LEÇONS SUR LA THÉORIE

DE

L'ÉLASTICITÉ

TOURS. — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS
PUBLIÉS PAR L'ASSOCIATION AMICALE DES ÉLÈVES ET ANCIENS ÉLÈVES
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

LEÇONS SUR LA THÉORIE

DE

L'ÉLASTICITÉ

PAR

H. POINCARÉ, MEMBRE DE L'INSTITUT

RÉDIGÉES PAR

MM. Émile BOREL et Jules DRACH
ÉLÈVES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PARIS
GEORGES CARRÉ, ÉDITEUR
58, RUE SAINT-ANDRÉ-DES-ARTS, 58

1892

LEÇONS

SUR LA

THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

CHAPITRE PREMIER

ÉTUDE CINÉMATIQUE DES DÉFORMATIONS

1. La théorie de l'élasticité a pour objet l'étude des déformations des corps sous l'action des forces. De même qu'en mécanique, nous distinguerons une partie cinématique et une partie dynamique. Nous commencerons par étudier les déformations au point de vue cinématique, c'est-à-dire sans nous occuper des causes qui les produisent.

2. Hypothèses. — Considérons un point M du corps, de coordonnées x, y, z; après la déformation, il occupe la position M′ et ses coordonnées sont : $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$.

Les quantités ξ, η, ζ sont les projections sur les trois axes du vecteur MM′ qui représente le déplacement du point M.

Nous les supposerons assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés. C'est ce qui arrive en général pour un milieu indéfini ou un corps dont toutes les dimensions sont finies. Ce n'est pas vrai pour des plaques minces ou des verges de section faible, c'est-à-dire pour des corps dont une ou deux dimensions sont très petites.

Nous supposerons aussi ξ, η, ζ fonctions continues de x, y, z; si ces fonctions étaient discontinues, il y aurait rupture du corps.

Nous considérerons les dérivées de ξ, η, ζ comme des fonctions continues de x, y, z, sans quoi les réactions élastiques seraient très grandes; les forces appliquées au corps, qui leur font équilibre, le seraient également, ce que nous ne supposons pas.

3. Considérons deux points M et M_1 dont les coordonnées sont respectivement x, y, z et $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$. Nous les supposerons suffisamment voisins pour qu'on puisse négliger les carrés de δx, δy, δz.

Après la déformation, ces points viennent en M' et M'_1 ; leurs nouvelles coordonnées sont :

$$x + \xi, \qquad y + \eta, \qquad z + \zeta$$

et

$$x + \delta x + \xi + \delta\xi, \quad y + \delta y + \eta + \delta\eta, \quad z + \delta z + \zeta + \delta\zeta.$$

Développons $\xi + \delta\xi$ par la formule de Taylor

$$\xi + \delta\xi = \xi + \frac{d\xi}{dx}\delta x + \frac{d\xi}{dy}\delta y + \frac{d\xi}{dz}\delta z + \cdots$$

les termes non écrits étant négligeables puisqu'on néglige les carrés de δx, δy, δz.

Faisons maintenant :

$$\left\{\begin{aligned} \delta x &= -\xi \\ \delta y &= -\eta \\ \delta z &= -\zeta \end{aligned}\right.$$

les coordonnées du point M_1 sont $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$. Celles de M'_1 seront :

$$x+\delta\xi, \quad y+\delta\eta, \quad z+\delta\zeta$$

et l'on aura :

$$\delta\xi = -\xi\frac{d\xi}{dx} - \eta\frac{d\xi}{dy} - \zeta\frac{d\xi}{dz}$$

et les égalités analogues donnant $\delta\eta$ et $\delta\zeta$.

Les quantités ξ et $\frac{d\xi}{dx}$ sont du premier ordre, $\delta\xi$ est donc du second ordre, et par suite on peut le négliger. La même remarque s'applique à $\delta\eta$ et à $\delta\zeta$.

Donc, si la déformation amène le point (x, y, z) à coïncider avec le point $(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)$, elle amènera le point $(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$ à coïncider avec le point (x, y, z).

Cette remarque nous sera utile plus loin.

4. Dilatations et glissements. — Supposons que le segment MM_1 soit parallèle à ox, et soit δx sa longueur : quel est l'allongement que lui fait subir la déformation ?

Nous avons :

$$\overline{M'M'_1}^2 = (\delta x+\delta\xi)^2 + (\delta y+\delta\eta)^2 + (\delta z+\delta\zeta)^2.$$

Mais ici δy et δz sont nuls, puisque MM_1 est parallèle à l'axe des x ; d'autre part, $\delta\eta$ et $\delta\zeta$ sont du second ordre [1], $\delta\eta^2$ et $\delta\zeta^2$ sont donc du quatrième ordre. En les négligeant

[1] Je dis du second ordre parce que je considère δx comme un infiniment petit du premier ordre de même que ξ ; mais je ferai remarquer que, comme ces deux quantités sont indépendantes l'une de l'autre, il n'y a aucune raison pour les regarder comme du même ordre, et que, si je le fais, c'est en vertu d'une convention arbitraire.

nous avons :

$$M'M'_1 = \delta x + \delta \xi.$$

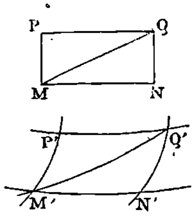
Or δy et δz étant nuls, $\delta \xi$ se réduit à $\frac{d\xi}{dx}\delta x$. Donc :

$$M'M'_1 = \delta x \left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)$$

et $\frac{d\xi}{dx}$ est l'accroissement de l'unité de longueur prise parallèlement à ox, c'est-à-dire la dilatation linéaire suivant cette direction. Nous poserons $\frac{d\xi}{dx} = \alpha_1$; les coefficients de dilatation suivant oy et oz seront de même

$$\frac{d\eta}{dy} = \alpha_2 \quad \text{et} \quad \frac{d\zeta}{dz} = \alpha_3.$$

5. Nous allons étudier la déformation d'un rectangle infiniment petit dont les côtés sont parallèles aux axes ox et oy. Soit MNPQ ce rectangle, nous poserons :



$$\begin{cases} MN = \delta x \\ MP = \delta y \end{cases}$$

Après la déformation, MNPQ deviendra un quadrilatère curviligne assimilable à un parallélogramme rectiligne M'N'P'Q', soit φ la valeur de l'angle P'M'N'

D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent on a :

$$M'N' = \delta x \left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)$$

$$M'P' = \delta y \left(1 + \frac{d\eta}{dy}\right).$$

Les coordonnées de Q seront $x + \delta x$, $y + \delta y$, z, donc :

$$\overline{M'Q'}^2 = (\delta x + \delta\xi)^2 + (\delta y + \delta\eta)^2 + \delta\zeta^2 ;$$

puisque $\delta z = 0$; négligeons $\delta\zeta^2$, qui est du quatrième ordre, et remarquons que l'on a :

$$\delta x + \delta\xi = \delta x + \frac{d\xi}{dx}\delta x + \frac{d\xi}{dy}\delta y,$$

c'est-à-dire :

$$\delta x + \delta\xi = M'N' + \frac{d\xi}{dy}\delta y.$$

Nous en conclurons en continuant à ne pas tenir compte des infiniment petits du quatrième ordre :

$$(\delta x + \delta\xi)^2 = \overline{M'N'}^2 + 2\frac{d\xi}{dy}\delta y \,.\, M'N'.$$

D'autre part :

$$\frac{d\xi}{dy} M'P' = \frac{d\xi}{dy}\delta y + \frac{d\xi}{dy}\cdot\frac{d\eta}{dy}\delta y.$$

On peut donc, à l'ordre d'approximation de nos calculs, remplacer :

$$\frac{d\xi}{dy}\delta y \quad \text{par} \quad \frac{d\xi}{dy} M'P' ;$$

ce qui donnera :

$$(\delta x + \delta\xi)^2 = \overline{M'N'}^2 + 2\frac{d\xi}{dy}\,.\,\overline{M'N'}\,.\,\overline{M'P'} ;$$

on aura de même :

$$(\delta y + \delta\eta)^2 = \overline{M'P'}^2 + 2\frac{d\eta}{dx}\,.\,\overline{M'N'}\,.\,\overline{M'P'}.$$

Donc :

$$\overline{M'Q'}^2 = \overline{M'N'}^2 + \overline{M'P'}^2 + 2\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right) . \overline{M'N'} . \overline{M'P'}.$$

Mais on a aussi :

$$\overline{M'Q'}^2 = \overline{M'N'}^2 + \overline{M'P'}^2 + 2\cos\varphi . \overline{M'N'} . \overline{M'P'}.$$

Il s'ensuit :

$$\cos\varphi = \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}$$

On voit que $\cos\varphi$ est infiniment petit, l'angle φ est donc voisin de $\frac{\pi}{2}$, et en négligeant les termes du développement de $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ qui suivent le premier, on a :

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}.$$

L'angle P'M'N', qui était au début égal à $\frac{\pi}{2}$, est devenu après la déformation

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right);$$

pour cette raison, la quantité $\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}$ est appelée *dilatation angulaire*.

Nous désignerons les trois dilatations angulaires par β_1, β_2, β_3, c'est-à-dire que nous poserons :

$$\left\{\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz} \\ \beta_2 &= \frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} \\ \beta_3 &= \frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy} \end{aligned}\right.$$

Quelquefois aussi on appelle ces quantités *glissements*. La raison en est simple.

Pour passer de MNPQ au parallélogramme M'N'P'Q', on peut procéder de la manière suivante :

1° Allonger les côtés du rectangle dans le rapport $1 + \alpha_1$ pour MN, $1 + \alpha_2$ pour MP;

2° Déformer le rectangle ainsi obtenu $M_1N_1P_1Q_1$ supposé articulé, de façon que la projection de P_1Q_1 sur M_1N_1 *glisse* sur cette droite de la quantité $\beta_3 \times M_1P_1$ qui aux infiniment petits du second ordre près est aussi $\beta_3 \,.\, MP$.

Si donc MP est égal à l'unité de longueur, il faudra faire glisser cette projection de la quantité β_3.

6. Que devient la surface du rectangle ?

Avant la déformation, elle était $\delta x \,.\, \delta y$, après elle sera $\overline{M'N'} \,.\, \overline{M'P'} \sin \varphi$.

L'angle φ est voisin de $\frac{\pi}{2}$; donc $\sin \varphi = 1$ à des infiniment petits près du second ordre.

L'aire du parallélogramme sera donc :

$$\delta x . \delta y \left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)\left(1 + \frac{d\eta}{dy}\right),$$

c'est-à-dire :

$$\delta x . \delta y \left(1 + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right) = \delta x . \delta y \,(1 + \alpha_1 + \alpha_2);$$

ce qui exprime que la dilatation superficielle dans un plan est égale à la somme des dilatations linéaires relatives à deux directions rectangulaires prises dans ce plan.

7. Considérons un parallélipipède rectangle d'arêtes parallèles aux axes. Supposons que les longueurs de ces arêtes soient $MM_1 = \delta x$, $MM_2 = \delta y$, $MM_3 = \delta z$. Après la déformation, il est assimilable à un parallélipipède oblique dont les arêtes ont pour longueurs :

$$\delta x\,(1 + \alpha_1),\ \delta y\,(1 + \alpha_2),\ \delta z\,(1 + \alpha_3)$$

et font entre elles des angles égaux à

$$\frac{\pi}{2} - \beta_1,\ \frac{\pi}{2} - \beta_2,\ \frac{\pi}{2} - \beta_3.$$

Que devient le volume de ce parallélipipède ?

Il est égal au produit de sa base par sa hauteur ; or cette hauteur est égale à $M'M'_3$ aux infiniment petits près du troisième ordre (on l'obtient en effet en multipliant $M'M'_3$ par le cosinus d'un angle infiniment petit du premier ordre). Donc le volume cherché est :

$$\delta x.\delta y\,(1 + \alpha_1 + \alpha_2)\,\delta z\,(1 + \alpha_3),$$

c'est-à-dire :

$$\delta x.\delta y.\delta z\,(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

Nous poserons : $\theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, et l'expression du volume sera : $\delta x.\delta y.\delta z\,(1 + \theta)$.

8. Considérons un volume infiniment petit v de forme quelconque. Ce volume peut être décomposé par des plans parallèles aux plans coordonnés en une infinité de parallélipipèdes rectangles infiniment petits, non seulement d'une manière absolue, mais encore par rapport au volume v. La déformation aura pour effet de multiplier le volume de chacun d'eux par $1 + \theta$; donc le volume v deviendra $v\,(1 + \theta)$.

La quantité θ s'appelle *dilatation cubique*. D'après sa définition, elle est indépendante du choix des axes. Donc, en un point donné, la somme des trois dilatations linéaires relatives à trois axes rectangulaires quelconques est constante.

9. Ellipsoïde des déformations. — Cherchons ce que devient par la déformation une sphère de rayon infiniment petit ε.

Soit M le centre, M_1 un point quelconque de la sphère; après la déformation, M vient en M′ et M_1 en M_1'.

Soient x, y, z les coordonnées de M′; $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$, celles de M_1'; d'après une remarque faite plus haut, les coordonnées du point M seront $x - \xi$, $y - \eta$, $z - \zeta$, et celles de M_1

$$x + \delta x - \xi - \delta\xi,\ y + \delta y - \eta - \delta\eta,\ z + \delta z - \zeta - \delta\zeta.$$

Les projections du vecteur MM_1 sur les trois axes sont $\delta x - \delta\xi$, $\delta y - \delta\eta$, $\delta z - \delta\zeta$; écrivons que ce vecteur est égal au rayon ε de la sphère :

$$(\delta x - \delta\xi)^2 + (\delta y - \delta\eta)^2 + (\delta z - \delta\zeta)^2 = \varepsilon^2.$$

Mais :

$$\delta\xi = \frac{d\xi}{dx}\delta x + \frac{d\xi}{dy}\delta y + \frac{d\xi}{dz}\delta z.$$

Donc :

$$(\delta x - \delta\xi)^2 = \left(\delta x - \frac{d\xi}{dx}\delta x - \frac{d\xi}{dy}\delta y - \frac{d\zeta}{dz}dz\right)^2$$

ou, en développant et négligeant les termes du quatrième ordre infinitésimal :

$$\left(\delta x - \delta\xi\right)^2 = \delta x^2 \left(1 - 2\frac{d\xi}{dx}\right) - 2\frac{d\xi}{dy}\,\delta x.\delta y - 2\frac{d\xi}{dz}\,\delta x.\delta z.$$

Nous avons donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \delta x^2\left(1 - 2\frac{d\xi}{dx}\right) + \delta y^2\left(1 - 2\frac{d\eta}{dy}\right) + \delta z^2\left(1 - 2\frac{d\zeta}{dz}\right) \\ -2\delta y.\delta z\left(\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz}\right) - 2\delta z.\delta x\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right) - 2\delta x.\delta y\left(\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy}\right) \end{array}\right\} = \varepsilon^2$$

c'est-à-dire avec les notations adoptées :

$$\sum(1 - 2\alpha_1)\,\delta x^2 - 2\sum\beta_1\,\delta y.\delta z = \varepsilon^2.$$

Mais δx, δy, δz sont les coordonnées de M'_1 par rapport à des axes parallèles aux premiers ayant pour origine M'.

Le lieu de M'_1 est par conséquent un ellipsoïde. On l'appelle *ellipsoïde des déformations*.

10. Dilatations principales. — Parmi toutes les directions issues de M', il y en a trois qui sont particulièrement remarquables, ce sont celles des axes de l'ellipsoïde. Les dilatations linéaires suivant ces axes sont dites *dilatations principales* ; on les désigne par δ_1, δ_2, δ_3.

Les longueurs des axes de l'ellipsoïde sont alors :

$$\varepsilon(1 + \delta_1) \qquad \varepsilon(1 + \delta_2) \qquad \varepsilon(1 + \delta_3).$$

Si l'on désigne par s une racine de l'équation en s relative à l'ellipsoïde, l'axe correspondant a sera donné par la relation :

$$s = \frac{\varepsilon^2}{a^2} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2(1 + \delta)^2}$$

en dénotant par δ la dilatation linéaire relative à cet axe. Négligeons les puissances de δ supérieures à la première, nous aurons, puisque

$$(1+\delta)^{-2} = 1 - \frac{2}{1}\delta + \frac{2\,.\,3}{1\,.\,2}\delta^2 + \cdots\cdots$$

la relation :

$$s = 1 - 2\delta.$$

L'équation qui donne s étant ici :

$$\begin{vmatrix} 1-2\alpha_1-s & -\beta_3 & -\beta_2 \\ -\beta_3 & 1-2\alpha_2-s & -\beta_1 \\ -\beta_2 & -\beta_1 & 1-2\alpha_3-s \end{vmatrix} =$$

celle qui donnera δ sera :

$$\begin{vmatrix} 2\delta-2\alpha_1 & -\beta_3 & -\beta_2 \\ -\beta_3 & 2\delta-2\alpha_2 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & -\beta_1 & 2\delta-2\alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Les trois dilatations principales sont indépendantes du choix des axes. Donc les coefficients de l'équation en δ ne changent pas lorsqu'on change la direction des axes.

Cette équation développée s'écrit :

$$(2\delta)^3 - A_1\,(2\delta)^2 + A_2\,(2\delta) - A_3 = 0,$$

où A_1, A_2, A_3 désignent les polynômes suivants :

$$A_1 = 2\,(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = 2\theta,$$

$$A_2 = \sum(4\alpha_1\alpha_2 - \beta_3)^2$$

$$A_3 = -\begin{vmatrix} 2\alpha_1 & \beta_3 & \beta_2 \\ \beta_3 & 2\alpha_2 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_1 & 2\alpha_3 \end{vmatrix}$$

On retrouve donc le fait que la quantité dénotée par θ est indépendante du choix des axes de coordonnées.

Si l'on prenait comme axes les axes de l'ellipsoïde des déformations, les termes rectangles disparaîtraient de son équation. Cela montre que les glissements sont nuls dans les trois plans principaux de l'ellipsoïde.

Il y a donc, en général, un système de plans formant un trièdre trirectangle et tels que les glissements soient nuls pour ces plans.

11. *Trois diamètres rectangulaires de la sphère deviennent après la déformation trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde.*

Il résulte des hypothèses faites sur la continuité des fonctions ξ, η, ζ et de leurs dérivées que, si deux surfaces sont tangentes l'une à l'autre avant la déformation, elles le sont encore après la déformation. Considérons donc trois diamètres rectangulaires de la sphère et les plans tangents à leurs extrémités, ils forment un cube circonscrit à la sphère. Après la déformation, la sphère devient un ellipsoïde, le cube un parallélipipède oblique dont les faces restent tangentes à l'ellipsoïde. Ces faces sont donc parallèles à trois plans diamétraux conjugués de l'ellipsoïde ; les diamètres correspondants qui proviennent des diamètres rectangulaires de la sphère sont donc conjugués.

Les calculs faits plus haut montrent d'ailleurs que la sphère dérive de l'ellipsoïde par une transformation homographique conservant le plan de l'infini, et on sait qu'une telle transformation fait correspondre un système de diamètres conjugués à un système de diamètres conjugués.

12. Composition des déformations. — Considérons un point M, soit M′ sa position après une première déformation. Une autre déformation amène M en M″ et M′ en M‴.

Si l'on fait subir au corps successivement ces deux déformations, le point M viendra en M‴. Les deux points M et M′ sont infiniment voisins ; donc les vecteurs MM″ et M′M‴ qui représentent les déplacements de ces points peuvent être regardés comme égaux et parallèles. Le quadrilatère MM′M‴M″ est donc un parallélogramme, c'est-à-dire que MM‴ est la somme géométrique des déplacements MM″ et M″M‴ qu'éprouve le point M quand on soumet le corps successivement aux deux déformations.

13. Supposons que le corps conserve une forme invariable ; il n'y a plus à proprement parler de déformation, mais un simple déplacement. Ce déplacement peut se décomposer en une translation et une rotation, la translation étant égale et parallèle au déplacement ξ_0, η_0, ζ_0 de l'origine, et la rotation ayant lieu autour d'un axe passant par cette même origine. Cette rotation pourra être remplacée par trois autres p, q, r effectuées autour des axes coordonnés. Les formules qui donnent le déplacement du point (x, y, z) sont donc :

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + qz - ry \\ \eta &= \eta_0 + rx - pz \\ \zeta &= \zeta_0 + py - qx \end{aligned}\right.$$

Les dilatations et les glissements sont nuls dans un tel mouvement.

La réciproque n'est pas évidente ; nous allons la démontrer, c'est-à-dire faire voir que, si les dilatations et les glissements sont nuls, le corps se déplace à la façon d'un solide invariable.

Notre hypothèse est que l'on a les relations :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d\xi}{dx} = 0 \\ \frac{d\eta}{dy} = 0 \\ \frac{d\zeta}{dz} = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz} = 0 \\ \frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} = 0 \\ \frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy} = 0 \end{array}\right.$$

Différencions la première des équations du dernier groupe par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, et nous aurons :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2\zeta}{dxdy} + \frac{d^2\eta}{dzdx} = 0 \\ \frac{d^2\xi}{dydz} + \frac{d^2\zeta}{dxdy} = 0 \\ \frac{d^2\eta}{dzdx} + \frac{d^2\xi}{dydz} = 0 \end{array}\right.$$

On en déduit immédiatement :

$$\frac{d^2\zeta}{dxdy} = \frac{d^2\xi}{dydz} = \frac{d^2\eta}{dzdx} = 0.$$

La relation $\frac{d\xi}{dx} = 0$ nous apprend que ξ ne dépend que de y et z, et la relation $\frac{d^2\xi}{dydz} = 0$ montre que ξ est la somme d'une fonction de y et d'une fonction de z.

On a donc :

$$\xi = f_1(y) + \varphi_1(z)$$

et de même :

$$\eta = f_2(z) + \varphi_2(x)$$
$$\zeta = f_3(x) + \varphi_3(y)$$

Transportons ces valeurs de ξ, η, ζ dans les équations qui expriment que les glissements sont nuls :

$$\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz} = 0 \text{ donnera } \varphi_3'(y) + f_2'(z) = 0,$$

ce qui exige

$$\varphi_3'(y) = -f_2'(z) = p,$$

p étant une constante.

On aura de la même manière :

$$\varphi_1'(z) = -f_3'(x) = q$$
$$\varphi_2'(x) = -f_1'(y) = r$$

et en intégrant et portant les valeurs trouvées dans les formules qui donnent ξ, η, ζ on obtient :

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + qz - ry \\ \eta &= \eta_0 + rx - pz \\ \zeta &= \zeta_0 + py - qx \end{aligned}\right.$$

ξ_0, η_0, ζ_0 étant trois constantes d'intégration. Ce sont bien là les formules du déplacement d'un solide invariable. C. Q. F. D.

14. Rotation moyenne. — Considérons une déformation quelconque, et posons :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} &= 2p \\ \frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} &= 2q \\ \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} &= 2r. \end{aligned}\right.$$

Le vecteur dont les composantes sont p, q, r, s'appellera la rotation moyenne. .

Ce vecteur est indépendant du choix des axes. Nous allons en effet en indiquer une interprétation purement mécanique.

Soient : MM′ le déplacement du point M qui a pour coordonnées x, y, z ; MR la rotation moyenne en ce point M.

Considérons une sphère de rayon infiniment petit ε ayant son centre au point M. Supposons-la remplie d'une matière homogène et chacun de ses points animé d'une vitesse représentée par le vecteur MM′ de composantes ξ, η, ζ, qu'on sait être indépendant du choix des axes [1].

Cherchons le moment de la quantité de mouvement de la sphère par rapport à son centre. Ce moment est un vecteur dont les composantes suivant les axes sont les moments des quantités de mouvement de la sphère par rapport à ces axes.

Considérons un élément de cette sphère, appelons μ sa masse, $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ ses coordonnées. Si on rapporte cet élément à des axes menés par le point M parallèlement aux axes primitifs, ses coordonnées seront $\delta x, \delta y$, δz, et sa vitesse aura pour composantes $\xi + \delta\xi$, $\eta + \delta\eta$, $\zeta + \delta\zeta$.

Le moment de la quantité de mouvement du point par rapport à MA sera

$$\mu\,[\delta y\,(\zeta + \delta\zeta) - \delta z\,(\eta + \delta\eta)]$$

et celui de la sphère tout entière sera

$$\sum \mu\,[\delta y\,(\zeta + \delta\zeta) - \delta z\,(\eta + \delta\eta)].$$

[1] Pour que le vecteur MM′ représente à la fois un déplacement et une vitesse il faut supposer l'unité de temps déterminée.

Evaluons cette somme :

$$\sum \mu\delta y\,(\zeta+\delta\zeta) = \sum \mu\delta y \left(\zeta + \frac{d\zeta}{dx}\delta x + \frac{d\zeta}{dy}\delta y + \frac{d\zeta}{dz}\delta z\right)$$

$$= \zeta \sum \mu\delta y + \frac{d\zeta}{dx}\sum \mu\delta y\delta x + \frac{d\zeta}{dy}\sum \mu\delta y^2 + \frac{d\zeta}{dz}\sum \mu\delta y\delta z.$$

Mais nous avons :

$$\sum \mu\delta y = 0,$$

car M est le centre de gravité de la sphère.

$\sum \mu\delta x\delta y = \sum \mu\delta y\delta z = 0$ car Mz et Mx sont deux axes principaux d'inertie de la sphère, relatifs au point M.

Enfin $\sum \mu\delta y^2 = \frac{I}{2}$, I étant le moment d'inertie de la sphère par rapport à un de ses diamètres.

Donc :

$$\sum \mu\delta y\,(\zeta+\delta\zeta) = \frac{d\zeta}{dy}\cdot\frac{I}{2}$$

et de même :

$$\sum \mu\delta z\,(\eta+\delta\eta) = \frac{d\eta}{dz}\cdot\frac{I}{2}.$$

Le moment de la quantité de mouvement de la sphère par rapport à MA est donc :

$$\frac{I}{2}\left(\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dz}\right) = I\,.\,p.$$

Les projections sur les axes du moment de la quantité de mouvement de la sphère par rapport au point M sont donc Ip, Iq, Ir.

La rotation moyenne, qui a pour composantes p, q, r, est par suite, comme ce moment, une quantité indépendante du choix des axes.

15. Considérons le point M et une sphère infiniment petite ayant ce point pour centre. Après la déformation, M vient en M′, la sphère devient un ellipsoïde. Trois diamètres rectangulaires de la sphère deviennent trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde ; donc, en général, il y a un trièdre trirectangle et un seul qui demeure trirectangle après la déformation : c'est celui qui correspond aux axes de l'ellipsoïde.

Considérons ce trièdre : on peut l'amener de sa position ancienne à la nouvelle par un simple déplacement, c'est-à-dire par une translation suivie d'une rotation autour du sommet. Nous allons montrer que cette rotation est la rotation moyenne au point M.

1° Si la rotation moyenne est nulle au point M, le trièdre reste parallèle à lui-même.

En effet, prenons comme origine le point M et pour axes les arêtes du trièdre. Les dilatations angulaires sont nulles :

$$\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz} = 0.$$

Mais on a aussi, puisque la rotation moyenne est nulle :

$$\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} = 0.$$

Il s'ensuit :

$$\frac{d\zeta}{dy} = \frac{d\eta}{dz} = 0,$$

et les égalités obtenues par permutation circulaire.

Cela posé, une arête quelconque du trièdre, MM_1 par exemple, qui est parallèle à ox reste parallèle à ox.

En effet, soient x, y, z les coordonnées de M ; $x + \delta x$, y, z celles de M_1.

Désignons par M′ et M'_1 les positions nouvelles de M et de M_1. M′ a pour coordonnées $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$; donc $M'M'_1$ a pour projections $\delta x + \delta\xi$, $\delta y + \delta\eta$, $\delta z + \delta\zeta$; δy et δz sont nuls par hypothèse.

D'autre part, $\delta\eta = \frac{d\eta}{dx}\delta x$, $\frac{d\eta}{dx}$ est nul, $\delta\eta$ l'est donc aussi ; il en sera de même de $\delta\zeta$.

Le vecteur $M'M'_1$ a des projections nulles sur oy et oz ; il est parallèle à ox ;

2° Considérons, en second lieu, le déplacement d'un solide invariable. On a entre les déplacements ξ, η, ζ et les rotations p, q, r les relations :

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + qz - ry \\ \eta &= \eta_0 + rx - pz \\ \zeta &= \zeta_0 + py - qx\end{aligned}$$

on en déduit :

$$\frac{d\zeta}{dy} = p \qquad \frac{d\eta}{dz} = -p,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right) = p.$$

C. Q. F. D.

Examinons le cas général.

Soient : D la déformation considérée ;

D' une rotation dont les composantes soient celles de la rotation moyenne au point M;

D'^{-1} la rotation inverse.

Désignons par DD'^{-1} l'ensemble des deux opérations D et D'^{-1} faites successivement, on aura :

$$D = (DD'^{-1})\, D'.$$

Ainsi la déformation D est la résultante de deux autres

$$DD'^{-1} \text{ et } D',$$

et la rotation moyenne (p, q, r) est la somme géométrique des rotations moyennes partielles dues aux deux déformations composantes

$$DD'^{-1} \text{ et } D'.$$

La rotation moyenne due à DD'^{-1} est nulle, car c'est la somme des rotations moyennes dues à D et à D'^{-1}. Donc, par cette opération le trièdre reste parallèle à lui-même.

La rotation du trièdre est alors due uniquement à D', et ses composantes sont bien celles de la rotation moyenne en M.

C. Q. F. D.

16. Polynômes isotropes. — Considérons un polynôme homogène par rapport aux neuf dérivées:

$$\frac{d\xi}{dx}, \frac{d\xi}{dy}, \frac{d\xi}{dz}, \frac{d\eta}{dx}, \dots\dots$$

nous dirons qu'il est isotrope si sa forme ne dépend pas du choix des axes. Cherchons les polynômes isotropes du second degré.

Nous savons déjà que $\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$ est indépendant du choix des axes, donc θ^2 est un polynôme isotrope du second degré :

$$\theta^2 = \sum\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + 2\sum\frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dy}.$$

On a vu également plus haut que

$$A_2 = 4\sum\alpha_1\alpha_2 - \sum\beta_3^2.$$

c'est-à-dire :

$$A_2 = 4\sum\frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dy} - \sum\left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2 - 2\sum\frac{d\xi}{dy}\frac{d\eta}{dx}$$

est aussi un polynôme isotrope.

Enfin la rotation moyenne étant un vecteur indépendant du choix des axes, le carré de sa longueur

$$B = p^2 + q^2 + r^2,$$

ou

$$B = \sum\left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2 - 2\sum\frac{d\xi}{dy}\frac{d\eta}{dx}$$

est un troisième polynôme isotrope.

Toutes les combinaisons linéaires de θ^2, A_2 et B seront isotropes. Parmi toutes ces combinaisons nous remarquerons les deux suivantes :

$$C = \frac{A_2 + B}{4} = \sum\left(\frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\eta}{dx}\frac{d\xi}{dy}\right),$$

c'est-à-dire :

$$C = \sum\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}$$

et

$$\theta^2 - A_2 + 2C = \sum\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \sum\left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2.$$

Y a-t-il d'autres polynômes isotropes du second degré linéairement indépendants des trois premiers ?

Considérons un polynôme isotrope du second degré par rapport aux neuf dérivées partielles.

Quand on change à la fois x, y, z en $-x$, $-y$, $-z$ et ξ, η, ζ en $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$ les dérivées ne changent pas, donc le polynôme ne change pas.

Le polynôme ne doit pas changer non plus quand on fait tourner les axes ; faisons tourner le trièdre d'un angle π autour de oz, cela revient à changer

$$x,\ y \text{ en } -x,\ -y \text{ et } \xi,\ \eta \text{ en } -\xi,\ -\eta.$$

Donc le polynôme ne doit pas changer quand on change z et ζ en $-z$ et $-\zeta$ et par suite dans chaque terme l'ensemble des lettres z et ζ entre un nombre pair de fois.

Il en est de même de x et ξ, y et η.

On s'assure aisément que les seuls termes satisfaisant à cette condition sont de l'une des quatre formes suivantes :

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2, \qquad \left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2, \qquad \frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dy}, \qquad \frac{d\xi}{dy}\frac{d\eta}{dx}.$$

On peut donc partager les termes des polynômes en quatre groupes. D'ailleurs le polynôme ne devant pas changer quand on permute les axes de toutes les manières possibles, comme dans cette opération les termes d'un même groupe s'échangent entre eux, ils doivent tous avoir même coefficient. Un polynôme isotrope du second degré sera donc une combin aison linéaire des quatre sommes:

$$\sum\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2, \qquad \sum\frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dy}$$

$$\sum\left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2, \qquad \sum\frac{d\xi}{dy}\frac{d\eta}{dx}$$

Nous connaissons trois de ces combinaisons linéaires. S'il y en avait plus de trois linéairement indépendantes, on en conclurait que les quatre sommes sont isotropes.

Il est facile de voir qu'il n'en est rien et que $\sum\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2$ n'est pas isotrope. Il suffit de faire tourner les axes des x et des y de $\frac{\pi}{4}$ dans le plan des xy. Cf. *Théorie mathématique de la lumière* (page 20).

17. Déformations transversales et longitudinales. — On dit qu'une déformation est transversale quand la dilatation cubique qui en résulte est nulle

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

Un volume quelconque est donc conservé en tant que volume par la déformation.

Une déformation est longitudinale quand la rotation moyenne est nulle, lorsque l'on a par conséquent:

$$\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} = 0$$

$$\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} = 0$$

$$\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} = 0$$

ou, en d'autres termes, lorsque $\xi dx + \eta dy + \zeta dz$ est une différentielle exacte.

Nous poserons alors :

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz = d\varphi.$$

On peut se demander, en adoptant cette définition, si une déformation peut être à la fois longitudinale et transversale.

Si elle est longitudinale on a :

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{d\varphi}{dx} \\ \eta &= \frac{d\varphi}{dy} \\ \zeta &= \frac{d\varphi}{dz} \end{aligned} \right.$$

la condition de transversalité devient alors $\Delta\varphi = 0$ en posant :

$$\Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}.$$

Il suffit donc que φ satisfasse à l'équation de Laplace.

Cela ne serait pas possible pour un milieu indéfini, si on suppose que la déformation est nulle à l'infini. On sait en effet que, si une fonction φ satisfait dans tout l'espace à l'équation

$$\Delta\varphi = 0$$

et si ses dérivées s'annulent à l'infini, elles sont identiquement nulles, car la fonction se réduit à une constante.

Il en est de même pour un milieu limité, si on suppose la déformation nulle à la surface.

Une déformation quelconque peut toujours être considérée comme la résultante de deux autres, l'une longitudinale, l'autre transversale, c'est-à-dire que, quelles que soient les quantités ξ, η, ζ, on peut trouver d'autres quantités ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2 satisfaisant aux équations :

$$\begin{cases} \xi = \xi_1 + \xi_2 \\ \eta = \eta_1 + \eta_2 \\ \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 \end{cases}$$

et aux deux conditions :

$$\frac{d\xi_1}{dx} + \frac{d\eta_1}{dy} + \frac{d\zeta_1}{dz} = 0$$

$$\xi_2 dx + \eta_2 dy + \zeta_2 dz = \text{différentielle exacte.}$$

Nous avons posé :

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz};$$

donc ici θ se réduit à :

$$\theta = \frac{d\xi_2}{dx} + \frac{d\eta_2}{dy} + \frac{d\zeta_2}{dz}.$$

Mais si nous supposons :

$$\xi_2 dx + \eta_2 dy + \zeta_2 dz = d\varphi,$$

ξ_2, η_2, ζ_2 seront les trois dérivées partielles de φ.

Donc on aura :

$$\theta = \Delta\varphi.$$

θ est une fonction donnée quelconque de x, y, z ; il suffit de trouver la fonction φ satisfaisant à :

$$\Delta\varphi = \theta.$$

Considérons une matière attirante de densité $\frac{-\theta}{4\pi}$, le potentiel dû à cette matière, qu'on suppose agir suivant la loi de Newton, satisfera précisément à la condition imposée.

