ŒUVRES

COMPLÈTES

DE LAPLACE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR

MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME SEPTIÈME.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

—

M DCCC LXXXVI

Second fascicule.

ŒUVRES

COMPLÈTES

DE LAPLACE.

ŒUVRES

COMPLÈTES

DE LAPLACE.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

ŒUVRES

COMPLÈTES

DE LAPLACE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR

MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME SEPTIÈME.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

M DCCC LXXXVI

THÉORIE

ANALYTIQUE

DES PROBABILITÉS;

PAR M. LE MARQUIS DE LAPLACE,

Pair de France; Grand Officier de la Légion d'honneur; l'un des quarante de l'Académie française; de l'Académie des Sciences; membre du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Göttingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemark, de Suède, de Prusse, des Pays-Bas, d'Italie, etc.

TROISIÈME ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, rue du Jardinet, nº 12.

1820.

ŒUVRES

COMPLÈTES

DE LAPLACE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR

MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME SEPTIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

M DCCC LXXXVI

Second Fascicule.

LIVRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PROBABILITÉS.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE CETTE THÉORIE.

1. On a vu dans l'Introduction que la probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables au nombre de tous les cas possibles, lorsque rien ne porte à croire que l'un de ces cas doit arriver plutôt que les autres, ce qui les rend, pour nous, également possibles. La juste appréciation de ces cas divers est un des points les plus délicats de l'Analyse des hasards.

Si tous les cas ne sont pas également possibles, on déterminera leurs possibilités respectives, et alors la probabilité de l'événement sera la somme des probabilités de chaque cas favorable. En effet, nommons p la probabilité du premier de ces cas. Cette probabilité est relative à la subdivision de tous les cas en d'autres également possibles. Soient N la somme de tous les cas ainsi subdivisés, et n la somme de ces cas qui sont favorables au premier cas; on aura

$$p = \frac{n}{\mathrm{N}}.$$

On aura pareillement

$$p' = \frac{n'}{\mathrm{N}}, \qquad p'' = \frac{n''}{\mathrm{N}}, \qquad \ldots,$$

en marquant d'un trait, de deux traits, ... les lettres p et n, relativement au second cas, au troisième, ... Maintenant la probabilité de l'événement dont il s'agit est, par la définition même de la probabilité, égale à

$$\frac{n + n' + n'' + \ldots}{N},$$

elle est donc égale à $p + p' + p'' + \ldots$.

Lorsqu'un événement est composé de deux événements simples, indépendants l'un de l'autre, il est clair que le nombre de tous les cas possibles est le produit des deux nombres qui expriment tous les cas possibles relatifs à chaque événement simple, parce que chacun des cas relatifs à l'un de ces événements peut se combiner avec tous les cas relatifs à l'autre événement. Par la même raison, le nombre des cas favorables à l'événement composé est le produit des deux nombres qui expriment les cas favorables à chaque événement simple; la probabilité de l'événement composé est donc alors le produit des probabilités de chaque événement simple. Ainsi la probabilité d'amener deux fois de suite un as avec un dé est un trente-sixième, lorsque l'on suppose les faces du dé parfaitement égales, parce que le nombre de tous les cas possibles en deux coups est trente-six, chaque cas de la première projection pouvant se combiner avec les six cas de la seconde, et parmi tous ces cas un seul donne deux as de suite.

En général, si p, p', p'', ... sont les possibilités respectives d'un nombre quelconque d'événements simples indépendants les uns des autres, le produit $p.p'.p''$.... sera la probabilité d'un événement composé de ces événements.

Si les événements simples sont liés entre eux de manière que la supposition de l'arrivée du premier influe sur la probabilité de l'arrivée du second, on aura la probabilité de l'événement composé, en déterminant : 1° la probabilité du premier événement; 2° la probabilité que, cet événement étant arrivé, le second aura lieu.

Pour démontrer ce principe d'une manière générale, nommons p le nombre de tous les cas possibles, et supposons que dans ce nombre il y en ait p' favorables au premier événement. Supposons ensuite que, dans le nombre p', il y en ait q favorables au second événement; il est clair que $\frac{q}{p}$ sera la probabilité de l'événement composé. Mais la probabilité du premier événement est $\frac{p'}{p}$, la probabilité que, cet événement étant arrivé, le second aura lieu est $\frac{q}{p'}$; car alors, un des cas p' devant exister, on ne doit considérer que ces cas. Maintenant on a

$$\frac{q}{p} = \frac{p'}{p} \frac{q}{p'},$$

ce qui est la traduction en Analyse du principe énoncé ci-dessus.

En considérant comme événement composé l'événement observé joint à un événement futur, la probabilité de ce dernier événement, tirée de l'événement observé, est évidemment la probabilité que, l'événement observé ayant lieu, l'événement futur aura lieu pareillement; or, par le principe que nous venons d'exposer, cette probabilité multipliée par celle de l'événement observé, déterminée *a priori* ou indépendamment de ce qui est déjà arrivé, est égale à celle de l'événement composé déterminée *a priori;* on a donc ce nouveau principe, relatif à la probabilité des événements futurs, déduite des événements observés :

La probabilité d'un événement futur, tirée d'un événement observé, est le quotient de la division de la probabilité de l'événement composé de ces deux événements, et déterminée *a priori*, par la probabilité de l'événement observé, déterminée pareillement *a priori*.

De là découle encore cet autre principe relatif à la probabilité des causes, tirée des événements observés.

Si un événement observé peut résulter de n causes différentes, leurs probabilités sont respectivement comme les probabilités de l'événement, tirées de leurs existence; et la probabilité de chacune d'elles est une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement, dans l'hypothèse de l'existence de la cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables, relatives à toutes les causes.

Considérons, en effet, comme événement composé l'événement observé, résultant d'une de ces causes. La probabilité de cet événement composé, probabilité que nous désignerons par E, sera, par ce qui précède, égale au produit de la probabilité de l'événement observé, déterminée *a priori* et que nous nommerons F, par la probabilité que, cet événement ayant lieu, la cause dont il s'agit existe, probabilité qui est celle de la cause, tirée de l'événement observé, et que nous nommerons P. On aura donc

$$P = \frac{E}{F}.$$

La probabilité de l'événement composé est le produit de la probabilité de la cause par la probabilité que, cette cause ayant lieu, l'événement arrivera, probabilité que nous désignerons par H. Toutes les causes étant supposées *a priori* également possibles, la probabilité de chacune d'elles est $\frac{1}{n}$; on a donc

$$E = \frac{H}{n}.$$

La probabilité de l'événement observé est la somme de tous les E relatifs à chaque cause; en désignant donc par $S\frac{H}{n}$ la somme de toutes les valeurs de $\frac{H}{n}$, on aura

$$F = S\frac{H}{n};$$

l'équation $P = \frac{E}{F}$ deviendra donc

$$P = \frac{H}{SH},$$

ce qui est le principe énoncé ci-dessus, lorsque toutes les causes sont *a priori* également possibles. Si cela n'est pas, en nommant p la probabilité *a priori* de la cause que nous venons de considérer, on aura

$$E = Hp,$$

et, en suivant le raisonnement précédent, on trouvera

$$P = \frac{Hp}{SHp};$$

ce qui donne les probabilités des diverses causes, lorsqu'elles ne sont pas toutes également possibles *a priori*.

Pour appliquer le principe précédent à un exemple, supposons qu'une urne renferme trois boules dont chacune ne puisse être que blanche ou noire; qu'après avoir tiré une boule, on la remette dans l'urne pour procéder à un nouveau tirage, et qu'après m tirages, on n'ait amené que des boules blanches. Il est visible que l'on ne peut faire *a priori* que quatre hypothèses; car les boules peuvent être ou toutes blanches, ou deux blanches et une noire, ou deux noires et une blanche, ou enfin toutes noires. Si l'on considère ces hypothèses comme autant de causes de l'événement observé, les probabilités de l'événement relatives à ces causes seront

$$1, \quad \frac{2^m}{3^m}, \quad \frac{1}{3^m}, \quad 0.$$

Les probabilités respectives de ces hypothèses, tirées de l'événement observé, seront donc, par le troisième principe,

$$\frac{3^m}{3^m+2^m+1}, \quad \frac{2^m}{3^m+2^m+1}, \quad \frac{1}{3^m+2^m+1}, \quad 0.$$

On voit, au reste, qu'il est inutile d'avoir égard aux hypothèses qui excluent l'événement, parce que, la probabilité résultante de ces hypothèses étant nulle, leur omission ne change point les expressions des autres probabilités.

Si l'on veut avoir la probabilité de n'amener que des boules noires dans les m' tirages suivants, on déterminera *a priori* les probabilités d'amener d'abord m boules blanches, ensuite m' boules noires. Ces probabilités sont, relativement aux hypothèses précédentes,

$$0, \quad \frac{2^m}{3^{m+m'}}, \quad \frac{2^{m'}}{3^{m+m'}}, \quad 0,$$

et comme, *a priori*, les quatre hypothèses sont également possibles, la probabilité de l'événement composé sera le quart de la somme des quatre probabilités précédentes, ou

$$\frac{1}{4}\,\frac{2^m+2^{m'}}{3^{m+m'}}.$$

Les probabilités de l'événement observé, déterminées *a priori*, dans les quatre hypothèses précédentes, étant respectivement

$$\frac{3^m}{3^m},\quad \frac{2^m}{3^m},\quad \frac{1}{3^m},\quad 0,$$

le quart de leur somme, ou

$$\frac{1}{4}\,\frac{3^m+2^m+1}{3^m},$$

sera la probabilité de l'événement observé, déterminée *a priori*; en divisant donc la probabilité de l'événement composé par cette probabilité, on aura, par le second principe,

$$\frac{2^m+2^{m'}}{3^{m'}(3^m+2^m+1)},$$

pour la probabilité d'amener m' boules noires dans les m' tirages suivants.

On peut encore déterminer cette probabilité par le principe suivant :

La probabilité d'un événement futur est la somme des produits de la probabilité de chaque cause, tirée de l'événement observé, par la probabilité que, cette cause existant, l'événement futur aura lieu.

Ici les probabilités de chaque cause, tirées de l'événement observé, sont, comme on l'a vu,

$$\frac{3^m}{3^m+2^m+1},\quad \frac{2^m}{3^m+2^m+1},\quad \frac{1}{3^m+2^m+1},\quad 0;$$

les probabilités de l'événement futur, relatives à ces causes, sont respectivement

$$0,\quad \frac{1}{3^{m'}},\quad \frac{2^{m'}}{3^{m'}},\quad 1;$$

la somme de leurs produits respectifs, ou

$$\frac{2^m + 2^{m'}}{3^{m'}(3^m + 2^m + 1)},$$

sera la probabilité de l'événement futur, tirée de l'événement observé, ce qui est conforme à ce qui précède.

Si l'on suppose quatre boules dans l'urne, et qu'ayant amené une boule blanche au premier tirage, on cherche la probabilité de n'amener que des boules noires dans les m' tirages suivants, on trouvera, par les principes exposés ci-dessus, cette probabilité égale à

$$\frac{3 + 2^{m'+1} + 3^{m'}}{10.4^{m'}}.$$

Si le nombre des boules blanches égale celui des noires, la probabilité de n'amener que des boules noires dans m' tirages est $\frac{1}{2^{m'}}$. Elle surpasse la précédente lorsque m' est égal ou moindre que 5; mais elle lui devient inférieure lorsque m' surpasse 5, quoique la boule blanche extraite d'abord de l'urne indique une supériorité dans le nombre des boules blanches. L'explication de ce paradoxe tient à ce que cette indication n'exclut point la supériorité du nombre des boules noires; elle la rend seulement moins probable, au lieu que la supposition d'une égalité parfaite entre le nombre des blanches et celui des noires exclut cette supériorité; or cette supériorité, quelque petite que soit sa probabilité, doit rendre la probabilité d'amener de suite m' boules noires plus grande que le cas de l'égalité des couleurs, lorsque m' est considérable.

L'inégalité qui peut exister entre des choses que l'on suppose parfaitement semblables peut avoir sur les résultats du Calcul des Probabilités une influence sensible qui mérite une attention particulière. Considérons le jeu de *croix* et *pile*, et supposons qu'il soit également facile d'amener *croix* que *pile;* alors la probabilité d'amener *croix* au premier coup est $\frac{1}{2}$, et celle de l'amener deux fois de suite est $\frac{1}{4}$. Mais s'il existe dans la pièce une inégalité qui fasse paraître une des faces plutôt que l'autre, sans que l'on connaisse la face que cette inégalité favorise, la probabilité d'amener *croix* au premier coup restera toujours $\frac{1}{2}$, parce que, dans l'ignorance où l'on est de la face que cette inégalité favorise, autant la probabilité de l'événement simple est augmentée si cette inégalité lui est favorable, autant elle est diminuée si cette inégalité lui est contraire. Mais la probabilité d'amener *croix* deux fois de suite est augmentée, malgré cette ignorance; car cette probabilité est égale à celle d'amener *croix* au premier coup, multipliée par la probabilité que, l'ayant amené au premier coup, on l'amènera au second; or son arrivée au premier coup est un motif de croire que l'inégalité de la pièce la favorise; elle augmente donc la probabilité de l'amener au second; ainsi le produit des deux probabilités est accru par cette inégalité. Pour soumettre cet objet au calcul, supposons que l'inégalité de la pièce accroisse de la quantité α la probabilité de l'événement simple qu'elle favorise. Si cet événement est *croix*, la probabilité sera $\frac{1}{2}+\alpha$, et la probabilité de l'amener deux fois de suite sera $(\frac{1}{2}+\alpha)^2$. Si l'événement favorisé est *pile*, la probabilité de *croix* sera $\frac{1}{2}-\alpha$, et la probabilité de l'amener deux fois de suite sera $(\frac{1}{2}-\alpha)^2$. Comme on n'a d'avance aucune raison de croire que l'inégalité favorise plutôt l'un que l'autre des événements simples, il est clair que, pour avoir la probabilité de l'événement composé *croix-croix*, il faut ajouter les deux probabilités précédentes et prendre la moitié de leur somme, ce qui donne $\frac{1}{4}+\alpha^2$ pour cette probabilité : c'est aussi la probabilité de *pile-pile*. On trouvera par le même raisonnement que la probabilité de l'événement composé *croix-pile* ou *pile-croix* est $\frac{1}{4}-\alpha^2$; par conséquent, elle est moindre que celle de la répétition du même événement simple.

Les considérations précédentes peuvent être étendues à des événements quelconques, p représentant la probabilité d'un événement simple, et $1-p$ celle de l'autre événement; si l'on désigne par P la probabilité d'un résultat relatif à ces événements, et que l'on suppose que p soit réellement $p\pm\alpha$, α étant une quantité inconnue, ainsi que le signe qui l'affecte, la probabilité P du résultat sera

$$P+\frac{1}{1.2}\alpha^2\frac{d^2P}{dp^2}+\frac{1}{1.2.3.4}\alpha^4\frac{d^4P}{dp^4}+\ldots.$$

En faisant $P=p^n$, c'est-à-dire en supposant que le résultat relatif aux événements soit n fois la répétition du premier, la probabilité P deviendra

$$p^n+\frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2p^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\alpha^4p^{n-4}+\ldots.$$

Ainsi l'erreur inconnue, que l'on peut supposer dans la probabilité des événements simples, accroît toujours la probabilité des événements composés de la répétition du même événement.

2. La probabilité des événements sert à déterminer l'espérance et la crainte des personnes intéressées à leur existence. Le mot *espérance* a diverses acceptions; il exprime généralement l'avantage de celui qui attend un bien quelconque, dans une supposition qui n'est que vraisemblable. Dans la théorie des hasards, cet avantage est le produit de la somme espérée par la probabilité de l'obtenir; c'est la somme partielle qui doit revenir lorsqu'on ne veut point courir les risques de l'événement, en supposant que la répartition de la somme entière se fasse proportionnellement aux probabilités. Cette manière de la répartir est la seule équitable, quand on fait abstraction de toute circonstance étrangère, parce qu'avec un égal degré de probabilité on a un droit égal sur la somme espérée. Nous nommerons cet avantage *espérance mathématique*, pour le distinguer de l'espérance morale qui dépend, comme lui, du bien espéré et de la probabilité de l'obtenir, mais qui se règle encore sur mille circonstances variables qu'il est presque toujours impossible de définir, et plus encore d'assujettir au calcul. Ces circonstances, il est vrai, ne faisant qu'augmenter ou diminuer la valeur du bien espéré, on peut considérer l'espérance morale elle-même comme le produit de cette valeur par la probabilité de l'obtenir; mais on doit alors distinguer, dans le bien espéré, sa valeur relative de sa valeur

absolue : celle-ci est indépendante des motifs qui le font désirer, au lieu que la première croît avec ces motifs.

On ne peut donner de règle générale pour apprécier cette valeur relative; cependant il est naturel de supposer la valeur relative d'une somme infiniment petite, en raison directe de sa valeur absolue, en raison inverse du bien total de la personne intéressée. En effet, il est clair qu'un franc a très peu de prix pour celui qui en possède un grand nombre, et que la manière la plus naturelle d'estimer sa valeur relative est de la supposer en raison inverse de ce nombre.

Tels sont les principes généraux de l'Analyse des Probabilités. Nous allons maintenant les appliquer aux questions les plus délicates et les plus difficiles de cette analyse. Mais, pour mettre de l'ordre dans cette matière, nous traiterons d'abord les questions dans lesquelles les probabilités des événements simples sont données; nous considérerons ensuite celles dans lesquelles ces possibilités sont inconnues et doivent être déterminées par les événements observés.

CHAPITRE II.

DE LA PROBABILITÉ DES ÉVÉNEMENTS COMPOSÉS D'ÉVÉNEMENTS SIMPLES DONT LES POSSIBILITÉS RESPECTIVES SONT DONNÉES.

3. Si l'on développe le produit $(1+p)(1+p')(1+p'')\ldots$, composé de n facteurs, ce développement renfermera toutes les combinaisons possibles des n lettres $p, p', p'', \ldots, p^{(n-1)}$, prises une à une, deux à deux, trois à trois, ... jusqu'à n, et chaque combinaison aura pour coefficient l'unité. Ainsi, la combinaison $pp'p''$ résultant du produit $(1+p)(1+p')(1+p'')$, multiplié par le terme 1 du développement des autres facteurs, son coefficient est évidemment l'unité. Maintenant, pour avoir le nombre total des combinaisons de n lettres prises x à x, on observera que chacune de ces combinaisons devient p^x, lorsqu'on suppose $p', p'', \ldots$ égaux à p. Alors le produit des n facteurs précédents se change dans le binôme $(1+p)^n$; or le coefficient de p^x dans le développement de ce binôme est

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{1.2.3\ldots x};$$

cette quantité exprime donc le nombre des combinaisons des n lettres prises x à x. On aura le nombre total des combinaisons de ces lettres, prises une à une, deux à deux, ..., jusqu'à n à n, en faisant $p=1$, dans le binôme $(1+p)^n$, et en retranchant l'unité, ce qui donne 2^n-1 pour ce nombre.

Supposons que dans chaque combinaison on ait égard non seulement au nombre des lettres, mais encore à leur situation; on déterminera le nombre des combinaisons, en observant que, dans la combinaison de deux lettres pp', on peut mettre p' à la seconde place, et ensuite à la première, ce qui donne les deux combinaisons pp', $p'p$. En introduisant ensuite une nouvelle lettre p'' dans chacune de ces combinaisons, on peut la mettre à la première, à la deuxième ou à la troisième place, ce qui donne 2.3 combinaisons. En continuant ainsi, on voit que, dans une combinaison de x lettres, on peut leur donner $1.2.3\ldots x$ situations différentes, d'où il suit que le nombre total des combinaisons de n lettres, prises x à x, étant, par ce qui précède,

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{1.2.3\ldots x},$$

le nombre total des combinaisons, lorsqu'on a égard à la différente situation des lettres, sera cette même fonction, en supprimant son dénominateur.

On peut facilement, au moyen de ces formules, déterminer les bénéfices des loteries. Supposons que le nombre des numéros d'une loterie soit n, et qu'il en sorte r à chaque tirage; on veut avoir la probabilité qu'une combinaison de s de ces numéros sortira au premier tirage.

