

ANNALI
DI
MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa

Salvatore Pincherle in Bologna

Tullio Levi-Civita in Roma

Corrado Segre in Torino

SERIE QUARTA - TOMO I

(LVIII DELLA RACCOLTA)

Fascicolo 1 - Novembre 1923



BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

CASA EDITRICE NICOLA ZANICHELLI - BOLOGNA

ANNALI DI MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

Avendo la ditta Turati Lombardi e C. di Milano rinunciato alla antica e benemerita collaborazione quale editrice del periodico, la pubblicazione viene assunta dalla nostra Casa e si inizia col presente fascicolo: primo del primo volume della IV Serie (LVIII della Raccolta).

Prezzo del volume I (Serie IV) di 320 pagine, diviso in quattro fascicoli
ITALIA L. 50 - ESTERO Frs. 50

Le memorie, tutte originali, sono opera di collaboratori italiani e stranieri; esse vengono stampate in lingua italiana, inglese, francese o tedesca.

La pubblicazione a tutt'oggi consta di tre serie:

I SERIE - pubblicata a Roma dal 1850 al 1866, constava di 15 volumi, completamente esauriti:

II SERIE - pubblicata a Milano dal 1867 al 1897, consta di 26 volumi. Della I. e II. Serie venne pubblicato nel 1904 l'Indice Generale. (Sono esauriti i volumi I, II, III, IV, XXII, XXIV, XXV, XXVI).

III SERIE - pubblicata a Milano dal 1898 al 1922 di 31 volumi, due dei quali (XX e XXI) dedicati alla memoria del matematico Lagrange, in occasione del centenario della sua morte nel 1913. (Sono esauriti i volumi I a XII).

Ogni volume si vende separatamente al prezzo di L. 25 —.

Esiste qualche copia di fascicoli separati. A richiesta, l'Editore darà gli schiarimenti necessari.

Per la Redazione e per la parte scientifica, dirigersi ad uno dei componenti il Comitato di Direzione.

Per ogni fatto pertinente all'Amministrazione e per l'invio dei Cambi dirigersi esclusivamente a

NICOLA ZANICHELLI, EDITORE IN BOLOGNA

(Vedi le Norme per gli Autori, nella terza pagina della copertina)

AVVERTENZA

Col presente fascicolo si inizia la quarta serie degli Annali di Matematica pura ed applicata. Non è d'uopo ricordare quanto il glorioso periodico, la cui origine risale al 1850, abbia contribuito a dare incremento alla ricerca matematica nel nostro paese, ed a tenerla in intimo contatto colla produzione straniera. Basta una occhiata all'Indice generale delle prime serie (1850-1897) pubblicato nel 1904 per cura di Ulisse Dini, per vedere quale copia di importanti studi racchiuda la raccolta delle cinquanta prime annate del periodico, e di quali nomi insigni, italiani e stranieri, si onori l'elenco degli Autori. Dei volumi posteriori al 1897 non è stato ancora pubblicato l'indice, ma, venendo alla luce, esso non temerà il confronto col precedente, nè per il ricco elenco di interessanti lavori, nè per la lista di nomi di coloro che vi hanno collaborato.

Nel 1850, Barnaba Tortolini fondava in Roma il primo periodico italiano di matematica, sotto il nome di Annali di scienze matematiche e fisiche. Di questo giornale, in formato piccolo, uscivano fino al 1857 otto volumi. Nel 1858 esso si trasformava in un periodico di grande formato, ed assumeva il titolo, che conserva ancora, di Annali di Matematica pura ed applicata, di cui i sette volumi comparsi fino al 1866 costituiscono la prima serie; la direzione ne era tenuta dal fondatore Tortolini, colla collaborazione di Betti, Brioschi e Genocchi. Nel 1867, per accordi intervenuti cogli altri redattori, la direzione degli Annali passava da Roma a Milano, e veniva assunta da Francesco Brioschi;

con quanta costante ed efficace energia Egli l'abbia tenuta per un trentennio, i 26 volumi usciti in quel periodo, e costituenti la seconda serie, ne forniscono ampiamente la prova.

La terza serie ha principio alla morte del Brioschi: la direzione fu composta, in origine, dai professori Beltrami, Cremona, Dini e Jung; morti successivamente il Beltrami, il Cremona e il Dini, questi venivano sostituiti dai professori Bianchi, Segre e Pincherle. Di questa serie terza, il primo volume (27° degli Annali) usciva alla luce nel 1898, e sul finire del 1922 compariva l'ultimo fascicolo del 31° volume della serie.

La parte editoriale e tipografica, fino dal 1867, era stata affidata alla ditta milanese Bernardoni, poi Rebeschini, e da ultimo Turati e Lombardi. Ma l'impresa, sempre poco redditizia per l'editore, per quanto gli autori degli articoli non fossero retribuiti e per quanto fosse sempre stata, ben s'intende, interamente gratuita l'opera dei direttori degli Annali, venne a costituire in questi ultimi anni una vera perdita per la ditta assuntrice. Per assicurare la pubblicazione delle due annate 1921 e 1922, fu d'uopo ricorrere al buon volere di amici della scienza; alcuni dei quali, per amore agli studi, in omaggio alla memoria dei fondatori e dei continuatori degli Annali, da Brioschi a Dini, e mercè le indefesse premure del prof. Jung, appoggiate dal compianto sen. Saldini, contribuirono per una somma che bastò alla pubblicazione dei tomi 30° e 31°. Ma coll'ultimo fascicolo del tomo 31°, la ditta Turati e Lombardi dichiarava di rinunciare alla pubblicazione, e con ciò il pericolo della scomparsa dell'insigne periodico si faceva quasi inevitabile. Il Comitato di Direzione degli Annali da una parte, dall'altra la Unione matematica italiana recentemente costituitasi, si sono vivamente preoccupati di codesto pericolo, poichè la scomparsa degli Annali di Matematica avrebbe rappresentato per la scienza italiana una vera iattura, ed hanno svolto, ad impedirla, un'opera assidua e fortunatamente giunta a buon fine. Le elargizioni di alcuni generosi, fra cui vanno in speciale modo ricordati l'Istituto per le Onoranze a Giuseppe

Colombo e l'ing. prof. Ottorino Pomini; non pochi abbonamenti anticipati al prossimo volume, procurati negli Stati Uniti d'America dal cordiale interessamento del prof. Virgil Snyder; il concorso volonteroso e disinteressato della Casa editrice N. Zanichelli di Bologna, che sotto l'illuminata direzione del gr. uff. O. Franchi si è resa tanto benemerita della produzione matematica nel nostro paese, e che assume la pubblicazione degli Annali, tutto ciò assicura la continuazione del periodico e ci permette di presentare, col prossimo fascicolo, l'inizio di una nuova serie che confidiamo abbia ad essere, mercè la volonterosa collaborazione degli studiosi, un proseguimento non degenerare di quelle che l'hanno preceduta.

Con rammarico dobbiamo annunziare che il prof. Jung, per ragioni d'età e di salute, ha deciso di ritirarsi dal Comitato di Direzione degli Annali di Matematica. Le insistenze dei colleghi del Comitato non hanno potuto rimuovere l'esimio scienziato da questa determinazione, che non potrà essere appresa senza rincrescimento da tutti coloro che sanno quanta efficace e faticosa opera Egli abbia dato agli Annali per un lunghissimo corso di anni e con mirabile abnegazione. I colleghi sono stati concordi nel designare a suo successore il prof. Levi-Civita.

Il Comitato di Direzione degli "Annali di Matematica",

**L. BIANCHI - T. LEVI-CIVITA
- S. PINCHERLE - C. SEGRE**

Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve sghembe

Memoria I^a di GUSTAVO SANNIA (a Modena)

INTRODUZIONE

1. La *geometria proiettivo-differenziale delle curve sghembe* ⁽¹⁾, fondata da HALPHEN ⁽²⁾, ha ricevuto da WILCZYNSKI ⁽³⁾ un più sistematico sviluppo. In questa Memoria e in una successiva la presenterò sotto una veste nuova e con nuovi risultati, ricostruendola con un procedimento che, pur accostandosi a quello del WILCZYNSKI, è più *intrinseco*, quindi consente uno studio più approfondito e con maggiore semplicità di mezzi.

Costruirò due *metriche proiettive* differenti, una (generale) per le curve *non appartenenti a un complesso lineare* ed una per le rimanenti ⁽⁴⁾; ma le svilupperò contemporaneamente, e, mercè opportune convenzioni, con un solo algoritmo. Questo algoritmo è tale che permette di studiare sistematicamente insieme con ogni *curva* v (varietà ∞^1 di punti) anche *la sviluppabile* v (varietà degli ∞^1 suoi piani osculatori) e senza nuovi calcoli; ciò è importante, perchè sembra che, solo considerando la v in tale duplice modo, sia possibile di caratterizzare geometricamente molti enti che si presentano spesso analiticamente definiti, come i tetraedri D, Δ, F (§ 4), O, Ω (§ 6), che qui compaiono per la prima volta, insieme con *le formole di Frenet-Serret proiettive* (§ 4), *il punto S e il piano σ* (n.° 37), ecc..

⁽¹⁾ Le curve *piane* saranno qui escluse. Di esse ho già trattato in un precedente lavoro recante un titolo analogo (Rend. della R. Accad. dei Lincei: vol. XXXI, serie 5^a, 2° sem., pagg. 450-454 e 503-506; vol. XXXII, serie 5^a, 1° sem., pagg. 17-19 e 432-434). Come mi ha fatto rilevare L. BERWALD, tale lavoro ha vari punti di contatto con la Sua Nota *Zur projectiven Differentialgeometrie der Ebene*. (Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung B. 30, pag. 110).

⁽²⁾ *Sur les invariants différentiels des courbes gauches* (Oeuvres, t. II, pag. 352).

⁽³⁾ *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, Cap. XIII e segg. (Teubner, Leipzig, 1906).

⁽⁴⁾ *Escluse però le cubiche sghembe* che si presentano come *linee di lunghezza nulla* in ambedue le metriche.

Supporrò che la curva v sia definita da equazioni parametriche

$$(1) \quad x^{(r)} = x^{(r)}(u), \quad (r = 1, 2, 3, 4),$$

essendo le $x^{(r)}$ coordinate proiettive omogenee di un suo punto generico P rispetto a un sistema fisso di riferimento.

Nella definizione delle funzioni (1) ⁽⁵⁾ è dunque insito un fattore di proporzionalità $h = h(u)$ *arbitrario*; ma io lo fisserò poi con legge *intrinseca* (cioè indipendente dalla scelta del sistema di riferimento e del parametro u) ed *invariante per collineazioni* (cioè che è la stessa per P e per il punto omologo di ogni curva collineare a v). Questa *normalizzazione* delle coordinate omogenee è uno dei capisaldi della nuova trattazione ⁽⁶⁾; come anche l'uso del *Calcolo differenziale assoluto con una variabile* ⁽⁷⁾ che ha il merito di introdurre nei calcoli *soltanto funzioni che sono invarianti per ogni trasformazione del parametro u* (le sole cioè che hanno interesse).

2. Ecco in succinto in che consiste. Con qualche legge corrisponda ad una funzione f di u una funzione \bar{f} di \bar{u} : se per ogni trasformazione $u = u(\bar{u})$ si ha $fdu^n = \bar{f}d\bar{u}^n$ (per un certo intero n) dico che f è un *covariante di ordine n* , che indico con f_n . (Se $n = 0$, f è *invariante*). È evidente che $f_n + g_n, f_n h_m, f_n : h_m$ sono covarianti di ordine $n, n + m, n - m$ rispettivamente.

Così, se al coefficiente a_1 di un differenziale

$$(2) \quad A = a_1 du$$

si fa corrispondere quello del trasformato $\bar{a}_1 d\bar{u}$ di A mediante $u = u(\bar{u})$, a_1 è covariante di ordine 1, quindi a_1^n di ordine n . Se ad ogni funzione f si fa corrispondere la trasformata, ogni funzione è covariante di ordine 0 (invariante), e la sua derivata prima f' è covariante di ordine 1, che perciò indico pure con f_1 ; ma *non* sono covarianti le derivate successive f'', f''', \dots

Per ovviare a ciò, introduco nei calcoli, invece delle derivate ordinarie $f^{(n)}$, le *derivate covarianti f_n rispetto ad un differenziale (2)* (perchè sono covarianti) definite dalle

$$(3) \quad f_{n+1} = f_n' - nSf_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots; S = a_1' : a_1).$$

⁽⁵⁾ Che supporrò finite e continue con tutte le derivate che compariranno nei calcoli. In seguito (a partire dal n.° 10) le indicherò più semplicemente con x', x'', x''', x^{iv} . Cfr. ⁽²³⁾.

⁽⁶⁾ Che perciò è da porsi accanto a quella ben nota del FUBINI della geometria delle varietà a più di una dimensione.

⁽⁷⁾ Che ho esposto in una Nota degli Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. LXII, 1922, pag. 293.

Le ordinarie $f^{(n)}$ non sono che le f_n formate rispetto al differenziale da ($a_1 = 1$).

La derivazione covariante si applica ad un covariante che sia funzione razionale di altri covarianti, con le stesse regole della derivazione ordinaria. Ed in tale operazione la funzione a_1 va trattata come una costante, essendo $a_2 = a_1' - Sa_1 = 0$.

Le f_n si esprimono linearmente con le $f^{(n)}$, e viceversa; così:

$$(4) \quad \begin{cases} f' = f_1, & f'' = f_2 + Sf_1, & f''' = f_3 + 3Sf_2 - (S^2 + S')f_1, \\ f^{IV} = f_4 + 6Sf_3 + (7S^2 + 4S')f_2 + (S^3 + 3SS' + S'')f_1, \dots \end{cases}$$

§ 1. Arco e curvatures proiettivi.

3. Supporremo sempre che la curva v sia priva di piani osculatori stazionari, e quindi che non sia piana (nell'arco che si considera), e perciò che il wronskiano delle (1) non sia nullo:

$$(5) \quad w = |xx'x''x'''| \neq 0 \text{ (}^8\text{)}.$$

Allora, fissato che sia (con qualche legge) il fattore h (n.° 1), le (1), costituiranno un sistema fondamentale di soluzioni di una ben determinata equazione differenziale del tipo

$$(6) \quad f^{IV} + 4\beta f''' + 6\gamma f'' + 4\delta f' + \varepsilon f = 0,$$

ove

$$(7) \quad \begin{cases} 4\beta = - |xx'x''x^{IV}| : w, & 6\gamma = |xx'x'''x^{IV}| : w, \\ 4\delta = - |xx''x'''x^{IV}| : w, & \varepsilon = |x'x''x'''x^{IV}| : w. \end{cases}$$

Viceversa, ogni equazione del tipo (6) definisce, coi suoi sistemi fondamentali di soluzioni, una curva v e tutte le sue collineari, ossia individua una curva a meno di una collineazione (come è noto), il che basta per la Geometria proiettiva. Però non vi è corrispondenza biunivoca tra le equazioni del tipo (6) e i sistemi di curve collineari dello spazio, dipendendo la (6) dalla scelta arbitraria di u e di h .

(⁸) Il 1° membro indica il determinante di 4° ordine le cui orizzontali si ottengono ponendovi per x le funzioni (1) successivamente. Analoghi significati hanno i simboli analoghi che compaiono in altre formole, come le (7) e (7').

4. Per ovviare a ciò, incominciamo con l'introdurre in (6), al posto delle $f^{(n)}$, le f_n prese rispetto ad un differenziale (2) *arbitrario*, mediante le (4). Otteniamo così l'equazione

$$(6') \quad f_4 + 4b_1f_3 + 6c_2f_2 + 4d_3f_1 + e_4f = 0,$$

ove

$$(8) \quad \begin{cases} b_1 = \beta + \frac{3}{2}S, & c_2 = \gamma + 2S\beta + \frac{1}{6}(7S^2 + 4S'), \\ d_3 = \delta + (S^2 + S')\beta + \frac{3}{2}S\gamma + \frac{1}{4}(S^3 + 3SS' + S''), & e_4 = \varepsilon. \end{cases}$$

Tutti i termini di (6') sono covarianti di ordine 4, essendo i coefficienti covarianti di ordine 1, 2, 3, 4 rispettivamente.

Ciò risulta dalle formole

$$(7) \quad \begin{cases} w = |xx_1x_2x_3|, \\ 4b_1 = -|xx_1x_3x_4|:w, & 6c_2 = |xx_1x_3x_4|:w, \\ 4d_3 = -|xx_2x_3x_4|:w, & e_4 = |x_1x_2x_3x_4|:w \quad (9). \end{cases}$$

La primitiva (6) è contenuta nella (6') per $A = du$ ossia $a_1 = 1$ (n.° 2).

La (6') ha carattere *invariantivo* rispetto alle trasformazioni del parametro u . [Non così la (6)]. Essa però dipende dai due elementi arbitrarii h e A : *normalizzandoli*, cioè fissandoli con legge intrinseca ed invariante per collineazioni, perverremo ad una *equazione normale*, in corrispondenza biunivoca con la curva v (e le sue collineari).

5. Anzitutto, se si pone

$$(9) \quad f = \lambda x,$$

con

$$(10) \quad \lambda = ce^{-\int b_1 du} = ce^{-\int \beta du} : a_1^{\frac{3}{2}} \quad (10),$$

(9) Analoghe alle (5) e (7). Si noti che $|x_p x_q x_r x_s|$ è covariante di ordine $p + q + r + s$; inoltre che, quando le (1) si sottopongono ad una sostituzione lineare omogenea a coefficienti costanti di modulo $M \neq 0$ (collineazione non degenera) esso si moltiplica per M ; infine che, per le (4) è

$$|xx_1x_2x_3| = |xx'x''x'''| = w,$$

sicchè $|xx_1x_2x_3|$ è un covariante di ordine 6 che è *indipendente da A* (ma dipende da h). Infine per la detta sostituzione i coefficienti (7) di (6') non si alterano e perciò sono *invarianti per collineazioni*.

(10) Alla costante c converrà dare un valore immaginario puro quando $a_1 < 0$ (se si è e si vuol restare nel campo reale).

la (6') diventa

$$(11') \quad x_4 + 6p_2x_2 + 4q_3x_1 + r_4x = 0,$$

con coefficienti che valgono

$$(12) \quad \begin{cases} p_2 = c_2 - b_1^2 - b_2, & q_3 = d_3 - 3b_1c_2 + 2b_1^3 - b_3, \\ r_4 = e_4 - 4b_1d_3 + 6(b_1^2 - b_2)c_2 - 3b_1^4 + 6b_1^2b_2 + 3b_2^2 - b_4, \end{cases}$$

e sono perciò covarianti dell'ordine espresso dal rispettivo indice.

Tali coefficienti non dipendono da h (ma solo da A) ⁽¹¹⁾.

6. Esaminiamo come essi variano al variare di A. Sia

$$(11) \quad y^{iv} + 6\pi y'' + 4xy' + \rho y = 0$$

la (11') corrispondente ad $A = du$ (quindi a derivate ordinarie). Poichè essa non è che una delle infinite forme che può assumere la (6) variando h , si deve poterla trasformare nella (11') operando come si è fatto sulla (6): si perviene così ad un'equazione del tipo (6'), con

$$(13) \quad b_1 = \frac{3}{2}S, \quad c_2 = \pi + \frac{1}{6}(7S^2 + 4S'), \quad d_3 = \chi + \frac{3}{2}\pi S + \frac{1}{4}(S^3 + 3SS' + S''), \quad e_4 = \rho,$$

giusta le (8); e poi alla (11'), nella quale, poichè per la (3) è

$$(14) \quad \begin{aligned} b_2 &= \frac{3}{2}(S' - S^2), & b_3 &= \frac{3}{2}(S'' - 4SS' + 2S^3), \\ b_4 &= \frac{3}{2}(S''' - 7SS'' - 4S'^2 + 18S^2S' - 6S^4), \end{aligned}$$

i coefficienti avranno, giusta le (12), i valori

$$(15) \quad \begin{cases} p_2 = \pi + \frac{5}{2}(S^2 - 2S'), & q_3 = \chi - 3S\pi + \frac{5}{4}(3SS' - S'' - S^3), \\ r_4 = \rho - 6S\chi + 9(3S^2 - 2S')\pi + \frac{3}{16}(27S^4 - 108S^2S' + 36S'^2 + 48SS'' - 8S''). \end{cases}$$

⁽¹¹⁾ Come è facile vedere. Cfr. la dimostrazione dell'analogo risultato di loc. cit. ⁽⁴⁾, n. 4.

Le (15) mostrano come variano i coefficienti di (11') variando A (quindi S) ⁽¹²⁾.

Se ne deducono dei covarianti *indipendenti da A*. Così, dalla 2^a e dalla

$$(16) \quad p_3 = p_2' - 2Sp_2 = \pi' - 2S\pi + 5(3SS' - S'' - S^3),$$

segue che $q_3 - \frac{3}{2}p_3 = \chi - \frac{3}{2}\pi'$; or poichè i due membri sono formati con la stessa legge, uno con A e i coefficienti di (11') e l'altro con du e i coefficienti di (11), si conclude che:

$$(17) \quad \theta_3 = q_3 - \frac{3}{2}p_3 = \chi - \frac{3}{2}\pi'$$

è un covariante di 3° ordine indipendente da A (oltre che da h) ⁽¹³⁾.

Poi, dalle (15) e (16), si deducono, derivando covariantemente, i covarianti

$$p_4 = \pi'' - 5S\pi' + 2(3S^2 - S')\pi + \frac{5}{6}s, \quad q_4 = \chi' - 3S\pi' - 3S\chi + 3(3S^2 - S)\pi + \frac{5}{4}s$$

(ove s è un certo polinomio in S, S', \dots), i quali, combinati linearmente con p_2^2 ed r_4 (15) (con coefficienti tali da eliminare S, S', \dots), danno *il covariante di 4° ordine*

$$(18) \quad \vartheta_4 = r_4 - 2q_4 + \frac{6}{5}p_4 - \frac{81}{25}p_2^2 = \rho - 2\chi' + \frac{6}{5}\pi'' - \frac{81}{25}\pi^2$$

che è indipendente da A (oltre che da h) ⁽¹⁴⁾.

⁽¹²⁾ Dalla 1^a segue che alla (11') si può dar la forma

$$(a) \quad x_4 + 4q_3x_1 + r_4x = 0,$$

se si sceglie per S (da cui si deduce a_1 , quindi A , con una quadratura) una soluzione qualunque dell'equazione di Riccati $S' = \frac{1}{2}S^2 + \frac{1}{5}\pi$. Che se poi si cambia la variabile u col porre $a_1 du = d\bar{u}$, essa si trasforma in altra dello stesso tipo, ma nelle derivate ordinarie rispetto a \bar{u} ,

$$(a') \quad x^{IV} + 4\chi x' + \rho x = 0$$

e che è detta *forma canonica di Laguerre-Forsyth* della (6) (da WILCZYNSKI, che ne ha fatto uso sistematico). Però essa non ha carattere invariante come la (a).

⁽¹³⁾ Anche da h , perchè i coefficienti di (11'), coi quali è formato θ_3 , non dipendono da h (n.° 5).

⁽¹⁴⁾ Lo si dimostra come per θ_3 .

7. Dunque per normalizzare A (n.° 4) basta assumere in esso

$$(19) \quad a_1 = \sqrt[3]{\theta_3} \quad \text{o} \quad (19') \quad a_1 = \sqrt[4]{|\vartheta_4|},$$

purchè risulti $a_1 \neq 0$ lungo l'arco di v che si considera, affinché la (3) sia applicabile.

In ambo i casi la corrispondente equazione (11') sarà la richiesta *equazione normale* (n.° 4). Un suo sistema fondamentale di soluzioni sarà costituito dalle coordinate (1) di un punto generico P di v (o di una sua collineare) ma col fattore di proporzionalità h fissato ⁽¹⁵⁾ in modo intrinseco e invariante per collineazioni: le diremo *coordinate normali* di P .

A sarà il differenziale di una funzione $\sigma(u)$ definita (a meno di una costante additiva) in modo intrinseco e invariante per collineazioni: diremo $\sigma(u) - \sigma(u_0)$ *lunghezza proiettiva* dell'arco di v limitato dai punti corrispondenti ai valori u_0 e u del parametro.

Le assunzioni (19) e (19') conducono a due *metriche proiettive* diverse; ma, poichè l'ordine massimo delle derivate delle (1) da cui dipendono θ_3 e ϑ_4 è evidentemente minore in θ_3 (cfr. n.° 9), e d'altra parte dev'essere $a_1 \neq 0$, è naturale applicare:

1^a) La prima metrica (19) ad ogni curva lungo la quale non sia identicamente $\theta_3 = 0$, cioè che *non appartenga a un complesso lineare*, e limitatamente ad archi privi di punti (isolati) nei quali sia $\theta_3 = 0$, ossia nei quali *il complesso lineare osculatore è surosculatore* ⁽¹⁶⁾.

⁽¹⁵⁾ A prescindere da un fattore *numerico* (perciò senza importanza) che è la costante c di (10).

⁽¹⁶⁾ Per ora dimostriamo solo che: *se in P è $\theta_3 = 0$, ivi il complesso lineare osculatore di v è surosculatore*. Da tale teorema e dal reciproco (che risulterà poi da una formola del n.° 27) segue che: *l'identità $\theta_3 = 0$ caratterizza le curve appartenenti a un complesso lineare*.

Per la dimostrazione si può supporre che l'equazione a cui soddisfanno le (1) sia la (a')

$$(a'') \quad x_4 + 4\chi x_1 + \rho x - 0,$$

convenendo che le derivate covarianti siano fatte rispetto a du (n.° 2).

L'equazione lineare in coordinate di retta $ap^{(1,2)} + \dots = 0$ del complesso lineare osculatore di v in P è quella che è soddisfatta dalle ordinate $p^{(i,k)} = x^{(i)}x_1^{(k)} - x^{(k)}x_1^{(i)}$ della tangente di v in P e dalle loro derivate $p_1^{(i,k)}, \dots, p_4^{(i,k)}$ dei primi 4 ordini. Ora, derivando successivamente ed eliminando sempre le derivate quarte delle $x^{(i)}$ mediante la (a''), si perviene ad una espressione del tipo $a\chi + bp_1^{(i,k)} + cp^{(i,k)}$ per $p_5^{(i,k)}$, e se ne deduce che, se $\chi = 0$ [cioè se $\theta_3 = 0$, per la (18) applicata ad (a'')], anche le $p_5^{(i,k)}$ soddisfanno la stessa equazione, e perciò che il complesso è surosculatore.

2^a) La seconda metrica (19') solo alle curve appartenenti a un complesso lineare, escluse le cubiche sghembe ⁽¹⁷⁾.

In ambedue le metriche diremo *curvature proiettive (prima e seconda)* di v in P gli invarianti

$$(20) \quad I = \frac{3}{5} p_2 : a_1^2, \quad J = \vartheta_4 : a_1^4,$$

il secondo dei quali varrà sempre ± 1 nella 2^a metrica.

Avvertenza. D'ora in poi le derivate covarianti si intenderanno sempre fatte rispetto all'elemento lineare proiettivo $d\sigma = a_1 du$, ove a_1 ha il valore (19) o (19').

E poichè $\theta_3 = a_1^3$ o $\theta_3 = 0$ (rispettivamente nelle due metriche) nella derivazione covariante θ_3 dovrà esser trattata come una costante (n.° 2).

8. Riassumiamo il procedimento da seguire per calcolare gli enti $d\sigma$, I e J di una v definita da equazioni parametriche (1).

Scelto ad arbitrio un differenziale $A \equiv (2)$, si costruisca l'equazione (6'), alle derivate covarianti rispetto ad A , a cui soddisfanno le (1), per es. mediante le (7'); poi l'equazione (11') mediante le (12); indi si calcolino θ_3 e ϑ_4 mediante le (17) e (19) (prime espressioni); poi si costruisca l'elemento $d\sigma = a_1 du$, calcolando a_1 mediante la (19) (se $\theta_3 \neq 0$) o la (19') (se $\theta_3 = 0$, $\vartheta_4 \neq 0$), ed I e J mediante le (20). Infine per ottenere le coordinate normali dei punti di v , si moltiplichino quelle date (1) per λ dato dalla (10) (prima espressione).

Se, in particolare, si assume du come differenziale A : si costruirà l'equazione alle derivate ordinarie (6) a cui soddisfanno le (1); poi la (11), i cui coefficienti varranno

$$(21) \quad \begin{aligned} \pi &= \gamma - \beta^2 - \beta', & \chi &= \delta - 3\beta\gamma + 2\beta^3 - \beta'', \\ \rho &= \varepsilon - 4\beta\delta + 4\beta^2\gamma - 6\beta'\gamma - 3\beta^4 + 6\beta^2\beta' + 3\beta^2 - \beta''' \quad (18); \end{aligned}$$

indi θ_3 e ϑ_4 mediante le (17) e (18) (seconde espressioni); ecc.

⁽¹⁷⁾ Perchè: una cubica sghemba è caratterizzata dalle identità $\theta_3 = 0$, $\vartheta_4 = 0$.

Infatti, supposto che l'equazione a cui soddisfanno le (1) sia la (a') di ⁽¹²⁾, si ha $\theta_3 = \chi$, $\vartheta_4 = \rho - 2\chi'$, per le (17) e (18): quindi solo se $\theta_3 = \vartheta_4 = 0$ è $\chi = \rho = 0$ e perciò la (a') ammette il sistema di soluzioni $x^{(1)} = u$, $x^{(2)} = u^2$, $x^{(3)} = u^3$, $x^{(4)} = 1$ al quale corrisponde la più generale cubica sghemba, riferita a un opportuno sistema di riferimento. [Come è noto; cfr. n.° 27, a)].

⁽¹⁸⁾ Infatti le (6') e (11') nell'ipotesi $A = du$ si riducono alle (6) e (11), quindi le relazioni (12) si riducono alle (21).

9. Da questo ultimo processo si deduce quale è l'ordine massimo m delle derivate ordinarie rispetto ad u delle coordinate omogenee qualunque (non normalizzate) (1) dalle quali dipendono i covarianti e gli invarianti fondamentali considerati.

Scrivendo in parentesi ciascuno di essi e il corrispondente valore di m , si trova: $(\beta, 4)$, $(\gamma, 4)$, $(\delta, 4)$, $(\varepsilon, 4)$ per le (8); poi $(\pi, 5)$, $(\chi, 6)$, $(\rho, 7)$ per le (21); quindi $(\theta_3, 6)$, $(\vartheta_4, 7)$ per le (17) e (18); poi $(a_1, 6 \text{ o } 7)$ ⁽¹⁹⁾ per le (19) e (19'); quindi $(S, 7 \text{ o } 8)$ per la (3); poi $(p_2, 8 \text{ o } 9)$ per le (15); e infine, per le (20), si conclude che

$$(22) \quad (a_1, 6 \text{ o } 7), \quad (I, 8 \text{ o } 9), \quad (J, 7 \text{ o } 0) \text{ }^{(20)}.$$

§ 2. Teorema fondamentale. Equazioni intrinseche.

10. Date le (1), sappiamo (n.° 8) calcolare $d\sigma, I$ e J . Ora è importante che, viceversa, dati $d\sigma = a_1 du$, $I = I(u)$ e $J = J(u)$, possiamo ritrovare le (1).

Allora infatti possiamo calcolare successivamente p_2, p_3, p_4 dalla prima delle (20), q_3 e q_4 dalla (17), e r_4 dalla (18) e dalla seconda delle (20):

$$(23) \quad \begin{cases} 6p_2 = 10a_1^2 I, & 6p_3 = 10a_1^2 I_1, & 6p_4 = 10a_1^2 I_2, \\ q_3 = \theta_3 + \frac{3}{2} p_3 = \theta_3 + \frac{5}{2} a_1^2 I_1, & q_4 = \frac{5}{2} a_1^2 I_2, \\ r_4 = a_1^4 J + 3a_1^2 I_2 + 9a_1^4 I_2. \end{cases}$$

Sostituendo in (11'), si ha l'equazione

$$(24) \quad x_4 + 10a_1^2 I x_2 + 2(5a_1^2 I_1 + 2\theta_3) x_1 + (a_1^4 J + 3a_1^2 I_2 + 9a_1^4 I_2^2) x = 0$$

che, integrata, dà le (1) normalizzate. Si ha così il teorema:

Un differenziale $d\sigma = a_1 du$ ($a_1 \neq 0$) e due funzioni $I(u)$ e $J(u)$ ⁽²¹⁾ individuano (a meno di una collineazione) una curva v , per la quale essi sono rispettivamente l'elemento lineare e le curvatures proiettivi; si ottengono le coordinate normali di un punto generico P di v espresse mediante u , prendendo quattro soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (normale)

$$(25) \quad x_4 + 10a_1^2 I x_2 + 2(5a_1^2 I_1 + 2\theta_3) x_1 + a_1^4 K x = 0,$$

⁽¹⁹⁾ Il 1° numero si riferisce alla 1ª metrica e il 2° alla 2ª.

⁽²⁰⁾ Si ricordi che nella seconda metrica J è costante (n.° 7).

⁽²¹⁾ Arbitrarii; però $J = \pm 1$ nella 2ª metrica.

ove

$$(26) \quad K = J + 3 \frac{I_2}{a_1^2} + 9I^2 \quad (22).$$

e θ_3 vale a_1^3 o 0 secondo che si applica la 1^a o la 2^a metrica.

Ne segue che: Ogni « invariante proiettivo » di v è un covariante di ordine zero formato con θ_3 , a_1 , I e J (o K) e le derivate covarianti di I e J (o K) rispetto a $d\sigma = a_1 du$; e, viceversa, ogni tale covariante è un invariante proiettivo.

In particolare, per $u = \sigma$, quindi $a_1 = 1$, I e J diventano funzioni di σ , e si ha che: una curva v è individuata (a meno di una collineazione) dalle sue « equazioni intrinseche proiettive » $I = I(\sigma)$, $J = J(\sigma)$; si ottengono le coordinate normali di un suo punto generico P espresse mediante σ prendendo quattro soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (normale)

$$(27) \quad x_4 + 10Ix_2 + 2(5I_1 + 2\theta_3)x_1 + Kx = 0,$$

ove

$$(28) \quad K = J + 3I_2 + 9I^2$$

e θ_3 vale 1 o 0 secondo che si considera la 1^a o la 2^a metrica (23).

Inoltre: gli invarianti proiettivi di v sono le funzioni (arbitrarie) di σ , I , J (o K) e delle derivate ordinarie di I e J (o K) rispetto a σ (24).

11. Si ha

$$(29) \quad |xx_1x_2x_4| = 0$$

in coordinate normali; queste si possono supporre tali che risulti

$$(30) \quad |xx_1x_2x_3| = a_1^3,$$

ed allora è

$$(31) \quad 10a_1^2I = |xx_1x_3x_4|, \quad a_1^{10}K = |x_1x_2x_3x_4|,$$

ed una collineazione è rappresentata da una sostituzione lineare omogenea unimodulare.

(22) L'introduzione di questo terzo (dopo I e J) invariante K in luogo di J semplifica molte formule; tuttavia non sarebbe opportuno sostituirlo a J come curvatura di v (cioè come fondamentale); perchè, espresso mediante le coordinate (1) e loro derivate ordinarie rispetto a u , dipende da derivate di ordine superiore a quelle dalle quali dipende J , e precisamente è (K , 10 o 11) (con le notazioni del n.° 9).

(23) Qui le derivate sono ordinarie, perchè covarianti rispetto a du (n.° 2); tuttavia noi conserviamo la notazione covariante. È così in tutto il seguito. Ed allora potremo anche indicare con x' , x'' , x''' , x^{iv} le coordinate (1) di P e con ξ' , ξ'' , ξ''' , ξ^{iv} quelle di π .

(24) Si osserverà che qui gli invarianti (proiettivi) di v si formano come nella geometria ordinaria. Non così nelle precedenti trattazioni, citate in (2) e (3).

La (29) segue dalla prima delle (7') applicata a (25). Poichè il suo 1° membro è la derivata covariante del covariante di 6° ordine $|xx_1x_2x_3|$ ⁽²⁵⁾, la si può scrivere $\frac{d}{du}|xx_1x_2x_3| - 6S|xx_1x_2x_3| = 0$; sostituendo ad S il suo valore (3) ed integrando, se ne deduce $|xx_1x_2x_3| = ca_1^6$ ossia la (30), se si rende uguale a 1 la costante c moltiplicando le coordinate normali per il fattore numerico $\sqrt[4]{c}$. Le (31) seguono poi dalla (30) e dalle (7') applicate a (25). Infine, che le collineazioni siano rappresentate da sostituzioni *unimodulari*, risulta dal fatto che, applicando una sostituzione rappresentante una collineazione, il 1° membro di (30) si moltiplica per il modulo della stessa, mentre che il 2° (che gli è uguale) deve rimanere inalterato.

Osservazione. Le (26), (30) e (31) permettono di esprimere $d\sigma$, I , J e K mediante le coordinate omogenee *normalizzate* e loro derivate *covarianti rispetto a $d\sigma$* . Il *massimo* ordine n di tali derivate è sempre *minore* del numero m considerato nel n.° 9; perchè, scrivendo in parentesi quadra ciascun elemento e il corrispondente valore di n , si ha

$$(32) \quad [a_1, 4], [I, 4], [K, 4], [J, 5 \text{ o } 0].$$

§ 3. Considerazioni duali.

12. Consideriamo la *svilupppabile* v di cui cioè la curva v è spigolo di regresso, e siano

$$(33) \quad \xi^{(r)} = \xi^{(r)}(u) \quad (r = 1, 2, 3, 4)$$

le sue equazioni parametriche, essendo le $\xi^{(r)}$ coordinate omogenee del piano osculatore π di v in P .

π è il piano dei punti $P \equiv (x), (x'), (x'')$ o anche, per le (4), quello dei punti $(x), (x_1), (x_2)$ ⁽²⁶⁾; quindi le $\xi^{(r)}$ sono proporzionali ai complementi algebrici degli elementi dell'ultima colonna di (30): *noi li assumeremo uguali a tali complementi algebrici divisi per a_1^3* ⁽²⁷⁾, e diremo che sono *normali* quando tali sono le $x^{(r)}$ (e così sempre supporremo).

⁽²⁵⁾ Poichè un determinante è una funzione *razionale* (intera) dei suoi elementi, la sua derivata covariante si forma come quella ordinaria (n.° 2).

⁽²⁶⁾ Qui e in seguito, scrivendo in parentesi una espressione contenente la lettera x , vogliamo indicare il punto le cui coordinate sono i valori che l'espressione assume per $x = x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$. Idem per ξ (piano).

⁽²⁷⁾ Così diventano covarianti di ordine zero (invarianti).

Tali coordinate normali di π costituiranno un sistema fondamentale di soluzioni di una certa equazione differenziale lineare nelle derivate covarianti rispetto a $d\sigma$, che è facile costruire. Per definizione è

$$(34) \quad a_1^3 \xi^{(1)} = - |xx_1 x_2| \quad (^{28});$$

derivando covariantemente quattro volte ed eliminando sempre x_4 mediante la (25), si deducono analoghe espressioni per $a_1^3 \xi_1^{(1)}, \dots, a_1^3 \xi_4^{(1)}$, dalle quali, eliminando i determinanti del tipo $|x_p x_q x_r|$, si trova l'equazione richiesta a cui soddisfa $\xi^{(1)}$ (e così $\xi^{(2)}, \dots, \xi^{(4)}$). E si conclude che:

Le coordinate normali del piano π della sviluppabile v [il cui spigolo di regresso è la curva v definita da $d\sigma = a_1 du$, $I(u)$ e $J(u)$] sono quattro soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione

$$(35) \quad \xi_4 + 10a_1^2 I \xi_2 + 2(5a_1^2 I_1 + 2\theta_3) \xi_1 + a_1^4 K \xi = 0 \quad (^{29}).$$

Si osservi che: (35) differisce da (25) solo per lo scambio di θ_3 in $-\theta_3$, e perciò coincide con (25) solo quando v appartiene a un complesso lineare (2^a metrica).

E inoltre che: l'annullarsi dell'invariante K caratterizza le varietà v le coordinate normali dei cui punti P e piani π sono le « non omogenee ». Perchè solo se $K=0$ le (25) e (35) ammettono la soluzione 1.

13. Tra le $x^{(r)}$ e le $\xi^{(r)}$ (e loro derivate covarianti) passano le relazioni:

$$(36) \quad \Sigma x \xi = 0, \quad \Sigma x \xi_1 = \Sigma x_1 \xi = 0, \quad \Sigma x \xi_2 = \Sigma x_1 \xi_1 = \Sigma x_2 \xi = 0,$$

$$(37) \quad -\Sigma x \xi_3 = \Sigma x_1 \xi_2 = -\Sigma x_2 \xi_1 = \Sigma x_3 \xi = a_1^3,$$

$$(38) \quad \Sigma x \xi_4 = \Sigma x_1 \xi_3 = \Sigma x_2 \xi_2 = \Sigma x_3 \xi_1 = \Sigma x_4 \xi = 0,$$

$$(39) \quad \Sigma x_2 \xi_3 = -\Sigma x_3 \xi_2 = 10a_1^5 I, \quad \Sigma x_3 \xi_3 = 4a_1^3 \theta_3 \quad (^{30}).$$

L'ultima uguaglianza di ciascun gruppo (36) e (37) segue dalla definizione delle $\xi^{(r)}$ (n.° 12); le altre seguono dall'ultima e da quelle che si ottengono derivando tutte le relazioni del gruppo precedente. Poi, derivando le (37), si ha

$$\Sigma x_1 \xi_3 + \Sigma x \xi_4 = \Sigma x_2 \xi_2 + \Sigma x_4 \xi_3 = \Sigma x_3 \xi_1 + \Sigma x_2 \xi_2 = \Sigma x_4 \xi + \Sigma x_3 \xi_1 = 0;$$

(²⁸) In questo breve calcolo indichiamo con $|x_p x_q x_r|$ il determinante di 3° ordine le cui orizzontali si ottengono ponendo successivamente $x = x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$.

(²⁹) Che nel caso $u = \sigma(a_1 = 1)$ si riduce alla aggiunta di (25).

(³⁰) In generale $\Sigma x_p \xi_q$ sta per $x_p^{(1)} \xi_q^{(1)} + \dots + x_p^{(4)} \xi_q^{(4)}$. E così in seguito per simboli analoghi.

ma per le (25), (36) e (37) è $\Sigma x_4 \xi = 0$, quindi si hanno le (38). E così via ⁽³¹⁾.

14. Se si interpretano le (33) come coordinate di un punto \bar{P} , e quindi le (1) come coordinate di un piano $\bar{\pi}$, si ha una nuova varietà \bar{v} (luogo di \bar{P} e involuppo di $\bar{\pi}$) che è *duale* di v .

Ora, poichè le (25) e (35), alle quali soddisfanno le (1) e (33) rispettivamente, differiscono solo per lo scambio di θ_3 in $-\theta_3$, e quindi coincidono solo se $\theta_3 = 0$, è chiaro che v e \bar{v} hanno uguali curvatures ed elementi lineari uguali o opposti secondo che appartengono o non a un complesso lineare; quindi solo una v appartenente a un complesso lineare (coincide con \bar{v} ossia) è *autoduale* ⁽³²⁾.

Avvertenza. Noi però nel seguito intenderemo la dualità in altro senso; cioè: converremo di riferirci *sempre alla stessa* v (e non a v e a \bar{v}) considerata o come luogo di punti P o come involuppo di piani π ; e di ogni ente sussidiario che introdurremo per lo studio della curva v considereremo l'ente duale (in senso ordinario) *ma relativo alla sviluppabile* v (e non \bar{v}). Questa *pseudodualità* coincide con l'ordinaria solo quando v appartiene a un complesso lineare (2^a metrica).

Le sole formole di cui faremo uso sono le (25), (35) e quelle del n.° 13; ora, poichè il sistema costituito da tali formole non si altera *cambiando* θ_3 in $-\theta_3$, *scambiando le coordinate di punto con quelle di piano e cambiando il segno alle une o alle altre*, da ogni equazione o espressione che otterremo potremo dedurre senz'altro la *duale* (nel senso spiegato) operando gli stessi cambiamenti (l'ultimo dei quali il più spesso non avrà alcun effetto e si potrà omettere) ⁽³³⁾.

⁽³¹⁾ Sussistono poi formole analoghe a quelle del n.° 11 e nelle sole ξ (ma coi secondi membri cambiati di segno).

⁽³²⁾ Ciò è confermato dal calcolo; perchè se si cercano per la \bar{v} gli elementi $\bar{\theta}_3, \bar{\theta}_4, \bar{I}, \bar{J}$ analoghi a quelli di v , si trova che è $\bar{\theta}_3 = -\theta_3, \bar{\theta}_4 = \theta_4, \bar{I} = I, \bar{J} = J$.

E il calcolo si esegue col procedimento esposto nel n.° 8, nel quale converrà assumere $A = d\sigma$ e supporre che le (33) siano state già normalizzate come nel n.° 12; perchè allora l'equazione del tipo (11') (che, giusta il detto procedimento, si deve anzitutto costruire) è la (35) già nota.

⁽³³⁾ Siamo partiti dalla considerazione della curva v e siamo pervenuti alla *svilupabile* v . Se avessimo operato in senso inverso (cioè se in quanto precede avessimo considerato le x come le coordinate di piano e le ξ come coordinate di punto) saremmo stati condotti agli stessi $d\sigma, I$ e J . solo che saremmo stati indotti a chiamarli *elemento angolare* e *curvature* (proiettivi) della *svilupabile* v ; dunque nulla di essenzialmente diverso avremmo trovato.

§ 4. Tetraedro fondamentale, Formole di Frenet-Serret proiettive.

15. Quando le coordinate di $P = (x)$ sono normali, i punti $P_1 \equiv (x_1)$, $P_2 \equiv (x_2)$, $P_3 \equiv (x_3)$ risultano individuati in modo intrinseco ⁽³⁴⁾ ed invariante per collineazioni ⁽³⁵⁾; inoltre essi non sono complanari con P , per la (30). Dunque: P, P_1, P_2, P_3 sono vertici di un tetraedro D definito in modo intrinseco e invariante per collineazioni. Lo diremo tetraedro normale della curva v in P .

Supponendo $u = \sigma$, le coordinate di P_1, P_2, P_3 sono le derivate ordinarie di quelle di P, P_1, P_2 rispettivamente, quindi: in D lo spigolo PP_1 e la faccia PP_1P_2 sono la tangente e il piano osculatore π di v in P , lo spigolo P_1P_2 e la faccia $P_1P_2P_3$ sono la tangente e il piano osculatore in P_1 alla curva luogo di P_1 (variando P su v), lo spigolo P_2P_3 è la tangente in P_2 alla curva luogo di P_2 .

Dualmente: I piani $\pi \equiv (\xi)$, $\pi_1 \equiv (\xi_1)$, $\pi_2 \equiv (\xi_2)$, $\pi_3 \equiv (\xi_3)$ sono le facce di un tetraedro Δ (tetraedro normale della sviluppabile v in π) definito in modo intrinseco e invariante per collineazioni; lo spigolo $\pi\pi_1$ è la generatrice della sviluppabile v in π (ossia la tangente alla curva v in P), il punto $\pi\pi_1\pi_2$ è P , lo spigolo $\pi_1\pi_2$ è la generatrice della sviluppabile descritta da π_1 e tocca lo spigolo di regresso nel vertice $\pi\pi_1\pi_2$, ecc.

I due tetraedri D e Δ hanno a comune: i due vertici $P \equiv \pi\pi_1\pi_2$ e $P_1 \equiv \pi_1\pi_2\pi_3$, le due facce $\pi \equiv PP_1P_2$ e $\pi_1 \equiv P_1P_2P_3$, i due spigoli $PP_1 \equiv \pi\pi_1$ e $PP_2 \equiv \pi\pi_2$.

Ciò segue dalla definizione stessa oppure dalle (36), (37) e (38).

16. Da D e Δ (fra loro duali) deduciamo un terzo tetraedro F che ha il vantaggio di essere *autoduale*.

F abbia i due vertici P, P_1 e le due facce π, π_1 (e quindi gli spigoli $PP_1 \equiv \pi\pi_1$, $PP_2 \equiv \pi\pi_2$) comuni a D e a Δ , e poi:

1°) Come terzo vertice il coniugato armonico di $P \equiv (x)$ rispetto a $P_2 \equiv (x_2)$

⁽³⁴⁾ Perché le loro coordinate, divise per a_1, a_1^2, a_1^3 rispettivamente, sono covarianti di ordine 0 (invarianti).

⁽³⁵⁾ Poiché le loro coordinate sono *cogredienti* a quelle di P per ogni sostituzione lineare omogenea a coefficienti costanti (collineazione).

e al punto $PP_2 \cdot \pi_3$, e che è $P_n \equiv (5a_1^2Ix + x_2)$. Perchè $PP_2 \cdot \pi_3 \equiv (10a_1^2Ix + x_2)$, le sue coordinate dovendo essere del tipo $(ax + bx_2)$ con a, b tali che risulti $\Sigma(ax + bx_2)\xi_3 = 0$ ossia (n.° 13) $-a + 10a_1^2Ib = 0$.

2°) (Dualmente) come terza faccia il piano $\pi_v \equiv (5a_1^2I\xi + \xi_2)$ coniugato armonico di π rispetto a π_2 e al piano $\pi\pi_2 \cdot P_3$.

3°) Come quarto vertice il punto comune ai piani $\pi_1 \equiv (\xi_1)$, $\pi_v \equiv (5a_1^2I\xi + \xi_2)$ e al coniugato armonico di $\pi \equiv (\xi)$ rispetto a $\pi_3 \equiv (\xi_3)$ e al piano $\pi\pi_3 \cdot P_3$, e che è $P_b \equiv (2\theta_3x + 5a_1^2Ix_1 + x_3)$. Infatti $\pi\pi_3 \cdot P_3 \equiv (4\theta_3\xi - \xi_3)$, perchè le sue coordinate debbono essere del tipo $(a\xi + \xi_3)$ con a, b tali che risulti $\Sigma(a\xi + \xi_3)x_3 = 0$ ossia (n.° 13) $a + 4\theta_3b = 0$; quindi il detto coniugato armonico sarà $(2\theta_3\xi - \xi_3)$, che incontra π_1 e π_v appunto in P_b , come si può verificare.

4°) (Dualmente) come quarta faccia il piano $\pi_\beta \equiv (-2\theta_3\xi + 5a_1^2I\xi_1 + \xi_3)$ dei punti P_1, P_n e del coniugato armonico di P rispetto a P_3 e al punto $PP_3 \cdot \pi_3$.

Il tetraedro F così definito è invariante (per collineazioni come D e Δ , e) per dualità. Lo diremo tetraedro fondamentale di v in P (o in π) assegnandogli il posto che nella geometria ordinaria ha il triedro fondamentale.

Tra i suoi spigoli uscenti da P , quello che passa per il vertice P_1 (o P_t come anche scriveremo) è la tangente a v in P ; noi diremo normale principale e binormale (proiettive) quelli passanti rispettivamente per i vertici P_n e P_b .

Tra le facce passanti per P , la $\pi \equiv PP_tP_n$ è il piano osculatore di v in P ; noi diremo piano normale e piano rettificante (proiettivi) le rimanenti $\pi_v \equiv PP_nP_b$ e $\pi_1 \equiv PP_tP_b$ che indicheremo anche con π_τ . Diremo inoltre che è una normale (proiettiva) di v in P ogni retta appartenente a P e a π_v .

17. Le coordinate omogenee dei vertici P, P_t, P_n, P_b e delle facce $\pi, \pi_\tau, \pi_v, \pi_3$ di F risultano dal n.° 16. Dividendole per potenze opportune di a_1 , si ottengono le seguenti coordinate omogenee normalizzate

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x), \quad \left(t = \frac{x_1}{a_1} \right), \quad \left(n = 5Ix + \frac{x_2}{a_1^2} \right), \quad \left(b = 2 \frac{\theta_3}{a_1^3} x + 5I \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_3}{a_1^3} \right), \\ (\xi), \quad \left(\tau = \frac{\xi_1}{a_1} \right), \quad \left(v = 5I\xi + \frac{\xi_2}{a_1^2} \right), \quad \left(\beta = -2 \frac{\theta_3}{a_1^3} \xi + 5I \frac{\xi_1}{a_1} + \frac{\xi_3}{a_1^3} \right), \end{array} \right.$$

le quali sono intrinseche e invarianti per collineazioni ⁽³⁶⁾.

⁽³⁶⁾ Qui t sta per $(t^{(1)}, \dots, t^{(4)})$, ove $t^{(r)} = \frac{x_1^{(r)}}{a_1}$, ecc. Ciò d'accordo con ⁽²⁶⁾.

Osservazione. Il tetraedro D (Δ) dipende dalle derivate 1^e, 2^e e 3^e covarianti delle x (delle ξ). Giusta le (40), F dipende anche dalle derivate 4^e delle x (o delle ξ); perchè I ne dipende, per la 1^a delle (31) (37).

18. Le derivate prime (e quindi le successive) covarianti delle coordinate normalizzate (40) dei vertici di F sono combinazioni lineari delle coordinate stesse:

$$(41) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 t, & t_1 = a_1(n - 5Ix), & n_1 = \left(5I_1 - 2\frac{\theta_3}{a_1^2}\right)x + a_1 b, \\ b_1 = (25I^2 - K)a_1 x - \left(5I_1 + 2\frac{\theta_3}{a_1^2}\right)t - 5a_1 In. \end{cases}$$

Idem per le facce:

$$(42) \quad \begin{cases} \xi_1 = a_1 \tau, & \tau_1 = a_1(\nu - 5I\xi), & \nu_1 = \left(5I_1 + 2\frac{\theta_3}{a_1^2}\right)\xi + a_1 \beta, \\ \beta_1 = (25I^2 - K)a_1 \xi - \left(5I_1 - 2\frac{\theta_3}{a_1^2}\right)\tau - 5a_1 I\nu. \end{cases}$$

(37) Di tetraedri che (come F) siano definiti in modo intrinseco e invariante per collineazioni, abbiano i vertici e le facce comuni di D e Δ , e siano autoduali ve ne sono infiniti.

Supponendo per semplicità $u = \sigma$, quindi $a_1 = 1$, i vertici e le facce di uno qualunque di essi debbono essere del tipo

$$(x), (x_1), (ax + x_2), (bx + cx_1 + x_2); (\xi), (\xi_1), (\alpha\xi + \xi_2), (\beta\xi + \gamma\xi_1 + \xi_2),$$

ove le a, b, c indicano tre invarianti proiettivi di v calcolati in P , cioè (n.° 10) tre funzioni della costante θ_3 (che vale 1 o 0) e delle funzioni $I, J, I_1, J_1, I_2, J_2, \dots$ calcolate per $\sigma = 0$ (se, come è lecito, si assume P come origine degli archi σ su v); le α, β, γ indicano gli invarianti duali, cioè (n.° 15, osserv.) che se deducono cambiandovi θ_3 in $-\theta_3$.

Imponendo che ciascun vertice appartenga a tre delle facce si trova (in virtù delle formole del n.° 13, con $a_1 = 1$) che tali invarianti debbono soddisfare le condizioni

$$a + \gamma - 10I = 0, \quad \alpha + c - 10I = 0, \quad \beta - b + 4\theta_3 = 0;$$

e queste (come subito si riconosce) si soddisfano nel modo più generale assumendo

$$a = 5I + M + \theta_3 N, \quad b = L + 2\theta_3, \quad c = 5I - M + \theta_3 N$$

(e per α, β, γ i valori duali), ove L, M, N sono tre invarianti proiettivi autoduali, quindi funzioni pari di θ_3 e qualunque di I, J, I_1, J_1, \dots

Che se poi si vuole che il tetraedro dipenda (come F) dalle derivate dei soli primi quattro ordini delle x (o delle ξ) bisogna prendere L, M, N funzioni di θ_3, I e J soltanto (per l'osserv. del n.° 11).

Fra i tetraedri siffatti abbiamo prescelto F come *fondamentale*, perchè è quello la cui definizione si presenta più semplice: analiticamente, perchè corrisponde a $L = M = N = 0$; geometricamente, perchè si deduce da D e Δ con sole costruzioni di quarti armonici (n.° 16).

In particolare, per $u = \sigma$, si hanno le formole di Frenet-Serret proiettive:

$$(43) \quad \begin{aligned} x_1 &= t, & t &= n - 5Ix, & n_1 &= (5I_1 - 2\theta_3)x + b, \\ b_1 &= (25I^2 - K)x - (5I_1 + 2\theta_3)t - 5In, \end{aligned}$$

$$(44) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \tau, & \tau_1 &= \nu - 5I\xi, & \nu_1 &= (5I_1 + 2\theta_3)\xi + \beta, \\ \beta_1 &= (25I^2 - K)\xi - (5I_1 - 2\theta_3)\tau - 5I\nu. \end{aligned}$$

Per il carattere invariantivo delle (41) e (42) (tra loro duali) basta dimostrare le (43). Ed infatti, dalle (40) con $a_1 = 1$, si ha

$$(45) \quad x_1 = t, \quad x_2 = n - 5Ix, \quad x_3 = b - 2\theta_3x - 5It,$$

per cui la (27) diventa

$$(46) \quad x_4 = (25I^2 - K)x - 2(5I_1 + 2\theta_3)t - 10In,$$

poi, derivando la (45), si ha

$$(47) \quad \begin{cases} x_2 = t_1, & x_3 = n_1 - 5I_1x - 5Ix_1 = n - 5I_1x - 5It_1, \\ x_4 = b_1 - 2\theta_3x_1 - 5I_1t - 5It_1 = b_1 - (5I_1 + 2\theta_3)t - 5It_1. \end{cases}$$

Dalle (45), (46) e (47) seguono facilmente le (43).

19. *Fra le coordinate normalizzate (40) dei vertici e delle facce di F passano le relazioni:*

$$(48) \quad \begin{cases} \Sigma\xi x = \Sigma x \tau = \Sigma x \nu = \Sigma t \xi = \Sigma t \tau = \Sigma t \beta \\ = \Sigma n \xi = \Sigma n \nu = \Sigma n \beta = \Sigma b \tau = \Sigma b \nu = \Sigma b \beta = 0, \end{cases}$$

$$(49) \quad -\Sigma x \beta = \Sigma t \nu = -\Sigma n \tau = \Sigma b \xi = 1,$$

$$(50) \quad |xtnb| = 1, \quad |\xi\tau\nu\beta| = -1.$$

Essendo invariantive, basta dimostrarle per $u = \sigma$ ($a_1 = 1$). Allora le (48) si ottengono dalle (36) e (38), sostituendovi per x_1, \dots, x_4 i valori (45) e (46) e per ξ_1, \dots, ξ_4 i valori duali ⁽³⁸⁾. Allo stesso modo dalle (37) con $a_1 = 1$ seguono le (49). Infine la 1^a (per es.) delle (50) si verifica sostituendo i valori (40) con $a_1 = 1$ di x, t, n, b nel determinante primo membro e tenendo conto di (30).

⁽³⁸⁾ Del resto le (48) esprimono l'appartenersi di vertici e facce di T .

20. Osservazione. Si può supporre per semplicità che il parametro u sia l'arco σ (quindi $a_1 = 1$ e $\theta_3 = 1$ o 0), e allora le derivate, fin qui covarianti rispetto a $d\sigma$, si riducono a derivate ordinarie rispetto a σ ⁽³⁹⁾.

Ma è importante osservare che poi, quando si voglia, si può subito e in modo semplicissimo ripristinare la generalità del parametro u ⁽⁴⁰⁾. Ed invero ogni espressione (sempre invariante) o uguaglianza (sempre tra invarianti) che otterremo per $u = \sigma$ sarà formata con le funzioni I, J (o K), $x, t, n, b, \xi, \tau, \nu, \beta$ e loro derivate rispetto a σ ; e per ripristinare in essa la generalità del parametro u , basterà: dividere θ_3 per a_1^3 e ogni derivata di ordine n per a_1^n , ed inoltre « pensare » che la derivata stessa sia (non più ordinaria rispetto a σ , ma) covariante rispetto a $d\sigma = a_1 du$.

21. Insieme con una curva v si possono considerare quante si vogliono curve o sviluppabili definite intrinsecamente e proiettivamente, immaginandole generate da punti o piani mobili (con P su v) e definiti in tal modo. Tali sono i vertici (le facce) di D, Δ, F e in generale tale è ogni punto (piano) le cui coordinate siano combinazioni lineari di quelli dei vertici (delle facce) di F con coefficienti invarianti proiettivi qualunque (n.° 10) ⁽⁴¹⁾.

In particolare, si può definire e studiare la sviluppabile rettificante (polare) proiettiva come involuppo del primo rettificante π_τ (normale π_ν). Poi la sviluppabile generata da una normale proiettiva mobile (n.° 16), scelta con legge opportuna, e il cui spigolo di regresso si dirà una evoluta proiettiva di v ; e si constata che la legge di scelta dipende da una equazione di Riccati, sicchè nota una evoluta proiettiva tutte le altre si hanno con quadrature, e lungo v è costante il birapporto delle tangenti a quattro evolute; e si constata inoltre che ogni evoluta giace sulla sviluppabile polare.

L'analogia di questi risultati con altri ben noti della geometria ordinaria è evidente; ma per brevità non insistiamo su di essi.

⁽³⁹⁾ Cfr. ⁽²³⁾.

⁽⁴⁰⁾ Non così quando si adopera il Calcolo ordinario. È questo un altro (cfr. la fine del n.° 1) dei meriti del Calcolo assoluto.

⁽⁴¹⁾ Non così semplice e immediata è la formazione di punti (piani) siffatti nelle precedenti trattazioni, citate in ⁽²⁾ e ⁽³⁾.

Sui fondamenti logici della Matematica secondo le recenti vedute di Hilbert

Conferenza tenuta da M. CIPOLLA a Catania il 7 aprile 1923 alla Sezione Matematica
della XII Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze

DAVID HILBERT, in diverse conferenze tenute l'anno scorso a Copenaghen, ad Amburgo, alla *Deutschen Naturforscher-Gesellschaft*, ha dato notizia delle sue ultime ricerche sui fondamenti logici della Matematica, eseguite in collaborazione con PAUL BERNAYS, nell'intento, com'Egli dice, di bandire definitivamente dal mondo ogni dubbio sulla certezza delle conclusioni matematiche. Io mi riferirò all'ultima delle dette conferenze, che è pubblicata nel vol. 88 dei *Math. Annalen*, e contiene anche una dimostrazione del principio di ZERMELO delle infinite scelte per le classi d'insiemi di numeri reali.

Tali ricerche dell'eminente matematico tedesco, che ha dato alla Scienza tanti preziosi contributi, non soltanto nei suoi sviluppi superiori ma anche sui fondamenti, non possono non destare il più alto interesse, particolarmente fra i matematici italiani che da più di un trentennio lavorano sui principî logici della Matematica, adoperandosi, in special modo, ad evitare nei loro ragionamenti l'applicazione del principio di ZERMELO. Deve la loro opera ritenersi oggi come superflua, dopo i risultati di HILBERT? Viene diminuita l'importanza dei *Principia mathematica* di RUSSELL e WHITEHEAD⁽¹⁾, l'opera più grandiosa che, sulla base del *Formulario* del nostro PEANO, sia stata scritta finora sui fondamenti logici della Matematica?

La risposta non è affermativa, a mio giudizio, e le ragioni oggi ho l'onore di esporre agli illustri Colleghi convenuti dalle varie parti d'Italia a questa grande Riunione delle Scienze.

I. Quali siano i concetti e i principî logici che HILBERT pone a base della Matematica non è possibile dire con tutta precisione, fintanto che non sarà

(1) Cambridge, *University Press*, v. I (1910), v. II e III (1913). Per un'esposizione sommaria si può consultare la mia *Analisi algebrica* (2ª ed., Palermo, 1921, ed. D. Capozzi).

pubblicata la sua teoria del ragionamento. Ma nella conferenza cui mi riferisco, ho trovato sufficienti cenni di essa per farmene una chiara idea.

HILBERT assume, come nozioni primitive, l'implicazione, la negazione e l'eguaglianza (nel senso leibniziano), assegnando quattro proposizioni primitive (assiomi) per la prima di queste nozioni e due per ciascuna delle altre.

Per indicare l'implicazione Egli pone una freccia (\rightarrow) tra la premessa e la conseguenza (in luogo del segno \supset di uso ormai generale) e per indicare la contraddittoria di una proposizione pone su questa un tratto rettilineo (\neg).

La congiunzione (cioè l'affermazione simultanea) di due proposizioni, indicata dal simbolo $\&$ (che sta per « e »), e la disgiunzione di due proposizioni (cioè l'affermazione dell'una o dell'altra), indicata col simbolo \vee (che sta per « o ») sono definite mediante l'implicazione e la negazione :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \& \mathcal{B} & \text{ sta per } \overline{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}, \\ \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \text{ sta per } \overline{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Il metodo, fin qui, è inverso, in parte, a quello adottato nei *Principia* di RUSSELL e WHITEHEAD, dove sono assunte come primitive la disgiunzione e la negazione, e definite, in base a queste, l'implicazione e la congiunzione.

Per indicare che all'oggetto a si attribuisce il predicato A , HILBERT usa la notazione $A(a)$; così, a proposito dell'eguaglianza, Egli introduce, dopo l'assioma

$$a = a,$$

l'altro

$$(a = b) \rightarrow [A(a) \rightarrow A(b)].$$

Questi sono invece dimostrati nei *Principia* come conseguenza della definizione d'eguaglianza :

$$\langle a = b \rangle \text{ sta per } \langle \text{qualsunque sia } A, A(a) \rightarrow A(b) \rangle.$$

Il secondo assioma discende da questa definizione in virtù del principio di ARISTOTELE; il primo si trae dalla definizione stessa per il principio di identificazione: $A(a) \rightarrow A(a)$, ma per potere affermare isolatamente la proposizione $a = a$, che è conseguenza nell'implicazione

$$[A(a) \rightarrow A(a)] \rightarrow (a = a),$$

bisogna ricorrere al principio della deduzione: *Poichè la premessa è vera, tale è la conseguenza, e può affermarsi separatamente.*

Quest'importante principio, messo nel dovuto rilievo da RUSSELL, non è

fra gli assiomi indicati da HILBERT; di esso però ho trovato traccia là dove Egli dice che una dimostrazione è una figura formata da affermazioni secondo lo schema

$$\frac{\begin{array}{c} \mathfrak{S} \\ \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T} \end{array}}{\mathfrak{T}}$$

Qui il tratto non sta per indicare la contraddittoria di una proposizione, ma per separare la conseguenza di un'implicazione da questa e dalla relativa premessa.

Per il numero naturale, HILBERT stabilisce questi due assiomi:

$$a + 1 \neq 0, \quad \delta(a + 1) = a.$$

Il primo dice che il successivo di un numero non è zero; il secondo che il precedente di $a + 1$ è a . Questo secondo assioma sostituisce la proposizione primitiva di PEANO: *Se i successivi di due numeri sono eguali, i numeri sono eguali.*

Il principio dell'infinito (*Ogni numero ha il successivo*) e il principio di induzione sono, a quanto pare, compresi nell'idea di numero che nasce da 0 con l'applicazione ripetuta dell'operazione di « successivo ». Secondo RUSSELL, invece, si può giungere alla nozione di numero con definizioni nominali, e introducendo una sola proposizione primitiva: il principio dell'infinito.

Non mi pare, dunque, che questa prima parte della teoria di HILBERT, che si riferisce alla deduzione elementare e all'idea di numero naturale, segni qualche passo innanzi rispetto alla teoria di PEANO-RUSSELL.

2. Passiamo ora ad esaminare quella parte della teoria che concerne la deduzione non elementare e transfinita. « Quando avviene — si domanda HILBERT — che ci solleviamo per la prima volta dall'intuizione concreta e dal finito? Quando applichiamo i concetti di *tutto* ed *esiste* ».

Egli osserva che per le totalità finite questi concetti possono essere ricondotti rispettivamente alla congiunzione e alla disgiunzione. Dicendo, ad es., che tutti i banchi di quest'aula sono di legno, s'intende dire: « questo banco è di legno, quel banco è di legno e.... e il banco lì è di legno ». « Esiste in quest'aula un uomo calvo » val quanto dire « o quest'uomo è calvo o quell'uomo è calvo o.... o quell'uomo lì è calvo ».

HILBERT adotta i simboli (a) , (Ea) , usati nei *Principia*, per rappresentare le espressioni: « per tutti gli a » ed « esiste un a », e i simboli (\bar{a}) e $(\bar{E}a)$ per

rappresentare le espressioni « non per tutti gli a » e « non esiste un a ». Ed osserva che per totalità finite sono rigorosamente dimostrabili le equivalenze:

$$(1) \quad \begin{array}{l} \downarrow (\bar{a})A(a) \\ \uparrow (\bar{E}a)A(a) \end{array} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{l} (Ea)\bar{A}(a), \\ (a)\bar{A}(a); \end{array}$$

ma per totalità infinite non è lecito ricondurre i secondi membri alla disgiunzione e alla congiunzione, rispettivamente, perchè queste avrebbero infiniti termini o infiniti fattori, e mancherebbero di significato preciso: quando alle somme logiche con infiniti termini, o ai prodotti logici con infiniti fattori si applicano, senza scrupolo, gli stessi procedimenti che per le totalità finite, si potrà arrivare ai risultati più assurdi, nè più nè meno come quando alle serie numeriche infinite e ai prodotti numerici infiniti si applicano i procedimenti delle somme e dei prodotti ordinari.

Pare dunque che HILBERT veda in tali applicazioni illecite la fonte prima delle antinomie che sono state rilevate nella teoria delle classi. Allo scopo di evitare le antinomie, non solo, ma per fondare tutta la teoria della deduzione non elementare, e in particolare per stabilire le equivalenze (1) anche per totalità infinite e dimostrare altre proprietà generali, tra cui il principio di ZERMELO, HILBERT introduce una funzione τ che fa corrispondere a ciascun predicato A un oggetto determinato τA (*la funzione transfinita*), e soddisfa al seguente assioma (*l'assioma transfinito*):

$$(2) \quad A(\tau A) \rightarrow A(a);$$

in parole: *Se il predicato A conviene all'oggetto τA , esso conviene ad un oggetto qualunque a ; cioè il semplice fatto che τA possiede la proprietà A implica che tutti gli a posseggono la proprietà stessa, ossia che la proposizione $A(a)$ è sempre vera. Qui interviene l'idea di tutto, e il passaggio dell'affermazione generica $A(a)$ (proposizione con variabile reale) all'affermazione $(a)A(a)$ (proposizione con variabile apparente) non può farsi se non in base ad un principio logico (enunciato esplicitamente dal RUSSELL⁽²⁾: *il 2° principio per la trasformazione della variabile reale in apparente*), che può enunciarsi così:*

Asserita una proposizione (elementare) generica $A(a)$ si può asserire, separatamente, che qualunque sia a , $A(a)$ è vera.

(²) Cfr. anche la mia *Analisi algebrica* (1), p. 11, prop. 11, 2, II.

Tale principio è sostituito, nella teoria di HILBERT, dall'assioma del tutto :

$$(3) \quad A(\tau A) \rightarrow (a)A(a) \quad \text{e dal suo inverso} \quad (a)A(a) \rightarrow A(\tau A)$$

(dal quale, per l'assioma (2) e il sillogismo, si trae il principio di ARISTOTELE: $(a)A(a) \rightarrow A(a)$, che così viene stabilito mediante la funzione transfinita, da cui però non dipende).

Unitamente ai due assiomi per il tutto, HILBERT pone i due assiomi dell'esistere

$$(4) \quad A(\tau \bar{A}) \rightarrow (Ea)A(a), \quad (Ea)A(a) \rightarrow A(\tau \bar{A}).$$

Il primo sostituisce il 1° principio per la trasformazione della variabile reale in apparente :

L'asserzione di una proposizione (elementare) generica $A(a)$ implica che esiste un valore di a soddisfacente alla proposizione $A(a)$.

L'altro assioma unito al secondo (3) permette di ridurre una proposizione con variabile apparente in una proposizione elementare. La possibilità di una tale riduzione costituisce il cosiddetto *principio di riducibilità* nella teoria di RUSSELL (3): *Data una proposizione con variabili apparenti, c'è sempre una proposizione equivalente alla data, che sia priva di variabili apparenti.*

L'assunzione di questo principio non costituisce una difficoltà. Consideriamo, ad es., una funzione con una variabile reale x e con una o più variabili apparenti, denotiamola con $\Phi(x)$. Tutti i valori di x che soddisfano a $\Phi(x)$ possiamo considerarli come costituenti un oggetto di nuovo tipo (*oggetto-classe*) completamente determinato da $\Phi(x)$. Detto α tale oggetto-classe, possiamo dire che l'asserire $\Phi(x)$ equivale ad asserire che « x è un elemento di α », proposizione che non contiene alcuna variabile apparente.

Così, per es., la proposizione :

« Penelope ha tutte le qualità di una donna virtuosa »,

dove interviene l'idea di tutto e quindi una variabile apparente, equivale a quest'altra

« Penelope è simbolo di virtù muliebre »,

che è priva di variabili apparenti.

Il principio di riducibilità (la cui assunzione ci è consentita dalla facoltà

(3) Cfr. pure la mia *Analisi algebrica* (1), p. 15, prop. 1, 11.

di astrazione che ha la nostra mente) pur essendo contenuto nel 2° assioma (3) e nel 2° assioma (4), differisce da essi profondamente, poichè non afferma affatto l'esistenza di una legge, *unica* per tutte le proposizioni con variabili apparenti, al fine della trasformazione di ciascuna di queste in un'altra elementare, come asseriscono invece gli assiomi (3) e (4) in base alla funzione transfinita τ .

Questa funzione dunque, coi suoi cinque assiomi, incarna vari principi logici comunemente ammessi; fra poco vedremo che essa include anche il principio di ZERMELO, che non è affatto evidente e che non riscuote il generale consenso; si comprende quindi come e perchè essa costituisca la chiave di volta di tutta la teoria del ragionamento nella costruzione ideata da HILBERT.

3. Ma l'assunzione della funzione transfinita τ fra i concetti logici fondamentali può farsi senz'altro?

Di essa non vien data una definizione; i relativi assiomi ci dicono solamente questo: l'elemento τA corrispondente al predicato τ deve godere della proprietà A allora e soltanto quando la proposizione $A(a)$ è sempre vera (assiomi (1) e (3)), e deve godere della proprietà contraria \bar{A} nel caso opposto (assiomi (4), dove sia mutato A in \bar{A} e, per conseguenza, \bar{A} in A). L'elemento τA resta dunque imprecisato, mancando l'enunciazione di una legge che permetta di assegnarlo.

Orbene, possiamo ammettere che ci sia questa legge? Possiamo accogliere, in altri termini, la funzione τ fra le nozioni primitive? Quale carattere di evidenza, di semplicità essa possiede? Risponde ad un fatto accessibile alla nostra intuizione?

Io cercherò di spiegarla con l'esempio stesso di HILBERT: il predicato A sia « essere incorruttibile »; allora per τA dobbiamo intendere — in base all'assioma (1) — un uomo di tal grado di rettitudine, che se a lui si dovesse attribuire la qualifica d'incorruttibile, dovrebbero dirsi incorruttibili tutti gli uomini.

Io non resto perplesso nella scelta di tal uomo: la visione dantesca della Giudecca, mi trae subito d'impaccio, e fra i tre dannati che guazzano nella bocca di Satana, cavo il mio uomo: Giuda Iscariota!

Ma se il predicato A è un altro, io non so chi verrà in mio soccorso; oh certo! me la caverò con qualche *altro* mezzo (che potrebbe non aver niente a vedere col precedente!); il guaio sarà se A dovesse descrivere una classe infinita di predicati, perchè, non potendo io fare infinite scelte arbitrarie,

non so come potrò *definire* l'insieme degli oggetti τA . Non v'è dubbio: fintanto che la τ non è definita, una frase come questa:

« l'insieme degli elementi τA , quando A descrive una classe infinita di predicati »

è assolutamente priva di senso.

L'incertezza della scelta non preoccupa affatto HILBERT: « Nella mia teoria del ragionamento non è affermato che la concezione di un oggetto fra infiniti altri possa sempre effettuarsi, ma bensì che si può, senza rischio d'errori, operare come se la scelta fosse fatta ».

Donde trae HILBERT una tale certezza? Dal fatto, stabilito con dimostrazione, che l'assioma transfinito (2) è compatibile cogli altri assiomi della sua teoria.

Tale dimostrazione della compatibilità degli assiomi costituisce una novità per la teoria della deduzione. Non è guari che HILBERT ha sollevato la questione della compatibilità degli assiomi della logica, questione ardua e finora rimasta insoluta, sebbene il bisogno di risolverla non sia stato mai veramente sentito, perchè gli assiomi sono scelti fra le leggi più semplici del ragionamento. Ma, ad ogni modo, è certamente importante che tale dimostrazione sia stata ottenuta. HILBERT ci dice, sommariamente, come dev'essere condotta; si tratta di uno schema non facile nè breve: le proposizioni vengono trasformate in formule numeriche e si fa vedere che l'assurdo $0 \neq 0$ non può sorgere. Sebbene non mi sembri che da tale schema la dimostrazione ne esca chiara e luminosa, non ho motivo di dubitare della sua esattezza. Io affermo invece che essa è superflua ed inutile nei riguardi dell'assioma transfinito.

Infatti, non essendo definita la funzione τ , l'aggruppamento di simboli $A(\tau A)$ manca di significato; ebbene, io trasformo l'assioma (2) in una definizione di $A(\tau A)$:

$$(5) \quad A(\tau A) \text{ sta per } (a)A(a);$$

in parole: « dicendo che τA ha la proprietà A s'intende dire che la proposizione $A(a)$ è vera per tutti gli a ».

Mancando allora l'assioma, viene di per sè a cadere la questione della compatibilità di esso con gli altri assiomi. Non è dunque su tale compatibilità che può fondarsi l'asserzione dell'ammissibilità della funzione transfinita.

Ma se la definizione (5) può giovare per la trasformazione formale di una proposizione con variabili apparenti in un'altra che ne sia priva, non può dar valore all'assunzione della τ , perchè non è lecito isolare τA dalla frase $A(\tau A)$, che ha significato soltanto in sè.

Pare che HILBERT voglia prevenire tale obbiezione quando dice: « Nella mia teoria del ragionamento sono aggiunti agli assiomi finiti gli assiomi transfiniti, nello stesso modo come in Analisi si aggiungono ai numeri reali gl'immaginari, e in Geometria agli enti effettivi gl'ideali ».

E difatti isolare τA dalla definizione (5) richiama un processo proprio delle definizioni per astrazione, ma la (5) non ha nemmeno il carattere di una tale definizione, nè io per altro ritengo necessario fermarmi alle difficoltà logiche cui danno luogo siffatte definizioni. Osservo però che le diffidenze con le quali in principio furono accolti gl'immaginari sparirono non appena di essi fu data un'interpretazione concreta.

L'interpretazione concreta della τ ne costituirebbe la definizione; ma fintanto che questa manchi, le diffidenze saranno legittime. Nè vale dire: *Andate innanzi, chè la fiducia verrà!* Io posso accogliere l'opinione di chi, ad es., mi dice: Verrà tempo in cui i Matematici sapranno se $2^{\sqrt{2}}$ è irrazionale. Potrò anche lodarne la fede nei futuri progressi della Scienza; ma non potrò seguirlo se mi suggerirà di ammettere, come una verità di sentimento, che $2^{\sqrt{2}}$ è irrazionale!

4. Come applicazione della sua teoria, HILBERT dà la dimostrazione del teorema d'esistenza dell'estremo superiore di un insieme numerico, e la dimostrazione dello stesso principio di ZERMELO per una classe d'insiemi di numeri reali.

Introdotti i numeri reali come allineamenti di cifre 0 e 1 (rappresentazione binaria), Egli dimostra l'esistenza dell'estremo superiore per una successione di numeri reali appartenenti all'intervallo (0, 1) e poi per un insieme qualsiasi contenuto in quest'intervallo. Tale dimostrazione non è nuova ⁽⁴⁾, salvo nella rappresentazione simbolica che mette in rilievo l'uso di una funzione transfinita. Questa però ha qui una definizione precisa. Il principio di ZERMELO non v'interviene, come del resto non interviene in altre dimostrazioni dello stesso teorema d'esistenza, che presuppongono una diversa definizione del numero reale.

Invece una funzione transfinita τ_r analoga alla τ , con un assioma analogo al (2), interviene nella dimostrazione di HILBERT del principio di ZERMELO per una

⁽⁴⁾ Una dimostrazione analoga, supposti i numeri reali rappresentati in un sistema di base B qualunque, è data da G. MIGNOSI nelle *Esercitazioni matematiche* (Circ. Matematico di Catania), a. I (1921), p. 156.

classe \mathfrak{N} d'insiemi ν di numeri reali. La legge che fa corrispondere a ciascun insieme della classe un suo elemento, non è data, ma è *tacitamente ammessa*, altrimenti non avrebbe senso l'espressione: « l'insieme costituito dai rappresentanti $\tau\nu$ degli insiemi ν appartenenti alla classe \mathfrak{N} ». Ma, io mi domando, non è quest'ammissione in contrasto con la dichiarazione, già notata, dello stesso HILBERT, e cioè che nella sua teoria del ragionamento non è affermato che la concezione di un oggetto fra infiniti altri possa sempre effettuarsi, ma bensì che si può, senza rischio d'errori, operare come se la scelta fosse fatta?

Se non c'è rischio d'errori, c'è rischio di dire dei non-sensi!

Del resto, ammettere l'esistenza della funzione transfinita τ di HILBERT equivale perfettamente ad ammettere il principio di ZERMELO nella sua forma più generale, cioè che per ogni classe \mathfrak{N} d'insiemi α esiste una relazione selettiva, che permette di trarre da ciascun α un suo elemento, sì da costituire un nuovo insieme.

Consideriamo, infatti, per ciascun predicato A la classe α degli elementi cui quel predicato conviene. Il legame tra A ed α è dato dalla relazione ε (secondo la notazione di PEANO) di appartenenza di un elemento ad una classe:

$$A = \text{essere un elemento di } \alpha = \varepsilon\alpha.$$

Denotiamo ora con $\kappa\alpha$ la classe α o la sua opposta $\bar{\alpha}$ secondo che α è il tutto o no (cioè secondo che la prop. $(a)A(a)$ è sempre vera o no). Ebbene la funzione composta $\tau\varepsilon\alpha$ è una funzione selettiva, cioè fa corrispondere a ciascun insieme α di \mathfrak{N} un suo elemento:

$$\tau\varepsilon\kappa\alpha = \begin{cases} \tau\varepsilon\alpha = \tau A, & \text{se } \alpha \text{ è il tutto,} \\ \tau\varepsilon\bar{\alpha} = \tau\bar{A}, & \text{se } \alpha \text{ non è il tutto,} \end{cases}$$

nel primo caso un elemento di α è τA , nel secondo lo è $\tau\bar{A}$.

Inversamente, se σ è una relazione selettiva che fa corrispondere a ciascun insieme α di \mathfrak{N} un suo elemento, osservando che la funzione inversa di κ è κ stessa, e usando (con PEANO) il simbolo ε per indicare l'inversa di ε , si può affermare che la funzione composta $\sigma\kappa\varepsilon$ è una funzione transfinita di HILBERT. Infatti, posto $\tau = \sigma\kappa\varepsilon$, risulta

$$\tau A = \sigma\kappa\varepsilon A = \sigma\kappa\alpha = \begin{cases} \sigma\alpha, & \text{se } \alpha \text{ è il tutto,} \\ \sigma\bar{\alpha}, & \text{se } \alpha \text{ non è il tutto,} \end{cases}$$

nel primo caso è vera la prop. $A(\tau A)$, nel secondo è vera la prop. $\bar{A}(\tau A)$, sicchè τA soddisfa all'assioma transfinito e a quelli del tutto e dell'esistere.

Data la perfetta equivalenza fra il principio d'esistenza della relazione selettiva σ e il principio d'esistenza della funzione transfinita τ , possiamo concludere che *i dubbi sull'ammissibilità del principio di ZERMELO si trasportano sull'ammissibilità della funzione transfinita di HILBERT, restando tali e quali.*

5. Dal nostro esame risulta dunque che la teoria del ragionamento secondo HILBERT non segna, nemmeno per quest'altra parte che si riferisce alla deduzione non elementare, alcun progresso in confronto alla teoria di RUSSELL e WHITEHEAD; anzi l'uso costante della funzione transfinita, anche nelle prime e più semplici proposizioni, la fa apparire assai meno luminosa di quella.

Rimane dunque intera, e meglio affermata, l'importanza dei *Principia* e delle ricerche italiane sui fondamenti logici della Matematica. Ed io voglio terminare, riassumendo i risultati più recenti, cioè quelli che han fatto seguito all'opera fondamentale e notissima di GIUSEPPE PEANO e della sua Scuola⁽⁵⁾.

a) La teoria della deduzione non elementare, cioè quella che si riferisce alle proposizioni con variabili apparenti, come $(a)A(a)$, $(Ea)A(a)$, può essere svolta, com'è fatto nei *Principia*⁽⁶⁾, senza alcuna distinzione tra classi finite ed infinite, e in base a proposizioni primitive molto semplici. In particolare, le equivalenze (1) che nella teoria di HILBERT sono dimostrate assumendo come primitivi i concetti espressi da \bar{a} e $\overline{(Ea)}$, e con l'uso della funzione transfinita τ , non son altro, nei *Principia*, che le definizioni di questi concetti o, più esattamente, delle contraddittorie delle proposizioni $(a)A(a)$, $(Ea)A(a)$:

$$\overline{(a)A(a)} \text{ sta per } (Ea)\bar{A}(a), \quad \overline{(Ea)A(a)} \text{ sta per } (a)\bar{A}(a).$$

b) Le varie antinomie costruite sull'idea di classe (antinomie di Epimenide, di Burali-Forti, di Richard, ecc.) sono tutte risolte da RUSSELL con uniformità di metodo, in base alla teoria gerarchica delle proposizioni e delle classi⁽⁷⁾.

c) La nozione di numero naturale, quella di numero razionale, di numero reale, ecc. possono essere tutte introdotte con definizioni nominali; il

⁽⁵⁾ Essa è illustrata, assieme ai risultati ottenuti da altri matematici, nella pregevole e recentissima opera di ALPINOLO NATUCCI, *Il concetto di numero e le sue estensioni* (Torino, 1923, Fr. Bocca, editori).

⁽⁶⁾ Cfr. v. I, p. 143, e la mia *Analisi algebrica*, l. c. (2).

⁽⁷⁾ Cfr. v. I, p. 63.

concetto di estensione di un campo numerico è venuto, in particolare, ad assumere un significato rigoroso in base alla relazione d'isomorfismo aritmetico, la quale permette di risalire dalle definizioni concrete di numero all'idea astratta di esso, che incarna tutte, e solo, le proprietà invarianti rispetto alla relazione d'isomorfismo ⁽⁸⁾.

d) La teoria dei limiti delle funzioni che, mediante il principio di ZERMELO o meglio l'altro, meno ampio, di ARZELÀ-BAGNERA (che è limitato alle sole classi numerabili d'insiemi) è stata elegantemente riannodata da alcuni matematici alla teoria dei limiti delle successioni numeriche, può con pari eleganza e semplicità, svolgersi senza appello ai principî in parola, riducendola, con poche considerazioni, alla teoria della convergenza delle successioni d'insiemi ⁽⁹⁾.

e) Anche la teoria della misura degl'insiemi, secondo LEBESGUE, e per conseguenza le varie teorie che su di essa si appoggiano, sono state liberate dall'applicazione del principio di ZERMELO, mediante le recenti modificazioni introdotte da LEONIDA TONELLI ⁽¹⁰⁾.

Può dunque ormai affermarsi che l'Analisi pura matematica non richiede, oltre ai principî logici comuni a tutte le scienze, che un solo assioma, quello dell'infinito.

Il principio di ZERMELO resta così confinato a talune astruse questioni della teoria degl'insiemi, in quelle parti di essa che sono ancora in sviluppo ed hanno scarse applicazioni. Non volendo dare l'ostracismo ai risultati ivi ottenuti, si può supporre, come appunto è fatto nei *Principia*, che le classi in questione ammettano effettivamente una relazione selettiva. Resta il dubbio che una tale ipotesi importi una restrizione; ma è vano sperare che tutti i dubbi possano essere definitivamente banditi. Le verità matematiche non sono come un continente che si va a mano a mano scoprendo. Le scoperte matematiche sono conseguenza di particolari creazioni della mente, varie e mutevoli nella diuturna, affannosa indagine che tien dietro all'incessante evolversi ed affinarsi dell'intelligenza. È per questo che la Matematica, la più luminosa fra tutte le Scienze, è com'esse un perpetuo divenire.

⁽⁸⁾ Cfr. la mia *Analisi algebrica* ⁽¹⁾, pp. 37, 40, 42, 193, 210, 386.

⁽⁹⁾ Cfr. la mia Nota *Sul postulato di Zermelo e la teoria dei limiti delle funzioni*, Atti Acc. Gioenia, (Catania), s. 5^a, v. 6^o, 1913; e *l'Analisi algebrica* ⁽¹⁾, p. 274, Cap. VIII.

⁽¹⁰⁾ L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle variazioni*, v. I (Bologna, N. Zanichelli, editore).

Sul moto sferico vorticoso di un fluido incompressibile

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Torino) (1)

1. Nella presente Nota ci proponiamo di studiare se e come è possibile il moto vorticoso di un fluido incompressibile, quando il fluido si muova sopra un sistema di *superficie parallele*, in guisa tale che le linee vorticosose siano traiettorie ortogonali di quelle.

Nei §§ 2 e 3 dimostriamo che se una superficie è tale che *ogni* moto vorticoso di un fluido su di essa per cui la rotazione le sia sempre normale, possa esser subordinato da un moto vorticoso spaziale di quel tipo ad essa parallelo, la superficie stessa deve essere un *piano* od una *sfera*. Tralasciando il caso noto del moto piano, nei §§ successivi affrontiamo la questione del moto sferico vorticoso.

Introdotta ai §§ 4 e 5 un acconcio sistema di coordinate, al § 7 stabiliamo una condizione a cui deve soddisfare la rotazione nel campo vorticoso. Precisamente dimostriamo che *in un moto sferico vorticoso l'intensità totale dei vortici deve essere nulla*.

Nei §§ 8, 9, 10, 11, vediamo come dati i vortici (soddisfacenti alla condizione necessaria di cui sopra), resta ben determinato il moto sferico del fluido; studiamo quindi tale moto, determinando la velocità, le linee di corrente, la forza viva totale, ecc. ecc.

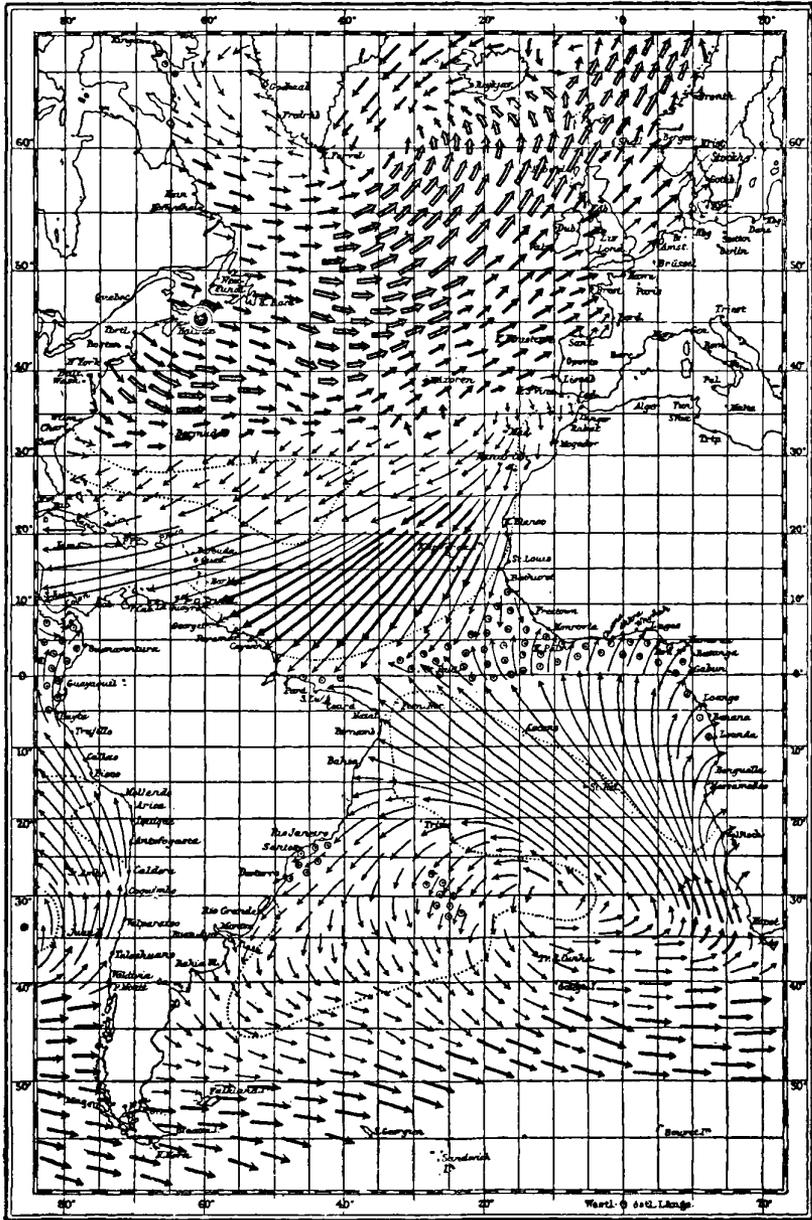
Nei §§ 12, 13, 14, ci volgiamo a studiare in particolare il caso dei vortici *puntuali*, esaminando poi, nei §§ successivi, come tali vortici si spostino col tempo.

Facciamo notare che, per le note analogie fra idrodinamica ed elettromagnetismo, il problema che trattiamo equivale allo studio del campo magnetico generato da correnti elettriche percorrenti dei tratti rettilinei normali ad una sfera.

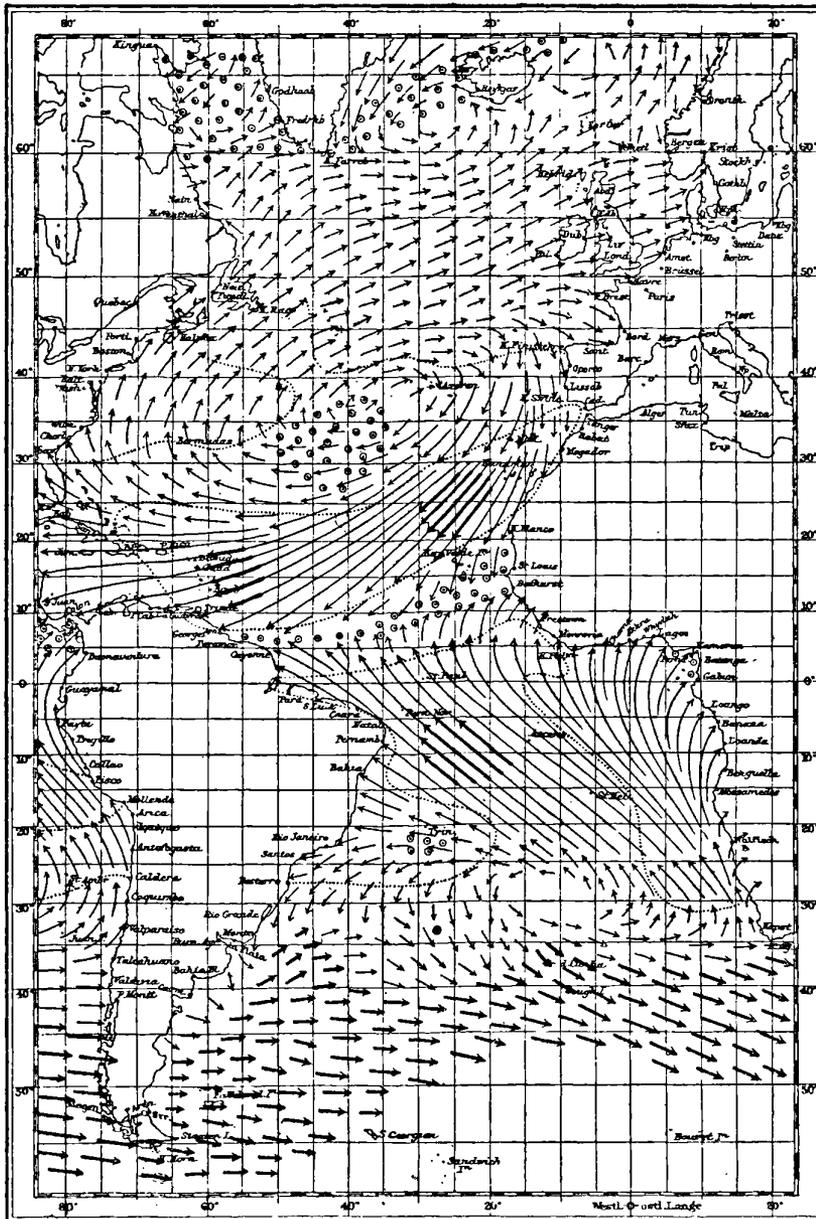
I risultati a cui giungiamo possono trovare applicazione in varie questioni di fisica.

