COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS,
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS

SUR LA

THÉORIE DE LA CROISSANCE

PROFESSÉES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PAR

ÉMILE BOREL,

RECUEILLIES ET RÉDIGÉES

PAR

ARNAUD DENJOY,
Ancien élève de l'École Normale supérieure,
Maître de Conférences à l'Université de Montpellier.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1910

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

LEÇONS

SUR LA

THÉORIE DE LA CROISSANCE

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

A LA MÊME LIBRAIRIE

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL,
PROFESSEUR DE THÉORIE DES FONCTIONS A L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments de la théorie des ensembles et applications*), par M. ÉMILE BOREL; 1898 .... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions entières, par M. ÉMILE BOREL; 1900 ..... 3 fr. 50

Leçons sur les séries divergentes, par M. ÉMILE BOREL; 1901 ..... 4 fr. 50

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France par M. ÉMILE BOREL, rédigées par M. *R. d'Adhémar*; 1902 .. 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France par M. ÉMILE BOREL, rédigées par M. *Ludovic Zoretti*; 1903 .. 3 fr. 50

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France par M. HENRI LEBESGUE; 1904. 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'École Normale par M. EMILE BOREL, rédigées par M. *Maurice Fréchet*, avec des Notes de M. PAUL PAINLEVÉ et de M. HENRI LEBESGUE; 1905 .... 4 fr. 50

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France par M. RENÉ BAIRE, rédigées par M. *A. Denjoy*; 1905 .... 3 fr. 50

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par M. ERNST LINDELÖF; 1905 .... 3 fr. 50

Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France par M. HENRI LEBESGUE; 1906 .... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, professées au Collège de France par M. PIERRE BOUTROUX, avec une Note de M. PAUL PAINLEVÉ; 1908 .... 6 fr. 50

Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini, par M. OTTO BLUMENTHAL; 1910 .... 5 fr. 50

SOUS PRESSE :

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, par M. PAUL MONTEL.

Leçons sur le prolongement analytique, professées au Collège de France, par M. LUDOVIC ZORETTI.

EN PRÉPARATION :

Sur l'inversion des intégrales définies, par M. VITO VOLTERRA.

Quelques principes fondamentaux de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, par M. PIERRE COUSIN.

Leçons sur les correspondances entre variables réelles, par M. JULES DRACH.

Leçons sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et son application à la théorie des nombres premiers, par M. HELGE VON KOCH.

Leçons sur quelques questions d'*Analysis situs*, par M. HENRI LEBESGUE.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS,
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS

SUR LA

THÉORIE DE LA CROISSANCE

PROFESSÉES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PAR

ÉMILE BOREL,

RECUEILLIES ET RÉDIGÉES

PAR

ARNAUD DENJOY,
Ancien élève de l'École Normale supérieure,
Maître de Conférences à l'Université de Montpellier.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Grands-Augustins, 55.

1910

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Tous droits de traduction et de reproduction réservés.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

PRÉFACE.

La théorie de la croissance m'apparaît chaque jour davantage comme le fondement essentiel de la Théorie des fonctions. Ce Livre aurait donc dû, dans l'ordre logique, être le premier de cette Collection de Monographies. Mais l'ordre le plus logique n'est pas nécessairement le meilleur, et il semble préférable d'attendre encore quelques années pour entreprendre une exposition systématique de la Théorie des fonctions où la théorie de la croissance jouera le rôle d'une Introduction dont les résultats essentiels seront constamment invoqués. Ce mode d'exposition entraînera une simplification considérable, mais exigera l'emploi d'expressions et de notations nouvelles, qu'on ne saurait introduire avec trop de prudence. Dans ce Livre même, les Chapitres d'applications ont été rédigés de manière que leurs résultats essentiels puissent être compris indépendamment du système de notations exposé dans les premiers Chapitres.

Les matières traitées dans cet Ouvrage ont été, avec quelques autres, l'objet de mon enseignement à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris pendant les semestres d'hiver 1907-1908 et 1908-1909. M. Arnaud Denjoy a bien voulu assumer la tâche délicate de coordonner ces deux Cours, dont chacun avait dû constituer un tout complet et indépendant.

On sait que M. Denjoy s'est déjà distingué par de profondes

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

recherches personnelles sur des matières touchant de très près à celles qui sont traitées ici; c'est dire à quel point sa collaboration m'a été précieuse; je tiens à l'en remercier bien cordialement et à prier nos lecteurs, s'ils trouvent quelque mérite à ce Livre, de vouloir bien lui en attribuer la plus grande part.

Klingenthal-Ottrott, 8 septembre 1909.

ÉMILE BOREL.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

INDEX.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

LEÇONS

SUR LA

THÉORIE DE LA CROISSANCE.

INTRODUCTION.

NOTIONS SUR LES SUITES ET SUR LA CROISSANCE.

Objet d'une étude de la croissance. — La notion de croissance est l'une des plus simples et des plus immédiates de l'Analyse. La suite des nombres entiers est, par définition, une suite croissante. C'est dire qu'on y considère chaque terme comme plus grand que tous ceux qui le précèdent et, par suite, moins grand (ou plus petit) que chacun de ceux qui le suivent.

Le sens des expressions *plus grand* et *plus petit* étant défini pour un couple quelconque de nombres réels, rationnels ou irrationnels, positifs, négatifs ou nuls, une suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ est dite *croissante* s'il y a entre deux nombres quelconques de la suite une inégalité de même sens qu'entre leurs indices.

Parallèlement aux suites de nombres, nous envisagerons des fonctions d'une variable continue croissant indéfiniment.

Une fonction $f(x)$ est dite *croissante*, s'il y a entre deux valeurs quelconques de la fonction, $f(x')$ et $f(x'')$, une inégalité de même sens qu'entre les nombres x' et x'', ou, en langage équivalent, si $\frac{f(x')-f(x'')}{x-x}$ est positif, quels que soient les nombres distincts x' et x''.

Ceci définit $f(x) = x$ comme la fonction essentiellement croissante.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Une suite u_n, une fonction $f(x)$ sont dites *décroissantes*, si la suite $-u_n$, la fonction $-f(x)$ sont croissantes.

Le but de la théorie de la croissance est de comparer la croissance du terme u_n d'une suite, ou de la valeur $f(x)$ d'une fonction à la croissance des suite ou fonction types n et x, c'est-à-dire de comparer, pour une suite, la valeur d'un terme à son rang, et pour une fonction sa valeur à celle de son argument, quand le rang ou l'argument croissent indéfiniment.

Malgré la généralité de l'énoncé précédent, nous parviendrons à des résultats simples, comme dans les autres branches des Mathématiques. La raison commune en est que tous les êtres mathématiques désignables le sont avec un nombre fini de mots (*voir* plus loin, p. 120 et suivantes).

Par exemple, pour définir une série, il faut donner la valeur de u_n pour toutes les valeurs de n. Il n'est pas possible de définir tous les nombres u_n avec un nombre limité de mots, s'il n'existe pas une loi générale permettant de calculer chaque terme au moyen de son rang, et elle-même exprimable en un nombre fini de mots. Une remarque analogue s'applique aux fonctions croissantes dont nous nous occuperons. Il est naturel qu'entre cette infinité d'éléments définis avec un nombre limité de mots, il y ait un grand nombre de relations simples.

Les seules fonctions que nous ayons à envisager sont celles variant toujours dans le même sens [1], soit croissantes, soit décroissantes. Nous pourrons ramener leur étude à celle d'une fonction croissant indéfiniment, la variable croissant aussi indéfiniment.

Car, si une variable z tend vers une limite finie c, en variant toujours dans le même sens, l'une des transformations $z_1 = \frac{1}{z-c}$ si z est décroissant, $z_2 = \frac{1}{c-z}$ si z est croissant, la transforme en une variable croissant indéfiniment. Si z décroît indéfiniment par valeurs négatives, on atteint le même but en substituant à z, $z_3 = -z$.

Cela étant, en appliquant à chacune des variables y et x, qui ne croît pas indéfiniment par valeurs positives, l'une des trans-

---

[1] Ou *monotones* selon une expression surtout usitée en Allemagne.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

formations précédentes, la fonction y de x sera transformée en une fonction y' de x', y' étant une fonction croissante et infiniment grande avec x'.

Ce sera l'ordre de grandeur de la fonction y' relativement à x' qui fera, en pareil cas, l'objet de notre étude.

Limites d'une suite. — Afin de mieux préciser la croissance d'une fonction ou d'une suite, nous serons fréquemment amenés à en déduire d'autres fonctions ou suites dont la variation ne sera pas, en général, monotone et au sujet desquelles nous utiliserons les notions suivantes.

Soit une suite de nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ supposés tous réels.

Pour simplifier l'exposé, nous représenterons chacun de ces nombres par un point d'une droite, sur laquelle a été choisie une origine et le point $+1$ [1]. Si $OA_n = u_n$, A_n est le point représentatif ou affixe de u_n. Nous allons étudier la distribution de ces points sur l'axe Ou. Supposons qu'il existe un point P qui soit à droite de A_n, quel que soit n. Nous dirons que l'ensemble A est borné à droite. On sait qu'il existe alors un point M, appelé *borne à droite* de l'ensemble A_n, tel que : 1° l'ensemble A_n ne possède aucun point à droite de A_n ; 2° quel que soit le point B à gauche de M, il existe au moins un point de l'ensemble A_n à droite de B.

Si M est l'affixe de μ, μ est dit la *borne supérieure* de l'ensemble u_n. Ce nombre μ est tel que, quel que soit n, $\mu \geqq u_n$, et, pour une valeur au moins de n, $u_n > \mu - \varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε.

On définit de même, quand il existe un point à gauche de tous les A_n, une *borne à gauche*, N, de l'ensemble A_n. Si N est ce point, et s'il est l'affixe de ν, $-\nu$ est la borne supérieure de l'ensemble $-u_n$.

Rappelons la définition du point limite et certaines de ses propriétés.

---

[1] Pour abréger le langage, nous nous supposerons placés de telle sorte qu'un mobile, parcourant la droite dans le sens positif, aille de notre gauche vers notre droite.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

On dit que A est *un point limite de l'ensemble* A_n si, dans le voisinage de A, il y a une infinité de points A_n ; d'une façon plus précise, si tout segment contenant le point A à son intérieur contient une infinité de points de l'ensemble.

D'après cette définition, si une infinité de points de l'ensemble coïncident avec un point A', A' doit être considéré comme un point limite de cet ensemble.

Supposons d'abord que tous les points A_n se trouvent sur un segment PQ.

D'après un théorème classique, PQ contient au moins un point limite (pouvant coïncider avec P ou Q). En voici la démonstration.

Divisons PQ en 2^p parties égales, p étant un entier déterminé. Parmi les 2^p segments obtenus, il y en a au moins un qui contient une infinité de points. Je désigne par P_pQ_p le premier segment jouissant de cette propriété qu'on rencontre en parcourant PQ de P vers Q. On constate immédiatement que la suite des segments P_pQ_p où p croît indéfiniment est telle que chacun d'eux soit contenu dans le précédent. De plus, $P_pQ_p = \frac{PQ}{2^p}$ tend vers zéro. Donc, les points P_p et Q_p tendent vers un point A toujours compris entre eux. Ce point A est un point limite pour l'ensemble, car il est évident que tout intervalle contenant A à son intérieur contient tous les segments P_pQ_p à partir d'une certaine valeur de p et, par suite, contient une infinité de points de l'ensemble.

Le cas le plus simple est celui où le point limite A est unique. On dit alors que les points A_n ont pour limite A et, en posant $\overline{OA} = u$, que u_n a pour limite u. Il est aisé de démontrer l'identité des deux définitions analytique et géométrique de la limite.

Dire que le point limite A est unique c'est dire que, quelque petit que soit l'intervalle MM' de longueur 2ε ayant son milieu au point A, si nous retranchons de PQ tous les points intérieurs à cet intervalle, le ou les segments conservés ne possèdent de point limite de l'ensemble ni à leur intérieur ni à leurs extrémités. Ils ne contiennent donc qu'un nombre limité de points de l'ensemble. Parmi ces points, l'un d'eux a un indice plus élevé que tous les autres. Soit m cet indice. Si $n > m$, A_n est intérieur

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

à l'intervalle MM'. Par suite

$$|u_n - u| < \varepsilon.$$

Donc, ε étant un nombre positif donné d'avance, il est possible de trouver un nombre m tel que, pour $n > m$,

$$|u_n - u| < \varepsilon.$$

D'après la définition analytique de la limite, c'est dire que u_n tend vers u.

Réciproquement, si u_n a pour limite u, je dis que le point A, tel que $\overline{OA} = u$, est point limite unique de l'ensemble des points A_n.

Soit, en effet, B un point distinct de A. Soit l la distance AB; il existe un nombre m tel que, pour toutes les valeurs de n supérieures à m, on ait

$$|u_n - u| < \frac{l}{2}.$$

Donc, le segment de milieu B et de longueur $\frac{l}{2}$ ne contient pas de points de l'ensemble A_n qui ne soit dans la suite limitée A_1, A_2, ..., A_m. Il n'en contient donc pas une infinité, et B n'est pas un point limite. A est donc le seul point limite.

Donc, dans le cas d'une limite unique, il y a identité entre la définition géométrique et la définition analytique.

Lorsqu'il n'y a pas une limite unique, la représentation géométrique rend plus intuitif le sens de certaines notions.

Supposons que l'ensemble des points A_n ait un nombre fini de points limites, A, B, ..., K, qui sont les affixes de a, b, ..., k. Soient $2l$ la plus petite des distances mutuelles des points A, B, ..., K, et ε un nombre positif quelconque inférieur à l. Si l'on construit les intervalles, extérieurs les uns aux autres, de longueur 2ε et de milieux respectifs A, B, ..., K, les segments qui restent, lorsqu'on retranche de PQ les points intérieurs à chacun de ces intervalles, ne possèdent pas de points limites à leur intérieur ni en leurs extrémités et, par suite, ne contiennent qu'un nombre fini de points de l'ensemble. Soit m le plus grand de leurs indices. Tous les points dont l'indice est supérieur à m sont à une distance de l'un des points A, B, ..., K (et d'un seul)

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

inférieure à ε, et par suite, quel que soit $n > m$, on a l'une des inégalités (et l'une d'elles seulement)

$$|u_n - a| < \varepsilon, \qquad |u_n - b| < \varepsilon, \qquad \ldots, \qquad |u_n - k| < \varepsilon.$$

La suite considérée se compose donc de plusieurs suites partielles ayant chacune un point limite unique. On obtient ces suites en donnant à ε une valeur particulière, $\frac{l}{2}$ par exemple. Alors, chacune des inégalités ci-dessus détermine une suite tendant vers une limite unique, et tous les termes de la suite u_n se rangent dans l'une de ces suites partielles, sauf un nombre fini d'entre eux qu'on peut répartir arbitrairement entre ces suites. On peut dire que la suite totale a plusieurs limites.

Par exemple, étant donnée la suite v_n ainsi définie :

$$v_{2n} = \frac{1}{2^n 3^n}, \qquad v_{2n+1} = \frac{1}{2^n 3^{n-1}},$$

posons

$$u_n = \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

On a

$$u_{2n} = \frac{1}{3}, \qquad u_{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

La suite u_n dont les termes sont alternativement $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ a deux points limites, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

Des circonstances beaucoup plus compliquées peuvent se présenter, quand l'ensemble des points limites de A_n, ou *ensemble dérivé*, contient une infinité de points, sans couvrir un intervalle [1]. Nous nous contentons de signaler ce cas sans l'examiner, son étude étant étrangère à notre objet.

Enfin, le dérivé de l'ensemble donné, A_n, peut contenir tous les points d'un intervalle, bien qu'il soit impossible que tous ces points appartiennent à l'ensemble A_n. Donnons un exemple de ce cas.

Nous pouvons ranger dans une suite indéfinie toutes les fractions comprises entre 0 et 1, et dont le dénominateur est une

---

[1] Pour l'étude de ces questions *voir* BAIRE, *Leçons sur les fonctions discontinues*.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

puissance de 2, sans qu'une même fraction soit répétée plus de deux fois. Nous adopterons par exemple l'ordre

$$u_1 = \frac{1}{2};$$
$$u_2 = \frac{1}{4}, \qquad u_3 = \frac{3}{4};$$
$$u_4 = \frac{1}{8}, \qquad u_5 = \frac{3}{8}, \qquad u_6 = \frac{5}{8}, \qquad u_7 = \frac{7}{8}; \qquad \dots$$

La loi est évidente.

Tout point de l'intervalle 01 est un point limite pour l'ensemble des affixes des u. En effet, si l'on écrit l'abscisse de ce point dans le système de numération binaire, on peut toujours supposer que le développement ait un nombre infini de chiffres. Or, si on le limite au $p^{\text{ième}}$ chiffre, le nombre conservé est une fraction de dénominateur $\frac{1}{2^p}$, et cette fraction tend vers le nombre considéré. Ou encore, les fractions approchées à $\frac{1}{2^n}$ près par défaut et par excès du nombre considéré figurent dans la suite. Or, elles diffèrent du nombre considéré de $\frac{1}{2^n}$ au plus.

Il est à remarquer que les points 0 et 1 sont aussi des points limites. Ce sont évidemment les points limites extrêmes de l'intervalle. Les valeurs 0 et 1 sont appelées, d'après Cauchy, la *plus petite* et la *plus grande des limites* de la suite u_n.

Extrêmes limites d'une suite. — Ces notions, dues à Cauchy, ont été étudiées ensuite par Paul du Bois-Reymond, qui a employé les noms de *limites supérieure et inférieure d'indétermination*, puis par M. Hadamard dans sa Thèse [1]. Nous allons les exposer, d'après ce dernier auteur, dans toute leur généralité.

Considérons la suite des affixes $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ des termes d'une suite. Supposons que tous les points A_n soient compris entre deux points fixes P et Q. Nous rangeons les points de PQ

(1) M. Hadamard emploie la locution : plus grande (ou plus petite) limite *pour m infini*.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

en deux catégories C_1 et C_2 de la façon suivante. Un point M fera partie de C_1, si l'ensemble $A_{\prime\prime}$ possède une infinité d'éléments à droite de M. Un point N fera partie de C_2, s'il n'y a qu'un nombre fini de points de $A_{\prime\prime}$ à droite de N.

Tout point de PQ appartient à l'une ou à l'autre de ces deux catégories. Tout point à gauche d'un point de C_1 appartient à C_1. Tout point à droite d'un point de C_2 appartient à C_2. Dans ces conditions nous savons que C_1 et C_2 définissent un point μ, tel que tout point à gauche de μ appartient à C_1, tout point à droite de μ appartient à C_2. Rappelons brièvement ce raisonnement classique.

Puisque tous les points de C_1 sont à gauche d'un point quelconque de C_2, ils ont une borne à droite μ, et μ n'est à droite d'aucun point de C_2. Donc, tout point à gauche de μ appartient à C_1, et d'ailleurs tout point à droite de μ appartient à C_2, puisque μ est la borne à droite des points de C_1. (C. Q. F. D.)

Quant à μ, il peut appartenir selon les cas à C_1 ou à C_2.

Quelque petit que soit ε, l'intervalle de milieu μ et de longueur 2ε contient une infinité de points de l'ensemble $A_{\prime\prime}$, tandis que, au delà de cet intervalle vers la droite, il n'y a qu'un nombre fini de ces points.

Donc, μ est un point limite de l'ensemble $A_{\prime\prime}$, et cet ensemble ne possède aucun point limite à droite de μ. Donc, μ est le point limite le plus à droite.

En général, étant donnés une infinité de points sur un segment PQ, il n'est pas sûr qu'il y en ait un à droite de tous les autres; mais, quand ces points forment le dérivé d'un ensemble, on est, *a priori*, certain qu'il en est ainsi, car tout point limite du dérivé est un point limite de l'ensemble $A_{\prime\prime}$ et, par suite, appartient aussi au dérivé. En particulier, la borne à droite du dérivé de $A_{\prime\prime}$ appartient à ce dérivé et en est par suite le point le plus à droite.

Relativement à la suite u, la définition analytique de la plus grande limite L sera la suivante. Quelque petit que soit le nombre positif donné ε, l'inégalité

$$u_n > L + \varepsilon$$

n'est vérifiée que pour un nombre fini ou nul de valeurs de n et

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

l'inégalité

$$u_n > L - \varepsilon$$

est satisfaite pour une infinité de valeurs de n.

Soit par exemple la suite

$$\frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad 1 + \frac{1}{5}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2n}, \quad 1 + \frac{1}{2n+1}, \quad \ldots.$$

L'ensemble de ses affixes a deux points limites 0 et 1. La plus grande limite de la suite est 1.

On peut donner des définitions analogues de la *plus petite limite* de la suite u_n. Nous nous contenterons de la suivante, qui les résume toutes :

Si $-l$ est la plus grande limite de la suite

$$-u_1, \quad -u_2, \quad \ldots, \quad -u_n, \quad \ldots,$$

l est, par définition, la plus petite limite de la suite

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots.$$

On emploie fréquemment les notations suivantes, dues à M. Pringsheim :

$$\overline{\lim}\, u_n = L, \qquad \underline{\lim}\, u_n = l.$$

On a alors

$$\overline{\lim}(-u_n) = -l, \qquad \underline{\lim}(-u_n) = -L.$$

Nous avons jusqu'ici supposé que tous les termes de la suite restaient compris entre deux nombres déterminés. S'il n'en est pas ainsi, afin de pouvoir conserver des énoncés généraux, nous ajouterons, à l'ensemble des nombres réels, positifs, négatifs et nul, les éléments $+\infty$ et $-\infty$. Par définition, le nombre $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel, et le nombre $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel. De même, sur un axe portant les affixes de ces nombres, nous envisageons les points $+\infty$ et $-\infty$. M étant un point quelconque de cet axe, le point $+\infty$ est à la droite de M, et $-\infty$ à sa gauche. A l'inverse de ce qui a lieu en Géométrie projective, les points $+\infty$ et $-\infty$ sont considérés comme essentiellement distincts.

Nous dirons qu'une suite u_n a pour limite $+\infty$, si, quelque

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

grand que soit le nombre donné X, il existe un entier m tel qu'on ait $u_n > X$, sous la seule condition $n > m$.

Nous dirons que $+\infty$ est l'une des limites d'une suite u_n, si, quel que soit le nombre donné X, il y a une infinité de valeurs de n, telles que $u_n > X$, sans que u_n ait pour limite $+\infty$.

Si une suite admet plusieurs limites parmi lesquelles $+\infty$, nous dirons que la plus grande limite de cette suite est $+\infty$.

Nous dirons que $-\infty$ est, selon les cas, la limite ou l'une des limites (et alors la plus petite) de la suite u_n, si $+\infty$ est la limite ou l'une des limites (et alors la plus grande) de la suite $-u_n$.

On prévoit que, lorsque nous aurons à envisager la plus grande et la plus petite limite d'une suite, nous rencontrerons les quatre types de cas suivants : L et l étant deux nombres finis, les plus grande et plus petite limites sont respectivement : 1° L et l; 2° L et $-\infty$; 3° $+\infty$ et l; 4° $+\infty$ et $-\infty$.

Extrêmes limites d'une fonction. — On peut définir des nombres analogues pour une fonction de x dont la variation est arbitraire quand x tend vers une valeur, que nous supposerons être $+\infty$.

Nous dirons que $f(x)$ a pour *plus grande limite* L, quand x tend vers $+\infty$, si, quelque petit que soit le nombre donné ε : 1° les valeurs de x, telles que

$$f(x) > L + \varepsilon,$$

sont toutes inférieures à un certain nombre; 2° il y a des valeurs de x supérieures à tout nombre donné à l'avance et telles que

$$f(x) > L - \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\overline{\lim_{x=+\infty}} f(x) = L.$$

La plus petite limite de $f(x)$, quand x tend vers $+\infty$, est l, si $-l$ est la plus grande limite de $-f(x)$, pour $x = +\infty$. On écrit

$$\underline{\lim_{x=+\infty}} f(x) = l,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et l est défini par l'égalité

$$\underline{\lim}_{x=+\infty} f(x) = -\overline{\lim}_{x=+\infty} [-f(x)].$$

On peut rattacher l'une à l'autre les notions de plus grande et de plus petite limite pour une fonction de variable continue et pour une suite de nombres dépendant d'un indice entier.

Considérons une suite de nombres tendant vers $+\infty$ par valeurs toujours croissantes, $N_1, N_2, \ldots, N_p, \ldots,$ par exemple une suite d'entiers croissants. Soient M_p et m_p la borne supérieure et la borne inférieure des valeurs de $f(x)$, pour

$$N_p \leqq x \leqq N_{p+1}.$$

Je dis qu'on a

$$\overline{\lim}_{x=+\infty} f(x) = \overline{\lim}\, M_p$$

et

$$\underline{\lim}_{x=+\infty} f(x) = \underline{\lim}\, m_p.$$

Démontrons, par exemple, la première de ces deux égalités. Soit L la plus grande limite de la suite M_p. Je dis que

$$L = \overline{\lim}_{x=+\infty} f(x).$$

Je vais montrer que, quelque petit que soit le nombre positif donné ε :

1° Les valeurs de x, telles que

$$f(x) > L + \varepsilon,$$

ne dépassent pas un certain nombre fini. En effet, puisque

$$L = \overline{\lim}\, M_p,$$

il existe un entier m, tel que la condition $p > m$ entraîne

$$M_p < L + \varepsilon.$$

Comme pour

$$N_p \leqq x \leqq N_{p+1}$$

on a

$$f(x) \leqq M_p,$$

pour

$$x \geqq N_{m+1}$$

on a

$$f(x) < L + \varepsilon.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Donc, les valeurs de x qui donnent à $f(x)$ une valeur supérieure à $L+\varepsilon$ sont inférieures à un nombre fini, au plus égal à N_{m+1}.

2° Il y a des valeurs de x dépassant tout nombre donné et telles que

$$f(x) > L - \varepsilon.$$

En effet, d'après la seconde propriété caractéristique de L, exprimée par

$$L = \overline{\lim}\, M_p,$$

il y a une infinité de valeurs de p, telles que

$$M_p > L - \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'ailleurs, puisque M_p est, pour $N_p \leqq x \leqq N_{p+1}$, la borne supérieure de $f(x)$, il existe une valeur x_p de x satisfaisant à

$$N_p \leqq x_p \leqq N_{p+1}$$

et telle que

$$f(x_p) > M_p - \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc

$$f(x_p) > L - \varepsilon.$$

Comme $x_p \geqq N_p$, et que p peut prendre une infinité de valeurs, il en résulte que les nombres x tels que

$$f(x) > L - \varepsilon$$

dépassent tout nombre donné à l'avance.

Il est à remarquer que cette dernière démonstration ne suppose nullement $f(x)$ continue. Si l'on introduit cette hypothèse, on peut faire

$$f(x_p) = M_p,$$

ce qui simplifie légèrement la démonstration.

Les mêmes opérations peuvent s'appliquer au calcul des limites extrêmes d'indétermination d'une suite. Cela revient à remplacer, dans cette suite, des groupes d'un nombre limité de termes consécutifs, soit par le plus grand, soit par le plus petit de ces termes.

Enfin, signalons une dernière définition qui n'est pas sans

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

analogie avec la précédente. Considérons la suite $u_n, u_{n+1}, \ldots$. Soient M_n et m_n les bornes supérieure et inférieure de cette suite, bornes qui peuvent être $+\infty$ ou $-\infty$. Les nombres M_n ne vont jamais en croissant avec n, et d'ailleurs ils restent supérieurs à l'un quelconque des nombres m_p. Les nombres M_n tendent donc vers leur borne inférieure L. Ce nombre L est la plus grande limite de la suite u_n. Pareillement, la borne supérieure l de la suite m_n est la plus petite limite de la suite u_n.

Si l'on étudie une fonction $f(x)$, on définit les deux fonctions $M(x)$ et $m(x)$ qui sont les bornes supérieure et inférieure de $f(X)$, pour $X \geq x$. La fonction $M(x)$ ne croît jamais et est bornée inférieurement. Sa borne est sa limite. Cette limite L est la plus grande limite de $f(x)$. De même la borne supérieure l de $m(x)$, qui est en même temps sa limite, est la plus petite limite de $f(x)$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

CHAPITRE I.

LA NOTATION DES ORDRES TYPES DE CROISSANCE.

Sans qu'il soit préalablement nécessaire de puiser des exemples dans les très nombreuses questions où intervient la notion de croissance, le lecteur admettra l'intérêt actuel d'une théorie générale et abstraite des ordres de croissance. Son utilité sera au reste démontrée par les applications que nous en ferons et auxquelles seront consacrés les deux derniers Chapitres de ces *Leçons*, dont les trois premiers sont employés à l'établissement de la théorie.

Nous allons d'abord envisager certains *types fondamentaux* de fonctions croissantes. A chacune de ces fonctions nous adjoindrons un signe qui nous servira à noter son ordre de croissance. Nous définirons ensuite des opérations sur les ordres, qui nous permettront de noter, par des combinaisons des signes élémentaires, les ordres de fonctions formant des classes de plus en plus étendues. A chacune de ces combinaisons correspondra une fonction unique, et réciproquement. Ainsi se trouve bornée la matière de notre premier Chapitre.

Mais, parmi les fonctions, beaucoup plus générales, dont les procédés précédents ne nous permettent pas de noter l'ordre, nous retiendrons celles dont la croissance est la plus voisine des premières, et sera appelée par nous *régulière*. Nous noterons leur ordre au moyen même des expressions servant pour les fonctions types voisines, mais en adjoignant à ces expressions un signe distinctif (parenthèse). L'étude de ces croissances fera l'objet du second Chapitre.

Enfin le troisième Chapitre sera consacré aux modifications apportées à l'ordre de croissance d'une fonction par l'intégration et la différentiation de cette fonction.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Les généralités exposées dans l'Introduction étaient indispensables pour introduire certains *nombres caractérisant la croissance des fonctions.* Ces nombres seront définis comme des limites de fonctions ou de suites. Lorsque nous aurons des fonctions ou des suites ne tendant pas vers une limite unique, ce seront la plus grande et la plus petite limite que nous envisagerons.

Montrons par un exemple comment la connaissance de certains nombres et de leur signification peut nous fournir, avec précision, certains renseignements essentiels sur la croissance d'une fonction, relativement à la croissance de la variable x, prise pour étalon de croissance.

Soit la fonction

$$y = x^2 \log x (2 + \sin x)^{\log_3 x}.$$

(Nous conviendrons de noter

$$\log \log x = \log_2 x, \qquad \log \log_p x = \log_{p+1} x.)$$

Le facteur le plus croissant dans y est évidemment x^2. Formons le rapport

$$\frac{\log y}{\log x};$$

on a

$$\log y = 2 \log x + \log_2 x + \log_3 x \times \log(2 + \sin x).$$

Donc

$$\frac{\log y}{\log x} = 2 + \frac{\log_2 x}{\log x} + \frac{\log_3 x \times \log(2 + \sin x)}{\log x}$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \lim \frac{\log y}{\log x} = 2.$$

Ce nombre 2 nous renseigne déjà utilement sur la croissance de la fonction. Mais les fonctions

$$y_1 = x^2 \log^2 x, \qquad y_2 = \frac{x^2}{\log x}$$

nous auraient conduit par la même opération à la même limite 2.

Formons la différence $\log y - 2 \log x$ et cherchons si son rapport à $\log_2 x$ tend vers une limite. Il en est effectivement ainsi et

$$(2) \qquad \lim_{x=+\infty} \frac{\log y - 2 \log x}{\log_2 x} = 1.$$

Ce nombre 1 nous donne une seconde approximation très précise sur la croissance de f. Il est maintenant naturel de chercher si

$$\frac{\log y - 2\log x - \log_2 x}{\log_3 x}$$

tend vers une limite.

Ce rapport est égal à

$$\log(2 + \sin x).$$

Il oscille entre 0 et log 3. Ici nous n'avons plus de résultat précis. Nous connaissons cependant la plus grande et la plus petite limite du troisième rapport examiné, mais il nous est impossible de tenter une quatrième approximation.

En tous cas, les propriétés essentielles de la fonction relativement à la croissance sont indiquées par la signification et la valeur des nombres trouvés 2, 1 et 0, log 3.

Ordres fondamentaux de croissance. — Les fonctions que nous étudierons d'abord et qui nous fourniront les étalons fondamentaux de croissance sont les puissances de la variable et les fonctions exponentielle et logarithmique.

Nous envisagerons ensuite les fonctions se déduisant des premières par composition de ces fonctions entre elles, puis (Chapitre III) par intégration et différentiation.

La fonction logarithmique se rattache ainsi aux puissances de la variable, puisqu'elle est la primitive de $\frac{1}{x}$. L'importance de la fonction exponentielle résultera pour nous, d'abord du fait qu'elle est l'inverse de la fonction logarithmique et ensuite du fait que sa dérivée lui est égale et a, par suite, une croissance identique à la sienne.

Nous rappelons, une fois pour toutes, que la fonction et la variable sont toutes deux des infiniment grands positifs. Nous prenons pour infiniment grand principal la variable x, et nous convenons de dire que son ordre de grandeur est *identique* à 1. Nous dirons de même que, n étant un nombre positif fixe quelconque, l'ordre de grandeur de x^n est *identique* à n. Dans la suite, nous conserverons cette définition, si n est négatif ou nul.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

La fonction exponentielle e^x croît plus rapidement que n'importe quelle puissance de x. On a

$$\lim_{x=+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty,$$

quel que soit le nombre n. Nous avons là un premier exemple d'un fait général, et qui constitue une différence essentielle entre les suites de nombres et les suites de fonctions. Considérons la suite de fonctions $x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$. Chacune d'elles croît plus rapidement que toutes celles qui la précèdent. Si l'on donne à x une valeur particulière supérieure à 1, par exemple 2, on obtient la suite $2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$. Aucun nombre A, donné, n'est supérieur à tous les termes de cette suite, puisqu'elle tend vers $+\infty$.

Et cependant, e^x a la propriété d'augmenter plus rapidement que toutes les fonctions de la suite. Donc, d'une part, quelle que soit la valeur fixe a donnée à x, il est possible de trouver une valeur n_0 telle que pour $n > n_0$, on a

$$a^n > e^a,$$

et d'autre part, quel que soit le nombre fixe n choisi, il existe une valeur b de x, telle que $x > b$ entraîne $x^n < e^x$.

Nous pouvons dire, en un certain sens, que pour $x = +\infty$, e^x est plus grand que chacune des fonctions de la suite, bien que, pour toute valeur finie de x, e^x ne surpasse qu'un nombre limité d'entre elles.

En utilisant la représentation géométrique des fonctions, la courbe $y = e^x$, pour certaines valeurs de x, est située au-dessous de la courbe $y = x^n$, n ayant une valeur fixe, mais finit par la dépasser.

On désignera l'ordre de croissance de e^x par le symbole ω, à cause d'évidentes analogies entre cette théorie et celle des nombres transfinis de Cantor. L'ordre de croissance de x^n est n. Le fait que

$$\lim_{x=+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

s'exprime par $\omega > n$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Le nombre ω que nous introduisons dans la numération des ordres de croissance est donc supérieur à tout entier. Nous dirons que ω note *identiquement* l'ordre de e^x.

Les opérations sur les ordres de croissance. — Nous allons définir des opérations sur les ordres de croissance. Ces définitions seront valables quelles que soient les notations que nous serons conduits à adopter par la suite.

Mais, dès maintenant, indiquons la distinction fondamentale que nous ferons entre deux sortes de notations : 1° une notation sera dite désigner *identiquement* un ordre de croissance quand elle désignera l'ordre de croissance d'une fonction unique parfaitement déterminée; ainsi, n et ω notent identiquement les ordres de x^n et de e^x respectivement; c'est de ces notations uniquement que nous nous occuperons dans ce Chapitre ; 2° nous introduirons au second Chapitre des notations dont chacune désignera non plus une fonction unique, mais toute une classe de fonctions possédant en commun une même allure de croissance.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des expressions désignant identiquement divers ordres de croissance. Il existe, pour chacun de ces ordres, une fonction et une seule possédant identiquement cet ordre. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_p$ ces fonctions.

Effectuons sur $f_1, f_2, \ldots, f_p$ une opération déterminée A, telle que produit, dérivation, opération fonctionnelle quelconque. Soit F la fonction résultat de cette opération. Nous dirons que nous avons effectué une certaine opération A' sur les ordres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et que l'ordre α de F est *identique* au résultat de cette opération. Nous définirons A' en définissant A. Nous adopterons une terminologie pour désigner les diverses opérations A', et des signes d'opération pour représenter, par une expression composée avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, le résultat d'une opération A' effectuée sur ces ordres. Par convention cette expression *notera identiquement* l'ordre de F.

Considérons d'abord, comme opération A, le produit. Nous posons $F = f_1 f_2 \ldots f_p$. Nous appellerons l'opération A' correspondante l'*addition* des ordres de croissance, et l'ordre α de F sera appelé la *somme* des ordres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, somme

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

qui sera représentée par

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p.$$

Si donc $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont des fonctions parfaitement déterminées par la connaissance des ordres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, nous dirons que la notation $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$ désigne identiquement l'ordre de F. Nous écrirons

$$\alpha \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p.$$

Dans le cas où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des nombres arithmétiques, l'ordre de F est *a priori* un nombre de même nature, que nous pouvons calculer directement d'après l'égalité $F = f_1 f_2 \ldots f_p$. Soient donc $n_1, n_2, \ldots, n_p$ les ordres identiques de $f_1, f_2, \ldots, f_p$. On a

$$f_1 = x^{n_1}, \qquad f_2 = x^{n_2}, \qquad \ldots.$$

Donc

$$F = x^{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}.$$

Ainsi l'ordre de F se trouve être identique au nombre arithmétique *effectué* $\overline{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$. Or, d'après les conventions relatives à l'addition des ordres, l'ordre de F se note aussi identiquement $n_1 + n_2 + \ldots + n_p$. Donc, dans cette expression, où chaque terme désigne un ordre de grandeur, et où, *a priori*, les signes + utilisés n'ont rien de commun avec ceux de l'Algèbre, il est loisible de procéder comme s'ils avaient le même sens, quand $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sont des nombres arithmétiques, et de remplacer l'expression par la somme arithmétique effectuée.

La définition donnée de l'addition des ordres de croissance montre immédiatement que cette opération est commutative, c'est-à-dire que dans une somme d'ordres on peut intervertir l'ordre des termes, et associative, c'est-à-dire qu'on peut remplacer plusieurs d'entre eux par leur somme effectuée, ou inversement décomposer certains d'entre eux en une somme d'autres. Tout ceci est une conséquence immédiate du fait que le produit $f_1 f_2 \ldots f_p$ jouit des propriétés commutative et associative.

En particulier, on pourra grouper ceux des termes qui sont des nombres arithmétiques, et les remplacer par leur somme effectuée. Dans la définition donnée de l'addition des ordres, rien ne s'oppose à ce que certains de ces ordres, ou même tous, soient négatifs. On pourra grouper tous les ordres positifs ou négatifs et les réduire à un seul par voie d'addition algébrique.

A titres d'exemples, l'ordre de $x^n e^x$ est identique à $n + \omega$ ou $\omega + n$. Celui de $\frac{e^x}{x^n}$ est identique à $\omega - n$. Celui de $e^x \times e^x$ est $\omega + \omega$. L'opération que nous allons immédiatement définir nous permettra d'écrire

$$\omega + \omega \equiv 2 \times \omega$$

(mais non pas : $\omega + \omega = \omega \times 2$).

Passons à la multiplication des ordres de croissance. Prenons comme opération A la composition des fonctions. Soient, tout d'abord, deux ordres seulement α_1 et α_2, f_1 et f_2 les fonctions uniques dont les ordres sont identiquement désignés par α_1 et α_2. Nous posons

$$F = f_1[f_2(x)].$$

D'une façon précise, dans la fonction $F = f_1(y)$, nous considérons y comme la fonction de x égale à $f_2(x)$. F est alors une fonction de x, et, pour la calculer pour chaque valeur de x, nous y remplaçons y par son expression en x, ce qui nous conduit à l'écrire

$$F = f_1[f_2(x)].$$

On dit encore que F est le résultat de l'opération fonctionnelle f_1 appliquée à $f_2(x)$.

Nous appellerons l'opération A′ correspondante la *multiplication* des ordres de croissance, et l'ordre α de F sera appelé le *produit* de l'ordre α_1 par l'ordre α_2 (et non pas α_2 par α_1), produit qui sera représenté par $\alpha_1 \times \alpha_2$ ou $\alpha_1 . \alpha_2$ ou même $\alpha_1 \alpha_2$ s'il ne peut pas en résulter de confusion.

La multiplication des ordres donne lieu à des remarques analogues à celles de l'addition.

Si f_1, f_2 sont parfaitement déterminées par la connaissance des ordres α_1, α_2, nous dirons que la notation $\alpha_1 \times \alpha_2$ désigne *identiquement* l'ordre de F. Nous écrirons

$$\alpha \equiv \alpha_1 \times \alpha_2.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Examinons le cas où α_1 et α_2 sont des nombres arithmétiques: Si $\alpha_1 \equiv n_1$, $\alpha_2 \equiv n_2$, on a

$$f_1(y) = y^{n_1}, \qquad f_2(x) = x^{n_2}.$$

Donc

$$F = x^{n_1 n_2}.$$

L'ordre de F se trouve être identique au nombre arithmétique *effectué* $n_1 n_2$. Donc, dans l'expression $n_1 \times n_2$, où n_1 et n_2 désignent des ordres de grandeurs arithmétiques, et où *a priori* le signe $\times$ utilisé n'a rien de commun avec celui de l'Algèbre, il est loisible de procéder comme s'il avait le même sens et de remplacer l'expression par le produit arithmétique effectué.