Le nombre total des combinaisons des numéros, pris r à r, est, par ce qui précède,

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}.$$

Pour avoir, parmi ces combinaisons, le nombre de celles dans lesquelles les s numéros sont compris, on observera que, si l'on retranche ces numéros de la totalité des numéros, et que l'on combine $r-s$ à $r-s$ le reste $n-s$, le nombre de ces combinaisons sera le nombre cherché; car il est clair qu'en ajoutant les s numéros à chacune de ces combinaisons, on aura les combinaisons r à r des numéros, dans lesquelles sont ces s numéros. Ce nombre est donc

$$\frac{(n-s)(n-s-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots(r-s)};$$

en le divisant par le nombre total des combinaisons r à r des n numéros, on aura pour la probabilité cherchée

$$\frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-s+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}.$$

En divisant cette quantité par $1.2.3\ldots s$, on aura, par ce qui précède, la probabilité que les s numéros sortiront dans un ordre déterminé entre eux. On aura la probabilité que les s premiers numéros du tirage seront ceux de la combinaison proposée, en observant que cette probabilité revient à celle d'amener cette combinaison, en supposant qu'il ne sort que s numéros à chaque tirage, ce qui revient à faire $r=s$ dans la fonction précédente, qui devient ainsi

$$\frac{1.2.3\ldots s}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}.$$

Enfin on aura la probabilité que les s numéros choisis sortiront les premiers dans un ordre déterminé, en réduisant le numérateur de cette fraction à l'unité.

Les quotients des mises divisées par ces probabilités sont ce que la loterie doit rendre aux joueurs; l'excédent de ces quotients sur ce qu'elle donne est son bénéfice. En effet, si l'on nomme p la probabilité du joueur, m sa mise et x ce que la loterie doit lui rendre pour l'égalité du jeu, $x-m$ sera la mise de la loterie; car, ayant reçu la mise m et rendant x au joueur, elle ne met au jeu que $x-m$. Or, pour l'égalité du jeu, l'espérance mathématique de chaque joueur doit être égale à sa crainte; son espérance est le produit de la mise $x-m$ de son adversaire par la probabilité p de l'obtenir; sa crainte est le produit de sa mise m par la probabilité $1-p$ de la perte. On a donc

$$p(x-m)=(1-p)m,$$

c'est-à-dire que, pour l'égalité du jeu, les mises doivent être réciproques aux probabilités de gagner. Cette équation donne

$$x=\frac{m}{p};$$

ainsi ce que la loterie doit rendre est le quotient de la mise divisée par la probabilité du joueur pour gagner.

4. Une loterie étant composée de n numéros dont r sortent à chaque tirage, on demande la probabilité qu'après i tirages tous les numéros seront sortis.

Nommons $z_{n,q}$ le nombre des cas dans lesquels, après i tirages, la totalité des numéros 1, 2, 3, ..., q sera sortie. Il est clair que ce nombre est égal au nombre $z_{n,q-1}$ de cas dans lesquels les numéros 1, 2, 3, ..., $q-1$ sont sortis, moins le nombre de cas dans lesquels, ces numéros étant sortis, le numéro q n'est pas sorti ; or ce dernier nombre est évidemment le même que celui des cas dans lesquels les numéros 1, 2, 3, ..., $q-1$ seraient sortis, si l'on ôtait le numéro q des n numéros de la loterie, et ce nombre est $z_{n-1,q-1}$; on a donc

$$(i) \qquad z_{n,q} = z_{n,q-1} - z_{n-1,q-1}.$$

Maintenant le nombre de tous les cas possibles dans un seul tirage étant $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}$, celui de tous les cas possibles dans i tirages est

$$\left[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}\right]^i.$$

Le nombre de tous les cas dans lesquels le numéro 1 ne sortira pas dans ces i tirages est le nombre de tous les cas possibles, lorsqu'on retranche ce numéro des n numéros de la loterie, et ce nombre est

$$\left[\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{1.2.3\ldots r}\right]^i;$$

le nombre des cas dans lesquels le numéro 1 sera sorti dans i tirages est donc

$$\left[\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}\right]^i - \left[\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{1.2.3\ldots r}\right]^i,$$

ou

$$\Delta\left[\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{1.2.3\ldots r}\right]^i:$$

c'est la valeur de $z_{n,1}$. Cela posé, l'équation (i) donnera, en y faisant successivement $q=2$, $q=3$, ...,

$$z_{n,2}=\Delta^2\left[\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-r-1)}{1.2.3\ldots r}\right]^i,$$

$$z_{n,3}=\Delta^3\left[\frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-r-2)}{1.2.3\ldots r}\right]^i,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et généralement

$$z_{n,q}=\Delta^q\left[\frac{(n-q)(n-q-1)\ldots(n-r-q+1)}{1.2.3\ldots r}\right]^i.$$

Ainsi la probabilité que les numéros 1, 2, 3, ..., q sortiront dans i tirages étant égale à $z_{n,q}$ divisé par le nombre de tous les cas possibles, elle sera

$$\frac{\Delta^q[(n-q)(n-q-1)\ldots(n-r-q+1)]^i}{[n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)]^i}.$$

Si l'on fait dans cette expression $q=n$, on aura, s étant ici la variable qui doit être supposée nulle dans le résultat,

$$\frac{\Delta^n[s(s-1)\ldots(s-r+1)]^i}{[n(n-1)\ldots(n-r+1)]^i}$$

pour l'expression de la probabilité que tous les numéros de la loterie sortiront dans i tirages.

Si n et i sont de très grands nombres, on aura, par les formules du n° 40 du Livre I^{er}, la valeur de cette probabilité au moyen d'une série très convergente. Supposons, par exemple, qu'il ne sorte qu'un numéro à chaque tirage; la probabilité précédente devient

$$\frac{\Delta^n s^i}{n^i}.$$

Proposons-nous de déterminer le nombre i de tirages dans lesquels cette probabilité est $\frac{1}{k}$, n et i étant de très grands nombres. En suivant l'analyse du numéro cité, on déterminera d'abord a par l'équation

$$o = \frac{i+1}{a} - s - \frac{nc^a}{c^a - 1},$$

ce qui donne

$$a = \frac{i+1}{n+s}\left\{\frac{1-c^{-a}}{1-\frac{sc^{-a}}{n+s}}\right\}.$$

On a ensuite, par le n° 40 du Livre I^{er}, lorsque c^{-a} est une quantité très petite de l'ordre $\frac{1}{i}$, comme cela a lieu dans la question présente, on a, dis-je, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$, s étant supposé nul dans le résultat du calcul,

$$\frac{\Delta^n s^i}{n^i} = \frac{\left(\frac{i}{i+1}\right)^{i+\frac{1}{2}} c^{na-i}(1-c^{-a})^{n-i}}{\sqrt{1-\frac{i+1}{n}c^{-a}}}.$$

Or on a, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\left(\frac{i}{i+1}\right)^{i+\frac{1}{2}} = c^{-1};$$

en supposant ensuite $c^{-a} = z$, on a

$$(1-c^{-a})^{n-i} = c^{(i-n)z}\left(1+\frac{i-n}{2}z^2\right);$$

de plus, l'équation qui détermine a donne

$$i+1-na = (i+1)z,$$

d'où l'on tire

$$c^{na-i-1} = c^{-iz}(1-z);$$

on aura donc, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\frac{\Delta^n s^i}{n^i} = c^{-nz}\left(1+\frac{i-2n+1}{2n}z+\frac{i-n}{2}z^2\right).$$

Pour déterminer z, reprenons l'équation

$$a = \frac{i+1}{n} - \frac{i+1}{n} c^{-a};$$

on aura, par la formule (p) du n° 21 du Livre II de la *Mécanique céleste*,

$$z = c^{-a} = q + \frac{i+1}{n} q^2 + \frac{3\left(\frac{i+1}{n}\right)^2}{1.2} q^3 + \frac{4^2\left(\frac{i+1}{n}\right)^3}{1.2.3} q^4 + \ldots,$$

q étant supposé égal à $c^{-\frac{i+1}{n}}$. Cette valeur de z donne

$$c^{-nz} = c^{-nq}[1 - (i+1)q^2];$$

par conséquent,

$$\frac{\Delta^n s^i}{n^i} = c^{-nq}\left(1 + \frac{i+1-2n}{2n} q - \frac{n+i+2}{2} q^2\right).$$

En égalant cette quantité à la fraction $\frac{1}{k}$, on aura

$$q = \frac{\log k}{n}\left(1 + \frac{i+1-2n}{2n^2} - \frac{n+i+2}{2n^2}\log k\right);$$

or on a

$$i + 1 = -n \log q;$$

on aura donc à très peu près, pour l'expression du nombre i de tirages, après lesquels la probabilité que tous les numéros seront sortis est $\frac{1}{k}$,

$$i = (\log n - \log\log k)(n - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\log k) + \tfrac{1}{2}\log k;$$

on doit observer que tous ces logarithmes sont hyperboliques.

Supposons la loterie composée de 10000 numéros, ou $n = 10000$, et $k = 2$, cette formule donne

$$i = 95767,4$$

pour l'expression du nombre de tirages, dans lesquels on peut parier un contre un, que les dix mille billets de la loterie sortiront; il y a donc un peu moins d'un contre un à parier qu'ils sortiront dans

95767 tirages, et un peu plus d'un contre un à parier qu'ils sortiront dans 95768 tirages.

On déterminera par une analyse semblable le nombre des tirages dans lesquels on peut parier un contre un que tous les numéros de la loterie de France sortiront. Cette loterie est, comme on sait, composée de 90 numéros dont cinq sortent à chaque tirage. La probabilité que tous les numéros sortiront dans i tirages est alors, par ce qui précède,

$$\frac{\Delta^n[s'(s'-1)(s'-2)(s'-3)(s'-4)]^i}{[n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]^i},$$

n étant ici égal à 90, et s' devant être supposé nul dans le résultat du calcul. Si l'on fait $s = s' - 2$, cette fonction devient

$$\frac{\Delta^n[s(s^2-1)(s^2-4)]^i}{\{(n-2)[(n-2)^2-1][(n-2)^2-4]\}^i},$$

ou, en développant en série,

$$\frac{(\Delta^n s^{5i} - 5i\,\Delta^n s^{5i-2} + \ldots)}{(n-2)^{5i}}\left[1 + \frac{5i}{(n-2)^2} + \ldots\right],$$

s devant être supposé égal à -2 dans le résultat du calcul.

On a, par le n° 40 du Livre I^{er}, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{i^2}$ et supposant c^{-a} très petit de l'ordre $\frac{1}{i}$,

$$\frac{\Delta^n s^{5i}}{(n-2)^{5i}} = \frac{\left(\frac{5i+1}{a}\right)^{5i}\left(\frac{5i}{5i+1}\right)^{5i} c^{(n-2)a-5i}(1-c^{-a})^n}{(n-2)^{5i}\sqrt{1+\frac{1}{5i}-\frac{na^2c^{-a}}{5i(1-c^{-a})^2}}},$$

a étant donnée par l'équation

$$a = \frac{(5i+1)(1-c^{-a})}{(n-2)\left(1+\frac{2c^{-a}}{n-2}\right)}.$$

On a ainsi, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\frac{\Delta^n s^{5i}}{(n-2)^{5i}} = \frac{\left(1+\frac{2c^{-a}}{n-2}\right)^{5i}}{(1-c^{-a})^{5i}}(1-c^{-a})^n c^{1-(5i+1)c^{-a}-\frac{10ic^{-a}}{n-2}}\left(\frac{5i}{5i+1}\right)^{5i}\left(1-\frac{1}{10i}+\frac{na^2c^{-a}}{10i}\right);$$

or on a

$$\left(1+\frac{2c^{-a}}{n-2}\right)^{5i}=c^{\frac{10ic^{-a}}{n-2}},$$

$$(1-c^{-a})^{-5i}=c^{5ic^{-a}}\left(1+\frac{5i}{2}c^{-2a}\right),$$

$$\left(\frac{5i}{5i+1}\right)^{5i}=c^{-1}\left(1+\frac{1}{10i}\right);$$

on aura donc, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\frac{\Delta^n s^i}{(n-2)^{5i}}=(1-c^{-a})^n\left(1-c^{-a}+\frac{5i}{2}c^{-2a}+\frac{na^2c^{-a}}{10i}\right).$$

En substituant pour a sa valeur et observant que i est fort peu différent de $n-2$ dans le cas présent, comme on le verra ci-après, on a, à très peu près,

$$\frac{na^2c^{-a}}{10i}=\frac{5i+12}{2(n-2)}c^{-a}.$$

Je conserve, pour plus d'exactitude, le terme $\frac{12c^{-a}}{2(n-2)}$, quoique de l'ordre $\frac{1}{i^2}$, à cause de la grandeur de son facteur 12; on aura donc

$$\frac{\Delta^n s^{5i}}{(n-2)^{5i}}=(1-c^{-a})^n\left[1+\frac{5i-2n+16}{2(n-2)}c^{-a}+\frac{5i}{2}c^{-2a}\right].$$

Si l'on change dans cette expression $5i$ dans $5i-2$, on aura celle de $\frac{\Delta^n s^{5i-2}}{(n-2)^{5i-2}}$; mais la valeur de a ne sera plus la même. Soit a' cette nouvelle valeur, on aura

$$a'=\frac{(5i-1)(1-c^{-a'})}{(n-2)\left(1+\frac{2c^{-a'}}{n-2}\right)},$$

ce qui donne, à très peu près,

$$a'=a-\frac{2}{n-2}.$$

Alors on a

$$1-c^{-a'}=1-c^{-a}-\frac{2c^{-a}}{n-2},$$

d'où l'on tire, en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{i}$,

$$(1-c^{-a'})^n = (1-c^{-a})^n;$$

par conséquent on a, en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{i}$,

$$\frac{\Delta^n s^{5i-2}}{(n-2)^{5i-2}} = (1-c^{-a})^n.$$

On aura donc, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\frac{\Delta^n[s(s^2-1)(s^2-4)]^i}{[n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]^i}$$

$$= (1-c^{-a})^n\left[1+\frac{5i-2n+16}{2(n-2)}c^{-a}+\frac{5i}{2}c^{-2a}\right].$$

Cette quantité doit, par la condition du problème, être égale à $\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$1-c^{-a} = \sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}\left[1-\frac{5i-2n+16}{2n(n-2)}c^{-a}-\frac{5i}{2n}c^{-2a}\right],$$

d'où l'on tire

$$c^{-a} = \left(1-\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}\right)\left[1+\frac{5i-2n+16}{2n(n-2)}+\frac{5i}{2n}c^{-a}\right];$$

par conséquent on a, en logarithmes hyperboliques,

$$a = \log\left(\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}\right)-\frac{5i-2n+16}{2n(n-2)}-\frac{5i}{2n}c^{-a};$$

or on a, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$a = \frac{5i+1}{(n-2)\sqrt[n]{2}};$$

on aura donc

$$i = \frac{n-2}{5}\sqrt[n]{2}\left[1-\frac{1}{2n}-\frac{16}{10in}-\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\right]\log\left(\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}\right).$$

En substituant pour n sa valeur 90, on trouve

$$i = 85,53,$$

en sorte qu'il y a un peu moins d'un contre un à parier que tous les numéros sortiront dans 85 tirages, et un peu plus d'un contre un à parier qu'ils sortiront dans 86 tirages.

Un moyen fort simple et très approché d'obtenir la valeur de i est de supposer $\frac{\Delta^n s^i}{n^i}$, ou la série

$$1 - n\left(\frac{n-1}{n}\right)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n-2}{n}\right)^i - \ldots,$$

égale au développement

$$1 - n\left(\frac{n-1}{n}\right)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2i} - \ldots$$

du binôme $\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right]^n$. En effet les deux séries ont les deux premiers termes égaux respectivement. Leurs troisièmes termes sont aussi, à très peu près, égaux entre eux; car on a à fort peu près $\left(\frac{n-2}{n}\right)^i$ égal à $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2i}$. En effet, leurs logarithmes hyperboliques sont, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{i}{n^2}$, égaux l'un et l'autre à $-\frac{i}{n}$. On verra de la même manière que les quatrièmes termes, les cinquièmes, ... sont très peu différents, lorsque n et i sont de très grands nombres; mais la différence s'accroît sans cesse à mesure que les termes s'éloignent du premier, ce qui doit à la fin en produire une sensible entre les séries elles-mêmes. Pour l'apprécier, déterminons la valeur de i conclue de l'égalité des deux séries. En égalant à $\frac{1}{k}$ le binôme $\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right]^n$, on aura

$$i = \frac{\log\left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right)}{\log\left(\frac{n-1}{n}\right)},$$

ces logarithmes pouvant être, à volonté, hyperboliques ou tabulaires. Soit $\sqrt[n]{\frac{1}{k}} = 1 - z$. Nous aurons, en prenant les logarithmes hyperboliques de chaque membre de cette équation

$$\frac{1}{n}\log k = -\log(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \ldots,$$

ce qui donne, à très peu près,

$$z = \frac{\log k}{n}\left(1 - \frac{\log k}{2n}\right);$$

on aura donc, en logarithmes hyperboliques,

$$\log\left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right) = \log z = \log\log k - \log n - \frac{\log k}{2n}.$$

On a ensuite

$$\log\frac{n-1}{n} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \ldots.$$

L'expression précédente de i devient ainsi, à très peu près,

$$i = n(\log n - \log\log k)\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \tfrac{1}{2}\log k;$$

l'excès de la valeur trouvée précédemment pour i sur celle-ci est

$$\frac{\log k}{2}(\log n - \log\log k);$$

cet excès devient infini, lorsque n est infini; mais il faut un très grand nombre pour le rendre bien sensible, et dans le cas de $n = 10000$ et de $k = 2$, il n'est encore que de trois unités.

Si l'on considère pareillement le développement

$$1 - n\left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \ldots$$

de l'expression $\dfrac{\Delta^n[s'(s'-1)(s'-2)(s'-3)(s'-4)]^i}{[n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]^i}$, comme celui du binôme $\left[1 - \left(\dfrac{n-5}{n}\right)^i\right]^n$, on aura, pour déterminer le nombre i de coups dans lesquels on peut parier un contre un que tous les numéros sortiront, l'équation

$$\left[1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right]^n = \tfrac{1}{2};$$

ce qui donne

$$i = \frac{\log \dfrac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}}{\log \dfrac{n}{n-5}}.$$

Ces logarithmes peuvent être tabulaires. En faisant $n = 90$, on trouve

$$i = 85{,}204,$$

ce qui diffère très peu de la valeur $i = 85{,}53$ que nous avons trouvée ci-dessus.

5. Une urne étant supposée renfermer le nombre x de boules, on en tire une partie ou la totalité, et l'on demande la probabilité que le nombre des boules extraites sera pair.

La somme des cas dans lesquels ce nombre est l'unité égale évidemment x, puisque chacune des boules peut également être extraite. La somme des cas dans lesquels ce nombre égale 2 est la somme des combinaisons des x boules prises deux à deux, et cette somme est, par le nº 3, égale à $\frac{x(x-1)}{1.2}$. La somme des cas dans lesquels le même nombre égale 3 est la somme des combinaisons des boules prises trois à trois, et cette somme est $\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}$, et ainsi de suite. Ainsi les termes successifs du développement de la fonction $(1+1)^x - 1$ représenteront tous les cas dans lesquels le nombre des boules extraites est successivement $1, 2, 3, \ldots$, jusqu'à x; d'où il est facile de conclure que la somme de tous les cas relatifs aux nombres impairs est $\frac{1}{2}(1+1)^x - \frac{1}{2}(1-1)^x$, ou 2^{x-1}, et que la somme de tous les cas relatifs aux nombres pairs est $\frac{1}{2}(1+1)^x + \frac{1}{2}(1-1)^x - 1$, ou $2^{x-1} - 1$. La réunion de ces deux sommes est le nombre de tous les cas possibles; ce nombre est donc $2^x - 1$; ainsi la probabilité que le nombre des boules extraites sera pair est $\frac{2^{x-1}-1}{2^x-1}$, et la probabilité que ce nombre sera impair est $\frac{2^{x-1}}{2^x-1}$; il y a donc de l'avantage à parier avec égalité pour un nombre impair.