Si hanno intanto dei moti vorticosi del tipo che studiamo, nella stessa atmo-

(1) Questo lavoro fu dall'A. presentato alla laurea, come sottotesi di Fisica matematica.



Comportamento dei venti nei mesi di Gennaio e Febbraio.



Comportamento dei venti nei mesi di Luglio e Agosto.

sfera terrestre; in essa si hanno precisamente i così detti *cicloni*, i quali si spostano col tempo in vario modo, e sono sempre accompagnati da *anticicloni* ⁽²⁾.

Non è però a credersi che la nostra trattazione possa dare una rappresentazione completa del fenomeno. Infatti in questo entrano troppi elementi di cui noi non teniamo conto, quali p. es. attriti e viscosità, differenze di temperatura e di pressione, trasformazioni del vapor acqueo, il moto terrestre di rivoluzione, ecc. ecc.

Notiamo però che anche le più recenti trattazioni di dinamica ciclonica sono incomplete e fra loro contrastanti; esse inoltre seguono di massima un indirizzo sperimentale, usufruendo poco o nulla del sussidio dell'analisi matematica. Per spiegare quei fenomeni sono state emesse varie ipotesi, che riposano tutte unicamente sulla considerazione di quegli agenti fisici ⁽³⁾.

L'elemento puramente meccanico da noi preso in considerazione, ha la sua importanza, e può servire (almeno parzialmente e qualitativamente) a spiegare qualcuno dei fatti accennati relativi ai moti vorticosi dell'aria. Si noti a questo proposito che il teor. del § 7, semplicissimo in sé e per il modo come è stato ottenuto, dà una convincente giustificazione della formazione degli *anticicloni*.

Considerazioni analoghe possono farsi relativamente ai moti vorticosi dell'atmosfera solare; l'esistenza di tali moti è posta in rilievo dai recenti metodi spettroeliografici ⁽⁴⁾; si crede anzi che le *macchie solari* non siano altro che vortici nell'atmosfera del sole ⁽⁵⁾.

I risultati a cui giungiamo possono anche essere utili per la teoria dei fenomeni magnetici che si svolgono sul sole.

Nel 1908 G. E. HALE scoprì che lo spettro del sole presenta *l'effetto Zeeman* ⁽⁶⁾. Ciò significa che nel sole vi sono dei campi magnetici di grande

⁽²⁾ Cfr. H. HILDEBRANDSSON e L. TEISSERENC DE BORT, *Les bases de la météorologie dynamique*, Paris (1907); v. pure le *carte dei venti* unite al testo: esse sono tratte dal libro testè citato, e mostrano bene l'andamento vorticoso delle linee di corrente dei venti alla superficie terrestre, ed inoltre come vi siano sempre zone con opposti sensi di rotazione.

⁽³⁾ Cfr. F. M. EXNER e W. TRABERT nella *Encykl. der math. Wiss.*, Bd. VI, 1 B, Heft. 3, p. 223 e seg.¹, e specialmente p. 226.

⁽⁴⁾ Cfr. P. ZEEMAN, *Magneto-optische Untersuchungen*, Leipzig, J. A. Bart (1914), p. 133 e seg.¹, fig. 55, 56.

⁽⁵⁾ È ben nota la teoria di EMDEN sulle macchie solari: secondo tale teoria le macchie solari sono dovute ad eruzioni di grandi masse di gas ad altissime temperature, animate da moto vorticoso, e generate dai moti di convezione che si producono nell'interno del sole. Si hanno numerosi dati sperimentali relativi alle macchie solari. Cfr. W. H. JULIUS, *Handwörterbuch des Naturwiss.*, Bd. VII, Physik der Sonne, pp. 824-852.

⁽⁶⁾ G. E. HALE, *Astroph. Journ.*, (28), 1908, p. 315.

intensità. Per spiegare ciò HALE valendosi dell'ipotesi di EMDEN sulle macchie solari e di noti risultati sperimentali, ammette che le eruzioni di gas che avvengono nelle macchie solari, data l'altissima temperatura, siano accompagnate dall'emissione da parte della materia di una grande quantità di elettroni; queste cariche negative in movimento equivalgono ad una corrente diretta radialmente, ed essa appunto genera il campo magnetico (7). Quest'ipotesi è stata suffragata dall'esperienza; si sono fatte carte magnetiche della cromosfera, ed in esse è messo bene in rilievo l'andamento vorticoso delle linee di forza, e specialmente come vi siano sempre macchie con sensi opposti di rotazione. HALE ammette che si abbiano sensi opposti di rotazione in corrispondenza a campi magnetici di segno opposto (8).

Ora tutto ciò discende chiaramente dalle proprietà qui stabilite. Di più il teor. § 7, applicato al caso che stiamo considerando, mostra bene come questi fenomeni magnetici abbiano ad influire scarsamente sui così detti uragani magnetici terrestri; per spiegare questo fatto si invoca solitamente la grande distanza fra la terra ed il sole: ciò però non sarebbe del tutto sufficiente.

I.

2. Consideriamo nello spazio un sistema di coordinate curvilinee ortogonali (p, q, r) . Se ds è l'elemento lineare dello spazio, sarà:

$$(1) \quad ds^2 = P^2 dp^2 + Q^2 dq^2 + R^2 dr^2,$$

essendo P, Q, R tre determinate funzioni delle p, q, r .

La superficie $r=0$ è una qualunque superficie dello spazio. Dico che affinché ogni moto vorticoso di un fluido incompressibile sopra di essa, tale che la rotazione le sia sempre normale, possa venir subordinato da un moto vorticoso spaziale del fluido sulle superficie $r = \text{cost.}$, in guisa tale che le linee vorticoso siano linee $p = \text{cost.}$, $q = \text{cost.}$ (traiettorie ortogonali di quelle), è *necessario che* P/Q *non dipenda da* r .

Consideriamo un qualunque moto spaziale di quel tipo, e indichiamo con (u, v, w) le tre componenti secondo le linee coordinate della velocità con cui è animata la molecola nel punto (p, q, r) , ed inoltre con (π, χ, ρ) , le componenti analoghe della rotazione elementare della molecola nel campo vorticoso.

(7) G. E. HALE, *Sur les champs magnétiques des taches solaires*. Journ. de Phys, 4^e serie, t. VIII, 1909.

(8) Cfr. op. cit. in (4), (7).

Affinchè le superficie $r = \text{cost.}$ siano superficie di corrente, deve aversi:

$$(2) \quad w = 0,$$

ed affinchè le linee vorticoso siano linee $p = \text{cost.}$, $q = \text{cost.}$, deve essere:

$$(3) \quad \pi = 0; \quad \chi = 0.$$

In generale, per l'incompressibilità del fluido, deve esser nulla la divergenza della velocità, e cioè ⁽⁹⁾:

$$(4) \quad \frac{1}{PQR} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} (uQR) + \frac{\partial}{\partial q} (vRP) + \frac{\partial}{\partial r} (wPQ) \right\} = 0;$$

inoltre per note formole si ha:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\pi = \frac{1}{QR} \left\{ \frac{\partial}{\partial q} (Rw) - \frac{\partial}{\partial r} (Qv) \right\} \\ 2\chi = \frac{1}{RP} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (Pu) - \frac{\partial}{\partial p} (Rw) \right\} \\ 2\varphi = \frac{1}{PQ} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} (Qv) - \frac{\partial}{\partial q} (Pu) \right\}. \end{array} \right.$$

Nel nostro caso quindi, per le (2), (3), le equazioni (4), (5) divengono:

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial p} (uQR) + \frac{\partial}{\partial q} (vRP) = 0$$

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial r} (Qv) = 0$$

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial r} (Pu) = 0$$

$$(9) \quad \frac{1}{PQ} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} (Qv) - \frac{\partial}{\partial q} (Pu) \right\} = 2\varphi.$$

Posto:

$$(10) \quad U = Pu, \quad V = Qv$$

le (7), (8) esprimono che U, V sono funzioni delle sole p, q . Le (6), (9), in

⁽⁹⁾ Questa ben nota formola, insieme alle seguenti, risale a LAMÉ. Cfr. p. es. A. E. H. LOVE, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge (1926): form. (37) a p. 54, e form. (38) a p. 55.

virtù delle (10), divengono:

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial p} \left(U \frac{Q}{P} R \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(V \frac{P}{Q} R \right) = 0$$

$$(12) \quad \frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial q} = 2\varrho PQ.$$

Affinchè possa sussistere la (12) occorre che ϱPQ sia funzione delle sole p, q . Che ciò debba essere risulta pure dal noto teorema sulla *intensità* di un vortice ⁽¹⁰⁾. Infatti le superficie $r = \text{cost.}$ sono ortogonali alle linee vorticose, e su di esse, per la (1), l'elemento d'area vale $d\sigma = PQ dp dq$; ora il citato teorema afferma che preso un filetto vorticoso, se $d\sigma$ è una sua sezione normale, $\varrho d\sigma$ non varia cambiando la sezione. Da qui segue appunto che ϱPQ non può dipendere da r .

Pensiamo ora di aver posto $r = 0$ in tutti i precedenti sviluppi. Le equazioni che con tale posizione si hanno dalle (11), (12), sono le equazioni generali di un moto vorticoso *sopra* la superficie $r = 0$, e tale che la rotazione è costantemente normale alla superficie stessa. Affinchè un moto vorticoso siffatto sia sempre subordinato da un moto vorticoso dello spazio del tipo in esame, occorre che le equazioni che colla posizione $r = 0$ si hanno dalle (11), (12), equivalgano al sistema delle stesse due equazioni differenziali (11), (12).

Ponendo $r = 0$ la (12) non varia, poichè U, V e ϱPQ non dipendono da r .

La (11) invece si scrive per disteso:

$$\frac{P}{Q} R \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{P}{Q} R \frac{\partial V}{\partial q} + \dots = 0,$$

e cioè:

$$(13) \quad \frac{\partial U}{\partial p} + \left(\frac{P}{Q} \right)^2 \frac{\partial V}{\partial q} + \dots = 0.$$

L'equazione che si ha dalla (13) ponendo $r = 0$ non può certo essere conseguenza della (12), poichè in questa compare la funzione arbitraria ϱ , che in essa non figura: dunque l'equazione differenziale (13) non deve mutare se vi si fa $r = 0$, onde effettivamente P, Q non deve dipendere da r .

3. Applicheremo il precedente risultato al caso delle superficie parallele.

Data nello spazio una superficie qualunque, prendiamo su di essa per

⁽¹⁰⁾ Inversamente la precedente osservazione fornisce una dimostrazione di quel teorema, nel caso particolare che stiamo trattando.

linee coordinate $p = \text{cost.}$, $q = \text{cost.}$ le sue linee di curvatura. L'elemento lineare della superficie sarà del tipo:

$$\sqrt{E dp^2 + G dq^2}$$

essendo E , G funzioni delle sole p , q .

Potremo limitare lo spazio in cui operiamo ad una porzione conveniente, in guisa che per ogni punto di questa esca una sola retta normale alla data superficie. Preso un punto dello spazio, si consideri la normale alla superficie che passa per esso; se (p, q) sono le coordinate del piede di tale normale, ed r è la distanza di questo punto dal punto prima considerato, potremo assumere come coordinate curvilinee di quest'ultimo i numeri p , q , r .

Le superficie $r = \text{cost.}$ sono le superficie parallele alla data, e l'elemento lineare dello spazio è dato dalla

$$ds^2 = E(Mr + 1)^2 dp^2 + G(Nr + 1)^2 dq^2 + dr^2,$$

ove M , N sono funzioni delle sole p , q , e sono precisamente i reciproci dei due raggi principali di curvatura della superficie data nel punto (p, q) ⁽¹⁾.

Confrontando colla (1), in questo caso risulta:

$$\frac{P}{Q} = \left\{ \begin{array}{l} E Mr + 1 \\ G Nr + 1 \end{array} \right.$$

Dunque affinchè P/Q non dipenda da r , deve essere:

$$M = N.$$

Poichè una superficie avente in ogni suo punto i due raggi principali di curvatura uguali fra loro è un piano ad una sfera ⁽²⁾, così abbiamo per quanto precede che:

Una superficie tale che ogni moto vorticoso di un fluido incompressibile sopra di essa (avente la rotazione normale alla superficie stessa), possa venir subordinato da un moto vorticoso nello spazio, parallelo a quella superficie, ed avente per linee vorticosose le sue normali, è necessariamente un piano od una sfera.

⁽¹⁾ Cfr. G. DARBOUX. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Paris (1914), I, p. 333. form. (6).

⁽²⁾ Cfr. L. BIANCHI, *Lez. di geom. diff.*, Pisa, Spoerri (1922), 3^a ediz., vol. I. p. 188.

II.

4. Il moto piano vorticoso è noto; occupiamoci quindi del *moto sferico*.

A tal uopo è bene che premettiamo alcune considerazioni d'indole geometrica, che ci saranno utili nel seguito.

Consideriamo nello spazio un ordinario sistema di coordinate cartesiane ortogonali (x, y, z) , e la sfera di centro l'origine 0, e raggio 1. Diciamo \mathcal{C} il punto (001) della sfera, ed eseguiamo la proiezione stereografica della sfera dal punto \mathcal{C} sul piano xy . Ad ogni punto (x, y, z) della sfera verrà così a corrispondere un punto del piano xy , di cui diremo (p, q) le coordinate cartesiane.

Si hanno le formole ⁽¹³⁾:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2p}{p^2 + q^2 + 1} \\ y = \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1} \\ z = \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} \end{array} \right. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

che si invertono come segue:

$$(15) \quad 1 - z = \frac{2}{p^2 + q^2 + 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{x}{1 - z} \\ q = \frac{y}{1 - z} \end{array} \right.$$

Porremo:

$$(16) \quad F(p, q) = p^2 + q^2 + 1,$$

onde per le (15) risulta:

$$(17) \quad F(p, q) = \frac{2}{1 - z}.$$

Se (x, y, z) , (x_1, y_1, z_1) sono due punti della nostra sfera, e (p, q) , (p_1, q_1) gli omologhi del piano xy , vediamo come si esprime, in funzione delle coordinate dei primi, la distanza d dei secondi. Si ha successivamente tenendo

⁽¹³⁾ Cfr. L. BIANCHI, op. cit. in ⁽¹²⁾, vol. I, p. 503.

conto delle (14), (15):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (1 - z)(1 + z); & x_1^2 + y_1^2 &= (1 - z_1)(1 + z_1) \\ d^2 &= (p - p_1)^2 + (q - q_1)^2 = \left(\frac{x}{1-z} - \frac{x_1}{1-z_1} \right)^2 + \left(\frac{y}{1-z} - \frac{y_1}{1-z_1} \right)^2 = \\ &= \frac{1+z}{1-z} + \frac{1+z_1}{1-z_1} - 2 \frac{xx_1 + yy_1}{(1-z)(1-z_1)} \end{aligned}$$

e cioè:

$$(18) \quad d^2 = 2 \frac{1 - xx_1 - yy_1 - zz_1}{(1-z)(1-z_1)}.$$

Se indichiamo con θ uno dei due archi di cerchio massimo della sfera che congiungono i due punti considerati (x, y, z) , (x_1, y_1, z_1) , si ha:

$$(19) \quad 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta = 1 - (xx_1 + yy_1 + zz_1),$$

donde tenendo presenti le (17), (18):

$$(20) \quad d = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \sqrt{F(p, q)} \sqrt{F(p_1, q_1)} \quad (14).$$

5. Consideriamo ora un qualunque punto A dello spazio, di coordinate cartesiane (x, y, z) . Congiunto A con O , diciamo r la lunghezza del segmento AO , ed indichiamo con (p, q) le coordinate sferiche di quello dei due punti d'intersezione della nostra sfera colla retta OA , che con A sta da una stessa

(14) Notiamo che il punto \mathcal{C} è *singolare* pel sistema di coordinate testè introdotto. Se (x_1, y_1, z_1) cade in \mathcal{C} , la d^2 ed $F(p_1, q_1)$ vengono infinitamente grandi, ed il loro rapporto tende all'unità. Pertanto se indichiamo con ϕ, ϕ_1 l'uno o l'altro dei due archi di cerchio massimo che da \mathcal{C} vanno ai due punti considerati della sfera, segue dalla (20):

$$\sqrt{F(p, q)} = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\phi}{2}}; \quad \sqrt{F(p_1, q_1)} = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\phi_1}{2}}$$

onde la (20) può anche scriversi sotto la forma notevole:

$$d = \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi_1}{2}}.$$

banda rispetto ad O . Potremo assumere i numeri (p, q, r) così determinati come coordinate curvilinee del punto A . Sarà per le (14):

$$(21) \quad \begin{cases} x = \frac{2p}{p^2 + q^2 + 1} r \\ y = \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1} r \\ z = \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} r \end{cases} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

donde:

$$(22) \quad r - z = \frac{2}{p^2 + q^2 + 1} r \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ p = \frac{x}{r - z} \\ q = \frac{y}{r - z} \end{cases}$$

Le coordinate (p, q, r) così introdotte non soddisfano alle condizioni di continuità nel punto O : noi però potremo utilizzarle lo stesso, poichè il punto O andrà sempre escluso dalle future considerazioni.

Dalle (21) segue differenziando:

$$\begin{cases} F^2 dx = 2r(-p^2 + q^2 + 1)dp - 4r p q dq + 2p F dr \\ F^2 dy = -4r p q dp + 2r(p^2 - q^2 + 1)dq + 2q F dr \\ F^2 dz = 4r p dp + 4r q dq + (p^2 + q^2 - 1)F dr, \end{cases}$$

donde, quadrando e sommando:

$$F^4(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 4r^2 F^2 dp^2 + 4r^2 F^2 dq^2 + F^4 dr^2.$$

Dunque, indicando con ds l'elemento lineare dello spazio, è:

$$(23) \quad ds^2 = \left[\frac{2r}{F} \right]^2 dp^2 + \left[\frac{2r}{F} \right]^2 dq^2 + dr^2.$$

III.

6. Per studiare il moto sferico vorticoso riferiamoci al precedente sistema di coordinate: esse sono ortogonali, le superficie $r = \text{cost.}$ sono le sfere di centro O , le linee $p = \text{cost.}$, $q = \text{cost.}$ sono le semirette uscenti da O .

Poichè le linee vorticose devono essere raggi, andrà escluso il punto 0 in cui questi concorrano; quindi per le condizioni al contorno il fluido dovrà essere *esterno* ad una sfera di centro 0, potendo d'altronde estendersi fino all'infinito, oppure essere limitato da una seconda sfera concentrica e più ampia della prima.

Confrontando la (23) colla (1) si vede che nelle ipotesi attuali è: $P = Q = \frac{2r}{F}$, $R = 1$, onde le (10), (11), (12) forniscono:

$$(24) \quad u = \frac{F}{2r} U; \quad v = \frac{F}{2r} V$$

$$(25) \quad \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0$$

$$(26) \quad \frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial q} = 8 \frac{r^2}{F^2} \rho;$$

e si noti che, poichè U , V , $r^2\rho/F^2$ sono funzioni delle sole p , q , nel nostro caso la r non compare effettivamente nelle equazioni del moto (25), (26).

Le (24), (26) mostrano che muovendosi su di una semiretta per 0, la velocità si mantiene parallela a se stessa, variando in modulo in ragione inversa della distanza r del punto da 0; la rotazione invece varia in ragione inversa del quadrato di tale distanza.

Ci potremo quindi limitare a studiare il moto su una sfera di centro 0, sfera che potremo anzi supporre di raggio unitario. Detto ds l'elemento d'arco di questa, $d\sigma$ l'elemento d'area, per le (23), (24), (25), (26), dovrà aversi:

$$(27) \quad ds^2 = \frac{4}{F^2} dp^2 + \frac{4}{F^2} dq^2$$

$$(28) \quad d\sigma = \frac{4}{F^2} dpdq$$

$$(29) \quad u = \frac{F}{2} U; \quad v = \frac{F}{2} V$$

$$(30) \quad \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0$$

$$(31) \quad \frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{8}{F^2} \rho.$$

Naturalmente la (31) andrà verificata entro l'area vorticoso σ_1 della nostra sfera; fuori di σ_1 varrà ancora la (31) intendendo che quivi la ρ valga zero.

7. Nel moto sferico vorticoso l'intensità totale dei vortici è nulla.

Consideriamo infatti sulla sfera una linea chiusa regolare l ; essa spezzerà la superficie sferica in due porzioni Σ, Σ' di contorno l . L'intensità dei vortici contenuti in Σ è:

$$I = \iint_{\Sigma} \rho d\sigma;$$

la quantità analoga relativa a Σ' è:

$$I' = \iint_{\Sigma'} \rho d\sigma.$$

Tenendo conto delle (28), (31), si ha pertanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \iint_{\Sigma} \frac{4}{R^2} \rho dpdq = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial q} \right\} dpdq = -\frac{1}{2} \int_l (Vdq + Udp) \\ I' = \iint_{\Sigma'} \frac{4}{R^2} \rho dpdq = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma'} \left\{ \frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial q} \right\} dpdq = \frac{1}{2} \int_l (Vdq + Udp). \end{array} \right.$$

I due integrali curvilinei hanno segno opposto, poichè il senso secondo cui si deve percorrere l per lasciare Σ alla propria sinistra, è l'opposto del senso analogo relativo a Σ' . Si noti inoltre che ancorchè una delle due aree Σ, Σ' contenga il punto \mathcal{C} singolare pel nostro sistema di coordinate, il passaggio dall'integrale superficiale all'integrale curvilineo è ancora lecito, poichè \mathcal{C} rispetto al moto è un qualunque punto della sfera.

Dalle due ultime equazioni risulta:

$$I + I' = 0$$

che è ciò che volevasi dimostrare.

Da qui segue che sulla sfera non è possibile un moto vorticoso con un solo vortice di intensità diversa da zero. Dunque:

Se si crea un vortice non nullo, dovrà di conseguenza prodursene uno o più altri.

8. Siamo ora in grado di affrontare la questione del moto sferico vorticoso in tutta la sua generalità.

Dimostreremo precisamente che data in una porzione σ_1 della nostra sfera la rotazione $\rho(p_1, q_1)$, soddisfacente alla condizione

$$(32) \quad \iint_{\sigma_1} \rho(p_1, q_1) d\sigma_1 = 0$$

(condizione che è *necessaria* per il teorema dimostrato al § 7) il moto sferico del fluido è determinato, e quindi il vortice *induce* una certa velocità nei punti esterni, velocità che effettivamente determineremo.

Potremo supporre che il punto \mathcal{C} cada *esternamente* al campo vorticoso σ_1 . Se è vero quanto precede, dovranno esistere delle funzioni u , v , definite su tutta la sfera, finite e continue, e per cui valgano le equazioni (29), (30), (31), intendendo che nella (31) la ρ valga la data rotazione per i punti dell'area vorticoso σ_1 , e valga zero fuori di σ_1 . Viceversa se facciamo vedere che tali funzioni u , v esistono e sono ben determinate, il nostro teorema è dimostrato.

La (30) si integra immediatamente. Essa porge :

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \\ V = + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \end{array} \right.$$

indicando con Φ una qualunque funzione di p , q , finita e continua colle sue derivate prime.

In virtù delle (33) la (31) diventa :

$$(34) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} = \frac{8}{R^2} \rho,$$

colle precedenti convenzioni per la ρ . Dalla teoria dei potenziali logaritmici è noto che, per la (34), la funzione Φ a meno di una costante additiva si esprime colla :

$$(35) \quad \Phi(p, q) = \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma_1} \log d \frac{4}{R^2(p_1, q_1)} \rho(p_1, q_1) dp_1 dq_1,$$

indicando con (p_1, q_1) le coordinate di un punto mobile nell'area vorticoso σ_1 , e con d l'espressione :

$$(36) \quad d = \sqrt{(p - p_1)^2 + (q - q_1)^2}.$$

In virtù della (28) la (35) si può scrivere :

$$(37) \quad \Phi(p, q) = \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma_1} \log d \rho(p_1, q_1) d\sigma_1.$$

9. Dimostreremo ora che la funzione Φ determinata sopra risolve il problema.

Per note proprietà dei potenziali logaritmici, quella funzione $\Phi(p, q)$ è definita finita e continua colle sue derivate prime su tutta la sfera, escluso tutt'al più per ciò che concerne il punto \mathcal{C} . Per le (29), (33) le u, v restano così espresse colle:

$$(38) \quad \left. \begin{aligned} u &= -\frac{F}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial q} \\ v &= \frac{F}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \end{aligned} \right\}$$

onde, poichè F è finita e continua su tutta la sfera, escluso il punto \mathcal{C} , queste funzioni u, v verificano tutte le condizioni a cui devono soddisfare, escluso tutt'al più per ciò che concerne il punto \mathcal{C} .

L'eventuale singolarità che può presentarsi nel punto \mathcal{C} , deve evidentemente dipendere dal sistema di coordinate (p, q) scelte sulla sfera: basterà quindi dimostrare che il vettore (u, v) definito dalle (38) *non dipende dalle coordinate*, per raggiungere lo scopo propostoci.

Indicando come sopra con (p, q) le coordinate di un punto qualunque della sfera, e con (p_1, q_1) le coordinate di un punto variabile nell'area vorticoso σ_1 , diremo θ l'uno o l'altro dei due archi di cerchio massimo che congiungono questi due punti. È evidente che:

$$\iint_{\sigma_1} \log F(p_1, q_1) \varrho(p_1, q_1) d\sigma_1$$

è una costante finita, poichè \mathcal{C} non cade in σ_1 , ed F non si annulla mai; inoltre (in virtù della (32), vera per ipotesi) è palesemente:

$$\iint_{\sigma_1} \log F(p, q) \varrho(p_1, q_1) d\sigma_1 = 0.$$

Si ha quindi che la funzione:

$$(39) \quad \begin{aligned} \Psi(p, q) = & \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma_1} \log d \varrho(p_1, q_1) d\sigma_1 - \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma_1} \log F(p_1, q_1) \varrho(p_1, q_1) d\sigma_1 - \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma_1} \log F(p, q) \varrho(p_1, q_1) d\sigma_1 \end{aligned}$$

non differisce che per una costante dalla $\Phi(p, q)$ data dalla (37):

$$(40) \quad \Psi(p, q) = \Phi(p, q) + \text{cost.}$$

Potremo quindi sostituire Ψ a Φ nelle equazioni (33), (34) e (38).

Orbene in virtù della (20) la (39) può scriversi:

$$(41) \quad \Psi(p, q) = \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma_1} \log \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \varphi(p_1, q_1) d\sigma_1,$$

e quindi la Ψ ha una definizione geometrica indipendente da ogni sistema di coordinate. Poichè, in virtù della (27), il vettore (u, v) dato dalle (38) non è che il gradiente di $\Psi(p, q)$ ruotato di 90° in un senso determinato nel piano tangente alla sfera in (p, q) , segue senz'altro la tesi.

10. Le equazioni (38) mostrano che le linee di corrente, di equazione:

$$\frac{dp}{u} = \frac{dq}{v}$$

non sono altro che le linee:

$$\Phi = \text{cost.} \quad \text{o} \quad \Psi = \text{cost.}$$

Fuori del campo vorticoso il moto deve essere non vorticoso, e quindi la velocità (u, v, w) deve essere il gradiente di una funzione $\Phi_1(p, q, r)$. Per tanto Φ_1 deve essere definita fuori del campo vorticoso, e, per le (2), (23), (38), verificare le equazioni:

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial q} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial q} = \frac{\partial \Phi}{\partial p} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = 0. \end{array} \right.$$

Poichè Φ come funzione di (p, q) per la (34) è armonica fuori di σ_1 , sarà quivi determinata a meno di una costante additiva la funzione armonica coniugata: ebbene questa è la funzione Φ_1 cercata. La relazione che intercede fra Φ e Φ_1 si può anche esprimere dicendo che $\Phi + i\Phi_1$ è funzione monogena della variabile complessa $p + iq$.

11. Poichè, per quanto si è detto al § 6, la velocità, spostandoci lungo un raggio, varia in modulo in ragione inversa della r , mentre d'altronde l'elemento d'area di una sfera di raggio r è direttamente proporzionale ad r^2 , segue che

la forza viva \mathcal{T} con cui è animata la massa fluida esistente su una sfera del nostro sistema di superficie di corrente, *non dipende dal raggio* della medesima.

Calcoliamo la forza viva \mathcal{T} relativa alla sfera di raggio 1.

Supposto il fluido di densità unitaria, indichiamo con Σ una qualunque porzione di superficie sferica non contenente il punto \mathcal{C} , limitata da una linea regolare l ; diremo n quella direzione della normale ad l in un suo punto, che tocca ivi la sfera, ed è volta positivamente verso l'interno di Σ . Se Σ' è la proiezione di Σ da \mathcal{C} sul piano xy , essa sarà una porzione finita di questo piano, avente per contorno la linea l' proiezione da l a \mathcal{C} . La corrispondenza che intercede fra Σ e Σ' è isogonale, come mostra la (27): alla direzione di n corrisponderà sul piano xy la direzione n' della normale interna di l' .

Detta \mathcal{T}_Σ la forza viva del fluido che occupa la regione Σ , si avrà \mathcal{T} al limite da \mathcal{T}_Σ quando Σ tenda a ricoprire l'intera sfera; notiamo che allora il contorno l di Σ tende a ridursi *al punto* \mathcal{C} .

Ciò posto si ha:

$$\mathcal{T}_\Sigma = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (u^2 + v^2) d\sigma,$$

donde tenendo presenti le (28), (38), (40):

$$(42) \quad \mathcal{T}_\Sigma = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma'} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial q} \right)^2 dpdq = - \frac{1}{2} \int_{l'} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n'} dl' - \frac{1}{2} \iint_{\Sigma'} \Psi \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^2} \right) dpdq.$$

In virtù della corrispondenza conforme che intercede fra Σ' e Σ , si ha:

$$\int_{l'} \Psi \frac{d\Psi}{dn'} dl' = \int_l \Psi \frac{d\Psi}{dn} dl.$$

Quando Σ tende a ricoprire tutta la sfera il suo contorno l si riduce ad un punto; poichè per quanto si è detto al § 9 in questo punto Ψ e $\frac{d\Psi}{dn}$ sono finite, segue che al limite l'integrale curvilineo scritto sopra tende a zero.

Per la (28) è:

$$\frac{1}{2} \iint_{\Sigma'} \Psi \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^2} \right) dpdq = \iint_{\Sigma} \Psi \frac{F^2}{8} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^2} \right) d\sigma;$$

d'altronde per le (34), (40) l'espressione:

$$\frac{F^2}{8} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^2} \right)$$

è diversa da zero solo nell' area vorticososa σ_1 , in cui vale la data rotazione ρ . Dunque per quanto precede se Σ tende a ricoprire l' intera sfera, si ha dalla (42) passando al limite :

$$\mathcal{T} = - \iint_{\sigma_1} \Psi \rho d\sigma$$

e cioè per la (41):

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma_1} \rho(p, q) d\sigma \iint_{\sigma_1} \rho(p_1, q_1) \log \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} d\sigma_1.$$

Si ha quindi, come era da aspettarsi, che la \mathcal{T} è determinata una volta che sia data la ρ nell' area vorticososa σ_1 .

IV.

12. Il moto sferico vorticoso più semplice è quello determinato da vortici *puntuali*.

Sulla solita sfera di raggio unitario si abbiano dei vortici negli n punti B_1, B_2, \dots, B_n . Indichiamo con $(x_i, y_i, z_i), (p_i, q_i)$ (per $i = 1, 2, \dots, n$) rispettivamente le coordinate cartesiane e sferiche di B_i ; diciamo θ_i uno dei due archi di cerchio massimo che congiungono B_i ad un punto qualunque (p, q) della sfera, e θ_{ik} la quantità analoga relativa ai due punti B_i, B_k ; poniamo inoltre :

$$d_i^2 = (p - p_i)^2 + (q - q_i)^2; \quad d_{ik}^2 = (p_k - p_i)^2 + (q_k - q_i)^2.$$

Nel caso in questione l' area vorticososa σ_1 si spezza negli n intorno σ_i dei vari punti B_i . L' intensità, che diremo γ_i , del vortice B_i , vale $\iint_{\sigma_i} \rho d\sigma$; per la (32)

deve essere :

$$(43) \quad \sum_1^n \gamma_i = 0.$$

In un intorno σ_i le d, θ che compaiono nelle (37), (41) sono costanti rispetto alle integrazioni che ivi figurano, e valgono rispettivamente d_i, θ_i . Pertanto quelle relazioni (37), (41) forniscono nel nostro caso per Φ, Ψ le espressioni :

$$(44) \quad \Phi(p, q) = \frac{1}{\pi} \sum_1^n \gamma_i \log d_i$$

$$(45) \quad \Psi(p, q) = \frac{1}{\pi} \sum_1^n \gamma_i \log \operatorname{sen} \frac{\theta_i}{2}.$$

Le linee di corrente, $\Psi = \text{cost.}$, sono ora le curve di equazione:

$$\prod_1^n \left[\text{sen} \frac{\theta_i}{2} \right]^{\gamma_i} = \text{cost.}$$

e cioè per la (19) sono le linee segnate sulla sfera dalle superficie:

$$(46) \quad \prod_1^n \{ 1 - xx_i - yy_i - zz_i \}^{\gamma_i} = \text{cost.}$$

Notiamo che $1 - xx_i - yy_i - zz_i = 0$ non è che l'equazione del piano ω_i tangente alla sfera nel punto B_i ; pertanto fra le superficie (46) (per i valori 0 ed ∞ della costante) vi è una superficie spezzata nei piani tangenti alla sfera nei vortici di intensità positiva, ed una spezzata nei piani tangenti alla sfera nei vortici di intensità negativa. Per ragioni di continuità segue quindi che le linee di corrente nelle vicinanze di un punto B_i devono avere un andamento *vorticoso*, il che è fisicamente evidente ⁽⁴⁵⁾.

13. Vogliamo ora vedere come si esprima coi dati il modulo della velocità.

Per le (38), (44) è:

$$\begin{cases} u = -\frac{F}{2\pi} \sum_1^n \gamma_i \frac{q - q_i}{d_i^2} \\ v = +\frac{F}{2\pi} \sum_1^n \gamma_i \frac{p - p_i}{d_i^2} \end{cases}$$

donde quadrando e sommando

$$(47) \quad u^2 + v^2 = \frac{F^2}{4\pi^2} \left\{ \sum_1^n \frac{\gamma_i^2}{d_i^2} + 2 \sum_{i,k} \gamma_i \gamma_k \frac{(p - p_i)(p - p_k) + (q - q_i)(q - q_k)}{d_i^2 d_k^2} \right\}$$

intendendo che nella \sum la somma vada estesa alle combinazioni binarie semplici dei numeri da 1 ad n .

Ora e nel seguito indicheremo con $\sum_{k=1}^n$ la somma dei termini che si hanno

⁽⁴⁵⁾ Le superficie (46) sono molto notevoli. Per $n=4$ proprio nel caso che valga la (43) esse furono studiate dal punto di vista proiettivo da F. KLEIN e S. LIE, che le dissero superficie V .

È facile di costruire la normale in un punto A generico alla superficie (46) che vi passa. Se P_i è il piede della perpendicolare calata da A sul piano ω_i , ed $h_i = AP_i$, la somma degli n vettori diretti da A verso i punti P_i , ed in modulo uguali a $\frac{\gamma_i}{h_i}$, è un vettore la cui direzione è quella della normale cercata. In base a ciò si può studiare la forma delle linee di corrente.

facendo assumere a k successivamente tutti i valori da 1 ad n , tolto il valore i . In base a ciò la (43) si può scrivere

$$\gamma_i = - \sum_{k=1}^n \gamma_i^{(k)} \gamma_k$$

donde :

$$\frac{\gamma_i^2}{d_i^2} = - \sum_{k=1}^n \gamma_i \gamma_k \frac{1}{d_i^2}.$$

Sommando membro a membro le relazioni che così si hanno per $i=1, 2, \dots, n$, si ha :

$$(48) \quad \sum_i \frac{\gamma_i^2}{d_i^2} = - \sum_{i,k} \gamma_i \gamma_k \left(\frac{1}{d_i^2} + \frac{1}{d_k^2} \right)$$

estesa anche qui la Σ alle combinazioni binarie semplici dei numeri da 1 ad n .

Si verifica facilmente che è :

$$-\frac{1}{d_i^2} - \frac{1}{d_k^2} + 2 \frac{(p-p_i)(p-p_k) + (q-q_i)(q-q_k)}{d_i^2 d_k^2} = \frac{d_{ik}^2}{d_i^2 d_k^2},$$

onde dalla (47), tenendo presente la (48), segue :

$$(49) \quad u^2 + v^2 = - \frac{F^2}{4\pi^2} \sum_{i,k} \frac{d_{ik}^2}{d_i^2 d_k^2} \gamma_i \gamma_k.$$

In base alla (20) è :

$$\frac{d_{ik}}{d_i d_k} = F \frac{\sin \frac{\theta_{ik}}{2}}{\sin \frac{\theta_i}{2} \sin \frac{\theta_k}{2}},$$

onde la (49) fornisce :

$$(50) \quad u^2 + v^2 = - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i,k} \frac{\sin^2 \frac{\theta_{ik}}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_i}{2} \sin^2 \frac{\theta_k}{2}} \gamma_i \gamma_k;$$

questa relazione ci dà il modulo della velocità con cui è animato il fluido in un qualunque punto $A(p, q)$ della sfera, sotto una forma che è indipendente da ogni sistema di coordinate ⁽¹⁶⁾.

⁽¹⁶⁾ Se consideriamo il piano diametrale α normale ad OA , detto B_n' il punto proiezione di B_n da A su α , si ha per quanto si è detto in ⁽¹⁴⁾:

$$\{ u^2 + v^2 \}_A = - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i,k} \overline{B_i' B_k'}^2 \gamma_i \gamma_k.$$

Dalla (50) risulta bene che, come deve essere, la velocità in modulo è finita e continua su tutta la sfera, esclusi i punti B_i nei quali ha delle singolarità polari.

14. Il caso più semplice si ha per $n=2$. I due vortici B_1, B_2 , hanno intensità opposte: $\gamma_1 = -\gamma_2 > 0$. Dalla (46) risulta che se si considera la retta intersezione dei piani ω_1, ω_2 che toccano la sfera in B_1, B_2 , i cerchi sezioni della sfera coi piani per essa sono le linee di corrente. Le linee $\Phi_1 = \text{cost.}$, traiettorie ortogonali di queste, sono i cerchi per i punti B_1, B_2 .

La velocità in modulo vale

$$\gamma_1 \frac{\text{sen } \frac{\theta_{12}}{2}}{2\pi \text{sen } \frac{\theta_1}{2} \text{sen } \frac{\theta_2}{2}},$$

onde non si annulla mai. Si può vedere che se B_1, B_2 non sono diametralmente opposti, il punto medio del più lungo dei due archi di cerchio massimo della sfera che hanno B_1, B_2 per estremi, è il punto della sfera in cui il modulo della velocità assume il valore più basso; se invece B_1, B_2 sono diametralmente opposti, la velocità assume in modulo il suo valor minimo in tutti i punti del cerchio massimo il cui piano è perpendicolare al diametro B_1B_2 . La formola stabilita nella nota ⁽¹⁶⁾ dà una semplice costruzione grafica della velocità; ecc.

V.

15. Finora abbiamo studiato il moto e la distribuzione delle velocità in un determinato istante, e cioè considerando i vortici come fissi. Però, poichè si è stabilito che un vortice induce una certa velocità sui punti esterni, i vortici si influenzeranno mutuamente, e quindi in generale cambieranno di forma, e si sposteranno col tempo.

Per semplicità di limiteremo a studiare gli *spostamenti* che avvengono nel caso dei *vortici puntuali*.

Mantenendo le notazioni introdotte nel § 12, sia (u_i, v_i) la velocità con cui è animato il vortice B_i all'istante t ; per la (27) sarà:

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_i = \frac{2}{F(p_i, q_i)} \frac{d\eta_i}{dt} \\ v_i = \frac{2}{F(p_i, q_i)} \frac{dq_i}{dt} \end{array} \right.$$

Il vortice B_i non sarà influenzato da sè stesso per ragioni di simmetria, esso invece risentirà delle azioni dei rimanenti $n - 1$ vortici; per le (38), (40), (45) è precisamente:

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_i = - \frac{F(p_i, q_i)}{2} \frac{1}{\pi} \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q} \left(\gamma_k \log \operatorname{sen} \frac{\theta_k}{2} \right) \right]_{p=p_i, q=q_i} \\ v_i = + \frac{F(p_i, q_i)}{2} \frac{1}{\pi} \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial p} \left(\gamma_k \log \operatorname{sen} \frac{\theta_k}{2} \right) \right]_{p=p_i, q=q_i} \end{array} \right.$$

Ora è palesemente:

$$[\theta_k]_{p=p_i, q=q_i} = \theta_{ik},$$

onde se introduciamo la funzione:

$$(53) \quad \Omega = \frac{1}{\pi} \sum_{i,k} \gamma_i \gamma_k \log \operatorname{sen} \frac{\theta_{ik}}{2},$$

le (52) si possono scrivere:

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_i = - \frac{1}{\gamma_i} \frac{F(p_i, q_i)}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \\ v_i = + \frac{1}{\gamma_i} \frac{F(p_i, q_i)}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} \end{array} \right.$$

Le equazioni del moto dei punti $B_i(p_i, q_i)$ si hanno allora subito confrontando le (51), (54); esse sono:

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\gamma_i \frac{1}{F^2(p_i, q_i)} \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \\ 4\gamma_i \frac{1}{F^2(p_i, q_i)} \frac{dq_i}{dt} = + \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} \end{array} \right.$$

16. Il sistema di equazioni differenziali (55) ammette 4 integrali indipendenti, sotto forma finita.

Uno è:

$$(56) \quad \Omega = \text{cost.};$$

esso si ha moltiplicando ambo i membri delle (55) rispettivamente per $-\frac{dq_i}{dt}$, $\frac{dp_i}{dt}$, sommando membro a membro le due equazioni che così si ottengono, ed indi sommando fra loro le n equazioni che così risultano per $i=1, 2, \dots, n$, ed integrando.

Gli altri tre integrali si hanno in base al seguente teorema:

Se si indicano con δ_i le distanze con segno dei punti B_i da un qualunque piano fisso, la somma:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \delta_i$$

non varia col tempo ⁽¹⁷⁾.

Dimostriamo questo teorema fondandoci sulla seguente osservazione. La funzione Ω per la (53) non dipende dai punti B che attraverso alle loro mutue distanze geodetiche θ_{ik} , onde uno spostamento rigido della sfera su sè stessa non deve mutare il valore di Ω .

Il piano fisso dell'enunciato si può intanto supporre passante per l'origine O , poichè se lo si sposta parallelamente a sè stesso la somma scritta sopra non varia per la (43). Assunto quel piano fisso come piano xy , eseguiamo una rotazione infinitesima di ampiezza $\delta\theta$ attorno all'asse delle z ; la sfera si muove su sè stessa: precisamente il punto di coordinate (p, q) si porta nel punto di coordinate $(p + \delta p, q + \delta q)$, ove in virtù delle (15) è:

$$\delta p = -q\delta\theta; \quad \delta q = p\delta\theta.$$

Poichè corrispondentemente la Ω non deve variare, sarà:

$$0 = \delta\Omega = \sum_1^n \left(\frac{\partial\Omega}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial\Omega}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \sum_1^n \left(-q_i \frac{\partial\Omega}{\partial p_i} + p_i \frac{\partial\Omega}{\partial q_i} \right) \delta\theta,$$

cioè:

$$\sum_1^n \left(-q_i \frac{\partial\Omega}{\partial p_i} + p_i \frac{\partial\Omega}{\partial q_i} \right) = 0,$$

donde per le (55):

$$\sum_1^n \gamma_i \frac{1}{F^2(p_i, q_i)} \left(p_i \frac{dp_i}{dt} + q_i \frac{dq_i}{dt} \right) = 0,$$

o se si vuole, tenendo presente la (16):

$$\sum_1^n \gamma_i \frac{1}{F^2(p_i, q_i)} \frac{d}{dt} F(p_i, q_i) = 0.$$

Da qui integrando si ha:

$$\sum_1^n \gamma_i \frac{1}{F(p_i, q_i)} = \text{cost.}$$

⁽¹⁷⁾ Questo teorema esprime che se si dividono i punti B in due gruppi di intensità totali non nulle, se si considera il vettore che ha per estremi i baricentri di quei due gruppi di punti, preso ciascuno con massa uguale alla intensità del vortice corrispondente, tale vettore resta invariato col tempo.

e cioè per la (17):

$$\sum \gamma_i z_i = \text{cost.},$$

il che dimostra l'asserto.

Il teorema testè dimostrato porge i tre integrali indipendenti:

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n \gamma_i x_i = 2H \\ \sum_1^n \gamma_i y_i = 2K \\ \sum_1^n \gamma_i z_i = 2L, \end{array} \right.$$

che in virtù delle (14), (15), (43), si possono scrivere:

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n \gamma_i \frac{p_i}{p_i^2 + q_i^2 + 1} = H \\ \sum_1^n \gamma_i \frac{q_i}{p_i^2 + q_i^2 + 1} = K \\ \sum_1^n \gamma_i \frac{-1}{p_i^2 + q_i^2 + 1} = L. \end{array} \right.$$

17. Il caso di due vortici puntuali si studia facilmente, esaurendolo completamente.

I due vortici B_1, B_2 avranno intensità opposte $\gamma_1 = \gamma, \gamma_2 = -\gamma$. Preso l'asse delle z parallelo alla posizione iniziale della retta $B_1 B_2$, detta $2a$ la distanza iniziale di questi punti, si avrà per le (57):

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 + 2a, \end{array} \right.$$

e da qui quadrando e sommando, poichè è:

$$(60) \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1,$$

si ha:

$$z_2 = a$$

e parimenti

$$(61) \quad z_1 = +a.$$

Si vede quindi che *i due vortici B_1, B_2 si muovono su due piani paral-*

leli, equidistanti dal centro, mantenendosi sempre su una stessa retta normale a questi piani ⁽¹⁸⁾.

I due vortici B_1, B_2 saranno quindi animati da velocità uguali. Per determinare tali velocità calcoliamoci intanto Ω . Per la (53) nel nostro caso è:

$$\Omega = -\frac{1}{\pi} \gamma^2 \log \operatorname{sen} \frac{\theta_{12}}{2},$$

donde per le (19), (59), (60):

$$\Omega = -\frac{1}{\pi} \gamma^2 (\log \sqrt{x_1} + \log \sqrt{a}).$$

In virtù delle (54) è quindi:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{\pi} \gamma \frac{F(p_1, q_1)}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \log \sqrt{x_1} \\ v_1 = -\frac{1}{\pi} \gamma \frac{F(p_1, q_1)}{2} \frac{\partial}{\partial p_1} \log \sqrt{x_1}, \end{cases}$$

donde per le (14), (16), (61):

$$\sqrt{u_1^2 + v_1^2} = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

Dunque il punto B_1 (e così pure B_2) si muove di moto circolare uniforme; la velocità è in modulo proporzionale alla intensità γ del vortice, ed alla cotangente dell'angolo che il piano del moto fa col raggio OB_1 .

Come si poteva prevedere per ragioni di simmetria, se i due vortici sono diametralmente opposti essi restano fissi.

18. Lo studio approfondito del moto dei punti B_i per n qualunque, ed in particolare per $n=3$, è certo di grande interesse. Esso equivale allo studio del sistema di equazioni differenziali (55), quando si tengano presenti le (16), (43), (53); di tale sistema sono stati determinati nel § 16 i 4 integrali indipendenti (56), (58).

Una trattazione esauriente della questione potrà essere argomento di un prossimo lavoro.

⁽¹⁸⁾ Cf. nota ⁽¹⁷⁾.

Sulla definizione dell'integrale

di BEPPO LEVI (a Parma)

La generalizzazione della nozione di integrale introdotta nella scienza dal LEBESGUE una ventina d'anni fa, ha dato luogo a una numerosa ed incessante successione di ricerche dirette a variarne e a migliorarne la definizione sotto vari aspetti (cito ad es. BOREL, YOUNG, RIESZ, CARATHÉODORY, TONELLI). Egli è che, di fronte alla fondamentale importanza che la nuova nozione ha avuto negli sviluppi posteriori dell'analisi, stanno evidenti difficoltà programmatiche d'indole didattica ed in parte anche logica, connesse a una meno immediata intuibilità in confronto alla definizione riemanniana e alla necessità di far precedere una teoria della misura degli aggregati lineari.

Vorrei esporre qui una definizione dell'integrale ⁽¹⁾ la quale mi pare ovviare alle suddette difficoltà presentandosi del tutto conforme alla definizione riemanniana (nella forma di JORDAN) — e tale anzi che quest'ultima ne appare caso particolare immediato — ed evitando ogni precedente teoria della misura.

Per le funzioni misurabili, l'integrale quale è qui definito coincide col l'integrale del LEBESGUE: ma resta dubbio se non sia possibile immaginare l'applicazione della definizione a funzioni non misurabili (delle quali, com'è noto, è assai difficile di offrire esempi concreti e analiticamente maneggiabili). E qui va osservato che sono nondimeno tutte soddisfatte le condizioni che il LEBESGUE impone come definizione descrittiva dell'integrale: nè ciò deve troppo stupire, perchè l'identità affermata dal LEBESGUE fra la definizione descrittiva e la sua costruzione è da lui provata precisamente solo nell'ipotesi implicita della misurabilità delle funzioni ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Essa era destinata al secondo volume della mia *Introduzione all'Analisi* che per varie congiunture non ha potuto finora vedere la luce. Ne tenni una breve esposizione due anni fa nelle adunanze della Sezione di Parma dell'Associazione « Mathesis ».

⁽²⁾ È chiaro nell'enunciato medesimo della definizione descrittiva del LEBESGUE (*Leçons sur l'intégration*, p. 98) che l'autore si riserva di attribuire alle funzioni considerate qualche limitazione di carattere abbastanza ampio, poichè egli chiede di *attribuire un numero ad ogni funzione limitata ecc.*, mentre poi il numero è attribuibile o attribuito alle sole funzioni misurabili.

Mi è necessario introdurre, incominciando, qualche locuzione nuova: non vorrei che ciò fosse di pregiudizio all'accoglimento della definizione proposta: certo ogni locuzione nuova va a diminuzione della immediata impressione di semplicità presso chi ha diversa consuetudine; e potrebbe pensarsi che già nella primitiva definizione del LEBESGUE e in quelle successivamente proposte le difficoltà provenienti dalle considerazioni di misura siano da attribuirsi essenzialmente a questioni di linguaggio. Non è precisamente così: perchè la teoria della misura non entra, nell'abituale definizione dell'integrale del LEBESGUE, esclusivamente come linguaggio, e, se mai, coll'adattare a nozioni relativamente complesse termini di comune intuizione semplice ed immediata, essa è — in quanto linguaggio — piuttosto adatta a nascondere talune difficoltà in una falsa evidenza che a dare ad esse eccessiva evidenza.

Ma io voglio ritenere che anche le locuzioni qui introdotte parranno al lettore totalmente perspicue, se appena egli vorrà por mente alla intuizione geometrica cui esse si riferiscono.

I.

1. Sia \mathcal{A} un aggregato di numeri positivi: sia \mathcal{S} l'aggregato di tutte le somme di un numero finito di elementi di \mathcal{A} : chiameremo *somma di \mathcal{A}* il limite superiore di \mathcal{S} : lo indicheremo con $S(\mathcal{A})$.

Se \mathcal{S} è illimitato, è $S(\mathcal{A}) = +\infty$. In caso contrario $S(\mathcal{A})$ è finito: assegnato arbitrariamente un ε , esistono allora sempre in \mathcal{S} elementi s_ε tali che

$$0 \leq S(\mathcal{A}) - s_\varepsilon < \varepsilon.$$

Assegnato arbitrariamente un gruppo finito di elementi di \mathcal{A} ,

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

esistono fra le somme s_ε di quelle di cui tutti questi a_i sono addendi: se infatti si fissa una s_ε , e sia \bar{s} , e si indicano con \bar{a}_i quelli fra gli a_i che non sono stati presi come addendi nella formazione di \bar{s} , la somma $\bar{s} + \Sigma \bar{a}_i$ è ancora una s_ε , perchè

$$0 \leq S(\mathcal{A}) - (\bar{s} + \Sigma \bar{a}_i) \leq S(\mathcal{A}) - \bar{s} < \varepsilon.$$

Osservazione. Nelle linee precedenti non si è voluto far questione della numerabilità dell'aggregato \mathcal{A} , perchè non importerà mai di farne cenno nelle applicazioni che seguono: è chiaro però che se $S(\mathcal{A})$ è finito, l'aggregato degli elementi di \mathcal{A} non nulli è numerabile, perchè, per ogni n , non esistono in \mathcal{A} più di n elementi $\geq \frac{1}{n} S(\mathcal{A})$.

2. Se \mathcal{A} , \mathcal{B} sono aggregati, si chiama abitualmente loro *somma logica*, e si indica con $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, l'aggregato che ha per elementi gli elementi comuni e non comuni di \mathcal{A} e di \mathcal{B} . A noi occorrerà considerare aggregati contenenti elementi uguali (identici) da considerarsi come distinti: potrà doversi allora formare l'aggregato che ha per elementi tutti gli elementi di \mathcal{A} e tutti gli elementi di \mathcal{B} , assumendo come distinti elementi uguali se provenienti da aggregati diversi: l'aggregato così formato si chiamerà il *totale di \mathcal{A} e \mathcal{B}* e si indicherà con $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Se $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{C}$, scriveremo pure $\mathcal{B} = \mathcal{C} - \mathcal{A}$.

Se \mathcal{A} , \mathcal{B} sono aggregati di numeri positivi, si ha subito $S(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B})$.

Se quindi \mathcal{A} è un aggregato di numeri positivi avente somma $S(\mathcal{A})$ finita, \mathcal{A}' una sua parte finita avente somma $s \geq S(\mathcal{A}) - \varepsilon$, e $\mathcal{A}'' = \mathcal{A} - \mathcal{A}'$, sarà $S(\mathcal{A}'') \leq \varepsilon$, e cioè ogni aggregato di numeri positivi avente somma finita si può sempre spezzare in due parti di cui l'una finita, l'altra di somma arbitrariamente piccola.

3. Si dirà che un aggregato di intervalli *ricopre un intervallo* $a-b$, quando ogni punto di $a-b$ (fatta al più eccezione per gli estremi a , b) è interno o estremo ad uno almeno degl'intervalli dell'aggregato.

Sarà necessario tener presente il noto teorema di BOREL: *Se un aggregato d'intervalli \mathcal{G} ricopre l'intervallo $a-b$ la somma delle ampiezze degli elementi di \mathcal{G} è sempre $\leq |b-a|$* ⁽³⁾.

⁽³⁾ La proposizione si enuncia abitualmente coll'ipotesi che \mathcal{G} sia numerabile (cfr. BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, pp. 41-43; LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, pp. 104-105). Però il lemma preliminare il quale afferma la possibilità di estrarre dall'aggregato \mathcal{G} un aggregato finito ricoprente l'intervallo $a-b$ è dimostrato dal LEBESGUE senza questa ipotesi restrittiva, ma con quella che ogni punto di $a-b$ sia interno (non estremo) a qualche elemento di \mathcal{G} . La stessa proposizione è dimostrata dal TONELLI (*Calcolo delle variazioni*, vol. I, pp. 111-112) con qualche vantaggio metodologico, in quanto è definito un procedimento per la suddetta estrazione. L'ipotesi della numerabilità è allora evidentemente superflua anche per la proposizione del testo.

Se si ammette, come nel testo, che i punti di $a-b$ possano anche essere soltanto estremi di qualche elemento di \mathcal{G} cessa di essere vero il lemma citato: ma resta vera la proposizione, perchè, se si ammette, per assurdo, che la somma delle ampiezze degli elementi di \mathcal{G} sia $S = |b-a| - \delta$, si costruisca un nuovo aggregato \mathcal{G}' ampliando ogni elemento di \mathcal{G} tanto a destra quanto a sinistra, per segmenti di lunghezza $\frac{1}{2} \lambda \frac{\varepsilon}{S}$, dove λ è l'ampiezza dell'elemento medesimo è $\varepsilon < \delta$. Tutti i punti di $a-b$ sono allora interni (e non estremi) a qualche elemento di \mathcal{G}' , mentre la somma delle ampiezze di questi risulterebbe $= S + \varepsilon < |b-a|$: e così nasce l'assurdo.

4. Sia \mathcal{E} un aggregato di intervalli, e un suo elemento variabile, $h(e)$ una funzione numerica, \mathcal{H} il dominio di h (aggregato di numeri): noi diremo che l'aggregato \mathcal{H} è disteso sopra \mathcal{E} .

Noi dovremo sempre supporre che i numeri $h(e)$ siano tutti positivi: $h(e)$ si chiamerà l'altezza relativa ad e .

Sia $l(e)$ l'ampiezza di e , e sia \mathcal{R} l'aggregato dei numeri (positivi) $l(e)h(e)$: noi scriveremo $\mathcal{R} = \mathcal{E}\mathcal{H}$ e diremo che \mathcal{R} è un aggregato di rettangoli appoggiati ad \mathcal{E} : (l'elemento $l(e)h(e)$ di \mathcal{R} ha base e e altezza $h(e)$).

L'interpretazione geometrica di queste nozioni è evidente: se l'intervallo $a-b$ si immagina segnato sopra l'asse delle x di un piano cartesiano, \mathcal{E} sarà rappresentato da un sistema di segmenti dell'asse medesimo, i quali possono eventualmente ricoprirsì l'uno l'altro parzialmente o totalmente con quante si vogliono ripetizioni; nelle condizioni enunciate nel n.° 3, che saranno quelle abituali nel seguito, il segmento rappresentativo di $a-b$ è interamente ricoperto dai segmenti rappresentanti gli elementi di \mathcal{E} . Se poi si portano in ordinate i segmenti $h(e)$, l'aggregato \mathcal{R} (e con esso \mathcal{H}) sarà rappresentato da un sistema di rettangoli (cadenti tutti sul semipiano positivo) aventi per basi i singoli segmenti costituenti \mathcal{E} .

5. Si dirà che un aggregato \mathcal{E} d'intervalli, ricoprente l'intervallo $a-b$, lo ricopre semplicemente, quando due elementi di \mathcal{E} non hanno mai punti comuni se non estremi, e nessun elemento di \mathcal{E} contiene punti fuori di $a-b$.

Un aggregato \mathcal{E} d'intervalli, ricoprente semplicemente $a-b$, si dirà riemanniano se è costituito di un numero finito di elementi: per definire un tale aggregato riemanniano basta assegnare un sistema di punti

$$c_0 = a, \quad c_1, \quad c_2, \dots, \quad c_n, \quad c_{n+1} = b$$

succedentisi ordinatamente sull'intervallo $a-b$ e considerare gli intervalli c_i-c_{i+1} .

Noi supporremo di regola $a < b$ (e sarà sempre sottinteso se non sarà detto esplicitamente il contrario): sarà allora $c_i < c_{i+1}$.

Un aggregato di rettangoli appoggiato ad un aggregato riemanniano di intervalli si dirà esso pure riemanniano.

II.

6. Sia $f(x)$ una funzione positiva limitata definita in un intervallo $a-b$ ($a < b$: v. n.° 5). Diremo che un aggregato \mathcal{H} di numeri positivi (o nulli) disteso sopra un aggregato \mathcal{E} di intervalli ricoprente $a-b$ (n. 4) ricopre $f(x)$ in $a-b$

quando, qualunque sia x_i in $a-b$, esiste in \mathcal{E} un intervallo e a cui x_i appartiene, almeno come estremo, e tale che $h(e) \geq f(x_i)$.

Diremo allora che $\mathcal{R} = \mathcal{E}\mathcal{K}$ (n.° 4) è un *aggregato di rettangoli ricoprente* $f(x)$ in $a-b$ e che $S(\mathcal{R})$ è una *somma prevalente ad $f(x)$ in $a-b$* .

Se \mathcal{E} , e quindi anche \mathcal{R} , è riemanniano, anche la somma $S(\mathcal{R})$ si dirà *riemanniana*.

7. Sia $\mathcal{R} = \mathcal{E}\mathcal{K}$ un aggregato di rettangoli ricoprente $f(x)$ in $a-b$. Si spezzi \mathcal{E} in due parti, $\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}''$ (n. 2), e siano $\mathcal{R}' = \mathcal{E}'\mathcal{K}$, $\mathcal{R}'' = \mathcal{E}''\mathcal{K}$ le parti corrispondenti in cui si spezza \mathcal{R} ($\mathcal{R} = \mathcal{R}' + \mathcal{R}''$).

Supponiamo che \mathcal{E}' e quindi \mathcal{R}' constino di un numero finito di elementi. Si può allora determinare un aggregato riemanniano \mathcal{F} di segmenti, ricoprente $a-b$ e un aggregato \mathcal{K} di numeri positivi disteso sopra di esso, tale che posto $\mathcal{S} = \mathcal{F}\mathcal{K}$, l'aggregato $\mathcal{S} + \mathcal{R}''$ ricopra ancora $f(x)$ in $a-b$, e sia

$$S(\mathcal{S} + \mathcal{R}'') \leq S(\mathcal{R}).$$

Indichiamo infatti con c_1, c_2, \dots, c_n gli estremi, interni ad $a-b$, dei segmenti costituenti \mathcal{E}' presi in ordine crescente, per modo che

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b = c_{n+1}$$

e chiamiamo \mathcal{F} l'aggregato degli intervalli c_i-c_{i+1} : ciascuno di questi intervalli è completamente contenuto o completamente esterno ad ogni elemento di \mathcal{E}' ; poniamo allora

$$h(c_i-c_{i+1}) = \begin{cases} 0 & \text{se } c_i-c_{i+1} \text{ è esterno a tutti gli elementi di } \mathcal{E}', \\ \text{massimo degli } h(e') \text{ corrispondenti a tutti gli elementi } e' \text{ di } \mathcal{E}' \text{ che} \\ & \text{contengono } c_i-c_{i+1}, \text{ se di tali elementi esistono.} \end{cases}$$

Definiamo così un aggregato \mathcal{K} (l'aggregato dei valori di h) disteso sopra \mathcal{F} , e si vede subito che $\mathcal{S} = \mathcal{F}\mathcal{K}$ soddisfa alle condizioni enunciate.

III.

8. Chiameremo *integrale superiore di $f(x)$ in $a-b$* ed indicheremo con $\int_a^b f(x) dx$ il limite inferiore delle somme prevalenti ad $f(x)$ in $a-b$ (n.° 6).

Il limite inferiore delle sole somme prevalenti riemanniane si chiamerà

integrale superiore riemanniano $\overline{\left((R) \int_a^b f(x) dx \right)}$: si ha quindi subito

$$\overline{\left((R) \int_a^b f(x) dx \right)} \geq \int_a^b f(x) dx.$$

9. Se M è un numero maggiore o uguale ad ogni valore di $f(x)$ in a^{-b} , si vede subito che

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} \leq M(b-a);$$

più generalmente se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni positive (o nulle) in a^{-b} , e se è sempre

$$f(x) \leq g(x),$$

è pure

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} \leq \overline{\int_a^b g(x) dx},$$

perchè ogni aggregato di rettangoli ricoprente $g(x)$ in a^{-b} ricopre pure $f(x)$.

Inoltre se m è un numero positivo

$$\overline{\int_a^b m f(x) dx} = m \overline{\int_a^b f(x) dx},$$

perchè fra gli aggregati di rettangoli ricoprenti $f(x)$ e quelli ricoprenti $m f(x)$ si può stabilire una corrispondenza biunivoca in cui si corrispondano aggregati appoggiati allo stesso aggregato d'intervalli ed in cui le altezze corrispondenti siano nel rapporto $1:m$.

10. L'integrale superiore di una funzione $f(x)$ è una funzione additiva dell'intervallo a^{-b} (anzi, completamente additiva, nella terminologia del LA VALLÉE POUSSIN).

Se invero si divide l'intervallo a^{-b} in due parti mediante un punto c ($a < c < b$) e se \mathcal{R}' , \mathcal{R}'' sono aggregati di rettangoli ricoprenti $f(x)$ rispettivamente in a^{-c} e in c^{-b} , ν un rettangolo d'altezza $h \geq f(c)$ e di base (contenente c), d'ampiezza ε ; $\mathcal{R}' + \mathcal{R}'' + \nu$ è un aggregato di rettangoli ricoprente $f(x)$ in a^{-b} . È $S(\mathcal{R}' + \mathcal{R}'' + \nu) = S(\mathcal{R}') + S(\mathcal{R}'') + \varepsilon$. Ne segue

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} \leq \overline{\int_a^c f(x) dx} + \overline{\int_c^b f(x) dx}.$$

Se, inversamente, \mathfrak{R} è un aggregato di rettangoli ricoprente a^{-b} , ed \mathcal{E} è l'aggregato di intervalli cui esso è appoggiato, per modo che $\mathfrak{R} = \mathcal{E}\mathfrak{M}$, chiamiamo \mathcal{E}' ed \mathcal{E}'' gli aggregati di intervalli costituiti dagli elementi di \mathcal{E} e loro parti rispettivamente esterni a c^{-b} e ad a^{-c} . \mathcal{E}' ed \mathcal{E}'' ricoprono rispettivamente a^{-c} e c^{-b} ; e se a ciascun elemento di \mathcal{E}' , \mathcal{E}'' facciamo corrispondere il numero $h(e)$ che gli appartiene come elemento di \mathcal{E} o come parte di un tale elemento, risulta definito per ciascuno di essi un aggregato \mathfrak{M}' , \mathfrak{M}'' (rispettivamente) disteso su di esso. $\mathfrak{R}' = \mathcal{E}'\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{R}'' = \mathcal{E}''\mathfrak{M}''$ saranno aggregati di rettangoli ricoprenti fx in a^{-c} e in c^{-b} rispettivamente, e si ha $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' + \mathfrak{R}''$. Ne segue

$$\overline{\int_a^b fxdx} \geq \overline{\int_a^c fxdx} + \overline{\int_c^b fxdx};$$

onde, colla disuguaglianza precedente,

$$\overline{\int_a^b fxdx} = \overline{\int_a^c fxdx} + \overline{\int_c^b fxdx}.$$

Il ragionamento si estende senza difficoltà al caso di uno spezzamento di a^{-b} in intervalli parziali in numero finito qualunque od anche in una infinità di intervalli che lo ricoprono semplicemente.

11. Dalla proposizione del n.° 7 segue ora la seguente proposizione fondamentale :

Se fx è una funzione positiva limitata in a^{-b} , assegnato arbitrariamente un numero d , esiste sempre un aggregato riemanniano di rettangoli \mathfrak{S} , appoggiato ad un aggregato riemanniano d'intervalli ricoprente a^{-b} , e tale che

$$\left| S(\mathfrak{S}) - \overline{\int_a^b fxdx} \right| \leq d$$

e che basta aggiungere ad \mathfrak{S} un aggregato \mathfrak{T} di rettangoli di somma

$$S(\mathfrak{T}) \leq d$$

affinchè $\mathfrak{S} + \mathfrak{T}$ ricopra fx in a^{-b} .

Invero, per definizione, esiste un aggregato di rettangoli \mathfrak{R} , ricoprente fx in a^{-b} e tale che

$$0 \leq S(\mathfrak{R}) - \overline{\int_a^b fxdx} \leq d$$

ed esiste una parte \mathfrak{R}' di \mathfrak{R} finita e tale che (n.° 2)

$$S(\mathfrak{R}') \geq S(\mathfrak{R}) - d;$$

e posto

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{R} - \mathfrak{R}',$$

sarà

$$S(\mathfrak{C}) \leq d.$$

Colla costruzione del n. 7 si deduca allora da \mathfrak{R}' l'aggregato riemanniano \mathfrak{S} (v. n.° 7): scrivendo \mathfrak{C} al posto di \mathfrak{R}'' nella proposizione di detto numero, si ha

$$S(\mathfrak{R}) \geq S(\mathfrak{S} + \mathfrak{C}) = S(\mathfrak{S}) + S(\mathfrak{C}) \geq \int_a^b f x dx$$

onde

$$d \geq S(\mathfrak{R}) - \int_a^b f x dx \geq S(\mathfrak{S}) - \int_a^b f x dx \geq -S(\mathfrak{C}) \geq -d.$$

12. Possiamo ora subito mostrare che se m è un numero positivo

$$\int_a^b (m + f x) dx = m(b - a) + \int_a^b f x dx.$$

Osserviamo perciò che fra gli aggregati di rettangoli ricoprenti $f x$ e quelli ricoprenti $m + f x$ si può stabilire una corrispondenza biunivoca stabilendo che ad un aggregato \mathfrak{R}' ricoprente $m + f x$ corrisponda l'aggregato \mathfrak{R} (ricoprente $f x$) che si ottiene diminuendo di m l'altezza di ciascuno degli elementi di \mathfrak{R}' per cui detta altezza sia $\geq m$.

Osserviamo pure che si può sempre supporre di non considerare che aggregati \mathfrak{R}' a cui non appartengano rettangoli di altezza $< m$, perchè, sopprimendo tali rettangoli da un aggregato che ne contenga, si ottiene un nuovo aggregato di somma minore (o uguale) ed ancora ricoprente $m + f x$. Se ora \mathfrak{R}' è un tale aggregato, \mathfrak{R} il corrispondente aggregato ricoprente $f x$, \mathfrak{E} l'aggregato d'intervalli a cui entrambi sono appoggiati, A la somma delle ampiezze degli intervalli di \mathfrak{E} , si ha subito

$$S(\mathfrak{R}') = S(\mathfrak{R}) + mA.$$

Tenendo presente che, pel teorema del BOREL, è sempre $A \geq b - a$, si

conclude intanto che

$$\int_a^b (m + fx) dx \geq \int_a^b fxdx + m(b - a).$$

Ma è facile vedere che la differenza fra il primo e il secondo membro è minore d'ogni numero positivo assegnabile. Assumiamo perciò un aggregato di rettangoli \mathfrak{R} ricoprente fx in $a-b$ e tale che

$$0 \leq S(\mathfrak{R}) - \int_a^b fxdx \leq d$$

e separiamone (n.° 2) una parte \mathfrak{Q} tale che $S(\mathfrak{Q}) < d$ e che la parte residua sia finita; nell'aggregato \mathfrak{R}' corrispondente ad \mathfrak{R} nella corrispondenza sopra indicata, ad \mathfrak{Q} corrisponderà un aggregato \mathfrak{Q}' dal quale si potrà ancora separare una parte \mathfrak{T}' tale che $S(\mathfrak{T}') \leq d$ e che la parte residua sia finita. Sarà pure finito l'aggregato $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{R}' - \mathfrak{T}'$. Chiamiamo \mathfrak{T} la parte di \mathfrak{Q} corrispondente a \mathfrak{T}' : sarà pure

$$S(\mathfrak{T}) \leq S(\mathfrak{Q}) \leq d$$

e $\mathfrak{R} - \mathfrak{T} = \mathfrak{Q}$ sarà finito. Partendo da questo spezzamento di $\mathfrak{R} = \mathfrak{Q} + \mathfrak{T}$ e di $\mathfrak{R}' = \mathfrak{Q}' + \mathfrak{T}'$ ed operando come al numero precedente (e come al n.° 7) si determinano allora gli aggregati \mathfrak{S} , \mathfrak{S}' tali che

$$d \geq S(\mathfrak{S}) - \int_a^b fxdx \geq -d$$

$$S(\mathfrak{S}') + d \geq S(\mathfrak{S}') + S(\mathfrak{T}') \geq \int_a^b (m + fx) dx.$$

\mathfrak{S} , \mathfrak{S}' sono riemanniani ed appoggiati allo stesso aggregato riemanniano d'intervalli e gli elementi di \mathfrak{S} si ottengono diminuendo di m l'altezza di quelli di \mathfrak{S}' pei quali tale altezza è $\geq m$. Si ha perciò

$$S(\mathfrak{S}') \leq S(\mathfrak{S}) + m(b - a),$$

valendo il segno $<$ quando esistono elementi di \mathfrak{S}' di altezza $< m$.

Da queste disuguaglianze si raccoglie

$$\int_a^b (m + fx) dx \leq S(\mathcal{S}') + d \leq S(\mathcal{S}) + m(b - a) + d$$

$$\leq \int_a^b fxdx + m(b - a) + 2d.$$

Poichè d può scegliersi arbitrariamente piccolo, risulta provata la proposizione enunciata.

13. La proposizione del numero precedente mostra che se fx è una funzione limitata (non più necessariamente positiva), qualunque sia il numero m tale che in tutto l'intervallo a - b sia $m \geq -fx$, la differenza

$$\int_a^b (m + fx) dx - m(b - a)$$

ha sempre lo stesso valore. Questo valor costante noi chiameremo l'integrale superiore di fx in a - b , e lo rappresenteremo collo stesso simbolo $\int_a^b fxdx$.

Per tal modo l'integrale superiore di una funzione resta definito in ogni intervallo in cui questa sia limitata.

IV.

14. Se fx , gx sono due funzioni positive limitate in a - b , tale è pure $fx + gx$. Vogliamo mostrare che

$$\int_a^b (fx + gx) dx \leq \int_a^b fxdx + \int_a^b gxdx.$$

La proposizione rientra in quella del n.º 12 se $gx = m$, perchè

$$\int_a^b m dx = m(b - a);$$

in tal caso anzi essa si precisa perchè al posto \leq deve scriversi $=$ (cfr. n.º 17).

Nel caso generale, indichiamo con \mathfrak{S} un aggregato riemanniano di rettangoli, soddisfacente, rispetto alla fx , alla proposizione del n.° 11: sia (n.° 7)

$$c_0 = a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < c_{n+1} = b$$

il sistema dei punti di divisione dell'intervallo $a-b$ che definiscono l'aggregato riemanniano \mathfrak{F} d'intervalli su cui è disteso \mathfrak{S} . Si ha (n.° 10)

$$\int_a^b g x dx = \sum_{i=0}^n \int_{c_i}^{c_{i+1}} g x dx$$

e (n.° 11)

$$\left| \left(S(\mathfrak{S}) + \int_a^b g x dx \right) - \left(\int_a^b f x dx + \int_a^b g x dx \right) \right| \leq d;$$

infine (n.° 12)

$$\begin{aligned} S(\mathfrak{S}) + \int_a^b g x dx &= \sum_{i=0}^n \left(h(c_i - c_{i+1})(c_{i+1} - c_i) + \int_{c_i}^{c_{i+1}} g x dx \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \int_{c_i}^{c_{i+1}} \left(h(c_i - c_{i+1}) + g x \right) dx. \end{aligned}$$

Nella determinazione dell'aggregato \mathfrak{S} , secondo il procedimento del n.° 11, resta una larga arbitrarietà; noi ce ne varremo in modo analogo a quanto si è fatto al n.° 12: fissato cioè un aggregato \mathfrak{R} di rettangoli ricoprente fx in $a-b$ e tale che

$$0 \leq S(\mathfrak{R}) - \int_a^b f x dx \leq d,$$

immaginiamo di spezzare \mathfrak{R} in due parti, l'una \mathfrak{M} , tale che

$$S(\mathfrak{M}) \leq d,$$

l'altra $\mathfrak{R} - \mathfrak{M}$ finita. Sia \mathfrak{E} l'aggregato d'intervalli a cui si appoggia \mathfrak{R} , \mathfrak{E}_0 la parte di esso costituita dalle basi degli elementi di \mathfrak{M} . Indichiamo con \mathfrak{R} un aggregato di rettangoli ricoprente $fx + gx$ ed appoggiato ad \mathfrak{E} , con \mathfrak{M} la parte di esso appoggiata ad \mathfrak{E}_0 . Poichè $S(\mathfrak{R})$ e quindi $S(\mathfrak{M})$ sono numeri finiti, si può ancora estrarre da \mathfrak{M} una parte \mathfrak{C} tale che

$$S(\mathfrak{C}) \leq d$$

e che l'aggregato residuo $\overline{\mathcal{M}} - \overline{\mathcal{T}}$ sia finito. Indichiamo ancora con \mathcal{E}' la parte di \mathcal{E}_0 cui esso si appoggia, ed assumiamo come aggregato \mathcal{T} (n.° 11) la parte di \mathcal{M} (o di \mathcal{R}) che si appoggia ad \mathcal{E}'' .

Chiamiamo ora ψx la funzione che è uguale a $fx + gx$ nei punti di \mathcal{E}'' e nulla altrove, χx la funzione uguale a $k(c_i - c_{i+1}) + gx$ nei punti di $c_i - c_{i+1}$ (per ogni i), φx la funzione che in ogni punto ha per valore il massimo di ψx e χx . Poichè in ogni punto non coperto da \mathcal{E}'' $k(c_i - c_{i+1}) \geq fx$, sarà in ogni caso

$$\varphi x \geq fx + gx$$

onde

$$\overline{\int_a^b (fx + gx) dx} \leq \overline{\int_a^b \varphi x dx}.$$

D'altra parte il totale di un qualunque aggregato di rettangoli ricoprente ψx e di un aggregato di rettangoli ricoprente χx ricopre sempre φx , onde

$$\overline{\int_a^b \varphi x dx} \leq \overline{\int_a^b \psi x dx} + \overline{\int_a^b \chi x dx}.$$

$\overline{\int_a^b \chi x dx}$ si scompone nella somma degli integrali estesi ai singoli intervalli $c_i - c_{i+1}$; d'altra parte un aggregato di rettangoli ricoprente ψx è l'aggregato $\overline{\mathcal{T}}$, accresciuto di rettangoli di altezza 0 per ricoprire i punti esterni a \mathcal{E}'' dove la funzione è nulla: quindi ancora

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b \psi x dx} + \overline{\int_a^b \chi x dx} &\leq \sum_{c_i}^{c_{i+1}} \overline{\int_{c_i}^{c_{i+1}} (k(c_i - c_{i+1}) + gx) dx} + S(\overline{\mathcal{T}}) \\ &\leq S(\mathcal{S}) + \overline{\int_a^b gx dx} + d \\ &\leq \overline{\int_a^b fx dx} + d + \overline{\int_a^b gx dx} + d. \end{aligned}$$

Raccogliendo si ha

$$\overline{\int_a^b (fx + gx) dx} \leq \overline{\int_a^b fx dx} + \overline{\int_a^b gx dx} + 2d$$

e, poichè d può assumersi arbitrariamente piccolo, risulta provata la proposizione enunciata.

15. La proposizione si estende immediatamente alle funzioni limitate qualunque: se infatti si suppone che, per ogni x in a^{-b} ,

$$m \geq -fx, \quad n \geq -gx$$

si ha (n.° 13)

$$\begin{aligned} \int_a^b (fx + gx) dx &= \int_a^b (m + n + fx + gx) dx - (m + n)(b - a) \\ &\leq \int_a^b (m + fx) dx + \int_a^b (n + gx) dx - (m + n)(b - a) \\ &= \int_a^b fx dx + \int_a^b gx dx. \end{aligned}$$

16. Si ha, in particolare,

$$0 = \int_a^b 0 dx \leq \int_a^b fx dx + \int_a^b -fx dx.$$

Noi porremo

$$-\int_a^b -fx dx = \int_a^b fx dx;$$

la precedente relazione diviene

$$\int_a^b fx dx \geq \int_a^b fx dx.$$

$\int_a^b fx dx$ si chiamerà l'*integrale inferiore* di fx in a^{-b} .

La proposizione dei n.° 14, 15 dà subito

$$\int_a^b (fx + gx) dx \geq \int_a^b fx dx + \int_a^b gx dx.$$

Dalle proposizioni del n.º 9 si ha inoltre che se per ogni valore di x

$$fx \leq gx$$

è pure

$$\int_a^b fxdx \leq \int_a^b gxdx;$$

se m è un numero positivo

$$\int_a^b mfxdx = m \int_a^b fxdx;$$

se invece m è negativo

$$\int_a^b mfxdx = m \int_a^b fxdx.$$

17. Diremo che la funzione fx è *integrabile* in a - b quando i due integrali superiore ed inferiore sono uguali: il comune valore dei due integrali si chiamerà semplicemente *l'integrale di fx in a - b* e si indicherà, al solito, con $\int_a^b fxdx$.

Se una funzione è integrabile in a - b , essa è integrabile in ogni intervallo contenuto in a - b . Invero se

$$a \leq c < d \leq b$$

si ha

$$\int_a^b fxdx = \int_a^c fxdx + \int_c^d fxdx + \int_d^b fxdx, \quad \int_a^b fxdx = \int_a^c fxdx + \int_c^d fxdx + \int_d^b fxdx;$$

e quindi, se fx è integrabile in a - b ,

$$\left(\int_a^c fxdx - \int_a^c fxdx \right) + \left(\int_c^d fxdx - \int_c^d fxdx \right) + \left(\int_d^b fxdx - \int_d^b fxdx \right) = 0;$$

ciascuno dei tre addendi del primo membro non potendo essere negativo, essi

debbono essere tutti nulli; in particolare

$$\overline{\int_c^d f x dx} = \underline{\int_c^d f x dx}.$$

Se fx è integrabile in $a-b$, ed m è un numero qualunque, sono pure integrabili in $a-b$ le funzioni $m + fx$, mfx , e si ha

$$\int_a^b (m + fx) dx = \int_a^b f x dx + m(b - a)$$

$$\int_a^b mfx dx = m \int_a^b f x dx.$$

Inoltre, se fx è integrabile in $a-b$ e gx è una funzione limitata qualunque,

$$\overline{\int_a^b (fx + gx) dx} = \overline{\int_a^b f x dx} + \overline{\int_a^b g x dx}, \quad \underline{\int_a^b (fx + gx) dx} = \underline{\int_a^b f x dx} + \underline{\int_a^b g x dx}.$$

Invero, dai n.º 14, 15,

$$\overline{\int_a^b (fx + gx) dx} \leq \overline{\int_a^b f x dx} + \overline{\int_a^b g x dx}$$

ed anche

$$\underline{\int_a^b g x dx} = \underline{\int_a^b \{ (fx + gx) - fx \} dx} \leq \underline{\int_a^b (fx + gx) dx} - \underline{\int_a^b f x dx}.$$

Analogamente per gli integrali inferiori.

In particolare, se fx , gx sono entrambe integrabili in $a-b$, tale è pure la loro somma e

$$\int_a^b (fx + gx) dx = \int_a^b f x dx + \int_a^b g x dx$$

18. Siamo ora in grado di stabilire il nesso fra l'integrale, secondo la definizione proposta, e l'integrale del LEBESGUE.

Scomponiamo l'intervallo $a-b$ di definizione della funzione fx in un nu-

mero finito di aggregati $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$, senza punti comuni, e chiamiamo $f_j x$ la funzione che è $= f x$ nei punti di \mathcal{A}_j ed $= 0$ negli altri punti di $a-b$. Si ha

$$f(x) = \sum_j f_j x$$

onde (n.º 14, 15, 16)

$$\sum_j \overline{\int_a^b f_j x dx} \geq \overline{\int_a^b f x dx} \geq \underline{\int_a^b f x dx} \geq \sum_j \underline{\int_a^b f_j x dx}.$$

Supponiamo $f x$ positiva. Indichiamo con $\varphi_j x$ la funzione che è $= 1$ nei punti di \mathcal{A}_j ed $= 0$ negli altri punti (la funzione caratteristica di \mathcal{A}_j secondo il LA VALLÉE POUSSIN); indichiamo inoltre con L_j e l_j due numeri (positivi) rispettivamente maggiore (o uguale) e minore (o uguale) a tutti i valori di $f_j x$ in \mathcal{A}_j : si ha (n.º 9, 16)

$$L_j \int_a^b \varphi_j x dx \geq \overline{\int_a^b f_j x dx} \geq \underline{\int_a^b f_j x dx} \geq l_j \int_a^b \varphi_j x dx.$$

Si vede facilmente che $\int_a^b \varphi_j x dx$ e $\underline{\int_a^b \varphi_j x dx}$ sono rispettivamente la misura esterna e la misura interna di \mathcal{A}_j : se, come d'uso, li indichiamo quindi con $m_e(\mathcal{A}_j)$, $m_i(\mathcal{A}_j)$, si ottiene infine

$$\sum_j L_j m_e(\mathcal{A}_j) \geq \overline{\int_a^b f x dx} \geq \underline{\int_a^b f x dx} \geq \sum_j l_j m_i(\mathcal{A}_j).$$

Se i due membri estremi hanno uguali i loro limiti rispettivamente inferiore e superiore, al variare degli \mathcal{A}_j , $f x$ risulta integrabile in $a-b$.

Un aggregato \mathcal{A} sarà *misurabile* quando la sua funzione caratteristica è integrabile. Se questo avviene per gli aggregati \mathcal{A}_j , e con $m(\mathcal{A}_j)$ si indica il comune valore della loro misura esterna ed interna, non è più necessario di supporre, nelle precedenti deduzioni, L_j e l_j positivi (n.º 17), onde la relazione

$$\sum_j L_j m(\mathcal{A}_j) \geq \overline{\int_a^b f x dx} \geq \underline{\int_a^b f x dx} \geq \sum_j l_j m(\mathcal{A}_j)$$

vale indipendentemente dall'ipotesi della positività di fx . Inoltre i limiti inferiore e superiore rispettivamente dei due membri estremi divengono allora uguali se si può fare in modo che tutte le differenze $L_j - l_j$ divengano arbitrariamente piccole. A ciò si riesce immediatamente se, seguendo il LEBESGUE, si divide l'intervallo di variabilità della fx in intervalli parziali di ampiezza arbitrariamente piccola e si definiscono gli \mathcal{A}_i come i domini spettanti alla x affinché la fx resti in detti intervalli. La condizione di misurabilità di questi aggregati \mathcal{A}_i è quella che il LEBESGUE assume come definizione della *misurabilità* della funzione. Si giunge così ad un tempo alla definizione dell'integrale secondo il YOUNG e secondo il LEBESGUE e si vede che *l'integrale qui definito coincide coll'integrale del Lebesgue in ogni caso in cui quest'ultimo integrale esiste.*

19. È appena da ricordare come la definizione dell'integrale, una volta data per l'ipotesi che l'intervallo sia assunto in senso diretto ($a < b$), si estenda all'ipotesi opposta ($a > b$) mediante la posizione

$$\int_a^b fxdx = - \int_b^a fxdx$$

e come, con ovvii passaggi al limite, si estenda al caso di intervalli illimitati e di funzioni illimitate.

In seguito a queste estensioni immediate, si vede subito che l'integrale, quale è stato ora definito, soddisfa a tutte le proprietà assunte dal LEBESGUE come caratteristiche (definizione descrittiva dell'integrale), fatta al più riserva per quella relativa all'integrale del limite: « se una successione di funzioni tende crescendo ad una funzione fx , anche l'integrale delle prime tende all'integrale di fx ». Riguardo a quest'ultima proprietà, si vede subito (fissando le idee sull'ipotesi $a < b$) che, se le funzioni $f_i x$ tendono crescendo ad fx , gli $\int_a^b f_i x dx$ tendono crescendo ad un limite il quale è $\leq \int_a^b fxdx$; le considerazioni complementari che permettono di sostituire il segno $=$ al \leq saranno incluse come caso particolare in quelle dei prossimi paragrafi (v. n.º 23-24).

Ho già osservato, nelle poche parole introduttorie, che queste osservazioni non autorizzano a concludere circa l'identità del nostro integrale con quello del LEBESGUE nulla più di quanto è detto nelle ultime linee del numero precedente.

V.

Non sarebbe ora difficile mostrare come, dalla data definizione dell'integrale, si possano dedurre tutte le note proprietà. Non è questo che vogliamo ancora trattare qui. Credo preferibile di aggiungere qualche maggior particolare sopra le condizioni d'integrabilità (n.º 20, 21) e sopra l'integrazione per serie (n.º 22-24).

20. Premettiamo un'osservazione:

Sia \mathcal{A} un aggregato di punti dell'intervallo $a^{-}b$, e sia φx la sua funzione caratteristica, M la sua misura esterna

$$M = \int_a^b \varphi x dx.$$

Sia \mathcal{E} un aggregato di intervalli contenenti \mathcal{A} , nel loro insieme, pel quale la somma delle ampiezze di essi intervalli sia $< M + \rho$. Poniamo $\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}''$, dove \mathcal{E}' è finito, mentre la somma delle ampiezze degli elementi di \mathcal{E}'' è $< \rho$; per tal modo la somma delle ampiezze degli elementi di \mathcal{E}' è $> M - \rho$. Siano a_1, a_2, \dots, a_p i punti, estremi di elementi di \mathcal{E}' , interni ad $a^{-}b$, ordinati, per modo che

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_p < a_{p+1} = b.$$

Ciascuno degli intervalli $a_j^{-}a_{j+1}$ è completamente interno o completamente esterno a ciascuno degli elementi di \mathcal{E}' ; ne segue che la parte di \mathcal{A} contenuta in quelli fra questi intervalli che non appartengono ad elementi di \mathcal{E}' è interamente ricoperta da \mathcal{E}'' . Così, se si pone

$$M = \int_a^b \varphi x dx = \sum \int_{a_j}^{a_{j+1}} \varphi x dx = \Sigma' \int_{a_j}^{a_{j+1}} \varphi x dx + \Sigma'' \int_{a_j}^{a_{j+1}} \varphi x dx,$$

dove la somma Σ' si estende agli intervalli interni ad elementi di \mathcal{E}' , e la somma Σ'' si estende agli intervalli esterni,

$$\Sigma'' \int_{a_j}^{a_{j+1}} \varphi x dx < \rho, \quad \Sigma' \int_{a_j}^{a_{j+1}} \varphi x dx > M - \rho.$$

Si noti ancora che

$$\Sigma'(a_{j+1} - a_j) < M + \rho,$$

essendo il primo membro minore (o al più uguale) della somma delle ampiezze degli elementi di \mathcal{E}' : ne segue che

$$\Sigma' \left\{ (a_{j+1} - a_j) - \int_{a_j}^{a_{j+1}} \varphi x dx \right\} < 2\rho.$$

Nella somma del primo membro ciascun termine è positivo (o nullo): perciò se con (Σ') si indica una qualunque somma parziale, formata con termini di essa, è ancora

$$(\Sigma') \left| (a_{j+1} - a_j) - \int_{a_j}^{a_{j+1}} \varphi x dx \right| < 2\rho.$$

21. Veniamo ora alla ricerca di una condizione d'integrabilità di una funzione fx , assimilabile alla condizione di RIEMANN per gl'integrali riemanniani. Supporremo, come si può, fx positiva.

Supponiamo diviso l'intervallo $L-l$ di variabilità della fx in n intervalli parziali mediante i numeri

$$l = l_0 < l_1 < l_2 < \dots < l_n = L \quad (l \leq fx < L)$$

e chiamiamo \mathcal{A}_i l'aggregato dei valori della x per cui $l_{i-1} \leq fx < l_i$, $\varphi_i x$ la sua funzione caratteristica. Per ciascuno degli aggregati \mathcal{A}_i consideriamo gli aggregati analoghi agli \mathcal{E} \mathcal{E}' \mathcal{E}'' del numero precedente, che chiameremo rispettivamente \mathcal{E}_i \mathcal{E}'_i \mathcal{E}''_i . Chiamiamo b_1 b_2 b_q i punti estremi degli elementi di tutti gli \mathcal{E}'_i , interni ad $a-b$, ordinati, per modo che

$$a = b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_q < b_{q+1} = b.$$

Si osserverà di nuovo che ciascuno degl'intervalli $b_j - b_{j+1}$, è completamente interno o completamente esterno a ciascun elemento di ciascuno degli \mathcal{E}'_i . Indicheremo ancora con Σ' ogni somma estesa a tutti gl'intervalli $b_j - b_{j+1}$ che appartengono ad elementi di qualche \mathcal{E}'_i e con Σ'' ogni somma estesa invece a quelli fra questi intervalli che non appartengono a tali elementi.

Si ha

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b f x dx} &= \Sigma \overline{\int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx} = \Sigma' \overline{\int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx} + \Sigma'' \overline{\int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx} \\ \underline{\int_a^b f x dx} &= \Sigma \underline{\int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx} = \Sigma' \underline{\int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx} + \Sigma'' \underline{\int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx} \\ \Sigma'' \underline{\int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx} &\leq \Sigma'' \overline{\int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx} \leq n I. \rho \end{aligned}$$

onde

$$(a) \quad 0 \leq \left\{ \overline{\int_a^b f x dx} - \underline{\int_a^b f x dx} \right\} - \left\{ \Sigma' \overline{\int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx} - \Sigma' \underline{\int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx} \right\} < n I. \rho.$$

Indichiamo con $i(j)$ il massimo degli i per cui un elemento di \mathcal{E}_i' contiene l'intervallo $b_j - b_{j+1}$ e poniamo

$$\Lambda_j = l_{i(j)}, \quad \lambda_j = l_{i(j)-1}.$$

Si ha, in tutto $b_j - b_{j+1}$,

$$\Lambda_j > f x \geq \lambda_j \varphi_{i(j)} x$$

onde

$$\begin{aligned} (b_{j+1} - b_j) \Lambda_j &> \overline{\int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx} \geq \lambda_j \overline{\int_{b_j}^{b_{j+1}} \varphi_{i(j)} x dx} \\ \Sigma'(b_{j+1} - b_j) \Lambda_j &> \Sigma' \overline{\int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx} \geq \Sigma' \lambda_j \overline{\int_{b_j}^{b_{j+1}} \varphi_{i(j)} x dx} = \\ &= \Sigma'(b_{j+1} - b_j) \lambda_j - \left\{ \Sigma'(b_{j+1} - b_j) \lambda_j - \Sigma' \lambda_j \overline{\int_{b_j}^{b_{j+1}} \varphi_{i(j)} x dx} \right\}. \end{aligned}$$

Per limitare superiormente il valore dell'ultima parentesi $\{\}$ pensiamo gli intervalli $b_j - b_{j+1}$ ordinati in gruppi, ponendo in uno stesso gruppo quelli

per cui $i(j)$ ha lo stesso valore, ed indichiamo con $(\Sigma')_i$ la somma estesa agli intervalli del gruppo per cui questo valore è i . Si ha

$$\Sigma'(b_{j+1} - b_j)\lambda_j - \Sigma' \int_{b_j}^{b_{j+1}} \varphi_{i(j)} x dx = \Sigma \left\{ (\Sigma')_i (b_{j+1} - b_j) - \int_{b_j}^{b_{j+1}} \varphi_i x dx \right\} l_{i-1}$$

e quindi, per la relazione finale del numero precedente,

$$< 2\rho \Sigma l_{i-1} < 2nL\rho :$$

dunque, infine,

$$\Sigma'(b_{j+1} - b_j)\Lambda_j > \Sigma' \int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx > \Sigma'(b_{j+1} - b_j)\lambda_j - 2nL\rho.$$

Applicando la relazione medesima alla funzione $L - fx$ si ha che, indicando con $i'(j)$ il minimo degli i per cui un elemento di \mathcal{E}'_i contiene l'intervallo $b_j - b_{j+1}$, e ponendo

$$M_j = l'_{i'(j)} \quad \mu_j = l_{i'(j)-1}$$

sarà

$$\Sigma'(b_{j+1} - b_j)(L - \mu_j) \geq \Sigma' \int_{b_j}^{b_{j+1}} (L - fx) dx > \Sigma'(b_{j+1} - b_j)(L - M_j) - 2n(L - l)\rho$$

ossia

$$\Sigma'(b_{j+1} - b_j)\mu_j \leq \Sigma' \int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx < \Sigma'(b_{j+1} - b_j)M_j + 2nL\rho.$$

Si ha così infine

$$\Sigma'(b_{j+1} - b_j)(\Lambda_j - \mu_j) > \Sigma' \int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx - \Sigma' \int_{b_j}^{b_{j+1}} f x dx > \Sigma(b_{j+1} - b_j)(\lambda_j - M_j) - 4nL\rho$$

onde, a causa della (a),

$$\Sigma'(b_{j+1} - b_j)(\lambda_j - M_j) - 4nL\rho < \int_a^b f x dx - \int_a^b f x dx < \Sigma'(b_{j+1} - b_j)(\Lambda_j - \mu_j) + nL\rho.$$

Ricordiamo che, attribuendo un numero di elementi sufficientemente elevato agli aggregati \mathcal{E}'_i , si può assumere ρ arbitrariamente piccolo. Osserviamo ancora che

$\Sigma'(b_{j+1} - b_j)(\Lambda_j - \mu_j) - \Sigma'(b_{j+1} - b_j)(\lambda_j - M_j) = \Sigma'(b_{j+1} - b_j) \{ (\Lambda_j - \lambda_j) + (M_j - \mu_j) \}$
 può essere reso arbitrariamente piccolo quando si rendano sufficientemente

piccoli gli intervalli $l_i - l_{i+1}$. Si ottiene che la differenza fra gli integrali superiore ed inferiore di fx può essere resa prossima quanto si vuole a

$$\Sigma'(b_{j+1} - b_j)(\Lambda_j - \mu_j)$$

e la condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità della funzione si riduce a chiedere che questa espressione possa rendersi arbitrariamente piccola.