La multiplication des deux ordres est commutative quand ces ordres sont des nombres arithmétiques. Mais dans le cas général elle ne possède pas cette propriété.

On n'a pas

$$\psi[\varphi(x)] = \varphi[\psi(x)].$$

Ainsi

$$\sin e^x \neq e^{\sin x}.$$

On définit d'une manière entièrement analogue le produit de plusieurs ordres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, rangés dans l'ordre indiqué. D'une façon générale, ce produit est le produit de l'ordre α_1 par l'ordre $\alpha_2 \times \alpha_3 \times \ldots \times \alpha_p$. Le produit de deux ordres étant défini, ceci fait connaître le produit de trois, quatre, ... ordres, quel que soit l'entier p.

Dans un produit de plusieurs ordres on ne peut pas intervertir l'ordre des facteurs, mais on peut grouper plusieurs facteurs consécutifs, et les remplacer par leur produit effectué, si l'on sait noter ce produit.

En effet, prenons par exemple le cas de quatre facteurs α_1, α_2, α_3, α_4. Posons

$$F = f_1(y), \qquad y = f_2(z), \qquad z = f_3(t), \qquad t = f_4(x).$$

F, y, z, t sont des fonctions de x. L'ordre de t est α_4, celui de z, $\alpha_3 \times \alpha_4$, celui de y, $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, celui de F, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$. Or, il est évident que, si

$$\varphi(t) = f_2[f_3(t)],$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

les deux égalités où figure z peuvent être remplacées par

$$y = f_2[f_3(t)],$$

sans que l'expression de F en x change. Or, l'ordre de $f_2[f_3(x)]$ est $\alpha_2 . \alpha_3$. Donc l'ordre de F est aussi

$$\alpha_1 \times \overline{\alpha_2 . \alpha_3} \times \alpha_4.$$

C'est pareillement

$$\overline{\alpha_1 \alpha_2} \times \alpha_3 \times \alpha_4$$

et par suite

$$\overline{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}.$$

C'est aussi par définition

$$\alpha_1 \times \alpha_2 \times \overline{\alpha_3 . \alpha_4} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \times \overline{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}.$$

Au point de vue de la distributivité, l'expression

$$\alpha_1 \times \overline{\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_p}$$

ne possède pas, en général, cette propriété, c'est-à-dire que cet ordre ne définit pas la même fonction que

$$\alpha_1 \times \alpha_2 + \alpha_1 \times \alpha_3 + \ldots.$$

En effet, si

$$F = f_1(y) \qquad \text{et} \qquad y = f_2(x) \times f_3(x) \times \ldots \times f_p(x),$$

on a en général

$$F \neq f_1[f_2(x)] \times f_1[f_3(x)] \times \ldots.$$

Mais l'expression

$$\overline{\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_p} \times \alpha_1$$

est distributive. Car, si

$$F = f_2(y) \times f_3(y) \times \ldots$$

et si

$$y = f_1(x),$$

on a

$$F = f_2[f_1(x)] \times f_3[f_1(x)] \times \ldots,$$

dont l'ordre est aussi

$$\alpha_2 \times \alpha_1 + \alpha_3 \times \alpha_1 + \ldots.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

A la multiplication de plusieurs ordres se rattachent l'itération et l'inversion des fonctions. L'itération d'une fonction φ est le produit de plusieurs opérations fonctionnelles identiques à φ. La fonction obtenue est à la fonction de fonction ce que la puissance d'un nombre est au produit de deux nombres distincts.

Nous écrirons

$$\varphi[\varphi(x)] = \varphi_2(x), \qquad \varphi[\varphi_p(x)] = \varphi_{p+1}(x).$$

$\varphi_h(x)$ a pour ordre l'ordre de $\varphi(x)$ élevé à la puissance h. Si $\varphi(x)$ a son ordre identiquement noté par α, nous conviendrons de noter identiquement par α^h l'ordre de $\varphi_h(x)$. En particulier, si l'ordre de φ est un nombre arithmétique n, cette convention conduit à noter n^h l'ordre de φ_h. Comme $\varphi = x^n$, $\varphi_h = x^{n^h}$. Notre convention se trouve donc dans ce cas particulier se réduire à une convention antérieure.

Il est aisé d'étendre les définitions et les formules au cas où h est un entier négatif ou nul. Il suffira de convenir que la relation

$$\varphi[\varphi_{h-1}(x)] = \varphi_h(x)$$

subsistera, même si $h-1$ est négatif ou nul, et alors on peut définir de proche en proche φ_h pour les valeurs décroissantes et négatives de h.

On a

$$\varphi_0(x) = x,$$

en faisant $h = 1$.

On constate ainsi la validité de la notation $\alpha^0 \equiv 1$, quel que soit l'ordre α.

La fonction $\varphi_{-1}(x)$ est définie par l'égalité

$$\varphi[\varphi_{-1}(x)] = x.$$

Or, si l'égalité $y = \varphi(x)$ résolue par rapport à x donne $x = \theta(y)$, on sait que la fonction θ est appelée la *fonction inverse* de φ.

Donc

$$\theta(x) = \varphi_{-1}(x).$$

L'ordre de φ_{-1} est appelé l'inverse de l'ordre de φ et si ce

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

dernier est α, le premier se note $\frac{1}{\alpha}$ ou α^{-1}. En particulier, l'inverse de l'ordre n est identique à $\frac{1}{n}$.

En itérant la fonction inverse, on obtient les fonctions

$$\varphi_{-2}(x), \quad \ldots, \quad \varphi_{-h}(x)$$

et l'ordre de $\varphi_{-h}(x)$ est α^{-h}.

Soit à trouver l'ordre de la fonction inverse de $\varphi[\psi(x)]$, sachant que α et β sont respectivement les ordres identiques de φ et ψ.

Si $\varphi[\psi(x)] = F(x)$, si φ_1, ψ_1, F_1 sont les fonctions inverses de φ, ψ, F, on a

$$\psi_1[\varphi_1(x)] = F_1(x),$$

comme on le vérifie par

$$F[F_1(x)] = x.$$

L'ordre de F est $\alpha \times \beta$. Celui de F_1 est donc $\frac{1}{\alpha \times \beta}$. Mais l'expression de F_1 montre que cet ordre est aussi $\frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\alpha}$.

Donc

$$\frac{1}{\beta}\,\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\beta}$$

et, en général,

$$\frac{1}{\beta}\,\frac{1}{\alpha} \neq \frac{1}{\beta\alpha}.$$

La notation des ordres usuels. — Appliquons à la composition entre elles et à l'itération respective des fonctions e^x et x^n les règles de la multiplication des ordres.

L'itération de la fonction e^x donne d'abord e^{e^x} dont l'ordre est ω^2, puis $e^{e^{e^x}}$ dont l'ordre est ω^3, etc. Nous savons donc ce que représente ω^n, n étant un entier quelconque. On obtient ainsi une suite de fonctions de plus en plus rapidement croissantes.

Cependant, il est possible de trouver une fonction dont la croissance dépasse celle de chacune de ces fonctions. C'est une application particulière du théorème suivant, dû à P. du Bois-Reymond : *Si l'on considère une suite dénombrable de fonctions*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$, *on peut trouver une fonction* $f(x)$ *telle que*

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi_n(x)} = +\infty,$$

quel que soit n.

En effet, pour $x = n$, choisissons $f(n)$ égal au plus grand des nombres

$$\mathrm{Max}_{x_0}^{n+1} \varphi_1(x), \quad \ldots, \quad \mathrm{Max}_{x_0}^{n+1} \varphi_n(x),$$

en désignant par $\mathrm{Max}_\alpha^\beta \varphi(x)$ la borne supérieure de $\varphi(x)$ dans l'intervalle $\alpha\beta$. On a

$$f(n) > \varphi_i(x),$$

pour

$$x_0 < x < n+1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

et évidemment

$$f(n+1) \geqq f(n).$$

Si donc $f(x)$ est choisi pour $n < x < n+1$ simplement croissant, variant linéairement par exemple, la fonction $f(x)$ est aussi définie pour toute valeur de x et l'on a

$$f(x) > \varphi_n(x) \qquad \text{pour} \qquad x \geqq n.$$

Si, quel que soit n, il existe un nombre p tel que $\frac{\varphi_{n+p}(x)}{\varphi_n(x)}$ tende vers $+\infty$ avec x, il en sera de même de $\frac{f(x)}{\varphi_n(x)}$. Cette hypothèse est d'ailleurs superflue, car, H (x) étant une fonction tendant vers $+\infty$, en posant

$$F(x) = f(x) \times H(x),$$

on a

$$\lim_{x=+\infty} \frac{F(x)}{\varphi_n(x)} = +\infty,$$

quel que soit l'indice n.

En particulier, il existe des fonctions croissant plus rapidement que celles d'ordre $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^n, \ldots$.

Ces fonctions resteront extérieures au cadre de notre étude. Nous ne les rencontrerons qu'exceptionnellement dans les théories générales qui suivront, et jamais dans les applications que nous donnerons de ces théories. Ces fonctions limitent le champ de nos recherches de la même façon que dans les sciences

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

d'observation; l'expérimentation se limite actuellement aux phénomènes observables par le microscope d'une part et par le télescope d'autre part. En somme, nous devons imposer une borne aux ordres de croissance objet de notre étude, cette borne étant d'ailleurs laissée à notre choix ([1]). Ce fait est une conséquence nécessaire du théorème de P. du Bois-Reymond. Pour épuiser les ordres de croissance, il faudrait déterminer une suite de fonctions telles que toute fonction soit dépassée par l'une d'entre elles. Or, ceci n'est pas possible. Il faut donc se borner. Quand on cherche à rendre concrète la théorie des nombres transfinis, on se heurte de même à l'impossibilité de désigner tous ces nombres par un nombre fini de mots, ou de symboles, parce qu'à un nombre fini de mots ou de symboles ne correspond qu'une suite dénombrable de nombres transfinis, et alors il existe un nombre non encore nommé qui est supérieur à tous les nombres de la suite.

Notre limitation consistera à n'envisager que des fonctions d'ordre inférieur à ω^n, n étant un nombre entier fini.

Les puissances négatives de ω se définissent immédiatement. Ainsi ω^{-1} est l'ordre de la fonction inverse de e^x, qui est $\log x$. De même, ω^{-2} est l'ordre de $\log\log x$ ou $\log_2 x$, ω^{-p} est l'ordre de $\log_p x$.

Ces fonctions $\log x$, $\log_2 x$, ..., $\log_p x$, ... augmentent de plus en plus lentement. Il existe cependant des fonctions croissantes et croissant plus lentement que chacune des fonctions de cette suite. En effet, désignons par $e_p(x)$ la fonction inverse de $\log_p x$, et considérons une fonction $f(x)$ croissant plus vite que $e_p(x)$ quel que soit l'entier p. La fonction inverse de f croît plus lentement que la fonction inverse de e_p, c'est-à-dire que $\log_p x$. Rappelons brièvement pourquoi, étant données deux fonctions f et φ, croissantes et telles que $f(x) > \varphi(x)$, pour toute valeur de x, leurs inverses f_1 et φ_1 donnent lieu à l'inégalité $f_1(x) < \varphi_1(x)$. On a

$$f[f_1(x)] = \varphi[\varphi_1(x)] = x.$$

([1]) C'est là la différence avec les sciences d'observation : on pourrait choisir une autre limitation; mais il est nécessaire d'en choisir une.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Donnons à x une valeur particulière. Il est impossible que $f_1(x) \geqq \varphi_1(x)$. Car, s'il en était ainsi, on aurait

$$\varphi[\varphi_1(x)] \leqq \varphi[f_1(x)].$$

Or $\varphi[f_1(x)] < f[f_1(x)]$ par hypothèse. On en conclurait

$$\varphi[\varphi_1(x)] < f[f_1(x)],$$

ce qui est inexact, puisque les deux membres sont égaux à x.

Donc,

$$f_1(x) < \varphi_1(x).$$

La démonstration qui précède se généraliserait évidemment par le théorème suivant :

Étant données une suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *de fonctions* indéfiniment croissantes, *il existe une fonction f indéfiniment croissante et telle que*

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi_n(x)} = 0,$$

quel que soit l'entier n choisi.

En voici une démonstration directe.

Puisque les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ en nombre fini croissent indéfiniment, il existe un nombre x_n tel que, pour $x \geqq x_n$, on ait

$$\varphi_i > n+1,$$

pour toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$ de l'indice i.

Je pose

$$f(x_n) = n.$$

Je choisis maintenant les valeurs de $f(x)$ pour $x \neq x_n$ en leur imposant la seule condition d'être croissantes, ce qui est possible, puisque

$$f(x_n) < f(x_{n+1}).$$

Je dis que la fonction $f(x)$ ainsi définie est telle que $f(x) < \varphi_n(x)$, pour $x \geqq x_n$.

En effet, soit p un entier supérieur ou égal à n. Dans l'intervalle $x_p \leqq x \leqq x_{p+1}$, on a

$$\varphi_n(x) > p+1.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Donc $\varphi_n(x) > f(x)$, puisque f dans cet intervalle varie en croissant de p à $p+1$.

Si, quel que soit n, il existe un nombre p, tel que $\frac{\varphi_{n+p}(x)}{\varphi_n(x)}$ tende vers zéro avec $\frac{1}{x}$, on aura *a fortiori*

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi_n(x)} = 0.$$

Si l'on ne veut pas introduire cette hypothèse, il suffit de considérer la fonction $\sqrt{f}$.

On a

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\sqrt{f}}{\varphi_n(x)} = 0,$$

puisque $\frac{\sqrt{f}}{\varphi_n} < \frac{1}{\sqrt{f}}$ pour $x \geqq x_n$.

En particulier, la fonction f égale à p pour $x_p = e_p(p)$ et croissant selon une loi arbitraire, entre deux points x_p consécutifs, croît moins vite que $\log_p x$, quel que soit p, et par suite, puisque $\frac{\log_p x}{\log_q x}$ est infiniment petit si $p < q$, $\frac{f(x)}{\log_p x}$ tend vers zéro, quelque grand que soit l'entier p choisi.

Remarquons, pour terminer l'étude de l'itération de la fonction e^x, que les ordres de croissance donnent lieu à l'identité

$$\omega^n \times \omega^{n'} \equiv \omega^{n+n'},$$

d'après le principe de l'associativité des exposants superposés.

La multiplication des ordres de grandeur où figure ω présente de plus grandes difficultés. Elle n'est plus commutative, comme celle des ordres arithmétiques.

Considérons la multiplication des ordres n et ω.

Cherchons la fonction d'ordre $n\omega$. Dans la fonction y^n, je dois remplacer y par e^x. Donc, $n\omega$ est identiquement l'ordre de e^{nx}.

Cherchons la fonction dont l'ordre est identique à ωn. Dans la fonction e^y, je dois remplacer y par x^n. J'obtiens la fonction e^{x^n}.

La fonction d'ordre $p\omega n$ est e^{px^n}. Des deux facteurs p et n, séparés par ω, c'est manifestement le second qui est le plus important. Quelque petit que soit le nombre fixe α, et quel

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

que soit le nombre positif p, on a

$$\omega \times \overline{n - \alpha} < p\omega n < \omega \times \overline{n + \alpha}.$$

Nous allons voir au contraire que, de deux facteurs numériques séparés par $\frac{1}{\omega}$, le plus important est le premier.

Faisons le produit de n par $\frac{1}{\omega}$. On obtient comme fonction correspondante $(\log x)^n$. Le produit de $\frac{1}{\omega}$ par p donne

$$\log x^p = p \log x.$$

De même $n\frac{1}{\omega}p$ est l'ordre de $p^n(\log x)^n$. On a, quel que soit le nombre positif α,

$$\overline{n - \alpha} \times \frac{1}{\omega} < n\frac{1}{\omega}p < \overline{n + \alpha}\,\frac{1}{\omega}.$$

Ces remarques nous seront utiles pour la notation des ordres parenthèses (Chap. II).

La combinaison de ω avec les ordres arithmétiques permet de noter la modification qu'introduit dans une fonction la multiplication par un facteur constant ou même l'addition pure et simple d'une constante.

Soit à noter l'ordre de ax^n. On a

$$ax^n = \log e^{ax^n} = \log(e^{x^n})^a.$$

L'ordre de la fonction ax^n est donc identique à $\frac{1}{\omega}a\omega n$. Si $a = 1$, cette expression devient $\frac{1}{\omega}\cdot 1 . \omega n$. Comme $\frac{1}{\omega}\cdot 1 . \omega = 1$ [1],

---

[1] Pour la généralité des notations il convient d'examiner les cas où, dans une expression d'ordre, un nombre arithmétique devient égal à 1 ou à 0. 1 est l'ordre de x; 0 est celui de $x^0 = 1$. Dans un produit un facteur égal à 1 peut être supprimé. Un facteur égal à 0 rend inutiles tous les facteurs suivants et entraîne la constance de la fonction dont on exprime l'ordre. Si l'on accepte nettement l'utilisation de 0 comme signe d'ordre, on a l'avantage que la multiplication d'une fonction par une constante ne fait qu'ajouter un terme à l'ordre de cette fonction sans modifier les termes déjà écrits. Au lieu d'écrire l'ordre de $a\varphi(x)$, $\varphi(x)$ ayant son ordre noté identiquement par α, sous la forme $\frac{1}{\omega}a\omega\alpha$, on peut le noter $\alpha + \frac{1}{\omega}a\omega 0$. D'ailleurs $\frac{1}{\omega}a\omega 0 = \frac{1}{\omega^2}e^{a-1}\omega^2 0 = \ldots$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

elle se réduit à n. Mais, si $a \neq 1$, l'expression ne peut pas se simplifier.

On peut aller plus loin et distinguer une fonction de celle qui n'en diffère que par une constante additive a. Cherchons un ordre qui soit identiquement celui de $x^n + a$. On a

$$x^n + a = \log e^{x^n + a} = \log e^a \times e^{x^n} = \log_2 e^{e^{x^n} \times e^a} = \log_2 (e^{e^{x^n}})^{e^a}.$$

Cet ordre est

$$\frac{1}{\omega^2} e^a \omega^2 n.$$

Si $a = 0$, cette expression se réduit à n. Si $a \neq 0$, elle ne se simplifie pas et la fonction dont l'ordre lui est identiquement égal est $x^n + a$.

Une interversion dans l'ordre des facteurs modifie profondément l'ordre de croissance. Ainsi, la fonction d'ordre $\omega a \frac{1}{\omega} n$ est $e^{(\log x^n)^a}$. Si $a > 1$, cette fonction croît plus vite que x^p, quelque grand que soit le nombre fixe p. Si au contraire $a < 1$, $\omega a \frac{1}{\omega} n < \frac{1}{p}$, quelque grand que soit p, et cependant, comme cette fonction, si a est positif, est plus croissante que $\log x$, on a

$$\frac{1}{\omega} < \omega a \frac{1}{\omega} n < \frac{1}{p},$$

avec $0 < a < 1$ et $p > 0$.

Donnons quelques exemples, afin de familiariser le lecteur avec le système de notations exposé.

On a

$$x^x = e^{x \log x}.$$

L'ordre de x^x est donc

$$\omega \times \overline{1 + \frac{1}{\omega}}.$$

Ceci est évidemment différent de $\omega + 1$ qui est l'ordre de xe^x.

On a de même : $y^x = e^{x \log y}$. Si donc α est identiquement l'ordre de y, l'ordre de y^x est identique à $\omega \left[1 + \frac{1}{\omega} \alpha \right]$.

L'ordre de y^{x^n} est de même $\omega \left[n + \frac{1}{\omega} \alpha \right]$. Soit $y = e^{x^m}$. L'ordre

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

de y^{x^n} est $\omega\left[n + \frac{1}{\omega}\omega m\right]$, ce qui se réduit à $\omega \times \overline{m+n}$, résultat évident *a priori* puisque $(e^{x^n})^{x^m} = e^{x^{m+n}}$.

$e^{\sqrt{\log x}}$ a pour ordre identique $\omega . \frac{1}{2} . \frac{1}{\omega}$. De même, à $e^{(\log\varphi)^p}$ correspond $\omega p \frac{1}{\omega}\alpha$, α étant l'ordre de φ.

L'ordre de grandeur de $\varphi + \psi$ est

$$\frac{1}{\omega} \times \overline{\omega\alpha + \omega\beta}$$

(φ et ψ ayant respectivement pour ordres identiques α et β), d'après

$$\varphi + \psi = \log(e^\varphi \times e^\psi).$$

L'ordre (1) de

$$[Ax(\log x + \beta \log_2 x + \log B)^\alpha]^{\frac{1}{\rho}},$$

A, B, β, α, ρ étant des constantes, est identiquement

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\omega}A\omega + \alpha\frac{1}{\omega} \times \overline{\frac{1}{\omega}B\omega + \beta\frac{1}{\omega}}\right].$$

Cet exemple, entre beaucoup d'autres, montre qu'on saura noter identiquement l'ordre de croissance de toutes les fonctions formées au moyen des fonctions fondamentales x^u, e^x et de constantes arbitraires, tous ces éléments étant combinés entre eux un nombre fini quelconque de fois, par addition, multiplication, itération, inversion ou composition.

Étant donné qu'à chacune des fonctions de cette classe correspond une expression d'ordre et que, réciproquement, une expression quelconque formée au moyen des nombres arithmétiques et du symbole ω, réunis par les signes de l'Algèbre, note identiquement l'ordre d'une seule fonction de cette classe, on peut dire que nous avons là un second moyen d'écriture pour désigner explicitement ces fonctions. Il y a économie d'écriture en ce sens que la variable n'est pas spécifiée, qu'une seule lettre ω permet à elle seule de désigner les deux fonctions e^x

(1) LINDELÖF, *Mémoire sur les fonctions entières de genre fini*, p. 56 (*Acta societatis scientiarum fennicæ*).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et $\log x$, et enfin que l'expression d'une fonction peut s'écrire sur une seule ligne, au lieu d'exiger des échafaudages de notations ([1]). Mais le principal avantage de cette expression est de décrire la forme même de la fonction, puisque la variable indépendante n'est pas stipulée, et de mettre en évidence son mode de croissance.

Cherchons ce que représente l'ordre $p\frac{1}{\omega}q\frac{1}{\omega}r\,\omega s\,\omega t$.

Un calcul immédiat nous donne

$$(q\log r + qsx^t)^p.$$

Nous constatons que t et p ont sensiblement la même importance, de même q et s; r joue le rôle le plus effacé. Inversement, l'ordre de $(Ax^\alpha + B)^\rho$ se note

$$\rho\frac{1}{\omega}q\frac{1}{\omega}e^{\frac{B}{q}}\,\omega\frac{A}{q}\,\omega\alpha,$$

b étant arbitraire. L'expression $q\frac{1}{\omega}e^{\frac{B}{q}}\omega\frac{A}{q}$, qui note l'ordre de $e^B x^A$, contient un paramètre q, qu'on peut modifier à volonté, sans changer la valeur de l'ordre. S'il s'agit de multiplier ω par cette expression, nous ferons $q = 1$. Si nous voulons multiplier cette expression par $\frac{1}{\omega}\alpha$, nous simplifierons en faisant $q = A$.

Pareillement $\frac{A}{\lambda}\,\omega\alpha\,\frac{1}{\omega}\lambda^{\frac{1}{\alpha}}$ est indépendant de λ et est l'ordre de $e^{A(\log x)^\alpha}$.

([1]) Comme il serait nécessaire pour écrire par exemple la fonction d'ordre $\omega p\,\omega q\,\omega r$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS A CROISSANCE RÉGULIÈRE.

Les fonctions dont nous avons appris dans le précédent Chapitre à noter la croissance forment une classe beaucoup trop restreinte pour suffire à toutes les applications. Ce seront simplement pour nous des modèles de fonctions croissantes, desquels nous rapprocherons les autres fonctions.

Nous avons énoncé dans le Chapitre précédent que deux ordres de croissance ne pourraient être appelés *identiques* qu'à la condition de désigner les ordres de deux fonctions identiques, c'est-à-dire coïncidant pour toutes les valeurs de la variable.

Mais nous conviendrons cependant de considérer comme ayant des ordres *égaux* des fonctions ne coïncidant pas partout, mais ayant des croissances assez voisines. Voici la définition que nous choisirons :

Égalité des ordres. — Étant données deux fonctions f_1 et f_2, si le rapport $\frac{f_1}{f_2}$ a, pour x infini, des limites extrêmes d'indétermination *finies*, c'est-à-dire différentes à la fois de o et de $+\infty$, nous dirons que f_1 et f_2 ont des ordres de grandeur *égaux*, ou encore, sont *du même ordre de grandeur*, et, si ces ordres sont désignés par les notations α_1 et α_2, nous écrirons

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

La relation $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, que nous énonçons « α_1 *identique* à α_2 », signifierait que α_1 et α_2 désignent chacun sans ambiguïté les ordres de deux fonctions coïncidant pour toutes les valeurs de x.

Si le rapport $\frac{f_1}{f_2}$ tend vers $+\infty$ pour $\lim x = +\infty$, nous dirons que l'ordre de grandeur de f_1 est supérieur à celui de f_2. Dans

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ce cas $\frac{f_1}{f_2}$ tend vers o et nous écrirons indifféremment $\alpha_1 > \alpha_2$ ou $\alpha_2 < \alpha_1$.

Si le rapport $\frac{f_1}{f_2}$ a des limites d'indétermination différentes et dont l'une au moins est $+\infty$ ou o, nous dirons que f_1 et f_2 sont dans un ordre relatif de grandeur indéterminé.

Comme application de ce qui précède, si nous considérons deux fonctions positives croissantes f_1 et f_2, telles que f_1 soit d'un ordre de grandeur supérieur ou égal à celui de f_2, l'ordre de grandeur de $f_1 + f_2 = \text{F}$ est égal à celui de f_1. Car, $\frac{\text{F}}{f_1} = 1 + \frac{f_2}{f_1}$ ou bien tend vers 1, ou bien a des limites extrêmes d'indéterminations finies, à savoir celles de $\frac{f_2}{f_1}$ augmentées de 1.

Si f_1 et f_2 sont dans un ordre relatif de grandeur indéterminé et si φ est, pour chaque valeur de x, le plus grand des nombres f_1 et f_2, l'ordre de F est égal à celui de φ; car $1 < \frac{\text{F}}{\varphi} \leqq 2$.

Nous sommes donc à même de désigner un ordre égal à celui de toutes les fonctions qui sont dans un rapport constant avec celles envisagées dans le Chapitre I. Étendons le champ des ordres.

Ordres parenthèse. — Considérons une fonction $f(x)$ dont l'ordre est inférieur à un nombre arithmétique déterminé. Formons le rapport $\frac{\log f(x)}{\log x}$ et supposons que pour $x = \infty$ ce rapport tende vers une limite n. Si $\frac{f(x)}{x^n}$ reste compris entre des limites d'indétermination finies, d'après ce qui précède, nous dirons que l'ordre de $f(x)$ est égal à celui de x^n, c'est-à-dire à n.

Mais il peut se faire que $\frac{f(x)}{x^n}$ possède, pour une suite indéfiniment croissante de valeurs de x, une suite de valeurs tendant vers o ou vers $+\infty$. C'est par exemple le cas de

$$f(x) = x^n (\log x)^{2+\sin x}.$$

D'ailleurs l'ordre de grandeur de $f(x)$ est dans ce cas inférieur à celui de $x^{n+\varepsilon}$, et supérieur à celui de $x^{n-\varepsilon}$, si ε est positif. Comme les principes posés ci-dessus ne nous permettent pas de

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

dire que l'ordre de f est égal à n, nous devons introduire un nouveau symbole. Nous dirons que l'ordre de f est égal à (n) que nous énoncerons : « *n parenthèse* ».

Ici nous ne pouvons pas parler de la fonction dont l'ordre est identique à (n), parce qu'il y a une infinité de fonctions d'ordre (n), toutes comprises dans l'expression : $f(x) = x^{n+\varepsilon(x)}$, $\varepsilon(x)$ étant une fonction arbitraire de x tendant vers zéro.

Mais, de plus, tandis que deux fonctions ayant chacune son ordre égal à n, sont du même ordre de grandeur, il n'est pas exact qu'une fonction f_1 d'ordre égal à (n) soit nécessairement du même ordre de grandeur qu'une autre fonction f_2 d'ordre égal à (n), c'est-à-dire que le rapport $\frac{f_1}{f_2}$ reste entre des limites finies d'indétermination. Pour exemple,

$$f_1 = \frac{x^n}{\log x}, \qquad f_2 = x^n \log^2 x.$$

Tout ce qu'on peut affirmer c'est que $\log f_1$ et $\log f_2$ sont du même ordre de grandeur et sont même entre eux dans un rapport tendant vers un [1].

En résumé, une fonction d'ordre identique à n est exactement la fonction x^n. Une fonction d'ordre égal à n est égale à hx^n, h restant supérieur à un nombre $A > 0$ et inférieur à un nombre B fixe, quand x varie de x_0 à $+\infty$. Une fonction d'ordre égal à (n) est égale à $x^{n+\varepsilon(x)}$, avec $\lim\limits_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Supposons enfin que $\frac{\log f(x)}{\log x}$ ne tende pas vers une limite quand x tend vers $+\infty$, mais possède deux limites extrêmes d'indétermination p et q $(p < q)$, p pouvant être égal à 0 et q à $+\infty$.

Nous noterons l'ordre de grandeur de cette fonction (p, q). Si q est égal à p, $\frac{\log f}{\log x}$ tend vers p. Les deux notations (p, p)

---

[1] Si l'on se trouvait choqué par la forme de cet énoncé que deux fonctions d'ordres égaux à un même troisième (n) n'ont pas nécessairement leurs ordres égaux entre eux, on pourrait réserver aux ordres parenthèse l'expression d'*équivalent* au lieu d'*égal*. Nous dirions alors : « deux fonctions ayant chacune son ordre équivalent à (n) n'ont pas nécessairement leurs ordres égaux entre eux. »

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et (p) ont donc le même sens. Nous ne conserverons que la seconde.

Nous dirons que les fonctions d'ordre égal à (n) sont *régulières* relativement aux ordres arithmétiques ou du type n. Les fonctions d'ordre égal à (p, q), $p \neq q$, seront dites *irrégulières* relativement aux mêmes ordres n.

Il est facile de se rendre compte pourquoi il est nécessaire de distinguer les deux sortes de relations entre les ordres, identité ou égalité. Si l'on ne fait pas cette distinction, si l'on se borne à définir dans quel cas deux fonctions f_1 et f_2 doivent être considérées comme ayant leurs ordres *comparables*, si cette définition d'ordres comparables est indépendante de l'élévation des ordres de f_1 et de f_2, par exemple, si elle ne fait intervenir que le rapport de f_2 à f_1, ou leur différence, etc., il est toujours possible, à moins que la définition de comparabilité ne soit précisément celle de l'identité, de déterminer pour chaque définition des opérations telles que l'une quelconque d'elles, appliquée simultanément à certaines fonctions f_1 et f_2 comparables suivant cette définition, conduise à des fonctions F_1 et F_2 qui ne le soient plus, suivant la même définition. Ceci peut être démontré moyennant des hypothèses très larges caractérisant les définitions. Un exemple fera saisir le sens de cette affirmation.

Supposons que l'on considère comme *comparables* deux ordres que nous avons précédemment considérés *comme égaux*. Ce seront, par exemple, les ordres de $f(x)$ et de $kf(x)$, f étant une fonction arbitraire et k une constante différente de un. Il est bien facile de déterminer une opération qui, effectuée simultanément sur ces deux fonctions, conduise à de nouvelles fonctions d'ordres non comparables suivant la même définition. Les deux fonctions $e^{f(x)}$ et $e^{kf(x)}$ cessent, en effet, d'être entre elles dans un rapport fini.

Inversement, si, par exemple, n désigne indifféremment l'ordre de toutes les fonctions de la forme hx^n, h oscillant pour x infini entre des limites finies, si ωn désignait indifféremment l'ordre de toutes les fonctions de la forme he^{x^n}, il serait faux de dire que l'opération fonctionnelle d'ordre ω, appliquée à une fonction d'ordre n, donne une fonction d'ordre ωn.

L'avantage des notations identiques, c'est que deux expres-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

sions différentes d'aspect, mais représentant identiquement le même ordre, donneront par la même transformation des expressions d'ordres encore identiques. Une identité entre des ordres subsiste, si l'on fait subir la même opération aux deux membres. Une égalité entre des ordres peut en pareil cas ne pas subsister.

De là l'intérêt pour la clarté du langage et des notations de la distinction entre les deux relations d'identité et d'égalité.

Opérations sur les ordres approchés. — Les opérations sur les ordres de croissance identiques définis dans le premier Chapitre s'effectuent avec une légère modification sur les ordres de croissance approchés, c'est-à-dire correspondant à des fonctions non entièrement précisées. Reprenons l'exposé des généralités.

Soient α_1, α_2, ..., α_p divers ordres de grandeur dont l'un au moins ne représente identiquement l'ordre d'aucune fonction. Soit f_h la fonction d'ordre identique à α_h toutes les fois qu'elle existe, sinon l'une quelconque des fonctions d'ordre égal à α_h. Effectuons sur $f_1, f_2, \ldots, f_p$ une opération déterminée A, telle que produit, dérivation, opération fonctionnelle quelconque. Soit F la fonction résultat de cette opération. Nous dirons que nous avons effectué une certaine opération A′ sur les ordres α_1, α_2, ..., α_p. L'opération A étant choisie, l'opération A′ conservera le même nom et les mêmes signes que dans le cas des ordres identiques. La fonction F aura encore son ordre noté par une expression composée avec α_1, α_2, ..., α_p, comme si ces ordres étaient identiques. Seulement, cette fois, cette expression ne désignera pas l'ordre d'une fonction unique, mais celui de toute la classe de fonctions F qu'on obtient en laissant à chacune des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_p$ toute l'indétermination dont elle est susceptible.

Appliquons ceci à l'*addition* des ordres de croissance. L'opération A est le produit. Nous posons $F = f_1 f_2 \ldots f_p$. L'ordre α de F sera appelé la *somme* des ordres α_1, α_2, ..., α_p, somme qui sera représentée par $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$.

L'un au moins des ordres α_p déterminant non pas une fonction unique, mais une classe de fonctions, α désignera l'ordre de la classe de fonctions qu'on obtient en remplaçant, dans le produit $f_1 f_2 \ldots f_p$, chacune des fonctions non précisées

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

qui y figurent par toutes ses acceptions possibles. Nous écrirons $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$.

Supposons que certains des ordres α_i soient des nombres arithmétiques avec parenthèses. Le nombre (n) représente la classe de fonctions $x^{n+\varepsilon(x)}$, où $\lim\limits_{x\infty} \varepsilon(x) = 0$. On constate immédiatement que si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_p$, parmi lesquels certains sont pourvus de parenthèses, on a $F = x^{n_1+n_2+\ldots+n_p+\varepsilon'(x)}$ avec $\lim\limits_{x\infty} \varepsilon'(x) = 0$. Les fonctions F ainsi obtenues sont celles que définit l'ordre $(n_1 + n_2 + \ldots + n_p)$, où, entre parenthèses, figure la somme *effectuée* des nombres arithmétiques $n_1, n_2, \ldots, n_p$. Donc, dans une expression telle que

$$(n_1) + (n_2) + \ldots + (n_p),$$

on procédera comme si les signes $+$ étaient des signes d'additions arithmétiques, après avoir enlevé les parenthèses à tous les nombres n qui en possèdent, et en rétablissant les parenthèses autour du résultat final.

Les remarques relatives à l'associativité et à la commutativité de l'addition subsistent pour les ordres non précisés. On peut grouper dans une somme d'expressions d'ordres tous les termes qui sont des ordres arithmétiques (ou même algébriques) avec ou sans parenthèses, et les remplacer par leur somme algébrique effectuée, la présence d'une seule parenthèse parmi les termes combinés entraînant la présence de parenthèses dans le résultat final.

La *multiplication* des ordres non précisés se définit aussi commodément. Dans le cas où l'un au moins des ordres α_1 et α_2 détermine non pas une fonction unique, mais une classe de fonctions, la notation $\alpha_1 \times \alpha_2$ déterminera la classe de fonctions qu'on obtient en remplaçant, dans l'expression $f_1[f_2(x)]$, chacune des fonctions non entièrement déterminées qui y figurent par toutes ses déterminations possibles. Nous écrirons $\alpha = \alpha_1 \times \alpha_2$.

Supposons que α_1 et α_2 soient des nombres arithmétiques, l'un au moins étant pourvu de parenthèses. Nos seules hypothèses sont

$$\lim_{y\infty} \frac{\log f_1(y)}{\log y} = n_1, \qquad \lim_{x\infty} \frac{\log f_2(x)}{\log x} = n_2.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Donc, si l'on pose $y = f_2(x)$, le quotient

$$\frac{\log F(x)}{\log x} = \frac{\log f_1(y)}{\log y} \times \frac{\log f_2(x)}{\log x}$$

a pour limite $n_1 n_2$. D'ailleurs, comme l'un au moins des nombres $\frac{\log f_1(y)}{\log y}$ et $\frac{\log f_2(x)}{\log x}$ tend vers sa limite d'une façon arbitraire, il en est de même de $\frac{\log F(x)}{\log x}$. Donc, les produits $n_1 \times (n_2)$, $(n_1) \times n_2$, $(n_1) \times (n_2)$ ont pour résultat $(n_1 n_2)$.

La multiplication des ordres arithmétiques avec parenthèses est commutative. Elle ne l'est pas en général pour les ordres non arithmétiques, mais elle est toujours associative. Enfin, le premier facteur α_1 peut être distribué.

Nous allons maintenant noter des ordres non identiques surpassés par ω^ν, à partir d'une valeur certaine de ν.

Le symbole ω lui-même ne sera jamais entouré de parenthèses.

Si une fonction peut se mettre sous la forme e^{x^ν}, ν n'étant pas constant, mais ayant pour limite n, son ordre sera $\omega(n)$, d'après le principe de la multiplication des ordres.

Considérons la fonction $e^{\alpha x^\beta}$. Si $\alpha = p$, $\beta = n$, p et n étant fixes, l'ordre de cette fonction est identique à $p\omega n$. Si $\beta = n$ et si α variant avec x a pour limite p, l'ordre de la fonction est $(p)\omega n$.

Si β varie avec x et si $\lim\limits_{x=\infty} \beta = n$, l'ordre de la fonction considérée sera $p\,\omega(n)$ ou $(p)\,\omega(n)$ suivant que α est constant ou varie avec x avec la condition $\lim\limits_{x=\infty} \alpha = p$.

Mais il est aisé de se rendre compte que la présence après ω du facteur (n) rend équivalentes les expressions $(p)\omega(n)$, $p\omega(n)$ et même $\omega(n)$. On a en effet

$$e^{\alpha x^\beta} = e^{x^{\beta + \frac{\log \alpha}{\log x}}},$$

et comme

$$\lim\left(\beta + \frac{\log \alpha}{\log x}\right) = n,$$

selon nos conventions, l'ordre de la fonction est compris parmi les ordres $\omega(n)$, quel que soit p.

Les fonctions dont l'ordre peut se noter par une expression

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

telle que $\omega(n)$ seront dites à *croissance régulière* relativement aux ordres ωn. Les fonctions dont l'ordre peut se noter $(p)\omega n$, p et n étant des nombres arithmétiques, seront dites *régulières* relativement aux ordres $p\omega n$.

Ces fonctions d'ordre $\omega(n)$, qui jouent un rôle très important dans diverses questions d'Analyse, en particulier dans la théorie des fonctions entières de genre fini [1], ont reçu souvent le nom de fonctions de type *exponentiel simple*.

Nous venons de voir que l'indétermination du facteur (n), venant après ω, rend indifférente la présence du facteur p placé devant. D'une façon générale, les facteurs qui suivent ω sont beaucoup plus importants que ceux qui le précèdent.

Pareillement, un ordre de la forme $n+(p)\omega$ est équivalent à l'ordre $(p)\omega$.

L'ordre $n+(p)\omega$ est, en effet, celui de $x^n e^{\alpha x}$ où $\lim\limits_{x\infty} \alpha = p$, α variant avec x. Or, cette fonction est égale à

$$e^{\left(\alpha + n\frac{\log x}{x}\right)x}$$

et par suite son ordre est aussi $(p)\omega$.

Plus généralement, la présence d'un terme dans l'expression d'un ordre n'apporte aucune précision nouvelle, s'il s'ajoute à un autre contenant un facteur ω de plus, et où figure un facteur parenthèse.