Si le nombre x est inconnu, et si l'on sait seulement qu'il ne peut excéder n, et que ce nombre et tous les inférieurs sont également possibles, on aura le nombre de tous les cas possibles relatifs aux nombres impairs en faisant la somme de toutes les valeurs de 2^{x-1}, depuis $x=1$ jusqu'à $x=n$, et il est facile de voir que cette somme est 2^n-1. On aura pareillement la somme de tous les cas possibles relatifs aux nombres pairs, en sommant la fonction $2^{x-1}-1$, depuis $x=1$ jusqu'à $x=n$, et l'on trouve cette somme égale à 2^n-n-1; la probabilité d'un nombre pair est donc alors $\frac{2^n-n-1}{2^{n+1}-n-2}$, et celle d'un nombre impair est $\frac{2^n-1}{2^{n+1}-n-2}$.

Supposons maintenant que l'urne renferme le nombre x de boules blanches, et le même nombre de boules noires; on demande la probabilité qu'en tirant un nombre pair quelconque de boules, on amènera autant de boules blanches que de boules noires, tous les nombres pairs pouvant être également amenés.

Le nombre des cas dans lesquels une boule blanche de l'urne peut se combiner avec une boule noire est évidemment $x.x$. Le nombre des cas dans lesquels deux boules blanches peuvent se combiner avec deux boules noires est $\frac{x(x-1)}{1.2}\frac{x(x-1)}{1.2}$, et ainsi de suite. Le nombre des cas dans lesquels on amènera autant de boules blanches que de boules noires est donc la somme des carrés des termes du développement du binôme $(1+1)^x$, moins l'unité. Pour avoir cette somme, nous observerons qu'elle est égale au terme indépendant de a, dans le développement de $\left(1+\frac{1}{a}\right)^x(1+a)^x$. Cette fonction est égale à $\frac{(1+a)^{2x}}{a^x}$. Le terme indépendant de a, dans son développement, est ainsi le coefficient du terme moyen du binôme $(1+a)^{2x}$; ce coefficient est $\frac{1.2.3\ldots 2x}{(1.2.3\ldots x)^2}$; le nombre des cas dans lesquels on peut tirer de l'urne autant de boules blanches que de boules noires est donc

$$\frac{1.2.3\ldots 2x}{(1.2.3\ldots x)^2}-1.$$

Le nombre de tous les cas possibles est la somme des termes impairs dans le développement du binôme $(1+1)^{2x}$, moins le premier, ou l'unité. Cette somme est $\frac{1}{2}(1+1)^{2x}+\frac{1}{2}(1-1)^{2x}$; le nombre des cas possibles est donc $2^{2x-1}-1$, ce qui donne pour l'expression de la probabilité cherchée

$$\frac{\dfrac{1.2.3\ldots 2x}{(1.2.3\ldots x)^2}-1}{2^{2x-1}-1}.$$

Dans le cas où x est un grand nombre, cette probabilité se réduit par le n° 33 du Livre Ier à $\frac{2}{\sqrt{x\pi}}$, π étant toujours la demi-circonférence dont 1 est le rayon.

6. Considérons un nombre $x+x'$ d'urnes, dont la première renferme p boules blanches et q boules noires, la deuxième p' boules blanches et q' boules noires, la troisième p'' boules blanches et q'' boules noires, et ainsi de suite. Supposons que l'on tire successivement une boule de chaque urne. Il est clair que le nombre de tous les cas possibles au premier tirage est $p+q$; au second tirage, chacun des cas du premier pouvant se combiner avec les $p'+q'$ boules de la seconde urne, on aura $(p+q)(p'+q')$ pour le nombre de tous les cas possibles relatifs aux deux premiers tirages. Au troisième tirage, chacun de ces cas peut se combiner avec les $p''+q''$ boules de la troisième urne; ce qui donne $(p+q)(p'+q')(p''+q'')$ pour le nombre de tous les cas possibles relatifs à trois tirages, et ainsi du reste. Ce produit pour la totalité des urnes sera composé de $x+x'$ facteurs, et la somme de tous les termes de son développement dans lesquels la lettre p, avec ou sans accent, est répétée x fois, et par conséquent la lettre q, x' fois, exprimera le nombre des cas dans lesquels on peut tirer des urnes x boules blanches et x' boules noires.

Si $p', p'', \ldots$ sont égaux à p, et si $q', q'', \ldots$ sont égaux à q, le produit précédent devient $(p+q)^{x+x'}$. Le terme multiplié par $p^x q^{x'}$ dans le développement de ce binôme est

$$\frac{(x+x')(x+x'-1)\ldots(x+1)}{1.2.3\ldots x'}\,p^x q^{x'}, \quad\text{ou}\quad \frac{1.2.3\ldots(x+x')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'}\,p^x q^{x'}.$$

Ainsi cette quantité exprime le nombre des cas dans lesquels on peut amener x boules blanches et x' boules noires. Le nombre de tous les cas possibles étant $(p+q)^{x+x'}$, la probabilité d'amener x boules blanches et x' boules noires est

$$\frac{1.2.3\ldots(x+x')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'}\left(\frac{p}{p+q}\right)^x\left(\frac{q}{p+q}\right)^{x'},$$

où l'on doit observer que $\frac{p}{p+q}$ est la probabilité de tirer une boule blanche de l'une des urnes, et que $\frac{q}{p+q}$ est la probabilité d'en tirer une boule noire.

Il est visible qu'il est parfaitement égal de tirer x boules blanches et x' boules noires de $x+x'$ urnes qui renferment chacune p boules blanches et q boules noires, ou d'une seule de ces urnes, pourvu que l'on remette dans l'urne la boule extraite à chaque tirage.

Considérons maintenant un nombre $x+x'+x''$ d'urnes dont la première renferme p boules blanches, q boules noires et r boules rouges, dont la seconde renferme p' boules blanches, q' boules noires et r' boules rouges, et ainsi de suite. Supposons que l'on tire une boule de chacune de ces urnes. Le nombre de tous les cas possibles sera le produit des $x+x'+x''$ facteurs,

$$(p+q+r)(p'+q'+r')(p''+q''+r'')\ldots.$$

Le nombre des cas dans lesquels on amènera x boules blanches, x' boules noires et x'' boules rouges sera la somme de tous les termes du développement de ce produit, dans lesquels la lettre p sera répétée x fois, la lettre q, x' fois et la lettre r, x'' fois. Si toutes les lettres accentuées p', q', ... sont égales à leurs correspondantes non accentuées, le produit précédent se change dans le trinôme $(p+q+r)^{x+x'+x''}$. Le terme de son développement, qui a pour facteur $p^x q^{x'} r^{x''}$, est

$$\frac{1.2.3\ldots(x+x'+x'')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'.1.2.3\ldots x''}p^x q^{x'} r^{x''};$$

ainsi, le nombre de tous les cas possibles étant $(p+q+r)^{x+x'+x''}$, la probabilité d'amener x boules blanches, x' boules noires et x'' boules rouges sera

$$\frac{1.2.3\ldots(x+x'+x'')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'.1.2.3\ldots x''}\left(\frac{p}{p+q+r}\right)^{x}\left(\frac{q}{p+q+r}\right)^{x'}\left(\frac{r}{p+q+r}\right)^{x''},$$

où l'on doit observer que $\frac{p}{p+q+r}$, $\frac{q}{p+q+r}$, $\frac{r}{p+q+r}$ sont les probabilités respectives de tirer de chaque urne une boule blanche, une boule noire et une boule rouge.

On voit généralement que, si les urnes renferment chacune le même nombre de couleurs, p étant le nombre des boules de la première couleur, q celui des boules de la seconde couleur, r, s, ... ceux des boules de la troisième, de la quatrième, ..., $x+x'+x''+x'''+\ldots$ étant le nombre des urnes, la probabilité d'amener x boules de la première couleur, x' boules de la seconde, x'' boules de la troisième, x''' boules de la quatrième, ... sera

$$\frac{1.2.3\ldots(x+x'+x''+x'''+\ldots)}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'.1.2.3\ldots x''.1.2.3\ldots x'''\ldots}\left(\frac{p}{p+q+r+s+\ldots}\right)^{x}$$
$$\times\left(\frac{q}{p+q+r+s+\ldots}\right)^{x'}\left(\frac{r}{p+q+r+s+\ldots}\right)^{x''}\left(\frac{s}{p+q+r+s+\ldots}\right)^{x'''}\ldots$$

7. Déterminons maintenant la probabilité de tirer des urnes précédentes x boules blanches, avant d'amener soit x' boules noires, soit x'' boules rouges, ... Il est clair que, n exprimant le nombre des couleurs, cela doit arriver au plus tard après $x+x'+x''+\ldots-n+1$ tirages; car, lorsque le nombre des boules blanches extraites est égal ou moindre que x, celui des boules noires extraites moindre que x', celui des boules rouges extraites moindre que x'', ..., le nombre total des boules extraites, et par conséquent le nombre des tirages, est égal ou moindre que $x+x'+x''+\ldots-n+1$; on peut donc ne considérer ici que $x+x'+x''+\ldots-n+1$ urnes.

Pour avoir le nombre des cas dans lesquels on peut amener x boules blanches au $(x+i)^{\text{ième}}$ tirage, il faut déterminer tous les cas dans lesquels $x-1$ boules blanches seront sorties au tirage $x+i-1$. Ce nombre est le terme multiplié par p^{x-1} dans le développement du polynôme $(p+q+r+\ldots)^{x+i-1}$, et ce terme est

$$\frac{1.2.3\ldots(x+i-1)}{1.2.3\ldots(x-1)1.2.3\ldots i}p^{x-1}(q+r+\ldots)^i.$$

En le combinant avec les p boules blanches de l'urne $x+i$, on aura un produit qu'il faudra encore multiplier par le nombre de tous les cas possibles relatifs aux $x'+x''+\ldots-n-i+1$ tirages suivants, et ce nombre est

$$(p+q+r+\ldots)^{x'+x''+\ldots-n-i+1};$$

on aura donc

$$(a)\quad \frac{1.2.3\ldots(x+i-1)}{1.2.3\ldots(x-1).1.2.3\ldots i}p^x(q+r+\ldots)^i(p+q+r+\ldots)^{x'+x''+\ldots-n-i+1},$$

pour le nombre des cas dans lesquels l'événement peut arriver précisément au tirage $x+i$. Il faut cependant en exclure les cas dans lesquels q est élevé à la puissance x', ceux dans lesquels r est élevé à la puissance x'', etc.; car dans tous ces cas il est déjà arrivé au tirage $x+i-1$, ou x' boules noires, ou x'' boules rouges, ou etc. Ainsi dans le développement du polynôme $(q+r+\ldots)^i$, il ne faut avoir égard qu'aux termes multipliés par $q^f r^{f'} s^{f''}\ldots$, dans lesquels f est moindre que x', f' est moindre que x'', f'' est moindre que x''', ... Le terme multiplié par $q^f r^{f'} s^{f''}\ldots$ dans ce développement est

$$\frac{1.2.3\ldots i}{1.2.3\ldots f.1.2.3\ldots f'.1.2.3\ldots f''\ldots}q^f r^{f'} s^{f''}\ldots.$$

Tous les termes que l'on doit considérer dans la fonction (a) sont donc représentés par

$$(b)\quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{1.2.3\ldots(x+f+f'+\ldots-1)}{1.2.3\ldots(x-1).1.2.3\ldots f.1.2.3\ldots f'\ldots}p^x q^f r^{f'}\ldots\\ \quad\times(p+q+r+\ldots)^{x'+x''+\ldots-f-f'-\ldots-n+1},\end{array}\right.$$

parce que i est égal à $f+f'+\ldots$. Ainsi, en donnant, dans cette dernière fonction, à f toutes les valeurs entières depuis $f=0$ jusqu'à $f=x'-1$, à f' toutes les valeurs depuis $f'=0$ jusqu'à $f'=x''-1$, et ainsi de suite, la somme de tous ces termes exprimera le nombre des cas dans lesquels l'événement proposé peut arriver dans $x+x'+\ldots-n+1$ tirages. Il faut diviser cette somme par le nombre de tous les cas possibles, c'est-à-dire par $(p+q+r+\ldots)^{x+x'+x''+\ldots-n+1}$. Si l'on désigne par p' la probabilité de tirer une boule blanche d'une quelconque des urnes, par q' celle d'en tirer une boule noire, par r' celle d'en tirer une boule rouge, ..., on aura

$$p'=\frac{p}{p+q+r+\ldots},\quad q'=\frac{q}{p+q+r+\ldots},\quad r'=\frac{r}{p+q+r+\ldots},\quad \ldots;$$

la fonction (b), divisée par $(p+q+r+\ldots)^{x+x'+\ldots-n+1}$, deviendra ainsi

$$\frac{1.2.3\ldots(x+f+f'+\ldots-1)}{1.2.3\ldots(x-1).1.2.3\ldots f.1.2.3\ldots f'\ldots}\,p'^x q'^f r'^{f'}\ldots.$$

La somme des termes que l'on obtiendra en donnant à f toutes les valeurs depuis $f=0$ jusqu'à $f=x'-1$, à f' toutes les valeurs depuis $f'=0$ jusqu'à $f'=x'-1$, ..., sera la probabilité cherchée d'amener x boules blanches avant x' boules noires, ou x'' boules rouges, ou, etc.

On peut, d'après cette analyse, déterminer le sort d'un nombre n de joueurs A, B, C, ..., dont p', q', r', ... représentent les adresses respectives, c'est-à-dire leurs probabilités de gagner un coup lorsque, pour gagner la partie, il manque x coups au joueur A, x' coups au joueur B, x'' coups au joueur C, et ainsi de suite; car il est clair que, relativement au joueur A, cela revient à déterminer la probabilité d'amener x boules blanches avant x' boules noires, ou x'' boules rouges, ..., en tirant successivement une boule d'un nombre $x+x'+x''+\ldots-n+1$ d'urnes qui renferment chacune p boules blanches, q boules noires, r boules rouges, ..., p, q, r, ... étant respectivement égaux aux numérateurs des fractions p', q', r', ... réduites au même dénominateur.

8. Le problème précédent peut être résolu d'une manière fort simple par l'analyse des fonctions génératrices. Nommons $y_{x,x',x'',\ldots}$ la

probabilité du joueur A pour gagner la partie. Au coup suivant, cette probabilité se change dans $y_{x-1,x',x'',\ldots}$, si A gagne ce coup, et la probabilité pour cela est p'. La même probabilité se change dans $y_{x,x'-1,x'',\ldots}$, si le coup est gagné par le joueur B, et la probabilité pour cela est q'; elle se change dans $y_{x,x',x''-1,\ldots}$, si le coup est gagné par le joueur C, et la probabilité pour cela est r', et ainsi de suite; on a donc l'équation aux différences partielles

$$y_{x,x',x'',\ldots} = p' y_{x-1,x',x'',\ldots} + q' y_{x,x'-1,x'',\ldots} + r' y_{x,x',x''-1,\ldots} + \ldots.$$

Soit u une fonction de t, t', t'', ..., telle que $y_{x,x',x'',\ldots}$ soit le coefficient de $t^x t'^{x'} t''^{x''}\ldots$ dans son développement; l'équation précédente aux différences partielles donnera, en passant des coefficients aux fonctions génératrices,

$$u = u(p't + q't' + r't'' + \ldots),$$

d'où l'on tire

$$1 = p't + q't' + r't'' + \ldots;$$

par conséquent,

$$\frac{1}{t} = \frac{p'}{1 - q't' - r't'' - \ldots},$$

ce qui donne

$$\frac{u}{t^x} = \frac{up'^x}{(1 - q't' - r't'' - \ldots)^x} = up'^x \left\{ \begin{array}{l} 1 + x(q't' + r't'' + \ldots) \\ + \dfrac{x(x+1)}{1.2}(q't' + r't'' + \ldots)^2 \\ + \dfrac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}(q't' + r't'' + \ldots)^3 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

Maintenant le coefficient de $t^0 t'^{x'} t''^{x''}\ldots$ dans $\frac{u}{t^x}$ est $y_{x,x',x'',\ldots}$, et le même coefficient dans un terme quelconque du dernier membre de l'équation précédente, tel que $kup'^x t'^{l'} t''^{l''}\ldots$, est $kp'^x y_{0,x'-l',x''-l'',\ldots}$; la quantité $y_{0,x'-l',x''-l'',\ldots}$ est égale à l'unité, puisqu'alors il ne manque aucun coup au joueur A. De plus, il faut rejeter toutes les valeurs de $y_{0,x'-l',x''-l'',\ldots}$, dans lesquelles l' est égal ou plus grand que x', l'' est égal ou plus grand que x'', et ainsi de suite, parce que ces termes ne peuvent être donnés par l'équation aux différences partielles, la partie étant finie, lorsque l'un quelconque des joueurs B, C, ... n'a plus de coups à jouer; il ne faut donc considérer dans le dernier membre de l'équation précédente que les puissances de t' moindres que x', que les puissances de t'' moindres que x'', ... L'expression précédente de $\frac{u}{t^x}$ donnera ainsi, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$y_{x,x',x'',\ldots} = p'^x \left\{ \begin{array}{l} 1 + x(q' + r' + \ldots) \\ + \frac{x(x+1)}{1.2}(q' + r' + \ldots)^2 \\ + \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}(q' + r' + \ldots)^3 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\},$$

pourvu que l'on rejette les termes dans lesquels la puissance de q' surpasse $x' - 1$, ceux dans lesquels la puissance de r' surpasse $x'' - 1$, etc. Le second membre de cette équation se développe dans une suite de termes compris dans la formule générale

$$\frac{1.2.3\ldots(x + f + f' + \ldots - 1)}{1.2.3\ldots(x-1).1.2.3\ldots f.1.2.3\ldots f'\ldots}\, p'^x q'^f r'^{f'}\ldots$$

La somme de ces termes relatifs à toutes les valeurs de f depuis f nul jusqu'à $f = x' - 1$, à toutes les valeurs de f' depuis f' nul jusqu'à $f' = x'' - 1$, ..., sera la probabilité $y_{x,x',x'',\ldots}$, ce qui est conforme à ce qui précède.

Dans le cas de deux joueurs A et B, on aura, pour la probabilité du joueur A,

$$p'^x\left[1 + xq' + \frac{x(x+1)}{1.2}q'^2 + \ldots + \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x'-1)}q'^{x'-1}\right].$$

En changeant p' en q' et x en x', et réciproquement, on aura

$$q'^{x'}\left[1 + x'p' + \frac{x'(x'+1)}{1.2}p'^2 + \ldots + \frac{x'(x'+1)(x'+2)\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x-1)}p'^{x-1}\right]$$

pour la probabilité que le joueur B gagnera la partie. La somme de ces deux expressions doit être égale à l'unité, ce que l'on voit évidemment en leur donnant les formes suivantes. La première expression peut, par le n° 37 du Livre Ier, être transformée dans celle-ci

$$p'^{x+x'-1}\left\{\begin{array}{l}1+\dfrac{x+x'-1}{1}\dfrac{q'}{p'}+\dfrac{(x+x'-1)(x+x'-2)}{1.2}\dfrac{q'^2}{p'^2}+\ldots\\ \quad+\dfrac{(x+x'-1)\ldots(x+1)}{1.2.3\ldots(x'-1)}\dfrac{q'^{x'-1}}{p'^{x'-1}}\end{array}\right\},$$

et la seconde peut être transformée dans celle-ci

$$q'^{x+x'-1}\left\{\begin{array}{l}1+\dfrac{x+x'-1}{1}\dfrac{p'}{q'}+\dfrac{(x+x'-1)(x+x'-2)}{1.2}\dfrac{p'^2}{q'^2}+\ldots\\ \quad+\dfrac{(x+x'-1)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots(x-1)}\dfrac{p'^{x-1}}{q'^{x-1}}\end{array}\right\}.$$

La somme de ces expressions est le développement du binôme $(p'+q')^{x+x'-1}$, et par conséquent elle est égale à l'unité, parce que, A ou B devant gagner chaque coup, la somme $p'+q'$ de leurs probabilités pour cela est l'unité.