La differenza $\Lambda_j - \mu_j$ è chiaramente l'oscillazione della funzione fx nell'intervallo $b_j - b_{j+1}$ quando siano stati esclusi i valori della funzione medesima in un aggregato di punti di misura esterna arbitrariamente piccola (nei punti cioè appartenenti ad un aggregato contenuto nell'aggregato d'intervalli $\Sigma\mathcal{E}_i''$). Se con δ_ω , Δ_ω si indicano rispettivamente le somme delle differenze $b_{j+1} - b_j$ estese a tutti i termini per cui tale oscillazione è $\geq \omega$ e a tutti quelli per cui essa è $< \omega$, si ha

$$\begin{aligned} \delta_\omega \omega &\leq \Sigma'(b_{j+1} - b_j)(\Lambda_j - \mu_j) \leq \delta_\omega(L - l) + \Delta_\omega \omega \\ &\leq \delta_\omega(L - l) + \omega(b - a). \end{aligned}$$

Affinchè la funzione sia integrabile è quindi necessario e sufficiente che, fissata una divisione dell'intervallo $a-b$ in aggregati \mathcal{A}_i , ed escluso quindi da $a-b$ un conveniente aggregato $\Sigma\mathcal{E}_i''$ di misura arbitrariamente piccola, fissato poi arbitrariamente il numero positivo ω , si possa ancora escludere da $a-b$ un aggregato (finito) \mathfrak{F} di intervalli di misura arbitrariamente piccola δ_ω , per modo che la funzione, considerata nei punti restanti di $a-b$ abbia oscillazione $< \omega$ in ogni intervallo sufficientemente piccolo contenuto negli intervalli complementari di \mathfrak{F} .

La proposizione deve avvicinarsi ad una analoga di BOREL, LEBESGUE, VITALI sulla continuità quasi ovunque di ogni funzione misurabile.

Nel caso che la funzione fx sia misurabile, si può, nella dimostrazione precedente, fare in modo che ciascuno degli intervalli $b_j - b_{j+1}$ appartenga ad uno solo degli aggregati \mathcal{E}_i' e quindi le differenze $\Lambda_j - \mu_j$ tendono a 0 coll'ampiezza massima degli intervalli $l_i - l_{i+1}$: la condizione di integrabilità si vede quindi immediatamente soddisfatta.

22. Veniamo a considerare l'integrazione per serie.

Stabiliremo anzitutto che se f_1, f_2, \dots è una successione di funzioni limitate, positive, in un intervallo $a-b$, e tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = k \cdot (\text{costante})$$

il limite minimo degli integrali superiori $\int_a^b f_n x dx$ è $\geq k(b - a)$.

Dimostreremo la proposizione per assurdo: dimostreremo cioè che se

$$\lim_{\overline{a}^b} \int_a^b f_n x dx < k(b-a),$$

esistono certamente valori di x in $a-b$ per cui $\underline{\lim} f_n x < k$.

Supponiamo dunque che sia

$$\underline{\lim}_{\overline{a}^b} \int_a^b f_n x dx = k(b-a) - q = (k-p)(b-a) \quad (q, p > 0):$$

assegnato un numero positivo arbitrario e si può allora scegliere una successione parziale di funzioni f_i

tale che sia sempre $f_{n_1}, f_{n_2}, \dots, (n_{j+1} > n_j)$

$$\int_a^b f_{n_j} x dx < (k-p+e)(b-a);$$

e per ciascuna di queste funzioni si può considerare un aggregato di rettangoli \mathfrak{R}_{n_j} che la ricopra e tale che

$$S(\mathfrak{R}_{n_j}) < (k-p+2e)(b-a).$$

Chiamiamo \mathfrak{R}_j' l'aggregato degli elementi di \mathfrak{R}_{n_j} che hanno altezza $\geq k-p+3e$; sia \mathfrak{G}_j l'aggregato d'intervalli cui esso si appoggia ed s_j la somma delle ampiezze degli elementi di \mathfrak{G}_j : è

$$s_j(k-p+3e) < (b-a)(k-p+2e)$$

$$s_j < (b-a) \left(1 - \frac{e}{k-p+3e} \right).$$

Noi supporremo e scelto in modo che sia $p-3e=r>0$: potremo allora scrivere più semplicemente

$$s_j < (b-a) \left(1 - \frac{e}{k} \right);$$

e potremo affermare (n.° 3) che esistono in $a-b$ punti i quali non appartengono a nessun elemento di \mathfrak{G}_j : per ciascuno di questi punti sarà

$$f_{n_j}(x) < k-r.$$

È noto che esistono allora anche punti x per cui questa disuguaglianza è verificata per infiniti valori di j : pare utile, per l'omogeneità della trattazione, riprenderne la dimostrazione nel caso speciale.

Assegnato, per ogni valore di j , un numero positivo ε_j , di cui ci riserviamo di disporre, si ponga $\mathcal{G}_j = \mathcal{G}'_j + \mathcal{G}''_j$, dove \mathcal{G}'_j sia un aggregato finito e la somma delle ampiezze degli elementi di \mathcal{G}''_j sia $< \varepsilon_j$. Sia \mathcal{F}_j l'aggregato (finito) degli intervalli complementari di \mathcal{G}'_j rispetto ad $a-b$. La somma delle ampiezze degli elementi di \mathcal{F}_j sarà

$$t_j > (b-a) - s_j > (b-a) \frac{e}{k}.$$

La somma logica degli aggregati \mathcal{F}_j per $j \geq h$ ricopre un aggregato di intervalli \mathcal{G}_h , e la somma delle loro ampiezze sarà

$$u_h \geq t_h.$$

Poniamo ancora $\mathcal{G}_h = \mathcal{G}'_h + \mathcal{G}''_h$ dove \mathcal{G}'_h è finito e la somma delle ampiezze degli elementi di \mathcal{G}''_h è $< \varepsilon_h$. Chiamiamo \mathcal{K}_h l'aggregato degli intervalli complementari di \mathcal{G}'_h . Se v_h è la somma delle ampiezze di questi intervalli

$$\begin{aligned} v_h &< (b-a) - (u_h - \varepsilon_h) \leq (b-a) - t_h + \varepsilon_h \\ &< (b-a) \left(1 - \frac{e}{k}\right) + \varepsilon_h. \end{aligned}$$

Osserviamo che, per definizione, \mathcal{G}_{h+1} è contenuto in \mathcal{G}_h : quindi $\mathcal{G}_{h+1} - \mathcal{G}''_h$ è contenuto in \mathcal{G}'_h e quindi \mathcal{K}_h è contenuto in $\mathcal{K}_{h+1} \circ \mathcal{G}''_h$. Indichiamo con $(\mathcal{G}''_h)^l_1$ la somma logica degli aggregati \mathcal{G}''_h per tutti i valori di h da 1 a l : aggiungendo $(\mathcal{G}''_h)^{h-1}_1$ a \mathcal{K}_h e a $\mathcal{K}_{h+1} \circ \mathcal{G}''_h$ si conclude che

$$\mathcal{K}_h \circ (\mathcal{G}''_h)^{h-1}_1 \text{ è contenuto in } \mathcal{K}_{h+1} \circ (\mathcal{G}''_h)^h_1.$$

La somma logica di tutti gli aggregati $\mathcal{K}_h \circ (\mathcal{G}''_h)^{h-1}_1$ è dunque identica al loro limite, ed è così un aggregato di intervalli \mathcal{K} pel quale la somma delle ampiezze è

$$w < (b-a) \left(1 - \frac{e}{k}\right) + \sum_1^\infty \varepsilon_h.$$

Consideriamo infine l'aggregato $\mathcal{K} + \Sigma \mathcal{G}''_i$: la somma delle ampiezze dei suoi elementi sarà

$$< (b-a) \left(1 - \frac{e}{k}\right) + 2\Sigma \varepsilon_i$$

e sarà quindi $< (b-a)$ tosto che le ε_i siano scelte in modo che $\Sigma \varepsilon_i < \frac{1}{2}(b-a) \frac{e}{k}$. Esso non copre quindi tutto l'intervallo $a-b$ (n.º 3). Se x è un punto esterno a $\mathcal{K} + \Sigma \mathcal{G}''_i$, esso è esterno a tutti gli \mathcal{K}_h e quindi appartiene a tutti i \mathcal{G}'_h e quindi a tutti i \mathcal{G}_h : qualunque sia l esiste quindi un $j < l$ tale che x appartiene a \mathcal{F}_j e quindi è esterno a \mathcal{G}'_j . Ma x è pure esterno per definizione a tutti gli \mathcal{G}''_j : per i detti valori di j , x è dunque esterno a \mathcal{G}_j . Potendosi pren-

dere l arbitrariamente grande, si conclude, come si voleva, che esistono infiniti valori di j per cui x è esterno a \mathcal{G}_j e quindi

$$f_{n_j}(x) < k - \nu.$$

Per tali valori di x è quindi anche $\lim f_n(x) \leq k - \nu$.

Ciò contraddice all'ipotesi che $\lim f_n(x) = k$.

Mediante la considerazione del n.° 13 si può togliere nella proposizione dimostrata la condizione della positività delle $f_n x$, sostituendola con quella che le f_n siano *negativamente limitate nel loro insieme*.

Si può fare $k=0$ e si ottiene la proposizione, sostanzialmente equivalente, se f_1, f_2, \dots è una successione di funzioni limitate in $a-b$, e negativamente limitate nel loro insieme, tale che

$$\lim_{n=\infty} f_n x = 0,$$

è

$$\lim \int_a^b f_n x dx \geq 0.$$

23. Supponiamo allora che la successione di funzioni f_1, f_2, \dots abbia limite, e sia questo la funzione fx , limitata nell'intervallo $a-b$; supponiamo inoltre che in $a-b$ le funzioni f_n siano pure limitate nel loro insieme. Sarà

$$\lim_{n=\infty} (f_n x - fx) = 0$$

e quindi, per la proposizione del numero precedente (v. anche n.° 16)

$$0 \leq \lim \int_a^b (f_n x - fx) dx \leq \lim \left[\int_a^b f_n x dx - \int_a^b fx dx \right]$$

e cioè

$$(a) \quad \int_a^b fx dx \leq \lim \int_a^b f_n x dx.$$

Del pari, considerando invece le funzioni $fx - f_n x$,

$$0 \leq \lim \int_a^b (fx - f_n x) dx \leq \lim \left[\int_a^b fx dx - \int_a^b f_n x dx \right]$$

onde

$$(b) \quad \int_a^b fx dx \geq \lim \int_a^b f_n x dx.$$

Più generalmente, senza ammettere l'esistenza di $\lim f_n x$,

$$(a) \quad \underline{\lim} \int_a^b f_n x dx \geq \int_a^b \underline{\lim} f_n x dx$$

$$(b') \quad \underline{\lim} \int_a^b f_n x dx \leq \int_a^b \underline{\lim} f_n x dx.$$

Le relazioni (a), (b), (a'), (b') esprimono la proposizione che noi possiamo sostituire alla nota e fondamentale proposizione del LEBESGUE che afferma la commutabilità dei segni \lim e \int . Senza ipotesi particolari non siamo in grado di giungere, per il nostro integrale, ad una proposizione altrettanto precisa. Ma le (a), (b) ci danno tosto che:

Se la successione di funzioni f_1, f_2, \dots , limitate nel loro insieme, ha per limite una funzione f_x , che sia integrabile in $a-b$, allora il limite massimo degli integrali inferiori delle f_n ed il limite minimo dei loro integrali superiori coincidono e sono uguali all'integrale di f_x .

Se, in particolare, anche le f_n sono integrabili, la successione dei loro integrali ha limite determinato, e questo è uguale all'integrale della f_x .

24. La proposizione si completa leggermente nell'ipotesi che le funzioni f_n , supposte integrabili, tendono a f_x crescendo (o decrescendo).

In tal caso si può affermare che *la successione degli integrali ha limite determinato, il quale è uguale all'integrale inferiore (o al superiore) della funzione limite.*

Invero da

$$f_n x < f_x$$

e dall'ipotesi che $f_n x$ sia integrabile segue (n.º 16)

$$\int_a^b f_n x dx \leq \int_a^b f_x dx$$

e quindi, con la (a) del numero precedente

$$\underline{\lim} \int_a^b f_n x dx \leq \int_a^b f_x dx \leq \underline{\lim} \int_a^b f_n x dx, \quad \text{e cioè} \quad \int_a^b f_x dx = \underline{\lim} \int_a^b f_n x dx.$$

Sulle soluzioni non analitiche dell'equazione funzionale

$$f(x^2) - [f(x)]^2 = kx$$

e su quelle analitiche dell'equazione

$$f(x^a) = \lambda [f(x)]^b$$

Nota di GIULIO ANDREOLI

Nel *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* ⁽¹⁾ è stata proposta (riportata da un periodico americano ⁽²⁾) la risoluzione dell'equazione funzionale $f(x^2) - [f(x)]^2 = 2x$.

In questa Nota mi propongo dapprima di studiare l'equazione più generale :

$$(1) \quad f(x^2) - [f(x)]^2 = kx \quad (k \text{ costante})$$

e di dimostrare che essa ammette infinite soluzioni nel campo delle funzioni non analitiche di variabile reale; che queste infinite soluzioni hanno tutte (salvo un caso speciale) sicuramente una discontinuità nei punti 0, 1; che esse dipendono da due funzioni arbitrarie, da due costanti positive e arbitrarie anch'esse e da una infinità di scelte arbitrarie di segni positivi e negativi.

La soluzione data è generale, e vale quindi anche per $k = 0$.

Però, in una seconda parte, assegnerò anche le *soluzioni analitiche* dell'altra equazione funzionale

$$f(x^a) - \lambda [f(x)]^b = 0$$

che ha in comune con la precedente il caso $k = 0$; $a = b = 2$; $\lambda = 1$; e risulterà come la soluzione analitica di questa equazione dipenda da una funzione periodica arbitraria.

1. Sia assegnata dunque la (1) e poniamo in essa $f(x) = g(x)\sqrt{x}$; in ambo i membri della (1) comparirà un fattore x che soppresso darà la nuova equa-

⁽¹⁾ Cfr. *Boll. Unione Mat. Ital.*, anno I, n.° 2-3, dicembre 1922, pag. 94.

⁽²⁾ Cfr. *American Math. Monthly*, 1922.

zione funzionale

$$(2) \quad g(x^2) - |g(x)|^2 = k \quad x \neq 0.$$

Assegniamo ora due numeri positivi $p < 1$; $q > 1$ e consideriamo nell'intervallo $P_0 \equiv (p^2, p)$ estremo inferiore escluso, una qualunque funzione arbitraria $a_0(x)$, convenendo che tale funzione sia nulla fuori di P_0 . Definiamo poi nell'intervallo $P_1 \equiv (p^4, p^2)$ estremo inferiore escluso una funzione $a_1(x)$ tale che

$$a_1(x^2) = k + [a_0(x)]^2 \quad \{ p^2 < x \leq p; p^4 < x^2 \leq p^2 \}$$

convenendo che a sua volta essa sia nulla fuori di P_1 .

Similmente definiamo ancora nell'intervallo $P_2 \equiv (p^8, p^4)$ estremo inferiore escluso una terza funzione

$$a_2(x^2) = k + [a_1(x)]^2 \quad \{ p^4 < x \leq p^2; p^8 < x^2 \leq p^4 \}$$

che sia nulla fuori di P_2 , e così via con funzioni a_3, a_4, \dots rispettivamente negli intervalli $P_3 \equiv (p^{16}, p^8)$; $P_4 \equiv (p^{32}, p^{16}), \dots$ estremi inferiori sempre esclusi.

Definiamo ora nell'intervallo $P_1' \equiv (p, p^{\frac{1}{2}})$ estremo inferiore escluso una funzione $a_1'(x)$ tale che

$$k + [a_1'(x)]^2 = a_0(x^2) \quad \left\{ p < x \leq p^{\frac{1}{2}}; p^2 < x^2 \leq p \right\}$$

cioè

$$a_1'(x) = \sqrt{a_0(x^2) - k}$$

ed anche essa sia nulla fuori di P_1' . Si definisca poi in $P_2' \equiv (p^{\frac{1}{2}}, p^{\frac{1}{4}})$ estremo inferiore escluso, la $a_2'(x)$ tale che

$$a_2'(x) = \sqrt{a_1'(x^2) - k} \quad \left\{ p^{\frac{1}{2}} < x \leq p^{\frac{1}{4}}; p < x^2 \leq p^{\frac{1}{2}} \right\}$$

nulla fuori di P_2' e si proceda analogamente per definire a_3', a_4', \dots in P_3', P_4', \dots

2. In tal modo l'intervallo $(0, 1)$ viene ricoverto *totalmente* dagli intervalli P_r, P_r' senza lacune, nè sovrapposizioni (avendo noi esclusi sempre gli estremi inferiori di tali segmenti tutti contigui); e restano esclusi i punti $0, 1$.

Poniamo allora per $0 < x < 1$

$$g(x) = a_0(x) + \sum_1^{\infty} \{ a_r(x) + a_r'(x) \}$$

ove la serie converge sicuramente, poichè è formata di termini tutti nulli, uno solo escluso (in P_r, a_r ; in P_r', a_r'). (continua)

Ciò vale a porre più semplicemente

$$g(x) = \begin{cases} a_r(x) & \text{in } P_r, \quad p^{2^{r+1}} < x \leq p^{2^r} \\ a_r'(x) & \text{in } P_r', \quad p^{2^r} < x \leq p^{2^{r-1}}. \end{cases}$$

Similmente a partire dal numero $q > 1$ si costruiscano gli intervalli escludendone sempre gli estremi inferiori —

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_0 \equiv (q, q^2) \\ Q_1 \equiv (q^2, q^4) \\ \dots \dots \dots \\ Q_i' \equiv (q^{\frac{1}{2}}, q) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

e definita che sia in Q_0 una funzione arbitraria $b_0(x)$, nulla fuori di esso, si definiranno poi successivamente a partire da essa negli intervalli Q, Q' delle altre funzioni b, b' in modo analogo a quello seguito per le a_0, a, a' .

Si vede che gli intervalli Q ricoprono totalmente senza sovrapposizione l'intervallo $1, \infty$, estremi esclusi; e pertanto, si ponga, se $1 < x < \infty$

$$g(x) = b_0(x) + \sum_1^{\infty} \{ b_r(x) + b_r'(x) \}$$

ove per la serie vale la stessa considerazione fatta poc' anzi.

Per il punto $x = 0$ si dia ad x un qualunque valore finito se dev' essere soddisfatta la (1); mentre se vogliamo che sia soddisfatta anche la (2), osserviamo che $0^2 = 0$ e quindi

$$g(0) - [g(0)]^2 = k$$

cioè $g(0)$ deve essere uno dei due valori β' o β'' radici di

$$\beta^2 - \beta + k = 0.$$

Similmente, per $x = 1, x^2 = 1$ e quindi anche $g(1) = \beta'$ o β'' .

3. Se poi scriviamo la (2) per un valore di x negativo essa dà

$$g(x^2) - [g(-x)]^2 = k \quad x > 0, \quad -x < 0$$

che confrontata con la (2), darà

$$g(-x) = \pm g(x).$$

Cioè, potremo porre in generale

$$g(x) = \varepsilon(x)g|x|$$

ove ε è una funzione assumente per valori negativi delle variabili solo i valori ± 1 ; e converremo che sia eguale a $+1$, per valori positivi.

Resta ora definita una funzione $g(x)$, in tutto il campo reale, per mezzo della serie, cui si possono ripetere le stesse osservazioni di poc' anzi:

$$x \neq 0, 1 \left\{ \begin{array}{l} g(x) = \varepsilon(x)[a_0(x) + b_0(x) + \sum_1^{\infty} \{a_r(x) + a_r'(x) + b_r(x) + b_r'(x)\}] \\ g(0), g(1) = \beta', \beta'' \end{array} \right.$$

4. *Mostriamo che la funzione g ora definita, risolve effettivamente la (2).* Ciò risulta come conseguenza delle definizioni poste; ed invero se x appartiene ad esempio a P_r , x^2 apparterrà a P_{r+1} ; e siccome la serie scritta si riduce in sostanza ad a_r in P_r , a_{r+1} in P_{r+1} , e queste sono scelte appunto nel modo richiesto, sarà

$$g(x) = a_r(x); \quad g(x^2) = a_r(x^2)$$

e quindi

$$g(x^2) - [g(x)]^2 = k \quad x \text{ compreso in } P_r.$$

Resta così provata l'esistenza di infinite soluzioni che dipendono dalle funzioni arbitrarie a_0, b_0 ; dalle costanti positive p, q ; dalle infinite scelte di segni dei radicali che si presentano e da quelli dovuti ad $\varepsilon(x)$.

5. Si osservi che la soluzione così costruita comprende come casi particolari quelle date da

$$g(x) = \beta' \text{ o } \beta'' \quad (\beta^2 - \beta + k = 0)$$

che si ottengono scegliendo proprio $b_0 = a_0 = \beta' \text{ o } \beta''$ e sempre gli stessi segni dei radicali.

Per $x = 0, 1$, si vede che in qualsiasi intorno la funzione non è mai limitata.

Inoltre, in generale, la g assumerà valori complessi in taluni intervalli; e precisamente risulta complessa in $P'_{r+1}, P'_{r+2}, \dots$ se in P'_r si sceglie in valore negativo del radicale — e similmente per le Q' : cioè in generale vi sarà un intervallo attorno all'unità, positiva e negativa, in cui la funzione assume valori complessi.

Se poi si convenisse di scegliere *sempre* il valore positivo, vi potranno ancora essere intervalli in cui la funzione assuma valori complessi; e precisamente la funzione assume valori reali in P_r , Q_r , anche scegliendo le determinazioni positive dei radicali, solo se

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ in } P_0; a_0(x) \\ x \text{ in } Q_0; b_0(x) \end{array} \right\} \geq (k + (k + (\dots)^2)^2)^2$$

iterando $r-2$ volte le parentesi; e si vede che se k è positivo, da un certo r in poi, tale condizione cessa di essere soddisfatta.

6. Infine se vogliamo che la $g(x)$ risulti continua ovunque, salvo che nei punti 0, 1, bisognerà scegliere ϵ in modo che $\epsilon(x)$ conservi a tratti lo stesso segno, cambiandolo solo dove $g(x)$ si annulli; e che le $a_0(x)$, $b_0(x)$ oltre che continue, siano anche soggette alle condizioni

$$\begin{aligned} \lim_{x=p^2-0} a_0(x) &= [a_0(p)]^2 + k \\ \lim_{x=q^2-0} b_0(x) &= [b_0(q)]^2 + k. \end{aligned}$$

Un'ultima osservazione ci permetterà di ricondurre le equazioni

$$g(x^2) - \lambda[g(x)]^2 = k$$

al tipo (2); basta porre $g(x) = \frac{\gamma(x)}{\lambda}$ perchè si abbia

$$\gamma(x^2) - [\gamma(x)]^2 = \lambda k.$$

È poi ovvio che le soluzioni della

$$g(x^a) - [g(x)]^b = k$$

si possano ottenere in modo perfettamente analogo a quello indicato per la (2).

7. Passiamo ora a trattare delle soluzioni analitiche di

$$(3) \quad g(x^a) - \lambda[g(x)]^b = 0;$$

se poniamo

$$g(x) = \lambda^{\frac{1}{1-b}} \gamma(x)$$

la (3) diventa

$$(4) \quad \gamma(x^a) = [\gamma(x)]^b.$$

In questa poniamo ora

$$\gamma(x) = e^{h(x)}; \quad x = e^t;$$

avremo

$$e^{h(e^t)} = e^{bp(t)} \quad t = \lg x$$

e se indichiamo $h(e^t)$ con $p(t)$, avremo:

$$(5) \quad e^{p(at)} = e^{bp(t)}$$

la quale, derivata rispetto a t , darà

$$(6) \quad ap'(at)e^{p(at)} = be^{bp(t)}p'(t);$$

da cui infine dividendo membro a membro con (5)

$$(7) \quad ap'(at) = bp'(t).$$

Ora se q è la soluzione generale della (7) e χ una soluzione particolare, sarà

$$q(at) = \frac{b}{a} q(t)$$

$$\chi(at) = \frac{b}{a} \chi(t)$$

e quindi

$$\frac{q(at)}{\chi(at)} = \frac{\frac{b}{a} q(t)}{\frac{b}{a} \chi(t)} = \frac{q(t)}{\chi(t)}.$$

Cioè il rapporto $r(t)$ fra la soluzione generale della (7) ed una sua soluzione particolare soddisfa alla

$$(8) \quad r(at) = r(t)$$

epperò, la *soluzione generale della (7) si otterrà moltiplicandone una particolare, per la soluzione generale di (8).*

Orbene, si scelga

$$(9) \quad \chi(t) = t^\mu; \quad \left(\mu = \frac{\lg b}{\lg a} - 1 \right).$$

Si vede subito che essa è una soluzione particolare di (7), poichè

$$(at)^\mu = a^\mu t^\mu = e^{\lg a \left[\frac{\lg b}{\lg a} - 1 \right]} t^\mu = e^{\lg a - \lg b} t^\mu = \frac{b}{a} t^\mu.$$

Si osservi che se è $b = a$ non occorre scegliere per $\lg b$ (che diventa $\lg a$) la stessa determinazione che per $\lg a$ che figura al denominatore.

Per ricercare la soluzione generale di (8), poniamo $t = e^\tau$, ottenendo

$$\rho(\tau + \lg a) = \rho(\tau); \quad \rho(\tau) = r(e^\tau) = r(t);$$

e questa ci dice che ρ è una funzione periodica avente il periodo $\lg a$.

8. Per riportarci alla γ , soluzione di (4), seguiamo ora in senso inverso il cammino percorso.

Sia $\sigma(\tau)$ una qualunque funzione analitica avente il periodo 1; la funzione $\sigma\left(\frac{\tau}{\lg a}\right)$ avrà precisamente il periodo $\lg a$.

Quindi

$$\rho(\tau) = \sigma\left(\frac{\tau}{\lg a}\right)$$

epperò avremo:

$$r(t) = r(e^\tau) = \rho(\tau) = \sigma\left(\frac{\lg t}{\lg a}\right).$$

Ma, a sua volta, per (8) e (9)

$$q(t) = t^\mu \sigma\left(\frac{\lg t}{\lg a}\right), \quad \mu = \frac{\lg b}{\lg a} - 1$$

ed essendo

$$q(t) = p'(t)$$

sarà anche

$$p(t) = \int_a^t t^\mu \sigma\left(\frac{\lg t}{\lg a}\right) dt.$$

Se si vuole che sia soddisfatta la (5) bisogna scegliere α in modo che

$$e^{p(b)} = e^{bp(\alpha)}$$

e quindi α verrà determinata da

$$(10) \quad e^{(b-1) \int_a^0 t^\mu \sigma\left(\frac{\lg t}{\lg a}\right) dt} = 1;$$

ciò che impone a σ delle condizioni, necessarie affinché l'integrale esista.

Poi a sua volta $t = \lg x$ ed $h(x) = h(e^t) = r(t)$; quindi sarà, cambiando

nome alla variabile d'integrazione :

$$h(x) = \int_a^{\lg x} z^\mu \sigma \left(\frac{\lg z}{\lg a} \right) dz.$$

Ed infine, troviamo

$$(11) \quad \gamma(x) = e^{h(x)} = e^\alpha \int_a^{\lg x} z^\mu \sigma \left(\frac{\lg z}{\lg a} \right) dz \quad \left(\mu = \frac{\lg b}{\lg a} - 1 \right).$$

Resta in tal modo risolta completamente, nel campo delle funzioni analitiche, la (4) e quindi la (3); la soluzione se esiste deve avere la forma (11), con σ funzione a periodo 1, e α determinata dalla (10).

Si vede che in generale la soluzione sarà polidroma.

9. Come esempio scegliamo $\sigma = \text{costante} = k$, quindi sicuramente periodica. Sarà

$$k \int_a^{\lg x} z^\mu dz = k \frac{(\lg x)^{\mu+1}}{\mu+1} + \lg C \quad (C \text{ dipende da } \alpha)$$

da cui

$$\gamma(x) = C e^{k \frac{(\lg x)^{\mu+1}}{\mu+1}} = C e^{\frac{k \lg a}{\lg b} \left\{ (\lg x) \frac{\lg b}{\lg a} \right\}}$$

ove C sia tale che

$$C^{(b-1)} = 1.$$

Infatti si avrà

$$\gamma(x^a) = C e^{k \frac{\lg a}{\lg b} [\lg(x^a)] \frac{\lg b}{\lg a}} = C e^{k \frac{\lg a}{\lg b} [a \lg x] \frac{\lg b}{\lg a}} = C e^{k \frac{\lg a}{\lg b} a \frac{\lg b}{\lg a} (\lg x) \frac{\lg b}{\lg a}}$$

ma, essendo $a \frac{\lg b}{\lg a} = b$, sarà

$$\gamma(x^a) = C e^{kb \cdot \frac{\lg a}{\lg b} (\lg x) \frac{\lg b}{\lg a}};$$

ed essendo $[\gamma(x)]^b = C^b e^{kb \cdot \frac{\lg a}{\lg b} (\lg x) \frac{\lg b}{\lg a}}$, con $C^b = C$, si vede che, in effetti,

$$\gamma(x^a) = [\gamma(x)]^b.$$

Nel caso particolare $a = b$, si ritrovano facilmente le soluzioni ovvie $\gamma(x) = x^k$.

Napoli, Aprile 1923.

Un teorema di limite

di ONORATO NICOLETTI (a Pisa)

1. Sia $\varphi(\alpha, \beta, \gamma; n)$ una funzione reale delle quattro variabili α, β, γ, n , definita per i valori interi e non negativi di queste variabili; e fissato per n un valore positivo arbitrario, si consideri la disuguaglianza:

$$(1) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma; n) \geq 0,$$

od anche l'uguaglianza:

$$(2) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma; n) = 0;$$

ed ammettiamo che per l'una o, rispettivamente, per l'altra di queste relazioni siano soddisfatte le condizioni seguenti:

α) Per ogni valore determinato di n , la (1) (la (2)) ha un numero *finito* $\Omega(n)$ di soluzioni $(\alpha\beta\gamma)$ in numeri interi e non negativi;

β) ad ogni soluzione $(\alpha\beta\gamma)$ è associato, con una legge determinata, un numero reale e non negativo $p_{\alpha\beta\gamma}$ (oppure $p_{\alpha\beta\gamma; n}$, se questo numero dipende anche dal numero n) che si dirà il *peso* della soluzione $(\alpha\beta\gamma)$; ed indichiamo con

$$(3) \quad H(n) = \sum_{(n)} p_{\alpha\beta\gamma}, \quad (H(n) = \sum_{(n)} p_{\alpha\beta\gamma, n})$$

la somma dei pesi delle soluzioni della (1) (o della (2)) corrispondenti ad un valore determinato di n ; ammettiamo che si abbia

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H(n) = +\infty;$$

γ) sia h un intero positivo arbitrario; ed indichiamo con $\Omega(n, h)$ le soluzioni della (1), o della (2), per le quali sono soddisfatte anche le relazioni complementari

$$(1)_h \quad \alpha \geq h, \quad \beta \geq h, \quad \gamma \geq h;$$

(aggiungiamo cioè le $(1)_h$ alla (1) o alla (2)); e diciamo

$$(3)_h \quad H(n, h) = \sum_{(n, h)} p_{\alpha\beta\gamma, n},$$

la somma dei pesi corrispondenti a queste soluzioni; ammettiamo che si abbia, per qualunque valore determinato di h :

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(n, h)}{H(n)} = 1.$$

Così, ad esempio, sia $\varphi(\alpha, \beta, \gamma; n) = n - (\alpha + \beta + \gamma)$, e si abbia l'uguaglianza:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma; n) = n - (\alpha + \beta + \gamma) = 0.$$

Facendo successivamente $\alpha = n, n - 1, \dots, 2, 1, 0$, si ha subito

$$\Omega(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + (n + 1) = \binom{n+2}{2};$$

ed insieme per $n \geq 3h$,

$$\Omega(n, h) = \Omega(n - 3h) = \binom{n - 3h + 2}{2};$$

se infatti valgono le (1) _{h} , posto $\alpha = \alpha' + h, \beta = \beta' + h, \gamma = \gamma' + h$, sarà $\alpha' \geq 0, \beta' \geq 0, \gamma' \geq 0$ ed $\alpha' + \beta' + \gamma' = n - 3h$.

Se si pone quindi $p_{\alpha\beta\gamma} = 1$, è $H(n) = \Omega(n), H(n, h) = \Omega(n, h)$ e varranno le relazioni (4) e (5).

Come altro esempio sia ancora $\varphi(\alpha, \beta, \gamma; n) = n - (\alpha + \beta + \gamma)$, ma si abbia la disuguaglianza

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma; n) = n - (\alpha + \beta + \gamma) \geq 0;$$

sia ancora $p_{\alpha\beta\gamma} = 1$. Questa disuguaglianza equivale alle $n + 1$ relazioni $\alpha + \beta + \gamma = i (0 \leq i \leq n)$; si ha quindi ora

$$\Omega(n) = \sum_0^n \binom{i+2}{2} = \frac{1}{2} \sum_0^n (i^2 + 3i + 2) = \frac{1}{6} (n+1)(n^2 + 5n + 6);$$

ed ancora, per $n \geq 3h, \Omega(n, h) = \Omega(n - 3h)$; valgono quindi ancora le relazioni (4) e (5); etc.

2. Sia ora $f(xyz)$ una funzione delle tre variabili (reali o complesse) x, y, z , la quale sia definita in un campo C di queste variabili e sia *limitata* in C , per tutti i punti (xyz) del campo C si abbia cioè $|f(xyz)| < A$, dove A è un numero determinato e finito; e, indicando con $P_0 \equiv (abc)$ un punto del campo C , la $f(xyz)$, quando il punto $P \equiv (xyz)$ tende, nel campo C , al punto $P_0 \equiv (abc)$, tenda ad un limite determinato e finito L . Questo accadrà in particolare quando la $f(xyz)$ sia continua nel punto P_0 ; è allora $L = f(P_0) = f(abc)$.

Siano inoltre

$$(6) \quad a_i, b_k, c_l, \quad (i, k, l = 0, 1, 2 \dots p \dots)$$

tre successioni, tali che il punto $(a_i b_k c_l)$ appartenga sempre al campo C ; e si abbia inoltre

$$(6') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c;$$

e colle notazioni precedenti, poniamo:

$$(7) \quad \theta(n) = \frac{1}{H(n)} \sum_{(\alpha\beta\gamma)} p_{\alpha\beta\gamma, n} f(a_\alpha b_\beta c_\gamma)$$

dove la somma è estesa ancora a tutte le soluzioni $(\alpha\beta\gamma)$ (in numeri interi e non negativi) della (1) (o della (2)).

In queste ipotesi, si ha l'uguaglianza

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = L$$

e, (quando la f sia continua nel punto $P_0 \equiv (abc)$)

$$(8') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = f(abc).$$

Per dimostrare questo teorema, indichiamo con σ un numero positivo arbitrario; e determiniamo un numero intero h , tale che per $i \geq h, k \geq h, l \geq h$, si abbia nelle (6)

$$(6'') \quad a_i = a + \theta\sigma, \quad b_k = b + \theta'\sigma, \quad c_l = c + \theta''\sigma,$$

con $|\theta|, |\theta'|, |\theta''| < 1$; e dividiamo la somma del 2° membro della (7) in due parti Σ', Σ'' , la prima delle quali, Σ' , contenga i termini corrispondenti a quelle soluzioni della (1) (o della (2)), nelle quali una almeno delle α, β, γ è minore di h , (Σ' conterrà quindi $H(n) - H(n, h)$ termini), l'altra Σ'' contenga tutti gli altri termini; e poniamo corrispondentemente $\theta(n) = A_n + B_n$.

Abbiamo allora, poichè $|f(xyz)| < A$ nel campo C :

$$|A_n| < A \cdot \frac{H(n) - H(n, h)}{H(n)} = A \left[1 - \frac{H(n, h)}{H(n)} \right]$$

sarà perciò per la (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$; preso quindi un numero ε positivo arbitrario, potrà determinarsi un intero n_1 (che dipenderà anche da h) tale che per $n \geq n_1$ sarà

$$(9') \quad |A_n| < \varepsilon.$$

Consideriamo ora un termine qualunque della somma B_n ; si avranno le (6'') cioè il punto $(a_\alpha b_\beta c_\gamma)$ sarà (nel campo C e) nell'intorno cubico Γ_σ di lato 2σ del punto $P_0 \equiv (abc)$, e poichè si ha $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L$, preso ancora ε positivo arbitrario, possiamo determinare σ in guisa che in tutti i punti di C che appartengono a Γ_σ , si abbia

$$(9'') \quad f(xyz) = L + \eta\varepsilon \quad \text{con} \quad |\eta| < 1.$$

Determinato così il numero σ , determineremo h e poi n_1 , in guisa che per $i, k, l \geq h$ valgano le (6'') e per $n \geq n_1$ la disuguaglianza (9').

È allora, con notazioni evidenti:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{H(n)} \Sigma'' p_{\alpha\beta\gamma, n} f(a_\alpha b_\beta c_\gamma) = \frac{1}{H(n)} \Sigma'' p_{\alpha\beta\gamma, n} \{L + \eta_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon\} = \\ &= L \frac{H(n, h)}{H(n)} + \frac{\varepsilon}{H(n)} \Sigma'' p_{\alpha\beta\gamma, n} \eta_{\alpha\beta\gamma}; \quad |\eta_{\alpha\beta\gamma}| < 1; \end{aligned}$$

e poichè le $p_{\alpha\beta\gamma, n}$ sono reali e non negative, posto

$$\eta = \frac{1}{H(n)} \Sigma'' p_{\alpha\beta\gamma, n} \eta_{\alpha\beta\gamma},$$

è $|\eta| < 1$; potremo poi determinare un intero n_2 tale che per $n \geq n_2$ si abbia $\frac{H(n, h)}{H(n)} = 1 + \eta \frac{\varepsilon}{L}$ con $|\eta| < 1$; sarà allora per $n \geq n_2$

$$(9''') \quad B_n = L + \omega\varepsilon \quad \text{con} \quad |\omega| < 2;$$

detto infine n_0 il maggiore dei due numeri n_1 ed n_2 , sarà per $n \geq n_0$

$$(10) \quad \theta(n) = A_n + B_n = L + \lambda\varepsilon, \quad \text{con} \quad |\lambda| < 3;$$

donde, poichè ε è arbitrario, segue la (8).

Il teorema è così dimostrato.

3. Osservazioni e complementi.

a) Si può dare al teorema dimostrato una forma molto semplice.

Nelle ipotesi precedenti i punti $(a_\alpha b_\beta c_\gamma)$ del campo C formano un gruppo infinito G , il quale ha in $P_0 \equiv (abc)$ un punto limite; e, ad es., la disuguaglianza $\varphi(\alpha, \beta, \gamma; n) \geq 0$ stacca dal gruppo G , per ogni valore di n , un sottogruppo finito Γ_n , di Ω_n punti; sia inoltre $\Omega(n, h)$ il numero dei punti di Γ_n che cadono in un intorno Δ_h , assegnato arbitrariamente, del punto P_0 . Attri-

buiamo a ciascuno dei punti di Γ_n un peso $p_{\alpha\beta\gamma, n}$, reale e non negativo, e detto $H(n)$ il peso totale del gruppo Γ_n , $H(n, h)$ quello dei punti di Γ_n che cadono nell'intorno Δ_n , sia $\lim_{n \rightarrow \infty} H(n) = +\infty$, ed insieme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(n, h)}{H(n)} = 1$.

Diamo infine ad ogni punto $(a_\alpha b_\beta c_\gamma)$ di Γ_n la massa $f(a_\alpha b_\beta c_\gamma)$ e consideriamo la *media ponderata* $\theta(n)$ delle masse di Γ_n . Il teorema dimostrato dice che questa media $\theta(n)$, quando n tende all'infinito, tende al limite L (o ad $f(abc)$).

b) Questa forma di enunciare il teorema conduce facilmente ad alcune estensioni notevoli.

Così, ad esempio, invece di una, si abbia un sistema di g relazioni

$$(1') \quad \varphi_i(\alpha, \beta, \gamma; m, n, \dots, p) \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, g)$$

le quali contengano (oltre le α, β, γ) $k \geq 1$ parametri m, n, \dots, p ; le φ_i sieno definite per i valori interi e non negativi dei loro argomenti e soddisfino alle condizioni (analoghe alle α, β, γ) del n.° 1):

α') per ogni sistema (m, n, \dots, p) di valori interi non negativi le relazioni (1') hanno un numero finito $\Omega(m, n, \dots, p)$ di soluzioni (α, β, γ) in numeri interi, non negativi.

β') Assegnata ad ogni soluzione (α, β, γ) un peso, reale e non negativo, $p_{\alpha\beta\gamma}$ (o $p_{\alpha\beta\gamma; m, n, \dots, p}$) la somma dei pesi $H(m, n, \dots, p)$ tenda all'infinito positivo, quando m, n, \dots, p tendono *tutti* a $+\infty$; preso cioè un numero positivo M arbitrario, si possa determinare un intero k_M , tale che quando si abbia $m \geq k_M, n \geq k_M, \dots, p \geq k_M$, sia sempre $H(m, n, \dots, p) > M$, scriveremo:

$$(4') \quad \lim H(m, n, \dots, p) = +\infty \quad (m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, \dots, p \rightarrow \infty).$$

γ') Sia h un intero positivo arbitrario; e si aggiungano alle (12) le disuguaglianze $\alpha \geq h, \beta \geq h, \gamma \geq h$. Avendo i simboli $\Omega(m, n, \dots, p; h), H(m, n, \dots, p; h)$ significati evidenti, si abbia ancora

$$(4')_h \quad \lim H(m, n, \dots, p; h) = +\infty \quad (m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, \dots, p \rightarrow \infty.$$

ed insieme

$$(5') \quad \lim \frac{H(m, n, \dots, p; h)}{H(m, n, \dots, p)} = 1, \quad (m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, \dots, p \rightarrow \infty).$$

Posto allora

$$(7') \quad \theta(m, n, \dots, p) = \frac{1}{H(m, n, \dots, p)} \sum p_{\alpha\beta\gamma} f(a_\alpha b_\beta c_\gamma)$$

dove la somma è estesa a tutte le $\Omega(m, n, \dots, p)$ soluzioni delle (1'), si ha

$$(8'') \quad \lim \theta(m, n, \dots, p) = L \quad (m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, \dots, p \rightarrow \infty).$$

Possiamo anche supporre che nelle successioni (6) gli indici i, k, l possano prendere anche valori (interi) negativi, avendosi ora:

$$(6'') \quad \lim_{|i| \rightarrow +\infty} a_i = a, \quad \lim_{|k| \rightarrow +\infty} b_k = b, \quad \lim_{|l| \rightarrow +\infty} c_l = c;$$

e che nelle (1') sia le variabili α, β, γ sia le m, n, \dots, p , possano prendere anche valori interi negativi; e considerando in questa ipotesi le soluzioni delle (1') per le quali è ora $|\alpha| \geq h, |\beta| \geq h, |\gamma| \geq h$, valgano ancora la (4'), (4')_h, (5'), quando i parametri m, n, \dots, p , tendono a $\pm \infty$; si avrà ancora la (8''), per m, n, \dots, p che tendono ora a $\pm \infty$.

c) Abbiamo supposto che i pesi $p_{\alpha\beta\gamma}$ (o $p_{\alpha\beta\gamma, n}$) siano numeri reali e non negativi, ma è facile vedere che essi possono supporre anche complessi, quando, in luogo delle (4) e (5) si pongano le condizioni seguenti.

Per semplicità di scrittura) poniamo $p'_{\alpha\beta\gamma} = p_{\sigma\beta\gamma}$ ed indichiamo cogli accenti le quantità tutte relative alle $p'_{\alpha\beta\gamma}$; ammettiamo allora che si abbiano le relazioni;

$$(3'') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H(n) = \infty,$$

$$(4'') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H'(n, h)}{H'(n)} = 1;$$

inoltre, indicando con Λ un numero positivo determinato, si abbia, per n qualunque, la disuguaglianza

$$(11) \quad H'(n) < \Lambda \cdot |H(n)|.$$

Da questa segue, che sarà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |H(n)| = +\infty;$$

posto inoltre

$$K(n, h) = H(n) - H(n, h); \quad K'(n, h) = H'(n) - H'(n, h),$$

sarà per h qualunque

$$|K(n, h)| \leq K'(n, h); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K'(n, h)}{H'(n)} = 0$$

ed anche per la (11):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K'(n, h)}{H(n)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(n, h)}{H(n)} = 0.$$

Riprendiamo ora la dimostrazione del n.° 2; colle notazioni precedenti avremo

$$|A_n| < A \cdot \frac{K'(n, h)}{|H(n)|}, \quad B_n = L \left(1 - \frac{K(n, h)}{H(n)} \right) + \eta \varepsilon,$$

essendo ancora

$$\eta = \frac{1}{H(n)} \sum'' p_{\alpha\beta\gamma} \eta''_{\alpha\beta\gamma}$$

e quindi sarà

$$|\eta| \leq \frac{H'(n, h)}{|H(n)|} < \Lambda \frac{H'(n, h)}{H'(n)} < \Lambda$$

si avranno perciò ancora le (9'), (9''), (9''') e quindi la (10), con $|\lambda| \leq 2 + \Lambda$; e perciò varrà ancora la (8).

d) Invece di considerare una funzione $f(xyz)$ possiamo anche considerare una successione di funzioni $F_n(xyz)$, ($n = 1, 2, \dots$) le quali siano ancora definite e limitate nel campo C (sia cioè, per un punto (xyz) arbitrario in C e per qualunque n , $|F_n(xyz)| < A$, essendo A un numero finito) e, quando il punto (xyz) tende in C al punto $P_0 \equiv (abc)$ ed n tende a $+\infty$, tendano ad un limite determinato e finito L ; posto allora:

$$(7'') \quad \theta_1(n) = \frac{1}{H(n)} \sum p_{\alpha\beta\gamma, n} F_n(a_\alpha b_\beta c_\gamma),$$

si avrà ancora:

$$(8''') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_1(n) = L.$$

Riprendiamo infatti il ragionamento del n.° 2; varrà ancora la (9'). Consideriamo inoltre l'intorno cubico Γ_σ , di lato 2σ , del punto $P_0 \equiv (abc)$; fissato ε positivo arbitrario, potremo, per le ipotesi fatte, determinare σ ed un intero n_3 , tali che quando il punto $(a_\alpha b_\beta c_\gamma)$ è in Γ_σ ed $n \geq n_3$, si abbia

$$(9'') \quad F_n(a_\alpha b_\beta c_\gamma) = L + \eta \varepsilon, \quad \text{con } |\eta| < 1;$$

dopodichè basta prendere per n_0 il maggiore dei numeri n_1, n_2, n_3 , per avere ancora la (10) per $n \geq n_0$, e quindi la (8''').

In particolare potremo supporre che la successione $F_n(xyz)$ tenda uniformemente nel campo C ad una funzione $f(xyz)$, la quale sia continua nel punto $P_0 \equiv (abc)$; è allora $L = f(abc)$.

e) Abbiamo supposto che la $f(xyz)$ tenda, per $P \rightarrow P_0$, ad un limite determinato e finito L ; ma, con alcune restrizioni essenziali, il teorema può valere ancora, quando la $f(xyz)$ tenda all'infinito, per $P \rightarrow P_0$ in C .

Supponiamo, ad esempio, che la $f(xyz)$ sia in C reale e positiva e sia $\lim_{P \rightarrow P_0} f(xyz) = +\infty$, i pesi $p_{\alpha\beta\gamma}$ siano reali e non negativi e valgano ancora le (3) e (4).

Ogni termine di $\theta(n)$ è allora positivo e quindi sarà, colle notazioni del n.° 2, $\theta(n) > B_n$. Sia ora M positivo, grande a piacere; e si prenda h in guisa che per $\alpha \geq h, \beta \geq h, \gamma \geq h$ si abbia $f(a_\alpha b_\beta c_\gamma) > M$; è allora

$$B_n > \frac{H(n, h)}{H(n)} M$$

e se n_0 è tale che per $n \geq n_0$ sia ad es. $\frac{H(n, h)}{H(n)} > \frac{1}{2}$, sarà per $n \geq n_0$

$$\theta(n) > B_n > \frac{M}{2};$$

e quindi sarà $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = +\infty$.

f) Il teorema si estende poi subito al caso di $p(\geq 1)$ successioni

$$a_i, b_k, c_l, \dots, e_t \quad (i, k, l, t = 1, 2, \dots)$$

convergenti a limiti determinati e finiti a, b, c, \dots, e , e ad una funzione $f(x_1 x_2 \dots x_p)$ (od ad una successione $f_n(x_1 x_2 \dots x_p)$) la quale sia definita e limitata in un campo C dello $S_p \equiv (x_1 x_2 \dots x_p)$, al quale appartengano tutti i punti $(a_i b_k c_l \dots e_t)$ e che, quando il punto $P \equiv (x_1 x_2 \dots x_p)$ tende in C al punto $P_0 \equiv (abc \dots e)$, tenda ad un limite determinato e finito L .

Se poi una o più tra le successioni a_i, b_k, \dots, e_t (ad es. la a_i) tende all'infinito, basta porre $a_i' = \frac{1}{a_i}$, per ridursi al caso precedente.

4. Esempi.

a) Sia $p=1$; $\varphi(\alpha, n) = n - \alpha \geq 0, \alpha \geq 1, p_x = 1$; è $\Omega(n) = H(n) = n$; $\Omega(n, h) = H(n, h) = n - h + 1$.

Poniamo $f(x) = x$; abbiamo il teorema di CAUCHY:

Se è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \text{è anche} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a;$$

ed il teorema vale anche quando a_n sia reale e positiva e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

b) Sia ancora $p=1, \varphi(\alpha, n) = n - \alpha \geq 0, \alpha \geq 1$; e si ponga $p_x = g_x - g_{x-1}$, dove g_n è una successione (reale o complessa) divergente, tale cioè che sia

$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \infty$; si abbia inoltre per essa, con n qualunque $\sum_1^n |g_i - g_{i-1}| < \Lambda |g_n|$, essendo Λ un numero finito. È allora, colle notazioni del n.º 3, c)

$$H(n) = g_n, \quad H'(n) = \sum_1^n |g_i - g_{i-1}|, \quad K'(n, h) = \sum_1^{h-1} |g_i - g_{i-1}|$$

e valgono le (3''), (4'') e la (11).

Posto ancora $f(x) = x$, si ha il teorema di JENSEN :

Sia $\lim a_n = a$; e sia g_n una successione (reale o complessa) divergente per $n \rightarrow \infty$, per la quale si abbia, per n qualunque

$$(12) \quad \sum_1^n |g_i - g_{i-1}| < \Lambda |g_n|,$$

essendo Λ un numero finito; posto

$$\theta(n) = \frac{1}{g_n} \sum_1^n (g_i - g_{i-1}) a_i$$

è $\lim \theta(n) = a$.

Ed il teorema vale ancora, quando la successione a_n sia positiva e divergente, e la g_n sia una successione reale, crescente e divergente a $+\infty$.

c) Sia $a_n = \frac{b_n - b_{n-1}}{g_n - g_{n-1}}$ ($n \geq 1$); è $\theta(n) = \frac{b_n}{g_n}$; si ha così il teorema:

Sia g_n una successione divergente, per la quale valga la (12); e sia b_n un'altra successione; se si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{g_n - g_{n-1}} = a$, essendo a un numero determinato e finito, è anche $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{g_n} = a$.

E se le successioni b_n, g_n sono crescenti e divergenti ed è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{g_n - g_{n-1}} = +\infty, \quad \text{è anche} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{g_n} = +\infty.$$

d) Sia ora $p = 2$, $\varphi(\alpha, \beta) = n - (\alpha + \beta) = 0$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$, $p_{\alpha\beta} = 1$.

È $\Omega(n) = H(n) = n$, e per $n \geq 2h$, $\Omega(n, h) = H(n, h) = n - 2h + 1$; sono quindi soddisfatte le (3) e (4); sia poi $f(x, y) = xy$.

Abbiamo il teorema di CAUCHY:

Se a_n e b_n ($n = 1, 2, \dots$) sono due successioni convergenti a due limiti determinati e finiti a, b , si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n} = ab;$$

e, quando i termini delle due successioni abbiano un segno costante ed una almeno di essa sia divergente e l'altra, se converge, abbia un limite diverso da zero, il teorema vale ancora, in quanto l'espressione $\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n}$ ha in questo caso per limite l'infinito positivo o negativo.

Più generalmente, se $f(x, y)$ è una funzione delle due variabili x, y , la quale nel punto (ab) sia continua, l'espressione $\theta(n) = \frac{1}{n} \sum_1^n f(a_i, b_{n-i})$ tende al limite $f(a, b)$.

e) Sia ancora $p=2$, $\varphi(\alpha, \beta) = n - (\alpha + \beta) = 0$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$; $p_{\alpha\beta r, n} = \frac{\alpha^r \beta^s}{n^{r+s}}$, essendo r, s due numeri reali, non negativi. È ancora $\Omega(n) = n$, e per $n \geq 2h$, $\Omega(n, h) = n - 2h + 1$; $H(n) = \frac{1}{n^{r+s}} \sum_1^n i^r (n-i)^s$; e per $n \geq 2h$:

$$K(n, h) = H(n) - H(n, h) = \frac{1}{n^{r+s}} \sum_1^h \{ i^r (n-i)^s + i^s (n-i)^r \}.$$

Ora può scriversi: $H(n) = n \cdot \frac{1}{n^{r+s+1}} \sum_1^n i^r (n-i)^s$ ed è per $r \geq 0$, $s \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{r+s+1}} \sum_1^n i^r (n-i)^s = B(r+1, s+1) = \int_0^1 x^r (1-x)^s dx,$$

dove con $B(r+1, s+1)$ abbiamo indicato la funzione Euleriana di 1^a specie ⁽¹⁾; è quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} H(n) = +\infty$; ogni termine di $K(n, h)$ è poi minore di 1, e quindi è anche $K(n, h) < 2h$; ne segue: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(n, h)}{H(n)} = 0$; le (3) e (4) sono cioè soddisfatte.

Sia ancora $f(x, y) = xy$; sarà

$$\theta(n) = \frac{1}{H(n) n^{r+s}} \sum_1^n i^r (n-i)^s a_i b_{n-i}$$

e si avrà,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = ab.$$

⁽¹⁾ Dividendo infatti l'intervallo $(0, \dots, 1)$ in n parti uguali, e posto

$$f_i = \left(\frac{i}{n}\right)^r \cdot \left(1 - \frac{i}{n}\right)^s = \frac{i^r (n-i)^s}{n^{r+s}},$$

è

$$B(r+s, s+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n f_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{r+s+1}} \sum_1^n i^r (n-i)^s.$$

Poniamo ora

$$\alpha_i = i^r \cdot a_i, \beta_k = k^s \cdot b_k; \quad \gamma(n) = \frac{\theta(n) \cdot H(n)}{n} = \frac{1}{n^{r+s+1}} \sum_1^n \alpha_i \beta_{n-i};$$

si ha il teorema (di CESARO):

Siano r, s due numeri reali e non negativi, e si abbia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n^r} = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{n^s} = b;$$

è anche:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 \beta_n + \alpha_2 \beta_{n-1} + \dots + \alpha_n \beta_1}{n^{r+s+1}} = B(r+1, s+1) \cdot ab \quad (1);$$

ed il teorema vale anche quando ad es. le α_n, β_n siano positive, una delle due successioni $\frac{\alpha_n}{n^r}, \frac{\beta_n}{n^s}$ sia divergente a $+\infty$, e l'altra o sia divergente, o converga ad un limite positivo; in questo caso l'espressione $\gamma(n)$ ha infatti per limite l'infinito positivo.

g) Sia infine $p=2, \varphi(\alpha, \beta, n) = n - (\alpha + \beta) \geq 0, \alpha \geq 1, \beta \geq 1, p_{\alpha\beta} = 1, f(xy) = xy$.

È $\Omega(n) = H(n) = \binom{n}{2}$ e per $n \geq 2h, \Omega(n, h) = H(n, h) = \binom{n-2h+1}{2}$; valgono quindi le (3) e (4). Si ha il teorema:

Sia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b;$$

e si ponga

$$\theta(n) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum a_\alpha b_\beta, \quad (\alpha \geq 1, \beta \geq 1, \alpha + \beta \leq n)$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = ab, \quad \text{etc.}$$

5. a) Consideriamo ora, in luogo delle successioni convergenti a_n, b_n, c_n, \dots , delle funzioni (reali o complesse) $a(x), b(x), c(x), \dots$ di una variabile reale x ,

(1) Un ragionamento, un po' più minuto, dimostra la formula anche per r, s reali, maggiori di -1 .

definite in un intervallo (x_0, ∞) , dove x_0 è un numero determinato, le quali, quando $x \rightarrow +\infty$, tendano a dei limiti determinati e finiti a, b, c, \dots .

b) Si abbia poi, ad es. una relazione

$$(13) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma; x) \geq 0,$$

nelle quattro variabili reali $(\alpha, \beta, \gamma, x)$ (od un sistema di tali relazioni) la quale, per ogni valore reale $x \geq x_0$, sia soddisfatta da tutti i punti di un campo *finito* C_x dello $S_3 \equiv (\alpha\beta\gamma)$ (il quale campo C_x potrà essere a tre dimensioni od anche una superficie od una linea e) che appartenga ad un campo determinato C dello $S_3 \equiv (\alpha\beta\gamma)$.

Sia $p(\alpha\beta\gamma, x)$ una funzione, reale o complessa, delle quattro variabili reali α, β, γ, x , definita per $x \geq x_0$ e per (α, β, γ) nel campo C ; e consideriamo l'integrale

$$(14) \quad H(x) = \int_{C_x} p(\alpha\beta\gamma, x) d\omega$$

dove $d\omega$ è l'elemento di spazio del campo C_x ; e ammettiamo che questo integrale sia determinato e finito per ogni $x \geq x_0$, e tenda all'infinito, quando $x \rightarrow +\infty$; posto inoltre, quando la $p(\alpha\beta\gamma, x)$ non sia reale e positiva,

$$p'(\alpha\beta\gamma, x) = |p(\alpha\beta\gamma, x)|,$$

ammettiamo che anche l'integrale

$$(14') \quad H'(x) = \int_{C_x} p'(\alpha\beta\gamma, x) d\omega$$

sia determinato e finito per $x \geq x_0$; sarà allora $H'(x) \geq |H(x)$ e quindi sarà anche $\lim H'(x) = +\infty$; ed ammettiamo ancora che si abbia, per ogni valore di x :

$$(14'') \quad H'(x) < \Lambda H(x),$$

essendo Λ un numero finito.

Detto poi h un numero positivo arbitrario, aggiungiamo alla (12) le relazioni $|\alpha| \geq h, |\beta| \geq h, |\gamma| \geq h$, e diciamo $C_{x,h}$, il campo ottenuto così dal campo C_x ; e poniamo:

$$(15) \quad H'(x, h) = \int_{C_{x,h}} p'(\alpha, \beta, \gamma, x) d\omega;$$

ed ammettiamo infine che si abbia, per h qualunque:

$$(16) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{H(x, h)}{H'(x)} = 1.$$

c) Sia ora $f(\varepsilon, \eta, \zeta; x)$ una funzione delle 4 variabili $\varepsilon, \eta, \zeta; x$, definita per $x \geq x_0$ ed in un campo Γ dello spazio $\Sigma_3 \equiv (\varepsilon, \eta, \zeta)$ il quale contenga tutti i punti $(a(\alpha), b(\beta), c(\gamma))$, dove $(\alpha\beta\gamma)$ è un punto qualunque di C (ed anche il punto $P_0 \equiv (abc)$) e quando il punto $(\varepsilon\eta\zeta)$ tende in Γ a P_0 ed $x \rightarrow +\infty$, la $f(\varepsilon, \eta, \zeta; x)$ tenda ad un limite determinato e finito L .

Poniamo allora:

$$(17) \quad \theta(x) = \frac{1}{H(x)} \int_{O_x} p(\alpha, \beta, \gamma; x) \cdot f(a(\alpha), b(\beta), c(\gamma); x) d\omega;$$

un ragionamento affatto analogo a quello del n.° 2 dimostra la formula:

$$(18) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = L;$$

se in particolare la $f(\varepsilon, \eta, \zeta; x)$ è una funzione $f(\varepsilon, \eta, \zeta)$ delle sole variabili $(\varepsilon, \eta, \zeta)$ definita nel campo Γ e continua nel punto $P_0 \equiv (abc)$, sarà $L = f(a, b, c)$; e la (18) si scriverà:

$$(18') \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = f(abc).$$

Ed hanno luogo delle osservazioni affatto analoghe a quelle del n.° 3.

d) Così, per fare un esempio semplicissimo, sia $a(\alpha)$ una funzione della variabile reale α , definita per ogni valore positivo della variabile α , integrabile in qualunque intervallo positivo finito, la quale per $\alpha \rightarrow +\infty$ tenda ad un limite determinato e finito a ; e sia $p(\alpha, x)$ una funzione positiva delle due variabili reali α, x , definita ed integrabile per i valori positivi di queste variabili.

Facciamo nella (13) $\varphi = x - \alpha, \alpha \geq 0$; e l'integrale

$$H(x) = \int_0^x p(\alpha, x) d\alpha$$

sia determinato e finito per $x \geq 0$ e, quando $x \rightarrow +\infty$, tenda all'infinito positivo. Posto

$$\theta(x) = \frac{1}{H(x)} \int_0^x p(\alpha, x) a(\alpha) d\alpha,$$

si ha la formula

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = a,$$

e la formula vale ancora, quando $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = a = +\infty$.

In particolare, per $p(\alpha, x) = 1$, si ha la formula analoga a quella di CAUCHY (cfr. n.° 4, a) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x a(\alpha) d\alpha = a.$$

Sulla nozione di integrale

Memoria di LEONIDA TONELLI (a Bologna)

INTRODUZIONE

La teoria dell'integrazione secondo il LEBESGUE, nonostante la grande importanza che, in questo ultimo ventennio, è venuta assumendo nel campo dell'Analisi, non è ancora diventata familiare a tutti gli Analisti, molti dei quali tralasciano sistematicamente di servirsene o poco si curano di questioni in cui essa si presenta addirittura indispensabile. La ragione di tutto ciò sta, come ebbe già ad osservare F. RIESZ, nel fatto che la teoria del LEBESGUE presuppone uno studio approfondito della misura dei gruppi di punti, studio che è come un'analisi microscopica di tali gruppi, e che si fonda su ragionamenti di un'estrema delicatezza.

Il presente lavoro è un tentativo per rendere più semplice, dirò così più elementare, e quindi più facilmente accettabile da tutti, la teoria dell'integrale del Lebesgue, liberandola completamente dalla teoria della misura dei gruppi di punti.

Riprendo qui le funzioni *quasi-continue* — già da me definite nei miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* ⁽¹⁾ — che costituiscono una classe coincidente (se si ammette il noto postulato di ZERMELO ⁽²⁾) con quella delle funzioni *misurabili* del LEBESGUE. E occupandomi, dapprima, soltanto di quelle limitate, definisco per esse l'*integrale definito* come limite dell'integrale di particolari funzioni ovunque continue — la cui definizione scende naturalmente e immediatamente dalla stessa definizione di quasi-continuità — le quali funzioni continue coincidono con quella quasi-continua, da integrare, in tutto l'intervallo di integrazione, tranne al più nei punti di un gruppo di intervalli di lunghezza complessiva piccola a piacere. Dall'integrale delle funzioni limitate,

⁽¹⁾ Bologna, Zanichelli, 1922.

⁽²⁾ Avverto che la teoria svolta nella presente Memoria è del tutto indipendente da tale postulato.

deduco poi l'integrale delle funzioni illimitate, col noto procedimento del DE LA VALLÉE POUSSIN.

L'integrale così definito — che coincide numericamente con quello del LEBESGUE, avendone anche l'identica portata, se si ammette il postulato di ZERMELO — viene, pertanto, a presentarsi come una naturale estensione dell'integrale dato da CAUCHY per le funzioni continue.

Ho ritenuto opportuno svolgere tutta la teoria dell'integrale, secondo la nuova definizione, per darne un'idea completa, e perchè si possa giudicare con maggior facilità se essa corrisponde o no a quanto era nei miei propositi. Il punto più delicato di tutta la trattazione è nello studio dell'operazione di passaggio al limite, che è precisamente quella che impone, in molte questioni, la considerazione dell'integrale del LEBESGUE, e sulla quale si può ben dire che l'integrale del LEBESGUE ha saputo veramente trionfare. In tale studio, mi giovo essenzialmente del teorema dato da TH. EGOROFF ⁽³⁾ per le successioni convergenti di funzioni misurabili, che io dimostro, per le funzioni quasi-continue, senza far uso della teoria della misura. Un'analogia e notevolissima dimostrazione dello stesso teorema fu pubblicata recentemente da F. RIESZ ⁽⁴⁾; ma io mi lusingo di aver conseguito una maggiore semplificazione.

È ora doveroso richiamare i lavori, da altri già pubblicati, indirizzati allo stesso scopo che io qui mi sono prefisso.

É. BOREL, in due Note molto suggestive dei *Comptes rendus* del 1910, ha proposto una definizione di integrale, che generalizza quella di RIEMANN e che non fa uso del concetto di misura dei gruppi di punti. Questa definizione non è equivalente a quella del LEBESGUE, ma si presta ad essere leggermente modificata, come hanno mostrato P. NALLI ⁽⁵⁾ e H. HAHN ⁽⁶⁾, in modo da raggiungere l'equivalenza indicata e da dare il valore dell'integrale come limite dell'integrale di RIEMANN calcolato su un insieme chiuso di punti. Da questa nuova definizione con un'ulteriore modificazione si giunge a quella che dò qui, la quale mi sembra, fra l'altro, offrire il vantaggio di evitare gli integrali su insiemi e di muovere invece da integrali di funzioni continue su un intervallo.

⁽³⁾ *Comptes rendus*, t. 152 (1911), pag. 244.

⁽⁴⁾ *Acta Litterarum ac Scientiarum R. Universitatis Hungaricae Franciscus-Josephinae*, (Szeged), t. I, 1922, pag. 18.

⁽⁵⁾ *Esposizione e confronto critico delle diverse definizioni proposte per l'integrale definito di una funzione limitata o no*. Palermo. 1914.

⁽⁶⁾ *Monatshefte für Mathematik u. Physik*, 1915, pag. 3.

Un'altra definizione, proposta dal BOREL ⁽⁷⁾, è fondata sulla nozione di convergenza asintotica; ma tale nozione è un po' difficile, ed io preferisco evitarla.

In una Nota dei *Comptes rendus* del 1912, e in una successiva Memoria ⁽⁸⁾, F. RIESZ ha dato una definizione generale di integrale, equivalente a quella del LEBESGUE, per mezzo dell'integrale delle *funzioni semplici*, ossia di funzioni che ammettono solo un numero finito di discontinuità e che sono costanti in tutti gli intervalli parziali che non contengono queste discontinuità. Per quanto tale definizione abbia molti pregi, mi sembra più naturale partire dalla considerazione dell'integrale di funzioni continue, anzichè da quello di funzioni discontinue anche molto semplici.

O. PERRON ⁽⁹⁾ ha svolto un'elegante teoria dell'integrale, anch'esso senza far uso del concetto di misura dei gruppi di punti, dando una definizione, basata tutta sulla considerazione dei numeri derivati, la quale, nel caso delle funzioni limitate, è equivalente a quella del LEBESGUE. Questa definizione del PERRON presenta l'inconveniente di non essere costruttiva, vale a dire di non dare un effettivo procedimento per il calcolo dell'integrale; e così, p. es., viene a mancare un procedimento per risalire dalla derivata alla funzione primitiva. Non vi è poi, nella teoria svolta dal PERRON, il teorema di integrazione per serie, relativo alla convergenza non uniforme.

Menzionerò, infine, un'interessante Nota dei *Comptes rendus* ⁽¹⁰⁾, in cui W. H. YOUNG indica il modo di dedurre la teoria dell'integrazione del LEBESGUE da quella dell'integrazione delle funzioni *semicontinue*, evitando la misura dei gruppi di punti. Ma siccome l'integrazione delle funzioni semicontinue è meno semplice di quella delle funzioni continue, anche in confronto di questa definizione ritengo di dover preferire quella da me proposta ⁽¹¹⁾.

I. Le funzioni quasi-continue.

1. Considerazioni preliminari.

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo (a, b) , ed ivi avente un punto di discontinuità, c , ed uno solo. Se δ_1 è un intervallo parziale di (a, b) , di

⁽⁷⁾ *Comptes rendus*, t. 154 (1912), pag. 413, e *Journal de Mathématiques*, t. 8 (1912), pag. 159.

⁽⁸⁾ *Acta Mathematica*, t. 42 (1920), pag. 191.

⁽⁹⁾ *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften*, 1914.

⁽¹⁰⁾ Vol. 162 (1916), pag. 909.

⁽¹¹⁾ Un'altra Memoria, sull'argomento che qui trattiamo, è stata recentissimamente pubblicata da B. LEVI, nel precedente fascicolo di questi « Annali ».

lunghezza comunque piccola, contenente c come punto interno ⁽¹²⁾ o come estremo, a seconda che c è o no distinto da a e b , e se si sopprimono i punti interni ad esso intervallo, in ciò che resta di (a, b) la funzione $f(x)$ è sempre continua.

Altrettanto può dirsi se i punti di discontinuità sono più di uno, n , e si sopprimono i punti interni ad n intervalli parziali di (a, b) , non sovrappo-
nentisi ⁽¹³⁾, di lunghezza complessiva comunque piccola, e contenenti, non
come estremi — eccezion fatta per quei punti di discontinuità eventualmente
coincidenti con a o b — tutti gli n punti di discontinuità. E ciò poi si estende
al caso in cui i punti di discontinuità della $f(x)$, in (a, b) , non siano in numero
finito, ma costituiscano una successione $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$. In questo caso, infatti,
*si può costruire una successione di intervalli parziali di (a, b) , non sovrappo-
nentisi e di lunghezza complessiva piccola a piacere, in modo che, tra-
scurati i punti di (a, b) interni agli intervalli della successione, e con essi
anche i valori corrispondenti della $f(x)$, tale funzione risulti sempre continua.*

La costruzione indicata può, ad esempio, ottenersi nel seguente modo.
Preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, si indichi con δ_1 il massimo intervallo
di (a, b) , di lunghezza $\leq \varepsilon:2$, avente c_1 come punto medio o come estremo,
secondochè c_1 è o no interno ad (a, b) ; con c_2' il primo punto di $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$,
che segue c_1 , che non è interno a δ_1 , e che non è contemporaneamente un
estremo per (a, b) e per δ_1 , e con δ_2 il massimo intervallo di (a, b) , di lun-
ghezza $\leq \varepsilon:2^2$, privo di punti interni comuni con δ_1 , e avente c_2' come punto
medio o estremo secondochè c_2' non è oppure è un estremo di uno degli
intervalli (a, b) e δ_1 . Si indichi poi con c_3' il primo punto di $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$,
che segue c_2' , che non è interno nè a δ_1 nè a δ_2 , e che non è estremo comune
a due degli intervalli (a, b) , δ_1 e δ_2 ; e con δ_3 il massimo intervallo di (a, b) ,
di lunghezza $\leq \varepsilon:2^3$, privo di punti interni comuni con δ_1 o con δ_2 , e avente
 c_3' come punto medio o estremo secondochè c_3' non è oppure è un estremo
di uno degli intervalli (a, b) , δ_1 e δ_2 . Così proseguendo indefinitamente, si
costruisce la successione di intervalli parziali di (a, b) , $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \dots$, i quali
sono non sovrappo-
nentisi e di lunghezza complessiva $\leq \varepsilon$, e contengono tutti
i punti di discontinuità c_n della $f(x)$. E siccome ogni punto c_n o è interno
ad un δ_m oppure, se non coincide con a o b , è estremo comune di due δ_m ,
ne viene che la $f(x)$, considerata soltanto nei punti di (a, b) non interni ai δ_m ,
risulta sempre continua.

⁽¹²⁾ È punto *interno* di un intervallo ogni punto dell'intervallo distinto dagli estremi

⁽¹³⁾ Avanti cioè, a due a due, al più un punto (estremo) comune.

Possiamo aggiungere che la proprietà ora stabilita per quelle funzioni le cui discontinuità possono ordinarsi in una successione, appartiene anche a certe funzioni dotate di un'infinità non numerabile di discontinuità. Così, per es., della proprietà indicata gode la funzione che, in tutti i punti razionali di (a, b) , ha il valore 1, e in tutti gli altri il valore 0, per la quale funzione tutti i punti di (a, b) sono punti di discontinuità ⁽¹⁴⁾.

Da quanto abbiamo sin qui esposto, risulta che la proprietà di cui ci siamo occupati appartiene ad una vasta classe di funzioni ⁽¹⁵⁾. D'altra parte, tale proprietà assimila, sotto certi riguardi, le funzioni che la ammettono alle funzioni continue; in modo particolare, si intuisce facilmente come essa consenta, quando sia verificata, di trattare il problema dell'integrazione in guisa da ricondurlo all'integrazione delle funzioni continue.

2. Definizione di funzione quasi-continua.

Le considerazioni del n.° precedente ci inducono a definire e studiare quelle funzioni che chiameremo *quasi-continue*. A tale scopo e per maggiore concisione di linguaggio, premetteremo alcune semplici definizioni.

Chiameremo *plurintervallo* di (a, b) l'insieme di (uno o) più intervalli, non sovrappoventisi di (a, b) , in numero finito o costituenti una successione. Per indicare i plurintervalli adopereremo la lettera Δ , riserbando la δ per gli intervalli. Un intervallo si dirà *chiuso* o *aperto* secondochè si penseranno

⁽¹⁴⁾ Supposto, per fissare le idee, $(a, b) \equiv (0, 1)$, e preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$ e ≤ 1 , indichiamo con δ_1 l'intervallo avente il primo estremo in 0 e la cui lunghezza è $=\sqrt{2} \cdot s_1$, dove s_1 è il minimo intero positivo tale che $\sqrt{2} \cdot s_1 < \varepsilon \cdot 2$; e con δ_2 l'intervallo avente il secondo estremo in 1 e la cui lunghezza è $=\sqrt{2} \cdot s_2$, dove s_2 è il minimo intero positivo tale che $\sqrt{2} \cdot s_2 < \varepsilon \cdot 2^2$. Dopo di ciò, ordinati i numeri razionali di $(0, 1)$, 0 ed 1 esclusi, in una successione $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ e indicato con a_1' il primo di essi che risulta esterno a δ_1 e a δ_2 , sia δ_3 l'intervallo di centro a_1' e di lunghezza $=\sqrt{2} \cdot s_3$, dove s_3 è il minimo intero positivo soddisfacente alla $\sqrt{2} \cdot s_3 < \varepsilon \cdot 2^3$ e tale che δ_3 non abbia punti comuni con δ_1 e δ_2 . Detto poi a_2' il primo degli a_n che segue a_1' e che risulta esterno a δ_1 , δ_2 e δ_3 , sia δ_4 l'intervallo di centro a_2' e di lunghezza $=\sqrt{2} \cdot s_4$, dove s_4 è il minimo intero positivo soddisfacente alla $\sqrt{2} \cdot s_4 < \varepsilon \cdot 2^4$ e tale che δ_4 non abbia punti comuni con δ_1 , δ_2 e δ_3 . E così via. Gli intervalli $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ hanno una lunghezza complessiva $< \varepsilon$, sono non sovrappoventisi e contengono come punti interni tutti gli a_n (perchè tutti gli estremi dei δ_m , eccettuati 0 ed 1, sono numeri irrazionali). Se dunque trascuriamo tutti i punti interni ai δ_m , e con essi anche i corrispondenti valori della $f(x)$, questa funzione risulta continua, perchè i valori così restanti sono sempre nulli, eccettuati quelli nei punti isolati 0 ed 1.

⁽¹⁵⁾ N. LUSIN (*Comptes rendus*, t. 154, 1912, pag. 1688) ha dimostrato che di tale proprietà gode ogni funzione misurabile, nel senso del LEBESGUE. Possiamo aggiungere che attualmente non si conoscono funzioni effettivamente definite che non godano della proprietà in questione.

appartenenti ad esso ambedue i suoi estremi o nessuno di essi. Un plurintervallo si dirà *chiuso* se saranno *chiusi* tutti gli intervalli che lo costituiscono; *aperto*, se tali intervalli saranno tutti *aperti*. Un punto si dirà appartenente ad un plurintervallo (aperto o chiuso) se e soltanto se apparterrà ad uno ⁽¹⁶⁾ dei suoi intervalli (aperti o chiusi, rispettivamente). Si chiamerà *lunghezza* di un plurintervallo la somma della serie delle lunghezze di tutti gli intervalli che compongono il plurintervallo.

Diremo, infine, che una funzione $f(x)$, definita nell'intervallo (a, b) , è, in esso, *continua*, a prescindere da un dato plurintervallo Δ (aperto o chiuso), se risulta continua quando non si considerino affatto i punti di Δ e con essi si trascurino anche i valori corrispondenti della funzione; in altre parole, se, preso comunque un punto x di (a, b) , non appartenente a Δ , ed un $\epsilon > 0$, si può poi sempre determinare un $\sigma > 0$, in modo che, essendo x' un qualsiasi punto di (a, b) , non appartenente a Δ e soddisfacente alla disuguaglianza $|x - x'| \leq \sigma$, si abbia necessariamente $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$.

Premesse queste definizioni, definiremo la *quasi-continuità* nel seguente modo:

*una funzione $f(x)$, data nell'intervallo (a, b) , la diremo **quasi-continua** nell'intervallo medesimo, se esiste almeno una legge che faccia corrispondere, ad ogni numero intero positivo n , un plurintervallo aperto $\Delta^{(n)} \equiv (\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \dots, \delta_r^{(n)}, \dots)$, di (a, b) , di lunghezza minore di $1:n$, e tale che, a prescindere da esso, la $f(x)$ risulti continua in (a, b) .*

È evidente che ogni funzione *continua*, in (a, b) , è ivi anche *quasi-continua*. Per quello che abbiamo detto al n.° 1, sono poi quasi-continue tutte le funzioni che ammettono solo un numero finito di discontinuità, ed anche quelle le cui discontinuità si possono ordinare in una successione; ed è pure quasi-continua la funzione che ha il valore 1 in tutti i punti razionali di (a, b) , ed il valore 0 negli altri.

La classe delle funzioni quasi-continue è generalissima. Una chiara idea di tale generalità ci sarà data dalla proposizione del n.° 18 ⁽¹⁷⁾.

Ogni plurintervallo Δ di (a, b) , tale che, a prescindere da esso, *considerato aperto*, la funzione $f(x)$ risulti continua in (a, b) , sarà chiamato *plurintervallo associato della $f(x)$* ; e se esso è di lunghezza minore di $1:n$, sarà detto *associato di ordine n* , e sarà scritto $\Delta^{(n)}$.

⁽¹⁶⁾ Ad uno ed uno solo, se il plurintervallo è aperto; ad uno almeno, se è chiuso.

⁽¹⁷⁾ Osserviamo che ogni funzione quasi-continua è misurabile, secondo la definizione del LEBESGUE. Viceversa, ammesso il principio delle infinite scelte arbitrarie, ogni funzione misurabile risulta quasi-continua.

3. Prime proprietà delle funzioni quasi-continue.

Risulta immediatamente che:

se $f(x)$ è una funzione quasi-continua in (a, b) , sono ivi quasi-continue anche $|f(x)|$ e $kf(x)$, dove k è una costante qualsiasi;

se $f(x)$ è quasi-continua, in (a, b) , essa è quasi-continua anche in ogni intervallo parziale di (a, b) ;

se è $a < c < b$, e se $f(x)$ è quasi-continua in (a, c) e in (c, b) , essa è quasi-continua anche in (a, b) .

4. Funzioni associate di una funzione quasi-continua.

Data una funzione $f(x)$, quasi-continua in (a, b) , e considerato un plurintervallo aperto Δ , ad essa associato, chiameremo *funzione associata della $f(x)$, secondo Δ* , la funzione che è uguale alla $f(x)$ in tutti i punti di (a, b) che non appartengono a Δ , e che, in ciascun intervallo di Δ , varia linearmente fra i valori che essa ha negli estremi dell'intervallo medesimo. Indicheremo tale funzione con la scrittura $\Delta f(x)$.

Dalla definizione ora posta, risulta che ogni funzione associata di una funzione quasi-continua è continua in tutti i punti dell'intervallo (a, b) . È, infatti, evidente la continuità nei punti del plurintervallo aperto Δ , a cui la funzione associata corrisponde. Negli altri punti, la continuità risulta poi dall'osservare che, in essi, la funzione associata coincide con la funzione quasi-continua — la quale è continua in (a, b) , a prescindere da Δ — e dall'osservare anche che, per costruzione, i valori della funzione associata, nei punti di un intervallo di Δ , sono sempre compresi fra quelli che la funzione assume negli estremi dell'intervallo medesimo.

Possiamo affermare, pertanto, che, scelta⁽¹⁸⁾ una successione $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(n)}, \dots$, di plurintervalli associati della funzione quasi-continua $f(x)$, degli ordini rispettivi $1, 2, \dots, n, \dots$, risulta determinata una successione

$$\Delta^{(1)}f(x), \Delta^{(2)}f(x), \dots, \Delta^{(n)}f(x), \dots$$

di funzioni associate della $f(x)$, ciascuna delle quali è continua, in tutto (a, b) , e differisce dalla $f(x)$ soltanto nei punti del plurintervallo aperto $\Delta^{(n)}$, corrispondente, la cui lunghezza, essendo minore di $1/n$, tende a zero per $n \rightarrow \infty$.

(18) Ciò che è sempre possibile di fare, per la definizione stessa di quasi-continuità.

5. Lemma sulle successioni di intervalli.

Per studiare le operazioni sulle funzioni quasi-continue, ci occorre il seguente lemma:

Data una successione $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \dots$, di intervalli parziali di (a, b) , è sempre possibile di costruire un plurintervallo Δ di (a, b) , tale che ogni δ_m appartenga interamente ad un intervallo di Δ , e che la lunghezza di Δ non superi la somma complessiva delle lunghezze di tutti i δ_m .

Per dimostrare questa proposizione, diamo un procedimento di costruzione del plurintervallo Δ .

Considerato il primo intervallo δ_1 della successione data, determiniamo il massimo intervallo di (a, b) che gode delle due seguenti proprietà: 1° contiene δ_1 ; 2° ogni sua parte ha lunghezza non superiore alla somma delle lunghezze di tutti quegli intervalli δ_m e di tutte quelle parti dei δ_m che essa contiene. Indichiamo l'intervallo così determinato con δ_1' . È evidente che nessuno degli estremi di questo δ_1' può essere interno ad un δ_m , e che l'intervallo δ_m o è tutto contenuto in δ_1' oppure non ha con esso alcun punto comune. Consideriamo ora il primo dei δ_m che non ha punti in δ_1' , e indichiamolo con δ_2 . Fra gli intervalli ottenuti da (a, b) sopprimendo i punti interni a δ_1' , ve n'è uno che contiene δ_2 : indichiamolo con (a', b') , e costruiamo l'intervallo δ_2' , relativamente ad (a', b') e δ_2 , come dianzi abbiamo fatto per (a, b) e δ_1 . E così proseguiamo indefinitamente.

Gli intervalli $\delta_1', \delta_2', \dots, \delta_n', \dots$, sono non sovrappoventi e costituiscono, pertanto, un plurintervallo Δ . Ogni δ_m appartiene interamente ad un δ_n' ; e siccome la lunghezza di δ_n' non può superare la somma delle lunghezze di tutti i δ_m in esso contenuti, la lunghezza di Δ risulta non superiore alla somma delle lunghezze di tutti i δ_m .

6. Operazioni sulle funzioni quasi-continue.

La somma, la differenza e il prodotto di due funzioni quasi-continue, in (a, b) , sono funzioni quasi-continue. Lo stesso dicasi del quoziente, purché il divisore sia sempre diverso da zero in (a, b) .

Siano f e g due funzioni quasi-continue in (a, b) , e scegliamo due successioni

$$\Delta_f^{(1)}, \Delta_f^{(2)}, \dots, \Delta_f^{(n)}, \dots, \quad \Delta_g^{(1)}, \Delta_g^{(2)}, \dots, \Delta_g^{(n)}, \dots$$

di plurintervalli associati, rispettivamente della f e della g , degli ordini $1, 2, \dots, n, \dots$. Formata, con gli intervalli di $\Delta_f^{(2n)}$ e $\Delta_g^{(2n)}$, un'unica successione, ponendo ai posti dispari ordinatamente gli intervalli di $\Delta_f^{(2n)}$, e ai posti pari ordinatamente

quelli di $\Delta_g^{(2n)}$, indichiamo con $\Delta^{(n)}$ il plurintervallo che si ottiene applicando a questa successione il procedimento costruttivo dato al n.° 5. Ambedue le funzioni f e g risultano continue in (a, b) , a prescindere dal plurintervallo aperto $\Delta^{(n)}$; e poichè $\Delta^{(n)}$ ha lunghezza non superiore alla somma di quelle di $\Delta_f^{(2n)}$ e $\Delta_g^{(2n)}$, e quindi $< 1:n$, ne viene che esso è un plurintervallo associato di ordine n , tanto della f quanto della g .

Le due funzioni $\Delta^{(n)}f$ e $\Delta^{(n)}g$ sono continue in tutto (a, b) , e quindi hanno una somma pure continua in tale intervallo; ma questa somma coincide con $f+g$ in tutti i punti di (a, b) , eccettuati quelli del $\Delta^{(n)}$ aperto, e pertanto la $f+g$ risulta continua in (a, b) , a prescindere dal plurintervallo aperto $\Delta^{(n)}$. Ciò prova la quasi-continuità di $f+g$.

Altrettanto dicasi per la differenza e per il prodotto. Per quanto riguarda il quoziente, si osserverà che, supposto $g \neq 0$ in tutto (a, b) , $\Delta^{(n)}f : \Delta^{(n)}g$ è continuo in tutti i punti non appartenenti al plurintervallo aperto $\Delta^{(n)}$, nei quali punti esso quoziente è uguale a $f:g$.

II. L'integrale per le funzioni quasi-continue limitate.

7. L'integrale di Cauchy per le funzioni continue.

Sia $f(x)$ una funzione continua in tutto l'intervallo (a, b) . Diviso questo intervallo in un numero qualsiasi di parti, mediante i punti $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1}$, e posto $a = a_0$, $b = a_n$, moltiplichiamo la lunghezza $a_r - a_{r-1}$, di ciascuna parte, per il valore della $f(x)$ in un punto x_r , arbitrariamente scelto nella parte stessa, e facciamo la somma dei prodotti così ottenuti

$$s = \sum_1^n f(x_r)(a_r - a_{r-1}),$$

che chiameremo *somma di Cauchy*, relativa alla funzione $f(x)$ ed alla suddivisione adottata. Scelto ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, e determinatone un altro $\sigma > 0$, in modo che, in ogni intervallo di (a, b) , di ampiezza non superiore a σ , l'oscillazione della $f(x)$ risulti minore di ε , la somma s , sopra scritta, differisce, quando si supponga sempre $a_r - a_{r-1} < \sigma$, per meno di $\varepsilon(b-a)$ da ogni altra qualsiasi somma di CAUCHY, relativa alla $f(x)$ e ad una suddivisione di (a, b) identica a quella cui corrisponde la s , o da quella dedotta con l'inserzione di ulteriori punti di suddivisione. Ed allora la differenza fra due somme di CAUCHY, relative alla $f(x)$ e a due qualsiasi suddivisioni di (a, b) in parti tutte minori di σ , risulta minore di $2\varepsilon(b-a)$, perchè ciascuna di tali

somme differisce, per meno di $\varepsilon(b - a)$, da ogni somma relativa ad una suddivisione ottenuta con tutti i punti a_r di ambedue le suddivisioni che danno le due somme considerate. Da ciò segue l'esistenza di un numero, *unico*, da cui differiscono, per meno di un $\varepsilon > 0$, fissato ad arbitrio, tutte le somme di CAUCHY relative alla $f(x)$ e ad ogni suddivisione di (a, b) in parti tutte di ampiezza minore di un certo $\sigma > 0$, che risulta dipendente da ε .

Il numero ora indicato fu definito da CAUCHY, e fu chiamato « *integrale definito* » della funzione continua $f(x)$, nell'intervallo (a, b) ; esso si rappresenta con la scrittura

$$\int_a^b f(x) dx \quad (19).$$

8. Considerazioni sulle funzioni quasi-continue.

Vogliamo ora vedere come sia possibile di estendere, alle funzioni quasi-continue, il concetto di integrale definito, posto da CAUCHY per le funzioni continue.

Limitiamoci, per ora, alle funzioni quasi-continue *limitate*, vale a dire, soddisfacenti, in tutto l'intervallo (a, b) , in cui si considerano, ad una limitazione del tipo $|f(x)| < M$.

Per giungere con tutta naturalezza all'estensione voluta, cominciamo col considerare, in (a, b) , una funzione $f(x)$, limitata, che abbia un solo punto di discontinuità, c . Scelto un intervallo Δ di (a, b) , contenente c come punto interno o come estremo, secondochè c è interno o no ad (a, b) , la funzione Δf , associata della f , secondo Δ — vale a dire, che coincide con f in tutti i punti non interni a Δ , e che varia linearmente in questo intervallo — è una funzione sempre continua in (a, b) , e per essa esiste l'integrale definito, secondo CAUCHY,

$$(1) \quad \int_a^b \Delta f(x) dx.$$

Il valore di questo integrale dipende evidentemente dall'intervallo Δ scelto; per altro, se imponiamo al Δ un certo grado di piccolezza, le differenze che

(19) A. L. CAUCHY, *Résumé des leçons données à l'École royale Polytechnique sur le Calcul infinitésimal*. T. I (Paris, 1823), 21^{ème} e 22^{ème} leçons. L'integrale, definito col procedimento ideato da CAUCHY, esiste anche se la funzione non è continua, purchè soddisfacente a determinate condizioni. La condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione limitata sia integrabile, nel senso indicato, fu stabilita, come è noto, da RIEMANN.

può presentare tale valore, nel passare da un Δ ad un altro intervallo $\bar{\Delta}$, della stessa specie e dello stesso grado di piccolezza, risultano anch'esse di una piccolezza arbitrariamente prefissabile. Più precisamente, se le ampiezze di Δ e $\bar{\Delta}$ sono ambedue minori di σ (> 0), si ha, indicando con (a', b') il minimo intervallo che comprende Δ e $\bar{\Delta}$ (intervallo che risulta di ampiezza $< 2\sigma$),

$$(2) \quad \left| \int_a^b \Delta f dx - \int_a^b \bar{\Delta} f dx \right| \leq \int_{a'}^{b'} |\Delta f - \bar{\Delta} f| dx < 4M\sigma,$$

e qui $4M\sigma$ è piccolo quanto si vuole, con σ . Ciò mostra che esiste un numero, *unico*, da cui l'integrale (1) differisce per meno di un $\varepsilon > 0$, fissato ad arbitrio, tutte le volte che l'ampiezza di Δ risulta minore di un certo $\sigma > 0$, dipendente da ε . Del numero indicato l'integrale (1) dà, pertanto, un valore approssimato; e l'approssimazione può spingersi oltre ogni limite.

Quanto si è detto, nel caso di una funzione limitata con un solo punto di discontinuità, si estende immediatamente alle funzioni limitate con un numero finito di discontinuità; e si estende poi anche, con facilità, ad ogni funzione limitata quasi-continua.

Consideriamo, infatti, due plurintervalli Δ e $\bar{\Delta}$, di (a, b) , associati della funzione limitata e quasi-continua $f(x)$. Per dimostrare che il primo membro della (2) è, anche qui, minore di $4M\sigma$, formiamo le due somme di CAUCHY

$$s = \sum_1^n \Delta f(x_r)(a_r - a_{r-1}), \quad \bar{s} = \sum_1^n \bar{\Delta} f(x_r)(a_r - a_{r-1}),$$

relative alle funzioni associate della f , Δf e $\bar{\Delta} f$, e ad una stessa suddivisione di (a, b) in parti (a_{r-1}, a_r) , intendendo che il punto x_r , di (a_{r-1}, a_r) , in cui sono calcolate ambedue le Δf e $\bar{\Delta} f$, sia, quando ciò risulti possibile, scelto in modo da non appartenere né all'uno né all'altro dei due plurintervalli aperti Δ e $\bar{\Delta}$. Abbiamo, allora,

$$s - \bar{s} = \Sigma' [\Delta f(x_r) - \bar{\Delta} f(x_r)](a_r - a_{r-1}),$$

dove la sommatoria Σ' è estesa soltanto a quelli degli intervalli (a_{r-1}, a_r) i cui punti sono *tutti* appartenenti ad almeno uno dei due plurintervalli aperti Δ e $\bar{\Delta}$ (20). Ma la somma complessiva di questi intervalli non può supe-

(20) Per gli altri (a_{r-1}, a_r) , le Δf e $\bar{\Delta} f$ hanno entrambe lo stesso valore della f , in x_r .

rare la somma delle lunghezze di Δ e $\bar{\Delta}$ ⁽²¹⁾; ed è perciò

$$|s - \bar{s}| \leq 2M\Sigma'(a_r - a_{r-1}) \leq 2M(\Delta + \bar{\Delta}).$$

Se ora supponiamo che Δ e $\bar{\Delta}$ siano entrambi di lunghezza minore di σ , e se osserviamo che, per essere Δf e $\bar{\Delta} f$ funzioni continue, prendendo le parti (a_{r-1}, a_r) sufficientemente piccole, s e \bar{s} differiscono di quanto poco vogliamo dagli integrali delle Δf e $\bar{\Delta} f$, estesi all'intervallo (a, b) , otteniamo, anche qui,

$$\left| \int_a^b \Delta f dx - \int_a^b \bar{\Delta} f dx \right| < 4M\sigma.$$

9. Definizione di integrale per le funzioni quasi-continue limitate.

Quanto abbiamo esposto al n.° precedente ci conduce a porre la seguente definizione:

diremo integrale definito, nell'intervallo (a, b) , della funzione quasi-continua, limitata, $f(x)$, e rappresenteremo con la scrittura $\int_a^b f(x)dx$, il limite a cui tende l'integrale definito (di Cauchy) $\int_a^b \Delta f(x)dx$, di una qualsiasi funzione associata della $f(x)$, quando la lunghezza del plurintervallo associato Δ tende a zero.

Il limite qui considerato esiste sempre, in virtù di ciò che si è dimostrato nel n.° precedente, cosicchè, secondo la definizione ora posta, ogni funzione quasi-continua e limitata, in (a, b) , ammette sempre, in questo intervallo, l'integrale definito.

