités

$$\varphi^1 > 0, \quad \varphi^3 > 0, \ldots, \quad \varphi^L > 0. \tag{4}$$

Du reste la forme $\varphi^1 - m\varphi^2$ prend le même signe constant en vertu des inégalités (3) ou en vertu des inégalités (4); c'est en effet le signe qu'elle prend pour un point particulier intérieur à (D). Supposons que ce soit le signe $+$. Il en résulte que les inégalités (3) entraînent $\varphi^1 > 0$. Par suite la région (D) est limitée seulement par $L - 1$ faces, contrairement à l'hypothèse.

3. Cela posé, supposons que les l premières formes $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^l$ soient indépendantes, et prenons-les pour coordonnées cartésiennes. Soit

$$F(\varphi) \equiv \sum_{i,j} g_{ij}\varphi^i\varphi^j$$

la forme fondamentale qui représente le carré de la distance d'un point à l'origine. Un calcul facile montre que le symétrique de l'hyperplan

$$P \equiv \sum_i u_i\varphi^i = 0$$

par rapport à l'hyperplan

$$Q \equiv \sum_i v_i\varphi^i = 0$$

a pour équation

$$P + \lambda Q = 0,$$

avec

$$\lambda = 2\frac{\sum\limits_k u_k v^k}{\sum\limits_k v_k v^k}, \tag{5}$$

où l'on a désigné par u^k et v^k les composantes contravariantes des vecteurs covariants u_k et v_k. On peut remarquer du reste que si $P + \lambda Q \equiv \sum_i w_i \varphi^i$, on a

$$\sum_k w_k w^k = \sum_k u_k u^k.$$

Appliquons la formule (5) au cas où les deux hyperplans $P = 0$, $Q = 0$ sont deux des hyperplans de coordonnées; nous en déduisons que *les composantes contravariantes* g^{ij} *du tenseur fondamental sont toutes négatives ou nulles, si* $i \neq j$.

Appliquons maintenant la formule (5) aux deux hyperplans $\varphi^i = 0$ et

$$\varphi^{l+1} \equiv \alpha_1 \varphi^1 + \alpha_2 \varphi^2 + \ldots + \alpha_l \varphi^l = 0;$$

nous en déduisons que *les quantités* α^i *sont toutes négatives ou nulles.*

4. Cela posé, les coefficients α_i ne sont pas tous négatifs ou nuls, sans quoi les inégalités (1) seraient incompatibles. Supposons que les p premiers soient positifs, les autres étant négatifs ou nuls. On aurait alors

$$g^{11}\alpha_1 + g^{12}\alpha_2 + \ldots + g^{1p}\alpha_p \leq \alpha^1 \leq 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$g^{p1}\alpha_1 + g^{p2}\alpha_2 + \ldots + g^{pp}\alpha_p \leq \alpha^p \leq 0,$$

d'où

$$\sum_{i,j}^{1,\ldots,p} g^{ij}\alpha_{ij} \leq 0.$$

Mais cette conclusion est absurde, parce que la forme $\sum_{i,j} g^{ij} u_i u_j$ est *définie* positive.

On ne peut échapper à la contradiction qu'en supposant $L = l$, ce qu'il fallait démontrer.

5. Dans le cas particulier $l = 3$, la première partie de la démonstration revient à montrer que les faces de l'angle polyèdre (D) ont tous leurs dièdres aigus ou droits; or on sait que la somme des dièdres d'un angle polyèdre convexe de L faces est supérieure à $2(L-2)$ droits; on doit donc avoir

$$2(L-2) < L, \quad \text{ou} \quad L < 4, \quad L = 3.$$

Il y aurait intérêt à voir si une démonstration de ce genre pourrait s'étendre à un nombre quelconque de dimensions.

§ II.

6. Avant d'arriver au théorème définitif que nous avons en vue, rappelons que dans la théorie des groupes semi-simples il s'introduit un certain nombre de *racines* ω^α deux à deux égales et opposées, combinaisons linéaires à coefficients rationnels de l d'entre elles, qui sont linéairement indépendantes. Si l'on prend ces l racines comme coordonnées cartésiennes d'un point dans un espace euclidien à l dimensions, les équations $\omega^\alpha = 0$ représentent les hyperplans de symétrie du groupe fini $\mathcal{G}'$. Si ω^α et ω^β sont deux racines quelconques, il existe un entier a^α_β tel que $\omega^\alpha + a^\alpha_\beta \omega^\beta$ soit également racine, et l'hyperplan $\omega^\alpha + a^\alpha_\beta \omega^\beta = 0$ n'est autre que le symétrique de $\omega^\alpha = 0$ par rapport à $\omega^\beta = 0$. De plus, tous les termes de la progression arithmétique de raison ω^β et admettant pour termes extrêmes ω^α et $\omega^\alpha + a^\alpha_\beta \omega^\beta$ sont aussi des racines.

7. Ces propriétés étant rappelées [1], nous pouvons supposer que les l coordonnées $\varphi^1, \ldots, \varphi^l$ introduites précédemment sont les l racines $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^l$. Toute racine ω^α, exprimée linéairement au moyen de $\varphi^1, \ldots, \varphi^l$, aura tous ses coefficients de même signe, sans quoi l'hyperplan $\omega^\alpha = 0$ traverserait la région (D). Nous dirons que la racine ω^α est *positive* si aucun de ses coefficients n'est négatif, *négative* dans le cas contraire.

Les hyperplans obtenus en égalant les racines ω^α à des entiers arbitraires partagent l'espace en une infinité de polyèdres, dont l'un peut être défini par les inégalités (1) et les inégalités

$$\omega^\alpha < 1, \tag{6}$$

où on remplace successivement ω^α par toutes les racines *positives*. Nous voulons montrer que le polyèdre (P) ainsi obtenu peut être défini uniquement par $l+1$ inégalités (dont les inégalités (1)).

8. Rangeons en effet les indices $1, 2, \ldots, l$ dans un ordre déterminé, par exemple l'ordre naturel, et considérons celles des racines positives pour lesquelles le coefficient de φ^1 est le plus grand possible, puis, parmi celles-là, celles pour lesquelles le coefficient de φ^2 est le plus grand possible, et ainsi de suite. Nous arrivons ainsi à une certaine racine positive *dominante*, soit

$$\omega^{\alpha_1} = m_1\varphi^1 + m_2\varphi^2 + \ldots + m_l\varphi^l;$$

il est clair que les entiers $a^{\alpha_1}_i (i = 1, 2, \ldots, l)$ doivent être tous négatifs ou nuls, et par suite, d'après (5), le vecteur contravariant m^i est situé à l'intérieur de (D) ou sur sa frontière.

---

(1) Elles imposent des conditions au choix du groupe $\mathcal{G}'$.

Supposons maintenant que nous rangions les indices dans un autre ordre et que nous arrivions ainsi à une autre racine dominante

$$\omega^{\alpha_2} = n_1\varphi^1 + n_2\varphi^2 + \ldots + n_l\varphi^l,$$

pour laquelle les n^i seront tous positifs ou nuls.

9. Plusieurs cas sont possibles. Si l'on trouve $\omega^{\alpha_2} = \omega^{\alpha_1}$ quel que soit l'ordre dans lequel on range les indices 1, 2,..., l, cela prouve que, dans les différentes racines, le coefficient de φ^i est au plus égal à sa valeur m_i pour la racine dominante ω^{α_1}. Dans ce cas il est clair que les inégalités (1) et (6) sont des conséquences des $l+1$ inégalités

$$\varphi^1 > 0, \quad \varphi^2 > 0, \ldots, \quad \varphi^l > 0; \quad \omega^{\alpha_1} < 1,$$

et le théorème est démontré.

10. Supposons maintenant que ω^{α_2} soit différent de ω^{α_1}; la différence $\omega^{\alpha_2} - \omega^{\alpha_1}$ ne peut être une racine, car elle serait à la fois *positive* (puisqu'on aurait soit $m_1 = n_1$, soit $m_1 = n_1$, $m_2 > n_2$, etc.) et *négative* (pour une raison analogue). L'entier $a_{\alpha_2}^{\alpha_1}$ doit donc être positif ou nul, et par suite, d'après (5), on a

$$\sum_i m_i n^i \leq 0.$$

Comme tous les nombres qui s'introduisent dans le premier membre sont positifs ou nuls, on a, pour chaque indice $i \leq l$,

$$\text{soit } m_i = 0, \qquad \text{soit } n^i = 0.$$

Si aucun des coefficients m_i n'était nul, tous les n^i seraient nuls, ce qui est absurde. L'hypothèse faite exige donc qu'un certain nombre des coefficients m_i soient nuls; supposons que ce soient les $l-p$ derniers. Les formules

$$m^{p+j} = g^{1,p+j}m_1 + g^{2,p+j}m_2 + \ldots + g^{p,p+j}m_p$$

montrent, m^{p+j} étant positif ou nul, qne les $g^{i,p+j}$ sont tous nuls, autrement dlt que les p premières faces de (D) sont toutes perpendiculaires aux $l-p$ dernières; par suite les coefficients a_i^{p+j} et a_{p+j}^i sont tous nuls, et *le groupe est semi-simple.*

Dans ce cas il est facile de voir qu'il y a lieu de considérer autant de racines dominantes qu'il y a de sous-groupes invariants simples dans le groupe donné. Si n est le nombre de ces sous-groupes, et si ω^{α_1}, ω^{α_2},..., ω^{α_n} sont les racines dominantes correspondantes, le polyèdre (P) est limité exactement par $l+n$ faces, et peut être défini par les inégalités

$$\varphi^1 > 0, \quad \varphi^2 > 0, \ldots, \quad \varphi^l > 0; \quad \omega^{\alpha_1} < 1, \ldots, \quad \omega^{\alpha_n} < 1.$$

Nous avons ainsi démontré *a priori* le théorème qui avait été, dans mon Mémoire, vérifié pour chaque structure simple particulière; mais nous voyons de plus comment ce théorème doit être modifié dans le cas d'un groupe semi-simple.

§ III.

11. Les considérations précédentes permettent également de démontrer d'une manière générale un théorème qui a une grande importance dans la théorie de la représentation linéaire des groupes semi-simples. Dans cette théorie on est amené à considérer [1] des formes $\tilde{\omega}$ linéaires en $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^l$ et qui sont les *poids* des variables transformées par le groupe linéaire considéré. Elles jouissent de la propriété que *le symétrique de l'hyperplan* $\tilde{\omega} = 0$ *par rapport à un quelconque des hyperplans* $\omega^\alpha = 0$ *a son équation de la forme* $\tilde{\omega} + c_\alpha \omega^\alpha = 0$, *avec un coefficient* c_α *entier*.

Supposons d'abord que cette propriété ait lieu pour les l premières racines $\omega^i = \varphi^i$. Je dis qu'elle a lieu pour toutes les autres.

Prenons en effet une racine

$$\omega^\alpha = m_1\varphi^1 + m_2\varphi^2 + \ldots + m_l\varphi^l;$$

elle peut se déduire d'une des l premières racines, φ^i par exemple, par une suite de symétries effectuées par rapport aux faces de (D); on a alors, d'après une remarque faite plus haut (n. 3),

$$\sum_k m_k m^k = g^{ii}.$$

Si l'on pose

$$\tilde{\omega} = u_1\varphi^1 + u_2\varphi^2 + \ldots + u_l\varphi^l,$$

on a, d'après (5),

$$c_\alpha = -2\frac{\sum_k u_k m^k}{\sum_k m_k m^k} = -2\frac{\sum_k u_k m^k}{g^{ii}}.$$

---

[1] Voir E. CARTAN, *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane.* (Bull. Soc. Math. de France, 41, 1913, pp. 53-96).

On a, d'autre part, pour $k \leq l$,

$$c_k = -2\frac{u^k}{g^{kk}}, \tag{7}$$

d'où

$$c_\alpha = \frac{\sum\limits_k c_k m_k g^{kk}}{g^{ii}}.$$

Il nous suffit donc de démontrer que chacune des quantités $\frac{m_k g^{kk}}{g^{ii}}$ est un nombre entier. C'est évident pour $k = i$. Si $k \neq i$, et que m_k ne soit pas nul, c'est que, parmi les symétries qui ont fait passer de la racine φ^i à la racine ω^α, s'est rencontrée au moins une fois la symétrie par rapport à l'hyperplan $\varphi^k = 0$.

La dernière fois que cette symétrie s'est effectuée, elle a fait passer d'une certaine racine

$$\omega^\beta = n_1\varphi^1 + n_2\varphi^2 + \ldots n_l\varphi^l$$

à la racine $\omega^\beta + a_k^\beta\varphi^k$; c'est donc qu'on a

$$m_k = n_k + a_k^\beta = n_k - 2\frac{n^k}{g^{kk}}$$

d'où

$$\frac{m_k g^{kk}}{g^{ii}} = \frac{n_k g^{kk}}{g^{ii}} - \frac{2n^k}{g^{ii}} = \frac{n_k g^{kk}}{g^{ii}} + a_\beta^k.$$

Nous sommes donc ramenés a démontrer que le nombre $\frac{n_k g^{kk}}{g^{ii}}$ est entier. Nous pourrons ainsi, en remontant de proche en proche, nous ramener à la racine ω^γ obtenue immédiatement avant d'effectuer la première symétrie par rapport à $\varphi^k = 0$; mais, pour cette racine, le coefficient φ^k est nul, ce qui rend le théorème évident.

12. La formule (7) montre donc, d'après ce qui précède, que la forme $\tilde{\omega}$ la plus générale satisfaisant aux conditions données s'obtiendra en posant

$$u^i = -\frac{1}{2}g^{ii}p_i,$$

les p_i désignant l entiers arbitraires. Autrement dit, les extrémités des vecteurs contravariants u^i forment un *réseau* $\mathfrak{R}$ [1]; ce réseau est manifestement invariant par les opérations de $\mathcal{G}'$, puisque la symétrie par rapport à $\varphi^i = 0$ fait passer de la forme $\tilde{\omega}$ à la forme $\tilde{\omega} + c_i\varphi^i$ qui jouit elle-même des propriétés voulues.

---

[1] Il était évident *a priori* (H. Weyl, Math. Zeitschr., 24, 1925, p. 369) que ces points devaient former un réseau; ce qui est montré ici, c'est qu'on peut trouver l points générateurs du réseau sur les arêtes du domaine (D).

Donnons en particulier aux entiers p_i des valeurs toutes positives ou nulles; nous aurons un point du réseau $\mathfrak{R}$ intérieur à la région (D) ou situé sur sa frontière; tous les autres points homologues par le groupe $\mathcal{G}'$ sont extérieurs à (D). Réciproquement, si l'on prend les homologues par rapport a $\mathcal{G}'$ d'un point quelconque de $\mathfrak{R}$ autre que l'origine, un de ces homologues et un seul est intérieur à (D) ou sur sa frontière; le poids correspondant est le *poids dominant* de l'ensemble des poids homologues considérés.

13. Dans la théorie de la représentation linéaire des groupes semi-simples, à toute représentation linéaire irréductible correspond un poids dominant et un seul, et réciproquement. Le fait que ces poids dominants engendrent un réseau à coordonnées *positives ou nulles* est équivalent au théorème d'après lequel il existe l groupes linéaires fondamentaux irréductibles permettant d'engendrer tous les autres ([1]), théorème que, dans un mémoire déjà ancien, j'ai vérifié pour chaque structure simple. La recherche des l poids dominants fondamentaux est, comme on le voit, immédiate une fois qu'on a construit le domaine (D).

14. On peut ajouter une remarque intéressante. Il résulte des belles recherches de H. Weyl ([2]) que le nombre des variables d'une représentation linéaire irréductible peut s'obtenir de la manière suivante. Soit $(p_1, p_2, \dots, p_l)$ le sommet du réseau $\mathfrak{R}$ qui représente le poids dominant correspondant, et considérons les deux sommets $A(1, 1, \dots, 1)$ et $P(p_1 + 1, p_2 + 1, \dots, p_l + 1)$ du même réseau. Le nombre cherché est le quotient du produit des distances du point P aux différents hyperplans $\omega^\alpha = 0$ par le produit des distances du point A à ces mêmes hyperplans. Il résulte aussi indirectement des mêmes recherches que, si l'on désigne par F la forme fondamentale, *la forme linéaire*

$$\frac{1}{2}\sum_i g^{ii}\frac{\partial F}{\partial \varphi^i}$$

est égale à la somme des racines ω^α *positives*: on voit difficilement comment cette propriété pourrait se démontrer directement.

([1]) E. Cartan, Bull. Soc. Math. de France, 41, 1913; loc. cit., n. 12.

([2]) H. Weyl, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen*, III (Math. Zeitschr., 24, 1925, pp. 382-389).

Nets of manifolds in i dimensions [1].

TEMPLE RICE HOLLCROFT (to Wells College, Aurora, New York)

1. Introduction.

In the plane, the properties of nets of curves with or without basis points have been fully determined. In ordinary space, aside from finding the properties of the Jacobian of a net of surfaces, very little has been done and in higher dimensions I have found no mention of nets except as special cases of linear systems of manifolds.

The purpose of this paper is to determine the characteristic properties of a net of $(i-1)$-dimensional manifolds of order n with or without basis points of multiplicity r in a space of i dimensions. The formulas expressing these properties will all be stated in terms of i, n and r, so that they may be immediately specialized for nets of any order in a space of any number of dimensions.

2. The Jacobian, tact-invariant and discriminant.

A net of $(i-1)$-dimensional manifolds of order n in i dimensions may be represented by the equation

$$\lambda_1 f_1(x_1, x_2, \ldots x_{i+1}) + \lambda_2 f_2(x_1, \ldots x_{i+1}) + \lambda_3 f_3(x_1, \ldots x_{i+1}) = 0.$$

Since one invariant condition in sufficient that an $(i-1)$-dimensional manifold in i dimensions have a hypernode, a single infinity of manifolds of the net have a hypernode. The locus of these hypernodes is a one-dimensional manifold or hypercurve, the Jacobian of the net. The Jacobian is defined by a matrix containing $i-1$ independent determinants of the third order each of which represents an $(i-1)$-dimensional manifold of order $3(n-1)$.

[1] Presented to the American Mathematical Society, October 29, 1927.

The hypercurve common to this set of $i-1$ manifolds is the Jacobian and is of order

$$\frac{1}{2}i(i+1)(n-1)^{i-1}. \tag{1}$$

The Jacobian will be represented by the symbol $J(x)$ and any $(i-1)$-dimensional manifold of order n of the net by f_n.

Since one condition is sufficient to express the relation that one f_n have simple contact with another f_n, there is a single infinity of the f_n that have contact with each other. The locus of these contacts is also $J(x)$.

The condition that two f_n have simple contact with each other is called the tact-invariant of the two f_n. The order of this condition in the coefficients of either f_n will be determined. Since the contacts must lie on the Jacobian, tho number possible for any manifold f_n is the number of points of intersection of that f_n and the Jacobian. This is the product of the orders of the Jacobian and the f_n, which gives

$$\frac{1}{2}i(i+1)n(n-1)^{i-1} \tag{2}$$

as the order of the tact-invariant of two f_n in the coefficients of either.

The order of the condition that an f_n have a hypernode is equal to the number of such f_n of a pencil that have a hypernode. This invariant condition is the discriminant of the f_n. It is the eliminant of $i+1$ equations each of order $n-1$ in $i+1$ homogeneous variables. The discriminant of an f_n is therefore of order

$$(i+1)(n-1)^i \tag{3}$$

in the coefficients of that f_n.

3. **Properties of the net found by trasformation.**

In a way similar to that used by ENRIQUES [1] for a net of curves in the plane, the properties of the net of f_n may be found by transformation.

Consider that the f_n of the net in i-space (x) are in (1, 1) correspondence with the lines of the plane (y). This transformation is expressed by

[1] F. ENRIQUES, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. Bologna, 1918, vol. II, pp. 177-180.

the equations

$$y_j = f_{n,j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Since a point P of (y) is determined by a pencil of lines of (y), the image of P is an $(i-2)$-dimensional manifold of order n^2, which is the common intersection of all the f_n that are images of lines through P.

Of the net of f_n of (x), we have seen that a single infinity have a hypernode. Corresponding to these f_n that have a hypernode, there is a single infinity of lines in (y) that envelop a curve called the branchpoint curve of (y). Also to the single infinity of contacts of the f_n of (x) correspond points of (y) that generate the same branchpoint curve. This branchpoint curve will be represented by the symbol $L(y)$.

The image of any point P of $L(y)$ is the basis $(i-2)$-dimensional manifold of order n^2 of a pencil of surfaces that have contact at a point P'. Inversely, to P' corresponds P. The points P and P' are therefore in (1, 1) correspondence. But P' is on $J(x)$ since it lies at a contact of two f_n. Therefore the plane curve $L(y)$ and the hypercurve $J(x)$ are in (1, 1) correspondence.

Since to a point of $L(y)$ corresponds a contact of two f_n, the equation of $L(y)$ in point coordinates is the condition that two f_n have a contact, which is the tact-invariant (2). The order of $L(y)$ is, therefore,

$$n_1 = \frac{1}{2} i(i+1)n(n-1)^{i-1}.$$

Since to a tangent to $L(y)$ corresponds an f_n which has a hypernode, the equation of $L(y)$ in line coordinates is the condition that an f_n have a hypernode, which is the discriminant (3). The class of $L(y)$ is, therefore,

$$m_1 = (i+1)(n-1)^i.$$

Since there are two independent parameters in the net of manifolds, a finite number of manifolds f_n can be found that will satisfy two conditions on these parameters. Since one invariant is necessary and sufficient for each hypernode, two invariants for each hyperbinode, one invariant for each simple contact and two invariants for each stationary contact, there are a finite number of f_n that have:

a) two hypernodes,

b) one hyperbinode,

c) two simple contacts with another f_n,

d) one stationary contact with another f_n.