Le problème que nous venons de résoudre est celui que l'on nomme *problème des partis* dans l'Analyse des hasards. Le chevalier de Méré le proposa à Pascal, avec quelques autres problèmes sur le jeu de dés. Deux joueurs dont les adresses sont égales ont mis au jeu la même somme; ils doivent jouer jusqu'à ce que l'un d'eux ait gagné un nombre de fois donné son adversaire; mais ils conviennent de quitter le jeu, lorsqu'il manque encore x points au premier joueur pour atteindre ce nombre donné, et lorsqu'il manque x' points au second joueur. On demande de quelle manière ils doivent se partager la somme mise au jeu. Tel est le problème que Pascal résolut au moyen de son triangle arithmétique. Il le proposa à Fermat qui en donna la solution par la voie des combinaisons, ce qui occasionna entre ces deux grands géomètres une discussion, à la suite de laquelle Pascal reconnut la bonté de la méthode de Fermat, pour un nombre quelconque de joueurs. Malheureusement nous n'avons qu'une partie de leur correspondance, dans laquelle on voit les premiers éléments de la théorie des probabilités et leur application à l'un des problèmes les plus curieux de cette théorie.

Le problème proposé par Pascal à Fermat revient à déterminer les probabilités respectives des joueurs pour gagner la partie; car il est clair que l'enjeu doit être partagé entre les joueurs proportionnellement à leurs probabilités. Ces probabilités sont les mêmes que celles de deux joueurs A et B, qui doivent atteindre un nombre donné de points, x étant le nombre de ceux qui manquent au joueur A, et x' étant le nombre de ceux qui manquent au joueur B, en imaginant une urne renfermant deux boules dont l'une est blanche et l'autre est noire, toutes deux portant le n° 1, la boule blanche étant pour le joueur A, et la boule noire pour le joueur B. On tire successivement une de ces boules, et on la remet dans l'urne après chaque tirage. En nommant $y_{x,x'}$ la probabilité que le joueur A atteindra, le premier, le nombre donné de points, ou, ce qui revient au même, qu'il aura x points avant que B en ait x', on aura

$$y_{x,x'} = \tfrac{1}{2} y_{x-1,x'} + \tfrac{1}{2} y_{x,x'-1};$$

car, si la boule que l'on extrait est blanche, $y_{x,x'}$ se change en $y_{x-1,x'}$, et si la boule extraite est noire, $y_{x,x'}$ se change en $y_{x,x'-1}$, et la probabilité de chacun de ces événements est $\frac{1}{2}$; on a donc l'équation précédente.

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ dans cette équation aux différences partielles est, par le n° 20 du Livre I$^{\text{er}}$,

$$\frac{M}{1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t'},$$

M étant une fonction arbitraire de t'. Pour la déterminer, nous observerons que $y_{0,0}$ ne peut avoir lieu, puisque la partie cesse lorsque l'une ou l'autre des variables x et x' est nulle; M doit donc avoir pour facteur t'. De plus $y_{0,x'}$ est l'unité, quel que soit x', la probabilité du joueur A se changeant alors en certitude : or la fonction génératrice de l'unité est généralement $\frac{t'^i}{1-t'}$, car les coefficients des puissances de t'

dans le développement de cette fonction sont tous égaux à l'unité; dans le cas présent, $y_{0,x'}$ pouvant avoir lieu lorsque x' est ou 1, ou 2, ou 3, etc., i doit être égal à l'unité; la fonction génératrice de $y_{0,x'}$ est donc égale à $\frac{t'}{1-t'}$; c'est le coefficient de t^0 dans le développement de la fonction génératrice de $y_{x,x'}$ ou dans

$$\frac{M}{1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t'};$$

on a donc

$$\frac{M}{1-\frac{1}{2}t'}=\frac{t'}{1-t'},$$

ce qui donne

$$M=\frac{t'(1-\frac{1}{2}t')}{(1-t')};$$

par conséquent la fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est

$$\frac{t'(1-\frac{1}{2}t')}{(1-t')(1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t')}.$$

En la développant par rapport aux puissances de t, on a

$$\frac{t'}{1-t'}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{t}{1-\frac{1}{2}t'}+\frac{1}{2^2}\,\frac{t^2}{(1-\frac{1}{2}t')^2}+\frac{1}{2^3}\,\frac{t^3}{(1-\frac{1}{2}t')^3}+\ldots\right).$$

Le coefficient de t^x dans cette série est

$$\frac{1}{2^x}\,\frac{t'}{(1-t')(1-\frac{1}{2}t')^x};$$

$y_{x,x'}$ est donc le coefficient de $t'^{x'}$ dans cette dernière quantité; or on a

$$\frac{t'}{(1-t')(1-\frac{1}{2}t')^x}=\frac{t'+\frac{1}{2}xt'^2+\frac{1}{2^2}\frac{x(x+1)}{1.2}t'^3+\ldots+\frac{1}{2^{x'-1}}\frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x'-1)}t'^{x'}+\ldots}{1-t'}.$$

En réduisant en série le dénominateur de cette dernière fraction et multipliant le numérateur par cette série, on voit que le coefficient de $t'^{x'}$ dans ce produit est ce que devient ce numérateur lorsqu'on y fait $t'=1$;

on a donc

$$y_{x,x'} = \frac{1}{2^x}\left\{\begin{array}{l} 1 + x\frac{1}{2} + \frac{x(x+1)}{1.2}\frac{1}{2^2} + \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}\frac{1}{2^3} + \ldots \\ + \frac{x(x+1)\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x'-1)}\frac{1}{2^{x'-1}} \end{array}\right\},$$

résultat conforme à ce qui précède.

Concevons présentement qu'il y ait dans l'urne une boule blanche portant le n° 1, et deux boules noires, dont une porte le n° 1, et l'autre porte le n° 2, la boule blanche étant favorable à A, et les boules noires à son adversaire, chaque boule diminuant de son numéro le nombre de points qui manquent au joueur auquel elle est favorable. $y_{x,x'}$ étant toujours la probabilité que le joueur A atteindra le premier le nombre donné, on aura l'équation aux différences partielles

$$y_{x,x'} = \tfrac{1}{3}y_{x-1,x'} + \tfrac{1}{3}y_{x,x'-1} + \tfrac{1}{3}y_{x,x'-2};$$

car, au tirage suivant, si la boule blanche sort, $y_{x,x'}$ devient $y_{x-1,x'}$; si la boule noire numérotée 1 sort, $y_{x,x'}$ devient $y_{x,x'-1}$, et si la boule noire numérotée 2 sort, $y_{x,x'}$ devient $y_{x,x'-2}$, et la probabilité de chacun de ces événements est $\frac{1}{3}$.

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est

$$\frac{M}{1 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}t' - \frac{1}{3}t'^2},$$

M étant une fonction arbitraire de t', qui doit, par ce qui précède, avoir pour facteur t', et dans le cas présent être égale à

$$\frac{t'}{1-t'}\left(1 - \tfrac{1}{3}t' - \tfrac{1}{3}t'^2\right),$$

en sorte que la fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est

$$\frac{t'\left(1 - \frac{1}{3}t' - \frac{1}{3}t'^2\right)}{(1-t')\left(1 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}t' - \frac{1}{3}t'^2\right)}.$$

Le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction est

$$\frac{1}{3^x}\,\frac{t'}{1-t'}\,\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}t' - \frac{1}{3}t'^2\right)^x},$$

et il résulte de ce que nous venons de dire que le coefficient de $t'^{x'}$ dans le développement de cette dernière quantité est égal à

$$\frac{1}{3^x}\left\{\begin{array}{l} t' + \dfrac{x t'^2(1+t')}{3} + \dfrac{x(x+1)}{1.2}\dfrac{t'^3(1+t')^2}{3^2} \\ \quad + \dfrac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}\dfrac{t'^4(1+t')^3}{3^3} + \ldots \end{array}\right\};$$

en rejetant du développement de cette série toutes les puissances de t' supérieures à $t'^{x'}$, et supposant dans ce que l'on conserve $t'=1$, ce sera l'expression de $y_{x,x'}$.

Il est facile de traduire ce procédé en formule. Ainsi, en supposant x' pair et égal à $2r+2$, on trouve

$$\begin{aligned} y_{x,x'} = {} & \frac{1}{3^x}\left[1 + x\tfrac{2}{3} + \frac{x(x+1)}{1.2}\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+r-1)}{1.2.3\ldots r}\left(\tfrac{2}{3}\right)^r\right] \\ & + \frac{x(x+1)\ldots(x+r)}{1.2.3\ldots(r+1)3^{x+r+1}}\left[1 + (r+1) + \frac{(r+1)r}{1.2} + \ldots + \frac{(r+1)r\ldots 2}{1.2.3\ldots r}\right] \\ & + \frac{x(x+1)\ldots(x+r+1)}{1.2.3\ldots(r+2)3^{x+r+2}}\left[1 + (r+2) + \ldots + \frac{(r+2)(r+1)\ldots 4}{1.2.3\ldots(r-1)}\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{x(x+1)\ldots(x+2r)}{1.2.3\ldots(2r+1)3^{x+2r+1}}. \end{aligned}$$

Si l'on suppose x' impair et égal à $2r+1$, on aura

$$\begin{aligned} y_{x,x'} = {} & \frac{1}{3^x}\left[1 + x\tfrac{2}{3} + \frac{x(x+1)}{1.2}\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+r-1)}{1.2.3\ldots r}\left(\tfrac{2}{3}\right)^r\right] \\ & + \frac{x(x+1)\ldots(x+r)}{1.2.3\ldots(r+1)3^{x+r+1}}\left[1 + (r+1) + \frac{(r+1)r}{1.2} + \ldots + \frac{(r+1)r\ldots 3}{1.2.3\ldots(r-1)}\right] \\ & + \frac{x(x+1)\ldots(x+r+1)}{1.2.3\ldots(r+2)3^{x+r+2}}\left[1 + (r+2) + \frac{(r+2)(r+1)}{1.2} + \ldots + \frac{(r+2)(r+1)\ldots 5}{1.2.3\ldots(r-2)}\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{x(x+1)\ldots(x+2r-1)}{1.2.3\ldots 2r\,3^{x+2r}}. \end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas de $x=2$ et $x'=5$, on a

$$y_{2,5} = \frac{350}{729}.$$

Concevons encore qu'il y ait dans l'urne deux boules blanches distinguées, comme les deux boules noires, par les nos 1 et 2; la probabilité du joueur A sera donnée par l'équation aux différences partielles

$$y_{x,x'} = \tfrac{1}{4} y_{x-1,x'} + \tfrac{1}{4} y_{x-2,x'} + \tfrac{1}{4} y_{x,x'-1} + \tfrac{1}{4} y_{x,x'-2}.$$

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est alors, par le n° 20 du Livre Ier,

$$\frac{\mathrm{M} + \mathrm{N}t}{1 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t'^2},$$

M et N étant deux fonctions arbitraires de t'. Pour les déterminer, on observera que $y_{0,x'}$ est toujours égal à l'unité, et qu'il faut exclure dans M la puissance nulle de t'; on a donc

$$\mathrm{M} = \frac{t'}{1 - t'}\left(1 - \tfrac{1}{4}t' - \tfrac{1}{4}t'^2\right).$$

Pour déterminer N, cherchons la fonction génératrice de $y_{1,x'}$. Si l'on observe que $y_{0,x'}$ est égal à l'unité, et que, le joueur A n'ayant plus besoin que d'un point, il gagne la partie, soit qu'il amène la boule blanche numérotée 1 ou la boule blanche numérotée 2, l'équation précédente aux différences partielles donnera

$$y_{1,x'} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} y_{1,x'-1} + \tfrac{1}{4} y_{1,x'-2}.$$

Supposons $y_{1,x'} = 1 - y'_{x'}$; on aura

$$y'_{x'} = \tfrac{1}{4} y'_{x'-1} + \tfrac{1}{4} y'_{x'-2}.$$

La fonction génératrice de cette équation est

$$\frac{m + nt'}{1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2},$$

m et n étant deux constantes. Pour les déterminer, on observera que $y_{1,0} = 0$, et que par conséquent $y'_0 = 1$, ce qui donne $m = 1$. La fonction génératrice de $y'_{x'}$ est donc

$$\frac{1+nt'}{1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2}.$$

On a ensuite évidemment $y_{1,1}=\frac{1}{2}$, ce qui donne $y'_1=\frac{1}{2}$; y'_1 est le coefficient de t' dans le développement de la fonction précédente, et ce coefficient est $n+\frac{1}{4}$; on a donc $n+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, ou $n=\frac{1}{4}$. La fonction génératrice de l'unité est $\frac{1}{1-t'}$, parce qu'ici toutes les puissances de t' peuvent être admises; on a ainsi

$$\frac{1}{1-t'}-\frac{1+\frac{1}{4}t'}{1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2},\quad\text{ou}\quad\frac{\frac{1}{2}t'}{(1-t')(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2)},$$

pour la fonction génératrice de $y_{1,x'}$. Cette même fonction est le coefficient de t dans le développement de la fonction génératrice de $y_{x,x'}$, fonction qui, par ce qui précède, est

$$\frac{\frac{t'}{1-t'}(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2)+\mathrm{N}t}{1-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t'^2};$$

ce coefficient est

$$\frac{\frac{1}{4}t'}{(1-t')(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2)}+\frac{\mathrm{N}}{1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2};$$

en l'égalant à

$$\frac{\frac{1}{2}t'}{(1-t')(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2)},$$

on aura

$$\mathrm{N}=\frac{\frac{1}{4}t'}{1-t'}.$$

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est ainsi

$$\frac{t'(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2)+\frac{1}{4}tt'}{(1-t')(1-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t'^2)}.$$

Si l'on développe en série la fonction

$$\frac{t'(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2)+\frac{1}{4}tt'}{1-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t'^2}-t',$$

on aura

$$\frac{(2+t)\,tt'}{4}\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{4}t'(1+t')+\frac{1}{4^2}t'^2(1+t')^2+\frac{1}{4^3}t'^3(1+t')^3+\ldots \\ +\frac{t(1+t)}{4}\left[1+\frac{2}{4}t'(1+t')+\frac{3}{4^2}t'^2(1+t')^2+\frac{4}{4^8}t'^3(1+t')^3+\ldots\right] \\ +\frac{t^2(1+t)^2}{4^2}\left[1+\frac{3}{4}t'(1+t')+\frac{3.4}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2+\frac{3.4.5}{1.2.3.4^3}t'^3(1+t')^3+\ldots\right] \\ +\frac{t^3(1+t)^3}{4^3}\left[1+\frac{4}{4}t'(1+t')+\frac{4.5}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2+\frac{4.5.6}{1.2.3.4^3}t'^3(1+t')^3+\ldots\right] \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}.$$

Si l'on rejette de cette série toutes les puissances de t autres que t^x et toutes les puissances de t' supérieures à $t'^{x'}$, et si dans ce qui reste on fait $t=1$, $t'=1$, on aura l'expression de $y_{x,x'}$ lorsque x est égal ou plus grand que l'unité; lorsque x est nul, on a $y_{0,x'}=1$. Il est facile de traduire ce procédé en formule, comme on l'a fait pour le cas précédent.

Nommons $z_{x,x'}$ la probabilité du joueur B; la fonction génératrice de $z_{x,x'}$ sera ce que devient la fonction génératrice de $y_{x,x'}$ lorsqu'on y change t en t', et réciproquement, ce qui donne, pour cette fonction,

$$\frac{t(1-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t^2)+\frac{1}{4}tt'}{(1-t)(1-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t'^2)}.$$

En ajoutant les deux fonctions génératrices, leur somme se réduit à

$$\frac{t}{1-t}+\frac{t'}{1-t'}+\frac{tt'}{(1-t)(1-t')},$$

dans laquelle le coefficient de $t^x t'^{x'}$ est l'unité; ainsi l'on a

$$y_{x,x'}+z_{x,x'}=1,$$

ce qui est visible d'ailleurs, puisque la partie doit être nécessairement gagnée par l'un des joueurs.

9. Concevons dans une urne r boules marquées du n° 1, r boules marquées du n° 2, r boules marquées du n° 3, et ainsi de suite jusqu'au n° n. Ces boules étant bien mêlées dans l'urne, on les tire toutes suc-

cessivement; on demande la probabilité qu'il sortira au moins une de ces boules au rang indiqué par son numéro, ou qu'il en sortira au moins deux, ou au moins trois, etc.

Cherchons d'abord la probabilité qu'il en sortira au moins une. Pour cela, nous observerons qu'aucune boule ne peut sortir à son rang que dans les n premiers tirages; on peut donc ici faire abstraction des tirages suivants; or le nombre total des boules étant rn, le nombre de leurs combinaisons n à n, en ayant égard à l'ordre qu'elles observent entre elles, est, par ce qui précède,

$$rn(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1);$$

c'est donc le nombre de tous les cas possibles dans les n premiers tirages.

Considérons une des boules marquées du n° 1, et supposons qu'elle sorte à son rang, ou la première. Le nombre des combinaisons des $rn-1$ autres boules prises $n-1$ à $n-1$ sera

$$(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1);$$

c'est le nombre des cas relatifs à la supposition que nous venons de faire, et, comme cette supposition peut s'appliquer aux r boules marquées du n° 1, on aura

$$r(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1)$$

pour le nombre des cas relatifs à l'hypothèse qu'une des boules marquées du n° 1 sortira à son rang. Le même résultat a lieu pour l'hypothèse qu'une quelconque des $n-1$ autres espèces de boules sortira au rang indiqué par son numéro. En ajoutant donc tous les résultats relatifs à ces diverses hypothèses, on aura

$$(a)\qquad nr(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1),$$

pour le nombre des cas dans lesquels une boule au moins sortira à son rang, pourvu toutefois que l'on en retranche les cas qui sont répétés.

Pour déterminer ces cas, considérons une des boules du n° 1, sortant la première, et une des boules du n° 2, sortant la seconde. Ce cas est compris deux fois dans le nombre précédent ; car il est compris une fois dans le nombre des cas relatifs à la supposition qu'une des boules numérotées 1 sortira à son rang, et une seconde fois dans le nombre des cas relatifs à la supposition qu'une des boules numérotée 2 sortira à son rang ; et, comme cela s'étend à deux boules quelconques sortant à leur rang, on voit qu'il faut retrancher du nombre des cas précédents le nombre de tous les cas dans lesquels deux boules sortent à leur rang.

Le nombre des combinaisons de deux boules de numéros différents est $\frac{n(n-1)}{1.2}r^2$; car le nombre des numéros étant n, leurs combinaisons deux à deux sont au nombre $\frac{n(n-1)}{1.2}$, et dans chacune de ces combinaisons on peut combiner les r boules marquées d'un des numéros avec les r boules marquées de l'autre numéro. Le nombre des combinaisons des $rn-2$ boules restantes, prises $n-2$ à $n-2$, en ayant égard à l'ordre qu'elles observent entre elles, est

$$(rn-2)(rn-3)\ldots(rn-n+1);$$

ainsi le nombre des cas relatifs à la supposition que deux boules sortent à leur rang est

$$\frac{n(n-1)}{1.2}r^2(rn-2)(rn-3)\ldots(rn-n+1);$$

en le retranchant du nombre (a), on aura

$$(a') \quad \left\{ \begin{aligned} & nr(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1) \\ & -\frac{n(n-1)}{1.2}r^2(rn-2)(rn-3)\ldots(rn-n+1), \end{aligned} \right.$$

pour le nombre de tous les cas dans lesquels une boule au moins sortira à son rang, pourvu que l'on retranche encore de cette fonction les cas répétés, et qu'on lui ajoute ceux qui manquent.