ξ_2, η_2, ζ_2 étant ainsi déterminés, on aura ξ_1, η_1, ζ_1 par les formules

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= \xi - \xi_2 \\ \eta_1 &= \eta - \eta_2 \\ \zeta_1 &= \zeta - \zeta_2 \end{aligned}\right.$$

et le problème sera ainsi complètement résolu.

CHAPITRE II

ÉTUDE DES FORCES ÉLASTIQUES

18. Il y a un très grand nombre de théories de l'élasticité. Elles peuvent se ramener à deux classes : dans la première classe nous rangerons les théories fondées sur des hypothèses moléculaires ; dans la seconde, celles dont les auteurs ont cherché à s'affranchir de toute hypothèse sur la constitution intime des corps ; ces dernières théories sont en général basées sur la Thermodynamique.

Nous commencerons par étudier les théories de la première classe : d'abord ce sont les premières en date, et de plus elles nous aideront à mieux comprendre les autres. Nous considérons les corps comme formés de molécules de dimensions très petites par rapport aux distances qui les séparent. Ces molécules se comportent par suite comme des points matériels sur lesquels s'exercent des forces, fonction de leurs coordonnées; parmi ces forces, nous distinguerons les forces extérieures et les forces intérieures, c'est-à-dire celles qui résultent des actions des molécules les unes sur les autres.

19. Équations de l'équilibre. — Soient n molécules

$m_1, m_2, \ldots, m_n$; x_i, y_i, z_i les coordonnées de la molécule m_i dans sa position d'équilibre naturel (c'est-à-dire dans la position qu'elle occupe avant toute déformation). Supposons que le corps se déforme ; les coordonnées de m_i deviennent $x_i + \xi_i$, $y_i + \eta_i$, $z_i + \zeta_i$. Nous appellerons A_i, B_i, C_i les composantes suivant les trois axes de coordonnées de la force, agissant sur m_i, qui provient de l'action des autres molécules ; A_i, B_i, C_i sont des fonctions des coordonnées de toutes les molécules, $x_k + \xi_k$, $y_k + \eta_k$, $z_k + \zeta_k$; P_i, Q_i, R_i seront les composantes de la résultante de toutes les forces extérieures agissant sur m_i, dans la position d'équilibre naturel. Dans une autre position d'équilibre (que nous appellerons position d'équilibre contraint) les forces extérieures auront pour composantes $P_i + X_i$, $Q_i + Y_i$, $R_i + Z_i$.

Les équations de l'équilibre naturel seront :

$$\left\{\begin{array}{l} A_i + P_i = 0 \\ B_i + Q_i = 0 \\ C_i + R_i = 0 \end{array}\right.$$

puisque toutes les forces qui agissent sur chaque molécule doivent se faire équilibre.

Si les forces extérieures varient, l'équilibre sera troublé et le corps se déformera jusqu'à ce que A_i, B_i, C_i, qui sont des fonctions de la déformation, aient pris des valeurs telles qu'elles fassent équilibre aux forces extérieures. Les équations de l'équilibre contraint seront par suite :

$$\left\{\begin{array}{l} A_i + P_i + X_i = 0 \\ B_i + Q_i + Y_i = 0 \\ C_i + R_i + Z_i = 0 \end{array}\right.$$

20. Étude des forces intérieures. — La première hypothèse en date, qui est celle de Poisson et de Cauchy par exemple, est l'hypothèse des forces centrales : deux molécules quelconques exercent l'une sur l'autre une attraction ou une répulsion réciproque, dirigée suivant la droite qui les joint et dépendant seulement de leur distance. C'est cette hypothèse qui paraît la plus naturelle, et on s'y est arrêté longtemps.

Lamé a fait une hypothèse plus particulière encore: il suppose l'attraction nulle dans l'état d'équilibre naturel; si les molécules se rapprochent à partir de cette position d'équilibre, il se développe une force répulsive ; si elles s'éloignent, une force attractive ; de manière que la force tende toujours à ramener la molécule dans la position d'équilibre naturel. Dans l'hypothèse de Lamé, l'équilibre naturel est donc caractérisé par les équations :

$$A_i = 0 \qquad B_i = 0 \qquad C_i = 0,$$

et par suite aussi par les relations :

$$P_i = 0 \qquad Q_i = 0 \qquad R_i = 0.$$

La position d'équilibre naturel correspond donc au cas où il n'y a pas de forces extérieures, mais la réciproque n'est pas vraie. Si l'on suppose les forces extérieures nulles dans l'état d'équilibre naturel, il n'en résulte pas que les attractions des molécules sont toutes nulles ; car il pourrait se faire que les diverses attractions se fissent équilibre sans être nulles séparément. Il n'y a donc aucune raison pour adopter cette hypothèse de Lamé qui, d'ailleurs, ne simplifie ni les calculs ni les résultats.

L'hypothèse des forces centrales n'est elle-même qu'une hypothèse particulière ; prenons pour A_i, B_i, C_i des fonctions quelconques des $x_k + \xi_k$, $y_k + \eta_k$, $z_k + \zeta_k$, et supposons que ξ_i, η_i, ζ_i subissent des accroissements $d\xi_i$, $d\eta_i$, $d\zeta_i$; le travail des forces intérieures est :

$$\sum (A_i d\xi_i + B_i d\eta_i + C_i d\zeta_i).$$

Le principe de la conservation de l'énergie exige que ce travail soit une différentielle exacte ; nous poserons en conséquence

$$\sum (A_i d\xi_i + B_i d\eta_i + C_i d\zeta_i) = dU;$$

U sera une fonction des coordonnées de toutes les molécules :

$$U = f(x_k + \xi_k, y_k + \eta_k, z_k + \zeta_k, \ldots\ldots)$$

et on aura

$$\left\{ \begin{aligned} A_i &= \frac{dU}{d\xi_i} \\ B_i &= \frac{dU}{d\eta_i} \\ C_i &= \frac{dU}{d\zeta_i} \end{aligned} \right.$$

La seule hypothèse nécessaire est donc que les forces intérieures dérivent d'un potentiel.

21. Étude des forces extérieures. — Ces forces forment deux groupes distincts ; il peut d'abord se faire qu'elles agissent snr toutes les molécules du corps, aussi bien sur les molécules intérieures que sur les molécules superficielles ; tel est, par exemple, le cas de la pesanteur. Il est d'autres forces, inutiles à énumérer toutes ici, qui n'agissent qu'à la surface. Pour en donner un exemple, supposons un gaz renfermé dans une enceinte; il exerce une pression sur la paroi, et celle-ci, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, réagit sur le gaz. Cette pression de la paroi sur le gaz est une force extérieure appliquée seulement aux molécules superficielles.

Le choix de la position d'équilibre naturel semble à peu près arbitraire ; par suite, il peut paraître simple de choisir la position que prend le corps en l'absence de toute force extérieure. Cela n'est pas toujours possible; nous avons en effet supposé les déformations très petites, et toute la théorie repose sur cette hypothèse; il nous faut donc choisir une position d'équilibre naturel différant très peu de la position d'équilibre contraint que nous avons à étudier; c'est pour cela que nous conservons P_i, Q_i, R_i dans nos formules, c'est-à-dire que nous ne supposons pas les forces extérieures nulles dans l'état d'équilibre naturel.

Pour bien en montrer l'utilité, reprenons l'exemple du gaz renfermé dans une enceinte et soumis à une pression provenant de la réaction de la paroi ; on ne pourrait pas supposer cette pression nulle dans l'état d'équilibre naturel, car le volume correspondant serait infini et la déformation serait par suite aussi infinie (1).

22. Étude de la fonction des forces. — Revenons aux forces intérieures; pour les connaître, il nous faut étudier

(1) Cette assimilation d'un gaz à un corps élastique n'est pas tout à fait rigoureuse, car on a l'habitude de considérer les gaz comme formés de molécules en mouvement; il s'agit d'un état dynamique et non d'un état statique; mais elle suffit pour faire comprendre la justesse de notre remarque.

la fonction U. Si on la développe par la formule de Taylor, en considérant ξ, η, ζ comme les accroissements de x, y, z on a :

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots$$

U_0 sera une constante : c'est $U\,(x_i,\ y_i,\ z_i)$; U_1 renferme les termes du premier degré par rapport à ξ, η, ζ ; U_2 : les termes du second degré, etc.

Comme les quantités ξ, η, ζ sont supposées très petites, nous négligerons leurs cubes, et nous arrêterons le développement à U_2. On a alors

$$U = U_0 + U_1 + U_2,$$

et par suite

$$\left\{\begin{aligned} A_i &= \frac{dU}{d\xi_i} = \frac{dU_1}{d\xi_i} + \frac{dU_2}{d\xi_i} \\ B_i &= \frac{dU_1}{d\eta_i} + \frac{dU_2}{d\eta_i} \\ C_i &= \frac{dU_1}{d\zeta_i} + \frac{dU_2}{d\zeta_i} \end{aligned}\right.$$

car U_0 ne dépend pas des ξ, η, ζ ; $\frac{dU_1}{d\xi_i}$ est indépendant des ξ ; $\frac{dU_2}{d\xi_i}$ est homogène et du premier degré par rapport aux ξ et, par suite, s'annule dans la position d'équilibre naturel ; on a alors simplement :

$$A_i = \frac{dU_1}{d\xi_i}$$

$$B_i = \frac{dU_1}{d\eta_i}$$

$$C_i = \frac{dU_1}{d\zeta_i}$$

Les équations de l'équilibre naturel deviennent donc:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dU_1}{d\xi_i} + P_i = 0 \\ &\frac{dU_1}{d\eta_i} + Q_i = 0 \\ &\frac{dU_1}{d\zeta_i} + R_i = 0 \end{aligned}\right.$$

Dans la position d'équilibre contraint, on aura:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dU_1}{d\xi_i} + \frac{dU_2}{d\xi_i} + P_i + X_i = 0 \\ &\frac{dU_1}{d\eta_i} + \frac{dU_2}{d\eta_i} + Q_i + Y_i = 0 \\ &\frac{dU_1}{d\zeta_i} + \frac{dU_2}{d\zeta_i} + R_i + Z_i = 0 \end{aligned}\right.$$

On en déduit:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dU_2}{d\xi_i} + X_i = 0 \\ &\frac{dU_2}{d\eta_i} + Y_i = 0 \\ &\frac{dU_2}{d\zeta_i} + Z_i = 0 \end{aligned}\right.$$

Ce sont ces dernières équations qui déterminent les déformations; nous nous donnons les forces déformantes X_i, Y_i, Z_i, c'est-à-dire les forces qui s'ajoutent à celles qui existaient dans la position d'équilibre naturel ; nous avons alors $3n$ équations linéaires pour déterminer les $3n$ inconnues ξ_i, η_i, ζ_i. Le problème est donc théoriquement résolu et d'une manière très simple; mais le nombre extrêmement grand des molécules rend cette solution absolument impraticable, nous sommes donc obligés de recourir à d'autres considérations.

23. Cherchons une autre expression de la fonction U. Cette fonction changée de signe est l'énergie potentielle due aux actions mutuelles des molécules; elle ne peut donc dépendre que des distances des molécules, car, si le corps se déplace à la façon d'un solide invariable, il est évident que les actions mutuelles des molécules ne produisent aucun travail (1).

Considérons deux molécules quelconques m_1 et m_2; appelons x, y, z les coordonnées de la molécule m_1 dans la position d'équilibre naturel, $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ les coordonnées de la même molécule dans la position d'équilibre contraint; les coordonnées de m_2 dans la position d'équilibre naturel seront $x+\mathrm{D}x$, $y+\mathrm{D}y$, $z+\mathrm{D}z$ (en employant la notation $\mathrm{D}x$ pour désigner une différence qui, du moins jusqu'à nouvel ordre, n'est pas supposée infiniment petite); elles seront dans la position d'équilibre contraint :

$$x+\mathrm{D}x+\xi+\mathrm{D}\xi,\quad y+\mathrm{D}y+\eta+\mathrm{D}\eta,\quad z+\mathrm{D}z+\zeta+\mathrm{D}\zeta$$

Les projections du vecteur m_1m_2 sur les trois axes, qui sont $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$, dans l'équilibre naturel, deviennent dans l'équilibre contraint $\mathrm{D}x+\mathrm{D}\xi$, $\mathrm{D}y+\mathrm{D}\eta$, $\mathrm{D}z+\mathrm{D}\zeta$. Soit R le carré de la distance m_1m_2 dans la position d'équilibre naturel; $\mathrm{R}+\rho$ le carré de cette même distance dans la

(1) Pour s'en convaincre, on peut remarquer que si, par exemple, une rotation d'un angle $\frac{2\pi}{q}$ produisait un travail, en la répétant q fois on produirait un travail q fois plus grand, et cependant le corps reviendrait à sa position initiale; ce qui est impossible, puisqu'il y a une fonction des forces.

position d'équilibre contraint; nous avons:

$$R = Dx^2 + Dy^2 + Dz^2 = \sum Dx^2,$$

$$R + \rho = \sum (Dx + D\xi)^2.$$

Par suite :

$$\rho = 2\sum DxD\xi + \sum D\xi^2.$$

Nous poserons :

$$\rho_1 = 2\,(DxD\xi + DyD\eta + DzD\zeta),$$
$$\rho_2 = D\xi^2 + D\eta^2 + D\zeta^2,$$

et il viendra:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2.$$

Les déplacements ξ, η, ζ sont supposés infiniment petits du premier ordre; il en est nécessairement de même de leurs différences $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$; par suite ρ_1 est infiniment petit du premier ordre et ρ_2 du second ordre.

U est une fonction des quantités $R + \rho$.....

$$U = F\,(R + \rho, R' + \rho', \ldots).$$

Développons cette expression par la formule de Taylor, nous aurons :

$$U = F\,(R, R', \ldots) + \sum \frac{dF}{dR}\,\rho + \frac{1}{2}\sum \frac{d^2F}{dR^2}\,\rho^2 + \sum \frac{d^2F}{dRdR'}\,\rho\rho' + \ldots$$

Nous avons déjà négligé les infiniment petits du troisième ordre dans l'expression de U; nous devons donc limiter le développement de U aux termes du second ordre. Nous allons comparer ce développement avec celui que nous avons trouvé plus haut.

Pour cela, remplaçons ρ par sa valeur :

$$\rho = \rho_1 + \rho_2.$$

On a :

$$\rho_2 = \rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2.$$

Nous négligerons $\rho_1\rho_2$ et ρ_2^2 qui sont respectivement du troisième et du quatrième ordre infinitésimal; de même nous remplacerons $\rho\rho'$ par $\rho_1\rho_1'$, et il viendra

$$U = F + \sum \frac{dF}{dR}\rho_1 + \sum \frac{dF}{dR}\rho_2 + \frac{1}{2}\sum \frac{d^2F}{dR^2}\rho_1^2 + \sum \frac{d^2F}{dRdR'}\rho_1\rho_1'.$$

Un quelconque des cinq groupes de termes de U est homogène par rapport aux ξ, η, ζ; si nous identifions avec l'expression déjà obtenue

$$U = U_0 + U_1 + U_2,$$

nous arrivons aux relations

$$U_0 = F(R, R', ...)$$

$$U_1 = \sum \frac{dF}{dR}\rho_1$$

$$U_2 = \sum \frac{dF}{dR}\rho_2 + \frac{1}{2}\sum \frac{d^2F}{dR^2}\rho_1^2 + \sum \frac{d^2F}{dRdR'}\rho_1\rho_1'.$$

U_2 est la somme de trois groupes de termes; nous allons montrer que, dans l'hypothèse des forces centrales, le troisième groupe disparaît identiquement, c'est-à-dire que l'on a dans ce cas:

$$\frac{d^2F}{dRdR'} = 0.$$

En effet, les actions des différentes molécules se réduisent alors aux attractions mutuelles des molécules deux à deux; l'attraction ne dépend que de la distance des deux molécules considérées et reste la même si l'on en introduit d'autres. Donc l'énergie potentielle totale U est la somme des énergies potentielles dues à tous les couples de molécules, considérés successivement, c'est-à-dire que l'on a:

$$U = F(R + \rho) + F'(R' + \rho') + \dots\dots$$

chacune des fonctions ne dépendant que d'un argument; par suite:

$$\frac{d^2U}{dRdR'} = 0.$$

C'est là un point important; nous en conclurons plus tard que dans l'hypothèse des forces centrales il doit y avoir une relation numérique entre les coefficients d'élasticité λ et μ de Lamé, ce qui fournit une méthode expérimentale pour rechercher si l'hypothèse des forces centrales est conforme à la réalité.

24. Nous avons supposé jusqu'à présent que toutes les molécules étaient libres; dans certaines théories, au contraire, on les suppose assujetties à des liaisons. Pour trouver dans cette hypothèse les équations d'équilibre, il suffit d'appliquer la méthode de Lagrange. Nous avons écrit les équations

$$\left\{\begin{array}{l} A_i + P_i + X_i = 0 \\ B_i + Q_i + Y_i = 0 \\ C_i + R_i + Z_i = 0 \end{array}\right.$$

qui expriment que la molécule est en équilibre sous l'action des forces intérieures et extérieures seules. Supposons qu'il y ait des liaisons définies par les équations :

$$\begin{cases} L_1 = 0 \\ L_2 = 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ L_p = 0 \end{cases}$$

les équations d'équilibre seront d'après des principes connus:

$$\begin{cases} A_i + P_i + X_i + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{d\xi_i} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{d\xi_i} + \dots + \lambda_p \dfrac{dL_p}{d\xi_i} = 0 \\ B_i + Q_i + Y_i + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{d\eta_i} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{d\eta_i} + \dots + \lambda_p \dfrac{dL_p}{d\eta_i} = 0 \\ C_i + R_i + Z_i + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{d\zeta_i} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{d\zeta_i} + \dots + \lambda_p \dfrac{dL_p}{d\zeta_i} = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_p$ étant des constantes inconnues ; nous avons ainsi introduit p inconnues nouvelles, mais nous avons aussi p équations de plus, les p équations de liaison.

Il semble, au premier abord, qu'en introduisant cette hypothèse nous pourrons étudier des phénomènes plus généraux ; c'est-à-dire que l'hypothèse de molécules entièrement libres restreint la généralité ; ce n'est qu'une apparence.

Prenons, par exemple, la liaison la plus simple : supposons deux molécules assujetties à rester à une distance invariable r_0 l'une de l'autre. Tout se passe comme s'il existait entre elles une force attractive ou répulsive dirigée suivant la droite qui les joint et fonction seulement de leur distance, cette force étant supposée nulle pour $r = r_0$, très grande et répulsive pour $r = r_0 - \varepsilon$, très grande et attractive pour $r = r_0 + \varepsilon$.

La force de liaison apparaît donc, dans cet exemple simple, comme un cas limite de la force ordinaire. On pourrait faire une étude analogue pour les liaisons quelconques, et l'on arriverait au même résultat. On ne généralise donc pas en introduisant des liaisons; nous reviendrons d'ailleurs plus loin sur ce sujet à l'occasion des théories qui leur attribuent un rôle important.

Indiquons simplement la réponse à une question qui se pose naturellement. Si l'introduction de liaisons ne donne pas une plus grande généralité, si, par conséquent, on peut arriver à des résultats tout aussi étendus en n'introduisant que des forces ordinaires, à condition de ne pas préciser la nature de ces forces, comment se fait-il qu'on ait créé des théories différentes en faisant usage de liaisons? La raison en est simple : il est certains esprits auxquels répugne la conception d'actions à distance autres que des forces centrales ; dans les cas où l'hypothèse des forces centrales ne rend pas compte des faits observés, ils introduisent des liaisons qui leur permettent d'expliquer ces faits sans renoncer à leur hypothèse fondamentale.

25. Rayon d'activité moléculaire; expression nouvelle de la fonction U. — Pour continuer les calculs, il faut introduire une nouvelle hypothèse: nous allons supposer que les actions moléculaires ne s'exercent qu'à des distances très faibles, de sorte qu'elles deviennent insensibles lorsque la distance dépasse une longueur extrêmement petite appelée rayon d'activité moléculaire.

Par suite $\frac{dF}{dR}$ et $\frac{d^2F}{dR^2}$ seront supposés très petits, à moins que la distance $\sqrt{R}$ des deux molécules ne soit inférieure au rayon d'activité moléculaire.

Pour les termes tels que $\frac{d^2F}{dRdR'}$, il y a quelque chose de plus; soient m_1, m_2 les molécules dont la distance est $\sqrt{R}$; m_3, m_4, les molécules dont la distance est $\sqrt{R'}$; le terme $\frac{d^2F}{dRdR'}$ est négligeable, à moins que les molécules m_1, m_2, m_3, m_4 ne soient toutes les quatre à l'intérieur d'une sphère de rayon très petit (il ne suffit pas pour cela que R et R' soient très petits, il faut que les autres côtés du quadrilatère $m_1\,m_2\,m_3\,m_4$ le soient aussi); ces conditions sont absolument nécessaires.

Divisons le volume du corps en deux volumes partiels V' et V''; supprimons dans U_1 tous les termes pour lesquels $\sqrt{R}$ est supérieur au rayon d'activité moléculaire; nous distinguerons dans U_1 trois groupes de termes. Dans le premier, nous rangerons les termes tels que les deux molécules correspondantes m_1 et m_2 soient toutes deux à l'intérieur du volume V; soit U_1' la somme de ces termes; dans le second, nous placerons de même les termes tels que les molécules m_1 et m_2 soient toutes deux dans le volume V_1'', et nous désignerons leur somme par U_1''; enfin, le troisième groupe comprendra tous les autres termes, c'est-à-dire ceux pour lesquels, des deux molécules m_1 et m_2, l'une est dans le volume V', l'autre dans le volume V''; en appelant U_1''' la somme des termes du troisième groupe, nous aurons

$$U_1 = U_1' + U_1'' + U_1'''.$$

Dans U_2, nous effectuerons une décomposition analogue;

les termes tels que $\frac{dF}{dR}$, $\frac{d^2F}{dR^2}$ correspondent à un couple de molécules; les termes tels que $\frac{d^2F}{dRdR'}$, à deux couples de molécules, c'est-à-dire à trois ou quatre molécules. Il faut que les deux, trois ou quatre molécules soient toutes à l'intérieur d'une sphère très petite. Nous rangerons encore dans un premier groupe les termes tels que les molécules correspondantes soient *toutes* dans le volume V', et nous désignerons leur somme par U_2' ; nous définirons de même U_2'' ; enfin U_2''' comprendra les termes tels que les molécules correspondantes soient les unes à l'intérieur de V', les autres à l'intérieur de V''; nous aurons alors:

$$U_2 = U_2' + U_2'' + U_2'''.$$

Nous allons simplifier les expressions de U_1 et U_2. Occupons-nous d'abord de U_1 ; les termes qui entrent dans U_1''' sont excessivement moins nombreux que ceux qui forment U_1' ou U_1''. Ce sont en effet des termes tels que le vecteur m_1m_2 ait ses extrémités l'une dans le volume V', l'autre dans le volume V''. Ce vecteur est supposé inférieur au rayon d'activité moléculaire ; donc la distance de la molécule m_1 à la surface de séparation est plus petite que ce rayon; il en est de même pour m_2. Les molécules considérées sont donc comprises dans une zone étroite de part et d'autre de la surface de séparation et dont le volume est du même ordre de grandeur que le rayon d'activité moléculaire ; car nous supposons, bien entendu, que l'aire de la surface est finie. Le volume de la zone est donc très petit par rapport aux volumes V' et V'', et nous pouvons négliger U_1''' par rapport à U_1' et U_1'', c'est-à-dire écrire :

$$U_1 = U_1' + U_1''.$$

Un raisonnement analogue donnerait l'égalité exacte au même degré d'approximation :

$$U_2 = U_2' + U_2''.$$

Ces égalités expriment que, pour avoir les valeurs de U_1 et de U_2 relatives à un volume $V' + V''$, il suffit de faire la somme des valeurs relatives aux deux volumes partiels V' et V''.

Le théorème subsiste évidemment encore si l'on a un plus grand nombre de volumes partiels, à condition toutefois que ces volumes partiels soient très grands par rapport à la sphère d'activité moléculaire ; sinon la démonstration ne s'appliquerait plus.

Nous avons dit que nous supposions le rayon d'activité moléculaire très petit, sans préciser davantage ; nous admettrons qu'il l'est suffisamment pour qu'on puisse partager le corps en éléments très petits d'une manière absolue et cependant très grands par rapport au rayon d'activité moléculaire. Quand nous parlons d'éléments très petits d'une manière absolue, cela veut dire, d'abord, qu'ils sont très petits par rapport aux dimensions du corps ; ensuite, qu'à l'intérieur de chacun de ces volumes élémentaires nous aurons le droit de considérer ξ, η, ζ et leurs dérivées $\frac{d\xi}{dx}, \frac{d\xi}{dy}, \cdots \frac{d\zeta}{dz}$ comme des constantes. Soit $d\tau$ un de ces volumes, $W_1 d\tau$ la valeur de U_1

correspondante, $W_2\, d\tau$ la valeur de U_2. Comme les volumes sont très petits, nous pouvons, sans erreur sensible, remplacer le signe de sommation par le signe d'intégration et au lieu de :

$$U_1 = \sum W_1\, d\tau$$

$$U_2 = \sum W_2\, d\tau$$

écrire :

$$U_1 = \int W_1\, d\tau$$

$$U_2 = \int W_2\, d\tau$$

les intégrations s'étendant à tous les éléments $d\tau$ du volume du corps.

Les expressions de $W_1 d\tau$, $W_2 d\tau$ sont les suivantes :

$$W_1 d\tau = \sum \frac{dF}{dR} \rho_1$$

$$W_2 d\tau = \sum \frac{dF}{dR} \rho_2 + \frac{1}{2} \sum \frac{d^2F}{dR^2} \rho_1^2 + \sum \frac{d^2F}{dR\, dR'} \rho_1 \rho_1'$$

les sommations ne se rapportant qu'aux systèmes de molécules entièrement situés à l'intérieur du volume $d\tau$.

26. Étude de la fonction W_1. — Nous allons maintenant chercher les expressions de $W_1 d\tau$, $W_2 d\tau$; cela devient facile, car Dx, Dy, Dz sont maintenant des quantités très petites, puisqu'elles sont supposées de l'ordre du rayon d'activité moléculaire. Nous pouvons donc écrire :

$$\left\{\begin{aligned} D\xi &= \frac{d\xi}{dx}Dx + \frac{d\xi}{dy}Dy + \frac{d\xi}{dz}Dz \\ D\eta &= \frac{d\eta}{dx}Dx + \frac{d\eta}{dy}Dy + \frac{d\eta}{dz}Dz \\ D\zeta &= \frac{d\zeta}{dx}Dx + \frac{d\zeta}{dy}Dy + \frac{d\zeta}{dz}Dz \end{aligned}\right.$$

en négligeant les carrés de Dx, Dy, Dz.

Calculons la valeur de ρ_1 ; nous avons posé :

$$\rho_1 = 2\,(DxD\xi + DyD\eta + DzD\zeta).$$

On a donc :

$$\rho_1 = 2\frac{d\xi}{dx}Dx^2 + 2\frac{d\eta}{dy}Dy^2 + 2\frac{d\zeta}{dz}Dz^2 + 2\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right)DyDz + 2\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)DzDx + 2\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)DxDy$$

ou avec les notations adoptées :

$$\rho_1 = 2\,(\alpha_1 Dx^2 + \alpha_2 Dy^2 + \alpha_3 Dz^2 + \beta_1 DyDz + \beta_2 DzDx + \beta_3 DxDy)$$

Nous observons que ρ_1 est un polynôme homogène et linéaire par rapport aux quantités α et β ; mais $W_1 d\tau$ est homogène et du premier degré par rapport aux ρ_1 ; donc $W_1 d\tau$ est homogène et du premier degré par rapport aux α et aux β. Nous allons calculer ses coefficients. On peut écrire, pour abréger :

$$\rho_1 = 2\sum \alpha_1 Dx^2 + 2\sum \beta_1 DyDz,$$

et on a alors :

$$W_1 d\tau = 2\sum \alpha_1 \sum \frac{dF}{dR} Dx^2 + 2\sum \beta_1 \sum \frac{dF}{dR} DyDz;$$

les premiers signes de sommation se rapportent aux trois axes de coordonnées ; les autres, aux couples de molécules renfermées à l'intérieur du volume $d\tau$.

Supposons que dans l'état d'équilibre naturel les forces extérieures soient nulles ; on aura :

$$\frac{dU_1}{d\xi_i} = 0 \qquad \frac{dU_1}{d\eta_i} = 0 \qquad \frac{dU_1}{d\zeta_i} = 0.$$

Il en résulte que U_1 est identiquement nul ; c'est en effet un polynôme homogène et du premier degré par rapport aux ξ, η, ζ, et le théorème d'Euler donne :

$$U_1 = \sum\left(\xi_i \frac{dU_1}{d\xi_i} + \eta_i \frac{dU_1}{d\eta_i} + \zeta_i \frac{dU_1}{d\zeta_i}\right).$$

Donc, dans ce cas, $W_1 d\tau$ est identiquement nul ; les coefficients de ce polynôme sont alors tous nuls, et nous avons les six relations :

$$\sum \frac{dF}{dR} Dx^2 = 0 \qquad \sum \frac{dF}{dR} Dy^2 = 0 \qquad \sum \frac{dF}{dR} Dz^2 = 0$$

$$\sum \frac{dF}{dR} DyDz = 0 \qquad \sum \frac{dF}{dR} DzDx = 0 \qquad \sum \frac{dF}{dR} DxDy = 0.$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les forces extérieures soient nulles dans l'état d'équilibre naturel.

27. Étude de la fonction W_2. — Occupons-nous maintenant de $W_2 d\tau$; nous avons réparti ses termes en trois groupes. Considérons les termes du second et du troisième groupe, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}\sum\frac{d^2F}{dR^2}\rho_1^2 + \sum\frac{d^2F}{dRdR'}\rho_1\rho_1'.$$

Cet ensemble de termes est homogène et du second degré par rapport aux quantités ρ_1 ; par suite, il est homogène et du second degré par rapport aux α et β. Il y a donc 21 coefficients dans ces deux groupes de termes.

Pour calculer les termes du premier groupe, cherchons la valeur de ρ_2. On a :

$$\rho_2 = D\xi^2 + D\eta^2 + D\zeta^2.$$

D'ailleurs :

$$D\xi = \sum\frac{d\xi}{dx}Dx$$

$$D\xi^2 = \sum\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2Dx^2 + 2\sum\frac{d\xi}{dx}\frac{d\xi}{dy}DxDy$$

$$D\eta^2 = \sum\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2Dx^2 + 2\sum\frac{d\eta}{dx}\frac{d\eta}{dy}DxDy$$

$$D\zeta^2 = \sum\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2Dx^2 + 2\sum\frac{d\zeta}{dx}\frac{d\zeta}{dy}DxDy$$

Donc, si nous posons

$$\Pi_{xx} = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2$$

$$\Pi_{yz} = \frac{d\xi}{dy}\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\eta}{dy}\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\frac{d\zeta}{dz}$$

ou, quels que soient u et v :

$$\Pi_{uv} = \frac{d\xi}{du}\frac{d\xi}{dv} + \frac{d\eta}{du}\frac{d\eta}{dv} + \frac{d\zeta}{du}\frac{d\zeta}{dv}$$

nous aurons :

$$\rho_2 = \Pi_{xx}Dx^2 + \Pi_{yy}Dy^2 + \Pi_{zz}Dz^2 + 2\Pi_{yz}DyDz + 2\Pi_{zx}DzDx + 2\Pi_{xy}DxDy,$$

c'est-à-dire que ρ_2 est une combinaison linéaire des six polynômes Π. Le premier terme de $W_2 d\tau$ sera donc aussi une combinaison linéaire de ces six polynômes, et renfermera par suite six coefficients.

Il entre donc dans l'expression de $W_2 d\tau$ $21 + 6 = 27$ coefficients arbitraires. L'expression « coefficients arbitraires » signifie simplement que ces coefficients sont indéterminés si l'on ne précise pas la nature du corps, mais il est bien clair que, pour un corps donné, ces coefficients ont des valeurs parfaitement définies.

$W_2 d\tau$ est un polynôme homogène et du second degré par rapport aux neuf dérivées partielles de ξ, η, ζ ; mais ce polynôme n'est pas quelconque, car un polynôme homogène du second degré à neuf variables renferme en général $\frac{9.10}{2} = 45$ coefficients distincts, et l'on vient de voir qu'il n'y en a que 27.

Ces vingt-sept coefficients sont en général des fonctions de x, y, z ; si le corps est homogène, ce que nous supposerons presque toujours, ces coefficients sont des constantes.

28. Leur nombre peut se réduire considérablement dans divers cas. Lorsque les forces sont centrales, on a :

$$\frac{d^2F}{dRdR'} = 0,$$

et les termes du troisième groupe disparaissent. Si les forces extérieures sont nulles dans l'état d'équilibre naturel, c'est le premier groupe qui disparaît; c'est en effet une combinaison linéaire des polynômes Π ; le coefficient de Π_{xx} est:

$$\sum \frac{dF}{dR} Dx^2$$

et le coefficient de $2\Pi_{yz}$

$$\sum \frac{dF}{dR} DyDz,$$

et nous avons vu que ces coefficients sont nuls dans le cas qui nous occupe.

Il y a donc trois groupes de termes en général; le troisième disparaît dans le cas des forces centrales, le premier dans le cas où l'on suppose les forces extérieures nulles dans l'équilibre naturel, le second subsiste toujours.

Cherchons quelles simplifications sont apportées par la suppression du premier ou du troisième groupe; pour cela étudions de plus près le second. C'est une combinaison linéaire des quantités ρ_1^2 ; or ρ_1^2 est un polynôme du second degré par rapport aux α et aux β, dont les vingt et un coefficients sont fonctions seulement de Dx, Dy, Dz. Ces vingt et un coefficients sont donc liés par dix-huit relations. Parmi ces relations, celles qui ne sont pas linéaires ne subsistent pas lorsqu'on multiplie les ρ_1^2 par des quantités arbitraires telles que $\frac{d^2F}{dR^2}$ et qu'on les ajoute; au contraire, celles qui sont linéaires ont encore lieu entre les coefficients du groupe de termes que nous considérons. Nous obtiendrons donc le nombre de coefficients distincts que renferme le second groupe de termes de $W_2 d\tau$ en retranchant de vingt et un le nombre des relations linéaires qui existent entre les coefficients de ρ_1^2.

On a :

$$\rho_1 = 2\sum \alpha_1 Dx^2 + 2\sum \beta_1 Dy Dz,$$

et on voit facilement qu'il existe six relations linéaires entre les coefficients de ρ_1^2 ; trois de ces relations sont de la forme :

$$\text{coeff. de } 2\alpha_1\alpha_2 = \text{coeff. de } \beta_3^2,$$

et les trois autres de la forme:

$$\text{coeff. de } 2\beta_1\beta_2 = \text{coeff. de } 2\alpha_3\beta_z.$$

Donc il y a six relations linéaires entre les vingt et un coefficients du second groupe, et par suite il n'en reste que quinze réellement distincts. Nous pouvons dès lors résumer les résultats obtenus dans le tableau suivant :

<table>
<tr><th colspan="2">SI L'ON SUPPOSE :</th><th>IL SUBSISTE LES GROUPES DE TERMES SUIVANTS :</th><th>ET LE NOMBRE DES COEFFICIENTS DISTINCTS EST ÉGAL A :</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Les forces intérieures non centrales</td><td>Les forces extérieures non nulles dans l'état d'équilibre naturel.</td><td>1er, 2e, 3e</td><td>27</td></tr>
<tr><td>Les forces extérieures nulles dans l'état d'équilibre naturel.</td><td>1er, 2e</td><td>21</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Les forces intérieures centrales</td><td>Les forces extérieures non nulles dans l'état d'équilibre naturel.</td><td>2e, 3e</td><td>21</td></tr>
<tr><td>Les forces extérieures nulles dans l'état d'équilibre naturel.</td><td>2e</td><td>15</td></tr>
</table>

On peut remarquer que dans le cas où les forces extérieures sont supposées nulles dans l'état d'équilibre naturel, W_2 ne dépend que des α et des β, c'est-à-dire de la déformation; mais il n'en est pas de même si l'on ne fait pas cette hypothèse particulière. Il n'y a pas là de paradoxe, car si les forces extérieures ne sont pas nulles et si le corps se déplace sans se déformer, c'est-à-dire comme un solide invariable de la mécanique rationnelle, les α et les β sont nuls et cependant les forces extérieures produisent en général un travail.