È evidente che la definizione, qui data, applicata ad una funzione continua in tutto (a, b) , conduce ad un valore uguale a quello dell'integrale di CAUCHY.

⁽²¹⁾ Se (a_{r-1}, a_r) è un intervallo della specie considerata, per essere ogni suo punto interno ad almeno un intervallo di Δ e $\bar{\Delta}$, per un noto teorema (v. per es. PINCHERLE, *Lezioni di Calcolo infinitesimale*, 2^a ed., p. 61) si possono trovare degli intervalli di Δ e $\bar{\Delta}$, in numero finito, che ricoprono tutto (a_{r-1}, a_r) . Dunque si possono trovare degli intervalli di Δ e $\bar{\Delta}$, in numero finito, che ricoprono interamente tutti gli (a_{r-1}, a_r) , della specie indicata, e che hanno perciò una lunghezza complessiva non minore di quella complessiva di questi (a_{r-1}, a_r) .

10. Proprietà dell'integrale.

a) Abbiamo, immediatamente, se $f(x)$ è una funzione quasi-continua e limitata, in (a, b) ,

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad (k = \text{cost.}),$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

$$a < c < b, \quad \int_a^c f dx + \int_c^b f dx = \int_a^b f dx.$$

b) Abbiamo anche, se f e g sono due funzioni quasi-continue e limitate, in (a, b) ,

$$(1) \quad \int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx.$$

Ed infatti, costruito, come si è già fatto al n.° 6, il plurintervallo $\Delta^{(n)}$, associato, di ordine n , tanto della f quanto della g , e quindi anche della $f + g$, abbiamo

$$\Delta^{(n)}(f + g) = \Delta^{(n)}f + \Delta^{(n)}g,$$

e perciò, essendo qui tutte funzioni continue,

$$\int_a^b \Delta^{(n)}(f + g) dx = \int_a^b \Delta^{(n)}f dx + \int_a^b \Delta^{(n)}g dx,$$

donde, per $n \rightarrow \infty$, la (1).

Dalla (1) e dalla prima delle a), abbiamo pure

$$(2) \quad \int_a^b (f - g) dx = \int_a^b f dx - \int_a^b g dx.$$

c) Se f e g sono funzioni quasi-continue e limitate, in (a, b) , e se è sempre $f \geq g$, è pure

$$(3) \quad \int_a^b f dx \geq \int_a^b g dx.$$

Ed infatti, essendo sempre, in (a, b) , $f - g \geq 0$, le funzioni associate di $f - g$ sono anch'esse sempre ≥ 0 , e ≥ 0 sono pure i loro integrali definiti, in (a, b) : dunque

$$\int_a^b (f - g) dx \geq 0,$$

donde, in virtù della (2), la (3).

d) *Teorema della media.* Se f e g sono due funzioni quasi-continue e limitate, in (a, b) , ed è sempre $m \leq f \leq M$, $g \geq 0$, è

$$(4) \quad \int_a^b fg dx = \theta \int_a^b g dx,$$

con $m \leq \theta \leq M$. È, infatti, sempre, in (a, b) , $mg \leq fg \leq Mg$, e, per a) e c),

$$m \int_a^b g dx \leq \int_a^b fg dx \leq M \int_a^b g dx,$$

donde la (4).

In particolare, se è $g = 1$, abbiamo

$$\int_a^b f dx = \theta(b - a).$$

III. L'integrale per le funzioni quasi-continue illimitate.

11. Osservazione sulle funzioni quasi-continue.

Nel ragionamento del n.° 8, uno degli elementi essenziali è l'ipotesi che le funzioni a cui esso è applicato siano limitate. Mancando tale ipotesi, non solo non può più ripetersi il ragionamento, ma, sicuramente, non vale più

neppure la conclusione a cui esso conduce ⁽²²⁾. La definizione di integrale del n.º 9 non può, pertanto, applicarsi alle funzioni quasi-continue illimitate; e per queste funzioni la definizione di integrale potrà soltanto ottenersi generalizzando, opportunamente quella già data. Per giungere a questa estensione, ci occorre un'osservazione che ora esporremo.

Sia $f(x)$ una funzione data nell'intervallo (a, b) . Considerato un numero qualunque p , costruiamo la funzione $f_p(x)$, ponendola $= f(x)$ nei punti di (a, b) in cui è $f(x) \leq p$, e $= p$ in quelli in cui è $f(x) > p$. È evidente che, se la $f(x)$ è continua in (a, b) , tale è anche la $f_p(x)$; se poi la $f(x)$ è soltanto quasi-continua, è facile provare che anche la $f_p(x)$ risulta quasi-continua.

Ed infatti, sia Δ un plurintervallo di (a, b) , associato della $f(x)$. A prescindere da esso, considerato aperto, la $f(x)$ risulta continua; dunque per ogni punto \bar{x} , non appartenente al plurintervallo aperto Δ , ed in cui sia $f(\bar{x}) < p$ o $> p$, esiste un intorno in cui, a prescindere dal Δ aperto, il valore della $f(x)$ è sempre, rispettivamente $< p$ o $> p$. Nel primo caso, nei punti considerati, è $f_p(x) = f(x)$, e, nel secondo, $f_p(x) = p$, onde; in \bar{x} , si ha la continuità pure della $f_p(x)$, a prescindere dal Δ aperto. E ciò vale evidentemente anche se è $f(\bar{x}) = p$. Se ne conclude che Δ è un plurintervallo associato anche della $f_p(x)$, e, pertanto, che, se $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(n)}, \dots$ è una successione di plurintervalli associati della $f(x)$, degli ordini $1, 2, \dots, n, \dots$, rispettivamente, essa è anche una successione di plurintervalli associati della $f_p(x)$, degli stessi ordini. Con ciò è provata la quasi-continuità della $f_p(x)$.

Altrettanto può dirsi della funzione che è uguale alla $f(x)$ dove è $f(x) \geq q$, e $= q$ dove $f(x) < q$; e quindi anche dell'altra funzione $= f(x)$ dove è $p \geq f(x) \geq q$ ($p \geq q$), $= p$ ove $f(x) > p$, e $= q$ ove $f(x) < q$; e la successione $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(n)}, \dots$, sopra indicata, è anche una successione di plurintervalli associati di ambedue queste funzioni, qualunque siano i numeri p e q , con $p > q$.

⁽²²⁾ Ed infatti, sia \bar{x} un punto di WEIERSTRASS relativo al limite superiore (o inferiore) della funzione $f(x)$, limite che supponiamo infinito. Considerato un qualsiasi plurintervallo Δ , associato della $f(x)$, e circondato \bar{x} con un intervallo δ di (a, b) , di lunghezza piccola quanto si vuole, e avente \bar{x} come estremo solo nel caso che sia $\bar{x} = a$ oppure $\bar{x} = b$, sopprimiamo in Δ tutti quegli intervalli o parti di intervallo che appartengono a δ , e sostituiamoli coi due intervalli in cui δ è diviso da un suo punto interno c . Otteniamo così un nuovo plurintervallo Δ' , di lunghezza superiore a quella di Δ di tanto poco quanto si vuole. E siccome c può essere scelto in modo che $f(c)$ sia maggiore (minore) di qualunque numero, l'integrale $\int_{\Delta'} f dx$ può essere fatto anch'esso maggiore (minore) di qualsiasi numero. Ciò prova quanto abbiamo affermato nel testo.

12. Definizione di integrale per le funzioni quasi-continue illimitate.

Sia $f(x)$ una funzione quasi-continua, in (a, b) , e non limitata. Considerati due qualunque numeri interi, non negativi, p e q , indichiamo con $f_{p,q}(x)$ la funzione definita, in (a, b) , nel seguente modo:

$$\begin{aligned} f_{p,q}(x) &= f(x), & \text{ove è} & \quad -q \leq f(x) \leq p, \\ &= -q, & \text{ } & \quad f(x) < -q, \\ &= p, & \text{ } & \quad f(x) > p. \end{aligned}$$

Questa funzione è quasi-continua, in (a, b) , per quanto si è osservato nel n.° precedente; è poi *limitata*. Esiste, quindi, per essa, l'integrale definito, in (a, b) , secondo la definizione data al n.° 9.

Ciò posto, diremo che la funzione quasi-continua $f(x)$ è **integrabile** in (a, b) , se, al tendere di p e q all'infinito, in qualunque modo, l'integrale $\int_a^b f_{p,q}(x) dx$ tende sempre ad uno stesso limite finito. Chiameremo tale limite, quando esiste, **integrale definito** della $f(x)$, in (a, b) , e lo rappresenteremo con la solita scrittura $\int_a^b f(x) dx$.

Possiamo dimostrare subito che *condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione quasi-continua $f(x)$ sia integrabile, in (a, b) , è che l'integrale $\int_a^b f_{p,q} dx$ resti sempre inferiore, in modulo, ad un numero fisso, indipendente da p e q .*

La condizione è necessaria. Ed infatti, essendo la $f(x)$ integrabile, esiste un numero intero positivo N , tale che se è $p \geq N$ e $q \geq N$, è pure

$$\left| \int_a^b f_{p,q} dx - \int_a^b f dx \right| < 1,$$

donde

$$\left| \int_a^b f_{p,q} dx \right| < 1 + \left| \int_a^b f dx \right|.$$

Se è $p \geq N$ e $q < N$, è, in tutto (a, b) ,

$$0 \leq f_{p,q} - f_{p,N} \leq -q + N \leq N,$$

onde

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_{p,q} dx \right| &\leq \left| \int_a^b f_{p,N} dx \right| + N(b-a) \\ &< 1 + N(b-a) + \left| \int_a^b f dx \right|; \end{aligned}$$

ed analogamente, se è $p < N$ e $q \geq N$. Se, infine, è $p < N$ e $q < N$, è $f_{0,N} \leq f_{p,q} \leq f_{N,0}$, e

$$\left| \int_a^b f_{p,q} dx \right| < \left| \int_a^b f_{0,N} dx \right| + \left| \int_a^b f_{N,0} dx \right|.$$

La condizione è sufficiente. Ed infatti, poichè l'integrale $\int_a^b f_{p,0} dx$, non decrescendo al crescere di p , e restando sempre inferiore ad un numero fisso, tende, per $p \rightarrow \infty$, ad un limite finito I_1 , preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, abbiamo, per ogni p maggiore di un certo \bar{p} ,

$$\left| \int_a^b f_{p,0} dx - I_1 \right| < \varepsilon.$$

Analogamente, $\int_a^b f_{0,q} dx$ tende, per $q \rightarrow \infty$, ad un limite finito I_2 , e per ogni q maggiore di un certo \bar{q} , è

$$\left| \int_a^b f_{0,q} dx - I_2 \right| < \varepsilon.$$

E siccome dalla $f_{p,q} \equiv f_{p,0} + f_{0,q}$ segue, per il n.º 10, b),

$$\int_a^b f_{p,q} dx = \int_a^b f_{p,0} dx + \int_a^b f_{0,q} dx,$$

otteniamo, per ogni coppia p, q , tale che $p > \bar{p}$ e $q > \bar{q}$,

$$\left| \int_a^b f_{p,q} dx - (I_1 + I_2) \right| < 2\varepsilon,$$

il che prova che l'integrale della $f_{p,q}$ tende a $I_1 + I_2$ col tendere all'infinito di p e q .

13. Proprietà dell'integrale.

a) *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f(x)$, quasi-continua in (a, b) , sia ivi integrabile, è che, in (a, b) , risulti integrabile $|f(x)|$.*

La condizione è necessaria. Adottando le notazioni del n.° precedente, abbiamo $|f|_{p,q} \equiv f_{p,0} - f_{0,p}$,

$$\int_a^b |f|_{p,q} dx = \int_a^b f_{p,0} dx - \int_a^b f_{0,p} dx,$$

e quindi, per $p > \bar{p}$ e $q > \bar{q}$,

$$\left| \int_a^b |f|_{p,q} dx - (I_1 - I_2) \right| < 2\varepsilon,$$

il che prova che la $|f|$ è integrabile e che il suo integrale è dato da $I_1 - I_2$.

La condizione è sufficiente. Ed infatti, è

$$\int_a^b f_{p,q} dx = \int_a^b (f_{p,0} + f_{0,q}) dx,$$

e se m supera tanto p quanto q ,

$$\left| \int_a^b f_{p,q} dx \right| \leq \int_a^b (f_{p,0} - f_{0,q}) dx \leq \int_a^b |f|_{m,0} dx \leq \int_a^b |f| dx,$$

e la f risulta integrabile, per la condizione di integrabilità stabilita nel n.° 12.

b) Poichè gli integrali della f e della $|f|$ sono dati, rispettivamente, da $I_1 + I_2$ e $I_1 - I_2$, ed è $I_1 \geq 0$ e $I_2 \leq 0$, ne viene

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx.$$

c) Da quanto si è stabilito in a), segue che, se la funzione $f(x)$, quasi-continua in (a, b) , è ivi integrabile, essa è integrabile anche in ogni intervallo parziale di (a, b) ; e se essa è integrabile in (a, c) e in (c, b) , con $a < c < b$, è integrabile pure in (a, b) .

Valgono poi, anche qui, immediatamente, le proprietà date nel n.° 10, a), per le funzioni quasi-continue limitate.

d) Se f e g sono due funzioni quasi-continue in (a, b) , e sempre soddisfacenti alla $|f| \leq |g|$, e se la g è integrabile in (a, b) , ivi è integrabile anche la f , e si ha

$$\int_a^b |f| dx \leq \int_a^b |g| dx.$$

Basta, per questo, osservare che, essendo sempre $|f|_{p,q} \leq |g|_{p,q}$, è

$$\int_a^b |f|_{p,q} dx \leq \int_a^b |g|_{p,q} dx \leq \int_a^b |g| dx.$$

e) Se la f è quasi-continua e integrabile in (a, b) , preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si può sempre determinare un $\sigma > 0$, tale che, per ogni plurintervallo $\Delta \equiv (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \dots)$, di (a, b) , di lunghezza $< \sigma$, si abbia

$$(1) \quad \left| \int_{\Delta} f dx \right| < \varepsilon,$$

intendendo che sia

$$\int_{\Delta} f dx \equiv \sum_{\delta_m} \int f dx \quad (23).$$

Basta, evidentemente, dimostrare la proprietà per i plurintervalli che constano di un numero finito di intervalli. Sia Δ uno di essi, e indichiamo con Δ' il suo complementare rispetto ad (a, b) . Scelto il più piccolo intero positivo p , tale che

$$\int_a^b |f| dx - \int_a^b |f|_{p,0} dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

poniamo $\sigma = \varepsilon : 2p$. Abbiamo (c)

$$\begin{aligned} \int_a^b |f| dx - \int_a^b |f|_{p,0} dx &= \left(\int_{\Delta} |f| dx - \int_{\Delta} |f|_{p,0} dx \right) \\ &+ \left(\int_{\Delta'} |f| dx - \int_{\Delta'} |f|_{p,0} dx \right), \end{aligned}$$

(23) Questa serie è assolutamente convergente, perchè è

$$\sum_1^r \int_{\delta_m} |f| dx \leq \int_a^b |f| dx.$$

e, poichè le due parentesi del secondo membro sono entrambe ≥ 0 ,

$$\int_{\Delta} |f| dx - \int_{\Delta} |f|_{p,0} dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se, perciò, supponiamo che la lunghezza di Δ sia $< \sigma$, di qui e dalla

$$\int_{\Delta} |f|_{p,0} dx < p\sigma = \frac{\varepsilon}{2},$$

otteniamo la (1).

f) Per dimostrare il teorema relativo all'integrale della somma di due funzioni, ci occorre il seguente lemma:

se f è una funzione quasi-continua e limitata, in (a, b) , e sempre nulla, tranne nei punti di un plurintervallo aperto ⁽²⁴⁾ Δ , è

$$\int_a^b f dx = \int_{\Delta} f dx.$$

Posto $\Delta \equiv (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots)$ e preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, scegliamo un numero intero positivo r , in modo che la lunghezza del plurintervallo $(\delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots)$ risulti $< \varepsilon$. Indichiamo poi con Δ_r il plurintervallo complementare di $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$, rispetto ad (a, b) . Poichè anche Δ_r è composto di un numero finito di intervalli, è (c)

$$(2) \quad \int_a^b f dx = \sum_{\delta_n}^r \int f dx + \int_{\Delta_r} f dx.$$

Su ciascun intervallo di Δ_r , assumiamo un plurintervallo associato della f e calcoliamo l'integrale della corrispondente funzione associata come limite di somme di CAUCHY in cui i valori della funzione siano scelti, tutte le volte che ciò è possibile, in punti non interni nè al plurintervallo associato nè a $(\delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots)$, nei quali punti la funzione ha dunque il valore zero. Siccome queste somme di CAUCHY hanno così, ciascuna, un modulo non superiore al massimo modulo M della f , in (a, b) , moltiplicato per la lunghezza del plurintervallo associato aumentata della lunghezza della parte di $(\delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots)$ contenuta nell'intervallo di Δ_r , che si considera, ne viene che dello stesso

⁽²⁴⁾ Poniamo che il plurintervallo sia aperto soltanto per comodità di dimostrazione. Il lemma vale anche se, invece di supporre la f limitata, la supponiamo integrabile.

numero è non superiore anche l'integrale della funzione associata, e che l'integrale della f , esteso a tutto Δ_r , risulta, in modulo, non superiore ad M moltiplicato per la lunghezza di $(\delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots)$, ossia non superiore a $M\epsilon$. E siccome la sommatoria che figura in (2) tende, per $r \rightarrow \infty$, all'integrale della f in Δ , il lemma risulta provato.

g) Se f e g sono due funzioni quasi-continue e integrabili in (a, b) , la funzione quasi-continua $f + g$ è anch'essa integrabile in (a, b) , ed è

$$(3) \quad \int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx.$$

Abbiamo, invero,

$$|f + g|_{p,q} \leq [|f| + |g|]_{p,0} \leq |f|_{p,0} + |g|_{p,0},$$

e perciò (n.° 10, b) e c))

$$\begin{aligned} \int_a^b |f + g|_{p,q} dx &\leq \int_a^b |f|_{p,0} dx + \int_a^b |g|_{p,0} dx \\ &\leq \int_a^b |f| dx + \int_a^b |g| dx, \end{aligned}$$

e (n.° 12) la $|f + g|$ risulta integrabile in (a, b) ; risulta quindi integrabile anche la $f + g$ (a)).

Abbiamo poi, tenendo conto del n.° 10, b),

$$\begin{aligned} &\int_a^b f dx + \int_a^b g dx - \int_a^b (f + g) dx \\ &= \int_a^b f_{p,p} dx + \int_a^b g_{p,p} dx - \int_a^b (f + g)_{2p,2p} dx + \epsilon \\ &= \int_a^b \{ f_{p,p} + g_{p,p} - (f + g)_{2p,2p} \} dx + \epsilon, \end{aligned}$$

dove ϵ tende a zero, per $p \rightarrow \infty$. Ma se $\Delta^{(n)}$ è un plurintervallo associato, di ordine n , tanto della f quanto della g ⁽²⁵⁾, e se p è maggiore del massimo

(25) L'esistenza di $\Delta^{(n)}$ è stata provata nel n.° 6.

modulo delle funzioni associate della f e della g , secondo $\Delta^{(n)}$, l'espressione $f_{p,p} + g_{p,p} - (f+g)_{2p,2p}$ è sempre nulla in (a, b) , tranne nei punti del plurintervallo aperto $\Delta^{(n)}$, ed il modulo del suo integrale, in (a, b) , è (f) uguale al modulo del suo integrale in $\Delta^{(n)}$, e quindi è

$$\leq \int_{\Delta^{(n)}} f_{p,p} + g_{p,p} - (f+g)_{2p,2p} dx < 2 \int_{\Delta^{(n)}} \{ f + g \} dx \quad (26).$$

E siccome l'ultimo integrale scritto è (e) minore di ε , purchè n sia sufficientemente grande, ne viene

$$\left| \int_a^b f dx + \int_a^b g dx - \int_a^b (f+g) dx \right| < 3\varepsilon.$$

e la (3) risulta provata.

h) Si estende immediatamente, anche al caso delle funzioni quasi-continue integrabili, quanto si è provato al n.° 10, *c)*; ed il teorema della media, dato in n.° 10, *d)*, vale pure se la g , invece di essere limitata, si suppone soltanto integrabile, l'integrabilità del prodotto fg risultando qui dalla $|fg| < K |g|$ (dove K è un numero maggiore del massimo modulo della f) e da ciò che si è provato in *a)* e *c)*.

IV. L'operazione di passaggio al limite.

14. Lemma sulle successioni di plurintervalli.

Se $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ è una successione di plurintervalli di (a, b) , ciascuno di lunghezza maggiore di $l > 0$, e se, per ogni n , tutti i punti di Δ_{n+1} appartengono a Δ_n , esiste almeno un punto interno ⁽²⁷⁾ a tutti i Δ_n .

Indichiamo con δ_1 il primo intervallo di Δ_1 tale che la lunghezza della parte di Δ_n in esso contenuta (lunghezza che non cresce col crescere di n) abbia, per $n \rightarrow \infty$, un limite > 0 , che indicheremo con $2l_1$. Il δ_1 esiste sicuramente: ed infatti, se m è un intero positivo, tale che la somma delle lunghezze di tutti gli intervalli di Δ_1 che seguono l'*m*esimo sia $< l:2$, nei primi

⁽²⁶⁾ L'integrabilità di $|f| + |g|$ risulta da quella di $|f|$ e $|g|$, per ciò che già si è dimostrato.

⁽²⁷⁾ Cioè interno ad un intervallo di Δ_n , e ciò per ogni n .

m intervalli di Δ_1 deve essere contenuta una parte di Δ_n di lunghezza $> l:2$, e, pertanto, in uno almeno di questi m intervalli, deve esservi una parte di ogni Δ_n di lunghezza $> l:2m$ ⁽²⁸⁾.

Rappresentiamo con δ_1' l'intervallo concentrico di δ_1 , avente lunghezza uguale a quella di δ_1 diminuita di $l_1:2$. L'intervallo δ_1' risulta *interno* a δ_1 , e in esso vi è, di ciascun Δ_n , una parte di lunghezza $> l_1$.

Ragionando su queste parti, a cominciare da quella di Δ_2 , come dianzi abbiamo fatto sui Δ_n , otteniamo un intervallo δ_2' , contenuto in δ_1' , *interno* ad un intervallo di Δ_2 , e contenente, di ciascun Δ_n , una parte di lunghezza maggiore di un numero $l_2 > 0$. Così proseguendo indefinitamente, costruiamo la successione $\delta_1', \delta_2', \dots, \delta_n', \dots$. Siccome δ_n' contiene δ_{n+1}' , vi è almeno un punto P comune a tutti i δ_n' ; e siccome poi δ_n' è *interno* ad un intervallo di Δ_n , il lemma è dimostrato.

15. Convergenza pressochè uniforme.

Data una successione $f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$ di funzioni definite in (a, b) , diremo che essa converge, in (a, b) , in modo **pressochè uniforme** o **pressochè uniformemente**, se esiste almeno una legge che faccia corrispondere, ad ogni numero intero positivo n , un plurintervallo aperto Δ_n di (a, b) , di lunghezza minore di $1:n$, e tale che, in tutti i punti di (a, b) non ad esso appartenenti, la convergenza della successione risulti uniforme.

Con ciò, la convergenza *uniforme* è un caso particolare di quella *pressochè uniforme*.

16. Teorema sulla convergenza di una successione di funzioni continue ⁽²⁹⁾.

Una successione $f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$, di funzioni continue in (a, b) , la quale converga in tutti i punti dell'intervallo, ivi converge **pressochè uniformemente**.

1°) Siano m ed n due numeri interi, con $n > m > 0$, e indichiamo con $v_{m,n}(x)$ il massimo di $|f_{m+r}(x) - f_{m+s}(x)|$, per tutte le coppie di numeri r e s , interi positivi ed entrambi $\leq n - m$. La $v_{m,n}(x)$ è una funzione continua, in tutto (a, b) , in ogni punto del quale, e per ogni m , è non decrescente al cre-

⁽²⁸⁾ In caso contrario, per ciascuno degli m intervalli indicati, si potrebbe determinare un intero positivo tale che, per n superiore ad esso, la parte di Δ_n contenuta nell'intervallo risultasse di lunghezza $\leq l:2m$. Detto N il maggiore degli m interi, così determinati, per $n > N$ la parte di Δ_n contenuta nei primi m intervalli di Δ_1 sarebbe \leq e non $>$ di $l:2$.

⁽²⁹⁾ Questo teorema, di cui, al n.º seguente, daremo l'estensione alle funzioni *quasi-continue*, fu dato, per le funzioni misurabili del LEBESGUE, da TH. EGOROFF (loc. cit. ⁽³⁾).

scere di n . Il suo limite, per $n \rightarrow \infty$, è finito, essendo convergente, per ipotesi, la successione delle f_m ; e ponendo

$$w_m(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} v_{m,n}(x),$$

abbiamo sempre

$$(1) \quad v_{m,n}(x) \leq w_m(x).$$

Per ogni m , è poi, in tutto (a, b) ,

$$(2) \quad w_m(x) \geq w_{m+1}(x) \geq 0;$$

e siccome la successione delle f_m converge in tutto (a, b) , in tutto questo intervallo è

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_m(x) = 0.$$

2°) Mostriamo ora come, presi ad arbitrio due numeri positivi, ε e σ , si possa determinare un \bar{m} e costruire un plurintervallo aperto Δ , di (a, b) , di lunghezza $< \sigma$, in modo che, in tutti i punti di (a, b) non appartenenti a Δ , sia sempre

$$(4) \quad w_m(x) \leq \varepsilon.$$

Osserviamo, in primo luogo, che, se, per m fisso, \bar{x} è un punto di (a, b) tale che sia $w_m(\bar{x}) > \varepsilon$, questa disuguaglianza vale in tutto un intorno di \bar{x} . Ed infatti, per un n sufficientemente grande, avremo $v_{m,\bar{n}}(\bar{x}) > \varepsilon$; e siccome la $v_{m,\bar{n}}(x)$ è una funzione continua, avremo anche $v_{m,\bar{n}}(x) > \varepsilon$, in tutto un intorno di \bar{x} . In questo intorno varrà, allora, per la (1), la $w_m(x) > \varepsilon$, come avevamo affermato. Da ciò deduciamo che, se la $w_m(x) \leq \varepsilon$ non è soddisfatta in tutto (a, b) , la $w_m(x) > \varepsilon$ è verificata in almeno un intervallo di (a, b) .

Consideriamo tutti gli intervalli di (a, b) , tali che ciascuno di essi risulti costituito di punti *interni* tutti soddisfacenti alla $w_m(x) > \varepsilon$, e non sia contenuto in nessun altro intervallo più ampio, della medesima specie. Due qualunque di questi intervalli possono avere, al più, un solo punto comune (un estremo); possiamo perciò ordinare tutti questi intervalli in un'unica successione, ponendo dapprima quelli (due, al più) di ampiezza non inferiore a $(b-a):2$ — e nell'ordine in cui si presentano in (a, b) —, poi quelli rimanenti (quattro, al più) di ampiezza non inferiore a $(b-a):2^2$, ecc. ecc. Otteniamo così un plurintervallo Δ_m di (a, b) ; e tutti i punti appartenenti a questo plurintervallo Δ_m , considerato *aperto*, e soltanto essi, soddisfano alla $w_m(x) > \varepsilon$.

Osservato che, in virtù della (2), ogni punto di Δ_{m+1} appartiene a Δ_m , ne viene che la lunghezza di Δ_m tende allo zero, per $m \rightarrow \infty$, perchè, in caso contrario, esisterebbe, in forza del lemma del n.° 14, almeno un punto x' interno a tutti i Δ_m , nel quale x' si avrebbe perciò $w_m(x') > \epsilon$, per tutti gli m , contrariamente alla (3).

Scegliamo, allora, \bar{m} uguale al più piccolo valore di m , tale che la lunghezza di Δ_m risulti minore di σ , e prendiamo $\bar{\Delta}$ coincidente con $\Delta_{\bar{m}}$: con ciò la lunghezza di $\bar{\Delta}$ risulta $< \sigma$, e, in tutti i punti di (a, b) non appartenenti al $\bar{\Delta}$ aperto, vale sempre la (4).

3°) Posto $\epsilon = 1:n$ e $\sigma = 1:2^n$, indichiamo con m_n e $\bar{\Delta}_n$, rispettivamente, il numero \bar{m} e il plurintervallo aperto $\bar{\Delta}$, determinati, secondo quando si è detto in 2°), in corrispondenza degli attuali valori di ϵ e σ . Ordiniamo poi in un'unica successione (30) tutti gli intervalli degli infiniti plurintervalli aperti $\bar{\Delta}_n, \bar{\Delta}_{n+1}, \dots$, e indichiamo con Δ_n il plurintervallo aperto dedotto, dalla successione così ottenuta, col procedimento dato al n.° 5. Ogni punto di ciascuno dei plurintervalli aperti $\bar{\Delta}_n, \bar{\Delta}_{n+1}, \dots$ appartiene allora al plurintervallo aperto Δ_n , e la lunghezza di questo Δ_n , non potendo, per costruzione, superare la lunghezza complessiva di tutti gli intervalli della successione da cui è stato dedotto, non supera quella complessiva di $\bar{\Delta}_n, \bar{\Delta}_{n+1}, \dots$, e cioè è minore di

$$(1:2^n) + (1:2^{n+1}) + \dots = 1:2^{n-1} \leq 1:n.$$

Inoltre, preso ad arbitrio un $\eta > 0$, e indicato con p un intero positivo, tale che sia $1:(n+p) < \eta$, in tutti i punti di (a, b) non appartenenti al plurintervallo aperto $\bar{\Delta}_{n+p}$ — e quindi, *a fortiori*, in tutti quelli di (a, b) non appartenenti al plurintervallo aperto Δ_n — è, ponendo $m_{n+p} = m'$,

$$w_m(x) \leq 1:(n+p) < \eta,$$

e perciò anche

$$|f_{m'+r}(x) - f_{m'+s}(x)| < \eta,$$

qualunque siano i numeri, interi e positivi, r e s . Ciò prova la convergenza uniforme della successione delle f_m , in tutti i punti di (a, b) non appartenenti al plurintervallo aperto Δ_n (il quale, come si è detto, è di lunghezza $< 1:n$); ed è così dimostrata la convergenza *pressochè uniforme* della successione considerata.

(30) Seguendo un metodo che conserveremo inalterato per tutti i valori di n .

17. Estensione del teorema precedente alle successioni di funzioni quasi-continue.

a) La proposizione dimostrata nel n.° precedente vale anche se le funzioni f_m , della successione considerata, anzichè essere *continue*, sono, in (a, b) , soltanto *quasi-continue*.

Premettiamo che, *considerando una successione $f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$ di funzioni quasi-continue in (a, b) , intenderemo sempre che esista almeno una legge la quale faccia corrispondere, ad ogni coppia di numeri interi positivi, n e m , un plurintervallo aperto $\Delta_m^{(n)}$, di (a, b) , associato, di ordine n , della f_m .*

Allora, se riuniamo in un'unica successione tutti gli intervalli degli infiniti plurintervalli $\Delta_1^{(2^n)}, \Delta_2^{(2^{n+1})}, \dots, \Delta_m^{(2^{n+m-1})}, \dots$, e indichiamo con $\Delta^{(n)}$ il plurintervallo da essa dedotto, col metodo del n.° 5, questo plurintervallo risulta *associato*, di ordine n , di tutte le funzioni f_m . Costruita la successione delle funzioni associate delle f_m , relative tutte al plurintervallo $\Delta^{(n)}$,

$$(1) \quad \Delta^{(n)}f_1, \Delta^{(n)}f_2, \dots, \Delta^{(n)}f_m, \dots,$$

questa successione di funzioni continue risulta convergente in tutto (a, b) , se ivi è convergente la successione delle f_m , e, col metodo dato al n.° precedente, possiamo determinare la successione $\Delta_{n,1}, \Delta_{n,2}, \dots, \Delta_{n,r}, \dots$ di plurintervalli aperti, tali che $\Delta_{n,r}$ sia di lunghezza minore di $1:r$ e che, in tutti i punti di (a, b) non appartenenti ad esso, la convergenza della (1) sia uniforme.

Formiamo, dopo di ciò, un'unica successione con tutti gli intervalli di $\Delta^{(2^n)}$ e $\Delta_{2n,2n}$, e indichiamo con Δ_n il plurintervallo da essa dedotto col metodo del n.° 5. La lunghezza di Δ_n risulta minore di $1:n$, e, nei punti di (a, b) non appartenenti al Δ_n aperto, la funzione $\Delta^{(2n)}f_m$ converge uniformemente per $m \rightarrow \infty$, mentre resta sempre uguale a f_m ; dunque, negli stessi punti, converge uniformemente anche la successione delle f_m , la quale converge perciò, in (a, b) , in modo *pressochè uniforme* ⁽³¹⁾.

b) Possiamo ottenere un'ulteriore estensione di quanto abbiamo dimostrato nel n.° precedente.

Premettiamo una definizione. Diremo che una certa proprietà è verificata *in quasi-tutto l'intervallo (a, b)* , se esiste almeno una legge che faccia corrispondere, ad ogni numero intero positivo n , un plurintervallo aperto Δ_n , di (a, b) , di lunghezza minore di $1:n$, contenente tutti i punti di (a, b) in cui la

⁽³¹⁾ Osserviamo che, per la sua costruzione, Δ_n è un plurintervallo associato, d'ordine n , di ogni funzione f_m .

proprietà in questione non è verificata, esclusi quelli eventualmente coincidenti con a o con b , i quali dovranno però appartenere al Δ_n , considerato chiuso.

Dopo di ciò, possiamo dire che la proposizione dimostrata in a) vale anche se la successione delle f_m , anzichè convergere *in tutto* (a, b) , converge soltanto *in quasi-tutto* l'intervallo medesimo. Per esserne certi, detto Δ_n il plurintervallo corrispondente, secondo la definizione data sopra, alla convergenza della successione delle f_m , basta osservare che, se, nel ragionamento fatto in a), il plurintervallo $\Delta^{(n)}$ lo deduciamo, nel modo indicato, non da $\Delta_1^{(2^n)}$, $\Delta_2^{(2^{n+1})}$, ..., ma da Δ_{2^n} , $\Delta_1^{(2^{n+1})}$, $\Delta_2^{(2^{n+2})}$, ..., la (1) (cambiando, ove occorra, i valori delle f_m in a e in b) risulta ancora convergente in tutto (a, b) .

Possiamo dunque enunciare il seguente teorema generale:

Una successione di funzioni quasi-continue in (a, b) , la quale sia convergente in quasi-tutto l'intervallo, ivi converge pressochè uniformemente.

18. Il passaggio al limite nel campo delle funzioni quasi-continue.

La funzione limite f di una successione di funzioni quasi-continue in (a, b) , $f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$, convergente in quasi-tutto l'intervallo, è anch'essa quasi-continua in (a, b) ⁽³²⁾.

Riprendiamo il plurintervallo Δ_n , costruito nel n.º precedente (tenendo conto di quanto ivi si è detto in b)), e osserviamo che esso è un plurintervallo associato, di ordine n , di ciascuna f_m , e che la successione delle corrispondenti funzioni associate $\Delta_n f_m$ ($m = 1, 2, \dots$) converge uniformemente in tutto (a, b) . Queste funzioni associate essendo continue, la loro funzione limite è pure continua; e poichè quest'ultima coincide, fuori del Δ_n , con la f , ne viene che Δ_n è un plurintervallo associato, di ordine n , anche della f , e che tale funzione è quasi-continua in (a, b) .

Dalla proposizione ora dimostrata (tenendo presente quella del n.º 6) segue che, *partendo da funzioni quasi-continue (in particolare, da funzioni continue) in (a, b) , e operando, su di esse e sulle funzioni che via via si vengono formando, un numero finito di addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni (con divisore $\neq 0$) e di passaggi al limite (i quali diano sempre valori finiti in quasi-tutto l'intervallo (a, b)), si ottengono sempre funzioni quasi-continue.*

Questo mostra quanto sia ampia la classe delle funzioni quasi-continue.

⁽³²⁾ La funzione f risulta definita, come limite di f_m , in quasi-tutto (a, b) . Nei punti in cui la successione delle f_m non converge, si potrà assumere per la f un valore arbitrario.

19. Il passaggio al limite e l'integrale.

a) Se $f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$ è una successione di funzioni quasi-continue in (a, b) , ivi convergente, in quasi-tutto l'intervallo, verso una funzione f , e se tutte le funzioni qui considerate restano, in modulo, sempre inferiori ad uno stesso numero M , allora è

$$(1) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f_m dx = \int_a^b f dx \quad (33).$$

Osserviamo, in primo luogo, che la funzione f è quasi-continua in (a, b) , per quanto si è dimostrato nel n.° precedente. Poi, considerato nuovamente il plurintervallo aperto Δ_n , già adoperato al n.° citato, per quello che ivi abbiamo detto la successione delle funzioni associate $\Delta_n f_m (m = 1, 2, \dots)$ converge uniformemente, in tutto (a, b) , alla $\Delta_n f$, ed è perciò, per $m \rightarrow \infty$,

$$\int_a^b \Delta_n f_m dx \rightarrow \int_a^b \Delta_n f dx.$$

E siccome è, per il lemma del n.° 13, f ,

$$\left| \int_a^b f_m dx - \int_a^b \Delta_n f_m dx \right| = \left| \int_{\Delta_n} (f_m - \Delta_n f_m) dx \right| < 2M:n,$$

$$\left| \int_a^b f dx - \int_a^b \Delta_n f dx \right| < 2M:n,$$

ne viene, per ogni m sufficientemente grande,

$$\left| \int_a^b f_m dx - \int_a^b f dx \right| < 6M:n,$$

e quindi, n essendo arbitrario, la (1).

(33) Questo teorema fu dato, per le funzioni soddisfacenti alla condizione di integrabilità di RIEMANN, da C. ARZELÀ (*Sull' integrazione per serie*, Rend. R. Accad. Lincei, V. I, 1885, pag. 532), e per quelle misurabili secondo il LEBESGUE, dal LEBESGUE medesimo (*Intégrale, longueur, aire*, « Annali di Matematica », 1902).

b) Se $f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$ è una successione di funzioni quasi-continue e integrabili, in (a, b) , ivi convergente, in quasi-tutto l'intervallo, verso una funzione f , e se, preso, ad arbitrio, un $\varepsilon > 0$, si può sempre determinare un $\sigma > 0$, in modo che la disuguaglianza

$$(2) \quad \int_{\Delta} |f_m| dx < \varepsilon$$

valga, qualunque sia m , per tutti i plurintervalli di (a, b) di lunghezza minore di σ , allora la f è integrabile in (a, b) , ed è

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f_m dx = \int_a^b f dx \quad (34).$$

La funzione f è quasi-continua (n.º 18), e, considerati due numeri positivi qualunque, p e q , è, per $m \rightarrow \infty$, $[f_m]_{p, q} \rightarrow f_{p, q}$ (35), in quasi-tutto (a, b) , e perciò, per il teorema dato in a), se $m \rightarrow \infty$,

$$\int_a^b [f_m]_{p, q} dx \rightarrow \int_a^b f_{p, q} dx.$$

Sia Δ_n ancora il plurintervallo adoperato in a), e indichiamo con N il massimo modulo della funzione associata $\Delta_n f$. È, in virtù della convergenza uniforme di $\Delta_n f_m$, per ogni m maggiore di un certo \bar{m} , e in tutti i punti di (a, b) , non appartenenti al plurintervallo aperto Δ_n , $|f_m - f| < 1$, e quindi, negli stessi punti, quando sia $p > N + 1$ e $q > N + 1$, $f_m - [f_m]_{p, q} = 0$. È perciò, in forza del teorema del n.º 13, f), se $m > \bar{m}$, $p > N + 1$, $q > N + 1$,

$$\left| \int_a^b f_m dx - \int_a^b [f_m]_{p, q} dx \right| = \left| \int_{\Delta_n} \{f_m - [f_m]_{p, q}\} dx \right|$$

ed anche, per la (2), se è $1/n < \sigma$,

$$< 2\varepsilon.$$

Abbiamo dunque

$$\left| \int_a^b f_m dx - \int_a^b f_{p, q} dx \right| < 3\varepsilon,$$

(34) Questo teorema fu dato per la prima volta (per le funzioni misurabili del Lebesgue), da G. VITALI (Sull' integrazione per serie, Rend. Circolo Matem. di Palermo, t. XXIII, 1907).

(35) Notazioni del n.º 12.

quando m , p e q siano sufficientemente grandi. Da ciò segue che l'integrale della $f_{p,q}$ resta, qualunque siano p e q , inferiore, in modulo, ad un numero fisso, e che perciò (n.° 12) la f è integrabile in (a, b) ; e, per la definizione stessa di integrale, segue pure

$$\left| \int_a^b f_m dx - \int_a^b f dx \right| \leq 3\varepsilon,$$

la quale disuguaglianza dimostra il teorema enunciato.

c) Notiamo che la condizione espressa dalla (2) è sicuramente soddisfatta se esiste una funzione $\varphi(x)$, quasi-continua e integrabile in (a, b) , tale che, in questo intervallo, si abbia sempre, per ogni m , $|f_m(x)| \leq \varphi(x)$. Ed infatti, se σ è sufficientemente piccolo, è (n.° 13, e)

$$\int_{\Delta} |\varphi| dx < \varepsilon,$$

qualunque sia il plurintervallo Δ di (a, b) , purchè di lunghezza $< 1/n$. Di qui segue, senz'altro, la (2).

d) Altrettanto può dirsi se la f_m , in ogni punto di (a, b) , è non negativa e va non decrescendo, al crescere di m , e se, di più esiste un numero L , indipendente da m , tale che sia sempre $\int_a^b f_m dx < L$ ⁽³⁶⁾. In primo luogo, poichè

l'integrale, in (a, b) , di f_m , risulta non decrescente al crescere di m , esiste il limite di tale integrale, per $m \rightarrow \infty$. Poi, sempre per $m \rightarrow \infty$, è $[f_m]_{p,q} \rightarrow f_{p,q}$, in quasi-tutto (a, b) , e perciò l'integrale in (a, b) di $[f_m]_{p,q}$ tende a quello di $f_{p,q}$. Dunque, per un m sufficientemente grande, è

$$\begin{aligned} (0 \leq) \int_a^b f_{p,q} dx &< 1 + \int_a^b [f_m]_{p,q} dx \\ &< 1 + \int_a^b f_m dx < 1 + L, \end{aligned}$$

e la f risulta integrabile. E siccome è, in tutto (a, b) , $f_m \leq f$, non resta che applicare la proposizione c).

⁽³⁶⁾ B. LEVI, *Sopra l'integrazione delle serie* (Rend. R. Ist. Lombardo, vol. XXXIX, (1906)), pag. 775.

e) La condizione (2) è ancora sicuramente soddisfatta se f_m^2 è integrabile ed esiste un numero L , indipendente da m , tale che sia sempre

$$\int_a^b f_m^2 dx < L \quad (37). \text{ Ed infatti, è, se } p > 0,$$

$$\int_{\Delta} |f_m| dx \leq \frac{1}{p} \int_{\Delta} (p^2 + |f_m|^2) dx \leq p\Delta + \frac{L}{p}$$

ed anche, se è $p = 2L:\varepsilon$ e $\Delta < \varepsilon^2:4L$,

$$< \varepsilon.$$

V. Integrazione per parti e per sostituzione.

20. Integrazione per parti.

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni quasi-continue e integrabili in (a, b) , posto

$$F(x) \equiv c_1 + \int_a^x f(x) dx, \quad G(x) \equiv c_2 + \int_a^x g(x) dx,$$

con c_1 e c_2 costanti, si ha

$$(1) \quad \int_a^b F(x)g(x) dx = \{F(b)G(b) - F(a)G(a)\} - \int_a^b G(x)f(x) dx.$$

1°) Supponiamo, dapprima, che $f(x)$ e $g(x)$ siano entrambe limitate, in (a, b) . Scelta una successione $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(n)}, \dots$ di plurintervalli, di (a, b) , associati tanto della $f(x)$ quanto della $g(x)$ (38), degli ordini rispettivi $1, 2, \dots, n, \dots$, disponiamo in un'unica successione tutti gli intervalli degli infiniti plurintervalli $\Delta^{(2^n)}, \Delta^{(2^{n+1})}, \dots, \Delta^{(2^{n+r})}, \dots$, e indichiamo con Δ_n il plurintervallo dedotto, da tale successione, col metodo del n.° 5. Δ_n ha lunghezza $< 1:n$, ed è perciò, e per la sua costruzione, un plurintervallo associato, di ordine n , di entrambe le funzioni $f(x)$ e $g(x)$. Ogni punto del Δ_{n+1} , aperto appartiene poi al Δ_n aperto.

(37) F. RIESZ, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions* (Comptes rendus, t. 144, 1907, pag. 615).

(38) Cfr. n.° 6.

Se dunque formiamo le funzioni associate $\Delta_n f$ e $\Delta_n g$, e le indichiamo con f_n e g_n , queste funzioni (continue) sono tali da convergere rispettivamente verso le f e g , in ogni punto di (a, b) che non appartiene a tutti i plurintervalli Δ_n ($n = 1, 2, \dots$). Con ciò possiamo dire che f_n e g_n convergono, in quasi-tutto (a, b) , verso f e g , rispettivamente. E se poniamo

$$F_n(x) \equiv c_1 + \int_a^x f_n dx, \quad G_n(x) \equiv c_2 + \int_a^x g_n dx,$$

le F_n e G_n convergono (n.° 19, a)), in tutto (a, b) , rispettivamente verso F e G . Ora la (1) vale per le funzioni f_n e g_n , F_n e G_n , che sono tutte continue, e quindi, passando al limite, per $n \rightarrow \infty$, la (1) resta dimostrata, nel caso qui considerato, in virtù del teorema del n.° 19, a).

2°) Passiamo ora al caso generale delle funzioni f e g supposte soltanto quasi-continue e integrabili. Poniamo

$$F_p(x) \equiv c_1 + \int_a^x f_{p,p} dx, \quad G_p(x) \equiv c_2 + \int_a^x g_{p,p} dx \quad (39).$$

Le funzioni $f_{p,p}$ e $g_{p,p}$ convergono, per $p \rightarrow \infty$, in tutto (a, b) , rispettivamente verso f e g ; e F_p e G_p convergono verso F e G , per la definizione stessa di integrale del n.° 12. Ma siccome $f_{p,p}$ e $g_{p,p}$ sono limitate, per esse e per le F_p e G_p , vale la (1), in virtù di quanto abbiamo stabilito in 1°); dunque, passando al limite, per $p \rightarrow \infty$, otteniamo la (1), applicando il teorema del n.° 19, b), e tenendo presenti l'osservazione fatta in n.° 19, c), e le disuguaglianze

$$F_p g_{p,p} \leq M |g|, \quad |G_p f_{p,p}| \leq M |f|,$$

valide in tutto (a, b) , se M indica il maggiore dei due numeri

$$|c_1| + \int_a^b |f| dx, \quad |c_2| + \int_a^b |g| dx.$$

21. Funzioni a integrale sempre nullo.

Per stabilire il teorema di integrazione per sostituzione, nella forma generale in cui lo daremo al n.° seguente, ci occorre un lemma, che ci servirà anche in appresso.

(39) Per le notazioni $f_{p,p}$ e $g_{p,p}$, vedi il n.° 12.

Se la funzione $f(x)$, quasi-continua e integrabile in (a, b) , soddisfa, per ogni x di questo intervallo, alla uguaglianza

$$(1) \quad \int_a^x f(x) dx = 0,$$

è $f(x) = 0$, in quasi-tutto (a, b) .

Sia $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(n)}, \dots$ una successione di plurintervalli di (a, b) , associati della $f(x)$, degli ordini rispettivi $1, 2, \dots, n, \dots$. Considerato un numero intero $r > 0$, costruiamo il plurintervallo aperto $\Delta_{r, n}$, formato con tutti i punti, diversi da a e b , in cui è $\Delta^{(n)} f > 1:r$. Per la (1), l'integrale della $f(x)$, in ogni intervallo di (a, b) , è sempre nullo; abbiamo perciò

$$(2) \quad 0 = \int_{\Delta_{r, n}} f dx \geq \frac{1}{r} \Delta_{r, n} - \frac{1}{r} \Delta^{(n)} - \int_{\Delta^{(n)}} |f| dx,$$

dove abbiamo indicato con $\Delta_{r, n}$ e $\Delta^{(n)}$ anche le lunghezze dei plurintervalli considerati. Scegliamo n uguale al minimo intero $\geq 4r$, e tale che

$$\int_{\Delta^{(n)}} |f| dx < 1:4r^2.$$

Avremo allora, dalla (2),

$$0 \geq \frac{1}{r} \left(\Delta_{r, n} - \frac{1}{2r} \right),$$

donde $\Delta_{r, n} \leq 1:2r$.

Ogni punto di (a, b) , distinto da a e b , in cui è $f(x) > 1:r$, appartiene ad uno almeno dei due plurintervalli aperti $\Delta_{r, n}$ e $\Delta^{(n)}$, e quindi anche al plurintervallo aperto Δ_r , di lunghezza $< 1:r$, che otteniamo disponendo in un'unica successione tutti gli intervalli di $\Delta_{r, n}$ e $\Delta^{(n)}$, e operando poi col procedimento del n.° 5.

Disponiamo, ora, in un'unica successione tutti gli intervalli degli infiniti plurintervalli $\Delta_2^m, \Delta_2^{m+1}, \dots$, e indichiamo con Δ_m^* il plurintervallo ottenuto operando poi col procedimento del n.° 5. La lunghezza di Δ_m^* è minore di $1:m$, e tutti i punti di (a, b) , distinti da a e b , in cui è $f(x) > 0$, appartengono al Δ_m^* aperto; dunque è, in quasi-tutto (a, b) , $f(x) \leq 0$. E siccome, nello stesso modo, si prova che è, in quasi-tutto (a, b) , $f(x) \geq 0$, ne risulta dimostrato il lemma enunciato.

22. Integrazione per sostituzione.

Sia $\varphi(t)$ una funzione quasi-continua e integrabile in (t_0, t_1) , e posto

$$\Phi(t) \equiv c + \int_{t_0}^t \varphi(t) dt,$$

si abbia, in tutto (t_0, t_1) , $a \leq \Phi(t) \leq b$. Sia poi $f(x)$ una funzione quasi-continua e integrabile in (a, b) . Se il prodotto $f(\Phi(t))\varphi(t)$ è integrabile in (t_0, t_1) , posto $\Phi(t_0) = x_0$ e $\Phi(t_1) = x_1$ è

$$(1) \quad \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\Phi(t))\varphi(t) dt \quad (40).$$

1°) Supponiamo, dapprima, che la funzione $f(x)$ sia continua e la $\varphi(t)$ quasi-continua e limitata. Costruiamo (analogamente a quanto abbiamo fatto in n.° 20, 1°), per le funzioni f e g una successione $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ di funzioni continue in (t_0, t_1) , convergenti verso la φ in quasi-tutto questo intervallo, e tali da restare, in modulo, sempre inferiori ad uno stesso numero. La funzione

$$\Phi_n(t) \equiv c + \int_{t_0}^t \varphi_n dt,$$

converge (n.° 19, a)), in tutto (t_0, t_1) , verso la $\Phi(t)$; e siccome la (1) vale per f e φ entrambe continue (41), posto in essa Φ_n e φ_n , in luogo di Φ e φ , e passando al limite, per $n \rightarrow \infty$ (42), otteniamo (applicando il teorema del n.° 19, a)) la (1), per le funzioni f e φ qui considerate.

2°) Sia ancora la $f(x)$ continua, mentre la $\varphi(t)$ sia soltanto quasi-continua e integrabile. Poniamo

$$\Phi_p(t) \equiv c + \int_{t_0}^t \varphi_{p,p} dt \quad (43).$$

(40) Questo teorema, nella forma generale del testo, fu dato, per le funzioni f e φ integrabili nel senso del LEBESGUE, da CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN (*Cours d'Analyse*, T. I, 3^e édit., p. 283).

(41) In tal caso la formula (1) si prova cambiando x_1 e t_1 , rispettivamente, in $\varphi(t)$ e t , e derivando i due membri, rispetto a t .

(42) Qualora non sia sempre $a \leq \Phi_n \leq b$, in (t_0, t_1) , si porrà, fuori di (a, b) , $f(x) \equiv 0$.

(43) Notazione del n.° 12.

Per $p \rightarrow \infty$, $\varphi_{p,p}$ e Φ_p tendono, rispettivamente a φ e Φ , e siccome, per quanto abbiamo già dimostrato, la (1) vale per $\varphi_{p,p}$ e Φ_p , in luogo di φ e Φ , passando al limite, per $p \rightarrow \infty$, otteniamo (per ciò che si è stabilito nel n.° 19, b) e c)) la (1), anche nel caso attuale.

3°) Supponiamo ora la $f(x)$ quasi-continua e limitata, e la $\varphi(t)$ quasi-continua e integrabile. Scegliamo una successione $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(m)}, \dots$ di plurintervalli di (a, b) , associati della $f(x)$, rispettivamente degli ordini $1, 2, \dots, n, \dots$, e tali che il $\Delta^{(n+1)}$, aperto, sia tutto contenuto nel $\Delta^{(n)}$ aperto ⁽⁴⁾. La corrispondente successione delle funzioni associate, indichiamola con $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ È, per il caso precedente,

$$(2) \quad \int_{x_0}^{x_1} f_n dx = \int_{t_0}^{t_1} f_n(\Phi(t)) \varphi(t) dt.$$

Osserviamo ora che, con successive deformazioni, possiamo passare, dalla funzione f_n , alla funzione f_n^* , avente il valore 1 nel plurintervallo aperto $\Delta^{(n)}$ e coincidente con la f_n negli altri punti, oppure anche alla funzione f_n^{**} , nulla nel plurintervallo aperto $\Delta^{(n)}$ e coincidente con la f_n altrove. E poichè, questo passaggio può essere fatto in modo che le funzioni restino sempre comprese fra due limiti fissi, avremo

$$\int_{x_0}^{x_1} f_n^* dx = \int_{t_0}^{t_1} f_n^*(\Phi(t)) \varphi(t) dt,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f_n^{**} dx = \int_{t_0}^{t_1} f_n^{**}(\Phi(t)) \varphi(t) dt.$$

La differenza fra i primi membri di queste disuguaglianze è $\leq \int_{\Delta^{(n)}} dx < 1:n$, e, pertanto, sottraendo fra loro i secondi membri, abbiamo

$$\int_{\Delta^{(n)}} \varphi(t) dt < 1:n,$$

⁽⁴⁾ Data una successione di plurintervalli associati della $f(x)$, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m, \dots$, degli ordini rispettivi $1, 2, \dots, m, \dots$, si formi un'unica successione con tutti gli intervalli di $\Delta_2^n, \Delta_2^{n-1}, \dots$ e si indichi con $\Delta^{(n)}$ il plurintervallo da essa dedotto col procedimento del n.° 5. La successione dei $\Delta^{(n)}$ risponde ai requisiti di quella del testo.

dove $\Delta_t^{(m)}$ indica il plurintervallo aperto di (t_0, t_1) , corrispondente, secondo la $x = \Phi(t)$, a $\Delta^{(m)}$.

Siccome $\Delta^{(m)}$ contiene $\Delta^{(n+1)}$, anche $\Delta_t^{(m)}$ contiene $\Delta_t^{(n+1)}$. Indichiamo, allora, con E l'insieme dei punti che appartengono a tutti i $\Delta_t^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$). Indichiamo poi con $\varphi_n(t)$ la funzione coincidente con $\varphi(t)$ in $\Delta_t^{(n)}$, e nulla altrove, e con $\varphi_*(t)$ quella coincidente con la $\varphi(t)$ in E , e nulla altrove. È, in ogni punto di (t_0, t_1) , $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi_*(t)$, per $n \rightarrow \infty$, e perciò, essendo (n.° 13, f))

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi_n(t) dt = \int_{\Delta_t^{(n)}} \varphi dt < 1/n,$$

e $|\varphi_n(t)| \leq |\varphi(t)|$, è

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi_*(t) dt = 0.$$

Questa uguaglianza vale anche se, al posto di t_1 , poniamo un t qualsiasi di (t_0, t_1) ; dunque, per il teorema del n.° precedente, la $\varphi_*(t)$ è nulla in quasi-tutto (t_0, t_1) .

Dopo di ciò, ritorniamo alla (2), e, in essa, operiamo il passaggio al limite, per $n \rightarrow \infty$. Il primo membro tende all'integrale, in (x_0, x_1) , della $f(x)$, per la definizione stessa del n.° 9. Nel secondo membro, la funzione $f_n(\Phi(t))\varphi(t)$ converge verso la $f(\Phi(t))\varphi(t)$ in tutti i punti non appartenenti a $\Delta_t^{(m)}$, e quindi in tutti quelli non appartenenti ad E . E siccome, nei punti di E , è $\varphi = \varphi_*$, e la φ_* è nulla in quasi-tutto (t_0, t_1) , ne viene che $f_n(\Phi)\varphi(t)$ converge, in quasi-tutto (t_0, t_1) , verso $f(\Phi)\varphi(t)$, e che questo prodotto è una funzione quasi-continua (n.° 18). Essendo poi sempre $|f_n(\Phi)\varphi(t)| < M|\varphi(t)|$, dove M indica un numero maggiore del massimo modulo della $f(x)$ in (a, b) , il passaggio al limite, nella (2), dà la (1) (in virtù del n.° 19, b) e c)).

4°) Supponiamo, infine, le $f(x)$ e $\varphi(t)$ quasi-continue e integrabili, rispettivamente, in (a, b) e (t_0, t_1) . Abbiamo, per 3°),

$$\int_{x_0}^{x_1} f_{n,n}(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f_{n,n}(\Phi(t))\varphi(t) dt,$$

dove $f_{n,n}$ è, come al solito, la funzione coincidente con la f ove è $-n \leq f \leq n$, $= -n$ ove $f < -n$, $= n$ ove $f > n$. L'integrale del primo membro di questa uguaglianza tende, per $n \rightarrow \infty$, all'integrale della f , per la definizione stessa del n.° 12; e poichè $f_{n,n}(\Phi(t))\varphi(t)$ converge, in tutto (t_0, t_1) , verso $f(\Phi(t))\varphi(t)$,

questo prodotto è una funzione quasi-continua in (t_0, t_1) . Essendo poi sempre $|f_{n,n}(\Phi(t))\varphi(t)| \leq |f(\Phi(t))\varphi(t)|$, l'ipotesi, ammessa nell'enunciato, che $f(\Phi(t))\varphi(t)$ sia integrabile, dà, (n.° 19, b) e c)) la (1).

Osservazione. Va rilevato che, se la funzione quasi-continua $f(x)$ è limitata, l'ipotesi che $f(\Phi(t))\varphi(t)$ sia integrabile, in (t_0, t_1) , è superflua, perchè tale integrabilità risulta provata da quanto abbiamo detto in 3°).

La stessa ipotesi risulta superflua anche nel caso in cui sia sempre $\varphi(t) \geq 0$ o sempre $\varphi(t) \leq 0$ (e quindi $\Phi(t)$ sempre non decrescente o sempre non crescente). Ed infatti, posto $|f|_n = |f|$ ove è $|f| \leq n$, e $|f|_n = n$ altrove, abbiamo

$$\int_{x_0}^{x_1} |f|_n dx = \int_{t_0}^{t_1} |f(\Phi)|_n \varphi dt;$$

e siccome il primo membro tende, non decrescendo, all'integrale della $|f|$ in (x_0, x_1) , il secondo membro resta sempre minore o uguale a tale integrale, mentre la funzione $|f(\Phi)|_n \varphi$ è sempre ≥ 0 (oppure ≤ 0) e tende non decrescendo (oppure non crescendo), per $n \rightarrow \infty$, a $|f(\Phi)| \varphi$, in tutto (t_0, t_1) . Il prodotto $|f(\Phi)| \varphi$ risulta, pertanto, integrabile, per quanto si è detto al n.° 19, d); e integrabile risulta anche $f(\Phi)\varphi$.

VI. Integrazione e derivazione.

23. Funzioni a variazione limitata e funzioni assolutamente continue.

Rammentiamo che una funzione $f(x)$, data in (a, b) , dicesi (JORDAN) a *variazione limitata*, in tale intervallo, se, considerata una qualsiasi suddivisione di (a, b) in parti, mediante i punti $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$, la somma $\sum_1^n |f(a_r) - f(a_{r-1})|$ resta sempre inferiore ad uno stesso numero L . Il limite superiore di tutte le possibili somme così formate, dicesi *variazione totale* della $f(x)$, in (a, b) . Si dimostra (teorema di LEBESGUE) che ogni funzione continua, a variazione limitata in (a, b) , ammette derivata finita in quasi-tutto l'intervallo indicato (45).

(45) Per una dimostrazione diretta di questa proposizione, indipendente dalla teoria della misura e dell'integrale del LEBESGUE, vedi, per es., i miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. I, pag. 58.

Rammentiamo anche che una funzione $f(x)$, data in (a, b) , dicesi (VITALI) *assolutamente continua*, in tale intervallo, se, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è sempre possibile di determinare un $\sigma > 0$, in modo che, se (a_i, b_i) ($i = 1, 2, \dots, m$) è un gruppo di un numero qualunque di intervalli di (a, b) , non sovrappoventisi, e tali che sia $\sum_1^m (b_i - a_i) < \sigma$, risulti sempre $\sum_1^m |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$. Si dimostra facilmente che, se la $f(x)$ è assolutamente continua, in (a, b) , è ivi anche continua e a variazione limitata.

24. Integrabilità della derivata di una funzione continua, a variazione limitata.

Sia $f(x)$ una funzione continua e a variazione limitata in (a, b) , e indichiamo con $f'(x)$ la funzione che è uguale alla derivata della $f(x)$, in tutti i punti di (a, b) in cui tale derivata esiste finita, e uguale allo zero altrove.

La $f'(x)$ è una funzione quasi-continua, in (a, b) . Ed infatti, essa è, per il teorema del LEBESGUE, rammentato nel n.° precedente, la funzione limite di $n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$ (funzione continua), in quasi-tutto (a, b) , e la sua quasi-continuità scende dal teorema del n.° 18.

La $f'(x)$ è integrabile, in (a, b) ⁽⁴⁶⁾. Dividiamo l'intervallo (a, b) in m parti uguali, mediante i punti $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_m = b$, e indichiamo con $\varphi_m(x)$ l'ordinata della poligonale Π_m inscritta nella curva $y = f(x)$ ed avente i vertici successivi ordinatamente nei punti della curva di ascisse $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$. La derivata $\varphi_m'(x)$ (che sarà sostituita dalla derivata destra nei punti a_i), per $m \rightarrow \infty$, tende, in ogni punto \bar{x} di (a, b) in cui esiste la derivata $f'(\bar{x})$, a questa derivata. Ed infatti, congiungiamo il punto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ con i due vertici della Π_m da esso distinti, le cui ascisse sono le più prossime a \bar{x} . Queste congiungenti, per $m \rightarrow \infty$, tendono a sovrapporsi alla tangente in $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ alla curva $y = f(x)$; e poichè fra le loro direzioni è sempre compresa quella $\varphi_m'(\bar{x})$ del lato corrispondente di Π_m , ne viene, per $m \rightarrow \infty$, $\varphi_m'(\bar{x}) \rightarrow f'(\bar{x})$. Dunque la $\varphi_m'(x)$ converge verso la $f'(x)$ in quasi-tutto (a, b) , e, in tale intervallo, vi converge anche pressochè uniformemente (n.° 17).

Sia, ora, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ una successione di plurintervalli aperti di (a, b) , tali che Δ_n abbia lunghezza $< 1/n$, e che, in tutti i punti di (a, b) , non ad esso appartenenti, la $\varphi_m'(x)$ converga uniformemente verso la $f'(x)$. Preso ad

(46) Cfr. H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration etc.* (Paris, 1904), pag. 128-129.

arbitrio un $\varepsilon > 0$, sia m_n il più piccolo valore di m tale che, fuori del Δ_n , sia sempre $|\varphi'_{m_n}(x) - f'(x)| < \varepsilon$. Considerato poi un intero positivo p , qualunque, sia $|f'|_p$ la funzione $= |f'|$ dove $|f'| \leq p$, e $= p$ dove $|f'| > p$. Fuori di Δ_n , è $|f'|_p < |\varphi'_{m_n}| + \varepsilon$, e in Δ_n è $|f'|_p \leq p < p + |\varphi'_{m_n}| + \varepsilon$. È dunque

$$\int_a^b |f'|_p dx < p \frac{1}{n} + \int_a^b |\varphi'_{m_n}| dx + \varepsilon(b-a).$$

Ora l'integrale della $|\varphi'_{m_n}|$, che qui figura, rappresenta la variazione totale della φ_{m_n} in (a, b) , la quale non può superare quella V della f . Se dunque scegliamo n in modo che sia $p:n < 1$, abbiamo

$$\int_a^b |f'|_p dx < 1 + V + \varepsilon(b-a),$$

e siccome il secondo membro di questa disuguaglianza è indipendente da p , la f' risulta integrabile in (a, b) .

25. Integrale della derivata di una funzione assolutamente continua.

La funzione $f(x)$ sia supposta assolutamente continua in (a, b) . Riprendiamo la poligonale Π_m e la successione $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$, considerate al n.° precedente. Scegliamo poi un $\varepsilon > 0$ e determiniamo un intero positivo r , tale che, in ogni gruppo di un numero finito di intervalli (a_i, b_i) , di (a, b) , non sovrappontentisi, di lunghezza complessiva $< 1:r$, valga la

$$(1) \quad \Sigma |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Ciò fatto, prendiamo un plurintervallo Δ di (a, b) , associato, di ordine $2r$, della $f'(x)$, e, indicato con N il massimo modulo, in (a, b) , della funzione associata $\Delta f'(x)$, determiniamo l'intero positivo n in modo che sia

$$(2) \quad n > 2r, \quad n > N:\varepsilon, \quad \int_{\Delta_n} |f'| dx < \varepsilon.$$

Determiniamo, infine, un m' tale che, in tutti i punti di (a, b) non appartenenti al Δ_n aperto, sia

$$(3) \quad |f'(x) - \varphi'_{m'}(x)| < \varepsilon.$$

I punti del Δ_n aperto possiamo dividerli in due categorie, ponendo nella prima quelli in cui è $\varphi'_{m'}(x) \leq N + \varepsilon$, e nella seconda gli altri. I primi co-

stituiscono un plurintervallo; ed altrettanto i secondi ⁽⁴⁷⁾. I punti della prima categoria portano, in $\int_{\Delta_n} |\varphi'_{m'}| dx$, un contributo minore di $(N + \varepsilon) : n < 2\varepsilon$. Per

quelli della seconda categoria, osserviamo che le proiezioni, su (a, b) , dei lati della poligonale $\Pi_{m'}$, che li contengono come punti interni o primi estremi, possono contenere, oltre ad essi, soltanto punti non appartenenti al Δ_n aperto, e cioè punti in cui vale la (3) e quindi la $|f'| > |\varphi'_{m'}| - \varepsilon > N$. Ma i punti in cui è $|f'| > N$ appartengono al plurintervallo aperto Δ , e, pertanto, i punti della seconda categoria portano, in $\int_{\Delta_n} |\varphi'_{m'}| dx$, un contributo minore dell'integrale della $|\varphi'_{m'}|$ esteso alle proiezioni, su (a, b) , di un certo numero di lati di $\Pi_{m'}$, proiezioni di lunghezza complessiva $< \Delta_n + \Delta < 1 : \nu$. E siccome su ciascuna di queste proiezioni, l'integrale della $|\varphi'_{m'}|$ è uguale a

$$\varphi_m(a_s) - \varphi_m(a_{s-1}) = f(a_s) - f(a_{s-1}),$$

il contributo indicato è $< \varepsilon$, in virtù della (1). Complessivamente, abbiamo dunque

$$\int_{\Delta_n} |\varphi'_{m'}| dx < 3\varepsilon.$$

Ed allora, tenendo conto di questa disuguaglianza e delle (2) e (3), otteniamo

$$\left| \int_a^b f' dx - \int_a^b \varphi'_{m'} dx \right| < \int_a^b |f' - \varphi'_{m'}| dx < \varepsilon(b-a) + \int_{\Delta_n} \{|f'| + |\varphi'_{m'}|\} dx < \varepsilon(b-a+4).$$

E siccome è

$$\int_a^b \varphi'_{m'} dx = \varphi_m(b) - \varphi_m(a) = f(b) - f(a),$$

ne viene, essendo ε arbitrario, che: *l'integrale della derivata $f'(x)$ della funzione $f(x)$, assolutamente continua in (a, b) , soddisfa alla*

$$(4) \quad \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

⁽⁴⁷⁾ Si tenga presente che la $\varphi'_{m'}$ è costante in ogni intervallo (a_s, a_{s+1}) , proiezione, su (a, b) , di un lato di $\Pi_{m'}$.

intendendo, come si è detto, di porre $f'(x) = 0$ dove la derivata non esiste finita ⁽⁴⁸⁾.

26. Funzione integrale.

Sia $f(x)$ una funzione quasi-continua e integrabile in (a, b) . La funzione

$$F(x) \equiv \int_a^x f(x)dx,$$

considerata per ogni x di (a, b) , dicesi *funzione integrale* della $f(x)$.

La *funzione integrale* $F(x)$ è assolutamente continua. Ciò è una conseguenza immediata del teorema del n.° 13, e), applicato alla $|f(x)|$. La $F(x)$ è, pertanto, una funzione continua e a variazione limitata.

Viceversa, ogni *funzione assolutamente continua* è, all'infuori di una costante, una *funzione integrale*. Ciò segue, senz'altro, dalla (4) del n.° precedente, quando in essa si sostituisca b con x .

Per quanto abbiamo detto nei n.° precedenti, le proprietà della $F(x)$, ora messe in evidenza, portano che tale funzione ha derivata finita, in quasi-tutto (a, b) , e integrabile, e che, in tutto (a, b) , vale l'uguaglianza

$$\int_a^x F'(x)dx = F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)dx,$$

ossia la

$$\int_a^x \{F'(x) - f(x)\} dx = 0.$$

È dunque (n.° 21) $F'(x) = f(x)$, in quasi-tutto (a, b) , vale a dire, la *funzione integrale di una funzione quasi-continua e integrabile, in (a, b) , ammette questa funzione come derivata, in quasi-tutto l'intervallo* ⁽⁴⁹⁾.

⁽⁴⁸⁾ H. LEBESGUE, loc. cit. ⁽⁴⁶⁾ e *Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration* (Rend. R. Accad. Lincei, 1907, pag. 283); G. VITALI, *Sulle funzioni integrali* (Atti R. Accad. Scienze di Torino, Vol. XL, 1905) e *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali* (ibidem, Vol. XLIII, 1908).

⁽⁴⁹⁾ H. LEBESGUE, loc. cit. ⁽⁴⁶⁾, pagg. 124-125.

La rappresentazione analitica di un ramo reale di curva algebrica

Memoria del dott. OSCAR CHISINI

CAPITOLO I.

Introduzione.

1. Si consideri una curva algebrica reale

$$f(xy) = 0;$$

qui si suppone che siano reali i coefficienti del polinomio f , e che — per di più — esistano effettivamente, e in numero infinito, dei punti reali $P = (xy)$ soddisfacenti all'equazione $f = 0$; in tali ipotesi questi punti reali danno origine a un certo numero (≥ 1) di rami o *circuiti* della curva f ⁽¹⁾, dimodochè la *funzione*

$$y = y(x),$$

definita dall'equazione $f(xy) = 0$, appare — *entro il campo reale* — *riducibile* in più funzioni diverse, le quali saranno generalmente polidrome.

Ora si presenta il problema di *rappresentare in tutta la loro integrità* tali funzioni, cioè, prefissato un circuito Γ della curva algebrica reale, di costruire *una* coppia di funzioni analitiche reali

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

di un parametro t che per tutti i valori reali di esso siano *regolari* (all'infuori di possibili poli) per modo che — entro tale campo di regolarità — esse rappresentino l'*intero* circuito considerato Γ .

Il problema appare in un certo modo analogo a quello della ricerca degli sviluppi di (TAYLOR o di) PUISEUX dei rami algebrici della funzione $y = y(x)$

(1) Nel seguito chiameremo sempre col nome di *circuito* un ramo reale della f , per non confondere col ramo della relativa funzione algebrica polidroma $y = y(x)$.

nell'intorno di un punto, reale o complesso, $x = x_0$: se si costringe x a variare solo nell'intorno del punto x_0 , allora i valori della funzione $y(x)$ si dividono in un certo numero di funzioni distinte (continuabili però analiticamente l'una nell'altra qualora si muova il punto x_0) che possono essere monodrome o polidrome nell'intorno stesso: ciascuna di esse risulta, come è noto, sviluppabile in una serie di PUISEUX del tipo

$$y = \sum a_i (x - x_0)^{\frac{i}{\nu}},$$

dove ν , ordine del ramo, riesce $\nu = 1$ per i rami lineari, avendosi allora l'usuale sviluppo del TAYLOR.

2. La possibilità e la natura del problema che ci siamo posto riesce illuminata dai primi esempi, in cui anche si determina subito la relativa soluzione.

Si consideri infatti la cubica piana

$$y^2 - x(x^2 - 1) = 0,$$

che si compone di un ovale Γ e di un circuito impari Γ_1 (fig. 1); una retta r , uscente da un punto A dell'ovale, incontra questo in un unico punto P , e similmente incontra in un unico punto P' il circuito impari. Pertanto P (e similmente P') risulta funzione algebrica univoca del parametro t (coefficiente angolare di r) che vale a definire la retta entro il relativo fascio.

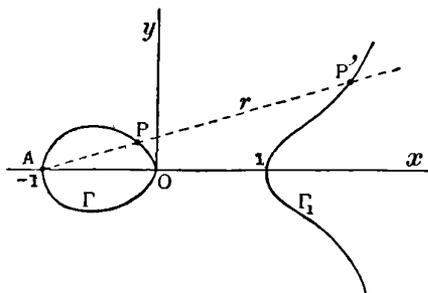


Fig. 1.

In tal modo si riesce a uniformizzare la funzione reale

$$y = y(x)$$

relativa al circuito Γ (e similmente per Γ_1) rappresentando biunivocamente i punti di questo coi valori reali di t : si hanno così le due coordinate del punto P (variabile comunque su l'intero circuito) date da due funzioni analitiche (anzi algebriche)

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

reali e regolari per tutti i valori reali del parametro t .

Ciò posto è facile ottenere delle effettive espressioni analitiche che rap-

presentino queste due funzioni, usando della nota trasformazione

$$\tau = \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^{\lambda t} + 1}, \quad \left(\lambda = \frac{\pi}{2a} \right)$$

la quale rappresenta biunivocamente la striscia del piano della variabile complessa $t = t_1 + it_2$, di larghezza $2a$, che ha per mediana l'asse reale $t_2 = 0$, sul cerchio $|\tau| \leq 1$, del piano della variabile complessa τ . Infatti le funzioni algebriche reali $x(t)$ e $y(t)$, che sono ad un valore sull'asse reale della variabile t , e non posseggono su questo punti di diramazione, si mantengono regolari entro una striscia sufficientemente piccola avente come mediana l'asse medesimo, salvo — in generale — un *numero finito di poli*. Pertanto le dette x e y , concepite come dipendenti dalla variabile τ , danno due *funzioni* (analitiche, ma non più algebriche)

$$x(\tau) \quad \text{e} \quad y(\tau)$$

che, moltiplicate per un prodotto del tipo $(\tau - \alpha)(\tau - \beta) \dots$ diverranno *regolari entro il cerchio* $|\tau| \leq 1$, e però saranno sviluppabili in serie di potenze di τ convergenti entro l'intero cerchio. Si ottiene così la *effettiva rappresentazione del circuito reale Γ nella sua integrità, mediante una sola coppia di sviluppi in serie*.

3. Ma quando si passi a circuiti di forma più complessa, non è possibile estendere senz'altro il procedimento indicato: si trovano infatti facilmente dei circuiti di curva algebrica che non ammettono un fascio di rette unisecanti. Tuttavia si può cercare di costruire per essi dei fasci di curve unisecanti di ordine maggiore al primo, e in qualche caso si riesce effettivamente: per es. qualora la curva

$$f(xy) = 0$$

abbia il genere p e sia dotata di $p + 1$ circuiti (massimo numero compatibile col suo genere) la serie lineare g_{p+1}^1 costruita a partire da un gruppo di $p + 1$ punti $P_0 P_1 \dots P_p$, presi ciascuno sopra un circuito diverso, viene staccata sulla f da un fascio di curve unisecanti ciascun circuito ⁽²⁾.

4. I due esempi sopra indicati inducono a credere che in realtà sia sempre possibile uniformizzare un circuito di curva algebrica, rappresentandolo, nel modo anzidetto, sui punti di una retta reale, e questa credenza

⁽²⁾ Cfr. ENRIQUES-CHISINI, *Teoria Geometrica delle equazioni*. Vol. II, pag. 268.

viene convalidata da una visione topologica, cui mi piace accennare, imperocchè, confortato da questa, ho ripreso fiducioso l'analisi del problema in questione, quantunque alcune difficoltà avessero, qualche tempo addietro, fatto fallire un primo tentativo.

Come è noto, i punti complessi della curva algebrica reale $f(xy)=0$, si corrispondono a coppie nel così detto *coniugio* che associa a ciascun punto P di coordinate

$$\begin{cases} x = x_1 + ix_2 \\ y = y_1 + iy_2 \end{cases}$$

il punto \bar{P} di coordinate

$$\begin{cases} \bar{x} = x_1 - ix_2 \\ \bar{y} = y_1 - iy_2. \end{cases}$$

Ora si rappresentino i punti reali e immaginari della curva algebrica f mediante i punti di una superficie di RIEMANN F , e, alla sua volta, questa venga riferita a una superficie doppia F' , i cui punti corrispondano alle coppie di punti immaginari coniugati di f . I circuiti della curva f , costituiti dai punti doppi del detto coniugio, verranno ora rappresentati dagli orli della F' : e si riconosce facilmente che ognuno di questi orli può — per deformazione continua della F' — ridursi infinitesimo; allora il corrispondente circuito si ridurrà a un piccolo ovale, che ha per limite un punto isolato, riuscendo così rappresentabile sopra una retta reale. Pertanto l'assenza di caratteri i quali valgano a distinguere i circuiti che — come quelli considerati innanzi — sono uniformizzabili da altri circuiti che eventualmente non lo fossero, induce a credere che *tutti i circuiti possono rappresentarsi biunivocamente sui punti di una retta reale*, s'intende nel modo sopra indicato, cioè *esprimendo x e y mediante una sola coppia di funzioni il cui campo di regolarità dia l'intero ramo*.

5. In questa Memoria appunto mi *propongo* come prima cosa (Cap. II) di dimostrare tale teorema, precisamente che: *dato un circuito Γ , affatto generale, appartenente ad una curva algebrica reale $f(xy)=0$, questo — nella sua integrità — può rappresentarsi biunivocamente sopra la retta reale su cui è steso un parametro t , ponendo*

$$\begin{aligned} x &= x(XY), & y &= y(XY), \\ X &= \varphi(t), \\ Y &= \psi(t), \end{aligned}$$

dove x, y, φ sono funzioni razionali, e ψ funzione algebrica regolare in tutti i punti dell'asse reale della variabile complessa t , funzione che, ponendo

$$\tau = \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^{\lambda t} + 1} \quad (\lambda \text{ coefficiente numerico})$$

si riduce a una funzione analitica

$$Y = \theta(\tau) = \sum c_n \tau^n$$

regolare nel cerchio $|\tau| \leq 1$, per modo che i valori di Y , relativi al circuito Γ , risultano dall'unico sviluppo in serie $\sum c_n \tau^n$.

Volendo restare invece entro il campo algebrico, con una conveniente proiezione si porti l'asse reale di t nel cerchio $|\tau| = 1$, e si otterrà allora per la funzione algebrica $Y(\tau)$ uno sviluppo in serie di LAURENT.

Ora il teorema enunciato mostra solo la possibilità di una rappresentazione del ramo, e la sua dimostrazione poggia su un noto teorema ⁽³⁾ relativo all'esistenza di funzioni algebriche reali definite da un conveniente sistema di punti di diramazione, collocati sul piano della variabile complessa, con le relative sostituzioni; e si avrebbe una rappresentazione effettiva soltanto qualora si costruisse — cosa complicata ma nota — effettivamente una delle suddette funzioni algebriche reali. A tale inconveniente pertanto vale a superare la seconda parte (Cap. III) di questo lavoro, ove, mediante l'uso di trasformazioni che chiamo *distendenti*, si riesce a diminuire il numero dei punti di diramazione relativi al circuito Γ , distendendone, per così dire, quasi materialmente le anse, fino a che — essendo 2 i detti punti di diramazione — il circuito è rappresentabile sopra una ellisse e quindi sopra una retta reale. Qui però occorre notare che la rappresentazione ottenuta per tal via assai semplicemente, mentre ha il pregio di fornire una facile via *effettiva*, riesce solo univoca, e non biunivoca; la qual cosa non è essenziale per il nostro problema.

Prima però di venire alla dimostrazione del teorema indicato, desidero richiamare l'attenzione del lettore sopra l'analogia di concetto fra questa e il procedimento notissimo onde si costruiscono gli sviluppi in serie di PUISEUX. Datò un circuito Γ , e la corrispondente funzione algebrica $y(x)$, si considerano i punti di diramazione reali di questa e le relative sostituzioni; si costruisce

⁽³⁾ Cfr. HURWITZ, *Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten.* (Math. Annalen Bd. 39) parte III, § 1.

poi una funzione algebrica $y_r(x)$, di genere $p=0$, relativa quindi a una curva razionale

$$x_r = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}, \quad y_r = \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}$$

($\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$, polinomi) dotata degli stessi punti di diramazione: allora, per $x = x_r, y$ riesce funzione algebrica monodroma — nel campo reale — della y_r , e quindi anche del parametro t ; e in tal modo si uniformizza il nostro circuito Γ .

CAPITOLO II.

Curve razionali uniformizzanti un circuito di curva algebrica reale: rappresentazione di questo.

1. Vogliamo qui dimostrare come, dato un circuito Γ appartenente ad una curva algebrica reale

$$f(xy) = 0,$$

sia sempre possibile costruire una curva reale di genere $p=0$, cioè razionale,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_r = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} \\ y_r = \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} \end{array} \right.$$

($\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ polinomi) tale che (per $x = x_r$) la y di un punto variabile su Γ risulti funzione algebrica univoca — entro il campo reale — di y_r , e quindi del parametro t .

Per maggior chiarezza e semplicità cominceremo col supporre che il circuito Γ sia un circuito pari, non secante la retta impropria, e quindi tutto compreso fra due parallele all'asse y , tangenti al circuito. Queste due tangenti riusciranno a contatto semplice, e similmente anche tutte le altre tangenti del circuito parallele all'asse y saranno tangenti in punti generici (né flessi né punti multipli) imperocchè è arbitrario l'orientamento degli assi. Inoltre la curva f (e quindi Γ) può suppersi avere come punti singolari solo dei nodi, in quanto è chiaro che una conveniente trasformazione birazionale — a coefficienti reali — può mutare la f in una curva iperspaziale priva di singolarità da cui, per proiezione, si ottiene una curva, birazionalmente identica alla primitiva, dotata appunto di soli nodi.

2. Ciò posto si considerino le m ($= 8$ nel caso della nostra figura 2) tangenti al circuito Γ condotte parallelamente all'asse y . Sia K_1 il punto di contatto dell'estrema tangente a destra e $K_2 \dots K_m$ i successivi punti di contatto che si incontrano percorrendo il circuito nel senso indicato dalla freccia. Chiameremo inoltre con $A_1 A_2 \dots A_m$ le traccie delle tangenti considerate sopra l'asse x , e con $a_1 a_2 \dots a_m$ le relative ascisse. I successivi punti $K_1 K_2 \dots K_m$ dividono il nostro circuito in m archi

$$\gamma_1 = K_1 K_2, \quad \gamma_2 = K_2 K_3 \dots \gamma_m = K_m K_1;$$

ciascun arco γ_i riesce unisecato dalle parallele all'asse y , e definisce così — nell'intervallo $a_i a_{i+1}$ — una funzione

$$y = y_i(x)$$

monodroma in detto intervallo.

Ci interessa riconoscere che *il numero m delle tangenti considerate è un numero pari*: infatti si consideri (fig. 2) l'angolo ω che — in un punto P —

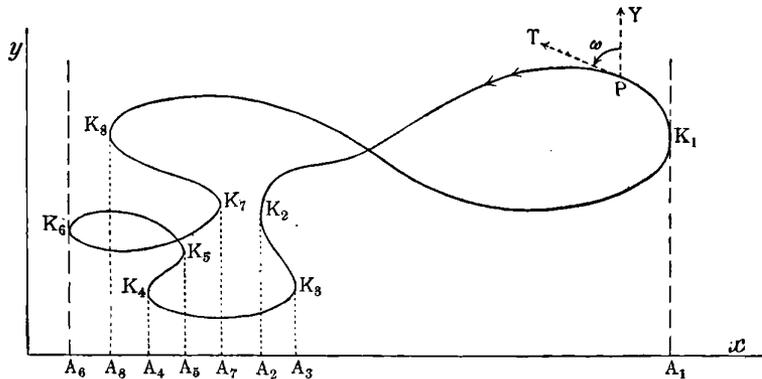


Fig. 2.

il raggio tangente PT fa con la direzione positiva PY dell'asse y : quando P , avendo percorso il circuito Γ , ritorna alla posizione iniziale, l'angolo ω è ritornato al valore primitivo a meno di un multiplo di 2π . Ciò significa che il raggio PT ha attraversato un numero pari di volte la retta PY , cioè che si sono incontrati un numero pari di punti K .

3. Ora dal dato circuito Γ passiamo ad un circuito Γ' (che costruiremo graficamente senza occuparci affatto se esso o qualche altro simile possa appartenere ad una curva algebrica) nel modo che segue.

Vi è un estremo intervallo a destra $A_s A_1$ (in figura $s = 3$) in cui le parallele all'asse y bisecano il circuito Γ : in corrispondenza a questo intervallo

nella prossimità di K_1 (in figura per necessità di chiarezza questa prossimità è molto ampia) sostituiamo una parte del circuito, precisamente la parte MK_1N con la curva aperta $C = MN$, dotata di $m - 1$ tangenti (a contatto bipunto) parallele all'asse y , e incontrata in m punti distinti da una retta $x = x_0$ parallela al detto asse. Otteniamo così la curva Γ' della figura (fig. 3), che sup-

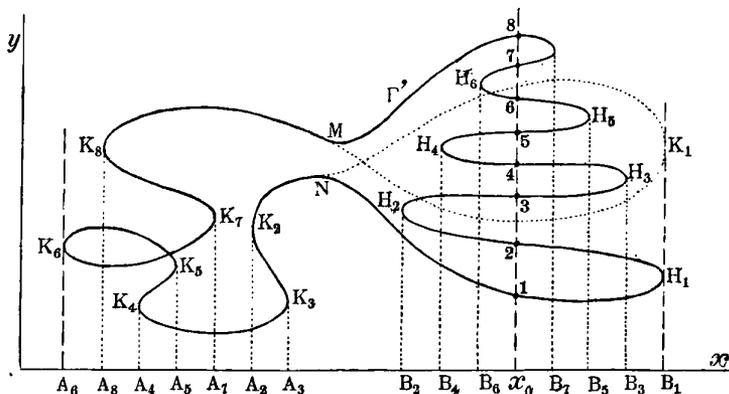


Fig. 3.

poniamo composta di archi analitici nell'intorno dei punti H (*), la quale, ripetiamolo esplicitamente, è segata in m punti reali (indicati in figura coi numeri 1, 2 ... 8) dalla retta $x = x_0$ parallela all'asse y , ed ammette $2m - 2$ tangenti (semplici) parallele al detto asse: i punti di contatto di queste tangenti sono successivamente

$$K_2 K_3 \dots K_m H_{m-1} H_{m-2} \dots H_2 H_1,$$

e dividono la curva Γ' in $2m$ archi

$$\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m \sigma_{m-1} \sigma_{m-2} \dots \sigma_2,$$

essendosi posto

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= H_1 K_2, & \gamma_2 &= K_2 K_3 \dots \gamma_m = K_m H_{m-1} \\ \sigma_{m-1} &= H_{m-1} H_{m-2}, & \sigma_{m-2} &= H_{m-2} H_{m-3} \dots \sigma_2 = H_2 H_1; \end{aligned}$$

i suddetti punti segati sulla Γ' dalla retta $x = x_0$ vengono ad appartenere agli archi $\gamma_m \sigma_{m-1} \dots \sigma_2 \gamma_1$, in modo che l'indice dell'arco uguaglia il nome del punto.

Analogamente a quanto si è fatto per il circuito Γ , indicheremo con A_i

(*) Questa ipotesi è introdotta solo per poter parlare di tangenti a contatto bipunto.

le traccie delle tangenti relative ai punti K_i , con B_i quelle relative ai punti H_i e con a_i e b_i le relative ascisse.

4. Per proseguire dobbiamo porre una definizione ed un semplice teorema ad essa relativo.

Definizione. Due circuiti si diranno equivalenti quando abbiano le stesse tangenti parallele all'asse y e i relativi punti di contatto si susseguano nello stesso ordine sopra i due circuiti, i quali, nell'intorno dei punti di contatto con una almeno delle dette tangenti devon esser posti dalla stessa banda di questa (o, naturalmente, ci si possa ridurre a queste ipotesi con una trasformazione proiettiva). Dicendo che i due circuiti abbiano le stesse tangenti, intendiamo dire anche che queste abbiano un contatto dello stesso ordine, e corrispondano così a punti di diramazione dotati di sostituzioni simili, in generale solamente di uno scambio.

Per i circuiti equivalenti vale il seguente

Teorema. Se due curve algebriche f e f' posseggono due circuiti equivalenti C e C' , fra i punti P e P' di questi intercede una corrispondenza algebrica che resta biunivoca al variare del punto P (o di P') sul circuito C o nell'intorno di questo (sopra la riemanniana relativa alla curva algebrica f).

Tale proposizione è così ovvia che quasi non ha bisogno di esser dimostrata; tuttavia ciò si ottiene semplicemente come segue.

Siano $T_1 T_2 \dots T_l$ e $T'_1 T'_2 \dots T'_l$ i punti di contatto (per semplicità supposto bipunto) delle tangenti (parallele all'asse y) comuni ai due circuiti C e C' ; questi punti di contatto dividono i circuiti in l archi $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_l$ e $\rho'_1 \rho'_2 \dots \rho'_l$, unisecati dalle parallele all'asse y . Ora, per ipotesi, due almeno di questi archi, diciamo ρ_1 e ρ'_1 sono dalla stessa banda della tangente di un loro estremo e quindi anche dell'altro. Si associno così due punti P e P' di questi archi i quali abbiano la medesima ascissa: la corrispondenza resta certo biunivoca finchè P si muove entro l'arco ρ_1 ; ma qualora P , giunto prossimo a un estremo dell'arco, sia esso T_1 , passa dall'arco ρ_1 all'arco ρ_2 , altrettanto accadrà di P' , imperocchè l'ascissa x di P (e di P') viene a descrivere nel piano della corrispondente variabile complessa un cappio avvolgente il punto di diramazione $x = a_1$ (a_1 ascissa di T_1) il quale cappio si schiaccia nel segmento xa_1 percorso due volte in senso contrario, ed un simile cappio scambia similmente il ramo ρ'_1 nel ramo ρ'_2 . In tal modo la corrispondenza biunivoca fra i punti P e P' si estende anche alla coppia di archi ρ_2 e ρ'_2 , e così di seguito agli interi circuiti; e lo stesso si può evidentemente ripetere anche se qualche tangente è a contatto non semplice. È poi⁴ ovvio che questa cor-

rispondenza si può estendere — entro il campo complesso — ai punti delle riemanniane di f e f' che costituiscono l'intorno dei circuiti C e C' , imperocchè quivi non si hanno altri punti di diramazione che i punti $a_1 a_2 \dots a_l$ corrispondenti alle tangenti in $T_1 T_2 \dots T_l$ e $T'_1 T'_2 \dots T'_l$.

5. Ora ritorniamo al nostro circuito Γ il quale, così come l'abbiamo costruito, non è affatto un circuito algebrico: vogliamo riconoscere che *esiste un circuito R' , appartenente ad una curva razionale, equivalente al circuito Γ* ; passeremo in seguito alla costruzione di un circuito R (ancora di curva razionale) equivalente al circuito dato Γ .

Per dimostrare la proposizione enunciata dobbiamo ricorrere ad un noto teorema ⁽⁵⁾ che afferma l'esistenza di una funzione algebrica reale

$$y = y(x)$$

a un qualunque numero m di rami quando:

a) In corrispondenza a un punto reale $x = x_0$ del piano della variabile complessa x si fissi quali fra gli m rami

$$y_1 y_2 \dots y_m$$

della funzione y siano reali, e come gli altri si dividano in coppie di rami coniugati;

b) Sia data ad arbitrio la riemanniana della y purchè *simmetrica*. Ciò significa che la riemanniana è trasformata in se stessa dal coniugio, il quale sostituisce ai cappi (uscanti da x_0) cappi a questi simmetrici rispetto all'asse reale, e muta le sostituzioni ad essi relative nelle sostituzioni coniugate. Così i punti di diramazione devono essere o reali o a coppie immaginari coniugati; quanto alle relative sostituzioni, occorre notare che il coniugio modifica il sistema dei cappi che vanno all'asse reale, e che — per una *medesima* riemanniana — cambiando i cappi si vengono a trasformare le relative sostituzioni, mediante gli scambi dati dai punti di diramazione che i cappi stessi attraversano;

c) Naturalmente le sostituzioni relative ai cappi della riemanniana simmetrica devono soddisfare alle condizioni generali per l'esistenza della corrispondente funzione algebrica, cioè: formare un gruppo transitivo, e il loro prodotto — preso nell'ordine in cui si susseguono i cappi intorno ad x_0 — riuscire l'identità.

⁽⁵⁾ Cfr. HURWITZ, l. c.

Ricordato così il teorema di esistenza per le funzioni reali, applichiamo al nostro caso. Consideriamo i punti a_i e b_i come punti di diramazione (posti sopra l'asse reale della variabile x) e associamo a ciascuno di essi la sostituzione, che chiamiamo rispettivamente con α_i e β_i , data dagli indici dei due archi che si uniscono nel punto di contatto della corrispondente tangente: nelle due linee seguenti mettiamo in evidenza i detti punti e le relative sostituzioni

$$\begin{array}{cccccccc} a_2 & a_3 & \dots\dots & a_m & & b_{m-1} & \dots\dots & b_2 & b_1 \\ (12) & (23) & \dots\dots & (m-1, m) & & (m, m-1) & \dots\dots & (32) & (21). \end{array}$$

Dimostriamo che:

questi scambi presi nell'ordine secondo cui i corrispondenti punti di diramazione si susseguono sopra l'asse reale della variabile x (precisamente percorrendo questo da destra verso sinistra), danno come prodotto l'identità.

Infatti osserviamo che:

1) I punti a_i e i punti b_i non si separano (abbiamo costruito la parte del circuito $MH_{m-1}H_{m-2} \dots H_1N$ all'estrema regione destra).

2) Nell'intorno di H_1 la curva è alla sinistra della tangente, nell'intorno di K_2 quindi è alla destra, nell'intorno di K_3 è alla sinistra, ... nell'intorno di K_m (m pari) è alla destra, nell'intorno di H_{m-1} è alla sinistra...

3) Per conseguenza

$$\begin{array}{ll} a_2 \text{ (ascissa di } K_2) \text{ è alla sinistra di } b_1 \text{ (ascissa di } H_1) & \\ a_3 & \text{è alla destra di } a_2 \\ a_4 & \text{è alla sinistra di } a_3 \\ \dots\dots\dots & \\ b_2 & \text{è alla sinistra di } b_3 \\ b_1 & \text{è alla destra di } b_2, \end{array}$$

cioè ogni a_i (o b_i) con i dispari è alla destra del precedente a_{i-1} (o b_{i-1}) e del seguente a_{i+1} (o b_{i+1}).