Ces cas sont ceux dans lesquels trois boules sortent à leur rang. En nommant k ce nombre, il est répété trois fois dans le premier terme de la fonction (a'); car il peut résulter, dans ce terme, des trois suppositions de chacune des trois boules sortant à son rang. Le nombre k est pareillement compris trois fois dans le second terme de la fonction; car il peut résulter de chacune des suppositions relatives à deux quelconques des trois boules sortant à leur rang. Ainsi, ce second terme étant affecté du signe $-$, le nombre k ne se trouve point dans la fonction (a'); il faut donc le lui ajouter pour qu'elle contienne tous les cas dans lesquels une boule au moins sort à son rang. Le nombre des combinaisons des n numéros pris trois à trois est $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, et, comme on peut combiner les r boules d'un des numéros de chaque combinaison avec les r boules du second numéro et avec les r boules du troisième numéro, on aura le nombre total des combinaisons dans lesquelles trois boules sortent à leur rang, en multipliant $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}r^3$ par $(rn-3)(rn-4)\ldots(rn-n+1)$, nombre qui exprime celui des combinaisons des $rn-3$ boules restantes, prises $n-3$ à $n-3$, en ayant égard à l'ordre qu'elles observent entre elles. Si l'on ajoute ce produit à la fonction (a'), on aura

$$(a'')\quad\left\{\begin{array}{l} nr(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1) \\ \quad -\frac{n(n-1)}{1.2}r^2(rn-2)(rn-3)\ldots(rn-n+1) \\ \quad +\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}r^3(rn-3)(rn-4)\ldots(rn-n+1). \end{array}\right.$$

Cette fonction exprime le nombre de tous les cas dans lesquels une boule au moins sort à son rang, pourvu que l'on en retranche encore les cas répétés. Ces cas sont ceux dans lesquels quatre boules sortent à leur rang. En y appliquant les raisonnements précédents, on verra qu'il faut encore retrancher de la fonction (a'') le terme

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}r^4(rn-4)(rn-5)\ldots(rn-n+1).$$

En continuant ainsi, on aura, pour l'expression du nombre des cas dans lesquels une boule au moins sort à son rang,

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned}&nr(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1)\\&-\frac{n(n-1)}{1.2}r^2(rn-2)(rn-3)\ldots(rn-n+1)\\&+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}r^3(rn-3)(rn-4)\ldots(rn-n+1)\\&-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}r^4(rn-4)(rn-5)\ldots(rn-n+1)\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}\right.$$

la série étant continuée aussi loin qu'elle peut l'être. Dans cette fonction, chaque combinaison n'est point répétée : ainsi la combinaison de s boules sortant à leur rang ne s'y trouve qu'une fois; car cette combinaison est comprise s fois dans le premier terme de la fonction, puisqu'elle peut résulter de chacune des s boules sortant à son rang; elle est retranchée $\frac{s(s-1)}{1.2}$ fois dans le second terme, puisqu'elle peut résulter des combinaisons deux à deux des s boules sortant à leur rang; elle est ajoutée $\frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}$ fois dans le troisième terme, puisqu'elle peut résulter des combinaisons de s lettres prises trois à trois, et ainsi de suite; elle est donc, dans la fonction (A), comprise un nombre de fois égal à

$$s-\frac{s(s-1)}{1.2}+\frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}-\ldots,$$

et par conséquent égal à $1-(1-1)^s$, ou à l'unité. En divisant la fonction (A) par le nombre $rn(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-n+1)$ de tous les cas possibles, on aura, pour l'expression de la probabilité qu'une boule au moins sortira à son rang,

$$(\mathrm{B})\quad\left\{\begin{aligned}&1-\frac{(n-1)r}{1.2(rn-1)}+\frac{(n-1)(n-2)r^2}{1.2.3(rn-1)(rn-2)}\\&-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)r^3}{1.2.3.4(rn-1)(rn-2)(rn-3)}+\ldots\end{aligned}\right.$$

Cherchons maintenant la probabilité que s boules au moins sortiront à leur rang. Le nombre des cas dans lesquels s boules sortent à leur rang est, par ce qui précède,

$$(b)\qquad \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}{1.2.3\ldots s}r^s(rn-s)(rn-s-1)\ldots(rn-n+1),$$

pourvu que l'on retranche de cette fonction les cas qui sont répétés. Ces cas sont ceux dans lesquels $s+1$ boules sortent à leur rang, car ils peuvent résulter, dans la fonction, de $s+1$ boules prises s à s; ces cas sont donc répétés $s+1$ fois dans cette fonction; par conséquent il faut les retrancher s fois. Or le nombre des cas dans lesquels $s+1$ boules sortent à leur rang est

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s)}{1.2.3\ldots(s+1)}r^{s+1}(rn-s-1)(rn-s-2)\ldots(rn-n+1).$$

En le multipliant par s et le retranchant de la fonction (b), on aura

$$(b')\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}{1.2.3\ldots s}r^s(rn-s)(rn-s-1)\ldots(rn-n+1)\\&\quad\times\left[1-\frac{s(n-s)r}{(s+1)(rn-s)}\right].\end{aligned}\right.$$

Dans cette fonction, plusieurs cas sont encore répétés, savoir, ceux dans lesquels $s+2$ boules sortent à leur rang; car ils résultent, dans le premier terme, des $s+2$ boules sortant à leur rang et prises s à s; ils résultent, dans le second terme, des $s+2$ boules sortant à leur rang et prises $s+1$ à $s+1$, et de plus multipliés par le facteur s, par lequel on a multiplié le second terme. Ils sont donc compris dans cette fonction le nombre de fois $\frac{(s+2)(s+1)}{1.2}-s(s+2)$; ainsi il faut multiplier par l'unité, moins ce nombre de fois, le nombre des cas dans lesquels $s+2$ boules sortent à leur rang. Ce dernier nombre est

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s-1)}{1.2.3\ldots(s+2)}r^{s+2}(rn-s-2)(rn-s-3)\ldots(rn-n+1);$$

le produit dont il s'agit sera donc

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-s-1)}{1.2.3\ldots(s+2)}r^{s+2}(rn-s-2)\ldots(rn-n+1)\frac{s(s+1)}{1.2}.$$

En l'ajoutant à la fonction (b'), on aura

$$(b'')\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1.2.3\ldots s}r^s(rn-s)(rn-s-1)\ldots(rn-n+1) \\ \times\left\{\begin{array}{l} 1-\dfrac{s}{s+1}\,\dfrac{(n-s)r}{rn-s} \\ +\dfrac{s}{s+2}\,\dfrac{(n-s)(n-s-1)r^2}{1.2(rn-s)(rn-s-1)} \end{array}\right\}. \end{array}\right.$$

C'est le nombre de tous les cas possibles dans lesquels s boules sortent à leur rang, pourvu que l'on en retranche encore les cas qui sont répétés. En continuant de raisonner ainsi, et en divisant la fonction finale par le nombre de tous les cas possibles, on aura, pour l'expression de la probabilité que s boules au moins sortiront à leur rang,

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)r^{s-1}}{1.2.3\ldots s(rn-1)(rn-2)\ldots(rn-s+1)} \\ \times\left\{\begin{array}{l} 1-\dfrac{s}{s+1}\,\dfrac{(n-s)r}{rn-s}+\dfrac{s}{s+2}\,\dfrac{(n-s)(n-s-1)r^2}{1.2.(rn-s)(rn-s-1)} \\ -\dfrac{s}{s+3}\,\dfrac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)r^3}{1.2.3.(rn-s)(rn-s-1)(rn-s-2)}+\ldots \end{array}\right\}. \end{array}\right.$$

On aura la probabilité qu'aucune des boules ne sortira à son rang en retranchant la formule (B) de l'unité, et l'on trouvera, pour son expression,

$$\frac{(1.2.3..\,rn)-nr[1.2.3\ldots(rn-1)]+\dfrac{n(n-1)}{1.2}r^2[1.2.3\ldots(rn-2)]-\ldots}{1.2.3\ldots rn}.$$

On a, par le n° 33 du Livre Ier, quel que soit i,

$$1.2.3\ldots i=\int x^i\,dx\,c^{-x},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. L'expression précédente peut donc être mise sous cette forme

$$(o)\qquad \frac{\int x^{rn-n}\,dx\,(x-r)^n c^{-x}}{\int x^{rn}\,dx\,c^{-x}}.$$

Supposons le nombre rn de boules de l'urne très grand; alors, en appliquant aux intégrales précédentes la méthode du n° 24 du Livre Ier, on trouvera à très peu près, pour l'intégrale du numérateur,

$$\frac{\sqrt{2\pi}\, X^{rn+2}\left(1-\frac{r}{X}\right)^{n+1} c^{-X}}{\sqrt{nX^2+n(r-1)(X-r)^2}},$$

X étant la valeur de x qui rend un maximum la fonction $x^{rn-n}(x-r)^n c^{-x}$. L'équation relative à ce maximum donne pour X les deux valeurs

$$X = \frac{rn+r}{2} \pm \frac{\sqrt{r^2(n-1)^2+4rn}}{2}.$$

On peut ne considérer ici que la plus grande de ces valeurs qui est, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{rn}$, égale à $rn+\frac{n}{n-1}$; alors l'intégrale du numérateur de la fonction (o) devient à peu près

$$\frac{\sqrt{2\pi}\,(rn)^{rn+\frac{1}{2}} c^{-rn}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\sqrt{r}}{\sqrt{(r-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1}}.$$

L'intégrale du dénominateur de la même fonction est, par le n° 33, à fort peu près,

$$\sqrt{2\pi}\,(rn)^{rn+\frac{1}{2}} c^{-rn};$$

la fonction (o) devient ainsi

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\sqrt{r}}{\sqrt{(r-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1}}.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{2}{rn}-\frac{1}{rn^2}}};$$

rn étant supposé un très grand nombre, cette fonction se réduit à fort peu près à cette forme très simple

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

C'est donc l'expression fort approchée de la probabilité qu'aucune des boules de l'urne ne sortira à son rang, lorsqu'il y a un grand nombre de boules. Le logarithme hyperbolique de cette expression étant

$$-1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}-\ldots,$$

on voit qu'elle va toujours croissant à mesure que n augmente; qu'elle est nulle, lorsque $n=1$, et qu'elle devient $\frac{1}{c}$, lorsque n est infini, c étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité.

Concevons maintenant un nombre i d'urnes renfermant chacune le nombre n de boules, toutes de couleurs différentes, et que l'on tire successivement toutes les boules de chaque urne. On peut, par les raisonnements précédents, déterminer la probabilité qu'une ou plusieurs boules de la même couleur sortiront au même rang dans les i tirages. En effet, supposons que les rangs des couleurs soient réglés d'après le tirage complet de la première urne, et considérons d'abord la première couleur; supposons qu'elle sorte la première dans les tirages des $i-1$ autres urnes. Le nombre total des combinaisons des $n-1$ autres couleurs dans chaque urne est, en ayant égard à leur situation entre elles, $1.2.3\ldots(n-1)$; ainsi le nombre total de ces combinaisons relatives aux $i-1$ urnes est $[1.2.3\ldots(n-1)]^{i-1}$; c'est le nombre des cas dans lesquels la première couleur est tirée la première à la fois de toutes ces urnes, et, comme il y a n couleurs, on aura

$$n[1.2.3\ldots(n-1)]^{i-1}$$

pour le nombre des cas dans lesquels une couleur au moins arrivera à son rang dans les tirages des $i-1$ urnes. Mais il y a dans ce nombre des cas répétés; ainsi les cas où deux couleurs arrivent à leur rang dans ces tirages sont compris deux fois dans ce nombre; il faut donc les en retrancher. Le nombre de ces cas est, par ce qui précède,

$$\frac{n(n-1)}{1.2}[1.2.3\ldots(n-2)]^{i-1};$$

en le retranchant du nombre précédent, on aura la fonction

$$n[1.2.3\ldots(n-1)]^{i-1}-\frac{n(n-1)}{1.2}[1.2.3\ldots(n-2)]^{i-1}.$$

Mais cette fonction renferme elle-même des cas répétés. En continuant de les exclure comme on l'a fait ci-dessus relativement à une seule urne, en divisant ensuite la fonction finale par le nombre de tous les cas possibles, et qui est ici $(1.2.3\ldots n)^{i-1}$, on aura, pour la probabilité qu'une des $n-1$ couleurs au moins sortira à son rang dans les $i-1$ tirages qui suivent le premier,

$$\frac{1}{n^{i-2}}-\frac{1}{1.2[n(n-1)]^{i-2}}+\frac{1}{1.2.3[n(n-1)(n-2)]^{i-2}}-\ldots,$$

expression dans laquelle il faut prendre autant de termes qu'il y a d'unités dans n. Cette expression est donc la probabilité qu'au moins une des couleurs sortira au même rang dans les tirages des i urnes.

10. Considérons deux joueurs A et B, dont les adresses soient p et q, et dont le premier ait a jetons et le second b jetons. Supposons qu'à chaque coup celui qui perd donne un jeton à son adversaire, et que la partie ne finisse que lorsqu'un des joueurs aura perdu tous ses jetons; on demande la probabilité que l'un des joueurs, A par exemple, gagnera la partie avant ou au $n^{\text{ième}}$ coup.

Ce problème peut être résolu avec facilité par le procédé suivant, qui est, en quelque sorte, mécanique. Supposons b égal ou moindre que a, et considérons le développement du binôme $(p+q)^b$. Le premier terme p^b de ce développement sera la probabilité de A pour gagner la partie au coup b. On retranchera ce terme du développement, et l'on en retranchera pareillement le dernier terme q^b, si $b=a$, parce qu'alors ce terme exprime la probabilité de B pour gagner la partie au coup b. Ensuite on multipliera le reste par $p+q$. Le premier terme de ce produit aura pour facteur $p^b q$, et, comme l'exposant b ne surpasse que de $b-1$ l'exposant de q, il en résulte que la partie ne peut pas être gagnée par le joueur A, au coup $b+1$, ce qui est visible d'ailleurs; car, si A a perdu un jeton dans les b premiers coups, il doit, pour gagner la partie, gagner ce jeton plus les b jetons du joueur B, ce qui exige $b+2$ coups. Mais, si $a=b+1$, on retranchera du produit son dernier terme, qui exprime la probabilité du joueur B pour gagner la partie au coup $b+1$.

On multipliera de nouveau ce second reste par $p+q$. Le premier terme du produit aura pour facteur $p^{b+1}q$, et, comme l'exposant de p y surpasse de b celui de q, ce terme exprimera la probabilité de A pour gagner la partie au coup $b+2$. On retranchera pareillement du produit le dernier terme, si l'exposant de q y surpasse de a celui de p.

On multipliera de nouveau ce troisième reste par $p+q$, et l'on continuera ces multiplications jusqu'au nombre de fois $n-b$, en retranchant à chaque multiplication le premier terme, si l'exposant de p y surpasse de b celui de q, et le dernier terme, si l'exposant de q y surpasse de a celui de p. Cela posé, la somme des premiers termes ainsi retranchés sera la probabilité de A pour gagner la partie avant ou au coup n, et la somme des derniers termes retranchés sera la probabilité semblable relative au joueur B.

Pour avoir une solution analytique du problème, soit $y_{x,x'}$ la probabilité du joueur A pour gagner la partie, lorsqu'il a x jetons, et lorsqu'il n'a plus que x' coups à jouer pour atteindre les n coups. Cette probabilité devient, au coup suivant, ou $y_{x+1,x'-1}$, ou $y_{x-1,x'-1}$, suivant que le joueur A gagne ou perd le coup; or les probabilités respectives de ces deux événements sont p et q : on a donc l'équation aux différences partielles

$$y_{x,x'} = p y_{x+1,x'-1} + q y_{x-1,x'-1}.$$

Pour intégrer cette équation, nous considérerons, comme précédemment, une fonction u de t et de t' génératrice de $y_{x,x'}$, en sorte que $y_{x,x'}$

soit le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans le développement de cette fonction. En repassant des coefficients aux fonctions génératrices, l'équation précédente donnera

$$u = u\left(\frac{pt'}{t} + qtt'\right),$$

d'où l'on tire

$$1 = \frac{pt'}{t} + qtt';$$

par conséquent,

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{2pt'} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}}{2p},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{t^x} = \frac{1}{(2p)^x}\left(\frac{1}{t'} \pm \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x;$$

donc

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = \frac{u}{(2p)^x t'^{x'}}\left(\frac{1}{t'} \pm \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x.$$

Cette équation peut être mise sous la forme suivante :

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = \frac{u}{2(2p)^x t'^{x'}}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x + \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x \\ \pm\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\;\dfrac{\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x - \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x}{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}}\end{array}\right.$$

L'expression précédente de $\frac{1}{t}$ donne

$$\pm\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} = \frac{2p}{t} - \frac{1}{t'};$$

on a donc

$$\begin{aligned}\frac{u}{t^x t'^{x'}} = {} & \frac{u}{2(2p)^x t'^{x'}}\left[\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x + \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x\right] \\ & + \frac{u\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2pt'}\right)}{2(2p)^{x-1} t'^{x'}}\;\frac{\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x - \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x}{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}};\end{aligned}$$

sous cette forme, l'ambiguïté du signe $\pm$ disparait.

Maintenant, si l'on repasse des fonctions génératrices à leurs coefficients, et si l'on observe que $y_{0,x'}$ est nul, parce que le joueur A perd nécessairement la partie lorsqu'il n'a plus de jetons, l'équation précédente donnera, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$y_{x,x'} = \frac{1}{2^x p^{x-1}}[X^{(x-1)} y_{1,x+x'-1} + X^{(x-3)} y_{1,x+x'-3} + \ldots + X^{(x-2r-1)} y_{1,x+x'-2r-1} + \ldots],$$

la série du second membre s'arrêtant lorsque $x - 2r - 1$ a une valeur négative. $X^{(x-1)}$, $X^{(x-3)}$, ... sont les coefficients de $\frac{1}{t'^{x-1}}$, $\frac{1}{t'^{x-3}}$, ... dans le développement de la fonction

$$(i) \qquad \frac{\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x - \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x}{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}}.$$

Si l'on nomme u' le coefficient de t^x dans le développement de u, u' sera une fonction de t' et de x, génératrice de $y_{x,x'}$. Si l'on nomme pareillement T' le coefficient de t dans le développement de u, le produit de $\frac{T'}{2^x p^{x-1}}$ par la fonction (i) sera la fonction génératrice du second membre de l'équation précédente; cette fonction est donc égale à u'. Supposons $x = a + b$, alors $y_{x,x'}$ devient $y_{a+b,x'}$, et cette quantité est égale à l'unité; car il est certain que A a gagné la partie, lorsqu'il a gagné tous les jetons de B; u' est donc alors la fonction génératrice de l'unité; or x' est ici zéro ou un nombre pair, car le nombre des coups dans lesquels A peut gagner la partie est égal à b plus un nombre pair : en effet, A doit pour cela gagner tous les jetons de B, et de plus il doit regagner chaque jeton qu'il a perdu, ce qui exige deux coups. Ensuite, n exprimant un nombre de coups dans lequel A peut gagner la partie, il est égal à b plus un nombre pair; x', étant le nombre des coups qui manquent au joueur A pour arriver à n, est donc zéro ou un nombre pair. De là il suit que, dans le cas de $x = a + b$, u' devient $\frac{1}{1 - t'^2}$; on a donc

$$\frac{\mathrm{T}'}{2^{a+b}p^{a+b-1}}\;\frac{\left(\frac{1}{t'}+\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^{a+b}-\left(\frac{1}{t'}-\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^{a+b}}{\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}}=\frac{1}{1-t'^2},$$

ce qui donne la valeur de T'. En la multipliant par la fonction (i) divisée par $2^a p^{a-1}$ et dans laquelle on fait $x = a$, on aura la fonction génératrice de $y_{a,x'}$ égale à

$$(o)\qquad \frac{2^b p^b t'^b\left[(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^a-(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^a\right]}{(1-t'^2)\left[(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^{a+b}-(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^{a+b}\right]}.$$

Dans le cas de $a = b$, elle devient

$$\frac{2^a p^a t'^a}{(1-t'^2)\left[(1+\sqrt{1-4pq\,t'^2})^a+(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^a\right]}.$$

En développant la fonction

$$(q)\qquad (1+\sqrt{1-4pqt'^2})^a+(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^a$$

suivant les puissances de t'^2, le radical disparait, et le plus haut exposant de t' dans ce développement est égal ou plus petit que a. Mais, si l'on développe $(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^a$ suivant les puissances de t'^2, le plus petit exposant de t' sera $2a$; la fonction (q) est donc égale au développement de $(1+\sqrt{1-4pq\,t'^2})^a$, en rejetant les puissances de t' supérieures à a.