29. Cas des corps isotropes. — Nous sommes arrivés à l'expression suivante de la fonction U :

$$U = U_0 + \int W_1 \, d\tau + \int W_2 d\tau,$$

les intégrations étant étendues à tous les éléments $d\tau$ du volume du corps ; W_1 est un polynôme homogène et du premier degré par rapport aux α et aux β ; W_2 est la somme d'un polynôme homogène et du second degré par rapport à ces mêmes quantités, et d'une combinaison linéaire des six polynômes Π.

Si le corps est isotrope, les polynômes W_1 et W_2 doivent être eux-mêmes isotropes. Le seul polynôme isotrope du premier degré est la dilatation cubique :

$$\theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}.$$

On a donc nécessairement :

$$W_1 = \gamma\theta.$$

W_2 est homogène et du second degré par rapport aux neuf dérivées; nous avons vu qu'il existe trois polynômes isotropes du second degré linéairement indépendants; nous pouvons prendre par exemple les trois suivants :

1° $$\theta^2 = \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right)^2,$$

2° $$\theta^2 - A_2 + 2C = \sum\sum\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2,$$

3° $$B = p^2 + q^2 + r^2;$$

p, q, r étant les composantes de la rotation moyenne; nous allons remplacer le troisième par une combinaison linéaire des deux derniers; nous avons :

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{4}\sum\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right)^2$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = \sum\left(\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz}\right)^2$$

Donc :

$$4(p^2 + q^2 + r^2) + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 =$$
$$2\left[\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2\right],$$

et par suite :

$$\sum\sum\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 - 2(p^2+q^2+r^2) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}{2}$$

Nous prendrons donc les trois polynômes isotropes suivants

1° $$\theta^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2$$

2° $$H = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}{2}$$

3° $$\Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz} = \sum\sum\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2;$$

et ces trois polynômes étant linéairement indépendants, W_2 en sera une combinaison linéaire, que nous écrirons, en adoptant les notations de Lamé :

$$W_2 = -\lambda \frac{\theta^2}{2} - \mu H + \nu (\Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz}).$$

30. Nous avons trouvé plus haut que W_2 est la somme de trois groupes de termes, le premier disparaissant lorsque les forces extérieures sont nulles dans l'état d'équilibre naturel, et le troisième lorsque les forces intérieures sont centrales. Le premier groupe est une combinaison linéaire des polynômes Π et l'ensemble des deux autres un polynôme homogène et du second degré par rapport aux α et aux β renfermant vingt et un coefficients arbitraires.

Il est aisé de voir que W_2 ne peut se mettre sous cette forme que d'une seule manière, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de relation linéaire entre les polynômes Π d'une part et les carrés et produits deux à deux des α et des β d'autre part. En effet, cette relation renfermerait nécessairement les Π, car les carrés et produits deux à deux des α et β sont indépendants; si nous annulons les α et les β, il en résultera une relation entre les Π. Pour annuler les α et β, supposons par exemple que le corps subisse une rotation infiniment petite, à la façon d'un solide invariable, c'est-à-dire posons

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{dy} = \frac{d\zeta}{dz} = 0$$
$$\frac{d\zeta}{dy} = -\frac{d\eta}{dz} = p$$
$$\frac{d\xi}{dz} = -\frac{d\zeta}{dx} = q$$
$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{d\xi}{dy} = r$$

nous trouverons

$$\Pi_{xx} = q^2 + r^2$$
$$\Pi_{yz} = -qr$$

et des valeurs analogues pour les autres polynômes Π ; on voit bien qu'ils sont indépendants.

Or, dans l'expression donnée pour W_2, dans le cas des corps isotropes, θ et H ne dépendent que des α et des β ; donc le terme

$$\nu\,(\Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz})$$

correspond au premier groupe des termes de W_2 tel que nous l'avions défini ; et l'ensemble des termes

$$-\lambda\frac{\theta^2}{2} - \mu H$$

correspond aux deux autres groupes.

Nous avons vu que le coefficient de α_1 dans $W_1 d\tau$ est

$$2\sum\frac{dF}{dR}\,Dx^2,$$

et que le coefficient de Π_{xx} dans $W_2 d\tau$ est

$$\sum\frac{dF}{dR}\,Dx^2,$$

D'autre part, dans le cas des corps isotropes, on a posé :

$$W_1 = \gamma\theta = \gamma\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$
$$W_2 = \nu\,(\Pi_{xx} + \dots) + \dots$$

On a donc :

$$\nu = \frac{\gamma}{2}.$$

Dans le cas où les forces extérieures sont nulles dans l'état d'équilibre naturel, on a :

$$\gamma = 0$$

et par suite :

$$\nu = 0$$

C'est le cas particulier qu'ont considéré Lamé et Clebsch ; nons n'avons pas cru devoir nous y restreindre.

Dans le cas des forces centrales, nous avons trouvé les relations des deux types

$$\begin{aligned} \text{Coeff. de } \beta_1 \quad &= \text{coeff. de } 2\alpha_2\alpha_3 \\ \text{Coeff. de } 2\beta_1\beta_2 &= \text{coeff. de } 2\alpha_3\beta_3 \end{aligned}$$

Les relations du second type sont satisfaites d'elles-mêmes, car les deux coefficients sont nuls ; celles du premier deviennent :

$$-\frac{\mu}{2} = -\frac{\lambda}{2}$$

ou :

$$\lambda = \mu.$$

Dans le cas des corps isotropes, il y a donc, en général, trois coefficients arbitraires, qui se réduisent à deux ou à un seul dans les cas où les 27 coefficients du cas général se réduiraient à 21 ou à 15 (1).

(1) Pour plus de détails sur les questions traitées dans ce chapitre, je renverrai à ma *Théorie mathématique de la Lumière*, pages 1 à 32.

CHAPITRE III

ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE. — PRESSIONS

31. Pour avoir les équations d'équilibre, nous allons appliquer le principe des vitesses virtuelles, c'est-à-dire, puisque les molécules sont supposées libres, écrire que la somme des travaux virtuels de toutes les forces, extérieures et intérieures, est nulle, quels que soient les déplacements virtuels $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$.

La somme des travaux des forces intérieures est δU ; quant aux forces extérieures, nous les diviserons en deux classes :

1° Les forces appliquées à toutes les molécules du corps (telles que la pesanteur). Soit $d\tau$ un élément de volume ; les forces appliquées aux diverses molécules de cet élément ont une résultante dont nous désignerons les composantes par $X d\tau$, $Y d\tau$, $Z d\tau$, car elle est du même ordre de grandeur que l'élément de volume. Nous la supposerons appliquée au centre de gravité de l'élément. L'on voit facilement que le couple résultant est, dans ces conditions, infiniment petit d'ordre supérieur et par suite négligeable.

Nous poserons :

$$X = X_1 + X_2$$
$$Y = Y_1 + Y_2$$
$$Z = Z_1 + Z_2$$

X_1, Y_1, Z_1 étant les valeurs de X, Y, Z dans l'état d'équilibre naturel ; X_2, Y_2, Z_2 sont les forces additionnelles qui font passer le corps élastique de l'état d'équilibre naturel à l'état d'équilibre contraint : ce sont les forces déformantes ;

2° Les forces appliquées seulement aux molécules superficielles. Soit $d\omega$ un élément de la surface du corps ; nous désignerons par $P_x d\omega$, $P_y d\omega$, $P_z d\omega$ les projections de la résultante des forces appliquées à cet élément (le couple résultant étant nul comme précédemment).

Écrivons l'équation des vitesses virtuelles. Le travail des forces intérieures est :

$$\delta U = \delta \int (W_1 + W_2)\, d\tau = \int \delta\, (W_1 + W_2)\, d\tau,$$

celui des forces extérieures est :

$$\int (X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta)\, d\tau + \int (P_x\delta\xi + P_y\delta\eta + P_z\delta\zeta)\, d\omega$$

la première intégrale étant étendue à tout le volume, la seconde à toute la surface du corps élastique. L'équation s'écrira donc :

$$\int \delta\, (W_1 + W_2)\, d\tau + \int (X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta)\, d\tau$$
$$+ \int (P_x\delta\xi + P_y\delta\eta + P_z\delta\zeta)\, d\omega = 0$$

32. Transformation de l'équation. — L'expression $W_1 + W_2$ est un polynôme du deuxième degré par rapport aux neuf dérivées partielles $\frac{d\xi}{dx} \cdots\cdots \frac{d\zeta}{dz}$. Désignons par

$$A, B, C, A' \ldots C''$$

ses dérivées par rapport à ces neuf quantités, de façon que l'on ait :

$$\delta (W_1 + W_2) = A\delta \frac{d\xi}{dx} + B\delta \frac{d\xi}{dy} + C\delta \frac{d\xi}{dz} + \cdots + C''\delta \frac{d\zeta}{dz}$$

Écrivons, pour simplifier, l'équation des vitesses virtuelles en supposant $\delta\eta = \delta\zeta = 0$ (puisque les déplacements virtuels sont arbitraires, cela est légitime). Nous aurons puisque :

$$\delta \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\delta\xi}{dx}$$

$$\int \left(A \frac{d\delta\xi}{dx} + B \frac{d\delta\xi}{dy} + C \frac{d\delta\xi}{dz}\right) d\tau + \int X\delta\xi d\tau + \int P_x \delta\xi d\omega = 0$$

Nous allons transformer la première intégrale en intégrant par parties. Pour cela rappelons une formule importante en physique mathématique : soient F une fonction quelconque, $d\tau$ un élément de volume pris à l'intérieur d'une surface fermée, $d\omega$ un élément de cette surface, l, m, n les cosinus directeurs de la normale à cet élément, dirigée vers l'extérieur ; on a :

$$\int l F d\omega = \int \frac{dF}{dx} d\tau.$$

En posant $F = UV$ cette formule devient :

$$\int U \frac{dV}{dx} d\tau = \int lUVd\omega - \int V \frac{dU}{dx} d\tau.$$

On a donc :

$$\int A \frac{d\delta\xi}{dx} d\tau = \int lA\delta\xi d\omega - \int \delta\xi \frac{dA}{dx} d\tau,$$

et par suite :

$$\int \left(A \frac{d\delta\xi}{dx} + B \frac{d\delta\xi}{dy} + C \frac{d\delta\xi}{dz}\right) d\tau$$
$$= \int (Al + Bm + Cn)\, \delta\xi d\omega - \int \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right) \delta\xi d\tau.$$

L'équation des vitesses virtuelles devient alors :

$$\int (Al + Bm + Cn + P_x)\, \delta\xi d\omega + \int \left(X - \frac{dA}{dx} - \frac{dB}{dy} - \frac{dC}{dz}\right) \delta\xi d\tau = 0.$$

Cette équation devant avoir lieu quels que soient les déplacements, on en conclut :

$$Al + Bm + Cn + P_x = 0$$
$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} - X = 0$$

la première équation devant être satisfaite sur toute la surface du corps et la seconde dans tout le volume.

On obtiendrait de même :

$$
\begin{aligned}
&A'l + B'm + C'n + P_y = 0\\
&A''l + B''m + C''n + P_z = 0\\
&\frac{dA'}{dx} + \frac{dB'}{dy} + \frac{dC'}{dz} - Y = 0\\
&\frac{dA''}{dx} + \frac{dB''}{dy} + \frac{dC''}{dz} - Z = 0
\end{aligned}
$$

33. On peut se demander ce que deviennent nos équations d'équilibre quand on suppose que les molécules du corps élastique, au lieu d'être libres, sont soumises à des liaisons. Supposons, pour simplifier, qu'il y ait une seule équation de liaison

$$J = 0,$$

J dépendra des dérivées partielles de ξ, η, ζ ; nous pourrons supposer, par exemple, qu'il dépend seulement des neuf dérivées du premier ordre, et que c'est une fonction linéaire de ces neuf dérivées.

L'équation d'équilibre du N° 31 s'écrivait :

$$
(1) \quad \int \delta\,(W_1 + W_2)\,d\tau + \int (X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta)\,d\tau
+ \int (P_x\delta\xi + P_y\delta\eta + P_z\delta\zeta)\,d\omega = 0 ;
$$

et dans le cas où les molécules étaient supposées libres, elle devait être satisfaite *quels que soient les accroissements virtuels* $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$.

S'il y a une liaison, cette équation devra encore être satisfaite *mais seulement quand les accroissements virtuels* $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$

seront compatibles avec la liaison c'est-à-dire tels que :

$$\delta J = 0.$$

On aura alors, quel que soit λ :

$$(2) \int \delta (W_1 + W_2 + \lambda J)\, d\tau + \int (X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta)\, d\tau$$
$$+ \int (P_x\delta\xi + P_y\delta\eta + P_z\delta\zeta)\, d\omega = 0$$

Les principes du calcul des variations nous apprennent alors que l'on peut trouver une fonction λ de x, y, z telle que l'équation (2) soit satisfaite quels que soient les accroissements virtuels $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ *et quand même ils ne seraient pas compatibles avec la liaison.*

J'ajoute que λ dépend de x, y, z, mais non de ξ, η, ζ, de telle façon que $\delta\lambda$ est toujours nul.

L'équation (2) pourrait ensuite être transformée comme l'équation (1) l'a été dans le N° 32. Dans ce N° nous avons posé :

$$A = \frac{d\,(W_1 + W_2)}{d\,\dfrac{d\xi}{dx}};\ \text{etc.}$$

Nous poserons de même ici :

$$A = \frac{d\,(W_1 + W_2 + \lambda J)}{d\,\dfrac{d\xi}{dx}},\ \text{etc.}$$

Des raisonnements tout pareils à ceux du N° 32 nous conduiraient alors aux mêmes équations d'équilibre :

$$Al + Bm + Cn + P_x = 0$$
$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = X,\ \text{etc.}$$

Il suffit donc pour obtenir les nouvelles équations d'équilibre de remplacer dans les anciennes $W_1 + W_2$ par :

$$W_1 + W_2 + \lambda J.$$

Nous avons alors une fonction inconnue de plus qui est λ, mais en revanche nous avons une équation de plus qui est :

$$J = 0.$$

Il est alors aisé de comprendre que nous ne restreignons pas la généralité en supposant qu'il n'y a pas de liaison.

En effet, si nous avons une équation de liaison

$$J = 0,$$

nous arrivons au même résultat en supprimant cette équation et en remplaçant $W_1 + W_2$ par $W_1 + W_2 + hJ^2$, h étant un nombre très grand. Pour que l'énergie reste finie, il faut d'abord que J soit très petit, d'où l'on déduit :

$$J = 0.$$

D'autre part, il vient :

$$A = \frac{d(W_1 + W_2 + hJ^2)}{d\frac{d\xi}{dx}} = \frac{d(W_1 + W_2)}{d\frac{d\xi}{dx}} + 2hJ\frac{dJ}{d\frac{d\xi}{dx}}$$

ou en posant $2hJ = \lambda$:

$$A = \frac{d(W_1 + W_2 + \lambda J)}{d\frac{d\xi}{dx}},$$

ce qui est l'équation trouvée plus haut. Le nombre h est très grand, J très petit et le produit $2hJ = \lambda$ est fini.

Le cas particulier le plus intéressant est celui des corps incompressibles. Dans ce cas $J = \theta$ (Cf. *Théorie mathématique de la Lumière. Théorie de la double Réfraction de Fresnel*, page 230).

34. Les théories qui précèdent ont un inconvénient grave : elles reposent sur un certain nombre d'hypothèses moléculaires qui peuvent être révoquées en doute. Il n'en est pas de même des théories fondées sur la thermodynamique, et qui d'ailleurs conduisent aux mêmes équations.

Supposons l'équilibre atteint et considérons une déformation virtuelle quelconque, telle que les composantes ξ, η, ζ du déplacement subissent des accroissements virtuels $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$. D'après le principe de la conservation de l'énergie, l'accroissement δU de l'énergie interne sera égal au travail δV des forces extérieures, plus la chaleur δQ empruntée au dehors, multipliée par l'équivalent mécanique de la chaleur. J'écris :

$$\delta U = \delta V + E\delta Q.$$

Nous avons évidemment :

$$\delta V = \int (X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta)\, d\tau + \int (P_x\delta\xi + P_y\delta\eta + P_z\delta\zeta)\, d\omega$$

Soient, d'autre part, S l'entropie, T la température absolue.

La déformation doit être réversible ; car nous supposons que la limite d'élasticité n'est pas dépassée ; on a donc :

$$\delta Q = T\delta S.$$

D'autre part, T doit être supposé constant et $\delta T = 0$; sans cela, les déformations dues à l'élasticité se trouveraient compliquées de celles qui sont produites par la dilatation thermométrique. On en conclut:

$$\delta Q = \delta\,(ST)$$

et

$$\delta V + \delta\,(EST - U) = 0.$$

Cherchons l'expression de EST — U. C'est ce que M. Duhem appelle le potentiel thermodynamique.

Ce potentiel dépend évidemment des déformations subies par le corps. Mais l'expérience nous apprend que deux petites portions du corps situées à une distance finie l'une de l'autre (c'est-à-dire plus grande que ce que l'on est convenu d'appeler le rayon d'activité moléculaire) ne peuvent avoir l'une sur l'autre aucune action.

En raisonnant comme nous l'avons fait plus haut, on peut décomposer le corps en un très grand nombre d'éléments de volume très petits que nous appellerons $d\tau$, et écrire:

$$EST - U = \int W d\tau,$$

W étant une fonction dépendant seulement de la déformation subie par le petit volume $d\tau$.

Décomposons à son tour l'élément $d\tau$ en volumes encore plus petits. Soit R le carré de la distance de deux de ces volumes dans l'état d'équilibre naturel, $R + \rho$ ce que devient ce carré dans l'état d'équilibre contraint. Il est clair que W doit être une fonction des ρ, et comme ces quantités sont très petites, il est naturel de supposer que W est développable suivant les puissances des ρ; nous négligerons d'ailleurs, comme nous l'avons fait jusqu'ici, les cubes de ces quantités. On reconnaîtrait alors par un raisonnement tout semblable à celui des numéros précédents et en faisant attention que les dimensions de l'élément $d\tau$ sont très petites, que :

$$W = W_1 + W_2,$$

W_1 et W_2 étant deux polynômes homogènes, le premier linéaire, le second quadratique par rapport aux neuf dérivées partielles de ξ, η, ζ par rapport à x, y et z, et de la forme indiquée plus haut.

Nous retrouvons alors (en remplaçant δV et EST — U par leurs valeurs) l'équation du N° 31.

$$\int \delta (W_1 + W_2)\, d\tau + \int (X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta)\, d\tau$$
$$+ \int (P_x\delta\xi + P_y\delta\eta + P_z\delta\zeta)\, d\omega = 0.$$

Ces raisonnements, qui ne s'appuient que sur les principes fondamentaux de la thermodynamique, conduisent donc aux mêmes équations d'équilibre que les hypothèses moléculaires ordinairement admises. La concordance des résultats expérimentaux avec ces équations ne peut donc être invoquée comme une preuve de la légitimité de ces hypothèses.

35. Pressions. — Nous avons supposé les intégrations étendues au corps tout entier ; ce fait ne joue aucun rôle dans les démonstrations ; nous aurions trouvé les mêmes équations en considérant une portion seulement du corps élastique. Soit Σ la surface fermée qui limite cette portion ; si nous supprimons toutes les molécules extérieures à Σ et que nous appliquions à tous les éléments de Σ des forces

$$P_x d\omega, \qquad P_y d\omega, \qquad P_z d\omega,$$

l'équilibre ne sera pas troublé si nous supposons P_x, P_y, P_z déterminés par les équations :

$$\begin{aligned} Al + Bm + Cn + P_x &= 0 \\ A'l + B'm + C'n + P_y &= 0 \\ A''l + B''m + C''n + P_z &= 0 \end{aligned}$$

l, m, n désignant maintenant les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\omega$ de Σ. Les quantités P_x, P_y, P_z définies ainsi sont dites composantes de la pression par unité de surface.

Nous allons les étudier d'abord dans l'état d'équilibre naturel.

Cherchons en premier lieu les pressions sur les éléments perpendiculaires aux axes de coordonnées ; si on suppose $d\omega$ perpendiculaire à ox, on a :

$$l = 1 \qquad m = 0 \qquad n = 0$$

et par suite :

$$P_x = -A.$$

$-A$ est donc la composante normale de la pression qui s'exerce sur un élément perpendiculaire à ox, $-A'$ et $-A''$ en sont les composantes tangentielles. Nous connaissons maintenant l'interprétation physique des neuf quantités A, ... C''; nous allons indiquer des relations importantes qu'elles vérifient dans certains cas.

Nous avons posé :

$$A = \frac{d\,(W_1 + W_2)}{d\,\dfrac{d\xi}{dx}}$$

nous écrirons :

$$A_1 = \frac{dW_1}{d\frac{d\xi}{dx}} \qquad A_2 = \frac{dW_2}{d\frac{d\xi}{dx}}$$

$$A = A_1 + A_2.$$

Les A_1 sont des constantes, les A_2 sont homogènes et du premier degré par rapport aux neuf dérivées.

W_1 ne dépend que des α et β, il en résulte :

$$\frac{dW_1}{d\frac{d\xi}{dy}} = \frac{dW_1}{d\beta_3} \cdot \frac{d\beta_3}{d\frac{d\xi}{dy}} = \frac{dW_1}{d\beta_3}$$

$$\frac{dW_1}{d\frac{d\eta}{dx}} = \frac{dW_1}{d\beta_3} \frac{d\beta_3}{d\frac{d\eta}{dx}} = \frac{dW_1}{d\beta_3}$$

car $\beta_3 = \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}$ et les autres α et β ne dépendent pas de ces deux dérivées. On a donc les relations :

$$A_1' = B_1 \qquad A_1'' = C_1 \qquad B_1'' = C_1',$$

c'est-à-dire que le déterminant des A forme un tableau symétrique.

Pour qu'il en soit de même du déterminant des A_2, il faut que W_2 ne dépende que des α et β, c'est-à-dire que les polynômes Π_{xx}, ... disparaissent dans son expression, ce qui exige que les forces extérieures soient nulles dans l'état d'équilibre naturel. Nous ne faisons pas en général cette hypothèse ; le déterminant des A_2, et par suite celui des A, n'est donc pas en général symétrique.

Mais il l'est toujours dans l'état d'équilibre naturel, car les neuf dérivées partielles sont alors nulles ; il en est de même des A_2, qui sont des fonctions linéaires et homogènes de ces neuf dérivées, et les A se réduisent aux A_1. On a donc dans l'état d'équilibre naturel :

$$A' = B \quad A'' = C \quad B'' = C'.$$

36. Démonstrations élémentaires. — On peut démontrer facilement ces égalités en cherchant les conditions d'équilibre d'un parallélipipède infiniment petit, ayant ses arêtes parallèles aux axes.

Ecrivons que la somme des moments de toutes les forces par rapport à un axe parallèle à oz et passant par le centre du parallélipipède est nulle, en ne conservant que les termes du troisième ordre. Le bras de levier sera infiniment petit du premier ordre au moins ; nous devons donc négliger les forces du troisième ordre, par exemple la force $Xd\tau$, $Yd\tau$, $Zd\tau$.

Parmi les pressions qui sont du second ordre, il n'y a pas à tenir compte de celles qui rencontrent oz ou lui sont parallèles ; en les éliminant, il ne reste que les composantes parallèles à oy sur les faces perpendiculaires à ox et les composantes parallèles à ox sur les faces perpendiculaires à oy. On a ainsi deux couples ; en écrivant qu'ils se font équilibre, on obtient :

$$B = A',$$

et on aurait de même les autres égalités.

Nous emploierons désormais les notations de Lamé ; c'est-à-dire nous posons :

$$A = -N_1 \quad B' = -N_2 \quad C'' = -N_3$$
$$B'' = C' = -T_1 \quad A'' = C = -T_2 \quad A' = B = -T_3$$

et les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned} P_x &= lN_1 + mT_3 + nT_2 \\ P_y &= lT_3 + mN_2 + nT_1 \\ P_z &= lT_2 + mT_1 + nN_3 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + X = o \\ &\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + Y = o \\ &\frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} + Z = o \end{aligned}\right.$$

l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale extérieure, de sorte que, lorsque les quantités N_1, N_2, N_3 sont positives, ce sont non des pressions, mais des tensions.

On peut démontrer ces équations d'une manière élémentaire.

Considérons d'abord un tétraèdre oABC, dont les arêtes oA, oB, oC sont parallèles aux axes ; soient $d\omega$ la surface de ABC, et l, m, n les cosinus directeurs de la normale extérieure ; les surfaces de oBC, oCA, oAB sont $ld\omega$, $md\omega$, $nd\omega$; en écrivant que la somme des projections des forces appliquées au tétraèdre est nulle, et en négligeant la force extérieure qui est de l'ordre du volume, c'est-à-dire du troisième ordre, on a :

$$P_x d\omega - N_1 l d\omega - T_3 m d\omega - T_2 n d\omega = o$$

c'est-à-dire :

$$P_x = N_1 l + T_3 m + T_2 n.$$

Pour le second groupe d'équations, considérons un parallélipipède, et écrivons que la somme algébrique des projections des forces sur ox est nulle. Pour l'une des faces perpendiculaires à ox, on a $-N_1 dydz$ et sur l'autre

$$+\left(N_1 + \frac{dN_1}{dx}\,dx\right)dydz,$$

car les forces sont appliquées aux centres de gravité des faces. On obtient ainsi :

$$Xd\tau + \frac{dN_1}{dx}\,dx.dydz + \frac{dT_3}{dy}\,dy.dzdx + \frac{dT_2}{dz}\,dz.dxdy = 0;$$

et puisque $d\tau = dxdydz$ on a précisément l'équation qu'il s'agit de démontrer.

Cherchons les expressions des N et des T.

W_1 est homogène et du premier degré par rapport aux α et aux β, et l'on a :

$$-N_i = \frac{dW_1}{d\alpha_i} \qquad -T_i = \frac{dW_1}{d\beta_i}$$

Donc :

$$W_1 = -\sum(N_i\alpha_i + T_i\beta_i)$$

Or :

$$W_1 d\tau = \sum \frac{dF}{dR}\,\rho_1.$$

Si l'on se rappelle l'expression de ρ_1 en fonction des α et des β, on voit que le coefficient de α_1 est

$$2\sum \frac{dF}{dR}\,Dx^2$$

et celui de β_1

$$2\sum \frac{dF}{dR}\,DyDz.$$

Nous avons donc :

$$N_1 d\tau = -2\sum \frac{dF}{dR} Dx^2$$

$$T_1 d\tau = -2\sum \frac{dF}{dR} DyDz$$

37. Ellipsoïde des pressions. — Soit M un point de coordonnées x, y, z ; M' un point voisin $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Posons :

$$N_1 dx^2 + N_2 dy^2 + N_3 dz^2 + 2T_1 dydz + 2T_2 dzdx + 2T_3 dxdy = \varepsilon^2,$$

ε étant une constante quelconque. Le point M' sera sur un ellipsoïde que l'on appelle ellipsoïde des pressions relatif au point M.

Les composantes de la pression par unité de surface sur un élément plan dont la normale a pour cosinus directeurs α, β, γ, sont :

$$N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma$$
$$T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma$$
$$T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma$$

Sa direction est le diamètre conjugué du plan par rapport à l'ellipsoïde des pressions. Cet ellipsoïde a donc une signification physique, il est par suite indépendant du choix des axes.

Dans le cas particulier où le corps est homogène et isotrope et les forces extérieures nulles dans l'état d'équilibre naturel, on peut donner à son équation une forme simple, sur laquelle cette dernière propriété est en évidence.

On a alors :

$$W_1 = 0$$

$$W_2 = -\lambda \frac{\theta^2}{2} - \mu H$$

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{d\xi}{dx}$$

$$T_1 = \mu \left(\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz}\right)$$

Soit $MM' = dS$; après le déplacement, MM' devient

$$M_1M_1' = dS + d\sigma.$$

Le rapport $\frac{d\sigma}{dS}$ est infiniment petit du même ordre de grandeur que ξ, η, ζ ; nous négligerons son carré. Nous avons alors

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$dSd\sigma = dxd\xi + dyd\eta + dzd\zeta$$

et l'équation de l'ellipsoïde des pressions devient

$$\varepsilon^2 = \lambda\theta\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2\mu\left(\frac{d\xi}{dx}dx^2 + \frac{d\xi}{dy}dxdy + \frac{d\xi}{dz}dxdz\right)$$
$$+ 2\mu\left(\frac{d\eta}{dx}dxdy + \frac{d\eta}{dy}dy^2 + \frac{d\eta}{dz}dydz\right) + \ldots..$$

$$\varepsilon^2 = \lambda\theta dS^2 + 2\mu\,(d\xi dx + d\eta dy + d\zeta dz)$$

$$\varepsilon^2 = \lambda\theta dS^2 + 2\mu dSd\sigma$$

et sous cette forme, d'ailleurs utile et intéressante en elle-même, on voit bien qu'il ne dépend pas du choix des axes.

38. Autres définitions de la pression. — On dit quelquefois pour définir la pression : soit une surface Σ intérieure au corps élastique ; supprimons la partie du corps extérieure à Σ ; la pression sur un élément $d\omega$ de Σ est la force qu'il faut lui appliquer pour remplacer l'action de la partie supprimée. Cette définition a un double défaut :

1° Il n'est pas évident qu'il est possible de rétablir l'équilibre en appliquant à chaque élément $d\omega$ de Σ une force auxiliaire (car on ne considère pas des corps rigides comme en mécanique rationnelle). Il n'est surtout pas évident que, si l'on considère deux surfaces tangentes Σ et Σ', la définition donnera la même valeur pour la pression sur l'élément de contact $d\omega$, qu'on le suppose appartenir à Σ ou à Σ';

2° En admettant qu'il soit possible de rétablir l'équilibre par ces forces, il faudrait encore prouver que cela n'est possible que d'une seule manière ; sans quoi, les pressions ne seraient pas définies.

39. Définitions de Navier et de Lamé. — Considérons un élément de surface $d\omega$ et deux molécules m_1 et m_2 situées de part et d'autre de cet élément, de telle façon que la droite qui les joint perce l'élément $d\omega$.

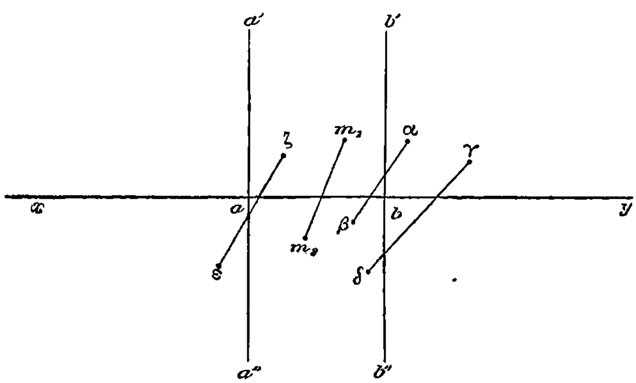
Navier appelle pression sur l'élément $d\omega$, la résultante des actions de toutes les molécules telles que m_1 sur toutes les molécules telles que m_2, ces forces étant supposées transportées au centre de gravité de l'élément. L'élément appartenant à une surface fermée, on considère l'action des molécules extérieures sur les molécules intérieures.

Lamé procède un peu différemment; il prolonge le plan de $d\omega$ et considère le cylindre droit ayant pour base $d\omega$ et situé d'un côté de ce plan. Soit m_2 une molécule de ce cylindre; m_1, une molécule située au-dessus du plan; on composera toutes les actions telles que celle de m_1 sur m_2.

On pourrait aussi considérer un cylindre droit indéfini, divisé en deux par l'élément $d\omega$, et composer les actions des molécules d'une moitié du cylindre sur celles de l'autre moitié.

Ainsi, sur la figure, j'ai représenté en ab l'élément $d\omega$, en xy le plan de cet élément prolongé, en $a'b'a''b''$ le cylindre droit qui a cet élément pour base.

Le couple m_1m_2 figure dans les trois définitions, le couple $\alpha\beta$ dans celles de Navier et de Lamé, mais non dans la troi-



sième, le couple $\gamma\delta$ dans celle de Lamé, mais non dans celle de Navier, le couple $\varepsilon\zeta$ dans celle de Navier, mais non dans celle de Lamé. J'ajoute d'ailleurs que, pour qu'un seul couple de molécules puisse figurer dans la troisième définition, il faut qu'il figure dans les deux autres.

Ces trois définitions sont en apparence très différentes ; il est cependant aisé de voir qu'elles reviennent au même quand on suppose l'élément $d\omega$ très grand par rapport au rayon d'activité moléculaire.

Observons en effet que les distances m_1m_2, $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\varepsilon\zeta$ doivent être plus petites que ce rayon.

Or parmi les couples de molécules que l'on considère il y en a un très grand nombre comme $m_1 m_2$ qui sont communs aux trois définitions. Les autres comme $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\varepsilon\zeta$ sont tels que la distance de chacune des molécules qui les composent au périmètre de $d\omega$ est moindre que le rayon d'activité moléculaire ; leur nombre est donc très petit par rapport au nombre total, et par suite la valeur obtenue pour la pression est la même quelle que soit celle de ces définitions qu'on adopte, puisque les termes qui figurent dans l'une et non dans l'autre sont toujours négligeables.

Nous allons calculer cette valeur en partant de la troisième définition, et vérifier qu'elle est identique avec celle que nous avons trouvée en appliquant le principe des vitesses virtuelles.

Désignons par $N_1' d\omega$, $T_3' d\omega$, $T_2' d\omega$ ses composantes sur un élément $d\omega$ perpendiculaire à ox. L'attraction de deux molécules m_1 et m_2 est avec les notations adoptées

$$-\frac{dF}{d\sqrt{R}} = -2\frac{dF}{dR}\sqrt{R}\,;$$

les cosinus directeurs de $m_1 m_2$ sont

$$\frac{Dx}{\sqrt{R}},\ \frac{Dy}{\sqrt{R}},\ \frac{Dz}{\sqrt{R}}$$

On a donc :

$$N_1' d\omega = -2\sum \frac{dF}{dR} Dx$$

$$T_3' d\omega = -2\sum \frac{dF}{dR} Dy$$

$$T_2' d\omega = -2\sum \frac{dF}{dR} Dz$$

les sommations s'étendant aux couples de molécules spécifiés dans la définition ; c'est-à-dire que pour la troisième définition il faut prendre pour m_1 toutes les molécules situées dans le cylindre droit de base $d\omega$, d'un côté de $d\omega$ et pour m_2 les molécules situées dans le même cylindre de l'autre côté de $d\omega$.

Considérons la portion de ce cylindre renfermée entre deux sections droites très voisines, de distance h, comprenant entre elles l'élément $d\omega$. Soient :

$$x = x_0$$
$$x = x_0 + h$$

les équations de ces sections droites ;

$$x = x'$$

l'équation du plan $d\omega$; et enfin x et $x + \mathrm{D}x$ les abscisses de m_1 et m_2 ; on a :

$$(\alpha) \qquad x < x' < x + \mathrm{D}x$$

Nous pouvons donc poser :

$$\mathrm{N}'_1 d\omega = -2\sum \varepsilon \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{R}} \mathrm{D}x,$$

la sommation étant étendue à tous les couples de molécules comprises à l'intérieur de l'élément de volume $d\tau = h d\omega$; mais ε étant égal à un lorsque les inégalités (α) sont vérifiées, et à zéro dans le cas contraire. Multiplions par dx' et intégrons de x_0 à $x_0 + h$; il viendra

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \mathrm{N}'_1 d\omega dx' = -2\sum \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{R}} \mathrm{D}x dx'.$$

Nous supposerons $d\tau$ assez petit pour qu'à l'intérieur de cet élément le corps puisse être considéré comme homogène. N'_1 est alors une constante, et on a

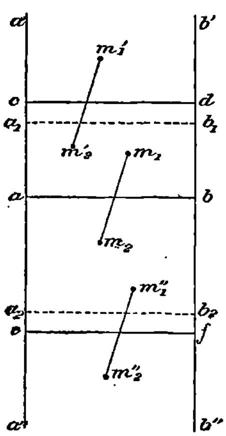
$$\int_{x_0}^{x_0+h} N'_1 d\omega dx' = N'_1 d\omega \int_{x_0}^{x_0+h} dx' = N'_1 h d\omega = N'_1 d\tau.$$

On a ensuite :

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon \frac{dF}{dR} Dx dx' = \int_{x}^{x_0+Dx} \frac{dF}{dR} Dx dx' = \frac{dF}{dR} Dx^2,$$

car ε est nul lorsque x' n'est pas compris entre x et $x + Dx$ et égal à un dans le cas contraire.