4) Infine gli scambi α_i e β_i , relativi ai punti a_i e b_i , presi nell'ordine in cui questi si susseguono sopra l'asse reale (dalla destra alla sinistra) danno un prodotto uguale al prodotto

$$\tau = \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_m \alpha_{m-1} \alpha_{m-3} \dots \alpha_3 \beta_2 \beta_4 \dots \beta_{m-2} \beta_{m-1} \dots \beta_3 \beta_1.$$

Immaginiamo infatti il prodotto delle α nell'ordine dato

$$\pi = \alpha_{i_{m-1}} \alpha_{i_{m-2}} \dots \alpha_{i_2} \alpha_{i_1}.$$

Consideriamo α_2 ; questo scambio è permutabile con tutti gli altri scambi α , all'infuori di α_3 che, per la precedente osservazione 3), è alla destra di α_2 ; pertanto, ovunque sia α_2 nel prodotto π , possiamo portare α_2 al primo posto a sinistra. Similmente α_3 è permutabile con tutti gli scambi α_3 all'infuori di α_2 (che è già stato portato al primo posto a sinistra) e di α_4 che, sempre per l'osservazione 3), è a sinistra di α_3 , sicchè α_3 stesso può essere portato all'estremo posto di destra. Successivamente, in base allo stesso ragionamento, si potrà portare α_4 subito alla destra di α_2 , e α_5 subito alla sinistra di α_3 , e così continuando finchè il prodotto π viene espresso nella forma

$$\alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_m \alpha_{m-1} \alpha_{m-3} \dots \alpha_5 \alpha_3.$$

Lo stesso procedimento si potrebbe ripetere a proposito delle trasposizioni β ; ma ciò è inutile essendo i punti b_i — la cui posizione dipende dalla costruzione arbitraria mediante cui si è ottenuto il circuito Γ — già disposti nell'ordine

$$b_2 b_4 \dots b_1.$$

Resta pertanto dimostrato che il prodotto delle α e delle β , prese nell'ordine stabilito, uguaglia il prodotto

$$\tau = \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_m \alpha_{m-1} \alpha_{m-3} \dots \alpha_3 \beta_2 \beta_4 \dots \beta_{m-2} \beta_{m-1} \dots \beta_3 \beta_1.$$

Ma è

$$\alpha_3 = \beta_2, \quad \alpha_5 = \beta_4 \dots \alpha_{m-1} = \beta_{m-2}, \quad \alpha_m = \beta_{m-1},$$

onde nel prodotto τ le trasposizioni a coppie si elidono, sicchè appare

$$\tau = 1,$$

quanto cioè volevamo dimostrare.

Da ciò che abbiamo premesso segue con facilità l'esistenza della curva razionale R' , e la sua realtà.

Infatti si costruisca la riemanniana dotata dei punti di diramazione a_i e b_i , i quali verranno circondati da cappi uscenti dal punto reale x_0 e susseguentisi nell'ordine in cui i punti stessi si susseguono sull'asse reale della x ; e si assegni che gli m valori della y in x_0 sian tutti reali e che ai cappi includenti i punti a_i e b_i corrispondano le sostituzioni α_i e β_i considerate innanzi. *Tale riemanniana risulta simmetrica.*

Si consideri infatti un punto a_i e il relativo cappio l_i . Si sostituisca (fig. 4) ad l_i il cappio \bar{l}_i , simmetrico di quello rispetto all'asse reale; ciò equivale a muover l_i facendogli attraversare tutti i punti a e b compresi fra a_i e x_0 ,

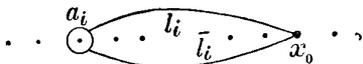


Fig. 4.

onde la sostituzione α_i viene trasformata mediante gli scambi relativi a questi ultimi punti. Ora distinguiamo due casi:

1) L'indice i di a_i è dispari. Allora alla destra di a_i ci sono solo punti a_r relativi a scambi permutabili con α_i (i punti a_{i-1} e a_{i+1} sono alla sinistra) e vi sono (prima di x_0) punti b_r con r pari i quali, essendo $\beta_r = \alpha_{r+1}$, danno ancora scambi permutabili con α_i .

2) L'indice i sia pari. Allora alla destra di a_i (e prima di x_0) ci sono i punti

$$a_{i+1} \text{ e } a_{i-1}, \quad b_i \text{ e } b_{i-2}$$

cui corrispondono sostituzioni non permutabili con α_i ; ma, essendo

$$\beta_i = \alpha_{i+1}, \quad \beta_{i-2} = \alpha_{i-1},$$

il prodotto di questi quattro scambi (permutabili fra loro) lascia ancora invariata α_i . (Con osservazione uguale a quella usata poco sopra, qui si può supporre che i punti a_r con r pari, siano stati portati alla sinistra di a_{i-1} e a_{i+1} , onde il nostro cappio l_i incontra tali cappi prima di essere trasformato, e però non viene alterato da essi).

Pertanto, comunque sia i dispari o pari, ad \bar{l}_i corrisponde la sostituzione $\bar{\alpha}_i = \alpha_i$.

Lo stesso risultato, e assai più semplicemente, si ottiene per i punti b_i , imperocchè tanto ai punti b_i posti alla sinistra di x_0 (i pari) come a quelli posti alla destra (i dispari) corrispondono due gruppi di sostituzioni permutabili.

Concludiamo dunque che il coniugio, mentre lascia invariate le determinazioni $1 \ 2 \ \dots \ m$, che sono reali, trasporta i cappi nei cappi coniugati, cui viene a corrispondere la stessa sostituzione sia per la riemanniana data, come per quella ad essa coniugata: la nostra riemanniana dunque appare simmetrica.

In fine, in base al teorema di esistenza sopra ricordato, possiamo dire che la nostra riemanniana definisce una curva reale R . E questa:

1) È razionale essendo relativa a una funzione $y(x)$ ad m rami dotata di $w = 2m - 2$ punti di diramazione e quindi di genere

$$p = \frac{1}{2}(w - 2m + 2) = 0.$$

2) È tagliata in m punti reali dalla retta $x = x_0$.

3) Ha come tangenti parallele all'asse delle y le stesse tangenti del circuito Γ' .

4) I punti di contatto delle tangenti su R' e Γ' si seguono nello stesso ordine: infatti i detti punti di contatto dividono la curva R' in $2m - 2$ archi,

ciascuno dei quali può essere contrassegnato dal numero i comune alle due sostituzioni

$$(i - 1, i) \quad \text{e} \quad (i, i + 1)$$

relative ai due estremi, e quindi anche con lo stesso nome con cui erano contrassegnati gli archi del circuito Γ' , distinguendo come in questo archi γ_i da archi σ_i , secondo che gli estremi corrispondono a punti a o a punti b (chiamando γ_m' l'arco corrispondente a α_m e β_{m-1} , e γ_i' l'arco corrispondente a β_1 e α_2); gli archi γ_i' e σ_i' che così si riscontrano in R' danno luogo a coppie consecutive qualora siano consecutive le corrispondenti coppie di Γ' ;

5) La tangente $x = b_1$, corrispondente a $\beta_1 = (12)$, lascia la curva R_1' nell'intorno del relativo punto di contatto, alla propria sinistra, imperocchè alla sinistra di b_1 è il punto x_0 , cui corrisponde una parallela all'asse y secante R' in m punti reali distinti, e b_1 è il primo punto di diramazione a destra di x_0 che operi sulle determinazioni 1 o 2.

Pertanto resta dimostrato che si può costruire un circuito R' , appartenente ad una curva razionale reale, che risulti equivalente al circuito grafico Γ' .

6. Ma la costruzione del circuito R' , equivalente al circuito Γ' , è soltanto accessoria, importando invece costruire un circuito R equivalente al circuito Γ , dal quale avevamo dedotto artificialmente Γ' . La ragione per cui abbiamo costruito anzitutto la curva R' sta in ciò che da questa — per continuità — si ottiene la curva razionale, e quindi il circuito, R equivalente a Γ , rifacendo in senso opposto, le stesse modificazioni mediante le quali siamo passati da Γ a Γ' . Precisamente opereremo come segue.

Muoviamo il punto di diramazione b_{m-2} fino a portarlo a coincidere con b_{m-1} ; al limite avremo in b_{m-1} un punto di diramazione doppio, corrispondente a un flesso della curva, relativa alla riemanniana così modificata; dopodichè i due punti b_{m-1} e b_{m-2} possono esser resi immaginari coniugati, portandoli — da bande opposte — fuori dell'asse reale. Qui, a tutto rigore, basterebbe riconoscere che con ciò è diminuito di 2 il numero dei punti reali staccati dalla retta $x = x_0$ e che similmente sono spariti i due punti di contatto H_{m-1} e H_{m-2} , essendosi quindi fusi in un unico arco i tre archi γ_m , σ_{m-1} , σ_{m-2} . Ma — per maggior chiarezza e precisione — conviene seguir più da vicino la variazione subita dalla nostra riemanniana simmetrica; e ci riferiremo al caso della figura ($m = 8$) che è del tutto caratteristico: potremo così parlare in una forma più concreta, la quale acquista chiarezza mentre non perde affatto valore di generalità.

Quando $b_6 \approx 6 = m - 2$ attraversa x_0 i due valori 7 e 6, che si scambiano per la β_6 , diventano immaginari coniugati; quando b_6 coincide con b_7 , a questo punto viene a corrispondere la sostituzione

$$(67)(78) = (867) = (87)(86).$$

Consideriamo (fig. 5, I) la riemanniana relativa al caso in cui b_6 è prossimo a b_7 . Dal punto x_0 facciamo uscire i seguenti 7 cappi successivi: l_1, l_3, l_5 , che vanno ai punti b_1, b_3, b_5 ; l_0 che va alla coppia di punti b_7 e b_6 ; l_4, l_2 che vanno ai punti b_4 e b_2 ; l che va al gruppo dei 7 punti $a_2 \dots a_8$; corrispondentemente avremo le sostituzioni

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (12), & \beta_3 &= (34), & \beta_5 &= (56) \\ \beta_0 &= (867) \\ \beta_4 &= (45), & \beta_2 &= (23) \\ \alpha &= (24687531). \end{aligned}$$

Dopo che b_6 è venuto a coincidere con b_7 , i due punti torneranno a separarsi, diventando immaginari coniugati, e ad essi corrisponderanno due cappi l'_6 e l'_7 e due sostituzioni β'_6 e β'_7 tali che

$$l_0 = l'_6 + l'_7, \quad \beta_0 = \beta'_7 \beta'_6$$

e quindi, le due sostituzioni dovendo essere coniugate,

$$\beta'_6 = (86), \quad \beta'_7 = (87);$$

si ha in corrispondenza la figura 5, II.

Ora se vogliamo che i cappi l_5, l_3, l_1 , vadano ai relativi punti di diramazione percorrendo la prossimità dell'asse reale (nelle figure, per necessità grafiche, occorre limitarci ad una assai grossolana prossimità del detto asse reale) occorrerà far passare i detti cappi l_5, l_3, l_1 dalla sinistra alla destra del cappio l'_6 , sicchè le relative trasposizioni verranno trasformate mediante lo scambio (86): β_3 e β_1 resteranno allora invariate, mentre β_5 diventerà uguale a (58). Si arriva così in fine alla riemanniana data dalla figura 5, III, in cui si hanno ordinatamente i cappi e le sostituzioni qui indicate

$$\begin{array}{cccccccc} l'_6 & l_1 & l_3 & l_5 & l'_7 & l_4 & l_2 & l \\ (86) & (12) & (34) & (58) & (87) & (45) & (23) & (24687531). \end{array}$$

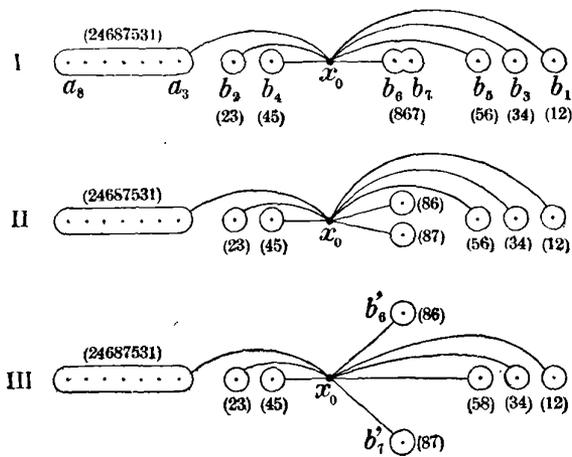


Fig. 5.

Sotto l'aspetto grafico le successive modificazioni, al variare dei punti b_6 e b_7 , sono rappresentate dalla figura 6: la linea in tratto continuo dà la forma iniziale del circuito (nella sua parte che contiene i punti $H_5 H_6 H_7$); la linea punteggiata corrisponde al momento in cui b_6 attraversa x_0 , divenendo allora immaginarie le determinazioni 6 e 7; la linea tratteggiata è relativa al momento in cui b_6 e b_7 coincidono, coincidendo allora H_6 e H_7 in un flesso; la linea a larghi tratti rappresenta in fine il caso in cui i punti b_6 e b_7 sono già immaginari coniugati. In questa posizione finale il punto B_5 corrisponde allo scambio (58); in sostanza è sparita l'ansa relativa ai punti B_6 e B_7 e così i due archi σ_6 e σ_7 .

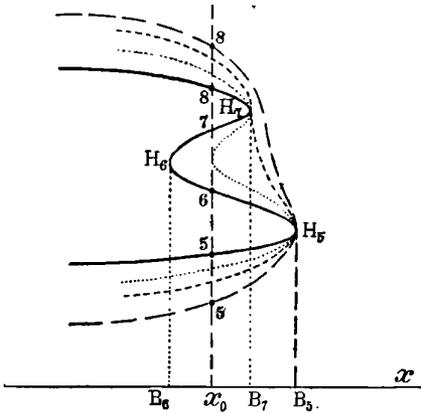


Fig. 6.

In un secondo tempo faremo coincidere i punti b_{m-4} e b_{m-3} , nel caso della figura i punti b_4 e b_5 , dove bisogna ora ricordare che la trasposizione β_5 , relativa a b_5 , è divenuta lo scambio (58), e analogamente al caso precedente muoveremo b_4 . Diventeranno allora immaginari coniugati i valori 5 e 4 ($m-3$ e $m-4$), e similmente i punti b_4 e b_5 , diventati immaginari coniugati dopo aver coinciso, daranno luogo ai due scambi (84) e (85) il cui prodotto eguaglia il prodotto primitivo :

$$\beta_4 \beta_5 = (54)(85) = (85)(84).$$

Anche ora, volendo che i cappi che vanno ai punti b_3 e b_1 percorrano la prossimità dell'asse reale, dovremo trasformare le relative sostituzioni con lo scambio (84), avendo dunque $\beta_3 = (83)$.

Corrispondentemente nella curva reale verranno, come innanzi, a sparire i due punti H_4 e H_5 , essendo venuta meno la coppia di archi σ_5 e σ_4 .

In un terzo tempo — ultimo nel nostro caso — porteremo b_{m-6} a coincidere con b_{m-5} , ricordando che a questo corrisponde lo scambio $\beta_3 = (83)$. In tal modo diverranno anzitutto immaginari coniugati i valori 3 e 2, poi, dopo aver coinciso, diverranno pure immaginari coniugati i punti b_2 e b_3 , dando luogo agli scambi (82) e (83), il cui prodotto uguaglia il prodotto primitivo

$$\beta_2 \beta_3 = (32)(83) = (83)(82).$$

Volendo ancora che il cappio che va al punto b_1 percorra la prossimità

dell'asse reale, dovremo trasformare la relativa sostituzione con lo scambio (28), sicchè risulta $\beta_1 = (81)$.

Corrispondentemente nella curva reale verrà a sparire la coppia di archi σ_3 e σ_2 .

La nostra riemanniana così modificata diventa come nella figura 7 dove i punti a_i sono avvolti — in figura — da un unico cappio cui corrisponde la sostituzione $(24687531) = \alpha_2\alpha_4\alpha_6\alpha_8\alpha_7\alpha_3\alpha_5$ qualunque sia l'ordine in cui i punti a_i si succedano sull'asse reale; ma nella realtà si dovrebbero considerare 7 cappi distinti.

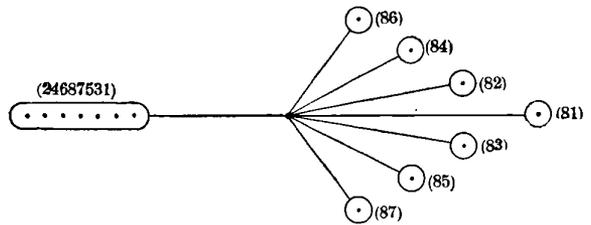


Fig. 7.

Assumendosi come valori reali, relativi al punto x_0 , i valori 8 e 1, e come coppie di valori complessi coniugati, le coppie 6, 7; 4, 5; 2, 3, la

nostra riemanniana è simmetrica (il che si riconosce come al § 5) e definisce dunque una curva reale R (del resto l'esistenza di questa segue direttamente dal modo con cui la R' è ottenuta per continuità dalla R'). La curva R possiede ora come punti di contatto per le tangenti parallele all'asse y solo gli m punti $H_i = K_1, K_2, \dots, K_8$, di ascissa $b_i = a_1, a_2 \dots a_8$, ed è chiaramente equivalente al circuito Γ dal quale eravamo partiti.

La curva R , data da una funzione $y_r(x)$ ad m rami con $w = 2m - 2$ punti di diramazione è, come la R' , ancora razionale. La funzione y_r potrà eventualmente avere qualche punto di infinito (inteso per x reale), tuttavia ciò non nuoce al fatto fondamentale che sia il circuito R equivalente al circuito Γ .

7. Veniamo ora al nostro problema fondamentale, cioè alla rappresentazione del circuito Γ .

Sia

$$f(xy) = 0$$

l'equazione della curva f cui appartiene Γ , e

$$x_r = x = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}$$

$$y_r = \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}$$

l'equazione parametrica della curva razionale R .

Esprimendo la y dei punti di Γ in funzione del parametro t , relativo ai punti di R che ne hanno la stessa ascissa (ed appartengono all'arco corrispondente), otterremo

$$y = \theta(t),$$

con θ funzione (algebraica) univoca nell'intorno dell'asse reale di t , e quivi per di più sprovvista di poli, giacchè — per ipotesi — il circuito Γ è tutto al finito; pertanto è anzitutto risolto il problema di *rappresentare uniformemente* il circuito Γ sopra una retta reale.

In secondo luogo, mediante la trasformazione

$$\tau = \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^{\lambda t} + 1},$$

indicata nell'introduzione, l'intorno dell'asse reale di t si riduce al cerchio di raggio 1, e y riesce così funzione analitica

$$y = \psi(\tau) = \sum c_n \tau^n$$

regolare in detto cerchio; onde i valori di y , corrispondenti al nostro circuito, risultano tutti dall'*unico sviluppo in serie* $\sum c_n \tau^n$.

Possiamo ora riassumere i due aspetti del nostro risultato enunciando che:

Dato un circuito Γ (pari e) tutto al finito, appartenente ad una curva algebrica

$$f(xy) = 0,$$

questo, in tutta la sua integrità, può rappresentarsi biunivocamente sopra la retta reale su cui è steso il parametro t , ponendo

$$\begin{aligned} x &= \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} \\ y &= \psi(\tau) \\ \tau &= \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^{\lambda t} + 1} \end{aligned}$$

dove φ_1 e φ_2 sono dei polinomi, ψ una funzione analitica regolare in tutto il cerchio $|\tau| \leq 1$, che vale a rappresentare l'intero circuito Γ mediante il solo elemento $\sum c_n \tau^n$ relativo all'origine $\tau = 0$; $\lambda = \frac{\pi}{2a}$ è un coefficiente numerico che dipende dalla larghezza $2a$ della striscia circostante all'asse reale di t , entro la quale resta uniforme la funzione y . (continua)

8. Fino ad ora abbiamo supposto che il circuito dato Γ sia pari e tutto al finito. Con qualche necessaria e semplice variante si potrebbe ripetere la nostra analisi nell'ipotesi che Γ tagliasse la retta impropria o fosse impari, pervenendo in sostanza alla stessa conclusione ove tuttavia, potendo la funzione $y(x)$ avere dei poli, si otterrà

$$y = \frac{\psi(t)}{\psi_1(t)}$$

dove $\psi(\tau)$ è ancora regolare nel cerchio $|\tau| \leq 1$, e ψ_1 è un polinomio, le cui radici cadono entro questo cerchio e danno appunto i poli di y .

Nel caso generale occorrerebbe tener particolarmente conto del fatto che Γ può avvolgere, una o più volte, il punto all'infinito dell'asse y , avendosi così diramazione quando x percorre tutto intero l'asse reale, il che porta a considerare inizialmente punti di diramazione immaginari.

Ma ci possiamo risparmiare completamente tutta questa analisi, lunga se non difficile, mercè una semplice osservazione.

Si trasformi la curva f mediante la trasformazione

$$\begin{aligned} X &= \frac{\theta_1(xy)}{\theta_3(xy)} \\ Y &= \frac{\theta_2(xy)}{\theta_3(xy)} \end{aligned}$$

dove $\theta_i = 0$ è l'equazione di una conica reale, e in particolare $\theta_3 = 0$ rappresenta una conica non secante in punti reali il circuito Γ (supposto anche impari e dotato di punti impropri). Allora la f viene trasformata in una curva piana in modo che il circuito Γ , segnando in un numero pari di punti le coniche θ , diviene un circuito pari, ed esterno alla retta impropria, essendo $\theta_3 = 0$ esterna al circuito Γ .

Qui tuttavia vi è luogo a temere che la nostra trasformazione, pure applicata ad una curva dotata di soli nodi, abbia a produrre singolarità più elevate, e ciò per qualunque posizione delle coniche θ . Ad eliminare simile dubbio critico basta ricordare che le coppie di punti del piano, neutre per un sistema lineare ∞^3 di coniche passanti per un punto fisso, appartengono tutte ad una retta su cui determinano un'involuzione, le cui coppie posson suppersi non appartenere alla f . Pertanto si passi dalla f piana ad una f sgenba mediante la trasformazione:

$$X = \frac{\theta_1(xy)}{\theta_4(xy)}, \quad Y = \frac{\theta_2(xy)}{\theta_4(xy)}, \quad Z = \frac{\theta_3(xy)}{\theta_4(xy)},$$

le θ_i essendo coniche passanti per un medesimo punto (esterno a f) e θ_4 una conica non secante Γ .

Per proiezione da un punto generico del piano improprio (fuori dalla traccia su questo della rigata delle trisecanti e della rigata circoscritta), f' dà origine ad una curva piana dotata solo di nodi, in cui il circuito Γ è pari ed esterno alla retta impropria.

Eliminata così l'ipotesi restrittiva che abbiamo fatto inizialmente circa la natura del circuito Γ , mediante l'uso di una seconda trasformazione birazionale della f , oltre a quella che valeva a liberar la curva dalle singolarità più complesse del nodo, possiamo *concludere la nostra analisi* col

Teorema. Dato un circuito Γ , affatto generale, appartenente ad una curva algebrica reale

$$f(xy) = 0,$$

questo, in tutta la sua integrità, può rappresentarsi biunivocamente sopra la retta reale su cui è steso un parametro t , ponendo

$$\begin{cases} x = x(XY) \\ y = y(XY) \\ X = \varphi(t) \\ Y = \psi(t), \end{cases}$$

dove x, y, φ , sono funzioni razionali, e ψ è funzione algebrica regolare in tutti i punti dell'asse reale della variabile complessa t ; ponendo poi

$$\tau = \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^{\lambda t} + 1}$$

la $\psi(t)$ si riduce a una funzione analitica

$$Y = \theta(\tau) = \sum c_n \tau^n$$

regolare nel cerchio $|\tau| \leq 1$, per modo che tutti i punti del ramo risultano da un unico sviluppo in serie; qui il coefficiente numerico λ riesce dato

da $\lambda = \frac{\pi}{2a}$, essendo $2a$ l'ampiezza della striscia circostante all'asse reale di t , entro la quale resta uniforme la funzione Y .

Nota. Volendo restare invece nel campo algebrico, con una conveniente proiettività si porti l'asse reale di t nel cerchio $|\tau| = 1$, e si otterrà allora per la *funzione algebrica* $Y(\tau)$ uno sviluppo in serie di LAURENT.

CAPITOLO III.

Trasformazioni distendenti: rappresentazione effettiva di un circuito di curva algebrica reale.

1. Le considerazioni svolte nel capitolo precedente, ci hanno condotto a dimostrare che ogni circuito di curva algebrica reale può venire rappresentato — in tutta la sua integrità — mediante una sola coppia di funzioni uniformi di un parametro reale t . Ma, per ottenere effettivamente tale rappresentazione, è necessaria la costruzione effettiva di una curva razionale reale, relativa a una riemanniana simmetrica assegnata, la quale costruzione presenterebbe qualche difficoltà.

Ora la richiesta rappresentazione del circuito si può ottenere direttamente mediante la successiva applicazione di alcune semplici trasformazioni, che chiamo *distendenti*, imperocchè equivalgono quasi a distendere materialmente le anse del circuito fino a raddrizzarle, pervenendo in fine ad una specie di ovale (se si parte da un circuito pari privo di punti impropri, caso che — come abbiamo visto — può considerarsi affatto generale) o pervenendo, invece, a un circuito impari uniseato dalle parallele all'asse y . In ciascuno dei due casi si trova subito una curva razionale reale (conica o retta) in corrispondenza univoca col circuito, in base alla quale si ottiene la rappresentazione analitica di questo.

Tuttavia importa qui osservare che la rappresentazione così ottenuta del circuito, in funzione di un parametro t , è *semplicemente univoca e non biunivoca*; a ogni punto di t corrisponde un unico punto del circuito, ma non viceversa. La mancata biunivocità non infirma però la soluzione del nostro problema, che implica la rappresentazione dell'intero circuito mediante espressioni vevoli per qualunque valore del parametro reale, ma non l'univoca invertibilità di queste.

2. Si consideri una cubica piana razionale R , dotata di punto doppio isolato: la *parabola punctata* di NEWTON; con una proiettività possiamo collocarne un flesso nell'origine degli assi, e la relativa polare armonica far coincidere con la retta impropria: il ramo reale della cubica assumerà allora la classica forma del *serpentino* (fig. 8), avendo l'origine come centro di simmetria. Prendiamo l'equazione della R nella forma

$$(x + y) + y^2(x - y) = 0:$$

sarà punto isolato il punto all'infinito dell'asse x e tangente di flesso la retta $x + y = 0$. Le parallele all'asse y segano la R in tre punti, e due di queste parallele: $x = a_1$, $x = a_2$, riescono tangenti reali. (Quantunque non importi saperlo si ha

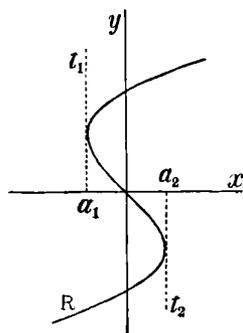


Fig. 8.

$$a_1 = -a_2 = \frac{-3(\sqrt{5} - 2)}{2\sqrt{\sqrt{5}} - 2},$$

le due rette riuscendo così simmetriche rispetto all'asse y).

La R , come si è detto, è razionale: può esprimersi parametricamente con

$$\begin{cases} x = \frac{t^3 - t}{t^2 + 1} \\ y = t. \end{cases}$$

3. Ora, dato un circuito Γ di curva reale che — come abbiamo detto — possiamo supporre pari e al finito, dovremo applicare ad esso la trasformazione che consiste nel lasciare inalterata la y di un suo punto generico $P = (xy)$, e nel sostituire alla x il valore che il parametro t assume nel punto (o nei punti) di R avente la stessa ascissa, cioè la trasformazione

$$\begin{cases} x' = t \\ y' = y, \end{cases} \quad \text{con } t \text{ legata ad } x \text{ dalla relazione} \quad x = \frac{t^3 - t}{t^2 + 1}.$$

È anzitutto ovvio che la trasformazione è *biunivoca* fra i punti del piano (reale) *esterni alla striscia* compresa fra le due rette t_1 e t_2 , di equazioni $x = a_1$ e $x = a_2$, che sono le due tangenti ad R parallele all'asse y , imperocché le rette $x = k$, per $k > a_2$ o $k < a_1$ sono unisecanti il circuito R ; pertanto importa analizzare quello che accade per i punti della striscia suddetta, o — per maggior chiarezza — per una striscia Σ , un poco più ampia di quella, che la contenga nel suo interno: definiremo dunque la striscia Σ con la disuguaglianza:

$$a_1 - \delta \leq x \leq a_2 + \delta$$

con δ piccolo e positivo.

Consideriamo ora un arco γ , appartenente al circuito Γ , che penetri entro la striscia Σ : distingueremo tre casi che soli ci interessano per l'applicazione, quantunque non siano affatto gli unici possibili.

a) L'arco γ , del circuito Γ , attraversi la striscia Σ (restando al finito)

senza avere quivi tangenti parallele all'asse y , cioè riuscendo sempre uniscato da tali parallele.

Come si trasformi l'arco $\gamma = ABCDE$ viene chiaramente indicato dalla figura 9, dove importa notare che l'arco γ' , trasformato di γ , è ancora uniscato

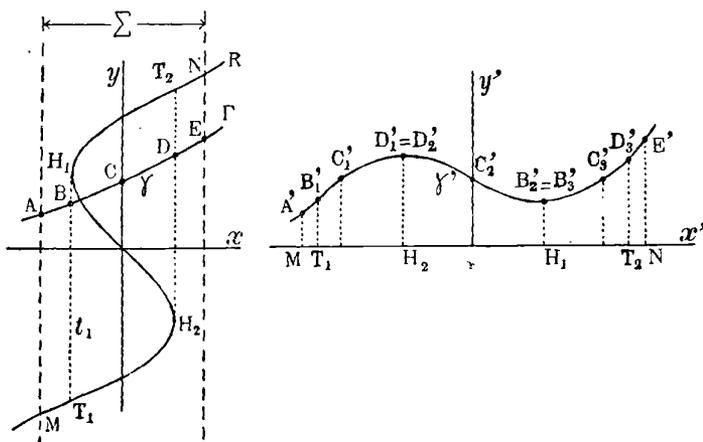


Fig. 9.

cato dalle parallele all'asse y' , mentre all'arco BCD vengono a corrispondere tre archi su γ' , precisamente gli archi: $B'_1C'_1D'_1$, $D'_2 = D'_1C'_2B'_2$, $B'_3 = B'_2C'_3D'_3$, ciascuno relativo ai tre archi della R : T_1H_2 , H_2H_1 , H_1T_2 .

b) L'arco γ penetri (per es. dalla destra) entro la striscia Σ , e ne esca dalla stessa parte, avendosi per esso una tangente, c , parallela all'asse y , col

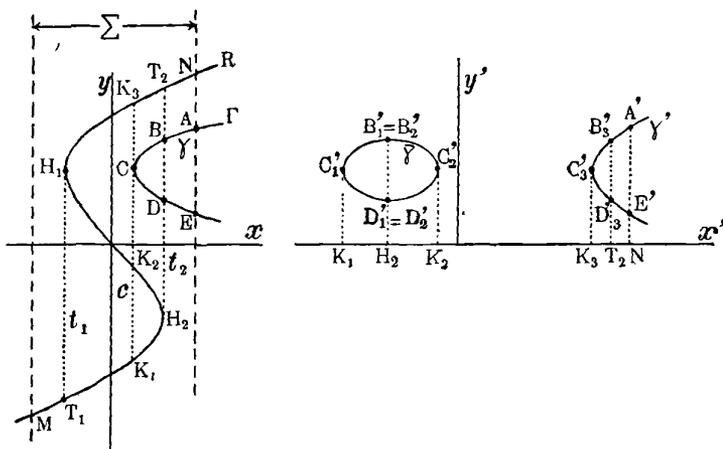


Fig. 10.

punto di contatto C : l'arco γ riesce così tutto alla destra di c e bisecato dalle parallele all'asse y .

Come si trasforma l'arco $\gamma = ABCDE$ viene indicato chiaramente dalla figura 10.

Qui importa osservare come l'arco γ dia origine a un ovale $\bar{\gamma}$, corrispondente ai due archi di R : K_1H_2 e H_2K_2 , e a un ramo γ' che propriamente possiamo considerare come il *trasformato* di γ , imperocchè esso si collega per continuità all'altra parte del circuito Γ' che — corrispondendo alla parte di Γ esterna a Σ , è con questa in corrispondenza biunivoca. L'ovale $\bar{\gamma}$ invece resta isolato, e quindi i suoi punti non appaiono tra gli omologhi dei punti di Γ , ove ci si muova per *continuità* entro il campo *reale*. Infine osserveremo che l'arco γ' , al pari dell'arco γ con cui è in corrispondenza biunivoca, è bisecato dalle parallele all'asse y' e ha una tangente (in C_3') parallela alla detta direzione.

c) L'arco γ attraversi (per es. entrando dalla sinistra e uscendo dalla destra) la striscia Σ , riuscendo tangente prima ad una poi all'altra delle due tangenti t del circuito R ; nel nostro caso prima alla t_2 e poi alla t_1 ; l'arco γ allora o avrà un nodo entro Σ , o assumerà la classica forma del serpentino, ipotesi per noi indifferenti; in ogni caso le parallele all'asse y comprese fra t_1 e t_2 saranno trisecanti l'arco, mentre quelle esterne solo unisecanti. Nella figura 11 noi abbiamo segnato i due archi (γ) e γ' che corrispondono

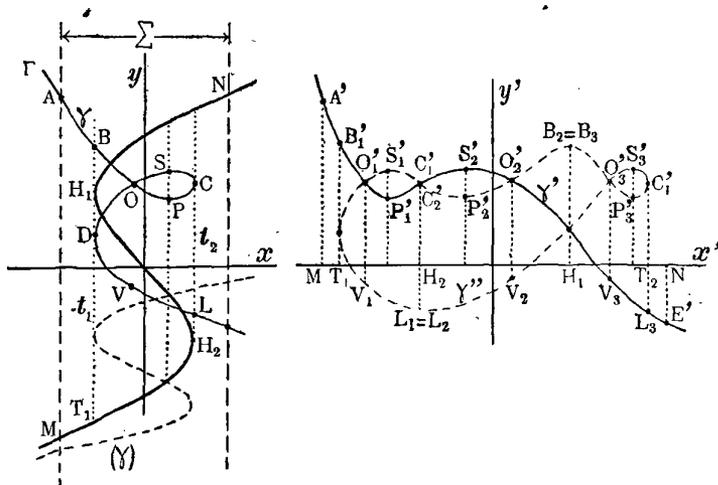


Fig. 11.

ai due casi considerati; ci riferiremo per la trasformazione all'arco $\gamma = ABOPCSDVLE$ dotato di nodo, per il quale potrebbe sembrare che si presentassero maggiori difficoltà.

L'arco γ trasformato dà origine a un arco γ' , che possiamo ritenere

come *effettivo trasformato* di γ , e a un circuito chiuso γ'' , giacchè gli stessi punti di γ , interni alla coppia di tangenti t_1 e t_2 , vengono trasformati in tre punti, in relazione ai tre archi T_1H_2 , H_2H_1 , H_1T_2 del circuito R , cui corrispondono i tre segmenti con lo stesso nome dell'asse x' . La figura 11, ove si faccia attenzione alle lettere e ai relativi indici, rende chiaro il modo con cui opera la trasformazione; qui importa notare che alla curva Γ , fuori della striscia Σ , corrisponde biunivocamente la curva Γ' , e che quando un punto di Γ si muove descrivendo γ , il punto omologo viene a descrivere l'arco che abbiamo indicato con γ' , il quale è unisecato dalle parallele all'asse y' . Infatti, quando il detto punto di γ descrivendo l'arco $ABOPC$, giunto in C , inizia poi il percorso dell'arco $CSOD$ (avendosi dunque diramazione per la relativa y) il corrispondente punto della cubica R descrive l'arco MT_1H_2 e, giunto in H_2 , prosegue a descrivere l'arco H_2H_1 (avendosi diramazione anche per la relativa $y = t = x'$); e quel che accade in corrispondenza al punto C si ripete in corrispondenza al punto D , riuscendo così biunivoca la corrispondenza fra i punti di Γ e quelli della R , e quindi anche fra i punti dell'arco γ' e quelli dell'asse x' , onde appunto l'arco γ' appare unisecato dalle parallele all'asse y' . L'esistenza del circuito γ'' , trasformato dell'arco $BOPCSODVL$, e non collegantesi per continuità al circuito Γ' , trasformato di Γ , non interessa affatto nella nostra analisi, e tanto meno interessano le sue particolarità; tuttavia, per maggior completezza, queste sono messe in chiaro dalla trasformazione effettiva, rappresentata dalla figura 11, ed è assai facile giustificarne le relative circostanze.

4. La *trasformazione* che abbiamo indicato la chiameremo *distendente*, e così pure diremo *distendente* la *cubica* razionale R che serve ad attuarla. Se si considerano i tre casi, in particolare l'ultimo, in cui la trasformazione è stata applicata, ci si renderà facilmente conto della ragione del nome adottato: nel primo caso infatti l'arco γ , venendo trasformato nell'arco γ' , è come stirato triplicandone quasi la lunghezza e — nell'ultimo caso che è il più importante — l'arco γ riesce effettivamente disteso togliendone il nodo e le due sinuosità corrispondenti alle tangenti t_1 e t_2 ; ed ugual effetto si sarebbe ottenuto applicando la trasformazione ad un serpentino quale (γ).

5. Passiamo ad applicare le considerazioni svolte alla trasformazione di un circuito Γ : questo, come più volte abbiamo detto, può essere supposto pari, tutto al finito, privo di singolarità più complesse del nodo, e in posizione generica rispetto agli assi.

Consideriamo le tangenti $t_1, t_2 \dots t_m$ del circuito Γ , parallele all'asse delle y , e sia $m > 2$. Queste tangenti siano numerate secondo l'ordine con cui i relativi punti di contatto si susseguono sopra il circuito. I punti staccati sopra l'asse x dalle tangenti consecutive non riusciranno, in generale, affatto consecutivi; tuttavia vi saranno due tangenti consecutive per cui anche sono consecutive le traccie sull'asse x o — almeno — tali che entro il segmento da tali traccie determinato non cada altra coppia di tangenti consecutive. Chiamiamo con t_1 e t_2 tali tangenti.

Con una proiezione che lasci fermi i punti impropri degli assi x e y possiamo portare la nostra cubica distendente R ad avere appunto come tangenti le t_1 e t_2 date, e conseguentemente possiamo eseguire la relativa trasformazione del circuito Γ in un circuito Γ' .

È chiaro che il circuito Γ' avrà $m - 2$ tangenti parallele all'asse y ; imperocchè la nostra trasformazione distende l'arco di Γ che dava origine alle due tangenti t_1 e t_2 [caso c) del § 3] e non introduce nessuna nuova tangente, giacchè ogni arco di Γ che penetri entro la striscia $t_1 t_2$ corrisponderà a uno dei due casi a) o b) sopra considerati.

Riapplicando al circuito Γ' una seconda trasformazione distendente, e così di seguito $\frac{m}{2} - 1$ volte, arriveremo al fine ad un circuito Γ_0 dotato di due sole tangenti (parallele all'asse y) che potremo supporre le rette

$$x = 0, \quad x = 1.$$

Si consideri ora l'ellisse

$$y^2 + x(x - 1) = 0,$$

che possiamo rappresentare parametricamente con

$$x = \frac{1}{1 + t^2}, \quad y = \frac{t}{1 + t^2};$$

in base al teorema del Cap. II, § 4, i punti di Γ_0 riusciranno funzioni biunivoche di quelli dell'ellisse aventi la stessa ascissa, e quindi del parametro t .

Ora si osservi che applicando successivamente le nostre trasformazioni distendenti, si passa da un circuito $\Gamma^{(i)}$ a un altro circuito $\Gamma^{(i+1)}$ in modo che a un punto di $\Gamma^{(i+1)}$ corrisponde un unico punto di $\Gamma^{(i)}$ (ma non viceversa). Pertanto avremo in fine che a ciascun punto reale di t corrisponde un unico punto di Γ posto al finito, onde questo *circuito potrà riuscire rappresentato ponendo*

$$\begin{cases} x = \psi_1(t) \\ y = \psi_2(t) \end{cases}$$

con ψ_1 e ψ_2 funzioni algebriche regolari nell'intorno dell'asse reale di t , (e quivi sprovviste di poli) e quindi, mediante la trasformazione indicata

$$\tau = \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^{\lambda t} + 1},$$

funzioni regolari di τ nell'interno del cerchio $|\tau| \leq 1$.

Anche qui, ove si voglia restare entro il campo algebrico, si trasformi con una proiettività l'asse reale di t nel cerchio $|\tau| = 1$, e allora si avranno per x e y funzioni algebriche sviluppabili in serie di LAURENT.

A differenza della trasformazione indicata nel Cap. II, questa nostra seconda via dà la risoluzione effettiva del problema; qui occorre soltanto la conoscenza delle m tangenti del circuito Γ (parallele all'asse y), il che importa la risoluzione di un'equazione algebrica; e la dimostrazione della rappresentabilità dell'intero circuito mediante funzioni analitiche (più precisamente algebriche) regolari in tutti i punti dell'asse reale di un parametro t , è stabilita all'infuori del teorema relativo all'esistenza di una funzione algebrica reale corrispondente ad una data riemanniana simmetrica, teorema che invece è fondamentale per gli sviluppi del Cap. II.

Cagliari, R. Università.

Congruences avec les deux nappes de la surface focale applicables l'une sur l'autre par les points correspondants

S. FINIKOFF, professeur de l'Université de Moscou

Je me pose un problème: déterminer toutes les congruences dont les deux nappes de la surface focale sont applicables l'une sur l'autre par les points correspondants; en d'autres termes, déterminer tous les couples de surfaces applicables qu'on peut placer dans l'espace de manière que la droite qui joint les points correspondants soit leur tangente commune.

Toutes les congruences de ce genre ont pour la surface des centres des rayons un hélicoïde minimum. Les rayons de la congruence sont dans les plans des normales et des génératrices rectilignes de cette surface et font sur la même hélice le même angle avec les normales. Les deux nappes de la surface focale applicables sont des hélicoïdes communs. Tous les couples des surfaces qui divisent le segment focal dans des rapports constants et inverses sont applicables l'une sur l'autre et sur une surface de révolution.

J'examine enfin le cas où ces deux nappes sont égales. La congruence est sans doute celle de M. BIANCHI. Deux cas se présentent alors: ou ce sont deux hélicoïdes minima égaux ou certaines surfaces de révolution symétriques par rapport au plan qui contient les milieux des segments focaux de la congruence.

Soit

$$ds^2 = A^2 du^2 + 2AB \cos \omega dudv + B^2 dv^2$$

l'élément linéaire de la représentation sphérique des surfaces développables de la congruence et 2ρ la distance des points focaux. Alors les éléments linéaires des deux nappes de la surface focale sont (BIANCHI, *Lezioni di Geom. diff.*, t. I, p. 322)

$$ds_1^2 = 4 \left[\frac{\partial \rho}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \rho \right]^2 du^2 - 8 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \rho \left[\frac{\partial \rho}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \rho \right] dudv + 4\rho^2 \left[\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}^2 + B^2 \right] dv^2$$

$$ds_2^2 = 4\rho^2 \left[\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}^2 + A^2 \right] du^2 - 8 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \rho \left[\frac{\partial \rho}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \rho \right] dudv + 4 \left[\frac{\partial \rho}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \rho \right]^2 dv^2$$

et nous avons pour notre problème les trois équations fondamentales

$$(1) \quad \left[\frac{\partial \rho}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \rho \right]^2 = \rho^2 \left[\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}^2 + A^2 \right]$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left[\frac{\partial \rho}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \rho \right] = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left[\frac{\partial \rho}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \rho \right]$$

$$(3) \quad \left[\frac{\partial \rho}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \rho \right]^2 = \rho^2 \left[\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}^2 + B^2 \right].$$

Si $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0$, de l'équation (2) il suit que $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}$ est nul aussi. On peut prendre alors $A = B = 1$. Les équations (1) et (3) se réduisent à

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = \rho, \quad \frac{\partial \rho}{\partial v} = \rho$$

et l'équation de M. GUICHARD

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + AB \cos \omega \right] \rho = 0$$

donne $\cos \omega = -2$, qui est impossible.

Si $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}$ ne sont pas nuls nous multiplions (1) par $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}^2$, (3) par $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}^2$ et retranchons; en vertu de (2) nous recevons

$$(5) \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}^2 A^2 = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}^2 B^2$$

en changeant le signe de u nous pouvons poser

$$(5') \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} A = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} B$$

ou

$$\frac{\partial A}{\partial v} - \cos \omega \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B}{\partial u} - \cos \omega \frac{\partial A}{\partial v}$$

et

$$(6) \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial B}{\partial u}.$$

En introduisant une fonction auxiliaire φ , nous aurons

$$(6') \quad A = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad B = \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

L'équation (2) donne

$$(7) \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial v}$$

ou en vertu de (4) (5')

$$(7') \quad B \frac{\partial \rho}{\partial u} = A \frac{\partial \rho}{\partial v}$$

ou

$$\frac{D(\rho, \varphi)}{D(u, v)} = 0$$

ρ est une fonction de φ seul.

Aux trois équations (1), (2), (3) on peut en ajouter une quatrième en égalant la courbure totale aux points correspondants des deux nappes de la surface focale (Lez., I, p. 323) qui est sans doute une conséquence des trois premières, l'équation de M. GUICHARD (4) et de l'équation de GAUSS pour la sphère

$$(8) \quad \frac{\frac{A}{B} \left[\frac{\partial \omega}{\partial v} + \frac{B}{A} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \sin \omega \right]}{\frac{\partial \rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \rho} = \frac{\frac{B}{A} \left[\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{A}{B} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin \omega \right]}{\frac{\partial \rho}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \rho}$$

d'où il suit

$$\frac{A}{B} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \left[\frac{\partial \omega}{\partial v} + \frac{B}{A} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \sin \omega \right] = \frac{B}{A} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \left[\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{A}{B} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin \omega \right]$$

ou en vertu de (5')

$$(9) \quad A \frac{\partial \omega}{\partial v} = B \frac{\partial \omega}{\partial u}$$

ou

$$\frac{D(\omega, \varphi)}{D(u, v)} = 0$$

ω est une fonction de φ seul.

Prenons pour les dérivées de φ les notations de MONGE. L'équation (1) prend la forme

$$(10) \quad \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 p^2 + 2 \frac{d\rho}{d\varphi} p \frac{1 - \cos \omega s}{\sin^2 \omega} \frac{1}{q} p - \rho^2 p^2 = 0$$

d'où il suit que $\frac{s}{pq}$ est une fonction de φ seul

$$(11) \quad \frac{s}{pq} = f(\varphi).$$

En intégrant, nous obtenons

$$(12) \quad p = f_1(\varphi)U_1,$$

où U_1 est une fonction de u seul. Après une seconde intégration nous aurons

$$f_2(\varphi) = U + V$$

et

$$(13) \quad \varphi = \mathbb{D}(U + V)$$

U et V sont fonctions de u et de v seuls qui ne peuvent pas se réduire à des constantes.

Prenons pour nouvelles variables les u et v . Alors φ et par conséquent ρ et ω sont fonctions d'une seule variable $x = u + v$. La dérivation par rapport à x sera indiquée par l'accent.

Pour ρ nous avons l'équation (10) et (4)

$$(14) \quad \rho'^2 + 2\rho'\rho \frac{\varphi''}{\varphi'} \frac{1 - \cos \omega}{\sin^2 \omega} - \rho^2 \varphi'^2 = 0$$

$$(15) \quad \rho'' + 2\rho' \frac{\varphi''}{\varphi'} \frac{1 - \cos \omega}{\sin^2 \omega} + \rho \left[2 \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \frac{1 - \cos \omega}{\sin^2 \omega} \right)^2 + \rho'^2 \cos \omega \right] = 0.$$

En outre pour déterminer ρ , ω , φ nous avons seulement l'équation de GAUSS pour la sphère.

En différentiant la (14) par x et éliminant ρ'' à l'aide de (15) nous obtenons

$$(16) \quad \left[\left(\frac{\varphi''}{\varphi'(1 + \cos \omega)} \right)' + \varphi'^2(1 + \cos \omega) \right] \left[\rho^4 + 2\rho \frac{\varphi''}{\varphi'(1 + \cos \omega)} \right] = 0.$$

Le second facteur ne peut être nul, car dans ce cas la (14) donnerait $\rho^2 \varphi'^2 = 0$.
Donc

$$(16') \quad \left(\frac{\varphi''}{\varphi'(1 + \cos \omega)} \right)^2 + \varphi'^2(1 + \cos \omega) = 0.$$

Multiplions par $\frac{\varphi''}{\varphi'(1 + \cos \omega)}$ et intégrons, nous aurons

$$(17) \quad \left(\frac{\varphi''}{\varphi'(1 + \cos \omega)} \right)^2 + \varphi'^2 = a^2$$

d'où

$$(17') \quad \frac{\varphi''}{\varphi'(1 + \cos \omega)} = \pm \sqrt{a^2 - \varphi'^2}$$

a est constante d'intégration.

Introduisons une nouvelle fonction inconnue α par l'équation

$$(18) \quad \varphi' = a \sin \alpha.$$

Le double signe du radical (17') correspond au changement de α en $\pi - \alpha$; on peut l'omettre. Nous prendrons le signe $-$ et écrirons, en éliminant φ' , sous la forme

$$(19) \quad \alpha' = -a \sin \alpha (1 + \cos \omega).$$

En choisissant convenablement le signe de a nous déduisons de (14)

$$(20) \quad \rho' = a\rho(1 + \cos \alpha).$$

Sauf ces deux équations (19) et (20) pour déterminer ρ , ω , α nous n'avons que l'équation de GAUSS pour la sphère.

Les quantités fondamentales de la congruence seront :

a) l'élément linéaire de représentation sphérique de la congruence

$$(21) \quad ds^2 = a^2 \sin^2 \alpha (du^2 + 2 \cos \omega dudv + dv^2)$$

b) l'élément linéaire des deux nappes de la surface focale

$$(22) \quad ds_1^2 = 4a^2 \rho^2 (du^2 + 2 \cos \alpha dudv + dv^2)$$

c) et leur secondes formes quadratiques (Lez., I, p. 322)

$$(23) \quad \begin{aligned} & 2a\rho \sin \alpha [a \sin \omega du^2 - (\omega' - a \cos \alpha \sin \omega) dv^2] \\ & 2a\rho \sin \alpha [(\omega' - a \cos \alpha \sin \omega) du^2 - a \sin \omega dv^2]. \end{aligned}$$

Si nous prenons pour nouvelles variables $x = u + v$ et $y = u - v$, les mêmes formules prennent la forme

$$(21') \quad ds^2 = a^2 \sin^2 \alpha \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} dx^2 + \sin^2 \frac{\omega}{2} dy^2 \right)$$

$$(22') \quad ds_1^2 = 4a^2 \rho^2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} dx^2 + \sin^2 \frac{\alpha}{2} dy^2 \right)$$

$$(23') \quad \begin{aligned} & a\rho \sin \alpha \left[- \frac{\omega' - a \sin \omega (1 + \cos \alpha)}{2} dx^2 + 2 \frac{\omega' + a \sin \omega (1 - \cos \alpha)}{2} dx dy - \right. \\ & \left. - \frac{\omega' - a \sin \omega (1 + \cos \alpha)}{2} dy^2 \right] \\ & a\rho \sin \alpha \left[\frac{\omega' - a \sin \omega (1 + \cos \alpha)}{2} dx^2 + 2 \frac{\omega' + a \sin \omega (1 - \cos \alpha)}{2} dx dy + \right. \\ & \left. + \frac{\omega' - a \sin \omega (1 + \cos \alpha)}{2} dy^2 \right]. \end{aligned}$$

De l'équation (22) il suit que les deux nappes sont applicables sur une surface de révolution sur la quelle $x = \text{const}$ et $y = \text{const}$ sont parallèles et méridiens; de plus les coefficients des secondes formes sont aussi des fonctions de x seul, d'où il suit, en vertu d'un théorème de M. STÄCKEL, que ce sont des hélicoïdes généraux.

Sur la sphère représentative $x = \text{const}$ et $y = \text{const}$ sont aussi des parallèles et méridiens. Si χ et ψ sont la longitude et la latitude nous aurons

$$(24) \quad ds^2 = a^2 \sin^2 \alpha \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} dx^2 + \sin^2 \frac{\omega}{2} dy^2 \right) = d\psi^2 + \cos^2 \psi d\chi^2.$$

Si nous posons $by = \chi$ ($b = \text{const}$), l'équation (24) se décompose en deux

$$(24') \quad d\psi = a \sin \alpha \cos \frac{\omega}{2} dx$$

$$b \cos \psi = a \sin \alpha \sin \frac{\omega}{2}$$

d'où il suit pour ω l'équation

$$(25) \quad \frac{\omega'}{2} = a \sin \omega \cos \alpha - \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \frac{\omega}{2}}.$$

Les trois équation (19), (20) et (25) déterminent complètement notre congruence. C'est une congruence de RIBAUCCOUR car

$$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -a \cos \alpha$$

satisfont évidemment à l'équation de M. GUICHARD

$$\frac{\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}}{\partial u} = \frac{\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}}{\partial v}.$$

Pour la surface des centres de la congruence nous trouverons après un bref calcul:

l'élément linéaire

$$(26) \quad \begin{aligned} ds_0^2 &= 4a^2 \rho^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} (du^2 + 2 \cos \beta dudv + dv^2) \\ &= 4a^2 \rho^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} dx^2 + \sin^2 \frac{\beta}{2} dy^2 \right) \end{aligned}$$

où

$$(27) \quad \cos \beta = -\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos \omega - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

et la seconde forme fondamentale

$$(28) \quad \begin{aligned} 4a\rho \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} \left(\frac{\omega'}{2} + a \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \omega \right) (du^2 - dv^2) = \\ = 4a\rho \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} \left(\frac{\omega'}{2} + a \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \omega \right) dx dy. \end{aligned}$$

Si nous écrivons l'équation de CODAZZI pour cette surface, nous apercevons sans peine une intégrale de l'équation (20)

$$(29) \quad \rho = \frac{C}{2a \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\omega'}{2} + a \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \omega \right)}.$$

Donc la seconde forme sera

$$(28') \quad 2C \cot \frac{\beta}{2} (du^2 - dv^2) = 2C \cot \frac{\beta}{2} dx dy.$$

La surface des centres est aussi applicable sur une surface de révolution et les lignes asymptotiques correspondent aux parallèles et méridiens. Donc c'est un hélicoïde gauche à plan directeur.

La surface correspondante par orthogonalité d'élément linéaire a la courbure totale $K = -\frac{1}{R^2}$ déterminée par les équations

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{\partial R}{\partial v} = 2a \cos \alpha.$$

En utilisant l'équation (20) nous obtenons, à un facteur constant près,

$$K = -\frac{e^{4ax}}{\rho^4}.$$

Les deux formes fondamentales sont

$$(30) \quad \begin{aligned} ds^{-2} &= a^2 \rho^4 \sin^2 \alpha e^{-4ax} (du^2 - 2 \cos \omega dudv + dv^2) \\ &= a^2 \rho^4 \sin^2 \alpha e^{-4ax} \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} dx^2 + \cos^2 \frac{\omega}{2} dy^2 \right) \\ 2a^2 \rho^2 \sin^2 \alpha \sin \omega e^{-2ax} dudv &= \frac{1}{2} a^2 \rho^2 \sin^2 \alpha \sin \omega e^{-2ax} (dx^2 - dy^2). \end{aligned}$$

C'est une surface de révolution.

En utilisant les équations (24) nous obtenons pour nos surfaces les équations: les deux nappes de la surface focale

$$(31) \quad \begin{aligned} x_1 &= r \cos(\chi + \zeta), & y_1 &= r \sin(\chi + \zeta), & z_1 &= -\frac{C}{b^2} \chi + \rho \sin \psi \\ x_2 &= -r \cos(\chi - \zeta), & y_2 &= -r \sin(\chi - \zeta), & z_2 &= -\frac{C}{b^2} \chi - \rho \sin \psi \end{aligned}$$

la surface des centres de la congruence

$$(32) \quad x_0 = r \sin \zeta \sin \chi, \quad y_0 = r \sin \zeta \cos \chi, \quad z_0 = -\frac{C}{C^2} \chi$$

la surface correspondante par orthogonalité d'élément linéaire

$$(33) \quad \bar{x} = r_1 \cos \chi, \quad \bar{y} = r_1 \sin \chi, \quad \bar{z} = -\int \cot \psi \, dr_1$$

où

$$r^2 = 4 \frac{a^2}{b^2} \rho^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left[\sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\omega}{2} \sin \psi \right]^2 + \rho^2 \cos^2 \psi$$

$$r_1 = \frac{a}{2} \rho^2 e^{-2ax} \sin \alpha \cos \frac{\omega}{2}$$

$$\cos \zeta = \frac{\cos \psi}{\rho}.$$

La surface des centres et les deux nappes de la surface focale sont des hélicoïdes avec le même axe. Les rayons de la congruence sont orthogonaux aux hélices de la surface des centres et sur la même hélice font avec les génératrices rectilignes le même angle.

Considérons maintenant un cas particulier intéressant quand la congruence est une congruence W et par conséquent celle de M. BIANCHI. Dans ce cas les lignes asymptotiques sur les deux nappes de la surface focale se correspondent; les surfaces sont donc non seulement applicables mais encore égales ou symétriques. Les équations (23) donnent une condition

$$(34) \quad (\omega' - a \cos \alpha \sin \omega)^2 = a^2 \sin^2 \omega$$

qu'il faut ajouter aux équations (19) et (25). En extrayant la racine carrée nous avons

$$(34) \quad \omega' = 2a \sin \omega \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

ou

$$(34'') \quad \omega' = -2a \sin \omega \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

En substituant ω' dans le (25) nous aurons dans le premier cas

$$a \sin \omega \sin^2 \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \frac{\omega}{2}}$$

ou

$$4a^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) = b^2$$

et

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\omega}{2} = c$$

où

$$(35) \quad c^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{2a}.$$

On démontre aisément que l'équation (35) satisfait aux équation (19), (25) et (34'). Pour les deux nappes de la surface focale nous trouverons les mêmes formes quadratiques

$$(36) \quad ds_1^2 = \frac{C^2}{4a^2c^4} \tan^2 \frac{\omega}{2} \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} dx^2 + \sin^2 \frac{\omega}{2} dy^2 \right) \\ 2C \cot \frac{\alpha}{2} dx dy.$$

Donc les deux nappes sont des hélicoïdes minima égaux.

Dans le cas de l'équation (34') nous aurons par le même calcul

$$(37) \quad \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta}{2} = c$$

qui satisfait aux équations (19), (34'') et par conséquent à la (25). Pour les deux nappes de la surface focale nous obtenons des formes fondamentales

$$ds_1^2 = 4a^2 \rho^2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} dx^2 + \sin^2 \frac{\alpha}{2} dy^2 \right) \\ \pm a^2 \rho \sin \alpha \sin \omega (dx^2 + dy^2).$$

Ce sont donc deux surfaces de révolution; leurs lignes asymptotiques sont imaginaires. La surface des centres de la congruence est un plan, car sa

seconde forme fondamentale est identiquement nulle. En termes finis nous pouvons écrire leurs équations en posant

$$(38) \quad \chi = a \sin \beta y, \quad r = \frac{C}{\cos \frac{\beta}{2}} e^{2a \cos^2 \frac{\beta}{2} x}$$

deux nappes de la surface focale

$$(39) \quad \begin{aligned} x_1 &= r \cos\left(\chi - \frac{\beta}{2}\right), & y_1 &= r \sin\left(\chi - \frac{\beta}{2}\right), & z_1 &= C_2 \left(r \cos \frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}} \\ x_2 &= -r \cos\left(\chi + \frac{\beta}{2}\right), & y_2 &= -r \sin\left(\chi + \frac{\beta}{2}\right), & z_2 &= -C_2 \left(r \cos \frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}} \end{aligned}$$

la surface des centres

$$(40) \quad x_0 = r \sin \frac{\beta}{2} \sin \chi, \quad y_0 = -r \sin \frac{\beta}{2} \cos \chi, \quad z_0 = 0.$$

C'est évidemment le plan de symétrie pour la surface focale.

Par exemple, pour $\beta = \frac{2\pi}{3}$, la surface focale se compose de deux paraboloides de révolution égaux ayant un contact aux sommets; les points correspondants sont tournés d'un angle $-\frac{\pi}{3}$.

En revenant au cas général nous pouvons dire que non seulement les deux nappes de la surface focale, mais encore chaque couple des surfaces lieu des points qui divisent les segments focaux de la congruence en un rapport constant $\frac{m}{n}$ et $\frac{n}{m}$ sont des hélicoïdes applicables l'un sur l'autre. En effet si (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) sont les deux foyers de rayon, les coordonnées courantes de nos surfaces sont $\frac{nx_1 + mx_2}{n + m}$ et $\frac{mx_1 + nx_2}{n + m}$ etc. L'élément linéaire de l'une et de l'autre est

$$\mathcal{S}\left(\frac{ndx_1 + ndx_2}{n + m}\right)^2 = \left(\frac{n - m}{n + m}\right)^2 \mathcal{S}dx_1^2 + \frac{4nm}{(n + m)^2} \mathcal{S}dx_2^2$$

où (x_0, y_0, z_0) est le milieu du segment focal. Le théorème est évident si nous posons pour $\mathcal{S}dx_1^2$ et $\mathcal{S}dx_2^2$ les expressions (21') et (26).

Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione

Di FEDERIGO ENRIQUES (a Roma)

I. Introduzione.

In una Nota inserita nei « Comptes rendus » dell'Accademia di Parigi, nel 1912, ho annunciato un teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili; ma, qualche difficoltà d'ordine delicato nello sviluppo della dimostrazione avendomi fatto rimandare la pubblicazione della memoria diffusa che stavo preparando, altre occupazioni sopraggiunte mi hanno distolto fino ad oggi dall'argomento. Lo riprendo ora e preciso il teorema enunciato, fornendone la dimostrazione.

Per intendere lo spirito del problema e il senso del risultato che qui viene stabilito, conviene ricordare che, per proiezione da un punto O (che può essere esterno ovvero appartenere alla superficie con una certa molteplicità) una superficie data, F , viene rappresentata sopra un piano multiplo, d'un certo ordine n , con una certa curva diramazione C . La C è l'immagine della curva di contatto del cono circoscritto ad F da O , non computando in questo il cono che proietta la curva doppia di F , supposta non cuspidale.

L'ordine m di C si esprime in funzione del genere π delle curve sezioni di F coi piani per O e del numero delle intersezioni di F colle rette per O , che è l'ordine n del piano multiplo:

$$m = 2n + 2\pi - 2.$$

Ma la C non è una curva generale dell'ordine m . Anzi in corrispondenza ad una superficie F di moduli generali (dotata di curva doppia passante per O con una certa molteplicità e possedente un certo numero di punti tripli fuori di O), e del resto anche per una F proiettivamente generale nel proprio ordine, essa possiede un certo numero di nodi e di cuspidi: i nodi nascono, in generale, dalle bitangenti di F per O , e le cuspidi dalle rette per O aventi un contatto tripunto con F . In funzione di n e π , e del numero dei nodi e

delle cuspidi di C , si esprimono con formule note di ZEUTHEN e NÖTHER ⁽⁴⁾ gl'invarianti aritmetici della superficie F .

Ora sorge la questione d'esistenza: quand'è che una curva piana C , dotata d'un certo numero di nodi e di cuspidi, può assumersi come curva di diramazione d'un piano multiplo n -plo?

Per rispondere, si assuma ad arbitrio una C , d'un certo ordine pari $m = 2n + 2\pi - 2$, e si cerchi di costruire una superficie F rappresentata sopra un piano n -plo che abbia come curva di diramazione C : a tal uopo si costruirà una curva algebrica, K , che sia rappresentata sopra una retta n -pla, a , i cui punti di diramazione son dati come intersezioni di a con C , e — facendo variare a in un fascio di rette, entro il piano di C — si considererà la superficie descritta da K . Se la K venisse razionalmente determinata in funzione della retta a , il luogo di essa costituirebbe evidentemente la cercata superficie F , riferita ad un piano n -plo che ha come curva di diramazione C . Ma, in generale, la K non verrà determinata razionalmente in funzione di a , anzi il gruppo dei punti di diramazione che viene assunto su a determinerà un numero finito di curve algebriche, ossia di rette n -ple, birazionalmente distinte: le quali si scambieranno l'una nell'altra quando la retta a , variando nel suo fascio, ritorna alla posizione iniziale.

Or dunque l'analisi delle condizioni d'esistenza d'un piano n -plo che debba avere come curva di diramazione una data curva C , conduce

a) ad esaminare come variano e si scambiano fra loro le rette n -ple birazionalmente distinte determinate in corrispondenza ad una retta del piano di C , variabile in un fascio $y = tx$: perciò conviene riferirsi alle corrispondenti superficie di RIEMANN e al piano della variabile complessa che rappresenta il parametro t , nel quale piano occorre considerare i cammini chiusi elementari che rispondono alle tangenti semplici a C appartenenti al nostro fascio, ovvero alle rette che vanno ai nodi e alle cuspidi di C ;

b) quindi ad enunciare le condizioni elementari d'invarianza della nominata retta n -pla;

c) infine a dimostrare che codeste condizioni d'invarianza, oltrechè necessarie, sono anche sufficienti a determinare *razionalmente una curva variabile K* , descrivente la domandata superficie F .

L'enunciato preciso del teorema d'esistenza si troverà al § V. Qui vogliamo rilevare esplicitamente un corollario importante, che fu da me avvertito fino dal 1912, cioè il seguente:

⁽⁴⁾ Cfr. SEVERI: « Atti R. Accad. Torino », 37 (1902).

Dato nel piano un sistema continuo $\{C\}$ di curve C , d'un certo ordine $m = 2n + 2\pi - 2$, dotate d'un certo numero di nodi e di cuspidi, se una C è curva di diramazione d'un piano n -plo, lo stesso accade per le altre curve del sistema $\{C\}$.

II. Condizioni d'invarianza a cui soddisfano le rette n -ple di un piano n -plo.

Pongasi che la curva piana C — d'un certo ordine $m = 2n + 2\pi - 2$, e dotata d'un certo numero di nodi e di cuspidi — sia la curva di diramazione d'un piano multiplo d'ordine n , e così rappresenti una superficie F , che potremo ritenere proiettata sul detto piano, $z = 0$, dal punto all'infinito dell'asse z . Si consideri nel piano $z = 0$, un fascio generico di rette, e sia quello $y = tx$, che ha per centro l'origine delle coordinate $O = (000)$: dove si ammette, in particolare, che l'asse z seghi la superficie F in n punti distinti: $1, 2, \dots, n$.

Vogliamo studiare come varia la riemanniana R_t , relativa ad una curva K_t , sezione di F con un piano $y = tx$, al variare del parametro t .

Distendiamo i valori complessi della variabile t sopra un piano τ , e consideriamo in questo un valore iniziale: $t = 0$. Avremo corrispondentemente una curva K_0

$$z = f(x_0) = \varphi_0(x)$$

che (nel linguaggio della geometria algebrica) deve ritenersi proiettata dal punto O all'infinito dell'asse z sopra una *retta* n -pla $y = 0$, i cui punti di diramazione sono le intersezioni

$$A_1, A_2, \dots, A_m$$

di essa con C .

Ora, distendendo i valori complessi della x sopra un piano di ARGAND-GAUSS, codesta retta n -pla appare come un piano su cui sono segnati l'origine O e gli n punti A_1, A_2, \dots, A_m , e la riemanniana R_0 riesce definita in rapporto ad un certo sistema di capi

$$l_i = OA_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

cui risponderanno certe trasposizioni

$$S_i = (rs)$$

scambianti due rami r e s della

$$z = \varphi_0(x).$$

Ricordiamo che i cappi l possono scegliersi ad arbitrio ed assumersi anche in un ordine arbitrario, dopodichè la conoscenza della curva K_0 determina il sistema S_i , in confronto ad altri che darebbero luogo a curve birazionalmente diverse; diguisachè — quando occorra — due qualunque dei punti A_i potranno ritenersi corrispondere a cappi contigui, salvo il conseguente mutamento delle S_i .

Moviamoci nel piano τ , partendo da un punto $t=0$ e descrivendo un giro chiuso, γ , che vi ritorni: allora R_0 si prolungherà nella riemanniana variabile R_t ; così vedremo, nel piano della variabile complessa x , muoversi i punti A_i , e a questo movimento dovremo accompagnare una variazione dei cappi l_i di guisa che essi non vengano mai ad attraversarsi (il cammino di t supponendosi tale che i punti A_i rimangano sempre distinti).

Quando al termine del nostro movimento siamo ritornati al valore iniziale $t=0$, il gruppo dei punti A_i è ritornato in se stesso, subendo una certa permutazione

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ A_{\gamma_1} & A_{\gamma_2} & \dots & A_{\gamma_m} \end{pmatrix};$$

contemporaneamente i cappi l_i sono divenuti dei nuovi cappi l_{γ_i} conservando il loro ordine e le relative sostituzioni S_i , ma l'estremo di l_i non è più A_i bensì A_{γ_i} , e in ogni modo giova tener presente che anche un cappio che ritorni al medesimo estremo può aver cambiato essenzialmente di forma.

Tuttavia si possono riportare i cappi l_{γ_i} agli l_i ; durante questa trasformazione i cappi dovranno attraversare dei punti A e quindi verranno mutate le sostituzioni S_i , e in definitiva ai punti A_i corrisponderanno certe nuove sostituzioni

$$S_i^{(\gamma)}.$$

Ora introduciamo l'ipotesi d'esistenza di F . Poichè al cammino chiuso γ risponde una variazione continua della curva K_t , sezione di F , che riporta la K_0 in se stessa, si deduce che: per qualunque cammino γ segnato nel piano della variabile complessa t , le due riemanniane che rispondono ai cappi l_i e rispettivamente alle sostituzioni S_i e $S_i^{(\gamma)}$ sono equivalenti; nel nostro caso ciò importa che le sostituzioni S_i e $S_i^{(\gamma)}$ sieno non soltanto simili (cioè trasformate una dell'altra mediante una sostituzione che rappresenti un cambiamento di nome degli n valori 1, 2, ..., n) bensì identiche, poichè le intersezioni di F con l'asse z sono rimaste ferme durante tutto il movimento.

Riassumeremo la condizione precedente dicendo che: per l'esistenza della superficie F la R_t deve soddisfare ad una *condizione d'invarianza*, la quale

importa che le sostituzioni di R_t relative ai punti A_i restino invariate per qualunque giro γ fatto nel piano τ .

III. Riduzione della condizione d'invarianza a condizioni elementari.

Il significato della condizione d'invarianza di R_t , che abbiamo trovata nel precedente paragrafo, può venir precisato riducendo per continuità qualunque giro γ , entro il piano τ , ad una somma di cammini elementari (veri cappi nel detto piano) che racchiudono i punti critici in cui coincidono due punti A .

Questi *punti critici* sono di tre specie:

1) punti

$$T_1, T_2 \dots T_\mu$$

che rispondono alle tangenti semplici di C per O (la classe μ ha un valore che qui non importa calcolare);

2) punti

$$D_1, D_2 \dots D_\delta$$

che rispondono ai δ nodi di C e alle rette che li proiettano da O ; e infine

3) punti

$$Q_1, Q_2 \dots Q_\chi$$

che rispondono alle χ cuspidi di C .

Conviene analizzare partitamente quale sia in generale l'effetto che producono sulle sostituzioni di R_0 i giri elementari delle tre specie.

Ma giova premettere un'osservazione comune ai tre casi.

Si consideri un punto critico, $t = t_c$, che sia un T o un D o un Q , e pongasi che in esso confluiscono due punti A_1 e A_2 . Per l'osservazione fatta innanzi, è sempre lecito ritenere che codesti due punti sieno due punti contigui, che potremo quindi indicare con A_1 e A_2 . Però i corrispondenti cappi $l_1 = OA_1$ e $l_2 = OA_2$, possono dar luogo a due circostanze diverse che occorre tener presenti:

a) può accadere che l_1 e l_2 , per $t = t_c$, diventino o possan farsi diventare *onestamente vicini*, cioè tendenti a confondersi senza includere alcun altro punto A o attraversare altri cappi,

b) all'opposto può accadere che l_1 e l_2 , pure essendo contigui, non possano ritenersi come vicini, in modo da riunirsi in un solo cappio indipendente dai rimanenti.

Le figure 1 e 2 qui annesse illustrano questa circostanza nel caso elementare in cui fra l_1 e l_2 (già resi contigui) verrebbe a frapporsi un coppia l_i .

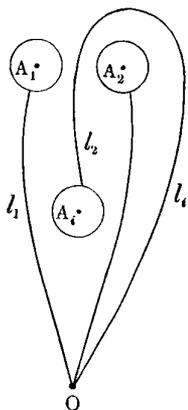


Fig. 1.

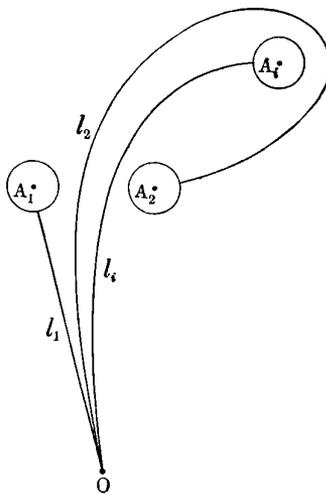


Fig. 2.

Ma, riferendoci per semplicità a questo caso elementare, possiamo dimostrare che, in ogni caso, una conveniente trasformazione dei capi, permette di ridursi al caso in cui l_1 e l_2 diventino onestamente vicini.

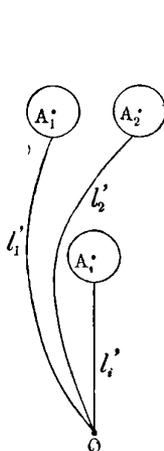


Fig. 1'.

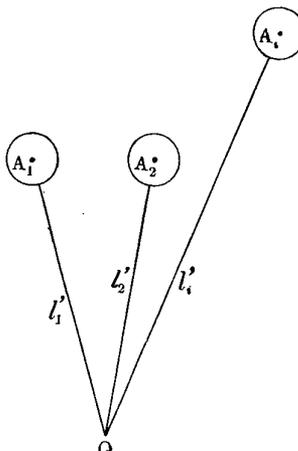


Fig. 2'.

A tal uopo si ricordi che in una riemanniana R , due qualsiasi capi l_1 e l_2 si possono rendere contigui facendo uso di due modi di trasformazione essenzialmente diversi: cioè tenendoli fermi e facendo che i capi intermedi attra-

versino A_r , e allora le sostituzioni S_r e S_s rimangono invariate, o invece muovendo, per esempio l_r , in guisa che attraversi i punti di diramazione intermedi, ciò che ha per effetto di alterare la sostituzione S_r .

Orbene, nel nostro caso $r=1, s=2$, quando ci si avvicina al valore critico $t=t_c$, l_1 e l_2 possono essere resi contigui e onestamente vicini purché si operi convenientemente coi due modi di trasformazione. Così la riduzione dalla figura 1) alla 1') o dalla 2) alla 2') si effettua in due tempi, portando anzitutto l_1 ad essere intermedio fra l_1 e l_2 , e poi muovendo per esempio l_2 in guisa che attraversi A_1 : si ottengono così i due cappi l'_1 e l'_2 onestamente vicini.

Dopo ciò passiamo a svolgere la nostra analisi, in rapporto alle tre specie di punti critici, T, D e Q .

1) Un punto T ($t=t_c$) è un punto di diramazione che scambia due punti A (vicini ad $x=x_c$). E, per l'osservazione fatta innanzi, è sempre lecito ridursi al caso che i punti scambiati sieno contigui, e però indicabili con A_1 e A_2 , e che i cappi contigui, $l_1=OA_1$ e $l_2=OA_2$, diventino onestamente vicini per $t=t_c$.

Adottando codesta ipotesi, studiamo l'effetto che ha sulle sostituzioni di R_0 , un giro elementare intorno al nostro punto critico T . È chiaro che

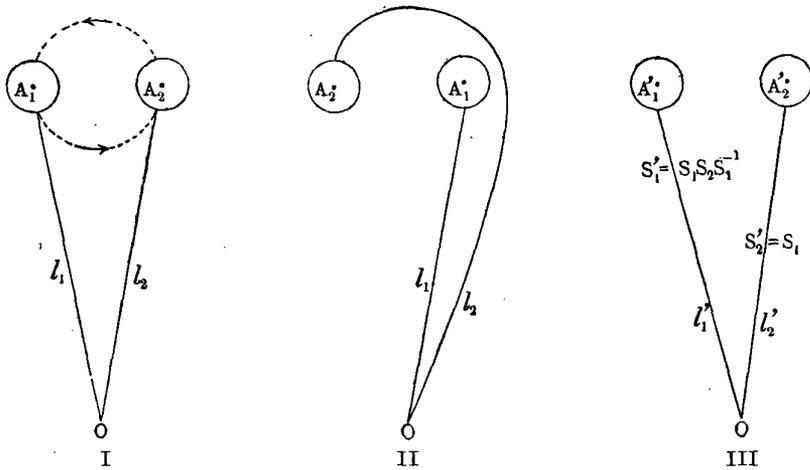


Fig. 3.

tale effetto si riduce a quello di un cerchio infinitesimo che circonda T , a cui risponde un cerchietto descritto dai punti A_1 e A_2 , ognuno dei quali percorre uno dei due archi A_1A_2 , indicati nella fig. 3, I: ciò è significato dalla relazione analitica

$$x - x_c = \lambda(t - t_c)^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Ebbene, osserviamo nella fig. 3 i tre disegni I, II, III, che rappresentano gli stati successivi della trasformazione, dove il passaggio dalla II alla III consiste nel trasportare l_2 dalla destra alla sinistra di l_1 : vediamo così che le sostituzioni S_1 e S_2 si cambiano rispettivamente in

$$\begin{aligned} S_1' &= S_1 S_2 S_1^{-1} \\ S_2' &= S_1. \end{aligned}$$

E, frattanto, gli altri cappi l_3, \dots non hanno subito alcun cambiamento.

Per il nostro scopo conviene esaminare successivamente le tre ipotesi che, a priori, si possono fare intorno alla natura degli scambi S_1 e S_2 :

a) Gli scambi S_1 e S_2 sono uguali, e sia per esempio

$$S_1 = S_2 = (12).$$

In questa ipotesi

$$S_1' = S_1, \quad S_2' = S_2,$$

cioè la nostra condizione d'invarianza è soddisfatta.

b) Gli scambi S_1 e S_2 sono diversi fra loro ma permutabili: e sia, per esempio

$$S_1 = (12), \quad S_2 = (34).$$

In questa ipotesi risulterebbe

$$\begin{aligned} S_1' &= S_2 = (34) \\ S_2' &= S_1 = (12), \end{aligned}$$

contrariamente alla nostra condizione d'invarianza. Dunque questa condizione *esclude il presentarsi dell'ipotesi b) rispetto ad un punto T.*

c) Gli scambi S_1 e S_2 non sieno permutabili e però sieno del tipo

$$S_1 = (12), \quad S_2 = (23).$$

In questa ipotesi

$$S_1' = (13), \quad S_2' = (12),$$

cioè S_1' e S_2' sono rispettivamente i trasformati di S_1 e S_2 mediante la sostituzione prodotto

$$S_2 S_1 = (123)^{-1}.$$

Ma questa conclusione è inconciliabile con la nostra *condizione d'invarianza* la quale *esclude dunque anche l'ipotesi c).*

Pertanto la condizione d'invarianza di R_0 significa che, in corrispondenza ai punti T , cioè alle tangenti semplici della curva di diramazione C , i due punti contigui (estremi di cappi onestamente vicini) che ivi si scambiano, portano la medesima sostituzione sui rami della funzione z .

2) Un punto D ($t = t_c$) è un punto critico apparente in cui confluiscono due punti A_1 e A_2 (vicini ad $x = x_c$) che possiamo ritenere contigui ed estremi di cappi onestamente vicini. Ora l'effetto di un giro elementare intorno a D si riduce a quello di un cerchio infinitesimo circondante D , a cui rispondono due cerchi descritti nello stesso senso dai punti A_1 e A_2 , come è significato dagli sviluppi analitici

$$\begin{aligned} x_1 - x_c &= \lambda_1(t - t_c) + \dots \\ x_2 - x_c &= \lambda_2(t - t_c) + \dots, \end{aligned}$$

dove x_1 e x_2 designano le coordinate di A_1 e A_2 .

Sottraendo membro a membro si ha

$$x_1 - x_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_c) + \dots,$$

da cui risulta che la nostra trasformazione consiste nel far descrivere ad A_2 un cerchio intorno ad A_1 . Ciò equivale a compiere successivamente due trasformazioni del tipo 1) (relative a punti T): infatti una trasformazione di quel tipo, dove si designano ancora con x_1 e x_2 le coordinate di A_1 e A_2 , dà

$$\begin{aligned} x_1 - x_c &= \lambda(t - t_c)^{\frac{1}{2}} + \dots \\ x_2 - x_c &= -\lambda(t - t_c)^{\frac{1}{2}} + \dots, \end{aligned}$$

donde

$$x_1 - x_2 = 2\lambda(t - t_c)^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

e però equivale alla rotazione di mezzo giro di A_2 intorno ad A_1 . E, del resto, l'equivalenza d'un nodo di C a due tangenti è ben nota, secondo il principio di continuità.

Pertanto, senza bisogno di esaminare le figure di passaggio, si può qui affermare a priori che un giro elementare intorno a D porta S_1 e S_2 rispettivamente in

$$S_1' = S_2 S_1 S_2^{-1} \quad S_2' = S_1 S_2 S_1^{-1}.$$

Ora si possono passare in rassegna le tre ipotesi a) b) c) considerate per i giri del tipo 1); e si arriva subito alla conclusione seguente: la *condizione d'invarianza* relativa alle sostituzioni di R_0 significa che, *in corrispondenza ai punti D*, cioè alle rette che vanno ai nodi della curva di diramazione C , *i due punti contigui* che ivi (onestamente) confluiscono portano *sostituzioni permutabili*, cioè sostituzioni identiche, come (12) (12), ovvero sostituzioni del tipo (12) e (34).

Ma conviene aggiungere che il caso delle *sostituzioni identiche* corrisponde a una particolarità della superficie F , $z = f(xy)$, cioè all'esistenza di un *punto doppio*, in generale *conico*

$$x = x_c, \quad y = t_c x_c, \quad z = f(x_c, t_c y_c).$$

3) Un punto Q ($t = t_c$) è un punto di diramazione che scambia due punti A (vicini ad $x = x_c$), i quali possono ritenersi contigui ed estremi di cappi onestamente vicini, che verranno indicati con A_1 e A_2 . Ora l'effetto di un giro elementare intorno a Q si riduce a quello d'un cerchio infinitesimo che circonda Q : a cui risponde un cerchietto descritto dai punti A_1 e A_2 , ognuno dei quali percorre nello stesso senso tre archi successivi $A_1 A_2$, come è significato dallo sviluppo

$$(x - x_c) = \lambda(t - t_c)^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Pertanto, la trasformazione relativa a questo caso equivale al prodotto di tre trasformazioni del tipo 1): d'accordo col fatto che la cuspidè assorbe tre tangenti infinitamente vicine.

Dopo ciò si vede senz'altro quale sia l'effetto di una trasformazione del tipo 3) nelle tre ipotesi a) b) c), che si presentano a priori possibili.

L'ipotesi b) in cui si abbiano sostituzioni permutabili non identiche è *scartata*. Dunque le *condizioni d'invarianza* per le sostituzioni di R significa che in *corrispondenza ai punti Q*, cioè alle rette che vanno alle cuspidi della curva di diramazione C , *i due punti contigui* che ivi si permutano portano sostituzioni identiche ovvero *sostituzioni concatenate*, cioè non permutabili del tipo (12) e (23).

Ma il caso delle *sostituzioni identiche* risponde all'esistenza di un *punto doppio (biplanare)* della superficie F .

IV. Ricapitolazione delle condizioni d'invarianza.

Innanzitutto di riassumere i risultati della nostra analisi, giova introdurre una conveniente nomenclatura, cui si accompagna un'osservazione essenziale per l'esatta comprensione dell'argomento.

Si considerino due punti di diramazione A_r e A_s della riemanniana R_t e — facendo variare t lungo un certo cammino descritto nel piano τ — si portino vicini ad un punto critico, che sia un T , o un D , o un Q ; quindi si rendano contigui in modo che i relativi cappi diventino onestamente vicini (cfr. § III).

In seguito a questa trasformazione le sostituzioni relative ad A_r e A_s potranno divenire

identiche, come (12) e (12),
concatenate, come (12) e (23),
disgiunte, come (12) e (34):

nel primo caso diremo che nella riemanniana R_0 le sostituzioni relative ad A_r e A_s sono *identiche*, nel secondo e nel terzo che esse sono rispettivamente *concatenate* e *disgiunte*, in rapporto al punto critico t_c e al cammino che vi porta nel piano τ .

Ma, a giustificare questa definizione, conviene mostrare che: se le sostituzioni portate da due punti di diramazione A_r e A_s della riemanniana R_0 diventano identiche, concatenate o disgiunte, in relazione ad un cammino che vada a t_c , per una certa trasformazione dei cappi, altrettanto accade per qualunque altra trasformazione dei cappi (che renda sempre contigui e onestamente vicini l_r e l_s).

Infatti se l_r e l_s sono contigui e onestamente vicini, rispetto ad ogni trasformazione che li conservi tali, essi possono sostituirsi con un unico cappio $l_{r,s}$ che avvolga insieme A_r e A_s , ed allora, ogni qual volta $l_{r,s}$ traversi un punto di diramazione A_i , le relative sostituzioni S_r e S_s sono egualmente trasformate con S_i , e quindi rimangono, come all'inizio, concatenate o disgiunte.

Dopo ciò possiamo riassumere i risultati della nostra analisi nel seguente enunciato:

Sia C la curva di diramazione d'un piano n -plo, rappresentativo d'una superficie F e, nella riemanniana ad n fogli che risponde alla retta del fascio

$y = tx$ (da ritenere come retta n -pla i cui punti di diramazione sono le intersezioni $A_1 A_2 \dots A_m$ con C) si considerino i due punti di diramazione A_r e A_s che vengono a confondersi in un punto critico $t = t_0$: allora, per qualunque cammino di t che vada al punto critico t_0 , le sostituzioni portate da A_r e A_s dovranno essere

1) *identiche rispetto ad ogni punto T*, cioè ad una *tangente semplice* per $O = (00)$;

2) *disgiunte rispetto ad ogni punto D*, cioè ad ogni *nodo* di C , che non risponda ad un punto doppio (conico) della superficie F (ed invece identiche se D risponde ad un punto conico);

3) *concatenate rispetto ad ogni punto Q*, cioè ad ogni *cuspid*e di C , che non risponda ad un punto doppio (biplanare) della superficie F (ed invece identiche se Q risponde ad un punto biplanare).

V. Teorema d'esistenza.

Il teorema enunciato nel precedente paragrafo s'inverte e si hanno quindi le condizioni, non più soltanto necessarie, ma altresì sufficienti, perchè la curva piana C sia curva di diramazione d'un piano n -plo.

Queste si possono enunciare dicendo che « fra le riemanniane ad n fogli R_t che si possono costruire sopra un raggio $y = tx$ variabile per un punto generico $O = (000)$, prendendo come punti di diramazione le intersezioni con C , deve esservene una che rimanga invariata per qualsiasi giro chiuso del parametro complesso t ».

E spiegando poi tali condizioni d'invarianza, secondo l'analisi del precedente § IV, si avrà il *teorema d'esistenza*, nella forma che gli daremo a conclusione di questo paragrafo.

Cerchiamo intanto di dimostrare il nostro asserto: partendo dall'ipotesi d'invarianza della R , faremo vedere che essa permette di costruire una superficie F rappresentata sopra un piano n -plo, che abbia come curva di diramazione C .

Invero la nostra ipotesi porta che, in corrispondenza d'una retta a variabile per O ($y = tz$, $z = 0$), si possa costruire una famiglia di curve birazionalmente identiche, rappresentabili sopra una delle rette n -ple che hanno come punti di diramazione le intersezioni di a con C (che viene distinta fra le altre rette n -ple analoghe), la quale famiglia ritorna in se stessa quando a , variando comunque entro il fascio, ritorni alla posizione iniziale.

Ora codesta famiglia potrà essere proiettivamente realizzata mediante un sistema di curve K_{n+h} , d'un ordine $n+h$ abbastanza alto, giacenti nel piano verticale $y=tx$, e passanti h volte per il punto all'infinito dell'asse z ; inoltre a K_{n+h} si potrà anche imporre di segare z in n punti $1, 2, \dots, n$, che rimangano fissi al variare di t . Aggiungendo condizioni complementari, si determinerà in tal guisa un numero finito s di K_{n+h} , ossia s funzioni algebriche $z = \varphi_t^{(i)}$:

$$\begin{aligned} z^{(1)} &= \varphi_t^{(1)}(x), \\ z^{(2)} &= \varphi_t^{(2)}(x), \\ &\dots \dots \dots \\ z^{(s)} &= \varphi_t^{(s)}(x), \end{aligned}$$

ciascuna ad n rami.

Quindi si determinerà razionalmente la funzione

$$z = \frac{1}{n} (z^{(1)} + z^{(2)} + \dots + z^{(s)}),$$

che risponderà ad una K_{n+h} , passante ancora per i punti fissi $1, 2, \dots, n$.

Al variare del piano $y=tx$ nel fascio che ha per asse l'asse z , codesta K genererà una superficie F , che a priori potrà supporre passare un certo numero r di volte per l'asse z , e quindi avere l'ordine $n+h+r$. Per proiezione dal punto all'infinito dell'asse z questa F riesce rappresentata sul piano n -plo che ha come curva di diramazione C .

L'affermazione precedente solleva soltanto il dubbio critico che, in corrispondenza a particolari piani del nostro fascio, la K_{n+h} — che si mantiene sempre *algebricamente irriducibile* almeno finchè la traccia del piano non diventi tangente (propriamente o impropriamente) a C — possa *degenerare proiettivamente* in una curva multipla, cui vada sommato l'asse z e forse qualche altra retta parallela ad esso: ciò che porterebbe a completare la curva di diramazione del piano n -plo rappresentativo di F , aggiungendovi delle rette per O . Ma questo dubbio si può escludere osservando che, per h abbastanza alto, la degenerazione proiettiva di una delle nostre K_{n+h} esige più che una condizione ⁽¹⁾, dimodochè la costruzione può farsi in modo che non si presenti la circostanza sfavorevole sopra accennata.

Dopo ciò possiamo enunciare il teorema d'esistenza, come segue:

Teorema d'esistenza. Sia C una curva piana (posta nel piano $z=0$), d'un certo ordine pari $m = 2n + 2\pi - 2$, dotata d'un certo numero di nodi

⁽¹⁾ Cfr. ENRIQUES-CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. L. 5, § 33, Vol. III, pag. 363.

e di cuspidi, che ci proponiamo di assumere come curva di diramazione d'una funzione algebrica di due variabili $z = f(xy)$. La *condizione d'esistenza* di questa funzione è che:

fra le riemanniane R_t determinate sopra un raggio, a , variabile nel fascio di centro generico $O = (000)$, prendendo come punti di diramazione le intersezioni $A_1 A_2 \dots A_m$ con C , ve ne sia una tale che:

per ogni giro elementare descritto dal parametro complesso t , le sostituzioni relative a due qualunque punti di diramazione, che vadano a coincidere nel punto di contatto d'una tangente, sieno identiche rispetto a questo;

le sostituzioni relative a due punti che vadano a coincidere in un *nodo* sieno, in relazione a questo, *disgiunte*;

ed infine quelle di due punti che vadano a coincidere in una *cuspid*e, sieno, in relazione ad essa, *concatenate*.

Ora questo enunciato si può semplificare osservando che tutti i giri elementari, descrivibili da t — nel suo piano τ — intorno ai punti critici già designati con T e D e Q , si lasciano comporre mercè un sistema primitivo di cappi che circondino codesti punti. Infatti se, per esempio, si giri attorno ad un certo punto T mediante due cammini che avvolgano un punto Q , la condizione d'invarianza di R_t essendo soddisfatta per il primo cammino in rapporto al T e poi anche per il cappio che avvolge il Q in rapporto al Q , ne segue che essa verrà soddisfatta anche per il secondo cammino rispetto al T . Così dunque potremo enunciare il

Teorema d'esistenza nella forma semplificata. Affinchè la curva piana C possa assumersi come curva di diramazione d'un piano n -plo, basta che le sostituzioni relative ai punti di diramazione di una R_t sieno rispettivamente identiche, disgiunte o concatenate in relazione alle tangenti semplici o ai nodi o alle cuspidi di C , per un certo sistema di giri elementari o cappi avvolgenti quei punti critici, nel piano della variabile complessa t .

Ottobre 1923.

Per quest'ultima GAUSS dà la formula $2(P_1 + P_2 + \dots + P_{\frac{n-1}{2}}) = s$ dove è $P_t = \alpha(\varepsilon^t)\alpha(\varepsilon^{-t})$: si ha dunque:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_{\frac{n-1}{2}} = \frac{s}{2} = \frac{1}{2} \{n(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots) - (a + a' + a'' + \dots)^2\}.$$

In una nota, recentemente pubblicata negli « Atti della R. Accademia dei Lincei » la Sig.^{na} BRANCHINI, ha utilizzato, nel caso di $n = 5$, la precedente formula, e, valendosi della proprietà che la media geometrica di più quantità positive è minore o al più uguale alla loro media aritmetica

$$\left(\text{quindi } P_1 P_2 \dots P_{\frac{n-1}{2}} \leq \left[\frac{P_1 + P_2 + \dots + P_{\frac{n-1}{2}}}{\frac{n-1}{2}} \right]^{\frac{n-1}{2}} \right), \text{ è riuscita a dimostrare l'esistenza di un algoritmo delle divisioni successive per gli interi appartenenti al corpo delle radici quinte dell'unità.}$$

stenza di un algoritmo delle divisioni successive per gli interi appartenenti al corpo delle radici quinte dell'unità.

Ho pensato di applicare il medesimo procedimento relativamente agli interi di altri corpi circolari ed ho potuto così stabilire l'esistenza dell'algoritmo euclideo per i corpi delle radici ottave, settime, none, dodicesime, sedicesime dell'unità, come mi propongo di far vedere nella presente nota.

Nel 1° paragrafo mostro come si possa rendere più semplice il procedimento esposto dalla Sig.^{na} BRANCHINI per il corpo $C(\sqrt[5]{1})$.

§ 1. Corpo delle radici quinte dell'unità.

Posto il quoto di due interi μ e ν sotto la forma:

$$(1) \quad \frac{\mu}{\nu} = A + \alpha$$

con A intero ed $\alpha = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + d\varepsilon^3 + e\varepsilon^4$, si potrà sempre supporre scelto A in modo che i numeri razionali a, b, c, d, e siano, in modulo $< \frac{1}{2}$.

Delle 5 coordinate a, b, c, d, e , tre almeno saranno di uno stesso segno; per fissare le idee supponiamo che esse siano a, b, c e che il loro segno comune sia il $+$. Si potrà allora dare ad α la forma:

$$\alpha = \left(a - \frac{1}{4}\right) + \left(b - \frac{1}{4}\right)\varepsilon + \left(c - \frac{1}{4}\right)\varepsilon^2 + \left(d - \frac{1}{4}\right)\varepsilon^3 + \left(e - \frac{1}{4}\right)\varepsilon^4,$$

dove le coordinate $a - \frac{1}{4}$, $b - \frac{1}{4}$, $c - \frac{1}{4}$ sono in modulo $\leq \frac{1}{4}$. Quanto alle altre due coordinate $d - \frac{1}{4}$, $e - \frac{1}{4}$, coll'aggiungere o togliere ad esse separatamente, ove occorra, una unità, si potranno di nuovo ricondurre nell'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Potrà dunque porsi: $\alpha = \bar{\alpha} + \alpha'$ dove $\bar{\alpha}$ è un intero ed α' un numero del quale tre almeno delle coordinate sono, in modulo, $\leq \frac{1}{4}$ e le altre due $\leq \frac{1}{2}$. Resta così dimostrato che nella (1) può scegliersi l'intero A in modo che tre delle coordinate di α abbiano moduli $\leq \frac{1}{4}$ e le altre due moduli $< \frac{1}{2}$. Ed allora, relativamente al numero α , avremo che è la sua misura

$$2P_1 + 2P_2 \leq 5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$$

cioè $\leq 5 \cdot \frac{11}{16}$ quindi

$$P_1 + P_2 \leq \frac{55}{32}, \quad n(\alpha) = P_1 P_2 \leq \left(\frac{55}{64}\right)^2 < \frac{3}{4}.$$

§ 2. Corpo delle radici ottave dell'unità.