Maintenant on a, par le n° 3 du Livre I^er,

$$z^a = 1 - a\alpha + \frac{a(a-3)}{1.2}\alpha^2 - \frac{a(a-4)(a-5)}{1.2.3}\alpha^3 + \ldots,$$

z étant celle des racines de l'équation

$$z = 1 - \frac{\alpha}{z}$$

qui se réduit à l'unité lorsque α est nul. Cette racine est

$$\frac{1+\sqrt{1-4\alpha}}{2};$$

en supposant donc $\alpha = pqt'^2$, on aura

$$\begin{aligned}
&(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^a \\
&\quad = 2^a\left[1 - apqt'^2 + \frac{a(a-3)}{1.2}p^2q^2t'^4 - \frac{a(a-4)(a-5)}{1.2.3}p^3q^3t'^6 + \ldots\right];
\end{aligned}$$

on aura ainsi

$$\begin{aligned}
&\frac{2^a p^a t'^a}{(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^a + (1-\sqrt{1-4pqt'^2})^a} \\
&\quad = \frac{p^a t'^a}{1 - apqt'^2 + \frac{a(a-3)}{1.2}p^2q^2t'^4 - \frac{a(a-4)(a-5)}{1.2.3}p^3q^3t'^6 + \ldots},
\end{aligned}$$

la série du dénominateur étant continuée exclusivement jusqu'aux puissances de t' supérieures à a. Ce second membre doit être, par ce qui précède, divisé par $1 - t'^2$, pour avoir la fonction génératrice de $y_{a,x'}$; la quantité $y_{a,x'}$ est donc la somme des coefficients des puissances de t', en ne considérant dans le développement de ce membre par rapport aux puissances de t' que les puissances égales ou inférieures à x'. Chacun de ces coefficients exprimera la probabilité que A gagnera la partie au coup indiqué par l'exposant de la puissance de t'.

Si l'on nomme z_i le coefficient correspondant à t'^{a+2i}, on aura généralement

$$0 = z_i - apq\,z_{i-1} + \frac{a(a-3)}{1.2}p^2q^2 z_{i-2} - \ldots;$$

d'où il est facile de conclure les valeurs de z_1, z_2, ..., en observant que z_{-1}, z_{-2}, ... sont nuls, et que $z_0 = p^a$. La valeur de z_i étant égale à $y_{a,a+2i} - y_{a,a+2i-2}$, on aura celles de $y_{a,a}$, $y_{a,a+2}$, $y_{a,a+4}$, etc. L'équation aux différences partielles à laquelle on est immédiatement conduit se trouve ainsi ramenée à une équation aux différences ordinaires, qui détermine, en l'intégrant, la valeur de $y_{a,x'}$. Mais on peut obtenir cette valeur par le procédé suivant, qui s'applique au cas général où a et b sont égaux ou différents entre eux.

Reprenons la fonction génératrice de $y_{a,x'}$ trouvée ci-dessus; $y_{a,x'}$ est le coefficient de $t^{x'-b}$ dans le développement de la fonction

$$2^b p^b \frac{P}{Q(1-t'^2)},$$

en supposant

$$P = \frac{(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^a - (1-\sqrt{1-4pqt'^2})^a}{\sqrt{1-4pqt'^2}},$$

$$Q = \frac{(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^{a+b} - (1-\sqrt{1-4pqt'^2})^{a+b}}{\sqrt{1-4pqt'^2}}.$$

Il résulte du n° 5 du Livre I$^{\text{er}}$ que, si l'on considère les deux termes

$$\frac{P}{2t'^{2i}Q}, \quad -\frac{P}{(1-t'^2)t'^{2i+1}\frac{dQ}{dt'}},$$

que l'on fasse ensuite successivement $t'=1$ et $t'=-1$ dans le premier terme, et t' égal successivement à toutes les racines de l'équation $Q=0$ dans le second terme, la somme de tous les termes que l'on obtient de cette manière sera le coefficient de t'^{2i} dans le développement de la fraction

$$\frac{P}{Q(1-t'^2)}.$$

Ce que le premier terme produit dans cette somme est

$$\frac{p^a - q^a}{2^b(p^{a+b}-q^{a+b})}.$$

Pour avoir les racines de l'équation $Q=0$, nous ferons

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{pq}\cos\varpi},$$

ce qui donne

$$Q = \frac{(\cos\varpi + \sqrt{-1}\sin\varpi)^{a+b} - (\cos\varpi - \sqrt{-1}\sin\varpi)^{a+b}}{\sqrt{-1}\sin\varpi(\cos\varpi)^{a+b-1}},$$

ou

$$Q = \frac{2\sin(a+b)\varpi}{\sin\varpi(\cos\varpi)^{a+b-1}}.$$

Les racines de l'équation $Q = 0$ sont donc représentées par

$$\varpi = \frac{(r+1)\pi}{a+b},$$

r étant un nombre entier positif qui peut s'étendre depuis $r = 0$ jusqu'à $r = a+b-2$. Lorsque $a+b$ est un nombre pair, $\frac{1}{2}\pi$ est une des valeurs de ϖ; il faut l'exclure, parce que, $\cos\varpi$ devenant nul alors, cette valeur de ϖ ne rend pas Q nul. Dans ce cas, l'équation $Q = 0$ n'a que $a+b-2$ racines; mais, comme le terme dépendant de la valeur $\varpi = \frac{1}{2}\pi$ est multiplié dans l'expression de $y_{a,x'}$ par une puissance positive de $\cos\frac{(r+1)\pi}{a+b}$, on peut conserver la valeur de r qui donne $\varpi = \frac{1}{2}\pi$, puisque le terme qui lui correspond dans l'expression de $y_{a,x'}$ disparaît.

Maintenant on a

$$\frac{dQ}{dt'} = \frac{dQ}{d\varpi}\frac{d\varpi}{dt'},$$

d'où l'on tire, en vertu de l'équation $\sin(a+b)\varpi = 0$,

$$\frac{dQ}{dt'} = \frac{4(a+b)\sqrt{pq}\cos(r+1)\pi}{\sin^2\varpi(\cos\varpi)^{a+b-3}} = \frac{4(a+b)\sqrt{pq}(-1)^{r+1}}{\sin^2\varpi(\cos\varpi)^{a+b-3}}.$$

Le terme

$$\frac{-P}{(1-t'^2)t'^{2i+1}\frac{dQ}{dt'}},$$

en observant que

$$P = \frac{2\sin a\varpi}{\sin\varpi(\cos\varpi)^{a-1}},$$

devient ainsi

$$(h)\quad \frac{(-1)^{r+1}2^{2i+2}(pq)^{i+1}\sin\frac{(r+1)\pi}{a+b}\sin\frac{(r+1)a\pi}{a+b}\left[\cos\frac{(r+1)\pi}{a+b}\right]^{b+2i+1}}{(a+b)\left[p^2-2pq\cos\frac{2(r+1)\pi}{a+b}+q^2\right]};$$

la somme de tous les termes que l'on obtient, en donnant à r toutes les valeurs entières et positives, depuis $r = 0$ jusqu'à $r = a + b - 2$, sera ce que produit la fonction

$$\frac{\mathrm{P}}{(1 - t'^2)\, t'^{2i+1} \dfrac{d\mathrm{Q}}{dt'}};$$

nous désignerons cette somme par la caractéristique S placée devant la fonction (h).

Si l'on fait $r' + 1 = a + b - (r + 1)$, on aura

$$\sin \frac{(r'+1)\pi}{a+b} = \sin \frac{(r+1)\pi}{a+b},$$

$$\cos \frac{(r'+1)\pi}{a+b} = -\cos \frac{(r+1)\pi}{a+b},$$

$$\cos \frac{2(r'+1)\pi}{a+b} = \cos \frac{2(r+1)\pi}{a+b},$$

$$\sin \frac{(r'+1)a\pi}{a+b} = (-1)^{a+1} \sin \frac{(r+1)a\pi}{a+b}.$$

De là il est facile de conclure que, dans la fonction (h), le terme relatif à $r + 1$ est le même que le terme relatif à $r' + 1$; on peut donc doubler ce terme, et n'étendre alors la caractéristique S qu'aux valeurs de r comprises depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \frac{a+b-2}{2}$, si $a + b$ est pair, ou $r = \frac{a+b-1}{2}$, si $a + b$ est impair. Cela posé, en observant que

$$\sin \frac{(r+1)a\pi}{a+b} = (-1)^r \sin \frac{(r+1)b\pi}{a+b},$$

on aura

$$(\mathrm{H}) \left\{ \begin{aligned} y_{a,b+2i} &= \frac{p^b(p^a - q^a)}{p^{a+b} - q^{a+b}} \\ &\quad - \frac{2^{b+2i+2} p^b (pq)^{i+1}}{a+b}\, \mathrm{S}\, \frac{\sin \dfrac{2(r+1)\pi}{a+b} \sin \dfrac{(r+1)b\pi}{a+b} \left[\cos \dfrac{(r+1)\pi}{a+b}\right]^{b+2i}}{p^2 - 2pq \cos \dfrac{2(r+1)\pi}{a+b} + q^2}. \end{aligned} \right.$$

En changeant a en b, p en q, et réciproquement, on aura la probabilité que le joueur B gagnera la partie avant le coup $a + 2i$, ou à ce coup.

Supposons $a = b$; $\sin\frac{(r+1)a\pi}{a+b}$ deviendra $\sin\frac{1}{2}(r+1)\pi$. Ce sinus est nul, lorsque $r+1$ est pair; il suffit donc alors de considérer, dans l'expression de $y_{a,a+2i}$, les valeurs impaires de $r+1$. En les exprimant par $2s+1$, et observant que $\sin\frac{(2s+1)\pi}{2} = (-1)^s$, on aura

$$y_{a,a+2i} = \frac{p^a}{p^a+q^a} - \frac{2^{a+2i+1}p^a(pq)^{i+1}}{a} \mathrm{S} \frac{(-1)^s \sin\frac{(2s+1)\pi}{a}\left[\cos\frac{(2s+1)\pi}{2a}\right]^{a+2i}}{p^2 - 2pq\cos\frac{(2s+1)\pi}{a} + q^2},$$

$2s+1$ devant comprendre toutes les valeurs impaires contenues dans $a-1$.

Si l'on change, dans cette expression, p en q, et réciproquement, on aura la probabilité du joueur B pour gagner la partie en $a+2i$ coups. La somme de ces deux probabilités sera la probabilité que la partie sera finie après ce nombre de coups; cette dernière probabilité est donc

$$1 - \frac{2^{a+2i+1}}{a}(p^a+q^a)(pq)^{i+1} \mathrm{S} \frac{(-1)^s \sin\frac{(2s+1)\pi}{a}\left[\cos\frac{(2s+1)\pi}{2a}\right]^{a+2i}}{p^2 - 2pq\cos\frac{(2s+1)\pi}{a} + q^2}.$$

Si les adresses p et q sont égales, cette expression devient

$$1 - \frac{2}{a}\mathrm{S}\frac{(-1)^s\left[\cos\frac{(2s+1)\pi}{2a}\right]^{a+2i+1}}{\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a}}.$$

Lorsque $a+2i$ est un grand nombre, on peut en conclure d'une manière fort approchée le nombre de coups nécessaire pour que la probabilité que la partie finira dans ce nombre de coups soit égale à une fraction donnée $\frac{1}{k}$. On aura alors

$$\frac{2}{a}\mathrm{S}\frac{(-1)^s\left[\cos\frac{(2s+1)\pi}{2a}\right]^{a+2i+1}}{\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a}} = \frac{k-1}{k};$$

$a+2i$ étant supposé un très grand nombre, fort supérieur au nombre a, il suffit de considérer le terme du premier membre qui correspond à s nul, et alors on a

$$a+2i+1=\frac{\log\left[\frac{a(k-1)}{2k}\sin\frac{\pi}{2a}\right]}{\log\left(\cos\frac{\pi}{2a}\right)},$$

ces logarithmes pouvant être à volonté hyperboliques ou tabulaires.

Si, dans les formules précédentes, on suppose a infini, b restant un nombre fini, on aura le cas dans lequel le joueur A joue contre le joueur B qui a primitivement le nombre b de jetons, jusqu'à ce qu'il ait gagné tous les jetons de B, sans que jamais celui-ci puisse gagner A, quel que soit le nombre des jetons qu'il lui gagne. Dans ce cas, la fonction génératrice (o) de $y_{a,x'}$ se réduit à

$$\frac{2^b p^b t'^b}{(1-t'^2)(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^b},$$

car alors $(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^a$ et $(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^{a+b}$, développés, ne renferment que des puissances infinies de t', puissances que l'on doit négliger, quand on ne considère qu'un nombre fini de coups. On a par ce qui précède

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^{-b}\\ =\frac{1}{2^b}\left\{\begin{array}{l}1+bpqt'^2+\dfrac{b(b+3)}{1.2}p^2q^2t'^4+\dfrac{b(b+4)(b+5)}{1.2.3}p^3q^3t'^6+\ldots\\ +\dfrac{b(b+i+1)(b+i+2)\ldots(b+2i-1)p^iq^it'^{2i}}{1.2.3\ldots i}+\ldots\end{array}\right\}.\end{aligned}$$

En multipliant ce second membre par $\frac{2^b p^b t'^b}{1-t'^2}$, le coefficient de t'^{b+2i} sera

$$p^b\left[1+bpq+\frac{b(b+3)}{1.2}p^2q^2+\ldots+\frac{b(b+i+1)(b+i+2)\ldots(b+2i-1)p^iq^i}{1.2.3\ldots i}\right]:$$

c'est la valeur de $y_{a,b+2i}$, ou la probabilité que A gagnera la partie avant ou au coup $b+2i$.

Cette valeur serait très pénible à réduire en nombres, si b et $2i$ étaient de grands nombres; il serait surtout très difficile d'obtenir par son moyen le nombre de coups dans lesquels A peut parier un contre un de gagner la partie; mais on peut y parvenir facilement de cette manière.

Reprenons la formule (H) trouvée ci-dessus. Dans le cas de a infini, et p étant supposé égal ou plus grand que q, si l'on y suppose $\frac{r+1}{a}\pi=\varphi$ et $\frac{\pi}{a}=d\varphi$, elle devient

$$y_{a,b+2i}=1-\frac{2^{b+2i+2}p^b(pq)^{i+1}}{\pi}\int\frac{d\varphi\sin 2\varphi\sin b\varphi(\cos\varphi)^{b+2i}}{p^2-2pq\cos 2\varphi+q^2},$$

l'intégrale devant être prise depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$. Dans le cas de p moindre que q, la même expression a lieu, pourvu que l'on change le premier terme 1 dans $\frac{p^b}{q^b}$.

Si $p=q$, cette expression devient

$$1-\frac{2}{\pi}\int\frac{d\varphi\sin b\varphi(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi},$$

l'intégrale étant prise depuis φ nul jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$. Supposons maintenant que b et i soient de grands nombres. Le maximum de la fonction

$$\frac{\varphi(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi}$$

répond à $\varphi=0$, ce qui donne 1 pour ce maximum. La fonction décroît ensuite avec une extrême rapidité, et, dans l'intervalle où elle a une valeur sensible, on peut supposer

$$\log\sin\varphi=\log\varphi+\log(1-\tfrac{1}{6}\varphi^2)=\log\varphi-\tfrac{1}{6}\varphi^2,$$

$$\begin{aligned}\log(\cos\varphi)^{b+2i+1}&=(b+2i+1)\log(1-\tfrac{1}{2}\varphi^2+\tfrac{1}{24}\varphi^4)\\&=-\frac{b+2i+1}{2}\varphi^2-\frac{b+2i+1}{12}\varphi^4,\end{aligned}$$

ce qui donne, en négligeant les sixièmes puissances de φ et ses quatrièmes puissances qui ne sont pas multipliées par $b+2i+1$,

$$\log\frac{(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi}=-\log\varphi-\frac{b+2i+\frac{2}{3}}{2}\varphi^2-\frac{b+2i+\frac{2}{3}}{12}\varphi^4.$$

En faisant donc

$$a^2=\frac{b+2i+\frac{2}{3}}{2},$$

on aura

$$\frac{(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi}=\frac{1-\frac{a^2}{6}\varphi^4}{\varphi}c^{-a^2\varphi^2};$$

partant,

$$\int\frac{d\varphi\sin b\varphi(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi}=\int\frac{d\varphi\left(1-\frac{a^2}{6}\varphi^4\right)}{\varphi}\sin b\varphi\, c^{-a^2\varphi^2}.$$

Cette dernière intégrale peut être prise depuis $\varphi=0$ jusqu'à φ infini; car elle doit être prise depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$; or, a^2 étant un nombre considérable, $c^{-a^2\varphi^2}$ devient excessivement petit, lorsqu'on y fait $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, en sorte qu'on peut le supposer nul, vu l'extrême rapidité avec laquelle cette exponentielle diminue, lorsque φ augmente. Maintenant on a

$$\frac{d}{db}\int\frac{d\varphi\left(1-\frac{a^2}{6}\varphi^4\right)}{\varphi}\sin b\varphi\, c^{-a^2\varphi^2}=\int d\varphi\left(1-\frac{a^2}{6}\varphi^4\right)\cos b\varphi\, c^{-a^2\varphi^2};$$

on a d'ailleurs, par le n° 25 du Livre Ier,

$$\int d\varphi\cos b\varphi\, c^{-a^2\varphi^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}c^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

$$\int\varphi^4\,d\varphi\cos b\varphi\, c^{-a^2\varphi^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\frac{d^4 c^{-\frac{b^2}{4a^2}}}{db^4}$$

$$=\frac{3\sqrt{\pi}}{8a^5}c^{-\frac{b^2}{4a^2}}\left(1-\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^4}{12.a^4}\right),$$

d'où l'on tire, en supposant $\frac{b^2}{4a^2}=t^2$,

$$\frac{\int d\varphi\sin b\varphi(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi}=\sqrt{\pi}\left[\int dt\, c^{-t^2}-\frac{tc^{-t^2}}{8a^2}\left(1-\frac{2}{3}t^2\right)\right].$$

Ainsi la probabilité que A gagnera la partie dans le nombre $b+2i$ de coups est

$$1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int dt\, c^{-t^2}-\frac{\mathrm{T}\, c^{-\mathrm{T}^2}}{8a^2}\left(1-\tfrac{2}{3}\mathrm{T}^2\right)\right],$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à $t=\mathrm{T}$, T^2 étant égal à $\frac{b^2}{4a^2}\cdot$

Si l'on cherche le nombre des coups dans lesquels on peut parier un contre un que cela aura lieu, on fera cette probabilité égale à $\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$\int dt\, c^{-t^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}+\frac{\mathrm{T}\, c^{-\mathrm{T}^2}}{8a^2}\left(1-\tfrac{2}{3}\mathrm{T}^2\right).$$

Nommons T' la valeur de t, qui correspond à

$$\int dt\, c^{-t^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

et supposons

$$\mathrm{T}=\mathrm{T}'+q,$$

q étant de l'ordre $\frac{1}{a^2}\cdot$ L'intégrale $\int dt\, c^{-t^2}$ sera augmentée à très peu près de $q c^{-\mathrm{T}'^2}$, ce qui donne

$$q c^{-\mathrm{T}'^2}=\frac{\mathrm{T}'\, c^{-\mathrm{T}'^2}}{8a^2}\left(1-\tfrac{2}{3}\mathrm{T}'^2\right);$$

on aura donc

$$\mathrm{T}^2=\mathrm{T}'^2+\frac{\mathrm{T}'^2}{4a^2}\left(1-\tfrac{2}{3}\mathrm{T}'^2\right).$$

Ayant ainsi T^2 aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{a^4}$, l'équation

$$2a^2=b+2i+\tfrac{2}{3}=\frac{b^2}{2\mathrm{T}^2}$$

donnera, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{a^2}$,

$$b+2i=\frac{b^2}{2\mathrm{T}'^2}-\tfrac{7}{6}+\tfrac{1}{3}\mathrm{T}'^2.$$

Pour déterminer la valeur de T'^2, nous observerons qu'ici T' est plus petit que $\frac{1}{2}$; ainsi l'équation transcendante et intégrale

$$\int dt\, c^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

peut être transformée dans la suivante :

$$T' - \frac{1}{3}T'^3 + \frac{1}{1.2}\frac{1}{5}T'^5 - \frac{1}{1.2.3}\frac{1}{7}T'^7 + \ldots = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

En résolvant cette équation, on trouve

$$T'^2 = 0,2102497.$$

En supposant $b = 100$, on aura

$$b + 2i = 23780,14.$$

Il y a donc alors du désavantage à parier un contre un que A gagnera la partie dans 23780 coups, mais il y a de l'avantage à parier qu'il la gagnera dans 23781 coups.