On suppose, bien entendu, que m_1 et m_2 sont toutes deux à l'intérieur de l'élément $d\tau$; mais les couples de molécules comme $m'_1 m'_2$, $m''_1 m''_2$ pour lesquels cette condition n'est pas réalisée sont beaucoup moins nombreux que les autres et par suite négligeables. On a donc :



$$N'_1 d\tau = -2 \sum \frac{dF}{dR} Dx^2 = N_1 d\tau$$

Donc :

$$N_1 = N'_1,$$

ce qui est bien l'égalité que nous avions en vue.

Sur la figure $a'b'a''b''$ représente notre cylindre indéfini, ab une section droite quelconque $d\omega$, cd et ef les deux bases du cylindre limité $d\tau$.

Le couple m_1m_2 figure dans la définition de N'_1 et dans celle de N_1 ; les couples $m'_1m'_2$ et $m''_1m''_2$ ne figurent pas dans la définition de N_1 ; mais ils figurent dans celle de N'_1 quand on suppose que la section droite $d\omega$ vient en a_1b_1 (ou en a_2b_2), de manière à couper les droites $m'_1m'_2$ (ou $m''_1m''_2$) ; cela ne peut avoir lieu que si la distance de la section droite $d\omega$ à l'une des bases est plus petite que le rayon d'activité et par conséquent très petite par rapport à la hauteur.

40. Pressions dans l'équilibre contraint. — Nous avons vu qu'on n'a pas en général (lorsque W_2 renferme les polynômes Π) les égalités

$$A' = B \qquad A'' = C \qquad B'' = C'.$$

Il semblerait donc que la projection sur l'axe des y de la pression qui s'exerce sur un élément perpendiculaire à ox n'est pas égale à la projection sur ox de la pression qui s'exerce sur un élément perpendiculaire à oy.

Cela paraît assez invraisemblable, car cette égalité a lieu dans l'état d'équilibre naturel que nous avons choisi arbitrairement et que rien ne distingue des états d'équilibre que nous appelons contraints. D'autre part, nous en avons donné une démonstration élémentaire, d'ailleurs classique, qui s'applique à tous les cas.

Il est aisé d'expliquer cette apparence de paradoxe. Il n'est pas vrai que $-Ad\omega$, $-A'd\omega$, $-A''d\omega$ soient les projections sur les axes de la pression sur un élément, d'aire $d\omega$, perpendiculaire à ox ; ce sont les composantes de la pression qui s'exerce sur un élément qui *avant la déformation* avait pour aire $d\omega$ et était perpendiculaire à ox.

La déformation change l'aire et la direction de cet élément. Supposons que ce soit un rectangle $dydz$ de côtés parallèles aux axes. Les projections des côtés qui étaient

$$\begin{matrix} 0, & dy, & 0 \\ 0, & 0, & dz \end{matrix}$$

deviennent

$$\begin{matrix} \dfrac{d\xi}{dy}\,dy, & \left(1+\dfrac{d\eta}{dy}\right)dy, & \dfrac{d\zeta}{dy}\,dy \\ \dfrac{d\xi}{dz}\,dz, & \dfrac{d\eta}{dz}\,dz, & \left(1+\dfrac{d\zeta}{dz}\right)dz, \end{matrix}$$

et les projections sur les plans de coordonnées de l'aire du parallélogramme formé par ces deuxdroit es sont, d'après une formule connue,

$$\begin{vmatrix} 1+\dfrac{d\eta}{dy} & \dfrac{d\zeta}{dy} \\ \dfrac{d\eta}{dz} & 1+\dfrac{d\zeta}{dz} \end{vmatrix} dydz, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{d\zeta}{dy} & \dfrac{d\xi}{dy} \\ 1+\dfrac{d\zeta}{dz} & \dfrac{d\xi}{dz} \end{vmatrix} dydz, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{d\xi}{dy} & 1+\dfrac{d\eta}{dy} \\ \dfrac{d\xi}{dz} & \dfrac{d\eta}{dz} \end{vmatrix} dydz,$$

c'est-à-dire, en négligeant les carrés des dérivées (sur le plan),

$$\begin{matrix} \text{des } yz & d\omega\left(1+\dfrac{d\eta}{dy}+\dfrac{d\zeta}{dz}\right) \\ \text{des } zx & -\,d\omega\,\dfrac{d\xi}{dy} \\ \text{des } xy & -\,d\omega\,\dfrac{d\xi}{dz} \end{matrix}$$

Il est donc facile d'exprimer A, A′, A″, en fonction des pressions qui s'exercent sur les éléments perpendiculaires aux axes, et que nous continuerons à désigner par N et par T (les pressions tangentielles étant égales deux à deux d'après la démonstration élémentaire qui a été donnée). Nous aurons :

$$-A = N_1\left(1 + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) - T_3\frac{d\xi}{dy} - T_2\frac{d\xi}{dz}$$

$$-A' = T_3\left(1 + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) - N_2\frac{d\xi}{dy} - T_1\frac{d\xi}{dz}$$

. . . .

$$-B = T_3\left(1 + \frac{d\zeta}{dz} + \frac{d\xi}{dx}\right) - T_2\frac{d\eta}{dz} - N_1\frac{d\eta}{dx}$$

. . . .

On voit bien que l'on n'a pas $A' = B$.

On pourrait vérifier ces relations en calculant directement A, A'... d'une part, les N et les T d'autre part.

Dans l'état d'équilibre naturel on avait :

$$N_1 = \frac{-2\sum \frac{dF}{dR} Dx^2}{d\tau}.$$

Pour appliquer cette formule dans l'état d'équilibre contraint, il faut y remplacer x, y, z par $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$. $d\tau$ devient alors $d\tau\,(1 + \theta)$; $\frac{dF}{dR}$ est une fonction de R, R' qui deviennent $R + \rho$, $R' + \rho'$... ; il faut donc remplacer $\frac{dF}{dR}$ par $\frac{dF}{dR} + \delta\frac{dF}{dR}$, en posant :

$$\delta\frac{dF}{dR} = \frac{d^2F}{dR^2}\rho + \sum \frac{d^2F}{dR\,dR'}\rho'$$

et négligeant les carrés des ρ, ρ'.

On a ainsi :

$$N_1 = \frac{-2\sum\left(\frac{dF}{dR} + \delta\frac{dF}{dR}\right)(Dx + D\xi)^2}{d\tau(1+\theta)}$$

De même :

$$T_3 = \frac{-2\sum\left(\frac{dF}{dR} + \delta\frac{dF}{dR}\right)(Dx + D\xi)(Dy + D\eta)}{d\tau(1+\theta)}$$

La symétrie de l'expression de T_3 par rapport à x et y montre bien que les composantes tangentielles sont égales deux à deux.

En effectuant les calculs et négligeant les carrés des dérivées $\frac{d\xi}{dx}$ ... on obtient N_1 et T_3 en fonction linéaire des dérivées. Par exemple :

$$N_1 d\tau = -2\sum\left[\frac{dF}{dR}Dx^2(1-\theta) + 2\frac{dF}{dR}DxD\xi + \delta\frac{dF}{dR}Dx^2\right]$$

On pourrait calculer aussi A et A′

$$A d\tau = \frac{d(W_1 + W_2)\,d\tau}{d\,\frac{d\xi}{dx}}$$

$$(W_1 + W_2)\,d\tau = \sum\frac{dF}{dR}(\rho_1 + \rho_2) + \frac{1}{2}\sum\frac{d^2F}{dR^2}\rho_1^2 + \sum\frac{d^2F}{dRdR'}\rho_1\rho_1'$$

On peut ainsi vérifier directement les relations que nous avons écrites ; mais cette méthode exige d'assez longs calculs.

41. Lamé et Clebsch ont toujours supposé les forces extérieures nulles dans l'état d'équilibre naturel. Nous ne nous sommes pas borné à ce cas, et cela pour plusieurs raisons.

D'abord, il y a en optique des théories de la double réfraction, celles de Cauchy et de Fresnel par exemple, où l'on suppose que dans l'état d'équilibre naturel, c'est-à-dire en l'absence de tout mouvement lumineux, l'éther est soumis à une pression (Cf. *Théorie Mathématique de la Lumière*, page 239).

Ensuite, pour l'étude des gaz, on ne peut pas supposer la pression dans l'état d'équilibre naturel nulle, car on sait que le gaz tendrait à occuper un volume infini.

Une dernière raison est la suivante : la fonction W_2 représente l'énergie potentielle interne du corps élastique; en optique, c'est celle de l'éther; dans la théorie électromagnétique de la lumière, c'est $\frac{1}{8\pi}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ (Cf. *Electricité et Optique*, tome II, page 67), α, β, γ étant les composantes de la force magnétique. Ceci, traduit en langage optique, fait correspondre à $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ une expression de la forme const. $\times (p^2 + q^2 + r^2)$, p, q, r étant les composantes de la rotation moyenne.

Si donc on veut conserver l'espoir de rattacher la théorie électromagnétique de la lumière à l'élasticité de l'éther, il faut que W_2 puisse prendre la forme $(p^2 + q^2 + r^2) \times$ const., ce qui est impossible en supposant les forces extérieures nulles dans l'état d'équilibre naturel, car alors W_2 ne dépend plus que des α et des β.

Néanmoins, dans l'étude des solides, qui est un des buts principaux de la théorie de l'élasticité, on a le droit de supposer la pression dans l'état d'équilibre naturel nulle.

Il y a bien, cependant, la pression atmosphérique, mais elle est très petite et négligeable par rapport aux actions à exercer sur le solide pour obtenir des déformations sensibles.

Nous aurons donc dans les solides une expression de W_2 ne renfermant que les α et les β ; il en résulte

$$A' = B.$$

De plus, les pressions dans l'équilibre contraint seront par suite très petites, du même ordre de grandeur que les α et β. En négligeant les quantités d'ordre supérieur, on aura :

$$\begin{aligned} A &= -N_1 \\ A' &= -T_3 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Désormais, par conséquent, nous nous bornerons au cas de $\nu = 0$, et nous supposerons de plus le corps isotrope.

CHAPITRE IV

ÉTUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS D'ÉQUILIBRE

42. Nous supposons dans tout ce qui va suivre les forces extérieures nulles dans l'état d'équilibre naturel et le corps élastique homogène et isotrope. On aura alors, λ et μ étant des constantes :

$$W = W_2 = -\lambda \frac{\theta^2}{2} - \mu H$$

$$\theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \qquad H = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}{2}$$

Au degré d'approximation indiqué, on a :

$$N_1 = -A = -\frac{dW_2}{d\alpha_1} = \lambda\theta + 2\mu\alpha_1$$

$$T_1 = -B'' = -C' = -\frac{dW_2}{d\beta_1} = \mu\beta_1$$

Ou, en remplaçant les α et β par leurs valeurs :

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{d\xi}{dx} \qquad T_1 = \mu\left(\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz}\right)$$

$$N_2 = \lambda\theta + 2\mu \frac{d\eta}{dy} \qquad T_2 = \mu\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right)$$

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu \frac{d\zeta}{dz} \qquad T_3 = \mu\left(\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy}\right)$$

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$$

43. Équations d'équilibre. — Les équations à la surface deviennent trois équations aux dérivées partielles du premier ordre entre les ξ, η, ζ ; par exemple

$$P_x = l\left(\lambda\theta + 2\mu\frac{d\xi}{dx}\right) + m\mu\left(\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy}\right) + n\mu\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right)$$

ou :

$$P_x = l\lambda\theta + \mu\left(l\frac{d\xi}{dx} + m\frac{d\eta}{dx} + n\frac{d\zeta}{dx}\right) + \mu\left(l\frac{d\xi}{dx} + m\frac{d\xi}{dy} + n\frac{d\xi}{dz}\right)$$

ξ, η, ζ sont les projections du déplacement d'une molécule sur les axes de coordonnées ; $l\xi + m\eta + n\zeta$ est la projection de ce déplacement sur la normale à la surface (le sens positif étant celui de la normale extérieure) ; nous le désignerons par ν (il ne peut pas y avoir de confusion avec le sens tout différent dans lequel cette lettre a été employée). On a alors

$$l\frac{d\xi}{dx} + m\frac{d\eta}{dx} + n\frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\nu}{dx}$$

en spécifiant bien que pour prendre la dérivée $\frac{d\nu}{dx}$ on considère l, m, n comme des constantes, c'est-à-dire la normale comme un axe fixe, lorsqu'on passe à un point voisin (qui n'est d'ailleurs pas sur la surface) de coordonnées $x + dx$, y, z.

En désignant par $\frac{d}{dN}$ la dérivée d'une fonction estimée suivant la normale, on a d'ailleurs

$$\frac{d\xi}{dx} + m\frac{d\xi}{dy} + n\frac{d\xi}{dz} = \frac{d\xi}{dN}$$

Les équations à la surface prennent alors la forme simple

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P}_x &= l\lambda\theta + \mu\left(\frac{d\nu}{dx} + \frac{d\xi}{d\mathrm{N}}\right) \\ \mathrm{P}_y &= m\lambda\theta + \mu\left(\frac{d\nu}{dy} + \frac{d\eta}{d\mathrm{N}}\right) \\ \mathrm{P}_z &= n\lambda\theta + \mu\left(\frac{d\nu}{dz} + \frac{d\zeta}{d\mathrm{N}}\right) \end{aligned} \right.$$

On peut en déduire la formule

$$\frac{d\mathrm{P}_x}{dx} + \frac{d\mathrm{P}_y}{dy} + \frac{d\mathrm{P}_z}{dz} = (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{d\mathrm{N}} + \mu\Delta\nu,$$

qui se rapproche par sa forme des équations que nous allons obtenir pour l'équilibre intérieur.

Nous avions :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{N}_1}{dx} + \frac{d\mathrm{T}_3}{dy} + \frac{d\mathrm{T}_2}{dz} + \mathrm{X} &= 0 \\ \frac{d\mathrm{T}_3}{dx} + \frac{d\mathrm{N}_2}{dy} + \frac{d\mathrm{T}_1}{dz} + \mathrm{Y} &= 0 \\ \frac{d\mathrm{T}_2}{dx} + \frac{d\mathrm{T}_1}{dy} + \frac{d\mathrm{N}_3}{dz} + \mathrm{Z} &= 0 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{N}_1}{dx} &= \lambda\frac{d\theta}{dx} + 2\mu\frac{d^2\xi}{dx^2} = \lambda\frac{d\theta}{dx} + \mu\frac{d}{dx}\frac{d\xi}{dx} + \mu\frac{d^2\xi}{dx^2} \\ \frac{d\mathrm{T}_3}{dy} &= \frac{d}{dy}\mu\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right) = \qquad \mu\frac{d}{dx}\frac{d\eta}{dy} + \mu\frac{d^2\xi}{dy^2} \\ \frac{d\mathrm{T}_2}{dz} &= \frac{d}{dz}\mu\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) = \qquad \mu\frac{d}{dx}\frac{d\zeta}{dz} + \mu\frac{d^2\xi}{dz^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{d\mathrm{N}_1}{dx} + \frac{d\mathrm{T}_3}{dy} + \frac{d\mathrm{T}_2}{dz} = \lambda\frac{d\theta}{dx} + \mu\frac{d}{dx}(\theta) + \mu\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2}\right)$$

Les équations de l'équilibre intérieur deviennent par suite :

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dx} + \mu\Delta\xi = -\,X \\[2ex] (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dy} + \mu\Delta\eta = -\,Y \\[2ex] (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dz} + \mu\Delta\zeta = -\,Z \end{cases}$$

Ce sont trois équations aux dérivées partielles du second ordre qui, avec les conditions aux limites exprimées par les équations à la surface (I), doivent déterminer complètement ξ, η, ζ. Mais l'intégration générale de ces équations présente des difficultés insurmontables. On peut seulement traiter quelques cas particulièrement simples.

44. Cas d'un milieu indéfini. — Supposons que le milieu élastique soit indéfini et que X, Y, Z s'annulent à l'infini ; ξ, η, ζ s'annulent aussi à l'infini et les conditions aux limites disparaissent.

Il suffit alors de trouver pour le système (II) des intégrales ξ, η, ζ s'annulant à l'infini.

Pour cela différencions la première des équations (II) par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, et ajoutons.

Il vient :

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{d^2\theta}{dz^2}\right) + \mu\Delta\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right)$$
$$= -\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right)$$

Ou

$$(\lambda + 2\mu)\,\Delta\theta = -\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right)$$

θ satisfait d'ailleurs aux conditions de Dirichlet.

C'est donc le potentiel d'une matière attirante dont la densité serait

$$\rho = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)}\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right)$$

car ce potentiel satisfait à l'équation de Poisson

$$\Delta\theta = -4\pi\rho.$$

Connaissant θ, on a

$$\mu\Delta\xi = -X - (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx},$$

et on obtient ξ de la même manière.

Cette solution suppose essentiellement

$$\lambda + 2\mu \neq 0$$
$$\mu \neq 0$$

Pour les corps solides λ et μ étant positifs, ces conditions sont satisfaites d'elles-mêmes : l'hypothèse $\mu = 0$ correspond aux fluides parfaits ; les équations prennent alors une forme plus simple et toute différente et leur étude ne fait pas partie de l'objet de ce cours.

L'hypothèse

$$\lambda + 2\mu = 0$$

est plus intéressante ; c'est en effet celle que Fresnel a faite implicitement sur l'éther lumineux en admettant qu'il est incapable de transmettre les vibrations longitudinales. La combinaison considérée des trois équations se réduit alors à

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0.$$

Il faut supposer que les forces vérifient cette relation; sans quoi l'équilibre est impossible. Lorsque cette condition est remplie, les trois équations se réduisent à deux; on peut prendre θ arbitrairement et on déduit des trois équations les valeurs correspondantes de ξ, η, ζ.

On peut donc toujours trouver des fonctions satisfaisant aux équations de l'élasticité à l'intérieur du corps élastique; mais elles ne vérifient pas, en général, les équations à la surface.

45. On peut se servir de ce résultat pour simplifier, au moins en apparence, le problème général de l'élasticité; mais la solution en reste également difficile.

Nous allons montrer qu'on peut, sans altérer en rien la généralité, supposer ou bien que X, Y, Z sont nuls, ou bien que P_x, P_y, P_z sont nuls. En d'autres termes, on peut ramener le problème général soit au cas où les forces superficielles existent seules, soit au cas où elles n'existent pas.

Montrons d'abord que l'on peut toujours supposer X, Y, Z nuls.

Pour cela posons

$$\begin{aligned}\xi &= \xi' + \xi''\\ \eta &= \eta' + \eta''\\ \zeta &= \zeta' + \zeta''\end{aligned}$$

et d'une manière générale, F étant une fonction linéaire quelconque de ξ, η, ζ ou de leurs dérivées

$$F = F' + F'',$$

F' ou F'' étant ce que devient F quand on y remplace ξ, η, ζ par ξ', η', ζ' ou ξ'', η'', ζ''.

Les équations deviennent alors

$$\left\{\begin{aligned}
&(\lambda + \mu)\left(\frac{d\theta'}{dx} + \frac{d\theta''}{dx}\right) + \mu\Delta\xi' + \mu\Delta\xi'' = -X \\
&(\lambda + \mu)\left(\frac{d\theta'}{dy} + \frac{d\theta''}{dy}\right) + \mu\Delta\eta' + \mu\Delta\eta'' = -Y \\
&(\lambda + \mu)\left(\frac{d\theta'}{dz} + \frac{d\theta''}{dz}\right) + \mu\Delta\zeta' + \mu\Delta\zeta'' = -Z
\end{aligned}\right.$$

et :

$$\left\{\begin{aligned}
&(N'_1 + N''_1)\, l + (T'_3 + T''_3)\, m + (T'_2 + T''_2)\, n = P_x \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Nous savons trouver des fonctions ξ'', η'', ζ'' satisfaisant aux équations :

$$\left\{\begin{aligned}
&(\lambda + \mu)\frac{d\theta''}{dx} + \mu\Delta\xi'' = -X \\
&(\lambda + \mu)\frac{d\theta''}{dy} + \mu\Delta\eta'' = -Y \\
&(\lambda + \mu)\frac{d\theta''}{dz} + \mu\Delta\zeta'' = -Z
\end{aligned}\right.$$

Si alors nous posons :

$$\left\{\begin{aligned}
P'_x &= P_x - N''_1 l - T''_3 m - T''_2 n \\
P'_y &= P_y - T''_3 l - N''_2 m - T''_1 n \\
P'_z &= P_z - T''_2 l - T''_1 m - N''_3 n
\end{aligned}\right.$$

Les équations deviendront :

$$\left\{\begin{aligned} &(\lambda + \mu)\frac{d\theta'}{dx} + \mu\Delta\xi' = 0 \\ &(\lambda + \mu)\frac{d\theta'}{dy} + \mu\Delta\eta' = 0 \\ &(\lambda + \mu)\frac{d\theta'}{dz} + \mu\Delta\zeta' = 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &N_1'l + T_3'm + T_2'n = P_x' \\ &T_3'l + N_2'm + T_1'n = P_y' \\ &T_2'l + T_1'm + N_3'n = P_z' \end{aligned}\right.$$

C'est-à-dire que ξ', η', ζ' sont les déformations que subirait le corps considéré s'il était soumis seulement à des forces superficielles égales à P_x', P_y', P_z', c'est-à-dire à des fonctions parfaitement déterminées de x, y, z. Nous aurons ensuite :

$$\xi = \xi' + \xi'' \qquad \eta = \eta'' + \eta'' \qquad \zeta = \zeta' + \zeta''$$

On peut de même ramener le problème au cas où les forces superficielles sont nulles ; la marche est la même. Donnons-nous trois fonctions ξ'', η'', ζ'', assujetties à satisfaire aux équations :

$$\left\{\begin{aligned} &P_x - N_1''l - T_3''m - T_2''n = 0 \\ &P_y - T_3''l - N_2''m - T_1''n = 0 \\ &P_z - T_2''l - T_1''m - N_3''n = 0 \end{aligned}\right.$$

qui doivent être vérifiées seulement à la surface du corps. On peut se donner arbitrairement les fonctions ξ'', η'', ζ'' sur la surface ; leurs dérivées sur la surface et suivant des directions tangentielles sont alors déterminées et ces équations font connaître leurs dérivées suivant la normale.

On connaît alors en tous les points de la surface les trois fonctions ξ'', η'', ζ'' et leur neuf dérivées premières ; ces conditions ne suffisent évidemment pas pour déterminer ces trois fonctions pour les points intérieurs du corps, mais on peut y satisfaire d'une infinité de manières. Soient donc ξ'', η'', ζ'' un quelconque des systèmes de trois fonctions qui y satisfont.

Si nous raisonnons comme dans le cas précédent, nous verrons que ξ', η', ζ' sont les déformations dues à des forces intérieures données X', Y', Z', les forces superficielles P'_x, P'_y, P'_z étant nulles.

46. *Equilibre d'un parallélipipède dans un cas simple.* — Considérons un parallélipipède rectangle et supposons-le soumis uniquement à des forces superficielles. Nous admettrons de plus que sur chaque face la pression est constante en grandeur et en direction et que les pressions sur des faces opposées sont égales, parallèles et de sens contraires.

Supposons les axes parallèles aux arêtes du parallélipipède et désignons d'une manière générale par $P_{uv}d\omega$ la projection sur un axe *ou* de la pression qui s'exerce sur un élément $d\omega$ perpendiculaire à un axe *ov*.

On ne troublera pas l'équilibre en introduisant des liaisons nouvelles; or si on suppose que le parallélipipède devienne un solide invariable, on voit facilement que, pour qu'il soit en équilibre dans sa position actuelle, il faut que l'on ait :

$$P_{uv} = P_{vu}$$

Puisqu'il n'y a pas de forces extérieures non superficielles, les équations d'équilibre sont :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} &= 0 \\ \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} &= 0 \\ \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} &= 0 \end{aligned}\right.$$

de plus N_1 par exemple est constant en tous les points des faces perpendiculaires à ox.

On vérifie ces équations en prenant des constantes pour N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3. Ces constantes sont d'ailleurs égales aux composantes des pressions données :

$$N_1 = P_{xx} \ldots\ldots \qquad T_3 = P_{xy}$$

Pour calculer les α et les β, on a d'abord :

$$N_1 + N_2 + N_3 = (3\lambda + 2\mu)\theta \qquad \theta = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3\lambda + 2\mu}$$

$$N_i = \lambda\theta + 2\mu\alpha_i \qquad T_i = \mu\beta_i$$

$$\alpha_i = \frac{N_i - \lambda\theta}{2\mu} \qquad \beta_i = \frac{T_i}{\mu}$$

On a ainsi les α et les β par des formules toujours acceptables, car pour les solides λ et μ sont essentiellement positifs.

Connaissant les α et les β, on peut calculer les dérivées des ξ, η, ζ ; il y a indétermination puisque l'on a 6 équations pour déterminer 9 dérivées ; de plus, lorsqu'on connaît les dérivées, il entre encore une constante arbitraire dans l'expression de chacune des quantités ξ, η, ζ.

$$\xi = \xi_0 + x \frac{d\xi}{dx} + y \frac{d\xi}{dy} + z \frac{d\xi}{dz},$$

puisque $\frac{d\xi}{dx}\,\frac{d\xi}{dy}\,\frac{d\xi}{dz}$ sont des constantes.

Il y a en tout 6 constantes ; mais, d'après ce que l'on a vu, si les α et les β sont déterminés, ces diverses solutions correspondent à une même déformation, suivie d'un déplacement quelconque.

D'une manière générale, si on avait un corps soumis à une pression normale constante P, on satisfera aux équations en prenant

$$N_1 = N_2 = N_3 = P$$
$$T_1 = T_2 = T_3 = 0$$

47. Sphère. — Considérons une sphère à l'intérieur de laquelle se trouve une cavité limitée par une sphère concentrique. Supposons que les forces se réduisent à une pression normale et constante — P_1 sur la surface extérieure et une pression normale et constante — P_0 sur la surface intérieure (P_0 et P_1 sont positifs, car nous considérons les tensions comme positives et les pressions comme négatives).

Soient : O le centre des sphères, M un point du corps solide, $OM = r$. On a évidemment :

$$\xi = x\psi(r)$$
$$\eta = y\psi(r)$$
$$\zeta = z\psi(r)$$

car le déplacement a lieu dans la direction du rayon, par raison de symétrie. On en conclut :

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz = \psi(r).\, r dr = d\varphi(r).$$

Cherchons à déterminer la fonction $\varphi(r)$; on aura :

$$\xi = \frac{d\varphi}{dx} \qquad \eta = \frac{d\varphi}{dy} \qquad \zeta = \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\theta = \Delta\varphi.$$

L'équation

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta\xi = 0$$

devient

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d}{dx}\Delta\varphi = 0$$

et puisque $\lambda + 2\mu$ n'est pas nul, on a :

$$\frac{d}{dx}\Delta\varphi = 0 \qquad \frac{d}{dy}\Delta\varphi = 0 \qquad \frac{d}{dz}\Delta\varphi = 0$$

Donc :

$$\Delta\varphi = C.$$

D'autre part φ n'est fonction que de r ; on a donc :

$$\varphi = \frac{Cr^2}{6} + \frac{\alpha}{r}$$

φ n'intervenant que par ses dérivées, il est inutile d'ajouter une constante arbitraire.

Il reste à déterminer α et C ; pour cela il faut se servir des conditions données à la surface. Soient r_0 le rayon de la sphère intérieure, r_1 celui de la sphère extérieure ; considérons les points

$$M_0 \qquad x = r_0 \qquad y = z = 0$$

$$M_1 \qquad x = r_1 \qquad y = z = 0$$

et écrivons que les pressions en ces points sont respectivement P_0 et P_1. Les pressions sont égales à N_1 puisque les éléments pressés sont normaux à ox et que la pression est normale. Or on a :

$$\begin{aligned} N_1 &= \lambda\theta + 2\mu \frac{d\xi}{dx} \\ &= \lambda\Delta\varphi + 2\mu \frac{d^2\varphi}{dx^2} \\ &= \lambda C + 2\mu \left[\frac{\alpha}{r^3} \left(\frac{3x^2}{r^2} - 1 \right) + \frac{C}{3} \right] \end{aligned}$$

En faisant $x = r = r_0$, puis $x = r = r_1$ on a :

$$\left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right) C + \frac{4\alpha\mu}{r_0^3} = P_0$$

$$\left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right) C + \frac{4\alpha\mu}{r_1^3} = P_1$$

On tire de ces équations les valeurs de α et C.

Le problème est donc complètement résolu.

CHAPITRE V

PETITS MOUVEMENTS D'UN CORPS ÉLASTIQUE

48. Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que du problème statique, c'est-à-dire de l'état d'équilibre d'un corps élastique soumis à des forces données. Nous allons maintenant chercher quels sont les mouvements que peuvent prendre les molécules d'un pareil corps, dévié de sa position d'équilibre et soustrait à toute force extérieure.

En appliquant le principe de d'Alembert, on voit que les forces extérieures se réduisent aux forces d'inertie, il faut donc remplacer $X d\tau$ par $-\frac{d^2\xi}{dt^2} dm$, dm étant la masse de l'élément de volume $d\tau$. On a donc $dm = \rho d\tau$, ρ étant la densité ; et les équations du mouvement sont

$$\left\{\begin{aligned}
(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta\xi &= \rho \frac{d^2\xi}{dt^2} \\
(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dy} + \mu\Delta\eta &= \rho \frac{d^2\eta}{dt^2} \\
(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dz} + \mu\Delta\zeta &= \rho \frac{d^2\zeta}{dt^2}
\end{aligned}\right.$$

On a trois équations aux dérivées partielles du second ordre pour déterminer ξ, η, ζ. De plus, pour $t = 0$, ξ, η, ζ sont des fonctions données de x, y, z, à l'intérieur du corps. Il en est de même de leurs dérivées premières par rapport à t.

Il reste à connaître les conditions à la surface. Si l'on suppose qu'il n'y a pas de forces extérieures superficielles, la pression sur tous les éléments superficiels des corps doit être nulle, ce qui donne les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\mu\left(\frac{d\nu}{dx} + \frac{d\xi}{dN}\right) + l\lambda\theta = 0 \\ &\mu\left(\frac{d\nu}{dy} + \frac{d\eta}{dN}\right) + m\lambda\theta = 0 \\ &\mu\left(\frac{d\nu}{dz} + \frac{d\zeta}{dN}\right) + n\lambda\theta = 0 \end{aligned}\right.$$

Ce n'est pas toujours ainsi que le problème se présente; par exemple, si l'on suppose que le corps est encastré dans un solide invariable, il se produit des réactions; la pression n'est pas nulle sur la partie encastrée; mais les déplacements ξ, η, ζ sont nuls.

En pratique, le corps est encastré dans un autre corps lui-même élastique, et c'est beaucoup plus complexe.

Nous n'avons pas tenu compte de la pression atmosphérique; elle est en général négligeable par rapport aux forces qui produisent des déformations appréciables. Cependant, par exemple, pour un diapason qui vibre, elle peut avoir pour effet d'amortir les mouvements. Nous traiterons plus loin un problème simple où elle intervient; mais jusqu'à nouvel ordre nous regarderons la pression extérieure comme nulle.

49. Vibrations périodiques. — Les solutions les plus intéressantes des équations du mouvement sont celles qui correspondent à des mouvements périodiques simples. Cherchons si l'on peut avoir des expressions de la forme :

$$\xi = \xi_1 \cos k_1 t$$
$$\eta = \eta_1 \cos k_1 t$$
$$\zeta = \zeta_1 \cos k_1 t$$

ξ_1, η_1, ζ_1 étant fonction seulement de x, y, z.

On déduit de ces formules :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = - k_1^2\xi \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = - k_1^2\eta \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = - k_1^2\zeta,$$

et les équations du mouvement deviennent, en supprimant le facteur commun, $\cos k_1 t$ et posant

$$\theta_1 = \frac{d\xi_1}{dx} + \frac{d\eta_1}{dy} + \frac{d\zeta_1}{dz}$$

$$\left\{\begin{aligned} (\lambda + \mu)\frac{d\theta_1}{dx} + \mu\Delta\xi_1 &= - \rho k_1^2\xi_1 \\ (\lambda + \mu)\frac{d\theta_1}{dy} + \mu\Delta\eta_1 &= - \rho k_1^2\eta_1 \\ (\lambda + \mu)\frac{d\theta_1}{dz} + \mu\Delta\zeta_1 &= - \rho k_1^2\zeta_1 \end{aligned}\right.$$

De même pour les équations aux limites, $\cos k_1 t$ sera en facteur et on aura :

$$\left\{\begin{aligned} l\lambda\theta_1 + \mu\left(\frac{d\nu_1}{dx} + \frac{d\xi_1}{dN}\right) &= 0 \\ m\lambda\theta_1 + \mu\left(\frac{d\nu_1}{dy} + \frac{d\eta_1}{dN}\right) &= 0 \\ n\lambda\theta_1 + \mu\left(\frac{d\nu_1}{dz} + \frac{d\zeta_1}{dN}\right) &= 0 \end{aligned}\right.$$

Il faut trouver 3 fonctions ξ_1, η_1, ζ_1 de x, y, z et un nombre k_1 satisfaisant à ces équations ; nous allons montrer qu'il existe des solutions en nous appuyant sur un lemme qui peut être considéré comme une généralisation du théorème de Green.

50. Lemme. — Soient :

ξ, η, ζ, trois fonctions quelconques de x, y, z;

S, une surface fermée.

Nous posons :

$$W_2 = -\frac{\lambda}{2}\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)^2 - \mu\left[\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2+\frac{1}{2}\sum\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)^2\right]$$

$$\theta = \frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}$$

$$X = -(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx} - \mu\Delta\xi$$

et nous définissons de même Y, Z, P_x, P_y, P_z par des équations identiques aux équations d'équilibre d'un corps élastique.

Nous prenons trois autres fonctions quelconques ξ', η', ζ', et nous formons de même les fonctions :

$$W_2',\ \theta',\ X',\ Y',\ Z',\ P_x',\ P_y',\ P_z'.$$

Cela posé, on sait que les équations qui définissent

$$X,\ Y,\ Z,\ P_x,\ P_y,\ P_z$$

ont été obtenues en partant de l'équation des vitesses virtuelles :

$$\int \delta W_2 d\tau + \int (X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta)\, d\tau + \int (P_x\delta\xi + P_y\delta\eta + P_z\delta\zeta)\, d\omega = 0$$

Or :

$$\delta W_2 = \sum \frac{dW_2}{d\frac{d\xi}{dx}} \delta \frac{d\xi}{dx}$$

$$= \sum \frac{dW_2}{d\frac{d\xi}{dx}} \cdot \frac{d\delta\xi}{dx}$$

Cette équation a lieu quels que soient $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, qui sont arbitraires. Si nous prenons par exemple :

$$\delta\xi = \xi' \qquad \delta\eta = \eta' \qquad \delta\zeta = \zeta',$$

l'équation des vitesses virtuelles devient :

$$\int \sum \frac{dW_2}{d\frac{d\xi}{dx}} \frac{d\xi'}{dx} d\tau + \int (X\xi' + Y\eta' + Z\zeta') \, d\tau$$
$$+ \int (P_x\xi' + P_y\eta' + P_z\zeta') \, d\omega = 0.$$

De même :

$$\int \sum \frac{dW_2'}{d\frac{d\xi'}{dx}} \frac{d\xi}{dx} d\tau + \int (X'\xi + Y'\eta + Z'\zeta) \, d\tau$$
$$+ \int (P_x'\xi + P_y'\eta + P_z'\zeta) \, d\omega = 0.$$

Mais W_2 étant une forme quadratique des neuf dérivées, on a, d'après un théorème connu :

$$\sum \frac{dW_2}{d\frac{d\xi}{dx}} \frac{d\xi'}{dx} = \sum \frac{dW_2'}{d\frac{d\xi'}{dx}} \frac{d\xi}{dx}.$$

Par suite :

$$\int [(X\xi' + Y\eta' + Z\zeta') - (X'\xi + Y'\eta + Z'\zeta)]\, d\tau$$
$$+ \int [(P_x\xi' + P_y\eta' + P_z\zeta') - (P'_x\xi + P'_y\eta + P'_z\zeta)]\, d\omega = 0.$$

C'est l'équation que nous avions en vue.