Ordre de régularité. — Dans un produit tel que

$$\alpha_1 \omega \alpha_2 \omega \ldots \alpha_{p-1} \omega \alpha_p,$$

contenant $p-1$ facteurs ω alternant avec p facteurs arithmétiques, si h est le plus haut rang des facteurs α_i pourvus de parenthèses, l'expression ci-dessus est équivalente à

$$\omega^{h-1}(n_h)\omega n_{h+1} \ldots n_{p-1}\omega n_p, \qquad \text{si} \qquad \alpha_h = (n_h), \qquad \alpha_{h+k} = n_{h+k}.$$

Si l'on ajoute à ce produit d'autres expressions, celles dont l'ordre est inférieur à ce produit peuvent être considérées comme

---

[1] *Voir* BOREL, *Leçons sur les fonctions entières* : Notes II et III.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

non existantes. Celles dont l'ordre est supérieur à celui-ci doivent être conservées, annulant le premier produit si elles contiennent une parenthèse, s'ajoutant simplement si elles représentent un ordre identique. Dans une expression ou une somme d'expressions où toutes les réductions ont été faites, on dit que le terme additif le plus faible, débarrassé de ses parenthèses, mesure la régularité de la fonction, ou, inversement, que la fonction est régulière relativement à l'ordre de ce terme additif.

Par exemple, une fonction régulière relativement à l'ordre $\omega^3 \times 2$ est égale à $e_3(x^{2+\varepsilon}) \times \varphi(x)$, ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$ et $\varphi(x)$ étant une fonction dont l'ordre s'exprime identiquement, les facteurs d'ordre inférieur à $\omega^3 . 2$ n'offrant d'ailleurs aucun intérêt à être conservés. Exemple :

$$\varphi(x) = e_4(\sqrt{x}).$$

Une fonction régulière relativement à l'ordre $2 . \omega . 3 . \omega . 4$ est égale à

$$e^{(2+\varepsilon)e^{3x^4}} \times \varphi(x).$$

Une fonction régulière relativement à l'ordre

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\omega} \cdot e^5 . \omega . 4 . \omega . 7$$

est égale, au facteur $\varphi(x)$ près, à $\sqrt{12x^7 + 3(5+\varepsilon)}$, parce que le facteur le moins important est e^5. Si les nombres 3 ou 4 n'étaient qu'approchés, e^5 devrait être supprimé (ou remplacé par 1 pour la clarté du langage). Les rôles des nombres 3 et 4 étant équivalents, la fonction envisagée serait régulière relativement à l'ordre

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot 12 . \omega . 7;$$

ce serait

$$(\sqrt{12} + \varepsilon)x^{\frac{7}{2}}.$$

Enfin, si 7 ou $\frac{1}{2}$ n'étaient qu'approchés, la régularité devrait être envisagée relativement à l'ordre $\frac{7}{2}$. La fonction serait $x^{\frac{7}{2}+\varepsilon}$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

CHAPITRE III.

DIFFÉRENTIATION ET INTÉGRATION DES ORDRES DE CROISSANCE.

Le problème qui va nous occuper dans ce Chapitre, et qui se pose fréquemment, est habituellement résolu par des méthodes particulières à chaque cas. Nous nous proposons uniquement de dégager des faits généraux. Nous étudierons successivement la différentiation et l'intégration des ordres de croissance d'abord identiques, puis approchés, ce second cas se subdivisant en deux suivant qu'on intègre un ordre (p) ou un ordre (p, q). Enfin, nous étudierons l'ordre de certaines intégrales prises entre des limites fixes, relativement aux paramètres qu'elles contiennent.

Cas des ordres identiques. — Considérons une fonction d'ordre identique à n. Désignons par $\mathrm{D}n$ l'ordre de sa dérivée. Cette dérivée est nx^{n-1}. Donc, pour $n \not\equiv 0$, on a $\mathrm{D}n = n - 1$, mais non pas $\mathrm{D}n \equiv n - 1$.

Si l'ordre n est identique à 0, la formule est inexacte. Si $n < 1$ et $\not\equiv 0$, la dérivée a un ordre négatif, ce qui est sans importance, le fait essentiel étant que la variation se fasse toujours dans le même sens. Passons à l'intégration. Considérons la fonction d'ordre identique à n, n étant supposé différent de -1. Si $n > -1$, $\int_0^x x^n\,dx$ est un infiniment grand avec x, égal à $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ et dont l'ordre sera noté identiquement par $\int n$. L'ordre de $\int_{\mathrm{A}}^x x^n\,dx$ est alors égal à $\int n$. Si $n < -1$, $\int_{\mathrm{A}}^x x^n\,dx$ tend vers une limite quand x croît indéfiniment, A étant fixe,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

tandis que $\int_x^A$ croît indéfiniment, pour x infiniment petit. On a

$$\int_A^x = \int_A^\infty - \int_x^\infty .$$

La fonction $\int_x^\infty x^n\,dx$ est un infiniment petit dont nous désignons encore identiquement l'ordre par $\int n$.

On a dans tous les cas, sauf pour $n = -1$,

$$\int n = n + 1.$$

Faisons $n = -1$.

En désignant par $\int -1$ l'ordre identique de $\int_1^x \frac{dx}{x}$, on trouve

$$\int -1 = \frac{1}{\omega}.$$

Nous allons maintenant étudier les modifications qu'apportent, à un ordre supérieur à tout entier, la différentiation et l'intégration. *Nous nous bornons pour la différentiation* aux fonctions dont nous pouvons *identiquement* exprimer l'ordre au moyen des nombres arithmétiques et du symbole ω.

Pour la fonction d'ordre identique à ω, e^x, la dérivée qui est e^x a aussi identiquement pour ordre ω. Lorsque l'ordre de la fonction est supérieur à ω, l'ordre de la dérivée est supérieur à celui de la fonction.

Par exemple, la dérivée de la fonction d'ordre $p\omega n$, à savoir e^{px^n}, étant égale à $pnx^{n-1}e^{px^n}$, a son ordre égal à $p\omega n + n - 1$.

Du calcul relatif à la dérivée, il est facile de déduire l'ordre de croissance de l'intégrale. Celle-ci, pour $n \neq 1$, ne peut pas être calculée en termes finis. Mais nous pouvons avoir aisément sa partie principale. Posons

$$\varphi(x) = \frac{1}{nx^{n-1}} e^{x^n}.$$

On a

$$\varphi'(x) = e^{x^n} - \frac{n-1}{nx^n} e^{x^n}.$$

Donc, $\varphi'(x)$ ne diffère de e^{x^n} que par un facteur tendant vers 1.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Un raisonnement simple, et que nous développerons dans un cas un peu plus difficile, montre que le rapport des deux fonctions $\psi(x) = \int_{A}^{x} e^{x^n} dx$ et $\varphi(x)$ tend vers 1.

En désignant par $\int \omega n$ l'ordre de $\psi(x)$, on a donc

$$\int \omega n = \omega n - n + 1.$$

Ce résultat est une expression particulière du fait très général suivant :

Si l'on passe de l'ordre de la fonction à celui de sa dérivée en ajoutant une certaine quantité, on passera de l'ordre de la fonction à l'ordre de son intégrale en retranchant la même quantité. Les égalités suivantes corroborent cette remarque :

$$\mathrm{D}\, p\,\omega n = p\,\omega n + \overline{n - 1},$$

$$\int p\,\omega n = p\,\omega n - \overline{n - 1}.$$

La seconde s'établit comme celle qui nous donne $\int \omega n$.

En voici l'explication générale.

Montrons que, si $y' = yu$, u, croissant régulièrement, $\int_{x_0}^{x} y\, dx$ est égal à $\frac{y}{u}$ à un facteur près tendant vers 1 :

$$\int_{x_0}^{x} y\, dx = \int_{x_0}^{x} \frac{yu}{u}\, dx = \int_{x_0}^{x} \frac{y'}{u}\, dx = \left(\frac{y}{u}\right)_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} y' \frac{d\frac{1}{u}}{dx}\, dx.$$

Donc

$$\int_{x_0}^{x} y\left(1 + \frac{d}{dx}\frac{1}{u}\right) dx = \left(\frac{y}{u}\right)_{x_0}^{x},$$

ce qui démontre la proposition *dans le cas où $\frac{1}{u}$ qui tend vers zéro est tel que sa dérivée tende également vers zéro.*

Si l'on convient de remplacer la notation $\int$ par D^{-1},

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$\int\int$ par D^{-2}, etc., il reste l'unique formule suivante :

$$D^{\alpha} p\,\omega\,n = p\,\omega\,n + \overline{\alpha n - 1},$$

dont il est bien aisé de démontrer la validité pour toutes les valeurs entières, positives ou négatives, de α.

Quand on considère des fonctions d'ordre encore plus élevé, on constate que la dérivée croît plus vite que la fonction et que la différence des ordres est de plus en plus grande.

Ainsi, la dérivée de e^{e^x} étant $e^x e^{e^x}$, on a

$$D\,\omega^2 \equiv \omega^2 + \omega.$$

Considérons de même la fonction d'ordre $p\,\omega\,q\,\omega\,n$, à savoir : $e^{pe^{qx^n}}$. Sa dérivée est

$$e^{pe^{qx^n}} \times pe^{qx^n} \times nq\,x^{n-1}.$$

L'excès de l'ordre de la dérivée sur celui de la fonction est égal à $q\,\omega\,n + n - 1$.

D'une façon générale, considérons la fonction y, d'ordre identique à

$$p_k\,\omega\,p_{k-1}\,\omega \ldots p_2\,\omega\,p_1.$$

Si l'on pose

$$y_1 = x^{p_1}, \qquad y_2 = e^{p_2 y_1}, \qquad \ldots, \qquad y_i = e^{p_i y_{i-1}}, \qquad \ldots,$$

on a

$$y = y_k.$$

D'après la formule

$$y'_i = p_i\,y'_{i-1}\,y_i,$$

pour $i > 1$ et $y'_1 = p_1 \dfrac{y_1}{x}$, on a

$$y' = y'_k = p_1 p_2 \ldots p_k \frac{y_1 y_2 \ldots y_k}{x}.$$

Donc, l'ordre de grandeur de y' est égal à

$$p_k\,\omega \ldots \omega\,p_1 + p_{k-1}\,\omega \ldots p_1 + \ldots + p_2\,\omega\,p_1 + p_1 - 1.$$

Calculons en particulier l'ordre de la dérivée de $y = e^{e^{x^p}}$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

On a

$$y' = y \times e^{x^p} \times p x^{p-1},$$
$$\mathrm{D}\,\omega^2 p = \omega^2 p + \omega p + p - 1.$$

Pour déduire de là l'ordre de $\mathrm{D}^2\,\omega^2 p$, nous utiliserons la remarque suivante :

Quand l'ordre d'une fonction est une somme de plusieurs termes, la quantité dont il faut modifier l'ordre de la fonction pour avoir celui de sa dérivée est le même que si l'ordre était réduit à son terme prépondérant (en supposant préalablement effectuées toutes les réductions possibles).

Voici un raisonnement expliquant le fait énoncé, et qui montre *l'hypothèse suffisante* pour que le principe précédent puisse s'appliquer :

Soient $y = \mathrm{AB}$, $\mathrm{A}' = \mathrm{A}a_1$ et $\mathrm{B}' = \mathrm{B}\,b_1$.

La dérivée de AB est

$$\mathrm{AB}' + \mathrm{BA}' = \mathrm{AB}(a_1 + b_1).$$

Supposons que $\frac{b_1}{a_1}$ soit infiniment petit; cela exige que $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ le soit aussi, si A est un infiniment grand, ou si B est un infiniment petit. Mais, réciproquement, pour les fonctions à croissance régulière dont nous nous occupons, il se trouve que, si $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ est un infiniment grand, $\frac{b_1}{a_1}$ l'est aussi. Si nous supposons

$$\lim_{x=\infty} \frac{b_1}{a_1} = 0,$$

nous avons

$$\frac{d}{dx}\mathrm{AB} = \mathrm{AB}\,a_1\left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right).$$

Donc, l'ordre du premier membre est celui de $\mathrm{AB}\,a_1$. L'ordre de y' est donc égal à l'ordre de y augmenté de l'ordre de a_1.

Par application de ce principe,

$$\mathrm{D}^2\,\omega^2 p = \omega^2 p + 2\omega p + 2p - 2,$$
$$\mathrm{D}^\alpha\,\omega^2 p = \omega^2 p + \alpha\omega p + \alpha\overline{p - 1},$$

pour toutes les valeurs entières positives de α.

Considérons la fonction d'ordre $\omega[n + \omega p]$. C'est la fonction $e^{x^n e^{x^p}}$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Un calcul facile donne

$$D\omega[n+\omega p] = \omega[n+\omega p] + \omega p + n + p - 1.$$

On aura, par application du principe général,

$$D^{\alpha}\omega[n+\omega p] = \omega[n+\omega p] + \alpha\omega p + \alpha \times \overline{n+p-1}.$$

Nous allons étendre cette formule au cas où α est un entier négatif.

Nous prouvons immédiatement qu'elle est vraie pour $\alpha = -1$, en remarquant que, si

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^p}}{p\,x^{n+p-1}} \times e^{x^n e^{x^p}},$$

$\varphi'(x)$ ne diffère de $e^{x^p e^{x^p}}$ que par un facteur tendant vers *un*. Donc, il en est de même pour $\varphi(x)$ et $\int_{A}^{x} e^{x^n e^{x^p}} dx$, ce qui donne l'égalité

$$D^{-1}\omega[n+\omega p] = \omega[n+\omega p] - \omega p - \overline{n+p-1}.$$

Pour passer au cas de α entier négatif quelconque, nous remarquerons que, *étant donnée une fonction dont l'ordre est la somme de plusieurs termes, il suffit, pour avoir l'ordre de son intégrale, de modifier l'ordre de la fonction de la même quantité que s'il était réduit à son terme prépondérant.*

En effet, soit $f(x) = AB$, A et B tendant vers $+\infty$. Posons

$$\int_{x_0}^{x} A\,dx = \frac{A}{a_1}, \qquad B' = B\,b_1.$$

On a

$$\int_{x_0}^{x} AB\,dx = \left(\frac{AB}{a_1}\right)_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{A}{a_1} B\,b_1\,dx,$$

ou

$$\int_{x_0}^{x} AB\left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right) dx = \left(\frac{AB}{a_1}\right)_{x_0}^{x}.$$

Si $\frac{b_1}{a_1}$ *est un infiniment petit,* ce qui se produira toujours avec les fonctions régulières que nous considérons, $\int_{x_0}^{x} AB\,dx$ ne diffère de $\frac{AB}{a_1}$ que par un facteur tendant vers 1.

Donnons un exemple. Posons

$$y = x^2 e^{x^3} e^{x^2 (\log x)^2 e^x}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et cherchons l'ordre de $z = \int_A^x y\,dx$. L'ordre de $\frac{y}{z}$ est le même que celui de $\frac{y'}{y}\cdot$ Ce dernier est le même que si y était réduit à son facteur principal

$$\psi(x) = e^{x^2(\log x)^2 e^x}.$$

L'ordre de $\frac{y}{z}$ est donc celui de

$$\frac{d}{dx}\log\psi(x) = \frac{d}{dx}[x^2(\log x)^2 e^x].$$

Toujours par application du même principe, l'ordre de cette dérivée ne diffère de l'ordre de $x^2(\log x)^2 e^x$ que de la quantité correspondant au facteur prépondérant. Ce facteur étant e^x, la différence envisagée est nulle. Donc, l'ordre de $\log\psi(x)$ étant $2 + 2\frac{1}{\omega} + \omega$, cet ordre est aussi celui de $\frac{\psi'}{\psi}$, et par suite de $\frac{y}{z}\cdot$ L'ordre de y étant identique à

$$2 + \omega \times 3 + \omega \times \overline{2 + 2\frac{1}{\omega} + \omega},$$

celui de z est égal à

$$\omega \times \overline{2 + 2\frac{1}{\omega} + \omega} + \omega.3 - \omega - 2\frac{1}{\omega}\cdot$$

Cas des ordres approchés. — Quand on considère des ordres *notés avec des parenthèses* ou même *égaux, sans être identiques* à un ordre noté sans parenthèses, *il est impossible* a priori *de savoir comment varie la dérivée.*

Soit, par exemple, la fonction d'ordre égal à n

$$f(x) = (2 + \sin x^m)x^n.$$

On a

$$f'(x) = x^{n-1}[n(2 + \sin x^m) + m x^m \cos x^m].$$

Supposons m positif. Pour les valeurs de x, telles que x^m soit égal à

$$2h\pi,$$

h étant un entier positif croissant, $\frac{f(x)}{m x^{m+n-1}}$ tendra vers $+1$; pour $x^m = (2h+1)\pi$, le même rapport tendra vers -1.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$f'(x)$ oscille donc entre des valeurs positives et négatives croissant en valeur absolue au delà de toute limite.

C'est un fait essentiel à signaler dans toutes les théories où interviennent les questions de croissance, que la connaissance de l'ordre de croissance d'une fonction (si cette fonction n'est pas connue identiquement, en chaque valeur de la variable) ne permet de préjuger de rien sur l'allure de sa dérivée, ni en particulier sur la régularité de sa croissance. C'est par ce fait que les séries uniformément convergentes ne peuvent, dans le cas général, être dérivées terme à terme, les hypothèses faites sur l'ordre de grandeur des termes de la série ne permettant de rien affirmer sur l'ordre de grandeur des termes de la série dérivée.

Ce qu'on sait seulement, c'est que les limites d'indétermination, dans l'ordre de la dérivée, comprennent entre elles des nombres qu'on peut fixer connaissant l'ordre de grandeur de la fonction elle-même, et, si l'on sait *par ailleurs* que ces limites coïncident, on peut *a priori* calculer leur valeur commune. Le détour suivi est classique. On passe par l'intégration, laquelle ne détruit pas la forme de la croissance. Les propositions que nous obtiendrons sur la différentiation auront donc un caractère essentiellement relatif, puisque leur validité sera subordonnée à la connaissance (obtenue par une autre voie, grâce à une étude directe de la fonction) qu'on supposera acquise, de la régularité de la dérivée; mais ces propositions n'en seront pas moins précieuses dans les applications, parce que la plupart des fonctions que nous aurons à envisager montreront aisément la régularité de leur dérivée.

Soit $\varphi(x)$ une fonction d'ordre (n) et supposons d'abord $n > -1$. Pour les valeurs négatives de n, $\varphi(x)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$, mais sa primitive croît indéfiniment. Soit donc à évaluer l'ordre de $\int_A^x \varphi(x)\,dx = \psi(x)$. On a par hypothèse, $\lim \frac{\log\varphi(x)}{\log x} = n$. A tout nombre ε donné à l'avance je peux faire correspondre un nombre x_0, tel que l'inégalité $x > x_0$ entraîne

$$n - \varepsilon < \frac{\log\varphi(x)}{\log x} < n + \varepsilon$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ou

(1) $$x^{n-\varepsilon} < \varphi(x) < x^{n+\varepsilon}.$$

On a

$$\psi(x) = \int_{A}^{x} \varphi(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + \psi(x_0).$$

Or, en intégrant la double inégalité (1) entre les limites x_0 et x où elle est satisfaite,

$$\frac{x^{n+1-\varepsilon} - x_0^{n+1-\varepsilon}}{n+1-\varepsilon} < \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx < \frac{x^{n+1+\varepsilon} - x_0^{n+1+\varepsilon}}{n+1+\varepsilon},$$

ou encore

(2) $$\frac{x^{n+1-\varepsilon}}{n+1-\varepsilon} + C_1 < \psi(x) < \frac{x^{n+1+\varepsilon}}{n+1+\varepsilon} + C_2,$$

avec

$$C_1 = \psi(x_0) - \frac{x_0^{n+1-\varepsilon}}{n+1-\varepsilon},$$

$$C_2 = \psi(x_0) - \frac{x_0^{n+1+\varepsilon}}{n+1+\varepsilon}.$$

Or, il est possible de trouver un nombre x_1, qu'on peut même supposer supérieur à x_0, tel que pour toutes les valeurs de x supérieures à x_1, le premier membre de la double inégalité (2) reste supérieur à $x^{n+1-2\varepsilon}$ et que le deuxième reste inférieur à $x^{n+1+2\varepsilon}$ en supposant $n+1+2\varepsilon > 0$, ce qui aura lieu si $n+1 > 0$.

Donc, pour $x > x_1$ on a

$$n+1-2\varepsilon < \frac{\log\psi(x)}{\log x} < n+1+2\varepsilon.$$

Le nombre 2ε ayant été choisi aussi petit qu'on veut, l'existence du nombre x_1 montre que $\frac{\log\psi(x)}{\log x}$ tend vers $n+1$. Donc, pour $n > -1$,

$$\int(n) = (n+1).$$

Une démonstration analogue et un peu plus simple prouve

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

que, si l'ordre α d'une fonction est *égal* à $n > -1$, on a

$$\int \alpha = n + 1.$$

Appliquons ces résultats à la dérivation.

Les formules qui précèdent montrent que, si la dérivée d'une fonction d'ordre $\alpha = (n)$ possède un ordre parenthèse déterminé, cet ordre est certainement $(n - 1)$. De même, si $\alpha = n$, et si la dérivée est d'un ordre égal à un nombre arithmétique, ce dernier est certainement $n - 1$.

Ceci suppose, bien entendu, $n > 0$.

Comme application des résultats précédents, posons

$$\varphi(x) = \frac{(x^5 + 1)\sqrt{x^3 + 2}}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}}.$$

L'ordre de $\varphi(x)$ est égal à

$$5 + \frac{3}{2} - 2 - 2 = \frac{5}{2}.$$

Donc, l'ordre de $\int_A^x \varphi(x)\,dx$ est égal à $\frac{7}{2}$.

Soit encore

$$\varphi(x) = x^2 e^{\sqrt{\log x}}.$$

L'ordre de cette fonction peut être désigné par (2), car

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log \varphi(x)}{\log x} = 2.$$

Donc, celui de $\int_A^x \varphi(x)\,dx$ est (3).

Dans les deux exemples précédents, les ordres de la dérivée sont égaux, dans le premier cas, à $\frac{3}{2}$ et, dans le second, à (1).

Pour s'en assurer, il suffit de remarquer que, dans chacun de ces cas, la dérivée logarithmique a un ordre égal à -1.

Mais, pour

$$\varphi(x) = x^2(2 + \sin e^x)^{\sqrt{\log x}},$$

l'ordre de $\int_A^x \varphi(x)\,dx$ est toujours égal à (3); mais celui de $\varphi'(x)$ n'est pas déterminé.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Considérons maintenant les fonctions d'ordre $\alpha = n$ ou $\alpha = (n)$, sans qu'on ait $\alpha \equiv n$, n étant inférieur à -1.

Nous posons

$$\psi(x) = \int_x^\infty \varphi(x)\,dx$$

et $\psi(x)$ est un infiniment petit dont nous cherchons l'ordre.

D'après l'égalité,

$$\int_x^\infty x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{-(1+n)},$$

on montre, comme dans le cas où $n > -1$, que, si $\alpha = n$, l'ordre de $\psi(x)$ est égal à $n+1$ et que, si $\alpha = (n)$, l'ordre de $\psi(x)$ est $(n+1)$.

En résumé, pour toutes les valeurs de n, sauf $n = -1$, on a

$$\int n = n+1, \qquad \int \alpha = n+1, \qquad \text{si } \alpha = n,$$

$$\int (n) = (n+1).$$

Quant à l'ordre de la dérivée, il est en général indéterminé, dans le cas où l'ordre de $\varphi(x)$ n'est pas identique à $n \neq 0$.

Mais si $\dfrac{\log\varphi'(x)}{\log x}$ tend vers une limite, dans le cas où l'ordre α de φ est égal à n ou à (n), cette limite est certainement $n-1$, en supposant toujours $n \neq 0$.

Passons au cas des ordres notés au moyen du symbole ω et de nombres arithmétiques pourvus de parenthèses.

Les formules relatives à l'intégration comportent les mêmes termes soustractifs qu'en l'absence des parenthèses. Mais, à cause de ces parenthèses, il est inutile d'introduire ce terme, comme il a été vu plus haut.

Soit, par exemple, à calculer $\int \omega(n)$. Une fonction $\varphi(x)$ d'ordre $\omega(n)$ est égale à e^{x^ν} avec $\lim\limits_{x=\infty} \nu = n$. Posons

$$\psi(x) = \int_A^x \varphi(x)\,dx.$$

ε étant un nombre positif arbitraire, nous pouvons montrer que

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

l'ordre de $\psi(x)$ est compris entre

$$\int \omega \times \overline{n-\varepsilon} \quad \text{et} \quad \int \omega \times \overline{n+\varepsilon}.$$

Car, ν tendant vers n, il est possible de trouver un nombre x_0 tel que, pour $x > x_0$,

$$n - \frac{\varepsilon}{2} < \nu < n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $x > x_0$, on a donc

$$e^{x^{n-\frac{\varepsilon}{2}}} < \varphi(x) < e^{x^{n+\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Intégrons chaque terme de x_0 à x. Il vient

$$\int_{x_0}^{x} e^{x^{n-\frac{\varepsilon}{2}}}\,dx < \psi(x) < \int_{x_0}^{x} e^{x^{n+\frac{\varepsilon}{2}}}\,dx + \psi(x_0).$$

ε et x_0 étant fixes, le premier membre ne diffère de $\dfrac{e^{x^{n-\frac{\varepsilon}{2}}}}{x^{n-\frac{\varepsilon}{2}-1}}$ que par un facteur fini. De même, le dernier ne diffère que par un facteur fini de $\dfrac{e^{x^{n+\frac{\varepsilon}{2}}}}{x^{n+\frac{\varepsilon}{2}-1}}$. Il est possible de trouver un nombre x_1 tel que pour $x > x_1$, le premier membre soit supérieur à $\int_A^x e^{x^{n-\varepsilon}}dx$ et le second inférieur à $\int_A^x e^{x^{n+\varepsilon}}\,dx$. Donc, l'ordre de $\psi(x)$ est compris entre

$$\int \omega \times \overline{n-\varepsilon} \quad \text{et} \quad \int \omega \times \overline{n+\varepsilon},$$

c'est-à-dire entre

$$\omega \times \overline{n-\varepsilon} - \overline{n-\varepsilon-1} \quad \text{et} \quad \omega \times \overline{n+\varepsilon} - \overline{n+\varepsilon-1}.$$

Cet ordre est égal à $\omega(n) - (n-1)$ qui est équivalent à $\omega(n)$.

Il n'y a pas de formule générale pour la dérivation. Seulement, si l'on sait que l'ordre de la dérivée peut se mettre sous la forme $\omega(p, q)$, on peut affirmer qu'on a $p \leqq n \leqq q$, et si $p = q$ on peut affirmer que l'ordre de la dérivée est $\omega(n)$. Mais il est indispensable d'introduire des hypothèses complémentaires sur une

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

fonction dont on sait seulement que son ordre est $\omega(n)$, pour en déduire celui de sa dérivée.

Dérivation des ordres zéro et intégration des ordres moins un. — Nous avons jusqu'ici systématiquement délaissé l'étude de la dérivation des fonctions d'ordre (0) et de l'intégration des fonctions d'ordre (-1). Nous allons constater que si nous envisageons des fonctions dont les ordres soient de plus en plus voisins de 0, fonctions que nous sachions d'ailleurs toujours noter identiquement, l'excès de l'ordre de la fonction sur celui de sa dérivée augmente de plus en plus, et d'une façon extrêmement rapide, si nous prenons la fonction pour infiniment grand principal.

Calculons l'ordre de grandeur de la dérivée de $y_p = \log_p x$. Nous avons

$$y_p = \log y_{p-1}$$

et, par suite,

$$y'_p = \frac{y'_{p-1}}{y_{p-1}}.$$

Comme $y_1 = \log x$, on a

$$y'_1 = \frac{1}{x};$$

d'où, par un calcul immédiat,

$$y'_p = \frac{1}{x y_1 y_2 \ldots y_{p-1}}.$$

Donc, y'_p est un infiniment petit dont l'ordre est identique à

$$-1 - \frac{1}{\omega} - \ldots - \frac{1}{\omega^{p-1}}$$

et l'excès de l'ordre de y_p sur l'ordre de y'_p est

$$1 + \frac{1}{\omega} + \ldots + \frac{1}{\omega^{p-1}} + \frac{1}{\omega^p}.$$

Nous allons voir que, relativement à y_p, cet ordre est négatif et très grand ; en effet, si nous considérons y'_p comme fonction de y_p, l'ordre de y'_p, relativement à y_p, est identique au produit de l'ordre de y'_p relativement à x par l'ordre de x relativement à y_p, d'après la définition même du produit de deux ordres. Ce dernier ordre est celui de la fonction inverse de y_p.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

C'est donc ω^p. Donc l'ordre de y'_p relativement à y_p est

$$\overline{-1-\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega^2}-\ldots-\frac{1}{\omega^{p-1}}}\,\omega^p.$$

Comme le facteur placé à droite de la somme peut multiplier distributivement tous les termes de la somme, l'ordre cherché est

$$-\omega^p-\omega^{p-1}-\ldots-\omega.$$

Calculons :

$$D\,\overline{\alpha_0+\alpha_1\frac{1}{\omega}+\ldots+\alpha_p\frac{1}{\omega^p}},$$

les α_i étant des nombres arithmétiques sans parenthèses, positifs, négatifs ou nuls. Nous pouvons appliquer une remarque relative à la variation par la dérivation de l'ordre d'un produit de plusieurs facteurs A, B, ..., L inégalement croissants. Si

$$A' = A a, \qquad B' = B b, \qquad \ldots, \qquad L' = L l,$$

on a

$$\frac{d}{dx} AB\ldots L = AB\ldots L(a+b+\ldots+l).$$

Si $b, \ldots, l$ sont infiniment petits par rapport à a (ce qui entraîne, au cas où A, B, ..., L ne tendent pas vers des limites finies, que B, ..., L sont infiniment petits par rapport à A), on voit que la variation d'ordre de AB...L par la dérivation est la même que pour A. Or, si

$$A = x^{\alpha_0}, \qquad B = (\log x)^{\alpha_1}, \qquad \ldots,$$

on a

$$a = \frac{\alpha_0}{x}, \qquad b = \frac{\alpha_1}{x\log x}, \qquad \ldots, \qquad l = \frac{\alpha_p}{x\log x\ldots\log_p x}.$$

Donc, $b, c, \ldots, l$ sont infiniment petits relativement à a et la diminution d'ordre de AB...L est la même que celle du premier facteur. Il en serait de même si $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{i-1} = 0$, avec $\alpha_i \neq 0$. Dans ce cas, la diminution d'ordre est égale à

$$-1-\frac{1}{\omega}-\ldots-\frac{1}{\omega^i}.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Donc

$$\overline{D\alpha_i \frac{1}{\omega^i} + \alpha_{i+1}\frac{1}{\omega^{i+1}} + \ldots + \alpha_p \frac{1}{\omega^p}}$$

$$= -1 - \frac{1}{\omega} - \ldots - \frac{1}{\omega^{i-1}} + \overline{\alpha_i - 1}\,\frac{1}{\omega^i} + \alpha_{i+1}\frac{1}{\omega^{i+1}} + \ldots + \alpha_p \frac{1}{\omega^p};$$

on suppose essentiellement $\alpha_i \neq 0$.

Le sens de la formule est clair pour $i \geqq 1$. Pour $i = 0$, il reste au second membre

$$\alpha_0 - 1 + \alpha_1 \frac{1}{\omega} + \ldots.$$

En particulier, pour $i \geqq 1$,

$$D\frac{1}{\omega^i} = -1 - \frac{1}{\omega} - \ldots - \frac{1}{\omega^{i-1}},$$

le signe $=$ pouvant ici être remplacé par $\equiv$.

Considérons maintenant l'intégration d'une fonction $f(x)$ d'ordre voisin de -1.

Nous posons

$$\psi(x) = \int_x^{\infty} f(x)\,dx,$$

si cette intégrale a un sens, et dans le cas contraire

$$\psi(x) = \int_A^x f(x)\,dx,$$

où A est un nombre fixe arbitraire. Dans le premier cas, $\frac{1}{\psi(x)}$, dans le second $\psi(x)$ sont des infiniment grands avec x. Le rapport $\frac{\psi(x)}{f(x)}$ peut devenir un infiniment grand d'ordre supérieur à 1 et d'un ordre arbitrairement grand par rapport à l'infiniment grand $\frac{1}{\psi(x)}$, ou $\psi(x)$, suivant les cas.

On a d'abord

$$\int -1 = \frac{1}{\omega}.$$

La formule relative à la dérivation nous en fournit une concernant l'intégrale. Énonçons le résultat :

Soit une fonction $f(x)$ d'ordre égal à

$$\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{\omega} + \ldots + \beta_p \frac{1}{\omega^p},$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ étant des nombres arithmétiques, positifs, négatifs ou nuls, évidemment sans parenthèses.

Si $\beta_0 \neq -1$, l'ordre de $\psi(x)$ est égal à

$$\beta_0 + 1 + \beta_1 \frac{1}{\omega} + \ldots + \beta_p \frac{1}{\omega_p}.$$

Si

$$\beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_{i-1} = -1, \qquad \beta_i \neq -1,$$

l'ordre de $\psi(x)$ est égal à

$$\overline{\beta_i + 1}\, \frac{1}{\omega^i} + \beta_{i+1} \frac{1}{\omega^{i+1}} + \ldots + \beta_p \frac{1}{\omega^p}.$$

Enfin, si tous les β sont égaux à -1, l'ordre de ψ est $\frac{1}{\omega^{p+1}}$.

Si l'un des nombres β est un nombre pourvu de parenthèses, tous les termes qui suivent sont superflus. Si l'un au moins des coefficients β n'est pas égal à -1, la formule subsiste, en y donnant cependant une parenthèse au dernier coefficient. Si tous les β sont égaux à -1, on a

$$\int \overline{-1 - \frac{1}{\omega} - \ldots - \frac{1}{\omega^{i-1}} + (-1)\frac{1}{\omega^i}} = (0)\frac{1}{\omega^i}.$$

Cas des croissances irrégulières. — Dans sa thèse ([1]), M. P. Boutroux a dû résoudre le problème d'évaluer l'ordre d'une intégrale de la forme

$$I_m^n = \int_m^n \frac{dx}{u(x)}$$

en la comparant à $\frac{1}{u(m)}$ ou $\frac{1}{u(n)}$ suivant les cas, sans supposer que $u(x)$ fût d'un ordre (p), et avec la seule hypothèse que son ordre fût de la forme (p, q).

Deux cas se présentent suivant que l'on suppose que I_m^n a un sens ou non pour $n = \infty$:

1° Si I n'a pas de sens pour $n = \infty$, nous voulons obtenir l'ordre de grandeur de I pour m fini et n très grand;

2° Si I a un sens pour $n = \infty$, nous cherchons l'ordre de I pour m très grand et $n = \infty$.

([1]) *Acta mathematica*, 1904.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Dans le premier cas, M. Boutroux a obtenu des conditions suffisantes pour que $u(n)\int_m^n \frac{dx}{u(x)}$ soit de même ordre que n, ou que $n\log n$, ..., ou que $n\log n\ldots\log_p n$.

Dans le second cas, le même auteur a obtenu des conditions suffisantes pour que $u(m)\int_m^\infty \frac{dx}{u(x)}$ soit de même ordre que m, ou que $m\log m$, ...

1° Supposons qu'il existe deux nombres positifs α et β tels que $\frac{u(x)}{x^\alpha}$ et $\frac{x^\beta}{u(x)}$ soient croissants.

Étudions d'abord le cas où I_m^∞ n'a pas de sens. Je dis que, si l'on a

$$1 > \beta > \alpha,$$

$u(n)I_m^n$ reste dans un rapport fini avec n.

En effet, $\frac{u(x)}{x^\alpha}$ étant croissant, pour $x < n$, on a

$$\frac{u(x)}{x^\alpha} < \frac{u(n)}{n^\alpha} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{u(x)} > \frac{n^\alpha}{u(n)}\frac{1}{x^\alpha}.$$

Donc

$$\int_m^n \frac{dx}{u(x)} > \frac{n^\alpha}{u(n)}\int_m^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{n^\alpha}{u(n)}\,\frac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha}-m^{1-\alpha})$$
$$= \frac{n}{(1-\alpha)\,u(n)}\left[1-\left(\frac{m}{n}\right)^{1-\alpha}\right].$$

m restant fixe et n croissant indéfiniment, on a manifestement, à partir d'une certaine valeur de n,

$$I_m^n > h'\frac{n}{u(n)},$$

h' étant un nombre positif arbitraire inférieur à $\frac{1}{1-\alpha}$.

De même $\frac{x^\beta}{u(x)}$ étant croissant, pour $x < n$, on a

$$\frac{x^\beta}{u(x)} < \frac{n^\beta}{u(n)},$$

$$\int_m^n \frac{dx}{u(x)} < \frac{n^\beta}{u(n)}\int_m^n \frac{dx}{x^\beta} = \frac{n}{(1-\beta)\,u(n)}(1+\varepsilon)$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

avec $\lim\limits_{n\infty} \varepsilon = 0$. Donc

$$I_m^n < h'' \frac{n}{u(n)},$$

h'' étant un nombre fixe.

Donc,

$$u(n) I_m^n = hn,$$

h ayant des limites d'indétermination finies quand, m étant fixe, n croît indéfiniment.

On démontre d'une manière identique que, si I_m^∞ a un sens, et si les deux nombres α et β définis plus haut existent et sont tels que $1 < \alpha < \beta$, on a (¹)

$$I_m^\infty = h \frac{m}{u(m)} \qquad (h \text{ fini pour } n \text{ infini}).$$

M. Boutroux avait en vue l'étude des intégrales de la forme

$$\int_m^n \frac{dx}{[\psi(x)]^\lambda},$$

λ pouvant prendre diverses valeurs. Soient μ et ν deux nombres, aussi voisins que possible, tels que $\frac{\psi(x)}{x^\nu}$ et $\frac{x^\mu}{\psi(x)}$ soient crois-

---

(¹) On peut montrer que la condition $I_m^\infty < k \frac{m}{u(m)}$ entraîne

$$\frac{u(n)}{u(m)} > \left[\frac{n}{m(1+k)}\right]^{1+\frac{1}{k}}$$

si $n > m$, en sorte que la condition nécessaire et suffisante pour que

$$I_m^\infty \frac{u(m)}{m}$$

soit limité supérieurement est

$$\frac{u(n)}{u(m)} > h_1 \left(\frac{n}{m}\right)^{1+\alpha}$$

pour $n > m$, $h_1 \leq 1$ et $\alpha > 0$ étant deux nombres fixes. L'hypothèse utilisée par M. Boutroux correspond à $h_1 = 1$. On peut de même obtenir des conditions nécessaires et suffisantes imposées au rapport $\frac{u(n)}{u(m)}$, pour que chacun des critères de M. Boutroux soit vérifié. *Voir* DENJOY, *Sur l'intégration de certaines inéquations fonctionnelles* (*Comptes rendus*, séance du 13 avril 1909).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

sants. Les nombres α et β définis plus haut sont respectivement

$$\lambda\nu \quad \text{et} \quad \lambda\mu \qquad (\lambda\nu < \lambda\mu).$$

Pour les valeurs de λ telles que $\lambda\nu < \lambda\mu < 1$, I_m^n est égal à $h\frac{n}{[\psi(n)]^\lambda}$. Pour les valeurs de λ telles que $1 < \lambda\nu < \lambda\mu$, I_m^∞ est égal à $h\frac{m}{[\psi(m)]^\lambda}$. Mais, si nous envisageons les valeurs de λ comprises entre $\frac{1}{\mu}$ et $\frac{1}{\nu}$, nous ne pouvons plus rien affirmer sur I_m^∞, ni si cette intégrale a un sens, ni *a fortiori* quel est son ordre.

M. Boutroux élargit alors les critères qu'il applique à $[\psi(x)]^\lambda$ ou $u(x)$.

Si $\frac{u(x)}{x(\log x)^{\alpha_1}}$ et $\frac{x(\log x)^{\beta_1}}{u(x)}$ sont croissants, supposons $\alpha_1 < \beta_1 < 1$. I_m^∞ n'a pas de sens. Évaluons I_m^n. Pour $x < n$,

$$\frac{u(x)}{x(\log x)^{\alpha_1}} < \frac{u(n)}{n(\log n)^{\alpha_1}}.$$

D'où une limite inférieure pour $\frac{1}{u(x)}$, et l'inégalité

$$I_m^n > \frac{n(\log n)^{\alpha_1}}{u(n)} \int_m^n \frac{dx}{x(\log x)^{\alpha_1}}.$$

L'intégrale du second membre est, à un facteur près, tendant vers un : $\frac{1}{1-\alpha_1}(\log n)^{1-\alpha_1}$. Donc (les notations h', h'', h gardant leur sens)

$$I_m^n > h'\frac{n\log n}{u(n)}.$$

En utilisant l'hypothèse relative à β_1, on aurait

$$I_m^n < h''\frac{n\log n}{u(n)};$$

d'où

$$I_m^n = h\frac{n\log n}{u(n)}.$$

Si $1 < \alpha_1 < \beta_1$, I_m^∞ a un sens et est, comme le montrerait un calcul toujours le même, égal à $h\frac{m\log m}{u(m)}$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Si $\alpha_1 < 1 > \beta_1$, nous ne pouvons décider *ni* si I_m^∞ a un sens, ni *a fortiori* quel est son ordre.

M. Boutroux examine alors un critère plus précis, lequel comporte encore un cas d'exception et ainsi successivement. Exposons le $p^{\text{ième}}$ critère.

Supposons qu'il existe deux nombres α_p et β_p, tels que

$$\frac{u(x)}{x\log x\ldots\log_{p-1}x\log_p^{\alpha_p}x} \quad \text{et} \quad \frac{x\log x\ldots x\log_{p-1}x\log_p^{\beta_p}x}{u(x)}$$

soient deux fonctions croissantes.