11. Un nombre $n+1$ de joueurs jouent ensemble aux conditions suivantes. Deux d'entre eux jouent d'abord, et celui qui perd se retire après avoir mis un franc au jeu, pour n'y rentrer qu'après que tous les autres joueurs ont joué ; ce qui a lieu généralement pour tous les joueurs qui perdent, et qui par là deviennent les derniers. Celui des deux premiers joueurs qui a gagné joue avec le troisième, et, s'il le gagne, il continue de jouer avec le quatrième, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il perde, ou jusqu'à ce qu'il ait gagné successivement tous les joueurs. Dans ce dernier cas, la partie est finie. Mais, si le joueur gagnant au premier coup est vaincu par l'un des autres joueurs, le vainqueur joue avec le joueur suivant, et continue de jouer jusqu'à ce qu'il soit vaincu, ou jusqu'à ce qu'il ait gagné de suite tous les joueurs ; le jeu continue ainsi jusqu'à ce qu'il y ait un joueur qui gagne de suite tous les autres, ce qui finit la partie, et alors le joueur qui la gagne emporte tout ce qui a été mis au jeu.

Cela posé, déterminons d'abord la probabilité que le jeu finira précisément au coup x; nommons z_x cette probabilité. Pour que la partie finisse au coup x, il faut que le joueur qui entre au jeu au coup $x-n+1$ gagne ce coup et les $n-1$ coups suivants; or il peut entrer contre un joueur qui n'a gagné qu'un seul coup : en nommant P la probabilité de cet événement, $\frac{P}{2^n}$ sera la probabilité correspondante que la partie finira au coup x. Mais la probabilité z_{x-1} que la partie finira au coup $x-1$ est évidemment $\frac{P}{2^{n-1}}$. Car il est nécessaire pour cela qu'il y ait un joueur qui ait gagné un coup, au coup $x-n+1$, et qui, jouant à ce coup, le gagne et les $n-2$ coups suivants; et la probabilité de chacun de ces événements étant P et $\frac{1}{2^{n-1}}$, la probabilité de l'événement composé sera $\frac{P}{2^{n-1}}$; on aura donc $z_{x-1}=\frac{P}{2^{n-1}}$, et, par conséquent,

$$\frac{P}{2^n}=\tfrac{1}{2}z_{x-1};$$

$\frac{1}{2}z_{x-1}$ est donc la probabilité que la partie finira au coup x, relative à ce cas.

Si le joueur qui entre au jeu au coup $x-n+1$ joue à ce coup contre un joueur qui a déjà gagné deux coups, en nommant P′ la probabilité de ce cas, $\frac{P'}{2^n}$ sera la probabilité relative à ce cas que la partie finira au coup x. Mais on a

$$\frac{P'}{2^{n-2}}=z_{x-2};$$

car, pour que la partie finisse au coup $x-2$, il faut qu'au coup $x-n+1$ l'un des joueurs ait déjà gagné deux coups, et qu'il gagne ce coup et les $n-3$ coups suivants. On a donc

$$\frac{P'}{2^n}=\frac{1}{2^2}z_{x-2};$$

$\frac{1}{2^2}z_{x-2}$ est donc la probabilité que la partie finira au coup x, relative à ce cas; et ainsi de suite.

En rassemblant toutes ces probabilités partielles, on aura

$$z_x = \frac{1}{2} z_{x-1} + \frac{1}{2^2} z_{x-2} + \frac{1}{2^3} z_{x-3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} z_{x-n+1}.$$

La fonction génératrice de z_x est, par le Livre Ier,

$$\frac{\psi(t)}{1 - \frac{1}{2} t - \frac{1}{2^2} t^2 - \ldots - \frac{1}{2^{n-1}} t^{n-1}}$$

ou

$$\frac{\frac{1}{2}\psi(t)(2-t)}{1 - t + \frac{1}{2^n} t^n}.$$

Pour déterminer $\psi(t)$, nous observerons que la partie ne peut finir au plus tôt qu'au coup n, et que la probabilité pour cela est $\frac{1}{2^{n-1}}$; car il faut que le vainqueur au premier coup gagne les $n-1$ coups suivants; $\psi(t)$ ne doit donc renfermer que la puissance n de t, et $\frac{1}{2^{n-1}}$ doit être le coefficient de cette puissance, ce qui donne $\psi(t) = \frac{t^n}{2^{n-1}}$; ainsi la fonction génératrice de z_x est

$$\frac{\frac{1}{2^n} t^n (2-t)}{1 - t + \frac{1}{2^n} t^n}.$$

La somme des coefficients des puissances de t jusqu'à l'infini, dans le développement de cette fonction, est la probabilité que la partie doit finir après une infinité de coups; or on a cette somme en faisant $t = 1$ dans la fonction, ce qui la réduit à l'unité; il est donc certain que la partie doit finir.

On aura la probabilité que la partie sera finie au coup x ou avant ce coup, en déterminant le coefficient de t^x dans le développement de la fonction précédente, divisée par $1 - t$; la fonction génératrice de cette probabilité est donc

$$\frac{\frac{1}{2^n} t^n (2-t)}{(1-t)\left(1 - t + \frac{1}{2^n} t^n\right)}.$$

Donnons à la fonction génératrice de z_x cette forme

$$\frac{1}{2^n}\,\frac{t^n(2-t)}{1-t}\left[1-\frac{1}{2^n}\,\frac{t^n}{1-t}+\frac{1}{2^{2n}}\,\frac{t^{2n}}{(1-t)^2}-\ldots\right];$$

le coefficient de t^x dans $\dfrac{t^{rn}(2-t)}{2^{rn}(1-t)^r}$ est

$$\frac{1}{2^{rn}}\,\frac{(x-rn+1)(x-rn+2)\ldots(x-rn+r-2)}{1.2.3\ldots(r-1)}(x-rn+2r-2);$$

on a donc

$$z_x=\frac{1}{2^n}-\frac{x-2n+1}{2^{2n}}+\frac{x-3n+1}{1.2.2^{3n}}(x-3n+4)$$
$$-\frac{(x-4n+1)(x-4n+2)}{1.2.3.2^{4n}}(x-4n+6)+\ldots,$$

expression qui n'est relative qu'à x plus grand que n, et dans laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes qu'il y a d'unités entières dans le quotient $\frac{x}{n}$. Lorsque $x=n$, on a $z_x=\frac{1}{2^{n-1}}$.

En développant de la même manière la fonction génératrice de la probabilité que la partie finira avant ou au coup x, on trouvera pour l'expression de cette probabilité

$$\frac{x-n+2}{2^n}-\frac{x-2n+1}{1.2.2^{2n}}(x-2n+4)$$
$$+\frac{(x-3n+1)(x-3n+2)}{1.2.3.2^{3n}}(x-3n+6)-\ldots,$$

cette expression ayant lieu dans le cas même de $x=n$.

Déterminons maintenant les probabilités respectives des joueurs pour gagner la partie au coup x. Soit $y_{0,x}$ celle du joueur qui a gagné le premier coup. Soient $y_{1,x}, y_{2,x}, \ldots, y_{n-1,x}$ celles des joueurs suivants, et $y_{n,x}$ celle du joueur qui a perdu au premier coup, et qui par là est devenu le dernier. Désignons les joueurs par (0), (1), (2), ..., $(n-1)$, (n). Cela posé, la probabilité $y_{r,x}$ du joueur (r) devient $y_{r-1,x-1}$, si au second coup le joueur (0) est vaincu par le joueur (1);

car il est visible que (r) se trouve alors, par rapport au vainqueur (1), dans la même position où était $(r-1)$ par rapport au vainqueur (0); seulement, il y a un coup de moins à jouer pour arriver au coup x, ce qui change x dans $x-1$. Présentement la probabilité que le joueur (0) sera vaincu par (1) est $\frac{1}{2}$; ainsi $\frac{1}{2}y_{r-1,x-1}$ est la probabilité du joueur (r) pour gagner la partie au coup x, relative au cas où (0) est vaincu par (1). Si (0) n'est vaincu que par (2), $y_{r,x}$ devient $y_{r-2,x-2}$, et la probabilité de cet événement étant $\frac{1}{4}$, on a $\frac{1}{4}y_{r-2,x-2}$ pour la probabilité du joueur (r) de gagner la partie au coup x, relative à ce cas. Si le joueur (0) n'est vaincu que par le joueur (r), $y_{r,x}$ devient $y_{0,x-r}$, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{2^r}$; ainsi $\frac{1}{2^r}y_{0,x-r}$ est la probabilité du joueur (r) pour gagner la partie au coup x, relative à ce cas. Si le joueur (0) n'est vaincu que par le joueur $(r+1)$, $y_{r,x}$ se change dans $y_{n-1,x-r-1}$; car alors le joueur (r) se trouve, par rapport au vainqueur, dans la position primitive du joueur $(n-1)$ par rapport au joueur (0); seulement il ne reste que $x-r-1$ coups à jouer pour arriver au coup x. Or la probabilité que (0) ne sera vaincu que par le joueur $(r+1)$ est $\frac{1}{2^{r+1}}$; $\frac{1}{2^{r+1}}y_{n-1,x-r-1}$ est donc la probabilité de (r) pour gagner la partie au coup x, relative à ce cas. En continuant ainsi, et rassemblant toutes ces probabilités partielles, on aura la probabilité entière $y_{r,x}$ du joueur (r) pour gagner la partie, ce qui donne l'équation suivante :

$$y_{r,x} = \frac{1}{2}y_{r-1,x-1} + \frac{1}{2^2}y_{r-2,x-2} + \ldots + \frac{1}{2^r}y_{0,x-r} + \frac{1}{2^{r+1}}y_{n-1,x-r-1}$$
$$+ \frac{1}{2^{r+2}}y_{n-2,x-r-2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}y_{r+1,x-n+1}.$$

Cette expression a lieu depuis $r=1$ jusqu'à $r=n-2$. Elle donne

$$\frac{1}{2}y_{r-1,x-1} = \frac{1}{2^2}y_{r-2,x-2} + \frac{1}{2^3}y_{r-3,x-3} + \ldots + \frac{1}{2^n}y_{r,x-n}.$$

En retranchant cette équation de la précédente, on aura celle-ci aux différences partielles,

$$(1)\qquad y_{r,x} - y_{r-1,x-1} + \frac{1}{2^n} y_{r,x-n} = 0;$$

cette équation s'étend depuis $r = 2$ jusqu'à $r = n - 2$.

On a, par le raisonnement précédent, l'équation suivante :

$$y_{n-1,x} = \frac{1}{2} y_{n-2,x-1} + \frac{1}{2^2} y_{n-3,x-2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} y_{0,x-n+1}.$$

Mais l'expression précédente de $y_{r,x}$ donne

$$\frac{1}{2} y_{n-2,x-1} = \frac{1}{2^2} y_{n-3,x-2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} y_{0,x-n+1} + \frac{1}{2^n} y_{n-1,x-n}.$$

En retranchant cette équation de la précédente, on aura

$$y_{n-1,x} - y_{n-2,x-1} + \frac{1}{2^n} y_{n-1,x-n} = 0;$$

ainsi l'équation (1) subsiste dans le cas de $r = n - 1$.

Le raisonnement précédent conduit encore à cette équation

$$y_{n,x} = \frac{1}{2} y_{n-1,x-1} + \frac{1}{2^2} y_{n-2,x-2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} y_{1,x-n+1},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2} y_{n,x-1} = \frac{1}{2^2} y_{n-1,x-2} + \ldots + \frac{1}{2^n} y_{1,x-n}.$$

En retranchant cette équation de celle-ci, que donne l'expression générale de $y_{r,x}$,

$$y_{1,x} = \frac{1}{2} y_{0,x-1} + \frac{1}{2^2} y_{n-1,x-2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} y_{2,x-n+1},$$

et faisant $\frac{1}{2}(y_{0,x} + y_{n,x}) = \overline{y}_{0,x}$, on aura

$$y_{1,x} - \overline{y}_{0,x-1} + \frac{1}{2^n} y_{1,x-n} = 0.$$

L'équation (1) subsiste donc encore dans le cas même de $r = 1$, pourvu que l'on y change $y_{0,x}$ dans $\overline{y}_{0,x}$. On doit observer que $\overline{y}_{0,x}$ est la probabilité de gagner la partie au coup x de chacun des deux premiers joueurs, au moment où le jeu commence; car cette probabilité devient, après le premier coup, $y_{0,x}$ ou $y_{n,x}$ suivant que le joueur gagne ou perd, et la probabilité de chacun de ces événements est $\frac{1}{2}$.

Maintenant, la fonction génératrice de l'équation (1) est, par le nº 20 du Livre Ier,

$$(a) \qquad \frac{\varphi(t)}{1 - tt' + \frac{1}{2^n} t^n},$$

t étant relatif à la variable x, et t' étant relatif à la variable r, en sorte que $y_{r,x}$ est le coefficient de $t'^r t^x$ dans le développement de cette fonction; $\varphi(t)$ est une fonction de t qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, nous ferons

$$\mathrm{T} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^n} t^n};$$

la fonction génératrice de $y_{r,x}$ sera le coefficient de t'^r dans le développement de la fonction (a); elle sera donc

$$\varphi(t)\, t^r \mathrm{T}^{r+1}.$$

La probabilité que la partie finira précisément au coup x est évidemment la somme des probabilités de chaque joueur pour la gagner à ce coup; elle est donc

$$2y_{0,x} + y_{1,x} + y_{2,x} + \ldots + y_{n-1,x};$$

par conséquent la fonction génératrice de cette probabilité est

$$\mathrm{T}\,\varphi(t)\,(2 + t\mathrm{T} + t^2\mathrm{T}^2 + \ldots + t^{n-1}\mathrm{T}^{n-1})$$

ou

$$\mathrm{T}\,\varphi(t)\,\frac{2 - t\mathrm{T} - t^n\mathrm{T}^n}{1 - t\mathrm{T}}.$$

En l'égalant à la fonction génératrice de cette probabilité, que nous avons trouvée ci-dessus et qui est

$$\frac{\frac{1}{2^n} t^n (2 - t)}{1 - t + \frac{1}{2^n} t^n},$$

on aura

$$\varphi(t) = \frac{\frac{1}{2^n} t^n (2-t)(1-tT)}{T(2-tT-t^nT^n)\left(1-t+\frac{1}{2^n}t^n\right)}.$$

Ainsi la fonction génératrice de l'équation (1) aux différences partielles est

$$\frac{\frac{1}{2^n} t^n (2-t)(1-tT)}{T(2-tT-t^nT^n)\left(1-t+\frac{1}{2^n}t^n\right)\left(1-tt'+\frac{1}{2^n}t^n\right)};$$

la fonction génératrice de $y_{r.x}$ est donc

$$\frac{\frac{1}{2^n} t^{n+r} (2-t)(1-tT)T^r}{(2-tT-t^nT^n)\left(1-t+\frac{1}{2^n}t^n\right)}.$$

Le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction est la probabilité du joueur (r) de gagner la partie au coup x. On pourra ainsi déterminer cette probabilité par ce développement. La somme de tous ces coefficients jusqu'à x infini est la probabilité du joueur (r) de gagner la partie; or on a cette somme en faisant $t=1$ dans la fonction précédente, ce qui donne $T = \frac{2^n}{1+2^n}$; nommons p cette dernière quantité, et désignons par y_r la probabilité de (r) de gagner la partie; on aura

$$y_r = \frac{(1-p)p^r}{2-p-p^n}.$$

Cette expression s'étend depuis $r=0$ jusqu'à $r=n-1$, pourvu qu'on y change y_0 dans $\overline{y}_0$, $\overline{y}_0$ exprimant la probabilité de gagner la partie des deux premiers joueurs au moment où ils entrent au jeu.

Maintenant, chaque joueur perdant déposant un franc au jeu, déterminons l'avantage des différents joueurs. Il est clair qu'après x coups, il y avait x jetons au jeu; l'avantage du joueur (r) relatif à ces x jetons est le produit de ces jetons par la probabilité $y_{r,x}$ de gagner la partie au coup x; cet avantage est donc $xy_{r,x}$. La valeur de $xy_{r,x}$ est le coefficient de $t^{x-1}\,dt$ dans la différentielle de la fonction génératrice de $y_{r,x}$; en divisant donc cette différentielle par dt et en y supposant ensuite $t=1$, on aura la somme de toutes les valeurs de $xy_{r,x}$ jusqu'à x infini; c'est l'avantage du joueur (r). Mais il faut en retrancher les jetons qu'il met au jeu à chaque coup qu'il perd; or $y_{r,x}$ étant sa probabilité de gagner la partie au coup x, $2^n y_{r,x-n+1}$ sera sa probabilité d'entrer au jeu au coup $x-n+1$, puisque cette dernière probabilité, multipliée par la probabilité $\frac{1}{2^n}$ qu'il gagnera ce coup et les $n-1$ coups suivants est sa probabilité de gagner la partie au coup x. En supposant donc qu'il perde autant de fois qu'il entre au jeu, la somme de toutes les valeurs de $2^n y_{r,x-n+1}$ jusqu'à x infini, serait le désavantage du joueur (r); et comme la somme de toutes les valeurs de $y_{r,x-n+1}$ est égale à la somme de toutes les valeurs de $y_{r,x}$ ou y_r, on aurait $2^n y_r$ ou $\frac{2^n(1-p)p^r}{2-p-p^n}$ pour le désavantage du joueur (r). Mais il ne perd pas chaque fois qu'il entre au jeu, parce qu'il peut entrer au jeu et gagner la partie; il faut donc ôter de $2^n y_r$ la somme de toutes les valeurs de y_x ou y_r, et alors le désavantage de (r) est $\frac{(2^n-1)(1-p)p^r}{2-p-p^n}$. Pour avoir l'avantage entier de (r), il faut retrancher cette dernière quantité de la somme des valeurs de $xy_{r,x}$; en désignant donc par S cette somme, l'avantage du joueur (r) sera

$$\mathrm{S}-\frac{(2^n-1)(1-p)p^r}{2-p-p^n},$$

S étant, comme on l'a vu, la différentielle de la fonction génératrice de $y_{r,x}$ divisée par dt, et dans laquelle on suppose ensuite $t=1$. Dans cette supposition, on a

$$\mathrm{T}=p, \qquad \frac{d\mathrm{T}}{dt}=-np(1-p).$$

Désignons par Y_r l'avantage de (r), on trouvera

$$\mathrm{Y}_r=\frac{np+1-n}{2-p-p^n}p^r\left[(1-p)r+\frac{p^{n+1}+n(1-p)p^n-p}{2-p-p^n}\right].$$

Cette équation servira depuis $r=0$ jusqu'à $r=n-1$, pourvu que l'on y change Y_0 dans $\overline{Y}_0$, $\overline{Y}_0$ étant l'avantage des deux premiers joueurs, au moment où ils entrent au jeu.

Si, au commencement de la partie, chacun des joueurs dépose au jeu une somme a, l'avantage du joueur (r) en sera augmenté de $(n+1)a$, multiplié par la probabilité y_r, que ce joueur gagnera la partie; mais il faut en ôter la mise a de ce joueur; il faut donc, pour avoir alors son avantage, augmenter l'expression précédente de Y_r de la quantité

$$\frac{(n+1)a(1-p)p^r}{2-p-p^n}-a.$$

Lorsque l'avantage de (r) devient négatif, il se change en désavantage.

12. Soit q la probabilité d'un événement simple à chaque coup; on demande la probabilité de l'amener i fois de suite dans le nombre x de coups.