To each f_n with a hypernode corresponds a tangent to $L(y)$, and conversely. Then to each f_n with two hypernodes or a hyperbinode corresponds respectively a bitangent or a stationary tangent of $L(y)$ and conversely. Since to a simple contact of two f_n corresponds a point of $L(y)$ and conversely, to two simple contacts of two f_n corresponds a node of $L(y)$ and conversely. When the two contacts of the two f_n unite to form a stationary contact, the node of $L(y)$ becomes a cusp, so the cusps of $L(y)$ are in (1, 1) correspondence with the stationary contacts of the f_n of (x).

The numbers of the f_n that satisfy the invariant conditions *a), b), c), d)* can therefore be respectively determined if the number of bitangents τ_1, inflections ι_1, nodes δ_1 and cusps $\varkappa_1$ of $L(y)$ can be found. Since the order and class of $L(y)$ is known, all of its characteristics can be determined by PLÜCKER'S equations if its genus can be obtained. Since it is in (1, 1) correspondence with $J(x)$, the genus of $L(y)$ is the same as that of $J(x)$ so we need now to find the genus of the hypercurve $J(x)$.

SEGRE [1] derives the following expression for the genus of a hypercurve without singularities:

$$p_1 = \frac{1}{2} N_1 - N + 1,$$

wherein N is the order of the hypercurve and N_1 the order of its first osculating developable.

For $J(x)$, N is defined by (1) in section 2 and N_1 has the value

$$N_1 = \frac{1}{2}(i^2 - 1)(n-1)^{i-1}[(i+4)(n-2)+4].$$

The genus of $J(x)$ is, therefore,

$$p_1 = \frac{1}{4}(i+1)(n-1)^{i-1}[(i-1)(i+4)(n-2)+2(i-2)]+1.$$

[1] C. SEGRE, *Mehrdimensionale Räume, Encyklopädie der Math. Wissenschaften,* Band. III_2, Heft. 7, s. 883.

The characteristics of $L(y)$ are therefore as follows:

$$n_1 = \frac{1}{2} i(i+1)n(n-1)^{i-1}$$
$$m_1 = (i+1)(n-1)^i$$
$$p_1 = \frac{1}{4}(i+1)(n-1)^{i-1}[(i-1)(i+4)(n-2)+2(i-2)]+1$$
$$\delta_1 = \frac{1}{8}(i+1)(n-1)^{i-1}[i^2(i+1)n^2(n-1)^{i-1}-2(3i^2+16i-16)(n-2)-8(5i-4)]$$
$$\varkappa_1 = \frac{1}{2}(i^2-1)(n-1)^{i-1}[(i+6)(n-2)+6]$$
$$\tau_1 = \frac{1}{4}(i+1)(n-1)^{i-1}[2(i+1)(n-1)^{i+1}-(i+2)(3in+n-6i)+2]$$
$$\iota_1 = \frac{1}{2} i(i+1)(i+2)(n-2)(n-1)^{i-1}.$$

The number of $(i-1)$-dimensional manifolds of order n of a net in i dimensions that have

a) two hypernodes,

b) one hyperbinode,

c) two simple contacts with another manifold of the net,

d) one stationary contact with another manifold of the net,

are therefore the values found above for τ_1, ι_1, δ_1, $\varkappa_1$ respectively.

The factor $n-2$ occurs explicitly in ι_1 and implicitly in τ_1. It does not occur in $\varkappa_1$ and occurs in δ_1 only for $i=1$ or 2. This defines these characteristics when the net is of order 2.

The points of $L(y)$ are in (1, 1) correspondence with the points of $J(x)$, but the complete image of $L(y)$ is an $(i-1)$-dimensional manifold of order

$$\frac{1}{2} i(i+1)n^2(n-1)^{i-1}.$$

To each point of $L(y)$ corresponds an $(i-2)$-dimensional manifold with a hypernode on $J(x)$. The complete image of $L(y)$ is, therefore, the locus of a single infinity of such manifolds which is a manifold of $i-1$ dimensions, of the above order and containing the hypercurve $J(x)$ as a double curve.

The complete image of $L(y)$ will be denoted by $J'(x)$ and may be called the co-Jacobian of the net. For two dimensions, the co-Jacobian is the residual curve after $J(x)$ is taken twice from the complete image of $L(y)$, but for $i>2$, the co-Jacobian is an $(i-1)$-dimensional manifold containing $J(x)$ as a double curve.

4. The effect of basis points of the net.

For $i \neq 3$, a general net of manifolds has no isolated basis points. For $i = 3$, a net of surfaces of order n always has n^3 simple basis points or their equivalent. So long as these basis points are simple and distinct, they are not found on the Jacobian and do not affect in any way the singular surfaces of the net except that these n^3 points are common to all surfaces of the net and to all curves which are intersections of these surfaces. Contacts of surfaces of the net do not occur at these points.

In general, for any $i \geqq 3$, a net of manifolds always has a basis $(i-3)$-dimensional manifold of order n^3. This $(i-3)$-dimensional manifold lies in all of the $(i-2)$-dimensional manifolds of order n^2 which are intersections of manifolds of the net, but it has no points in common with the Jacobian. However, since it is common to all the $(i-2)$-dimensional manifolds which are images of points of $L(y)$, it is contained in the $(i-1)$-dimensional manifold $J'(x)$.

In the following, the net of $(i-1)$-dimensional manifolds f_n in i dimensions will be assumed to have one r-fold basis point P which is r-fold on all f_n. The results can be extended to any number of basis points of orders r_j by making the same reduction for each r_j-fold point that is given for the r-fold point.

If a net of f_n has an r-fold basis point P, the order of $J(x)$ is not affected, but all the other characteristics of the net are changed when $r > 1$, $i > 2$ or $r \geqq 1$, $i = 2$. The order of P on $J(x)$ is

$$\frac{1}{2}(r-1)^{i-2}[i(i+1)r + 2(i-3)] \ (^1).$$

The genus of $J(x)$ becomes

$$p_1 = \frac{1}{4}\{(i+1)(n-1)^{i-1}[(i-1)(i+4)(n-2) + 2(i-2)] \\ - (i-1)(r-1)^{i-2}[(i+1)(i+4)r(r-1) + 2(i-2)(r-3) + 4]\} + 1.$$

The order of the tact-invariant of two f_n in the coefficients of either is

(1) The expression $(r-1)^{i-2}$ is indeterminate when $i = 2$ and $r = 1$ simultaneously, but it approaches unity as a limit when i and r approach the values 2 and 1 respectively along algebraic curves whose equations are of the form $i = f(r)$ or $r = F(i)$. This expression will therefore be assigned the value unity when $i = 2$ and $r = 1$ simultaneously.

the number of intersections, exclusive of those at P, of $J(x)$ and an f_n. This number is

$$n_1 = \frac{1}{2} i(i+1)[n(n-1)^{i-1} - r^2(r-1)^{i-2}] - (i-3)r(r-1)^{i-2}.$$

An r-fold basis point of a pencil of $(i-1)$-dimensional manifolds of order n in i dimensions reduces the number of manifolds of the pencil by the number

$$(r-1)^{i-1}[(i+1)r + i - 1].$$

The order of the discriminant of an f_n with an r-fold point is, therefore,

$$m_1 = (i+1)[(n-1)^i - r(r-1)^{i-1}] - (i-1)(r-1)^{i-1}.$$

The order, class and genus of $L(y)$ when the net of f_n has an r-fold point are given by the above values of n_1, m_1 and p_1 respectively. The singularities of $L(y)$, found by PLÜCKER'S equations, are as follows:

$$\begin{aligned}\tau_1 = {} & \frac{1}{2}\{(i+1)[(n-1)^i - r(r-1)^{i-1}] - (i-1)(r-1)^{i-1}\}^2 \\ & -\frac{1}{4}\{(i+1)(i+2)(3i+1)[(n-2)(n-1)^{i-1} - r(r-1)^{i-1}] \\ & + 2(i+1)^2(n-1)^{i-1} - 2(r-1)^{i-2}[r(2i^2-5i+5) - (i-1)(9i-17)]\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iota_1 = {} & \frac{1}{2}\{i(i+1)(i+2)[(n-2)(n-1)^{i-1} - r(r-1)^{i-1}] \\ & - (i-2)(r-1)^{i-2}[(i-3)(r-2) - 4i]\}.\end{aligned}$$

$$\delta_1 = \tau_1 + \frac{1}{2}(n_1 - m_1)(n_1 + m_1 - 9),$$

$$\varkappa_1 = \iota_1 + 3(n_1 - m_1) \ (^1).$$

Therefore, when the net of $(i-1)$-dimensional manifolds of order n in i dimensions has a basis point of multiplicity r, the number of manifolds of the net that have two hypernodes or one hyperbinode are given by the values of τ_1 and ι_1 respectively, and the number of manifolds of the net that have two simple conctacts or one stationary contact with another member of the net are given by the values of δ_1 and $\varkappa_1$ respectively.

---

(1) The expressions for δ_1 and $\varkappa_1$ are more involved than the others and are not so important, so they are not given in terms of n, i and r. They can be found readily for any particular case.

Fonctions à croissance régulière et itération d'ordre fractionnaire

par PAUL LÉVY (à Paris)

CHAPITRE I.

Notions générales sur les fonctions régulières.

1. La notion de fonction à croissance régulière est une de ces notions intuitives qui semblent d'abord parfaitement claires, mais dont la difficulté apparaît à la réflexion; les remarques simples que l'on peut faire sur les raisons qui nous font considérer certaines fonctions comme régulières ne suggèrent en effet aucune définition précise de la régularité. Le présent travail contient l'exposé de recherches dont le but est d'obtenir une telle définition.

Je me suis laissé guider dans ces recherches par des considérations intuitives, et forcément subjectives, basées d'une part sur la notion esthétique de courbe régulière (c'est-à-dire sans sinuosités), d'autre part sur la notion d'induction, les remarques que l'on peut faire sur les exemples simples de courbes régulières semblant susceptibles d'être généralisées. Des considérations de cette nature ne peuvent être invoquées qu'au point de vue heuristique; il s'agit ensuite de démontrer les résultats que l'on a été conduit à énoncer. Dans le cas particulier, j'ai ainsi été conduit à énoncer des résultats que je n'ai pas réussi à démontrer; après quelques tentatives infructueuses, je crois utile, dans l'intérêt de la science, de faire connaître tout de même l'ensemble de la théorie à laquelle j'ai été conduit. Le lecteur trouvera donc, à côté de certains résultats précis et démontrés, d'autres énoncés dont l'exactitude n'est que probable. Je serais heureux si cette lecture pouvait provoquer de nouvelles recherches, destinées à démontrer les résultats que je n'ai fait qu'énoncer: c'est un sujet de recherches difficile, mais même un résultat partiel ne serait pas sans importance.

Des résumés de mes recherches ont déjà été présentés à l'Académie des Sciences de l'Institut de France (1926 et 1927), au Congrès pour l'Avancement des Sciences de Poitiers (1926), et au Congrès International des Mathématiciens de Bologne (1928). Enfin, sous le titre «Introduction à une théorie des fonctions à croissance régulière », j'ai publié dans le Journal de Mathématiques (1928) une étude sur les échelles complètes de croissance, étude qui est liée aux recherches dont j'expose ici le résultat; je rappellerai d'ailleurs ce qui est nécessaire pour éviter au lecteur d'avoir à se reporter au Mémoire en question.

2. Pour indiquer ce qui me paraît être un des caractères essentiels de la notion de régularité, je prendrai l'exemple d'une fonction telle que $e^x + \sin x$; nous la considérons comme irrégulière, parce qu'elle oscille indéfiniment entre les fonctions plus simples $e^x + 1$ et $e^x - 1$; de même la fonction $e^x + e^{-x} \sin \log x$, malgré la lenteur et la petitesse de ses oscillations, est irrégulière, parce qu'elle oscille une infinité de fois entre les fonctions plus simples $2 \operatorname{ch} x$ et $2 \operatorname{sh} x$. Au contraire, l'une quelconque de ces fonctions plus simples, $2 \operatorname{ch} x$ par exemple, est régulière, parce qu'il n'existe aucune fonction plus simple qu'elle qui lui soit égale une infinité de fois, pour des valeurs de x indéfiniment croissantes.

De ces premières remarques, nous ne pouvons pas déduire une définition; il semble même que nous ayons augmenté la difficulté du problème, car il doit être plus difficile de définir la plus ou moins grande simplicité (ou en d'autres termes la plus ou moins grande régularité) des fonctions que de définir la *régularité parfaite* qui caractérise les fonctions que nous appelons *régulières* (ou *à croissance régulière*). Il résulte pourtant de ces remarques une propriété précise de l'ensemble des fonctions régulières, qui doit vérifier les deux conditions suivantes:

Condition a): si deux fonctions distinctes $f(x)$ et $g(x)$ appartiennent à cet ensemble, leur différence est pour x assez grand différente de zéro et d'un signe déterminé; l'une d'elles est alors supérieure à l'autre, pour x assez grand; nous dirons qu'elle croît plus vite que l'autre.

Condition b): si une fonction $g(x)$ n'appartient pas à cet ensemble, on peut trouver au moins une fonction $f(x)$ de cet ensemble telle que la différence $f(x) - g(x)$ ne soit ni constamment positive, ni constamment négative, pour x assez grand; cela revient à dire qu'on ne peut ajouter à l'ensemble aucune fonction nouvelle sans que la condition *a* cesse d'être vérifiée.

Les ensembles vérifiant ces conditions constituent ce que j'appelle des *échelles complètes de croissance;* si la première condition est vérifiée, mais non la seconde, l'échelle est incomplète. Les échelles, complètes ou incomplètes, ont été étudiées d'une manière générale dans mon Mémoire cité plus haut.

On observe que s'il s'agit de fonctions continues (et les fonctions régulières seront bien entendu des fonctions continues), l'énoncé de la condition *b* peut se simplifier: il suffit d'écrire que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont une infinité de fois égales, pour des valeurs de x indéfiniment croissantes.

L'existence d'échelles complètes est évidente, au point de vue idéaliste. L'ensemble des fonctions continues étant supposé bien ordonné, on n'a qu'à examiner toutes les fonctions l'une après l'autre et classer dans un ensemble $\mathcal{E}$ toutes celles qui peuvent l'être, c'est-à-dire qui croissent, soit plus vite, soit moins vite, que n'importe quelle fonction classée dans $\mathcal{E}$; l'ensemble $\mathcal{E}$ finalement obtenu sera une échelle complète.

On remarque que, chaque fois que dans l'application de ce procédé on obtient une fonction $f(x)$ acceptable, on peut soit la classer elle-même dans l'ensemble $\mathcal{E}$, soit choisir, pour la classer dans $\mathcal{E}$, une autre fonction, égale une infinité de fois à $f(x)$, et acceptable, c'est-à-dire croissant, soit plus vite, soit moins vite, que n'importe laquelle des fonctions choisies initialement. De toute façon, l'ensemble ainsi formé sera une échelle complète.

3. Les fonctions régulières doivent donc constituer une échelle complète de croissance. Mais il s'agit de distinguer l'ensemble de ces fonctions des autres échelles complètes. Dans ce but, on peut d'abord se proposer de faire intervenir certains caractères simples des fonctions. On sait que des dérivations peuvent accentuer les irrégularités des fonctions; ainsi la fonction $\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x^{10}}$ est positive pour $x>0$ et chacune de ses 9 premières dérivées a un signe constant pour x assez grand, mais la dixième a une infinité de changements de signes; c'est là une circonstance que nous considérons comme une preuve de l'irrégularité de cette fonction.

Une deuxième condition imposée à la définition de la régularité sera donc que les fonctions régulières soient continues, indéfiniment dérivables, chacune de leurs dérivées ayant un signe constant pour x assez grand, c'est-à-dire à partir d'une certaine valeur de x qui peut n'être pas la même pour toutes les dérivées. Ainsi la fonction e^{-x^2} est régulière; sa dérivée de rang n est, pour x assez grand, du signe de $(-1)^n$; mais la valeur x_n à partir de laquelle il en est ainsi augmente indéfiniment avec n; on ne peut pas trouver un intervalle déterminé dans lequel toutes les dérivées aient un signe constant, et soient par suite monotones [1].

---

[1] On sait par un résultat de M. SERGE BERNSTEIN que, s'il en était ainsi, la condition du texte entraînerait l'analyticité des fonctions considérées; mais le fait que les x_n ne soient pas bornés empêche l'application de ce résultat. La question se pose de savoir si on peut le généraliser au cas qui nous occupe. Je considère d'ailleurs qu'il n'est pas douteux que les

Remarquons d'ailleurs que cette condition d'existence et de monotonie de toutes les dérivées, si elle est nécessaire, n'est sûrement pas suffisante pour la régularité. Ainsi la fonction $e^x + \sin x$ est irrégulière, bien que toutes ses dérivées soient positives pour x positif; de même la fonction

$$\frac{1}{x \log x}\left(1 + \frac{1}{2} \sin \log \log x\right)$$

a chacune de ses dérivées monotones pour x assez grand et est irrégulière.

Observons que cette condition de monotonie, jointe à la précédente, donne un résultat positif: tous les polynomes sont des fonctions régulières. Si en effet un polynome $P(x)$ de degré n n'était pas régulier, on devrait trouver une fonction régulière $f(x)$ égale une infinité de fois à ce polynome; cela n'est pas possible, le théorème de Rolle nous montrant que la dérivée d'ordre $n+1$ de $f(x)$ devrait changer de signe une infinité de fois.

Nous avons dit tout à l'heure qu'une fonction nous apparaît comme *parfaitement régulière* si on ne peut pas en trouver une *plus régulière* qui lui soit égale une infinité de fois; dans le cas des polynomes, cet énoncé prend un sens très précis.

4. L'insuffisance de la propriété précédente, et l'absence de toute autre opération de l'analyse élémentaire qui soit plus efficace que la dérivation pour déceler les irrégularités des fonctions, conduit à introduire des considérations d'un tout autre ordre, basées sur la nature des opérations analytiques qui conduisent à définir les fonctions considérées. Au lieu de chercher à mettre en évidence une propriété intrinsèque des fonctions qui pourrait caractériser la régularité, nous sommes conduits à former de proche en proche de nouvelles fonctions régulières par des opérations analytiques qui ne soient par elles-mêmes susceptibles d'introduire aucune irrégularité; de telles opérations sont ce que nous appellerons des *opérations régulières*. En partant des polynomes, on pourra par ces opérations former des ensembles étendus de fonctions régulières.

Ces opérations régulières doivent comprendre au moins la dérivation, l'intégration, les quatre opérations élémentaires, et, dans le cas d'une fonction $y = f(x)$ indéfiniment croissante, la formation de la fonction inverse $x = f_{-1}(y)$

---

fonctions régulières soient analytiques; mais cela ne résulte peut-être pas nécessairement des conditions déjà indiquées.

Il est probable qu'inversement, toute fonction analytique, réelle pour x très grand, et méromorphe à l'infini, est régulière. Mais les fonctions ayant à l'infini un point singulier essentiel peuvent être régulières ou irrégulières.

et des fonctions régulières de $f(x)$. Ces opérations et leurs combinaisons sont ce que nous appellerons les *opérations régulières élémentaires*.

Par ces opérations répétées un nombre fini n de fois, en partant d'un polynome de degré p, on ne peut obtenir que des fonctions dépendant d'une manière continue d'un nombre fini de paramètres; même en augmentant indéfiniment n et p, même en définissant de nouvelles opérations régulières, on ne peut pas arriver à former ainsi toutes les fonctions régulières. On n'obtiendra sûrement pas un ensemble contenant des fonctions plus rapidement croissantes que n'importe quelle fonction donnée. Pourtant déjà une question se pose: la troisième condition ainsi imposée à la définition de la régularité est-elle compatible avec les précédentes; est-on notamment assuré que deux fonctions distinctes formées par des opérations régulières ne peuvent pas être une infinité de fois égales?

La réponse ne semble pas douteuse; il semble même que l'on puisse arriver à une démonstration par une classification méthodique des divers infiniment petits ou infiniment grands introduits par les opérations indiquées, et par des développements en séries de forme suffisamment générale. Mais la grande variété des combinaisons à prévoir rend la démonstration rigoureuse difficile. Disons donc seulement, pour résumer les résultats obtenus jusqu'ici, que des considérations intuitives nous ont conduit à penser qu'il était possible de définir un ensemble de fonctions régulières vérifiant les conditions suivantes:

1) Cet ensemble constitue une échelle complète de croissante.

2) Toutes les fonctions de cet ensemble sont continues, indéfiniment dérivables, et sont monotones pour x assez grand; (la monotonie des dérivées résulte alors de la condition suivante).

3) Cet ensemble est fermé par rapport aux opérations régulières élémentaires définies ci-dessus.

5. Il est essentiel de définir d'autres opérations régulières; les résultats principaux de ce travail reposeront sur l'étude de l'*itération régulière*. Mais quelques remarques préalables seront utiles.

Considérons une fonction de deux variables $f(x, y)$, et supposons que, pour y constant, ce soit une fonction régulière de x, et que d'autre part elle dépende d'une manière continue de y; il y a lieu de penser qu'on peut la considérer comme régulière en x et y, et que par suite une fonction de la forme $f[\varphi(t), \psi(t)]$ est régulière en t si $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions régulières indéfiniment croissantes de t; si cette propriété est vérifiée, nous dirons que $f(x, y)$ est une *fonction régulière des deux variables* x et y. Pour montrer que cette régularité par rapport aux deux variables résulte bien de la régularité par rapport à chacune des variables, il suffit d'établir que la régularité par rapport à chacune des variables entraîne celle de $f(x, x)$; en appliquant ce résultat à la fonction $F(t, u) = f[\varphi(t), \psi(u)]$, on obtient le résultat plus général concernant la régularité de $f[\varphi(t), \psi(t)]$,

La dérivation et l'intégration d'une fonction de deux variables doivent alors être ajoutées à la liste des opérations régulières. Observons notamment qu'une intégrale du type

$$f(x) = \int_0^\infty F(x, y)\varphi(y)dy \tag{1}$$

doit être une fonction régulière de x si $F(x, y)$ et $\varphi\, y)$ sont des fonctions régulières.