Si $\alpha_p < \beta_p < 1$, I_m^n est un infiniment grand. Pour l'évaluer, on utilise l'égalité

$$\int_m^n \frac{dx}{x\log x\ldots\log_p^\gamma x} = \frac{1}{1-\gamma}(\log_p^{1-\gamma} n - \log_p^{1-\gamma} m);$$

d'où

$$I_m^n = h\,\frac{n\log n\ldots\log_p n}{u(n)}.$$

Si $1 < \alpha_p < \beta_p$, on a pour I_m^∞ la même expression, où m remplace n.

Le cas $\alpha_p < 1 < \beta_p$ conduit à l'examen du $(p+1)^{\text{ième}}$ critère.

Ces évaluations d'intégrales définies ont servi à M. Boutroux de préliminaires à une étude très profonde des fonctions entières de genre fini. En particulier, les critères successifs lui ont permis d'élucider certains problèmes difficiles sur les fonctions d'ordre entier.

Ordre d'une intégrale relativement aux paramètres de l'élément différentiel. — Nous allons enfin étudier l'ordre de grandeur de certaines intégrales définies prises entre des limites *fixes*, relativement aux paramètres qu'elles contiennent.

1° Soit l'intégrale

$$I_1 = \int_a^\infty \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}} \qquad (a > 0).$$

Cette intégrale a un sens tant que ε supposé fixe est positif. Pour $\varepsilon = 0$, elle n'a plus de sens; quand ε tend vers zéro, sa valeur croît indéfiniment. Nous nous proposons de chercher son ordre

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

de grandeur relativement à $\frac{1}{\varepsilon}$ L'intégration donne immédiatement pour valeur de l'intégrale $\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{a^{\varepsilon}}$. Cet ordre est égal à celui de $\frac{1}{\varepsilon}$.

2° Soit l'intégrale

$$I_2 = \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}(\log x)^{1+\alpha}}.$$

Pour que l'expression intégrée ait un sens arithmétique, quel que soit α, nous supposerons $a > 1$, de façon que $\log a > 0$.

Supposons tout d'abord que, α étant fixe, nous fassions tendre ε vers zéro. Nous cherchons la modification que la présence de l'exposant α introduit dans l'ordre de I relativement à ε. Tout d'abord, si $\alpha > 0$, l'intégrale reste finie quand ε tend vers zéro. Donc, dans ce cas, il n'y a pas lieu de chercher l'ordre d'infinitude de I relativement à ε. Supposons donc $\alpha < 0$ pour commencer. Nous étudierons ensuite le cas $\alpha = 0$.

Le changement de variable $x = e^t$ nous donne

$$I_2 = \int_{\log a}^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon t}\,dt}{t^{1+\alpha}},$$

et, en posant $\varepsilon t = u$,

$$I_2 = \varepsilon^{\alpha} \int_{\varepsilon \log a}^{\infty} \frac{e^{-u}\,du}{u^{1+\alpha}}.$$

α étant négatif et fixe, l'intégrale tend vers une valeur finie, quand ε tend vers zéro. Donc, I_2 est de l'ordre de ε^{α}. Si $\alpha = -1$, nous retrouvons un résultat précédent. Mais, si $-1 < \alpha < 0$, l'ordre de I relativement à ε est totalement modifié.

Faisons enfin $\alpha = 0$. On a

$$I_2 = \int_{\log a}^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon t}}{t}\,dt = \int_{\varepsilon \log a}^{\infty} \frac{e^{-u}\,du}{u}.$$

En écrivant

$$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du + \int_{\varepsilon \log a}^{1} \frac{e^{-u} - 1}{u}\,du + \int_{\varepsilon \log a}^{1} \frac{du}{u},$$

I_2 est mis sous la forme d'une somme de trois intégrales dont

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

la première est constante, la seconde tend vers une limite finie, la troisième est égale à $\log\frac{1}{\varepsilon} - \log a$. Donc, l'ordre de I_2 est cette fois seulement celui de $\log\frac{1}{\varepsilon}$.

Nous allons résoudre une question un peu plus complexe et, en la traitant complètement, montrer comment on doit procéder pour étudier l'ordre de semblables intégrales. Nous allons supposer que α et ε tendent simultanément vers zéro, et chercher une expression donnant asymptotiquement la valeur de l'intégrale I_2 quelle que soit la façon dont α et ε deviennent indépendamment infiniment petits.

Nous avons toujours

$$(1) \qquad I_2 = \varepsilon^\alpha \int_{\varepsilon \log a}^{\infty} \frac{e^{-u}\,du}{u^{1+\alpha}}.$$

Ici, α est positif ou négatif (dans la première partie $\alpha < 0$).

Quand α et ε tendent vers zéro, l'intégrale du second membre de (1) devient infiniment grande par sa limite inférieure. Pour cette limite inférieure, e^{-u} est d'ailleurs très voisin de 1.

Soit donc η un nombre donné à l'avance arbitrairement petit. Soit b un nombre positif, le plus grand si l'on veut, tel que

$$1 - \eta < e^{-b} < 1.$$

ε devant tendre vers zéro, nous n'envisageons que les valeurs de ε inférieures à ε_1, tel que

$$\varepsilon_1 \log a < b.$$

Nous écrivons

$$I_2 \varepsilon^{-\alpha} = \int_b^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{1+\alpha}}\,du + \int_{\varepsilon \log a}^{b} \frac{e^{-u}}{u^{1+\alpha}}\,du = I' + I''.$$

Quand α tend vers zéro par valeurs positives ou négatives, I' tend vers

$$\int_b^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du = \varphi(b).$$

Nous n'envisageons que les valeurs de α telles que

$$\int_b^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{1+\alpha}}\,du < 2\varphi(b).$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Ceci aura lieu dès que $|\alpha|$ sera inférieur à un certain nombre α_1.
Pour I'', on a

$$e^{-u} = 1 - \theta\eta \qquad (0 < \theta < 1).$$

Donc

$$I'' = (1 - \theta\eta)\int_{\varepsilon \log a}^{b} \frac{du}{u^{1+\alpha}}$$

ou

$$(2) \qquad I'' = (1 - \theta\eta)\frac{(\varepsilon \log a)^{-\alpha} - b^{-\alpha}}{\alpha}.$$

Pour $\alpha = 0$, le quotient doit simplement être remplacé par sa *vraie valeur* pour $\alpha = 0$, soit

$$\log\frac{1}{\varepsilon} - \log_2 a + \log b.$$

I'' croît indéfiniment quand ε et α tendent simultanément vers zéro. Donc

$$I' = 2\theta'\varphi(b) \qquad (0 < \theta' < 1)$$

finit par être négligeable relativement à I''. Montrons à partir de quelles limites, pour ε et α, on a certainement

$$I' < \eta I''$$

ou plutôt

$$(3) \qquad 2\varphi(b) < \eta\frac{(\varepsilon \log a)^{-\alpha} - b^{-\alpha}}{\alpha}.$$

Que α soit positif, négatif ou nul, I'' croît quand ε décroît. On voit aisément qu'il en est de même de $\frac{(\varepsilon \log a)^{-\alpha} - b^{-\alpha}}{\alpha}$.

Soit

$$M = \frac{4}{\eta}.$$

Prenons

$$\varepsilon \log a < \varepsilon_2 \log a = b e^{-M\varphi(b)}$$

(nous supposons également $\varepsilon < \varepsilon_1$). Alors, le second membre de (3) est supérieur à

$$\eta\frac{b^{-\alpha}e^{\alpha M\varphi(b)} - b^{-\alpha}}{\alpha},$$

ce qui, lorsque α tend vers zéro, tend vers $\eta M\varphi(b) = 4\varphi(b)$. Donc, il existe une valeur α_2 telle que pour $|\alpha| < \alpha_2$ et $\varepsilon < \varepsilon_2$, le second membre de (3) est supérieur à $2\varphi(b)$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Donc, $|\alpha|$ et ε étant inférieurs respectivement à α_1, α_2 et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, on a

$$(4)\quad \begin{cases} I_2\,\varepsilon^{-\alpha} = I' + I'' = [\theta''\eta + (1-\theta\eta)]\,\dfrac{(\varepsilon \log a)^{-\alpha} - b^{-\alpha}}{\alpha} \\ I_2 = (1+\delta\eta)\,\dfrac{(\log a)^{-\alpha} - b^{-\alpha}\varepsilon^{\alpha}}{\alpha} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 < \theta'' \\ \delta^2 < 1 \end{pmatrix}.$$

Le facteur principal de I_2 s'écrit

$$b^{-\alpha}\,\frac{\left(\dfrac{b}{\log a}\right)^{\alpha} - \varepsilon^{\alpha}}{\alpha}.$$

$b^{-\alpha}$ tend vers 1. Donc, si $|\alpha| < \alpha_3$,

$$b^{-\alpha} = 1 + \delta'\eta.$$

Quand α est suffisamment petit (pour $|\alpha| < \alpha_4$),

$$\left(\frac{b}{\log a}\right)^{\alpha} = 1 + k\alpha \log\frac{b}{\log a},$$

k étant compris entre $\frac{1}{2}$ et 2. Donc,

$$(5)\qquad \frac{\left(\dfrac{b}{\log a}\right)^{\alpha} - \varepsilon^{\alpha}}{\alpha} = \frac{1-\varepsilon^{\alpha}}{\alpha} + k\log\frac{b}{\log a}.$$

$\dfrac{1-\varepsilon^{\alpha}}{\alpha}$ croît quand α et ε décroissent, même séparément. Si donc $\varepsilon < \varepsilon_3$, $|\alpha| < \alpha_5$,

$$\frac{1-\varepsilon^{\alpha}}{\alpha} > \frac{1-\varepsilon_3^{\alpha_5}}{\alpha_5}.$$

Si nous prenons $\alpha_5 \log\frac{1}{\varepsilon_3} = h$, h étant tel que

$$e^{-h} < 1 - \frac{h}{2},$$

on a

$$\varepsilon_3^{\alpha_5} = e^{-\alpha_5 \log\frac{1}{\varepsilon_3}} < 1 - \frac{\alpha_5}{2}\log\frac{1}{\varepsilon_3}$$

et

$$\frac{1-\varepsilon^{\alpha}}{\alpha} > \frac{1}{2}\log\frac{1}{\varepsilon_3}.$$

Si donc

$$\frac{1}{2}\log\frac{1}{\varepsilon_3} = \frac{2}{\eta}\log\frac{\log a}{b},$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ce qui détermine aussi α_5, pour $\varepsilon < \varepsilon_3$, $|\alpha| < \alpha_5$, la valeur commune des deux membres de (5) est (en supposant $b < \log a$)

$$\frac{1-\varepsilon^\alpha}{\alpha}(1-\theta\eta).$$

En résumé, η étant choisi, il existe deux nombres α_0 et ε_0 tels que pour $|\alpha| < \alpha_0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, on a

$$(6)\qquad I_2 = \int_a^\infty \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}(\log x)^{1+\alpha}} = (1+3\delta''\eta)\frac{1-\varepsilon^\alpha}{\alpha} \qquad (0 < \delta''^2 < 1).$$

Dans la seconde partie de la démonstration nous avons supposé explicitement $\alpha \neq 0$. Mais comme l'intégrale est une fonction continue de α, tant que $\varepsilon \neq 0$, la formule (6) subsiste même pour $\alpha = 0$ à la condition d'y remplacer $\frac{1-\varepsilon^\alpha}{\alpha}$ par sa vraie valeur, $\log\frac{1}{\varepsilon}$.

L'égalité (6) exprime que, si α et ε tendent vers zéro simultanément, le premier par valeurs positives ou négatives, le second par valeurs positives, de quelque façon que s'opère d'ailleurs leur variation qu'on peut supposer totalement indépendante, on a

$$(7)\qquad \lim_{\varepsilon=0,\ \alpha=0} \frac{\alpha}{1-\varepsilon^\alpha} I_2 = 1.$$

Si ε^α tend vers $h \neq 1$ $\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right.$ d'ordre égal à $\left.\frac{1}{|\alpha|}\right)$ la valeur asymptotique de I_2 est

$$\frac{1-h}{\alpha} = \frac{1-h}{\log h}\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

Si ε^α tend vers 1 $\left(\frac{1}{|\alpha|}\right.$ infiniment grand relativement à $\left.\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$, I_2 est équivalent à $\log\frac{1}{\varepsilon}$.

Si ε^α tend vers 0 $\left(\alpha\right.$ positif, $\frac{1}{\alpha}$ infiniment petit relativement à $\left.\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$. l'expression asymptotique de I_2 est $\frac{1}{\alpha}$.

Si ε^α croît indéfiniment $\left(\alpha\right.$ négatif, $\frac{1}{-\alpha}$ infiniment petit rela-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

tivement à $\log\frac{1}{\varepsilon}$), I_2 est équivalent à $\frac{\varepsilon^\alpha}{-\alpha}$. Mais il est essentiel de remarquer que la formule (7) est d'une généralité bien supérieure à celle de toutes ces hypothèses ; car elle suppose simplement que ε et α tendent simultanément vers zéro, quels que soient les ordres de grandeur relatifs de $\frac{1}{|\alpha|}$ et de $\log\frac{1}{\varepsilon}$.

Si l'on supposait que α, positif, ne tendît pas vers zéro, la formule (7) nous donnerait pour I_2 une limite finie; elle cesserait d'être exacte bien que, effectivement, I_2 tende vers une limite, mais cette limite ne serait pas donnée par cette formule.

Si l'on suppose α négatif, ne tendant pas vers zéro, la formule (7) nous donne le résultat : I_2 est de l'ordre de $\varepsilon^{+\alpha}$, mais la limite du rapport de I_2 à ε^α, qui existe en réalité, n'est pas celle donnée par la formule. On voit en somme que la formule (7), vraie si, avec $\lim\varepsilon = 0$, on a

$$\lim\alpha = 0,$$

reste vraie si la valeur 0 reste en dehors du champ d'indétermination de α, à la condition d'y remplacer l'unité au second membre par un nombre à limites d'indétermination finies en même temps que celles de α.

3° Soit à chercher l'ordre de

$$I_3 = \int_a^\infty \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}\log x\,\log_2 x},$$

quand ε tend vers zéro.

Nous supposons $a > e$ pour que $\log_2 a$ soit réel. En posant $x = e^t$ et $\varepsilon t = u$, il vient

$$I_3 = \int_{\varepsilon\log a}^{\infty} \frac{e^{-u}\,du}{u\log\frac{u}{\varepsilon}}.$$

Comme ci-dessus, nous introduisons le nombre positif b tel que

$$1 - \eta < e^{-b}.$$

L'intégrale

$$\int_b^\infty \frac{e^{-u}}{u\log\frac{u}{\varepsilon}}\,du$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

tend vers zéro avec ε. D'autre part,

$$\int_{\varepsilon \log a}^{b} \frac{e^{-u}}{u \log \frac{u}{\varepsilon}}\, du = (1 - \theta\eta) I'',$$

avec

$$I'' = \int_{\varepsilon \log a}^{b} \frac{du}{u \log \frac{u}{\varepsilon}} = \left(\log_2 \frac{u}{\varepsilon}\right)_{\varepsilon \log a}^{b},$$

$$I'' = \log \log \frac{b}{\varepsilon} - \log_3 a = \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + \log\left(1 + \frac{\log b}{\log \frac{1}{\varepsilon}}\right) - \log_3 a.$$

Donc $\dfrac{I''}{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}}$ tend vers 1, et il en est par suite de même de $\dfrac{I_3}{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}}$.

4° Les méthodes précédentes sont applicables dans bien des cas. Certains ne diffèrent des précédents qu'en apparence. Ainsi l'intégrale

$$\int_{a}^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^{1+\varepsilon} \log_2 x}$$

est égale à

$$\int_{\log a}^{\infty} \frac{dy}{y^{1+\varepsilon} \log y},$$

dont l'ordre est celui de $\log \frac{1}{\varepsilon}$.

Des considérations analogues trouvent leur application au cas des intégrales doubles étendues à des domaines fixes, l'élément différentiel dépendant de paramètres variables.

1° Soit l'intégrale

$$J_1 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx\, dy}{(x^2 + y^2 + 1)^{\alpha}}.$$

La condition de convergence de cette intégrale est $\alpha > 1$. En posant $\alpha = 1 + \varepsilon$, proposons-nous de chercher l'ordre de cette intégrale relativement à $\frac{1}{\varepsilon}$. Soit

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega;$$

l'intégrale se réduit à

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + 1)^{1+\varepsilon}} = \frac{\pi}{4\varepsilon}.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

L'ordre est le même que si l'intégration à effectuer était $\int_a^\infty \frac{d\rho}{\rho^{1+\varepsilon}}$, ce qui s'explique par ce fait que seules les grandes valeurs de ρ interviennent pour donner l'ordre de l'intégrale et que, si ρ est grand, $\rho^2 + 1$ peut être remplacé par ρ^2 à un facteur près infiniment voisin de 1.

2° Soit

$$J_2 = \int_0^\infty \int_b^\infty \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+1)^\alpha (\log y)^\beta}.$$

D'après ce qui précède, l'intégrale ne saurait converger si $\alpha < 1$. Elle converge d'ailleurs si $\alpha > 1$. Toute la discussion porte sur le cas $\alpha = 1$. Intégrons d'abord par rapport à x :

$$J_2 = \int_b^\infty \frac{dy}{(\log y)^\beta} \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+y^2+1)^\alpha}.$$

Posons

$$x = \sqrt{y^2+1}\,t.$$

La première intégration à effectuer nous donne

$$(\sqrt{y^2+1})^{1-2\alpha} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha} = \frac{A}{(y^2+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}}.$$

Si α est voisin de 1, A est voisin d'un nombre fixe.

On a ensuite

$$J_2 = A \int_b^\infty \frac{dy}{(y^2+1)^{\alpha-\frac{1}{2}} (\log y)^\beta}.$$

L'intégrale converge, si $\alpha = 1$, à la condition nécessaire et suffisante que $\beta > 1$. Pour $\alpha = 1$, $\beta = 1$, elle diverge. Si nous posons $\alpha = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, $\beta = 1 + \alpha'$, étant donné que l'intégrale J_2 ne devient infiniment grande que dans le champ des y infiniment grands, nous pouvons, sans modifier la valeur principale de J_2, remplacer $y^2 + 1$ par y^2. Cette valeur principale est alors

$$A \int_a^\infty \frac{dy}{y^{1+\varepsilon} (\log y)^{1+\alpha'}}$$

et par suite

$$A \frac{1-\varepsilon^{\alpha'}}{\alpha'}.$$

La remarque essentielle à signaler est que la modification

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

introduite par le facteur $(\log r)^\beta$ est identique à celle que donnerait le facteur $(\log \rho)^\beta$.

3° Plus généralement, envisageons des intégrales de la forme

$$J_3 = \int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx\, dy}{x^\alpha + y^\beta}.$$

La condition pour que cette intégrale ait un sens est

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1.$$

Ceci se démontre [1] en prouvant que

$$J_2 = A' \int_c^\infty \frac{dt}{t^{-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}}$$

(c fini), avec

$$A' = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)}.$$

Si donc nous posons $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 - \varepsilon$, le coefficient A' reste compris entre des limites aisées à calculer. Sa limite, quand ε tend vers zéro, dépend des limites α_0, β_0 positives et vérifiant la relation $\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\beta_0} = 1$, vers lesquelles tendent respectivement α et β. L'ordre de l'intégrale est en tous cas celui de $\frac{1}{\varepsilon}$. Pour $\alpha_0 = \beta_0 = 2$, nous retrouverions la même valeur asymptotique que pour l'intégrale $\int\int \frac{dx\, dy}{(x^2+y^2)^{1+\varepsilon}}$.

L'extension au cas des intégrales triples, ou de multiplicité supérieure, se ferait sans difficulté. On utiliserait pour l'intégrale

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \cdots \int_c^\infty \frac{dx\, dy \ldots dt}{x^\alpha + y^\beta + \ldots + t^\lambda}$$

la condition de convergence [2]

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \ldots + \frac{1}{\lambda} < 1.$$

---

(1) *Voir* BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 55.
(2) BOREL, *loc. cit.*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Les méthodes précédentes consistent essentiellement à déterminer d'abord, dans le champ des variables, les points autour desquels l'intégrale devient infinie; d'une façon plus précise, les points ou lignes tels que, leur voisinage étant exclu du champ des variables, l'intégrale reste finie. En s'en tenant aux zones entourant ces points (dont certains peuvent être à l'infini), l'expression de l'élément différentiel aura généralement une partie principale facile à mettre en évidence et de forme beaucoup plus simple que l'élément lui-même. Cette partie principale pourra d'ailleurs revêtir diverses formes, qu'on obtiendra, par exemple, en scindant les diverses zones conservées en plusieurs autres, telles que dans chacune d'elles un terme de l'élément différentiel soit prépondérant. On ne retiendra que ce terme dans l'intégrale.

Nous allons chercher, en utilisant ces principes, les conditions de convergence de l'intégrale

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx\,dy}{(x^\alpha + y^\beta)(x^{\alpha'} + y^{\beta'})}.$$

Limitons d'abord la zone où l'intégrale risque de devenir infinie. Si nous donnons à y une valeur constante, arbitrairement grande, la convergence des éléments de l'intégrale correspondant à $b < y < B$ est uniquement subordonnée à la condition $\alpha + \alpha' > 1$. Il nous faut de même $\beta + \beta' > 1$. Mais, à cause de ces conditions, l'intégrale ne peut diverger que dans un champ où x et y vont simultanément jusqu'à l'infini. Donc, nous pourrons nous donner des nombres arbitrairement grands A et B, et n'étudier la condition de convergence que dans le champ $x > A$, $y > B$.

Dans ce champ, distinguons diverses zones. Construisons les courbes $x = y^{\frac{\beta}{\alpha}}$, $x = y^{\frac{\beta'}{\alpha'}}$. Supposons $\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta'}{\alpha'}$; la première courbe sera au-dessus de la seconde. Elles divisent le champ en trois zones; dans la première $x^\alpha < y^\beta$, $x^{\alpha'} < y^{\beta'}$. D'où

$$\varphi(x, y) = (x^\alpha + y^\beta)(x^{\alpha'} + y^{\beta'}) = y^{\beta+\beta'} \times h_1,$$

avec $1 < h_1 < 4$. Dans la deuxième

$$\varphi(x, y) = x^\alpha y^{\beta'} h_2.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Dans la troisième

$$\varphi = x^{\alpha+\alpha'} h_3,$$

h_2 et h_3 étant également compris entre 1 et 4. En fait, seules sont prépondérantes dans chaque zone les régions où h_1, h_2, h_3 sont très voisins de 1. L'intégrale dans le premier champ a donc pour valeur

$$\frac{1}{h_1}\int_{B}^{\infty}\frac{dy}{y^{\beta+\beta'}}\left(y^{\frac{\beta}{\alpha}} - A^{\frac{\beta}{\alpha}}\right).$$

La question de la convergence ne se pose que pour y très grand. Ici, nous pouvons remplacer B par une nouvelle limite B_1 fixe, sans changer la convergence de l'intégrale, de façon que

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} - A^{\frac{\beta}{\alpha}} = y^{\frac{\beta}{\alpha}}(1 - \theta\eta_1),$$

η_1 étant par exemple inférieur à $\frac{1}{2}$. La condition de convergence est donc

$$\beta + \beta' - \frac{\beta}{\alpha} > 1.$$

Dans la seconde zone nous avons

$$\frac{1}{h_2}\int\int\frac{dx\,dy}{x^{\alpha}y^{\beta'}} = h'_2\int_{B}^{\infty}\frac{dy}{y^{\beta'}}\left[y^{(1-\alpha)\frac{\beta'}{\alpha'}} - y^{(1-\alpha)\frac{\beta}{\alpha}}\right] \qquad (h'_2 \text{ fini});$$

B étant très grand, le second terme de la différence est négligeable par rapport au premier. La condition de convergence est

$$\beta' + (\alpha - 1)\frac{\beta'}{\alpha'} > 1.$$

Enfin, la condition de convergence dans la troisième zone est

$$\alpha + \alpha' - \frac{\alpha'}{\beta'} > 1.$$

Ces trois conditions se réduisent aux deux extrêmes qui peuvent s'écrire

$$\frac{\beta'}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 1,$$

$$\frac{\alpha}{\alpha'} > \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} - 1,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

avec

$$\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

Non seulement la méthode précédente nous a donné les conditions de convergence, mais elle permet encore, si α, β, α', β' tendent vers des valeurs pour lesquelles les conditions cessent d'être vérifiées, d'obtenir l'ordre de grandeur de l'intégrale relativement aux différences infiniment petites des paramètres et de leurs limites.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS ANALYTIQUES.

Nous allons appliquer les résultats précédemment acquis à l'étude des séries et des produits infinis.

Nous nous proposerons de déduire de la croissance du terme ou du facteur général, u_n ou $1+u_n$, relativement à son rang, la croissance de la somme des n premiers termes, ou du produit des n premiers facteurs. Si ces termes généraux sont des fonctions d'une variable x, il y aura lieu de considérer la croissance de la série ou du produit relativement à x.

Les produits infinis fonctions d'une variable, dont nous nous occuperons, seront des fonctions entières de cette variable, et la relation que nous nous trouverons envisager sera celle qui lie la croissance de la fonction et la croissance des modules de ses zéros.

Ainsi, nous étudierons d'abord les séries à termes constants et positifs; puis, par application des résultats obtenus et des méthodes employées, nous déterminerons les très utiles formules d'approximation de la fonction Γ. Celle-ci, mise à son tour sous forme de produit infini, nous donnera un exemple essentiel de la relation entre la croissance d'une fonction entière et celle de ses zéros.

Nous analyserons de plus près, par les produits infinis, cette relation quand les croissances sont régulières. Elle sera mise en évidence pour les croissances irrégulières sur le développement de la fonction entière en série de Taylor.

Séries à termes constants et positifs. — Dans l'étude des séries, à laquelle se ramène celle des produits infinis, se posent suivant les cas deux problèmes différents.

Étant donnée une série : 1° si elle est divergente, la somme

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

des n premiers termes, somme qui augmente indéfiniment avec n, possède, relativement à n, un certain ordre de grandeur qu'il est utile de connaître.

2° Si elle est convergente, la somme des termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$, ou $n^{\text{ième}}$ reste, est un infiniment petit dont nous nous proposerons également de calculer l'ordre relativement à n.

Il est à remarquer que, dans les deux cas, les ordres de grandeur envisagés sont indépendants des modifications qu'on pourrait faire subir à un nombre fini de termes de la série.

Étudions d'abord le premier problème. Soient u_n le terme général d'une série divergente, S_n la somme de ses n premiers termes.

Supposons que u_n soit pour $n > h$ un nombre jamais croissant. En considérant n comme une variable continue et u_n comme une fonction $u(n)$ continue jamais croissante, assujettie à coïncider avec le $n^{\text{ième}}$ terme de la série pour toutes les valeurs entières de n, et en construisant la courbe $y = u(x)$, on prouve les inégalités

$$\sum_{h+1}^{n} u_n < \int_h^n u(n)\,dn < \sum_h^{n-1} u_n,$$

$$(1) \qquad \int_h^n u(n)\,dn + u_n < \sum_h^n u_n < \int_h^n u(n)\,dn + u_h.$$

Supposons que u_n pour $n > h$ soit un nombre jamais décroissant. On trouve, en construisant comme ci-dessus la courbe $y = u(x)$, la même double inégalité précédente renversée

$$(2) \qquad \int_h^n u(n)\,dn + u_h < \sum_h^n u_n < \int_h^n u(n)\,dn + u_n.$$

Dans les deux cas

$$\sum_h^n u_n - \int_h^n u(n)\,dn$$

est compris entre u_h et u_n.

Cela étant, faisons sur l'ordre des u certaines hypothèses particulières.

Supposons d'abord que cet ordre soit identique à $a > -1$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

On a alors

$$u_n = n^a.$$

Donc, en posant $\sum_1^n u_n = S_n$, on a la double inégalité

$$\frac{n^{a+1}-1}{a+1} + 1 < S_n < \frac{n^{a+1}-1}{a+1} + n^a$$

si $a > 0$, et les inégalités inverses si $a < 0$. Dans les deux cas, $\frac{S_n}{n^{a+1}}$ tend vers $\frac{1}{a+1}$. L'ordre de S_n est donc égal à $a+1$.

L'ordre de S_n serait encore $a+1$, si l'on avait

$$u_n = A_n n^a,$$

A_n restant entre des limites extrêmes d'indétermination finies.

Si l'ordre de u_n est (a), $a > -1$, l'ordre de $\int_h^n u_n dn$ est $(a+1)$. Ce sera encore ici l'ordre de S_n.

Citons des exemples. Pour $u = \frac{1}{\sqrt{n}}$, dont l'ordre est identique à $-\frac{1}{2}$, la somme $\sum_1^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ est d'ordre égal à $\frac{1}{2}$.

Soit $u_n = \frac{n^2+1}{n^2\sqrt{n+1}}$. Ici, l'ordre de u_n est égal à $-\frac{1}{2}$. L'ordre de S_n est donc encore $\frac{1}{2}$.

Posons

$$u_n = n^3\left(1 - n \sin\frac{1}{n}\right).$$

Puisque, d'après le développement en série de $\sin\frac{1}{n}$,

$$1 - n \sin\frac{1}{n} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{n^2}(1+\varepsilon_n), \qquad \lim_{n\,\infty} \varepsilon_n = 0,$$

u_n est d'ordre égal à $+1$.

Donc S_n est d'ordre égal à 2.

Passons maintenant à des ordres de croissance supérieurs à tout entier.

L'inégalité (2) peut s'écrire, en ajoutant aux trois membres,

$$\int_1^h u(n)\,dn$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et en posant

$$\sum_1^h u_n - \int_1^h u(n)\,dn = \mathrm{C},$$

$$(3)\qquad \int_1^n u(n)\,dn + u_h < \mathrm{S}_n + u_h - \mathrm{C} < \int_1^n u(n)\,dn + u_n,$$

et par suite

$$(3')\qquad \int_1^n u(n)\,dn < \mathrm{S}_n - \mathrm{C} < \int_1^n u(n)\,dn + u_n.$$

Cette double inégalité montre que, selon la croissance de u, deux cas se présenteront :

Si $\int_1^n u(n)\,dn$ est infiniment grand par rapport à u_n, alors le rapport de S_n à $\int_1^n u(n)\,dn$ tend vers 1, et l'on a

$$(4)\qquad \mathrm{S}_n = \int_1^n u(n)\,dn \left(1 + \theta\,\frac{u_n}{\int_1^n u(n)\,dn}\right),$$

θ étant un nombre compris entre 0 et 1.

Si au contraire $\int_1^n u(n)\,dn$ est infiniment petit par rapport à u_n, en remplaçant la première des inégalités (3') par l'inégalité évidente $u_n < \mathrm{S}_n$, on voit que $\frac{\mathrm{S}_n}{u_n}$ tend vers 1 et l'on a

$$(5)\qquad \mathrm{S}_n = u_n \times \left(1 + \theta'\,\frac{\int_1^n u(n)\,dn}{u_n}\right).$$

Enfin, dans le cas intermédiaire où le rapport $\frac{1}{u_n}\int_1^n u(n)\,dn$ reste compris entre des limites finies, les deux formules (4) et (5) peuvent être employées concurremment. S_n est comparable à la fois à $\int_1^n u(n)\,dn$ et à u_n.

Le premier cas se trouve réalisé quand la croissance de u_n

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

est inférieure à $p\omega$, quelque petit que soit le nombre positif p; le second, quand elle est supérieure à $p\omega$, quelque grand que soit p; le troisième, quand elle est égale à $(p, q)\omega$, p et q étant tels que $0 < p < q < +\infty$.

Citons quelques exemples. Examinons d'abord comment, dans le cas intermédiaire, le dernier terme u_n est déjà assez prépondérant pour être comparable à la somme de tous ceux qui le précèdent.

Posons

$$u_n = a^n,$$

a étant un nombre supérieur à 1. On a

$$S_n = a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1} = a^{n+1}\frac{1 - a^{-n}}{a - 1}.$$

Le rapport $\frac{S_n}{u_n}$ est donc fini et $\lim \frac{u_n}{S_n} = \frac{a-1}{a}$.

Si $u_n = e^{n^2}$, la somme $e + e^4 + \ldots + e^{n^2}$ diffère fort peu de son dernier terme. Le calcul fait pour le cas général nous donne, pour le rapport $\frac{S_n}{u_n}$, la valeur

$$1 + \theta\frac{\int_1^n u(n)\,dn}{e^{n^2}} = 1 + \frac{\theta'}{2n},$$

avec $0 < \theta' < 1$.

Si $u_n = e^{\sqrt{n}}$, comme $\dfrac{\int^n e^{\sqrt{n}}\,dn}{e^{\sqrt{n}}}$ est égal à $2\sqrt{n}$ à un facteur près tendant vers 1 $\left(\text{ce facteur étant plus précisément égal asymptotiquement à } 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, on a

$$S_n = e^{\sqrt{n}} \times 2\sqrt{n}\left(1 - \frac{\theta}{2\sqrt{n}}\right).$$

Ici encore, on a donc avec la valeur de la somme, à un facteur près tendant vers 1, une limite supérieure de l'erreur commise.

Le second problème : ordre de grandeur du $n^{\text{ième}}$ reste d'une série convergente, va nous donner des résultats entièrement analogues aux précédents.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Supposons qu'à partir d'un certain rang n_0, u_n qui tend vers zéro ne croisse jamais. Alors, nous savons que, la série étant convergente, nu_n tend vers zéro, et, par conséquent, l'ordre de grandeur de u_n, qui est négatif, ne saurait être ni supérieur ni égal à -1.

Cette remarque faite, considérons les inégalités

$$u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots < \int_{n+1}^{\infty} u(n)\, dn < u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

que nous écrirons :

$$R_n - u_{n+1} < \int_{n+1}^{\infty} u(n)\, dn < R_n.$$

De ceci résulte :

$$(6) \qquad \int_{n+1}^{\infty} u(n)\, dn < R_n < \int_{n+1}^{\infty} u(n)\, dn + u_{n+1}.$$

Ici encore deux cas vont se présenter :

Si l'intégrale $\int_{n+1}^{\infty} u(n)\, dn$ est d'ordre supérieur à u_{n+1}, alors le reste R_n est égal à $\int_{n+1}^{\infty} u(n)\, dn$ à un facteur près tendant vers 1, l'erreur relative étant par défaut et inférieure à $\dfrac{u_{n+1}}{\int_{n+1}^{\infty} u(n)\, dn}$.

Si $\int_{n+1}^{\infty} u(n)\, dn$ est d'ordre inférieur à u_{n+1}, l'inégalité évidente $u_{n+1} < R_n$ remplacera la première des inégalités (6) et R_n sera sensiblement égal à u_{n+1}, l'erreur relative étant inférieure à $\dfrac{\int_{n+1}^{\infty} u(n)\, dn}{u_{n+1}}$, et par défaut évidemment.

Enfin, si $\int_{n+1}^{\infty} u(n)\, dn$ et u_{n+1} restent dans un rapport fini, il ne nous sera pas possible d'obtenir par ce procédé une valeur approchée du reste avec une erreur relative tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$; mais nous connaîtrons son ordre qui est l'ordre commun de $\int_{n+1}^{\infty} u(n)\, dn$ et de u_{n+1}. Ces trois cas sont réalisés, suivant que

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

l'ordre de u_n est supérieur à $-p\omega$, quelque petit que soit p, ou inférieur à $-p\omega$, quelque grand que soit p, ou égal à $-(p, q)\omega$, avec $0 < p < q < +\infty$.

En particulier, si u_n est d'ordre fini, $-a$, ou $(-a)$, avec $a > 1$, l'ordre du reste est $-a+1$, ou $-(a-1)$. Exemple :

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \qquad R_n = \frac{1}{n},$$

à un facteur près tendant vers 1.

Si $u_n = a^{-n}$, le calcul direct nous donne pour R_n la valeur $\frac{a^{-n}}{a-1}\cdot$ Ici, on a

$$\int_{n+1}^{\infty} u(n)\,dn = \frac{a^{-(n+1)}}{La},$$

en sorte que u_{n+1} et $\int_{n+1}^{\infty} u(n)\,dn$ sont de même ordre. L'erreur commise sur la valeur de la série en s'arrêtant au terme u_n est donc proportionnelle au dernier terme calculé.

On trouve un résultat analogue concernant la série

$$u_n = \frac{1}{(n-1)!}$$

dont la somme est e.

On sait que l'erreur commise sur la valeur de e, en arrêtant le développement de la série au $n^{\text{ième}}$ terme, savoir u_n, est de l'ordre du premier terme non calculé u_{n+1} qui est la $n^{\text{ième}}$ partie du dernier terme calculé u_n. Les formules d'approximation pour $n!$ permettent de calculer $\int_{n+1}^{\infty} u_n\,dn$, et apporteraient la confirmation de ce résultat.

Dans tout ce qui précède nous avons systématiquement omis le cas où l'ordre de u_n est -1 ou (-1). Lorsque l'ordre a de u_n est supérieur à un nombre fini plus grand que -1, la série est certainement divergente. Quand a est inférieur à un nombre fini plus petit que -1, la série est convergente. Mais, si nous n'avons pas d'autre indication sur u_n que le fait $\lim \frac{\log u_n}{\log n} = -1$, nous ne pouvons décider si la série est convergente ou divergente. On sait, en effet, que $\log_p x$ désignant la fonction $\log x$

itérée p fois, si $\frac{1}{u_n}$ est égal à $n \log n \log_2 n \ldots \log_{p-1} n (\log_p n)^{1+\alpha}$, la série u_n converge si, pour n infini, α a sa plus petite limite positive et diverge si α a sa plus grande limite négative. Si zéro est compris entre les limites extrêmes ou coïncide avec l'une d'elles, on ne peut affirmer, sans autre renseignement sur u_n, ni la convergence ni la divergence de la série.

La formule (1) montre que la somme S_n de la série $u_n = \frac{1}{n \log n \ldots \log_p n}$ ne diffère de $\log_{p+1} n$ que par un nombre fini. D'une façon générale, considérons une fonction $\varphi(n)$ croissant indéfiniment et telle que sa dérivée varie toujours dans le même sens, à partir d'une certaine valeur de n. Si $\varphi(n)$ ne reste pas plus grand que An, A étant un nombre positif fixe, aussi petit qu'on voudra, il ne sera pas possible que $\varphi'(n)$ reste supérieur à A quelque petit que soit A. Donc $\varphi'(n)$ qui varie toujours dans le même sens tend vers zéro. Posons $u_n = \varphi'(n)$. La somme S_n de cette série est

$$\varphi_n + \alpha_n,$$

α_n restant fini, ce qui montre que la série diverge et que, à un nombre fini près, $S_n = \varphi(n)$.

Pour avoir des termes généraux u_n de séries divergentes, mais aussi lentement divergentes qu'on veut, il suffira de prendre $u_n = \varphi'(n)$, $\varphi(n)$ étant une fonction croissant indéfiniment mais aussi lentement qu'on veut et dont la dérivée décroît sans cesse. Il apparaît maintenant d'une façon bien évidente qu'il est impossible de donner une suite de fonctions dépendant uniquement d'un indice entier : $\psi_1(n), \psi_2(n), \ldots, \psi_p(n), \ldots$ satisfaisant aux conditions suivantes : 1° toute fonction ψ_p de la suite est le terme général d'une série divergente; 2° le terme général d'une série divergente quelconque est infiniment grand par rapport à l'une au moins des fonctions $\psi_p(n)$.

En effet

$$\int_1^n \psi_1 \, dn = \varphi_1(n), \qquad \ldots, \qquad \int_1^n \psi_p \, dn = \varphi_p(n), \qquad \ldots$$

sont des fonctions croissantes. Il est donc possible de trouver une fonction φ croissant indéfiniment et infiniment petite par

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

rapport à chacune des précédentes [1]. Je peux supposer que la dérivée de φ ne croisse jamais. La série $\sum_1^n \varphi'(n)$ qui sera divergente ne sera certainement pas telle que $\frac{\varphi'(n)}{\psi_p(n)}$ soit limitée inférieurement par un nombre positif fixe pour une valeur assez grande de p, puisque $\varphi(n)$ est infiniment petit par rapport à $\int_1^n \psi_p(n)\,dn$.

Sous une autre forme, soient $\sum \psi_1(n), \ldots, \sum \psi_p(n), \ldots$ une suite de séries chacune divergente, dont le terme général ne croît jamais pour chacune d'elles et telles que $\frac{\psi_{p+1}(n)}{\psi_p(n)}$ tend vers o avec $\frac{1}{n}$ quel que soit p supposé fixe. Je dis qu'il est possible de définir un terme général $\varphi(n)$ tel que $\frac{\varphi}{\psi_p}$ tend vers zéro quel que soit p, et tel que $\sum \varphi(n)$ diverge.

Soit n_h la valeur de n, telle que, pour

$$n \geqq n_h, \qquad \psi_{h+1}(n) < \psi_i(n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, h).$$

Cette valeur existe, puisque la limite des h quotients $\frac{\psi_{h+1}}{\psi_i}$ est zéro, pour n infini.