Pour en déduire le théorème de Green, il suffit de faire

$$\lambda + \mu = 0 \qquad \eta = \eta' = \zeta = \zeta' = 0$$

On a alors :

$$X = -\mu\Delta\xi$$
$$P_x = \mu \frac{d\xi}{dN}$$

et l'équation devient

$$\int (\xi'\Delta\xi - \xi\Delta\xi')\, d\tau = \int \left(\xi' \frac{d\xi}{dN} - \xi \frac{d\xi'}{dN}\right) d\omega.$$

51. Application au problème dynamique. — Nous avons supposé les forces superficielles nulles et nous avons admis que les forces extérieures se réduisent aux forces d'inertie ; l'équation devient alors en supprimant le facteur ρ et remarquant que, les P étant nuls, la seconde intégrale disparaît :

$$\int \left(\xi' \frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta' \frac{d^2\eta}{dt^2} + \zeta' \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \xi \frac{d^2\xi'}{dt^2} - \eta \frac{d^2\eta'}{dt^2} - \zeta \frac{d^2\zeta'}{dt^2}\right) d\tau = 0.$$

Cette équation est vraie aussi si l'on suppose le corps encastré dans une masse rigide, car ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' sont alors nuls à la surface, et la seconde intégrale disparaît encore.

Considérons deux vibrations simples possibles, c'est-à-dire posons :

$$\begin{cases} \xi = \xi_1 \cos k_1 t \\ \eta = \eta_1 \cos k_1 t \\ \zeta = \zeta_1 \cos k_1 t \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi' = \xi_2 \cos k_2 t \\ \eta' = \eta_2 \cos k_2 t \\ \zeta' = \zeta_2 \cos k_2 t \end{cases}$$

l'équation devient :

$$(k_1^2 - k_2^2)\int(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')\, d\tau = 0$$

et, en supposant les vibrations de périodes différentes :

$$\int(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')\, d\tau = 0.$$

On peut supprimer le facteur $\cos k_1 t \cos k_2 t$ et écrire :

$$\int(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2)\, d\tau = 0.$$

Cette équation démontre qu'un corps solide limité n'est pas susceptible de vibrations dont la période varie d'une manière continue ; il ne peut émettre que des harmoniques discrètes (il faut supposer le corps limité pour que les intégrales aient certainement un sens, le théorème ne serait donc plus applicable à un corps indéfini dans un ou plusieurs sens).

En effet, si k_2 pouvait varier d'une manière continue jusqu'à devenir égal à k_1, ξ_2, η_2, ζ_2 varieraient aussi d'une manière continue. L'intégrale

$$\int(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2)\, d\tau$$

serait donc une fonction continue de k_2. Or elle est nulle pour toutes les valeurs de k_2 non égales à k_1 ; elle serait donc nulle pour $k_2 = k_1$ ce qui est absurde puisqu'elle se réduit alors à :

$$\int (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)\, d\tau.$$

Un corps solide *limité* ne peut donc pas émettre des vibrations formant, si l'on peut ainsi dire, un spectre continu, mais seulement des vibrations formant un spectre de raies.

52. Cherchons maintenant des mouvements vibratoires simples. Supposons pour simplifier $\rho = 1$; nous avons à intégrer les équations :

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta\xi = -k^2\xi$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

avec les conditions à la surface correspondantes.

Mais il est plus simple de considérer l'équation unique qui résulte de l'application du principe des vitesses virtuelles. Le travail des forces intérieures correspondant à des déplacements $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ est

$$\int \delta W_2 d\tau.$$

Le travail des forces d'inertie est

$$\int (X\delta x + Y\delta\eta + Z\delta\zeta)\, d\tau = -\int \left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi + \frac{d^2\eta}{dt^2}\delta\eta + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\delta\zeta\right) d\tau$$

$$= k^2 \int \sum \xi\delta\xi d\tau.$$

Nous avons donc

$$\int \delta W_2 d\tau + k^2 \int \sum \xi \delta \xi d\tau = 0.$$

Il suffit d'ailleurs que les équations soient satisfaites pour $t = 0$; car si nous supposons ξ, η et ζ proportionnels à $\cos kt$, comme nous l'avons fait plus haut, le premier membre se réduit à $\cos^2 kt$ multiplié par une quantité indépendante de t.

Nous poserons :

$$\sum \frac{dW_2}{d\frac{d\xi}{dx}} \frac{d\xi_1}{dx} = F(\xi, \xi_1)$$

et nous remarquerons que l'on a d'après des propriétés connues des formes quadratiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\xi, \xi_1) = F(\xi_1, \xi) \\ F(\xi, \xi) = 2W_2 \end{array} \right.$$

De plus :

$$\delta W_2 = F(\xi, \delta\xi).$$

Ces préliminaires étant établis, soient ξ, η, ζ trois fonctions de x, y, z assujetties à vérifier la relation

$$(\alpha) \qquad \int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, d\tau = \int \sum \xi^2 d\tau = 1,$$

l'intégration étant étendue à tout le volume du corps considéré.

Considérons l'intégrale

$$-\int W_2 d\tau$$

W_2 étant la fonction de ξ, η, ζ précédemment définie; W_2 est essentiellement négatif (car nous supposons λ et μ positifs puisqu'il s'agit d'un corps solide). Cette intégrale a donc un minimum lorsque les fonctions ξ, η, ζ varient de manière à vérifier la relation (α). Supposons les fonctions ξ, η, ζ choisies de manière à atteindre ce minimum; d'après les principes du calcul des variations, on a alors :

$$\int \delta W_2 d\tau + k^2 \int \sum \xi \delta \xi d\tau = 0$$

quels que soient $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, k^2 étant un nombre convenablement choisi.

Appelons ξ_1, η_1, ζ_1 les trois fonctions et k_1 la valeur correspondante de k. Nous avons :

$$-\int F(\xi_1, \delta\xi)\, d\tau = k_1^2 \int \sum \xi_1 \delta\xi d\tau$$

si nous faisons

$$\delta\xi = \xi_1 \qquad \delta\eta = \eta_1 \qquad \delta\zeta = \zeta_1$$

nous trouvons :

$$-\int F(\xi_1, \xi_1)\, d\tau = k_1^2 \int \sum \xi_1^2 d\tau$$

c'est-à-dire :

$$-\int W_2 d\tau = \frac{k_1^2}{2}$$

Le minimum est donc égal à $\frac{k_1^2}{2}$; ce qui démontre que k_1^2 est positif, comme nous l'avions admis implicitement.

53. Nous allons tâcher de trouver d'autres solutions; pour cela considérons trois fonctions ξ, η, ζ assujetties aux conditions :

$$\int \sum \xi^2 d\tau = 1$$

$$\int \sum \xi\xi_1 d\tau = 0$$

L'expression $-\int W_2 d\tau$ aura certainement un minimum, lorsque ξ, η, ζ varieront de toutes les manières possibles sans cesser de vérifier ces relations. Ce minimum sera d'ailleurs supérieur ou égal à celui que nous avons déjà trouvé, puisque nous nous sommes imposé une condition de plus pour les fonctions ξ, η, ζ.

Les principes du calcul des variations nous apprennent qu'on peut trouver deux nombres h et k^2 tels que l'on ait, *quels que soient les accroissements* $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$:

$$\int \delta W_2 d\tau + h\int \sum \xi_1 \delta\xi d\tau + k^2 \int \sum \xi\delta\xi d\tau = 0.$$

Nous allons démontrer que l'on a nécessairement $h = 0$; en effet, l'équation étant vraie, quels que soient $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, faisons-y :

$$\delta\xi = \xi_1, \qquad \delta\eta = \eta_1, \qquad \delta\zeta = \zeta_1.$$

La troisième intégrale est alors nulle, puisque l'on a supposé

$$\int \sum \xi\xi_1 d\tau = 0$$

La première est nulle aussi. En effet pour $\delta\xi = \xi_1$, on a :

$$\delta W_2 = F(\xi, \xi_1)$$

et

$$\int \delta W_2 d\tau = \int F(\xi, \xi_1)\, d\tau = \int F(\xi_1, \xi)\, d\tau.$$

Mais on a identiquement :

$$-\int F(\xi_1, \delta\xi)\, d\tau = k_1^2 \int \sum \xi_1 \delta\xi d\tau$$

et si dans cette identité on fait $\delta\xi = \xi$, on trouve

$$-\int F(\xi_1, \xi)\, d\tau = k_1^2 \int \sum \xi_1 \xi d\tau = 0$$

On a donc $h = 0$ et il reste :

$$\int \delta W_2 d\tau + k^2 \int \sum \xi \delta\xi d\tau = 0$$

Soient ξ_2, η_2, ζ_2, les valeurs des fonctions ξ, η, ζ et k_2 la valeur de k correspondante ; on trouvera de même que la valeur du second minimum est $\frac{k_2^2}{2}$.

On trouverait de même un troisième minimum en assujettissant ξ, η, ζ aux conditions :

$$\int \sum \xi^2 d\tau = 0$$

$$\int \sum \xi\xi_1 d\tau = 0$$

$$\int \sum \xi\xi_2 d\tau = 0$$

L'équation qui le donne est :

$$\int \delta W_2 d\tau + h_1 \int \xi_1 \delta\xi d\tau + h_2 \int \sum \xi_2 \delta\xi d\tau + k^2 \int \sum \xi \delta\xi d\tau = 0$$

En faisant :

$$\delta\xi = \xi_1 \qquad \delta\eta = \eta_1 \qquad \delta\zeta = \zeta_1$$

on obtient

$$h_1 = 0,$$

et en faisant :

$$\delta\xi = \xi_2 \qquad \delta\eta = \eta_2 \qquad \delta\zeta = \zeta_2,$$

on a de même :

$$h_2 = 0.$$

Nous avons ainsi un troisième minimum, correspondant à trois fonctions ξ_3, η_3, ζ_3 et à un nombre k_3 et ce troisième minimum est précisément égal à $\frac{k_3^2}{2}$.

On peut continuer indéfiniment, et on trouvera une série de nombres k_1, k_2, k_3... k_n, correspondant aux diverses vibrations simples dont le corps est susceptible. Ces nombres vont en croissant, ou du moins ne décroissent jamais ; mais on pourrait craindre qu'ils soient tous nuls, et dans ce cas la solution n'aurait pas de sens.

Pour montrer qu'il n'en est pas ainsi, nous allons d'abord faire voir que les systèmes successifs de valeurs que l'on obtient pour ξ, η, ζ sont indépendants, c'est-à-dire que l'on ne peut pas avoir :

$$\xi_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \xi_i$$

$$\eta_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \eta_i$$

$$\zeta_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \zeta_i$$

les λ étant des constantes. En effet on a, par hypothèse :

$$\int \sum \xi_{n+1} \xi_j d\tau = 0$$

Si nous posons

$$\int \sum \xi_i \xi_j d\tau = \varepsilon_{ij}$$

ε_{ij} sera égal à zéro si i est différent de j et à un si $i = j$, et il viendra d'ailleurs

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_{ij} \lambda_i = 0$$

c'est-à-dire :

$$\lambda_j = 0.$$

On voit ainsi que tous les λ sont nuls; par suite ξ_{n+1}, η_{n+1} ζ_{n+1} seraient nuls, ce qui est absurde puisqu'ils vérifient la relation

$$\int \sum \xi_{n+1}^2 d\tau = 1.$$

Ce point étant établi, il est aisé de voir qu'il ne peut pas y avoir plus de six minima nuls. En effet, si l'on a :

$$-\int W_2 d\tau = 0,$$

comme W_2 est essentiellement négatif, W_2 est identiquement nul, ce qui exige que les α et les β soient nuls.

Les six dilatations étant nulles, le corps se déplace à la façon d'un solide invariable. Or il y a six mouvements possibles linéairement indépendants : par exemple trois translations parallèles aux axes et trois rotations autour des trois axes. Il n'y a donc que six systèmes de valeurs indépendantes de ξ, η, ζ qui donnent des minima nuls.

D'ailleurs puisque ces minima nuls existent, on les trouvera nécessairement ; on aura :

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 0$$
$$k_7 \neq 0$$

54. Tous les nombres k^2 que nous trouvons par cette méthode sont essentiellement positifs ; on peut se demander si l'on ne pourrait pas, en procédant autrement, trouver des solutions des équations telles que k^2 soit négatif ou imaginaire.

Les équations du mouvement seraient satisfaites pour

$$\xi = \xi_0 e^{ik_0 t} \qquad \eta = \eta_0 e^{ik_0 t} \qquad \zeta = \zeta_0 e^{ik_0 t}.$$

soit :

$$k_0 = \alpha + \beta i$$
$$\beta \neq 0$$

on a :

$$\xi = \xi_0 e^{i\alpha t} e^{-\beta t}$$

Si les équations qui sont à coefficients réels admettent cette solution imaginaire, elles admettent aussi la solution imaginaire conjuguée.

$$\xi = \xi_0' \, e^{-i\alpha t} e^{-\beta t}$$

ξ_0' étant l'imaginaire conjuguée de ξ_0.

De plus, à cause de la forme linéaire des équations, la somme de deux solutions est aussi une solution ; on obtient ainsi la solution réelle

$$\begin{aligned}
\xi &= (\xi_0 e^{i\alpha t} + \xi_0' e^{-i\alpha t}) \, e^{-\beta t} \\
\eta &= (\eta_0 e^{i\alpha t} + \eta_0' e^{-i\alpha t}) \, e^{-\beta t} \\
\zeta &= (\zeta_0 e^{i\alpha t} + \zeta_0' e^{-i\alpha t}) \, e^{-\beta t}
\end{aligned}$$

Or cette solution est incompatible avec le principe de la conservation de l'énergie, ξ, η, ζ sont en effet égaux à une fonction périodique du temps de période $\frac{2\pi}{\alpha}$ (ou une constante par rapport au temps si α est nul) multipliée par une exponentielle qui augmente indéfiniment ou tend vers zéro lorsque le temps croît indéfiniment (suivant que β est négatif ou positif). Il en est d'ailleurs de même de leurs dérivées. Donc, pour un temps croissant indéfiniment, la force vive du système augmenterait elle-même indéfiniment — ou bien tendrait vers zéro, ce qui est absurde.

La démonstration suppose essentiellement le corps limité dans toutes les directions ; sinon on n'est pas assuré que les intégrales employées ont un sens.

55. Pour achever cette étude des petits mouvements d'un corps élastique, il resterait à faire voir qu'un mouvement quelconque peut être considéré comme dû à la superposition de mouvements vibratoires simples.

Supposons que nous ayons imprimé au corps une déformation quelconque et que nous l'abandonnions à lui-même sans vitesse ; on admet généralement que l'on a :

$$\xi = A_1\xi_1 \cos k_1 t + A_2\xi_2 \cos k_2 t + \ldots = \sum A_n\xi_n \cos k_n t$$

$$\eta = \sum A_n\eta_n \cos k_n t$$

$$\zeta = \sum A_n\zeta_n \cos k_n t$$

Au point de vue physique, il est évident qu'il doit en être ainsi, car le nombre total des molécules du corps est fini. Les équations du problème peuvent s'obtenir en écrivant pour chaque molécule trois équations différentielles ordinaires, du second ordre, linéaires et à coefficients constants. L'intégrale générale d'un tel système est bien de la forme indiquée plus haut, le nombre des termes de la série étant égal à six fois le nombre des molécules.

On peut se demander si la proposition est encore vraie au point de vue analytique, lorsqu'en fait on revient à la conception de la matière continue. Cette question a un intérêt purement mathématique et, par conséquent, il serait essentiel de la résoudre rigoureusement. Malheureusement, les ressources actuelles de l'analyse ne permettent guère d'espérer en trouver la solution. Nous admettrons à titre de postulatum le résultat sans démonstration, par analogie avec ce qui a lieu pour les fonctions sphériques et de Lamé.

Si nous faisons $t = o$, nous avons les valeurs initiales de ξ, η, ζ

$$\xi = \sum A_n \xi_n$$

$$\eta = \sum A_n \eta_n$$

$$\zeta = \sum A_n \zeta_n$$

Il en résulterait que trois fonctions quelconques ξ, η, ζ peuvent être développées en séries de cette forme : c'est là le fait analytique essentiel qu'il faudrait démontrer.

On pourrait être tenté de croire à l'impossibilité de ce développement, par un raisonnement *a priori* dont il importe de montrer l'inexactitude. Les fonctions ξ_i, η_i, ζ_i satisfont toutes à une condition : la pression à la surface est nulle. Il peut arriver que les fonctions initiales données ξ, η, ζ ne satisfassent pas à cette condition ; il semble dès lors impossible que ξ, η, ζ soient des fonctions linéaires des ξ_i, η_i, ζ_i. On peut montrer par un exemple, emprunté à une théorie plus simple, la fausseté de ce raisonnement. On trouve facilement

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1.3} + \frac{\cos 4x}{3.5} + \frac{\cos 6x}{5.7} + \ldots\right)$$

x étant compris entre o et π. Le premier membre est une fonction impaire de x ; le second membre est une série dont tous les termes sont des fonctions paires.

Si nous admettons la possibilité du développement, il est facile de trouver les coefficients A ; soient en effet

$$\xi = \sum A_n \xi_n$$

$$\eta = \sum A_n \eta_n$$

$$\zeta = \sum A_n \zeta_n$$

Ajoutons ces équations multipliées respectivement par $\xi_i d\tau$, $\eta_i d\tau$, $\zeta_i d\tau$ et intégrons à l'intérieur de tout le volume du corps considéré il vient :

$$\int (\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i)\, d\tau = \sum A_i \int \sum \xi_i \xi_n d\tau$$
$$= \quad A_i$$

d'après les propriétés des fonctions ξ_i. On a ainsi les formules :

$$\xi = \sum \xi_i \int (\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i) d\tau$$

$$\eta = \sum \eta_i \int (\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i)\, d\tau$$

$$\zeta = \sum \zeta_i \int (\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i) d\tau$$

qui représentent certainement le développement cherché, si celui-ci est possible. Il resterait à montrer que ces formules sont exactes.

56. On peut, si l'on admet le postulatum énoncé plus haut, ramener le problème statique au problème dynamique ; il faut trouver trois fonctions ξ, η, ζ satisfaisant aux équations :

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta\xi &= -X \\ (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dy} + \mu\Delta\eta &= -Y \\ (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dz} + \mu\Delta\zeta &= -Z \end{aligned} \right.$$

et à la condition que la pression soit nulle à la surface. (Nous avons vu, en effet, qu'on peut ramener le problème général à ce cas particulier.)

Nous développerons X, Y, Z en séries de la forme :

$$X = \sum A_k \xi_k$$

$$Y = \sum A_k \eta_k$$

$$Z = \sum A_k \zeta_k$$

Pour que l'équilibre soit possible, il faut que, si l'on assujettit le corps à être un solide invariable, les forces se fassent équilibre, ce qui donne les conditions :

$$\int X d\tau = 0 \qquad \int Y d\tau = 0 \qquad \int Z d\tau = 0$$

$$\int (yZ - zY) d\tau = 0 \quad \int (zX - xZ) d\tau = 0 \quad \int (xY - yX) d\tau = 0$$

Il en résulte que les 6 premiers coefficients A sont nuls ; en effet, les 6 premiers minima sont nuls ; les déformations correspondantes sont de simples déplacements ; nous pouvons supposer, par exemple, que les trois premières sont des translations parallèles aux axes, les trois autres des rotations autour des axes. On a alors :

$$\xi_1 = C \qquad \eta_1 = 0 \qquad \zeta_1 = 0.$$

C étant une constante, il en résulte :

$$A_1 = \int (X\xi_1 + Y\eta_1 + Z\zeta_1)\, d\tau = C \int X d\tau = 0;$$

de même :

$$A_2 = A_3 = 0.$$

On a ensuite :

$$\xi_4 = 0 \qquad \eta_4 = -pz \qquad \zeta_4 = py$$

$$A_4 = \int (X\xi_4 + Y\eta_4 + Z\zeta_4)\, d\tau = p \int (yZ - zY)\, d\tau = 0$$

et de même :

$$A_5 = A_6 = 0$$

Cherchons maintenant une solution des équations (α) en posant :

$$\xi = \sum B_h \xi_h$$

$$\eta = \sum B_h \eta_h$$

$$\zeta = \sum B_h \zeta_h$$

les équations deviennent :

$$\sum B_h \left[(\lambda + \mu) \frac{d\theta_h}{dx} + \mu \Delta \xi_h \right] = -\sum A_h \xi_h$$

et deux équations analogues.

D'après les propriétés des fonctions ξ_k, ces équations s'écrivent :

$$\sum B_h k_h^2 \xi_h = \sum A_h \xi_h$$

ce qui permet d'écrire les équations :

$$B_i k_i^2 = A_i$$

qui donnent, pour les coefficients B, des valeurs finies. En effet, les 6 premiers coefficients A sont nuls et il en est de même des six premiers nombres k : les autres sont différents de zéro. On a donc pour tous les B, dont l'indice est supérieur à 6, des valeurs bien déterminées.

B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Il y a bien une réelle indétermination ; on peut leur attribuer telle valeur que l'on veut ; cela revient à déplacer le corps à la façon d'un solide invariable, ou, si l'on veut, à déplacer les axes.

CHAPITRE VI

PROPAGATION DES ONDES PLANES. — RÉFLEXION EXEMPLES DE VIBRATIONS

57. Ondes planes. — Nous avons à satisfaire aux équations :

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dx} + \mu\Delta\xi = \rho\dfrac{d^2\xi}{dt^2} \\ (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dy} + \mu\Delta\eta = \rho\dfrac{d^2\eta}{dt^2} \\ (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dz} + \mu\Delta\zeta = \rho\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}. \end{cases}$$

On dit que le mouvement se fait par ondes planes parallèles au plan des xy quand ξ, η, ζ dépendent seulement de z et de t.

Dans ce cas l'on a :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{dy} = 0$$

et les quantités $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ se réduisent à $\frac{d^2\xi}{dz^2}, \frac{d^2\eta}{dz^2}, \frac{d^2\zeta}{dz^2}$.

Enfin la quantité θ devient $\frac{d\zeta}{dz}$.

Les équations (α) deviennent après simplification

$$(\alpha') \qquad \left\{ \begin{aligned} \mu \frac{d^2\xi}{dz^2} &= \rho \frac{d^2\xi}{dt^2} \\ \mu \frac{d^2\eta}{dz^2} &= \rho \frac{d^2\eta}{dt^2} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{d^2\zeta}{dz^2} &= \rho \frac{d^2\zeta}{dt^2} \end{aligned} \right.$$

et si nous posons :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

elles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_1^2 \frac{d^2\xi}{dz^2} &= \frac{d^2\xi}{dt^2} \\ \omega_1^2 \frac{d^2\eta}{dz^2} &= \frac{d^2\eta}{dt^2} \\ \omega_2^2 \frac{d^2\zeta}{dz^2} &= \frac{d^2\zeta}{dt^2} \end{aligned} \right.$$

sous cette forme on voit qu'elles sont analogues aux équations des cordes vibrantes ; leurs intégrales générales sont donc :

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \varphi_1 (z - \omega_1 t) + \psi_1 (z + \omega_1 t) \\ \eta &= \varphi_2 (z - \omega_1 t) + \psi_2 (z + \omega_1 t) \\ \zeta &= \varphi_3 (z - \omega_2 t) + \psi_3 (z + \omega_2 t) \end{aligned} \right.$$

les fonctions φ et ψ étant arbitraires.

Si nous prenons en particulier :

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \varphi_1 (z - \omega_1 t) \\ \eta &= \zeta = 0 \end{aligned} \right.$$

nous aurons une onde plane se propageant avec la vitesse ω_1. La direction de la vibration est parallèle à ox, elle est donc contenue dans le plan de l'onde. On dit dans ce cas que l'onde est transversale ; cela s'accorde avec la définition déjà donnée de la transversalité, car θ se réduit ici à $\frac{d\zeta}{dz}$ qui est nul.

Si au lieu de la fonction φ_1 on avait pris $\psi_1\,(z + \omega_1 t)$ le sens seul de la propagation aurait été changé.

Considérons maintenant la solution particulière :

$$\left\{\begin{array}{l} \zeta = \varphi_3\,(z - \omega_2 t) \\ \xi = \eta = 0 \end{array}\right.$$

La direction de la vibration est l'axe des z, c'est-à-dire une perpendiculaire au plan de l'onde. On dit dans ce cas que l'onde est longitudinale et l'on peut vérifier que $\xi dx + \eta dy + \zeta dz$, qui se réduit à ζdz, est une différentielle exacte.

Les quantités ω_1 et ω_2 sont les vitesses de propagation des ondes transversales et des ondes longitudinales, elles sont en général différentes.

Pour les gaz $\mu = 0$ et par suite $\omega_1 = 0$; pour l'éther, au contraire, $\lambda + 2\mu = 0$, ce qui entraîne $\omega_2 = 0$.

Le corps étant supposé isotrope, il est évident que la vitesse de propagation d'une onde plane est indépendante de son orientation. Soit $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ le plan parallèle au plan de l'onde mené par l'origine, les quantités ξ, η, ζ ne seront fonction que de $\alpha x + \beta y + \gamma z$ et de t.

58. Étudions en particulier les ondes qui correspondent à des mouvements vibratoires périodiques. Les équations qui donnent ξ, η, ζ sont à coefficients réels ; si donc on a trouvé une solution

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 \\ \eta = \eta_0 \\ \zeta = \zeta_0 \end{cases}$$

où ξ_0, η_0, ζ_0 sont imaginaires, en désignant par ξ'_0, η'_0, ζ'_0 les imaginaires conjuguées, les équations seront satisfaites pour :

$$\begin{cases} \xi = \zeta'_0 \\ \eta = \eta'_0 \\ \zeta = \zeta'_0 \end{cases}$$

De plus ces équations étant linéaires, une nouvelle solution sera donnée par :

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2}(\xi_0 + \xi'_0) \\ \eta = \frac{1}{2}(\eta_0 + \eta'_0) \\ \zeta = \frac{1}{2}(\zeta_0 + \zeta'_0) \end{cases}$$

c'est-à-dire par les parties réelles de ξ_0, η_0 ζ_0.

On peut donc écrire les expressions de ξ, η, ζ sous forme imaginaire en convenant de ne conserver définitivement que la partie réelle. Ordinairement on emploie pour l'étude des vibrations périodiques des exponentielles imaginaires et l'on pose :

$$\xi = Ae^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z + pt)}$$

. . . .

ou avec $P = \alpha x + \beta y + \gamma z + pt$

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= Ae^{iP} \\ \eta &= Be^{iP} \\ \zeta &= Ce^{iP} \end{aligned}\right.$$

Le plan de l'onde est alors :

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma z + pt = 0.$$

Cherchons à déterminer, à l'aide de ces formules, des ondes transversales et des ondes longitudinales.

La condition de transversalité :

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

s'écrit :

$$Ai\alpha e^{iP} + Bi\beta e^{iP} + Ci\gamma e^{iP} = 0$$

c'est-à-dire $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$; elle exprime que la direction de la vibration est dans le plan de l'onde.

Si cette condition est remplie, l'onde se propagera avec la vitesse ω_1 et l'on devra avoir :

$$\omega_1^2 \Delta\xi = \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

ce qui s'écrit :

$$-\omega_1^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) Ae^{iP} = -p^2 Ae^{iP}$$

ou :

$$p^2 = \omega_1^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

Pour avoir une onde longitudinale il faut que la quantité

$\xi dx + \eta dy + \zeta dz$ soit une différentielle exacte, ce qui exige :

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}$$

La vibration est donc perpendiculaire au plan de l'onde.

Il faut de plus que la vitesse de propagation soit ω_2.

Cette dernière condition donne évidemment :

$$p^2 = \omega_2^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Cherchons maintenant les solutions réelles qui correspondent à ces solutions imaginaires ; supposons que l'on ait trouvé :

$$\left\{\begin{array}{l} A = A_1 + iA_2 \\ B = B_1 + iB_2 \\ C = C_1 + iC_2 \end{array}\right.$$

et que les coefficients α, β, γ, p soient réels, ce qui a lieu en général. On a alors :

$$e^{iP} = \cos P + i \sin P$$

et par suite :

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = A_1 \cos P - A_2 \sin P \\ \eta = B_1 \cos P - B_2 \sin P \\ \zeta = C_1 \cos P - C_2 \sin P \end{array}\right.$$

On a quelquefois à considérer des cas où α, β, γ, p ne sont pas réels, P est alors de la forme

$$P' + iP''$$

et l'expression de ξ, par exemple, devient :

$$\xi = A_1 e^{-P'} \cos P' - A_2 e^{-P'} \sin P'$$

Elle contient donc un facteur périodique multiplié par un facteur exponentiel $e^{-P'}$ qui dépend du temps, si p est imaginaire.

Des ondes de cette nature se présentent surtout en optique où on les appelle ondes évanescentes ; nous verrons plus loin qu'on peut aussi en avoir besoin en élasticité.

59. Réflexion. — Considérons un plan indéfini que nous prendrons comme plan des xy, nous supposons qu'au dessous se trouve un milieu élastique indéfini, le vide étant au dessus. Une onde se propageant dans le milieu élastique et rencontrant le plan des xy ne donnera pas d'onde réfractée car le vide n'a pas de masse et ne peut par conséquent pas emprunter de force vive au milieu élastique.

Si au lieu du vide on avait de l'air ou un milieu de densité très faible par rapport à celle du corps élastique, la force vive de l'onde réfractée serait aussi très faible et négligeable devant celle de l'onde incidente.

De plus la pression à la surface devra être nulle.

Nous prenons le plan d'incidence pour plan des yz, les différentes ondes planes seront parallèles à l'axe ox et par suite ξ, η, ζ, ne dépendront pas de x.

Soient donc :

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \xi_0 e^{i(\beta y + pt)} \\ \eta &= \eta_0 e^{i(\beta y + pt)} \\ \zeta &= \zeta_0 e^{i(\beta y + pt)} \end{aligned}\right.$$

ξ_0, η_0, ζ_0, dépendant seulement de z, les expressions de la vibration.

Quelle que soit sa direction, nous pouvons décomposer la vibration en deux autres, l'une parallèle au plan d'incidence, l'autre perpendiculaire à ce plan.

1° Considérons la vibration perpendiculaire au plan d'incidence, elle est parallèle à ox, par conséquent située dans le plan de l'onde. L'onde incidente est donc transversale.

Par raison de symétrie l'onde réfléchie est aussi transversale.

Faisons $\eta = \zeta = o$, l'équation qui donne ξ se réduit à :

$$\mu\Delta\xi = \rho \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

Mais on a :

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta\xi &= \frac{d^2\xi}{dz^2} - \beta^2\xi \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -p^2\xi \end{aligned} \right.$$

Donc ξ satisfait à l'équation:

$$\mu\left(\frac{d^2\xi}{dz^2} - \beta^2\xi\right) = -\rho p^2\xi.$$

Les deux autres équations sont satisfaites d'elles-mêmes puisque η, ξ et θ sont nuls.

L'équation en ξ est linéaire et à coefficients constants, on sait l'intégrer. D'autre part nous avons : $\xi = \xi_0 e^{i(\beta y + pt)}$, ξ_0 ne dépendant que de z, donc ξ_0 satisfait à la même équation :

$$\frac{d^2\xi_0}{dz^2} - \beta^2\xi_0 = -\frac{p^2}{\omega_1^2}\xi_0$$

puisque $\omega_1^2 = \frac{\mu}{\rho}$.

Soit $\sqrt{\frac{p^2}{\omega_1^2} - \beta^2} = \gamma$, γ doit être une quantité réelle pour que le plan de l'onde soit réel, on a :

$$\xi_0 = Ae^{i\gamma z} + Be^{-i\gamma z}$$

et par suite :

$$\xi = Ae^{i(\gamma z + \beta y + pt)} + Be^{i(-\gamma z + \beta y + pt)}.$$

Le rapport des deux constantes d'intégration, qui est aussi le rapport des amplitudes des ondes incidente et réfléchie, se détermine en écrivant que la pression est nulle à la surface. On aura donc pour $z = 0$:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)\,\theta + \mu \dfrac{d\zeta}{dz} = 0 \\ \mu\left(\dfrac{d\zeta}{dy} + \dfrac{d\eta}{dz}\right) = 0 \\ \mu\left(\dfrac{d\xi}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dx}\right) = 0 \end{cases}$$

et, comme $\theta = \eta = \zeta = 0$, ces conditions se réduisent à :

$$\frac{d\xi}{dz} = 0 \text{ pour } z = 0.$$

Il en résulte $A = B$, ce qu'il était facile de prévoir d'après le principe de la conservation de l'énergie.

60. 2° Considérons maintenant la vibration qui est parallèle au plan d'incidence. Elle le sera encore dans la ou les ondes réfléchies.

Posons

$$\begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = \eta_0 e^{i(\beta y + pt)} \\ \zeta = \zeta_0 e^{i(\beta y + pt)} \end{cases}$$

η_0 et ζ_0 ne dépendant que de z et cherchons à vérifier les équations (α) du N° 57

$$\left\{\begin{array}{l} (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dx} + \mu\Delta\xi = \rho\dfrac{d^2\xi}{dt^2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right.$$

La première est satisfaite d'elle-même.

On a d'autre part :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -p^2\eta \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -p^2\zeta, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta\eta = \dfrac{d^2\eta}{dz^2} - \beta^2\eta \\ \Delta\zeta = \dfrac{d\zeta^2}{dz^2} - \beta^2\zeta \end{array}\right.$$

et

$$\theta = i\beta\eta + \frac{d\zeta}{dz}$$

donne les deux relations :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\theta}{dy} = i\beta\dfrac{d\eta}{dy} + \dfrac{d^2\zeta}{dydz} = i\beta\theta \\ \dfrac{d\theta}{dz} = i\beta\dfrac{d\eta}{dz} + \dfrac{d^2\zeta}{dz^2}. \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations sont donc :

$$\left\{\begin{array}{l} i(\lambda + \mu)\beta\left(i\beta\eta + \dfrac{d\zeta}{dz}\right) + \mu\left(\dfrac{d^2\eta}{dz^2} - \beta^2\eta\right) = -\rho p^2\eta \\ i(\lambda + \mu)\beta\dfrac{d\eta}{dz} + (\lambda + \mu)\dfrac{d^2\zeta}{dz^2} + \mu\left(\dfrac{d^2\zeta}{dz^2} - \beta^2\zeta\right) = -\rho p^2\zeta \end{array}\right.$$

Elles s'écrivent en remplaçant η, ζ par leurs expressions en fonction de η_0, ζ_0 et ordonnant :

$$\left\{\begin{array}{l} \mu \dfrac{d^2\eta_0}{dz^2} + i\beta(\lambda+\mu)\dfrac{d\zeta_0}{dz} - [(\lambda+2\mu)\beta^2 - \rho p^2]\,\eta_0 = 0 \\ (\lambda+2\mu)\dfrac{d^2\zeta_0}{dz^2} + i\beta(\lambda+\mu)\dfrac{d\eta_0}{dz} - [\mu\beta^2 - \rho p^2]\,\zeta_0 = 0. \end{array}\right.$$

Ce sont deux équations du second ordre linéaires et à coefficients constants.

En éliminant l'une des quantités η_0 et ζ_0, on trouve pour l'autre une équation du quatrième ordre à coefficients constants dont l'intégration ne présente aucune difficulté.