Il faut aussi admettre la régularité de chaque branche de fonction définie par l'équation implicite $f(x, y) = 0$, si la fonction $f(x, y)$ est régulière. Il en résulte que toute détermination, réelle pour x assez grand, d'une fonction algébrique, est régulière; il en est donc de même pour toute fonction algébrique de x, e^x, $\log x$.

Il faut d'autre part éviter d'étendre aux séries la remarque faite sur l'intégrale (1). Ainsi dans la série

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{2}$$

ainsi que dans les séries que l'on en déduit en ne conservant que les termes de rangs multiples d'un entier p, le terme de rang n, soit $\frac{x^{np}}{(np)!}$, dépend d'une manière régulière de x et de n; pourtant la somme, régulière pour $p = 1$ ou 2, est irrégulière pour $p > 2$; pour $p = 4$, par exemple, elle a la valeur $\frac{\operatorname{ch} x + \cos x}{2}$.

La raison en est facile à comprendre; dans la série (2), x croissant, le rang du plus grand terme croît; chaque terme joue à son tour un rôle prépondérant; les différents termes déterminent successivement l'ordre de grandeur de la fonction comme les poteaux successifs d'une ligne télégraphique soutiennent cette ligne, qui s'abaisse chaque fois entre deux poteaux. On a donc des irrégularités d'autant plus marquées que les termes conservés sont plus espacés, même si leurs rangs forment une suite régulière.

Du moins, l'image qui précède serait exacte si l'on prenait les termes de rangs $n = 1, 2^2, \ldots, p^2, \ldots$, ou d'une suite de nombres croissant plus rapidement encore. En prenant des termes dont les rangs constituent une progression arithmétique, on a un nombre croissant (comme $\sqrt{x}$) de termes qui sont sensiblement du même ordre de grandeur, et le cas simple ou il n'y a qu'un terme prépondérant (ou un petit nombre de tels termes) n'est pas réalisé. L'irrégularité de la série n'est pas certaine dans ces conditions; mais la remarque que dans la série e^x, en prenant la somme des termes de p en p, on obtient une fonction régulière si $p=1$ ou 2 et irrégulière si $p=3$ ou 4 montre bien la difficulté d'une théorie générale. Retenons seulement qu'on ne sera pas certain *a priori*, quelle que soit la régularité de la formation des termes d'une série, que sa somme soit régulière, et souvent on établira au contraire aisément qu'elle est irrégulière; au contraire, dans le cas d'une intégrale, qui n'a pas la même cause de discontinuité, on est sûr de la régularité.

6. Il existe un lien évident entre la notion de fonction régulière et celle d'une suite régulière de nombres $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$; si une fonction $f(x)$ est régulière, la suite des nombres $y_n = f(n)$ est régulière, et sa donnée détermine parfaitement la fonction $f(x)$, puisqu'il est impossible que deux fonctions régulières distinctes soient égales pour toutes les valeurs entières de x; la détermination de $f(x)$ connaissant les nombres $y_n = f(n)$ est ce que nous appellerons *l'interpolation régulière* de cette suite de nombres.

Il n'est guère douteux que toute suite qui n'est pas régulière oscille indéfiniment entre deux suites régulières bien déterminées, ou, ce qui revient au même, entre les fonctions correspondantes.

Par une extension naturelle de la notion d'opération régulière, on peut admettre que toute formule permettant de définir une suite, si elle n'introduit aucune cause d'irrégularité, ne peut définir qu'une suite régulière. Il doit en être ainsi notamment dans le cas d'une relation de récurrence de la forme

$$y_n = \varphi(n, y_{n-1}) \tag{3}$$

si la fonction $\varphi(x, y)$ est régulière. On obtient alors une suite régulière dont l'interpolation régulière définit une fonction bien déterminée $f(x)$. Il est important d'observer que, bien que cette interpolation puisse être définie indépendamment de la relation de récurrence (3), la fonction obtenue vérifie sûrement cette relation étendue au cas des valeurs non entières de x, c'est-à-dire que l'on a

$$f(x) = \varphi[x, f(x-1)].$$

Les deux membres sont en effet des fonctions régulières, égales pour toutes les valeurs entières de x; ils sont donc égaux.

Ce principe a de nombreuses applications. Il suffit de mentionner le problème de l'interpolation régulière des sommes successives d'une série, et l'étude de la fonction eulérienne qu'on peut déduire d'une telle interpolation. Nous l'appliquerons au cas où l'on donne une fonction régulière $f(x)$, monotone et supérieure à x; la suite des nombre itérés

$$x_0, \quad x_1 = f(x_0), \ldots, \quad x_n = f(x_{n-1}) = f_n(x_0), \ldots, \tag{4}$$

est une suite régulière de nombres indéfiniment croissants; l'interpolation régulière de cette suite permet de définir une fonction régulière $f_\alpha(x_0)$ d'une variable α, et, bien que cette fonction puisse être obtenue sans tenir compte des relations de récurrence (4), elle vérifie sûrement la relation

$$f_{\alpha+1}(x_0) = f[f_\alpha(x_0)] \tag{5}$$

qui généralise les relations (4).

Il faut d'ailleurs observer que le raisonnement qui précède n'est utile que pour établir, au point de vue idéaliste, l'existence de la fonction itérée régulière $f_\alpha(x_0)$. Les déterminations effectives de cette fonction reposeront au contraire sur la relation de récurrence (5) et sur une étude asymptotique qui permettra de distinguer des autres la solution régulière de cette équation.

CHAPITRE II.

L'itération régulière.

7. Pour l'étude de l'itération, nous supposerons essentiellement la fonction $f(x)$ étudiée continue, monotone, et croissant indéfiniment avec x, et de plus soit constamment supérieure, soit constamment inférieure à x; l'un de ces cas se ramenant à l'autre par les relations entre les fonctions inverses, nous supposerons pour fixer les idées $f(x) > x$. Donc, en définitive, pour x supérieur à une certaine valeur a, la fonction $f(x)$ est continue, croissante, et supérieure à x.

Le problème de l'itération consiste dans la recherche d'une fonction $f_\alpha(x)$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$f_{\alpha+\beta}(x) = f_\beta[f_\alpha(x)], \tag{6}$$

et se réduisant à $f(x)$ pour $\alpha = 1$; il en résulte évidemment que pour α

entier, $f_\alpha(x)$ se réduit aux itérées d'ordres entiers bien définies par la formule de récurrence

$$f_{n+1}(x) = f[f_n(x)].$$

Nous imposerons de plus à la fonction $f_\alpha(x)$ d'être continue et croissante aussi bien par rapport à x que par rapport à α. Enfin nous supposerons toujours $x > a$ et $\alpha > 0$ (le cas où α est négatif se traitant ensuite sans difficulté, puisque f_α et $f_{-\alpha}$ sont des fonctions inverses l'une de l'autre).

On peut se placer à deux points de vue différents selon qu'on considère ou non α comme une variable. Malgré la plus grande portée de la première méthode, dont le principe a déjà été indiqué à la fin du Chapitre I, nous présenterons d'abord quelques remarques relatives au cas où l'on ne considère pas α comme une variable, et où l'on déduit $f_\alpha(x)$ des déterminations successives des itérées d'ordres $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, etc.

8. L'itérée d'ordre $\frac{1}{2}$, $f_{\frac{1}{2}}(x) = g(x)$, doit être solution de l'équation fonctionnelle

$$g[g(x)] = f(x), \tag{7}$$

qui est un cas particulier de l'équation (6). Montrons d'abord qu'il existe une infinité de solutions de cette équation.

Choisissons une valeur x_0 de x, et pour $y_0 = g(x_0)$ une valeur quelconque entre x_0 et $x_1 = f(x_0)$. Nous pouvons prendre pour $g(x)$, dans l'intervalle (x_0, y_0) une fonction continue, croissante, prenant aux extrémités de cet intervalle les valeurs $y_0 = g(x_0)$ et $x_1 = g(y_0)$, et à cela près quelconque. Si $y = g(x)$, la relation (7) donne $g(y) = f(x)$, et cette relation détermine successivement $g(x)$ dans les intervalles (y_0, x_1), (x_1, y_1), (y_1, x_2),...; on a ainsi une fonction toujours continue et croissante, solution de l'équation (7). On voit qu'on peut la choisir arbitrairement dans une demi-période, en appelant période l'intervalle qui sépare x et $f(x)$, ou encore $f_\alpha(x)$ et $f_{\alpha+1}(x)$, c'est-à-dire l'intervalle pendant lequel l'indice d'itération augmente d'une unité.

Considérons deux solutions distinctes $g_1(x)$ et $g_2(x)$ de l'équation (7): il est impossible que l'une d'elles soit constamment supérieure à l'autre; si en effet on avait $g_1(x) > g_2(x)$, on aurait

$$g_1[g_1(x)] > g_2[g_2(x)],$$

ce qui est impossible, les deux membres devant être égaux à $f(x)$; d'une manière plus précise, si pour $x = x_0$

$$y_0 = g_1(x_0) > z_0 = g_2(x_0),$$

dans l'intervalle (z_0, y_0) on a

$$g_1(x) < g_1(y_0) = f(x_0) = g_2(z_0) < g_2(x),$$

et pour $x_1 = f(x_0)$, $g_1(x)$ est de nouveau supérieur à $f(x)$. Le signe de la différence $g_1(x) - g_2(x)$ change donc au moins deux fois par période et se reproduit périodiquement. Il résulte de ces remarques qu'il y a au plus une détermination régulière de $g(x)$.

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de cette itérée régulière d'ordre $\frac{1}{2}$ est d'ailleurs que la fonction donnée $f(x)$ soit elle-même régulière. La nécessité de cette condition est évidente, d'après la formule (7), une fonction régulière de fonction règulière étant elle-même régulière. La réciproque est plus délicate, et je n'ai pas pu en obtenir de démonstration rigoureuse. Observons seulement que la formule (7) définit une conpure dans l'ensemble des fonctions régulières, les fonctions $\varphi(x)$ telles que $\varphi[\varphi(x)]$ croît plus vite que $f(x)$ étant au-dessus de la conpure et celles dont l'itérée croît moins vite étant au-dessous; c'est de l'étude des coupures dans les échelles de croissance, dont on trouvera les éléments dans mon mémoire déjà cité, que l'on peut espérer déduire une démonstration de l'existence de la fonction $g(x)$, indépendante de l'étude de $f_\alpha(x)$ considérée come fonction de α.

Après avoir défini l'itérée d'ordre $\frac{1}{2}$, on définit successivement de la même manière les itérées d'ordres $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, et ainsi de suite; on introduit ainsi de nouvelles fonctions choisies arbitrairement dans un quart, puis un huitième de période, et ainsi de suite. Tout compte fait, la détermination compléte de $f_\alpha(x)$ dépend d'une fonction choisie arbitrariement dans une période; mais il n'y a qu'une fonction $f_\alpha(x)$ qui soit régulière par rapport à x.

9. Plaçons-nous maintenant au second point de vue, qui consiste à considérer α comme variable. Désignant par x_0 une valeur particulière de x, nous poserons $x = f_\alpha(x_0) = \varphi(\alpha)$; la formule (6) prend alors la forme

$$\varphi(\alpha + \beta) = f_\beta(x), \tag{8}$$

et nous montre que la connaissance de $\varphi(\alpha)$ détermine complètement $f_\alpha(x)$.

Si d'ailleurs on ne connaît pas $f(x)$, on peut prendre pour $\varphi(\alpha)$, de zéro à l'infini, n'importe quelle fonction continue, monotone, et indéfiniment croissante; la formule (8), où $x = \varphi(\alpha)$, définit alors une fonction $f_\beta(x)$ solution de l'équation fonctionnelle (6), et qui est l'itérée de la fonction $f(x)$ obtenue en faisant $\beta = 1$. Si au contraire cette fonction $f(x)$ est donnée, la fonction $\varphi(\alpha)$ ne peut être choisie arbitrairement que de 0 à 1, les valeurs extrêmes $x_0 = \varphi(0)$ et $x_1 = \varphi(1)$ devant être liées par la relation $x_1 = f(x_0)$. Les valeurs de $\varphi(\alpha)$ pour $\alpha > 1$ résultent alors de la formule

$$\varphi(\alpha + n) = f_n[\varphi(\alpha)], \tag{9}$$

où n est un entier positif quelconque. L'itération d'une fonction $f(x)$ donnée ne dépend donc bien que d'une fonction choisie arbitrairement dans une période.

Nous désignerons par $\alpha = \lambda_x(y)$, et appellerons *indice d'itération* ou *logarithme d'itération* de y par rapport à x, le nombre α tel que $y = f_\alpha(x)$; si $y > x > \alpha$, c'est un nombre positif bien déterminé. Les logarithmes d'itération de x et y par rapport à x_0 seront désignés par $\lambda(x)$ et $\lambda(y)$, sans indice inférieur; $\lambda(x)$ est la fonction inverse de $\varphi(\alpha)$, et de même $\alpha = \lambda_x(y)$ et $y = f_\alpha(x)$ sont des fonctions inverses l'une de l'autre, x étant constant et l'inversion portant sur α et y. Avec ces notations, l'équation fonctionnelle (6) prend la forme.

$$\lambda_x(y) = \lambda(y) - \lambda(x), \tag{10}$$

et nous voyons d'une manière plus claire encore que le problème de l'itération se ramène à la détermination de la seule fonction $\lambda(x)$, inverse de la fonction $\varphi(\alpha)$; $f(x)$ étant donné, $\lambda(x)$ doit croître d'une manière continue de $\lambda(x_0) = 0$, à $\lambda(x_1) = 1$, et est à cela près quelconque de x_0 à x_1; pour $x > x_1$, cette fonction est bien déterminée par la formule

$$\lambda[f_n(x)] = n + \lambda(x), \tag{11}$$

qui équivaut à la formule (9).

Comparons deux déterminations différentes de la fonction itérée, déduites de deux déterminations $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$ de $f_\alpha(x_0)$; pour les valeurs entières n de α, ces deux fonctions sont égales à $x_n = f_n(x_0)$, et par suite égales entre elles; l'une de ces fonctions au plus peut donc être régulière. Leur irrégularité relative est d'ailleurs mieux mise en évidence quand on compare les fonctions inverses $\lambda(x)$ et $\mu(x)$; elles augmentent simultanément d'une unité quand on passe de x á $f(x)$; il en résulte que la différence $\lambda - \mu$ est une fonction périodique aussi bien de λ que de μ; le rapport $\dfrac{d\lambda}{d\mu}$ varie aussi périodiquement:

si de x_0 à x_1 on a pris pour $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ des fonctions dont les dérivées ont une limite inférieure positive et une limite supérieure finie, on est donc assuré que $\frac{d\lambda}{d\mu}$ est, de x_0 à l'infini, borné inférieurement et supérieurement. Si x et y croissent indéfiniment, la partie entière de $\lambda(y) - \lambda(x)$ étant bien entendu indépendante du choix de la fonction itérée, la partie fractionnaire de cette différence a aussi son ordre de grandeur indépendant de ce choix.

Il existe donc au plus une itérée régulière, définie par une fonction régulière $\varphi(\alpha)$. Observons d'ailleurs que si la fonction $\varphi(\alpha)$ est régulière, la fonction $f_\beta(x)$ est régulière aussi bien par rapport à x que par rapport à β ou par rapport à l'ensemble des deux variables; cela résulte immédiatement de la formule (8), qui peut s'écrire

$$f_\beta(x) = \varphi[\beta + \lambda(x)], \tag{12}$$

la fonction $\alpha = \lambda(x)$ étant régulière en même temps que la fonction inverse $\varphi(\alpha)$. Donc, sans admettre rien d'autre que la conservation de la régularité par une partie des opérations régulières élémentaires indiquées au n.° 4, nous sommes assurés que la régularité de $\varphi(\alpha)$ entraîne celle de $f_\alpha(x)$ aussi bien par rapport à α que par rapport à x, et celle de fonctions telles que $f_x(x)$ [1]. Nous sommes arrivés ainsi à un résultat plus complet qu'au n.° précédent, où nous ne savions pas que l'itérée régulière en x était aussi régulière en α

Il est d'ailleurs toujours bien entendu que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de cette itérée régulière est la régularité de la fonction $f(x)$. Elle est nécessaire, la régularité de $f_\alpha(x)$ impliquant celle de $f_1(x) = f(x)$; elle est suffisante, la fonction $\varphi(\alpha)$ résultant comme nous l'avons dit au n.° 6 de l'interpolation régulière de la suite des $x_n = f_n(x_0)$, et la fonction $f_\beta(x)$, que l'on en déduit par la formule (8) ou la formule équivalente (12), étant régulière.

Il faut toutefois observer que cette réciproque, comme par la méthode du n.° 8, repose sur des considérations non rigoureuses; même si l'on admet la compatibilité des conditions du n.° 4 imposée à la définition de la régularité,

---

[1] Si $f(x)$ est une fonction rapidement croissante, cette fonction $f_x(x)$ est une fonction régulière croissant plus rapidement que tous les $f_n(x)$. Ce point est important, la fonction

$$\frac{f_1(x)}{f_1(1)} + \frac{f_2(x)}{f_2(2)} + \dots + \frac{f_n(x)}{f_n(n)} + \dots$$

donnée par P. DU BOIS REYMOND et M. E. BOREL comme exemple de fonction croissant plus rapidement que tous les $f_n(x)$ n'étant évidemment pas régulière.

le résultat énoncé au n.° C concernant la possibilité de réaliser l'interpolation régulière des suites régulières, en particulier de la suite des nombres $x_n = f_n(x_0)$, n'est qu'un résultat probable pour des raisons intuitives; on peut le considérer comme une quatrième condition imposée à la définition de la régularité, et dont l'exactitude sera à vérifier lorsque l'on proposera une définition précise.

10. Des considérations idéalistes établissant l'existence d'une itérée régulière, même si elles étaient rigoureuses, ne peuvent dispenser d'indiquer des formules qui permettent de définir effectivement cette fonction. Nous allons indiquer ces formules, obtenues en utilisant d'une part la relation fonctionnelle fondamentale, d'autre part une expression asymptotique des fonctions considérées, permettant de distinguer des autres fonctions considérées celle qui est régulière à l'infini; ces formules s'appliqueront d'ailleurs non seulement aux fonctions parfaitement régulières, mais à celles qui ne seront pas trop irrégulières. Il y aura plusieurs cas à distinguer, suivant la rapidité de la croissance de $f(x)$. Dans tous les cas, nous prendrons la relation fonctionnelle de l'itération sous la forme

$$\alpha = \lambda(y) - \lambda(x) = \lambda(y_n) - \lambda(x_n), \tag{13}$$

où $x_n = f_n(x)$, $y_n = f_n(y)$. Il s'agit de définir α, et comme x_n et y_n augmentent indéfiniment avec n, on peut y arriver par des formules asymptotiques [1].

Supposons d'abord $f(x)$ de la forme

$$f(x) = x + \omega(x), \tag{14}$$

$\omega(x)$ étant une fonction positive, dont la dérivée $\omega'(x)$ tende vers zéro. On remarque que

$$\omega(x_1) = \omega(x) + (x_1 - x)\omega'(\xi) = \omega(x)(1 + \varepsilon),$$

ξ étant compris entre x et x_1, de sorte que $\varepsilon = \omega'(\xi)$ tend vers zéro pour x infini. Par suite

$$f_2(x) - x = \omega(x) + \omega(x_1) \backsim 2\omega(x).$$

De même $f_p(x) - x$ a pour valeur principale $p\omega(x)$, ce qui conduit à penser que, pour l'itérée régulière, on aura

$$f_\alpha(x) - x \backsim \alpha[f(x) - x]. \tag{15}$$

(1) Il est à peine utile de rappeler que l'origine de ces formules se trouve dans un mémoire de M. KOENIGS (Ann. Éc. Norm. Sup., 1884).

Il en est nécessairement ainsi pour toute itérée assez régulière pour que sa dérivée par rapport à x tende pour x infini vers une limite, qui ne peut manifestement être que l'unité; car on peut dans ce cas appliquer à $f_\alpha(x)$ le résultat établi pour $f(x)$; si alors $\alpha = \frac{p}{q}$, la valeur principale de $f_p(x) - x$ doit être égale, d'une part à $p[f(x) - x]$, d'autre part à $q[f_\alpha(x) - x]$.

En comparant les formules (13) et (15), il vient

$$\alpha = \lambda(y) - \lambda(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{y_n - x_n}{x_{n+1} - x_n}, \tag{16}$$

formule qui définit parfaitement α en fonction de x et y, et par suite $y = f_\alpha(x$ en fonction de α et x.