Cela étant, pour $n < n_1$, je pose

$$\varphi(n) = \psi_1(n),$$

et, si $\sum_1^{n_1 - 1} \psi_1(n) < 1$, je continue à prendre

$$\varphi(n) = \psi_1(n)$$

jusqu'à ce que $\sum \psi_1(n)$ surpasse 1, d'une quantité quelconque d'ailleurs. J'appelle $\nu_1 - 1$ la valeur de n où je m'arrête. Si $\sum_1^{n_1 - 1} \psi_1 > 1$, je prends

$$\nu_1 = n_1.$$

[1] Les considérations de ce genre sont essentiellement dues à Paul du Bois-Reymond. Quelques précisions ont été ajoutées aux résultats fondamentaux de Paul du Bois-Reymond par M. Pringsheim et par M. Hadamard (*voir* l'article de M. Pringsheim dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Pour $\nu_1 \leqq n$, je pose

$$\varphi = \psi_2,$$

jusqu'à $n = \nu_2 - 1$, ν_2 étant tel que $\sum_{\nu_1}^{\nu_2 - 1} \psi_2(n)$ surpasse 1, ce qui est possible puisque ψ_2 diverge, et tel que $\nu_2 \geqq n_2$.

Ainsi de suite, ν_p étant défini et étant supérieur à n_p, je définis ν_{p+1} par les conditions $\nu_{p+1} \geqq n_{p+1}$ et $\sum_{\nu_p}^{\nu_{p+1}-1} \psi_{p+1}(n) > 1$, ce qui est possible puisque ψ_{p+1} diverge. Pour $\nu_p \leqq n < \nu_{p+1}$, je pose

$$\varphi(n) = \psi_{p+1}(n).$$

La série $\varphi(n)$ est divergente, car $\sum_1^{\nu_p} > p$. D'ailleurs d'après $\nu_p \geqq n_p$, entre ν_p et ν_{p+1}, ses termes sont inférieurs à ceux de même rang des séries $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$. Donc, quel que soit p, pour $n \geqq \nu_p$, $\psi_p > \varphi(n)$. Donc, $\frac{\varphi}{\psi_p}$ tend vers zéro quel que soit p.

Cas de la convergence. — Soient $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p, \ldots$ des termes généraux de séries convergentes, sur lesquelles on suppose que $\frac{\psi_{p+1}}{\psi_p}$ soit infiniment grand avec n, p étant fixe. Je veux construire une série $\varphi(n)$ convergente avec $\lim \frac{\varphi}{\psi_p} = \infty$, quel que soit p. Je définis n_h par la condition

$$R_i(n_h) = \sum_{n_h+1}^{\infty} \psi_i(n) < \frac{1}{h^3},$$

pour $i = 1, 2, \ldots, h$. h étant choisi, n_h existe puisque, pour chacune des h séries $\psi_i(n)$, $R_i(n)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Pour $n_h < n \leqq n_{h+1}$, je prends $\varphi(n)$ égal au plus grand des nombres $\psi_1(n), \ldots, \psi_h(n)$. $\sum_{n_h+1}^{n_{h+1}} \varphi(n)$ est inférieur à

$$\sum_{n_h+1}^{n_{h+1}} [\psi_1(n) + \psi_2(n) + \ldots + \psi_h(n)],$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et d'après $\sum_{n_h+1}^{n_{h+1}} < R(n_h) < \frac{1}{h^3}$ la somme en question est inférieure à $\frac{1}{h^2}$. Donc, la nouvelle série est convergente et elle a ses termes supérieurs ou égaux à ceux de $\psi_p(n)$ pour $n > n_p$.

Ici, l'hypothèse de la décroissance infinie du rapport des termes de deux séries ψ a peu d'importance.

Les formules d'approximation de la fonction Γ. — Avant d'entreprendre l'étude de la croissance des produits infinis fonctions d'une variable, il nous sera utile d'établir les propriétés fondamentales de la fonction Γ. Nous les déduirons très simplement des théories précédentes. Considérons la série harmonique $u_n = \frac{1}{n}$ et soit

$$\varphi(n) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

On a

$$\int_1^n \frac{dn}{n} + \frac{1}{n} < \varphi(n) < \int_1^n \frac{dn}{n} + 1$$

ou

$$\frac{1}{n} < \varphi(n) - \mathrm{L}n < 1.$$

Posons $\varphi(n) - \mathrm{L}n = f(n)$ et proposons-nous d'étudier la fonction $f(n)$.

Nous allons tout d'abord montrer qu'elle tend vers une limite quand n croît indéfiniment.

Il nous suffira pour cela de rechercher si la série

$$v_n = f(n) - f(n-1)$$

est convergente, car

$$f(n) = 1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n;$$

or

$$v_n = \frac{1}{n} + \mathrm{L}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et, d'après la formule de Taylor [1],

$$L(1-\alpha) = -\alpha - \frac{\alpha^2}{2(1-\theta\alpha)^2} \qquad \text{si} \qquad \alpha < 1.$$

Donc

$$L\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2(n-\theta)^2}$$

pour $n \geqq 2$. Donc

$$v_n = -\frac{1}{2(n-\theta)^2}.$$

La série v_n est convergente, puisque $n^2|v_n|$ tend vers $+\frac{1}{2}$ et que la série $\frac{1}{n^2}$ est convergente.

Donc, $f(n)$ tend vers une limite C. Le nombre C a reçu le nom de *constante d'Euler.*

On a

$$C = 1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = 1 - \frac{1}{2}\sum_2^\infty \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3}\sum_2^\infty \frac{1}{n^3} - \ldots - \frac{1}{p}\sum_2^\infty \frac{1}{n^p} - \ldots.$$

Considérons l'égalité

$$\varphi(n) = Ln + C + [f(n) - C].$$

Posons

$$R_n = f(n) - C.$$

R_n tend vers zéro. Cherchons son ordre infinitésimal.

On a

$$R_n = \sum_{n+1}^\infty (-v_n) = \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{2(n-\theta)^2}.$$

Or

$$\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{n^2} < \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{(n-\theta)^2} < \sum_{n}^\infty \frac{1}{n^2};$$

donc

$$\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{(n-\theta)^2} = \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{n^2} + \frac{\theta}{n^2}.$$

---

[1] Dans les calculs suivants la signification de la notation θ sera traduite par les mots « un certain nombre compris entre 0 et 1 ». En conséquence. θ dans une même expression pourra représenter deux nombres différents, mais compris dans ces limites. Le calcul des nombres θ sera régi par des égalités telles que $\theta + \theta = 2\theta$, $\theta - \theta = \pm\theta$, $\theta \times \theta = \theta$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Or

$$\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\int_n^{\infty}\frac{dn}{n^2}-\frac{\theta}{n^2}=\frac{1}{n}-\frac{\theta}{n^2};$$

donc

$$R_n=\frac{1}{2n}\pm\frac{\theta}{2n^2};$$

donc nR_n tend vers une limite, qui est $\frac{1}{2}$. On montre d'une façon analogue que, si l'on écrit

$$\varphi(n)=Ln+C+\frac{1}{2n}+\frac{B_2}{n^2},$$

B_2 tend vers une limite. En effet, posons

$$\psi(n)=\varphi(n)-Ln-C-\frac{1}{2n}.$$

On

$$\frac{B_2}{n^2}=[\psi(n)-\psi(n+1)]+\ldots+[\psi(n+h)-\psi(n+h+1)]+\ldots.$$

Or

$$\psi(m-1)-\psi(m)=-\frac{1}{m}-L\left(1-\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)$$

et, d'après la formule de Taylor arrêtée à un rang convenablement choisi,

$$L\left(1-\frac{1}{m}\right)=-\frac{1}{m}-\frac{1}{2m^2}-\frac{1}{3(m-\theta)^3},$$

$$\frac{1}{m-1}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m-\theta)^3};$$

d'où

$$\psi(m-1)-\psi(m)=\frac{1}{3(m-\theta)^3}-\frac{1}{2(m-\theta)^3}.$$

On en déduit comme ci-dessus que

$$\frac{B_2}{n^2}=\sum_{n+1}^{\infty}[\psi(m-1)-\psi(m)]=-\frac{1}{12n^2}+\frac{h}{n^3},$$

h restant fini quand n croît indéfiniment. Donc B_2 tend vers $-\frac{1}{12}$.

La méthode précédente permet, par une généralisation immé-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

diate, de démontrer le fait suivant. Il existe une suite de nombres $A_1, A_2, \ldots, A_p, \ldots$ tels que, si l'on pose

$$\varphi(n) = Ln + C + \frac{A_1}{n} + \frac{A_2}{n^2} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{B_p}{n^p},$$

B_p tend vers A_p, quand, p restant fixe, n croît indéfiniment. Pour le montrer, il suffit encore de poser

$$\psi_p(n) = \varphi(n) - Ln - C - \ldots - \frac{A_{p-1}}{n^{p-1}}.$$

On a

$$\frac{B_p}{n^p} = \sum_{n+1}^{\infty} [\psi_p(m-1) - \psi_p(m)].$$

En calculant par la formule de Taylor arrêtée au terme en $\frac{1}{m^{p+1}}$ chacun des termes dont se compose la différence

$$u_m = \psi_p(m-1) - \psi_p(m),$$

on constate que la somme de la série $\sum_{n+1}^{\infty} u_m$ est bien d'ordre égal à celui de $\frac{1}{n^p}$. On trouve que les nombres $A_1, A_2, \ldots A_p, \ldots$ se déterminent de proche en proche par les équations

$$A_1 - \frac{1}{2} = 0, \qquad A_1 + 2A_2 - \frac{1}{3} = 0, \qquad \ldots,$$

$$A_1 + C_{p-1}^1 A_2 + \ldots + C_{p-1}^{h-1} A_h + \ldots + C_{p-1}^{p-2} A_{p-1} - \frac{1}{p} = 0,$$

les C étant les coefficients binomiaux.

Ce serait cependant une erreur de croire que la série de terme général $u_p = \frac{A_{p-1}}{n^{p-1}}$ est convergente. Elle diverge quel que soit n, mais possède cette propriété que si on la limite à ses p premiers termes, quel que soit l'entier fixe p, l'expression conservée représente sa pseudo-somme, $\varphi(n) - Ln$, à un infiniment petit près de l'ordre de $\frac{1}{n^{p+1}}$. On donne à une telle série le nom de *développement asymptotique* (1).

(1) Voir *Leçons sur les séries divergentes*, Chapitre I.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

L'expression asymptotique

$$\varphi(n) = \mathrm{L}n + \mathrm{C} + \frac{1}{2n} + \frac{\mathrm{A}}{n^2}$$

(A fini) nous était indispensable pour obtenir une formule d'approximation de la fonction Γ dont l'intérêt a été originairement de réaliser l'interpolation des factorielles, ou produits de la forme $2.3\ldots n$, où n est un entier positif. C'est tout d'abord de ces factorielles que nous allons chercher une formule d'approximation, formule d'une grande utilité dans de nombreuses questions, en particulier dans l'analyse combinatoire des grands nombres.

On a

$$\mathrm{L}n! = \mathrm{L}1 + \mathrm{L}2 + \ldots + \mathrm{L}n.$$

Cette somme est comprise entre $\int_1^n \mathrm{L}n\,dn$ et $\int_1^n \mathrm{L}n\,dn + \mathrm{L}n$. On a

$$\int_1^n \mathrm{L}n\,dn = n(\mathrm{L}n - 1).$$

Posons

$$\mathrm{L}n! - n(\mathrm{L}n - 1) = \theta(n).$$

$\theta(n)$ est compris entre o et $\mathrm{L}n$.

Cherchons une valeur plus approchée de $\theta(n)$. On a

$$\begin{aligned}\theta(n-1) &= \mathrm{L}(n-1)! - (n-1)\,\mathrm{L}(n-1) + (n-1)\\ &= \mathrm{L}(n-1)! - n\mathrm{L}n + \mathrm{L}n - (n-1)\mathrm{L}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (n-1)\\ &= \theta(n) - 1 - (n-1)\,\mathrm{L}\left(1 - \frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\theta(n) - \theta(n-1) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{n-1}{3(n-\theta)^3};$$

donc

$$\theta(n) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \Sigma_n,$$

Σ_n étant la somme des n premiers termes d'une série convergente. La différence $\theta(n) - \frac{1}{2}\mathrm{L}n$ tend donc vers une limite A.

En réunissant tous les résultats trouvés et en complétant

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

l'approximation comme on l'a fait pour $\varphi(n)$, on aurait

$$\mathrm{L}\,n! = n(\mathrm{L}\,n - 1) + \frac{1}{2}\mathrm{L}\,n + \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{n} + \frac{\mathrm{B}'}{n^2},$$

ou enfin

$$n! = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} e^{\mathrm{A}}\left(1 + \frac{\mathrm{B}}{n} + \frac{\mathrm{B}''}{n^2}\right);$$

A et B sont des constantes, B′ et B″ tendent chacun vers une limite. Nous obtiendrons ultérieurement par l'étude de la fonction Γ la valeur de la constante e^{A} qui est égale à $\sqrt{2\pi}$. Mais on pourrait la calculer par voie élémentaire en utilisant les formules qui contiennent des factorielles, par exemple la formule de Wallis.

Euler a donné de la fonction Γ la définition suivante :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx.$$

Cette intégrale est convergente, relativement à sa limite supérieure quel que soit a, et, relativement à sa limite inférieure, si a est positif (si a est un nombre complexe, il suffit que a ait sa partie réelle positive).

Nous utiliserons cette définition pour démontrer l'une des propriétés fondamentales de la fonction Γ.

On a

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}x^a) = a\,e^{-x}x^{a-1} - e^{-x}x^a.$$

En intégrant entre les limites 0 et ∞, il vient

$$0 = a\,\Gamma(a) - \Gamma(a+1)$$

ou

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a).$$

Cette égalité nous donne les valeurs de Γ pour les valeurs entières de la variable. On a en effet

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

Donc

$$\Gamma(n+1) = 2.3\ldots n,$$

pour n entier.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Cette formule rattache la fonction Γ aux factorielles et permet d'utiliser pour son calcul la formule d'approximation trouvée plus haut pour n !

Gauss a envisagé cette fonction comme la limite d'un produit infini. Le procédé d'interpolation utilisé par Gauss se généralise aisément :

Soit une expression de la forme

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(x)=S(x),$$

x étant un nombre entier. Supposons que la fonction $\varphi(x)$ soit définie pour toutes les valeurs de x. On a

$$\begin{aligned} S(x) &= \varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n+x)-\varphi(x+1)-\ldots-\varphi(x+n) \\ &= \varphi(1)-\varphi(x+1)+\ldots+\varphi(n)-\varphi(x+n) \\ &\qquad\qquad +\varphi(n+1)+\varphi(n+2)+\ldots+\varphi(n+x), \end{aligned}$$

quel que soit n. Supposons qu'on sache trouver une expression asymptotique pour $n=\infty$ de la somme composée de x termes

$$\varphi(n,x)=\varphi(n+1)+\varphi(n+2)+\ldots+\varphi(n+x)$$

et soit $\chi(n,x)$ cette expression qui ne diffère de $\varphi(n,x)$ que par une quantité tendant vers zéro. Si $\chi(n,x)$ est une fonction définie pour toutes les valeurs de x, nous avons, en posant

$$\Sigma_n(x)=\sum_1^n[\varphi(h)-\varphi(x+h)],$$

$$S(x)=\lim_{n=\infty}\Big[\Sigma_n(x)+\chi(n,x)\Big],$$

pour toutes les valeurs entières de x. Mais, d'après les hypothèses faites, Σ_n et χ sont des fonctions définies pour toute valeur de x. Le second membre qui converge pour toute valeur entière et positive de x définit, dans tout son domaine de convergence, une fonction de x qui se trouve réaliser l'interpolation de la fonction S (x) donnée pour x entier.

Les hypothèses que nous avons successivement introduites dans cet exposé se trouvent probablement vérifiées dans tous les cas usuels.

S'il s'agit d'interpoler un produit $\chi(1)\chi(2)\ldots\chi(x)$, il suffit

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

de poser

$$\varphi(x) = \log \chi(x),$$

pour se placer dans le cas précédent.

Désignons provisoirement par $\Gamma_1(x)$ la fonction de Gauss.

Nous montrerons ultérieurement l'identité de $\Gamma(x)$ et de $\Gamma_1(x)$. On a, *pour x entier*,

$$\Gamma_1(x) = 2.3\ldots(x-1);$$

d'où

$$\Gamma_1(x) = \frac{1.2.3\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n)}(n+1)(n+2)\ldots(n+x).$$

Or, le rapport $\frac{(n+1)\ldots(n+x)}{n^x}$, x étant un entier déterminé, tend vers 1 quand n croît indéfiniment. Donc

$$\Gamma_1(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1.2.\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n)} n^x.$$

C'est la définition de Gauss.

Je dis que, quelle que soit la valeur fixe donnée à x, le second membre tend vers une limite. En effet

$$n^x = e^{x \mathrm{L}\, n}$$

peut être remplacé, à un facteur près tendant vers 1, par

$$e^{x\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-C\right)};$$

d'où

$$\Gamma_1(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{x}\,\frac{1}{x+1}\cdots\frac{n}{x+n}\, e^{-Cx+\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x}{n}}.$$

D'après la définition de la valeur d'un produit infini, ceci équivaut à écrire

$$\frac{1}{\Gamma_1(x)} = e^{Cx}x\left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-\frac{x}{1}}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\cdots.$$

Je dis que ce produit converge pour toute valeur réelle ou complexe de x. Pour une valeur de x entière négative, la valeur du produit est zéro. Pour toute autre valeur déterminée de x, la série des logarithmes des facteurs, à savoir la série

$$u_n = \log\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n},$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

où je choisis pour $n > |x|$ la détermination de u_n égale à

$$-\frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} - \ldots,$$

est telle que $n^2|u_n|$ tend pour n infini vers la limite $\frac{|x|^2}{2}$, et par suite est convergente.

Le produit infini converge donc pour toute valeur de x. Je dis qu'il est uniformément convergent dans toute aire finie.

Prouvons d'abord qu'étant donné un contour déterminé C, si ε est un nombre positif arbitrairement petit, il est possible de déterminer n_1 tel que le produit des facteurs qui suivent le $n_1^{\text{ième}}$ soit égal à e^{α}, avec $|\alpha| < \varepsilon$ dans toute l'aire limitée par C.

En effet, soit R le rayon d'un cercle ayant pour centre l'origine et contenant à son intérieur C. Soit n_0 un entier supérieur à 2R. Envisageons le produit formé par les termes de rang supérieur à n_0. Il est possible de déterminer un nombre n'_0 tel que, pour $n > n'_0$, $n^2|u_n| < R^2$, puisque $n^2|u_n|$ tend vers $\frac{|x|^2}{2}$. Or, la série $\frac{1}{n^2}$ étant convergente, je peux déterminer $n_1 > n'_0$ tel que, pour $n \geqq n_1$,

$$\sum_n^\infty \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{R^2}.$$

Avec cette même hypothèse $n \geqq n_1$,

$$\sum_n^\infty |u_n| < \varepsilon \qquad \text{et finalement} \qquad \prod_n^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} = e^{\alpha}$$

avec

$$|\alpha| < \varepsilon,$$

dans tout le cercle de rayon R.

Cela étant, si l'on suppose ε inférieur à L 2, d'après

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \prod_1^n \prod_{n+1}^\infty,$$

on a

$$\left|\frac{1}{2}\prod_1^n\right| < \left|\frac{1}{\Gamma(x)}\right| < 2\left|\prod_1^{n'}\right| \qquad \binom{n}{n'} \geqq n_1 .$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Le troisième membre, n' étant fixe, est le produit d'un polynome par une exponentielle, donc une fonction continue qui possède un maximum $\frac{M}{4}$ sur le cercle de rayon R.

Donc, $\left|\frac{1}{\Gamma(x)}\right| < \frac{M}{2}$ et $\prod_1^n < M$, pour $n > n_1$.

Donc, pour n supérieur à n_1,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} - \prod_1^n = \prod_1^n \left(\prod_{n+1}^{\infty} - 1 \right) = \prod_1^n (e^{\alpha} - 1)$$

est inférieur en module à $M(e^{\varepsilon} - 1)$ qui est un nombre arbitrairement petit.

Donc, la suite de fonctions $\prod_1^n$ converge *uniformément* vers $\frac{1}{\Gamma(x)}$ dans toute aire finie.

Donc, $\frac{1}{\Gamma(x)}$ est partout holomorphe. C'est une fonction entière.

Nous allons montrer l'identité des deux fonctions $\Gamma(a)$ et $\Gamma_1(a)$ pour a réel et positif. Si l'on admet que la fonction d'Euler en tous les points où elle est définie est le prolongement analytique des valeurs qu'elle prend sur le demi-axe réel et positif, il en résultera l'identité dans tout leur domaine commun d'existence des deux fonctions Γ et Γ_1.

On a

$$\int_0^1 x^{a-1}\, dx = \frac{1}{a}.$$

Remplaçons a par $a+1$ et retranchons membre à membre. Il vient

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)\, dx = \frac{1}{a(a+1)}.$$

Remplaçons a par $a+1$ et retranchons membre à membre,

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^2\, dx = \frac{2}{a(a+1)(a+2)}.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

On montrerait par voie de récurrence la validité de la relation

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^n\,dx = \frac{2.3\ldots n}{a(a+1)\ldots(a+n)}.$$

La définition de Gauss équivaut donc à la suivante :

$$\Gamma_1(a) = \lim_{n=\infty} n^a \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^n\,dx.$$

Faisons $x = \frac{y}{n}$.

$$\Gamma_1(a) = \lim_{n=\infty} \int_0^n y^{a-1}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n dy.$$

Je dis que l'intégrale qui figure au second membre tend vers $\int_0^\infty e^{-y} y^{a-1}\,dy$.

En effet, donnons à a une valeur déterminée que nous laisserons fixe. Soit ε un nombre positif arbitrairement petit et fixe. Puisque l'intégrale $\int_0^\infty y^{a-1}e^{-y}\,dy$ a un sens, je peux trouver un nombre A tel que

$$\int_A^\infty y^{a-1}e^{-y}\,dy < \varepsilon.$$

N'envisageons que les valeurs de n supérieures à A. On a

$$\int_0^n y^{a-1}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n dy = \int_0^A + \int_A^n.$$

Or, puisque y reste dans son intervalle de variation inférieur à n on a, d'après $\log(1-\alpha) = \frac{-\alpha}{1-\theta\alpha}$, si $\alpha < 1$,

$$\left(1-\frac{y}{n}\right)^n = e^{n\log\left(1-\frac{y}{n}\right)} = e^{-\frac{y}{1-\theta\frac{y}{n}}} = e^{-y-\frac{\theta y^2}{n-\theta y}}.$$

Donc

$$e^{-\frac{y^2}{n-y}} < e^y\left(1-\frac{y}{n}\right)^n < 1.$$

Le premier membre décroît quand y croît, en restant inférieur à n. Donc, si $y \leq A$, le premier membre est supérieur ou égal

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

à $e^{-\frac{A^2}{n-A}}$. Donc, le rapport de $\int_0^A y^{a-1}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n dy$ à $\int_0^A y^{a-1}e^{-y}dy$ est compris entre $e^{-\frac{A^2}{n-A}}$ et 1. Quand n croît indéfiniment, A étant laissé fixe, ce rapport tend vers 1. Donc, la première de ces deux intégrales tend vers la seconde et il est possible de déterminer un nombre n_1 tel que, pour $n > n_1$,

$$0 < \int_0^A y^{a-1}e^{-y}\,dy - \int_0^A y^{a-1}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n dy < \varepsilon.$$

D'ailleurs, d'après $\left(1-\frac{y}{n}\right)^n < e^{-y}$,

$$\int_A^n y^{a-1}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n dy < \int_A^n y^{a-1}e^{-y}\,dy < \int_A^\infty y^{a-1}e^{-y}\,dy < \varepsilon.$$

Donc

$$0 < \int_A^\infty y^{a-1}e^{-y}\,dy - \int_A^n y^{a-1}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n dy < \varepsilon$$

et, par suite, pour toutes les valeurs de n surpassant n_1,

$$0 < \int_0^\infty y^{a-1}e^{-y}\,dy - \int_0^n y^{a-1}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n dy < 2\varepsilon.$$

Le nombre ε ayant été choisi arbitrairement petit, ceci exprime que

$$\int_0^\infty y^{a-1}e^{-y}\,dy = \lim_{n=\infty}\int_0^n y^{a-1}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n dy$$

ou

$$\Gamma(a) = \Gamma_1(a),$$

pour toutes les valeurs réelles et positives de a.

La définition de Gauss va nous permettre de démontrer la seconde propriété fondamentale de la fonction Γ. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} &= \frac{1}{-a\,\Gamma(a)\Gamma(-a)}\\ &= e^{Ca}a\prod_1^\infty\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}}\times e^{-Ca}\prod_1^\infty\left(1-\frac{a}{n}\right)e^{+\frac{a}{n}}\\ &= a\prod_1^\infty\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right).\end{aligned}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Donc

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

En particulier

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Du développement donné par Gauss de la fonction Γ, on peut en déduire d'autres importants.

Tout d'abord, si nous développons en série de Maclaurin le logarithme de chacun des facteurs du produit $\frac{1}{\Gamma(x)}$, le développement est valable pour toute valeur de x telle que $|x| < 1$. On a

$$\log\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} = -\frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} - \ldots + (-1)^{p-1}\frac{x^p}{pn^p} + \ldots = u_n.$$

$\log\frac{1}{\Gamma(x)} - \log x$ est une fonction de x holomorphe autour de l'origine dans le cercle de rayon 1. Cherchons son développement en série de Maclaurin. Je dis que la série double $\sum_1^\infty u_n$ est absolument convergente, pour $|x| < 1$. Posons $|x| = r$, et remplaçons dans la série double chaque terme par son module. Il nous suffira de trouver un ordre particulier de sommation tel que la série des modules soit convergente. Cette série est

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=2}^{\infty}\frac{r^p}{pn^p}.$$

Sommons-la dans l'ordre indiqué par les indices des signes $\sum$. On a

$$\sum_{p=2}^{\infty}\frac{r^p}{pn^p} = -\log\left(1-\frac{r}{n}\right) - \frac{r}{n}.$$

Or, la série

$$\sum_1^{\infty}\left[\frac{r}{n} + \log\left(1-\frac{r}{n}\right)\right],$$

où $r < 1$, est convergente et égale à $-\log\frac{-1}{r\Gamma(-r)} - Cr$. La série double $\sum u_n$ étant absolument convergente, on peut effectuer sa sommation en choisissant un ordre arbitraire pour les termes. On a donc

$$\log\frac{1}{\Gamma(x)} = \log x + Cx - \frac{x^2}{2}\sum_1 \frac{1}{n^2} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{x^p}{p}\sum_1 \frac{1}{n^p} + \ldots.$$

Je dis qu'on a

$$(1) \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C - \frac{1}{x} + \sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right)$$

et

$$(2) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_1^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2}.$$

La série qui figure au second membre de (2) est absolument convergente, puisque le rapport de son terme général à $\frac{1}{n^2}$ tend vers $+1$. La valeur de ce rapport montre qu'elle est uniformément convergente dans tout domaine ne contenant pas de point réel entier négatif. Il en résulte que le second membre de (1), qui se déduit de la série (2) en intégrant terme à terme, est aussi une série uniformément convergente dans le même domaine et que le second membre de (2) est sa dérivée. Le second membre de (1), étant une série uniformément convergente dans le domaine énoncé, y représente la dérivée de

$$\log\Gamma(x) = -Cx + \log\frac{1}{x} - \sum_1^{\infty}\log\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

Les égalités (1) et (2) sont donc bien exactes.

L'égalité (1) montre que

$$\Gamma'(1) = -C.$$

Nous allons maintenant établir la formule d'approximation de $\Gamma(a)$ quand a est un grand nombre positif. Posons

$$\log\Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a + \varphi(a).$$

Nous savons que $\varphi(a)$, quand a croît par valeurs entières, tend vers une limite. Nous allons montrer que, si a tend vers $+\infty$ d'une façon arbitraire, $\varphi(a)$ tend vers cette même limite.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

En effet, soit $a = p + 1 - \alpha$, α étant un nombre positif inférieur à 1.

Formons $\varphi(a)$. On a d'abord

$$\log\Gamma(p+1-\alpha) = \log\Gamma(p-\alpha) + \log(p-\alpha)$$
$$= -C(p-\alpha) - \sum_1^\infty \left[\log\left(1+\frac{p-\alpha}{n}\right) - \frac{p-\alpha}{n}\right].$$

Or

$$\log\left(1+\frac{p-\alpha}{n}\right) = \log\left(1+\frac{p}{n}\right) + \log\left(1-\frac{\alpha}{n+p}\right)$$

et

$$\log\left(1-\frac{\alpha}{n+p}\right) = -\frac{\alpha}{n+p} - \frac{\alpha^2}{2(n+p-\theta)^2}$$
$$(\theta < \alpha \text{ et } a\ fortiori\ \theta < 1).$$

Donc

$$\log\Gamma(p+1-\alpha)$$
$$= -Cp + C\alpha - \sum_{n=1}^\infty \left[\log\left(1+\frac{p}{n}\right) - \frac{p}{n} - \frac{\alpha}{n+p} + \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{2(n+p-\theta)^2}\right].$$

En faisant $\alpha = 0$ au second membre, il reste $\log\Gamma(p+1)$; nous pouvons écrire

$$\log\Gamma(p+1-\alpha)$$
$$= \log\Gamma(p+1) + \left[C - \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right)\right]\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+p-\theta)^2}.$$

D'autre part

$$\left(p+\frac{1}{2}-\alpha\right)\log(p+1-\alpha) - p - 1 + \alpha$$
$$= \left(p+\frac{1}{2}-\alpha\right)\left[\log(p+1) - \frac{\alpha}{p+1-\theta}\right] - (p+1) + \alpha.$$

Nous savons que $\varphi(p+1)$ tend vers une limite quand p croît indéfiniment. Il suffit de prouver que, si α varie d'une façon quelconque entre 0 et 1, $\varphi(p+1-\alpha) - \varphi(p+1)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$. Cette différence est

$$\alpha\left[C - \sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right) + \log(p+1) + \frac{p+\frac{1}{2}}{p+1-\theta} - 1\right]$$
$$+ \alpha^2\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+p-\theta)^2} - \frac{1}{p+1-\theta}\right].$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Évaluons

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\right).$$

La somme des n premiers termes de cette série est

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}-\frac{1}{n+1}-\ldots-\frac{1}{n+p}.$$

Quand n croît indéfiniment, cette somme tend vers

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p},$$

qui est par conséquent la somme de la série. Le coefficient de α devient

$$C-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}\right)+\log p+\frac{1}{p-\theta}+\frac{p+\frac{1}{2}}{p+1-\theta}-1,$$

expression qui tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$. Étant donné un nombre positif ε arbitrairement petit, il existe donc un nombre p_1 tel que l'inégalité $p > p_1$ rende le coefficient de α inférieur à ε en valeur absolue.

Le coefficient de α^2 tend aussi vers zéro. Car, d'une part, $\frac{1}{p+1-\theta}$ tend vers zéro et, d'autre part,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+p-\theta)^2}<\sum_{n=p}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

La série $\frac{1}{n^2}$ étant convergente, le second membre de cette inégalité tend vers zéro. Il existe donc un nombre p_2, tel que l'inégalité $p > p_2$ rend le coefficient de α^2 inférieur à ε en valeur absolue. Si p est supérieur au plus grand des deux nombres p_1 et p_2, on a

$$|\varphi(p+1-\alpha)-\varphi(p+1)|<\alpha\varepsilon+\alpha^2\varepsilon<2\varepsilon.$$

La différence $\varphi(p+1-\alpha)-\varphi(p+1)$ tend donc vers zéro avec $\frac{1}{p}$, quelle que soit la façon dont varie α entre 0 et 1, et par suite $\varphi(a)$ tend vers une limite quand a croît indéfiniment.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Calculons cette limite. Posons

$$\frac{\Gamma(a)e^a}{a^{a-\frac{1}{2}}} = \psi(a).$$

On a

$$\psi(a) = e^{\varphi(a)}.$$

Soit

$$\mathrm{A} = \lim \psi(a).$$

$$\frac{\psi(a+1)}{\psi(a)} = \frac{a^{a+\frac{1}{2}} e}{(a+1)^{a+\frac{1}{2}}}.$$

Faisons

$$a = p - \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\psi\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\psi\left(p-\frac{1}{2}\right)} = e\left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)^p.$$

Multiplions membre à membre les diverses égalités obtenues en remplaçant dans celle-ci p par $1, 2, \ldots, p-1$,

$$\psi\left(p+\frac{1}{2}\right) = \psi\left(\frac{1}{2}\right)e^p \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdots \left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)^p = \psi\left(\frac{1}{2}\right)e^p \frac{3.5\ldots(2p-1)}{(2p+1)^p}.$$

Comme

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{A} = \sqrt{\pi} \lim_{p=\infty} \frac{e^{p+\frac{1}{2}}\, 3.5\ldots(2p-1)}{(2p+1)^p}.$$

Or, on a

$$3.5\ldots(2p-1) = \frac{2p!}{2^p p!} = \frac{(2p)^{2p+\frac{1}{2}} e^{-2p} \mathrm{A}(1-\alpha_p)}{2^p p^{p+\frac{1}{2}} e^{-p} \mathrm{A}(1+\alpha'_p)} = 2^{p+\frac{1}{2}} p^p e^{-p}(1+\alpha''_p)$$

avec

$$\lim_{p=\infty} \alpha_p, \alpha'_p, \alpha''_p = 0.$$

$$(2p+1)^p = 2^p p^p \left(1+\frac{1}{2p}\right)^p = 2^p p^p e^{\frac{1}{2}}(1+\beta_p) \qquad (\lim \beta_p = 0).$$

Donc

$$\mathrm{A} = \sqrt{\pi} \lim_{p=\infty} \frac{e^{p+\frac{1}{2}}\, 2^{p+\frac{1}{2}} p^p e^{-p}}{2^p p^p e^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi};$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

donc

$$\lim \varphi(a) = \log \sqrt{2\pi},$$

Voici une autre méthode classique permettant d'obtenir $\varphi(a)$. Elle est fondée sur la considération de l'intégrale de Raabe

$$J(a) = \int_a^{a+1} \log \Gamma(x)\, dx$$

et sur la remarque que si $\varphi(a)$ tend vers une limite pour a infini $\int_a^{a+1} \varphi(x)\, dx$ tend vers cette même limite, puisque cette intégrale est égale à $\varphi(a')$, a' étant un nombre compris entre les limites d'intégration a et $a+1$. Calculons $J(a)$. On a

$$J'(a) = \log \Gamma(a+1) - \log \Gamma(a) = \log a.$$

En intégrant,

$$J(a) = a(\log a - 1) + B,$$

B étant une constante dont nous aurons la valeur en donnant à a une valeur particulière. Faisons $a = 0$.

$$B = \int_0^1 \log \Gamma(x)\, dx.$$

Faisons le changement de variable $x = 1 - t$, en rétablissant ensuite à la place de t la variable d'intégration x. Il vient

$$B = \int_0^1 \log \Gamma(1-x)\, dx,$$

d'où

$$2B = \int_0^1 \log[\Gamma(x)\, \Gamma(1-x)]\, dx = \int_0^1 \log \frac{\pi}{\sin \pi x}\, dx.$$

Donc

$$2B = \log \pi - \int_0^1 \log \sin \pi x\, dx.$$

Or

$$\int_0^1 \log \sin \pi x\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \log \sin \pi x\, dx = \int_0^1 \log \sin \pi \frac{x}{2}\, dx$$
$$(x = 1 - t).$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

En changeant dans la dernière x en $1-x$,

$$\int_0^1 \log \sin \pi x \, dx = \int_0^1 \log \cos \pi \frac{x}{2} \, dx$$

d'où

$$2\int_0^1 \log \sin \pi x \, dx = \int_0^1 \log \sin \pi \frac{x}{2} \, dx + \int_0^1 \log \cos \frac{\pi x}{2} \, dx$$
$$= \int_0^1 \log \sin \pi x \, dx - \log 2.$$

Donc,

$$\int_0^1 \log \sin \pi x \, dx = -\log 2;$$

donc,

$$2B = \log 2\pi$$

ou

$$B = \log \sqrt{2\pi}$$

et finalement

$$J(a) = a(\log a - 1) + \log \sqrt{2\pi}.$$

Nous allons maintenant calculer une expression de $J(a)$ au moyen du développement asymptotique de $\log \Gamma(x)$. On a

$$J(a) = \int_a^{a+1} \varphi(x) \, dx + \int_a^{a+1} \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x \, dx - x \, dx,$$

$$J(a) = \int_a^{a+1} \varphi(x) \, dx + \left(\frac{x^2 - x}{2} \log x - \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{2}\right)_a^{a+1}.$$

Dans la partie intégrée au second membre nous remplaçons $\log(a+1)$ par $\log a + \log\left(1 + \frac{1}{a}\right)$. Nous développons ce dernier terme suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{a}$ (la série converge pour $a > 1$) et nous ordonnons le résultat final suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{a}$. Il vient

$$J(a) = \int_a^{a+1} \varphi(x) \, dx + a \log a - a - \frac{1}{12a} + \ldots.$$

Les termes négligés formant une série entière en $\frac{1}{a}$, $\sum_2^\infty \frac{-A_p}{a^p}$.

L'expression obtenue précédemment pour $J(a)$ nous donne

$$(1) \qquad \int_a^{a+1} \varphi(x)\,dx = \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12a} + \sum_2^{\infty} \frac{A_p}{a^p}.$$

Les A_p sont des nombres fixes et la série qui figure au second membre converge pour $a > 1$.

Il résulte de là, comme nous l'avons vu, que

$$\lim \varphi(a) = \log\sqrt{2\pi}.$$

A l'aide de l'égalité (1) nous pouvons déterminer une suite de nombres $C_1, C_2, \ldots, C_p, \ldots$ tels que, si l'on pose

$$\varphi(a) = \log\sqrt{2\pi} + \frac{C_1}{a} + \frac{C_2}{a^2} + \ldots + \frac{C_{p-1}}{a^{p-1}} + \frac{C'_p}{a^p},$$

C'_p tend vers C_p quand a croît indéfiniment, p étant laissé fixe. Mais, comme dans un exemple rencontré plus haut, la série $\sum_1^{\infty} \frac{C_p}{a^p}$ n'est convergente pour aucune valeur de a; cependant, si on la limite à un terme quelconque, mais fixe, la valeur approchée ainsi obtenue pour $\varphi(a) - \log\sqrt{2\pi}$ en diffère d'une quantité qui, lorsque a croît indéfiniment, est infiniment petite par rapport au dernier terme conservé. Cette série est donc de celles que nous avons dénommées *développements asymptotiques.*

Le développement de $\varphi(a)$ permet de calculer avec beaucoup d'exactitude $\Gamma(a)$ pour les grandes valeurs de a, les valeurs entières étant particulièrement intéressantes. La valeur obtenue est d'autant plus approchée que a est plus grand. On a

$$\Gamma(a) = a^{a-\frac{1}{2}} e^{-a} \sqrt{2\pi}\,[1 + \varepsilon(a)] = \left(\frac{a}{e}\right)^a \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,[1 + \varepsilon(a)],$$

$\varepsilon(a)$ étant une quantité infiniment petite avec $\frac{1}{a}$ et qu'on peut déterminer à tout ordre infinitésimal près donné à l'avance. Mais il faut remarquer que si l'erreur relative commise sur $\Gamma(a)$ lorsqu'on se borne à la valeur approchée écrite ci-dessus est infiniment petite et d'ordre aussi petit qu'on voudra

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

l'erreur absolue commise sur $\Gamma(a)$ est infiniment grande avec a; car, si

$$\log \Gamma(a) = \theta(a) + \eta,$$

η étant un infiniment petit d'ordre p déterminé, aussi élevé qu'on le voudra relativement à a, on a

$$\Gamma(a) = e^{\theta(a)} e^{\eta} = e^{\theta(a)} \left(1 + \frac{\eta}{1} + \frac{\eta^2}{2} + \ldots\right).$$

L'erreur absolue commise sur $\Gamma(a)$ est du même ordre que $\eta e^{\theta(a)}$, et, comme $\theta(a) > a$, l'erreur absolue commise est supérieure à $\frac{e^a}{a^p}$. Elle est infiniment grande, quel que soit le nombre supposé fixe de termes pris dans le développement de $\varphi(a)$.

Aussi, au contraire de ce qui avait lieu avec $\log \Gamma(a)$, n'obtenons-nous pas pour $\Gamma(a)$ un développement asymptotique.

La croissance des fonctions entières comparée à celle de leurs zéros. — Les résultats qui précèdent permettent de déterminer l'ordre de grandeur maximum de la fonction entière

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{Cx} x \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}},$$

pour une valeur donnée r du module de x. On a

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

Donc

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)} = \Gamma(x) \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

Si

$$x = n + \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)} = \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{(-1)^n}{\pi}.$$

Donc $\frac{1}{\Gamma(x)}$, pour certaines valeurs négatives de $|x|$, est de l'ordre de grandeur de $|x|^{|x|}$. C'est là un résultat très intéressant si on le rapproche du fait que le produit des deux fonctions en-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

tières $\frac{1}{\Gamma(x)}$ et $\frac{1}{\Gamma(1-x)}$ est de l'ordre de grandeur de $e^{\pi|x|}$, d'après $\sin\pi x = \frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i}$.