On a donc pour η_0, ζ_0 quatre solutions linéairement indépendantes. Elles sont faciles à prévoir. Supposons l'onde incidente longitudinale, on aura :

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_0 = \beta e^{i\gamma z} \\ \zeta_0 = \gamma e^{i\gamma z} \end{array}\right.$$

γ étant déterminé par l'équation :

$$\beta^2 + \gamma^2 = \frac{p^2}{\omega_2^2}.$$

L'onde réfléchie correspondante sera donnée par l'autre racine de l'équation en γ :

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_0 = \beta e^{-i\gamma z} \\ \zeta_0 = -\gamma e^{-i\gamma z} \end{array}\right.$$

Supposons maintenant l'onde incidente transversale. Soit : $\gamma' z + \beta y = 0$ le plan de l'onde au temps $t = 0$, on aura :

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_0 = -\gamma' e^{i\gamma' z} \\ \zeta_0 = \beta e^{i\gamma' z} \end{array}\right.$$

γ' étant donné par la relation :

$$\beta^2 + \gamma'^2 = \frac{p^2}{\omega_1^2}.$$

L'onde réfléchie correspondante sera telle que :

$$\begin{cases} \eta_0 = \gamma' e^{-i\gamma' z} \\ \zeta_0 = \beta e^{-i\gamma' z} \end{cases}$$

La solution générale est donc :

$$\begin{cases} \eta_0 = A\beta e^{i\gamma z} + B\beta e^{-i\gamma z} - C\gamma' e^{i\gamma' z} + D\gamma' e^{-i\gamma' z} \\ \zeta_0 = A\gamma e^{i\gamma z} - B\gamma e^{-i\gamma z} + C\beta e^{i\gamma' z} + D\beta e^{-i\gamma' z} \end{cases}$$

Quand on donne la vibration incidente, on connaît A et C. Il s'agit de trouver B et D. On se servira, comme précédemment, de ce que la pression est nulle dans le plan des xy.

Des trois équations

$$\begin{cases} \lambda\theta + 2\mu \dfrac{d\zeta}{dz} = 0 \\ \mu\left(\dfrac{d\xi}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dx}\right) = 0 \\ \mu\left(\dfrac{d\eta}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dy}\right) = 0 \end{cases}$$

qui doivent être vérifiées pour $z = 0$, la seconde est satisfaite d'elle-même.

Les deux autres donnent :

$$\begin{cases} (A + B)\,[\lambda\beta^2 + (\lambda + 2\mu)\gamma^2] + 2(C - D)\,\mu\beta\gamma' = 0 \\ 2\,(A - B)\,\beta\gamma + (C + D)\,(\beta^2 - \gamma'^2) = 0 \end{cases}$$

En tenant compte de ce que

$$(\lambda + 2\mu)\,(\beta^2 + \gamma^2) = \rho p^2 = \mu\,(\beta^2 + \gamma'^2)$$

la première s'écrit :

$$2(C-D)\beta\gamma' - (A+B)(\beta^2-\gamma'^2) = 0$$

On a pour déterminer B et D les deux équations

$$\begin{cases} (A-B)\,2\beta\gamma + (C+D)(\beta^2-\gamma'^2) = 0 \\ (C-D)\,2\beta\gamma - (A+B)(\beta^2-\gamma'^2) = 0 \end{cases}$$

Le problème est complètement terminé.

Soit par exemple un rayon incident vibrant transversalement dans le plan d'incidence:

Il donnera deux rayons réfléchis de direction différente vibrant l'un transversalement, l'autre longitudinalement. Pour le premier l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

Soit i l'angle d'incidence, r l'angle de réflexion pour le rayon réfléchi qui vibre longitudinalement.

On a

$$\operatorname{tg} i = \frac{\beta}{\gamma}, \qquad \operatorname{tg} r = \frac{\beta}{\gamma}$$

et par suite :

$$\begin{cases} \sin i = \dfrac{2\beta\omega_2}{p} \\ \sin r = \dfrac{2\beta\omega_1}{p} \end{cases}$$

i et r sont donc liés par la relation :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

qui montre que le rayon suit la loi donnée par Descartes pour la réfraction.

De même, si l'onde incidente est longitudinale, il y aura deux rayons réfléchis, l'un longitudinal pour lequel l'angle de réflexion sera égal à l'angle d'incidence, l'autre transversal qui se réfléchira conformément à la loi d'optique de Descartes.

Si l'un des angles de réflexion devenait imaginaire, il est facile de voir que l'un des rayons réfléchis serait évanescent.

61. Il y a un certain nombre de cas où la réflexion ne décompose pas le rayon incident, la vibration étant parallèle au plan d'incidence.

Supposons que cela arrive pour un rayon incident vibrant longitudinalement, c'est-à-dire pour lequel $C = 0$.

L'expression $\eta dy + \zeta dz$ doit être une différentielle exacte; soit $d\varphi$ cette différentielle.

On a :

$$\eta = \frac{d\varphi}{dy} \qquad \zeta = \frac{d\varphi}{dz}$$

D'autre part les relations

$$\left\{ \begin{aligned} \eta &= \eta_0 e^{i(\beta y + pt)} \\ \zeta &= \zeta_0 e^{i(\beta y + pt)} \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_0 &= A\beta e^{i\gamma z} + B\beta e^{-i\gamma z} \\ \zeta_0 &= A\gamma e^{i\gamma z} - B\gamma e^{-i\gamma z} \end{aligned} \right.$$

donnent par l'intégration

$$\varphi = \frac{\eta}{i\beta} \text{ ou } \frac{d\varphi}{dy} = i\beta\varphi$$

et

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\gamma^2\varphi$$

Donc :

$$\theta = \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = -(\beta^2 + \gamma^2)\varphi$$

et

$$\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = 2i\beta\frac{d\varphi}{dz}$$

Les conditions à la surface $N_3 = T_2 = T_1 = 0$ pour $z = 0$ se réduisent, puisque l'équation $T_2 = 0$ est satisfaite d'elle-même, à :

$$\left\{\begin{array}{l} [\lambda(\beta^2 + \gamma^2) + \mu\gamma^2]\varphi = 0 \\ 2i\beta\mu\dfrac{d\varphi}{dz} = 0 \end{array}\right.$$

pour $z = 0$

Le coefficient de φ ne peut être nul ; donc $\varphi = 0$.

On ne peut supposer en même temps $\frac{d\varphi}{dz} = 0$, car cela entraînerait $A = B = 0$, ce qui est impossible puisqu'on a supposé l'existence d'un rayon incident.

Il faut donc que l'on ait soit $\mu = 0$, soit $\beta = 0$ avec $\varphi = 0$.

Le cas $\mu = 0$ correspond à un fluide élastique.

Le cas $\beta = 0$ donne l'incidence normale.

Sauf ces deux cas, un rayon incident longitudinal est toujours décomposé par la réflexion.

Supposons maintenant que le même fait se produise pour un rayon incident transversal.

La condition $\theta = 0$ se réduit à :

$$\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

qui exprime que $\eta dz - \zeta dy$ est une différentielle exacte $d\psi$.

On a alors :

$$\eta = \frac{d\psi}{dz}, \qquad \zeta = -\frac{d\psi}{dy}$$

Les relations

$$\begin{cases} \eta = \eta_0 e^{i(\beta y + pt)} \\ \zeta = \zeta_0 e^{i(\beta y + pt)} \end{cases}$$

où l'on a :

$$\begin{cases} \eta_0 = -C\gamma' e^{i\gamma' z} + D\gamma' e^{-i\gamma' z} \\ \zeta_0 = C\beta e^{i\gamma' z} + D\beta e^{-i\gamma' z} \end{cases}$$

donnent en intégrant :

$$-\psi = \frac{\zeta}{i\beta}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{d\psi}{dy} = i\beta\psi$$

et

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = -\gamma'^2\psi.$$

Écrivons les conditions aux limites $N_3 = T_2 = T_1 = 0$ qui doivent être satisfaites pour $z = 0$; remarquons que $T_2 = 0$ est satisfaite d'elle-même, il restera :

$$\begin{cases} \lambda\theta + 2\mu \dfrac{d\xi}{dz} = 0 \\ \mu\left(\dfrac{d\eta}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dy}\right) = 0 \end{cases}$$

pour $z = 0$.

Maintenant μ est différent de zéro, car on a un rayon transversal ; et $\mu = 0$ entraînerait $\omega_1 = 0$.

Comme θ est nul à cause de cette transversalité, il reste les deux seules conditions :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d\zeta}{dz} = -i\beta \frac{d\psi}{dz} = 0 \\ \frac{d^2\psi}{dz^2} - \frac{d^2\psi}{dy^2} = 0 \end{array}\right.$$

La dernière s'écrit aussi : $(\gamma'^2 - \beta^2)\,\psi = 0$.

Si les coefficients β et $\gamma'^2 - \beta^2$ ne sont pas nuls, les deux équations ne sont satisfaites que pour $C = D = 0$, c'est-à-dire s'il n'y a pas de rayon incident.

Il faut donc $\beta = 0$ ou $\gamma'^2 = \beta^2$.

$\beta = 0$ donne l'incidence normale

$\beta^2 = \gamma'^2$ donne l'incidence à 45°.

Dans ces deux seuls cas il n'y a pas de décomposition et le rayon réfléchi est aussi transversal.

Dans tous les autres on a deux rayons réfléchis.

62. Vibrations possibles d'un corps élastique de dimensions finies. — Lamé croyait que les vibrations d'un corps élastique étaient ou uniquement transversales ou uniquement longitudinales. Nous verrons qu'il ne peut en être ainsi.

Comment Lamé a-t-il eu cette idée et comment ne s'est-il pas aperçu de sa fausseté ? Lamé se représente un corps vibrant non dans le vide mais dans l'air. Par conséquent, à la surface du corps la pression est différente de zéro et normale. Au lieu des trois conditions exprimant que la pression est nulle à la surface du corps, Lamé n'en a plus que deux. En ajoutant à ces conditions celle qui exprime que la vibration est transversale, on conçoit que le problème reste possible et déterminé et qu'il en soit de même dans le cas de vibrations longitudinales.

Lamé cherchait à trouver pour les ξ des expressions de la forme $\xi = \xi_i \cos k_i t$; mais nous savons qu'un corps vibrant dans l'air communique peu à peu sa force vive à l'air, on doit donc trouver pour les ξ des expressions de la forme

$$\xi = \xi_i e^{-\alpha t} \cos k_i t.$$

Lamé n'arrive pas à ces formules.

Nous allons faire quand même le calcul de Lamé pour le prisme rectangle ; il présente un certain intérêt.

I. — Recherchons d'abord les vibrations longitudinales qu'il est capable d'éprouver.

Soient :

$$\begin{array}{lll} x = 0 & y = 0 & z = 0 \\ x = a & y = b & z = c \end{array}$$

les équations des six faces.

ξ, η, ζ doivent être les dérivées partielles d'une même fonction φ que nous prendrons ainsi :

$$\varphi = \cos \alpha x . \cos \beta y . \cos \gamma z . \cos pt.$$

Nous aurons alors :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{p^2}{\omega_2^2}$$

ω_2 étant la vitesse de propagation d'une onde longitudinale.

Supposons que α, β, γ soient pris de telle sorte que :

$$\left\{\begin{aligned} \alpha a &= m\pi \\ \beta b &= n\pi \\ \gamma c &= q\pi \end{aligned}\right.$$

m, n, q étant des nombres entiers, Lamé emploie la notation abrégée suivante :

$$\left\{\begin{aligned} \cos \alpha x &= c \\ \cos \beta y &= c' \\ \cos \gamma z &= c'' \\ \cos pt &= \Gamma \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \sin \alpha x &= s \\ \sin \beta y &= s' \\ \sin \gamma z &= s'' \end{aligned}\right.$$

On a par conséquent :

$$\begin{array}{llll} s = o & \text{pour} & x = o & \text{ou} \quad x = a \\ s' = o & \text{pour} & y = o & \text{ou} \quad y = b \\ s'' = o & \text{pour} & z = o & \text{ou} \quad z = c \end{array}$$

A la surface du corps, les composantes normales du déplacement sont nulles. Considérons par exemple les deux faces perpendiculaires à ox, nous avons $\xi = -\alpha s c' c'' \Gamma$, et nous savons que s s'annule pour $x = o$ et $x = a$.

Je dis que les composantes tangentielles de la pression sont nulles à la surface. Considérons en effet un point de l'une des faces $x = o$ ou $x = a$, la composante parallèle de la pression est :

$$\mu \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right) = 2\mu \frac{d^2\varphi}{dx dy}$$

c'est-à-dire :

$$2\mu\alpha\beta s s' c'' \Gamma$$

Elle s'annule évidemment pour $x = 0$ et $x = a$.

Les conditions que Lamé s'impose sont donc remplies par le système de valeurs de ξ, η, ζ considéré.

II. — Cherchons maintenant les vibrations transversales dont est susceptible le prisme.

Prenons :

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \mathrm{P}sc'c''\Gamma \\ \eta &= \mathrm{Q}cs'c''\Gamma \\ \zeta &= \mathrm{R}cc's''\Gamma \end{aligned}\right.$$

P, Q, R étant des coefficients constants et supposons que l'on ait choisi α, β, γ de manière à vérifier

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{p^2}{\omega_1^2}$$

et les relations :

$$\alpha a = m\pi, \text{ etc.....}$$

La condition de transversalité $\theta = 0$ donne

$$\mathrm{P}\alpha + \mathrm{Q}\beta + \mathrm{R}\gamma = 0$$

relation que nous assujettirons P, Q, R à vérifier.

Dans ce cas les composantes tangentielles de la pression à la surface sont nulles. En effet $\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}$ se réduit ici à :

$$- s\,(\mathrm{P}\beta s'c''\Gamma + \mathrm{Q}\alpha s'c''\Gamma)$$

c'est-à-dire contient le facteur s qui s'annule pour $x = 0$ et $x = a$.

De plus nous remarquons que la composante normale du déplacement est encore nulle à la surface, car ξ par exemple contient s en facteur.

Les conditions de Lamé sont donc remplies.

Mais les solutions trouvées correspondent à un problème que Lamé n'avait pas en vue et qui est le suivant :

Un corps rigide possède une cavité en forme de prisme rectangulaire, on y place un prisme élastique ; trouver les vibrations transversales et les vibrations longitudinales dont est susceptible ce prisme.

Le seul mouvement possible est en effet le mouvement de glissement pour les éléments de la surface ; par suite, si nous négligeons le frottement, les pressions tangentielles qui s'opposeraient à ce glissemeut doivent être nulles.

D'autre part, les composantes normales des déplacements doivent être nulles.

Examinons maintenant comment on peut se rendre compte de ce fait que les vibrations d'un prisme rectangle ne sont ni exclusivement longitudinales, ni exclusivement transversales.

Voici une manière élémentaire de se représenter la nature des vibrations propres d'un corps élastique.

Supposons une onde plane se propageant à l'intérieur d'un pareil corps ; elle se réfléchira sur les parois ; les ondes réfléchies subiront à leur tour de nouvelles réflexions et l'interférence de tous ces rayons produira une sorte de système d'ondes stationnaires ; c'est l'existence de ces ondes stationnaires qui détermine l'état vibratoire du corps.

Dans le cas d'un fluide, les ondes longitudinales peuvent seules se propager ; un rayon incident longitudinal donne un seul rayon réfléchi qui est également longitudinal, et les ondes stationnaires formées ne pourront être que longitudinales.

Dans le cas d'un solide, au contraire, un rayon incident se décompose par la réflexion en deux autres, l'un longitudinal et l'autre transversal; les ondes stationnaires dues à l'interférence de ces divers rayons ne seront ni exclusivement longitudinales, ni exclusivement transversales.

D'autre part, on ne pourra, même dans le cas simple du parallélipipède rectangle, s'arranger de façon que le nombre des ondes interférentes soit fini, et c'est pour cette raison que la solution est beaucoup plus compliquée que ne le croyait Lamé.

Cependant il y a des cas où la décomposition de l'onde incidente en deux ondes réfléchies, l'une longitudinale, l'autre transversale n'a pas lieu et nous pouvons prévoir que dans certains cas tous les rayons dus aux réflexions successives seront de même nature et que par conséquent les ondes stationnaires seront longitudinales ou transversales. C'est en effet ce qui arrive, ainsi que nous allons le voir.

63. Vibrations du prisme rectangle. — Nous avons vu qu'il y avait des cas où une onde se réfléchissait sans se décomposer; à chacun d'eux correspond un cas où l'on peut résoudre complètement le problème du prisme rectangle.

Rappelons donc les divers cas où cette décomposition n'a pas lieu :

1° L'onde incidente est longitudinale et tombe sous l'incidence normale ;

2° L'onde incidente est transversale et tombe sous l'incidence normale ;

3° La vibration incidente est transversale et perpendiculaire au plan d'incidence.

Le second cas rentre dans le troisième, car l'incidence étant normale, le plan d'incidence est indéterminé et peut être pris perpendiculairement à la vibration ;

4° L'onde incidente est transversale, la vibration est parallèle au plan d'incidence et l'incidence est de 45° ;

5° Le corps élastique est un fluide, c'est-à-dire $\mu = 0$.

I. — Supposons que le prisme ait deux dimensions infinies, c'est-à-dire se réduise à la portion de l'espace comprise entre deux plans parallèles $x = 0$, $x = a$.

Considérons une onde longitudinale se propageant dans le prisme et tombant sur ses faces sous l'incidence normale. Nous aurons $\eta = \zeta = 0$ et nous prendrons :

$$\xi = \cos \alpha x \qquad \cos pt = c\Gamma$$

avec les notations de Lamé. Assujettissons α et p à satisfaire aux deux relations :

$$\alpha^2 = \frac{p^2}{\omega_2^2} \qquad \text{et} \qquad \alpha a = m\pi$$

m étant un nombre entier. Les équations de l'équilibre intérieur sont évidemment satisfaites.

Considérons les équations à la surface :

$$\left\{ \begin{aligned} & \lambda\theta + 2\mu \frac{d\xi}{dx} = 0 \\ & \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = 0 \\ & \frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} = 0 \end{aligned} \right.$$

pour $x = 0$ et $x = a$.

La première donne, puisque $\eta = \zeta = 0$,

$$\frac{d\xi}{dx} = 0 \qquad \text{pour} \qquad x = 0 \qquad \text{et} \qquad x = a.$$

Cette condition est satisfaite puisque $\frac{d\xi}{dx}$ contient sin αx en facteur.

Les deux autres sont satisfaites d'elles-mêmes. Donc :

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \cos \alpha x \cos \chi t \\ \eta &= 0 \\ \zeta &= 0 \end{aligned}\right.$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} \alpha a &= m\pi \\ \alpha &= \frac{p}{\omega_2}. \end{aligned}\right.$$

exprime un des états vibratoires du prisme.

II. — Considérons un prisme rectangulaire dont une seule dimension est infinie, soient :

$$\left\{\begin{aligned} y &= 0 \qquad & y &= b \\ z &= 0 \qquad & z &= c \end{aligned}\right.$$

les équations de ses faces.

Prenons un plan d'incidence perpendiculaire à ox et considérons une vibration transversale perpendiculaire à ce plan, nous aurons :

$$\eta = \zeta = 0$$

Nous prendrons :

$$\xi = c'c''\Gamma$$

Il faudra d'abord satisfaire aux conditions à l'intérieur, ce qui donne la seule relation $\beta^2 + \gamma^2 = \frac{p^2}{\omega_1^2}$.

Si nous choisissons en outre β et γ de façon que βb et γc soient des multiples entiers de π, les conditions à la surface seront satisfaites.

Nous avons en effet $\theta = 0$, par suite les conditions relatives aux faces $y = 0$ et $y = b$ seront :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\eta}{dy} = 0 \\ &\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = 0 \\ &\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz} = 0 \end{aligned}\right.$$

La première et la troisième sont satisfaites d'elles-mêmes, la seconde l'est parce que $\frac{d\xi}{dy}$ contient s' en facteur.

On vérifierait le même fait pour les faces $z = 0$ et $z = c$. On a donc un état vibratoire du prisme :

$$\left\{\begin{aligned} &\eta = \zeta = 0 \\ &\xi \ = c'c''\Gamma \end{aligned}\right.$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} &\beta^2 + \gamma^2 = \frac{p^2}{\omega_1^2} \\ &\beta b = n\pi \\ &\gamma c = q\pi \end{aligned}\right.$$

III. — Soit un prisme dont toutes les dimensions sont finies et :

$$\begin{array}{lll} x = 0 & y = 0 & z = 0 \\ x = a & y = b & z = c \end{array}$$

les équations de ses faces. Nous allons considérer une onde transversale, le plan d'incidence étant toujours yoz, la vibration sera parallèle au plan d'incidence, et l'incidence sera de 45°.

Nous aurons $\xi = 0$; soit $\psi = c'c''\Gamma$, nous prendrons

$$\left\{ \begin{aligned} \eta &= \frac{d\psi}{dz} \\ \zeta &= -\frac{d\psi}{dz} \end{aligned} \right.$$

et pour que l'incidence soit de 45° il faut $\beta = \gamma$.

Les équations de l'équilibre intérieur donnent la seule condition

$$\beta^2 + \gamma^2 = \frac{p^2}{\omega_1^2}$$

et la relation $\theta = \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0$ montre que la vibration est transversale.

Si l'on suppose β tel que $\beta b = n\pi$ et en même temps $\beta c = q\pi$ puisque $\beta = \gamma$, ce qui exige que $\frac{b}{c}$ soit un nombre rationnel, je dis que les conditions à la surface seront satisfaites.

D'abord elles le seront sur les faces $x = 0$ et $x = a$. On doit avoir sur ces faces :

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d\xi}{dx} = 0 \\ &\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = 0 \\ &\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} = 0 \end{aligned} \right.$$

Or $\xi = 0$, η et ζ sont indépendants de x. Les relations sont donc satisfaites.

Considérons les faces $y = 0$, $y = b$.

On doit avoir :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\eta}{dy} = 0 \\ &\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz} = 0 \\ &\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = 0 \end{aligned}\right.$$

La troisième condition est satisfaite d'elle-même, la première l'est parce que $\frac{d\eta}{dy}$ contient s' en facteur.

Il reste

$$\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{d^2\psi}{dz^2}$$

ou encore :

$$-\beta^2\psi = -\gamma^2\psi$$

relation satisfaite parce que $\beta = \gamma$.

La vérification se ferait de même pour $z = 0$ et $z = c$; $\frac{d\zeta}{dz}$ contient en effet s'' en facteur, car :

$$-\frac{d\zeta}{dz} = +\frac{d\eta}{dy} = \beta\gamma s's''\Gamma$$

L'état vibratoire trouvé est donc :

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= 0 \\ \eta &= \beta c' s'' \Gamma \\ \zeta &= -\beta s' c'' \Gamma \end{aligned}\right.$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} & 2\beta^2 = \frac{p^2}{\omega_1^2} \\ & \beta b = n\pi, \beta c = q\pi \end{aligned}\right.$$

IV. — Cas des fluides, $\mu = 0$.

Cherchons toujours des vibrations périodiques de la forme

$$\xi = \xi_0 \cos pt,$$

ξ_0 étant indépendant de t.

Les équations de l'équilibre intérieur sont, puisque $\mu = 0$:

$$\left\{\begin{aligned} \lambda \frac{d\theta}{dx} &= -\rho p^2 \xi \\ \lambda \frac{d\theta}{dy} &= -\rho p^2 \eta \\ \lambda \frac{d\theta}{dz} &= -\rho p^2 \zeta \end{aligned}\right.$$

ξ, η, ζ sont donc proportionnels aux trois dérivées partielles de θ, il en résulte que $\xi dx + \eta dy + \zeta dz$ est une différentielle exacte.

Différentions la première des équations par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutons, nous aurons :

$$\lambda \Delta \theta = -\rho p^2 \theta$$

ce qui s'écrit :

$$\Delta\theta = -\frac{p^2}{\omega_2^2}\theta$$

puisque :

$$\omega_2^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

et que $\mu = 0$.

La pression est nulle à la surface, on a donc, puisque $\mu = 0$, $\theta = 0$ à la surface.

Le problème est très facile à résoudre pour un prisme rectangle, il suffit de prendre :

$$\theta = ss's''\Gamma$$

avec $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{p^2}{\omega_2^2}$ et αa, βb, γc multiples de π.

En effet, à la surface, l'une des trois quantités s, s', s'' s'annule.

Ce n'est pas ainsi que se pose, en général, le problème dans le cas des fluides. Quand on a un gaz enfermé dans une capacité rigide, ce n'est pas la pression qui est nulle à la surface, c'est la composante normale du déplacement.

Nous avons vu que ξ, η, ζ sont proportionnels à $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d\theta}{dy}$, $\frac{d\theta}{dz}$. La composante normale du déplacement est donc :

$$-\frac{\lambda}{\rho p^2}\frac{d\theta}{dn}.$$

Il faut $\frac{d\theta}{dn} = 0$, on y satisfera dans le prisme rectangle en prenant $\theta = cc'c''\Gamma$.

En effet, pour une face perpendiculaire à ox, par exemple,

$$\frac{d\theta}{dn} = \frac{d\theta}{dx} = -\, \alpha s c' c'' \Gamma$$

$\frac{d\theta}{dn}$ contient donc s en facteur.

Ces deux problèmes, celui qui consiste à satisfaire aux équations de l'équilibre intérieur avec $\theta = 0$ à la limite et celui qui exige $\frac{d\theta}{dn} = 0$ à la limite, se retrouvent dans la théorie de la chaleur.

Si on considère un corps qui se refroidit et dont la surface est maintenue à 0°, c'est le premier problème qu'il faut résoudre ; si on suppose la surface impénétrable à la chaleur, c'est le second.

64. Vibrations d'une sphère. — Les cas où l'on sait résoudre le problème de l'élasticité pour la sphère ne sont pas beaucoup plus étendus que pour le prisme rectangle.

Le cas le plus simple est celui où l'on suppose les vibrations dirigées suivant les rayons et le déplacement d'un point fonction seulement de sa distance r au centre de la sphère.

Dans ce cas la vibration est longitudinale. En effet l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = x.f(r) \\ \eta = y.f(r) \\ \zeta = z.f(r) \end{array} \right.$$

et par suite :

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz = f(r).rdr = d\varphi$$

φ est une fonction ne dépendant que de r et de t et dont les trois dérivées partielles par rapport à x, y, z sont les composantes du déplacement.

Supposons que ξ, η, ζ ne dépendent du temps que par un facteur $\cos pt$, les équations à l'intérieur sont :

$$\left\{\begin{array}{l}(\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dx} + \mu\Delta\xi = -\rho p^2\xi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

Mais ici :

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = \Delta\varphi$$

$$\Delta\xi = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\Delta\varphi}{dx}.$$

Les équations de l'équilibre interne s'écrivent donc :

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d\Delta\varphi}{dx} = -\rho p^2 \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou encore :

$$\frac{d\Delta\varphi}{dx} = -\frac{p^2}{\omega_2^2}\frac{d\varphi}{dx}$$

$$\ldots\ldots$$

On satisfera évidemment à ces équations en posant :

$$\Delta\varphi = -\frac{p^2}{\omega_2^2}\varphi$$

car elles expriment que les trois dérivées partielles de

$$\Delta\varphi + \frac{p^2}{\omega_2^2}\varphi$$

sont nulles. Cette quantité est donc une constante et comme φ n'entre dans le problème que par ses dérivées on peut supposer cette constante nulle.

En coordonnées polaires l'équation qui définit φ s'écrit :

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{p^2}{\omega_2^2}\varphi = 0$$

son intégrale bien connue est :

$$\varphi = \psi(t) . \frac{\sin \alpha r}{r}$$

avec $\alpha^2 = \frac{p^2}{\omega_2^2}$, ou en remarquant qu'on a pris $\psi(t) = \cos pt$

$$\varphi = \cos pt . \frac{\sin \alpha r}{r}$$

L'équation étant du second ordre admet aussi la solution

$$\varphi = \cos pt . \frac{\cos \alpha r}{r}$$

mais cette solution devient infinie pour $r = 0$, on doit la rejeter.

Clebsch a traité ce problème, mais il a obtenu la solution sous forme de série, et je ne sais pourquoi il n'a pas vu que cette série se ramène aux fonctions trigonométriques. Il avait pris pour inconnue

$$\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}.$$

Pour achever le problème il faut exprimer que la pression est nulle à la surface, cela nous donnera α et par conséquent p.

Considérons un point M quelconque de la sphère, le rayon OM doit être un axe de symétrie, par conséquent la pression en M est normale. D'autre part, la pression est la même en tous les points de la sphère ; il suffira donc d'écrire qu'elle est nulle en un point déterminé, par exemple le point situé sur ox.

Pour ce point

$$y = z = 0 \text{ et } x = a$$

La pression normale est :

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{d\xi}{dx}$$

pour qu'elle soit nulle, il faut donc que l'on ait :

$$\lambda\Delta\varphi + 2\mu \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \tag{1}$$

Mais nous avons trouvé :

$$\Delta\varphi = -\frac{p^2}{\omega_2^2}\varphi = -\alpha^2\varphi$$

et l'on a évidemment au point considéré :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{d\varphi}{dr} \\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= \frac{d^2\varphi}{dr^2} \end{aligned} \right.$$

Donc en tenant compte de :

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = -\frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \alpha^2\varphi$$

l'équation (1) s'écrit :

$$(\lambda + 2\mu)\,\alpha^2\varphi + \frac{4\mu}{r}\frac{d\varphi}{dr} = 0$$

D'autre part

$$\varphi = \cos pt.\,\frac{\sin\alpha r}{r}$$

α satisfait donc à l'équation :

$$(\lambda + 2\mu)\,\alpha^2 \cos pt\,\frac{\sin\alpha r}{r} + \frac{4\mu}{r}\cos pt\left[\frac{\alpha\cos\alpha r}{r} - \frac{\sin\alpha r}{r^2}\right] = 0$$

pour $r = a$, a étant le rayon de la sphère.

Cette équation s'écrit après simplification :

$$[(\lambda + 2\mu)\,\alpha^2 a^2 - 4\mu]\,\mathrm{tg}\,\alpha a + 4\mu\alpha a = 0$$

C'est une équation transcendante qui a une infinité de racines réelles.

Faisons en effet varier αa entre $(2k - 1)\,\frac{\pi}{2}$ et $(2k + 1)\,\frac{\pi}{2}$, k étant choisi suffisamment grand pour que le coefficient de $\mathrm{tg}\,\alpha a$ soit positif.

Le premier membre prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, donc il y a au moins une racine dans l'intervalle considéré. Il est facile de voir qu'il n'y en a qu'une.

L'équation n'a pas de racines imaginaires, cela résulte d'une démonstration générale faite plus haut.

65. Dans tous les exemples donnés nous avons trouvé des vibrations exclusivement transversales ou exclusivement longitudinales. Nous avons dit que ce n'était pas le cas général. Nous allons donner un exemple assez simple, que nous devons à M. Brillouin, de vibrations à la fois transversales et longitudinales.

Nous savons que si l'on prend :

$$\varphi = \cos pt. \frac{\sin \alpha r}{r}$$

avec

$$\alpha^2 = \frac{p^2}{\omega_2^2}$$

on a :

$$\Delta\varphi = -\frac{p^2}{\omega_2^2}\varphi \tag{1}$$

Par conséquent :

$$\Delta \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{p^2}{\omega_2^2}\frac{d\varphi}{dx}$$

c'est-à-dire que si φ est une solution de l'équation (1) il en est de même de $\frac{d\varphi}{dx}$.

Si donc on pose :

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{d^2\varphi}{dx^2} \\ \eta &= \frac{d^2\varphi}{dxdy} \\ \zeta &= \frac{d^2\varphi}{dxdz} \end{aligned}\right.$$

ξ, η, ζ satisferont comme $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$ aux équations de l'équilibre intérieur :

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta\xi = -\rho p^2\xi$$

. . . .

mais ne satisferont pas aux conditions aux limites.

Les quantités ξ, η, ζ définissent une vibration longitudinale ; cherchons maintenant une vibration transversale définie par trois fonctions ξ, η, ζ satisfaisant aussi aux conditions de l'équilibre intérieur.

L'on doit avoir $\theta = 0$, par conséquent les équations intérieures se réduisent à :

$$\mu\Delta\xi = -\rho p^2 \xi$$

. . . .

ou encore à : $\Delta\xi = -\frac{p^2}{\omega_1^2}\xi.$

. . . .

Posons :

$$\psi = \mathrm{A}\cos pt.\frac{\sin\beta r}{r} \qquad \text{avec :} \qquad \beta = \frac{p}{\omega_1}$$

ψ satisfera à l'équation :

$$\Delta\psi = -\frac{p^2}{\omega_1^2}\psi.$$

On aura donc encore :

$$\Delta\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{p^2}{\omega_1^2}.\frac{d^2\psi}{dx^2}$$

$$\Delta\frac{d^2\psi}{dxdy} = -\frac{p^2}{\omega_1^2}.\frac{d^2\psi}{dxdy}$$

$$\Delta\frac{d^2\psi}{dxdz} = -\frac{p^2}{\omega_1^2}\frac{d^2\psi}{dxdz}.$$

Posons :

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{d^2\psi}{dx^2} + \mathrm{B}\psi \\ \eta &= \frac{d^2\psi}{dxdy} \\ \zeta &= \frac{d^2\psi}{dxdz} \end{aligned}\right.$$

ξ satisfera quel que soit B à l'équation :

$$\Delta\xi = -\frac{p^2}{\omega_1^2}\xi$$

Cherchons à remplir la condition $\theta = 0$; on a :

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = \frac{d}{dx}(\Delta\psi + B\psi).$$

Il suffit donc de prendre $B = \beta^2 = \frac{p^2}{\omega_1^2}$.

Nous avons ainsi deux solutions des équations intérieures, l'une représentant une vibration longitudinale, l'autre une vibration transversale.

La somme de ces solutions sera encore une solution et on aura :

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dx^2} + \beta^2\psi \\ \eta &= \frac{d^2\varphi}{dxdy} + \frac{d^2\psi}{dxdy} \\ \zeta &= \frac{d^2\varphi}{dxdz} + \frac{d^2\psi}{dxdz} \end{aligned}\right.$$

avec :

$$\varphi = \cos pt.\,\frac{\sin\alpha r}{r}, \qquad \psi = A\cos pt.\,\frac{\sin\beta r}{r}$$

$$\alpha = \frac{p}{\omega_2}, \qquad \beta = \frac{p}{\omega_1}$$

Cette solution comporte donc deux indéterminées A et p. Cherchons à en disposer de façon à satisfaire aux conditions à la surface. Posons pour abréger :

$$H = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dx}$$

on aura :

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{dH}{dx} + \beta^2\psi \\ \eta &= \frac{dH}{dy} \\ \zeta &= \frac{dH}{dz} \end{aligned}\right.$$

θ se réduit à la valeur qui correspond à la vibration longitudinale, c'est-à-dire :

$$\theta = \Delta \frac{d\varphi}{dx} = - \alpha^2 \frac{d\varphi}{dx}$$

Nous allons calculer les pressions à la surface. Considérons l'axe ox, tout est de révolution autour de cet axe. Les pressions et les déplacements sont donc distribués de même dans tous les plans qui passent par ox et il suffira d'étudier cette distribution dans l'un d'eux, par exemple dans le plan des xy.

Prenons dans ce plan des coordonnées polaires. Soient :

$$\left\{\begin{aligned} x &= r\cos u \\ y &= r\sin u \end{aligned}\right.$$

les coordonnées d'un point M ; après la déformation ce point vient en M′ de coordonnées $x + \xi$, $y + \eta$ ou $r + \rho$, $u + \omega$.

Je vais calculer ρ et ω. Pour cela je remarque que

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz$$

est le travail que produirait une force fictive de composantes ξ, η, ζ appliquée au point x, y, z pour un déplacement dx, dy, dz de ce point. Or, on a :

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz = dH + \beta^2\psi dx$$

Dans le plan des xy, $\zeta = 0$; supposons que le déplacement virtuel dx, dy, dz se fasse aussi dans ce plan de telle sorte que $dz = 0$.