Or il est facile de montrer que cette formule converge effectivement toutes les fois que $\omega'(x)$ tend vers zéro d'une manière monotone, ou même est à variation bornée de x_0 à l'infini. Désignant en effet par α_n le rapport dont on cherche la limite, on obtient par un calcul facile

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \alpha_n \frac{\omega(x_n)}{\omega(x_{n+1})} [\omega'(\xi_n) - \omega'(\xi'_n)]$$

où ξ_n et ξ_n' sont compris entre x_n et x_{n+1}. Au second membre, le premier facteur est compris entre 0 et 1 si (ce qu'on peut supposer) y est compris entre x et x_1; le second tend vers l'unité, et le troisième est le terme d'une série absolument convergente. La convergence de la série $\Sigma(\alpha_{n+1} \quad \alpha_n)$, c'est-à-dire l'existence de la limite de α_n, en résulte. Nous avons donc établi d'une manière rigoureuse, sous la seule condition que $\omega'(x)$ tende vers zéro et soit à variation bornée, l'existence d'une fonction itérée verifiant la relation asymptotique (15); s'il s'agit de fonctions parfaitement régulières, il est clair que c'est l'itérée ainsi définie qui est régulière. Pour toute autre détermination de $f_\alpha(x)$, à cause de ce qui a été dit sur le caractère périodique de la variation relative de deux déterminations différentes, il faudrait au second membre de la relation (15) remplacer α par $\alpha + P[\lambda(x)]$, P désignant une fonction périodique, et l'on obtiendrait une fonction manifestement irrégulière.

Considérons maintenant le cas de fonctions $f(x)$, toujours supérieures à x, et de la forme $x\Omega(x)$, la fonction $\Omega(x)$ ne tendant pas nécessairement vers l'unité, pouvant même devenir infinie, mais moins rapidement que n'importe quelle puissance de x. On est alors ramené au cas précédent en considérant $\log f(x)$ comme fonction de $\log x$ (un même changement de variable effectué sur la variable et la fonction ne changeant pas l'équation fonctionnelle de l'itération). Donc, sous la condition que la fonction $\Omega(x)$ soit assez régulière pour que $\dfrac{x\Omega'(x)}{\Omega(x)}$ tende vers zéro et soit à variation bornée, on obtient une itérée, bien déterminée par la condition que $f_\alpha(x)$ soit de la forme $x\Omega^{\alpha+\varepsilon}(x)$, ε tendant vers zéro pour x infini; c'est celle-là qui est régulière si la fonction $f(x)$ est régulière, et pour toute autre itérée il faudrait remplacer $\alpha + \varepsilon$ par $\alpha + P[\lambda(x)] + \varepsilon$, la fonction P étant périodique.

Le cas de fonctions á croissance un peu plus rapide, croissant par exemple comme une puissance de x, se traite de même par une deuxième application du même changement de variable. Mais la portée de cette méthode est limitée; pour traiter par un changement simultané de variable et de fonction le cas où $f(x)$ croît comme e^x, par exemple, il faudrait connaître une fonction régulière croissant plus lentement que toutes les itérées de $\log x$, et l'on ne peut précisément y arriver que par l'itération régulière de e^x (ou de la fonction inverse $\log x$).

11. Il faut donc introduire des considérations d'un autre ordre. Nous allons d'abord montrer que, quelque rapide que soit la croissance des fonctions considérées (que nous supposerons toujours continues, croissantes, et supérieures à x, pour $x > a$), on peut les réunir en groupes tels qu'à chaque itérée $f_\alpha(x)$ d'une fonction $f(x)$ d'un groupe, on peut, par une formule asymptotique analogue à la formule (16), faire correspondre une itérée $g_\alpha(x)$ de n'importe quelle fonction du même groupe: si d'ailleurs les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont régulières, à l'itérée régulière $f_\alpha(x)$ correspondra ainsi l'itérée régulière $g_\alpha(x)$.

Nous dirons que les fonctions d'un même groupe sont *équivalentes au point de vue de l'itération.*

Nous désignerons par $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ les logarithmes d'itération correspondant respectivement aux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, c'est-à-dire que les formules

(17) $$y = f_\alpha(x) = g_\beta(x)$$

peuvent s'écrire

(18) $$\alpha = \lambda(y) - \lambda(x), \quad \beta = \mu(y) - \mu(x).$$

Nous poserons en outre

(19) $$\omega(x) = \lambda[g(x)] - \lambda[f(x)] = \lambda[g(x)] - \lambda(x) - 1,$$

de sorte que $g(x) = f_{1+\omega(x)}(x)$.

Ceci posé, la condition essentielle pour que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ soient équivalentes au point de vue de l'itération est que $\omega(x)$ tende vers zéro pour x infini, c'est-à-dire que $g(x)$ soit de la forme $f_{1+\varepsilon}(x)$, ε étant infiniment petit. Supposant de plus que $\omega(x)$ soit à variation bornée dans un intervalle (ξ, ∞), nous allons montrer que, $f_\alpha(x)$ étant connu, on peut déterminer la fonction iterée $g_\beta(x)$ par la condition qu'elle soit de la forme $f_{\beta+\varepsilon}(x)$, ε étant infiniment petit; en d'autres termes la différence $\beta - \alpha$ des deux nombres α et β definis par les formules (17) et (18) doit tendre vers zéro pour x infini et β constant; cette convergence sera même uniforme par rapport à β, pourvu que $0 < \beta \leq 1$, c'est-à-dire que $x < y \leq g(x)$; si donc x et y augmentent indéfiniment en satisfaisant à cette double inégalité, $\beta - \alpha$ tendra vers zéro. Inversement, cette condition déterminera $f_\alpha(x)$ si $g_\beta(x)$ est connu.

Observons d'abord que cette condition conduit aisément à des formules permettant de déduire l'une de l'autre les fonctions $\lambda(x)$ et $\mu(x)$. Il suffit de remplacer x et y dans les formules (18), d'une part par $x_n = f_n(x)$ et $y_n = f_n(y)$, d'autre part par $X_n = g_n(x)$ et $Y_n = g_n(y)$. Dans le premier cas; α est indépendant de n, et β prend une valeur β_n qui tend vers α pour n infini; dans le second, l'inverse a lieu, β étant indépendant de n et α prenant une valeur α_n qui tend vers β. On a ainsi les formules cherchées

$$(20) \qquad \begin{cases} \alpha = \lambda(y) - \lambda(x) = \lim\limits_{n \to \infty} [\mu(y_n) - \mu(x_n)], \\ \beta = \mu(y) - \mu(x) = \lim\limits_{n \to \infty} [\lambda(Y_n) - \lambda(X_n)]. \end{cases}$$

Montrons maintenant, en supposant pour fixer les idées que l'on connaisse $\lambda(x)$ et que $x < y \leq g(x)$, que la seconde de ces formules converge bien, et définit une fonction $\beta = \mu(y) - \mu(x)$ ayant bien les propriétés indiquées. On a en effet

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} - \alpha_n &= \lambda[g(Y_n)] - \lambda(Y_n) - \lambda[g(X_n)] + \lambda(X_n) \\ &= \omega(Y_n) - \omega(X_n) \end{aligned}$$

et

$$x < y \leq X_1 < Y_1 < \dots < X_n < Y_n \leq X_{n+1} < \dots$$

Il en résulte que la série de terme général $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ est absolument convergente, et que sa somme $\beta - \alpha$ (puisque $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \lim \alpha_n$) est au plus égale en valeur absolue à la variation totale de $\omega(x)$ entre x et l'infini. Comme de plus β croît avec y depuis 0 pour $y = x$ jusqu'à 1 pour $y = g(x)$, on a bien une fonction susceptible d'être prise pour logarithme d'itération et de définir une fonction itérée $g_\beta(x)$, et telle que $\beta - \alpha$ tende uniformément vers zéro quand x augmente indéfiniment.

12. Nous avons supposé que $\omega(x)$ tende vers zéro et soit à variation bornée; cette hypothèse fait, du moins à première vue, intervenir le choix d'une itérée particulière $f_\alpha(x)$. Nous allons montrer que le résultat obtenu subsiste pour les autres fonctions itérée $F_\alpha(x)$ de $f(x)$, c'est-à-dire que par les formules (20) à toute itérée $F_\alpha(x)$ de $f(x)$ correspond une itérée $G_\beta(x)$ de $g(x)$, qui est de la forme $F_{\alpha+\varepsilon}(x)$. Nous verrons ensuite que les hypothèses mêmes faites sur $\omega(x)$ sont en partie indépendantes du choix de l'itérée particulière $f_\alpha(x)$.

Nous savons que, si l'on pose

$$y = f_\alpha(x) = F_{\alpha'}(x)$$

la relation ainsi établie entre α et α' (pour x fixe et y variable) est telle que ce deux variables croissent d'une manière continue avec y, la différence $\alpha - \alpha = P(\alpha)$ ne changeant pas quand α augmente d'une unité. Posons de même $\beta' = \beta + P(\beta)$, et définissons une fonction itérée $G_{\beta'}(x)$ de $g(x)$ par la relation

$$g_\beta(x) = G_{\beta'}(x).$$

En égalant ces expressions aux précédentes, c'est-à-dire en posant

$$y = f_\alpha(x) = g_\beta(x) = F_{\alpha'}(x) = G_{\beta'}(x),$$

nous savons que la relation ainsi établie entre α et β, pour $x < y < g(x)$, est telle que $\beta - \alpha$ tend vers zéro; alors $\beta' - \alpha'$ tend aussi vers zéro, c'est-à-dire que les fonctions $F_{\alpha'}(x)$ et $G_{\beta'}(x)$ entre elles la même relation asymptotique que $f_\alpha(x)$ et $g_\beta(x)$, c. q. f. d.

Si d'ailleurs $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions régulières, et si $f_\alpha(x)$ est l'itérée régulière de $f(x)$, la relation $\beta' = \alpha' + \varepsilon' = \alpha + P(\alpha) + \varepsilon'$, [$\varepsilon'$ tendant vers zéro et $P(\alpha)$ étant périodique] nous montre que α et β' ne peuvent pas être des fonctions régulières d'une même variable y; la fonction $y = f_\alpha(x)$ étant régulière, la fonction $y = G_{\beta'}(x)$ ne saurait être une fonction régulière de β'. L'itérée régulière de $g(x)$ ne peut donc être que la fonction $g_\beta(x)$ déduite de $f_\alpha(x)$ par la seconde formule (20).

Revenant maintenant aux hypothèses faites sur $\omega(x)$, il est facile de voir que le fait que cette fonction tende vers zéro est indépendant du choix de la fonction itérée $f_\alpha(x)$; en effet $\omega(x)$ est de la forme $\lambda(z) - \lambda(y)$, et nous avons vu au n.° 9 que quand on passait d'une détermination de la fonction itérée à une autre, une expression de cette nature se trouve multipliée par un facteur limité inférieurement et supérieurement.

On peut d'ailleurs donner à la condition que $\varepsilon = \omega(x)$ tende vers zéro une forme ne faisant pas intervenir $f_\alpha(x)$. Il est commode à cet effet d'introduire les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ définies par

$$g(x) = \varphi[f(x)] = f[\psi(x)], \tag{22}$$

et d'observer que

$$\varphi(x_1) = f_\varepsilon(x_1), \quad \psi(x) = f_\varepsilon(x), \tag{23}$$

en posant $x_1 = f(x)$, et $\varepsilon = \omega(x)$. Considérons alors deux nombres x et y et la suite des nombres itérés $x_n = f_n(x)$, $y_n = f_n(y)$. On n'a pas besoin de connaître $\alpha = \lambda(y) - \lambda(x)$ pour savoir que ce nombre est très petit si y est voisin de x, et ne change pas quand on remplace x et y par x_n et y_n; dire que $\omega(x)$ devient inférieur à n'importe quel nombre positif α, si petit soit-il, revient donc à dire que $\psi(x_n)$ est inférieur, pour n assez grand, à $\psi(y_n)$, x étant quelconque et $y - x$ étant positif et arbitrairement petit; le même résultat s'applique en remplaçant $\varphi(x)$ par $\psi(x)$.

A condition d'exclure les fonctions assez irrégulières pour que $\omega(x)$ soit tantôt très petit et tantôt fini, cette fonction, ou bien tendra vers zéro, ou bien restera supérieure à un nombre fixe, et l'on peut encore très simplement caractériser le premier cas par la condition que la fonction $\varphi(x)$ ait toutes ses itérées croissant moins rapidement que $f(x)$; [au lieu de $\varphi(x)$ on peut considérer $\psi(x)$]; cela résulte immédiatement des expressions (23) de ces fonctions.

Supposons en particulier que la fonction $f(x)$ soit assez rapidement croissante pour que $\dfrac{f(x)}{x}$ augmente indéfiniment; elle croît alors plus vite que toutes les itérées de $ax + b$, l'itérée d'ordre n de cette fonction étant équivalente à $a^n x$; on peut donc, du moins si la fonction $f(x)$ n'est pas trop irrégulière, prendre pour $\varphi(x)$ ou pour $\psi(x)$ une fonction linéaire; les fonctions obtenues $g(x) = af(x) + b$ et $f(ax + b)$ seront équivalentes à $f(x)$ au point de vue de l'itération; on peut naturellement combiner ces deux remarques et faire à la fois un changement de variable linéaire sur x et un autre sur la fonction. Si $a = 1$, et que le changement de variable ne consiste que dans l'addition d'une constante, il suffit même que $f(x) - x$ augmente indéfiniment.

Nous insisterons moins sur la seconde condition imposée à $\omega(x)$ d'être à variation bornée; elle est sûrement vérifiée si les fonctions $f(x)$, $f_\alpha(x)$, et $g(x)$ sont régulières, car alors $\omega(x)$ est monotone. Disons seulement que si $\omega(x)$ tend assez rapidement vers zéro, cette condition reste vérifiée quand on remplace

$f_\alpha(x)$ par une autre fonction itérée $F_\alpha(x)$; il n'en est pas de même si $\omega(x)$ tend lentement vers zéro.

13. Le fait que x et $f(x)$ deviennent infinis en même temps, et que par suite $x_n = f_n(x)$ augmente indéfiniment avec n, a joué un rôle essentiel dans les considérations que nous venons d'exposer. Supposons maintenant que l'on ait $f(a) = a$, la fonction $f(x)$ étant toujours continue, croissante, et supérieure à x, pour $x > a$. Alors, tandis que les x_n d'indices positifs très grands augmentent indéfiniment, ceux d'indices négatifs très grands tendent vers a, et l'on peut se proposer de déterminer une itérée par des conditions de régularité asymptotique en ce point, analogues aux conditions relatives à l'allure de la fonction à l'infini que nous avons utilisées au n.° 10.

Supposons d'abord $f'(a) = 1$, de sorte que $f(x) - x$ est d'un ordre infinitésimal supérieur au premier par rapport à l'infiniment petit principal $x - a$. Ce cas est analogue au premier des cas étudiés au n.° 10; il existe une itérée $f_\alpha(x)$, bien déterminée par la condition qu'on ait, x tendant vers a,

$$f_\alpha(x) - x \backsim \alpha[f(x) - x],$$

et on l'obtient en calculant le logarithme d'itération par la formule

$$\alpha = \lambda(y) - \lambda(x) = \lim_{n \to -\infty} \frac{y_n - x_n}{f(x_n) - x_n}, \tag{24}$$

analogue à la formule (16). La convergence de cette formule est d'ailleurs assurée quand $f'(x)$ tend vers l'unité d'une manière monotone, ou même est à variation bornée.

Si $f'(a)$ est bien défini à droite du point a, et a une valeur $k > 1$, on obtient de même une itérée bien définie par la condition que $f_\alpha(x) - a$ soit équivalente à $k^\alpha(x - a)$; des formules élémentaires s'appliquent encore quand $f(x) - a$ se comporte au point a comme une puissance de $x - a$.

14. La question se pose maintenant de savoir si l'itérée obtenue par les formules du n.° précédent, qui supposent la régularité au voisinage du point $x = a$, est identique à l'itérée régulière à l'infini, que nous avons définie ou cherché à définir (suivant les cas), aux n.os 9 à 12. Pour une fonction quelconque, on ne saurait espérer qu'il en soit ainsi. Mais les considérations intuitives déjà utilisées à plusieurs reprises conduisent à penser que *pour les fonctions régulières, c'est la même itérée qui est régulière dans tout l'inter-*

valle (a, ∞), et qui par suite est asymptotiquement régulière aussi bien au point $x = a$ qu'à l'infini.

Considérons en effet la suite des nombres itérés

$$\ldots, \quad x_0 = x, \quad x_1 = f(x), \ldots, \quad x_n = f(x), \ldots ;$$

nous avons vu que deux déterminations distinctes ont l'une par rapport à l'autre des variations périodiques (en appelant période l'intervalle qui sépare les nombres x_n et x_{n+1}). Une fonction itérée qui ne serait pas régulière au point $x = a$ aurait donc des oscillations périodiques; on pourrait concevoir que ces oscillations s'atténuent progressivement pour disparaître à l'infini; mais la fonction obtenue ne serait pas parfaitement régulière. On se souvient en effet qu'au début de cette étude la notion de fonction parfaitement régulière a été déduite de cette remarque qu'une fonction comme $e^x + e^{-x} \sin \log x$, malgré la petitesse et la lenteur de ses oscillations, n'était pas parfaitement régulière, et qu'il existait une courbe plus régulière recoupant une infinité de fois la courbe représentative de cette fonction. Cette notion implique donc que l'itérée régulière n'ait même pas des oscillations qui s'évanouissent à l'infini ou au point $x = a$. Il faut donc admettre que c'est la même itérée qui est régulière aux deux extrémités de l'intervalle (a, ∞).

Indépendamment de ces considérations idéalistes, l'exactitude de ce principe est facile à vérifier dans des cas simples. Si $f(x) = kx$, $(k > 0)$, $f_\alpha(x) = k^\alpha x$, et cette fonction est régulière aussi bien pour x nul que pour x infini. De même, pour $f(x) = x^k$, fonction pour laquelle il y a lieu de distinguer les deux intervalles $(0, 1)$ et $(1, \infty)$, la même itérée est régulière aux points $0, 1, \infty$. Un exemple un peu moins élémentaire est celui de la fonction $f(x) = x^2 - 2$, étudiée par M. PINCHERLE (1). En posant

$$x = t + \frac{1}{t}$$

on a

$$f(x) = t^2 + \frac{1}{t^2}$$

et la fonction itérée cherchée est

$$f_\alpha(x) = t^\beta + \frac{1}{t^\beta}, \quad (\beta = 2^\alpha),$$

(1) S. PINCHERLE, *L'iterazione completa di $x^2 - 2$*. Atti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIX (1920), pp. 329-333.

elle est régulière aussi bien au point double [1] $x = 2$, qui correspond à $t = 1$, qu'à l'infini. La même remarque s'applique à la fonction $f(x) = 4x + x^2$, qui se déduit de la précédente en ramenant le point double à l'origine.

Admettant donc la légitimité du principe énoncé, on observe que, quoique étant la conséquence naturelle de ceux admis jusqu'ici, il introduit quelque chose d'assez nouveau dans la notion de fonction régulière. Les deux premières propriétés fondamentales (constitution d'une échelle complète et monotonie des dérivées), n'impliquaient que des propriétés vérifiées pour x assez grand; deux fonctions, égales pour x supérieur à une certaine valeur X, ne devaient pas être considérées comme distinctes, et l'on ne savait pas laquelle était le prolongement naturel de la fonction définie pour les grandes valeurs de x. Il est clair que cette indétermination ne provenait que de l'insuffisance des deux premières propriétés en question pour caractériser d'une manière satisfaisante les fonctions régulières; le prolongement d'une courbe régulière (et sans doute analytique) ne peut pas être indéterminé. La troisième propriété, relative aux opérations analytiques définissant des fonctions régulières, faisait bien déjà disparaître cette indétermination; mais des opérations, choisies parmi un nombre fini d'opérations, et répétées un nombre fini de fois, ne peuvent pas donner toutes les fonctions régulières. La propriété introduite maintenant a une plus grande portée. Etant donnée une fonction (succession de valeurs de x dont on ne sait pas le mode de définition analytique), par une opération effectuée sur cette fonction, mettant donc en évidence ses propriétés intrinsèques et non celles de l'opération par laquelle on l'a obtenue, nous obtenons une vérification possible de la régularité, et nous voyons que la régularité implique une solidarité entre toutes les parties de la courbe représentative, depuis le point $x = a$ jusqu'à l'infini.

15. Nous sommes maintenant en mesure d'effectuer l'itération régulière de n'importe quelle fonction régulière. Parmi les fonctions croissant plus rapidement que x (et à cause de la relation entre des fonctions inverses il suffit de considérer ces fonctions), le seul cas laissé de côté jusqu'ici est celui des fonctions qui, comme e^x, croissent trop rapidement pour qu'on puisse leur appliquer les formules du n.° 10, et auxquelles on ne peut pas appliquer les méthodes du n.° 13 parce que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de racine. Mais on pourra toujours, et même d'une infinité de manières, trouver une fonction

[1] Nous entendons par point double les points x, y pour lesquels $y = x = f(x)$; ces points sont les points limites de $f_n(x)$, soit pour n infini positif, soit pour n infini négatif.

régulière $g(x)$, équivalente à $f(x)$ au point de vue de l'itération, à laquelle on pourra appliquer les procédés du n.° 13; l'itérée régulière $g_\alpha(x)$ de $g(x)$ étant connue, on en déduira celle de $f(x)$ par la première formule (20) du n.° 11.

Précisons la manière dont on peut former $g(x)$, en supposant que $f(x) - x$ augmente indéfiniment, c'est-à-dire en n'excluant que des cas où la formule (16) s'applique directement à $f(x)$. A cause de la régularité de $f(x)$, cette hypothèse implique $f'(x) > 1$ pour $x > \xi$. Choisissant alors une valeur $t > \xi$, nous prendrons pour $g(x)$ l'expression

$$g(x) = f(x+t) - f(t), \tag{25}$$

qui représente bien une fonction continue, croissante, et supérieure à x pour x positif; pour $x = 0$, cette fonction est nulle et sa dérivée a la valeur $h = f'(t) > 1$. Dans ces conditions, d'après la remarque finale du n.° 13, on définit le logarithme d'itération relatif à cette fonction par la formule

$$\mu(y) - \mu(x) = \lim_{n \to -\infty} \frac{\log g_n(y) - \log g_n(x)}{\log k} \tag{26}$$

qui n'est autre que la formule (24), où l'on a remplacé x, λ, f par $\log x$, μ, $\log g$. On obtient ensuite $\lambda(y) - \lambda(x)$ par la formule (20).