Ainsi, le produit $\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}$ a son module maximum (pour $|x|$ constant) de l'ordre de grandeur de $e^{\pi|x|}$, tandis que le produit obtenu en prenant seulement une partie des facteurs, ceux définis par $n > 0$ (ou par $n < 0$), représente une fonction d'un ordre bien supérieur, celui de $|x|^{|x|}$.

La propriété du produit $\sin\pi x$ de pouvoir se décomposer en deux produits croissant chacun plus vite que le premier est tout à fait exceptionnelle pour les produits infinis dans lesquels le facteur de rang n dépend d'une variable t et qui représentent une fonction entière de t.

Ce fait ne se présente pas pour les produits infinis convergents de la forme $f(t) = \prod_1^{\infty}\left[1+\frac{t}{\varphi(n)}\right]$, où $\varphi(n)$ est une fonction *positive* croissante de n. Nous allons étudier ces produits au point de vue de leur croissance relativement à t.

Examinons tout d'abord le produit

$$\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) = \frac{\sin\pi x}{\pi x}.$$

Posons $x = iy$. Il vient

$$\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right) = \frac{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}{2\pi y},$$

ou, si $y^2 = t$,

$$\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{t}{n^2}\right) = \frac{e^{\pi\sqrt{t}} - e^{-\pi\sqrt{t}}}{2\pi\sqrt{t}}.$$

Donc la fonction de t, $\prod_1^{\infty}\left[1+\frac{t}{\varphi(n)}\right]$, où $\varphi(n)$ est d'ordre 2 par rapport à n, est par rapport à t d'ordre $\omega \times \left(\frac{1}{2}\right)$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

D'une façon générale, je dis que, si $\varphi(n) = n^\alpha$ ($\alpha > 1$ pour la convergence), l'ordre de $\log f(t)$ par rapport à t est égal à $\frac{1}{\alpha}$.

En effet, h étant un entier quelconque, déterminons n_h par les conditions

$$n_h^\alpha \leqq h^\alpha t < (n_h + 1)^\alpha \qquad \text{pour } h \geqq 1,$$

et soit $n_0 = 0$. Nous avons, en posant $P_h = \prod_{n_h+1}^{n_{h+1}} \left(1 + \frac{t}{n^\alpha}\right)$,

$$f(t) = \prod_{h=0}^{\infty} P_h.$$

Or, si

$$n_h + 1 \leqq n \leqq n_{h+1},$$

avec $h \neq 0$

$$1 + \frac{t}{(h+1)^\alpha t} \leqq 1 + \frac{t}{n^\alpha} < 1 + \frac{t}{h^\alpha t},$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $n = n_{h+1}$.

P_h contient $n_{h+1} - n_h$ facteurs, c'est-à-dire un nombre qui $\left(\text{d'après } n_h = ht^{\frac{1}{\alpha}} + \theta\right)$ diffère d'une unité au plus de

$$(h+1) t^{\frac{1}{\alpha}} - ht^{\frac{1}{\alpha}} = t^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Donc

$$\left[1 + \frac{1}{(h+1)^\alpha}\right]^{t^{\frac{1}{\alpha}} - 1} < P_h < \left(1 + \frac{1}{h^\alpha}\right)^{t^{\frac{1}{\alpha}} + 1}.$$

Évaluons P_0.

Si $n \leqq n_1$, $n^\alpha \leqq t$; donc

$$\frac{t}{n^\alpha} < 1 + \frac{t}{n^\alpha} \leqq 2\frac{t}{n^\alpha},$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour le dernier facteur. Le nombre de facteurs est à une unité près $t^{\frac{1}{\alpha}}$. Donc

$$\frac{t^{n_1}}{(1.2\ldots n_1)^\alpha} < P_0 < 2^{n_1} \frac{t^{n_1}}{(1.2\ldots n_1)^\alpha}.$$

Évaluons le premier membre. D'après $t^{\frac{1}{\alpha}} = n_1 + \theta$, le numérateur est égal à $(n_1 + \theta)^{\alpha n_1}$, qui a pour valeur, à un facteur

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

près tendant vers 1, $(n_{n_1}^{1} e^{0})^{\alpha}$. Le premier membre est donc égal à $\left(\frac{n_1^{n_1} e^{0}}{n_1 !}\right)^{\alpha}$ ou, d'après les formules d'approximation de la fonction Γ, à $e^{\alpha n_1} \times n_1^{-\frac{\alpha}{2}}$, à un facteur fini près. Donc

$$\mathrm{P}_0 = e^{ht^{\frac{1}{\alpha}}},$$

h étant un nombre dont les limites extrêmes d'indétermination pour $t = \infty$ sont comprises entre α et $\alpha + \log 2$.

D'ailleurs

$$\left[\prod_2^{\infty}\left(1 + \frac{1}{h^{\alpha}}\right)\right]^{t^{\frac{1}{\alpha}}-1} < \prod_1^{\infty} \mathrm{P}_h < \left[\prod_1^{\infty}\left(1 + \frac{1}{h^{\alpha}}\right)\right]^{t^{\frac{1}{\alpha}}+1}.$$

Les produits infinis situés aux membres extrêmes sont $\frac{f(1)}{2}$ et $f(1)$. Donc

$$\prod_1^{\infty} \mathrm{P}_h = e^{kt^{\frac{1}{\alpha}}},$$

k ayant des limites extrêmes pour t infini, certainement comprises entre $\log f(1)$ et $\log f(1) - \log 2$. Donc enfin

$$\log f(t) = (h + k) t^{\frac{1}{\alpha}},$$

le nombre $h + k$ ayant ses limites extrêmes non extérieures à l'intervalle

$$\alpha + \log f(1) - \log 2, \qquad \alpha + \log f(1) + \log 2.$$

Ceci démontre la proposition.

Voici un autre procédé, d'intérêt assez général, permettant d'avoir avec beaucoup plus de précision le développement asymptotique de $\log f(t)$. On a

$$\log f(t) = \sum_1^{\infty} \log\left(1 + \frac{t}{n^{\alpha}}\right).$$

Or, cette somme, comme nous l'avons vu souvent, est égale à

$$\int_1^{\infty} \log\left(1 + \frac{t}{n^{\alpha}}\right) dn + \theta \log(1 + t).$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Nous allons évaluer la première intégrale. Nous remarquons pour cela que

$$\int_0^\infty \log\left(1+\frac{t}{n^\alpha}\right) dn$$

a un sens et que

$$\int_0^1 \log\left(1+\frac{t}{n^\alpha}\right) dn$$

est de l'ordre de grandeur de $\log t$. Car

$$\log\left(1+\frac{t}{n^\alpha}\right) = \log\frac{t}{n^\alpha} + \log\left(1+\frac{n^\alpha}{t}\right).$$

Donc,

$$\int_0^1 \log\left(1+\frac{t}{n^\alpha}\right) dn = \log t - \alpha\int_0^1 \log n\, dn + \int_0^1 \log\left(1+\frac{n^\alpha}{t}\right) dn$$

est dans un rapport fini avec $\log t$, quand t croît indéfiniment. Donc, $\log f(t)$, à un terme de la forme $h \log t$ près, h étant fini, est égal à

$$\int_0^\infty \log\left(1+\frac{t}{n^\alpha}\right) dn.$$

Posons

$$t = n^\alpha u.$$

L'intégrale précédente devient

$$t^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \log(1+u)\, u^{-\frac{1}{\alpha}-1}\, du.$$

L'intégrale définie qui multiplie $t^{\frac{1}{\alpha}}$ a une certaine valeur déterminée $J(\alpha)$. On a donc

$$\log f(t) = J(\alpha)\, t^{\frac{1}{\alpha}} + h \log t,$$

h étant un nombre fini (si $t > 2$).

Notons en passant qu'il est possible de démontrer que la valeur de $\log f(t)$ est donnée par cette formule, dans tout le plan de la variable imaginaire, si l'on néglige dans $f(t)$ le facteur dont le logarithme a sa partie réelle la plus grande en valeur absolue.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

La valeur de $J(\alpha)$ est aisée à obtenir. Intégrons par parties

$$J(\alpha) = -\left[\log(1+u)u^{-\frac{1}{\alpha}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{u^{-\frac{1}{\alpha}}}{1+u}\,du.$$

La partie tout intégrée est nulle, parce que $u^{-\frac{1}{\alpha}}\log u$ tend vers zéro avec $\frac{1}{u}$, et que, $\frac{1}{\alpha}$ étant inférieur à 1, au voisinage de zéro, la fonction entre crochets est comparable à $u^{1-\frac{1}{\alpha}}$ et par suite est infiniment petite. Donc, $J(\alpha)$ se réduit à la partie non intégrée. Posons

$$1 + u = \frac{1}{v};$$

il vient

$$J(\alpha) = \int_0^1 (1-v)^{-\frac{1}{\alpha}} v^{\frac{1}{\alpha}-1}\,dv.$$

Or, on démontre que l'intégrale $\int_0^1 (1-v)^{p-1} v^{q-1}\,dv$ est égale à $\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. En faisant

$$p = -\frac{1}{\alpha} + 1, \qquad q = \frac{1}{\alpha},$$

il vient

$$J(\alpha) = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}.$$

La formule complétée devient [1]

$$\operatorname{Log} f(t) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}} t^{\frac{1}{\alpha}} + h\log t.$$

Si maintenant $\varphi(n)$ reste, pour $n > n_0$, compris entre An^α et Bn^α, A et B étant deux nombres fixes tels que $A < B$, on a, pour $n > n_0$,

$$1 + \frac{\left(\frac{t}{B}\right)}{n^\alpha} < 1 + \frac{t}{\varphi(n)} < 1 + \frac{\left(\frac{t}{A}\right)}{n^\alpha}.$$

---

(1) *Voir* Lindelöf, *Mémoire sur les fonctions entières de genre fini*, p. 49 et suivantes.

Les termes de rang inférieur à n_0 forment un polynome Donc, le rapport $\psi(t) = \dfrac{\log f(t)}{\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}\, t^{\frac{1}{\alpha}}}$ a ses limites extrêmes d'indétermination certainement comprises dans l'intervalle $\dfrac{1}{B^{\frac{1}{\alpha}}}$ à $\dfrac{1}{A^{\frac{1}{\alpha}}}$.

Donc, si $\varphi(n)$ est d'ordre égal à α relativement à n, $\log f(t)$ est d'ordre égal à $\frac{1}{\alpha}$, relativement à t. Si $\dfrac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ tend vers une limite C, les nombres A et B du cas précédent peuvent être pris aussi voisins de C, et de part et d'autre, que l'on veut. Donc $\psi(t)$ tend vers $\dfrac{1}{C^{\frac{1}{\alpha}}}$.

Si le rapport $\dfrac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ a deux limites extrêmes d'indétermination M et m pour n infini, les limites extrêmes d'indétermination du rapport $\psi(t)$, pour t infini, ne peuvent être extérieures à l'intervalle $\dfrac{1}{M^{\frac{1}{\alpha}}}$ à $\dfrac{1}{m^{\frac{1}{\alpha}}}$. La plus grande est d'ailleurs égale à $\dfrac{1}{m^{\frac{1}{\alpha}}}$.

Enfin, si $\varphi(n)$ est d'ordre (α) relativement à n, $\log f(t)$ sera d'ordre $\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ relativement à t. La croissance régulière de $\varphi(n)$ relative aux ordres arithmétiques α (α a été supposé supérieur à *un*), entraîne la croissance régulière de $f(t)$ relativement aux ordres $\omega \times \frac{1}{\alpha}$. Si l'on envisage des zéros non plus tous réels et négatifs, mais d'arguments quelconques, l'énoncé subsiste en considérant $f(t)$ comme le module maximum de la fonction entière sur le cercle concentrique à l'origine de rayon $|t|$.

Ceci a été développé ailleurs ([1]), ainsi que la relation réciproque qui permet de conclure de la régularité de croissance de $f(t)$ relativement aux ordres $\omega \times \frac{1}{\alpha}$ à la régularité de croissance de $\varphi(n)$ relativement aux ordres α. Cette relation subsiste pour toutes les valeurs positives fixes de α, même inférieures à *un*.

([1]) Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, Note II.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

De cette relation réciproque, dont nous avons ici démontré seulement la proposition directe, et encore dans un cas particulier [zéros réels, négatifs, d'ordre (α), $\alpha > 1$], il résulte qu'une fonction dont la croissance n'est pas régulière relativement aux ordres $\omega \times \frac{1}{\alpha}$ a des zéros dont les modules croissent irrégulièrement relativement aux ordres α.

Nous allons donner [1] un exemple d'irrégularité dans la croissance d'une fonction entière entraînant une irrégularité très profonde dans la croissance des zéros. Le développement de la fonction entière sous forme de série de Taylor nous sera pour cette question plus commode que le développement en produit infini.

Prenons comme série type la série e^x. Nous poserons

$$\varphi(n) = \frac{x^n}{n!},$$

de telle manière que la série type se présente sous la forme

$$e^x = \varphi(0) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n) + \varphi(n+1) + \ldots.$$

Nous allons étudier la fonction entière $f(x)$ définie par la série à lacunes :

$$f(x) = \varphi(n_0) + \varphi(n_1) + \ldots + \varphi(n_p) + \varphi(n_{p+1}) + \ldots,$$

dans laquelle $n_0, n_1, \ldots, n_p$ désignent des entiers croissants.

Étudions tout d'abord les variations de $\varphi(n)$ lorsque x varie au voisinage de n. On a

$$\log\varphi(n) = n\log x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n + n + A_n,$$

A_n tendant vers $-\frac{1}{2}\log 2\pi$ lorsque n tend vers l'infini.

Si l'on pose

$$x = n^\alpha,$$

il vient

$$\log\varphi(n) = \left(\alpha n - n - \frac{1}{2}\right)\log n + n + A_n.$$

---

[1] Borel, *Sur quelques fonctions entières* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, avril 1907).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Donc, si α est un nombre fixe inférieur à l'unité, $\varphi(n)$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Si α est supérieur à l'unité, $\log\varphi(n)$ est d'ordre égal à celui de

$$n\log x\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{ou de} \quad x^{\frac{1}{\alpha}}\log x.$$

Ces résultats étant acquis, désignons par α un nombre supérieur à l'unité et supposons qu'on ait, quel que soit p,

$$n_{p+1} > n_p^\alpha.$$

Si nous donnons à x la valeur n_p^β, β étant un nombre fixe compris entre 1 et α, x sera compris entre n_p et n_{p+1}, et il est visible que le terme de plus grand module dans la série $f(x)$ sera le terme $\varphi(n_p)$. De plus, non seulement les modules des autres termes seront inférieurs au module de celui-là, mais ils seront complètement négligeables par rapport à lui. On a, en effet, en posant $x = n_p^\beta$,

$$\begin{aligned}
\log\varphi(n_p) &= n_p \log x - \left(n_p + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\beta}\log x + n_p + A_{n_p},\\
\log\varphi(n_{p+1}) &= \beta\, n_{p+1}\log n_p - \left(n_{p+1}+\frac{1}{2}\right)\log n_{p+1} + n_{p+1} + A_{n_{p+1}},\\
\log\varphi(n_{p-1}) &= n_{p-1}\log x - \left(n_{p-1}+\frac{1}{2}\right)\log n_{p-1} + n_{p-1} + A_{n_{p-1}},
\end{aligned}$$

et comme

$$n_{p+1} > n_p^\alpha \quad \text{et} \quad n_{p-1} < n_p^{\frac{1}{\alpha}}$$

on voit que $\varphi(n_{p+1})$ est très voisin de zéro, tandis que $\varphi(n_p)$ est de l'ordre de $x^{h_p n_p}$ et $\varphi(n_{p-1})$ de l'ordre de $x^{h_{p-1}n_{p-1}}$ (h_p et h_{p-1} finis). Donc, $f(x)$ est égal au produit de $\varphi(n_p)$ par $1+\varepsilon(p)$ (β et α restant fixes), en désignant avec M. Lindelöf par $\varepsilon(p)$ une quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$. On a par suite, en supposant pour un instant x positif et posant

$$f(x) = e^{x^\mu},$$

la relation

$$x^\mu = n_p\log x - \left(n_p+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\beta}\log x + n_p + A_{n_p} + \varepsilon(x);$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

d'où l'on conclut, n_p étant égal à $x^{\frac{1}{\beta}}$,

$$\mu = \frac{1}{\beta} + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro lorsque, α et β restant fixes, n_p augmente indéfiniment.

Supposons maintenant que l'argument de x soit quelconque; on obtiendra de même

$$|f(x)| = e^{|x|^\mu},$$

μ étant toujours égal à $\frac{1}{\beta} + \varepsilon$.

Si donc on fait varier x d'une manière continue de o à l'infini par un chemin quelconque, le module de $f(x)$ pourra être déterminé d'une manière précise pour les valeurs de x comprises entre $n_p^{\beta'}$ et $n_p^{\beta''}$, β' et β'' étant deux nombres quelconques ($\beta' < \beta''$) assujettis à la seule condition d'être positifs et compris entre 1 et α. Si l'on pose

$$\mu' = \frac{1}{\beta'}, \qquad \mu'' = \frac{1}{\beta''};$$

le module de $f(x)$ prend ainsi des valeurs comprises entre $e^{|x|^{\mu'+\varepsilon}}$ et $e^{|x|^{\mu''-\varepsilon}}$. On peut d'ailleurs prendre $\beta' = 1$, d'où $\mu' = 1$, β'' aussi voisin qu'on veut de α, de sorte que μ'' est aussi voisin qu'on veut de $\frac{1}{\alpha} = \lambda$. Dès lors, on voit que $|f(x)|$ est égal tantôt à $e^{|x|}$ et tantôt à $e^{|x|^\lambda}$.

Il n'est pas superflu d'observer que la fonction $f(x)$, pour les valeurs positives de x, est positive *ainsi que toutes ses dérivées;* cette propriété n'est nullement incompatible avec les oscillations que nous venons de mettre en évidence.

Étudions maintenant la distribution des zéros de la fonction entière $f(x)$. Nous utiliserons un théorème bien connu.

Si l'on a, sur un contour C, à l'intérieur duquel $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont holomorphes,

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right| < 1,$$

les deux fonctions $\psi(x)$ et $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

D'après ce qui précède, les deux fonctions

$$\psi(x) = \varphi(n_p), \qquad \varphi(x) = f(x) - \varphi(n_p)$$

vérifient l'hypothèse exigée, le contour C étant le cercle $|x| = n_p^\beta$.

On en conclut que le nombre des zéros de $f(x)$ à l'intérieur du cercle C est égal au nombre de zéros de $\psi(x)$, c'est-à-dire à n_p. Ce résultat est le même, quelle que soit la valeur de β entre β' et β''. On en conclut que la fonction $f(x)$ n'a pas de zéros dans la couronne circulaire comprise entre les cercles C'_p et C''_p,

$$(C'_p) \qquad |x| = n_p^{\beta'},$$
$$(C''_p) \qquad |x| = n_p^{\beta''}.$$

Dans la couronne circulaire comprise entre le cercle C''_p et le cercle C'_{p+1}, la fonction $f(x)$ a $n_{p+1} - n_p$ zéros.

Il est possible de resserrer davantage les couronnes où sont comprises les zéros. Car, si $n_p \leqq x \leqq n_{p+1}$, nous avons

$$f(x) = \varphi(n_p)(1 + \varepsilon_p) + \varphi(n_{p+1}) + \varepsilon'_p,$$

ε_p et ε'_p dépendant de x, mais ayant, quand x varie dans le domaine considéré, des limites supérieures à leurs modules ne dépendant que de p et tendant vers zéro avec $\frac{1}{p}$. Donc, pour un zéro de $f(x)$ compris dans cet intervalle (nous savons qu'il y en a $n_{p+1} - n_p$), le rapport $\left|\frac{\varphi(n_{p+1})}{\varphi(n_p)}\right|$ diffère de 1 d'une quantité infiniment petite avec $\frac{1}{p}$. Si donc r est le module d'un zéro compris entre n_p et n_{p+1}, la différence $\log\varphi(n_{p+1}) - \log\varphi(n_p)$ connue pour $x = r$ est infiniment petite avec $\frac{1}{p}$.

Posons

$$r = n_{p+1}\, e^{-1+\lambda}.$$

Il vient

$$\log\varphi_{n_p} = n_p(\log n_{p+1} + \lambda) - \left(n_p + \frac{1}{2}\right)\log n_p + A_{n_p},$$
$$\log\varphi_{n_{p+1}} = n_{p+1}\lambda - \frac{1}{2}\log n_{p+1} + A_{n_{p+1}}.$$

On a donc, en faisant la différence

$$\log\varphi(n_{p+1}) - \log\varphi(n_p) = \varepsilon''_p$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$\left(\varepsilon''_p \text{ tendant vers zéro avec } \frac{1}{p}\right)$,

$$\lambda(n_{p+1} - n_p) = \psi(p) + \varepsilon''_p,$$

en posant

$$\psi(p) = \left(n_p + \frac{1}{2}\right) \log \frac{n_{p+1}}{n_p} + A_{n_p} - A_{n_{p+1}};$$

d'où

$$\lambda = \frac{\psi(p)}{n_{p+1} - n_p} + \frac{\varepsilon''_p}{n_{p+1} - n_p}.$$

Donc, quel que soit le nombre η positif fixe, il existe un nombre p_0 tel que, pour $p > p_0$, les zéros dont le module est compris entre n_p et n_{p+1}, zéros qui sont en nombre $n_{p+1} - n_p$, sont tous situés dans la couronne limitée par les cercles de rayons

$$n_{p+1}\, e^{-1 + \frac{\psi(p)}{n_{p+1} - n_p}\left(1 \pm \frac{\eta}{n_{p+1} - n_p}\right)}.$$

L'épaisseur de cette couronne est infiniment petite avec $\frac{1}{p}$, puisqu'elle est inférieure pour $p > p_0$, à

$$2\, \frac{n_{p+1}}{n_{p+1} - n_p}\, e^{-1 + \frac{\psi(p)}{n_{p+1} - n_p}} \times \eta,$$

expression qui à partir d'une certaine valeur de p (indépendante de η) est certainement inférieure à η.

On peut aller plus loin. En désignant plus spécialement par $\varphi(n)$ la valeur de $\frac{x^n}{n!}$ pour x réel (et égal à r), par $\varphi(n, x)$ ce même nombre pour x complexe (et plus spécialement égal à un zéro de module r), la somme $\varphi(n_p, x) + \varphi(n_{p+1}, x)$ est au moins égale, en module, à un facteur près tendant vers 1, à $\varphi(n_p, r) \times |\varepsilon''_p|$. Car, avec la même approximation,

$$|\varphi(n_{p+1}, x)| - |\varphi(n_p, x)| = \varphi(n_p, r) \times |\varepsilon''_p|.$$

Comme l'ensemble des termes précédant $\varphi(n_p)$ est

$$\varphi(n_{p-1}) \times (1 + \varepsilon_{p-1}),$$

il faut donc que, à un facteur près tendant vers un,

$$|\varepsilon''_p| \leqq \frac{\varphi(n_{p-1}, r)}{\varphi(n_p)}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Le logarithme du second membre est comparable à

$$-(n_p - n_{p-1}) \log n_{p+1};$$

donc,

$$|\varepsilon''_p| < n_{p+1}^{-\frac{n_p - n_{p-1}}{k}},$$

k étant un nombre tendant vers 1 quand p tend vers l'infini. Par suite la couronne de rang $(p+1)$ peut être prise à partir d'une certaine valeur de p, inférieure à $n_{p+1}^{-n_{p+1}^{\frac{1}{\alpha}-\eta}}$. L'aire totale des couronnes qui suivent la $p^{\text{ième}}$ est un infiniment petit équivalent au plus à $n_{p+1}^{-n_{p+1}^{\frac{1}{\alpha}-\eta}}$. On voit à quel point est lacunaire la disposition des zéros.

MM. Lindelöf (¹) et P. Boutroux (²) ont étudié avec une grande précision la corrélation existant entre l'ordre de grandeur du $n^{\text{ième}}$ zéro et celui du module maximum d'une fonction entière sur le cercle de rayon r. Ces auteurs ont démontré que si l'ordre du module du $n^{\text{ième}}$ zéro d'une fonction entière est régulier à l'égard de n, relativement à l'ordre

$$\frac{1}{\rho} - \frac{\alpha_1}{\rho}\frac{1}{\omega} - \frac{\alpha_2}{\rho}\frac{1}{\omega^2} - \ldots - \frac{\alpha_p}{\rho}\frac{1}{\omega^p},$$

p étant un entier fini, ρ un nombre positif non entier, α_1, α_2, α_3, …, α_p des nombres positifs ou négatifs fixes, l'ordre du module maximum de la fonction entière relativement au module r de la variable est régulier pour l'ordre

$$\omega \times \overline{\rho + \alpha_1 \frac{1}{\omega} + \alpha_2 \frac{1}{\omega^2} + \ldots + \alpha_p \frac{1}{\omega^p}}$$

et réciproquement. Nous avons exposé dans un autre Ouvrage (³) l'inégalité fondamentale qui est l'instrument de recherche utilisé par M. Lindelöf. Un résultat commun aux deux

---

(¹) Lindelöf, *Mémoire sur les fonctions entières de genre fini* (*Acta Societ. sc. fenn.*, t. XXXI, 1902, n° 1).

(²) *Voir* P. Boutroux, *Thèse* (*Acta mathematica*, 1904).

(³) E. Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 52 (même Collection que le présent Ouvrage).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

auteurs est qu'il existe des types de croissance pour les zéros et le module maximum des fonctions entières de genre fini, tels que la connaissance, à un facteur fini près, du $n^{\text{ième}}$ zéro entraîne la connaissance à un facteur fini près du logarithme du module maximum de la fonction entière.

Parmi ces types de croissance figurent particulièrement les fonctions dont nous savons noter identiquement l'ordre. Pour ces types spéciaux, la proposition possède une réciproque.

Mais M. Boutroux a signalé une forme de croissance de r_n entièrement distincte des précédentes et beaucoup plus générale, pour laquelle la propriété subsiste. Cette forme de croissance est définie pour les fonctions de genre p par les conditions que $\frac{n}{r_n^{p+\alpha}}$ et $\frac{r_n^{p+1-\alpha}}{n}$ soient des fonctions croissantes de n, α étant un nombre positif fixe. Ce résultat se déduit des évaluations d'intégrales définies que nous avons exposées d'après le même auteur au troisième Chapitre [1].

---

[1] Pour une étude plus précise de la comparaison entre la croissance des fonctions entières et la croissance de leurs zéros, je renverrai au Livre de M. Blumenthal : *Leçons sur les fonctions entières d'ordre infini*, qui paraît dans la *Collection de monographies* en même temps que ce Livre-ci, et à la Thèse de M. Denjoy : *Sur les produits canoniques d'ordre infini*, qui paraît aussi en même temps à la librairie Gauthier-Villars.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

CHAPITRE V.

APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES.

Le Chapitre actuel aura pour objet d'utiliser la notion de croissance dans la classification des nombres incommensurables. Nous verrons ainsi que les notions de croissance et d'incommensurabilité sont étroitement solidaires

Nous avons déjà signalé le théorème de Paul du Bois-Reymond sur les suites de fonctions croissantes. Il conduit à un paradoxe qu'il est bon de mettre en lumière.

Étant donnée une infinité dénombrable de fonctions croissantes, nous savons, d'après cet auteur, former une nouvelle fonction croissant plus vite que chacune des précédentes. Or, il est évident *a priori* que l'ensemble des fonctions que les mathématiciens ont déjà définies et de celles qu'ils définiront dans la suite est dénombrable. On peut même voir que l'ensemble de toutes les fonctions qu'il est *possible* de définir individuellement est dénombrable, c'est-à-dire que chacune d'elles peut recevoir un numéro d'ordre déterminé. Mais alors, le théorème de Paul du Bois-Reymond nous fournit le moyen de définir une nouvelle fonction plus croissante que toutes celles de cet ensemble, et qui, par suite, ne figure pas dans cet ensemble, ce qui est absurde, puisqu'il contient par hypothèse toutes les fonctions qu'on peut définir.

Mais il suffit de songer au principe de la démonstration par laquelle s'établirait la dénombrabilité de cet ensemble de fonctions, pour s'apercevoir immédiatement que la nouvelle fonction qu'on ajouterait, d'après le théorème rappelé, aurait *une définition dont l'exposé prendrait un temps infiniment grand.* On n'arriverait jamais à bout de la détermination complète de cette fonction.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Nous allons exposer avec plus de détail les idées que nous venons sommairement d'indiquer, quand nous aurons constaté qu'un paradoxe analogue est suggéré par l'analyse des nombres incommensurables (paradoxe de Richard).

Les opérations permettant de définir un nombre incommensurable sont de nature très diverse. Les plus usuelles sont d'abord la résolution des équations algébriques à coefficients entiers. Leurs racines, appelées *nombres algébriques*, sont les plus simples des nombres incommensurables. Puis, la sommation des séries convergentes dont on se donne le $n^{\text{ième}}$ terme de façon qu'il soit calculable avec une précision arbitraire au moyen des nombres déjà connus. Également, l'intégration d'équations différentielles algébriques à coefficients entiers [1].

Les nombres algébriques forment un ensemble dénombrable. Il suffit de remarquer que les équations

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers positifs, négatifs ou nuls, avec $a_0 \geq 1$, $a_n \neq 0$, et où

$$a_0 + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + n = h,$$

h étant un entier donné, sont en nombre fini. En donnant à h successivement toutes les valeurs entières supérieures à 1, on peut imaginer bien aisément des conventions permettant de ranger en suite simple toutes les équations algébriques, et aussi leurs racines. Le rang d'un nombre algébrique dans cette suite pourra être appelé sa *hauteur* et donnera une mesure de sa complexité.

Pour ce qui est des équations différentielles, considérons par exemple l'équation $y' = y$ et l'intégrale particulière qui pour

---

(1) M. Jules Drach a, dans l'*Introduction à l'étude de la Théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure* (Nony, 1895) et dans sa Thèse : *Essai sur l'intégration logique et la classification des transcendantes* (Gauthier-Villars, 1898), particulièrement insisté sur l'importance des définitions de nature algébrique, même dans le domaine transcendant, c'est-à-dire dans l'étude des équations différentielles et aux dérivées partielles. Ses idées ont eu une grande influence sur la formation précise de la théorie que nous exposons ici.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$x = 0$ est égale à 1 : pour $x = 1$, on trouve $y = e$; pour $x = p$, $y = e^p$.

On peut avec des équations différentielles à coefficients entiers définir ainsi de nouveaux nombres incommensurables, qui seront par exemple les valeurs prises par une intégrale correspondant à un système initial (x_0, y_0) entier, pour les valeurs entières de la variable. Pour ranger ces nombres ainsi définis en suite unilinéaire, il suffit de remarquer qu'étant choisi un entier p arbitraire, il n'y a qu'un nombre fini de telles équations où p surpasse la somme de l'ordre, du degré par rapport aux dérivées, à la fonction et à la variable indépendante, des valeurs absolues des coefficients supposés entiers, des valeurs absolues de x_0 et y_0 également entières, de la valeur absolue entière de x, pour laquelle on cherche y. Il en résulte qu'on obtient ainsi un ensemble dénombrable de nombres pour chacun desquels on peut définir une hauteur.

Pour définir des nombres comme sommes de séries, il faudra que le terme général soit une fonction de n, calculable à partir des nombres entiers. On pourra d'abord envisager celles dont le terme général ne contient que des opérations rationnelles en n à coefficients fixes entiers, ce qui permettra de définir une hauteur pour le terme général et par suite pour la somme de la série. Puis, on pourra passer à des termes généraux exprimés au moyen de n par des opérations algébriques portant sur des nombres entiers, ou algébriques, ou transcendants déjà définis, mais appartenant à des classes où le mot *hauteur* aura reçu un sens précis, numérique. La hauteur de ces termes généraux, qui sera aussi par définition celle de la somme de la série, sera, si l'on veut, la somme des hauteurs des nombres sur lesquels portent ces opérations, augmentée d'entiers tels que le degré des opérations algébriques effectuées. On conçoit qu'il sera toujours possible, pour une classe de termes généraux satisfaisant à cette définition, de désigner par hauteur de ce terme général un nombre tel que les termes généraux inférieurs à une hauteur finie soient en nombre fini.

Admettons donc que chaque procédé de définition des nombres incommensurables, au moyen d'entiers, ou de nombres définis par des procédés antérieurs, n'introduise qu'une infinité

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

dénombrable de nouveaux nombres incommensurables. Les procédés successifs possibles sont eux-mêmes en infinité dénombrable. Donc, en tout, l'ensemble des nombres incommensurables qu'on aura défini à partir des entiers sera dénombrable.

Voici où paraît alors s'introduire le paradoxe que nous avons signalé. Les seuls nombres que nous puissions arriver à définir peuvent être rangés en une série unilinéaire, u_1, u_2, ..., u_n, ... Sur le segment $(0, 1)$, où ils forment *a priori* un ensemble dense (puisque tous les nombres rationnels en particulier en font partie), il y en a un possédant un indice plus petit que les autres. Soit u_{n_1} ce nombre. Les autres nombres de la suite compris entre 0 et 1 ont un indice supérieur à n_1. Il y en a une infinité comprise entre u_{n_1} et 1. Soit u_{n_2} celui d'entre eux qui possède le plus petit indice. Soit u_{n_3} le nombre de plus petit indice compris entre u_{n_2} et u_{n_1}, et continuons ainsi indéfiniment. $u_{n_{i+1}}$ est le nombre ayant le plus petit indice, compris entre u_{n_i} et $u_{n_{i-1}}$. On a

$$u_{n_1} < u_{n_3} < \ldots < u_{n_{2p+1}} < \ldots < u_{n_{2p}} < u_{n_{2p-2}} < \ldots < u_{n_4} < u_{n_2}.$$

Les nombres u_{n_i} d'indice i impair tendent vers un nombre α supérieur à chacun d'eux et inférieur à tout nombre d'indice i pair.

D'ailleurs tous les nombres u_n du segment u_{n_1} à 1 ont un indice n supérieur à n_1, donc $n_2 > n_1$. Tous les nombres du segment $u_{n_1}u_{n_2}$ ont un indice supérieur à n_2, etc. Donc α, qui est toujours compris entre u_{n_i} et $u_{n_{i+1}}$, ne peut appartenir à la suite u_n puisque son indice devrait être supérieur à n_i, quel que fût i. Mais nous nous trouvons avoir défini au moyen des u_n, chacun défini à partir du nombre entier, un nombre n'appartenant pas à la suite u_n qui, par hypothèse, contenait tous les *nombres définissables* à partir du nombre entier.

La réponse au paradoxe est aisée. Parmi les nombres u_{n_i}, il y en a dont la définition demande un temps très long, même d'une durée surpassant toute limite donnée d'avance. Comme c'est la suite u_{n_1}, u_{n_2}, ... qui définit α, *cette définition de α exigerait un temps infiniment grand*, ce qui signifie que jamais nous ne parviendrons à obtenir mieux qu'un petit intervalle

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

enserrant α. (Les u_{n_i} d'indice i pair tendent aussi vers α, puisque l'ensemble des u_n est partout dense.)

Insistons un peu sur ce point.

Considérons l'ensemble des phrases qui, toutes réunies, définissent un nombre incommensurable, c'est-à-dire qui fournissent le moyen de le calculer avec telle approximation qu'on voudra. Pour désigner chacun de ces ensembles, se suffisant à lui-même pour le calcul indéfiniment approché du nombre en question, on peut poser une convention telle que la suivante : donner un numéro d'ordre, à partir de 1 en suivant, aux divers signes de ponctuation; puis à partir de 1000, et en suivant, des numéros d'ordre à tous les mots de la langue utilisée, le français par exemple, ces mots étant supposés préalablement rangés dans l'ordre alphabétique, toute flexion (par conjugaison, déclinaison) d'un mot étant considérée comme distincte de ce mot, deux flexions d'un même mot étant aussi considérées comme distinctes entre elles. Admettons que les numéros d'ordre attribués à tous ces mots restent en deçà de un million. Nous donnerons enfin aux nombres entiers un numéro d'ordre égal à leur valeur augmentée d'un million. Cela étant, si l'on considère un nombre incommensurable parfaitement défini, sa définition formelle, quelle qu'elle soit, pourra être traduite d'une façon univoque, par une suite de nombres entiers. Inversement, à toute suite de nombres entiers (ceux inférieurs à un million devant éviter certains intervalles, pour avoir une interprétation) correspond par notre convention une suite de phrases parfaitement déterminées.

Formons les suites de nombres entiers : 1° dont la somme est inférieure à un milliard; 2° dont la somme est au moins égale à 10^9 et inférieure à 10^{12}, etc. La $n^{\text{ième}}$ classe est formée de suites d'entiers dont la somme est au moins égale à $10^{3(n+2)}$ et inférieure à $10^{3(n+3)}$. Chacune de ces classes de suites finies d'entiers ne renferme qu'un nombre fini de suites. Ces suites forment un ensemble dénombrable. D'ailleurs, un nombre et sa valeur sont deux choses identiques. Le nombre n'est pas désigné si sa valeur n'est pas désignée, c'est-à-dire si l'on n'a pas indiqué (ce qui ne peut être fait que par un ensemble fini de

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

phrases finies) le moyen de calculer cette valeur avec une approximation arbitraire ([1]).

Donc tous les nombres actuellement définis, et ultérieurement définissables, ont leur définition représentée dans le Tableau illimité de suites d'entiers que nous avons construit. Donc tous ces nombres sont en infinité dénombrable. Il y a donc une infinité (beaucoup plus dense que l'infinité complémentaire) de nombres incommensurables qui n'ont été ni ne pourront jamais être définis.

Ceci s'explique si l'on songe que, pour définir l'un de ces nombres, il faudrait d'abord lui imposer une condition l'empêchant d'être confondu avec l'un quelconque des nombres définissables par les phrases de la première classe; puis lui imposer une condition l'empêchant d'être confondu avec les nombres de la seconde classe, etc. Ce nombre-là se trouverait défini par une infinité de phrases, s'ajoutant à la file sans que, au point de vue de leur sens, elles puissent se réduire à un nombre fini d'entre elles. C'est dire que ce nombre ne se trouverait jamais défini.

Parmi les ensembles de phrases d'une classe quelconque, le plus grand nombre n'aura aucun sens. On pourrait se demander si certaines n'en présenteront pas un par la suite, et même successivement plusieurs, même une infinité dénombrable, grâce à des acceptions nouvelles du sens des mots. Mais il est évident que, si ultérieurement un nombre se trouve défini, grâce à une modification dans le sens de certains mots, cette modification de sens pourra être exposée avec les mots précédemment employés. Les phrases expliquant successivement les modifications de sens des mots, jointes à la définition du nombre considéré au moyen de ces mots, forment un ensemble compréhensible avec le sens actuel des mots français, et représenté dans notre Tableau de suites finies. Donc, tous les nombres

---

([1]) Si une phrase définit simultanément une infinité de nombres, ils ne pourront être considérés comme désignés individuellement que si leur définition permet d'assigner à chacun un rang entier (il faut donc qu'ils soient en infinité dénombrable) et s'il est possible de les calculer chacun à son rang avec une approximation arbitraire

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

définissables ultérieurement, même avec modification dans le sens actuel des mots, sont représentés dans notre Tableau, où l'on convient de comprendre chaque mot avec son *sens actuel.*

Il y a donc des nombres incommensurables que l'on ne pourra jamais concevoir, qui resteront toujours extérieurs à toutes les recherches mathématiques, quelle que soit l'évolution que suivra le sens des mots, c'est-à-dire quelles que soient les notions nouvelles introduites dans l'étude des nombres. L'ensemble de ces nombres incommensurables ne peut être défini que globalement, par exclusion un à un de ceux qui n'en font pas partie, et aucun d'eux ne peut être désigné individuellement. L'approximation avec laquelle on peut calculer un de ces nombres peut être rendue aussi faible qu'on le veut. Mais le nombre de mots *nécessaires* pour expliquer le calcul de ce nombre, avec une approximation donnée d'avance, croît indéfiniment quand l'approximation est donnée de plus en plus petite et tend vers zéro.

Dans cet ensemble, il est impossible de caractériser aucun élément, c'est-à-dire de fournir un moyen de le distinguer de tous les autres. Chacun de ces nombres est tel qu'il faudrait un temps infiniment grand pour le définir *à partir du nombre entier.* C'est dire que ces nombres ne peuvent pas être définis à partir du nombre entier. Si l'on convient de borner les Mathématiques à l'analyse des nombres définissables à partir du nombre entier, et il paraît difficile d'échapper à cette limitation, l'ensemble des éléments, nombres, fonctions, que peut atteindre et analyser la pensée mathématique est dénombrable.

Quels que soient les travaux des savants futurs, il est évident, *a priori*, que l'ensemble des nombres qu'ils définiront individuellement est dénombrable; mais ce qui est essentiel à remarquer, c'est que l'ensemble qu'ils se trouveront avoir défini ne sortira pas d'un certain ensemble dénombrable qu'on peut concevoir dès maintenant (1).