Exprimons le travail en coordonnées polaires. Les projections de la force fictive seront ρ et $r\omega$, les déplacements parallèles seront dr et rdu. On a d'ailleurs :

$$dx = \cos u\, dr - r \sin u\, du.$$

Donc :

$$\rho dr + r^2\omega du = dH + \beta^2\psi\,(\cos u\, dr - r \sin u\, du)$$

Identifions, nous aurons :

$$\left\{\begin{aligned} \rho &= \frac{dH}{dr} + \beta^2\psi \cos u \\ \omega &= \frac{1}{r^2}\left[\frac{dH}{du} - \beta^2\psi r \sin u\right] \end{aligned}\right.$$

D'après leur définition, φ et ψ ne dépendent que de r, soient φ' et ψ' leurs dérivées par rapport à r.

$$H = (\varphi' + \psi')\frac{dr}{dx} = (\varphi' + \psi')\frac{x}{r} = (\varphi' + \psi')\cos u$$

Posons $H_1 = \varphi' + \psi'$, H_1 ne dépendra que de r, on aura

$$H = H_1 \cos u.$$

Nous avions trouvé

$$\theta = -\alpha^2 \frac{d\varphi}{dx},$$

on aura de même en posant :

$$\theta_1 = -\alpha^2\varphi'$$

l'égalité :

$$\theta = \theta_1 \cos u$$

θ_1 et H_1 ne dépendent que de r, donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dH}{dr} = \dfrac{dH_1}{dr} \cos u \\ \dfrac{dH}{du} = - H_1 \sin u \end{array} \right.$$

soient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \dfrac{dH_1}{dr} + \beta^2 \psi \\ \omega_1 = \dfrac{- H_1}{r^2} - \dfrac{\beta^2 \psi}{r} \end{array} \right.$$

ρ_1 et ω_1 ne dépendront que de r et l'on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_1 \cos u \\ \omega = \omega_1 \sin u \end{array} \right.$$

Nous allons nous servir pour continuer de la considération de l'ellipsoïde des pressions. Nous savons que son équation en un point (x, y, z) est :

$$\left\{ \begin{array}{c} N_1 dx^2 + N_2 dy^2 + N_3 dz^2 \\ + 2T_1 dydz + 2T_2 dxdz + 2T_3 dxdy \end{array} \right\} = \varepsilon^2$$

ε étant une constante quelconque et qu'en posant :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$ds.d\sigma = dxd\xi + dyd\eta + dzd\zeta$$

elle se réduit à :

$$\lambda \theta ds^2 + 2\mu ds d\sigma = \varepsilon^2$$

La première forme montre que, pour exprimer que la pression sur l'élément de la sphère, perpendiculaire à ox, est nulle, c'est-à-dire que $N_1 = T_3 = T_2$, il suffit d'écrire que l'ellipsoïde des pressions relatif à un point de cet élément est un cylindre dont les génératrices sont normales à l'élément.

Considérons l'intersection de l'ellipsoïde relatif au point $x = a$, $y = o$, $z = o$, avec le plan des xy, elle devra se réduire à deux parallèles à ox.

Nous avons :

$$\left\{\begin{array}{l} ds^2 = dr^2 + r^2du^2 + dz^2 \\ dsd\sigma = drd\rho + r\rho du^2 + r^2dud\omega + dzd\zeta \end{array}\right.$$

et les identités :

$$\left\{\begin{array}{l} d\rho = \dfrac{d\rho}{dr}\,dr + \dfrac{d\rho}{du}\,du \\ d\omega = \dfrac{d\omega}{dr}\,dr + \dfrac{d\omega}{du}\,du \end{array}\right.$$

L'équation de l'ellipsoïde est donc :

$$\left(\lambda\theta + 2\mu\,\frac{d\rho}{dr}\right) dr^2 + 2\mu\left(\frac{d\rho}{du} + r^2\,\frac{d\omega}{dr}\right) drdu + \ldots\ldots = o$$

Pour que l'ellipsoïde se réduise à un cylindre parallèle à ox il faut et il suffit que les coefficients de dr^2 et de $drdu$ soient nuls.

On doit donc avoir :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda\theta + 2\mu\,\dfrac{d\rho}{dr} = o \\ \dfrac{d\rho}{du} + r^2\,\dfrac{d\omega}{dr} = o \end{array}\right.$$

Ce sont les deux équations qui doivent déterminer A et p, elles doivent être satisfaites pour $r = a$, quelque soit u.

Divisons la première de ces équations par $\cos u$, la seconde par $\sin u$, elles deviennent :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda\theta_1 + 2\mu \dfrac{d\rho_1}{dr} = 0 \\ -\rho_1 + r^2 \dfrac{d\omega_1}{dr} = 0 \end{array}\right.$$

ρ_1, ω_1, θ_1 ne dépendent plus que de r ; les équations sont donc indépendantes de u.

Faisons-y $r = a$ et remarquons que les équations sont linéaires en A. Il sera donc facile d'éliminer cette inconnue et on aura une équation transcendante pour déterminer p. Cette équation a toutes ses racines réelles d'après une remarque générale faite plus haut. A chacune de ces racines correspond pour A une valeur finie, différente de zéro et bien déterminée ; la vibration trouvée n'est donc ni exclusivement transversale ni exclusivement longitudinale.

66. Rayonnement de la force vive élastique dans l'air. — Jusqu'à présent nous avons supposé que le corps élastique considéré vibrait dans le vide. Si la vibration se produit dans l'air il y a perte de force vive, l'amplitude de la vibration va constamment en diminuant, la pression n'est pas nulle à la surface du corps, toutes circonstances qui compliquent encore le problème. Aussi nous nous bornerons à un cas très simple, celui où le corps élastique est un prisme rectangulaire qui a deux dimensions infinies, c'est-à-dire la portion de l'espace comprise entre deux plans parallèles.

Soient

$$\begin{cases} x = -x_0 \\ x = +x_0 \end{cases}$$

ces deux plans : nous supposons qu'il y ait de l'air des deux côtés et que l'on ait $\eta = \zeta = 0$, ξ ne dépendant que de x et de t. C'est dire, en d'autres termes, que le mouvement vibratoire se fait par ondes planes longitudinales, parallèles à yoz.

Dans le corps élastique, c'est-à-dire pour $-x_0 < x < x_0$, l'on doit avoir :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\xi}{dx^2}$$

a étant la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans le solide.

Dans l'air, c'est-à-dire pour $|x| > x_0$, cette équation est remplacée par :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = b^2 \frac{d^2\xi}{dx^2}$$

b représentant la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans l'air.

Les conditions aux limites seront les suivantes : à l'origine du temps on devra se donner ξ et $\frac{d\xi}{dt}$.

Supposons $\frac{d\xi}{dt} = 0$, dans l'air et dans le corps élastique, et $\xi = 0$, dans l'air, au temps zéro, c'est-à-dire que l'air part du repos. Nous supposerons que, pour $t = 0$, ξ est une fonction de x connue entre $-x_0$ et x_0.

Pour simplifier l'écriture, nous pouvons même supposer que cette fonction est une fonction paire de x. Si la symétrie par rapport au plan $x = 0$ a lieu au début, elle subsistera toujours. Cette dernière hypothèse restreint ξ à ne plus contenir qu'une fonction arbitraire de x, au lieu de deux, mais je n'ai en vue que de donner un exemple aussi simple que possible.

Les équations dont dépend ξ sont en effet les équations des cordes vibrantes. On connaît leur intégrale générale.

Dans le corps, c'est-à-dire pour $-x_0 < x < x_0$

$$\xi = F(at + x) + F(at - x)$$

(on a la même fonction F parce que ξ est paire).

Pour $x > x_0$ on doit avoir :

$$\xi = \varphi(bt + x) + \varphi_1(bt - x)$$

enfin pour $x < -x_0$

$$\xi = \varphi(bt - x) + \varphi_1(bt + x)$$

Les fonctions φ et φ_1 ne sont d'ailleurs déterminées qu'à une constante près, qu'on peut en effet toujours ajouter à φ à condition de la retrancher de φ_1.

Au temps $t = 0$, $\xi = 0$ dans l'air, donc pour $x > x_0$:

$$\varphi(x) + \varphi_1(-x) = 0$$

Mais on a aussi au début :

$$\frac{d\xi}{dt} = 0$$

donc :

$$\varphi'(x) + \varphi_1'(-x) = 0$$

La première relation différentiée donne :

$$\varphi'(x) - \varphi_1'(-x) = 0$$

Il en résulte :

$$\varphi'(x) = \varphi_1'(-x) = 0$$

φ et φ_1 sont donc des constantes que je puis supposer nulles, d'après une remarque faite plus haut, puisque leur somme est nulle.

φ et φ_1 seront donc nuls toutes les fois que leur argument sera supérieur à x_0.

L'argument de φ, c'est-à-dire $bt + x$, est toujours, dans la région située du côté des x positifs à partir de x_0, supérieur à x_0.

Donc pour $x > x_0$ on a :

$$\xi = \varphi_1(bt - x)$$

et pour $x < -x_0$,

$$\xi = \varphi_1(bt + x)$$

Écrivons les conditions aux limites ; ξ doit être le même pour $x = x_0$, qu'il soit considéré comme déplacement d'une particule d'air ou d'une particule du corps élastique.

Donc on doit avoir, quel que soit t :

$$\text{(1)} \qquad F(at + x_0) + F(at - x_0) = \varphi_1(bt - x_0)$$

La considération de $x = -x_0$ donne évidemment la même équation.

La pression doit pour $x = x_0$ être la même dans l'air et dans le corps solide. Dans le solide, elle est normale et égale à $\lambda\theta + 2\mu \frac{d\xi}{dx}$, c'est-à-dire à $(\lambda + 2\mu) \frac{d\xi}{dx}$.

Dans l'air elle sera aussi proportionnelle à $\frac{d\xi}{dx}$. Mais le coefficient de proportionnalité sera différent. Donc pour $x = x_0$, la valeur de $\frac{d\xi}{dx}$ dans le solide sera dans un rapport constant avec la valeur de $\frac{d\xi}{dx}$ dans l'air, ce qui se traduit, en désignant par h une constante, par l'équation :

$$(2) \quad F'(at + x_0) - F'(at - x_0) = -h\varphi'_1(bt - x_0)$$

Différentions l'équation (1) par rapport à t, nous aurons :

$$(1') \quad F'(at + x_0) + F'(at - x_0) = \frac{b}{a}\varphi'_1(bt - x_0)$$

Les équations (2) et (1') montrent que le rapport de deux quelconques des trois quantités :

$$F'(at + x_0), \qquad F'(at - x_0), \qquad \varphi'_1(bt - x_0)$$

est une constante. En particulier :

$$\frac{F'(at + x_0)}{F'(at - x_0)} = \text{const.} = \frac{b - ha}{b + ha}.$$

Cette constante est positive, car elle diffère peu de ce qu'elle est dans le vide où b est infini et où par conséquent la constante se réduit à 1.

Désignons-la par e^{-2Kx_0}.

En posant $at - x_0 = y$ on aura :

$$F'(y + 2x_0) = e^{-2Kx_0}. F'(y)$$

Posons: $\Psi(y) = e^{Ky} F'(y)$ nous en déduirons :

$$\Psi(y + 2x_0) = \Psi(y)$$

$\Psi(y)$ est donc une fonction périodique qu'on peut développer en série

$$\Psi(y) = \sum A_m e^{\frac{mi\pi y}{x_0}}.$$

Alors :

$$F'(y) = \sum A_m e^{\left(-K + \frac{mi\pi}{x_0}\right) y}$$

$$F(y) = \sum \frac{Am}{-K + \frac{mi\pi}{x_0}} . e^{\left(-K + \frac{mi\pi}{x_0}\right) y}$$

On a finalement :

$$\xi = \sum \frac{Am}{-K + \frac{mi\pi}{x_0}} \left[e^{\left(-K + \frac{mi\pi}{x_0}\right)(at+x)} + e^{\left(-K + \frac{mi\pi}{x_0}\right)(at-x)} \right].$$

c'est-à-dire .

$$\xi = e^{-Kat}. \Phi(x,t),$$

Φ étant une fonction périodique de t dont la période est $\frac{2x_0}{a}$.

Cette fonction Φ est représentée par une série de sinus et de cosinus qui est précisément la série des harmoniques successives d'une vibration de période $\frac{2x_0}{a}$. Les périodes de ces harmoniques ne dépendent pas de K, elles sont donc les mêmes quel que soit le milieu dans lequel le prisme est plongé et en particulier pour le vide.

Le facteur e^{-Kat} fait connaître la rapidité de l'extinction; on voit qu'elle est la même pour tous les harmoniques.

Ces propriétés ne sont probablement pas vraies pour un corps vibrant de forme quelconque.

CHAPITRE VII

PROBLÈME DE SAINT-VENANT

67. Considérons un cylindre homogène qui n'est soumis à aucune force extérieure non superficielle. Nous faisons par conséquent abstraction de sa pesanteur. Nous supposons en outre qu'il n'y a pas de forces superficielles latérales, de telle sorte que les seules forces agissant sur le cylindre soient appliquées aux deux bases. En les composant comme si elles étaient appliquées à un solide invariable, elles doivent évidemment se faire équilibre.

Saint-Venant fait une hypothèse de plus ; il suppose à l'intérieur du cylindre $N_1 = N_2 = T_3 = 0$. Nous verrons plus loin la raison de cette hypothèse.

Cherchons quelles relations elle établit entre ξ, η, ζ.

On a les trois équations :

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda\theta + 2\mu \frac{d\xi}{dx} = 0 \\
&\lambda\theta + 2\mu \frac{d\eta}{dy} = 0 \\
&\mu \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right) = 0
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux premières donnent :

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{dy}$$

et par suite :

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 2\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\zeta}{dz}.$$

Cette valeur portée dans la première des équations (1) conduit à la relation :

$$\lambda \frac{d\zeta}{dz} + 2(\lambda + \mu)\frac{d\xi}{dx} = 0$$

qui, en posant :

$$K = -2\frac{\lambda + \mu}{\lambda},$$

donne :

$$\frac{d\zeta}{dz} = K\frac{d\xi}{dx} = K\frac{d\eta}{dy}.$$

Par conséquent la valeur de θ trouvée plus haut s'écrit :

$$\theta = (2 + K)\frac{d\xi}{dx} = -2\frac{\mu}{\lambda}\frac{d\xi}{dx},$$

ou encore :

$$\theta = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\frac{d\zeta}{dz}.$$

Cela posé, considérons les équations de l'équilibre intérieur :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} = 0 \\ &\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} = 0 \\ &\frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} = 0 \end{aligned}\right.$$

Nous avons $N_1 = N_2 = T_3 = 0$, par conséquent les deux premières donnent :

$$\frac{dT_2}{dz} = 0 \qquad \frac{dT_1}{dz} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dz^2} + \frac{d^2\zeta}{dxdz} = 0 \\ \frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{d^2\zeta}{dydz} = 0 \end{aligned}\right.$$

La troisième est d'ailleurs :

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dz} + \mu\Delta\zeta = 0$$

et, en tenant compte de l'expression de θ avec $\frac{d\zeta}{dz}$,

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2} + \Delta\zeta = 0$$

ce qui s'écrit en développant $\Delta\zeta$:

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + 2\frac{d^2\zeta}{dz^2} = 0.$$

Toutes ces équations ont lieu à l'intérieur du cylindre ; à la surface latérale, il faut écrire que la pression est nulle.

Soient, en un point de cette surface, $\cos p$, $\sin p$, 0, les cosinus directeurs de la normale au cylindre prise vers l'extérieur, les génératrices étant supposées parallèles à oz ; les trois composantes de la pression sont :

$$\left\{\begin{aligned} & N_1 \cos p + T_3 \sin p \\ & T_3 \cos p + N_2 \sin p \\ & T_2 \cos p + T_1 \sin p \end{aligned}\right.$$

En écrivant qu'elles sont nulles et tenant compte de ce que $N_1 = N_2 = T_3 = 0$, on a la seule condition :

$$T_2 \cos p + T_1 \sin p = 0$$

tout le long de la section droite du cylindre puisque T_2 et T_1 ne dépendent pas de z.

68. Je me propose de déterminer ξ, η, ζ d'après ces équations ; il sera facile ensuite de trouver les forces qu'il faut appliquer aux deux bases pour produire la déformation.

Nous avons obtenu les conditions :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} &= \frac{d\eta}{dy} \\ \frac{d\xi}{dy} &= -\frac{d\eta}{dx} \end{aligned} \right.$$

Elles expriment que $\xi + i\eta$ est une fonction de la variable complexe $x + iy$. Posons $x + iy = u$, l'on aura :

$$\xi + i\eta = f(u, z)$$

Quelle est la forme de la fonction f ?

Nous savons que :

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d\zeta}{dz} = \mathrm{K}\frac{d\xi}{dx} = \mathrm{K}\frac{d\eta}{dy} \\ &\frac{d^2\xi}{dz^2} + \frac{d^2\zeta}{dx\,dz} = 0 \\ &\frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{d^2\zeta}{dy\,dz} = 0 \end{aligned} \right.$$

Les deux dernières relations s'écrivent en tenant compte de la première :

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dz^2} + K \frac{d^2\xi}{dx^2} = 0 \\ \frac{d^2\eta}{dz^2} + K \frac{d^2\eta}{dy^2} = 0 \end{aligned} \right.$$

Revenons à la relation $\xi + i\eta = f(u,z)$; différentiée par rapport à x elle donne :

$$\frac{d\xi}{dx} + i \frac{d\eta}{dx} = \frac{df}{du}$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + i \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{d^2f}{du^2}$$

d'où l'on conclut en désignant d'une façon générale par $\mathcal{R}(\Phi)$ la partie réelle de Φ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} = \mathcal{R}\left(\frac{df}{du}\right) \\ \frac{d^2\xi}{dx^2} = \mathcal{R}\left(\frac{d^2f}{du^2}\right) \end{aligned} \right.$$

On aurait de même en différentiant par rapport à y :

$$\frac{d^2\xi}{dy^2} + i \frac{d^2\eta}{dy^2} = - \frac{d^2f}{du^2}.$$

La partie imaginaire de $\frac{d^2f}{du^2}$ est donc aussi : $-i \frac{d^2\eta}{dy^2}$ et l'on peut écrire :

$$\frac{d^2f}{du^2} = \frac{d^2\xi}{dx^2} - i \frac{d^2\eta}{dy^2}$$

ou en désignant par $\overline{\Phi}$ l'imaginaire conjuguée de Φ,

$$\overline{\frac{d^2f}{du^2}} = \frac{d^2\xi}{dx^2} + i \frac{d^2\eta}{dy^2}$$

Cette équation va nous servir pour déterminer f.

Multiplions la seconde des équations (α) par i et ajoutons-la à la première, nous aurons :

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} + i\frac{d^2\eta}{dz^2} + \mathrm{K}\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + i\frac{d^2\eta}{dy^2}\right) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d^2f}{dz^2} + \mathrm{K}\,\overline{\frac{d^2f}{du^2}} = 0$$

ou

$$\frac{d^2f}{dz^2} = -\,\mathrm{K}\,\overline{\frac{d^2f}{du^2}}.$$

Le premier membre est fonction de u et de z, le second de $\bar{u}$ et de z, pour que l'égalité puisse avoir lieu il faut que les deux membres ne dépendent que de z.

Donc :

$$\frac{d^2f}{du^2} = \varphi(z)$$

et par suite :

$$f = a + bu + cu^2$$

a, b, c étant des fonctions de z. Portons cette valeur dans

$$\frac{d^2f}{dz^2} = -\,\mathrm{K}\,\overline{\frac{d^2f}{du^2}},$$

nous aurons :

$$\frac{d^2a}{dz^2} + u\frac{d^2b}{dz^2} + u^2\frac{d^2c}{dz^2} = -\,2\mathrm{K}.\bar{c}$$

Mais u et z sont des variables indépendantes, cette relation exige donc :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2a}{dz^2} &= -2K\bar{c} \\ \frac{d^2b}{dz^2} &= 0 \\ \frac{d^2c}{dz^2} &= 0 \end{aligned}\right.$$

b et c sont par suite des polynômes du premier degré en z et a est du troisième degré.

Nous connaissons $f(u,z) = \xi + i\eta$, c'est-à-dire ξ et η; il s'agit de déterminer ζ.

Partons pour cela de la relation :

$$\frac{d\zeta}{dz} = K\frac{d\xi}{dx} = K.\mathfrak{R}\left(\frac{df}{du}\right)$$

On a :

$$\frac{df}{du} = b + 2cu$$

il en résulte que $\frac{d\zeta}{dz}$ est du premier degré par rapport à l'une quelconque des trois variables x, y, z. Soit :

$$\frac{d\zeta}{dz} = \alpha + \beta z$$

α et β étant du premier degré en x et y; intégrons, nous aurons :

$$\zeta = \alpha z + \beta\frac{z^2}{2} + F(x,y)$$

Mais ζ doit satisfaire à l'équation :

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + 2\frac{d^2\zeta}{dz^2} = 0$$

F vérifie donc la relation :

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + 2\beta = 0$$

β est un polynôme linéaire en x et y, soit

$$-2\beta = A + Bx + Cy$$

A, B, C étant des coefficients constants, l'équation en F sera :

$$\Delta F = A + Bx + Cy$$

Elle admet une solution évidente :

$$\Psi = A\frac{x^2}{2} + Bx\frac{y^2}{2} + Cy\frac{x^2}{2}$$

Posons $F = \Psi + \Omega$, la nouvelle inconnue Ω satisfera à :

$$\Delta\Omega = 0$$

Cela ne suffit pas pour la déterminer ; mais nous avons encore à tenir compte de la condition :

$$T_2 \cos p + T_1 \sin p = 0$$

tout le long de la section droite, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)\cos p + \left(\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz}\right)\sin p = 0$$

Or

$$\frac{d\zeta}{dx}\cos p + \frac{d\zeta}{dy}\sin p = \frac{d\zeta}{dn}$$

donc :

$$\frac{d\zeta}{dn} + \frac{d\xi}{dz}\cos p + \frac{d\eta}{dz}\sin p = 0$$

Nous avons d'ailleurs trouvé :

$$\zeta = \alpha z + \beta \frac{z^2}{2} + \Psi + \Omega$$

On a par conséquent :

$$\frac{d\Omega}{dn} = - d \frac{\left(\alpha z + \beta \frac{z^2}{2}\right)}{dn} - \frac{d\Psi}{dn} - \frac{d\xi}{dz} \cos p - \frac{d\eta}{dz} \sin p$$

c'est-à-dire une équation de la forme :

$$\frac{d\Omega}{dn} = \mathrm{V}\,(x, y),$$

où V est connue si on donne la section droite du cylindre.

En résumé, le problème revient à trouver nne fonction Ω de x et y, qui à l'intérieur de la section droite satisfasse à l'équation de Laplace $\Delta\Omega = 0$ et telle que $\frac{d\Omega}{dn}$ ait des valeurs données sur le contour de la section.

69. Si le problème comporte une solution, il en comporte une infinité, car on peut ajouter à Ω une constante arbitraire. A part cette constante, Ω est complètement déterminé.

Le problème a-t-il toujours une solution ? Le théorème de Green donne :

$$\int \frac{d\Omega}{dn}\, ds = \int \Delta\Omega\, d\omega,$$

la première intégrale étant prise le long du contour et la seconde étendue à toute la section. Mais l'on a $\Delta\Omega = 0$, par conséquent il faut :

$$\int \frac{d\Omega}{dn}\, ds = 0 \qquad \text{ou} \qquad \int \mathrm{V}\,(x;\, y)\, ds = 0$$

A quoi correspond cette condition ?

Nous avons trouvé :

$$-\frac{d\Omega}{dn} = \frac{d\left(\alpha z + \beta\,\frac{z^2}{2}\right)}{dn} + \frac{d\Psi}{dn} + \frac{d\xi}{dz}\cos p + \frac{d\eta}{dz}\sin p$$

et comme on a :

$$dx = ds.\ \sin p$$
$$dy = -\, ds.\ \cos p$$

la condition $\int \frac{d\Omega}{dn}\, ds = 0$ s'écrira :

$$\int \frac{d\left(\alpha z + \beta\frac{z^2}{2}\right)}{dn}\, ds + \int \frac{d\Psi}{dn}\, ds + \int \left(\frac{d\eta}{dz}dx - \frac{d\xi}{dz}\, dy\right) = 0.$$

Considérons les deux premières intégrales.

Le théorème de Green donne :

$$\int \frac{d\left(\alpha z+\beta\frac{z^2}{2}\right)}{dn}\, ds = \int \left[\frac{d^2\left(\alpha z+\beta\frac{z^2}{2}\right)}{dx^2} + \frac{d^2\left(\alpha z+\beta\frac{z^2}{2}\right)}{dy^2}\right] d\omega$$

et comme α et β sont linéaires en x et y

$$\int \frac{d\left(\alpha z + \beta\,\frac{z^2}{2}\right)}{dn}\, ds = 0.$$

Appliqué à $\int \frac{d\Psi}{dn} ds$, le même théorème donne :

$$\int \frac{d\Psi}{dn} ds = \int \Delta\psi d\omega = \int (A + Bx + Cy)\, d\omega$$

d'après la définition de ψ.

Pour transformer la troisième intégrale, nous nous appuierons sur une autre forme du théorème de Green :

$$\int U dx + V dy = \int \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}\right) d\omega.$$

Elle donne :

$$\int \frac{d\eta}{dz} dx - \frac{d\xi}{dz} dy = -\int \left(\frac{d^2\xi}{dxdz} + \frac{d^2\eta}{dydz}\right) d\omega.$$

Mais nous avons les relations :

$$\frac{d^2\xi}{dxdz} = \frac{d^2\eta}{dydz} = \frac{1}{K}\frac{d^2\zeta}{dz^2}$$

et comme

$$\zeta = \alpha z + \beta \frac{z^2}{2} + \Psi + \Omega$$

on a aussi :

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2} = \beta = -\frac{1}{2}(A + Bx + Cy)$$

La relation

$$\int \frac{d\Omega}{dn} ds = 0$$

s'écrit donc :

$$\int (A + Bx + Cy)\, d\omega - \frac{1}{K}\int (A + Bx + Cy)\, d\omega = 0$$

ou encore :

$$\left(1 - \frac{1}{K}\right)\int (A + Bx + Cy)\, d\omega = 0.$$

Le facteur $1 - \frac{1}{K}$ qui est $\frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}$ n'est pas nul, on a donc

$$\int (A + Bx + Cy)\, d\omega = 0.$$

Prenons comme axe des z la parallèle aux génératrices qui passe par le centre de gravité de la section. On aura

$$\int x d\omega = 0, \qquad \int y d\omega = 0.$$

Il reste $A \int d\omega = 0$ et comme $\int d\omega$ qui représente l'aire de la section n'est pas nul, cela exige que l'on ait : $A = 0$.

A quoi cela correspond-il ? On sait que A est le terme constant de $\frac{d^2\zeta}{dz^2}$ à un facteur près.

Or :

$$\frac{d\zeta}{dz} = K\mathfrak{R}\left(\frac{df}{du}\right) = K\mathfrak{R}\,(b + 2cu)$$

donc :

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2} = K\mathfrak{R}\left(\frac{db}{dz}\right) + 2Ku\mathfrak{R}\left(\frac{dc}{dz}\right)$$

ce qui donne :

$$A = -2K\mathfrak{R}\left(\frac{db}{dz}\right).$$

La condition pour que le problème soit possible est donc que la partie réelle de $\frac{db}{dz}$ soit nulle, c'est-à-dire que $\frac{db}{dz}$ soit purement imaginaire.

Combien y a-t-il de constantes arbitraires dans la solution que nous venons de trouver ?

Nous avons

$$f = a + bu + cu^2$$

a étant du troisième degré renferme quatre coefficients, b et c en contiennent chacun deux, mais comme c est déterminé quand on connaît a, d'après la relation :

$$\frac{d^2a}{dz^2} = -2K\bar{c},$$

il n'y a en tout que six coefficients complexes, c'est-à-dire douze constantes réelles. On connaît alors $\alpha z + \beta \frac{z^2}{2}$ et Ψ, il reste à déterminer Ω, ce qui introduit une constante de plus.

Mais la condition $\mathcal{R}\left(\frac{db}{dz}\right) = 0$ en fait disparaître une, il n'y a donc finalement que douze constantes.

Les quantités ξ, η, ζ dépendent linéairement de ces douze constantes. Si donc on trouve d'une manière quelconque douze solutions particulières indépendantes, on aura la solution générale en les combinant linéairement.

Il y a six de ces solutions qui sont évidentes, ce sont les six déplacements que le cylindre peut subir sans se déformer.

Les six autres seront données par des déformations simples correspondant à une traction ou compression, une torsion et quatre espèces de flexions. Nous les déterminerons plus loin.

70. Nous avons vu que $\xi + i\eta$ était une fonction de u, c'est-à-dire de $x + iy$, nous allons donner une interprétation géométrique de ce fait.

Considérons dans une section droite du cylindre avant la déformation deux courbes AB et AC. Soient A'B' et A'C' ce qu'elles deviennent après la déformation. Projetons A'B'C' sur la section droite, désignons par A''B'' et A''C'' les projections.

Au point (x, y) de AB correspond un point $(x + \xi, y + \eta)$ qui appartient à A''B''. Comme $\xi + i\eta$ est fonction de $x + iy$, il en est de même de $(x + \xi) + i(y + \eta)$, c'est-à-dire que l'on passe de AB à A''B'' par une transformation conforme. L'angle des courbes A''B'' et A''C'' est donc égal à celui de AB avec AC.

D'autre part, si on considère le plan des tangentes en A' aux courbes A'B' et A'C', ce plan fait avec le plan ABC un angle infiniment petit de l'ordre du déplacement. Donc la différence entre l'angle B'A'C' et sa projection B''A''C'' est un infiniment petit du second ordre. On peut donc dire que

$$\text{angle BAC} = \text{angle B'A'C'}$$

c'est-à-dire que l'angle de deux courbes situées dans une même section droite n'est pas altéré par la déformation.

71. Lorsqu'on a choisi $f = a + bu + cu^2$ nous savons que pour déterminer ζ il faut encore trouver la fonction Ω telle que $\Delta\Omega = 0$ à l'intérieur de la section droite et que $\frac{d\Omega}{dn} = V$ sur le contour de cette section, V étant une fonction connue de x et de y.

Nous allons examiner les cas où l'on sait faire la détermination de Ω.

Traitons d'abord le problème pour un cercle. Nous prendrons des coordonnées polaires ρ, φ. La forme la plus générale satisfaisant à $\Delta\Omega = 0$ est si Ω reste fini au centre :

$$\Omega = \sum A_n r^n \cos n\varphi + \sum B_n r^n \sin n\varphi$$

Pour déterminer les coefficients A_n et B_n nous nous servirons de $\frac{d\Omega}{dn} = V$ pour $r = r_0$, r_0 étant le rayon du cercle.

V est une fonction périodique de φ, de période 2π, on peut donc l'écrire :

$$V = \sum C_n \cos n\varphi + \sum D_n \sin n\varphi$$

et l'on a :

$$\sum C_n \cos n\varphi + \sum D_n \sin n\varphi = \sum n A_n r_0^{n-1} \cos n\varphi + \sum n B_n r_0^{n-1} \sin n\varphi$$

Identifions, nous en déduirons :

$$\left\{ \begin{aligned} A_n &= \frac{C_n}{n r_0^{n-1}} \\ B_n &= \frac{D_n}{n r_0^{n-1}} \end{aligned} \right.$$

Dans le problème particulier de Saint-Venant, la série V se réduit à trois termes, la solution est donc très simple.

Si, au lieu d'une section droite circulaire, on avait une section droite annulaire, on prendrait

$$\Omega = \left\{ \begin{aligned} &\sum A_n r^n \cos n\varphi + \sum B_n r^n \sin n\varphi \\ &+ \sum A'_n r^{-n} \cos n\varphi + \sum B'_n r^{-n} \sin n\varphi \end{aligned} \right\}$$

On aurait pour V deux expressions de même forme que précédemment, correspondant aux cercles limites, et les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{d\Omega}{dn} = V_0 \quad \text{pour} \quad r = r_0 \\ \dfrac{d\Omega}{dn} = V_1 \quad \text{pour} \quad r = r_1 \end{cases}$$

donneraient deux équations linéaires pour déterminer A_n et A'_n ou B_n et B'_n, quel que soit n.

Passons au cas d'une section de forme quelconque. Considérons la variable complexe $u = x + iy$; la relation

$$\frac{d^2\Omega}{dx^2} + \frac{d^2\Omega}{dy^2} = 0$$

signifie qu'on peut trouver une fonction Ω' de x et de y telle que $\Omega + i\Omega'$ soit fonction de u.

Soit $U = X + iY = \varphi(u)$ une autre variable complexe et je suppose qu'on a pu déterminer φ de telle sorte que, lorsque u décrit le périmètre ou l'intérieur de la section, U décrive le périmètre ou l'intérieur d'une circonférence Σ. On dit dans ce cas que U permet la représentation conforme de la section droite sur un cercle.

L'expression $\Omega + i\Omega'$ sera aussi une fonction de U et par suite :

$$\frac{d^2\Omega}{dX^2} + \frac{d^2\Omega}{dY^2} = 0$$

à l'intérieur du cercle Σ.

Voyons ce que devient l'équation aux limites :

$$\frac{d\Omega}{dn} = V(u)$$

Considérons un point M du périmètre de la section, la normale en ce point et un point M′ voisin de M pris sur cette normale. On a :

$$MM' = dn$$

Faisons la représentation conforme, le point M vient en M_1 sur le cercle et M′ vient en M_1' sur la normale au cercle, puisque les angles sont conservés.

$$M_1M_1' = dN$$

On a évidemment :

$$\frac{dN}{dn} = \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \left| \frac{d\,(X + iY)}{d\,(x + iy)} \right|$$

par conséquent :

$$\frac{d\Omega}{dN} = V\,(U) . \left| \frac{du}{dU} \right|$$

A l'aide de la transformation $U = \varphi\,(u)$ on a donc ramené le problème au cas du cercle.

Le problème de Saint-Venant pourra par suite être résolu pour toutes les sections dont on saura faire la représentation conforme sur un cercle, en particulier pour les sections elliptiques ou rectangulaires.

Il en sera de même si l'on peut représenter la section sur un anneau circulaire, ce qui est le cas d'une couronne comprise entre deux ellipses homofocales, par exemple.

72. Nous allons maintenant revenir à l'expression générale de ξ, η, ζ et nous chercherons les six solutions particulières simples du problème autres que les déplacements sans déformation.

1° *Traction ou compression.* — Rappelons que si on prend

$$\xi + i\eta = f(u)$$

on a :

$$\frac{d\zeta}{dz} = k\Re\left(\frac{df}{du}\right)$$

Prenons $\xi + i\eta = \alpha u$, α étant une constante réelle que nous introduisons parce que $\xi + i\eta$ doit être infiniment petit.

On aura :

$$\begin{cases} \xi = \alpha x, \; \eta = \alpha y \\ \zeta = k\alpha z + \Phi \end{cases}$$

Φ étant une fonction de x et de y que l'on peut supposer nulle. Avec cette particularisation, les quantités N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 sont des constantes, qui sont même nulles, sauf N_3 qui produit la traction ou la compression.

2° *Torsion.* — Posons $\xi + i\eta = i\alpha z u$, on en déduira :

$$\begin{cases} \xi = -\alpha y z \\ \eta = \alpha x z \\ \zeta = \text{const.} \end{cases}$$

Étudions la manière dont une section droite se déforme et se déplace en projection.

Un point (x, y, z) devient $(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$, sa projection est $x + \xi$, $y + \eta$. Il a donc tourné autour de oz d'un angle αz. Cet angle qui est le même pour tous les points de la section n'est pas le même pour toutes les sections droites ; il y a réellement une torsion.

Cherchons les forces qui la produisent. On a :

$$N_3 = 0 \qquad \text{car} \qquad N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{d\zeta}{dz}$$

et

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{dy} = \frac{1}{K}\frac{d\zeta}{dz} = 0$$

Les composantes tangentielles :

$$\begin{cases} T_1 = \mu\alpha x \\ T_2 = -\ \mu\alpha y \end{cases}$$

ont une résultante perpendiculaire au rayon vecteur du point (x, y).

3° *Flexion simple.* — On pose :

$$\xi + i\eta = \alpha u^2 - K\alpha z^2;$$

c se réduit à α et on a bien :

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = -2K\alpha.$$

Considérons les différentes molécules du corps qui se trouvent sur une même parallèle aux génératrices, on dit qu'elles forment une fibre. Après la déformation cette fibre ne reste pas rectiligne; pour étudier sa forme nous prendrons pour nouvel axe des z la position de la fibre avant la déformation, en conservant le plan des xy.