Cette méthode revient, en termes géométriques, à ramener le point $t, f(t)$ à l'origine par une translation; la droite ramenée sur la première bissectrice se trouve donc être la parallèle à cette bissectrice passant par le point en question. Il est peut-être plus naturel de considérer la tangente en ce point, et de la ramener sur la première bissectrice par des changements linéaires convenables effectués sur x et y. En effectuant par exemple la même translation que précédemment, et faisant un changement d'unité soit sur x, soit sur y, cela conduit à prendre pour $g(t)$ l'une des expressions

$$f\left[t + \frac{x}{f'(t)}\right] - f(t), \quad \text{ou} \quad \frac{f(x+t) - f(t)}{f'(t)}. \tag{27}$$

D'ailleurs, d'après le n.° 12, les changements linéaires effectués sur x et sur y sont légitimes si $\dfrac{f(x)}{x}$ augmente indéfiniment, c'est-à-dire en n'excluant que des cas où l'itération régulière est définie par la formule (16) appliquée, soit directement à $f(x)$, soit à $\log f(x)$ considéré comme fonction de $\log x$. Dans ces conditions la régularité implique que $f''(x)$ soit positif dès que x dépasse une certaine valeur ξ; si alors on prend $t > \xi$, et si l'on prend pour définir $g(x)$ une des expressions (27), on a une fonction à dérivée seconde positive pour x et tangente à l'origine à la première bissectrice. On définira alors $\mu(x)$ par la formule (24), puis $\lambda(x)$ par la formule (20).

Nous avons bien ainsi défini dans tous les cas l'itération régulière des fonctions régulières. Il est à remarquer que la régularité parfaite, qui n'est pas nécessaire pour l'application des formules asymptotiques du n.° 10, l'est pour l'application des formules du présent n.°, la régularité parfaite de $f(x)$ étant équivalente à celle de la fonction $g(x)$ définie par l'une des expressions (27). Mais une fois qu'on a défini l'itérée régulière d'une fonction régulière $f(x)$, la formule (20) permet, pour toutes les fonctions équivalentes à $f(x)$ au point de vue de l'itération, même si elles ne sont pas parfaitement régulières, de définir l'itérée asymptotiquement régulière. Le champ d'application de nos formules asymptotiques, même pour les fonctions rapidement croissantes, est donc finalement bien plus étendu que celui des fonctions régulières.

16. Les résultats qui précèdent comportent la possibilité d'un grand nombre de vérifications, à défaut d'une démonstration générale établissant la compatibilité des différents principes intuitifs utilisés, et par suite l'existence d'un ensemble de fonctions régulières ayant toutes les propriétés indiquées.

Il peut d'abord arriver que les procédés du n.° 15 s'appliquent à une fonction $f(x)$ dont on connaît déjà l'itérée régulière par les formules élémentaires du n°. 10; tel est le cas pour les fonctions croissant comme une puissance de x. Il s'agit alors de démontrer qu'on retrouve bien la même itérée régulière par les formules du n.° 15; cela revient à montrer que, pour la fonction auxiliaire $g(x)$ que l'on utilise, à laquelle on peut appliquer à la fois les formules asymptotiques du n.° 10 relatives aux grandes valeurs de x, ou celles du n.° 13 relative au point $x = a$ (a étant nul pour les fonctions considérées au n.° 15), ces deux formules conduisent au même résultat. Nous avons déjà effectué cette vérification dans des cas particuliers.

Considérons d'autre part le cas où l'on ne dispose pas d'autres procédés que ceux du n.° 15, ou du moins où l'on n'utilise que ces procédés. Il s'agit alors de montrer que le résultat est indépendant du choix de la fonction auxiliaire $g(x)$; que l'on prenne l'une on l'autre des expressions (25) et (27), que l'on donne une valeur ou une autre au paramètre auxiliaire t, que même l'on prenne des expressions différentes, on doit trouver le même résultat. Ainsi, dans le cas de la fonction $f(x) = e^x$, on peut prendre comme fonction auxiliaire $e^x - 1$; mais on peut aussi prendre comme fonction auxiliaire $e^x - e^{-x}$ ou encore sh x.

En principe, pour les fonctions régulières auxquelles les formules élémentaires du n.° 10 ne s'appliquent pas, nous définirons l'itérée régulière en prenant l'une des fonctions auxiliaires définies par les formules (27); les deux procédés sont sûrement équivalents, car si $g(x)$ a pour fonction itérée $g_\alpha(x)$, $kg\left(\frac{x}{k}\right)$ a pour fonction itérée $kg_\alpha\left(\frac{x}{k}\right)$, et, $\frac{g(x)}{x}$ augmentant indéfiniment, ces fonctions sont équivalentes au point de vue de l'itération; elles conduisent donc à la même définition de $f_\alpha(x)$. Mais il reste à vérifier que le résultat est indépendant du choix du paramétre t.

Cette vérification est immédiate dans deux cas particuliers; le premier est celui où $f(x) = e^x$; alors la fonction auxiliaire définie par la seconde formule (27) est $e^x - 1$; elle est indépendante de t. Le second cas est celui où $f(x) = ax^2 + 2bx + c$; on peut d'abord faire disparaître le terme du premier degré en ajoutant une même constante à x et y; en appliquant ensuite le seconde formule (27), on trouve comme fonction auxiliaire $x + \frac{x^2}{2t}$, qui est de la forme $tg\left(\frac{x}{t}\right)$; son itérée est donc de la forme $tg_\alpha\left(\frac{x}{t}\right)$, et, comme il s'agit de fonctions croissant comme des puissances de x (l'exposant étant lié à α), un changement du paramétre t est négligeable à côté d'un changement de cet exposant; tontes ces fonctions sont équivalentes au point de vue de l'itération; elles conduisent nécessairement à la même itérée $f_\alpha(x)$ (1).

17. L'itération régulière nous donne un nouveau procédé pour définir des fonctions régulières. Le cas où $f(x) = e^x$ est particulièrement important; la fonction e^x_α obtenue par l'itération régulière de la fonction exponentielle comble des lacunes importantes dans l'échelle des fonctions régulières que l'on peut obtenir par les opérations régulières élémentaires. Toutes celles de ces fonctions qui augmentent indéfiniment sont en effet de la forme $e^x_{\omega(x)}$, la fonction $\omega(x)$ tendant vers un nombre entier. Donnant alors à α des valeurs comprises

(1) Il est à remarquer que, dans le cas du polynome du second degré, le point de vue élémentaire nous apprend que pour x infini

$$\log f_\alpha(x) \backsim 2^\alpha \log x,$$

et les considérations du texte, montrant que l'itérée déduite de la fonction auxiliaire $g(x)$ est indépendante de t, ne prouvent pas d'une manière rigoureuse que ce soit la même que par les formules élémentaires. Il faudrait montrer que pour $g(x) = x + \frac{x^2}{2}$, c'est la même itérée qui est régulière à l'origine et à l'infini.

entre 0 et 1, on obtient des fonctions e_α^x comblant une large lacune dans l'échelle des croissances entre les fonctions de croissance algébrique (ou telles que $\log y$ croisse comme une puissance de $\log x$, ou $\log\log y$ comme une puissance de $\log\log x$, et ainsi de suite) et les fonctions de croissance exponentielle. D'autre part e_x^c et e_x^x (c étant une constante) sont des fonctions régulières croissant plus rapidement que toutes les itérées d'ordre entier de e^x. On a ainsi placé de nouvelles fonctions, à la fois par extrapolation et par intrapolation, dans l'ensemble des fonctions régulières connues.

Désignons par Φ l'opération fonctionnelle

$$\Phi[f(x);\ x] = f_x(x).$$

En la répétant, on obtient de nouvelles fonctions de plus en plus rapidement croissantes $\Phi^p[e^x; x]$. Pour obtenir des fonctions encore plus rapidement croissantes, et qui soient régulières, il faudrait réaliser l'interpolation régulière de la suite des nombres obtenus en donnant à p des valeurs entières, et remplacer p par x. Au point de vue théorique, cette interpolation régulière est possible, d'aprés le n.° 9. Mais pour la réaliser effectivement, il faudrait effectuer une étude asymptotique beaucoup plus difficile que dans le cas de l'itération simple, et l'on n'aurait fait que reculer la difficulté. Nous savons en effet qu'en cherchant à définir l'ensemble des fonctions régulières par la formation successive de nouvelles fonctions, il n'est pas possible d'échapper aux difficultés du transfini.

18. Une définition intrinsèque de la régularité présenterait bien plus d'intérêt. Or les considérations du n.° 15 semblent bien conduire à une telle définition, et c'est sur ce résultat que je voudrais surtout attirer l'attention.

Dans les cas où nous n'avons pu définir l'itérée régulière que par application des procédés exposés au n.° 16, nous nous trouvons avoir le choix entre un grand nombre de définitions possibles. Pour les fonctions parfaitement régulières, il y a, comme nous l'avons exposé, bien des raisons de penser que toutes ces définitions conduisent au même résultat; on ne peut au contraire pas penser qu'il en serait de même pour les autres fonctions. On a donc bien probablement ainsi des propriétés caractéristiques des fonctions régulières.

En prenant, pour fixer les idées, le cas où l'on peut prendre les expressions (27) pour la fonction auxiliaire $g(x)$, c'est-à-dire celui où $\dfrac{f(x)}{x}$ augmente indéfiniment, on obtient le résultat suivant: une condition nécessaire de la régularité est que $f'(x)$ soit monotone quand x dépasse une certaine valeur a; en augmentant au besoin a, $f'(x)$ sera positif et croissant pour $x > a$. Choisissons alors arbitrairement une valeur $t > a$, et posons

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x+t)-f(t)}{f'(t)},\\ \mu(y)-\mu(x) &= \lim_{n\to-\infty} \frac{g_n(y)-g_n(x)}{g_{n+1}(x)-g_n(x)},\\ \alpha = \lambda(y)-\lambda(x) &= \lim_{n\to\infty} \{\mu[f_n(y)]-\mu[f_n(x)]\}. \end{aligned}\right.$$

On obtient en général pour α une valeur qui dépend de la valeur choisie pour t, et les considérations développées aux n.^{os} 14 à 15 conduisent à penser que, pour les fonctions régulières, α est indépendant de t. Cette propriété semblant assez restrictive, on peut penser qu'*il est possible de définir la régularité de* f(x) *par le fait que cette limite ne dépende pas de* t.

On se rappelle que nous avons été conduits à ce résultat par l'idée que la fonction $g(x)$ était régulière en même temps que $f(x)$, et qu'étant régulière de zéro à l'infini, elle avait une itérée régulière aussi bien pour x nul que pour x infini. Une remarque tout à fait différente apparaît comme une confirmation de cette idée: c'est que, dans toute autre hypothèse que celle où α ne dépend pas de t, cette quantité est de la forme $\lambda(y, t)-\lambda(x, t)$, cette fonction λ étant manifestement irrégulière. En effet, sa partie entière ne pouvant donner lieu à aucune ambiguité, ou bien α tend vers une limite $\lambda(y)-\lambda(x)$ quand t augmente indéfiniment, ou bien elle oscille indéfiniment entre deux valeurs limites différentes. Dans ce dernier cas l'irrégularité est évidente; dans le premier, à cause de la périodicité des variations relatives de deux déterminations différentes du logarithme d'itération, $\alpha(t)=\lambda(y, t)-(x, t)$ tend vers $\alpha=\lambda(y)-\lambda(x)$ par valeurs tantôt plus petites, tantôt plus grandes; pour fixer les idées, si α étant constant, on fait augmenter x indéfiniment, y devient une fonction $f_\alpha(x)$ de x, et $\alpha(t)$ devient une fonction de x et t qui, pour t infini, tend vers α par valeurs plus petites ou plus grandes suivant la valeur de x; il y a ainsi une infinité d'oscillations quand x augmente indéfiniment. De toute façon, à moins que α soit indépendant de t, les formules (28) conduisent à une fonction irrégulière, et il est naturel de penser que, les opérations effectuées apparaissant comme régulières, ces irrégularités prouvent l'irrégularité de $f(x)$. Sans doute ce raisonnement est-il discutable, mais il est intéressant de noter que des considérations intuitives assez différentes les unes des autres conduisent au même résultat.

La définition de la régularité étant ainsi précisée quand $\frac{f(x)}{x}$ augmente indéfiniment, on peut aisement définir la régularité dans les autres cas: si $f(x)$ augmente indéfiniment mais non $\frac{f(x)}{x}$, la fonction $f(x)$ sera régulière si le produit $xf(x)$ est régulier ([1]); si $f(x)$ tend vers $-\infty$, la fonction $f(x)$ sera régulière si $-f(x)$ l'est; si enfin elle n'augmente pas indéfiniment, elle sera régulière si elle tend vers une limite c et si $\frac{1}{f(x)-c}$ est régulier. La régularité est ainsi définie dans tous les cas.

Telle est la définition que nous proposons; nous y avons été conduit par des considérations intuitives. Mais on peut se proposer de prendre cette définition comme point de départ, et de montrer que l'ensemble des fonctions régulières ainsi définies a bien les propriétés considérées au début de cette étude, et notamment qu'il constitue une échelle complète, que ces fonctions sont continues et monotones pour x assez grand, et que la régularité se conserve par les opérations régulières élémentaires. Il y a là un champ de recherches qui paraît fort difficile; mais même un résultat partiel peut presénter de l'intérêt.

Il nous reste, pour montrer l'importance pratique de cette théorie, à indiquer deux applications.

CHAPITRE III.

Applications.

19. La première est relative à la sommation des séries divergentes, ou, ce qui revient au même, à la définition de la limite généralisée d'une fonction $u(x)$ d'une variable x indéfiniment croissante; nous supposerons cette fonction bornée. Si elle n'a pas de limite, il peut exister une limite généralisée définie par l'une des expressions

$$\lim_{X \to \infty} \frac{1}{X} \int_{x_0}^{X} u(x)dx, \tag{29}$$

$$\lim_{X \to \infty} \frac{1}{f(X)} \int_{x_0}^{X} f'(x)u(x)dx, \tag{30}$$

([1]) Peut être serait-il plus naturel de n'adopter cette définition que si $f(x) > x$; si $f(x) < x$, la fonction $f(x)$ serait régulière en même temps que la fonction inverse.

la fonction $f(x)$ augmentant indéfiniment. D'ailleurs, si la première de ces formules est applicable, la deuxième s'applique a fortiori et donne la même limite toutes les fois que $f(x)$ est une fonction inférieure à x, et monotone ainsi que sa dérivée $f'(x)$. Mais si la formule (29) ne donne pas une limite déterminée, on peut en obtenir une par la formule (30), et l'on a d'autant plus de chances d'en obtenir une qu'on a pris pour $f(x)$ une fonction plus lentement croissante.

La question se pose alors de savoir si l'on ne risque pas d'obtenir deux limites différentes en prenant deux fonctions différentes

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad z = g(x) = \varphi(y) = \varphi[f(x)].$$

Or le remplacement de y par z par la formule $z = \varphi(y)$ est analogue à celui de x par $y = f(x)$ qui fait passer de la formule (29) à la formule (30). Il en résulte que l'on ne risquera pas d'avoir des résultats contradictoires si $\varphi(y)$ est une fonction inférieure à y, augmentant indéfiniment, et monotone ainsi que sa dérivée. Ce résultat est bien connu. Au contraire, si y et z ont des irrégularités relatives sensibles, si par exemple

$$z = g(x) = \int_0^X f'(\xi)\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2 f(\xi)\right] d\xi,$$

on voit aisément que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$, mises dans la formule (30), peuvent donner des résultats différents; tel est le cas si $u(x) = \sin^2 f(x)$.

On expliquera sans doute cette circonstance en disant qu'une des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ est irrégulière et ne convient pas comme fonction sommatrice. Mais la difficulté est de savoir laquelle. Dans un Mémoire publié en 1926 dans le Bulletin de la Société Mathématique, j'ai montré que la difficulté existe surtout pour les fonctions à croissance lente comme log log x, ou a fortiori pour celles qui croissent plus lentement encore. Ainsi en prenant

$$f'(x) = \frac{1}{x \log x}, \quad g'(x) = \frac{1}{x \log x}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 \log\log x\right),$$

on obtient des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ monotones, pour x assez grand ainsi que toutes leurs dérivées. Sans doute, dans ce cas particulier, nous savons que nous devons considérer que $f(x)$ est régulier et non $g(x)$. Mais cet exemple nous montre que même des fonctions dont toutes les dérivées sont monotones pour x assez grand ne sont pas toujours assez régulières pour être utilisées comme fonctions sommatrices. Le problème de trouver une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi, cette condition ne faisant intervenir que la régularité des fonctions considérées et s'appliquant même aux fonctions à croissance, très lente, est un probléme difficile, non résoluble par des procédés élémentaires.

Je n'avais pas sans doute été assez clair dans la rédaction de mon Mémoire de 1926, car, peu après sa publication, M. le Professeur E. BORTOLOTTI, rappelant un résultat publié par lui en 1921, disait avoir résolu d'une maniére élémentaire le problème posé. Mais les conditions imposées par lui à $f(x)$ excluent le cas des fonctions lentement croissantes; c'est précisément dans ce cas que j'avais voulu poser le problème, sachant qu'il n'est difficile que dans ce cas, et qu'il ne faut pas écarter ce cas si l'on veut une formule de sommation applicable dans des conditions aussi larges que possible.

Or ce problème, non résolu jusqu'ici, l'est par la théorie des fonctions parfaitement régulières. Si en effet y et z sont deux fonctions régulières de x, indéfiniment croissantes, et si pour fixer les idées $y > z$, on a $z = \varphi(y)$, la fonction φ étant régulière, et par suite monotone ainsi que sa dérivée; si alors on obtient une limite en prenant $y = f(x)$ comme fonction sommatrice, le résultat rappelé ci dessus s'applique et l'on obtient la même limite en prenant $z = \varphi(y) = g(x)$.

On ne risque donc pas d'obtenir de contradiction en appliquant la formule (30) avec différentes fonctions régulières $f(x)$.

20. L'autre application est liée à ce que j'ai appelé une correspondance *homéomorphe* dans mon Mémoire déjà cité sur les échelles complètes de croissance. C'est une correspondance biunivoque entre les fonctions $f(x)$ de la première échelle, de croissances intermédiaires entre celles de deux fonctions données $f_1(x)$ et $f_2(x)$, et les fonctions $g(x)$ de la seconde échelle, intermédiaires entre deux fonctions $g_1(x)$ et $g_2(x)$; de plus à des fonctions $f(x)$ de plus en plus rapidement croissantes correspondent des fonctions $g(x)$ de plus en plus rapidement croissantes. Cette correspondance biunivoque est analogue à celle qui existe entre deux variables x et y quand l'une est une fonction continue et croissante de l'autre; la possibilité de l'inversion résulte du principe de continuité.

Le cas de la correspondance homéomorphe entre deux fonctions régulières est particulièrement important.

Considérons, pour fixer les idées, la relation

$$f(x) = \int_0^\infty \varphi(x, y) g(y) dy. \tag{31}$$

Si la fonction $\varphi(x, y)$ est régulière, la régularité de $g(y)$ entraîne celle de $f(x)$, comme nons l'avons déjà observé au n.° 5. Si de plus $\varphi(x, y)$ est positif, et si, pour $Y > y$, le rapport $\dfrac{\varphi(x, Y)}{\varphi(x, y)}$ augmente indéfiniment avec x, à des fonctions $g(x)$ de plus en plus rapidement croissantes correspondent des fonctions $f(x)$ de plus en plus rapidement croissantes, le signe de $f_1(x) - f_2(x)$ pour x très grand étant celui de $g_1(x) - g_2(x)$. La question se pose alors de savoir si à toute fonction régulière $f(x)$ correspond une fonction $g(x)$.

S'il n'en est pas ainsi, les fonctions régulières $g(x)$ se divisent en deux catégories, suivant que l'intégrale

$$\int_0^\infty \varphi(x, y) g(y) dy$$

croît plus vite ou moins vite que $f(x)$, et à la fonction $f(x)$ correspondrait ainsi, non une fonction $g(x)$ déterminée, mais une coupure dans l'ensemble des fonctions régulières; on peut dire que cette coupure définit une fonction idéale $\mathcal{G}(x)$.

Il existe effectivement des fonctions idéales de cette nature; ainsi on définit une fonction idéale séparant les fonctions $g(x)$ qui restent finies de celles qui augmentent indéfiniment. Mais il semble bien que ces fonctions idéales ne risquent pas d'être confondues avec les fonctions véritables; que notamment une coupure correspondant à une fonction véritable soit caractérisée par cette propriété que l'on peut trouver deux fonctions sèparées par cette coupure dont la différence tende vers zéro plus rapidement que n'importe quelle fonction donnée. On peut alors dire en termes peu précis que toute coupure qui semble ne pas présenter les caractères d'une fonction idéale définit une fonction véritable.

Je ne peux que renvoyer à mon mémoire cité le lecteur désireux d'avoir une idée plus précise des difficultés que soulève cette question. A défaut de solution générale pour les échelles de croissance que j'ai appelées normales, on peut chercher à les résoudre pour les fonctions régulières. Il en résulterait alors que l'équation (31) définit une correspondance homéomorphe et peut être résolue par rapport à $g(x)$, la solution étant unique dans le champ des fonctions régulières.

Le même principe de continuité, s'il était établi d'une manière satisfaisante, montrerait l'existence et l'unicité, dans le champ des fonctions régulières, des solutions d'équations fonctionnelles trés générales, comprenant en particulier celle qui définit l'itérée d'ordre rationnel donné d'une fonction donnée.