L'equazione irriducibile a cui soddisfa $\zeta = e^{\frac{\xi i \pi}{2}}$ è: $x^4 + 1 = 0$; una base del corpo è costituita dai numeri, 1, ζ , ζ^2 , ζ^3 , cioè qualunque intero ω del corpo si può porre sotto la forma: $\omega = a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3$ con a, b, c, d interi.

Indicheremo con s, T le operazioni seguenti

$$s = (\zeta, \zeta^{-1}), \quad T = (\zeta, \zeta^{-3}) = (\zeta, -\zeta).$$

Formiamo

$$P_1 = \omega \cdot s\omega = (a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3)(a + b\zeta^{-1} + c\zeta^{-2} + d\zeta^{-3}).$$

Si trova

$$P_1 = \omega \cdot s\omega = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (ab + bc + cd - ad)(\zeta + \zeta^{-1})$$

e così pure

$$P_2 = T\omega \cdot T\omega = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (ab + bc + cd - ad)(T(\zeta + \zeta^{-1}));$$

avremo perciò

$$P_1 + P_2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Posto $\frac{\mu}{\nu} = \Omega + \omega$, si potrà al solito scegliere l'intero Ω in guisa che in ω le coordinate a, b, c, d , positive o negative, siano in modulo $\leq \frac{1}{2}$.

Escluso il caso che a, b, c, d siano, contemporaneamente, in modulo $= \frac{1}{2}$ nel qual caso possiamo anche supporre tutte e quattro positive, in tutti gli altri casi avremo:

$$P_1 + P_2 < 2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) < 2, \quad \text{quindi norma di } \omega = P_1 P_2 < 1.$$

Per $a = b = c = d = \frac{1}{2}$ si ha

$$\omega = \frac{1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3}{2} = \frac{1 + \zeta + i + i\zeta}{2} = \frac{(1 + \zeta)(1 + i)}{2},$$

dove, indicando con $N(\alpha)$ la norma di α , si ha: $N(1 + i) = 2^2$, $N(1 + \zeta) = 2$ quindi

$$N(\omega) = \frac{2^2 \cdot 2}{2^4} = \frac{1}{2} < 1.$$

Per l'algoritmo euclideo in $C\left(e^{\frac{2\pi i}{8}}\right)$ vale dunque questa regola semplicissima: Il resto della divisione dell'intero μ per l'intero ν si ottiene decomponendo il quoto $\frac{\mu}{\nu}$ nella somma di un intero Ω e di un numero ω colle coordinate in modulo $\leq \frac{1}{2}$ e moltiplicando ν per ω .

§ 3. Corpo delle radici 9° dell'unità.

L'equazione irreducibile alla quale soddisfa ζ è questa volta $x^6 + x^3 + 1 = 0$. Qualunque numero ω del corpo $C(\zeta)$ può mettersi sotto la forma

$$\omega = a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 + e\zeta^4 + f\zeta^5.$$

Indicando sempre con s l'operazione $s = (\zeta, \zeta^{-1})$ abbiamo:

$$\begin{aligned} P = \omega \cdot s\omega = & \{ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 - (ad + be + cf) \} + \\ & + (ab + bc + cd + de + ef - ae - bf - af)(\zeta + \zeta^{-1}) \\ & + (ac + bd + ce + df - ae - bf - af)(\zeta^2 + \zeta^{-2}). \end{aligned}$$

Indichiamo ora con t l'operazione $t = (\zeta, \zeta^2)$, le cui potenze costituiscono il gruppo di GALOIS del corpo considerato: tenendo conto che è

$$\zeta + \zeta^{-1} + \zeta^2 + \zeta^{-2} + \zeta^4 + \zeta^{-4} = 0,$$

si trova subito

$$P + tP + t^2P = 3[a^2 + d^2 - ad + b^2 + e^2 - be + c^2 + t^2 - ct].$$

Da questa relazione risulta nel solito modo:

$$n(\omega) = P_1 t P \cdot t^2 P \leq [a^2 + d^2 - ad + b^2 + e^2 - be + c^2 + f^2 - cf]^3.$$

Supposte le sei coordinate a, b, c, d, e, f in modulo $\leq \frac{1}{2}$, faremo vedere che è possibile, togliendo da alcune di esse, ove occorra, unità positive o negative, sottrarre da ω un tale intero, che il resto ω' soddisfi alla condizione:

$$a'^2 + d'^2 - a'd' + b'^2 + e'^2 - b'e' + c'^2 + f'^2 - c'f' < 1$$

e quindi si abbia $n(\omega') < 1$.

Per questo basterà far vedere che è possibile togliere ad a e d tali unità positive e negative che, indicando con a' e d' i resti, si abbia

$$a'^2 + d'^2 - a'd' \leq \frac{1}{3},$$

perchè allora in modo analogo si avrà:

$$b'^2 + e'^2 - b'e' \leq \frac{1}{3}; \quad c'^2 + f'^2 - c'f' \leq \frac{1}{3},$$

quindi

$$n(\omega') < 1,$$

se si eccettui il caso che verrà esaminato a parte, in cui nelle tre relazioni precedenti valga simultaneamente il segno uguale.

Si consideri un sistema di assi cartesiani ortogonali x ed y e ad esso si riferisca la curva di equazione: $x^2 + y^2 - xy = \frac{1}{3}$.

Si vede facilmente che questa è l'equazione di una ellisse che ha per centro l'origine e i cui assi hanno le direzioni delle bisettrici $S'OQ$, SOQ degli angoli formati dagli assi coordinati. Il semiasse maggiore OA è situato su OQ ed è $OA = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816$, il semiasse minore OB è situato su OS ed è $OB = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0,47$.

Se insieme con questa ellisse E , si considerano anche quelle che se ne ricavano con traslazione di una unità di lunghezza parallelamente agli assi

coordinati, ellissi che hanno i centri rispettivamente in P, P_1, R, R' e che saranno indicate con E_1, E_2, E_3, E_4 , le loro equazioni sono

$$(x-1)^2 - (x-1)y + y^2 = \frac{1}{3}$$

$$(x+1)^2 - (x+1)y + y^2 = \frac{1}{3}$$

$$x^2 - x(y-1) + (y-1)^2 = \frac{1}{3}$$

$$x^2 - x(y+1) + (y+1)^2 = \frac{1}{3}$$

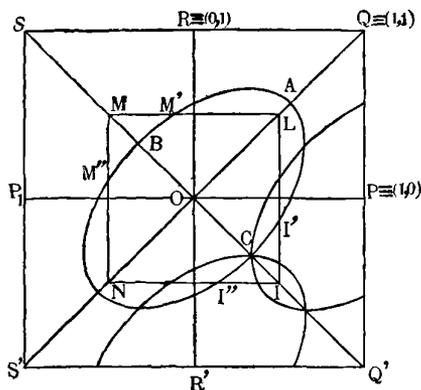


Fig. 1.

Si vede subito che queste ellissi ricoprono tutto il quadrato $ILMN$ a cui appartengono i punti aventi coordinate in modulo $\leq \frac{1}{2}$. Che sia così risulta immediatamente dall'osservare che E, E_1, E_4 passano per lo stesso punto $C \equiv \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ e così pure E, E_2, E_3 per lo stesso punto $C' \equiv \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Se ora il punto di coordinate a e d (pos. o neg.) in modulo $\leq \frac{1}{2}$ soddisfa alla condizione $a^2 + d^2 - ad < \frac{1}{3}$, cadrà entro l'ellisse E ; in caso contrario dovrà cadere o nel triangolo $I, I'I''$ compreso tra l'ellisse E e le rette IL, IN oppure nel triangolo analogo $MM'M''$. Se l'ascissa a sarà positiva e l'ordinata d negativa, saremo nel primo caso, e il punto considerato sarà dentro l'ellisse E_1 o dentro l'ellisse E_4 secondochè sia $a+d > 0$ oppure $a+d < 0$.

Nel 2° caso, cioè se è a negativo e b positivo, il punto sarà entro l'ellisse E_2 o dentro l'ellisse E_3 , secondochè sia ancora $a+d > 0$ oppure $a+d < 0$.

È chiaro come da queste considerazioni scaturisce una regola assai semplice, e che si presta ad un rapido calcolo, per la determinazione di un resto w' per il quale sia $n(w') < 1$.

Resta da considerare il solo caso in cui le coppie $a, d; b, e; c, f$ coincidono, salvo l'ordine, con le coppie $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$. In questo caso il resto w'

dovrà avere una delle seguenti forme

$$\begin{aligned} & \pm \frac{1 + \zeta + \zeta^2 - \zeta^3 - \zeta^4 - \zeta^5}{3} \\ & \pm \frac{1 + \zeta - \zeta^2 - \zeta^3 - \zeta^4 + \zeta^5}{3} \\ & \pm \frac{1 - \zeta - \zeta^2 - \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5}{3} \end{aligned}$$

Non tenendo conto del segno \pm , che non ha influenza sulla norma, abbiamo nel 1° caso

$$\omega' = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1 - \zeta^3}{1 - \zeta} - \zeta^3 \frac{1 - \zeta^3}{1 - \zeta} \right\} = \frac{(1 - \zeta^3)^2}{3(1 - \zeta)}, \quad \text{e quindi } n(\omega') = \frac{1}{27}.$$

Nel 3° caso è

$$\omega' = -\zeta^6 \frac{1 - \zeta^3}{3(1 + \zeta)}, \quad n(\omega') = \frac{1}{27}.$$

Nel 2° caso abbiamo

$$\omega' = \frac{(1 - \zeta^3)(1 + \zeta - \zeta^2)}{3}$$

ed è $n(1 + \zeta - \zeta^2) = 19$ quindi

$$n(\omega') = \frac{3^3 \cdot 19}{3^6} = \frac{19}{27}.$$

Nel 4° caso infine con

$$\omega = \frac{(1 - \zeta^3)(1 - \zeta - \zeta^2)}{3},$$

per essere $1 - \zeta - \zeta^2 = -\zeta^2(1 + \zeta^{-1} - \zeta^{-2})$ si trova $n(\omega') = \frac{19}{27}$.

[La possibilità di estrarre da due numeri dati a e d due convenienti interi, in modo che per i resti a' e d' sia soddisfatta la condizione

$$a'^2 + d'^2 - a'd' \leq \frac{1}{3}$$

risulta implicitamente dalle considerazioni svolte da GAUSS nel 2° dei citati frammenti, a proposito dei numeri del corpo delle radici cubiche dell'unità].

Il procedimento testè esposto per determinare il m. c. d. di due interi del corpo delle radici 9° dell'unità può essere seguito anche per il corpo delle radici 12° dell'unità e ci permette anzi di assegnare ad ω una forma tale da aversi $n(\omega) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

§ 4. **Corpo delle radici 7° dell'unità** $\zeta = e^{2\pi i/7}$.

Si prenda un numero qualunque fratto ω di $C(\zeta)$ e si ponga sotto la forma :

$$(1) \quad \omega = b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 + e\zeta^4 + f\zeta^5 + g\zeta^6,$$

colle coordinate b, c, d, e, f, g in modulo $\leq \frac{1}{2}$ (dopo aver naturalmente estratto dal numero considerato un conveniente intero Ω che si trascura).

Si supponga che *almeno quattro* delle quantità b, c, d, e, f, g siano del medesimo segno; per fissare le idee supponiamo b, e, f, g positive, senza fare alcuna ipotesi sui segni delle due rimanenti c, d . Si potrà sempre scrivere ω sotto la forma :

$$\omega = -\frac{1}{4} + \left(b - \frac{1}{4}\right)\zeta + \left(c - \frac{1}{4}\right)\zeta^2 + \left(d - \frac{1}{4}\right)\zeta^3 + \left(e - \frac{1}{4}\right)\zeta^4 + \left(f - \frac{1}{4}\right)\zeta^5 + \left(g - \frac{1}{4}\right)\zeta^6$$

ed allora le 5 coordinate $-\frac{1}{4}, b - \frac{1}{4}, e - \frac{1}{4}, f - \frac{1}{4}, g - \frac{1}{4}$ saranno in modulo $\leq \frac{1}{4}$, mentre le altre due $c - \frac{1}{4}, d - \frac{1}{4}$, aggiungendo ad ω , ove occorra, interi della forma $\pm \zeta^2, \pm \zeta^3, \pm \zeta^2 - \zeta^3$, si potranno ridurre, in modulo, $\leq \frac{1}{2}$.

Se il nuovo numero così ottenuto, si indica con ω' e le sue coordinate con $a', b', \dots g'$, sicchè :

$$\begin{aligned} \omega' &= a' + b'\zeta + c'\zeta^2 + d'\zeta^3 + e'\zeta^4 + f'\zeta^5 + g'\zeta^6 \\ s\omega &= a' + b'\zeta^{-1} + c'\zeta^{-2} + d'\zeta^{-3} + e'\zeta^{-4} + f'\zeta^{-5} + g'\zeta^{-6}, \quad s = (\zeta, \zeta^{-1}), \end{aligned}$$

avremo

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 + e'^2 + f'^2 + g'^2 \leq \frac{5}{16} + \frac{2}{4} = \frac{13}{16}.$$

E poichè se si pone $\omega' \cdot s\omega' = P$ e si indica con t l'operazione $t = (\zeta, \zeta^3)$ [3 è radice primitiva del modulo 7, e quindi la sostituzione t , colle sue potenze genera il gruppo di GALOIS del corpo], per la misura generale di ω' si ha la formula $2(P + tP + t^2P) = 7(a'^2 + b'^2 + \dots + g'^2) - (a' + b' + \dots + g')^2$ otteniamo $P + tP + t^2P \leq \frac{7}{2} \cdot \frac{13}{16}$ e $n(\omega') = P \cdot tP \cdot t^2P \leq \left(\frac{7}{6} \cdot \frac{13}{16}\right)^3 = \left(\frac{91}{96}\right)^3$.

Resta da considerare il caso in cui delle sei coordinate b, c, d, e, f, g tre siano di un segno e le rimanenti del segno opposto.

Per fissare le idee ammettiamo che b, c, d abbiano il segno $+$, e, f, g il segno $-$ e che sia inoltre: $b \geq c \geq d$; $|e| \geq |f| \geq |g|$.

Faremo vedere che ci si può sempre ridurre al caso di un numero ω della forma (1), con tre coordinate su sei, in modulo $\leq \frac{1}{4}$, caso che sarà trattato in seguito, oppure che si può, estraendo eventualmente da ω un conveniente intero, ottenere un resto ω' di norma inferiore ad 1.

Si tenga ancora presente che, dato lo scopo che vogliamo raggiungere, è lecito non soltanto separare dall'intero ω delle parti intere da trascurarsi, ma si può anche moltiplicare o dividere ω (o la parte fratta rimasta) per una unità qualunque E del corpo, perchè sarà $n(\omega) < 1$ tutte le volte che sia $n(\omega E) < 1$ oppure $n(\omega : E) < 1$. Noi moltiplicheremo ω , quando sarà il caso, per potenze di ζ , e perciò cominciamo col formare i prodotti dati dal seguente quadro:

$$\begin{aligned} \omega\zeta &= -g\zeta + (b-g)\zeta^2 + (c-g)\zeta^3 + (d-g)\zeta^4 + (e-g)\zeta^5 + (f-g)\zeta^6 \\ \omega\zeta^2 &= (g-f)\zeta - f\zeta^2 + (b-f)\zeta^3 + (c-f)\zeta^4 + (d-f)\zeta^5 + (e-f)\zeta^6 \\ \omega\zeta^3 &= (f-e)\zeta + (g-e)\zeta^2 - e\zeta^3 + (b-e)\zeta^4 + (c-e)\zeta^5 + (d-e)\zeta^6 \\ \omega\zeta^4 &= (e-d)\zeta + (f-d)\zeta^2 + (g-d)\zeta^3 - d\zeta^4 + (b-d)\zeta^5 + (c-d)\zeta^6 \\ \omega\zeta^5 &= (d-c)\zeta + (e-c)\zeta^2 + (f-c)\zeta^3 + (g-c)\zeta^4 - c\zeta^5 + (b-c)\zeta^6 \\ \omega\zeta^6 &= (c-b)\zeta + (d-b)\zeta^2 + (e-b)\zeta^3 + (f-b)\zeta^4 + (g-b)\zeta^5 - b\zeta^6. \end{aligned}$$

Se fosse $d + |f| \geq \frac{1}{2}$, potendosi sostituire ad ω un numero ($\omega\zeta^4$) colle coordinate $-d, b-d, c-d, e-d, f-d, g-d$, coordinate che debbono poi rendersi in modulo $\leq \frac{1}{2}$, coll'aggiungere, a quelle che lo richiedono, ± 1 , si troverebbero quattro coordinate positive e cioè $b-d, c-d, f-d+1, e-d+1$, ricadendo così nel caso già trattato. Possiamo dunque supporre $d + |f| < \frac{1}{2}$ e analogamente $c + |g| < \frac{1}{2}$, per conseguenza anche $d + |g| < \frac{1}{2}$.

Allora non potranno essere b, c, d contemporaneamente $\geq \frac{1}{4}$ ove non siano f e g , in modulo $< \frac{1}{4}$, e analogamente non potranno essere e, f, g in modulo $\geq \frac{1}{4}$, ove non siano c, d ambedue $< \frac{1}{4}$. Perciò, a meno che non si abbiano tre o più coordinate di modulo $\leq \frac{1}{4}$, caso che sarà trattato per

ultimo, rimangono da esaminare i seguenti casi:

$$\left\{ \begin{array}{l} b \geq c \geq \frac{1}{4} \geq d \\ |e| \geq |f| \geq \frac{1}{4} \geq |g| \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} b \geq c \geq d \geq \frac{1}{4} \\ |e| \geq \frac{1}{4} \geq |f| \geq |g| \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} b \geq \frac{1}{4} \geq c \geq d \\ |e| \geq |f| \geq |g| \geq \frac{1}{4} \end{array} \right\}.$$

Il 2° e 3° di questi casi sono, come è chiaro, da trattarsi nello stesso modo. Cominciamo dal 1°.

Se fosse $b + |f| \geq \frac{3}{4}$ si potrebbe ottenere [sostituendo ad ω , $\omega\zeta^6$ e riconducendo poi nell'intervallo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ le coordinate di $\omega\zeta^6$ con l'aggiunta di unità pos. o neg.] un numero di cui tre coordinate [precisamente $e - b$, $e - b + 1$, $f - b + 1$] sarebbero in modulo $\leq \frac{1}{4}$.

Possiamo dunque supporre $b + |f| < \frac{3}{4}$ e analogamente $c + |e| < \frac{3}{4}$; ed allora, dovendo essere tutte e quattro queste coordinate di modulo $\geq \frac{1}{4}$, sarà:

$$\begin{array}{ll} b^2 + f^2 < \frac{5}{16} & c^2 + e^2 < \frac{5}{16} \\ b^2 + c^2 + f^2 + e^2 < \frac{10}{16} & b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 < \frac{3}{4}, \end{array}$$

quindi

$$\frac{7}{6}(b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2) < \frac{7}{8}$$

e per conseguenza $n(\omega) < \left(\frac{7}{8}\right)^2 < 1$.

Trattiamo ora il caso

$$\left\{ \begin{array}{l} b \geq c \geq d \geq \frac{1}{4} \\ |e| \geq \frac{1}{4} \geq |f| \geq |g|. \end{array} \right.$$

Se fosse $b + |e| \geq \frac{3}{4}$, si potrebbe sostituire ad ω un intero colle coordinate $c - b$, $d - b$, $e - b + 1$ in modulo $\leq \frac{1}{4}$.

Si può quindi supporre $b + |e| < \frac{3}{4}$. D'altra parte abbiamo già supposto

$$d + |f| < \frac{1}{2} \quad c + |g| < \frac{1}{2};$$

sarà quindi

$$d^2 + f^2 < \frac{1}{4} \quad c^2 + g^2 < \frac{1}{4}$$

e perciò

$$c^2 + d^2 + f^2 + g^2 < \frac{1}{2},$$

mentre per essere $b + |e| < \frac{3}{4}$, è

$$b^2 + e^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16},$$

quindi

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 &< \frac{13}{16} \\ \frac{7}{6}(b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2) &< \frac{91}{96} \\ n(\omega) &< 1. \end{aligned}$$

Non dobbiamo ormai studiare altro che il caso in cui tre delle sei coordinate di ω siano di modulo $\leq \frac{1}{4}$. Siano e, f, g le 3 coordinate di modulo $\leq \frac{1}{4}$, b, c, d le rimanenti. Si osservi che la condizione

$$|b| + |c| + |d| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sigma \quad \text{con} \quad \frac{1}{4} \leq \sigma \leq \frac{1}{2},$$

non potendo $|b|, |c|, |d|$ superare $\frac{1}{2}$, ha per conseguenza che:

$$b^2 + c^2 + d^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \sigma^2.$$

La cosa può vedersi geometricamente, oppure con semplici considerazioni algebriche.

Si consideri nello spazio a tre dimensioni b, c, d , riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, la regione limitata dai piani coordinati e dal

piano $b + c + d = 1 + \sigma$ che indichiamo con π . Di questa regione si prenda a considerare soltanto quella parte R che è interna al parallelepipedo A avente le faccie parallele ai piani coordinati e distanti di $\frac{1}{2}$ dall'origine. (Il

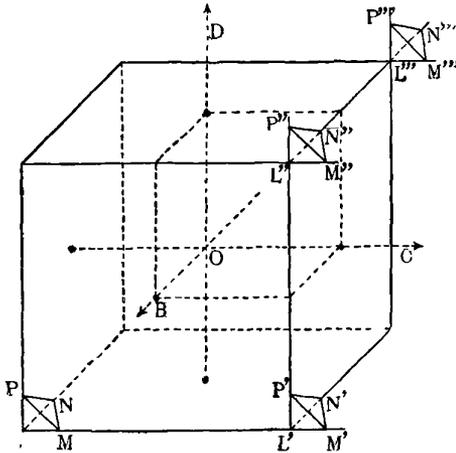


Fig. 2.

parallelepipedo è disegnato nella figura). Il piano π incontra i tre spigoli del cubo A , $L''L'$, $L''L''$, $L''L'''$ in tre punti,

$$R_1 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sigma\right); \quad R_2 \equiv \left(\frac{1}{2}, \sigma, \frac{1}{2}\right)$$

$$R_3 \equiv \left(\sigma, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

È evidente che, tra i punti appartenenti alla regione R ; quelli che hanno dalla origine la massima distanza sono R_1, R_2, R_3 . Ora rendere massima la detta distanza significa rendere massima $f^2 + c^2 + d^2$; quindi per tutti i punti

della regione R si ha $b^2 + c^2 + d^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \sigma^2$.

Avendosi ora, nella nostra ipotesi:

$$b^2 + c^2 + d^2 \leq \frac{1}{2} + \sigma^2 \quad e^2 + f^2 + g^2 \leq \frac{3}{16},$$

si conclude, sommando $b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 \leq \frac{11}{16} + \sigma^2$ e

$$P + tP + t^2P \leq \frac{7}{2} \left(\frac{11}{16} + \sigma^2\right) \quad n(\omega) = P \cdot tP \cdot t^2P \leq \left\{ \frac{7}{6} \left(\frac{11}{16} + \sigma^2\right) \right\}^3;$$

si avrà dunque

$$n(\omega) < 1 \quad \text{se} \quad \frac{7}{6} \left(\frac{11}{16} + \sigma^2\right) < 1 \quad \text{cioè} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma < \sqrt{\frac{6}{7} - \frac{11}{16}} \\ \sigma < 0,4118. \end{array} \right.$$

Potremo dunque supporre $|b| + |c| + |d| \geq 1,4118$ cioè il punto b, c, d situato entro uno degli otto tetraedri trirettangoli che si ottengono tagliando A coi piani intersecanti gli spigoli in tre punti distanti da un medesimo vertice di A di 0,0882. Coll'aggiungere ad alcune o tutte e tre le coordinate b, c, d una unità positiva o negativa (ove sia necessario), si potrà fare in modo

che b, c, d divengano dello stesso segno, e che questo segno sia quello di $e + f + g$. I detti aumenti di ± 1 corrispondono a traslazioni del tetraedro $LMNP$ parallelamente agli assi coordinati, come è indicato nella figura.

Nel caso più sfavorevole la distanza del punto b, c, d dall'origine non potrà superare quella di $P''' \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 0,0882\right)$; quindi sarà

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 + c^2 + d^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0,5882^2 \\ \qquad \qquad \qquad < 0,50 + 0,59^2 \\ \qquad \qquad \qquad < 0,50 + 0,3481 \\ \qquad \qquad \qquad < 0,8481 \\ e^2 + f^2 + g^2 \leq 0,1875 \end{array} \right.$$

e per conseguenza:

$$b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 \leq 1,0356$$

insieme con

$$|b + c + d + e + f + g| \geq 1,41.$$

Ne segue:

$$7(b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2) - (b + c + d + e + f + g)^2 < 7,2492 - 1,9881 < 5,2611$$

e poichè è

$$n(\omega) = \left[\frac{1}{6} \{ 7(b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2) - (b + c + d + e + f + g)^2 \} \right]^3$$

risulta

$$n(\omega) < 1.$$

In conclusione: se indichiamo con O_1 l'operazione (da applicarsi ad ω quando 4 su 6 delle coordinate sono dello stesso segno) che consiste nell'aggiungere ad ω l'espressione $\pm \frac{1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5 + \zeta^6}{4} = 0$ e nel ricondurre, con l'aggiunta di ± 1 , nell'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ quelle coordinate che ne fossero uscite:

con O_2 l'operazione che consiste nel sostituire $\omega\zeta^t$ ad ω , riconducendo poi nell'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ tutte le coordinate,

con O_3 l'operazione che consiste nell'aumentare tre al massimo delle coordinate di ± 1 , facendole uscire fuori del detto intervallo, vediamo che il

procedimento per decomporre ω in una parte intera e in una parte fratta di norma < 1 si può riassumere così:

Se quattro delle coordinate (su sei) sono di uno stesso segno basta la sola applicazione dell'operazione O_1 .

Se tre sono di un segno e le altre tre del segno contrario, ove non sia già $n(\omega) < 1$, si può, con l'operazione O_2 , ottenere o un numero ω' con 4 coordinate di uno stesso segno, o un numero ω' di cui tre, su sei, delle coordinate sono in modulo $\leq \frac{1}{4}$.

Se 3 delle coordinate di ω' sono in modulo $\leq \frac{1}{2}$ o è già $n(\omega') < 1$, oppure, con l'applicazione di O_3 può ottenersi un numero ω'' , per cui $n(\omega'') < 1$.

§ 5. Corpo delle radici 16^{ma} dell'unità $\zeta = e^{2\pi i/16}$.

1. L'equazione irreducibile che definisce ζ è $x^8 + 1 = 0$; una base del corpo è costituita dagli interi $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^7$.

Ogni numero ω di $C(\zeta)$ si può mettere sotto la forma:

$$(1) \quad \omega = a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 + e\zeta^4 + f\zeta^5 + g\zeta^6 + h\zeta^7,$$

e se indichiamo con s la sostituzione che cangia ζ in ζ^{-1} si trova che è

$$\begin{aligned} P = \omega \cdot s\omega = & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + \\ & + (ab + bc + cd + de + ef + fg + gh - ha)(\zeta + \zeta^{-1}) + \\ & + (ac + bd + ce + df + eg + fh - ga - hb)(\zeta^2 + \zeta^{-2}) + \\ & + (ad + be + cf + dg + eh - fa - gb - hc)(\zeta^3 + \zeta^{-3}). \end{aligned}$$

Indichiamo ora con T_1, T_2, T_3 le sostituzioni (del 4° o del 7° ordine)

$$T_1 = (\zeta, \zeta^3), \quad T_2 = (\zeta, \zeta^5), \quad T_3 = (\zeta, \zeta^7).$$

Vediamo facilmente che

$$(2) \quad P + T_1P + T_2P + T_3P = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)$$

e

$$(3) \quad n(\omega) = P \cdot T_1P \cdot T_2P \cdot T_3P \leq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)^4.$$

2. Prima di proseguire ci occorre generalizzare in un certo senso il procedimento delle divisioni successive. Si consideri un dato corpo C e si supponga di avere scelto nel corpo stesso un determinato numero s di numeri

interi primi (cioè indecomponibili anche se riguardati come ideali): siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ tali interi. Siano poi μ e ν due interi qualunque del corpo dei quali debba ricercarsi il m. c. d. (ben inteso che si suppone uguale ad 1 il numero delle classi d'ideali del corpo, affinché questo m. c. d. sia esso stesso un ideale principale). Fino ad ora ci si limitava a considerare il quoto $\frac{\mu}{\nu}$ e a decomporlo in una somma $\frac{\mu}{\nu} = \Omega + \omega$ con Ω intero e ω di norma inferiore ad 1; qualche volta abbiamo anche dovuto prima moltiplicare μ per una unità E , decomponendo poi $\frac{E\mu}{\nu}$ nella somma $\frac{E\mu}{\nu} = \Omega' + \omega'$, con Ω' intero ed ω' di norma inferiore ad 1 (E unità di C); questa però non può riguardarsi come una generalizzazione del procedimento, potendosi anche scrivere $\frac{\mu}{\nu} = E^{-1}\Omega + E^{-1}\omega'$, ciò che equivale a prendere $\Omega = E^{-1}\Omega'$, $\omega = E^{-1}\omega'$. Fatto ciò, l'eguaglianza $\frac{\mu}{\nu} = \Omega + \omega$ si poneva sotto la forma $\mu = \nu\Omega + R$, con $R = \omega\nu$ intero e $n(R) < n(\nu)$; R era il resto della prima divisione. Possiamo generalizzare questo procedimento così: immaginiamo innanzi tutto di avere spogliato μ e ν degli eventuali fattori primi uguali a qualcuno dei numeri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$. Fatto questo, si cerchi di decomporre il quoto $\frac{\mu}{\nu}$ in una espressione della forma $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\Omega}{\pi} + \omega$ dove π è un prodotto di potenze dei numeri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, Ω è un intero ed ω è un numero tale che risulti $n(\omega) < \frac{1}{n(\pi)}$.

Riducendo allora la precedente eguaglianza a forma intera si trova $\pi\mu = \nu\Omega + R$ con $R = \nu\pi\omega$ intero e $n(R) < n(\nu)$. R sarà il *resto della prima operazione*. Il m. c. d. dei numeri μ e ν (primo con π) sarà ancora il m. c. d. di ν e R . Si libererà poi R dagli eventuali fattori uguali ad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ e poi si procederà relativamente al quoto $\frac{\nu}{R}$ come si è proceduto per il quoto $\frac{\mu}{\nu}$ e così si proseguirà. Naturalmente sarà dimostrata l'esistenza dell'algoritmo se, per ogni coppia d'interi μ e ν primi col prodotto $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, si riesce ad accertare la possibilità della decomposizione di $\frac{\mu}{\nu}$ nella somma $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\Omega}{\pi} + \omega$ con Ω intero e $n(\omega) < \frac{1}{n(\pi)}$.

Questo procedimento si potrà chiamare *algoritmo delle divisioni successive generalizzato*.

Per il corpo delle radici 16^{me} dell'unità dimostreremo l'esistenza di un tale algoritmo: il gruppo dei numeri $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_s$ sarà costituito dal solo numero primo $1 - \zeta$, numero primo di 1° grado, la cui norma è 2.

3. Partiamo da due interi μ e ν del corpo, che supponiamo liberati dagli eventuali fattori primi eguali ad $1 - \zeta$, in modo da esser certi che il m. c. d. di μ e ν è primo con $1 - \zeta$. Poniamo poi al solito il quoto $\frac{\mu}{\nu}$ sotto la forma $\frac{\mu}{\nu} = \Omega + \omega$ con Ω intero e ω colle coordinate in modulo $< \frac{1}{2}$. Si consideri la frazione

$$\varphi = \frac{1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5 + \zeta^6 + \zeta^7}{2}.$$

Essa è eguale a

$$\frac{1}{2} \frac{1 - \zeta^8}{1 - \zeta} = \frac{1}{1 - \zeta}.$$

Si potrà allora scrivere

$$\frac{\mu}{\nu} = \Omega + \varphi + (\omega - \varphi)$$

cioè

$$(1 - \zeta)\mu = \{(1 - \zeta)\Omega + 1\}\nu + (1 - \zeta)\nu(\omega - \varphi)$$

ed è evidente che il m. c. d. di μ e ν sarà identico a quello di ν e dell'intero $(1 - \zeta)\nu(\omega - \varphi)$. Per poter assicurare l'esistenza dell'algoritmo delle divisioni successive si dovrà però far vedere che è possibile scegliere Ω in modo che $n(\omega - \varphi) < \frac{1}{2}$, affinché si abbia

$$n \{(1 - \zeta)\nu(\omega - \varphi)\} < n(\nu).$$

Diciamo subito, per maggior chiarezza e per non doverci poi ripetere che, qualche volta, sottrarremo da ω , anziché φ , un numero fratto della forma $\frac{\varphi'}{2}$ con φ' intero, ed esprimeremo il quoto $\frac{\mu}{\nu}$ mediante la somma $\frac{\mu}{\nu} = \Omega + \frac{\varphi'}{2} + \left(\omega - \frac{\varphi'}{2}\right)$, ossia, quando si indichi $2\Omega + \varphi'$ con Ω^* , $\omega - \frac{\varphi'}{2}$ con ω^* ; mediante

$$(1) \quad \frac{\mu}{\nu} = \frac{\Omega^*}{2} + \omega^*,$$

dove Ω^* è un intero. In tal caso, se vogliamo prendere $2\omega^*\nu$ come resto, in guisa che risulti $n(2\omega^*\nu) < n(\nu)$, occorrerà che la decomposizione del quoto $\frac{\mu}{\nu}$ nei due termini $\frac{\Omega^*}{2}$ ed ω^* sia tale che $n(\omega^*) < \frac{1}{n(2)} < \frac{1}{2^3}$.

4. Premesso questo, poniamo, al solito, il quoto $\frac{\mu}{\nu}$ sotto la forma: $\frac{\mu}{\nu} = \Omega + \omega$, con Ω intero ed ω avente le coordinate (pos. o neg.) in modulo $< \frac{1}{2}$. Nel medesimo tempo decomponiamo $\frac{\mu}{\nu}$ nella somma: $\frac{\mu}{\nu} = \bar{\Omega} + \bar{\omega}$, in modo che $\bar{\Omega}$ sia intero ed $\bar{\omega}$ abbia le coordinate comprese nell'intervallo (0, 1). Potremo anche scrivere $\frac{\mu}{\nu} = (\bar{\Omega} + \varphi) + \omega'$ con $\omega' = \bar{\omega} - \varphi$ dove ω' è un numero avente le coordinate (pos. o neg.) in modulo $< \frac{1}{2}$.

Dalle osservazioni premesse risulta che se $n(\omega) < 1$ oppure $n(\omega') < \frac{1}{2}$ si può prendere rispettivamente come resto della prima operazione $\omega\nu$ oppure $\omega'\nu(1 - \zeta)$. Se si pone

$$\omega = a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 + e\zeta^4 + f\zeta^5 + g\zeta^6 + h\zeta^7, \quad \omega' = a' + b'\zeta + \dots + h'\zeta^7$$

$$\sigma = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2, \quad \sigma' = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 + e'^2 + f'^2 + g'^2 + h'^2$$

tenendo conto di ciò che si è veduto nel n° 1, vediamo che la condizione $n(\omega) < 1$ sarà soddisfatta se è $\sigma < 1$ e la condizione

$$n(\omega') < \frac{1}{2} \quad \text{se è} \quad \sigma < \sqrt[4]{\frac{1}{2}} < 0,8049.$$

Possiamo dunque supporre $\sigma \geq 1$; $\sigma' > 0,84$, poichè in caso contrario, la prima operazione può dirsi finita, nel senso che si è trovato il primo resto.

Prima di proseguire osserveremo che le coordinate di ω e di ω' sono legate dalle relazioni

$$|a| + |a'| = \frac{1}{2}, \quad |b| + |b'| = \frac{1}{2} \dots |h| + |h'| = \frac{1}{2}.$$

Della cosa ci si può persuadere subito con una ovvia rappresentazione geometrica, oppure così:

Se a è positivo (naturalmente $< \frac{1}{2}$) abbiamo

$$|a| = a, \quad a' = a - \frac{1}{2}, \quad |a'| = \frac{1}{2} - a, \quad |a| + |a'| = \frac{1}{2}.$$

Se a è negativo abbiamo

$$|a| = -a, \quad a' = a + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + a, \quad |a'| = \frac{1}{2} + a, \quad |a| + |a'| = \frac{1}{2}.$$

Immaginiamo ora di rendere, con sottrazioni o aggiunte di mezza unità, le coordinate di ω (pos. o neg.) di modulo $\leq \frac{1}{4}$. S'intende subito che, fatto questo, potremo dare di $\frac{\mu}{\nu}$ la decomposizione $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha}{2} + \omega''$, in due termini, dei quali il secondo ha le coordinate che sono appunto di modulo $\leq \frac{1}{4}$, mentre il 1° è il quoto di un intero per il numero 2. Poniamo

$$\begin{aligned} \omega'' &= a'' + b''\zeta + c''\zeta^2 + d''\zeta^3 + e''\zeta^4 + f''\zeta^5 + g''\zeta^6 + h''\zeta^7 \\ \alpha'' &= a''^2 + b''^2 + c''^2 + \dots + h''^2. \end{aligned}$$

Si formino anche le semidifferenze dei moduli

$$|a|, |a'|; \quad |b|, |b'|; \quad |c|, |c'|; \quad |h|, |h'|$$

e si indichino con $a_1'', b_1'', \dots, h_1''$, i moduli di tali semidifferenze. Ci si convince subito che si ha

$$|a''| + a_1'' = \frac{1}{4}; \quad |b''| + b_1'' = \frac{1}{4}; \quad \dots; \quad |h''| + h_1'' = \frac{1}{4}.$$

Anche questo fatto può verificarsi ricorrendo ad una semplice rappresentazione geometrica, oppure così:

Se è $|a| < \frac{1}{4}$ ne segue in primo luogo $a'' = a$ ed inoltre

$$|a'| = \frac{1}{2} - |a|, \quad \frac{|a'| - |a|}{2} = \frac{1}{4} - |a|, \quad a_1'' = \frac{1}{4} - |a|$$

quindi

$$|a''| + a_1'' = \frac{1}{4}.$$

Se è invece $|a| > \frac{1}{4}$ ne segue in primo luogo $a'' = a \mp \frac{1}{2}$ secondochè è $a \geq 0$, $|a''| = \frac{1}{2} - |a|$ ed inoltre

$$a' = \frac{1}{2} - |a|, \quad \frac{|a| - |a'|}{2} = |a| - \frac{1}{4}, \quad a_1'' = |a| - \frac{1}{4}$$

quindi

$$|a''| + a_1'' = \frac{1}{4}.$$

Si osservi ora che si ha

$$2(a^2 + a'^2) = (|a| + |a'|)^2 + (|a| - |a'|)^2 = \frac{1}{4} + 4a_1''^2$$

ed analogamente

$$2(b^2 + b'^2) = \frac{1}{4} + 4b_1''^2, \dots, \quad 2(4^2 + 4'^2) = \frac{1}{4} + 4h_1''^2,$$

e che da questa uguaglianza, sommando membro a membro, risulta

$$(2) \quad 2(\sigma + \sigma') = 2 + 4\sigma_1''.$$

Avendo indicato con σ_1'' la somma $\sigma_1'' = a_1''^2 + b_1''^2 + \dots + c_1''^2$.

E poichè si suppone ormai $\sigma \geq 1$, $\sigma' > 0,84$, dalla (2) ricaviamo

$$1,84 < 1 + 2\sigma_1'', \quad \text{cioè} \quad \sigma_1'' > 0,42.$$

D'altra parte, dalla relazione $|a''| + a_1'' = \frac{1}{4}$ abbiamo

$$a''^2 + a_1''^2 = (|a''| + a_1'')^2 - 2|a''|a_1'' \leq \frac{1}{16}$$

e ugualmente

$$b''^2 + b_1''^2 \leq \frac{1}{16} \dots h''^2 + h_1''^2 \leq \frac{1}{16}$$

e sommando $\sigma_1'' + \sigma'' \leq 0,50$. Ed allora da: $\sigma_1'' > 0,42$, segue $\sigma'' < 0,08$. E poichè è (come si è visto al n° 1)

$$n(\omega'') < \sigma''^4 < 0,084, \quad n(2) = 2^8$$

ed è $0,084 < \frac{1}{2^8}$ (relazione equivalente a $0,08 < \frac{1}{4}$) viene ad essere così sod-

disfatta la condizione $n(\omega'') < \frac{1}{n(2)}$ che ci assicura potersi prendere ω'' come resto della prima divisione.

Concludendo: per ottenere il resto di ciascuna operazione basterà calcolare i numeri analoghi ad ω , ω' , ω'' , e si calcolerà ω' soltanto se $n(\omega) \geq 1$, ω'' soltanto quando sia di più $n(\omega') > 0,84$.

Funzioni sferiche poliarmoniche a due variabili

(di VIRGILIO GIULOTTO a Bergamo)

Le funzioni alle quali GAUSS diede la denominazione di sferiche furono, com'è noto, per la prima volta, e quasi contemporaneamente, studiate dal LEGENDRE⁽¹⁾ e dal LAPLACE⁽²⁾ nel 1785 rispettivamente nelle Memorie sull'attrazione degli sferoidi e sulla figura d'equilibrio dei pianeti.

In seguito furono introdotte nell'analisi molte altre funzioni, alle quali accenno brevemente, analoghe o più generali delle funzioni sferiche.

Tali sono le funzioni toroidali che C. NEUMANN⁽³⁾ studiò per primo nel 1864 e che, per la superficie del toro, compiono lo stesso ufficio delle funzioni sferiche in rapporto alla sfera; le funzioni coniche alle quali il MEHLER⁽⁴⁾ pervenne nel 1868 sviluppando in serie l'espressione della distanza di un punto della superficie di un cono da un punto situato sull'asse; le funzioni di LAMÉ⁽⁵⁾ studiate per la prima volta nel 1837 da questo matematico quando si propose di trattare per l'ellissoide il problema dell'equilibrio delle temperature già trattato per la sfera; le funzioni cilindriche (del cilindro circolare) introdotte dal FOURIER⁽⁶⁾ e dal BESSEL⁽⁷⁾ e che diedero poi origine agli studi sulle funzioni del cilindro ellittico e sulle funzioni del cilindro parabolico.

In tempi più recenti il NIELSEN⁽⁸⁾ si occupò, per circa dieci anni, dello studio di una funzione $K^{\nu, \rho}(x)$ di argomenti x , di parametro ν e d'indice ρ alla

(1) LEGENDRE, *Sur l'attraction des sphéroïdes*. (Mémoires Acad. sc., Paris 1785, p. 411-434).

(2) LAPLACE, *Theorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes*. (Mémoires Acad. sc., Paris, 1785). Mécanique céleste.

(3) C. NEUMANN, *Theorie der Elektrizitäts und Wärmeleitung in einem Ringe*. (Leipzig 1864).

(4) MEHLER, *Ueber die Vertheilung der statischen Elektrizität in einem von zwei Kugelkappen begrenzten Körper*. (Journal für die reine und angewandte mathematik 68 (1868) p. 140).

(5) LAMÉ, *Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température*. (Journal math. pures appl., (1) 2 (1837) p. 147-88). *Leçons sur les fonctions inverses etc.* Paris, 1857.

(6) FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*. (Paris, 1822, p. 369). *Oeuvres publ. par G. DARBOUX*. (I, Paris, 1888, p. 332).

(7) BESSEL, *Analytische Auflösung der Keplerschen Aufgabe*. (Abhandlungen Akad. Berlin (1816-17), éd. 1819, Math. klasse, p. 49; id. (1824) éd. 1826, Math. klasse, p. 1-52).

(8) NIELSEN, *Fonctions métrosphériques*. (Paris, Gautier-Villars, 1911).

quale, nel caso di ν e ρ qualunque, diede il nome di funzione metasferica e nel caso di ρ intero, non negativo, di funzione ultrasferica. Essa è la soluzione più generale di due equazioni funzionali ed è integrale di un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine; per valori particolari del parametro e dell'indice può coincidere con l'ordinaria funzione di LEGENDRE e con la funzione toroidale o con la funzione conica.

Generalizzando l'espressione della funzione di LEGENDRE (ordinariamente rappresentata col simbolo $X_{\nu, \rho}(x)$) JACOBI ⁽⁹⁾, nel 1859, introdusse nell'analisi i polinomi che portano il suo nome; studi analoghi furono fatti in seguito prima dall'HERMITE ⁽¹⁰⁾ e dal LAGUERRE ⁽¹¹⁾ (i quali pervennero a polinomi che possono considerarsi come limiti dei polinomi di JACOBI) e più tardi dal DERUYTS ⁽¹²⁾ che giunse a funzioni trasformabili in polinomi di JACOBI con un cambiamento lineare della variabile. Partendo dalla considerazione di funzioni generatrici analoghe a quella che dà origine ai polinomi di LEGENDRE, il GEGENBAUER ⁽¹³⁾, il TISSERAND ⁽¹⁴⁾, l'ESCARY ⁽¹⁵⁾, il PINCHERLE ⁽¹⁶⁾ pervennero a funzioni interessanti che conservano o questa o quella proprietà degli ordinari polinomi di LEGENDRE, l'HANSTED ⁽¹⁷⁾ invece giunse ad una generalizzazione di detti polinomi studiando gli integrali di una equazione differenziale che si riduce a quella caratteristica dei polinomi di LEGENDRE per il valore uno dei parametri arbitrari che in essa figurano, il DINI ⁽¹⁸⁾, applicando la teoria dei residui, estese formule e proprietà integrali dei polinomi di LEGENDRE a funzioni molto

⁽⁹⁾ JACOBI, *Untersuchungen über die Differentialgleichung der hyper-geometrischen Reihe.* (Journal reine angew. Math. 56 (1859), p. 149-75; Werke 6, Berlin, 1891, p. 184-202).

⁽¹⁰⁾ HERMITE, *Sur un nouveau développement en série des fonctions.* (Comptes Rendus Acad. sc., Paris, 58 (1864), p. 93-7, 266-73. *Oeuvres publ.* par E. PICARD, 2, Paris, 1908, p. 293).

⁽¹¹⁾ LAGUERRE, *Sur l'intégrale etc.* (Bull. soc. math. France, 7 (1878-79), p. 72; *Oeuvres*, 1, Paris, 1898, p. 428).

⁽¹²⁾ DERUYTS, *Sur une classe de polynomes analogues aux fonctions de Legendre.* (Mém. Société Royale des sciences. Liege (2) 14 (1888), Mem. n° 2, p. 3-15 (1888)).

⁽¹³⁾ GEGENBAUER, *Ueber die Bessel'schen functionen.* (Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akad der Wissenschaften, 70, II (1874), p. 6-16; 433-43 ecc.).

⁽¹⁴⁾ TISSERAND, *Sur le développement de la fonction perturbatrice etc.* (Comptes Rendus, Acad. sc., Paris, 97 (1883), p. 815-880).

⁽¹⁵⁾ ESCARY, *Généralisation des fonctions X_n ecc.* (Journal Math. pures et appl., (3) 5 (1879), p. 47-68).

⁽¹⁶⁾ PINCHERLE, *Una nuova estensione delle funzioni sferiche.* (Mem. Ist., Bologna (5), 1, (1889-90), p. 337).

⁽¹⁷⁾ HANSTED, *Généralisation de la fonction X_n de Legendre.* (Journal sciences math. astron. (Coimbre) 4 (1882), p. 53-61).

⁽¹⁸⁾ DINI, *Un'applicazione della teoria dei residui ecc.* (R. Acc. Lincei, Classe Scienze fisiche mat. nat., serie 5^a, vol. II, Ann. mat., tomo I, serie III, p. 39).

più generali. Dall'HERMITE ⁽¹⁹⁾, dal DIDON ⁽²⁰⁾ e da altri furono estese, a funzioni a due variabili, la definizione e le proprietà della ordinaria X_n .

Oltre a queste copiose ricerche, legate al polinomio di LEGENDRE e che affaticarono le menti di numerosi matematici, alcuni altri studi furono fatti che condussero a generalizzare non solo la funzione di LEGENDRE ma contemporaneamente tutto il complesso delle funzioni sferiche ordinarie ad una e a due variabili. Si tratta delle ricerche iniziate dal CAYLEY sin dal 1848 e sviluppate in seguito da CLEBSCH, MEHLER, HEINE e da vari geometri inglesi come HILL, HOBSON ecc. e che hanno a fondamento l'equazione di LAPLACE (alla quale soddisfa, moltiplicata per un conveniente fattore numerico la più generale funzione sferica) considerata in un campo euclideo a $p + 1$ dimensioni. Tali ricerche formarono anche oggetto di una mia Memoria ⁽²¹⁾ che contiene cenni bibliografici su tale argomento, completati dal prof. MARCOLONGO ⁽²²⁾ in una nota più recente.

In una Memoria, pubblicata sin dal 1903 ⁽²³⁾, io dimostrai che si può anche cercare la generalizzazione delle funzioni sferiche aumentando l'ordine dell'equazione differenziale di LAPLACE e introdussi le funzioni sferiche q -armoniche o d'indice q ; più tardi, nel 1911 ⁽²⁴⁾, mostrai che ad una più ampia estensione si poteva pervenire partendo dalla considerazione di funzioni armoniche d'ordine superiore in un iperspazio euclideo.

Nel presente lavoro, riprendendo le ricerche iniziate nel 1903 e allora condotte con riguardo alla sola funzione q -armonica ad una variabile da me rappresentata col simbolo $X_n^q(x)$, studio le proprietà delle funzioni sferiche q -armoniche a due variabili.

Individuate $2n + 1$ funzioni sferiche q -armoniche fondamentali indipendenti che per $q = 1$ si riducono alle $2n + 1$ funzioni sferiche fondamentali ordinarie, con un procedimento che nella teorica ordinaria fu già tracciato dal THOMSON nella seconda edizione della « Natural Philosophy » e dal prof. MAR-

⁽¹⁹⁾ HERMITE, *Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables*. (C. R. Acad. sc., Paris, 60 (1865), p. 370, 432, 461, 512.

⁽²⁰⁾ DIDON, *Memorie varie*. (Ann. École Norm., (1) 5 (1868), p. 229-310; (1) 6 (1869), p. 7-26; (1) 7 (1870), p. 247-298 ecc.).

⁽²¹⁾ GIULOTTO, *Sulle funzioni sferiche simmetriche del campo ad N dimensioni*. (G. Battaglini, vol. 39 e 41).

⁽²²⁾ MARCOLONGO, *Sulla teoria delle funzioni sferiche*. (Atti Accad. Peloritana, anno XVII).

⁽²³⁾ GIULOTTO, *Sopra una nuova estensione delle funzioni sferiche di Legendre*. (Rend. Circ. Mat. Palermo, t. XVII (1903).

⁽²⁴⁾ GIULOTTO, *Funzioni ipersferiche poliarmoniche ad una variabile*. (Ann. di Mat. pura e appl., t. XIX della serie III (1911).

COLONGO riprodotto nella Memoria già citata, ottengo per detti polinomi espressioni analitiche interessanti che mi conducono allo studio di funzioni che sono la generalizzazione delle note funzioni aggiunte (Zugeordnete) considerate da HEINE delle quali stabilisco l'equazione differenziale caratteristica, e di tali risultati ottengo poi la conferma per altra via, e con procedimento completamente originale, dopo aver stabilita l'equazione differenziale alla quale soddisfa la funzione sferica q -armonica corrispondente alla nota funzione sferica di LAPLACE; determino infine alcune relazioni ricorrenti tra funzioni aggiunte di diverso ordine ed indice e generalizzo la formula di addizione.

Queste ricerche, e quelle iniziate nel 1903, costituiscono, nel loro insieme, una generalizzazione (condotta ad un termine relativo) del complesso delle funzioni sferiche ordinarie e ciò conferisce, a parer mio, un particolare interesse al presente lavoro dato che, come si rileva dal precedente riassunto bibliografico, la quasi totalità delle generalizzazioni concernenti le funzioni in questione si limitano al polinomio di LEGENDRE.

Da ultimo osservo che, dal confronto delle equazioni differenziali caratteristiche, si rileva che per $\rho = n$ e $\nu = \frac{1}{2}(3 - 2q)$ la $K^{\nu, \rho}(x)$ coincide con la $X_n^q(x)$ e faccio notare che il GEGENBAUER e il NIELSEN estendono rispettivamente alla $C_n^q(x)$ e $K^{\nu, \rho}(x)$ il teorema dell'addizione col solo scopo di dimostrare una importante proprietà di tali funzioni ad una variabile.

1. Si dirà funzione sferica poliarmonica d'ordine n e d'indice q una funzione $f_n(xyz)$ razionale, intera, omogenea di grado n q -armonica (ossia soddisfacente all'equazione $\Delta_2^q f_n = 0$) in cui le variabili si pensino come coordinate di un punto della sfera col centro nell'origine e raggio uno e si considerino quindi legate dalla relazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Nella Memoria già citata « Sopra una nuova estensione delle funzioni sferiche di LEGENDRE » al Cap. I, § 3 ho dimostrato che posto:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

la

$$f_n = \frac{\partial^{n, 2q-3}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} r^{2n+3-2q} \quad (\alpha + \beta + \gamma = n)$$

quando vi s'intendano le variabili legate dalla relazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (in numero di $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ per $n < 2q$ e di $(2n+3-2q)q$ per $n \geq 2q$) defi-

nisce tutte le funzioni sferiche poliarmoniche linearmente indipendenti, tali cioè che una loro combinazione lineare rappresenta la più generale funzione sferica d'ordine n e d'indice q .

Poniamo ora con THOMSON

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy.$$

Le derivate di r^{2q-3} rispetto ad x ed y sono funzioni lineari delle derivate rispetto a ξ e ad η ; saranno quindi polinomi sferici i numeratori delle seguenti derivate:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{n, 2q-3}}{\partial z^n}, \quad \frac{\partial^{n, 2q-3}}{\partial \xi \partial z^{n-1}}, \quad \frac{\partial^{n, 2q-3}}{\partial \xi^2 \partial z^{n-2}}, \dots, \quad \frac{\partial^{n, 2q-3}}{\partial \xi^n}, \\ & \frac{\partial^{n, 2q-3}}{\partial \eta \partial z^{n-1}}, \quad \frac{\partial^{n, 2q-3}}{\partial \eta^2 \partial z^{n-2}}, \dots, \quad \frac{\partial^{n, 2q-3}}{\partial \eta^n}. \end{aligned}$$

Essi sono in numero di $2n+1$ vale a dire tanti quante le funzioni sferiche ordinarie fondamentali d'ordine n , e poichè in seguito dimostreremo che sono fra di loro linearmente indipendenti, potremo considerarli come l'estensione, nel campo q -armonico, delle ordinarie funzioni sferiche fondamentali. Invece dei numeratori delle precedenti derivate potremo considerare i numeratori delle seguenti:

$$\frac{\partial^{n, 2q-3}}{\partial z^n}, \quad \frac{\partial^{n, 2q-3}}{\partial \xi^m \partial z^{n-m}} \pm \frac{\partial^{n, 2q-3}}{\partial \eta^m \partial z^{n-m}} \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

con

$$r = (\xi\eta + z^2)^{\frac{2q-3}{2}}$$

e poichè, a meno di un coefficiente numerico, la seconda delle espressioni precedenti è uguale a

$$(\xi^m \pm \eta^m) \frac{\partial^{n-m, 2q-3-2m}}{\partial z^{n-m}}$$

potremo assumere per polinomi sferici fondamentali q -armonici le funzioni

$$(1) \quad \frac{\partial^{n, 2q-3}}{\partial z^n}, \quad (\xi^m \pm \eta^m) \frac{\partial^{n-m, 2q-3-2m}}{\partial z^{n-m}} \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

moltiplicate per $r^{2n+3-2q}$.

Ora, con processo d'induzione, si trova:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{s, p}}{\partial z^s} = p(p-2) \dots (p-2s+2)r^{p-s}. \\ & \sum_{k=0}^s \frac{s(s-1)(s-2) \dots (s-2k+1)}{2 \cdot 4 \dots 2k \cdot (p-2s+2)(p-2s+4) \dots (p-2s+2k)} \left(\frac{z}{r}\right)^{s-2k}. \end{aligned}$$

Posto:

$$p = 2q - 3 \quad \text{ed} \quad s = n$$

deduciamo:

$$(2) \quad \frac{\partial^n r^{2q-3}}{\partial x^n} = (2q-3)(2q-5) \dots (2q-1-2n) r^{2q-3-n} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-2k+1)}{2 \cdot 4 \dots 2k \cdot (2q-2n-1)(2q-2n+1) \dots (2q-2n+2k-3)} \left(\frac{x}{r}\right)^{n-2k}$$

Posto invece:

$$p = -2m + 2q - 3 \quad \text{ed} \quad s = n - m,$$

abbiamo:

$$(3) \quad \frac{\partial^{n-m} r^{2q-2m-3}}{\partial x^{n-m}} = (-2m+2q-3)(-2m+2q-5) \dots (-2m+2q-2n-2m-1) r^{2q-3-m-n} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2) \dots (n-m-2k+1)}{2 \cdot 4 \dots 2k \cdot (2q-2n-1)(2q-2n+1) \dots (2q-2n+2k-3)} \left(\frac{x}{r}\right)^{n-m-2k}$$

Sostituito ζ al posto di $\frac{x}{r}$, poichè l'espressione al secondo membro della (2), salvo il fattore $\frac{(-1)^n}{\pi(n)} r^{2q-3-n}$ definisce la X_n^q , già da noi trovata per altra via al Cap. I, § 5 della citata Memoria, e la sommatoria che figura al secondo membro della (3) è la derivata d'ordine m della sommatoria che figura nella (2), tenendo presente la (1), potremo assumere come polinomi sferici fondamentali i seguenti $2n+1$:

$$r^n X_n^q(\zeta) \quad \text{e} \quad r^{n-m} (\xi^m \pm \eta^m) \frac{d^m X_n^q}{d\zeta^m} \quad (m=1, 2, \dots, n).$$

Passiamo alle coordinate polari. Poniamo:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \psi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi.$$

Deduciamo:

$$\xi = r \operatorname{sen} \theta (\cos \psi + i \operatorname{sen} \psi)$$

$$\eta = r \operatorname{sen} \theta (\cos \psi - i \operatorname{sen} \psi)$$

e posto $\operatorname{sen} \theta = v$:

$$\xi^m = r^m v^m (\cos m\psi + i \operatorname{sen} m\psi)$$

$$\eta^m = r^m v^m (\cos m\psi - i \operatorname{sen} m\psi)$$

$$\xi^m + \eta^m = 2r^m v^m \cos m\psi; \quad \xi^m - \eta^m = 2i r^m v^m \operatorname{sen} m\psi$$

e i polinomi fondamentali q -armonici sono:

$$X_n^{q,n}, \quad 2r^n v^m \cos m\psi \frac{d^m X_n^q}{d\zeta^m}, \quad 2i r^n v^m \operatorname{sen} m\psi \frac{d^m X_n^q}{d\zeta^m} \quad (m=1, 2, \dots, n).$$

Posto infine :

$$v = \operatorname{sen} \theta = (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} = (1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$P_{n,m}^q = v^m \frac{d^m X_n^q}{d\zeta^m} = (1 - \zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X_n^q}{d\zeta^m}$$

e ricordando che siamo sulla sfera di raggio uno, possiamo assumere per polinomi sferici fondamentali q -armonici corrispondenti ai $2n + 1$ polinomi sferici fondamentali ordinari :

$$(\alpha) \quad \cos m\psi P_{n,m}^q, \quad \operatorname{sen} m\psi P_{n,m}^q \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n)$$

intendendo che sia :

$$P_{n,0}^q = X_n^q.$$

In tali funzioni fondamentali l'angolo θ è la colatitudine del punto variabile sulla sfera rispetto al polo determinato dall'intersezione dell'asse delle z con la superficie sferica e l'angolo ψ è la longitudine dello stesso punto rispetto al piano xz .

Importa però provare l'indipendenza delle funzioni (α) dimostrando che per qualsivoglia valore di n è diversa da zero

$$(4) \quad \sum_{s=0}^n (A_s P_{n,s}^q \cos s\psi + B_s P_{n,s}^q \operatorname{sen} s\psi)$$

dove A_s e B_s sono costanti arbitrarie.

Per questo ricordiamo che a seconda che è $m \geq n$, $m = n > 0$, $m = n = 0$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx$$

ha rispettivamente i valori zero, π , 2π e che, nelle stesse ipotesi per i valori di m ed n ,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx$$

ha rispettivamente i valori zero, π , zero, mentre

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx dx$$

per qualunque valore di m ed n è sempre zero.

Moltiplicata l'espressione (4) successivamente per $\cos r\phi d\phi$ e per $\sin r\phi d\phi$ (r compreso fra zero ed n gli estremi inclusi) e integrando fra zero e 2π vedremo, in virtù delle formule precedenti, che affinché la (4) possa essere uguale a zero dovrà essere:

$$A_r = 0, \quad B_r = 0$$

per tutti i valori di r da zero ad n (gli estremi inclusi), ciò che dimostra appunto l'indipendenza delle nostre funzioni.

2. Le funzioni $P_{n,m}^q$ che compariscono nella (α) sono evidentemente la generalizzazione delle note funzioni aggiunte studiate da HEINE ⁽²⁵⁾.

Ecco come si può determinare l'equazione differenziale del 2° ordine alla quale soddisfano. Per metterci meglio in armonia con le notazioni usate nella Memoria « Sopra una nuova estensione delle funzioni sferiche di LEGENDRE » sostituiamo alla variabile ζ la variabile x la quale starà quindi a rappresentare il coseno dell'angolo che il raggio che va al punto mobile fa con uno degli assi coordinati, p. es. con l'asse delle x , che da ora immaginiamo passante per il polo.

Nella solita Memoria (Cap. II, § 2) si è trovato che la X_n (sottintendiamo l'indice q) è integrale della seguente equazione differenziale:

$$(1) \quad (1-x^2) \frac{d^2 X_n}{dx^2} + 2(q-2)x \frac{dX_n}{dx} + n(n+3-2q)X_n = 0$$

dalla quale si ottiene, con processo d'induzione, l'equazione seguente:

$$(2) \quad (1-x^2)X_n^{(m+2)} + 2(q-m-2)xX_n^{(m+1)} + [n(n+3-2q) + m(2q-m-3)]X_n^{(m)} = 0$$

dove, per le derivate, si è usata la notazione di LAGRANGE e dove m può variare da zero ad $n-2$ incluso.

Dall'equazione che serve di definizione alle aggiunte:

$$(3) \quad P_{n,m} = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X_n(x)}{dx^m}$$

(anche qui sottintendiamo l'indice q) derivando i due membri rispetto ad x e usando ancora per le derivate la notazione di LAGRANGE si ricava:

$$P_{n,m}^{(1)} = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} X_n^{(m+1)} - m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} x X_n^{(m)}$$

⁽²⁵⁾ HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*. 2° Aufgabe, I Theil, Cap. IV.

e quindi :

$$\begin{aligned} [(1-x^2)^{2-q} P_{n,m}^{(1)}]^{(1)} &= (1-x^2)^{\frac{m}{2}+1-q} [(1-x^2) X_n^{(m+2)} + 2(q-m-2)x X_n^{(m+1)}] - \\ &- m(1-x^2)^{\frac{m}{2}+1-q} X_n^{(m)} + m(m+2-2q)x^2(1-x^2)^{\frac{m}{2}-q} X_n^{(m)} \end{aligned}$$

e tenendo conto della (2) e della (3) si ha infine :

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{2-q} \frac{dP_{n,m}}{dx} \right] = (1-x^2)^{1-q} P_{n,m} \left[\frac{m^2 - 2mq + 2m}{1-x^2} - (n^2 + 3n - 2nq) \right]$$

ossia :

$$(\beta) \quad \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{2-q} \frac{dP_{n,m}^q}{dx} \right] + (1-x^2)^{1-q} P_{n,m}^q \left[n(n-2q+3) - \frac{m(m-2q+2)}{1-x^2} \right] = 0$$

o anche :

$$(\beta') \quad (1-x^2) \frac{d^2 P_{n,m}^q}{dx^2} - 2(2-q)x \frac{dP_{n,m}^q}{dx} + \left[n(n-2q+3) - \frac{m(m-2q+2)}{1-x^2} \right] P_{n,m}^q = 0$$

e posto :

$$x = \cos \theta$$

dalla relazione :

$$\frac{dP_{n,m}^q}{d\theta} = - \frac{dP_{n,m}^q}{dx} \operatorname{sen} \theta$$

si ricava :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{n,m}^q}{dx} &= - \frac{dP_{n,m}^q}{d\theta} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \\ \frac{d^2 P_{n,m}^q}{dx^2} &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{d^2 P_{n,m}^q}{d\theta^2} - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^3 \theta} \frac{dP_{n,m}^q}{d\theta} \end{aligned}$$

e la (β') si trasforma nella seguente equazione differenziale :

$$(\beta'') \quad \frac{d^2 P_{n,m}^q}{d\theta^2} + (3-2q) \cotg \theta \frac{dP_{n,m}^q}{d\theta} + \left[n(n-2q+3) - \frac{m(m-2q+2)}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right] P_{n,m}^q = 0.$$

Le (β), (β'), (β'') sono, sotto diversi aspetti, l'equazione caratteristica delle nostre funzioni aggiunte.

3. Fra le funzioni sferiche ha particolare interesse il coefficiente di LAPLACE, che in sostanza non è che la funzione nella quale si trasforma il polinomio di LEGENDRE quando si assuma come polo un punto indeterminato qualsiasi della superficie sferica. Detti M' ed M i due punti variabili sulla sfera ed a, b, c ;

ξ, η, ζ i coseni di direzione rispettivamente dei raggi OM', OM , γ l'angolo MOM' sarà:

$$\cos \gamma = a\xi + b\eta + c\zeta \quad (a^2 + b^2 + c^2 = 1)$$

o anche, indicando con θ la colatitudine rispetto al polo determinato dall'intersezione dell'asse delle x con la sfera, e con ψ la longitudine rispetto al piano xy del punto M , sarà:

$$(1) \quad \cos \gamma = a \cos \theta + b \sin \theta \cos \psi + c \sin \theta \sin \psi \quad (a^2 + b^2 + c^2 = 1).$$

La differenza fra la funzione q -armonica di LEGENDRE, da noi rappresentata col simbolo X_n^q , e la funzione q -armonica di LAPLACE che rappresentiamo col simbolo Y_n^q sta dunque in questo, che la prima è funzione di $\cos \theta$ (con θ colatitudine del punto variabile) e la seconda di $\cos \gamma$ definito dalla (1).

Dico che se introduciamo la variabile x al posto di $\cos \theta$, nel qual caso è

$$\cos \gamma = ax + (b \cos \psi + c \sin \psi) \sqrt{1-x^2},$$

la $f = Y_n^q$ che viene a dipendere da x e da ψ , soddisfa all'equazione differenziale:

$$(2) \quad (1-x^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\Delta \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} + n(n+3-2q)f = 0$$

nella quale il coefficiente Δ dipende da x , da ψ , dai coseni di direzione del raggio OM' e dall'indice di armonicità. Il procedimento che seguiremo per la dimostrazione ci condurrà all'effettiva determinazione di Δ .

Volendo mantenere la massima generalità vediamo se si possa soddisfare alla (2) con

$$(3) \quad f(u) \quad \text{in cui sia} \quad u = u(x\psi).$$

Sostituendo nella (2) a $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2}$ le espressioni che si ottengono dalla (3), si ricava:

$$(4) \quad \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \sqrt{1-x^2} \right)^2 + \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial \psi}}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2 \right] \frac{df^2}{du^2} + \\ + \left[(1-x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\Delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \right] \frac{df}{du} + n(n+3-2q)f = 0.$$

Ora, perchè la f sia effettivamente funzione di u e perchè l'unica differenza fra la $X_n^q(x)$ e la nostra funzione stia nel fatto che mentre la prima varia al variare di $x = \cos \theta$ la seconda varia al variare di $u = \cos \gamma$ (con

cos γ definito dalla (1)) appare chiaro, dal confronto della (4) con la (1) del § 2, che dovranno intanto essere soddisfatte le equazioni seguenti :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \sqrt{1-x^2} \right)^2 + \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial \psi}}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2 = 1 - u^2 \\ (1-x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\Delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = 2(q-2)u. \end{array} \right.$$

Ammissa per un momento la (γ) dal suo confronto con la seconda della (5) si deduce che la u dovrebbe essere funzione sferica q -armonica di primo grado vale a dire una funzione lineare dei coseni ξ , η , ζ del tipo $a\xi + b\eta + c\zeta$ (con a , b , c costanti qualunque) o del tipo :

$$(6) \quad u = ax + (b \cos \psi + c \operatorname{sen} \psi) \sqrt{1-x^2}$$

se ai coseni ξ , η , ζ sostituiamo le variabili x e ψ .

Ricavate :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a - (b \cos \psi + c \operatorname{sen} \psi) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -(b \cos \psi + c \operatorname{sen} \psi) \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial u}{\partial \psi} &= (-b \operatorname{sen} \psi + c \cos \psi) \sqrt{1-x^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} &= -(b \cos \psi + c \operatorname{sen} \psi) \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

e fatte le debite sostituzioni e riduzioni nella seconda della (5) si vede che essa può essere soddisfatta dalla (6) qualora si assuma :

$$\Delta = (q-2)x + (1-q) \frac{b \cos \psi + c \operatorname{sen} \psi}{-a\sqrt{1-x^2} + bx \cos \psi + cx \operatorname{sen} \psi}$$

dove le costanti a , b , c possono assumere qualsiasi valore.

Per vedere se la u , definita dalla (6), soddisfa anche alla prima delle (5), sostituiamo in essa ad u ed alle derivate di u rispetto ad x ed a ψ le espressioni già note.

Fatte le riduzioni si ottiene :

$$a^2 + (b \cos \psi + c \operatorname{sen} \psi)^2 + (c \cos \psi - b \operatorname{sen} \psi)^2 = 1$$

o anche :

$$a^2 + b^2(\cos^2 \psi + \operatorname{sen}^2 \psi) + c^2(\operatorname{sen}^2 \psi + \cos^2 \psi) = 1$$

dalla quale si deduce:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

e questa condizione è verificata se è $u = \cos \gamma$.

Dunque la funzione

$$Y_n(u) \quad \text{con} \quad u = ax + (b \cos \psi + c \operatorname{sen} \psi) \sqrt{1-x^2}, \quad (a^2 + b^2 + c^2 = 1)$$

soddisfa alla seguente equazione differenziale:

$$(\delta) \quad (1-x^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \left[(q-2)x + (1-q) \frac{b \cos \psi + c \operatorname{sen} \psi}{-a \sqrt{1-x^2} + bx \cos \psi + cx \operatorname{sen} \psi} \right] \frac{\partial f}{\partial x} + \\ + \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} + n(n+3-2q)f = 0$$

e dando ad a, b, c il preciso significato di coseni degli angoli che il raggio OM' forma con gli assi, posto:

$$a = x', \quad b = \cos \psi' \sqrt{1-x'^2}, \quad c = \operatorname{sen} \psi' \sqrt{1-x'^2},$$

dove x' e ψ' rappresentano per il raggio OM' ciò che x e ψ rappresenta per il raggio OM , la funzione

$$f = Y_n^q(u) \quad u = xx' + \sqrt{(1-x^2)(1-x'^2)} \cos(\psi - \psi')$$

soddisferà all'equazione differenziale:

$$(\delta') \quad (1-x^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \left[(q-2)x + (1-q) \frac{\sqrt{1-x'^2} \cos(\psi - \psi')}{-x' \sqrt{1-x^2} + x \sqrt{1-x'^2} \cos(\psi - \psi')} \right] \frac{\partial f}{\partial x} + \\ + \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} + n(n+3-2q)f = 0$$

o, in coordinate polari, alla seguente:

$$(\delta'') \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \left[(3-2q) \operatorname{ctg} \theta + \frac{2q-2}{\operatorname{sen} \theta} \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta' \cos(\psi - \psi')}{-\cos \theta' \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \operatorname{sen} \theta' \cos(\psi - \psi')} \right] \frac{\partial f}{\partial \theta} + \\ + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} + n(n+3-2q)f = 0.$$

È bene osservare che per $q=1$ le (δ) , (δ') , (δ'') coincidono con la nota equazione delle funzioni sferiche di LAPLACE, che per $a=1, b=c=0$ (o ciò che torna lo stesso per $x'=1$ o $\theta'=0$) quando sia anche $\frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} = 0$ (il che accade

se f è indipendente da ψ) la funzione Y_n^q varia solo al variare della colatitudine e le equazioni precedenti coincidono con l'equazione differenziale alla quale soddisfa la $X_n^q(x)$ (solita Memoria, Cap. II, § 2°). Si noti infine che le equazioni (∂') e (∂'') rimangono invariate, insieme alla Y_n^q , scambiando fra di loro contemporaneamente x con x' (o θ con θ') e ψ con ψ' .

4. Soddisfiamo alla condizione $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ col porre:

$$a = 1, \quad b = k \quad c = ik$$

con k indeterminata, ciò che esclude che Y_n^q possa dipendere da $\cos \gamma$.

La

$$f = Y_n^q [x + (k \cos \psi + ik \sin \psi) \sqrt{1 - x^2}] = Y_n^q \left[x + k(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} e^{i\psi} \right]$$

soddisferà all'equazione:

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \left[(q-2)x + (1-q) \frac{ke^{i\psi}}{kxe^{i\psi} - \sqrt{1-x^2}} \right] \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} + n(n+3-2q)f = 0. \quad (\epsilon)$$

Sviluppiamo la f in serie di TAYLOR. Poichè la $Y_n^q(x) = X_n^q(x)$ è una funzione razionale intera di grado n , tali saranno i termini dello sviluppo:

$$(1) \quad f = X_n^q(x) + \sum_{m=1}^n \frac{k^m}{\pi(m)} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} e^{im\psi} \frac{d^m X_n^q}{dx^m}.$$

Nel caso di $q = 1$, poichè si annulla nella (ϵ) il termine nel quale figura la costante arbitraria k , la f definita dalla (1), nella quale figura detta costante, non potrà soddisfare alla (ϵ) a meno che non vi soddisfi ogni suo termine, il che porta a concludere che sono funzioni sferiche

$$X_n^1 \quad \text{e} \quad (1-x^2)^{\frac{m}{2}} e^{im\psi} \frac{d^m X_n^1}{dx^m} \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

ossia le $2n + 1$ funzioni seguenti:

$$X_n^1, \quad (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X_n^1}{dx^m} \cos m\omega, \quad (m = 1, 2, \dots, n), \quad (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X_n^1}{dx^m} \sin m\omega, \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

Osserviamo che nel caso particolare di $k = 1$ ha luogo la seguente uguaglianza:

$$(2) \quad \frac{1}{(1-x^2)i} \frac{\partial f}{\partial \psi} = \frac{-e^{i\psi}}{xe^{i\psi} - \sqrt{1-x^2}} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Infatti dalla relazione:

$$f = \sum_{m=0}^n \frac{1}{1 \cdot 2 \dots m} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} e^{im\psi} \frac{d^m X_n^q}{dx^m}$$

(nella quale il termine corrispondente a $m=0$ è X_n^q), si deduce facilmente:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{1}{(1-x^2)^i} \frac{\partial f}{\partial \psi} &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} (1-x^2)^{\frac{m-2}{2}} \frac{d^m X_n^q}{dx^m} e^{im\psi} \\ \frac{1}{(1-x^2)^i} \frac{\partial f}{\partial \psi} (xe^{i\psi} - \sqrt{1-x^2}) &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} (1-x^2)^{\frac{m-2}{2}} x \frac{d^m X_n^q}{dx^m} e^{i(m+1)\psi} \\ &\quad - \sum_{m=1}^n \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} \frac{d^m X_n^q}{dx^m} e^{im\psi} \end{aligned}$$

mentre d'altra parte si ha:

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= - \sum_{m=1}^n \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} (1-x^2)^{\frac{m-2}{2}} x \frac{d^m X_n^q}{dx^m} e^{im\psi} + \\ &\quad + \sum_{m=1}^n \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} \frac{d^m X_n^q}{dx^m} e^{i(m-1)\psi} \\ - e^{i\psi} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} (1-x^2)^{\frac{m-2}{2}} x \frac{d^m X_n^q}{dx^m} e^{i(m+1)\psi} - \\ &\quad - \sum_{m=1}^n \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} \frac{d^m X_n^q}{dx^m} e^{im\psi} \end{aligned}$$

e dal confronto delle (3) e (4) si deduce la (2). In virtù di detta uguaglianza la (ϵ), nel caso particolare di $k=1$, si muta nella seguente equazione differenziale:

$$(7) \quad (1-x^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(q-2)x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} + \frac{2q-2}{(1-x^2)^i} \frac{\partial f}{\partial \psi} + n(n-2q+3)f = 0.$$

Ebbene io dico che, qualunque sia q , sono integrali di detta equazione differenziale

$$(5) \quad X_n^q, \quad (1-x^2)^{\frac{m}{2}} e^{im\psi} \frac{d^m X_n^q}{dx^m} \quad (m=1, 2, \dots, n).$$

Che alla precedente equazione soddisfi la X_n^q appare evidente qualora si ricordi l'equazione caratteristica del polinomio q -armonico di LEGENDRE e

si pensi che, essendo esso indipendente da ψ , le derivate di X_n^q rispetto a detta variabile sono nulle.

Per dimostrare che anche le altre funzioni definite dalla (5) sono integrali della (φ) cerchiamo, per mantenerci nella massima generalità, di soddisfare alla (φ) con una

$$(6) \quad f = \Phi\Psi$$

essendo Φ funzione della sola x e Ψ funzione della sola ψ .

Sostituendo la (6) nella (φ) e moltiplicati i termini per $1 - x^2$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \Psi(1-x^2)\frac{d^2\Phi}{dx^2} + 2(q-2)x(1-x^2)\Psi\frac{d\Phi}{dx} + \Phi\frac{d^2\Psi}{d\psi^2} + \\ + \Phi\frac{2q-2}{i}\frac{d\Psi}{d\psi} + n(n-2q+3)(1-x^2)\Phi\Psi = 0 \end{aligned}$$

e, separate le due variabili dividendo per $\Phi\Psi$, deduciamo:

$$(7) \quad \begin{aligned} (1-x^2)\left[\frac{1}{\Phi}(1-x^2)\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{1}{\Phi}2(q-2)x\frac{d\Phi}{dx} + n(n-2q+3)\right] = \\ -\frac{d^2\Psi}{\Psi} - \frac{2q-2}{i}\frac{d\Psi}{\Psi} = C \end{aligned}$$

dove C è una costante, e ciò in dipendenza dal fatto che il primo membro dovrebbe essere funzione della sola x e il secondo della sola ψ . Assunto ora:

$$\Psi = e^{im\psi}$$

deduciamo:

$$(8) \quad C = -\frac{d^2\Psi}{\Psi} - \frac{2q-2}{i}\frac{d\Psi}{\Psi} = m(m-2q+2)$$

e sostituito nella (7) a C il valore dato dalla (8) e moltiplicando per $\frac{\Phi}{1-x^2}$ otteniamo l'equazione:

$$(1-x^2)\frac{d^2\Phi}{dx^2} + 2(q-2)x\frac{d\Phi}{dx} + \left[n(n-2q+3) - \frac{m(m-2q+2)}{1-x^2}\right]\Phi = 0$$

che è l'equazione differenziale (β') caratteristica delle

$$P_{n,m}^q = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m X_n^q}{dx^m} \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

già trovata al § 2, il che porta a concludere, considerando come funzioni sferiche poliarmoniche a due variabili indipendenti gli integrali dell'equazione

differenziale (5) del paragrafo precedente, che le (5), qualunque sia q , sono funzioni sferiche poliarmoniche. E poichè alla condizione $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ si può anche soddisfare ponendo $a = 1$, $b = k$, $c = -ik$, ciò che porta alla conclusione che sono funzioni sferiche poliarmoniche a due variabili anche le seguenti: $(1 - x^2)^{\frac{m}{2}} e^{-im\phi} \frac{d^m X_n^q}{dx^m}$, ($m = 1, 2 \dots n$), e conseguentemente i $2n + 1$ polinomi sferici fondamentali definiti dalla (a) del § 1, abbiamo qui, con un processo del tutto originale e che ci sembra non meno interessante, ritrovati quei risultati stessi ai quali nel § 1 siamo pervenuti seguendo la via tracciata dal THOMSON per le funzioni sferiche ordinarie.

5. Le funzioni aggiunte $P_{n,m}^q$ sono legate fra loro da notevoli relazioni ricorrenti facilmente deducibili dalla stessa formula di definizione o dalle relazioni, che sono una generalizzazione di quelle del BELTRAMI per le ordinarie X_n , da noi determinate al Cap. II, § 4 della Memoria più volte citata.

La formula di definizione:

$$P_{m,n}^q = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X_n^q}{dx^m}$$

derivata rispetto ad x e moltiplicata per $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, conduce alla relazione seguente:

$$P_{n,m+1}^q = mx(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} P_{n,m}^q + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_{n,m}^q}{dx}$$

la quale permette il calcolo dell'aggiunta $P_{n,m+1}^q$ nota la immediatamente precedente $P_{n,m}^q$.

La relazione (2), trovata al § 2, qualora sia moltiplicata per $(1 - x^2)^{\frac{m+1}{2}}$, conduce alla relazione seguente:

$$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} P_{n,m+2}^q + 2(q - m - 2)x P_{n,m+1}^q + \\ + |n(n+3 - 2q) + m(2q - m - 3)|(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} P_{n,m}^q = 0$$

la quale lega fra loro tre funzioni aggiunte consecutive dello stesso ordine ed indice.

Dalla relazione (c') (Cap. II, § 4 della solita Memoria) si ottiene, con processo d'induzione, l'uguaglianza:

$$\frac{d^m X_{n+1}^q}{dx^m} = \frac{(2n+3-2q)m}{n+1} \frac{d^{m-1} X_n^q}{dx^{m-1}} + \frac{2n+3-2q}{n+1} x \frac{d^m X_n^q}{dx^m} - \frac{n+2-2q}{n+1} \frac{d^m X_{n-1}^q}{dx^m}$$

la quale, moltiplicata per $(1 - x^2)^{\frac{m}{2}}$, conduce alla seguente relazione ricorrente:

$$(1) \quad P_{n+1, m}^q = \frac{(2n+3-2q)m}{n+1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} P_{n, m-1}^q + \frac{2n+3-2q}{n+1} x P_{n, m}^q - \frac{n+2-2q}{n+1} P_{n-1, m}^q.$$

Ora la seconda delle relazioni (α') (Cap. II, § 4 solita Memoria) derivata rispetto ad x conduce, con processo d'induzione, alla seguente uguaglianza:

$$(n-m+1) \frac{d^{m-1} X_n^q}{dx^{m-1}} + \frac{d^m X_{n-1}}{dx^m} = x \frac{d^m X_n}{dx^m}$$

la quale, moltiplicata per $(1 - x^2)^{\frac{m}{2}}$, dà luogo alla relazione ricorrente:

$$(2) \quad (n-m+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} P_{n, m-1}^q + P_{n-1, m}^q = x P_{n, m}^q.$$

Pertanto se eliminiamo $P_{n, m-1}$ fra la (1) e (2) otteniamo la seguente interessante relazione ricorrente:

$$P_{n+1, m}^q = \frac{2n-2q+3}{n-m+1} x P_{n, m}^q - \frac{n+m+2-2q}{n-m+1} P_{n-1, m}^q$$

la quale lega fra loro tre aggiunte di indici successivi e per $m=0$ e $q=1$ si riduce alla ordinaria espressione di GAUSS per le ordinarie X_n^1 .

Alle precedenti relazioni possiamo aggiungere le seguenti facilmente deducibili rispettivamente dalle (α) (β) (γ) (Cap. II, § 4 solita Memoria) e che permettono il calcolo delle aggiunte di indice q per mezzo di quelle di indice $q-1$ e offrono il mezzo di poter ottenere $P_{n, m}^q$ con q qualunque mediante le ordinarie $P_{n, m}^1$

$$P_{n, m}^q = \frac{2q-3}{n} \left[P_{n-2, m}^{q-1} - m(1-x^2)^{\frac{1}{2}} P_{n-1, m-1}^{q-1} - x P_{n-1, m}^{q-1} \right]$$

$$P_{n, m}^q = \frac{2q-3}{2n+3-2q} \left(P_{n-2, m}^{q-1} - P_{n, m}^{q-1} \right)$$

$$P_{n, m}^q = \frac{2q-3}{n+3-2q} \left[m(1-x^2)^{\frac{1}{2}} P_{n-1, m-1}^{q-1} + x P_{n-1, m}^{q-1} - P_{n, m}^{q-1} \right].$$

Dall'ultima relazione dello stesso paragrafo (solita Memoria) si ricava la

relazione seguente molto semplice ed interessante:

$$P_{n+1,m}^{q+1} = (1 - 2q)(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} P_{n,m-1}^q.$$

6. Dalla relazione seguente:

$$\frac{dX_{n+1}^{q+1}}{dx} = (1 - 2q)X_n^q$$

trovata al cap. II, § 4 della solita Memoria, si deduce:

$$\frac{d^m X_n^q}{dx^m} = (3 - 2q) \frac{d^{m-1} X_{n-1}^{q-1}}{dx^{m-1}}$$

e questa uguaglianza permette la determinazione di $\frac{d^m X_n^q}{dx^m}$ in funzione di X_{n-m}^{q-m} mediante la formula seguente:

$$\frac{d^m X_n^q}{dx^m} = (3 - 2q)(5 - 2q) \dots (2m + 1 - 2q) X_{n-m}^{q-m}$$

la quale, qualora si ricordi il valore di $X_n^q(1)$ dato dall'espressione (1) (Cap. II, § 5 solita Memoria) dà il seguente valore per la derivata al primo membro nel caso di $x = 1$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^m X_n^q}{dx^m} \right]_{x=1} &= \frac{(3-2q)(5-2q)\dots(2m+1-2q) \cdot (3-2q+2m)(4-2q+2m)\dots(n+m+2-2q)}{\pi(n-m)} \\ &= \frac{(3-2q)(4-2q)\dots(n+m+2-2q)}{2^m(2-q)(3-q)\dots(m+1-q)\pi(n-m)} \end{aligned}$$

e quest'espressione è valida per qualsiasi valore di m da 1 ad n purchè sia $q = 1$ oppure $q > n + 1$.

Ciò premesso, vediamo se e per quali valori dei coefficienti indeterminati A_0, A_m, B_m la funzione sferica q -armonica a due variabili indipendenti:

$$(1) \quad \varphi_n^q = A_0(x'\psi')X_n^q(x) + \sum_{m=1}^n [A_m(x'\psi') \cos m\psi + B_m(x'\psi') \sin m\psi] P_{n,m}^q(x),$$

ottenuta mediante combinazione lineare delle $2n + 1$ funzioni sferiche fondamentali, coincida con la funzione q -armonica di LAPLACE.

Osserviamo che i coefficienti A e B si sono fatti dipendere dalle variabili x' e ψ' essendo la $Y_n^q(\cos \gamma)$ sostanzialmente dipendente anche da x', ψ' .

Per la simmetria della $Y_n^q(\cos \gamma)$ rispetto alle due coppie di variabili, insieme alla precedente relazione potremo considerare la seguente

$$(2) \quad \varphi_n^q = A_0(x\psi)X_n^q(x') + \sum_{m=1}^n [A_m(x\psi) \cos m\psi' + B_m(x\psi) \sin m\psi'] P_{n,m}^q(x')$$

ottenuta dalla (1) scambiando fra di loro x ed x' , ψ e ψ' .

Dalla coesistenza delle relazioni (1) e (2) si deducono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} A_0(x'\psi')X_n^q(x) &= A_0(x\psi)X_n^q(x') \\ A_m(x'\psi') \cos m\psi P_{n,m}^q(x) &= A_m(x\psi) \cos m\psi' P_{n,m}^q(x') \\ B_m(x'\psi') \sin m\psi P_{n,m}^q(x) &= B_m(x\psi) \sin m\psi' P_{n,m}^q(x'). \end{aligned}$$

La prima di esse, essendo X_n^q indipendente da ψ e da ψ' non può essere soddisfatta a meno che non sia A_0 indipendente da ψ e da ψ' , ciò che conduce all'uguaglianza:

$$(3) \quad \frac{A_0(x')}{X_n(x')} = \frac{A_0(x)}{X_n(x)} = C_0$$

con C_0 quantità costante. Le altre due relazioni poi conducono alle seguenti uguaglianze:

$$(4) \quad \frac{A_m(x'\psi')}{\cos m\psi' P_{n,m}^q(x')} = \frac{A_m(x\psi)}{\cos m\psi P_{n,m}^q(x)} = C_m$$

$$(5) \quad \frac{B_m(x'\psi')}{\sin m\psi' P_{n,m}^q(x')} = \frac{B_m(x\psi)}{\sin m\psi P_{n,m}^q(x)} = C'_m$$

dove C_m e C'_m sono pur esse delle quantità costanti.

Per effetto delle (3), (4), (5) avremo la seguente espressione per la nostra funzione φ :

$$\varphi = C_0 X_n(x) X_n(x') + \sum_{m=1}^n (C_m \cos m\psi \cos m\psi' + C'_m \sin m\psi \sin m\psi') P_{n,m}^q(x) P_{n,m}^q(x').$$

Osserviamo ora che, come risulta dalle considerazioni svolte al § 3 e dall'equazione differenziale (8') stabilita in detto paragrafo, la $Y_n^q(\cos \gamma)$ dipende dalla differenza $\psi - \psi' = \Psi$. Perchè dunque la φ possa rappresentare la $Y_n^q(\cos \gamma)$ dovrà essa pure dipendere sostanzialmente da detta differenza, ciò che accadrà assumendo

$$C_m = C'_m.$$

In seguito a ciò avremo per la φ l'espressione:

$$\varphi = C_0 X_n(x) X_n(x') + \sum_{m=1}^n C_m P_{n,m}(x) P_{n,m}(x') \cos m\Psi.$$

Se si osserva che per $x' = 1$ la funzione di LAPLACE deve identificarsi col polinomio di LEGENDRE, e si tien presente che per le considerazioni svolte in principio di questo paragrafo, almeno finchè sia o $q = 1$ o $q > n + 1$, $\left[\frac{d^m X_n^q}{dx^m} \right]_{x=1}$ ha un valore finito e determinato e che di conseguenza per tale valore di x è $P_{n,m}^q = 0$, e si tiene inoltre presente l'espressione che dà il valore di $X_n^q(1)$ (Cap. II, § 5 solita Memoria), è facile ottenere dalla precedente relazione il seguente valore di C_0 :

$$C_0 = \frac{\pi(n)}{(3-2q)(4-2q) \dots (n+2-2q)}.$$

Posto quindi

$$C_m = 2c_m$$

si avrà finalmente, mantenendo le solite limitazioni per il valore di q , in virtù delle quali C_0 ha valore finito,

$$(6) \quad Y_n^q(x\psi x'\psi') = \frac{\pi(n)}{(3-2q)(4-2q) \dots (n+2-2q)} X_n(x) X_n(x') + \\ + 2 \sum_{m=1}^n c_{n,m} P_{n,m}(x) P_{n,m}(x') \cos m\Psi$$

dove sono però ancora indeterminati gli n coefficienti $c_{n,m}$.

Per procedere alla loro determinazione poniamo:

$$\sqrt{1-x'^2} e^{i\Psi} = 2s.$$

Da questa deduciamo:

$$e^{im\Psi} = \left(\frac{2s}{\sqrt{1-x'^2}} \right)^m \\ e^{-im\Psi} = \left(\frac{\sqrt{1-x'^2}}{2s} \right)^m$$

e quindi:

$$2(1-x'^2)^{\frac{m}{2}} \cos m\Psi = (2s)^m + \left(\frac{1-x'^2}{2s} \right)^m.$$

Posto

$$\frac{1 - x'^2}{2s} = S$$

avremo la relazione:

$$2(1 - x'^2)^{\frac{m}{2}} \cos m\Psi = (2s)^m + S^m$$

e per $m = 1$

$$2(1 - x'^2)^{\frac{1}{2}} \cos \Psi = 2s + S$$

e la (6) si trasforma nella seguente relazione:

$$(7) \quad Y_n^q \left[xx' + \sqrt{1 - x^2} \left(s + \frac{S'}{2} \right) \right] = \frac{\pi(n)}{(3 - 2q)(4 - 2q) \dots (n + 2 - 2q)} X_n^q(x) X_n^q(x') + \\ + \sum_{m=1}^n c_{n,m} P_{n,m}^q(x) \frac{d^m X_n^q(x')}{dx'^m} [(2s)^m + S^m].$$

Ora osservando che per $x' = 1$ è $S = 0$, ricordando il valore di $X_n^q(1)$ e quello di $\left[\frac{d^m X_n^q}{dx^m} \right]_{x=1}$ si ottiene:

$$Y_n^q(x + \sqrt{1 - x^2}s) = X_n^q(x) + \\ + \sum_{m=1}^n c_{n,m} \frac{(s\sqrt{1 - x^2})^m}{\pi(m)} \frac{\pi(m)(3 - 2q)(4 - 2q) \dots (n + m + 2 - 2q)}{(2 - q)(3 - q) \dots (m + 1 - q)\pi(n - m)} \frac{d^m X_n^q}{dx^m}.$$

Ora osserviamo che coincidendo la Y_n^q con la X_n^q per $x' = 1$, si ha per lo sviluppo di TAYLOR:

$$Y_n^q(x + h) = X_n^q(x + h) = X_n^q(x) + \sum_{m=1}^n \frac{h^m}{\pi(m)} \frac{d^m X_n^q}{dx^m}$$

qualunque sia h . Allora quest'ultimo sviluppo, quando sia $h = \sqrt{1 - x^2} \cdot s$, coinciderà col precedente se sarà:

$$c_{n,m} = \frac{(2 - q)(3 - q) \dots (m + 1 - q)\pi(n - m)}{(3 - 2q)(4 - 2q) \dots (n + m + 2 - 2q)\pi(m)}.$$

In virtù della (6) si avrà quindi:

$$Y_n^q(\cos \gamma) = Y_n^q(x\psi x'\psi') = Y_n^q(xx' + \sqrt{(1 - x^2)(1 - x'^2)} \cos \Psi) = \\ = \frac{\pi(n)}{(3 - 2q)(4 - 2q) \dots (n + 2 - 2q)} X_n^q(x) X_n^q(x') + \\ + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(2 - q)(3 - q) \dots (m + 1 - q)\pi(n - m)}{(3 - 2q)(4 - 2q) \dots (n + m + 2 - 2q)\pi(m)} P_{n,m}^q(x) P_{n,m}^q(x') \cos m\Psi$$

e quest'espressione della funzione sferica q -armonica di LAPLACE, corrispondente a quella che nella teoria ordinaria è conosciuta con la denominazione di formula dell'addizione delle funzioni sferiche, nell'ipotesi di $q = 1$ è valida per qualsivoglia valore di n , e nell'ipotesi di $q > 1$ per $n < q - 1$. Nell'ordinaria teoria delle funzioni sferiche tale formula, data in forma inesatta dal LAPLACE ⁽²⁶⁾ nel 1782 e determinata con esattezza dal LEGENDRE ⁽²⁷⁾ sette anni dopo, ha importanza notevole, deducendosi da essa e dall'equazione differenziale caratteristica le principali proprietà di dette funzioni.

⁽²⁶⁾ LAPLACE, *Des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes*. (Histoire, Acad. sc., Paris, 1782, ed. 1785, M. p. 142).

⁽²⁷⁾ LEGENDRE, *Des recherches sur la figure des planètes*. (Histoire, Acad. sc., Paris, 1789, ed. an II, p. 432).

Bergamo, febbraio 1924.