(1) J'ai développé ces idées sous une forme un peu différente dans une Communication au quatrième Congrès international des mathématiciens (Rome, 1908) et dans une courte Note : *Sur les paradoxes de la théorie des ensembles* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 1908). Je me permets de signaler aussi comme se

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Relation entre les nombres incommensurables et les fonctions croissantes. — Soit u un nombre irrationnel. Quel que soit l'entier n, on peut trouver deux nombres p et $p+1$, tels que

$$\frac{p}{n} < u < \frac{p+1}{n}.$$

Désignons par α_n celle des différences $u - \frac{p}{n}$, $\frac{p+1}{n} - u$ qui est la plus petite. La fonction $\frac{1}{\alpha_n}$ ne sera pas toujours croissante, mais elle tendra vers l'infini. On a en effet

$$\alpha_n < \frac{1}{2n}.$$

Posons

$$\frac{1}{\alpha_n} = \varphi(n);$$

on a

$$\varphi(n) > 2n.$$

De $\varphi(n)$ il est facile de déduire une fonction constamment croissante $\psi(x)$ telle que $\psi(n) = \varphi(n)$ pour une infinité de valeurs de n

---

rattachant au même ordre d'idées une étude sur *La théorie des ensembles et des progrès récents de la théorie des fonctions* (*Revue générale des Sciences*, 1909) et un article sur *Le continu mathématique et le continu physique* (*Scientia*, 1909). Pendant la correction des épreuves, je reçois un article de M. Poincaré [*La logique de l'infini* (*Revue de Métaphysique et de Morale*, juillet 1909)] dans lequel l'éminent analyste prend décidément position contre les « définitions » exigeant une infinité de mots.

Il introduit une distinction entre les classifications *prédicatives* et *non prédicatives* qui me paraît identique avec la distinction que j'établissais dans ma Note citée des *Annales de l'École Normale* entre les ensembles *effectivement énumérables* et ceux qui ne le sont pas. Voici, au surplus, ses conclusions : « Quant à moi, je proposerais de s'en tenir aux règles suivantes : 1° Ne jamais envisager que des objets susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots; 2° Ne jamais perdre de vue que toute proposition sur l'infini ne doit être que la traduction, l'énoncé abrégé de propositions sur le fini; 3° Éviter les classifications et les définitions non prédicatives. » Je crois que tous les mathématiciens français s'étant occupés de ces questions (à l'exception peut-être de M. Hadamard) souscriront sans réserve à ces conclusions de M. Poincaré. Je crois que l'adoption définitive de ces conclusions exercera une grande influence sur le développement ultérieur des Mathématiques.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Il est aisé de voir qu'on peut supposer la croissance de la fonction $\psi(n)$ aussi rapide qu'on veut. Définissons un nombre incommensurable par la série

$$u = \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \ldots + \frac{1}{f(m)} + \ldots,$$

où $f(m)$ est un nombre entier croissant très rapidement avec m, et tel en tous cas que le reste de la série arrêtée à un terme quelconque soit inférieur à ce terme. Cherchons à approcher u par une fraction de dénominateur $n = f(1) \ldots f(m)$.

En posant

$$\frac{p}{n} = \sum_{1}^{m} \frac{1}{f(h)},$$

on a

$$u - \frac{p}{n} < \frac{2}{f(m+1)}.$$

Donc

$$\varphi[f(1) \ldots f(m)] > \frac{f(m+1)}{2}.$$

Or, quels que soient un ordre de croissance donné et même une famille dénombrable d'ordres de croissance, il est possible de trouver f, tel que $f(m+1)$ soit une fonction de n, plus croissante que l'ordre ou toute la famille d'ordres donnés.

Ceci montre que la simple notion de nombre irrationnel contient en elle autant de difficultés que la notion de fonction à croissance très rapide.

L'exemple précédent nous fait pressentir, et la suite ne fera que confirmer cette intuition, qu'un nombre est d'autant plus transcendant, ou plus éloigné par sa nature des nombres rationnels, qu'il est possible de l'approcher davantage par des nombres rationnels. Les nombres dont on approche le moins sont d'abord les nombres rationnels eux-mêmes, quand on n'a pas coïncidence exacte, ensuite les nombres algébriques.

Pour étudier commodément l'approximation des nombres incommensurables par les nombres rationnels, et par suite la relation entre la notion de croissance et celle de complexité d'un nombre incommensurable, il faut avoir recours à la théorie

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

des fractions continues, dont nous allons exposer brièvement les principes essentiels (¹).

Les fractions continues. — L'idée des fractions continues se présente d'une manière immédiate, quand on se propose de mesurer, l'une au moyen de l'autre, deux grandeurs. Le problème revient à chercher la grandeur qui est le plus grand commun diviseur des deux grandeurs données. La solution pratique est entièrement analogue à celle utilisée pour les nombres entiers. Supposons $A > B$. Nous cherchons combien de fois B est contenu dans A. Soit a_0 ce nombre de fois. Si R_1 est l'excès de A sur B, on a

$$A = a_0 B + R_1.$$

Si A est commensurable avec B, il en est de même de R_1. R_1 étant plus petit que B, on essaie de mesurer B avec R_1. Si la mesure ne se fait pas exactement, et si R_1 est contenu plus de a_1 fois dans B et moins de $(a_1 + 1)$ fois, on a

$$B = a_1 R_1 + R_2, \qquad R_2 < R_1 \qquad \text{et} \qquad a_1 \geqq 1.$$

On mesure R_2 avec R_1, qui lui est inférieur, et ainsi de suite; le dernier reste est la commune mesure à A et B. Le cas le plus intéressant est celui où l'opération ne se termine pas. On a

$$\frac{A}{B} = a_0 + \frac{R_1}{B} = a_0 + \frac{1}{\left(\frac{B}{R_1}\right)},$$

$$\frac{B}{R_1} = a_1 + \frac{1}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}.$$

Donc

$$\frac{A}{B} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}},$$

(¹) Depuis que l'on a (très malencontreusement, à mon avis) supprimé la théorie des fractions continues du programme de la classe de Mathématiques spéciales, j'ai dû lui faire une place dans mon enseignement à l'École Normale et à la Sorbonne, car il n'est pas admissible qu'une des plus belles théories de l'Arithmétique soit ignorée de tous nos jeunes professeurs de Mathématiques.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et

$$\frac{A}{B} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\left(\frac{R_2}{R_3}\right)}}}.$$

Les nombres a_0, a_1, a_2 définissent des valeurs de $\frac{A}{B}$ de plus en plus approchées. Si $\frac{A}{B}$ est commensurable, on a une fraction continue limitée, puisque les nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont les quotients successifs dans la recherche du plus grand commun diviseur du numérateur et du dénominateur de la fraction qui mesure $\frac{A}{B}$. Ces nombres a_0, a_1, ... sont dans tous les cas appelés *quotients incomplets*. La quantité $\frac{R_1}{R_2}$ est le *quotient complet* correspondant à a_2, etc. Donc un quotient incomplet est la partie entière du quotient complet correspondant.

Exposons la théorie *a priori* des fractions continues.

Soit une expression de la forme

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}},$$

que nous représenterons suivant l'usage par $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Les a sont des entiers positifs, sauf a_0 qui peut être nul. Nous allons indiquer comment il est possible de faire correspondre un nombre à cette suite, et quel moyen elle fournit de le calculer.

Désignons par $\frac{P_n}{Q_n}$ la fraction obtenue en limitant la fraction continue au quotient incomplet a_n. On a

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}, \qquad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{a_0\left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) + 1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{(a_0 a_1 + 1)a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1}.$$

Ces diverses fractions sont appelées les *réduites*. Il est facile de trouver leur loi de formation.

L'expression de $\frac{P_2}{Q_2}$ permet d'écrire

$$P_2 = a_2 P_1 + P_0,$$
$$Q_2 = a_2 Q_1 + Q_0.$$

D'une manière générale, je dis qu'on a simultanément

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2},$$
$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}.$$

Supposons ces égalités vraies pour une valeur de n, et démontrons-en la validité pour la valeur suivante. On a

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_n}}},$$

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}}}.$$

Envisageons les a comme des variables indépendantes. Pour obtenir $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, il suffit de remplacer, dans $\frac{P_n}{Q_n}$, a_n par $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$. Or, P_{n-1}, P_{n-2}, Q_{n-1}, Q_{n-2} ne contiennent pas a_n. Donc

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) P_{n-1} + P_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) Q_{n-1} + Q_{n-2}} = \frac{P_n + \frac{1}{a_{n+1}} P_{n-1}}{Q_n + \frac{1}{a_{n+1}} Q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} P_n + P_{n-1}}{a_{n+1} Q_n + Q_{n-1}},$$

d'où l'égalité énoncée. Le théorème étant vrai pour $n = 2$ est général.

Ces formules permettent d'obtenir une relation importante entre les termes de deux réduites consécutives. On a

$$D_n = \begin{vmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n P_{n-1} + P_{n-2} & P_{n-1} \\ a_n Q_{n-1} + Q_{n-2} & Q_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{n-2} & P_{n-1} \\ Q_{n-2} & Q_{n-1} \end{vmatrix} = -D_{n-1}.$$

Or

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_0 a_1 + 1 & a_0 \\ a_1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

donc

$$D_n = (-1)^{n-1}.$$

Ceci prouve que P_n et Q_n sont premiers entre eux. Les réduites se présentent donc naturellement sous forme irréductible.

La valeur de D_n permet de calculer la différence entre deux réduites consécutives. On a

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_n Q_{n-1}}.$$

De même

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_{n-2}}.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_0}{Q_0} + \frac{1}{Q_0 Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_n Q_{n-1}}.$$

$\frac{P_n}{Q_n}$ est la somme des n premiers termes d'une série manifestement convergente ; car elle est alternée et ses termes décroissent (Q_n croît) et tendent vers zéro. Donc $\frac{P_n}{Q_n}$ tend vers une limite. C'est ce nombre, limite de la $n^{\text{ième}}$ réduite pour n infini, qui est appelé la *valeur* de la fraction continue illimitée. Étudions la rapidité de la convergence des réduites vers leur limite. On a

$$Q_n \geq Q_{n-1} + Q_{n-2} > 2 Q_{n-2};$$

donc

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} < \frac{1}{2 Q_{n-1} Q_{n-2}}.$$

Chaque terme est plus petit que la moitié du terme précédent. Non seulement la série est convergente, mais même elle converge plus vite qu'une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Comme $u_n < \frac{1}{2^n} u_0$, le $n^{\text{ième}}$ reste $\rho_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ est inférieur à $\frac{1}{2^n} u_0$.

On voit par là que le calcul des réduites fournit rapidement une très grande approximation de la valeur de la fraction continue

Précisons la façon dont s'opère l'approche du nombre par la réduite. L'expression trouvée pour $\frac{P_n}{Q_n}$ montre que les réduites sont alternativement supérieures et inférieures à leur limite. Si donc, sur une droite où nous avons choisi les points 0 et 1, nous marquons les points M_m d'abscisse $\frac{P_m}{Q_m}$, M_1 est à droite de M_0, M_2 entre M_0 et M_1, etc., M_{n+1} entre M_{n-1} et M_n. Le point limite est constamment compris entre deux points d'indices consécutifs.

De plus, l'inégalité $\frac{1}{Q_{n+1}Q_n} < \frac{1}{2}\frac{1}{Q_{n-1}Q_n}$ exprime que

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right|,$$

ou

$$M_n M_{n+1} < \frac{1}{2} M_{n-1} M_n.$$

Donc, M_{n+1} est plus rapproché de M_n que de M_{n-1}. Donc, M_n est à plus forte raison plus approché du point limite M que le point M_{n-1}.

Une propriété essentielle des réduites est la suivante :

Toute fraction approchant plus d'un nombre donné qu'une réduite de ce nombre a ses termes respectivement supérieurs à ceux de cette réduite.

En effet, supposons par exemple que $\frac{a}{b}$ approche α par excès. La forme du raisonnement serait la même si c'était par défaut. Nous supposons que $\frac{a}{b}$ approche de α plus que $\frac{P_p}{Q_p}$.

1° Si $\frac{P_p}{Q_p}$ est également une réduite par excès, on a

$$\frac{P_{p+1}}{Q_{p+1}} < \alpha < \frac{a}{b} < \frac{P_p}{Q_p};$$

donc

$$\frac{P_p}{Q_p} - \frac{a}{b} < \frac{P_p}{Q_p} - \frac{P_{p+1}}{Q_{p+1}}$$

ou

$$\frac{N}{bQ_p} < \frac{1}{Q_p Q_{p+1}},$$

N étant un entier non nul. Donc, $b > Q_{p+1}$ et $a > P_{p+1}$, d'après $a > \frac{b}{Q_{p+1}} P_{p+1}$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Donc, $\frac{a}{b}$ a même ses termes supérieurs à ceux de la réduite suivante.

2° $\frac{P_p}{Q_p}$ est approché par défaut. Alors, $\frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}}$ l'est par excès, est moins approché que $\frac{P_p}{Q_p}$ et par suite que $\frac{a}{b}\cdot$ L'application du résultat précédent nous donne $a > P_p$, $b > Q_p$.

Ce théorème montre que les fractions les plus simples fournissant la plus grande approximation sont les réduites.

Ainsi, l'une des premières réduites de π est $\frac{355}{113}$ qui donne six décimales exactes et par suite la même approximation que la fraction $\frac{3141592}{10^6}$, dont les termes sont bien plus élevés.

Ce qui précède explique avec quelle commodité la théorie des fractions continues permet de classer les nombres incommensurables d'après la rapidité avec laquelle ils peuvent être approchés par des nombres commensurables.

On ne retient parmi tous les nombres commensurables que ceux qui fournissent la plus grande approximation, eu égard à leur dénominateur, les seules valeurs de n auxquelles la fonction $\psi(n)$ doit l'allure de sa croissance.

La croissance la plus faible pour $\psi(n)$ correspond évidemment au cas des quotients incomplets limités en grandeur.

Approximation par les nombres rationnels de certaines classes de nombres. — Nous appellerons *nombres de la première classe* les valeurs des fractions continues pour lesquelles les quotients incomplets sont limités (au plus égaux à 10, pour fixer les idées, avec $1 \leq a_0$). La classe des nombres ainsi définis est aussi riche que l'ensemble de tous les nombres positifs; car on peut établir une correspondance biunivoque entre ces deux classes.

En effet, la transformation $x = \frac{10x'}{x'+1}$ établit d'abord une correspondance biunivoque et réciproque entre l'ensemble des nombres positifs x' et l'ensemble des nombres x inférieurs à 10. Il suffit donc, pour notre objet, d'établir une correspondance entre les nombres de la première classe et les nombres positifs inférieurs à 10. A un nombre écrit dans le système décimal, inférieur à 10, je fais correspondre la fraction continue ayant précisément pour

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

quotients incomplets les chiffres successifs de ce nombre, le quotient incomplet correspondant au chiffre 0 étant 10 et réciproquement ; à une fraction de la première classe, je fais correspondre le nombre qui a pour chiffres dans le système décimal les quotients incomplets successifs de la fraction, au quotient 10 correspondant le chiffre 0. Par exemple, à $\pi = 3,141592\ldots$ je fais correspondre la fraction

$$(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, \ldots).$$

A la fraction $(10, 10, 1, 4, \ldots)$ je fais correspondre le nombre

$$0,014\ldots = \sqrt{2} - \frac{7}{5}.$$

Cette loi rattache donc à toute fraction continue de la première classe un nombre unique positif inférieur à 10. Mais, si un nombre de la première classe ne peut être représenté par une fraction continue que d'une seule manière, dans l'ensemble des nombres positifs, certains, les fractions décimales peuvent être représentés de deux façons : 1, 3 peut s'écrire 1,3000... ou 1,299.... Donc, à 1,3 notre loi fait correspondre les deux nombres de la première classe

$$(1, 3, 10, 10, \ldots) \quad \text{et} \quad (1, 2, 9, 9, \ldots).$$

Donc, à un nombre quelconque positif inférieur à 10 correspond au moins un nombre de la première classe. La première classe est donc au moins aussi riche que l'ensemble des nombres positifs inférieurs à 10. Elle ne peut l'être davantage, puisqu'elle est incluse dans l'ensemble des nombres compris entre 1 et 11. Ce sont donc deux ensembles « de même puissance » ([1]).

Étudions la fonction $\psi(n)$ pour les nombres de la première classe. Supposons donc $a_n \leqq 10$ (évidemment, on pourrait remplacer 10 par tout autre nombre). On a

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \left|\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{a_{n+2}}{Q_n Q_{n+2}}.$$

Or,

$$\frac{a_{n+2}}{Q_{n+2}} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+2} Q_{n+1} + Q_n} \geqq \frac{1}{Q_{n+1} + Q_n},$$

$$Q_{n+1} < (a_{n+1} + 1) Q_n \leqq 11 Q_n;$$

([1]) *Voir* mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, Note I.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

donc

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| > \frac{1}{12 Q_n^2}.$$

D'ailleurs

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n^2};$$

donc

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{h}{Q_n^2},$$

h étant compris entre des limites indépendantes du nombre α et de n. La fonction $\psi(n)$ peut donc être prise égale à kn^2, k étant fixe.

Parmi les nombres de cette première classe figurent, comme nous le montrerons plus loin, une partie des nombres algébriques. Étudions la fonction $\psi(n)$ relative aux nombres algébriques quelconques.

Un nombre incommensurable est dit *algébrique* s'il est racine d'une équation algébrique à coefficients entiers (ou rationnels).

Si l'on envisage p équations algébriques à coefficients entiers, à p inconnues, chacune des solutions de ce système est constituée par des nombres algébriques. Car chaque inconnue est racine du résultant obtenu en éliminant les $(p-1)$ autres inconnues entre les p équations et ce résultant est à coefficients entiers.

D'après ce principe, les racines d'une équation algébrique à coefficients algébriques sont elles-mêmes des nombres algébriques; il en est de même des parties réelles et imaginaires des racines d'une équation à coefficients entiers.

Cherchons l'approximation qu'on peut obtenir d'un nombre algébrique ξ avec un nombre commensurable $\frac{p}{q}$, en donnant à q des valeurs de plus en plus grandes.

Soit

$$f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n = 0$$

l'équation irréductible dont ξ est racine; n est dit l'ordre du nombre algébrique ξ. On a

$$f(\xi) = 0$$

d'où

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\xi - \frac{p}{q}\right) f'(\lambda),$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

λ étant compris entre ξ et $\frac{p}{q}$. Si $\frac{p}{q}$ est la valeur la plus approchée de ξ à $\frac{1}{q}$ près, $|\lambda - \xi| < \frac{1}{q}$, $f'(\lambda)$ est très voisin de $f'(\xi)$ et en tous cas possède une limite supérieure M aisée à obtenir et indépendante de q. En remplaçant le premier membre par une quantité inférieure en valeur absolue et le second par une quantité supérieure, on trouve

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{\mathrm{M} q^n}.$$

Donc, étant donné un nombre algébrique ξ de degré n, on ne peut pas espérer trouver des valeurs de q telles que sa valeur approchée à $\frac{1}{q}$ près en diffère de moins de $\frac{1}{\mathrm{M} q^n}$ (1).

Il est évident qu'il y a des nombres échappant à cette limitation, tels que $\left|\xi - \frac{p}{q}\right|$ soit inférieur à e^{-q}, ou à e^{-e^q}, pour une infinité de valeurs de q. Donc, à un certain point de vue, les nombres algébriques sont parmi les nombres les plus éloignés des nombres rationnels, et l'éloignement est d'autant plus grand que le degré du nombre est plus faible. D'ailleurs, pour les nombres rationnels eux-mêmes, si l'on exclut les fractions $\frac{p}{q}$ coïncidant avec $\xi = \frac{\alpha}{\beta}$, la différence $\frac{p}{q} - \xi$ est en valeur absolue supérieure ou égale à $\frac{1}{\beta q}$.

Nous allons retrouver par voie directe le résultat pour $n = 2$, en le rattachant à ce que nous avons démontré sur les fractions à quotients incomplets limités, grâce à la propriété des nombres algébriques du second degré d'être développables en fraction continue périodique (Lagrange).

Les nombres du second ordre et les fractions continues périodiques. — On distingue les fractions continues périodiques en deux espèces : les *simples*, telles que l'ensemble des quotients incomplets qui se reproduisent périodiquement commence au premier a_0 ($a_0 \neq 0$); les *mixtes*, qui, avant la première période,

---

(1) *Voir* la Note au bas de la p. 164.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

contiennent un certain nombre de quotients incomplets irréguliers. Les fonctions périodiques simples sont telles que $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, \ldots)$, les mixtes telles que $(b_0, b_1, \ldots, b_p, a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, \ldots)$ avec $b_p \neq a_n$.

Le théorème de Lagrange résulte du suivant : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre positif, supérieur à* UN, *soit développable en fraction continue périodique* SIMPLE, *est qu'il soit racine d'une équation du second degré à coefficients entiers dont l'autre racine soit négative et supérieure à* MOINS UN.

La condition est nécessaire; car soit

$$y = (a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, \ldots, a_n, a_0, \ldots).$$

Si

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \frac{P_n}{Q_n} \qquad \text{et} \qquad (a_0, \ldots, a_{n-1}) = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},$$

y s'obtient en remplaçant, dans $\frac{P_n\lambda + P_{n-1}}{Q_n\lambda + Q_{n-1}}$, λ successivement par a_0, $a_0 + \frac{1}{a_1}$, (a_0, a_1, a_2), ..., à la limite par la fraction continue indéfinie qui commence au $(n+2)^{\text{ième}}$ quotient incomplet, c'est-à-dire par y. Donc

$$y = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}}$$

ou

$$Q_n y^2 - (P_n - Q_{n-1})y - P_{n-1} = 0,$$

équation qui a ses racines de signes contraires, la positive étant supérieure à 1, d'après $\frac{P_i}{Q_i} > a_0 \geq 1$, la négative à -1. La condition est donc nécessaire.

Réciproquement, soit $Ax^2 - Bx - C = 0$ une équation remplissant les conditions de l'énoncé : A, B, C sont positifs et l'on a, d'après $f(-1) > 0$, $f(1) > 0$,

$$B > |A - C|.$$

Développons la racine positive en fraction continue. Soit b_0 la partie entière de la racine positive. C'est le plus grand nombre entier dont le résultat de substitution soit négatif. Pour déterminer le quotient b_1 nous posons

$$x = b_0 + \frac{1}{x_1}.$$

b_1 est la partie entière de x_1; d'après $x_1 = \frac{1}{x - b_0}$ l'équation en x_1 a sa racine correspondant à la racine positive de l'équation en x, positive et supérieure à 1. La valeur en x_1 correspondant à la racine négative en x est négative et supérieure à -1. L'équation en x_1 est donc du même type que la première. Si on la met sous la forme

$$A_1 x_1^2 - B_1 x_1 - C_1 = 0,$$

on trouve

$$A_1 = -A b_0^2 + B b_0 + C,$$
$$B_1 = 2 A b_0 - B,$$
$$C_1 = A.$$

Je détermine comme ci-dessus la partie entière b_1 de x_1; connaissant b_1, pour avoir b_2, quotient incomplet suivant, je pose

$$x_1 = b_1 + \frac{1}{x_2}.$$

L'équation en x_2 sera de la forme

$$A_2 x_2^2 - B_2 x_2 - C_2 = 0$$

et satisfera encore aux conditions de l'énoncé. Ainsi indéfiniment, je détermine successivement autant de quotients incomplets que je voudrai. Je dis que les équations successives qui déterminent ces quotients ne peuvent pas être indéfiniment distinctes.

Formons le discriminant de l'équation en x_1; on trouve

$$B_1^2 + 4 A_1 C_1 = B^2 + 4 AC.$$

Ceci d'ailleurs résulte du fait qu'en rendant homogènes les premiers membres des deux équations, on passe de la forme

$$A x^2 - B xy - C y^2$$

à la forme

$$A_1 x_1^2 - B_1 x_1 y_1 - C_1 y_1^2,$$

par la substitution $x = b_0 x_1 + y_1$, $y = x_1$, substitution de module égal à -1.

Le discriminant des deux formes est donc *a priori* le même. Soit D sa valeur. En passant de l'équation en x_1 à l'équation en x_2, on ne changera pas davantage le discriminant, et ainsi de suite. Donc, quel que soit m, on a

$$B_m^2 + 4A_m C_m = D.$$

Le nombre des solutions de cette équation en nombres entiers positifs, A_m, B_m, C_m, est évidemment limité; il y a en particulier au plus $\sqrt{D}$ valeurs de B_m; la condition $|A_m - C_m| = B_m$ réduit même ce nombre de solutions. Soit q le nombre de ces solutions. Il est certain que, parmi les équations de rang inférieur à $q+2$, il y en a au moins deux identiques. Soit $p+2$ le rang de la première équation qui se reproduit, et $p+n+3$ celui de la première qui la reproduit. Puisque les racines de la $(p+2)^{\text{ième}}$ équation sont identiques à celles de la $(p+n+3)^{\text{ième}}$, l'équation de rang $p+3$ sera identique à celle de rang $p+n+4$, et, d'une façon générale, les équations de rang $p+h+\lambda(n+1)$ seront identiques entre elles quels que soient l'entier λ positif et l'entier h compris inclusivement entre 2 et $n+2$.

Donc, la fraction qui développe x est périodique, la période contenant $n+1$ termes. On a

$$x = (b_0, b_1, \ldots, b_p, a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, \ldots, a_n, a_0, \ldots).$$

Je dis qu'*il est impossible que le quotient b_0 ne soit pas le premier qui se reproduise*. Supposons $p \geqq 0$. Les quotients $b_0, b_1, \ldots, b_p$ sont par hypothèse irréguliers, c'est-à-dire qu'on a $b_p \neq a_n$. Je vais montrer que ceci conduit à une contradiction. En effet, la fraction $(a_n, a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_0, \ldots, a_{n-1}, \ldots)$ est périodique simple, de période $a_n, a_0, \ldots, a_{n-1}$. Soit

$$g(z) = A'z^2 - B'z - C' = 0$$

l'équation qui l'admet pour racine et qui satisfait aux conditions de l'énoncé. On a

$$z = a_n + \frac{1}{y}.$$

L'équation en y a pour racine la fraction

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, \ldots, a_n, \ldots) = x_{p+1}.$$

C'est

$$f_{p+1}(y) = A_{p+1}y^2 - B_{p+1}y - C_{p+1} = 0.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Dans cette équation $f_{p+1}(-1)>0$, $f_{p+1}(0)<0$, $f_{p+1}(+1)<0$. On a

$$g(z)=-(z-a_n)^2 f_{p+1}\left(\frac{1}{z-a_n}\right).$$

Écrivons que $g(z)$ satisfait aux conditions de l'énoncé. On a, en particulier, pour $z=-1$, $z=0$,

$$-f_{p+1}\left(-\frac{1}{1+a_n}\right)>0, \qquad -f_{p+1}\left(-\frac{1}{a_n}\right)<0.$$

Ces conditions expriment que la racine négative de l'équation en y est comprise entre $-\frac{1}{a_n}$ et $-\frac{1}{a_n-1}\cdot$ a_n est donc la partie entière de $-\frac{1}{y'}$, y' étant la racine négative de l'équation en y. Ceci montre que si, dans l'équation en y, on fait la transformation en $\frac{1}{z-b}$, il n'y a qu'une seule valeur entière de b telle que l'équation en z satisfasse aux conditions de l'énoncé. C'est a_n. Or, d'après $x_p=b_p+\frac{1}{y}$, pour $b=b_p$, nous obtenons l'équation en x_p qui satisfait aux conditions de l'énoncé. Donc, $b_p=a_n$. Donc, b_p n'est pas un quotient irrégulier. Il ne peut pas y avoir de quotient irrégulier. La fraction est périodique simple.

Il nous sera facile maintenant d'indiquer la marche à suivre pour développer une racine particulière d'une équation du second degré à coefficients entiers, irréductible. Soient x la racine à développer, x' la seconde.

Voici les divers cas possibles. Pour chacun d'eux est indiqué le moyen de passer à l'un des suivants, le dernier cas étant celui de la fraction périodique simple :

1° $x<0$. On fait la transformation en $-x$.

2° $0<x<1$. On transforme en $\frac{1}{x}\cdot$

3° x et x' ont même partie entière. Soit $b_0\geq 1$ cette partie entière. On transforme en $b_0+\frac{1}{x_1}\cdot$ Si x_1 et x'_1 ont encore même partie entière, on répète l'opération et ainsi de suite. Il est impossible de trouver indéfiniment même partie entière pour les racines des équations transformées successives, sans quoi x et x', ayant même développement en fraction continue, coïn-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

cident. Mais alors x et x' sont rationnels, et nous aboutissons à une contradiction. Il arrive donc un moment où x et x' sont séparés par un entier :

4° $1 < x < x'$, x étant séparé de x' par un entier. Si b_0 est la partie entière de x, on transforme en $b_0 + \frac{1}{x_1}$. x_1 est supérieur à 1, x'_1 est inférieur à 1.

5° $0 < x' < x$, x' et x étant séparés par un entier au moins. On transforme en $b_0 + \frac{1}{x_1}$.

6° $x > 1$, $x' < -1$. La même transformée nous conduit au cas final.

7° $x > 1$, $-1 < x' < 0$. x est développable en fraction continue périodique simple.

En résumé, nous ne stationnerons qu'une fois au plus dans chaque cas, sauf au troisième où l'on peut rester un nombre fini de fois. En tous cas, au bout d'un nombre limité de quotients irréguliers, on arrive à une fraction périodique simple. C'est le théorème de Lagrange.

Cette propriété des nombres algébriques du second ordre a donné naissance à des recherches arithmétiques intéressantes, en vue de la généraliser aux ordres supérieurs. On a en particulier cherché pour chaque degré des algorithmes analogues aux fractions continues (Minkowski) au moyen desquels les nombres de ces degrés possèdent une représentation simple. Nous ne nous occuperons pas de ces généralisations qui n'ont pas un rapport direct avec l'objet de notre étude.

Le théorème de Lagrange, sur la périodicité des fractions continues représentant les nombres du second ordre, nous montre en particulier que les quotients incomplets pour une telle fraction sont limités, et, par suite, l'approximation d'un tel nombre par un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ est égale à $\frac{h}{q^2}$, h étant limité inférieurement indépendamment de q. C'est le résultat de Liouville pour les nombres algébriques du second ordre. Mais le théorème de Lagrange nous fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit du second ordre, tandis que la condition de Liouville, nécessaire, n'est nullement suffisante. Elle est en effet remplie par tous les nombres de la première

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

classe, dont l'ensemble a la puissance du continu, tandis que les nombres algébriques du second ordre (et même de tous les ordres réunis) sont en infinité dénombrable et même *effectivement énumérable* [1].

Donnons quelques exemples de développement en fraction continue de nombres du second ordre.

Soit à développer $x^2 = 2$ (c'est le cas 6°). Nous posons

$$x = 1 + \frac{1}{x_1};$$

d'où l'équation

$$x_1^2 - 2x_1 - 1 = 0,$$

qui possède une racine entre 2 et 3 et une négative supérieure à -1. La première est développable en fraction périodique simple. Le nombre de quotients incomplets distincts est au plus égal à celui des solutions distinctes de

$$B^2 + 4AC = 8, \qquad |A - C| < B.$$

Une seule solution

$$B = 2, \qquad A = C = 1.$$

Il n'y a donc qu'un quotient à la période : c'est 2. On a

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}$$

Ceci nous donne des valeurs approchées de $\sqrt{2}$, par des fractions simples. Les réduites successives sont

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{99}{70}, \quad \frac{239}{169}, \quad \ldots.$$

Soit $\frac{p}{q}$ l'une de ces réduites. On a

$$\left|\frac{p^2}{q^2} - 2\right| = \frac{N}{q^2},$$

N étant un nombre entier non nul, ou

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right| = \frac{N}{\left(\frac{p}{q} + \sqrt{2}\right) q^2};$$

(1) *Voir* la Note pp. 125 et 126.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et, comme $\frac{p}{q}$ est très voisin de $\sqrt{2}$,

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right| = \frac{N(1+\varepsilon)}{2\sqrt{2}\,q^2},$$

ε tendant vers zéro quand q croît indéfiniment.

D'ailleurs

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2q^2},$$

d'après

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \qquad \text{et} \qquad Q_{n+1} = 2Q_n + Q_{n-1} > 2Q_n;$$

donc,

$$\frac{N(1+\varepsilon)}{2\sqrt{2}\,q^2} < \frac{1}{2q^2}.$$

Donc $N = 1$, dès que $\varepsilon < \sqrt{2} - 1$. Donc, à partir d'un certain rang (qui est d'ailleurs le premier, pour $p = 1$, $q = 1$), toutes les réduites $\frac{p}{q}$ du développement de $\sqrt{2}$ sont telles que

$$p^2 - 2q^2 = \pm 1.$$

Considérons le cas où tous les quotients incomplets sont égaux à l'unité. On a

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}$$

C'est le nombre incommensurable le plus éloigné des nombres rationnels au point de vue de l'approximation. Cherchons sa valeur. On a

$$x = 1 + \frac{1}{x} \qquad \text{ou} \qquad x^2 - x - 1 = 0;$$

d'où

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ce nombre se rattache à $\sqrt{5}$, bien que le développement de $\sqrt{5}$ n'ait pas la même période. On trouve en effet

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \dots}}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Il est facile de se rendre compte à quelle condition deux nombres irrationnels pourront ne différer que par un nombre limité de quotients incomplets. Soient $b_0, \ldots, b_p$ les quotients du premier, antérieurs à leur partie commune, $b'_0, \ldots, b'_q$ ceux du second, x l'irrationnelle formée par les quotients communs. Le premier nombre y est égal à $\frac{P_p x + P_{p-1}}{Q_p x + Q_{p-1}}$, $\frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}}$ et $\frac{P_p}{Q_p}$ étant les deux dernières réduites de la fraction $(b_0, \ldots, b_p)$. De même, $y' = \frac{P'_q x + P'_{q-1}}{Q'_q x + Q'_{q-1}}$. On a manifestement

$$y' = \frac{Ay + B}{Cy + D}$$

et la théorie des substitutions montre que

$$AD - BC = \pm 1.$$

Approximation des nombres quelconques par les nombres rationnels. — Soient $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ deux nombres rationnels voisins. Il est naturel de comparer leur différence à leurs dénominateurs. Comme nous avons vu que l'approximation par un nombre rationnel n'est remarquable que dans les cas où elle est inférieure à l'inverse du carré du dénominateur, c'est aux inverses de ces carrés que nous comparerons la différence de deux nombres rationnels. Nous poserons

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right| = \lambda\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{s^2}\right),$$

et le nombre λ sera appelé par nous l'*écart relatif* des deux nombres $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$.

En faisant tendre $\frac{r}{s}$ vers un nombre irrationnel α, le dénominateur s tend vers l'infini; nous écrirons donc

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| = \lambda\frac{1}{q^2},$$

et nous donnerons à λ le nom d'*écart relatif* de $\frac{p}{q}$ et de α.

Examinons l'écart relatif de deux réduites consécutives d'une

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

fraction continue. On a

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right| = \frac{1}{Q_n Q_{n-1}} = \lambda\left(\frac{1}{Q_n^2} + \frac{1}{Q_{n-1}^2}\right),$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{Q_{n-1}}{Q_n} + \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \mu_n + \frac{1}{\mu_n},$$

en posant

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \mu_n.$$

Nous allons étudier la limite inférieure du second membre. Son minimum, μ_n étant une variable arbitraire, est 2, pour $\mu_n = 1$; donc $\lambda \leqq \frac{1}{2}$, quel que soit μ_n. Nous allons chercher une limite plus précise. La valeur de $\frac{1}{\lambda}$ croît avec μ_n dès que $\mu_n > 1$. Or, si

$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2},$$

$$\mu_n = a_n + \frac{1}{\mu_{n-1}}.$$

Supposons $a_n \geqq 2$. Alors, on trouve $\lambda < \frac{2}{5}$, limite préférable à la première. Cherchons ce qui se passe pour les quotients incomplets égaux à 1. Faisons $a_n = 1$. On a

$$\mu_n = 1 + \frac{1}{\mu_{n-1}}.$$

Par cette relation, μ_{n-1} et μ_n, considérés comme variables arbitraires, varient en sens inverse. Si cette relation est satisfaite pour une valeur commune des deux variables, cette valeur sera toujours inférieure à l'une d'elles (et supérieure à l'autre). Cette valeur commune est donnée par l'équation $\mu = 1 + \frac{1}{\mu}$; d'où $\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La valeur correspondante de λ est $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

En résumé, si a_n est supérieur ou égal à 2, l'écart de deux réduites $\frac{P_n}{Q_n}$ et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ est inférieur à $\frac{2}{5}$ et *a fortiori* à $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Si $a_n = 1$, cet écart ou l'écart de $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et de $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$ est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Donc, on peut affirmer que si l'on envisage trois réduites con-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

sécutives, si l'on calcule l'écart des deux premières ou l'écart des deux dernières, l'un au moins de ces écarts est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Examinons le cas où $a_n, a_{n+1}, \ldots = 1$. Alors, μ_{n+p} est alternativement supérieur ou inférieur à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, mais arrive à en différer d'aussi peu qu'on veut. La valeur correspondante de λ donnée par $\lambda_{n+p} = \mu_{n+p} + \frac{1}{\mu_{n+p}}$ tend vers $\frac{1}{\sqrt{5}}$, en oscillant autour d'elle.

Ce fait montre qu'il serait impossible de remplacer $\frac{1}{\sqrt{5}}$ par un autre nombre pour limiter supérieurement λ. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ est le plus petit nombre limitant supérieurement l'écart d'un couple de réduites consécutives ou du couple suivant.

Nous appellerons *intervalle canonique* attaché à un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ l'intervalle $\frac{p}{q} - \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$ à $\frac{p}{q} + \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$.

Nous considérerons tous les nombres de cet intervalle et en particulier les nombres irrationnels de cet intervalle comme *normalement approchés* par $\frac{p}{q}$.

Soit α un nombre irrationnel quelconque. Développons-le en fraction continue. Nous savons que pour deux couples consécutifs de réduites l'écart de l'un des couples au moins est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Soit $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, $\frac{P_n}{Q_n}$ ce couple. Supposons, par exemple,

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{P_n}{Q_n}.$$

On a

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{Q_n^2} + \frac{1}{Q_{n-1}^2}\right)$$

ou

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{1}{\sqrt{5}\,Q_n^2} < \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{5}\,Q_{n-1}^2}.$$

Ceci montre que les intervalles canoniques relatifs aux réduites $\frac{P_n}{Q_n}$, $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ empiètent l'un sur l'autre. α, étant compris entre les deux réduites, appartient à l'un au moins des inter-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

valles. Donc, sur trois réduites consécutives, l'une au moins, soit $\frac{P_n}{Q_n}$, donne lieu à l'inégalité

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,Q_n^2}.$$

Donc, tout nombre α appartient à une infinité d'intervalles canoniques. Il est essentiel de remarquer que si l'on envisageait des intervalles tels que $\frac{p}{q} - \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{5}\,q^2}$ à $\frac{p}{q} + \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{5}\,q^2}$, quelque petit que soit le nombre fixe ε, il y aurait des nombres α qui ne seraient intérieurs qu'à un nombre fini de tels intervalles. Ce seraient les nombres dont tous les quotients incomplets seraient égaux à 1 à partir d'un certain rang.

Pour que les nombres rationnels eux-mêmes soient intérieurs à une infinité d'intervalles canoniques, il est nécessaire d'envisager aussi des intervalles canoniques relatifs à des fractions non irréductibles. En effet, soient $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ deux fractions. Si $\left|\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right| \neq 0$ et si p et q admettent pour plus grand commun diviseur λ, si $p = \lambda p'$, $q = \lambda q'$,

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right| = \left|\frac{p'}{q'} - \frac{r}{s}\right| \geqq \frac{1}{q's}.$$

Si donc le premier membre est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{5}\,s^2}$, on a $s < \frac{q'}{\sqrt{5}}$. Le nombre des fractions approchant de $\frac{p}{q}$ normalement serait fini. On évite cet inconvénient en ne supposant pas dans la définition des intervalles canoniques la fraction irréductible. Grâce à cette convention, tout nombre, rationnel ou irrationnel, sera à l'intérieur d'une infinité d'intervalles canoniques. Il résulte par suite, d'un théorème général sur lequel nous n'insisterons pas [1], qu'il est possible de recouvrir un intervalle déterminé, par exemple l'intervalle de *zéro* à *un*, par un nombre fini d'intervalles canoniques, de telle sorte que tout nombre compris entre 0 et 1 soit intérieur à un au moins de ces intervalles. De plus, cette opération peut être faite d'une infinité de

[1] Voir *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 9.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

manières distinctes. En d'autres termes, si nous désignons par *système complet* un ensemble d'intervalles canoniques en nombre fini recouvrant complètement le segment *zéro-un*, il existe une infinité de systèmes complets, tels que deux quelconques d'entre eux ne possèdent en commun aucun intervalle canonique.