Sulla connessione delle superficie algebriche reali.

Memoria di ANNIBALE COMESSATTI (a Padova)

Tra i risultati delle mie passate ricerche *sulle superficie razionali reali* [1], si segnala, quasi a mo' di conclusione, la formula

$$I + Z = 2(\bar{\rho} - 1), \tag{1}$$

che lega l'*ordine di connessione totale* Z d'una di quelle superficie, cioè della sua *parte reale* (composta di una o più falde) al relativo *numero base reale* $\bar{\rho}$ ed all'*invariante* I di ZEUTHEN-SEGRE.

Il carattere sintetico della (1), conferitole dal pregio di superare tutte le distinzioni, pur abbastanza complesse, inerenti alla classificazione delle superficie razionali nel campo reale, m'induceva, fin da allora, a prevedere la possibilità di far rientrare quella formula in una relazione più generale *valida per tutte le superficie algebriche reali.*

Il presente lavoro vuole appunto confermare tal previsione, mostrando che *per ogni superficie algebrica reale* F della quale con ρ, $\bar{\rho}$ si designino i due *numeri base*, complesso e reale, e con R_2 l'*ordine di connessione bidimensionale* (riferito, ben s'intende, alla *riemanniana* V), si ha

$$Z \leq R_2 - 2(\rho - \bar{\rho}), \tag{2}$$

potendosi scrivere l'eguaglianza almeno quando tutti i *cicli a due dimensioni* della V sono *algebrici*, cioè F è *priva d'integrali doppî di seconda specie* [2];

---

(1) Vedi le Memorie, α) *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale* [Mathem. Annalen 73 (1912) pp. 1-72], β) *Sulla connessione delle superficie razionali reali* [Questi Annali (3) 23 (1915) pp. 215-284]. La dimostrazione della (1) è in β), § 6.

(2) Ricordiamo che, per una formula di PICARD, il numero ρ_0 degl'integrali doppî di 2^a specie vale $R_2 - \rho$; quindi se tutti i cicli bidimensionali di V sono algebrici ($R_2 = \rho$) si ha $\rho_0 = 0$ e viceversa. L'espressione di ρ_0 trovasi nel trattato di E. PICARD-G. SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* [Paris, Gauthier-Villars (1897-1906)], T. 2°, Cap. 12°, n. 18, e, sotto la forma qui scritta, nella monografia di S. LEFSCHETZ, *L'Analysis situs et la géometrie algébrique* [Paris, Gauthier-Villars (Collec. Borel) (1924)] Nota I, n. 15, alla quale (Cap. IV, segnatamente §§ VI, VII) rinviamo anche per quel che riguarda i *cicli algebrici*. Si osservi poi che quando $\rho_0 = 0 (R_2 = \rho)$ la (2) può scriversi $Z = 2\bar{\rho} - \rho$.

in particolare per *tutte le superficie di genere geometrico zero* (³). Nel caso delle *superficie razionali,* appena si ricordi che $\rho = R_2 = I + 2$ (⁴), si vede che la (2) si riduce alla (1).

La conclusione enunciata vien qui raggiunta attraverso ad un'analisi, abbastanza intima, dei *rapporti topologici* che intercedono tra la riemanniana V di F, e la varietà, pure a quattro dimensioni, W, immagine delle coppie di punti associati, in V, dalla simmetria S che ivi rappresenta il coniugio di F. Quest'analisi conduce prima alla relazione, pure notevole

$$Z = R_2 - 2h, \tag{3}$$

nella quale h esprime il massimo di *cicli a due dimensioni reali* (cioè trasformati in cicli omologhi da S, della V,) tra di loro *indipendenti*, cioé il numero analogo ad R_2 per i cicli reali; e dalla (3) si perviene alla (2) precisando il contributo portato al numero h dai cicli algebrici, ch'è appunto $\rho - \bar{\rho}$. Resta cosi precisato anche il significato della relativa *deficienza*, cioè dell'intero $\tau = h - (\rho - \bar{\rho})$ per cui

$$Z = R_2 - 2(\rho - \bar{\rho} + \tau), \tag{4}$$

e precisamente si vede ch'esso eguaglia il massimo numero di *cicli a due dimensioni reali, indipendenti tra di loro e dai cicli algebrici,* che posson considerarsi entro alla V.

Ulteriori studi intorno a questo carattere τ, potranno condurre a determinare maggiormente la (2). Comunque, è certo che si tratta d'un *invariante* (*assoluto*) *reale,* cioè *non esprimibile mediante i soli invarianti complessi* della F, giacchè due diversi modelli reali (relativi a simmetrie non equivalenti) delle superficie d'una stessa classe complessa, possono dar luogo a valori affatto diversi per τ. È quel che mostro alla fine del lavoro sopra opportuni esempî,

---

(³) Secondo un teorema fondamentale del Lefschetz (cfr. loco cit. (²), Cap. IV, § VII) i cicli algebrici son caratterizzati dall'*annullarsi* dei relativi *periodi degl'integrali doppî di prima specie*; quindi, se $p_g = 0$, mancando addirittura tali integrali, tutti i cicli sono algebrici. Non è ancor certo se, viceversa, una superficie priva d'integrali doppî di 2ª specie sia anche priva d'integrali doppî di 1ª specie ($p_g = 0$), cioè se possano esistere integrali doppî di 1ª specie coi periodi tutti nulli (improprî). Cfr. S. Lefschetz, *On certain numerical invariants of algebraic varieties, with application to abelian varieties,* (Prix Bordin, 1919) [Trans. of the Amer. Math. Soc. 22 (1921) pp. 327-482], n. 26; F. Severi, *Conferencia general sobre la geometria algebraica* [Revista Mat. Hispano-Americana (1926) n. 8].

(⁴) La $R_2 = I + 2$ rientra nella formula generale di Picard-Alexander, $R_2 = I + 4q + 2$ (q *irregolarità* di F). Cfr. Lefschetz, loco cit. (²) Cap. III, n. 10. Per la $\rho = I + 2$ vedi la Mem. cit. (¹) β), § 6, od anche F. Severi, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* [Math. Annalen, 62 (1906) pp. 194-223] n. 13.

che, riferendosi a superficie la cui connessione totale Z è stata determinata direttamente ([5]), dànno anche, con altri, un multiplo controllo delle formule ottenute.

Anche in queste ricerche, relative ai problemi di realtà per le superficie algebriche, si rivela la fecondità della teoria della base, dovuta al SEVERI, specie ora, che, attraverso al LEFSCHETZ, sono stati annodati intimi rapporti fra quella teoria e l'*analysis situs*.

§ 1. Preliminari sulle riemanniane delle superficie algebriche reali.

1. Sia F una *superficie algebrica reale*, appartenente ad uno spazio qualunque, dotata d'un certo numero m (eventualmente nullo) di *falde reali* $F_1, F_2, \dots, F_m$.

La distinzione fra le varie falde resta precisata senz'ambiguità, qualunque siano le singolarità di F, ricorrendo ad una *trasformata reale* F' di F *priva di punti multipli*, per cui la distinzione stessa si pone in modo evidente.

È pure pressochè evidente la possibilità di sciogliere la singolarità di F mediante una *trasformazione birazionale reale*. Comunque, ecco come si può procedere: Supposto dapprima che F non sia razionale nè riferibile a rigata, la si muti anzitutto in una F'' di S_h priva di punti multipli e di *curve eccezionali*, senza preoccuparsi della realtà della trasformazione; e si dica s la *simmetria* (trasf. antibirazionale involutoria) di F'', immagine del *coniugio* di F. Il sistema lineare $|A + A'|$ individuato su F'' da una sezione iperpiana e dalla sua trasformata A' mediante s, è mutato in sè da s e dotato di curve unite, onde si può riferirlo proiettivamente al sistema degl'iperpiani d'un S_k in modo che all'antiproiettività indotta fra i suoi elementi da s corrisponda il coniugio di quello spazio ([6]). Tenendo conto che la s non ha punti fondamentali su F'' in quanto questa è priva di curve eccezionali ([7]), si vede che così si passa ad una F' priva di punti multipli riferita senza eccezioni ad F'' ed in corrispondenza birazionale reale con F.

([5]) In un lavoro, *Sulle riemanniane algebriche*, in corso di pubblicazione nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

([6]) Cfr. loco cit. ([1]) α), nn. 8, 12.

([7]) Se una trasformazione *antibirazionale* s, d'una superficie Φ di S_h in se stessa, muta un punto P in una curva γ, questa *è eccezionale nel senso ordinario della parola*. Difatti se k è il coniugio di S_h, $\bar{\Phi}$ la superficie coniugata di Φ, $\bar{P}$ il punto coniugato di P, la ks è una trasformazione *birazionale* di $\bar{\Phi}$ in Φ che muta $\bar{P}$ in γ.

Se la F è razionale o riferibile ad una rigata, non si può escludere sulla F'' priva di punti multipli l'esistenza di punti fondamentali per s; ma essi si potranno far sparire ad uno ad uno trasformando F'' mediante il sistema di tutte le forme d'ordine abbastanza alto passanti per il punto che si considera, e dopo ciò si sarà ricondotti al caso precedente [8].

Indicheremo con Z_1, $Z_2,\ldots, Z_m$ gli *ordini di connessione* delle falde F_1, $F_2,\ldots, F_m$ di F. Il numero $Z = \sum_{i=1}^{m} Z_i - 2m + 2$ si dirà *ordine di connessione totale* della superficie [9].

Per fissare senz'ambiguità i valori delle Z_i giova anche qui il riferimento alla F', purchè su questa *si ripristinino le curve eccezionali* (di 1ª specie) della F. La possibilità di tal ripristino mediante una trasformazione birazionale reale che non introduca singolarità è manifesta, dal momento che su F quelle curve son reali o a due a due coniugate e quindi devon dedursi da punti reali o da coppie di punti coniugati della F' [10].

D'altra parte quel ripristino è necessario perchè la connessione delle falde di F' sia fissata in modo confacente alla F e perché resti individuata senza ambiguità la *connessione bidimensionale* della riemanniana V che andiamo a considerare [11].

La superficie F' così modificata l'indicherà con Φ, e le sue falde con Φ_1, $\Phi_2,\ldots, \Phi_m$.

2. Trasportiamoci ora alla *riemanniana* V di F ch'è ormai definita topologicamente in modo preciso, come l'ente i cui elementi (punti) sono in corrispondenza biunivoca, continua, e senza eccezioni, coi punti reali e complessi

---

(8) Avvertasi che F può possedere *linee o punti isolati reali*, ma in ogni caso *multipli* e di *molteplicità pari;* però in senso invariantivo quei punti o i punti di quelle linee *non devon considerarsi come reali*, in quanto spariscono sulla F'.

(9) Cfr. loco cit. (1) β) n. 8. Notiamo che la nostra definizione per l'ordine di connessione d'una falda è in pieno accordo con quella generale del Lefschetz (loco cit. (2), Cap. I, n. 6) relativa agli ordini di connessione di varietà qualunque, ai quali si riferisce la *formula di Eulero generalizzata* (ibid., n. 8) sotto la forma che poi dovremo applicare.

(10) Il caso delle superficie razionali o riferibili a rigate domanderebbe qualche complemento su cui crediamo di poter sorvolare. Ad ogni modo il primo è esaurientemente considerato al n. 13 della Mem, β) citata in (2).

(11) Si ricordi (loco cit. (1) β), § 3) che mutando un punto d'una falda in una curva eccezionale se ne altera la connessione e che la V non è individuata di fronte alla relazione d'*omeomorfismo* se non quando su F è fissato il *regime delle curve eccezionali* (quindi gl'*invarianti relativi*).

di Φ. Al coniugio di Φ (e di F) corrisponde in V una simmetria S, cioè una trasformazione involutoria, dappertutto biunivoca e priva di punti fondamentali, che possiede m superficie $V_1, V_2, \ldots, V_m$ luogo di punti uniti, immagini delle falde Φ_i, quindi *omeomorfe* ad esse, omogenee, chiuse, prive di singolarità e di punti comuni.

Notoriamente la V è *bilatera*, quindi possiamo supporla *orientata*, fissandone la *faccia positiva*, o, ciò ch'è lo stesso, il verso positivo d'un'*indicatrice* (quindi di tutte le altre). Ricordiamo che per *indicatrice orientata* relativa ad un punto P s'intende una *piccola cellula* (*pentaedro*) contenente nel suo interno P, per i cui vertici sia fissata la classe delle *permutazioni positive*.

Se P' è il punto di V associato a P da S, ad una indicatrice positiva di P resta associata un'indicatrice relativa a P' che può avere il verso positivo o l'opposto. Vogliam far vedere che, *contrariamente a quel che ha luogo sulle superficie riemanniane*, la nuova indicatrice è ancor positiva, cioè che *la simmetria* S *è una trasformazione diretta per la varietà* V.

La divergenza fra i due casi bi-e quadri-dimensionale si rivela chiaramente negli esempî elementari relativi alle riemanniane della retta $z (= x + iy)$ e del piano z, $w (w = u + iv)$. Nel primo caso si può assumere come riemanniana il piano xy (non disturbando l'eccezione all'infinito) ove il coniugio di z è rappresentato dalla simmetria $y' = -y$ rispetto all'asse x, nel secondo lo S_4 reale x, y, u, v, ove si ha analogamente la simmetria $y' = -y$, $v' = -v$ rispetto al piano $y = v = 0$. Due indicatrici (triangoli, risp. pentaedri) associate sono, nel primo caso, *contraverse*, nel secondo *equiverse*, perchè i determinanti

$$|x_i, y_i, 1| \quad |x_i, -y_i, 1| \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$|x_i, y_i, u_i, v_i, 1| \quad |x_i, -y_i, u_i, -v_i, 1| \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

hanno segno contrario nell'uno, segno eguale nell'altro.

Quando la *F ha punti reali*, si può sempre ricondursi al caso del piano, bastando limitarsi a considerare l'effetto di S sui punti prossimi ad un punto unito, ed osservare che l'*intorno complesso* d'un generico punto reale di F può riferirsi biunivocamente all'analogo intorno d'un punto reale d'un piano π per proiezione da un punto reale O. Oppure si può osservare che, in V, la S nell'intorno d'un punto (unito) d'una delle superficie V_i ha il carattere d'un'*omografia involutoria di* S_4, quindi, attesa la dimensione di V_i, d'una *simmetria rispetto ad un piano*, che, come s'è visto, è una trasformazione *diretta*.

Ad esuberanza valga infine la seguente dimostrazione, indipendente dall'ipotesi che F contenga punti reali:

Si fissino su F, com'è sempre possibile, due *curve algebriche reali* C, D che abbiano due fra le intersezioni p, p' immaginarie coniugate, ad esempio le intersezioni di F con due forme reali del relativo spazio opportunamente scelte; e siano γ, δ i corrispondenti *cicli a due dimensioni* di V segantisi nei punti P, P' associati in S. Per un teorema di LEFSCHETZ, *orientati* opportunamente γ, δ, il numero effettivo (aritmetico) delle loro intersezioni coincide col *numero algebrico* (γ, δ) di KRONECKER-POINCARÉ [12], onde ciascuno dei punti P, P' porterà quest'ultimo contributo $+1$. Pertanto se PQR, PST, son due *indicatrici positive* di γ, δ, sarà $PQRST$ un'*indicatrice positiva* della V [13].

Ma sul ciclo γ, ch'è riemanniana di C, la *simmetria* indotta da S (immagine del coniugio di C) è una trasformazione *inversa*, quindi detti Q', R' i corrispondenti di Q, R, sarà $P'R'Q'$ un'indicatrice positiva di γ ed analogamente $P'T'S'$ un'indicatrice positiva di δ; onde per il fatto che anche P' porta a (γ, δ) contributo $+1$, la $P'R'Q'T'S'$ sarà un'indicatrice positiva di V. Dopo ciò basta osservare che la permutazione $P'R'Q'T'S'$ è della stessa classe della $P'Q'R'S'T'$ relativa all'indicatrice trasformata di $PQRST$ mediante S per concludere che anche quell'indicatrice è *positiva* per V, c. d. d.

§ 2. Rappresentazione della riemanniana simmetrica V, sopra una varietà doppia W. Relazione fra i cinque ordini di connessione r_1, r_2, R_1, R_2, Z.

3. Indicheremo con W l'ente a quattro dimensioni i cui elementi (punti) rappresentano senza eccezioni le coppie dei punti di V associati in S. La varietà W è topologicamente ben definita, e non ha interesse fissarne un qualsiasi modello.

Le varietà W, V son legate da una corrispondenza $(1, 2)$, T, che ha su W come elementi di *diramazione* m falde W_i riferite biunivocamente senza eccezioni alle V_i (ed alle falde F_i di F) quindi *omeomorfe* ad esse, prive di punti multipli e di punti comuni, ecc.

Proviamo che *anche la varietà W è bilatera* [14].

---

(12) LEFSCHETZ, loco cit. (2), Cap. II, n. 6.

(13) Ibid., Cap. I, n. 12.

(14) Invece nell'analogo caso relativo alle curve, è noto da KLEIN e WEICHOLD che *la superficie W è unilatera o bilatera, a seconda che V* (colla simmetria S) *è diasimmetrica od ortosimmetrica*. Cfr. F. KLEIN, *Riemann'sche Flächen* [Leipzig, Teubner (1906) Parte 3^a, I, B,

Sia P un punto di W, immagine della coppia P_1, P_2. di V, σ un cammino chiuso qualunque di W che parta da P e vi ritorni, J un' indicatrice (orientata) di W relativa a P. Si tratta di far vedere che, quando un punto Q di W descrive σ in un verso a partire da P portando seco la J, quell' indicatrice non può mai, al ritorno, risultare invertita.

Alla J corrispondono in V due indicatrici J_1, J_2, relative a P_1,P_2 e trasformate l'una nell'altra da S. Poichè S è diretta, le J_1, J_2, saranno *equiverse*, ad es. entrambe *positive* per V.

Ciò premesso, e supposto inoltre, com' è lecito a meno d' una piccola deformazione, che σ non incontri le W_i (del resto tale ipotesi non è essenziale) posson darsi due casi:

a) Al ritorno di Q in P i due punti corrispondenti Q_1, Q_2, che partono da P_1, P_2 ritornano pure alle posizioni iniziali; allora a σ corrispondono su V due cammini σ_1, σ_2, distinti, e privi di punti comuni, l'uno descritto da Q_1, l'altro da Q_2. Quando Q_1 descrive σ_1, l'indicatrice J_1 associata ad J ritorna in P_1 col verso iniziale perchè V è bilatera; dunque lo stesso accade di J al ritorno in P.

b) I due punti P_1, P_2 ritornano scambiati tra di loro; allora mentre Q descrive σ, Q_1, descrive un *cammino aperto* σ_1 coll' origine in P_1 e l' estremo in P_2. Durante il percorso l' indicatrice J_1 relativa a Q_1 ed associata ad J resta sempre positiva per V, dunque all' arrivo in P_2, si trova concorde con J_2; e ciò viene a dire che J al ritorno in P ha ancora il verso di partenza.

Infine è ovvio che *anche la W è chiusa*, dal momento che le W_i essendo *superficie*, non possono produrvi *frontiere*.

4. Immaginiamo ora tracciata su ciascuna W_i una *triangolazione* Δ_i con $\alpha_0^{(i)}$ vertici, $\alpha_1^{(i)}$ lati, $\alpha_2^{(i)}$ facce, e ricordiamo che per la *formula di* EULERO a cui può affidarsi (anche se W_i è unilatera) la definizione di Z_i si ha

$$\alpha_0^{(i)} - \alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} = 2 - Z_i. \tag{5}$$

Fissiamo poi anche in W una *triangolazione* Δ, cioè una *decomposizione in cellule* (senza punti interni comuni, ecc.) *che contenga le* Δ_i, cioè abbia fra i suoi vertici, lati, facce a due dimensioni, quelli delle Δ_i ed indichiamo con a_0, a_1,..., a_4 i numeri dei relativi elementi delle diverse dimensioni.

---

nn. 3-5; G. WEICHOLD, *Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen und die Periodicitätsmoduln*, ecc. [Zeitsch. für Math. u Phys. 28 (1883), pp. 321-351] §§ 3-4. Per la relazione tra V e W nel caso delle curve vedi anche il lavoro ([5]), n. 5.

Ad una cellula K della triangolazione Δ corrispondono in V due cellule K_1, K_2, che, come si vede subito tenendo conto della connessione semplice di K, non hanno *punti interni* comuni. La sovrapposizione può presentarsi soltanto per *elementi di frontiera* di dimensione non superiore a due, e precisamente si verifica per quegli elementi che corrispondono agli (eventuali) elementi di K appartenenti alle Δ_i.

Si vede così che Δ induce in V un'analoga triangolazione Δ', e poichè nel passaggio da W a V ciascun elemento *si sdoppia*, meno quelli che appartengono alle Δ_i, ne viene, che, indicandosi con A_i i numeri analoghi agli a_i per la Δ' sarà

$$(6)\qquad \begin{gathered} A_4 = 2a_4, \quad A_3 = 2a_3, \quad A_2 = 2a_2 - \sum_{i=1}^{m}\alpha_2^{(i)}, A_1 = 2a_1 - \sum_{i=1}^{m}\alpha_1^{(i)}, \\ A_0 = 2a - \sum_{i=1}^{m}\alpha_0^{(i)}. \end{gathered}$$

Se ora s'introducono gli *ordini di connessione* R_i ($i = 0, 1, \dots, 4$; $R_0 = R_4 = 1$, $R_1 = R_3$) delle diverse dimensioni, relativi a V, e gli analoghi r_i relativi a W, e si combinano le relazioni

$$(7)\qquad \sum_{h=0}^{4}(-1)^h A_h = \sum_{h=0}^{4}(-1)^h R_h, \quad \sum_{h=0}^{4}(-1)^h a_h = \sum_{h=0}^{4}(-)1^h r_h,$$

scritte a norma della *formula di Eulero generalizzata* [15], colle precedenti (5) (6) e colla formula

$$(8)\qquad Z = \sum_{i=1}^{m} Z_i - 2m + 2,$$

che esprime l'ordine di connessione totale di F in funzione degli Z_i, si ottiene la *relazione fondamentale*

$$(9)\qquad Z = R_2 - 2r_2 - 2(R_1 - 2r_1) \ [16].$$

---

[15] Cfr. LEFSCHETZ, loco cit. ([2]), Cap. I, n. 8.