Su alcune classi di congruenze di rette e sulle trasformazioni delle superficie R

Memoria di GUIDO FUBINI

Questa memoria studia specialmente i sistemi di ∞^4 superficie S , i cui punti sono in corrispondenza biunivoca tale che punti omologhi siano allineati e piani tangenti in punti omologhi formino fascio. Di questo studio si troverà in fine una applicazione alla trasformazione (di JONAS) per congruenze W delle superficie R di TZITZEICA e DESMOULINS.

1. Indicheremo un punto dandone una delle coordinate omogenee x ; punti distinti saranno indicati con lettere differenti, o con lettere variamente accentate (x, y, z , oppure x', x'' ecc.); indicheremo i piani con lettere greche. Se x_i e ξ_i sono le coordinate omogenee di un punto e di un piano, ($i = 1, 2, 3, 4$), porremo $S\xi x = \sum_1^4 \xi_i x_i$. E useremo notazioni analoghe in casi analoghi.

Sia dato un sistema di ∞^4 superficie soddisfacenti alla proprietà sopra enunciata; scegliamone due S ed S' generiche, di cui indicheremo con x ed x' le coordinate di due punti omologhi generici, con ξ e ξ' le coordinate dei corrispondenti piani tangenti. La corrispondenza biunivoca tra i punti di tali superficie sia definita dando le x, x', ξ, ξ' come funzioni degli stessi parametri u, v . Ogni altra superficie del sistema sarà luogo di un punto $x + \rho x'$, ove avrà un piano tangente $\xi + \rho \xi'$ (ρ, δ essendo funzioni delle u, v). Le relazioni tra punto e piano tangente danno:

$$(1) \quad S\xi x = S\xi dx = S\xi' x' = S\xi' dx' = 0$$

$$(2) \quad S(\xi + \delta \xi')(x + \rho x) = 0, \quad S(\xi + \delta \xi')d(x + \rho x') = 0.$$

Per (1) le (2) si riducono alle:

$$(3) \quad \rho S\xi x' + \delta S\xi' x = 0, \quad \rho S\xi dx' + \delta S\xi' dx + S\xi x' d\rho = 0$$

che sono due equazioni in ρ, δ . Eliminando δ , se ne deduce il valore di $\frac{d\rho}{\rho}$.

Se dunque ρ_1 è un valore di ρ , gli altri valori della ρ saranno $\rho = k\rho_1$, con $k = \text{cost.}$

Scrivendo x' al posto di $\rho_1 x'$, potremo dunque supporre $\rho = k = \text{cost.}$

Così pure, moltiplicando le ξ' per un tale fattore che $S\xi'x = -S\xi x'$, potremo rendere anche $\rho = k = \text{cost.}$ Quindi:

Per un sistema di superficie del tipo da noi considerato le punteggiate descritte da punti omologhi e i fasci descritti da piani tangenti omologhi sono forme tra loro proiettive.

Moltiplicando per opportuni fattori le coordinate x' , ξ' di punto e piano tangente di S' , per due superficie S ed S' del sistema valgono le:

$$(4) \quad 0 = S\xi x' + S\xi'x = S\xi dx' + S\xi' dx.$$

2. Per studiare le (4) indichiamo con K la congruenza delle rette r congiungenti punti omologhi, con K' la congruenza delle rette r' intersezione di piani tangenti omologhi, distinguendo poi vari casi (¹).

Caso I.) Sia le sviluppabili di K , che quelle di K' sono indeterminate; cioè le rette r escono da un punto fisso P , le r' giacciono in un piano fisso π .

I. *A)* P e π si appartengono. Usando coordinate cartesiane (o meglio non omogenee) in guisa che π sia il piano all' ∞ , e l'asse delle x passi per P , punti omologhi delle nostre superficie si troveranno su una parallela all'asse delle x , piani tangenti omologhi saranno paralleli. Le nostre superficie si otterranno da una di esse con traslazioni parallele all'asse delle x .

I. *B)* P e π non si appartengono. Assunto π ancora come piano all'infinito, si riconosce facilmente che il nostro sistema di superficie si riduce a un sistema di superficie omotetiche, per cui P è il centro di omotetia.

Caso II.) Soltanto le sviluppabili di K' sono indeterminate. Le rette r' giacciono cioè in un piano che, come sopra, assumeremo come piano all' ∞ . Se scegliamo come parametri u, v quelli corrispondenti alle sviluppabili di K , le tangenti alle linee $u = \text{cost}$ (oppure $v = \text{cost}$) in punti omologhi delle S, S' saranno parallele. Varranno cioè per le coordinate cartesiane equazioni del tipo

$$(A) \quad x'_u = hx_u, \quad x'_v = lx_v \quad (h, l \text{ funz. di } u, v)$$

con $h \neq l$, perchè le sviluppabili di K non sono indeterminate.

(¹) Alcuni dei seguenti risultati sono già contenuti nelle *Leçons* di DARBOUX, che citeremo più avanti. La chiarezza ci ha imposto di riportarli in questa Memoria.

Dalla $x'_{uv} = x'_{vu}$ si deduce

$$(5) \quad (h - l)x_{uv} + h_v x_u - l_u x_v = 0.$$

Cioè le u, v su S , e quindi su ognuna delle nostre superficie formano un sistema coniugato. Data la S e su di essa il sistema coniugato u, v , sia

$$(6) \quad x_{uv} + Rx_u + Sx_v = 0$$

l'equazione di LAPLACE relativa per le coordinate cartesiane (non omogenee) di punto. Identificando (5) e (6), posto $h - l = \omega$, si ha:

$$h_v = R\omega, \quad \omega_u - h_u = -l_u = S\omega.$$

La condizione d'integrabilità di queste equazioni nella h è:

$$(7) \quad \omega_{uv} = (R\omega)_u + (S\omega)_v$$

che è l'equazione *aggiunta* della (6). Per ogni soluzione ω di questa, le precedenti danno con sole quadrature h ed l a meno di una *medesima* costante additiva k ; con quadrature da (A) si ricava x' ; il punto $x' + hx$ descrive una delle nostre superficie; al variare di k retta generato tutto il sistema di superficie da noi studiato.

Caso III.) Soltanto le sviluppabili di K sono indeterminate. È il caso duale del precedente.

Caso IV.) Nè le sviluppabili di K , nè quelle di K' sono indeterminate.

Se, come sopra, $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ sono le sviluppabili di K , allora la retta congiungente x ad x' e la congiungente $x + x_u du$ ad $x' + x'_u du$ giacciono in un piano focale ($v = \text{cost.}$) di K ; i punti x, x', x_u, x'_u sono complanari e vale perciò un'equazione

$$x'_u = ax' + \lambda x_u + \mu x;$$

analogamente sarà:

$$x'_v = bx' + \nu x_u + \rho x. \quad x'_v \quad .$$

Sostituendo in (4) si trova:

$$S\xi'(x_u - ax) = S\xi'(x_v - bx) = 0.$$

Il punto $x_u - ax$ è dunque il punto, ove la tangente (x, x_u) tirata nel punto x alla linea $v = \text{cost.}$ di S incontra il piano ξ' tangente in x' ad S' ; perciò $x_u - ax$ coincide col punto $\lambda x_u + \mu x = x'_u - ax'$, che appartiene pure a tale retta (x, x_u) e a tale piano ξ' tangenti. Perciò:

$$(B) \quad \begin{cases} x'_u - ax' = h(x_u - ax) \text{ e analogamente:} \\ x'_v - bx' = l(x_v - bx) \end{cases}$$

con h, l funzioni di u, v ed $h \neq l$, perchè K non ha indeterminate le sviluppabili. La condizione d'integrabilità delle (B) dà:

$$(8) \quad (b_u - a_v)x' = (h - l)x_{uv} + \text{termini in } x_u, x_v, x. \quad (h \neq l)$$

IV. A) Se $b_u = a_v$, le sviluppabili di K segnano su S , cioè su ogni superficie del sistema, un sistema coniugato.

IV. B) Se $b_u \neq a_v$, il sistema delle u, v non può essere coniugato sulle nostre superficie; perchè altrimenti da (8) seguirebbe che il punto x' giace sul piano tangente di S in x . Le rette (x, x') , cioè le rette r sarebbero tangenti ad S e quindi a tutte le superficie del sistema, ciò che è assurdo. Posto:

$$(9) \quad y = x' - hx, \quad \text{è: } y_u = -h_u x + ay, \quad x' = hx + y.$$

Quindi la superficie (y) luogo del punto y è falda focale di K . Supponiamo dapprima $h_u \neq 0$. Poichè le (4) restano inalterate quando si moltiplichino le x, x' per uno stesso fattore, noi potremo, scrivendo x ed x' al posto di $h_u x$ ed $h_u x'$, sostituire alle (9) le:

$$(10) \quad x = ay - y_u, \quad x' = hx + h_u y,$$

mentre continueranno a valere le B, in cui siano stati cambiati soltanto i valori della a, b . Poichè sulla falda focale (y) le u, v sono certamente un sistema coniugato, varrà un'equazione:

$$(11) \quad y_{uv} + Ly_u + My_v + Ny = 0.$$

Si trova che le (10) soddisfano alla:

$$x'_u - hx_u = y(h_{uu} + ah_u) = a'(x' - hx), \quad \text{ove: } a' = a + \frac{h_{uu}}{h_u}.$$

La prima delle (B) è soddisfatta, quando ad a sia stato sostituito a' . Se indichiamo con b' il nuovo valore della b , la seconda delle (B) dice che la espressione:

$$x'_v - b'x' - h(x_v - b'x) = h_v(ay - y_u) + yh_{uv} + h_u y_v - b'h_u y$$

vale $(l - h)(x - b'x)$, cioè è proporzionale a:

$$x_v - b'x = (L + b')y_u + (M + a)y_v + (a_v + N - b'a)y.$$

Deve dunque essere:

$$\frac{ah_v + h_{uv} - b'h_u}{a_v + N - ba} = -\frac{h_v}{b' + L} = \frac{h_u}{a + M} = l - h.$$

(continua)

Un modo (che non è il più semplice) di studiare queste equazioni è di dare alla a un valore arbitrario, ricavare dagli ultimi tre membri i valori di b' e di l , sostituire nel primo membro alla b' il suo valore così trovato, ottenendo così una equazione nella sola h ; ciascuna delle infinite sue soluzioni dà un valore di h , compatibile col valore prescelto della a . Aggiungendo ad h una costante arbitraria, il punto x' definito da (10) descrive una delle superficie del nostro sistema, che varierà col variare di tale costante. Come si vede, si può prefissare una qualsiasi congruenza generica come congruenza K , e scegliere ad arbitrio una superficie S del nostro sistema; i corrispondenti sistemi dipendono ancora da un'equazione del second'ordine in h , cioè da due funzioni arbitrarie di una variabile.

Osservazione. Se fosse stato $h_u = 0$, il punto y avrebbe descritto una linea, perchè per (9) $y_u = ay$. In tal caso avremmo potuto rifare le precedenti considerazioni, scambiando u con v e ricorrendo al secondo fuoco $z = x' - lx$ della congruenza K . Qui si sarebbe presentato il caso eccezionale che $l_v = 0$. Basterà dunque per noi studiare il caso $h_u = l_v = 0$.

Moltiplicando y e z per convenienti fattori, potremo rendere $y = y(v)$ funzione della sola v , e $z = z(u)$ funzione della sola u . Indicando con r, ρ fattori di proporzionalità, ricordando che $h = V$ è funzione della sola v ed $l = U$ è funzione della sola u , avremo allora:

$$ry(v) = x' - Vx, \quad \rho z(u) = x' - Ux$$

ossia, moltiplicando x ed x' per lo stesso fattore $U - V$:

$$x = ry(v) - \rho z(u), \quad x' = rUy(v) - \rho Vz(u).$$

Le nostre superficie saranno luogo di un punto $x + kx'$ con $k = \text{cost.}$

Dovranno continuare a valere le (B) con altri valori a', b' della a, b , perchè si sono moltiplicate le x, x' per uno stesso fattore. Sostituendo si vede che tali equazioni sono soddisfatte, quando si ponga:

$$a' = \frac{r'u}{r} + \frac{U'}{U - V}; \quad b' = \frac{\rho'v}{\rho} + \frac{V'}{V - U}.$$

Si possono dunque scegliere ad arbitrio le curve (y) e (z) e la superficie S (perchè $\frac{r'}{\rho}$ è arbitrario). I corrispondenti sistemi di superficie S' dipenderanno poi da due funzioni arbitrarie U della sola u , V della sola v ; risultato affatto analogo al precedente.

Si riconosce facilmente che sulle superficie S le u, v descrivono un sistema coniugato (che cioè x, x_u, x_v, x_{uv} sono complanari) soltanto se

$$\frac{\partial^2 \log(\rho; \rho)}{\partial u \partial v} = 0.$$

In tal caso, moltiplicando x, y, z per convenienti fattori, potrò rendere $x = y(v) + z(u)$. Se si trattasse di coordinate non omogenee, ritroveremmo le superficie di traslazione.

Il caso IV A).

Rimane da studiare il caso IV A in modo speciale: per quanto il suo studio sia incluso nei calcoli fatti testè, esso merita però una trattazione a parte. In tal caso le u, v sono coniugate anche sulla superficie luogo del punto x , cosicchè la quantità a , che figura in (10) non si può scegliere ad arbitrio.

Il caso IV A gode di una proprietà interessante, che cioè *le sviluppabili di K, K' , si corrispondono*. Infatti, se $v = \text{cost.}$ è una sviluppabile di K , abbiamo già osservato che *le tangenti in punti omologhi alle linee $v = \text{cost.}$ delle nostre superficie formano un fascio*; e vale pure la proprietà reciproca. Dualmente, se $v = \text{cost.}$ sono sviluppabili di K' , due piani tangenti ad una superficie S in due punti consecutivi d'una linea $v = \text{cost.}$ determinano una retta che forma fascio con le rette intersezioni delle coppie di piani tangenti omologhi alle altre superficie del nostro sistema; cioè, *se $v = \text{cost.}$ sono sviluppabili di K' , le tangenti in punti omologhi delle nostre superficie coniugate alle $v = \text{cost.}$ formano fascio; e viceversa*. Se dunque le $u = \text{cost.}, v = \text{cost.}$ sono linee coniugate, allora, se esse corrispondono alle sviluppabili di K , corrispondono pure a quelle di K' . Se questa sia o no una proprietà caratteristica del caso IV A è una questione che qui non ci interessa. (Da quanto precede parrebbe che le sviluppabili di K, K' si corrispondessero, anche se le u, v sono asintotiche sulle nostre superficie; ma questo caso è assurdo ⁽²⁾). Tornando al caso IV A con $a_u = b_v$ si vede che, moltiplicando

⁽²⁾ Infatti se \bar{x} è un punto generico di una delle nostre ∞^1 superficie, su cui le u, v sono asintotiche, esistono delle funzioni $\theta, \beta, \gamma, p_{ii}, \bar{\theta}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{p}_{ii}$ tali che:

$$\begin{aligned} \bar{x}_u - a\bar{x} &= (h + C)(x_u - ax); & \bar{x}_v - b\bar{x} &= (l + C)(x_v - bx) \\ \bar{x}_{uu} &= \bar{\theta}_u \bar{x}_u + \bar{\beta}_v \bar{x}_v + \bar{p}_{11} \bar{x}; & x_{uu} &= \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x \text{ (e analoghe in } x_{vv}) \end{aligned}$$

ove C è una costante su ognuna delle nostre superficie. Derivando la prima rispetto ad u

le x, x' per uno stesso fattore si può rendere $a = b = 0$, cosicchè le (B) diventano

$$(C) \quad x'_u = hx_u, \quad x'_v = hx_v.$$

Le (C) (valide per coordinate omogenee) sono analoghe alle (A) (che si riferivano a coordinate non omogenee). Posto:

$$(12) \quad Y = x_u, \quad Z = x_v,$$

notisi che $Z_u = Y_v = x_{uv}$ (essendo u, v coniugate sulle superficie luogo di x) sono combinazioni lineari di $x_u = Y$ e $x_v = Z$. Quindi Y e Z sono i fuochi della retta r' generica di K' ; precisamente Y è un fuoco $u = \text{cost.}$ (in cui cioè concorrono due rette consecutive d'una sviluppabile $u = \text{cost.}$ di K'), e Z è un fuoco $v = \text{cost.}$ Il piano focale $u = \text{cost.}$ di K (contenente cioè 2 rette consecutive di una sviluppabile $u = \text{cost.}$ di K) è il piano dei punti $x, x', x_v = Z$, e contiene il fuoco Z , cioè il fuoco $u = \text{cost.}$ di K' ; viceversa il piano focale $v = \text{cost.}$ di K contiene il fuoco Y cioè $u = \text{cost.}$ di K' . Due rette omologhe r, r' di K, K' non sono incidenti, perchè altrimenti, essendo $x, x', x'_u = hx_u, x'_v = lx_v$ punti complanari, ogni punto x' giacerebbe nel piano tangente in x alla S luogo del punto x . Cioè le rette di K sarebbero tangenti ad S , cioè ad una generica delle nostre superficie, ciò che è assurdo.

Viceversa: Se K e K' sono due congruenze, le cui rette r, r' sono in una tale corrispondenza biunivoca che rette omologhe non si incontrino, che alle sviluppabili dell'una corrispondano sviluppabili sull'altra, e che i piani focali di K contengano i fuochi non omologhi di K' , allora esistono ∞^1 superficie S tali che il piano tangente ad una S nel punto in cui incontra una retta r di K contiene la retta omologa r' di K' . Ammetteremo che le falde focali di K, K' siano effettive superficie.

Sia z un fuoco $u = \text{cost.}$ di K , sia Y un fuoco $u = \text{cost.}$ di K' ; le K, K' sono generate dalle rette (z, z_v) ed (Y, Y_v) . Il piano focale $v = \text{cost.}$ di K sarà il piano dei punti z, z_v, z_u, z_{uv} ossia dei punti z, z_u, z_v , che contiene certamente

$$(13) \quad z_{uv} = az_u + bz_v + cz,$$

e tenendo conto delle ultime 2, si trova una relazione necessariamente identica in x, x', x_u, x_v . Paragonando in essa i termini in x_u si trae:

$$\bar{\theta}_u - \theta_u = \frac{h_u}{h + C}, \quad \text{che con l'analogo } \bar{\theta}_v - \theta_v = \frac{b_v}{l + C}$$

forma, qualunque sia C , un sistema integrabile soltanto se $h = l$; cioè se le sviluppabili di K sono indeterminate contro l'ipotesi.

(equazione che dice essere le u , v coniugate sulla falda focale). Ma il piano focale $v = \text{cost.}$ di K deve contenere il fuoco $u = \text{cost.}$ della retta omologa di K' . Perciò Y giace sul piano dei punti z , z_u , z_v , ossia vale una formola:

$$(14) \quad Y = Az + Bz_u + Cz_v,$$

dove, si noti, le B , C sono diverse da zero. Infatti, esprimendo che le nostre due rette non sono complanari, cioè che il determinante formato con le coordinate dei punti z , z_v , Y , Y_v è differente da zero, si trova appunto $BC \neq 0$. Notiamo ora che il secondo fuoco Z della K' sarà un punto $Y_v - \rho Y$, che per ipotesi deve essere contenuto nel piano focale $u = \text{cost.}$ di K , cioè nel piano dei punti z , z_v , z_{vv} . Quindi:

$$Y_v - \rho Y = Cz_{vv} + (A + Bb + C_v - \rho C)z_v + (B_v + Ba - \rho B)z_u + (A_v - \rho A + Bc)z$$

deve essere funzione lineare di z , z_v , z_{vv} . Cioè

$$(15) \quad \frac{B_v}{B} + a = \rho.$$

Ci basterà ora scrivere la condizione che u , v siano anche le sviluppabili di K' , che cioè valga un'equazione:

$$(16) \quad Y_{uv} = \rho Y_u + \delta Y_v + \tau Y,$$

ove ρ è dato da (15), mentre δ , τ possono essere arbitrarie. Ora:

$$\begin{aligned} Y_u &= (A + B_u + C_u)z_u + (Cb + C_u)z_v + Bz_{uu} + (A_u + Cc)z \\ Y_v &= (B_v + Ba)z_u + (Bb + A + C_v)z_v + Cz_{vv} + (A_v + Bc)z \\ Y_{uv} &= [A_v + B_{uv} + (aC)_v + (Ba)_u + Aa + Ca^2 + B(ab + c)]z_u + \\ &\quad + [A_u + C_{uv} + (Cb)_v + (Bb)_u + Ab + Bb^2 + C(ab + c)]z_v + \\ &\quad + [A_{uv} + Ac + (Bc)_u + (Cc)_v + Cac + Bbc]z + \\ &\quad + (B_v + Ba)z_{uu} + (Cb + C_u)z_{vv}. \end{aligned}$$

Sostituendo in (16), si trova di nuovo la (15) quando si paragonino nei due membri i coefficienti di z_{uu} ; cosicchè la condizione che il fuoco $v = \text{cost.}$ di K' (il punto Z) giaccia sul piano focale $u = \text{cost.}$ di K è conseguenza delle altre. Paragonando poi i coefficienti di z_{vv} , z_u , z_v , z si trova succes-

sivamente:

$$(17) \quad \frac{C_u}{C} + b = \delta$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{A_{uv} + (Bc)_u + (Cc)_v - A_u \left(\frac{B_v}{B} + a \right) - A_v \left(\frac{C_u}{C} + b \right) - \left(C \frac{B_v}{B} + B \frac{C_u}{C} \right) c}{A} = \\ & = \left(\frac{A}{B} \right)_v + \frac{\partial^2 \log B}{\partial u \partial v} + \left(\frac{Ca}{B} \right)_v + a_u - b \frac{B_v}{B} - a \frac{C_u}{C} - \frac{B_v}{B} \frac{C_u}{C} = \\ & = \left(\frac{A}{C} \right)_u + \frac{\partial^2 \log C}{\partial u \partial v} + \left(\frac{Bb}{C} \right)_u + b_v - b \frac{B_v}{B} - a \frac{C_u}{C} - \frac{C_u}{C} \frac{B_v}{B} = \tau - c. \end{aligned} \right.$$

Queste equazioni, oltre a darci δ , τ , danno le due relazioni intercedenti tra i rapporti $A:B:C$. Si noti che la (17) è affatto analoga alla (15) e dice pertanto che $Y_u - \delta Y$ appartiene al piano dei punti z, z_u, z_{uu} .

Se dunque le congruenze K e K' si trovano nelle condizioni volute, altrettanto avviene delle congruenze delle rette (z, z_u) ed (Y, Y_u) loro trasformate di LAPLACE. L'interpretazione geometrica delle (18) si ha dimostrando il teorema sopra enunciato, dal che seguirà anche, per quanto precede, che la trasformazione di LAPLACE è applicabile ai nostri sistemi di superficie.

Un punto di una retta r di K è un punto $x = \lambda z + z_v$. Se si vuole che la retta congiungente x ad x_u passi per Y , i punti

$$\begin{aligned} x &= \lambda z + z_v, & x_u &= (\lambda_u + c)z + (\lambda + a)z_u + bz_v \\ Y &= Az + Bz_u + Cz_v \end{aligned}$$

devono essere allineati; dovrà perciò essere

$$(19) \quad 0 = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda_u + c & A \\ 0 & \lambda + a & B \\ 1 & b & C \end{vmatrix} = B(\lambda_u + c) - A(\lambda + a) + \lambda[C(\lambda + a) - Bb].$$

Così pure, esprimendo che la retta per $x = \lambda z + z_v$ e per $x_v = \lambda_v z + \lambda z_v + z_{vv}$ passa per

$$Z = Y_v - \rho Y = \left(A + C_v + Bb - Ca - C \frac{B_v}{B} \right) z_v + \left(A_v + Bc - Aa - A \frac{B_v}{B} \right) z + Cz_{vv}$$

troviamo:

$$(19)_{bis} \quad \left(C\lambda_v - A_v - Bc + Aa + A \frac{B_v}{B} \right) = \lambda \left(C\lambda - A - Bb + Ca - C_v + Ca + C \frac{B_v}{B} \right).$$

La (19) e $(19)_{bis}$ sono due equazioni in λ , che devono essere illimitatamente integrabili, perchè le superficie S cercate sono ∞^1 . È facile riconoscere che le (18) equivalgono appunto alle condizioni di illimitata integrabilità. Il nostro teorema è così dimostrato.

Congruenze K e K' in relazione simmetrica.

Pare che dovrà avere molto interesse per lo sviluppo di alcuni capitoli di geometria differenziale lo studio delle coppie di congruenze K, K' in corrispondenza biunivoca tale che esista un sistema ∞^1 di superficie S , le quali nel punto ove incontrano una retta r di K hanno un piano tangente passante per la retta omologa r' di K' e insieme esista un altro sistema di superficie Σ che nel punto ove incontrano una retta r' di K' abbiano un piano tangente che contenga la retta omologa di K . E, per riconoscere l'importanza di tale studio, si noti che i teoremi di permutabilità del BIANCHI conducono appunto alla considerazione di tali sistemi in cui ogni superficie S insieme ad ogni superficie Σ forma le falde focali di una congruenza W .

Noi ci limitiamo qui a un caso particolare: quello cioè che le sviluppabili della K segnino sulle S , e le sviluppabili di K' segnino sulle Σ un sistema coniugato, cosicchè in particolare le sviluppabili di K e di K' si corrispondano.

In tal caso, oltre a valere tutte le formole precedenti del caso IV A , dovrà anche avvenire che z giace sul piano tangente omologo alla superficie luogo di Y , ossia che vale una formola:

$$(14)_{bis} \quad z = A'Y + B'Y_u + C'Y_v \quad (B'C' \neq 0)$$

affatto simile alla (14) e che $z_v - az$ giace nel piano dei punti Y, Y_v, Y_{vv} , ossia che vale una formola analoga alla (15):

$$(15)_{bis} \quad \frac{B'_v}{B'} + \rho = a \quad \text{ossia} \quad (BB')_v = 0$$

ossia $BB' = U$, ove U è funzione della sola u .

Ci basterebbe ora esprimere la compatibilità delle (14) e $(14)_{bis}$; ma è importante, prima di questo, esprimere che la z definita da $(14)_{bis}$ soddisfa a (13), così come precedentemente abbiamo trovato nelle (17) e (18) le condizioni affinchè (14) soddisfi a (16). Troveremo così un'equazione analoga alla (17)

$$(17)_{bis} \quad \frac{C'_u}{C'} + \sigma = b \quad \text{ossia} \quad (CC')_u = 0$$

ossia $CC' = V$ con V funzione della sola v ; cosicchè, essendo $BC \neq 0$, la (14)_{bis} assume l'aspetto:

$$(14)_{ter} \quad z = A'Y + \frac{U}{B} Y_u + \frac{V}{C} Y_v, \quad (U, V \neq 0).$$

Scrivendone la compatibilità con (14) si trova:

$$(20) \quad z = A'(Az + Bz_u + Cz_v) + \frac{U}{B} (Az + Bz_u + Cz_v)_u + \\ + \frac{V}{C} (Az + Bz_u + Cz_v)_v,$$

ossia, per (13)

$$(21) \quad Uz_{uu} + Vz_{vv} = \text{combinazione lineare di } z, z_u, z_v.$$

Ne segue che le linee $Udv^2 + Vdu^2 = 0$ formano come le linee u, v un sistema coniugato sulla superficie luogo del punto z , su cui dunque le asintotiche sono le linee $\frac{du^2}{U} - \frac{dv^2}{V} = 0$. Dunque: *Nelle nostre ipotesi le sviluppabili u, v segnano sulle falde focali delle nostre congruenze un sistema isoterma-coniugato* (perchè ciò che abbiamo dimostrato per il fuoco z si può in modo simile dimostrare per gli altri fuochi).

Poichè il piano tangente alla superficie (z) contiene il corrispondente punto Y , e un piano tangente alle superficie luogo di (Y) contiene il punto omologo z , le superficie (z) ed (Y) sono falde focali di una congruenza L che oltre al sistema coniugato u, v fa corrispondere sulle due superficie il sistema coniugato $\left(\frac{du}{B} - \frac{dv}{C}\right)\left(B\frac{du}{U} - C\frac{dv}{V}\right) = 0$ delle sue sviluppabili, cioè il sistema $\frac{du^2}{U} + \frac{dv^2}{V} - \left(\frac{C}{BV} + \frac{B}{CU}\right)dudv = 0$. Tale congruenza L è una congruenza W ; ed è pure W la congruenza analoga L' delle rette congiungenti gli altri fuochi $z_v - az, Y_v - \rho Y$. Le superficie luogo dei punti $z, z_v - az, Y_v - \rho Y, Y$ sono ciascuna falda focale di due delle congruenze K, K', L, L' .

Le congruenze L, L' sono congruenze W , le cui sviluppabili non corrispondono alle sviluppabili u, v delle K, K' .

Per esaurire la trattazione dovremmo studiare insieme le (18) e le conseguenze di (20). I calcoli diventano così inestricabili che è meglio seguire un'altra via, usufruendo però dei risultati fin qui ottenuti.

Applicazione dei risultati di Darboux.

(*Leçons sur la théorie des surfaces*, Livre IV, Chap. X).

Siano x ed x' punti analoghi di due delle superficie S , le rette di K congiungenti z a z_v tagliano le S in un sistema coniugato; perciò, a meno di un inessenziale fattore di proporzionalità, sarà (DARBOUX, loc. cit.):

$$x = \psi_v z - \psi z_v, \quad x' = \varphi_v z - \varphi z_v,$$

ove φ , ψ sono soluzioni di (13).

Ponendo $z = \psi \bar{z}$, $\varphi = \psi \bar{\varphi}$, sarà, con convenienti fattori di proporzionalità, e, tralasciando la lineetta,

$$(21) \quad x = z_v \cdot \varphi_v \quad x' = z - \varphi x,$$

ove φ e z soddisfano a un'equazione del tipo (13) con $c=0$, che scriveremo ancora:

$$(23) \quad z_{uv} = az_u + bz_v, \quad \varphi_{uv} = a\varphi_u + b\varphi_v.$$

Se ne deduce tosto:

$$(C)_{bis} \quad x'_v = -\varphi x_v, \quad x'_u = \left(\frac{\varphi_v}{a} - \varphi\right)x_u;$$

dal confronto di queste con le (C) si deduce poi:

$$(24) \quad Y = x_u, \quad Z = x_v \text{ } ^{(3)}.$$

Dobbiamo ora trovare quando il piano focale $v = \text{cost.}$ di K' , cioè il piano dei punti Y , Y_u , Y_v passa per z .

Ora, essendo $UV \neq 0$, possiamo cambiare i parametri delle u , v in guisa che $U = V = 1$; e per (21) varrà una relazione:

$$(25) \quad z_{uu} + z_{vv} = Fz_u + Gz_v + Hz.$$

Il piano dei punti Y , Y_u , Y_v evidentemente è il piano dei punti

$$z_u \varphi_v - z_v \varphi_u, \quad z_{vv} \varphi_v - z_v \varphi_{vv}, \quad z_{uu} \varphi_v - z_v \varphi_{uu}$$

che contiene per (25) il punto

$$(z_{uu} + z_{vv} - Fz_u)\varphi_v - z_v(\varphi_{uu} + \varphi_{vv} - F\varphi_u) = Hz\varphi_v - z_v(\varphi_{uu} + \varphi_{vv} - F\varphi_u - G\varphi_v)$$

(³) È questa una formula (contenuta loc. cit.) che è assai importante per lo sviluppo della nostra ricerca.

che coinciderà col punto z se :

$$(20) \quad \varphi_{uu} + \varphi_{vv} - F\varphi_u - G\varphi_v = 0.$$

Dobbiamo ancora scrivere la condizione che il piano focale $u = \text{cost.}$ di K' , cioè il piano dei punti Y, Y_v, Y_{vv} , ossia il piano dei punti

$$z_u\varphi_v - z_v\varphi_u, \quad z_{vv}\varphi_v - z_v\varphi_{rv}, \quad z_{vvv}\varphi_v - z_v\varphi_{vvv}$$

contiene il punto $z_v - az$, che è il fuoco $v = \text{cost.}$ di una retta di K .

Derivando (25) rispetto a v , e ricordando (23), si trae :

$$(27) \quad z_{vvv} + Nz_{vv} + Pz_u + Qz_v + (aH - H_v)z - Hz_v = 0$$

dove, senza esplicitare N, P, Q , ci basti osservare che tali quantità non dipendono da H , ma esclusivamente dalle a, b, F, G , cosicchè da (26) e (23) si trarrà similmente :

$$(27)_{bis} \quad \varphi_{vvv} + N\varphi_{vv} + P\varphi_u + Q\varphi_v = 0.$$

Il piano precedente conterrà perciò per le (27) il punto :

$$(z_{vvv} + Nz_{vv} + Pz_u)\varphi_v - (\varphi_{vvv} + N\varphi_{vv} + P\varphi_u)z_v = [(H_v - aH)z + Hz_v]\varphi_v$$

che coincide col punto $z_v - az$, se $H_v = 0$. Noi dunque imponremo $H_v = 0$. Introduciamo ora le variabili asintotiche u', v' definite dalle :

$$\frac{\partial}{\partial u'} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial v'} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}.$$

Sarà per (23), (25) :

$$\begin{aligned} z_{u'u'} &= \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 = (F + 2a)z_u + (G + 2b)z_v + Hz \\ z_{v'v'} &= (F - 2a)z_u + (G - 2b)z_v + Hz \end{aligned}$$

a cui potremo dare la forma

$$z_{u'u'} = \alpha z_{u'} + \beta z_{v'} + p_{11}z, \quad z_{v'v'} = \gamma z_{u'} + \varepsilon z_{v'} + p_{22}z$$

ove :

$$p_{11} = p_{22} = H,$$

che noi indicheremo con p .

Le condizioni d'integrabilità danno, tra l'altro, $\alpha_v = \varepsilon_{u'}$; quindi esiste una funzione θ per cui $\theta_{u'} = \alpha$, $\theta_{v'} = \varepsilon$. In conclusione è :

$$(28) \quad z_{u'u'} = \theta_{u'}z_{u'} + \beta z_{v'} + pz; \quad z_{v'v'} = \gamma z_{u'} + \theta_{v'}z_{v'} + pz \\ (p_v = 0, \quad \text{cioè} \quad p_{u'} = p_{v'}).$$

E la φ soddisferà alle equazioni ottenute ponendo $H = 0$:

$$(28)_{bis} \quad \varphi_{u'u'} = \theta_u \varphi_{u'} + \beta \varphi_{v'}, \quad \varphi_{v'v'} = \gamma \varphi_{u'} + \theta_v \varphi_{v'}.$$

Queste equazioni permettono di determinare tutte le coppie di congruenze K, K' cercate. Data la superficie luogo del punto z , sono date le equazioni (28) e (28)_{bis}. Si deve cercare se esiste una funzione φ soddisfacente a (28)_{bis}; se essa esiste, da (22) si traggono con quadrature le x, x' e si determina quindi anche la congruenza K luogo delle rette (x, x') ; da (24) si traggono i fuochi Y, Z di una retta di K' , e quindi anche si determina K' luogo delle rette (Y, Z) . Le (28) formano certamente un sistema illimitatamente integrabile (perchè sono soddisfatte dalle 4 coordinate omogenee di un punto z).

Tenuto conto che le condizioni d'integrabilità di (28) sono identicamente soddisfatte, traendo dalle (28)_{bis} i valori di $(\varphi_{u'u'})_{v'v'}$ e di $(\varphi_{v'v'})_{u'u'}$, e scrivendo che sono uguali, si ottiene:

$$(28)_{ter} \quad p_u \varphi_{u'} = p_{v'} \varphi_{v'}, \quad \text{ossia} \quad p_u (\varphi_{u'} - \varphi_{v'}) = 0, \quad (\text{ricordo che } p_u = p_{v'}).$$

Dunque, se non è $p_u = p_{v'} = 0$, cioè se $p \neq \text{cost.}$, allora deve essere $\varphi_{u'} = \varphi_{v'}$, cioè $\varphi_v = 0$, caso che sopra abbiamo già tacitamente escluso, perchè assurdo⁽⁴⁾. Dunque $p = \text{cost.}$; le condizioni d'integrabilità per (28) si riducono a due equazioni tra le θ, β, γ ed alla:

$$p(\beta_{v'} - \gamma_u) = 0.$$

Se fossè $p = 0$, noi, senza limitare la generalità, potremmo supporre uguale ad 1 una delle quattro coordinate omogenee del punto z , e la φ uguale ad una delle altre tre. La congruenza W delle rette (z, Y) si ridurrebbe a una congruenza di nessun interesse, perchè il punto Y descriverebbe una retta nel piano all'infinito (nel piano che ha per equazione quella ottenuta uguagliando a zero la coordinata che per i punti z vale 1). Dunque $\beta_{v'} = \gamma_u$. Cioè:

L'unico caso possibile è che la superficie z , cioè una qualsiasi delle falde focali e quindi tutte e quattro le falde focali delle congruenze K e K' siano superficie R ; la congruenza L generata dalla retta (z, Y) è allora una congruenza W avente per falde focali due superficie R luogo dei punti z ed Y ;

(4) Infatti la funzione che si indica con φ era nel principio di questo paragrafo indicata con $\frac{\varphi}{\psi}$. Se essa fosse funzione della sola u , i punti x ed x' non sarebbero punti *distinti*.

proprietà analoga vale per la congruenza L'. Le congruenze K, K' hanno per sviluppabili le immagini del sistema R isoterma-coniugato u, v, che si corrisponde sulle quattro falde focali.

È questo l'unico caso possibile di una congruenza W, tale che le trasformate di LAPLACE delle sue falde focali rispetto a un sistema coniugato (distinto da quello delle sue sviluppabili) formano ancora una congruenza W.

Appare ora evidente che le nostre congruenze L ed L' devono essere le congruenze W, con cui JONAS ha costruito la teoria delle trasformazioni delle superficie R. Infatti, variando il fattore di proporzionalità, si può scrivere:

$$Y = 2(Az_{u'} + Bz_{v'}) \quad \text{ove} \quad 2A = e^{-\theta\varphi_{v'}}, \quad 2B = e^{-\theta\varphi_u}.$$

È quindi per (28)_{bis}

$$(29) \quad A_{v'} = -\beta B, \quad B_{u'} = -\gamma A.$$

Posto poi

$$(30) \quad \begin{cases} \mu = -A - A\theta_{u'} - B - B\theta_{v'}, \\ \lambda = -A - A\theta_{u'} + B + B\theta_{v'}, \\ N = \lambda\mu + 2A(\mu_{u'} + 2Ap_{11}) - 2B(\mu_{v'} + 2Bp_{22}), \end{cases}$$

si ha:

$$(31) \quad \mu = 0, \quad N = 4p(A^2 - B^2) \quad \text{con} \quad p = \text{cost.}$$

Applicando i risultati delle mie Note sulle congruenze W (Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1923) si deduce che la L è una congruenza W, e da (31) che essa è una congruenza di JONAS (5). La teoria analitica e geometrica di queste congruenze assume dunque un carattere di grande semplicità, che potremo rendere ancora più intuitivo. Si noti che dalla $\beta_v = \gamma_u$ segue che anche le (28)_{bis} formano un sistema illimitatamente integrabile, che possiede quindi 4 soluzioni indipendenti (di cui una uguale a φ ed una costante), che potremo considerare come coordinate omogenee \bar{x} di una superficie \bar{S} proiettivamente applicabile sulla superficie \mathcal{z} . Se deformiamo questa su \bar{S} in guisa che ogni suo elemento trascini con sè il raggio corrispondente della con-

(5) Data una congruenza W, di cui \mathcal{z} sia la prima falda focale, nelle note cit. si prova che il secondo fuoco è dato da

$$(32) \quad Y = \mu z + 2(Az_{u'} + Bz_{v'})$$

ove valgono le (29), (30). Noi possiamo sempre soddisfare le \mathcal{z} per un tale fattore che (pure restando invariate le A, B) risulti $\mu = 0$. Esisterà allora una funzione φ tale che $2A = e^{-\theta\varphi_{v'}}$, $2B = -e^{-\theta\varphi_{u'}}$. Dalle (29) si deduce che tale φ deve soddisfare alle (28)_{bis}. Dunque le (28)_{bis} sono applicabili a qualsiasi congruenza W (insieme alle (28)_{ter}, loro conseguenza).

gruenza L , allora la congruenza L si muta in una congruenza \bar{L} luogo delle rette congiungenti \bar{z} a $\varphi_u \bar{z}_v - \varphi_v \bar{z}_u$.

Poichè una delle \bar{z} vale φ , un'altra è costante, la \bar{L} si riduce a una congruenza di cui la seconda falda focale è una retta (che nella rappresentazione scelta è nel piano all'infinito). In conclusione si ha dunque:

Le congruenze di JONAS sono tali che, se sono trascinate in una opportuna deformazione proiettiva di una loro falda focale, si riducono a una congruenza di cui la seconda falda focale è una retta.

Verifica diretta e applicazioni.

Se z descrive una superficie di cui indichiamo con u, v (e non più con u', v') le asintotiche, valgono equazioni del tipo:

$$z_{uu} = \theta_u z_u + \beta z_v + p_{11} z \quad z_{vv} = \theta_v z_v + \gamma z_u + p_{22} z.$$

Il secondo fuoco Y di una congruenza W , per cui z è il primo fuoco, è dato da

$$Y = \mu z + 2(Az_u + Bz_v)$$

ove A, B, μ soddisfino a (29) e (30). Di più, se la superficie z è R , e se la congruenza è di JONAS, la N definita da (30) soddisfa alla:

$$N = k'(A^2 - B^2) \quad \text{con } k' = \text{cost.}$$

mentre $\beta_v = \gamma_u$. La superficie descritta da z è in tal caso applicabile proiettivamente su ogni superficie \bar{S} avente gli stessi valori di θ, β, γ , e per cui i valori delle p_{11}, p_{22} differiscono dai precedenti per una medesima costante h . Se deformiamo la superficie luogo di z su \bar{S} in modo che trascini con sé la congruenza, questa conserverà gli stessi valori di A, B, λ, μ , mentre (essendo variate le p di una stessa costante h) la N aumenterà di $4h(A^2 - B^2)$. Scelto $h = -\frac{k}{4}$, il nuovo valore di N sarà nullo; cioè la seconda falda focale (luogo delle nuove posizioni dei punti Y) sarà degenera, e quindi (trattandosi di congruenze W) si ridurrà ad una retta.

Se dunque si conosce in termini finiti una deformata proiettiva di una superficie R , con sole derivazioni si potranno ottenere le ∞^4 congruenze di JONAS, di cui essa è falda focale (e di cui la seconda falda è ancora R) corrispondenti ad un determinato valore della costante $k=N:(A^2 - B^2)$. Se di essa si conoscono tutte le deformate proiettive in termini finiti, si conoscono anche tutte le corrispondenti congruenze di JONAS.

Si noti ancora che, quando $N=0$, noi possiamo scegliere coordinate omogenee tali che l'ultima si annulli su un piano passante proprio per la retta seconda falda focale della congruenza, e sia uguale ad una costante su un punto generico della prima falda focale. Sarà allora per questa falda focale $p_{11} = p_{22} = 0$, $\mu = 0$, mentre θ, β, γ avranno certi valori.

Deformando la prima falda focale, si ottiene la più generale superficie R e la più generale congruenza di JONAS corrispondente. Poichè $\theta, \mu, \beta, \gamma$ non variano nella deformazione, e le p_{ii} aumentano di una costante, noi potremo sempre supporre, quanto si studia una superficie R, che $p_{11} = p_{22} = \text{cost.}$ e per una congruenza di JONAS che sia $\mu = 0$, oltre che $p_{11} = p_{22} = p = \text{cost.}$ per una sua falda focale. Ritroviamo così completamente le formole da cui eravamo partiti ⁽⁶⁾.

⁽⁶⁾ Diamo un'applicazione alle congruenze pseudosferiche, che naturalmente sono congruenze di JONAS particolari. Se $\Omega = 2\omega$ è l'angolo delle asintotiche u, v di una superficie S pseudosferica in un suo punto generico che ha x, y, z per coordinate cartesiane ortogonali, e se $du^2 + 2 \cos \Omega dudv + dv^2$ ne è l'elemento lineare, è noto che $\Omega_{uv} = \text{sen } \Omega$, e che la più generale congruenza pseudosferica di cui S è prima falda focale ha per secondo fuoco il punto le cui coordinate cartesiane ortogonali sono date dalla:

$$\bar{x} = x + \cos \epsilon \left[\frac{\text{sen } (\omega - \omega_1)}{\text{sen } \Omega} x_u + \frac{\text{sen } (\omega + \omega_1)}{\text{sen } \Omega} x_v \right]$$

ove:

$$\epsilon = \text{cost.}; \quad \frac{\partial(\omega_1 - \omega)}{\partial u} = \frac{1 + \text{sen } \epsilon}{\cos \epsilon} \text{sen } (\omega + \omega_1); \quad \frac{\partial(\omega + \omega_1)}{\partial v} = \frac{1 - \text{sen } \epsilon}{\cos \epsilon} \text{sen } (\omega_1 - \omega).$$

Indicando con $t=1$ una quarta coordinata del punto x, y, z , tali formole si possono scrivere:

$$\bar{x} = \mu x + 2(Ax_u + Bx_v) \quad (\text{e analoghe in } y, z, t)$$

ove

$$\mu = \rho, \quad 2A = \rho \cos \epsilon \frac{\text{sen } (\omega - \omega_1)}{\text{sen } \Omega}, \quad 2B = \rho \cos \epsilon \frac{\text{sen } (\omega + \omega_1)}{\text{sen } \Omega}$$

soddisfano alle (29), (30) se ρ soddisfa al sistema integrabile

$$\frac{\rho_u}{\rho} = - \frac{1 + \text{sen } \epsilon}{\cos \epsilon} \cos (\omega + \omega_1), \quad \frac{\rho_v}{\rho} = - \frac{1 - \text{sen } \epsilon}{\cos \epsilon} \cos (\omega - \omega_1)$$

cioè se ρ è l'ampiezza della deformazione (metrica) infinitesima corrispondente alla congruenza W considerata. Da (30) si trae:

$$\lambda = \rho \text{sen } \epsilon, \quad N = \rho^2 \frac{\text{sen } 2\omega_1}{\text{sen } 2\omega} = \frac{4}{\cos^2 \epsilon} (A^2 - B^2).$$

La superficie proiettivamente applicabile sulla superficie iniziale, la conoscenza della quale trae con sè la determinazione della nostra congruenza pseudosferica, è dunque la superficie luogo dei punti x' soddisfacenti alla

$$x'_{uu} = \frac{\cos \Omega}{\text{sen } \Omega} \Omega_u x'_u - \frac{\Omega_u}{\text{sen } \Omega} x'_v - \frac{x'}{\cos^2 \epsilon}$$

e all'analogia per x'_{vv} . Sarebbe interessante studiarne le proprietà metriche.

Proprietà generali della rappresentazione puntuale fra due superficie

di E. BOMPIANI

Le proprietà finora note concernenti una trasformazione puntuale fra due superficie dello spazio ordinario sono relative agli intorni del primo ordine di due punti corrispondenti e si riducono sostanzialmente a due fatti uno proiettivo l'altro metrico. Il primo consiste nell'esser proiettiva la corrispondenza fra i fasci di tangenti aventi i centri in punti corrispondenti (quindi esistenza di un sistema coniugato che si conserva tale nella trasformazione); l'altro (conseguenza metrica del primo) è enunciato dal teorema di TISSOT.

Molte altre proprietà si conoscono per determinati tipi di corrispondenze; ma, nel caso generale, non mi consta che si sia passati all'esame d'intorni d'ordine superiore.

Questo è un primo saggio dello studio di proprietà relative all'intorno del secondo ordine (¹).

L'idea nuova, sulla quale si fonda questo studio, è di uscire dalle superficie e portare la ricerca nell'ambiente (S_3): la corrispondenza data dà origine a due congruenze di rette (che chiamo *assi* della corrispondenza) e queste a lor volta determinano su ciascuna superficie un sistema ∞^2 di linee (che chiamo *assiali*) aventi per la corrispondenza ufficio analogo a quello che le geodetiche hanno per l'applicabilità.

Il lavoro è diviso in due parti in relazione al diverso carattere delle proprietà che si studiano, cioè al gruppo che le conserva: per adeguare i mezzi analitici alla ricerca e lasciare maggior latitudine alle applicazioni che se ne potranno fare ho adottato nelle due parti diversa rappresentazione analitica.

Alla corrispondenza proiettiva fra gli intorni del 1° ordine fanno seguito, in quelli del 2° ordine, certe corrispondenze cremoniane fra stelle di piani e

(¹) Una parte dei risultati sono enunciati in una mia Nota: *Corrispondenza puntuale fra due superficie e rappresentazione conforme*. (Rend. Acc. Lincei, vol. XXXII, 1923); ivi è anche detto di alcune coincidenze con risultati ottenuti dai proff. BIANCHI e CASTELNUOVO.

proiettive fra stelle di rette aventi per centri punti corrispondenti delle due superficie.

Le linee assiali, intimamente collegate a queste corrispondenze, permettono l'introduzione di un elemento metrico relativo ad una curva tracciata sulla superficie, invariante nella trasformazione (che si riduce alla curvatura geodetica per le applicabilità).

Dei risultati ottenuti in generale e di quelli relativi alla rappresentazione conforme (e in particolare sulla sfera) il lettore può rendersi conto scorrendo il lavoro. Mi pare più interessante e più utile accennare a quali altre ricerche possa dar luogo.

Intanto, rimanendo nel campo studiato, converrà esaminare le particolarità che possono presentare le congruenze degli assi e le circostanze ch'esse determinano sia sulla natura delle due superficie che sulla loro corrispondenza. Poi potranno applicarsi le proprietà trovate in generale a corrispondenze notevoli, come qui s'è fatto per la rappresentazione conforme.

Ma per raggiungere una teoria completa delle proprietà del 2° ordine delle corrispondenze puntuali fra due superficie bisognerà, trattandosi di proprietà relative all'ambiente, uscire dallo spazio ordinario (poichè l'intorno superficiale del 2° ordine appartiene in generale ad S_5 e solo in particolare ad S_4 o ad S_3) e vedere che cosa debba sostituirsi alle proprietà trovate.

È un campo di ricerche che può ancora dar luogo a risultati interessanti.

PARTE PRIMA

Proprietà proiettive di una corrispondenza puntuale fra due superficie.

1. Sia data una corrispondenza (continua e generalmente biunivoca) fra i punti di due superficie σ e $\bar{\sigma}$ di S_3 . Due punti corrispondenti P e \bar{P} di esse siano individuati su σ e su $\bar{\sigma}$ rispettivamente dalle stesse coordinate curvilinee u, v .

Volendo studiare le proprietà che nascono dalla posta corrispondenza in rapporto allo spazio ambiente S_3 bisognerà anche dare i punti P e \bar{P} in S_3 , cioè mediante loro coordinate: e a seconda che si vogliano studiare proprietà proiettive o proprietà metriche sarà utile far uso di coordinate proiettive omogenee o di coordinate cartesiane ortogonali nell'ambiente.

§ 1. CORRISPONDENZA CREMONIANA FRA LE STELLE DI PIANI USCENTI
DA PUNTI CORRISPONDENTI.

2. Ad ogni tangente a σ in P corrisponde una tangente a $\bar{\sigma}$ in \bar{P} ; ad ogni elemento di 2° ordine di curva (cioè a tre punti infinitamente vicini di essa) passante regolarmente per P su σ corrisponde un elemento di 2° ordine di curva per \bar{P} su $\bar{\sigma}$.

Ai piani della stella di centro P considerati come osculatori ad elementi di 2° ordine di curve di σ) corrispondono i piani della stella di centro \bar{P} (considerati come osculatori agli elementi omologhi di curve di $\bar{\sigma}$): la corrispondenza è evidentemente algebrica e generalmente biunivoca. Cerchiamone la rappresentazione analitica.

3. Se i sistemi di linee $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ su σ (e su $\bar{\sigma}$) sono generici (e precisamente: se non formano un doppio sistema coniugato; si vedono immediatamente le modificazioni da fare nell'ipotesi opposta), per il fatto che σ (e $\bar{\sigma}$) appartiene ad uno S_3 le coordinate proiettive omogenee dei suoi punti, sia $x(u, v)$ una generica di esse, soddisfano certo a due equazioni a derivate parziali che possono scriversi così:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + b_1 \frac{\partial x}{\partial u} + c_1 \frac{\partial x}{\partial v} + d_1 x \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = a_2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + b_2 \frac{\partial x}{\partial u} + c_2 \frac{\partial x}{\partial v} + d_2 x \end{cases}$$

ovvero

$$(1) \quad \begin{cases} x_{uu} = a_1 x_{uv} + b_1 x_u + c_1 x_v + d_1 x \\ x_{vv} = a_2 x_{uv} + b_2 x_u + c_2 x_v + d_2 x; \end{cases}$$

i coefficienti $a_1 \dots d_i$ sono funzioni di u, v ($a_1 = a_2 = 0$ se le linee coordinate sono asintotiche; $d_1 = d_2 = 0$ in coordinate non omogenee).

Analogamente, le coordinate proiettive omogenee \bar{x} dei punti \bar{P} di $\bar{\sigma}$ soddisfano ad un sistema del tipo

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{x}_{uu} = \bar{a}_1 \bar{x}_{uv} + \bar{b}_1 \bar{x}_u + \bar{c}_1 \bar{x}_v + \bar{d}_1 \bar{x} \\ \bar{x}_{vv} = \bar{a}_2 \bar{x}_{uv} + \bar{b}_2 \bar{x}_u + \bar{c}_2 \bar{x}_v + \bar{d}_2 \bar{x}. \end{cases}$$

Si sarebbe potuto scegliere invece, come doppio sistema $du = 0, dv = 0$ quel doppio sistema coniugato (generalmente unico) di una superficie cui corri-

sponde un doppio sistema coniugato dell'altra: ciò avrebbe portato ora qualche semplificazione; ma in vista delle applicazioni è meglio lasciare alle linee coordinate la maggiore generalità.

4. Il piano osculatore ad una linea $v = v(u)$ di σ nel punto $P(u, v)$, o al suo elemento di 2° ordine definito da u, v, v', v'' , ha per equazione

$$(2) \quad \{c_1 - b_1 v' + c_2 v'^2 - b_2 v'^3 + v''\} \Psi + \{a_1 + 2v' + a_2 v'^2\} \{\Psi_1 + v' \Psi_2\} = 0$$

ove si sono indicati con Ψ, Ψ_1, Ψ_2 i tre determinanti

$$\Psi = |X, x, x_u, x_v|, \quad \Psi_1 = |X, x, x_u, x_{uv}|, \quad \Psi_2 = |X, x, x_v, x_{uv}|$$

ottenuti dalla linea scritta apponendo un indice, variabile da 1 a 4, alle coordinate di P e alle coordinate correnti X .

Se indichiamo l'equazione precedente con

$$\xi_0 \Psi + \xi_1 \Psi_1 + \xi_2 \Psi_2 = 0$$

in modo da poter assumere $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2$ come coordinate omogenee del piano nella stella si ha

$$(3) \quad \begin{cases} \rho \bar{\xi}_0 = v'' - b_2 v'^3 + c_2 v'^2 - b_1 v' + c_1 \\ \rho \bar{\xi}_1 = a_2 v'^2 + 2v' + a_1 \\ \rho \bar{\xi}_2 = (a_2 v'^2 + 2v' + a_1) v', \end{cases}$$

essendo ρ un fattore qualsiasi d'omogeneità.

Per passare da questo piano al corrispondente $\bar{\xi}_0 : \bar{\xi}_1 : \bar{\xi}_2$ nella stella di centro \bar{P} basta conservare nei secondi membri delle (3) i valori di u, v, v', v'' e sostituire alle funzioni a_i, b_i, c_i le corrispondenti funzioni $\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i$; e porre in luogo dei primi membri $\bar{\rho} \bar{\xi}_0, \bar{\rho} \bar{\xi}_1, \bar{\rho} \bar{\xi}_2$.

Segue facilmente da ciò che la corrispondenza cercata ha le equazioni

$$(4) \quad \begin{cases} \rho \bar{\xi}_0 = \bar{\xi}_0 (\bar{a}_1 \bar{\xi}_1^2 + 2\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 + \bar{a}_2 \bar{\xi}_2^2) + (c_1 - \bar{c}_1) \bar{\xi}_1^3 - (b_1 - \bar{b}_1) \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2 + (c_2 - \bar{c}_2) \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2^2 - (b_2 - \bar{b}_2) \bar{\xi}_2^3 \\ \rho \bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_1 (\bar{a}_1 \bar{\xi}_1^2 + 2\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 + \bar{a}_2 \bar{\xi}_2^2) \\ \rho \bar{\xi}_2 = \bar{\xi}_2 (\bar{a}_1 \bar{\xi}_1^2 + 2\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 + \bar{a}_2 \bar{\xi}_2^2) \end{cases}$$

o quelle, che segnaleremo con (4'), che se ne deducono scambiando ovunque le lettere soprilineate con quelle che non lo sono.

In questa corrispondenza birazionale (cremoniana) del 3° ordine fra i piani omologhi delle due stelle ad un piano generico di una corrisponde un piano dell'altra. Fanno solo eccezione, e sono quindi piani fonda-

tali p. es. nella seconda stella di centro P , quelli per i quali $\xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = 0$; essi sono: il piano tangente ($\bar{\xi}_0 = 1, \bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = 0$); e altri due piani, generalmente determinati e distinti dal precedente, che si ottengono ponendo $a_1 \bar{\xi}_1^2 + 2\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 + a_2 \bar{\xi}_2^2 = 0$ e $\xi_0 = 0$.

5. Per non trascrivere formule eccessivamente lunghe, si può riferire p. es. σ alle sue linee asintotiche supposte distinte; con ciò $a_1 = a_2 = 0$; e allora i due piani fondamentali, oltre a quello tangente, sono rappresentati da

$$(5) \quad \begin{cases} \bar{\xi}_1 = 0 \\ \bar{a}_2 \bar{\xi}_0 - (b_2 - \bar{b}_2) \bar{\xi}_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\xi}_2 = 0 \\ \bar{a}_2 \bar{\xi}_0 + (c_1 - \bar{c}_1) \bar{\xi}_1 = 0. \end{cases}$$

Se si rappresenta una retta nella stella di centro \bar{P} con l'equazione

$$\bar{\alpha}_0 \bar{\xi}_0 + \bar{\alpha}_1 \bar{\xi}_1 + \bar{\alpha}_2 \bar{\xi}_2 = 0$$

e si assumono $\bar{\alpha}_0 : \bar{\alpha}_1 : \bar{\alpha}_2 (= \Psi : \Psi_1 : \Psi_2)$ come coordinate omogenee di retta si ha, per la retta intersezione dei due piani precedenti (essendo $\bar{\tau}$ un fattore d'omogeneità)

$$(6) \quad \bar{\tau} \bar{\alpha}_0 = \bar{a}_1 \bar{a}_2, \quad \bar{\tau} \bar{\alpha}_1 = \bar{a}_2 (c_1 - \bar{c}_1), \quad \bar{\tau} \bar{\alpha}_2 = -\bar{a}_1 (b_2 - \bar{b}_2).$$

Le (5) mettono di più in evidenza quand'è che uno dei due (o tutt'e due i) piani fondamentali da esse determinati viene a coincidere col piano tangente o diviene indeterminato.

Infatti p. es. il primo dei piani (5) viene a coincidere col piano tangente se e solo se $\bar{a}_2 = 0$ (ma $b_2 - \bar{b}_2 \neq 0$): ciò significa che sulle due superficie ad un sistema di asintotiche (nel nostro caso le $du = 0$) corrisponde pure un sistema di asintotiche; che se poi oltre ad essere $\bar{a}_2 = 0$ è $b_2 = \bar{b}_2$ allora quel piano fondamentale diventa indeterminato.

Nel 1° caso la retta (6) viene a trovarsi nel piano tangente (nell'intersezione di questo con l'altro piano fondamentale), mentre nel 2° caso è una retta qualunque, passante per P , del 2° piano fondamentale.

Se poi tutt'e due i sistemi di asintotiche si corrispondono sulle due superficie, $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = 0$, i due piani fondamentali* (5) o vanno tutt'e due a coincidere col piano tangente, o può accadere che uno di essi o tutt'e due divengano indeterminati.

6. Per vedere più chiaramente, in modo geometrico, quando si presenti uno di questi casi giova prendere in esame le curve aventi un flesso in P :

ciò ci darà una nuova interpretazione della retta (6) in molti casi più vantaggiosa della precedente.

Gli elementi di 2° ordine delle curve aventi in P , su σ , un flesso sono quelli per i quali il piano (2) diviene indeterminato; per essi

$$a_1 + 2v' + \alpha_2 v'^2 = 0; \quad c_1 - b_1 v' + c_2 v'^2 - b_2 v'^3 + v'' = 0$$

o, se si riferisce σ alle sue linee asintotiche $v' = 0$, $v'' = -c_1$ (è da tener presente che si è persa la simmetria in du , dv , e in d^2u , d^2v essendosi assunta u come variabile indipendente; ma ciò non porta danno).

Ad un tale elemento di 2° ordine corrisponde in \bar{P} il piano (le cui coordinate si ricaverebbero dalle (3))

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} \bar{\xi}_0 = -c_1 + \bar{c}_1 \\ \bar{\rho} \bar{\xi}_1 = \bar{a}_1 \\ \bar{\rho} \bar{\xi}_2 = 0 \end{array} \right. \quad \text{cioè di equazioni} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\xi}_2 = 0 \\ \bar{a}_1 \bar{\xi}_0 + (c_1 - \bar{c}_1) \bar{\xi}_1 = 0 \end{array} \right.$$

quindi appunto il 2° dei piani (5); analogamente si avrebbe l'altro come osculatore in \bar{P} agli elementi di 2° ordine di curve corrispondenti alle curve di σ che hanno in P per tangente di flesso l'altra tangente asintotica ($du = 0$). Così abbiamo guadagnata questa nuova interpretazione dei piani fondamentali (5) nella corrispondenza (4): essi sono i piani osculatori in \bar{P} alle curve corrispondenti a quelle che hanno un flesso in P ; quindi l'esser uno o due di essi indeterminati porta non solo che si corrispondano una o tutt'e due le tangenti asintotiche, ma che a curve che le hanno per tangenti di flesso in P corrispondano curve aventi pure un flesso in \bar{P} .

§ 2. CORRISPONDENZE PROIETTIVE FRA LE STELLE DI RETTE USCENTI DA PUNTI CORRISPONDENTI.

7. Nella corrispondenza cremoniana precedentemente stabilita fra le due stelle di piani di centri P e \bar{P} , ad una retta della prima stella, considerata come asse di un fascio di piani corrisponde un involuppo conico di 3ª classe Γ_3 .

Dalle equazioni (4) si ricava che alla retta di equazioni $\Psi/\alpha_0 = \Psi_1/\alpha_1 = \Psi_2/\alpha_2$ in coordinate di punti, o di equazione

$$\alpha_0 \xi_0 + \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 = 0$$

in coordinate di piani (nella stella di centro P) corrisponde l'involuppo conico

Per interpretare la seconda condizione conviene riferire una delle due superficie, p. es. $\bar{\sigma}$, alle sue linee asintotiche (per ipotesi distinte): $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = 0$. Si deve quindi avere

$$a_1 a_2 = 4.$$

Il birapporto k formato dalle due tangenti asintotiche in P a σ , $a_1 du^2 + + 2dudv + a_2 dv^2 = 0$, e dalle due tangenti (pure in P) corrispondenti alle due asintotiche di σ , $dudv = 0$ vale

$$k = \frac{(-1 \pm \sqrt{1 - a_1 a_2})^2}{a_1 a_2}$$

e nell'ipotesi attuale $k = (-1 \mp i\sqrt{3})/2$, cioè k è radice ($\neq 1$) di $k^3 = 1$. Questo fatto può esprimersi così: le due tangenti $du = dv = 0$ di σ (corrispondenti alle tangenti asintotiche di $\bar{\sigma}$) una tangente asintotica (sempre di σ) e la coniugata armonica dell'altra tangente asintotica rispetto alle due prime formano un gruppo equianarmonico.

S'intende che si può ovunque scambiare σ con $\bar{\sigma}$.

Esclusi questi due casi la proiettività Ω non è degenera e si può quindi invertire: la inversa Ω^{-1} ha le equazioni che si ottengono risolvendo le (8) rispetto ad $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2$.

Analogamente si può considerare la proiettività $\bar{\Omega}$ che fa passare da una retta asse di un fascio di piani nella stella di centro \bar{P} alla retta singolare del cono, involupato dai piani omologhi, uscente da P (e in generale la sua inversa): le equazioni di $\bar{\Omega}$, che indicheremo con $(\bar{8})$, si ottengono dalle (8) scambiandovi ovunque le lettere soprilineate con quelle che non lo sono.

9. Il prodotto $\Omega\bar{\Omega}$ è una proiettività nella stella di rette di centro P in cui sono unite tutte le rette tangenti in P a σ : si tratta quindi di un'omologia nella stella; cerchiamone l'ulteriore retta unita.

Se Ω fa passare dalla retta $\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2$ alla retta $\bar{\alpha}_0 : \bar{\alpha}_1 : \bar{\alpha}_2$ e se da questa, per mezzo di $\bar{\Omega}$, si passa alla retta $\alpha'_0 : \alpha'_1 : \alpha'_2$ le equazioni dell'omologia $\Omega\bar{\Omega}$ si scrivono:

$$\begin{aligned} \tau' \alpha'_0 &= 16(1 - a_1 a_2)(1 - \bar{a}_1 \bar{a}_2) \alpha_0 \\ \tau' \alpha'_1 &= 3 \{ [2(b_1 - \bar{b}_1)(a_2 - \bar{a}_2) - 2(b_2 - \bar{b}_2)(a_1 - \bar{a}_1) + (c_2 - \bar{c}_2)(\bar{a}_1 a_2 - a_1 \bar{a}_2)] \bar{a}_1 + \\ &\quad + (c - \bar{c})[4(a_2 - \bar{a}_2) + \bar{a}_2(a_1 \bar{a}_2 - \bar{a}_1 a_2)] \} \alpha_0 + \\ &\quad + \{ [4 - a_1 \bar{a}_2 - 3\bar{a}_1 a_2][4 - \bar{a}_1 a_2 - 3\bar{a}_2 a_1] - 4[a_1 - \bar{a}_1][a_2 - \bar{a}_2] \} \alpha_1 \\ \tau' \alpha'_2 &= 3 \{ [-2(c_2 - \bar{c}_2)(a_1 - \bar{a}_1) + 2(c_1 - \bar{c}_1)(a_2 - \bar{a}_2) + (b_1 - \bar{b}_1)(\bar{a}_1 a_2 - a_1 \bar{a}_2)] \bar{a}_2 - \\ &\quad - (b_2 - \bar{b}_2)[4(a_1 - \bar{a}_1) + \bar{a}_1(\bar{a}_1 a_2 - a_1 \bar{a}_2)] \} \alpha_0 + \\ &\quad + \{ [4 - a_1 \bar{a}_2 - 3\bar{a}_1 a_2][4 - \bar{a}_1 a_2 - 3\bar{a}_2 a_1] - 4[a_1 - \bar{a}_1][a_2 - \bar{a}_2] \} \alpha_2 \end{aligned}$$

o con evidente abbreviazione

$$(9) \quad \begin{cases} \tau' \alpha_0' = A_0 \alpha_0 \\ \tau' \alpha_1' = A_1 \alpha_0 + B \alpha_1 \\ \tau' \alpha_2' = A_1 \alpha_0 + B \alpha_2. \end{cases}$$

Quest' omologia è degenerare se $A_0 = 0$, cioè se almeno una delle due superficie è sviluppabile; oppure se $B = 0$ e allora si presenta il 2° dei casi d' eccezione (degenerazione di Ω) già discussi. Se ciò non accade, per l' ulteriore retta unita dell' omologia (oltre le tangenti in P a σ) si ha $\tau' = A_0$ quindi

$$\alpha_0 = A_0 - B, \quad \alpha_1 = A_1, \quad \alpha_2 = A_2.$$

Riferendo p. es. $\bar{\sigma}$ alla sue linee asintotiche ($\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = 0$) si ha

$$\alpha_0 = -a_1 a_2, \quad \alpha_1 = (c_1 - \bar{c}_1) a_2, \quad \alpha_2 = -(b_2 - \bar{b}_2) a_1;$$

ora questa retta non è altro che quella che si ottiene dalle (6) scambiando ovunque le lettere sopralineate con quelle che non lo sono; quindi: *l' ulteriore retta unita nell' omologia $\Omega \bar{\Omega}$ è l' intersezione dei due piani fondamentali (diversi dal piano tangente) in P nella corrispondenza cremoniana fra i piani delle due stelle di centri P e \bar{P} .*

A questa retta, che fra poco ritroveremo da un altro punto di vista, daremo il nome di *asse della corrispondenza relativo a P* ; analogamente si ha un asse della corrispondenza relativo al punto \bar{P} ed è rappresentato dalle (6).

L' omologia diviene speciale se ad una tangente asintotica in P corrisponde una tangente asintotica in \bar{P} ; già conosciamo i casi nei quali l' asse diviene indeterminato.

Assunte su $\bar{\sigma}$ le linee asintotiche come coordinate le equazioni dell' omologia si scrivono

$$\begin{cases} \tau' \alpha_0' = 4(1 - a_1 a_2) \alpha_0 \\ \tau' \alpha_1' = 3(c_1 - \bar{c}_1) a_2 \alpha_0 + (4 - a_1 a_2) \alpha_1 \\ \tau' \alpha_2' = 3(b_2 - \bar{b}_2) a_1 \alpha_0 + (4 - a_1 a_2) \alpha_2 \end{cases}$$

e queste rappresentano l' identità soltanto se $a_1 = 0$, $c_1 = \bar{c}_1$; oppure $a_2 = 0$, $b_2 = \bar{b}_2$; oppure $a_1 = a_2 = 0$; o in altre parole:

Le due proiettività Ω e $\bar{\Omega}$ sono una inversa dell' altra in uno di questi due casi: 1°) quando ad una tangente asintotica di σ corrisponde una tangente asintotica di $\bar{\sigma}$ e ai tre punti (di σ) infinitamente vicini su quella, tre punti appartenenti a questa; 2°) quando si corrispondono tutt' e due le tangenti asintotiche.

Nel caso generale si ha un *invariante della corrispondenza* calcolando l'invariante dell' omologia

$$\frac{A_0}{B} = \frac{16(1 - a_1 a_2)(1 - \bar{a}_1 \bar{a}_2)}{(4 - a_1 \bar{a}_2 - 3\bar{a}_1 a_2)(4 - \bar{a}_1 a_2 - 3\bar{a}_2 a_1) - 4(a_1 - \bar{a}_1)(a_2 - \bar{a}_2)}.$$

§ 3. LINEE ASSIALI SOPRA UNA SUPERFICIE (1).

10. Sia data per ogni punto P di una superficie σ una retta non giacente nel piano tangente (in P a σ). Alla congruenza di rette assegnata si può associare su σ un sistema ∞^2 di linee dotate di questa proprietà: il piano osculatore ad una qualsiasi di esse in P contiene la retta della congruenza passante per P . È chiaro infatti che dato P e una tangente in esso a σ la condizione precedente individua il piano osculatore cioè un elemento di 2° ordine della curva; e così via.

Se la retta per P ha le coordinate $\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2$, cioè le equazioni $\Psi/\alpha_0 = \Psi_1/\alpha_1 = \Psi_2/\alpha_2$, affinché il piano osculatore alla curva in P , la cui equazione è (2), contenga questa retta dovrà aversi

$$\{c_1 - b_1 v' + c_2 v'^2 - b_2 v'^3 + v''\} \alpha_0 + \{a_1 + 2v' + a_2 v'^2\} \{\alpha_1 + v' \alpha_2\} = 0$$

o se si vuole

$$(10) \quad \alpha_0 v'' = (\alpha_0 b_2 - \alpha_2 a_2) v'^3 - (\alpha_0 c_2 + \alpha_1 a_2 + 2\alpha_2) v'^2 + (\alpha_0 b_1 - 2\alpha_1 - \alpha_2 a_1) v' - (\alpha_0 c_1 + \alpha_1 a_1).$$

Se invece di porre sulla curva $v = v(u)$ si prendono u e v funzioni di un terzo parametro atto ad individuarne i punti si ha

$$(10') \quad \alpha_0 (dud^2 v - dvd^2 u) = (\alpha_0 b_2 - \alpha_2 a_2) dv^3 - (\alpha_0 c_2 + \alpha_1 a_2 + 2\alpha_2) dv^2 du + (\alpha_0 b_1 - 2\alpha_1 - \alpha_2 a_1) dv du^2 - [\alpha_0 c_1 + \alpha_1 a_1] du^3;$$

si può anche porre $\alpha_0 = 1$ perchè la condizione che la retta non stia nel piano tangente porta $\alpha_0 \neq 0$.

La (10), o la (10'), quando $\alpha_i = \alpha_i(u, v)$ rappresentano il sistema di linee assiali di σ associate alla congruenza data.

(1) A proposito di questi sistemi di linee, oltre alla Nota Lincea citata in principio, possono vedersi le altre mie Note: *Nozioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie dello spazio ordinario* (Rend. Lincei, vol. XXXIII, 1924) e: *Sistemi coniugati e sistemi assiali sopra una superficie* (Bollettino di Matematica, vol. III, 1924).

§ 4. SISTEMI DI LINEE ASSIALI CORRISPONDENTI SOPRA DUE SUPERFICIE.

11. Ora ci domandiamo: data una corrispondenza generica fra due superficie σ e $\bar{\sigma}$ esiste qualche sistema di linee assiali su σ cui corrisponda su $\bar{\sigma}$ un sistema assiale? Se ciò avviene, posto $\alpha_0 = \bar{\alpha}_0 = 1$, dovranno trovarsi tali valori di $\alpha_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$ da soddisfare alle condizioni

$$b_2 - \alpha_2 a_2 = \bar{b}_2 - \bar{\alpha}_2 \bar{a}_2, \quad c_1 + \alpha_1 a_1 = \bar{c}_1 + \bar{\alpha}_1 \bar{a}_1$$

$$c_2 + \alpha_1 a_2 + 2\alpha_2 = \bar{c}_2 + \bar{\alpha}_1 \bar{a}_2 + 2\bar{\alpha}_2, \quad b_1 - 2\alpha_1 - \alpha_2 a_1 = \bar{b}_1 - 2\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2 \bar{a}_1$$

cioè

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 a_1 & * & -\bar{\alpha}_1 \bar{a}_1 & * & = & \bar{c}_1 - c_1 \\ * & -\alpha_2 a_2 & * & + \bar{\alpha}_2 \bar{a}_2 & = & \bar{b}_2 - b_2 \\ \alpha_1 a_2 & + 2\alpha_2 & -\bar{\alpha}_1 \bar{a}_2 & - 2\bar{\alpha}_2 & = & \bar{c}_2 - c_2 \\ -2\alpha_1 & -\alpha_2 a_1 & + 2\bar{\alpha}_1 & + \bar{\alpha}_2 \bar{a}_1 & = & \bar{b}_1 - b_1. \end{array}$$

Le $\alpha_i, \bar{\alpha}_i$ ricavate da questo sistema di equazioni lineari definiscono, in generale, due congruenze di rette tali che i sistemi assiali associati alla prima di esse su σ e all'altra su $\bar{\sigma}$ si corrispondono sulle due superficie.

12. Assicurata, in generale, l'unicità dei sistemi assiali corrispondenti su σ e $\bar{\sigma}$, conviene ancora determinare dette congruenze ed esaminare i casi d'eccezione.

Riferendo p. es. la 1^a superficie alle linee asintotiche ($a_1 = a_2 = 0$) si vede che il determinante dei coefficienti vale $-4\bar{a}_1 \bar{a}_2$; quindi se nessuno dei due sistemi di asintotiche si corrispondono su σ e $\bar{\sigma}$ esiste un unico sistema assiale dell'una cui corrisponda un sistema assiale dell'altra; e si ha

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{c_1 - \bar{c}_1}{\bar{a}_1}, \quad \bar{\alpha}_2 = -\frac{b_2 - \bar{b}_2}{\bar{a}_2},$$

o se si vuole

$$\bar{\tau} \bar{\alpha}_0 = \bar{a}_1 \bar{a}_2, \quad \bar{\tau} \bar{\alpha}_1 = \bar{a}_2 (c_1 - \bar{c}_1), \quad \bar{\tau} \bar{\alpha}_2 = -\bar{a}_1 (b_2 - \bar{b}_2);$$

cioè la retta (6).

Quindi: le due congruenze, relative a σ e $\bar{\sigma}$, tali che le linee assiali ad esse associate su σ e $\bar{\sigma}$ si corrispondano sono le congruenze degli assi della corrispondenza relativi alle due superficie.

Che ciò dovesse essere risultava geometricamente chiaro da quanto si è detto precedentemente sulla corrispondenza cremoniana fra piani e sulle corrispondenze proiettive fra rette uscenti da punti corrispondenti.

Facilmente si discutono i casi d'eccezione.

Se $\bar{a}_1 = 0$ ma $\bar{a}_2 \neq 0$ non esistono sistemi assiali corrispondenti se non è $c_1 = \bar{c}_1$ e in questa ipotesi (di cui già conosciamo il significato geometrico) gli assi sono indeterminati: essi descrivono per ciascuno dei punti P e \bar{P} un fascio (il cui piano si trova facilmente) e i due fasci risultano proiettivi.

Se poi $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = 0$ non si hanno sistemi assiali corrispondenti, in generale: ma se inoltre $c_1 = \bar{c}_1$, $b_2 = \bar{b}_2$ ad ogni sistema assiale corrisponde un sistema assiale e in tal caso, per il teorema di Cech ⁽¹⁾, la corrispondenza fra σ e $\bar{\sigma}$ è un'applicabilità proiettiva.

PARTE SECONDA

Proprietà metriche della corrispondenza fra i punti di due superficie.

§ 5. EQUAZIONI FONDAMENTALI. - INVARIANTI METRICI.

13. Per lo studio delle proprietà metriche della corrispondenza conviene rappresentare i punti delle due superficie mediante coordinate cartesiane ortogonali e partire dalle equazioni fondamentali della teoria delle superficie che qui si riportano per σ

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 2 \end{array} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} + LX \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 2 \end{array} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} + MX \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \left\{ \begin{array}{l} 22 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{array}{l} 22 \\ 2 \end{array} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} + NX \end{array} \right.$$

ove i simboli di CHRISTOFFEL di 2^a specie $\left\{ \begin{array}{l} ik \\ l \end{array} \right\}$ sono costruiti per la forma $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ di σ ; L , M , N sono i coefficienti della 2^a forma

⁽¹⁾ E. CECH: *Sur la correspondance générale de deux surfaces*. (Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême, 1922).

fondamentale; e le X i coseni direttori della normale a σ nel punto P di coordinate x .

Se s'indicano con H, H_1, H_2 rispettivamente i determinanti $\left| x' - x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right|$, $\left| x' - x, \frac{\partial x}{\partial u}, X \right|$, $\left| x' - x, \frac{\partial x}{\partial v}, X \right|$, l'equazione del piano osculatore ad una curva $v = v(u)$ si scrive

$$\left(\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) v' + \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] v'^2 - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} v'^3 + v'' \Big) H + \\ + (L + 2Mv' + Nv'^2)(H_1 + v'H_2) = 0.$$

Se $h_1 H + H_1 = 0$, $h_2 H + H_2 = 0$ (con h_1, h_2 funzioni di u, v) rappresentano una congruenza di rette, le linee assiali ad essa associate sono rappresentate da

$$(2) \quad v'' = \left[Lh_1 - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] + \left[Lh_2 + 2Mh_1 + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] v' + \\ + \left[Nh_1 + 2Mh_2 - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] v'^2 + \left[Nh_2 + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] v'^3.$$

In particolare, se si riferisce σ alle sue linee di lunghezza nulla ($E = G = 0$), si trova subito come curvatura geodetica di una di queste linee

$$(3) \quad iF \frac{(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2)(h_1 du + h_2 dv)}{ds^3},$$

poichè la (2) si scrive

$$(2') \quad v'' = Lh_1 + \left[Lh_2 + 2Mh_1 + \frac{\partial \log F}{\partial u} \right] v' + \left[Nh_1 + 2Mh_2 - \frac{\partial \log F}{\partial v} \right] v'^2 + Nh_2 v'^3.$$

14. Di questa equazione si può fare un'applicazione immediata che dà una proprietà caratteristica della sfera.

Consideriamo su σ un sistema ∞^1 di linee definito dall'equazione differenziale $v' = \tau(u, v)$ e consideriamone le ∞^2 traiettorie isogonali (ogni traiettoria taglia le curve del sistema dato sotto lo stesso angolo, variabile però da traiettoria a traiettoria). L'equazione differenziale del sistema ∞^2 è

$$v'' = \frac{\partial \log \tau}{\partial v} v'^2 + \frac{\partial \log \tau}{\partial u} v'.$$

Quando accade che, qualunque sia il sistema ∞^1 dato, queste traiettorie formano sistemi assiali? Confrontando l'equazione scritta ora con la (2') si

vede che dev'essere $L = N = 0$, cioè la superficie è una sfera, e in tal caso si ha

$$(4) \quad h_1 = -\frac{1}{2F} \frac{\partial \log \tau/F}{\partial u}, \quad h_2 = -\frac{1}{2F} \frac{\partial \log \tau/F}{\partial v}.$$

Proprietà caratteristica della sfera è che su di essa le traiettorie isogonali di un sistema qualsiasi ∞^1 di linee costituiscono un sistema assiale ⁽¹⁾.

Con una rappresentazione stereografica della sfera sul piano si ha il teorema di CESARO ⁽²⁾:

Dato in un piano un sistema ∞^1 di linee, i cerchi osculatori in un punto alle traiettorie isogonali del sistema dato (passanti per il punto) formano fascio.

15. Ritornando alla (2) essa mostra che le linee assiali corrispondenti sulle due superficie σ e $\bar{\sigma}$ sono associate alle due congruenze di rette per le quali $h_1 h_2, \bar{h}_1 \bar{h}_2$ sono definite dalle equazioni

$$\begin{aligned} Lh_1 - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} &= \bar{L}\bar{h}_1 - \begin{Bmatrix} \bar{1}\bar{1} \\ 2 \end{Bmatrix}; & Nh_2 + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} &= \bar{N}\bar{h}_2 + \begin{Bmatrix} \bar{2}\bar{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \\ Lh_2 + 2Mh_1 + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} &= \bar{L}\bar{h}_2 + 2\bar{M}\bar{h}_1 + \begin{Bmatrix} \bar{1}\bar{1} \\ 1 \end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix} \bar{1}\bar{2} \\ 2 \end{Bmatrix} \\ Nh_1 + 2Mh_2 - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} &= \bar{N}\bar{h}_1 + 2\bar{M}\bar{h}_2 - \begin{Bmatrix} \bar{2}\bar{2} \\ 2 \end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix} \bar{1}\bar{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

che ammettono soluzione unica e ben determinata se non si corrispondono linee asintotiche su σ e $\bar{\sigma}$ (la discussione è già stata fatta).

Interpretiamo l'uguaglianza $Lh_1 - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \bar{L}\bar{h}_1 - \begin{Bmatrix} \bar{1}\bar{1} \\ 2 \end{Bmatrix}$.

16. Poichè non è stata particolarizzata la scelta delle linee coordinate u, v possiamo assumere come linea $v = \text{cost.}$ passante per un punto P una qualsiasi linea (per P).

L'angolo ω della normale principale a questa linea in P con la normale

⁽¹⁾ La proprietà sulla sfera è stata osservata da CASTELNUOVO; io ho trovato ch'essa è caratteristica.

⁽²⁾ Di questo teorema si è ripetutamente occupato G. SCHEFFERS; v. p. es. nei *Mathem. Annalen*, Bd. 60 (1905) la Memoria: *Isogonalkurven, Äquitangentalkurven und komplexe Zahlen*.

alla superficie è dato da

$$\operatorname{tg} \omega = - \frac{\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}}{L}$$

(essendo $\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} H + LH_1 = 0$ l'equazione del suo piano osculatore in P). La linea assiale tangente in P a quella considerata ha per piano osculatore $h_1 H + H_1 = 0$; quindi indicando ω^* l'angolo della sua normale principale con la normale alla superficie, $\operatorname{tg} \omega^* = -h_1$. Da ciò

$$Lh_1 - \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = L(\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \omega^*).$$

Se con $1/R$ s'indica la curvatura normale delle linee di σ uscenti da P in direzione $dv = 0$, di elemento lineare ds , si ha $-Ldu^2 = \frac{ds^2}{R}$ e per il teorema di MEUSNIER se r e r^* sono i raggi di curvatura delle due curve $\frac{\cos \omega}{r} = \frac{\cos \omega^*}{r^*} = \frac{1}{R}$; quindi

$$Lh_1 - \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{ds^2}{du^2} \left(\frac{\operatorname{sen} \omega^*}{r^*} - \frac{\operatorname{sen} \omega}{r} \right).$$

I due rapporti in parentesi sono le curvatures geodetiche delle due linee considerate, cioè indicando con $d\theta$ e $d\theta^*$ gli angoli di contingenza geodetica in P di ciascuna di esse vediamo che è invariante, nel passaggio dall'una all'altra superficie, l'espressione

$$ds(d\theta - d\theta^*).$$

La differenza in parentesi rappresenta l'angolo di contingenza della linea data rispetto alla linea assiale tangente ad essa in P : se quest'angolo diviso per ds si chiama *curvatura assiale* della linea data in P , e s'indica con $1/r_\alpha$ si ha in punti P e \bar{P} corrispondenti di σ e $\bar{\sigma}$ e per due linee corrispondenti

$$\frac{ds^2}{r_\alpha} = \frac{d\bar{s}^2}{r_\alpha}.$$

Il rapporto delle curvatures assiali di due linee corrispondenti in punti corrispondenti P e \bar{P} è uguale all'inverso del rapporto dei quadrati dei loro elementi lineari.

Se in particolare la rappresentazione di σ su $\bar{\sigma}$ è conforme si ha:

In una rappresentazione conforme il rapporto delle curvatures assiali di linee corrispondenti dipende soltanto dal punto ed è uguale all'inverso del quadrato del modulo.

Se infine si ha un'applicabilità $ds^2 = d\bar{s}^2$, le curvatures assiali divengono le curvatures geodetiche delle linee considerate e si ritrova un teorema notissimo.

§ 6. RAPPRESENTAZIONE CONFORME.

17. I teoremi dati finora valgono per una trasformazione generica fra σ e $\bar{\sigma}$; occupiamoci particolarmente del caso in cui si tratti di una rappresentazione conforme.

Riferite le due superficie alle loro linee isotrope i loro elementi lineari assumono la forma $ds^2 = 2Fdudv$ e $d\bar{s}^2 = 2\bar{F}dudv = 2e^{2\sigma}Fdudv$. Le equazioni determinanti gli assi della corrispondenza divengono

$$(5) \quad \begin{cases} Lh_1 = \bar{L}\bar{h}_1; & Nh_2 = \bar{N}\bar{h}_2 \\ Lh_2 + 2Mh_1 = \bar{L}\bar{h}_2 + 2\bar{M}\bar{h}_1 + 2\sigma_u; & Nh_1 + 2Mh_2 = \bar{N}\bar{h}_1 + 2\bar{M}\bar{h}_2 - 2\sigma_v. \end{cases}$$

L'angolo di contingenza geodetica di una linea assiale di σ si ottiene moltiplicando la (3) per ds e vale

$$d\theta = i(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2)(h_1du + h_2dv)/2dudv$$

se si calcola analogamente l'angolo di contingenza geodetica della linea assiale di $\bar{\sigma}$ corrispondente a quella ora considerata, tenuto conto delle relazioni precedenti si trova ch'esso vale

$$d\bar{\theta} = d\theta - i(\sigma_u du - \sigma_v dv)$$

e in questa relazione non v'è più traccia di L, \dots, \bar{L}, \dots

Essa contiene il teorema:

Si considerino sulle due superficie poste in rappresentazione conforme linee assiali corrispondenti e, in punti corrispondenti, i loro angoli di contingenza geodetica. Se si deformano per applicabilità le due superficie variano i due sistemi assiali che si corrispondono ma la differenza fra detti angoli di contingenza rimane inalterata.

Le linee assiali corrispondenti sulle due superficie hanno lo stesso angolo di contingenza in quei punti nei quali riescono ortogonali alle linee di modulo costante ($\sigma = \text{cost.}$).

Si ha così una nuova proprietà di queste linee.

18. Può accadere che la congruenza degli assi relativa ad una superficie sia quella delle sue normali?

Se ciò accade p. es. per $\bar{\sigma}$ deve aversi $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 0$ e le (5) si riducono in tale ipotesi alle seguenti

$$(5) \quad \begin{cases} Lh_1 = 0, & Nh_2 = 0 \\ Lh_2 + 2Mh_1 = 2\sigma_u, & Nh_1 + 2Mh_2 = -2\sigma_v. \end{cases}$$

Se $h_1 = h_2 = 0$ dev'essere $\sigma_u = \sigma_v = 0$, $\sigma = \text{cost.}$, le due superficie sono isometrico-simili: caso evidente.

Se invece $h_2 = 0$ p. es. ma $h_1 \neq 0$ dev'essere $L = 0$ cioè le linee $u (dv = 0)$ di lunghezza nulla sono anche asintotiche, quindi necessariamente rette isotrope: se la superficie è reale anche l'altro sistema di asintotiche dev'essere costituito da rette isotrope quindi la superficie è una sfera.

Se infine $L = N = 0$ (caso della sfera) si hanno, per determinare l'asse le due equazioni

$$(6) \quad h_1 = -\frac{1}{F} \sigma_u, \quad h_2 = \frac{1}{F} \sigma_v.$$

Quindi: se in una rappresentazione conforme fra due superficie la congruenza degli assi relativa ad una di esse è normale alla superficie stessa allora: o avviene altrettanto per l'altra e le due superficie sono isometrico-simili; oppure la seconda superficie (se è reale) è necessariamente una sfera: e viceversa.

§ 7. RAPPRESENTAZIONE CONFORME DI UNA SUPERFICIE SOPRA UNA SFERA.

19. Nel caso che una delle due superficie, p. es. σ , sia una sfera, i teoremi precedenti si possono ancora precisare e danno luogo ad altre interessanti proprietà.

Intanto, per l'ultimo teorema dato, la congruenza degli assi relativa a $\bar{\sigma}$ è quella delle sue normali. Determiniamo la congruenza degli assi relativa a σ .

Assumiamo per la sfera σ (di raggio unitario) la rappresentazione

$$(7) \quad x = \frac{u+v}{uv+1}, \quad y = -i \frac{u-v}{uv+1}, \quad z = \frac{uv-1}{uv+1};$$

$$E = G = 0, \quad F = \frac{2}{(uv+1)^2}, \quad L = N = 0, \quad M = -F, \quad X_1 = x, \dots;$$

$$x_{uu} = \frac{F_u}{F} x_u, \quad x_{vv} = \frac{F_v}{F} x_v, \quad x_{uv} = -F x.$$

I coseni direttori dell'asse relativo al punto u, v di σ sono

$$l_1 = (-Fx + \sigma_u x_v + \sigma_v x_u) / \sqrt{F^2 + 2\sigma_u \sigma_v F}, \dots$$

e su di essi si verifica subito che $\Sigma l \frac{dx}{ds} / \Sigma lx = -\frac{d\sigma}{ds}$ essendo ds l'elemento lineare di σ in una direzione qualsiasi uscente dal punto. Se s'indica con λ l'angolo dell'asse con la direzione su cui si è eseguito lo spostamento ds e con θ l'angolo dell'asse stesso con il raggio della sfera passante per il punto x l'ultima relazione si scrive anche $\cos \lambda / \cos \theta = -d\sigma/ds$.

La proiezione ortogonale dell'asse sul piano tangente alla sfera nel punto x da cui esce è definita da $\sigma_u du - \sigma_v dv = 0$ cioè le proiezioni ortogonali degli assi sulla sfera inviluppano le linee ortogonali a quelle di modulo costante ($\sigma = \text{cost.}$). Se si prende l'elemento ds secondo la proiezione dell'asse si ha $\text{tg } \theta = -\frac{d\sigma}{ds}$ cioè il gradiente del modulo σ dà la tangente dell'angolo che l'asse forma col piano tangente alla sfera.

Le relazioni trovate determinano completamente la congruenza degli assi relativa alla sfera; e possono enunciarsi così:

La congruenza degli assi (relativa alla sfera) può rendersi normale con una rifrazione sulla sfera il cui indice sia uguale in ogni punto al coseno dell'angolo d'incidenza θ .

Una retta della congruenza uscente da un punto della sfera è ivi normale alla linea di modulo costante che vi passa e il gradiente del modulo dà la tangente dell'angolo d'incidenza.

Risulta dalle espressioni di h_1, h_2 che la congruenza degli assi è determinata appena sia dato il modulo della rappresentazione conforme, cioè σ ; anzi se si muta σ in $\sigma^* = f(\sigma)$ varia soltanto l'angolo d'incidenza θ ma non il piano normale nel punto contenente il raggio della congruenza.

20. Ora ci domandiamo come si possono caratterizzare le congruenze che si ottengono nel modo detto da una rappresentazione conforme sulla sfera.

Se la retta della congruenza passante per il punto x della sfera ha coseni direttori proporzionali a

$$\xi = x + h_1 x_v - h_2 x_u$$

le sviluppabili della congruenza sono caratterizzate dalla condizione $|dx, \xi, d\xi|=0$: e questa sviluppata si scrive

$$(Fh_{1u} + h_1^2 F^2)du^2 + \left(\frac{\partial h_1 F}{\partial u} + \frac{\partial h_2 F}{\partial v}\right)dudv + (Fh_{2v} - h_2^2 F^2)dv^2 = 0.$$

Nel caso della congruenza degli assi di una rappresentazione conforme avendosi $h_1 F = -\sigma_v$, $h_2 F = \sigma_u$ l'equazione precedente manca del termine in $dudv$, cioè il doppio sistema di curve segnato sulla sfera dalle sviluppabili della congruenza è ortogonale, cioè la congruenza è armonica alla sfera.

Viceversa: se ciò accade può sempre porsi $h_1 F = -\sigma_u$, $h_2 F = \sigma_v$ ove σ è determinata a meno di una costante addittiva, la quale ha per effetto soltanto di moltiplicare per una costante l'elemento lineare di una superficie rappresentata in modo conforme sulla sfera; prescindendo dunque al più da una similitudine (che in questa questione è affatto inessenziale) si ha:

La congruenza degli assi di una rappresentazione conforme sulla sfera sega questa, con le sue sviluppabili, in un doppio sistema ortogonale; e viceversa ogni congruenza siffatta determina una rappresentazione conforme sulla sfera.

21. L'equazione differenziale del doppio sistema ortogonale segnato dalle sviluppabili della congruenza relativa a σ è

$$(8) \quad \sigma_u \left(\frac{\partial \log \sigma_u / F}{\partial u} - \sigma_u \right) du^2 = \sigma_v \left(\frac{\partial \log \sigma_v / F}{\partial v} - \sigma_v \right) dv^2;$$

questo è generalmente distinto dal doppio sistema formato dalle linee $\sigma = \text{cost.}$ e dalle loro traiettorie ortogonali; coincidono allora e solo quando risulti $F/\sigma_u \sigma_v$ funzione della sola σ .

22. S'è visto che nella rappresentazione conforme sulla sfera (qualunque ne sia il modulo) la congruenza degli assi proiettata ortogonalmente sulla sfera (ciascuna retta sul piano tangente nel punto al quale si riferisce) dà luogo

alla congruenza delle rette tangenti alle curve ortogonali a quelle di modulo costante. Questa proprietà è caratteristica delle rappresentazioni conformi sulla sfera?

Per rispondere alla domanda ora posta si osservi che la proiezione ortogonale dell'asse sul piano tangente alla superficie ha coseni direttori proporzionali ad $h_1x_v - h_2x_u$, cioè nella direzione voluta si ha $h_1du + h_2dv = 0$.