Les coordonnées d'un point de la fibre déformée sont ξ, η et z. Dans le cas général où l'on a :

$$\xi + i\eta = a + bu + cu^2$$

ξ et η seront du troisième degré en z, la fibre déformée sera donc une cubique gauche.

Dans le cas de la traction, la fibre reste une droite parallèle à oz. Elle reste encore rectiligne, mais non parallèle à oz, dans la torsion, car ξ et η sont alors du premier degré en z.

Pour le cas de la flexion simple que nous considérons, ξ est une fonction du second degré de z, η est indépendant de z ; les équations :

$$\left\{\begin{array}{l}\xi = \alpha\,(x^2 - y^2) - K\alpha z^2 \\ \eta = 2\alpha xy\end{array}\right.$$

représentent une parabole située dans un plan parallèle au plan des $z\xi$.

Tout ceci ne doit pas être pris trop à la lettre; nous avons en effet négligé les carrés de ξ et de η, nous ne pouvons donc avoir qu'une première approximation. Par exemple, dans le cas de la flexion, la flèche de la parabole étant petite on peut aussi bien l'assimiler à un arc de cercle.

Le seul fait important dans ce cas est que la fibre reste plane.

En posant :

$$\xi + i\eta = \alpha u^2 - K\alpha z^2$$

on a :

$$\left\{\begin{array}{l}\xi = \alpha\,(x^2 - y^2) - K\alpha z^2 \\ \eta = 2\alpha xy \\ \zeta = 2K\alpha xz + \Phi\,(x.y)\end{array}\right.$$

ce qui donne :

$$\theta = 2\alpha\,(2 + K)\,x.$$

Les expressions de N_3, T_1, T_2 sont donc :

$$\left\{\begin{array}{l}N_3 = 2\alpha x\,(3\lambda + \mu) \\ T_1 = \mu \dfrac{d\Phi}{dy} \\ T_2 = \mu \dfrac{d\Phi}{dx}\end{array}\right.$$

On aurait des formules analogues en permutant ξ et η.

4° *Flexion complexe.* — Supposons qu'on prenne

$$\xi + i\eta = \alpha z u^2 - K\alpha \frac{z^3}{3}$$

ξ et η changent de signe quand on change z en $-z$, la fibre déformée est donc une courbe à centre avec un point d'inflexion à l'origine.

$\eta = 2\alpha xyz$ est l'équation d'un plan qui contient la fibre déformée, ce plan n'est plus le même en direction pour toutes les fibres; il est toujours parallèle à ox mais fait avec oz un angle très petit, variable avec la fibre choisie. On conserve pour cela à zox le nom de plan de flexion.

Les expressions du déplacement seront :

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \alpha z\,(x^2 - y^2) - K\alpha \frac{z^3}{3} \\ \eta &= 2\alpha xyz \\ \zeta &= K\alpha x z^2 + \Phi(x, y) \end{aligned} \right.$$

et nous trouverons pour les forces :

$$\left\{ \begin{aligned} N_3 &= 4\alpha\,[\lambda + K(\lambda + \mu)]\, zx \\ T_1 &= \mu\left(2\alpha xy + \frac{d\Phi}{dy}\right) \\ T_2 &= \mu\left(\alpha\,(x^2 - y^2) + \frac{d\Phi}{dx}\right) \end{aligned} \right.$$

En permutant ξ et η, on aurait la sixième solution particulière..

Il semble que le problème que nous venons de résoudre est assez artificiel. Comment Saint-Venant a-t-il été amené à se le proposer? Dans les applications on a souvent à étudier les déformations de prismes soumis uniquement à des forces appliquées aux bases. Nous avons de ce problème six solutions particulières intéressantes.

Ce n'est pas ainsi en général que le problème se pose ; on donne les forces appliquées aux bases et on demande les déformations qui en résultent.

Composons entre elles les forces agissant sur les bases comme si le solide était invariable, il devra y avoir équilibre.

Sur chaque base toutes les forces se réduiront à trois forces parallèles aux axes et à trois couples dont les axes auront même direction que ces forces. Si donc l'on connaît les trois forces et les trois couples pour l'une des bases, on les connaîtra pour l'autre.

Supposons que l'on change la distribution des forces extérieures sur les bases et que néanmoins, en faisant leur composition comme précédemment, on retrouve les mêmes forces et les mêmes couples. Les deux distributions ne sont pas du tout équivalentes au point de vue théorique, mais, comme on s'occupe d'habitude de prismes de section faible par rapport à leur longueur, on peut admettre approximativement l'équivalence.

C'est ce que fait Saint-Venant ; il remplace dans chaque cas la distribution réelle par une autre plus simple donnant mêmes forces et mêmes couples résultants. Si alors on a une solution particulière du problème, suffisamment générale pour que les forces et les couples résultants aient des valeurs quelconques, on pourra se faire une idée de la déformation d'un cylindre soumis à des forces quelconques.

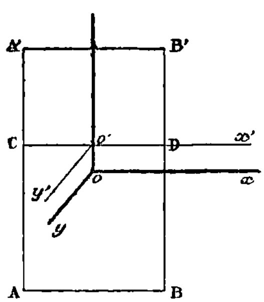
Il faut pour cela six coefficients arbitraires. Nous les avons trouvés, le problème pratique est donc résolu.

73. Théorème du moment fléchissant. — Considérons un cylindre ABA'B', soit CD une section droite quelconque. La portion ABCD sera en équilibre sous l'action des forces extérieures appliquées à la base AB, des actions moléculaires mutuelles et enfin de la réaction de la partie CDA'B', c'est-à-dire des pressions sur les différents éléments de CD.

Soit $d\omega$ un élément de CD ; le cylindre ayant ses génératrices parallèles à oz, les trois composantes de la pression sur cet élément seront :

$$T_2 d\omega \qquad T_1 d\omega \qquad N_3 d\omega.$$

Prenons pour origine le centre de gravité du cylindre et pour axes les axes principaux d'inertie relatifs à ce point.



Soit o' le point où l'axe des z perce CD, o' sera le centre de gravité de CD et les intersections $o'x'$ et $o'y'$ de CD par les plans des zx et des zy seront les axes d'inertie de la section.

Composons entre elles les pressions élémentaires appliquées sur CD suivant les règles de la statique.

Le résultat sera une force unique appliquée en o', qui est la pression résultante, et un couple, le couple résultant. Les moments de ce couple par rapport à $o'x'$ et à $o'y'$ seront appelés *moments fléchissants* ; le moment par rapport à oz est alors dit *moment de torsion*.

Les projections de la pression résultante sont :

$$\int T_2 d\omega, \qquad \int T_1 d\omega, \qquad \int N_3 d\omega.$$

Les moments fléchissants sont alors, puisque le moment de la pression résultante est nul :

$$\int y N_3 \, d\omega \qquad \text{pour} \qquad o'x',$$

et

$$-\int x N_3 \, d\omega \qquad \text{pour} \qquad o'y$$

Le moment de torsion est de même :

$$\int (x T_1 - y T_2) \, d\omega$$

On peut trouver une autre expression de ces moments. Soient F les forces extérieures appliquées à la base AB.

Toutes les forces appliquées au tronçon ABCD doivent se faire équilibre. Or ce tronçon est soumis : 1° aux forces F ; 2° aux actions mutuelles des molécules du tronçon ; 3° à la réaction de la partie supérieure du prisme A'B'CD, c'est-à-dire aux pressions qui s'exercent sur les divers éléments de CD. Les actions mutuelles des molécules de ABCD étant égales et opposées, les forces F font seules équilibre aux pressions sur CD, par conséquent les trois composantes de la pression résultante sont au signe près égales à la somme des projections de toutes les forces F sur leur direction, et les moments fléchissants et de torsion sont égaux à la somme des moments des forces F par rapport à $o'x'$, $o'y'$ et $o'z$.

Considérons une fibre quelconque du cylindre. Après la déformation, elle devient une courbe ; rapportons-la à trois axes parallèles aux axes primitifs et dont l'un passe par la fibre avant la déformation.

Les coordonnées d'un point quelconque de la fibre seront par rapport à ces nouveaux axes :

$$\xi, \eta, z + \zeta,$$

ou comme ζ très petit peut être négligé devant z :

$$\xi, \eta, z.$$

Projetons la courbe sur le plan des zx, la courbure de la projection au point ξ, z est :

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2\xi}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

ou encore en négligeant le carré de $\frac{d\xi}{dz}$

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2\xi}{dz^2}.$$

Je vais montrer que *cette courbure est proportionnelle au moment fléchissant*. C'est en cela que consiste le théorème.

Nous avons :

$$\xi + i\eta = a + bu + cu^2 = f(u)$$

b et c étant du premier degré en z. Donc :

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} + i\frac{d^2\eta}{dz^2} = \frac{d^2a}{dz^2},$$

ce qui entraîne :

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} = \mathcal{R}\left(\frac{d^2a}{dz^2}\right).$$

La courbure ne dépend pas de x et de y ; elle est donc la même pour la projection de toutes les fibres aux points où elles rencontrent une même section droite.

Soient :

$$\begin{cases} b = b_0 + ib_1 \\ c = c_0 + ic_1, \end{cases}$$

Nous savons que :

$$\frac{d^2a}{dz^2} = -2K\bar{c}.$$

Donc :

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} = 4\frac{\lambda+\mu}{\lambda}c_0.$$

Calculons le moment fléchissant pour $o'y'$, c'est-à-dire $-\int N_3 x d\omega$.

Nous avons :

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{d\zeta}{dz}$$

et comme N_1 et N_2 sont nuls :

$$\lambda\theta + 2\mu\frac{d\xi}{dx} = 0$$

$$\lambda\theta + 2\mu\frac{d\eta}{dy} = 0$$

Ajoutons membre à membre ces trois égalités, il viendra :

$$N_3 = (3\lambda + 2\mu)\,\theta = \frac{-2\mu}{\lambda}(3\lambda + 2\mu)\frac{d\xi}{dx}$$

Mais, d'autre part :

$$\frac{d\xi}{dx} = \mathfrak{R}\,(b + 2cu)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d\xi}{dx} = b_0 + 2c_0 x - 2c_1 y.$$

Le moment fléchissant est donc :

$$-\int N_3 x d\omega = \frac{2\mu}{\lambda}(3\lambda+2\mu)\left\{b_0\int x d\omega + 2c_0\int x^2 d\omega - 2c_1\int xy d\omega\right\}$$

Parmi les intégrales qui entrent dans le second membre deux sont nulles :

$\int x d\omega = 0$, parce que o' est le centre de gravité de la section

$\int xy d\omega = 0$, parce que $o'z$ est un axe d'inertie.

La troisième intégrale $\int x^2 d\omega$ est d'ailleurs le moment d'inertie I de la section par rapport à $o'y'$.

On a par suite :

$$-\int N_3 x d\omega = \frac{4\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda} \mathrm{I} c_0,$$

et en tenant compte de la valeur trouvée pour $\frac{d^2\xi}{dz^2}$

$$-\int N_3 x d\omega = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \mathrm{I} \frac{d^2\xi}{dz^2}$$

Cette formule exprime le théorème cherché : A un facteur constant près qui ne dépend que de la nature du corps, le moment fléchissant par rapport à $o'z'$ est le produit de la courbure de la projection d'une fibre déformée sur le plan de flexion $x'o'z$ par le moment d'inertie de la section relatif à $o'y'$.

74. Moment de torsion. — Le théorème relatif au moment de torsion est un peu moins simple et un peu moins général que le précédent.

Il suppose que la section possède deux axes de symétrie rectangulaires.

Considérons, dans une section droite, deux courbes MM_1, MM_2 et les tangentes en M à ces courbes. Après la déformation elles sortent de la section droite; considérons alors leurs projections $M''M''_1$, $M''M''_2$ sur cette section. Nous avons vu que l'angle des tangentes en M'' était égal à l'angle primitif en M.

Je me propose de savoir de combien il a tourné, c'est-à-dire de déterminer l'angle de $M''T''_1$ avec MT_1. Soit sur MM_1 un point M_1 d'affixe $(x + iy)$, le point correspondant sur $M''M''_1$ est le point M''_1 dont l'affixe est:

$$x + \xi + i(y + \eta),$$

c'est-à-dire puisque

$$\xi + i\eta = f(u)$$
$$x + \xi + i(y + \eta) = U = u + f(u).$$

L'angle dont les tangentes ont tourné est évidemment l'argument de $\frac{dU}{du}$, c'est à-dire de $\left(1 + \frac{df}{du}\right)$.

Prenons en particulier pour les courbes MM_1 et MM_2 les deux axes d'inertie principaux de la section.

Nous avons :

$$\frac{df}{du} = b + 2cu$$

et comme le point M a maintenant pour affixe $u = 0$:

$$\frac{df}{du} = b_0 + ib_1.$$

Donc :

$$\text{argument de } \left(1 + \frac{df}{du}\right) = \text{arc tg} \frac{b_1}{1 + b_0},$$

b_0 et b_1 sont du même ordre de grandeur que ξ et η; comme on néglige les carrés de ces dernières quantités on peut prendre approximativement :

$$\text{arc tg} \frac{b_1}{1 + b_0} = b_1.$$

La quantité b_1 sera ce que nous appellerons la *rotation des axes.*

Considérons maintenant deux sections droites infiniment voisines correspondant aux valeurs z et $z + dz$, la rotation des axes est différente pour ces deux sections, l'une des sections aura tourné par rapport à l'autre de l'angle $\frac{db_1}{dz}$. C'est cette quantité $\frac{db_1}{dz}$, c'est-à-dire la dérivée de la rotation par rapport à z, que nous appellerons la *torsion.*

En supposant deux axes de symétrie rectangulaires à la section, nous allons montrer que *la torsion est proportionnelle au moment de torsion.*

Remarquons d'abord que b_0 et b_1 sont des binômes du premier degré en z :

$$\begin{cases} b_0 = b'_0 + z b''_0 \\ b_1 = b'_1 + z b''_1 \end{cases}$$

et que l'on a : $b''_0 = 0$ d'après la condition $\mathfrak{R}\left(\frac{db}{dz}\right) = 0$ pour $z = 0$.

Je dis de plus que l'on peut faire $b'_1 = 0$.

En effet b_1' est la rotation des axes dans la section moyenne $z = 0$ et il suffit pour l'annuler d'imprimer à tout le cylindre une rotation égale et contraire, sans déformation.

On aura alors :

$$\begin{cases} b_0 = b_0' \\ b_1 = zb_1'' \end{cases}$$

Je dis que le moment de torsion est proportionnel à b_1''.

L'axe des z intersection des deux plans de symétrie zox, zoy est un axe de symétrie. Si l'on a une position d'équilibre, on en déduit évidemment une autre en changeant ξ, η, x, y en $-\xi$, $-\eta$, $-x$, $-y$. Dans cette opération le moment de torsion

$$\int (x\mathrm{T}_1 - y\mathrm{T}_2)\, d\omega$$

ne change pas.

D'autre part, changer x et y en $-x$ et $-y$, c'est changer u en $-u$ et par suite $f(u)$ en $f(-u)$. Si on remplace ensuite ξ et η par $-\xi$ et $-\eta$, on aura :

$$\xi + i\eta = -f(-u) = -a + bu - cu^2.$$

Or le moment de torsion dépend linéairement des coefficients de $f(u)$, comme il ne change pas il est indépendant de a et de c. C'est donc une fonction linéaire de b_0' et b_1''.

Le plan des zx est un plan de symétrie, si l'on remplace y et η par $-y$ et $-\eta$ on aura encore une position d'équilibre. Mais ici le moment de torsion a changé de signe. A quoi cela correspond-il ?

Changer y en $-y$, c'est changer u en $\bar{u}$ et par conséquent $f(u)$ en $f(\bar{u}) = a + b\bar{u} + c\bar{u}^2$.

Remplacer η par $-\eta$ transforme $\xi + i\eta$ en $\xi - i\eta$.

On a par conséquent :

$$\xi - i\eta = a + b\bar{u} + c\bar{u}^2$$

c'est-à-dire :

$$\xi + i\eta = \bar{a} + \bar{b}u + \bar{c}u^2$$

Les quantités a, b, c sont donc remplacées par les quantités conjuguées ; comme le moment de torsion change de signe, il ne dépend pas de b'_0.

Il est donc proportionnel à b''_1.

La théorie élémentaire de la résistance des matériaux conduit à ce résultat et donne pour coefficient de proportionnalité le moment d'inertie de la section droite par rapport à son centre de gravité.

Si nous cherchons à l'aide de la théorie de Saint-Venant à calculer la vraie valeur de ce coefficient, nous trouverons qu'il est compliqué et dépend de la quantité Ω. On obtiendrait le résultat de la théorie élémentaire, en supposant que les sections droites restent planes et perpendiculaires à oz.

75. Ces différents résultats peuvent s'énoncer sous une autre forme.

Considérons le cylindre avant la déformation : soient o le centre de gravité, oz la direction des génératrices, $o'x'$ et $o'y'$ les deux axes principaux d'inertie d'une section droite.

Prenons sur oz un point o'' infiniment voisin de o', soient $o''x''$, $o''y''$ les axes d'inertie de la section droite passant par o'', ces axes sont parallèles à $o'x'$ et $o'y'$.

Posons $o'o'' = dz$ et déformons le cylindre.

L'axe oz devient une courbe, les points o' et o'' viennent en o'_1 et o''_1. Les axes d'inertie en o' et o'' deviennent des courbes. Considérons les tangentes $o'_1x'_1$, $o'_1y'_1$, $o''_1x''_1$, $o''_1y''_1$ à ces courbes en o'_1 et o''_1, elles forment avec les tangentes à $o'_1o''_1$ deux trièdres qui ont chacun, aux infiniment petits du second ordre près, un angle droit $x'_1o'_1y'_1$ et $x''_1o''_1y''_1$, les deux autres différant d'un droit par des infiniment petits du premier ordre.

Soient $o'_1z'_1$ et $o''_1z''_1$ les tangentes à la courbe $o'_1o''_1$ en o'_1 et en o''_1.

Soit $x'_2o'_1y'_2$ la projection de l'angle $x'_1o'_1y'_1$ sur un plan perpendiculaire à $o'_1z'_1$; l'angle des deux plans $x'_2o'_1y'_2$ et $x'_1o'_1y'_1$ étant très petit, l'angle $x'_2o'_2y'_2$ sera comme $x'_1o'_1y'_1$ égal à un droit aux infiniment petits près du second ordre.

Soit de même $x''_2o''_1y''_2$ la projection de $x''_1o''_1y''_1$ sur un plan perpendiculaire à $o''_1z''_1$.

Considérons les deux trièdres

$$o'_1x'_2y'_2z'_1 \text{ et } o''_1x''_2y''_2z''_1$$

Chacun d'eux a deux faces rigoureusement rectangles et la troisième est rectangle aux infiniment petits près du second ordre.

Les deux trièdres sont égaux aux infiniment petits du second ordre près, on peut donc les faire coïncider. Considérons les trois composantes de la rotation nécessaire pour amener la coïncidence.

La composante suivant oz est la torsion multipliée par dz ; comme la torsion est proportionnelle au moment de torsion, cette composante est elle-même proportionnelle au moment de torsion.

La composante de la rotation suivant oy est égale à l'angle de contingence de la projection de l'axe oz déformé sur le plan des zx. Comme cet angle de contingence est proportionnel à $\frac{d^2\xi}{dz^2}$, c'est-à-dire au moment fléchissant relatif à oy, la composante de la rotation suivant oy est proportionnelle à ce moment.

Le même fait se reproduit pour la troisième composante.

Si donc nous représentons par $o_1'M_1$ le moment du couple résultant, c'est-à-dire le vecteur dont les projections sont les moments fléchissants et le moment de torsion, pour avoir les composantes de la rotation nécessaire pour amener le trièdre o_1'' sur le trièdre o_1' il suffit de multiplier les projections de $o_1'M_1$ par des facteurs constants infiniment petits et différents pour les trois axes.

CHAPITRE VIII

PROBLÈME DE L'ÉLASTIQUE

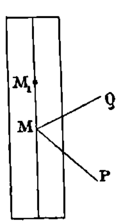
76. Nous avons supposé jusqu'ici que les dimensions des corps que nous considérions étaient toutes finies, par conséquent que des forces finies agissant sur ces corps produisaient des déformations infiniment petites. Il n'en est plus de même pour des corps dont une ou deux dimensions sont très petites, par exemple pour des plaques minces ou des verges de faible section. Une telle verge rompra sous l'influence de forces finies, mais sous l'action de forces très petites elle pourra subir des déformations finies sans qu'il y ait rupture.

Pour qu'il n'y ait pas rupture il faut évidemment que les dilatations linéaires et angulaires restent infiniment petites ; je dis que, avec cette condition, la déformation peut être finie. Décomposons en effet la verge en cylindres élémentaires tels que leurs trois dimensions soient du même ordre de grandeur. Un de ces cylindres peut prendre une courbure finie bien que les dilatations restent très petites. De simples considérations d'homogénéité vont nous en convaincre.

Un cylindre fini soumis à des forces finies prend, si les dilatations sont très petites, une courbure très petite, c'est-à-dire que le rayon de courbure devient très grand. Les dimensions du cylindre et le rayon de courbure sont des longueurs, les dilatations $\frac{d\xi}{dx}$ et $\frac{d\zeta}{dy}+\frac{d\eta}{dz}$ sont des nombres.

Divisons toutes les dimensions par un nombre très grand : le cylindre deviendra infiniment petit, les dilatations ne changeront pas et le rayon de courbure qui était très grand deviendra fini.

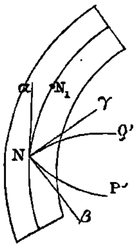
77. Considérons une verge de section infiniment petite, supposons que les seules forces extérieures se réduisent à des forces et à des couples appliqués aux deux extrémités ; supposons en outre que dans chacun des cylindres élémentaires la distribution des forces soit celle qui correspond aux conditions du problème de Saint-Venant ; nous allons étudier la déformation de cette verge. Pour justifier la dernière hypothèse, on dit quelquefois que, la verge étant très petite, les points d'application des forces réelles sont infiniment voisins de ceux des forces de Saint-Venant. Ce n'est pas très satisfaisant, mais nous nous contenterons de cette raison.



Nous ne considérons que les verges dont la section a deux axes de symétrie ; soient MM_1 la fibre moyenne, c'est-à-dire celle qui passe par le centre de gravité, MP et MQ les deux axes de la section droite en M.

Après la déformation, la fibre moyenne devient une courbe. C'est cette courbe que l'on appelle courbe élastique et que nous allons déterminer.

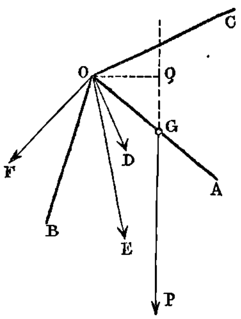
Soient NN_1, NP', NQ' ce que deviennent MM_1, MP et MQ. Menons les trois tangentes en N à ces courbes : $N\alpha$, $N\beta$, $N\gamma$. L'angle $\beta N\gamma$ est droit d'après une remarque faite plus haut ; projetons cet angle sur le plan normal à la courbe NN_1 en N. La projection $\varepsilon N\delta$ est encore un angle droit aux infiniment petits du second ordre près. Donc aux infiniment petits du second ordre près le trièdre $N\alpha\delta\varepsilon$ est trirectangle.



Nous allons montrer que le problème de l'élastique gauche se ramène à l'étude du mouvement d'un solide pesant qui a un point fixe.

Rappelons rapidement les notations employées.

Soient O le point fixe, OA, OB, OC les axes d'inertie relatifs à ce point, A, B, C les moments d'inertie correspondants. Représentons par le vecteur OD la rotation instantanée du corps, soient p, q, r ses composantes. Le vecteur dont les composantes sont Ap, Bq, Cr et que nous désignerons par oE représente l'axe du couple de la somme des moments des quantités de mouvements de tous les points du corps. On sait d'après un théorème de mécanique que le point E se déplace et que, si le vecteur OF représente la vitesse du point E, ce vecteur est aussi égal à la somme des moments de toutes les forces appliquées au corps par rapport au point O.



Soit G le centre de gravité que je suppose sur OA ; supposons que la seule force appliquée au corps soit son poids GP.

Le vecteur OF sera perpendiculaire au plan OGP et sa grandeur sera définie par :

$$OF = GP \times OQ$$

en désignant par Q la projection du point O sur GP. Si G désigne l'angle AGP on aura :

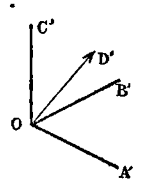
$$OQ = OG \sin G.$$

Donc :

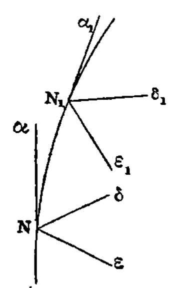
$$OF = GP \times OG \sin G$$

et, comme OG et GP sont constants, OF est proportionnel à $\sin G$.

78. Nous allons retrouver tous ces éléments dans la théorie de l'élastique.



Considérons la courbe NN_1 et le trièdre précédemment défini $N\alpha\delta\varepsilon$ et supposons que le point N décrive la courbe avec une vitesse égale à l'unité. En dénotant par s l'arc de la courbe compté à partir d'un point fixe on aura : $s = t$. Le trièdre $N\alpha\delta\varepsilon$ se déplace avec le point N ; pour étudier son mouvement nous menons par un point fixe O′ des parallèles à ses arêtes O′A′, O′B′, O′C′. Le trièdre O′A′B′C′ tourne autour du point O′, je dis que son mouvement est le même que celui du trièdre OABC autour du point O.



Soit en effet à un instant quelconque O′D′ la rotation.

Cherchons ses composantes. Pour trouver la composante suivant $N\alpha$, considérons sur l'élastique un point N_1 voisin de N, soit $NN_1 = ds = dt$ et $N_1\alpha_1\delta_1\varepsilon_1$ le trièdre $N\alpha\delta\varepsilon$ transporté en N_1 Projetons $\delta_1 N_1 \varepsilon_1$ sur le plan $\delta N\varepsilon$, soit $\delta_2 N_2 \varepsilon_2$ la projection, l'angle M_2 sera encore droit aux infiniment petits près du second ordre d'après ce qu'on a vu plus haut. La rotation nécessaire pour amener $\delta N\varepsilon$ à être parallèle à $\delta_2 N_2 \varepsilon_2$ est

$$\frac{\text{angle de } N\delta \text{ avec } N_2\delta_2}{dt} \text{ ou encore } \frac{\widehat{N\delta, N_2\delta_2}}{ds}.$$

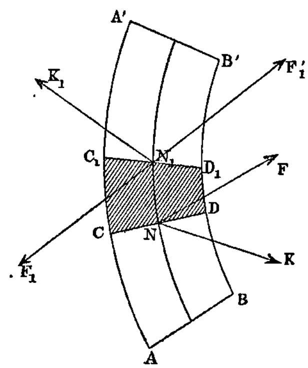
C'est ce que nous avons appelé la torsion.

Cherchons la composante suivant $N\delta$, pour cela nous opérerons de même, c'est-à-dire nous projetterons $\alpha_1 N_1 \varepsilon_1$ sur le plan $\alpha N\varepsilon$, on obtiendra aussi $\alpha_2 N_2 \varepsilon_2$ égal à $\alpha N \varepsilon$ aux infiniment petits du premier ordre près. Pour passer de $\alpha N\varepsilon$ à $\alpha_2 N_2 \varepsilon_2$ il faudra tourner d'un certain angle, angle de $N_2\alpha_2$ avec $N\alpha$, qui est l'angle de contingence de la projection de l'élastique sur le plan $N\alpha\varepsilon$. La composante de la rotation est le quotient de cet angle par dt ou par ds, c'est-à-dire la courbure de la projection de l'élastique sur le plan $N\alpha\varepsilon$ perpendiculaire à $N\delta$.

En résumé on a donc :

$$\begin{cases} p = \text{torsion} \\ q = \text{courbure de la projection sur } A'O'C' \\ r = \quad » \qquad » \qquad A'O'B' \end{cases}$$

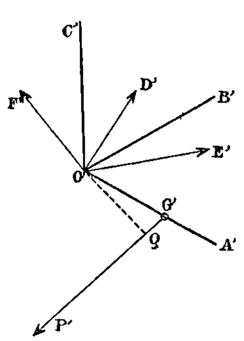
Soient CD, C_1D_1 deux sections droites déformées, percées en N et N_1 par la courbe élastique. Considérons la portion CDC_1D_1 de la verge. Elle est en équilibre sous l'action des parties $CDAB$, $C_1D_1A'B'$, c'est-à-dire des pressions qui s'exercent sur les différents éléments des deux bases CD et C_1D_1 et des attractions mutuelles entre les molécules de CDC_1D_1. Ces attractions étant deux à deux égales et opposées, la somme de leurs projections sur un axe quelconque est nulle ainsi que la somme de leurs moments par rapport à cet axe.



Il y a donc équilibre entre les pressions sur CD et les pressions sur C_1D_1. Soient NF la pression résultante sur CD et NK le moment du couple résultant ; N_1F_1 et N_1K_1 les quantités analogues pour C_1D_1. L'on doit avoir, puisque la projection d'un couple sur un axe est nulle,

$$NF + N_1F_1 = o.$$

Si, d'autre part, on cherche l'action de la partie ABC_1D_1 sur C_1D_1, on doit trouver une pression résultante $N_1F'_1$ et un couple résultant $N_1K'_1$ égaux et directement opposés à N_1F_1 et N_1K_1.



Par conséquent : $NF = N_1F'_1$, c'est-à-dire que la pression résultante est constante en grandeur et en direction quand on passe d'une section droite à une autre.

Je prendrai un point fixe G' sur OA' par lequel je mènerai G'P', vecteur égal et parallèle à NF; G'P' sera constant en grandeur et en direction.

Menons également, par le point O', le segment O'E' égal et parallèle au couple résultant NK.

Ses composantes seront les moments fléchissants et le moment de torsion.

Je vais étudier la variation de O'E'.

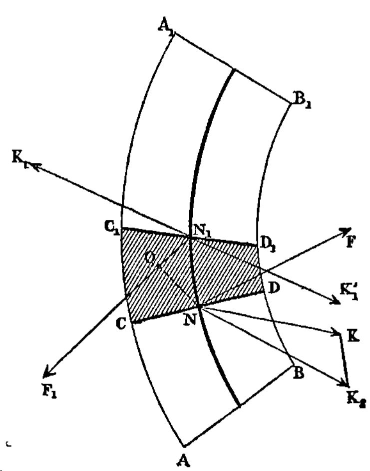
Nous avons vu que CDC_1D_1 est en équilibre sous l'action des forces NF, N_1F_1 et des couples NK, N_1K_1. Écrivons que la somme des moments par rapport au point N est nulle.

Soit NK_2 un segment égal à N_1K_1' parallèle et de même sens, on aura :

$$(NK) + (KK_2) + (K_2N) = o,$$

c'est-à-dire :

$$-(KK_2) = (NK) + (N_1K_1),$$



K_2K est la somme des moments des couples NK et N_1K_1 par rapport au point N ; pour l'équilibre il faut donc que KK_2 soit égal au moment de N_1F_1 par rapport au point N. Il en résulte que KK_2 doit être perpendiculaire au plan NN_1F_1, c'est-à-dire au plan O'G'P'.

Considérons $\frac{KK_2}{ds}$; cette quantité est, en désignant par Q la projection de N sur N_1F_1, égale à :

$$\frac{N_1F_1 \times NQ}{ds} \quad \text{ou} \quad N_1F_1 \sin \widehat{QN_1N};$$

et, comme $N_1F_1 = G'P'$ est une quantité constante, $\frac{KK_2}{ds}$ est proportionnel au sinus de l'angle $A'G'P'$.

Soit $O'F'$ le vecteur qui représente la vitesse du point E'; $O'E'$ est égal et parallèle à NK, $O'E'_1$ est égal et parallèle à NK_2, donc la vitesse du point E' est $\frac{KK_2}{ds}$, et par suite : $O'F' = \frac{KK_2}{ds}$.

Le vecteur $O'F'$ jouit bien de toutes les propriétés de OF.

L'analogie entre les deux problèmes est donc complète :

OD, $O'D'$ représentent les rotations des deux trièdres. OE, $O'E'$ s'en déduisent en multipliant les projections de OD et $O'D'$ par des facteurs constants différents pour les trois axes qui sont A, B, C dans le cas du solide et les facteurs de proportionnalité des moments pour l'élastique.

GP et $G'P'$ sont des quantités constantes en grandeur et direction ; OF et $O'F'$ désignent les vitesses de E et E', sont perpendiculaires aux plans OGP et $O'G'P'$ et proportionnels à $\sin G$ et $\sin G'$.

79. La solution du problème relatif au corps donne les cosinus directeurs de OA, OB, OC ou de $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$, en fonction du temps t ou de l'arc s. Il nous faudrait les coordonnées du point N en fonction de s. Connaissant $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ en fonction de s il est évident qu'il suffira de faire des quadratures pour obtenir x, y, z en fonction de s.

Il n'est pas même nécessaire d'en faire trois, car, en écrivant que la portion CDAB de la verge est en équilibre, les forces agissant sur AB étant données, on aura deux relations finies entre x, y, z. Une seule quadrature suffira donc.

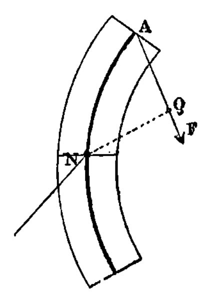
Le problème du mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe n'est pas résolu dans toute sa généralité, mais il l'est dans quelques cas particuliers.

Le plus simple est celui du mouvement pendulaire.

Le solide, abandonné sans vitesse initiale, a l'un de ses plans principaux d'inertie vertical et contenant le point fixe. On a dans ce cas un mouvement plan ; le problème correspondant est celui de la courbe élastique plane qui s'obtient en supposant A'B' soumise à une force unique, située dans un des plans de symétrie primitifs de la verge.

La courbe élastique plane jouit de la propriété caractéristique suivante signalée par Halphen.

Soient AF la force appliquée à l'extrémité A, N un point de la courbe. Le plan NAF est un plan principal d'inertie de la verge, la perpendiculaire à ce plan en N est l'un des axes d'inertie de la section droite correspondante.



Le théorème du moment fléchissant montre donc que la courbure en N est proportionnelle au moment de AF par rapport au point N, c'est-à-dire à AF $\times$ NQ.

Donc la courbure en N est proportionnelle à NQ et, si l'on prend AF pour axe des x, *la courbe est telle que le produit du rayon de courbure par l'ordonnée soit constant.*

La solution du problème de la courbe élastique plane dépend des fonctions elliptiques.

Dans le mouvement à la Poinsot, c'est-à-dire si GP est nul, on peut encore résoudre le problème du corps solide par les fonctions elliptiques. A ce cas correspond celui où G'P' est nul, ce qui arrive quand AB est encastrée et A'B' soumise seulement à un couple.

Le cas, considéré par Lagrange et Jacobi, d'un corps pesant de révolution suspendu par un point de son axe, correspond à celui d'une verge dans laquelle les deux moments d'inertie principaux de la section droite sont égaux. Quelles que soient alors les forces appliquées aux extrémités, les fonctions elliptiques suffisent pour la solution.

Enfin il est évident qu'au cas singulier signalé par M^me^ de Kowalewski (l'ellipsoïde d'inertie relatif au point fixe est de révolution, le moment d'inertie correspondant à l'axe est moitié des deux autres et le centre de gravité est dans le plan principal d'inertie relatif au point fixe et perpendiculaire à l'axe de révolution) répond encore une particularisation des données qui rend le problème de l'élastique résoluble par les fonctions abéliennes.

FIN

TABLE DES MATIÈRES

		Pages
Chapitre I.	— Étude cinématique des déformations. . .	1
II.	— Étude des forces élastiques.	27
III.	— Équations d'équilibre. — Pressions. . .	55
IV.	— Étude de quelques cas particuliers d'équilibre.	83
V.	— Petits mouvements d'un corps élastique. .	96
VI.	— Propagation des ondes planes. — Réflexion. — Exemples de vibration.	118
VII.	— Problème de Saint-Venant	166
VIII.	— Problème de l'élastique	199

Tours. — Imprimerie Deslis Frères.