[16] Se le W_i mancano, cioè se F non ha punti reali, le $\alpha^{(i)}$ della (5) devon porsi eguali allo zero, ed allora si vede che la (9) sussiste ancora purchè si ponga $Z = 2$. Circa l'opportunità di attribuire *convenzionalmente* ordine di connessione 2 alle superficie per così dire *inesistenti* (topologicamente) vedi la nota ([18]) del lavoro citato in ([5]).

§ 3. Confronto tra le connessioni di V, W. Relazione $R_1 = 2r_1$ tra le connessioni lineari, e prima forma della conclusione.

5. Il secondo membro della (9) dipende oltre che dai caratteri topologici R_1, R_2 della V, notoriamente esprimibili mediante gli invarianti (assoluti e relativi) di F, anche dagl'incogniti caratteri r_1, r_2 della W. Si pone pertanto il problema di *eliminare* tali caratteri in base ad un'ulteriore analisi dei rapporti topologici tra le due varietà V, W.

Sia C un *ciclo*, p. es. lineare della varietà V. Esso potrà risultare dal l'insieme di più parti, anche contate piu volte; ma in ogni caso mediante una piccola deformazione e l'aggiunta di segmenti percorsi nei due sensi, che poi si scinderanno ciascuno in due archi distinti, si potrà ridurre C ad un unico continuo *orientato,* tutto costituito da punti semplici. Analogamente per i cicli a due dimensioni, salvo l'eventuale presenza d'un gruppo discreto di punti in cui il ciclo *attraversa se stesso,* che non porta alcun pregiudizio al seguito.

Sempre a meno d'una piccola deformazione si potrà supporre che C non abbia punti comuni (o ne abbia un gruppo discreto se è a due dimensioni) col suo corrispondente C' secondo S. In tali condizioni è ovvio che l'insieme dei punti di W omologhi (in T^{-1}) a quelli di C, è un *ciclo* γ (orientato) di W i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con quelli di C e di C'. Si dirà che γ è il *ciclo corrispondente* a C, oppure a C'; ed è pure ovvio che se ai cicli C, D corrispondono γ, δ, a $C+D$ corrisponde $\gamma+\delta$, ecc.

Partiamoci invece da un ciclo γ di W, ridotto, come prima C, ad un unico continuo orientato, ecc., e consideriamo in V la figura Γ costituita dai punti P_1, P_2 omologhi dei punti P di γ. È chiaro che possono darsi due casi:

a) Al variare di P su γ i due punti P_1, P_2 descrivono due continui distinti; allora questi son due *cicli* C, C' di V associati in S e riferiti (ciascuno) biunivocamente a γ come sopra;

b) I punti P_1, P_2 descrivono un unico continuo Γ in corrispondenza (2, 1) con γ e trasformato in sè da S. Allora la biunivocità della corrispondenza può ristabilirsi *contando due volte ciascun punto di* γ, o, meglio ancora, procedendo come segue: Con una piccola deformazione si muti Γ in un ciclo Γ_1 distinto dal corrispondente Γ_1' (in S) e si dica γ_1 il ciclo corrispondente di W. Si vede allora subito che nel passaggio da γ a γ_1 ciascun punto di γ *si sdoppia,* restando le due parti (archi od aree) di γ_1 prossime ad una parte di γ concordemente orientate; sicchè in definitiva si può dire che al ciclo Γ_1, o, il che è lo stesso, al suo omologo Γ, corrisponde in W il ciclo 2γ ([17]).

Riassumendo, si ha che ogni ciclo C di V (assieme al suo associato C') ha un determinato corrispondente γ in W; inversamente, un γ di W può non avere corrispondente in V, ma lo ha certo 2γ.

6. Siano C e γ corrispondenti nel senso ora chiarito, C' l'associato di C. Premesso che per esprimere la relazione « *omologo a* » faremo uso del segno $=$ dimostriamo i seguenti *lemmi*:

A) Se $C=0$, anche $\gamma=0$;

B) Se $\gamma=0$, $C+C'=0$.

Ragioneremo per semplicità nel caso dei *cicli lineari*.

A) Se $C=0$, esiste una superficie *bilatera* aperta Ω di cui C costituisce la *frontiera*. Ad Ω corrisponde in W una superficie ω pure bilatera riferita biunivocamente ad Ω (potendosi supporre che Ω sia distinta da Ω' ed abbia con essa in comune solo un gruppo discreto di punti) ed avente per orlo γ; dunque $\gamma=0$.

B) Se $\gamma=0$, si ha analogamente in W una superficie bilatera aperta ω, che potremo raffigurarci intuitivamente sotto la forma d'un *disco* avente per orlo γ. Considerando per ogni punto P di ω i due punti corrispondenti P_1, P_2 di V posson darsi due casi:

b_1) Al variare di P su ω, P_1, P_2 descrivono due continui distinti. Allora ciascuno di essi è un *disco*, *omeomorfo* ad ω avente per orlo C, o C'; dunque $C=0$, $C'=0$, ed infine $C+C'=0$.

b_2) Al variare di P su h, P_1, P_2 descrivono un unico continuo Ω. Allora Ω è uua superficie bilatera, della forma d'un *tubo* avente per orlo $C+C'$; dunque $C+C'=0$.

Il *carattere bilatero* di Ω si mette in evidenza facilmente, notando che, orientata la ω, in ogni punto P_1 di Ω è definita un'indicatrice positiva che è quella corrispondente all'indicatrice positiva J di ω nel punto P corrispondente a P_1. Nè il caso che P_1 coincida con P_2, cioè che P sia una delle eventuali intersezioni (isolate) di ω colle W_i dà luogo ad ambiguità, per quanto ad J corrispondano due indicatrici J_1, J_2 relative a $P_1=P_2$; si tratta invero d'indicatrici *concordi* perchè la S ha, su Ω, nell'intorno di $P_1=P_2$ *carattere diretto*, non essendovi *direzioni unite* per P_1.

([17]) Per gli scopi finali, se C e γ son corrispondenti, è indifferente sostituirli con *cicli omologhi*. Ma nelle considerazioni del prossimo numero giova supporre che C e γ siano *effettivamente* corrispondenti, cioè associati dalla T.

Importa poi precisar bene che *la frontiera completa di* Ω *è* $C + C'$, *non* $C - C'$, intendendosi che si parli di *frontiera orientata* ([18]), altrimenti la questione non avrebbe senso. Ora se l'orientazione di ω è fissata in modo che γ (col suo verso) ne sia frontiera orientata, detta BC un'indicatrice positiva di γ ed A un punto interno ad ω e prossimo a B, C sarà ABC un'indicatrice positiva di ω; quindi col solito significato dei simboli saranno $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ indicatrici positive di Ω *aderenti a* C, C'. Ma d'altra parte B_1C_1, B_2C_2 sono indicatrici positive di C, C' dunque la frontiera orientata di Ω è proprio $C + C'$ come asserito.

7. Consideriamo ora due ordini di connessione associati (cioè del medesimo indice) di V, W, che, sopprimendo provvisoriamente gl'indici, indicheremo con R, r e proviamo anzitutto che $r \leq R$.

Fissiamo allo scopo, in V, R cicli indipendenti $C_1, C_2, \dots, C_R$ della dimensione desiderata, ed attribuiamo ai simboli γ_i, C_i' il solito significato. A prova dell'asserto mostreremo che ogni ciclo δ di W è dipendente da $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_R$.

Difatti, se non δ, certo 2δ è il corrispondente d'un ciclo D di V; e poichè i C_i dànno una *base* su V, così si avrà un'omologia

$$\mu D + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_R C_R = 0, \tag{10}$$

dalla quale per il lemma A segue la

$$2\mu\delta + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \dots + \lambda_R\gamma_R = 0, \tag{11}$$

che esprime quanto asserito.

Dopo ciò è chiaro che il valore di r sarebbe pienamente determinato se lo fosse il numero delle omologie indipendenti che legano i cicli $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_R$. Ora si vede che se ad esempio $C_i' = -C_i$, cioè se $C_i + C_i' = 0$, una di tali omologie, è, per il lemma A, $\gamma_i + \gamma_i = 0$, cioè $2\gamma_i = 0$, e ciò suggerisce il seguente precedimento che conduce a determinare, almeno in un certo senso, il valore cercato, in quanto ne mette in vista un significato importante:

Si considerino gli R cicli $C_i + C_i'$, che la S muta in se stessi (in cicli omologhi) e che perciò, seguendo una terminologia introdotta altrove, diremo *cicli reali* ([19]), e si supponga che fra essi intercedano $R - h$ e non più omologie

---

([18]) Cfr. LEFSCHETZ, loco cit. ([2]), Cap. I, nn. 3, 4, ed anche O. VEBLEN, *Analysis Situs* (The Cambridge colloquium 1916) [Publ. by the Amer. Math. Soc., New York (1922)], Cap. IV, nn. 10, 25.

([19]) Vedi la prima delle Memorie, *Sulle varietà abeliane reali*. [Questi Annali (4) 2 (1924-25), pp. 67-106, e 3 (1925-26), pp. 27-71], n. 3.

indipendenti, di guisa che, sceltine opportunamente h, siano ad esempio i primi, tutti gli altri sian dipendenti da essi. Posto $A_i = C_i + C_i'$ $(i = 1, 2, ..., h)$ è facile vedere che $A_1, A_2, ..., A_h$ dànno una *base per i cicli reali* di V, cioè che ogni ciclo reale di quella riemanniana dipende dagli A_i.

Ed invero se D è un tal ciclo, legato ai C_i dalla (10), trasformando mediante S e tenendo conto che $D = D'$ si avrà anche

$$\mu D + \lambda_1 C_1' + \lambda_2 C_2' + \dots + \lambda_R C_R' = 0,$$

quindi sommando

$$2\mu D + \lambda_1(C_1 + C_1') + \lambda_2(C_2 + C_2') + \dots + \lambda_R(C_R + C_R') = 0, \tag{12}$$

da cui, ricordando che tutti i $C_i + C_i'$ dipendono dagli A_i, segue subito l'asserto.

Indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_h$ i cicli di W corrispondenti agli A_i. Vogliam provare che tali cicli *dànno una base in* W, cioè che $r = h$.

Intanto gli α_i sono *indipendenti*, perchè se fosse

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_h\alpha_h = 0,$$

risulterebbe per il lemma B

$$\lambda_1(A_1 + A_1') + \lambda_2(A_2 + A_2') + \dots + \lambda_h(A_h + A_h') = 0,$$

cioè, tenuto conto che gli A_i son reali e quindi $A_i' = A_i$

$$2\lambda_1 A_1 + 2\lambda_2 A_2 + \dots + 2\lambda_h A_h = 0,$$

incompatibile coll'indipendenza degli A_i.

Sia poi β un ciclo qualunque di W. Se non β, certo 2β è il corrispondente d'un ciclo B di V, e poichè $B + B'$ è un ciclo reale quindi dipendente dagli A_i, così sussisterà un'omologia

$$\mu(B + B') + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_h A_h = 0.$$

(con $\mu \neq 0$) dalla quale per il lemma A (e ricordando che anche a B' corrisponde 2β) segue

$$4\mu\beta + \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_h\alpha_h = 0,$$

col risultato che *ogni ciclo* β *di* W *dipende dagli* α_i. Ricordando il significato di h si ha quindi in definitiva che:

L'ordine di connessione r della varietà W è eguale al massimo numero di cicli reali indipendenti, della relativa dimensione, che appartengono alla riemanniana V.

8. Non è consentito proceder oltre senza separare i due casi fin qui accomunati, facendo appello a proprietà di carattere più specifico. Rivolgendoci dapprima alla *connessione lineare*, per cui le circostanze si presentano più favorevoli, posto $R_1 = 2q$ (q *irregolarità* di F) mostriamo che $h = r_1 = q = \frac{R_1}{2}$.

Perciò fissiamo in F, q integrali picardiani di 1ª specie $u_1, u_2, \dots, u_q$ indipendenti e *reali*, e ricordiamo che i periodi d'uno di essi, presi lungo due cicli C, C' associati in S sono coniugati, quindi quelli relativi ai cicli reali sono reali ([20]). Inoltre aggreghiamo ad $A_1, A_2, \dots, A_h$ altri $R_1 - h = 2q - h$ cicli $B_1, B_2, \dots, B_{2q-h}$, in modo da formare una *base* per i cicli lineari di V.

Basta ora ragionare così: Se fosse $h > q$, quindi $2q - h < q$, dai periodi d'una opportuna combinazione lineare a coefficienti reali u degli u_i, relativi ai cicli B_j, si potrebbero far sparire le parti immaginarie; e così si otterrebbe un integrale *coi periodi tutti reali.* Se poi fosse $h < q$ si potrebbe far sì che i periodi di u relativi agli A_i, e quindi a tutti i cicli reali di V fossero nulli; ma allora, qualunque fosse il ciclo C, sarebbe nullo il periodo di u relativo a $C + C'$, quindi quello lungo C immaginario puro, ed in definitiva sarebbero *immaginarî puri tutti i periodi di u* ([21]). In entrambi i casi si cade in assurdo.

In forza della relazione $R_1 = 2r_1$ l'espressione entro parentesi a secondo membro della (9) è nulla, onde, posto $r_2 = h$, si ha col significato stabilito per quel carattere

$$Z = R_2 - 2h. \tag{13}$$

§ 4. Intervento dei numeri base e loro contributo alla connessione bidimensionale $h = r_2$ di W. Seconda forma della conclusione.

9. A formare l'insieme dei cicli a due dimensioni reali di V, contribuisce, parzialmente o totalmente, la classe dei *cicli algebrici.* Ci proponiamo di dimostrare che *il contributo di questa classe al numero h è espresso da* $\rho - \bar{\rho}$, cioè che in V si possono trovare $\rho - \bar{\rho}$ e non più *cicli algebrici reali* fra di loro *indipendenti.* Ne conseguirà che $h \geq \rho - \bar{\rho}$, e, posto $h = \rho - \bar{\rho} + \tau$ si avranno le (2) (4) della prefazione coll'avvertito significato di τ.

Premettiamo alcune osservazioni sui *cicli algebrici* della riemanniana V e sui loro rapporti colle curve tracciate sulla superficie F.

([20]) Vedi loco cit. ([19]), Mem. 1ª, nn, 1-3.

([21]) Si è ripetuto in sostanza il ragionamento della succitata Memoria, n. 2, e, con qualche aggiunta, si potrebbe proprio ricondursi a quello.

Siano A, B due curve irriducibili di F, e supponiamo che il sistema lineare $|A+B|$ sia irriducibile ed infinito, quindi contenga qualche curva irriducibile C; indichiamo inoltre con α, β, γ i cicli a due dimensioni immagini di A, B, C in V, *orientati* per ora in modo *arbitrario*. Tra α, β, γ intercederà certamente una delle omologie $\gamma = \pm\alpha \pm \beta$, ma non si potrà asserire ch'essa sia proprio la $\gamma = \alpha + \beta$ finchè ad α e β non si attribuiscono le orientazioni che derivano *per continuità* da quella di γ, quando C, variando nel proprio sistema lineare, va a spezzarsi in $A+B$.

È però facile vedere, che, se le orientazioni dei cicli α immagini di curve effettive A, si fissano in base al *criterio uniforme* del LEFSCHETZ ([22]), secondo il quale quelle orientazioni restan assegnate in modo che (orientata opportunamente la V) il numero effettivo (AB) delle intersezioni di due curve risulti eguale al *numero algebrico* $(\alpha\beta)$, allora quando sia $C \equiv A + B$ (o più in generale $C \equiv\!\!\equiv A + B$) è sempre $\gamma = \alpha + \beta$. Per persuadersene basta segare le curve considerate con una curva effettiva D a cui corrisponda il ciclo δ, e tener presente che $(A+B, D) = (AB) + (BD)$, $(\alpha+\beta, \delta) = (\alpha\delta) + (\beta\delta)$.

È d'altronde solo in base a tal criterio che si può parlare senz'ambiguità del ciclo di V associato ad una *curva riducibile* di F.

Ciò premesso, suppongasi che la A, irriducibile, sia *reale*. Il ciclo α coinciderà materialmente col suo trasformato α' mediante S; ma poichè α è riemanniana di A, la trasformazione indotta ivi da S è *inversa*, onde, con riguardo alle orientazioni, sarà rigorosamente $\alpha' = -\alpha$. In altre parole, secondo la nostra terminologia, α è un *ciclo immaginario puro* della V.

La conclusione sussiste anche se A è riducibile; e per persuadersene basta aggiungere ad A una B irriducibile e reale, ad es. la sezione di F con una forma reale d'ordine abbastanza elevato, per guisa che nel sistema lineare $|A+B|$ esista qualche curva C irriducibile e reale ([23]). Invero allora, col solito significato dei simboli, si ha $\gamma = \alpha + \beta$, $\beta' = -\beta$, $\gamma' = -\gamma$, $\gamma' = \alpha' + \beta'$, quindi $\alpha' = -\alpha$.

Invece se A è qualunque (ma effettiva) in V, ed $\bar{A}$ è la curva coniugata, i due cicli α, $\bar{\alpha}$ son trasformati materialmente uno nell'altro da S, però, con riguardo alle orientazioni, è $\alpha' = -\bar{\alpha}$; bastando per ciò osservare che la curva $A+\bar{A}$ è reale, quindi il ciclo $\alpha+\bar{\alpha}$ è trasformato da S nell'opposto,

---

([22]) Vedi la nota ([12]).

([23]) Un sistema lineare reale può non contenere curve reali, ma quando ne contiene una ne contiene infinite, tra cui ve n'è certo di irriducibili se lo è il sistema: e quì una curva reale è la stessa $A+B$. In argomento, cfr. loco cit. ([1]), α, n. 2.

il che appunto si verifica quando $\alpha' = -\bar{\alpha}$, non quando $\alpha' = \bar{\alpha}$. In conclusione si ha dunque che:

Una curva reale della superficie F *è rappresentata entro alla riemanniana* V *da un ciclo immaginario puro, e due curve coniugate son rappresentate da due cicli ciascuno dei quali è omologo all'opposto dell'altro.*

10. Partiamoci ora da ρ curve $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$, costituenti una *base* (complessa) sulla superficie F. Per quanto non sia strettamente necessario, supponiamole scelte nella maniera più generale, quindi suscettibili di variare in sistemi lineari infiniti di *dimensione virtuale* positiva, ecc.

Le curve *reali* $C_1 + \bar{C}_1$, $C_2 + \bar{C}_2, \ldots, C_\rho + \bar{C}_\rho$ non saranno, in generale, tutte algebricamente indipendenti, ma di tali se ne potranno trovare al più l, siano le prime, per guisa che ogni altra sarà algebricamente dipendente da esse. Posto $A_i = C_i + \bar{C}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$, basta ripetere un ragionamento del n.° 7 per dedurne che $A_1, A_2, \ldots, A_l$ dànno su F una *base reale* (cioè per le *curve reali*) onde l altro non è che *il numero base reale* $\bar{\rho}$.

In dettaglio, se D è una curva (effettiva) reale di F, la relazione

$$\mu D \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_\rho C_\rho,$$

che ne esprime la dipendenza dai C_i sussiste assieme alla

$$\mu D \equiv \lambda_1 \bar{C}_1 + \lambda_2 \bar{C}_2 + \ldots + \lambda_\rho \bar{C}_\rho,$$

fra le curve coniugate, e dalle due, sommando, discende

$$2\mu D \equiv \lambda_1(C_1 + \bar{C}_1) + \lambda_2(C_2 + \bar{C}_2) + \ldots + \lambda_\rho(C_\rho + \bar{C}_\rho),$$

donde, posto che tutte le $C_j + \bar{C}_j$ dipendono dalle A_i, si trae la conclusione.