Affinchè questa risulti ortogonale alla direzione $\sigma_u du + \sigma_v dv = 0$ dev'essere $h_1\sigma_v + h_2\sigma_u = 0$, cioè introducendo un fattore di proporzionalità ρ non nullo $h_1 = \rho\sigma_u$, $h_2 = -\rho\sigma_v$ (se fosse invece $\rho = 0$, si avrebbe $h_1 = h_2 = 0$; sappiamo già che ciò accade per le applicabilità e per le rappresentazioni conformi sulla sfera). A norma delle prime due equazioni (5) $\bar{L}h_1 = \rho L\sigma_u$, $\bar{N}h_2 = -\rho N\sigma_v$; portando le espressioni trovate nelle ultime due delle (5) ed eliminando ρ si ottiene

$$(L\bar{N} - \bar{L}N)(\bar{L}\sigma_v^2 + 2\bar{M}\sigma_u\sigma_v + \bar{N}\sigma_u^2) = 0.$$

Se è nullo il 2° fattore, le due superficie poste in corrispondenza conforme possono essere qualsiasi, ma se per una di esse accade il fatto supposto per la congruenza degli assi, sull'altra le linee di modulo costante sono ortogonali alle asintotiche di un sistema.

Se invece è nullo il primo fattore il fatto voluto accade qualunque sia la rappresentazione conforme; esso può presentarsi: 1°) quando $L = N = 0$, oppure $\bar{L} = \bar{N} = 0$ e in tal caso una delle due superficie è una sfera (non tutt'e due altrimenti, corrispondendosi le asintotiche non si avrebbe più un sistema assiale determinato dalla corrispondenza); è il caso noto; 2°) quando p. es. $L = \bar{L} = 0$: ma in questo caso, come mostrano le (5) e come del resto risulterebbe anche dai teoremi della Parte I, non è più determinato un sistema assiale; quindi è da scartarsi; 3°) quando essendo $LN\bar{L}\bar{N} \neq 0$ risulti $L\bar{N} = \bar{L}N$: e allora sulle due superficie si corrispondono, oltre alle linee isotrope, le linee di curvatura.

Possiamo quindi enunciare il risultato della discussione:

Se in una rappresentazione conforme accade che la congruenza degli assi relativa ad una superficie ha per proiezione ortogonale sui piani tangenti le rette involuppati le traiettorie ortogonali alle linee di modulo costante, si presenta una di queste eventualità:

1°) *sull'altra superficie le linee di modulo costante sono ortogonali alle asintotiche di un sistema;*

2°) *il fatto accennato avviene per le congruenze relative a tutt'e due le superficie e qualunque sia il modulo della rappresentazione; e allora o*

una delle due superficie è una sfera, oppure sulle due superficie si corrispondono le linee di curvatura.

23. Un esempio di quest'ultima eventualità si dà facilmente. Si consideri una superficie a curvatura media costante $H \neq 0$ (e curvatura gaussiana K variabile), descritta dal punto x . Fra le superficie parallele, descritte dal punto $\bar{x} = x + aX$ ($a = \text{cost.}$) ve n'è una rappresentata conformemente sulla prima assumendo come corrispondenti \bar{x} ed x . Infatti si ha $\bar{E} = -a(2 - aH)L$, $\bar{G} = -a(2 - aH)N$ (per $E = G = 0$), quindi $\bar{E} = \bar{G} = 0$ per $a = 2/H$. In tal caso $h_1 = -\bar{h}_1 = \sigma_u/aKF$, $h_2 = -\bar{h}_2 = -\sigma_v/aKF$, con $e^{2\sigma} = 1 - a^2K$.

24. Dai teoremi precedenti risulta che ad ogni rappresentazione conforme sulla sfera sono intrinsecamente associate due congruenze: una è quella degli assi (relativa alla sfera); l'altra è quella determinata dalle traiettorie isogonali delle linee di modulo costante (in base al teor. del n. 14). Le due rette delle due congruenze uscenti da uno stesso punto della sfera risultano definite, a norma delle (4) e (6), da

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = -\sigma_u/F \\ h_2 = \sigma_v/F \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} h_1^* = -\frac{\partial \log(\sigma_u/\sigma_v F)}{\partial u} / 2F \\ h_2^* = -\frac{\partial \log(F\sigma_u/\sigma_v)}{\partial v} / 2F. \end{array} \right.$$

Ogni elemento geometrico relativo a queste due congruenze dà un'immagine sensibile delle circostanze che si presentano nella rappresentazione conforme; ed ogni particolarità di quelle svela particolarità di questa. Senza prendere in esame quegli elementi geometrici o loro particolarità, esame che pure potrebbe dar luogo a risultati interessanti, discutiamo due fatti di notevole rilievo: l'indeterminazione delle sviluppabili della congruenza degli assi, la coincidenza delle due congruenze da ultimo nominate.

§ 8. PARTICOLARI RAPPRESENTAZIONI CONFORMI SULLA SFERA.

25. Se le sviluppabili della congruenza degli assi sono indeterminate, cioè se questa si riduce ad una stella, la (8) dà

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial u} [\log(\sigma_u/F) - \sigma] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} [\log(\sigma_v/F) - \sigma] = 0$$

quindi deve potersi porre

$$e^{-\sigma}\sigma_u = FV, \quad e^{-\sigma}\sigma_v = FU$$

con $U = U(u)$, $V = V(v)$. In forza delle condizioni d'integrabilità si trova

$$U = au^2 + ku + b, \quad V = bv^2 + kv + a$$

essendo a , b , k tre costanti. Un'ulteriore integrazione dà

$$e^{-\sigma} = 2 \frac{au - bv + k + c(uv + 1)}{uv + 1} = 2\rho \quad (c = \text{cost.})$$

e successivamente si ha

$$h_1 = -\sigma_u / F = \frac{1}{2}(bv^2 - kv + a) / \rho$$

$$h_2 = \sigma_v / F = \frac{1}{2}(au^2 + kv + b) / \rho$$

essendo ρ definito dalla posizione fatta per $e^{-\sigma}$.

I coseni direttori dell'asse sono del tipo

$$l_i = \frac{1}{\sqrt{c^2 - ab + (\rho - c)(k + 2c)}} \left\{ \rho x + \frac{1}{2}(bv^2 - kv + a)x_v - \frac{1}{2}(au^2 + ku + b)x_u \right\}$$

ove le x s'intendono tratte dalle (7) e così le loro derivate x_u , x_v . Il calcolo effettivo di queste espressioni mostra che il centro S della stella ha per coordinate

$$x_0 = \frac{b - a}{k + 2c}, \quad y_0 = -i \frac{a + b}{k + 2c}, \quad z_0 = \frac{k}{k + 2c}.$$

L'elemento lineare $d\bar{s}$ della metrica conforme a quella della sfera determinata dalla stella, è data da

$$d\bar{s}^2 = 2e^{2\sigma} F dudv = 2\bar{F} dudv = \frac{dudv}{[au - bv + k + c(uv + 1)]^2}$$

e la sua curvatura è

$$-\frac{1}{\bar{F}} \frac{\partial^2 \log \bar{F}}{\partial u \partial v} = 4(kc + c^2 + ab)$$

quindi costante e precisamente uguale al discriminante dell'espressione in parentesi a denominatore del $d\bar{s}^2$: questa ultima espressione uguagliata a zero

rappresenta l'assoluto della metrica in esame; la quale è perciò iperbolica ellittica o parabolica secondo che il punto S è esterno o interno alla sfera o sta sulla sfera.

26. Si presenta ora con evidenza un modello di questa metrica. Se il punto S , come vogliamo supporre, è reale si può assumere S sull'asse z del sistema cartesiano in cui è data la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Con ciò $a = b = 0$ e $\frac{k}{c} + 1 = \frac{1 + z_0}{1 - z_0}$, sicchè, a meno del fattore inessenziale $\frac{1}{c}$ che fa passare ad una metrica simile,

$$d\bar{s}^2 = \frac{dudv}{\left[uv + \frac{1+z_0}{1-z_0}\right]^2}.$$

Rappresentiamo ora stereograficamente la sfera proiettandola dal punto $(0, 0, 1)$, sul piano $z = 0$; per il punto immagine $u = x + iy$, $v = x - iy$; sicchè in queste coordinate si scrive

$$(10) \quad d\bar{s}^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\left[x^2 + y^2 + \frac{1+z_0}{1-z_0}\right]^2}.$$

Il cerchio $x^2 + y^2 + \frac{1+z_0}{1-z_0} = 0$ è la proiezione stereografica di quello intersezione della sfera col piano polare di S . Possiamo quindi enunciare il teorema:

Se la congruenza degli assi relativa ad una rappresentazione conforme è una stella di centro S (cioè le linee assiali che si conservano tali nella rappresentazione sono i cerchi della sfera segati dai piani per S) la metrica conforme è necessariamente a curvatura costante.

Un modello di questa metrica si ha proiettando stereograficamente la sfera data da uno dei punti appartenenti al diametro per S sul piano diametrale normale e assumendo in questo piano una metrica-proiettiva (nel senso di Cayley-Klein) avente per assoluto la proiezione stereografica del cerchio che sta nel piano polare di S .

Così facendo si ottiene nel piano della proiezione stereografica una metrica il cui elemento lineare è ridotto alla forma normale di Riemann (10).

È poi ben noto come questa possa ottenersi dalla metrica euclidea

nello stesso piano attraverso una proiezione stereografica sulla sfera di raggio $\sqrt{\frac{z_0+1}{z_0-1}}$ seguita da una proiezione ortogonale di questa sul piano.

Se S sta nel centro della sfera, $a = b = k = 0$, si ha la rappresentazione geodetica di BELTRAMI; la rappresentazione stereografica corrisponde ad $a = b = c = 0$.

27. Veniamo ora al problema di determinare quelle rappresentazioni conformi sulla sfera per le quali coincidono le due congruenze già studiate: per esse $h_1 = h_1^*$, $h_2 = h_2^*$ cioè

$$(11) \quad 2\sigma_u = \frac{\partial \log(\sigma_u/\sigma_v F)}{\partial u}, \quad 2\sigma_v = -\frac{\partial \log(F\sigma_u/\sigma_v)}{\partial v}.$$

Da queste con una prima integrazione, introducendo due funzioni $U(u)$ e $V(v)$ delle variabili in esse indicate, si ha

$$e^{2\sigma} = \frac{1}{F} \frac{\sigma_u}{\sigma_v} \frac{1}{V^2} = \frac{1}{F} \frac{\sigma_v}{\sigma_u} \frac{1}{U^2}$$

da cui

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_v} = \frac{V}{U} \quad \text{ed} \quad e^{2\sigma} = \frac{1}{FUV}.$$

Quest'ultima s'interpreta immediatamente, poichè essendo

$$d\bar{s}^2 = 2\bar{F}dudv = 2e^{2\sigma}Fdudv = \frac{2dudv}{UV}$$

risulta il $d\bar{s}^2$ a curvatura nulla: sicchè si tratta di rappresentazione conforme della sfera sul piano. Però non per ogni tale rappresentazione accade il fatto da cui siamo partiti.

Infatti U e V sono vincolate dalla condizione, risultante dalle (11), di rendere

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_v} = \frac{U'/U + F_u/F}{V'/V + F_v/F} = \frac{V}{U}$$

cioè

$$(12) \quad U' - 2v \frac{U}{uv+1} = V' - 2u \frac{V}{uv+1}$$

dalla quale con successive derivazioni si trae

$$(13) \quad U''u - U' = V''v - V' = -k \quad (\text{costante}).$$

Gli integrali di queste equazioni (13) soddisfacenti alle (12) sono

$$(14) \quad U = au^2 + ku + b, \quad V = -bv^2 + kv - a$$

con a, b, k costanti arbitrarie.

Avute U e V è determinata $e^{2\sigma}$ quindi anche σ_u, σ_v cioè la congruenza degli assi.

28. Anche di questa rappresentazione conforme della sfera sul piano si può dare una rappresentazione geometrica semplice.

Cerchiamo a questo scopo le linee di modulo costante sulla sfera. Per esse

$$\frac{(uv + 1)^2}{(au^2 + ku + b)(bv^2 - kv + a)} = \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda \text{ cost.})$$

ovvero, per le (7),

$$4(\lambda - ab) = [(b - a)x - i(a + b)y + kx]^2 - k^2$$

cioè le linee di modulo costante sulla sfera appartengono ad un sistema di piani paralleli.

Se questi, come vogliamo supporre, sono reali possiamo sempre disporre del sistema cartesiano (xyz) al quale abbiamo riferita la sfera in modo che questi piani risultino paralleli al piano $z = 0$; il che equivale a porre $a = b = 0$, quindi $U = ku, V = kv$, o anche, poichè $k \neq 0$ e in queste questioni si può prescindere da un fattore costante del $d\bar{s}$, a porre

$$(15) \quad d\bar{s}^2 = \frac{du}{u} \cdot \frac{dv}{v} = d\bar{u} \cdot d\bar{v}$$

con $\bar{u} = \log u, \bar{v} = \log v$.

Con ciò il valore $e^{2\sigma}$ sopra ogni cerchio di modulo costante è uguale ad una costante moltiplicata per l'inverso del quadrato del raggio del cerchio.

Se con le espressioni di σ_u, σ_v spettanti al $d\bar{s}^2$ si determina la congruenza degli assi si trova che questa è costituita dalle rette diametri dei cerchi di modulo costante (sicchè è una congruenza lineare avente per direttrici il diametro normale ai piani di quei cerchi e la retta all'infinito di tali piani); le linee assiali sono, naturalmente, le traiettorie isogonali dei cerchi stessi.

Sicchè riassumendo:

Se la congruenza degli assi relativa ad una rappresentazione conforme della sfera e quella determinata dalle traiettorie isogonali delle linee di modulo costante coincidono si tratta necessariamente di una (particolare) rappresentazione conforme della sfera sopra un piano.

Condizione necessaria e sufficiente affinché ciò accada è che le linee di modulo costante sulla sfera siano cerchi situati in piani paralleli e che il modulo ($e^{2\sigma}$) su ciascuno di essi sia uguale all'inverso del quadrato del raggio (moltiplicato, se si vuole, per una costante). La congruenza degli assi è costituita dai diametri di questi cerchi.

Si costruisce la rappresentazione voluta proiettando la sfera stereograficamente da uno dei suoi punti appartenenti al diametro normale ai piani dei cerchi sul piano equatoriale, sia xy , normale al diametro detto; indi passando da questo al piano $\bar{x}\bar{y}$ con la trasformazione logaritmica

$$\bar{x} + i\bar{y} = \log(x + iy).$$

Bologna, dicembre 1923.

Di due speciali modificazioni alla legge di Newton, che, per lo spostamento del perielio e la deflessione dei raggi, conducono agli stessi risultati della Relatività.

di CARLO BIGIAVI a Firenze

Prima della Relatività vari tentativi sono stati fatti per spiegare l'anomalia di Mercurio con proposte di lievi modificazioni alla legge di NEWTON, consistenti specialmente nella considerazione di potenziali cinetici dipendenti non soltanto dalla distanza delle due masse, attratta ed attraiante, ma anche dalla velocità relativa della prima rispetto alla seconda ⁽¹⁾.

Uno dei più notevoli è quello di RIEMANN, esposto dal TISSERAND e anche dal LÉMERAY in un suo corso di lezioni, in considerazione della sua importanza storica soltanto, giacchè praticamente non risolve nulla ⁽²⁾.

Ma quando colla Relatività si giunse alla risoluzione dei due problemi dello spostamento del perielio e della deflessione dei raggi con risultati coincidenti o quasi con quelli dell'osservazione, questi due fenomeni furono considerati insieme e vennero riprese e continuate le ricerche per la loro spiegazione coi metodi della meccanica classica.

Se ne occupò specialmente GASTON BERTRAND in due pubblicazioni ⁽³⁾, partendo nella seconda dal potenziale cinetico già considerato da RIEMANN, modificandolo però mediante l'introduzione di un parametro α e giungendo al risultato che per $\alpha = 2$ si ha la coincidenza colla Relatività nel caso della deflessione della luce e per $\alpha = 3$ la si ha invece per lo spostamento del perielio.

Ad altri tentativi, diretti però più specialmente al solo caso dello spostamento del perielio, accenna il prof. PALATINI in una sua recente ed importantissima pubblicazione ⁽⁴⁾, segnalatami quando già avevo compiuto queste

⁽¹⁾ Vedi TISSERAND, *Mécanique Céleste*, vol. IV, Gauthier-Villars, Paris.

⁽²⁾ *Leçons élémentaires sur la Gravitation d'après la théorie d'EINSTEIN par E.-M. LÉMERAY*, Gauthier-Villars, Paris 1921.

⁽³⁾ GASTON BERTRAND, « Comptes Rendus », 29 agosto 1921 e 26 giugno 1922.

⁽⁴⁾ ATTILIO PALATINI, *Sopra la deviazione dei raggi luminosi secondo il punto di vista newtoniano*. Memorie della Società Astronomica Italiana, Nuova Serie, Vol. II.

mie ricerche. Fra essi egli ricorda quello notevole dell'EISENHART⁽⁵⁾, il quale risolve il problema con una forza che agisce secondo la congiungente le due masse, attratta ed attraente, diretta verso questa, e nella quale, a differenza delle altre ricerche, invece dell'intera velocità figura soltanto la sua componente normale alla detta congiungente, componente che il PALATINI chiama trasversa.

Naturalmente il PALATINI, trovando logico che i due fenomeni dello spostamento e della deflessione debbano considerarsi insieme, si è proposto nel suo lavoro di vedere se la forza considerata dall'EISENHART conduce anche per la deflessione dei raggi a risultati coincidenti con quelli della Relatività, e giunge alla conclusione che ciò non avviene.

Io pure ho tentato ed in più modi⁽⁶⁾ di risolvere il problema servendomi di un parametro, ma, non avendo mai potuto ottenere la coincidenza nei due casi assieme, mi sono proposto di ricercare se, ricorrendo a due parametri, invece che ad uno soltanto, e poi disponendone in modo conveniente, si possa giungere a risultati finali eguali a quelli della Relatività, ed ho trovato che ciò è possibile per due lievi varianti alla legge di NEWTON. In ambedue, partendo dalla considerazione di una massa attraente M , concentrata in un punto O , da ritenersi come fisso rispetto ad un altro punto materiale P , mobile per l'azione attrattiva di M , figurano due componenti della velocità v di P , che assieme la individuano, essendo l'una diretta secondo la congiungente PO e l'altra, che denoteremo con v_n , normale a questa direzione.

Riferendoci ad un sistema cartesiano ortogonale ($Oxyz$) e ad uno polare legato al cartesiano dalle relazioni:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

e denotando con t il tempo e con c la velocità della luce a distanza infinita da corpi materiali, si può rappresentare la prima modificazione sostituendo

⁽⁵⁾ L. P. EISENHART, *The Einstein equations for the solar field from the newtonian point of view*. Science 1922, vol. LV, n. 1430, pag. 570-572.

⁽⁶⁾ In un'altra ricerca condotta a termine, ma poi abbandonata, perchè conduce a un risultato inferiore a quello già citato del BERTRAND, senza saperlo, prima di leggere la pubblicazione del PALATINI, avevo considerato la stessa forza dell'EISENHART, però con un parametro λ che moltiplica il quadrato della componente trasversa della velocità. Confrontando colla relatività, per $\lambda = 1$ si ha la coincidenza per il perielio, ma una volta e mezzo il valore della deflessione; invece per $\lambda = \frac{1}{2}$ si ha la coincidenza per la deflessione, ma la metà del valore dello spostamento.

all'ordinario potenziale newtoniano $-\frac{\mu}{r}$ un *potenziale cinetico*:

$$(1) \quad U = -\frac{\mu}{r} - \frac{\alpha\mu v_n^2}{c^2 r} - \frac{\beta\mu}{c^2 r} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

dove $\mu = fM$, e α, β designano i due parametri. Nella seconda modificazione si rinuncia anche al potenziale cinetico, ammettendo che la forza agisca nella direzione e nel senso PO , imprimendo a P l'accelerazione:

$$(2) \quad \frac{\mu}{r^2} + \frac{\exists\lambda\mu v_n^2}{c^2 r^2} + \frac{\nu\mu}{c^2 r^2} \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2r \frac{d^2 r}{dt^2} \right] \quad (7),$$

nella quale λ, ν sono i due parametri.

In ambedue le modificazioni il moto è piano, e perciò si può supporre $z = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$; ma soltanto per la seconda sussiste il teorema delle aree:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = r v_n = h_2$$

essendo h_2 una costante arbitraria, che possiamo introdurre nell'espressione (2), eliminandone v_n . La (2) diviene quindi:

$$(3) \quad \frac{\mu}{r^2} + \frac{\exists\lambda\mu h_2^2}{c^2 r^4} + \frac{\nu\mu}{c^2 r^2} \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2r \frac{d^2 r}{dt^2} \right].$$

Servendoci degli apici per denotare le derivate rispetto al tempo, ricordiamo che le equazioni del moto sono nel 1° caso:

$$x'' = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial x'} \right), \quad y'' = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial y'} \right).$$

Esse possono costruirsi senza difficoltà, partendo dalla (1), alla quale, valendoci delle espressioni:

$$H = xy' - x'y = r^2 \varphi' = r v_n, \quad K = xx' + yy' = rr',$$

potremo anche dare la forma:

$$(4) \quad U = -\frac{\mu}{r} - \frac{\alpha\mu H^2}{c^2 r^3} - \frac{\beta\mu K^2}{c^2 r^3},$$

(7) Per $\lambda = 1$ e $\nu = 0$ si ricade nella forza considerata dall'EISENHART.

e da esse con metodo ben noto si ottengono facilmente le due relazioni:

$$\begin{aligned} x''y - xy'' &= -H = -\frac{2\alpha\mu H\gamma'}{c^2\gamma^2} + \frac{2\alpha\mu H}{c^2\gamma} \\ x''x' + y''y' &= \left(\frac{\mu}{\gamma}\right)' - \left(\frac{\alpha\mu H^2}{c^2\gamma^3}\right)' + \frac{3\beta\mu K^2\gamma'}{c^2\gamma^4} - \frac{2\beta\mu K'\gamma'}{c^2\gamma^2}. \end{aligned}$$

Nella seconda possiamo ora sostituire a K e K' le loro espressioni $K = r\gamma'$, $K' = \gamma'^2 + r\gamma''$. Allora le due precedenti relazioni risultano integrabili e ci danno i due integrali primi:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} H\left(1 + \frac{2\alpha\mu}{c^2\gamma}\right) &= h_1 \\ r'^2 + r^2\varphi'^2 &= \frac{2\mu}{\gamma} - \frac{2\alpha\mu H^2}{c^2\gamma^3} - \frac{2\beta\mu\gamma'^2}{c^2\gamma} + l_1, \end{aligned} \right.$$

essendo h_1, l_1 le due costanti arbitrarie, dei quali il 2° rappresenta l'integrale delle forze vive ed il 1° quello che sostituisce l'integrale delle aree.

Nella seconda modificazione le equazioni del moto si costruiscono subito, e da esse si ottiene l'integrale delle forze vive e anche quello delle aree, che del resto è già stato considerato. Questi due integrali sono:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} r^2\varphi' &= h_2 \\ r'^2 + r^2\varphi'^2 &= \frac{2\mu}{\gamma} + \frac{2\lambda\mu h_2^2}{c^2\gamma^3} + \frac{2\nu\mu\gamma'^2}{c^2\gamma} + l_2, \end{aligned} \right.$$

essendo h_2, l_2 le due costanti arbitrarie.

Tanto nelle (5) quanto nelle (6) si può fare l'eliminazione di t , e si ottiene nei due casi l'equazione differenziale della traiettoria, la quale, se ci riferiamo al nostro sistema planetario, supponendo quindi che M sia la massa del Sole, risulta vicinissima nelle due modificazioni, tanto per il moto dei pianeti, quanto per quello dei raggi luminosi, alla corrispondente traiettoria newtoniana, purché ai parametri $\alpha, \beta; \lambda, \nu$ si attribuiscono dei valori relativamente piccoli, il che appunto avremo occasione di fare.

Nel caso del moto planetario possiamo esprimere le costanti d'integrazione $h_1, l_1; h_2, l_2$ in funzione della distanza perielica r_1 e di quella afelica r_2 , e poi sostituire le espressioni trovate nell'equazione della traiettoria. Ma possiamo procedere più speditamente, ponendo:

$$u = \frac{r_1}{r}, \quad \varepsilon = \frac{2\mu}{c^2 r_1},$$

e poi eliminando t , tanto dalle (5) quanto dalle (6). Dalle (5) avremo:

$$(7) \quad (1 + \beta\epsilon u) \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = (1 + \alpha\epsilon u) \left[-u^2 \left(1 - \frac{\alpha\epsilon^2 c^2 r_1^2}{h_1^2} \right) + \frac{u\epsilon r_1^2}{h_1^2} (c^2 + \alpha l_1) + \frac{l_1 r_1^2}{h_1^2} \right]$$

e dalle (6):

$$(8) \quad (1 - \nu\epsilon u) \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \lambda\epsilon u^3 - u^2 + \frac{c^2 r_1^2 \epsilon u}{h_2^2} + \frac{l_2 r_1^2}{h_2^2}.$$

L'eliminazione di h_1 e l_1 dalla (7) e di h_2 e l_2 dalla (8) può farsi osservando che, quando r assume il valore minimo r_1 e quello massimo r_2 , si deve avere $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ e quindi anche $\frac{du}{d\varphi} = 0$. Perciò i secondi membri della (7) e della (8) devono annullarsi per $u = 1$ e per $u = \frac{r_1}{r_2} = q < 1$. Quello della (7) contiene un fattore di 1° grado in u e uno di 2° grado; ma, essendo ϵ un numero piccolissimo, il fattore di 1° grado non può annullarsi che per un valore grandissimo di u , se diamo ad α , come appunto faremo, un valore relativamente piccolo. Sarà quindi il fattore di 2° grado che dovrà possedere le due radici $u = 1$ e $u = q$. In quanto al 2° membro della (8), notiamo che esso è un polinomio di 3° grado in u , che, dovendo annullarsi per $u = 1$ e $u = q$, dovrà possedere una terza radice reale, che sarà espressa da $\frac{1}{\lambda\epsilon} - 1 - q$, e che risulterà grandissima, se daremo a λ un valore relativamente piccolo. Queste osservazioni ci permettono di scrivere come segue le equazioni (7) e (8) della traiettoria:

$$(9) \quad (1 - \beta\epsilon u) \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \left(1 - \frac{\alpha\epsilon^2 c^2 r_1^2}{h_1^2} \right) (1 + \alpha\epsilon u)(1 - u)(u - q)$$

$$(10) \quad (1 - \nu\epsilon u) \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = (1 - u)(u - q)(1 - \lambda\epsilon - \lambda\epsilon q - \lambda\epsilon u)$$

e di determinare i valori di $h_1, l_1; h_2, l_2$ in funzione di r_1, r_2 eseguendo i prodotti nei secondi membri della (9) e della (10) ed eguagliando i coefficienti delle potenze di u coi corrispondenti dei secondi membri della (7) e della (8). Questi valori sono:

$$h_1^2 = \frac{\epsilon c^2 r_1^2}{1 + q + \alpha\epsilon q} + \alpha\epsilon^2 c^2 r_1^2, \quad l_1 = -\frac{q\epsilon c^2}{1 + q + \alpha\epsilon q}$$

$$h_2^2 = \frac{\epsilon c^2 r_1^2}{1 + q - \lambda\epsilon(1 + q + q^2)}, \quad l_2 = -q\epsilon c^2 \frac{1 - \lambda\epsilon(1 + q)}{1 + q - \lambda\epsilon(1 + q + q^2)}$$

e ci possiamo servire di quello di h_1^2 per sostituirlo nel fattore costante del 2° membro della (9), ove l'eliminazione non è stata ancora fatta. La (9) si trasforma così nella:

$$(11) \quad (1 + \beta \varepsilon u) \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{(1 + \alpha \varepsilon u)(1 - u)(u - q)}{1 + \alpha \varepsilon(1 + q + \alpha \varepsilon q)}.$$

Per $\alpha, \beta; \lambda, \nu$ relativamente piccoli le equazioni differenziali (11) e (10) definiscono delle curve, le quali, quando si escludano da esse i rami a distanza piccolissima dall'origine rappresentano la traiettoria di P secondo le due modificazioni proposte, la quale si avvicina tanto più alla newtoniana, quanto più piccoli si prendono i valori dei parametri.

Volendo dalle (11) e (10) determinare lo spostamento del perielio di P , conviene invertirne la forma, prendendo u come variabile indipendente, e considerare gl'integrali definiti:

$$Q_1 = \int_q^1 (1 + \beta \varepsilon u)^{\frac{1}{2}} [1 + \alpha \varepsilon(1 + q + \alpha \varepsilon q)]^{\frac{1}{2}} (1 + \alpha \varepsilon u)^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{(1-u)(u-q)}}$$

$$Q_2 = \int_q^1 (1 - \nu \varepsilon u)^{\frac{1}{2}} [1 - \lambda \varepsilon(1 + q + u)]^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{(1-u)(u-q)}},$$

e in essi effettuare un cambiamento di variabile, ponendo:

$$u = \frac{1+q}{2} - \frac{1-q}{2} \cos \omega,$$

e facendo variare ω da 0 a π per avere il percorso di variabilità di u da q ad 1. Risultando in tal caso:

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u)(u-q)}} = d\omega$$

avremo:

$$Q_1 = \int_0^\pi (1 + \beta \varepsilon u)^{\frac{1}{2}} [1 + \alpha \varepsilon(1 + q + \alpha \varepsilon q)]^{\frac{1}{2}} (1 + \alpha \varepsilon u)^{-\frac{1}{2}} d\omega$$

$$Q_2 = \int_0^\pi (1 - \nu \varepsilon u)^{\frac{1}{2}} [1 - \lambda \varepsilon(1 + q + u)]^{-\frac{1}{2}} d\omega.$$

In questi due integrali si trovano delle potenze frazionarie di espressioni della forma $1 + \varepsilon A$ con $A^2 < 1$, le quali possono svilupparsi in serie bino-

miali, potendosi poi anche eseguire la moltiplicazione delle serie. Tutto ciò è lecito ed anzi, essendo ε un numero piccolissimo, possiamo negli sviluppi tralasciare le potenze di ε superiori alla prima, perchè trascurabili. Abbiamo allora:

$$Q_1 = \int_0^\pi \left(1 + \frac{\alpha\varepsilon}{2}(1+q) + \frac{\beta-\alpha}{2}\varepsilon u \right) d\omega, \quad Q_2 = \int_0^\pi \left(1 + \frac{\lambda\varepsilon}{2}(1+q) + \frac{\lambda-\nu}{2}\varepsilon u \right) d\omega,$$

e sostituendo ad u la sua espressione in funzione di ω si ottiene:

$$Q_1 = \int_0^\pi \left[1 + \frac{\alpha+\beta}{4}(1+q)\varepsilon + \frac{\alpha-\beta}{4}(1-q)\varepsilon \cos \omega \right] d\omega = \pi \left[1 + \frac{\alpha+\beta}{4}(1+q)\varepsilon \right]$$

$$Q_2 = \int_0^\pi \left[1 + \frac{3\lambda-\nu}{4}(1+q)\varepsilon - \frac{\lambda-\nu}{4}(1-q)\varepsilon \cos \omega \right] d\omega = \pi \left[1 + \frac{3\lambda-\nu}{4}(1+q)\varepsilon \right].$$

Finalmente, denotando con e l'eccentricità della traiettoria considerata come un'ellisse, abbiamo:

$$q = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1-e}{1+e} \quad \text{e quindi} \quad 1+q = \frac{2}{1+e}.$$

Avremo quindi:

$$Q_1 = \pi \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2(1+e)}\varepsilon \right), \quad Q_2 = \pi \left(1 + \frac{3\lambda-\nu}{2(1+e)}\varepsilon \right),$$

e i due spostamenti Σ_1, Σ_2 del perielio saranno:

$$\Sigma_1 = 2Q_1 - 2\pi = \frac{\alpha+\beta}{1+e}\varepsilon\pi, \quad \Sigma_2 = 2Q_2 - 2\pi = \frac{3\lambda-\nu}{1+e}\varepsilon\pi.$$

Nel caso dei raggi luminosi l'eliminazione di $h_1, l_1; h_2, l_2$ dalle (7) e (8) non può più effettuarsi come precedentemente, perchè $r_2 = \infty$, ma i valori di queste costanti si possono determinare direttamente dagli integrali delle forze vive, osservando che per $r = \infty$ la velocità V di P deve essere uguale a c , il che ci dà $l_1 = l_2 = c^2$, nel mentre che per $r = r_1$, dovendo essere $\frac{dr}{dt} = 0$, essa si riduce alla sola componente $V_n = r \frac{d\varphi}{dt}$. Otteniamo così dagli integrali delle forze vive due relazioni che ci permettono di determinare anche i valori di h_1^2 e h_2^2 . Questi valori quando ci si serva ancora

delle precedenti espressioni di u ed ε , risultano dati da:

$$h_1^2 = c^2 r_1^2 (1 + \varepsilon)(1 + \alpha\varepsilon), \quad h_2^2 = c^2 r_1^2 \frac{1 + \varepsilon}{1 - \lambda\varepsilon},$$

e sostituiti nelle (7) e (8), ci danno per la traiettoria le equazioni differenziali:

$$(12) \quad (1 + \beta\varepsilon u) \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{(1 + \alpha\varepsilon u)(1 - u)[1 + u + \varepsilon(1 + \alpha)u]}{(1 + \varepsilon)(1 + \alpha\varepsilon)},$$

$$(13) \quad (1 - \nu\varepsilon u) \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = (1 - u) \left[\frac{1 - \lambda\varepsilon}{1 + \varepsilon} + (1 - \lambda\varepsilon)u - \lambda\varepsilon u^2 \right],$$

dalle quali, procedendo come per il moto planetario, possiamo passare ai due integrali definiti:

$$R_1 = \int_0^1 (1 + \beta\varepsilon u)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} (1 + \alpha\varepsilon)^{\frac{1}{2}} (1 + \alpha\varepsilon u)^{-\frac{1}{2}} (1 - u)^{-\frac{1}{2}} [1 + u + \varepsilon(1 + \alpha)u]^{-\frac{1}{2}} du =$$

$$= \int_0^1 (1 + \beta\varepsilon u)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} (1 + \alpha\varepsilon)^{\frac{1}{2}} (1 + \alpha\varepsilon u)^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\varepsilon(1 + \alpha)u}{1 + u} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$R_2 = \int_0^1 (1 - \nu\varepsilon u)^{\frac{1}{2}} (1 - u)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1 - \lambda\varepsilon}{1 + \varepsilon} + (1 - \lambda\varepsilon)u - \lambda\varepsilon u^2 \right]^{-\frac{1}{2}} du =$$

$$= \int_0^1 (1 - \nu\varepsilon u)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \lambda\varepsilon \left(1 + \frac{u^2}{\frac{1}{1 + \varepsilon} + u} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{(1 - u) \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} + u \right)}}.$$

In R_1 poniamo $u = \sin \omega$, facendo variare ω da 0 a $\frac{\pi}{2}$, e in R_2

$$u = \frac{\frac{\varepsilon}{2} + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \omega}{1 + \varepsilon},$$

facendo variare ω da $-\omega_0 = -\arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon}\right)$ a $\frac{\pi}{2}$, ed avremo:

$$\text{nel 1° caso } \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = d\omega \quad \text{e nel 2° } \frac{du}{\sqrt{(1 - u) \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} + u \right)}} = d\omega,$$

e quindi per gl'integrali:

$$R_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \beta \varepsilon u)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} (1 + \alpha \varepsilon)^{\frac{1}{2}} (1 + \alpha \varepsilon u)^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\varepsilon(1 + \alpha)u}{1 + u} \right]^{-\frac{1}{2}} d\omega$$

$$R_2 = \int_{-\omega_0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \nu \varepsilon u)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \lambda \varepsilon \left(1 + \frac{u^2}{1 + \varepsilon + u} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} d\omega.$$

Possiamo ora effettuare gli sviluppi come precedentemente, tralasciando sempre i termini con potenze di ε superiori alla prima. Abbiamo in tal caso:

$$\begin{aligned} R_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{2} \varepsilon u + \frac{1 + \alpha}{2} \varepsilon - \frac{1 + \alpha}{2} \varepsilon \frac{u}{1 + u} \right) d\omega = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{2} \varepsilon \sin \omega + \frac{1 + \alpha}{2} \varepsilon \frac{1}{1 + \sin \omega} \right) d\omega = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \omega d\omega + \frac{1 + \alpha}{2} \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{1 + \sin \omega} = \frac{\pi}{2} + \frac{1 + \beta}{2} \varepsilon \\ R_2 &= \int_{-\omega_0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\lambda \varepsilon}{2} - \frac{\nu \varepsilon u}{2} + \frac{\lambda \varepsilon}{2} \frac{u^2}{1 + \varepsilon + u} \right) d\omega = \\ &= \int_{-\omega_0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\lambda \varepsilon}{2} + \frac{\lambda - \nu}{2} \varepsilon u - \frac{\lambda \varepsilon}{2(1 + \varepsilon)} + \frac{\lambda \varepsilon}{2(1 + \varepsilon)^2} \frac{1}{1 + \varepsilon + u} \right) d\omega, \end{aligned}$$

e, tenendo conto dell'espressione di u in funzione di ω , dalla quale risulta pure:

$$1 + \varepsilon + u = \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} (1 + \sin \omega),$$

si può scrivere, quando si sopprimano vari termini o fattori che danno origine a prodotti con ε^2 come moltiplicatore:

$$R_2 = \int_{-\omega_0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\lambda - \nu}{2} \varepsilon \operatorname{sen} \omega \right) d\omega + \frac{\lambda \varepsilon}{2} \int_{-\omega_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{1 + \operatorname{sen} \omega} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \omega_0 + \frac{\lambda - \nu}{2} \cos \omega_0 + \frac{\lambda \varepsilon}{2} \operatorname{tang} \left(\frac{\omega_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Finalmente, osservando che per la piccolezza di ε si può prendere

$$\omega_0 = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} \right) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \cos \omega_0 = 1,$$

$$\operatorname{tang} \left(\frac{\omega_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 + \operatorname{tang} \frac{\omega_0}{2}}{1 - \operatorname{tang} \frac{\omega_0}{2}} = \frac{1 + \frac{\varepsilon}{4}}{1 - \frac{\varepsilon}{4}} = 1,$$

abbiamo:

$$R_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\lambda - \nu}{2} \varepsilon + \frac{\lambda \varepsilon}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2} (1 + 2\lambda - \nu).$$

Così le deflessioni Δ_1 , Δ_2 dei raggi luminosi risultano espresse da

$$\Delta_1 = 2R_1 - \pi = (1 + \beta)\varepsilon, \quad \Delta_2 = 2R_2 - \pi = (1 + 2\lambda - \nu)\varepsilon.$$

Riassumendo abbiamo:

$$\Sigma_1 = \frac{\alpha + \beta}{1 + e} \varepsilon \pi, \quad \Delta_1 = (1 + \beta)\varepsilon; \quad \Sigma_2 = \frac{3\lambda - \nu}{1 + e} \varepsilon \pi, \quad \Delta_2 = (1 + 2\lambda - \nu)\varepsilon,$$

e per la Relatività:

$$\Sigma = \frac{3\varepsilon\pi}{1 + e}, \quad \Delta = 2\varepsilon.$$

Volendo quindi che le nostre modificazioni alla legge newtoniana coincidano nei risultati finali colla Relatività, dovremo fare

$$\alpha + \beta = 3, \quad 1 + \beta = 2; \quad 3\lambda - \nu = 3, \quad 2\lambda - \nu = 1,$$

ossia prendere

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1; \quad \lambda = 2, \quad \nu = 3.$$

Firenze, 31 luglio 1923.

La costruzione geometrica di Darboux delle superficie applicabili sul paraboloido rotondo

Nota di LUIGI BIANCHI ⁽¹⁾

§ 1. Superficie evolventi ed evolute.

Dopo la scoperta fondamentale di MONGE della esistenza, sopra una superficie qualunque Σ , del sistema doppio ortogonale delle linee di curvatura, si presentava lo studio delle due superficie S_1, S_2 che formano le due *falde dell'evoluta* di Σ , ed hanno per tangenti comuni le normali della *evolvente* Σ . Se M è il piede della normale generica alla evolvente Σ , ed M_1, M_2 i due punti ove questa normale tocca rispettivamente S_1, S_2 , i valori (algebrici) dei due segmenti

$$\overline{M_1M} = r_1, \quad \overline{M_2M} = r_2$$

danno i due *raggi principali di curvatura* della Σ nel punto M .

Domandiamoci ora :

Può una delle due falde dell'evoluta, p. es. S_1 , essere data ad arbitrio?

Supposto che S_1 sia una falda dell'evoluta di una conveniente superficie Σ (indi anche delle superficie parallele a Σ), prendiamo sulla S_1 a linee coordinate $v = \text{cost.}$ quelle inviluppate dalle normali a Σ , ed a linee coordinate $u = \text{cost.}$ le loro traiettorie ortogonali. Denotando con x_1, y_1, z_1 le coordinate del punto M_1 , che descrive S_1 , siano

$$x_1 = x_1(u, v), \quad y_1 = y_1(u, v), \quad z_1 = z_1(u, v)$$

le equazioni parametriche di S_1 , e sia

$$ds_1^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

⁽¹⁾ Occasione a questo scritto, di scopo puramente espositivo, è stata una conferenza tenuta dall'A. nel Seminario Matematico di Roma. Qui l'esposizione è resa più completa col premettere i teoremi fondamentali di WEINGARTEN.

il quadrato del suo elemento lineare, dove sarà

$$(1) \quad S\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 = E, \quad S\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 = G, \quad S\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0 \quad (1).$$

Le tangenti alle linee $v = \text{cost.}$ sono, per ipotesi, le normali delle evolventi Σ , ed i loro coseni di direzione X, Y, Z , sono dati da

$$(2) \quad X = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y_1}{\partial u}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z_1}{\partial u}.$$

Per le coordinate x, y, z del punto M ove la detta tangente incontra normalmente una Σ avremo

$$(3) \quad x = x_1 + tX, \quad y = y_1 + tY, \quad z = z_1 + tZ,$$

dove $t = t(u, v)$ dovrà essere una tale funzione di u, v che, per qualunque spostamento sopra Σ , sia soddisfatta la condizione di normalità

$$SXdx = 0,$$

che, per le (3), si traduce nell'altra

$$(4) \quad dt = -SXdx_1 = -(Adu + Bdv),$$

avendo posto

$$A = SX \frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad B = SX \frac{\partial x_1}{\partial v}.$$

Dalle (1), (2) si calcola subito

$$A = \sqrt{E}, \quad B = 0,$$

e la condizione d'integrabilità $\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial B}{\partial u}$ porge subito, come necessaria e suffi-

ciente, la condizione $\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0$. Deve dunque essere E funzione di u soltanto; ed allora, cangiando il parametro u , possiamo fare $E = 1$, onde il ds_1^2 assume la forma geodetica

$$(5) \quad ds_1^2 = du^2 + Gdv^2,$$

e dalla (4), integrando, abbiamo

$$t = c - u \quad (c \text{ costante arbitraria}).$$

(1) Il segno sommatorio S indica la somma di tre termini simili rispetto agli assi.

Abbiamo così stabilita la ben nota proposizione :

Le linee involupate sopra una falda S_1 dell'evoluta dalle normali della evolvente sono linee geodetiche della S_1 , ed insieme la proposizione inversa :

Se si traccia, sopra una qualunque superficie S_1 , un sistema arbitrario di ∞^1 linee geodetiche (non rettilinee), le ∞^2 loro tangenti sono le normali di un sistema di superficie parallele evolventi Σ .

Queste ∞^1 evolventi avranno le equazioni parametriche :

$$(6) \quad x = x_1 + (c - u)X, \quad y = y_1 + (c - u)Y, \quad z = z_1 + (c - u)Z$$

$$\left(X = \frac{\partial x_1}{\partial u}, \text{ ecc.} \right).$$

Cerchiamo ora, sulla stessa normale M_1M alle Σ , il secondo centro di curvatura $M_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$, cioè l'ulteriore punto in cui questa normale a Σ riesce tangente alla seconda falda S_2 della evoluta. Avremo ancora

$$(7) \quad x_2 = x_1 + \tau X, \quad y_2 = y_1 + \tau Y, \quad z_2 = z_1 + \tau Z,$$

dove l'incognita $\tau = \tau(u, v)$ (diversa da zero) sarà da determinarsi dalla condizione che si annulli il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u}, & \frac{\partial y_2}{\partial u}, & \frac{\partial z_2}{\partial u} \\ \frac{\partial x_2}{\partial v}, & \frac{\partial y_2}{\partial v}, & \frac{\partial z_2}{\partial v} \\ X, & Y, & Z \end{vmatrix},$$

essendo che le tre direzioni coi coseni proporzionali agli elementi delle tre linee debbono essere complanari. Ma, secondo le (7), avendosi $X = \frac{\partial x_1}{\partial u}$, l'annullarsi del determinante equivale (supposto $\tau \neq 0$) all'annullarsi dell'altro

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \tau \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial y_1}{\partial v} + \tau \frac{\partial^2 y_1}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial z_1}{\partial v} + \tau \frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u}, & \frac{\partial y_1}{\partial u}, & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y_1}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 z_1}{\partial u^2} \end{vmatrix}.$$

Le due ultime linee di questo determinante non sono proporzionali (chè altrimenti le geodetiche $v = \text{cost.}$ di S_1 sarebbero rettilinee contro l'ipotesi); sarà dunque la prima linea una combinazione lineare delle seconde due.

Ciò premesso, osservando le identità :

$$S \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad S \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = -S \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} = 0,$$

si vede che sussisterà anche l'altra

$$S \frac{\partial x_1}{\partial v} \left(\frac{\partial x_1}{\partial v} + \tau \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} \right) = 0,$$

ossia per le (1)

$$G + \frac{\tau}{2} \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

Di qui ricaviamo pel valore cercato di τ

$$\tau = -\frac{2G}{\frac{\partial G}{\partial u}} \quad (1)$$

che sostituito nelle (7) darà la seconda falda S_2 della evoluta, alla quale si dà anche il nome di *superficie complementare* della S_1 (rispetto al dato sistema di geodetiche $v = \text{cost.}$).

Se confrontiamo poi le (6), (7) colle formole che definiscono i raggi principali r_1, r_2 di curvatura delle evolventi Σ , e cioè :

$$x_1 = x - r_1 X, \quad x_2 = x - r_2 X, \text{ ecc.,}$$

ne deduciamo pei valori di r_1, r_2 :

$$(8) \quad r_1 = c - u, \quad r_2 = c - u + \frac{2G}{\frac{\partial G}{\partial u}}.$$

§ 2. I due teoremi di Weingarten sulle superficie W .

Supponiamo ora che la superficie evolvente Σ debba avere i raggi principali di curvatura r_1, r_2 funzioni l'uno dell'altro, cioè la Σ appartenga a quella classe di superficie che, dal nome di WEINGARTEN, furono dette *super-*

(1) Se fosse $\frac{\partial G}{\partial u} = 0$, risulterebbe $\tau = \infty$. Ma allora la superficie S_1 sarebbe sviluppabile, e precisamente le geodetiche $v = \text{cost.}$ sarebbero trasformate di un sistema di rette parallele nel piano.

ficie W . Le formole (8) provano che la condizione necessaria e sufficiente sarà che per la falda S_1 dell'evoluta riesca $\frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial u}$ funzione di u soltanto, onde avremo

$$\sqrt{G} = r(u) \cdot V,$$

dove $r(u)$ è funzione di u , e V funzione di v soltanto. Disponendo del parametro v , si può fare senz'altro $V=1$, e l'elemento lineare di S_1 prende la forma

$$ds_1^2 = du^2 + r^2(u)dv^2,$$

che è caratteristica delle superficie di rotazione, riferite ai paralleli $u = \text{cost.}$ ed ai meridiani $v = \text{cost.}$ Dalle (8) si deduce ora

$$\frac{dr_1}{r_1 - r_2} = \frac{1}{r} \frac{dr}{du} du,$$

ed integrando

$$\log r = \int \frac{dr_1}{r_1 - r_2}, \quad \text{o} \quad r = e^{\int \frac{dr_1}{r_1 - r_2}}.$$

Per l'elemento lineare ds_1 della prima falda S_1 dell'evoluta della superficie W troviamo così la formula fondamentale di WEINGARTEN :

$$(9) \quad ds_1^2 = dr_1^2 + e^{2 \int \frac{dr_1}{r_1 - r_2}} dv^2,$$

e per la seconda falda S_2 vale naturalmente la formula analoga

$$(9^*) \quad ds_2^2 = dr_2^2 + e^{2 \int \frac{dr_2}{r_2 - r_1}} dv^2.$$

È da notarsi che queste formole (9), (9*) restano invariate per tutte le superficie W i cui raggi principali di curvatura siano legati da una relazione fissa :

$$\varphi(r_1, r_2) = 0.$$

Abbiamo così stabilito il primo dei celebri teoremi di WEINGARTEN :

I) *Ciascuna falda dell'evoluta di una superficie W è applicabile sopra una superficie di rotazione, la cui forma dipende unicamente dalla relazione $\varphi(r_1, r_2) = 0$, che lega i raggi principali di curvatura della evolvente.*

Ed insieme resta dimostrato anche il teorema inverso, o secondo teorema di WEINGARTEN:

II) *Qualunque superficie S_1 applicabile sopra una superficie di rotazione (fatta eccezione dal caso in cui sulla S_1 le deformate dei meridiani siano linee rette) ⁽¹⁾ può riguardarsi come una falda dell'evoluta di una superficie W , le cui normali sono le tangenti alle deformate dei meridiani sulla S_1 .*

§ 3. Le due classi particolari di superficie W .

Colla scoperta dei due teoremi I), II), WEINGARTEN veniva ad identificare la ricerca delle superficie applicabili sopra superficie di rotazione colla ricerca delle superficie W .

Con un'ulteriore trasformazione del problema WEINGARTEN ridusse ancora tale ricerca ad un'altra: quella dei particolari sistemi doppi ortogonali (u, v) sulla sfera che danno al ds^2 sferico la forma caratteristica

$$(\alpha) \quad ds^2 = edu^2 + gdv^2,$$

coi coefficienti e, g funzioni l'uno dell'altro, sistemi che costituiscono l'immagine sferica delle linee di curvatura delle superficie W .

Due classi particolari di tali sistemi sferici (α) , completamente noti, poterono subito addursi da WEINGARTEN e sono:

1°) *i sistemi ortogonali isotermi con $e = g$;*

2°) *i sistemi di ellissi ed iperbole geodetiche omofocali con $\frac{1}{e} + \frac{1}{g} = 1$.*

Come superficie W corrispondenti si ottengono, nel primo caso, le *superficie d'area minima*, coi raggi di curvatura legati dalla semplice relazione

$$(A) \quad r_1 + r_2 = 0;$$

nel secondo caso invece la relazione che lega r_1, r_2 ha la forma trascendente

$$(B) \quad r_2 - r_1 = k \operatorname{sen} \left(\frac{r_1 + r_2}{k} \right) \quad (k \text{ costante}).$$

Tanto nel caso (A), quanto nel caso (B), le due falde dell'evoluta sono applicabili sopra una medesima superficie di rotazione, di cui si vengono quindi a conoscere *tutte* le deformate per flessione.

⁽¹⁾ La classe di superficie così esclusa si dimostra coincidere con quella delle rigate luogo delle binormali di una curva a torsione costante.

In riguardo alle superficie della seconda classe (B), i risultati analitici di WEINGARTEN vennero completati nel modo geometrico più espressivo da DARBOUX colla elegante costruzione di cui tratta la presente nota.

Per arrivare nel modo più semplice alla costruzione di DARBOUX, conviene legarla a quella data da SOPHUS LIE per le superficie d'area minima, o della classe (A), quale equivalente geometrico delle formule, complicate d'immaginarii, colle quali MONGE aveva completamente integrata l'equazione differenziale delle superficie d'area minima. Il LIE osservò che le formule di MONGE si interpretavano nel teorema:

Le superficie d'area minima sono tutte e sole le superficie di traslazione con curve generatrici di lunghezza nulla (a tangenti isotrope).

Che ogni superficie di traslazione, con curve generatrici a tangenti isotrope, sia una superficie d'area minima si rileva subito dalle considerazioni seguenti: In ogni superficie di traslazione le tangenti alle curve generatrici per ogni punto sono coniugate nel senso di DUPIN, e dalle direzioni asintotiche sono quindi divise armonicamente. Nel caso particolare in considerazione, quelle due tangenti sono le rette isotrope, e le due tangenti asintotiche sono perciò ortogonali; l'indicatrice di DUPIN è un'iperbola equilatera e la superficie è quindi ad area minima.

Inversamente per ogni superficie d'area minima le linee di lunghezza nulla (α, β) formano un sistema coniugato, e nella corrispondente equazione di LAPLACE

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = a \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \theta}{\partial \beta}$$

di cui sono soluzioni x, y, z risulta $a = b = 0$ (⁴), e la superficie è quindi di traslazione.

Ora osserviamo che le linee di lunghezza nulla di una (qualunque) superficie, come linee geodetiche, hanno il piano osculatore che passa per la normale alla superficie.

Si può dunque dire che nelle superficie S d'area minima, riguardate quali superficie di traslazione, i due piani osculatori delle curve generatrici, che

(⁴) Dalla equazione

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} = a \frac{\partial x}{\partial \alpha} + b \frac{\partial x}{\partial \beta}$$

colle due analoghe per y, z , avendosi $S \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 = 0$, $S \left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 = 0$, indi $S \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$, $S \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$, risulta subito in effetto $a = b = 0$.

passano per ogni punto di S , s'incontrano secondo la normale alla superficie. Ed allora formuliamo la questione seguente:

Esistono altre classi di superficie di traslazione per le quali avvenga che le rette uscenti dai punti della superficie, e che sono le intersezioni dei piani osculatori delle due curve generatrici pel punto, formino una congruenza normale?

La risposta affermativa conduce appunto alla costruzione di DARBOUX per la seconda classe (B) di superficie di WEINGARTEN.

§ 4. La costruzione di Darboux.

Scriviamo le equazioni parametriche di una superficie S_0 di traslazione sotto la forma

$$(10) \quad x_0 = f_1(u) + \varphi_1(v), \quad y_0 = f_2(u) + \varphi_2(v), \quad z_0 = f_3(u) + \varphi_3(v),$$

e supponiamo per semplicità che le curve generatrici $C \equiv (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$, $C_1 \equiv (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v))$ escano dall'origine O corrispondente ad $u=0$, $v=0$. Essendo ora escluso il caso che le curve C , C_1 siano di lunghezza nulla, prendiamo per parametri u , v rispettivamente gli archi di C , C_1 , misurati a partire da O . Ritenendo poi le consuete notazioni, indichiamo con

$$\begin{array}{lll} \alpha, \beta, \gamma & \text{i coseni di direzione della tangente alla } C, \\ \xi, \eta, \zeta & \text{»} & \text{»} & \text{della normale principale,} \\ \lambda, \mu, \nu & \text{»} & \text{»} & \text{quelli della binormale,} \end{array}$$

infine con $\frac{1}{T}$ la torsione di C ; tutti questi elementi saranno funzioni della sola u . Notazioni analoghe, affette dall'indice 1, usiamo per gli elementi corrispondenti della curva C_1 , che saranno funzioni di v . Per i calcoli che seguono conviene tener presente le proprietà dei due determinanti ortogonali

$$\left| \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{array} \right| \quad (1)$$

(1) L'uno e l'altro dei due determinanti è $= +1$, e ciascun elemento eguaglia il proprio complemento algebrico.

insieme alle formole (del gruppo di FRENET):

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{d\lambda}{du} = \frac{\xi}{T}, & \frac{d\mu}{du} = \frac{\eta}{T}, & \frac{dv}{du} = \frac{\zeta}{T} \\ \frac{d\lambda_1}{dv} = \frac{\xi_1}{T_1}, & \frac{d\mu_1}{dv} = \frac{\eta_1}{T_1}, & \frac{dv_1}{dv} = \frac{\zeta_1}{T_1}. \end{cases}$$

Indicando con Ω l'angolo che formano nel punto $P_0 \equiv (u, v)$ i piani osculatori delle due curve generatrici che vi passano, avremo

$$(12) \quad \cos \Omega = S\lambda\lambda_1,$$

formula che, derivata rapporto ad u, v dà per le (11)

$$S\xi\lambda_1 = -T \operatorname{sen} \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial u}, \quad S\lambda\xi_1 = -T_1 \operatorname{sen} \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial v}.$$

Consideriamo ora la retta r intersezione dei due detti piani osculatori; essa avrà i coseni di direzione X, Y, Z dati da

$$(14) \quad X = \frac{1}{\operatorname{sen} \Omega} \begin{vmatrix} \mu_1 & v_1 \\ \mu & v \end{vmatrix}, \quad Y = \frac{1}{\operatorname{sen} \Omega} \begin{vmatrix} v_1 & \lambda_1 \\ v & \lambda \end{vmatrix}, \quad Z = \frac{1}{\operatorname{sen} \Omega} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda & \mu \end{vmatrix},$$

e le equazioni parametriche

$$(15) \quad x = x_0 + tX, \quad y = y_0 + tY, \quad z = z_0 + tZ,$$

dove t indica l'ascissa su r , misurata a partire da P_0 . La congruenza di queste rette r sarà una congruenza normale, se si può prendere nelle (15) per t una tale funzione di u, v da soddisfare alla equazione

$$SXdx = 0.$$

Come al n.° 1 se ne deduce

$$dt = -SXdx_0 = -(Adu + Bdv),$$

avendo posto

$$A = SX \frac{\partial x_0}{\partial u}, \quad B = SX \frac{\partial x_0}{\partial v}.$$

Ma dalle (10) abbiamo

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = \alpha, \quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = \alpha_1, \text{ ecc.,}$$

indi

$$A = \frac{1}{\operatorname{sen} \Omega} S\alpha \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix} = \frac{1}{\operatorname{sen} \Omega} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$$

$$B = \frac{1}{\operatorname{sen} \Omega} S\alpha_1 \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix} = -\frac{1}{\operatorname{sen} \Omega} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix}.$$

Ricorrendo alle proprietà dei determinanti ortogonali, ne risulta

$$A = \frac{1}{\operatorname{sen} \Omega} S\xi\lambda_1, \quad B = -\frac{1}{\operatorname{sen} \Omega} S\lambda\xi_1,$$

cioè per le (13)

$$A = -T \frac{\partial \Omega}{\partial u}, \quad B = T_1 \frac{\partial \Omega}{\partial v}.$$

La condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial u} = 0$$

diventa

$$(T + T_1) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} = 0,$$

onde deve annullarsi o il primo fattore $T + T_1$, o il secondo $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}$. Ma questo secondo caso è eccezionale e non dà luogo ad alcuna conseguenza interessante. L'annullarsi del primo, essendo T funzione della sola u , e T_1 della v , avviene soltanto quando le due torsioni $\frac{1}{T}$, $\frac{1}{T_1}$ delle curve generatrici siano costanti eguali e di segno contrario, scriviamo

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{T_1} = -\frac{1}{a} \quad (a \text{ costante}).$$

Possiamo dunque enunciare questo primo risultato:

Se le due curve generatrici della superficie di traslazione S_0 hanno torsioni costanti, eguali e di segno contrario, la congruenza delle rette r intersezioni dei due piani osculatori delle curve generatrici che escono da ogni punto P_0 di S_0 è una congruenza normale.

Questa nuova classe di superficie di traslazione (e questa soltanto) ha dunque a comune colle superficie d'area minima la proprietà richiesta. È poi da notarsi che anche l'intera classe di queste nuove superficie di traslazione è nota, perchè sono note in termini finiti tutte le curve a torsione costante.

**§ 5. Le superficie ortogonali alla congruenza (*r*)
come superficie *W* della classe (B).**

Andiamo ora a ricercare le superficie Σ ortogonali alla congruenza delle rette *r*, ottenuta colla costruzione di Darboux ora indicata.

Le loro equazioni parametriche saranno date dalle (15), ove per *t* si ponga la funzione di *u*, *v* data da

$$t = - \int (Adu + Bdv) = a \int \left(\frac{\partial \Omega}{\partial u} du + \frac{\partial \Omega}{\partial v} dv \right),$$

cioè

$$t = c + a\Omega \quad (c \text{ costante arbitraria}).$$

Avremo dunque per queste superficie Σ :

$$(16) \quad x = x_0 + (c + a\Omega)X = x_0 + \frac{c + a\Omega}{\text{sen } \Omega} \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix},$$

colle formule analoghe per gli altri due assi.

Occorre ora calcolare in ogni punto $M \equiv (x, y, z)$ di Σ i due raggi principali di curvatura r_1, r_2 determinando le coordinate $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ dei due centri M_1, M_2 di curvatura, ove la retta *r* tocca rispettivamente le due falde S_1, S_2 della evoluta. Queste saranno ancora date da formule come le (15)

$$x_1 = x_0 + \tau X, \quad \text{o} \quad x_2 = x_0 + \tau X$$

dove però l'incognita τ sarà ora da determinarsi dalla condizione (cfr. n.° 1) che si annulli il determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \tau \frac{\partial X}{\partial u}, & \beta + \tau \frac{\partial Y}{\partial u}, & \gamma + \tau \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \alpha_1 + \tau \frac{\partial X}{\partial v}, & \beta_1 + \tau \frac{\partial Y}{\partial v}, & \gamma_1 + \tau \frac{\partial Z}{\partial v} \\ X, & Y, & Z \end{vmatrix},$$

ossia che sussistano, per convenienti moltiplicatori l, m , le formole:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = l\left(\alpha + \tau \frac{\partial X}{\partial u}\right) + m\left(\alpha_1 + \tau \frac{\partial X}{\partial v}\right) \\ Y = l\left(\beta + \tau \frac{\partial Y}{\partial v}\right) + m\left(\beta_1 + \tau \frac{\partial Y}{\partial v}\right) \\ Z = l\left(\gamma + \tau \frac{\partial Z}{\partial u}\right) + m\left(\gamma_1 + \tau \frac{\partial Z}{\partial v}\right). \end{array} \right.$$

Se queste si moltiplicano ordinatamente per λ, μ, ν e si somma, poi similmente per λ_1, μ_1, ν_1 , si ottengono due equazioni lineari omogenee in l, m , dalle quali si conclude che deve essere

$$\tau^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 \Omega, \quad \tau = \pm a \operatorname{sen} \Omega.$$

Pertanto le due falde S_1, S_2 dell'evoluta hanno le equazioni parametriche

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_0 + a \operatorname{sen} \Omega \cdot X, \quad y_1 = y_0 + a \operatorname{sen} \Omega \cdot Y, \quad z_1 = z_0 + a \operatorname{sen} \Omega \cdot Z \\ x_2 = x_0 - a \operatorname{sen} \Omega \cdot X, \quad y_2 = y_0 + a \operatorname{sen} \Omega \cdot Y, \quad z_2 = z_0 - a \operatorname{sen} \Omega \cdot Z. \end{array} \right.$$

Una prima conseguenza si ha nelle formole

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

le quali ci dicono:

La superficie S_0 di traslazione è (come nel caso delle superficie minime) la superficie media della congruenza (r).

Dalle formole precedenti, (17) e (16), si calcolano poi subito i raggi principali di curvatura delle superficie Σ ortogonali alla congruenza (r) della costruzione di DARBOUX, e si ha

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = c + a(\Omega - \operatorname{sen} \Omega) \\ r_2 = c + a(\Omega + \operatorname{sen} \Omega). \end{array} \right.$$

Come si vede, i due raggi r_1, r_2 sono funzioni l'uno dell'altro; precisamente la relazione che li lega (ove si prenda in particolare $c=0$) è la (B) n.° 3, e cioè

$$r_2 - r_1 = 2a \operatorname{sen} \left(\frac{r_1 + r_2}{2a} \right).$$

Siamo così arrivati al risultato principale:

Le superficie Σ ortogonali ai raggi della congruenza (r) ottenuta colla costruzione di Darboux sono superficie W della seconda classe (B) di Weingarten.

Non ci tratteniamo qui a dimostrare che, inversamente, questa costruzione di DARBOUX dà *tutte* le superficie W della classe (B).

La cosa però è già resa plausibile dal fatto che tali superficie W dipendono da un'equazione a derivate parziali del 2° ordine, e nella costruzione di DARBOUX restano appunto disponibili due funzioni arbitrarie, di una variabile ciascuna.

§ 6. Le deformate del paraboloide rotondo (immaginario o reale).

Veniamo in fine a ricercare su quale superficie di rotazione è applicabile l'una o l'altra falda, S_1 o S_2 , dell'evoluta. Basta per ciò applicare le formule di WEINGARTEN (9), (9*), le quali, a causa delle (18), danno qui:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} ds_1^2 &= 4a^2 \operatorname{sen}^4\left(\frac{\Omega}{2}\right) d\Omega^2 + \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\right) dv^2 \\ ds_2^2 &= 4a^2 \cos^4\left(\frac{\Omega}{2}\right) d\Omega^2 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\Omega}{2}\right) dv^2. \end{aligned} \right.$$

I due elementi lineari sono equivalenti (bastando aumentare Ω di π per passare dall'uno all'altro) e resta solo a vedere quale forma può scegliersi per la superficie comune S di rotazione su cui S_1 ed S_2 sono applicabili.

Indicando con r il raggio del parallelo nella S , e con $z = \psi(r)$ l'equazione della curva meridiana, il ds^2 della S sarà

$$ds^2 = [1 + \psi'^2(r)] dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (\theta \text{ longitudine}).$$

Identifichiamo questo ds^2 p. e. colla prima delle (19), ponendo

$$r = k \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right), \quad v = k\theta \quad (k \text{ costante}).$$

Ne risulta

$$dr^2 = \frac{k^2}{4} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\Omega}{2}\right) d\Omega^2,$$

e dal confronto:

$$1 + \psi'^2(r) = \frac{16a^2}{k^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\Omega}{2}\right) = \frac{16a^2}{k^2} \left(1 - \frac{r^2}{k^2}\right),$$

indi per l'equazione della curva meridiana

$$z = \psi(r) = \int \sqrt{\frac{16a^2}{k^2} \left(1 - \frac{r^2}{k^2}\right) - 1} \cdot dr.$$

Qui si può dare alla costante k un valore qualunque; ma si ottiene la forma più semplice di curva meridiana (se anche immaginaria) assumendo $k = 4a$, onde resta

$$z = \pm \frac{i}{4a} \int r dr = \pm \frac{ir^2}{8a}.$$

La curva meridiana è allora la parabola

$$r^2 = 8iaz,$$

avente per asse l'asse di rotazione ed il parametro p puramente immaginario $p = 4ia$.

Abbiamo così il risultato finale:

Le due falde focali S_1, S_2 della congruenza (r), ottenuta colla costruzione di Darboux, sono applicabili sul paraboloido rotondo di parametro puramente immaginario $p = 4ia$, essendo $\pm \frac{1}{a}$ le torsioni costanti delle due curve generatrici della superficie di traslazione S_0 .

E si noti ancora (cfr. n.° precedente in fine) che la costruzione di DARBOUX dà *tutte* le deformate di questo paraboloido.

Ma DARBOUX ha osservato di più che, per ottenere invece le deformate del paraboloido rotondo *reale*, basta analiticamente cangiare nei risultati precedenti a in ia . E adunque, geometricamente, se prendiamo la curva C (immaginaria) e di torsione costante $\frac{i}{a}$, e per curva C_1 la sua coniugata immaginaria, che avrà precisamente la torsione contraria $-\frac{i}{a}$, la superficie di traslazione S_0 sarà manifestamente reale, insieme alla congruenza (r) ed alle due falde focali S_1, S_2 , poichè le formule (17) che diventano ora

$$x_1 = x_0 + ia \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix}, \quad x_2 = x_0 - ia \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu & \nu \end{vmatrix}, \text{ ecc.,}$$

danno per $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ valori reali, essendo λ_1, μ_1, ν_1 le quantità coniugate di λ, μ, ν .

E le superficie reali S_1, S_2 sono così le più generali deformate del paraboloido rotondo reale.

Un teorema fondamentale relativo alla trasformazione di Peterson delle coppie di superficie isometriche.

(Di HANS JONAS, a Berlino)

Le seguenti righe sono tratte da un ampio scritto mio, già terminato alcuni anni or sono, la pubblicazione del quale venne sospesa per circostanze sfavorevoli. Qui mi limiterò a dimostrare un teorema che mi pare fondamentale, relativo alla trasformazione di PETERSON ⁽¹⁾ delle coppie di superficie isometriche, riserbando ad ulteriori occasioni lo svolgere le varie applicazioni che riguardavano non soltanto la *trasformazione biarmonica* ⁽²⁾ delle reti applicabili, ma anche quella delle reti cicliche e delle superficie corrispondenti l'una all'altra per ortogonalità d'elementi.

1. Partiamo da un'assegnata coppia $S(x, y, z)$, $\bar{S}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ di reti applicabili, vale a dire da due superficie isometriche S, \bar{S} riferite al sistema coniugato permanente (α, β) , avendosi

$$(1) \quad \Sigma dx^2 = \Sigma d\bar{x}^2 = E d\alpha^2 + 2F d\alpha d\beta + G d\beta^2$$

⁽¹⁾ BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, 2, (1903), § 240.

⁽²⁾ Mi sembra utile adottare questa denominazione pel passaggio da un sistema coniugato ad un altro, caratterizzato dall'essere i due sistemi *armonici* (secondo la terminologia di GUICHARD) rispetto alla congruenza formata dalle intersezioni dei piani tangenti, cioè dall'incontrarsi delle tangenti nei fuochi della detta congruenza le cui sviluppabili inoltre corrispondono alle curve conigate. Questa operazione, introdotta sotto il nome di *trasformazione A* di un'equazione di LAPLACE e delle sue soluzioni, è stato l'oggetto di una mia Nota comparsa nel 1915 (Berl. Math. Gesellschaft Ber. 14, 96), ove giunsi a stabilire un teorema di permutabilità pei sistemi coniugati, dal quale discendono particolari tali teoremi dovuti al BIANCHI. Essa venne anche studiata dal sgr. EISENHART, il quale dopo averla considerata in diversi casi speciali, se ne occupò dal punto di vista generale in una Memoria del 1917 (Amer. Math. Soc. Trans. 18, 97), indicandola col simbolo *T*. È da notarsi che nel caso attuale delle reti applicabili la trasformazione biarmonica risulta dal comporre la operazione del PETERSON colla *inversione composta* del DARBOUX (*Leçons sur la théorie gén. des surfaces* 4, 84). Un siffatto assetto le assicura la più grande efficacia in riguardo ai problemi speciali, fra i quali citiamo p. e. la trasformazione di GUICHARD delle quadriche deformate. Da questa osservazione risale l'importanza della proposizione da dimostrarsi nel seguito.

pel quadrato dell'elemento lineare comune. Come si sa questo sistema coniugato non può diventare immaginario che nel caso delle superficie a punti iperbolici. Ricordiamo ancora un fatto ben noto, cioè che l'equazione di LAPLACE cui soddisfano le coordinate x, \dots, \bar{x}, \dots in funzione di α e β è la stessa per le due superficie, scrivendosi:

$$(2) \quad x_{\alpha\beta} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} x_{\alpha} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} x_{\beta} = 0, \quad (3)$$

ed ammette la soluzione particolare

$$\Theta = \frac{1}{2}(\Sigma x^2 - \Sigma \bar{x}^2).$$

Ora la trasformazione di PETERSON che fa passare ad una nuova coppia $S'(x', \dots) \bar{S}'(\bar{x}', \dots)$ di reti applicabili, corrispondenti rispettivamente a S e \bar{S} con parallelismo delle tangenti coniugate e conseguentemente con conservazione delle immagini sferiche è data dalle formule

$$(3) \quad x'_{\alpha} = px_{\alpha}, \quad x'_{\beta} = qx_{\beta}, \quad \bar{x}'_{\alpha} = p\bar{x}_{\alpha}, \quad \bar{x}'_{\beta} = q\bar{x}_{\beta}, \quad (4)$$

essendo p e q soluzioni del sistema differenziale:

$$p_{\beta} = - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} (p - q), \quad q_{\alpha} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} (p - q),$$

il quale, col porre $\frac{1}{2}(p - q) = \delta$, si riduce all'aggiunta dell'equazione differenziale (2):

$$\delta_{\alpha\beta} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \delta_{\alpha} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \delta_{\beta} + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \beta} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) \delta = 0.$$

Datone un'integrale $\tilde{\delta}$, formiamo mediante una quadratura

$$\tilde{\delta} = \int \left[\left(\delta_{\alpha} + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \delta \right) dx - \left(\delta_{\beta} + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \delta \right) d\beta \right]$$

in guisa che si abbia:

$$p = \tilde{\delta} + \delta, \quad q = \tilde{\delta} - \delta.$$

(3) Ci serviremo, per brevità, degli indici α e β per indicare le derivate rispetto alle variabili.

(4) Di ogni terna di formule relative ai tre assi coordinati non scriverò che la prima senza far cenno all'aver luogo delle due analoghe.

Si osservi che per calcolare le coordinate $x', y', z', \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$ occorre ancora eseguire le sei quadrature domandate dalle (3).

Convieni intanto avvertire che, utilizzando il metodo delle coordinate tangenziali per l'uno dei sistemi coniugati da determinarsi, arriviamo a sopprimere tre delle quadrature in discorso. Per questo scriviamo il quadrato dell'elemento lineare sferico della superficie S :

$$(4) \quad \Sigma dX^2 = ed\alpha^2 + 2fd\alpha d\beta + gd\beta^2$$

ed indichiamo con 0 i simboli di CHRISTOFFEL e le derivate seconde covarianti prese rispetto alla forma (4). Ora suppongasi scelta una soluzione w dell'equazione tangenziale:

$$(5) \quad w_{\alpha\beta} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}^0 w_\alpha - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}^0 w_\beta + fw = 0,$$

verificata come si sa dai coseni di direzione X, Y, Z della normale e dalla distanza $W = \Sigma xX$ del piano tangente dall'origine; se ne deduce un sistema coniugato parallelo S' dato da:

$$(6) \quad x' = wX + \nabla^0(w, X) = wX + \frac{(gw_\alpha - fw_\beta)X_\alpha + (ew_\beta - fw_\alpha)X_\beta}{eg - f^2}.$$

Di qui, derivando col tener conto della (5) e paragonando colle (3), si traggono le relazioni:

$$(7) \quad p = -\frac{(w)_{11}^0 + ew}{D} = \frac{(D)'}{D}, \quad q = -\frac{(w)_{22}^0 + gw}{D''} = \frac{(D'')'}{D''}$$

in cui figurano i coefficienti D, D'' e $(D)', (D'')$ delle seconde forme fondamentali di S e di S', D e $(D)'$ essendo nulli. Si calcoleranno infine le coordinate $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$ di \bar{S}' mediante le (3), sostituitevi le espressioni (7), con tre quadrature che nell'accennato procedimento non si riesce a fare sparire.

2. Ciò premesso, volgiamoci alla ricerca d'un nuovo metodo la cui applicazione, pur fondandosi sulla conoscenza d'un integrale di un'equazione a derivate parziali, non richiederà più alcuna quadratura nel calcolo delle coordinate. A tale uopo, immaginando per un momento già effettuata la trasformazione, consideriamo la funzione

$$(8) \quad \vartheta' = \frac{1}{2} (\Sigma x'^2 - \Sigma \bar{x}'^2),$$

la quale, conformemente ad un'osservazione fatta sopra, verifica l'equazione di LAPLACE relativa alla coppia trasformata S' , \bar{S}' . Derivando si ha:

$$\vartheta'_\alpha = p(\Sigma x' x_\alpha - \Sigma \bar{x}' \bar{x}_\alpha), \quad \vartheta'_\beta = q(\Sigma x' x_\beta - \Sigma \bar{x}' \bar{x}_\beta),$$

cosicchè da

$$(9) \quad \vartheta_\alpha = \Sigma x' x_\alpha - \Sigma \bar{x}' \bar{x}_\alpha, \quad \vartheta_\beta = \Sigma x' x_\beta - \Sigma \bar{x}' \bar{x}_\beta$$

verrà data una soluzione ϑ della (2), calcolabile con una quadratura.

Ora mi propongo di mostrare che, assumendo per ϑ una qualunque soluzione dell'equazione di LAPLACE

$$(10) \quad \vartheta_{\alpha\beta} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \vartheta_\alpha - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \vartheta_\beta = 0,$$

per la coppia trasformata S' , \bar{S}' , definita così dalla ϑ , le coordinate $x', \dots, \bar{x}', \dots$ si ottengono per sole differenziazioni ed operazioni algebriche. Introducendo per ciò nella (6) col sussidio di relazioni ben note le derivate di x invece di quelle di X , avremo per x' la formula seguente, aggiungendovi l'espressione di \bar{x}' del tutto analoga:

$$(11) \quad x' = wX - \frac{w_\alpha}{D} x_\alpha - \frac{w_\beta}{D''} x_\beta, \quad \bar{x}' = \bar{w}\bar{X} - \frac{\bar{w}_\alpha}{D} \bar{x}_\alpha - \frac{\bar{w}_\beta}{D''} \bar{x}_\beta.$$

Sostituendo questi valori nelle (9), si trova:

$$(12) \quad \begin{cases} \vartheta_\alpha = -E \left(\frac{w_\alpha}{D} - \frac{\bar{w}_\alpha}{D} \right) - F \left(\frac{w_\beta}{D''} - \frac{\bar{w}_\beta}{D''} \right), \\ \vartheta_\beta = -F \left(\frac{w_\alpha}{D} - \frac{\bar{w}_\alpha}{D} \right) - G \left(\frac{w_\beta}{D''} - \frac{\bar{w}_\beta}{D''} \right). \end{cases}$$

D'altronde, differenziando le (9) coll'aver riguardo alle formule della teoria generale delle superficie:

$$x_{\alpha\alpha} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} x_\alpha + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} x_\beta + DX, \quad \bar{x}_{\alpha\alpha} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \bar{x}_\alpha + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \bar{x}_\beta + \bar{D}\bar{X} \text{ ecc.},$$

deduciamo le relazioni:

$$(13) \quad \vartheta_{11} = Dw - \bar{D}\bar{w}, \quad \vartheta_{12} = 0, \quad \vartheta_{22} = D''w - \bar{D}''\bar{w},$$

nelle quali le derivazioni covarianti s'intendono eseguite rispetto al ds^2 (1)

comune di S e \bar{S} , la $\mathfrak{F}_{12} = 0$ del resto coincidendo colla (10). Dopo questi preparativi, traendo dalle (13):

$$(14) \quad w = \frac{\bar{D}''\mathfrak{F}_{11} - \bar{D}\mathfrak{F}_{22}}{D\bar{D}'' - D''D}, \quad \bar{w} = \frac{D''\mathfrak{F}_{11} - D\mathfrak{F}_{22}}{D\bar{D}'' - D''D}, \quad (5)$$

siamo ora in grado di enunciare la proposizione voluta:

Per assoggettare una coppia S, \bar{S} di superficie isometriche alla trasformazione di Peterson, basta ricercare un integrale \mathfrak{F} dell'equazione di Laplace $\mathfrak{F}_{12} = 0$, relativa al sistema coniugato comune; con questa \mathfrak{F} , calcolate w e \bar{w} dalle (14), le coordinate $x', \dots, \bar{x}', \dots$ delle superficie S' e \bar{S}' formanti la coppia trasformata, s'ottengano per mezzo delle formole (11) in termini finiti.

Resta adunque da dimostrarsi che nell'applicazione del metodo da noi stabilito, cioè in virtù delle relazioni (10), (14) e (11), risultano soddisfatte appunto le (3). Questa verifica si sciinde in due passi. Cominceremo dal convincerci che le equazioni tangenziali dei sistemi coniugati S e \bar{S} ammettono come soluzioni le funzioni w e \bar{w} date dalle formole (14). Con ciò sarà confermato l'aver luogo di due gruppi di relazioni differenziali della forma:

$$x'_\alpha = px_\alpha, \quad x'_\beta = qx_\beta, \quad \bar{x}'_\alpha = \bar{p}\bar{x}_\alpha, \quad \bar{x}'_\beta = \bar{q}\bar{x}_\beta.$$

Per secondo sarà necessario provare che si ha:

$$\bar{p} = p, \quad \bar{q} = q.$$

3. Partiamo dalle due identità seguenti che valgono rispetto ad un'assegnata forma differenziale quadratica $E d\alpha^2 + 2F d\alpha d\beta + G d\beta^2$ per una qualunque funzione \mathfrak{F} delle variabili, indicandosi con K la curvatura della forma:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} (\mathfrak{F}_{11})_\beta - (\mathfrak{F}_{12})_\alpha - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \mathfrak{F}_{11} + \left(\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) \mathfrak{F}_{12} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \mathfrak{F}_{22} + K(E\mathfrak{F}_\beta - F\mathfrak{F}_\alpha) = 0, \\ (\mathfrak{F}_{22})_\alpha - (\mathfrak{F}_{12})_\beta + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \mathfrak{F}_{11} + \left(\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) \mathfrak{F}_{12} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \mathfrak{F}_{22} + K(G\mathfrak{F}_\alpha - F\mathfrak{F}_\beta) = 0. \end{aligned} \right.$$

Notiamo che queste nel caso presente si semplificano per l'essere $\mathfrak{F}_{12} = 0$ e che di più, essendo K la curvatura totale comune alle superficie applica-

(5) Il denominatore non può essere nullo quando la coppia S, \bar{S} è costituita da due superficie distinte (nè congruenti, nè simmetriche).

bili S e \bar{S} , si ha l'uguaglianza:

$$K = \frac{DD''}{EG - F^2} = \frac{\bar{D}\bar{D}''}{EG - F^2}.$$

Sostituendo nelle (15) a \mathfrak{D}_{11} , \mathfrak{D}_{22} le espressioni (13), risultanti nell'attuale ipotesi dalle (14), e servendosi per la riduzione delle formule di CODAZZI:

$$\begin{aligned} D_\beta &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} D - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} D', & D''_\alpha &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} D, \\ \bar{D}_\beta &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \bar{D} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \bar{D}', & \bar{D}''_\alpha &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \bar{D}'' - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \bar{D}, \end{aligned}$$

si giunge a stabilire le relazioni:

$$(16) \quad \frac{w_\alpha}{D} - \frac{\bar{w}_\alpha}{\bar{D}} = -\frac{G\mathfrak{D}_\alpha - F\mathfrak{D}_\beta}{EG - F^2}, \quad \frac{w_\beta}{D''} - \frac{\bar{w}_\beta}{\bar{D}''} = -\frac{E\mathfrak{D}_\beta - F\mathfrak{D}_\alpha}{EG - F^2},$$

equivalenti alle (12) che vennero segnalate, per incidenza, nei preliminari al n.° 2.

Indi, derivando la prima delle (16) rapporto a β , si trova dopo qualche semplificazione che esige di nuovo l'applicazione delle formule di CODAZZI e delle relazioni (13):

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{D} \left(w_{\alpha\beta} + \frac{D''}{D} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} w_\alpha + \frac{D}{D''} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} w_\beta - KFw \right) \\ &\quad - \frac{1}{\bar{D}} \left(\bar{w}_{\alpha\beta} + \frac{\bar{D}''}{\bar{D}} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \bar{w}_\alpha + \frac{\bar{D}}{\bar{D}''} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \bar{w}_\beta - KF\bar{w} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Similmente, derivando la seconda rapporto a α , ricaviamo un'altra uguaglianza distinta dalla (17) per l'essere cangiati i fattori $\frac{1}{D}$, $\frac{1}{\bar{D}}$ delle parentesi rispettivamente in $\frac{1}{D''}$, $\frac{1}{\bar{D}''}$. Di qui, siccome si ha necessariamente $D\bar{D}'' - D''\bar{D} \neq 0$, riconosciamo valere separatamente le equazioni:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} &w_{\alpha\beta} + \frac{D''}{D} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} w_\alpha + \frac{D}{D''} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} w_\beta - KFw = 0, \\ &\bar{w}_{\alpha\beta} + \frac{\bar{D}''}{\bar{D}} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \bar{w}_\alpha + \frac{\bar{D}}{\bar{D}''} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \bar{w}_\beta - KF\bar{w} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ora, queste non sono altro che le equazioni tangenziali di LAPLACE, relative ai sistemi coniugati S e \bar{S} . Per accertarcene raccogliamo qui, rispetto all'uno dei due sistemi coniugati, le formule ben note, utili anche pel seguito, mediante le quali si passa dalle forme quadratiche fondamentali agli elementi della rappresentazione sferica:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} e &= \frac{GD^2}{EG - F^2}, & f &= -\frac{FDD''}{EG - F^2}, & g &= \frac{ED''^2}{EG - F^2}, \\ \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}^0 &= -\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{D_\alpha}{D}, & \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}^0 &= -\frac{D}{D'} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \\ \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}^0 &= -\frac{D''}{D} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}^0 &= -\frac{D}{D''} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \\ \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}^0 &= -\frac{D''}{D} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}^0 &= -\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \frac{D''_\beta}{D'}. \end{aligned} \right.$$

Con ciò, conformemente a quanto abbiamo osservato sopra, le relazioni

$$x'_\alpha = px_\alpha, \quad x'_\beta = qx_\beta, \quad \bar{x}'_\alpha = \bar{p} \bar{x}'_\alpha, \quad \bar{x}'_\beta = \bar{q} \bar{x}'_\beta$$

si verificano in virtù delle (18).

Il primo punto essendo così dimostrato, calcoliamo gli effettivi valori dei fattori p, q, \bar{p}, \bar{q} . Derivando, per ciò, le (11) ovvero ricorrendo alle (7) che occorre trasformare mediante le (19), avremo le formule:

$$p = - \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{w_\alpha}{D} \right) + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{w_\alpha}{D} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{w_\beta}{D'} + \frac{GD}{EG - F^2} w \right],$$

$$q = - \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{w_\beta}{D''} \right) + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{w_\alpha}{D} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{w_\beta}{D''} + \frac{ED''}{EG - F^2} w \right],$$

le quali, aggiungendosi il soprasegno a D, D'', w , valgono anche per \bar{p} e \bar{q} .

Segue di qui:

$$\begin{aligned} \bar{p} - p &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{w_\alpha}{D} - \frac{\bar{w}_\alpha}{\bar{D}} \right) + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left(\frac{w_\alpha}{D} - \frac{\bar{w}_\alpha}{\bar{D}} \right) + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left(\frac{w_\beta}{D'} - \frac{\bar{w}_\beta}{\bar{D}'} \right) \\ &\quad + \frac{G}{EG - F^2} (Dw - \bar{D} \bar{w}). \end{aligned}$$

Sostituendo ora le espressioni (16) ed adoperando le (13) nelle derivazioni, si stabilirà finalmente l'equazione $\bar{p} - p = 0$, cioè l'identità dei fattori p e \bar{p} e con un calcolo analogo quella di q e \bar{q} .

Con ciò la nostra asserzione è pienamente confermata.

4. Terminerò la presente ricerca colle osservazioni seguenti, importanti per altro nello studio dei casi particolari.

Supponiamo ancora, ritenendo tutte le notazioni da noi introdotte, di avere effettuata una trasformazione di PETERSON a base d'una nota soluzione \mathfrak{F} della $\mathfrak{F}_{12} = 0$. Ora si trova facilmente che dalle formule:

$$(20) \quad x_1 = x - \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}'} x', \quad \bar{x}_1 = \bar{x} - \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}'} x',$$

essendo conformemente alla (8):

$$\mathfrak{F}' = \frac{1}{2} (\Sigma x'^2 - \Sigma \bar{x}'^2),$$

viene definita una nuova coppia $S_1(x_1, \dots), \bar{S}_1(x_1, \dots)$ di sistemi coniugati, anch'essi applicabili l'uno sull'altro. Mi contento di avvertire che le (20) costituiscono l'espressione analitica della *trasformazione biarmonica*, già menzionata nell'introduzione, la \mathfrak{F}' , del resto, potendo mettersi sotto l'una o l'altra delle due forme equivalenti:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}' &= \frac{1}{2} \left(w^2 - \bar{w}^2 - \frac{2}{D} w_\alpha \mathfrak{F}_\alpha - \frac{2}{D'} w_\beta \mathfrak{F}_\beta - \Delta_1(\mathfrak{F}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(w^2 - \bar{w}^2 - \frac{2}{D} \bar{w}_\alpha \mathfrak{F}_\alpha - \frac{2}{D''} \bar{w}_\beta \mathfrak{F}_\beta + \Delta_1(\mathfrak{F}) \right) \end{aligned}$$

con

$$\Delta_1(\mathfrak{F}) = \frac{E(\mathfrak{F}_\beta)^2 - 2F\mathfrak{F}_\alpha \mathfrak{F}_\beta + G(\mathfrak{F}_\alpha)^2}{EG - F^2} \quad (6).$$

Veniamo infine a domandarci che aspetto prendano le nostre formule col riferire la coppia S, \bar{S} di superficie applicabili a due variabili u, v scelte ad arbitrio. La forma invariante delle equazioni (13) essendo evidente, avremo:

$$(21) \quad \mathfrak{F}_{11} = Dw - \bar{D}\bar{w}, \quad \mathfrak{F}_{12} = D'w - \bar{D}'\bar{w}, \quad \mathfrak{F}_{22} = D''w - \bar{D}''\bar{w},$$

(6) Sebbene qualche volta nelle applicazioni, in vista di una condizione particolare da imporsi alla \mathfrak{F} , sia preferibile scrivere $k\mathfrak{F}'$, con k costante disponibile, in luogo di \mathfrak{F}' , conviene constatare qui che colle formule indicate l'operazione in discorso viene definita in tutta sua generalità, nè anche specializzata per la scelta dell'origine, potendosi sostituire a \mathfrak{F} la quantità

$$e_1 \mathfrak{F} + e_2 (\Sigma x^2 - \Sigma \bar{x}^2) + e_3 x + e_4 y + e_5 z + e_6$$

che soddisfa ancora alla $\mathfrak{F}_{12} = 0$ e contiene un numero sufficiente di costanti.

in guisa che l'equazione di LAPLACE relativa al sistema coniugato comune, dato dalla :

$$\begin{vmatrix} Ddu + D'dv, & D'du + D''dv \\ Ddu + \bar{D}'dv, & \bar{D}'du + \bar{D}''dv \end{vmatrix} = 0,$$

si cangierà nella seguente :

$$(22) \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{D}_{11}, & \mathfrak{D}_{12}, & \mathfrak{D}_{22} \\ D, & D', & D'' \\ \bar{D}, & \bar{D}', & \bar{D}'' \end{vmatrix} = 0.$$

Tratte le w, \bar{w} dalle (21), compatibili in virtù della (22), ci si servirà pel calcolo di $x', \dots, \bar{x}', \dots$ della formula (6), già scritta sotto forma invariante.



CORRADO SEGRE

Il 18 maggio una violenta malattia, che aveva qualche giorno prima provocato l'intervento chirurgico, schiantava a 61 anni l'operosa vita di Corrado Segre, da anni membro della Direzione di questi *Annali*.

Nel Segre si fondevano in rara armonia le doti più alte di scienziato con quelle più nobili di Maestro. Egli raccolse, col Veronese e col Bertini, l'eredità spirituale diretta di Luigi Cremona, aprendo la seconda fase dello sviluppo della geometria italiana. Nella qual fase si compongono in mirabile sintesi le idee di Cremona, di Steiner e di Staudt, con quelle di Plücker, Clebsch, Cayley, Brill-Noether e Klein, e si allarga sempre di più la visione dei problemi geometrici e sempre di più si tende a valutarli dal punto di vista riemanniano della teoria delle funzioni, preparando il terzo stadio di sviluppo della geometria algebrica.

Col Veronese e col Segre la geometria proiettiva iperspaziale assume corpo ed ampiezza di dottrina autonoma, coordina ed illumina problemi geometrici a prima giunta disparati e fornisce strumenti preziosi ed eleganti per la loro soluzione.

L'influenza del Segre nello sviluppo della geometria algebrica in Italia fu per non breve periodo dominante, non soltanto per l'opera scientifica, ma altresì per le fervide e veramente singolari qualità di Maestro. Maestro esemplare e suggestivo. Esempio per coscienza e scrupolosità di preparazione, per ampiezza di cultura, per l'amore con cui seguiva i giovani nei quali intuiva o sperava qualche attitudine scientifica; suggestivo per l'adorazione alla Sua scienza, che traspariva in ogni lezione ed in ogni conversazione coi discepoli, e pei fecondi ravvicinamenti e analogie che ornavano ed arricchivano il Suo insegnamento.

La chiarezza cristallina dell'esposizione scritta, che faceva riscontro a quella dell'eloquio, e la premura con cui accoglieva ogni domanda scientifica, da chiunque gli venisse, allargavano la cerchia dei discepoli ben oltre l'aula

universitaria. Si può dire che dei geometri italiani che hanno lavorato negli ultimi trentacinque anni, niuno siasi sottratto all'influenza diretta o indiretta di Lui.

Fondamentali, nel campo proiettivo, le Sue ricerche sulle quadriche, sulle omografie degli iperspazi e sulle geometrie della retta e delle coniche; e, nel campo delle trasformazioni birazionali, quelle sulle curve e sulle rigate e su altri enti algebrici, le quali culminano nella bellissima monografia che questi *Annali* ebbero l'onore di ospitare nel 1894; quelle sull'invariante delle superficie algebriche che dal Segre e dallo Zeuthen prese il nome, e le ampie ed accurate ricerche intorno alle singolarità delle superficie. Modelli classici sono la esposizione della teoria degli elementi imaginari nella geometria sintetica e quella concernente le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche. I lavori sugli enti iperalgebrici, che il Segre considerò per primo, daranno luogo ad altre feconde ricerche in prosieguo di tempo. Se ne è già avuto un esempio nelle Memorie del Comessatti relative alle questioni di realtà delle superficie razionali.

Dal 1907 il Segre si occupò di preferenza dell'indirizzo proiettivo-differenziale con numerosi lavori, che originarono, in Italia e fuori, una serie di brillanti ricerche. E anche in questo campo Egli fu rapidamente Maestro.

L'opera scientifica di Corrado Segre verrà più tardi analizzata in questi *Annali*, con tutta l'ampiezza che merita. Noi qui, nel primo fascicolo dolorosamente privo del Suo nome, rivolgiamo il riverente saluto nostro e di tutti i collaboratori, alla Memoria dello Scienziato insigne, del Maestro sapiente e affettuoso, dell'Uomo di alta fibra morale, che ebbe sempre nel cuore e nel pensiero la Patria, la Famiglia, la Scienza.

La Redazione



Al compianto prof. Segre succede, nella Direzione degli « Annali di Matematica » e per concorde voto dei colleghi, il degno di Lui discepolo prof. F. Severi, della R. Università di Roma.

INDICE DEL TOMO I DELLA SERIE 4^a

	Pag.
<i>Avvertenza</i>	I
G. SANNIA: Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve sghembe	» 1
M. CIPOLLA: Sai fondamenti logici della Matematica secondo le recenti vedute di Hilbert	» 19
B. SEGRE: Sul moto sferico vorticoso di un fluido incompressibile.	» 31
B. LEVI: Sulla definizione dell'integrale.	» 57
G. ANDREOLI: Sulle soluzioni non analitiche dell'equaz. funz. $f(x^2) - [f(x)]^2 = kx$, ecc. »	83
O. NICOLETTI: Un teorema di limite	» 91
L. TONELLI: Sulla nozione di integrale	» 105
O. CHISINI: La rappresentazione analitica di un ramo reale di curva algebrica. . . »	147
S. FINIKOFF: Congruences avec les deux nappes de la surface focale applicables l'une sur l'autre par les points correspondants	» 175
F. ENRIQUES: Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione	» 185
T. CHELLA: Dimostrazione dell'esistenza di un algoritmo delle divisioni successive per alcuni corpi circolari.	» 199
V. GIULOTTO: Funzioni sferiche poliarmoniche a due variabili	» 219
G. FUBINI: Su alcune classi di congruenze di rette e sulle trasformazioni delle superficie R	» 241
E. BOMPIANI: Proprietà generali della rappresentazione puntuale fra due superficie »	259
C. BIGIAMI: Di due speciali modificazioni alla legge di Newton, che, per lo spostamento del perielio e la deflessione dei raggi, conducono agli stessi risultati della Relatività.	» 285
L. BIANCHI: La costruzione geometrica di Darboux delle superficie applicabili sul paraboloido rotondo.	» 295
H. JONAS: Un teorema fondamentale relativo alla trasformazione di Peterson delle coppie di superficie isometriche	» 309
LA DIREZIONE: C. Segre, <i> necrologio</i>	» 319
<i>Indice</i>	» 321