Nous dirons que deux fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont *adjacentes* entre elles lorsque les intervalles canoniques correspondants se recouvrent partiellement. En d'autres termes, leur écart relatif est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{5}}$; on a

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{s^2}\right).$$

Nous allons déterminer effectivement de tels systèmes. Il nous sera commode pour cela d'utiliser le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Étant donné un système limité de fractions (comprises entre* 0 *et* 1) *renfermant une fraction égale à zéro et une fraction égale à un, pour que ce système soit complet, il est nécessaire et suffisant que, étant donnée une fraction quelconque* $\frac{p}{q}$ *du système, il soit possible de trouver deux fractions* $\frac{r}{s}$ *et* $\frac{v}{w}$ *du système, l'une supérieure, l'autre inférieure ou égale, ou identiques à* $\frac{p}{q}$ *et adjacentes entre elles.*

Soit, en effet, $\frac{p_1}{q_1}$ la fraction du système qui est égale à zéro, ou l'une quelconque d'entre elles s'il y en a plusieurs. Par hypothèse, il existe deux *fractions adjacentes entre elles* $\frac{p'_2}{q'_2}$ et $\frac{p_2}{q_2}$, telle qu'on ait

$$(1) \qquad \frac{p'_2}{q'_2} \leq \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}.$$

D'ailleurs, comme $\frac{p_1}{q_1} = 0$ et que $\frac{p'_2}{q'_2}$ ne peut pas être négatif, on a ici certainement

$$\frac{p'_2}{q'_2} = \frac{p_1}{q_1}.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

De même, à la fraction $\frac{p_2}{q_2}$ correspondent deux fractions adjacentes entre elles $\frac{p'_3}{q'_3}$ et $\frac{p_3}{q_3}$ telles qu'on ait

$$\frac{p'_3}{q'_3} \leqq \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3}.$$

On écrira de même la relation générale

$$(2) \qquad \frac{p'_{\mu+1}}{q'_{\mu+1}} \leqq \frac{p_\mu}{q_\mu} < \frac{p_{\mu+1}}{q_{\mu+1}},$$

les fractions $\frac{p'_\mu}{q'_\mu}$, $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ appartenant au système, quel que soit μ, et les fractions $\frac{p'_{\mu+1}}{q'_{\mu+1}}$ et $\frac{p_{\mu+1}}{q_{\mu+1}}$ étant adjacentes entre elles.

Les fractions $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ vont en *croissant* avec μ; comme les fractions du système sont en nombre limité, et que la plus grande d'entre elles est égale à l'unité (il peut y en avoir plusieurs égales à l'unité), il arrivera nécessairement que, pour une certaine valeur de μ, la fraction $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ sera égale à 1; si nous désignons cette valeur par m, nous aurons

$$(3) \qquad \frac{p'_m}{q'_m} \leqq \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} < \frac{p_m}{q_m} = 1,$$

les fractions $\frac{p'_m}{q'_m}$ et $\frac{p_m}{q_m}$ étant adjacentes.

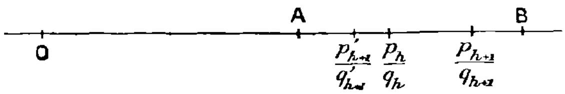
Il s'agit maintenant de faire voir que l'ensemble des fractions

$$(4) \qquad \frac{p'_\mu}{q'_\mu}, \quad \frac{p_\mu}{q_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

constitue un système complet. Pour cela il suffit de montrer que, quel que soit h, l'ensemble des intervalles canoniques relatifs à celles des fractions (4) pour lesquelles μ est inférieur ou égal à h recouvre complètement l'intervalle compris entre 0 et $\frac{p_h}{q_h}$. Cette proposition est vraie pour $h = 1$, car alors cet intervalle se réduit au seul point 0; il suffit donc de montrer que, si la proposition est vraie pour une valeur de h, elle subsiste pour la valeur immédiatement supérieure $h + 1$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Or, ceci est évident pour peu qu'on y réfléchisse et devient intuitif par une figure; les intervalles canoniques relatifs à



$\frac{p'_{h+1}}{q'_{h+1}}$ et $\frac{p_{h+1}}{q_{h+1}}$, étant adjacents, recouvrent complètement un segment AB tel que A est à gauche de $\frac{p'_{h+1}}{q'_{h+1}}$ (non coïncidant avec lui) et, par suite, à gauche de $\frac{p_h}{q_h}$, B étant à droite de $\frac{p_{h+1}}{q_{h+1}}$ (non coïncidant avec lui). Si donc on adjoint ces intervalles aux intervalles $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, h)$, lesquels sont supposés recouvrir entièrement l'intervalle $\left(0, \frac{p_h}{q_h}\right)$, on recouvrira complètement l'intervalle $\left(0, \frac{p_{h+1}}{q_{h+1}}\right)$, en débordant même au delà des extrémités. Il suffit de faire croître le nombre h jusqu'à la valeur m pour avoir le théorème I.

14. Nous allons maintenant former effectivement des systèmes complets de fractions; on en obtient une infinité par le théorème suivant :

Théorème II. — *Si l'on désigne par* A *et* B *deux nombres positifs assujettis aux deux conditions* $\left\{\begin{array}{l} B > 15A^2 \\ A > 10 \end{array}\right.$, *les fractions dont le dénominateur est compris entre* A *et* B *constituent un système complet.*

Pour démontrer ce théorème, nous nous appuierons sur le théorème I; pour chaque fraction $\frac{p}{q}$ de l'ensemble nous démontrerons l'existence de fractions $\frac{r}{s}$ et $\frac{v}{w}$ de l'ensemble satisfaisant aux conditions du théorème I; pour cela, nous distinguerons deux cas généraux suivant que $\frac{p}{q}$ est irréductible ou non; chacun de ces cas se subdivisera d'ailleurs en plusieurs suivant la valeur relative de q par rapport à A et B.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Premier cas. — *La fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible.*

1° *On suppose* $3q < B$. Nous prendrons alors

$$\frac{v}{w} \equiv \frac{p}{q}$$

(le signe $\equiv$ signifiant qu'on a $v = p$, $w = q$); quant à la fraction $\frac{r}{s}$, nous la déterminerons comme il suit : soient α et β *les deux nombres inférieurs à $\frac{p}{q}$ et tels qu'on ait*

$$p\beta - q\alpha = \pm 1$$

(on peut dire aussi que $\frac{\alpha}{\beta}$ est l'avant-dernière réduite du développement de $\frac{p}{q}$ en fraction continue ; $\frac{p}{q}$ est la dernière).

Si l'on a

$$p\beta - q\alpha = -1,$$

on prendra

$$r = 2p + \alpha,$$

$$s = 2q + \beta,$$

et l'on aura

$$(5) \quad \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{2p + \alpha}{2q + \beta} - \frac{p}{q} = \frac{q\alpha - p\beta}{q(2q + \beta)} = \frac{1}{qs} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{s^2}\right),$$

car $\frac{s}{q}$ est supérieur à 2 et, par suite, supérieur à $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; on a d'ailleurs

$$s < 3q < B;$$

la fraction $\frac{r}{s}$ satisfait donc aux conditions requises.

Si l'on a

$$p\beta - q\alpha = +1,$$

on prendra

$$r = 3p - \alpha,$$

$$s = 3q - \beta,$$

et l'on aura

$$(6) \quad \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{3p - \alpha}{3q - \beta} - \frac{p}{q} = \frac{p\beta - q\alpha}{q(3q - \beta)} = \frac{1}{qs} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{s^2}\right),$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

car on a encore

$$\frac{s}{q} > 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad s < 3q < B;$$

la fraction $\frac{r}{s}$ satisfait encore aux conditions requises.

2° *On suppose* $3q > B$, *c'est-à-dire* $q > \frac{B}{3}$ Nous pouvons développer alors $\frac{p}{q}$ en fraction continue limitée,

$$\frac{p}{q} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_{2n}}}},$$

en nous arrangeant, comme il a été expliqué plus haut, de manière que le nombre des quotients incomplets soit pair; désignons par

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{1}, \qquad \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_1}, \qquad \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2}{1 + a_1 a_2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p}{q},$$

les réduites de cette fraction continue; nous considérerons les trois dernières réduites

$$\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}, \qquad \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}, \qquad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p}{q},$$

et nous supposerons d'abord que q_{2n-2} et q_{2n-1} sont supérieurs à A.

D'après ce que nous vu, ou bien $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ et $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ sont adjacentes, nous prenons alors

$$\frac{v}{w} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{r}{s} = \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}},$$

ou bien $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ et $\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}$ sont adjacentes, dans ce cas nous prendrons

$$\frac{v}{w} = \frac{p_{2n-2}}{q_{2n-1}}, \qquad \frac{r}{s} = \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}};$$

dans les deux cas, on voit visiblement que les conditions requises sont vérifiées.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Il reste à étudier le cas où les nombres q_{2n-1} et q_{2n-2} ne sont pas tous les deux supérieurs à A.

Supposons d'abord

$$q_{2n-1} > A > q_{2n-2}.$$

Écrivons la relation fondamentale

$$(7) \qquad q_{2n} = a_{2n-1} q_{2n-1} + q_{2n-2}.$$

Dans le cas où a_{2n-1} est supérieur à 1, on a

$$\frac{q_{2n}}{q_{2n-1}} > 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

et les fractions $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ et $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ sont adjacentes ; on prendra alors

$$\frac{r}{s} = \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} \qquad \text{et} \qquad \frac{v}{w} = \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p}{q}.$$

Supposons maintenant

$$a_{2n-1} = 1,$$

c'est-à-dire

$$(8) \qquad q_{2n} = q_{2n-1} + q_{2n-2};$$

on a, de plus,

$$(9) \qquad q_{2n} > \frac{B}{3},$$

$$(10) \qquad q_{2n-2} < A.$$

Désignons par ρq_{2n-2} le plus petit nombre entier, tel qu'il soit supérieur à A ; on aura

$$(11) \qquad \rho q_{2n-2} > A \geqq (\rho - 1) q_{2n-2}.$$

Posons

$$(12) \qquad \frac{r}{s} = \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}, \qquad \frac{v}{w} = \frac{\rho p_{2n-2}}{\rho q_{2n-2}}.$$

Nous aurons

$$(13) \qquad \frac{r}{s} - \frac{v}{w} = \frac{1}{q_{2n-1} q_{2n-2}} = \frac{\rho}{sw};$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

or on a, d'après (8), (9), (10), (11), (12),

$$s > \frac{B}{3} - A,$$

$$\rho - 1 \leqq \frac{A}{q_{2n-2}} \leqq A,$$

$$w = \frac{\rho}{\rho - 1}(\rho - 1)q_{2n-2} \leqq \frac{\rho}{\rho - 1} A \leqq 2A;$$

donc

$$\frac{\rho w}{s} \leqq \frac{2A(A+1)}{\frac{B}{3} - A} < \frac{1}{\sqrt{5}}, \tag{14}$$

car cette dernière inégalité revient à

$$B > 3\left[A + 2\sqrt{5}(A^2 + A)\right],$$

et elle est certainement vérifiée si l'on suppose $B > 15A^2$, au moins pour $A > 10$. Or, la relation (14) peut s'écrire

$$\frac{\rho}{sw} < \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{w^2},$$

d'où, *a fortiori*,

$$\frac{\rho}{sw} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{w^2} + \frac{1}{s^2}\right).$$

Donc, d'après (13), les fractions $\frac{r}{s}$ et $\frac{v}{w}$ sont adjacentes.

Il reste à examiner le cas où l'on a

$$q_{2n-1} < A.$$

Nous désignerons alors par ρ le nombre entier tel que

$$\rho q_{2n+1} > A \geqq (\rho - 1) q_{2n-1},$$

et nous prendrons

$$\frac{v}{w} = \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{r}{s} = \frac{\rho p_{2n-1}}{\rho q_{2n-1}}.$$

Il viendra, comme tout à l'heure,

$$\frac{r}{s} - \frac{v}{w} = \frac{\rho}{sw},$$

$$\rho - 1 \leqq A,$$

$$s \leqq 2A,$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et

$$w > \frac{B}{3} - A,$$

$$\frac{\rho s}{w} < \frac{2A(A+1)}{\frac{B}{3} - A} < \frac{1}{\sqrt{5}};$$

c'est-à-dire

$$\frac{\rho}{sw} < \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{s^2} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{w^2}\right).$$

Les cas où $\frac{p}{q}$ est irréductible sont ainsi complètement examinés.

Deuxième cas. — *La fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible.*

Soit $\frac{P}{Q}$ la fraction irréductible équivalente à $\frac{p}{q}$; si $Q > A$, nous savons faire correspondre à cette fraction $\frac{P}{Q}$ deux fractions $\frac{v}{w}$ et $\frac{r}{s}$; il est clair que nous pouvons faire correspondre les mêmes à $\frac{p}{q}$. Il reste à examiner le cas où Q est inférieur à A; nous désignerons alors par ρ le nombre entier tel qu'on ait

$$\rho Q > A \geqq (\rho - 1)Q,$$

et nous prendrons

$$\frac{v}{w} = \frac{\rho P}{\rho Q} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{r}{s} = \frac{3\rho^2 PQ + 1}{3\rho^2 Q^2}.$$

Nous aurons

$$\frac{r}{s} - \frac{v}{w} = \frac{1}{3\rho^2 Q^2} = \frac{1}{3w^2} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{w^2} + \frac{1}{s^2}\right).$$

On a d'ailleurs

$$s = 3\rho^2 Q^2 \leqq \frac{3\rho^2}{(\rho-1)^2} A^2 \leqq 12 A^2 < B;$$

donc s et w sont bien compris dans l'intervalle A, B.

Le théorème II est ainsi complètement démontré.

Approximation par les nombres algébriques. Cas du nombre e. — Nous allons envisager maintenant l'approximation par les nombres algébriques. La démonstration du fait qu'un nombre n'est pas algébrique rencontre de très grandes difficultés. Elles ont été surmontées pour la première fois pour le nombre e, puis pour le nombre π. On sait d'ailleurs que ces nombres sont rendus solidaires par la relation

$$e^{i\pi} = -1.$$

L'impossibilité de la quadrature du cercle, c'est-à-dire de la construction par la règle et le compas du côté d'un carré équivalent à un cercle donné, équivaut à l'impossibilité, pour π, d'être racine d'une équation à coefficients entiers du second degré, ou réductible au second degré.

La démonstration de la transcendance de e a été donnée par Hermite en 1873; c'était le premier exemple d'un nombre non algébrique défini par des propriétés analytiques simples. La méthode fort remarquable d'Hermite a été depuis généralisée et transformée, mais elle est restée le fondement de tous les travaux ultérieurs. En 1882, M. Lindemann a démontré par cette méthode la transcendance de π; d'autre part, la démonstration de la transcendance de e a été considérablement simplifiée, notamment par M. Hurwitz. En voici le principe :

Soit l'intégrale

$$\int_0^x e^{-x} f(x)\,dx.$$

On trouve, en intégrant m fois par parties, si $f(x)$ est un polynome de degré m,

$$\int_0^x e^{-x} f(x)\,dx = -[e^{-x} f(x)]_0^x - [e^{-x} f'(x)]_0^x - \ldots - [e^{-x} f^{(m)}(x)]_0^x.$$

Posons

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(m)}(x).$$

Il vient

$$\int_0^x e^{-x} f(x)\,dx = F(0) - e^{-x} F(x);$$

donc

$$e^x F(0) = F(x) + e^x \int_0^x e^{-x} f(x)\,dx.$$

C'est une identité vraie quel que soit le polynome $f(x)$ et quel

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

que soit x. Elle va nous montrer l'impossibilité d'une identité de la forme

$$C_0 + C_1 e + \ldots + C_n e^n = 0,$$

les C étant des entiers.

Supposons que nous ayons fait choix d'un polynome $f(x)$. Nous nous réservons d'ailleurs de donner seulement *a posteriori* le moyen de le choisir. Au moyen de ce polynome $f(x)$, nous allons évaluer les différentes puissances de e. On a

$$e^k F(0) = F(k) + e^k \int_0^k e^{-x} f(x)\, dx,$$

$$(I) \qquad F(0)\sum_0^n C_k e^k = \sum_0^n C_k F(k) + \sum_0^n C_k e^k \int_0^k e^{-x} f(x)\, dx.$$

Nous poserons

$$P(e) = \sum_0^n C_k e^k.$$

Nous allons choisir $f(x)$ de façon à aboutir à une contradiction en supposant $P(e) = 0$.

M. Hurwitz prend pour $f(x)$ le polynome

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1}(1-x)^p (2-x)^p \ldots (n-x)^p.$$

L'idée fondamentale de ce choix est due à Hermite. Mais sa démonstration est simplifiée par l'hypothèse supplémentaire introduite par M. Hurwitz que p soit premier. De cette façon, si ce nombre premier p est supérieur à n, il ne pourra diviser $1.2\ldots n$.

Étudions d'abord $F(0)$. On a, les B étant entiers,

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}[(n!)^p x^{p-1} + B_1 x^p + \ldots].$$

Donc,

$$f(0) = 0, \qquad \ldots, \qquad f^{(p-2)}(0) = 0, \qquad f^{(p-1)}(0) = [n!]^p;$$

$f^{(p-1)}(0)$ n'est pas divisible par p, si p est premier et supérieur à n.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Au contraire, les dérivées suivantes $f^{(p)}(0)$, $\cdots$ contiendront toutes p en facteur; car

$$f^{(p)}(0) = p\,B_1, \qquad f^{(p+1)}(0) = p(p+1)B_2, \qquad \cdots;$$

on trouve ainsi

$$F(0) = A + Mp,$$

A n'étant pas divisible par p.

On trouverait

$$F(1) = M_1 p, \qquad F(2) = M_2 p, \qquad \ldots,$$

parce que

$$f^{(p-1)}(h) = 0,$$

si $h = 1, 2, \ldots, n$ et que $f^{(p+k)}$ est multiple de p, pour $k > 0$.

Donc

$$(1) \qquad \sum_0^n C_k F(k) = C_0 A + Np,$$

N étant entier.

Si donc nous supposons p premier avec C_0 (l'hypothèse de M. Hurwitz $p > C_0$ est plus restrictive qu'il n'est nécessaire), l'expression (1) est certainement différente de zéro, et, comme c'est un entier, on a

$$(\text{II}) \qquad \left| \sum_0^n C_k F(k) \right| \geq 1.$$

D'autre part, si $x < n$, $|f(x)|$ est certainement inférieur à $\frac{1}{(p-1)!} n^{(n+1)p-1}$. Donc,

$$\left| \int_0^k e^{-x} f(x)\, dx \right| < k \frac{1}{(p-1)!} n^{(n+1)p-1};$$

si donc nous posons

$$(2) \qquad \sum_0^n k\,|C_k|\,e^k = H,$$

on a

$$(\text{III}) \qquad \left| \sum_0^n C_k e^k \int_0^k e^{-x} f(x)\, dx \right| < H \frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!}.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Or, connaissant H et n qui résultent de $P(x)$, nous pouvons choisir le nombre p, premier et ne divisant pas C_0, assez grand pour que le second membre soit inférieur à $\frac{1}{2}$. On a alors, d'après l'égalité (I),

$$(IV) \qquad |F(o)P(e)| > \frac{1}{2}.$$

Donc, $P(e) \neq o$, ce qui montre que e n'est pas racine de $P(x) = o$.

Comme nous n'avons fait sur $P(x)$ aucune hypothèse spéciale, ceci démontre que e n'est racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers.

La valeur de la limite inférieure de $P(e)$ va nous permettre, comme pour le théorème de Liouville, de *déterminer, pour l'approximation de e par les nombres algébriques, une limite qu'on ne peut pas dépasser.*

La limite inférieure trouvée pour $|P(e)|$ est $\frac{1}{2|F(o)|}$. Il s'agit d'obtenir l'ordre de grandeur de cette quantité au moyen des coefficients $C_0, C_1, \ldots, C_n$, *n étant supposé fixe*, et les coefficients étant pris de plus en plus grands.

Nous allons donner à p la plus petite valeur compatible avec la validité de la démonstration précédente. Rappelons les conditions trouvées : p est 1° premier; 2° supérieur à n; 3° premier avec C_0; 4° tel que le second membre de (III) soit inférieur à $\frac{1}{2}$.

Envisageons la quatrième condition. Soit u la limite supérieure des valeurs absolues de tous les coefficients du polynome $P(x)$. La quantité H qui figure dans (III) est inférieure à

$$u(1 + e + 2e^2 + \ldots + ne^n) < n(1 + e + \ldots + e^n)u < ne^{n+1}u.$$

Il suffit donc, pour satisfaire à la condition 4°, d'avoir

$$ue^{n+1}\frac{n^{(n+1)p}}{(p-1)!} < \frac{1}{2}.$$

$(p-1)!$ équivaut à $p^p e^{-p}$. La relation devient

$$Mu\frac{[en^{(n+1)}]^p}{p^p} < 1$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

(M ne dépendant que de n), ou

$$p \log p > \log u + p \log e n^{n+1} + \log M.$$

On vérifiera très aisément que la condition

$$p > \frac{2 \log u}{\log_2 u}$$

suffit, à partir d'une assez grande valeur de u, pour assurer la quatrième condition.

La seconde condition finira toujours par être vérifiée, puisque p croîtra indéfiniment avec l'approximation. Occupons-nous de la troisième.

Soit λ un nombre premier tel que le produit $\alpha\beta\ldots\mu\lambda$ des nombres premiers supérieurs à un certain nombre A et ne dépassant pas λ soit supérieur ou égal à u, le produit $\alpha\beta\ldots\mu$ étant inférieur à u. Je dis que, si $C_0 < u$, C_0 est premier avec l'un au moins des nombres $\alpha, \beta, \ldots, \mu, \lambda$. Sans quoi il serait divisible par leur produit, ce qui est impossible, puisqu'il est inférieur à ce produit. Donc, l'un des nombres premiers compris entre A et λ, ou λ lui-même, est premier avec C_0. Si $A = \frac{2 \log u}{\log_2 u}$, ce nombre premier pourra jouer le rôle de p. Donc p peut être supposé inférieur ou égal à λ.

Évaluons l'ordre de λ relativement à u.

Pour atteindre ce but, il nous est nécessaire d'admettre un résultat essentiel de la théorie des nombres premiers, à savoir que le rapport du $m^{\text{ième}}$ nombre premier à $m \log m$ tend vers 1. Admettons cette proposition. Soit ε un nombre arbitrairement petit et fixe. Pour toutes les valeurs de m supérieures à un certain nombre m_0 on a, d'après le théorème précédent,

$$(1 - \varepsilon) m \log m < p_m < (1 + \varepsilon) m \log m,$$

p_m étant le $m^{\text{ième}}$ nombre premier. Évaluons $\sum_{m'}^{m} \log p_m$. Cette somme est comprise entre

$$(m - m') \log(1 - \varepsilon) + \sum_{m'}^{m} \log(m \log m)$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et

$$(m - m')\log(1+\varepsilon) + \sum_{m'}^{m} \log(m \log m).$$

Or

$$\sum_{m'}^{m} (\log m + \log_2 m) = \int_{m'}^{m} (\log m + \log_2 m)\, dm$$
$$+ \theta(\log m + \log_2 m) - \theta'(\log m' + \log_2 m').$$

Ceci est égal à

$$m \log m(1+\delta\varepsilon) - m' \log m'(1+\delta'\varepsilon)$$
$$(\delta^2 < 1, \delta'^2 < 1) \qquad \text{ou} \qquad p_m(1+\delta\varepsilon) - p_{m'}(1+\delta'\varepsilon).$$

Faisons $p_{m'} = \alpha$, $p_m = \lambda$. D'après les définitions de α et de λ, et la valeur de $A = \frac{2\log u}{\log_2 u}$, on a

$$p_{m'} = \frac{2\log u}{\log_2 u}(1+\delta\varepsilon),$$
$$\sum_{m'}^{m} \log p_m = \log u + \theta \log \lambda.$$

Donc, les lettres δ et θ ayant les significations maintes fois exposées,

$$\lambda(1+\delta\varepsilon) - \frac{2\log u}{\log_2 u}(1+\delta\varepsilon)^2 = \log u + \theta \log\lambda.$$

Ceci équivaut, dès que u surpasse une certaine valeur u_1 indépendante de ε, si l'on sait seulement que $\varepsilon < \frac{1}{4}$, à $\lambda = h \log u$, avec $\frac{1}{2} < h < 2$.

Donc, nous pourrons supposer p compris entre $\frac{2\log u}{\log_2 u}$ et $2\log u$. Quand u augmente indéfiniment, il y a entre ces limites un nombre de plus en plus grand de nombres premiers. A partir d'une certaine valeur de u (n est toujours fixe, dans le cours de la démonstration), nous sommes certains que les quatre conditions imposées à p seront simultanément vérifiées.

Évaluons maintenant l'ordre de $F(0)$ pour utiliser l'inégalité

$$|P(e)| > \frac{1}{2|F(0)|}.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

On a

$$F(0)=\int_0^\infty e^{-x}f(x)\,dx,$$

$$|F(0)|<\int_0^\infty e^{-x}|f(x)|\,dx.$$

Pour $x>n$, on a évidemment

$$|f(x)|<\frac{x^{(n+1)p-1}}{(p-1)!}.$$

Pour $x<n$ nous savons que

$$|f(x)|<\frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!}.$$

Donc,

$$|F(0)|<\frac{1}{(p-1)!}\int_0^\infty e^{-x}x^{(n+1)p-1}\,dx+\int_0^n e^{-x}\frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!}\,dx.$$

Le second terme est inférieur à $\frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!}$ et tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$.

Le premier est $\frac{(\overline{n+1}p-1)!}{(p-1)!}$ dont l'expression asymptotique a pour partie principale

$$[(n+1)p]^{\overline{n+1}p}\times p^{-p}=p^{np(1+\theta\varepsilon)},$$

dès que p est assez grand.

Donc

$$(3)\qquad |P(e)|>\frac{1}{p^{np(1+\varepsilon)}},$$

à partir d'une certaine valeur de p.

Cherchons quel ordre de grandeur maximum on doit donner à u, si l'on veut être certain que $|P(e)|$ est supérieur à η.

Il suffira pour cela que

$$p^{np(1+\varepsilon)}<\frac{1}{\eta},$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

d'où

$$np \log p(1+\theta\varepsilon) < \log \frac{1}{\eta},$$

$$p < \frac{1}{n} \frac{\log \frac{1}{\eta}}{\log_2 \frac{1}{\eta}} (1+\theta\varepsilon)^{-1}.$$

Ceci aura lieu *a fortiori* si

$$2 \log u < \frac{1}{n} \frac{\log \frac{1}{\eta}}{\log_2 \frac{1}{\eta}},$$

$$u < \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\frac{h}{\log_2 \frac{1}{\eta}}},$$

h étant un nombre dont on peut prendre en réalité la valeur aussi voisine qu'on voudra de $\frac{1}{n}$, mais inférieure à ce nombre. Si u satisfait à cette condition, on a certainement $|P(e)| > \eta$.

Ceci doit être rapproché du fait que, si le dénominateur d'une fraction rationnelle est inférieur ou égal à q, il sera impossible d'approcher un nombre algébrique de degré n, de moins de $\frac{1}{q^n}$. Ici l'approximation de e par un nombre algébrique ξ de degré n, pour lequel chaque coefficient de l'équation dont il est racine est inférieur à u, ne peut être moindre que $\frac{1}{u^{(n+\varepsilon)\log_2 u}}$. Cette expression s'obtient en remplaçant p par $\log u(1+\theta\varepsilon)$ dans la formule (3) et en remarquant que $|P(e)|$, sensiblement égal à $|\xi - e||P'(e)|$ est inférieur à $ku|\xi - e|$. Le principe qui conduit à ces divers résultats se généralise aisément :

« Des considérations analogues aux précédentes s'appliqueront toutes les fois qu'on aura prouvé qu'une équation ne peut avoir lieu, en s'appuyant sur ce qu'un nombre entier non nul diffère de zéro d'une quantité finie. En étudiant de près la démonstration, on constatera que non seulement elle prouve que le premier membre de l'équation considérée diffère de zéro, mais qu'elle donne de plus une limite inférieure de cette différence [1]. »

---

[1] Borel, *Comptes rendus*, t. CXXVIII, 6 mars 1899, p. 598.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Ainsi, l'approximation par un nombre rationnel d'un nombre algébrique racine de $P(x) = 0$ conduit à former $P\left(\frac{p}{q}\right)$ qui, étant différent de zéro, est supérieur en valeur absolue à $\frac{1}{q^n}$. De là résulte qu'on aura $P\left(\frac{p}{q}\right) > \eta$, tant que $q < \eta^{-\frac{1}{n}}$, formule à rapprocher de celle obtenue dans l'approximation de e.

Une autre application de la remarque précédente se trouve dans l'approximation des nombres algébriques par des nombres de degrés moindres.

Soient

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$

une équation déterminée irréductible à coefficients entiers;

$$g(x) = b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \ldots + b_p$$

une équation de degré fixe p, dont on augmente de plus en plus la limite supérieure de ses coefficients, de façon que l'une de ses racines se rapproche de plus en plus de l'une des racines de $f(x) = 0$. Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ les racines de cette dernière équation, $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les racines de $g(x) = 0$. Formons le résultant :

$$R = b_0^m f(x_1) \ldots f(x_p).$$

C'est une fonction symétrique entière de $x_1, x_2, \ldots, x_p$, qu'on peut mettre également sous la forme

$$R = (-1)^{mp} a_0^p \, g(\xi_1) \, g(\xi_2) \ldots g(\xi_m).$$

R est donc un polynome par rapport aux a et par rapport aux b, et à coefficients entiers.

Donc R est un nombre entier.

L'équation $f(x) = 0$ étant irréductible, si $p < m$, le résultant n'est pas nul. Comme il est entier, il est en valeur absolue supérieur ou égal à 1.

Supposons que x_1 désigne la racine de g très voisine de ξ_1, si ξ_1 est la racine de f que nous voulons approcher. On a

$$g(\xi_1) = (\xi_1 - x_1) \, g'[x_1 + \theta(\xi_1 - x_1)].$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Soit donc M la limite supérieure des nombres $|b|$;

$$g'[x_1 + \theta(\xi_1 - x_1)],$$

quand ξ_1 est très voisin de x_1, est inférieur en module à

$$M(p\,|\xi_1|^{p-1} + \overline{p-1}\,|\xi_1|^{p} + \ldots + 2\,|\xi_1| + 1).$$

Donc

$$|g(\xi_1)| < M\,|\xi_1 - x_1|\,k_1.$$

On a

$$|g(\xi_i)| < M[\,|\xi_i|^{p} + |\xi_i|^{p-1} + \ldots] < k_i M.$$

Donc

$$R < kM^{m}\,|\xi_1 - x_1|,$$

k étant indépendant des b. Donc

$$|\xi_1 - x_1| > \frac{1}{kM^{m}}.$$

Telle est la limite de l'approximation qu'on peut espérer atteindre avec des nombres algébriques de degré p.

On voit que ce degré p n'intervient pas dans la formule d'approximation.

Ce résultat ne semble pas plus avantageux que celui de Liouville, obtenu avec de simples nombres rationnels. Ceci tient uniquement à ce que la limite inférieure de l'approximation trouvée par Liouville est beaucoup plus faible que la vraie, comme il résulte des tout récents travaux de M. Axel Thue. D'après ce dernier auteur on peut, dans la formule précédente, remplacer l'exposant m par $\frac{m}{2} + 1 + \varepsilon$ $(m > 2)$, quelque petit que soit le nombre positif ε, si x_1 est rationnel (1).

---

(1) Dans l'intervalle qui a séparé la rédaction de ce Cours de son impression ont paru trois Mémoires de M. Axel Thue, relatifs à l'approximation des nombres algébriques par des nombres rationnels.

Le premier en date (*Videnskabs-Selskabets Skrifter I. Math. Naturv. Klasse*, 1908, n° 6, Christiania) est consacré à l'approximation par des nombres rationnels des nombres $x = \sqrt[r]{k}$, où r est entier et k rationnel. D'une étude approfondie de certaines fonctions douées de propriétés arithmétiques remarquables, étude que nous ne pouvons songer à résumer ici, M. Thue déduit l'approximation remarquable fournie pour x par une certaine famille de nombres rationnels et un théorème capital, d'ailleurs inclus dans la dernière proposition du troisième Mémoire; M. Thue énonce entre autres résultats celui-ci, dont l'analogie avec le

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Cherchons une limite supérieure de l'approximation qu'il est possible d'atteindre avec plusieurs nombres algébriques d'ordre p. Voici comment on peut obtenir cette limite.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$, p nombres incommensurables indépendants les uns des autres, c'est-à-dire tels qu'il n'existe pas entre eux une relation linéaire à coefficients entiers. Considérons l'expression

$$B = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_p x_p,$$

où les b sont des entiers positifs, négatifs ou nuls. Nous allons montrer, sans rien supposer d'autre sur les x_i, qu'on peut rendre B inférieur à une quantité ne dépendant que de la limite supérieure de b_i. L'inégalité $b_i \leqq M$ nous donne pour b_i $2M + 1$ valeurs, $-M, -(M-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, M$. Pour une valeur donnée de M, les b peuvent prendre $(2M+1)^{p+1} - 1$ systèmes de valeurs, en exceptant le système de tous les b nuls. Les expressions correspondantes B sont toujours distinctes,

---

théorème de Fermat est évidente : k et $n \geq 3$ étant des entiers fixes, l'équation $x^n + (x+k)^n = y^n$ n'a qu'un nombre limité de solutions en nombres x, y entiers.

Le second (même publication, 1908, n° 6) est consacré à l'approximation rationnelle des racines de l'équation du troisième degré $x^3 - ax - b = 0$, où a et b sont entiers et positifs.

Le troisième (*Journal für die reine und angew. Math.*, Heft 4, Bd CXXXV) contient les résultats les plus caractéristiques et les plus généraux. Un premier théorème marque un progrès considérable sur la proposition de Liouville, d'après laquelle $|p\rho - q| > \dfrac{M}{q^{r-1}}$, si ρ est un nombre algébrique de degré r, M étant indépendant de p et de q. D'après M. Thue, quels que soient les nombres k et c, positifs fixes, *l'inégalité* $|p\rho - q| < \dfrac{c}{q^{\frac{r}{2}+k}}$ *n'est vérifiée que par un nombre limité de nombres p et q entiers,* en sorte qu'il existe un nombre M' ne dépendant que de ρ et de k tel que $|p\rho - q| > \dfrac{M'}{q^{\frac{r}{2}+k}}$, quels que soient p et q.

Citons également, dans ce même Mémoire, le théorème final : *L'égalité* $U(p, q) = c$, *où* U *est un polynome en p et q, homogène et de degré supérieur à* 2, *dont les coefficients, ainsi que c, sont entiers,* n'admet qu'un nombre limité de solutions en nombre *p, q entiers.* Dans le premier Mémoire, M. Thue avait démontré ce théorème pour $U = ap^r - bq^r$.

Les résultats contenus dans ces trois Mémoires sont obtenus par une méthode unique : la formation de polynomes en x, A, B, R, dépendant d'un indice n, à coefficients entiers, satisfaisant à l'identité $\rho A(x) - B(x) = (x - \rho)^n R(x)$, ρ étant le nombre algébrique à approcher.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

sinon l'égalité $B - B' = 0$ serait une relation linéaire à coefficients entiers entre les x. D'autre part, les nombres B sont tous compris entre $-M[1 + |x| + \ldots + |x_n|] = -MH$ et $+MH$ (H ne dépend pas de M). Ils sont au nombre de $(2M+1)^{p+1} - 1$. Il y en a donc deux d'entre eux qui sont distants au plus de

$$\frac{2MH}{(2M+1)^{p+1}-2}.$$

Soient $b_0, b_1, \ldots, b_p$; $b'_0, b'_1, \ldots, b'_p$ les valeurs correspondantes des b. L'expression B correspondant à $b_0 - b'_0$, $b_1 - b'_1, \ldots$ sera inférieure à $\frac{2MH}{(2M+1)^{p+1}-2}$ et l'on aura

$$|b'_i - b_i| \leqq 2M.$$

Donc, l'inégalité $b_i \leqq N$ entraîne l'existence d'un système de nombres b_i, tels que

$$|B| < \frac{HN}{(N+1)^{p+1}-2}$$

(d'après cette démonstration, N est pair, mais on se libère aisément de cette condition). On a donc, pour un certain système de nombres b,

$$|b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_p x^p| < \frac{H'}{N^p},$$

H' étant indépendant de N.

Appliquons ceci à l'approximation d'un nombre algébrique ξ, de degré n, par des nombres de degré p inférieur. L'équation $f(x) = 0$ dont ξ_1 est racine étant irréductible, les nombres ξ_1, $\xi_1^2, \ldots, \xi_1^p$ sont indépendants. Il est donc possible de trouver un système de nombres $b_0, b_1, \ldots, b_p$, tels que

$$|b_0 + b_1\xi_1 + \ldots + b_p\xi_1^p| < \frac{H'}{N^p},$$

H' ne dépendant que de l'ordre de grandeur de ξ_1 et non pas de N, qui est la limite supérieure des b_i. Admettons que le polynome

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p$$

ait une racine x_1 de plus en plus voisine de ξ_1, quand N aug-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

mente. On a

$$|\xi_1 - x_1|\,|g'(\xi_1)| < \frac{H_2}{N^p} \qquad \text{ou} \qquad |\xi_1 - x_1| < \frac{H_3}{N^{p-1}},$$

H_2 et H_3 étant indépendants de N.

Cette limite ne coïncide avec la limite inférieure $\frac{H''}{N^n}$ que si

$$p = n - 1.$$

Si $p = 1$, nous retrouvons le résultat déduit de la théorie des fractions continues.

A titre d'exemple, considérons l'équation $x^3 = 2$. On a

$$\left|\frac{p^3}{q^3} - 2\right| = \frac{A}{q^3},$$

A étant un entier, ou

$$\left(\frac{p}{q} - \sqrt[3]{2}\right) = \frac{A}{(3\sqrt[3]{4} + \varepsilon)q^3}.$$

Pour que cette approximation fût de l'ordre de $\frac{1}{q^3}$, il faudrait que A restât fini. Y a-t-il une infinité de valeurs de p et de q, telles que $p^3 - 2q^3$ reste fini? Cette difficile question vient d'être résolue négativement par M. Axel Thue [1]. Mais le résultat que nous avons obtenu plus haut nous apprend qu'il est possible de trouver des entiers a, b, c, tels que

$$|a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c| < \frac{H}{q^3},$$

$|a|$, $|b|$ et $|c|$ étant inférieurs à q.

D'après la limitation inférieure que nous avons trouvée pour un polynome en e à coefficients entiers, on peut étudier, comme nous venons de le faire, l'approximation des nombres algébriques en e par d'autres nombres algébriques en e, mais d'ordre inférieur. Nous appelons *nombres algébriques* en e les nombres racines d'une équation algébrique dont les coefficients sont des polynomes en e à coefficients entiers. Soient

$$f(x, e) = 0$$

---

(1) *Voir* la note au bas de la page 164.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

une équation déterminée, entière en x et e;

$$g(x, e) = 0$$

une équation de degrés fixes en x et e, mais à coefficients variables et de plus en plus grands. Le résultant des deux équations est un polynome en e à coefficients entiers. Nous savons le limiter inférieurement. Nos méthodes s'appliquent donc pour nous donner une limite de l'approximation d'une racine de f par une racine de g.

On peut enfin, comme l'a fait Lindemann, envisager des expressions de la forme $a_0 e^{\xi_0} + \ldots + a_n e^{\xi_n}$, où les ξ sont algébriques et les a entiers. Lindemann a montré qu'une telle expression n'est pas nulle. Il suffirait d'en calculer une limite inférieure, en fonction de la hauteur des nombres algébriques ξ et des modules des a pour pouvoir encore appliquer les mêmes principes.

FIN.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
43323 Quai des Grands-Augustins, 55.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

BAIRE (René), Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. — **Leçons sur les théories générales de l'Analyse.** 2 volumes in-8 (25-16) se vendant séparément :

TOME I : *Principes fondamentaux. Variables réelles.* Volume de x-232 pages, avec 17 figures; 1907........................ 8 fr.

TOME II : *Variables complexes. Applications géométriques.* Volume de x-347 pages, avec 25 figures; 1908........................ 12 fr.

HALPHEN (G.-H.), Membre de l'Institut. — **Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.** 3 volumes in-8 (25-16), se vendant séparément :

Ire PARTIE : *Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en série;* 1886.................................. 15 fr.

IIe PARTIE : *Applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géodésie, à la Géométrie et au Calcul intégral;* 1888 .... 20 fr.

IIIe PARTIE : *Fragments.* (*Quelques applications à l'Algèbre et en particulier à l'équation du 5e degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.*) Publié par les soins de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences; 1891. 8 fr. 50 c.

HUMBERT (G.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — **Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique.** 2 volumes in-8 (25-16), se vendant séparément.

TOME I : *Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques,* avec 111 figures; 1902........................ 16 fr.

TOME II : *Complément du calcul intégral. Fonctions analytiques et elliptiques. Équations différentielles,* avec 91 figures; 1904..... 16 fr.

RAFFY (L.), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure. — **Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse.** *Éléments de la théorie des courbes et des surfaces.* In-8 (25-16), avec figures; 1897........................ 7 fr. 50 c.

RIQUIER (Charles), Professeur à la Faculté des Sciences de Caen, Lauréat de l'Institut. — **Les systèmes d'équations aux dérivées partielles.** In-8 (25-16), de XXIII-590 pages, avec figures, 1910 .... 20 fr.

STURM, Membre de l'Institut. — **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique**, revu et corrigé par *E. Prouhet*, Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique, et augmenté de la **Théorie élémentaire des fonctions elliptiques**, par *H. Laurent*, Répétiteur à l'École Polytechnique. 13e édition, mise au courant des nouveaux programmes de la Licence, par *A. de Saint-Germain,* Professeur à la Faculté des Sciences de Caen. 2 volumes in-8 (23-14), avec figures; 1905.

Broché................ 15 fr. | Cartonné.......... 16 fr. 50 c.

44658 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1