Ora ripristiniamo su F una *base complessa includente le* A_i aggregando a queste certe $\sigma = \rho - \bar{\rho}$ curve $B_1, B_2, \ldots, B_\sigma$ scelte adeguatamente, ma per il resto nel modo più generale; ed indicate, al solito con $\bar{B}_1, \ldots, \bar{B}_\sigma$ le coniugate, mettiamo in evidenza che le curve reali $B_t + \bar{B}_t$ dipendono dalle A_i scrivendo le relazioni

(14) $$\mu_t(B_t + \bar{B}_t) \equiv \lambda_{t1} A_1 + \lambda_{t2} A_2 + \ldots + \lambda_{t\bar{\rho}} A_{\bar{\rho}} \text{ [24]}, \qquad (t = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

con $\mu_t \neq 0$. Passando ai corrispondenti cicli $\alpha_i, \beta_t, \bar{\beta}_t$ della V, avremo intanto,

---

[24] Per la maniera generale con cui furono scelti i C_j, B_t è da escludersi che sia necessario aggiungere ai due membri una stessa curva E, che del resto non darebbe alcun incomodo.

perchè le A_i son reali $\alpha_i' = -\alpha_i$ ed inoltre, per quel che s'è visto $\beta_t' = -\bar{\beta}_t$ onde dalle (14) si dedurranno le omologie

$$\mu_t(\beta_t - \beta_t') = \lambda_{t_1}\alpha_1 + \lambda_{t_2}\alpha_2 + \dots + \lambda_{t\bar{\rho}}\alpha_{\bar{\rho}}, \tag{15}$$

ed anche, dopo aver moltiplicato i due membri per 2, e tenuto conto che $\alpha_i = -\alpha_i'$

$$2\mu_t\beta_t - (\lambda_{t_1}\alpha_1 + \dots + \lambda_{t\bar{\rho}}\alpha_{\bar{\rho}}) = 2\mu_t\beta_t' - (\lambda_{t_1}\alpha_1' + \dots + \lambda_{t\bar{\rho}}\alpha_{\bar{\rho}}'). \tag{16}$$

Queste vengono a dire che i σ cicli algebrici

$$\gamma_t = 2\mu_t\beta_t - (\lambda_{t_1}\alpha_1 + \dots + \lambda_{t\bar{\rho}}\alpha_{\bar{\rho}}), \qquad (t = 1, 2, \dots, \sigma) \tag{17}$$

son trasformati in cicli omologhi da S, vale a dire son *reali*; e d'altronde, come mostrano le (17), essi posson sostituirsi ai β_t, cioè presi assieme agli α_i dànno un *sistema di ρ cicli algebrici indipendenti*, su cui la simmetria S opera colla sostituzione

$$\alpha_i' = -\alpha_i, \quad \gamma_t' = \gamma_t \text{ [25]}, \; (i = 1, 2, \dots \bar{\rho};\; t = 1, 2, \dots, \sigma). \tag{18}$$

Ogni ciclo algebrico δ è pertanto dipendente dagli α_i, γ_t, cioè legato ad essi da un'omologia

$$\nu\delta = \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_{\bar{\rho}}\alpha_{\bar{\rho}} + \mu_1\gamma_1 + \dots + \mu_\sigma\gamma_\sigma,$$

$(\nu \neq 0)$ che, trasformata mediante S, dà, a norma delle (18) l'altra

$$\nu\delta' = -\lambda_1\alpha_1 - \dots - \lambda_{\rho}\alpha_{\bar{\rho}} + \mu_1\gamma_1 + \dots + \mu_\sigma\gamma_\sigma,$$

ed infine sommando porge

$$\nu(\delta + \delta') = 2\mu_1\gamma_1 + 2\mu_2\gamma_2 + \dots + 2\mu_\sigma\gamma_\sigma. \tag{19}$$

In particolare se δ è reale si ha $\delta = \delta'$ ed allora la (19) dimostra che δ dipende dai γ_t. Resta così provato che *ogni ciclo algebrico reale di* V *dipende dagli analoghi cicli indipendenti* $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\sigma$, quindi che *i cicli algebrici portano al numero h contributo* $\sigma = \rho - \bar{\rho}$, c. d. d.

Termineremo notando che l'*invarianza assoluta* del carattere $\tau = \frac{1}{2}(R_2 - Z) + \rho - \bar{\rho}$ (nel campo reale) può in generale desumersi, oltrechè dal suo significato, anche dal valutare l'influenza che l'introduzione di curve

---

[25] Si noti che *ad un ciclo algebrico reale* $\gamma(\gamma' = \gamma)$ *non può corrispondere su* F *una curva effettiva* Γ. Difatti detta $\bar{\gamma}$ la coniugata, sarebbe $\gamma' = -\bar{\gamma}$, quindi $\gamma + \bar{\gamma} = 0$ ed allora alla *curva effettiva* $\Gamma + \bar{\Gamma}$ corrisponderebbe un *ciclo nullo*, il che è assurdo (LEFSCHETZ, loco cit. (?), Cap. II, n. 6). Invece ad una *curva virtuale* come la $A - \bar{A}$ corrisponde effettivamente un ciclo $\alpha - \bar{\alpha} = \alpha + \alpha'$ *reale*.

eccezionali di 1ª specie ha sulla relativa espressione; bastando, allo scopo, osservare, che per l'intervento d'una (nuova) curva eccezionale *reale*, tutti i numeri R_2, Z, ρ, $\bar{\rho}$ aumentano d'una unità; mentre l'introduzione di due curve eccezionali *immaginarie coniugate* non altera Z, produce in $\bar{\rho}$ l'aumento d'una unità ed in R_2, ρ quello di due unità.

§ 5. **Esempî e controlli.**

11. Per i varî casi relativi alle *superficie razionali*, rinviamo ai lavori ricordati. Qui esamineremo i seguenti casi nuovi:

a) *Rigate irrazionali di genere q.* — Ci riferiremo ad una rigata reale F d'uno spazio S_h priva di curve eccezionali di 1ª specie (e di punti multipli). Il relativo genere geometrico è nullo, quindi si deve avere $Z = R_2 - 2(\rho - \bar{\rho})$.

Poichè su F la base è costituita da una generatrice e da una sezione iperpiana, entrambe curve reali ([26]), così si ha $\rho = \bar{\rho} = 2$; d'altronde $I = -4q$, $R_2 = I + 4q + 2 = 2$, e pertanto secondo la formula dev'essere $Z = 2$.

Di fatto la F consta d'un certo numero $\mu \geq 0$ di falde (eguale al numero dei rami della sezione iperpiana) ciascuna delle quali ha la connessione d'una quadrica rigata, vale a dire 2. E tal valore ha pure la connessione totale Z come risulta dall'espressione che la definisce (cfr. anche ([16])).

b) *Superficie delle coppie ordinate di punti d'una curva reale C di genere* $p\,(> 0)$. — D'una tal superficie si possono considerare due modelli reali Φ, Φ', distinti per trasformazioni birazionali reali, e legati alle simmetrie ([27]) $(P, Q) \to (\bar{Q}, \bar{P})$, $(P, Q) \to (\bar{P}, \bar{Q})$.

Nel citato lavoro abbiamo trovato, mediante investigazione diretta, che $Z = 2p$ per la Φ, e $Z = 2$ per la Φ'. Verifichiamo con tali valori la formula $Z = R_2 - 2h$, determinando il valore di h ed attribuendo ad R_2 il valore noto $4p^2 + 2$ ([28]); dovremo trovare nei due casi $h = 2p^2 - p + 1$, $h = 2p^2$.

Ove poi si tenga presente, che, supposta la C a moduli generali, si ha $\rho = 2$ ([29]), mentre $\bar{\rho}$ vale rispettivamente 1 e 2 in quanto nel primo caso i

---

([26]) La generatrice può anche non esser reale, ma appartiene ad un sistema algebrico *reale*, il che è equivalente.

([27]) Vedi il lavoro citato ([5]), n. 5.

([28]) Vedi, anche per i cicli ([20]), Lefschetz, loco cit. ([2]), Cap. III, § VII.

([29]) F. Severi, *Sulle corrispondenze fra i punti d'una curva algebrica*, ecc. [Memorie della R. Acc. di Torino, 64 (1903), pp. 1-49], Parte 2ª.

due fasci unisecanti sono immaginarî coniugati, nel secondo reali, si vede che risulterà rispettivamente $\tau = 2p^2 - p$, $\tau = 2p^2$, di guisa che, come avvertito, i valori di τ saranno affatto diversi.

Designata con R la riemanniana di C, con γ_i, δ_i $(i = 1, 2, \ldots, 2p)$ due sistemi di cicli *indipendenti* (ma non necessariamente *primitivi*) di R, e con P, Q due punti ivi fissati, si possono considerare in V gli R_2 cicli a due dimensioni indipendenti indicati dalle

$$(20) \qquad M = (P, R), \quad N = (R, Q), \quad \Gamma_{ik} = (\gamma_i, \delta_k), \quad (i, k = 1, 2, \ldots, 2p),$$

con ovvio significato dei simboli.

Orientata la R, lo sono senz'altro i cicli M, N; le orientazioni dei Γ_{ik} si fisseranno nel modo seguente: Scelto su γ_i un punto H_i, e su δ_k un punto K_k, si considerino su Γ_{ik} i due cicli (orientati perchè lo sono i γ_i, δ_k) $c_i = (\gamma_i, K_k)$, $d_k = (H_i, \delta_k)$ che s'incontrano nel punto (H_i, K_k), indi si orienti Γ_{ik} in modo che quel punto porti al *numero algebrico* (c_i, d_k) contributo $+1$.

A questo punto conviene procedere separatamente:

b$_1$) *Primo modello.* Scelti come δ_i i *coniugati* dei γ_i, si vede facilmente, tenendo conto del modo come vennero fissate le orientazioni, che la simmetria S di V produce sui cicli (20) la sostituzione

$$(21) \qquad M' = -N, \quad N' = -M, \quad \Gamma'_{ik} = -\Gamma_{ki},$$

onde si ottengono subito i *cicli reali indipendenti*

$$M - N, \quad \Gamma_{ik} - \Gamma_{ki} \qquad (i < k),$$

e coll'aiuto delle (21) si trova che ogni altro ciclo reale a due dimensioni di V dipende da essi. Dunque $h = 1 + \binom{2p}{2} = 2p^2 - p + 1$ come previsto.

b$_2$) *Secondo modello.* Si scelgano i γ_i in modo che la simmetria s di R immagine del coniugio di C produca su essi la sostituzione

$$\gamma_i' = \gamma_i, \quad \gamma_j' = -\gamma_j \text{ (30)}, \quad (i = 1, 2, \ldots, p;\ j = p+1, \ldots, 2p)$$

ed i δ_i identici ai γ_i; allora si trova che la sostituzione indotta da S sui cicli (20) è

$$(22) \qquad M' = -M, \quad N' = -N, \quad \Gamma'_{ik} = \Gamma_{ik}, \quad \Gamma'_{rs} = -\Gamma_{rs},$$

dove gl'indici i, k assumono valori entrambi non maggiori o maggiori di p,

---

(30) Cfr. loco cit. (19), Memoria I, prime righe del n.° 3. Qui nulla importa aver cicli *non primitivi.*

e gl'indici r, s i rimanenti. Ne viene che stavolta il *sistema fondamentale per i cicli algebrici reali* è dato dai Γ_{ik}, talchè, conformemente alla previsione, si ha $h = 2p^2$.

c) *Superficie delle coppie non ordinate di punti della curva precedente.* — Se la C è a moduli generali, si ha un solo modello reale Ψ corrispondente alla simmetria $(P, Q) \rightarrow (\overline{P}, \overline{Q})$, che supporremo privo di curve eccezionali. La connessione totale Z della sua parte reale, determinata direttamente nel lavoro testè ricordato, ha il valore $p+1$.

Per la nostra Ψ si ha $I = 2p^2 - 5p - 1$ [31], $q = p$, quindi $R_2 = 2p^2 - p + 1$; inoltre $\rho = \bar{\rho} = 1$, onde si dovrà trovare $h = \tau = 2\binom{p}{2}$.

Scelti come in b_2) i γ_i, δ_i, si hanno adesso in V gli $R_2 = 1 + \binom{2p}{2}$ cicli a due dimensioni indipendenti indicati dai simboli

$$M = (P, R), \quad \Gamma_{ik} = (\gamma_i, \gamma_k),$$

dove ad i, k si diano i valori delle *combinazioni* binarie degli elementi $1, 2, \ldots, 2p$; e la sostituzione su essi indotta da S è

$$M' = -M, \quad \Gamma'_{ik} = \Gamma_{ik}, \quad \Gamma'_{rs} = -\Gamma_{rs},$$

gl'indici variando come nelle (22) (coll'avvertenza che ora $\Gamma_{ik} = \Gamma_{ki}$). Il *sistema fondamentale per i cicli algebrici reali* è dato dai Γ_{ik}, che sono appunto, come previsto, in numero di $2\binom{p}{2}$.

Padova, febbraio 1928.

---

(31) F. SEVERI, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti d'una curva algebrica.* [Atti della R. Acc. di Torino, 38 (1903)], n. 6.

CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

SOTTO L'ALTO PATRONATO DI S. M. IL RE D'ITALIA

PRESIDENTE D'ONORE

S. E. BENITO MUSSOLINI, CAPO DEL GOVERNO

AUSPICE IL RETTORE MAGNIFICO DELLA R. UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

BOLOGNA, 3-10 SETTEMBRE 1928 (ANNO VI)

Programma Provvisorio.

ORDINE DEI LAVORI. — Al Congresso Internazionale dei Matematici, indetto dall'Unione Matematica Internazionale, che si terrà a Bologna dal 3 al 10 Settembre 1928 sotto gli auspici della R. Università, sono invitati senza alcuna eccezione tutti i cultori delle scienze matematiche pure ed applicate.

Il Congresso si svolgerà con sedute plenarie ed adunanze di Sezione.

Nelle sedute plenarie, da autorevoli cultori dei vari rami di scienza si leggeranno conferenze di interesse generale; nelle adunanze di Sezione si leggeranno comunicazioni su materie pertinenti al titolo della Sezione. Ogni Sezione potrà essere suddivisa in più Sottosezioni.

Tutte le sedute e le adunanze si terranno nel palazzo della Università e negli istituti scientifici ad essa adiacenti.

Nella prima seduta plenaria si procederà alla costituzione del Seggio definitivo, il quale comprenderà: un Presidente effettivo; alcuni Vice-presidenti; un Segretario generale; alcuni Segretari aggiunti.

Le sedute plenarie successive saranno presiedute dal Presidente effettivo o da uno dei Vice-presidenti.

La prima adunanza di ciascuna Sezione sarà presieduta da uno degli Introduttori designato dal Comitato ordinatore.

In questa seduta la Sezione deciderà la suddivisione in Sottosezioni, e nominerà uno o più Segretari che resteranno in carica per tutta la durata del Congresso.

Alla fine di ogni adunanza di Sezione, i membri presenti eleggeranno il Presidente della seduta successiva.

L'ordine delle letture risulterà, di norma, dalla pubblicazione del fascicolo contenente gli argomenti delle comunicazioni; ma potrà essere modificato dal voto della Sezione o della Sottosezione rispettiva.

I Congressisti che intendono fare comunicazioni sono pregati di fare conoscere il titolo e l'argomento delle loro letture ad uno degli Introduttori della Sezione rispettiva, entro il Maggio 1928.

Le Conferenze e le Comunicazioni lette al Congresso saranno raccolte nei volumi degli Atti.

Si pregano gli Autori di volere consegnare il testo delle loro letture ad uno degli Introduttori od al Segretario generale del Congresso, non più tardi del 30 Settembre 1928.

Per gli scritti in lingue straniere (francese, inglese, spagnolo, tedesco), in latino classico ed in latino *sine flexione,* è richiesto l'uso della macchina da scrivere (eccettuato per le formule). Se vi sono figure, i relativi clichés dovranno essere forniti dagli Autori.

Ogni Congressista avrà diritto di ricevere una copia dei volumi degli Atti del Congresso.

Nei giorni del Congresso saranno esposti manoscritti ed altri cimeli riguardanti la Storia della Matematica in Bologna, e si inaugurerà un modesto ricordo nella facciata della casa paterna di Scipione Dal Ferro.

RICEVIMENTI UFFICIALI. — La città di Bologna, l'Unione Matematica Italiana, il Comitato ordinatore del Congresso organizzeranno ricevimenti ufficiali ad onore degli ospiti. Altrettanto hanno in animo di fare le città di Ravenna e di Firenze.

Al loro arrivo in Bologna i Congressisti troveranno i programmi dettagliati di questi ricevimenti.

ESCURSIONI E VISITE. — Il Comitato organizzerà visite alle città di Ravenna, di Ferrara e di Firenze, ad interessanti lavori d'ingegneria sull'Appennino ed all'impianto idroelettrico del Lago di Ledro.

VIAGGI E SOGGIORNO IN BOLOGNA. — Il Comitato provvederà perchè ai Congressisti ed alle persone di loro famiglia che verranno in loro compagnia sia concessa sui prezzi di transito sulle ferrovie e sui piroscafi di navigazione italiani, una riduzione che per le ferrovie sarà almeno del 30 %.

Nei giorni del Congresso funzionerà alla stazione ferroviaria di Bologna un Ufficio del Congresso, ove i Congressisti troveranno indicazioni ed assistenza.

Una apposita Commissione si incaricherà degli alloggi negli alberghi, in pensioni o presso privati.

Un Comitato di Signore accoglierà le Signore e le Signorine che prenderanno parte al Congresso o che interverranno come appartenenti alla famiglia di un Congressista, ed organizzerà visite nella Città e negli immediati dintorni.

QUOTA DI ISCRIZIONE. — La quota di iscrizione è fissata in L. 50 per ogni congressista, da versare al Tesoriere-Economo Comm. G. BORSARI, presso la R. Università di Bologna. Le persone appartenenti alla famiglia di un Congressista, versando una quota di L. 25, acquisteranno tutti i diritti dei Congressisti, tolto quello del gratuito ricevimenento di un esemplare degli Atti del Congresso.

Errata to P. DIENES: *On tensor geometry.* « Annali di Matematica », serie IV, tomo 3, pag. 247.

Pag. 249, form. 4th and 5th, replace AN by A^2N. — Pag. 250, form. 4th repl. $|\cdot A \cdot$ by $|\cdot A^2 \cdot|$. — Pag. 255, form. (9.1), repl. $\overset{(p)}{A})X$ by $\overset{(p)}{A}X)$. — Pag. 256, form. (9.3), border second determinant by $\overset{(1)}{A}{}^{i_{p+1}} \dots \overset{(p)}{A}{}^{i_{p+1}}$, last column and by $X^{i_1} \dots X^{i_p} X^{i_{p+1}}$, last line. — Pag. 258, form. 2 from below, suppress $\sqrt{\overset{(\alpha)}{l}}$ (twice). — Pag. 259, form. 3, from below, replace $|\delta_{ij}|$ by $\sum_{i=1}^{p} |\delta_{ij}| \delta_{ii} \lambda_{pi}$. — Pag. 259, line 2 from below, replace *where* by *hence.* — Pag. 260, form. 2, repl. $\delta_{ii}\lambda_{li}$ by $\delta_{jj}\lambda_{lj}$ and $\lambda_{kj}\delta_{kk}$ by λ_{kj}. — Pag. 262, line 1, replace *normal* by *normed.* — Pag. 263, form. (14.3) and (14.4), repl. δ_i by δ_{ii}; form. (14.5), repl. μ_j by $\mu_j\delta'_{jj}$; form. (14.6), repl. $c_{11} - \rho$, $c_{22} - \rho$, $c_{mm} - \rho$, by $c_{11} - \rho\delta'_{11}$, $c_{22} - \rho\delta'_{22}$, $c_{mm} - \rho\delta'_{mm}$. — Pag. 264, form. 1st, repl. δ'_r by δ'_{rr}; three following formulae, repl. $\overset{(i)}{\mu}_r$ by $\overset{(i)}{\mu}_r\delta'_{rr}$; line 12, suppress the phrase in italics; form. 5th and last, repl. δ_t by δ_{tt}, $|\cdot \overset{(t)}{A} \overset{(j)}{E} \cdot|$ by $|\cdot \overset{(t)}{A} \overset{(j)}{E} \cdot| \delta_{tt}$; last, $Q_r)$ by $Q)_r$; 2 from below, ommit the words: *is orthogonal and.* — Pag. 266, form. (15.1), replace $|\cdot \overset{(1)}{A} B \cdot|$ by $|\cdot \overset{(1)}{A} B \cdot| + \cdot$. — Pag. 267, last but one, repl. $(-1)^{i+p}$ by $(-1)^{i+p}A_{ip}$. — Pag. 274, form. 3, repl. $(D$ by $D($; form. (19.13), repl. C^{α}_{0r} by 0. — Pag. 575, from here on)(is replaced by $||$. — Pag. 278, line 1, replace A by $\dot{A}$; line 2, repl. $\frac{\Delta t}{\Delta}$ by $\frac{\Delta}{\Delta t}$. — Pag. 279, line 7, repl. *gen* by *get.* — Pag. 280, line 4 f. b., replace N by $\overset{(2)}{N}$. — Pag. 281, form. (23.2), repl. $e^{i}\omega$ by $e^{i}\omega e^{k_1} \dots e^{k}\omega$. — Pag. 282, line 12, repl. ν by γ; form. 6th, righthand side, repl. β by α; last form., repl. σ_{lm} by ς_{lm}. — Pag. 283, line 5, repl. (23.13) and (23.14) by (24.1) and (24.2); form. (24.3), repl. σ by ρ. — Pag. 284, form. (25.1), lefthand side, repl. k by i. — Pag. 285, form. (25.2), repl. A_α by $\underset{(j)}{A_\alpha}$; line 8, repl. 1 by $\overset{(i)}{e}$; line 6 from below, repl. *nead* by *need.* — Pag. 286, line 13, repl. *series* by *this series.* — Pag. 287, line 6, repl. *avery* by *every.* — Pag. 288, line 11, repl. *function* by *functions.* — Pag. 289, line 4, repl. (26.2) and (27.2) by (26.1) and (27.1); form. last (twice) repl. A by A^{β}. — Pag. 290, line 6, repl. *i. e.* by *i. e.*, by (19.19); form. last. but one, repl. $g^{\beta\alpha}$ by $g_{\beta\alpha}$. — Pag. 291, line 15, repl. *are* by *may be.* — Pag. 294, line 5, repl. *only* by *in only*; line 9, repl. *in* by *is*; line 11, repl. $\overset{[-1]}{A}$ by $\overset{[p-1]}{A}$; line 14, repl. $i - 2$ by i; line 16, repl. $\overset{(i)}{N}$ by $\overset{(j)}{N}$; form. last, in brackets, 3 times, repl. A by A^{α}. — Pag. 295, line 4, from below, repl. *teory* by *theory.*

INDICE DEL TOMO V DELLA SERIE 4ª