Nommons z_x la probabilité que cet événement composé aura lieu précisément au coup x. Pour cela, il est nécessaire que l'événement simple n'arrive point au coup $x-i$, et qu'il arrive dans les i coups suivants, l'événement composé n'étant point arrivé précédemment. Soit alors P la probabilité que l'événement simple n'arrivera point au coup $x-i-1$. La probabilité correspondante qu'il n'arrivera point au coup $x-i$ sera $(1-q)$P, et la probabilité correspondante que l'événement composé aura lieu précisément au coup x sera $(1-q)\mathrm{P}q^i$. Ce sera la partie de z_x correspondante à ce cas. Mais la probabilité que l'événement composé arrivera au coup $x-1$ est évidemment $\mathrm{P}q^i$; on a donc

$$\mathrm{P}=\frac{z_{x-1}}{q^i};$$

ainsi la valeur partielle de z_x, relative à ce cas, est $(1-q)z_{x-1}$.

Considérons maintenant les cas où l'événement simple arrivera au coup $x-i-1$. Nommons P′ la probabilité qu'il n'arrivera pas au coup $x-i-2$; la probabilité qu'il arrivera dans ce cas au coup $x-i-1$ sera $q\mathrm{P}'$, et la probabilité qu'il n'arrivera pas au coup $x-i$ sera $(1-q)q\mathrm{P}'$; la valeur partielle de z_x relative à ce cas sera donc $(1-q)q\mathrm{P}'q^i$. Mais la probabilité que l'événement composé arrivera précisément au coup $x-2$ est $\mathrm{P}'q^i$: c'est la valeur de z_{x-2}, ce qui donne

$$\mathrm{P}' = \frac{z_{x-2}}{q^i};$$

$(1-q)q z_{x-2}$ est donc la valeur partielle de z_x relative au cas où l'événement simple arrivera au coup $x-i-1$, sans arriver au coup $x-i-2$.

On trouvera de la même manière que $(1-q)q^2 z_{x-3}$ est la valeur partielle de z_x relative au cas où l'événement simple arrivera aux coups $x-i-1$ et $x-i-2$, sans arriver au coup $x-i-3$; et ainsi de suite.

En réunissant toutes ces valeurs partielles de z_x, on aura

$$z_x = (1-q)(z_{x-1} + q z_{x-2} + q^2 z_{x-3} + \ldots + q^{i-1} z_{x-i}).$$

Il est facile d'en conclure que la fonction génératrice de z_x est

$$\frac{q^i(1-qt)t^i}{1-t+(1-q)q^i t^{i+1}},$$

car cette fonction génératrice est

$$\frac{\varphi(t)}{1-(1-q)(t+qt^2+\ldots+q^{i-1}t^i)},$$

ou

$$\frac{\varphi(t)(1-qt)}{1-t+(1-q)q^i t^{i+1}}.$$

La fonction $\varphi(t)$ doit être déterminée par la condition qu'elle ne doit renfermer que la puissance i de t, puisque l'événement composé ne peut commencer à être possible qu'au coup i; de plus, le coefficient de cette puissance est la probabilité q^i que cet événement aura lieu précisément à ce coup.

En divisant la fonction génératrice précédente par $1-t$, on aura

$$\frac{q^i(1-qt)t^i}{(1-t)^2\left[1+\frac{(1-q)q^i t^{i+1}}{1-t}\right]}$$

pour la fonction génératrice de la probabilité que l'événement composé aura lieu avant ou au coup x.

En développant cette fonction, on aura, pour le coefficient de t^{x+i}, la série

$$\begin{aligned}
&q^i[(1-q)x+1]-(1-q)q^{2i}\frac{x-i}{1.2}[(1-q)(x-i-1)+2]\\
&+(1-q)^2q^{3i}\frac{(x-2i)(x-2i-1)}{1.2.3}[(1-q)(x-2i-2)+3]\\
&-(1-q)^3q^{4i}\frac{(x-3i)(x-3i-1)(x-3i-2)}{1.2.3.4}[(1-q)(x-3i-3)+4]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

la série étant continuée jusqu'à ce que l'on arrive à des facteurs négatifs. C'est l'expression de la probabilité que l'événement composé aura lieu au coup $x+i$ ou avant ce coup.

Supposons encore que deux joueurs A et B, dont les adresses respectives pour gagner un coup sont q et $1-q$, jouent à cette condition, que celui des deux qui aura le premier vaincu i fois de suite son adversaire gagnera la partie; on demande les probabilités respectives des deux joueurs pour gagner la partie précisément au coup x.

Soit y_x la probabilité de A, et y'_x celle de B. Le joueur A ne peut gagner la partie au coup x, qu'autant qu'il commence ou recommence à gagner B au coup $x-i+1$, et qu'il continue de le gagner les $i-1$ coups suivants. Or, avant de commencer le coup $x-i+1$, B aura déjà gagné A ou une fois, ou deux fois, ..., ou $i-1$ fois. Dans le premier cas, si l'on nomme P la probabilité de ce cas, $P(1-q)^{i-1}$ sera la probabilité y'_{x-1} de B pour gagner la partie au coup $x-1$, ce qui donne

$$P=\frac{y'_{x-1}}{(1-q)^{i-1}}.$$

Mais si B perd au coup $x - i + 1$ et aux $i - 1$ coups suivants, A gagnera la partie au coup x, et la probabilité de cela est $\mathrm{P}q^i$; $\frac{q^i y'_{x-1}}{(1-q)^{i-1}}$ est donc la partie de y_x relative au premier cas.

Dans le second cas, si l'on nomme P′ sa probabilité, $\mathrm{P}'(1-q)^{i-2}$ sera la probabilité y'_{x-2} de B pour gagner la partie au coup $x - 2$. La probabilité de A pour gagner la partie au coup x, relative à ce cas, est $\mathrm{P}'q^i$; on a donc $\frac{q^i y'_{x-2}}{(1-q)^{i-2}}$ pour cette probabilité.

En continuant ainsi, on aura

$$y_x = \frac{q^i}{(1-q)^i}[(1-q)y'_{x-1} + (1-q)^2 y'_{x-2} + \ldots + (1-q)^{i-1} y'_{x-i+1}].$$

Si l'on change q en $1 - q$, y_x en y'_x, et réciproquement, on aura

$$y'_x = \frac{(1-q)^i}{q^i}(q y_{x-1} + q^2 y_{x-2} + \ldots + q^{i-1} y_{x-i+1}).$$

Maintenant, u étant fonction génératrice de y_x, celle de y'_x sera, par tout ce qui précède,

$$kqut(1 + qt + qt^2 + \ldots + q^{i-2} t^{i-2}),$$

k étant égal à $\frac{(1-q)^i}{q^i}$. Mais l'expression précédente de y'_x ne commençant à avoir lieu que lorsque $x = i + 1$, parce que pour des valeurs plus petites de x, y_{x-1}, y_{x-2}, … sont nuls, il faut, pour compléter l'expression précédente de la fonction génératrice de y'_x, lui ajouter une fonction rationnelle et entière de t, de l'ordre i, et dont les coefficients des puissances de t soient les valeurs de y'_x, lorsque x est égal ou plus petit que i. Or y'_x est nul, lorsque x est moindre que i; et lorsqu'il est égal à i, y'_x est $(1-q)^i$, parce qu'il exprime alors la probabilité de B pour gagner la partie après i coups; la fonction à ajouter est donc $(1-q)^i t^i$; ainsi la fonction génératrice de y'_x est

$$kqut[1 + qt + \ldots + q^{i-2} t^{i-2}] + (1-q)^i t^i.$$

Si l'on nomme u' cette fonction, l'expression de y_x en y'_{x-1}, y'_{x-2}, …, donnera pour la fonction génératrice de y_x, en changeant dans celle de y'_x, k dans $\frac{1}{k}$, q dans $1-q$,

$$\frac{1}{k}(1-q)u't[1+(1-q)t+\ldots+(1-q)^{i-2}t^{i-2}]+q^i t^i.$$

Cette quantité est donc égale à u, d'où l'on tire, en y substituant pour u sa valeur précédente,

$$u=\frac{q^i t^i(1-qt)[1-(1-q)^i t^i]}{1-t+q(1-q)^i t^{i+1}+(1-q)q^i t^{i+1}-q^i(1-q)^i t^{2i}}.$$

En changeant q en $1-q$, on aura la fonction u' génératrice de y'_x. Si l'on divise ces fonctions par $1-t$, on aura les fonctions génératrices des probabilités respectives de A et de B, pour gagner la partie avant ou au coup x.

Si l'on suppose $t=1$ dans u, on aura la probabilité que A gagnera la partie; car il est clair qu'en développant u suivant les puissances de t, et en supposant ensuite $t=1$, la somme de tous les termes de ce développement sera celle de toutes les valeurs de y_x. On trouve ainsi la probabilité de A pour gagner la partie égale à

$$\frac{[1-(1-q)^i]q^{i-1}}{(1-q)^{i-1}+q^{i-1}-q^{i-1}(1-q)^{i-1}};$$

la probabilité de B est donc

$$\frac{(1-q)^{i-1}[1-q^i]}{(1-q)^{i-1}+q^{i-1}-q^{i-1}(1-q)^{i-1}}.$$

Supposons maintenant que les joueurs, à chaque coup qu'ils perdent, déposent un franc au jeu, et déterminons leur sort respectif. Il est clair que le gain du joueur A sera x, s'il gagne la partie au coup x, puisqu'il y aura x francs déposés au jeu; ainsi la probabilité de cet événement étant y_x par ce qui précède, $\mathrm{S}xy_x$ sera l'expression de l'avantage de A, le signe S s'étendant à toutes les valeurs possibles de x. La fonction génératrice de y_x étant u ou $\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}$, T' étant le numérateur de l'expression précédente de u, et T étant son dénominateur, il est facile de voir que l'on aura Sxy_x en différentiant $\frac{T'}{T}$, et en supposant ensuite $t=1$ dans cette différentielle, ce qui donne, avec cette condition,

$$Sxy_x = \frac{dT'}{T\,dt} - \frac{T'\,dT}{T^2\,dt}.$$

Pour avoir le désavantage de A, on observera qu'à chaque coup qu'il joue, la probabilité qu'il perdra, et par conséquent qu'il déposera un franc au jeu, est $1-q$; sa perte est donc le produit de $1-q$ par la probabilité que le coup sera joué; or la probabilité que le coup x sera joué est $1 - Sy_{x-1} - Sy'_{x-1}$; la fonction génératrice de l'unité est ici $\frac{t}{1-t}$, et celle de $Sy_{x-1} + Sy'_{x-1}$ est $\frac{T't + T''t}{T(1-t)}$; T'' étant ce que devient T' lorsqu'on y change q en $1-q$ et réciproquement; ainsi la fonction génératrice du désavantage de A est

$$\frac{(1-q)\,t\,(T - T' - T'')}{(1-t)\,T}.$$

Le numérateur et le dénominateur de cette fonction sont divisibles par $1-t$; de plus, on aura la somme de tous les désavantages de A, ou son désavantage total, en faisant $t=1$ dans cette fonction génératrice; le désavantage total est donc, par les méthodes connues, et en observant que $T' + T'' = T$ lorsque $t = 1$,

$$\frac{(1-q)(dT - dT' - dT'')}{T\,dt},$$

t étant supposé égal à l'unité après les différentiations. Si l'on retranche cette expression de celle de l'avantage total de A, on aura, pour l'expression du sort de ce joueur,

$$\frac{q\,dT' + (1-q)(dT - dT'')}{T\,dt} - \frac{T'\,dT}{T^2\,dt}.$$

Le sort de B sera

$$\frac{(1-q)\,dT'' + q(dT - dT')}{T\,dt} - \frac{T''\,dT}{T^2\,dt},$$

t étant supposé l'unité après les différentiations, ce qui donne

$$T = q(1-q)[q^{i-1} + (1-q)^{i-1} - q^{i-1}(1-q)^{i-1}],$$

$$\frac{dT}{dt} = (i+1)q(1-q)[q^{i-1} + (1-q)^{i-1}] - 2iq^i(1-q)^i - 1,$$

$$T' = (1-q)q^i[1-(1-q)^i],$$

$$\frac{dT'}{dt} = i(1-q)q^i[1-2(1-q)^i] - qq^i[1-(1-q)^i].$$

On aura T″ et $\frac{dT''}{dt}$ en changeant, dans ces deux dernières expressions, q dans $1-q$.

13. Une urne étant supposée contenir $n+1$ boules, distinguées par les n^os^ $0, 1, 2, 3, \ldots, n$, on en tire une boule que l'on remet dans l'urne après le tirage. On demande la probabilité qu'après i tirages la somme des nombres amenés sera égale à s.

Soient $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_i$ les nombres amenés au premier tirage, au second, au troisième, ...; on doit avoir

$$(1) \qquad t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_i = s.$$

$t_2, t_3, \ldots, t_i$ étant supposés ne pas varier, cette équation n'est susceptible que d'une combinaison. Mais, si l'on fait varier à la fois t_1 et t_2, et si l'on suppose que ces variables puissent s'étendre indéfiniment depuis zéro, alors le nombre des combinaisons qui donnent l'équation précédente sera

$$s + 1 - t_3 - t_4 - \ldots - t_i;$$

car t_1 peut s'étendre depuis zéro, ce qui donne

$$t_2 = s - t_3 - t_4 - \ldots - t_i,$$

jusqu'à $s - t_3 - t_4 - \ldots - t_i$, ce qui donne $t_2 = 0$, les valeurs négatives des variables t_1, t_2 devant être exclues.

Maintenant, le nombre $s + 1 - t_3 - t_4 - \ldots - t_i$ est susceptible de plusieurs valeurs, en vertu des variations de $t_3, t_4, \ldots$. Supposons d'abord t_4, t_5, ... invariables, et que t_3 puisse s'étendre indéfiniment depuis zéro; alors, si l'on fait

$$s+1-t_3-t_4-\ldots-t_i=x,$$

en intégrant cette variable dont la différence finie est l'unité, on aura $\frac{x(x-1)}{1.2}$ pour son intégrale; mais, pour avoir la somme de toutes les valeurs de x, il faut, comme l'on sait, ajouter x à cette intégrale; cette somme est donc $\frac{x(x+1)}{1.2}$. Il faut y faire x égal à sa plus grande valeur, que l'on obtient en faisant t_3 nul dans la fonction $s+1-t_3-t_4-\ldots-t_i$: ainsi le nombre total des combinaisons relatives aux variations de t_1, t_2 et t_3 est

$$\frac{(s+2-t_4-t_5-\ldots-t_i)(s+1-t_4-t_5-\ldots-t_i)}{1.2}.$$

En faisant encore dans cette fonction

$$s+2-t_4-t_5-\ldots-t_i=x,$$

elle devient $\frac{x(x-1)}{1.2}$; en l'intégrant depuis $x=0$ et en ajoutant la fonction elle-même à cette intégrale, on aura $\frac{(x+1)x(x-1)}{1.2.3}$; la valeur de x nulle répond à $t_4=s+2-t_5-\ldots-t_i$, et sa plus grande valeur répond à t_4 nul, et par conséquent elle est égale à $s+2-t_5-\ldots-t_i$; en substituant donc pour x cette valeur dans l'intégrale précédente, on aura

$$\frac{(s+3-t_5-t_6-\ldots-t_i)(s+2-t_5-t_6-\ldots-t_i)(s+1-t_5-t_6-\ldots-t_i)}{1.2.3}$$

pour la somme de toutes les combinaisons relatives aux variations de t_1, t_2, t_3, t_4. En continuant ainsi, on trouvera généralement que le nombre total des combinaisons qui donnent l'équation (1), dans la supposition où les variables t_1, t_2, ..., t_i peuvent s'étendre indéfiniment depuis zéro, est

$$(a)\qquad \frac{(s+i-1)(s+i-2)(s+i-3)\ldots(s+1)}{1.2.3\ldots(i-1)};$$

mais, dans la question présente, ces variables ne peuvent pas s'étendre au delà de n. Pour exprimer cette condition, nous observerons que, l'urne renfermant $n+1$ boules, la probabilité d'extraire l'une quelconque d'entre elles est $\frac{1}{n+1}$; ainsi la probabilité de chacune des valeurs de t_1, depuis zéro jusqu'à n, est $\frac{1}{n+1}$. La probabilité des valeurs de t_1, égales ou supérieures à $n+1$, est nulle; on peut donc la représenter par $\frac{1-l^{n+1}}{n+1}$, pourvu que l'on fasse $l=1$ dans le résultat du calcul; alors la probabilité d'une valeur quelconque de t_1 peut être généralement exprimée par $\frac{1-l^{n+1}}{n+1}$, pourvu qu'on ne fasse commencer l, que lorsque t_1 aura atteint $n+1$, et qu'on le suppose à la fin égal à l'unité; il en est de même des probabilités des autres variables. Maintenant, la probabilité de l'équation (1) est le produit des probabilités des valeurs de $t_1, t_2, t_3, \ldots$; cette probabilité est donc $\left(\frac{1-l^{n+1}}{n+1}\right)^i$; le nombre des combinaisons qui donnent cette équation, multipliées par leurs probabilités respectives, est ainsi le produit de la fraction (a) par $\left(\frac{1-l^{n+1}}{n+1}\right)^i$, ou

$$(b) \qquad \frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+i-1)}{1.2.3\ldots(i-1)}\left(\frac{1-l^{n+1}}{n+1}\right)^i;$$

mais il faut, dans le développement de cette fonction, n'appliquer l^{n+1} qu'aux combinaisons dans lesquelles une des variables commence à surpasser n: il faut n'appliquer l^{2n+2} qu'aux combinaisons dans lesquelles deux des variables commencent à surpasser n, et ainsi du reste. Si dans l'équation (1) on suppose qu'une des variables, t_1, par exemple, surpasse n, en faisant $t_1 = n+1+t'_1$, cette équation devient

$$s-n-1 = t'_1 + t_2 + t_3 + \ldots,$$

la variable t'_1 pouvant s'étendre indéfiniment. Si deux des variables telles que t_1 et t_2 surpassent n, en faisant

$$t_1 = n+1+t'_1, \qquad t_2 = n+1+t'_2,$$

l'équation devient

$$s - 2n - 2 = t'_1 + t'_2 + t_3 + \ldots,$$

et ainsi de suite. On doit donc, dans la fonction (a) que nous avons dérivée de l'équation (1), diminuer s de $n+1$, relativement au système des variables $t'_1, t_2, t_3, \ldots$. On doit le diminuer de $2n+2$, relativement au système des variables $t'_1, t'_2, t_3, \ldots$, et ainsi du reste. Il faut par conséquent, dans le développement de la fonction (b) par rapport aux puissances de l, diminuer, dans chaque terme, s de l'exposant de la puissance de l; en faisant ensuite $l = 1$, cette fonction devient

$$(c)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+i-1)}{1.2.3\ldots(i-1)(n+1)^i} - \frac{i(s-n)(s-n+1)\ldots(s+i-n-2)}{1.2.3\ldots(i-1)(n+1)^i} \\ &\quad + \frac{i(i-1)}{1.2}\,\frac{(s-2n-1)(s-2n)\ldots(s+i-2n-3)}{1.2.3\ldots(i-1)(n+1)^i} - \ldots, \end{aligned} \right.$$

la série devant être continuée jusqu'à ce que l'un des facteurs $s-n$, $s-2n-1$, $s-3n-2, \ldots$ devienne nul ou négatif.

Cette formule donne la probabilité d'amener un nombre donné s, en projetant i dés d'un nombre $n+1$ de faces chacun, le plus petit nombre marqué sur ces faces étant 1. Il est visible que cela revient à supposer dans l'urne précédente tous les nombres des boules augmentés de l'unité, et alors la probabilité d'amener le nombre $s+i$ dans i tirages est la même que celle d'amener le nombre s dans le cas que nous venons de considérer; or, en faisant $s+i=s'$, on a $s=s'-i$; la formule (c) donnera donc, pour la probabilité d'amener le nombre s' en projetant les i dés,

$$\begin{aligned} &\frac{(s'-1)(s'-2)\ldots(s'-i+1)}{1.2.3\ldots(i-1)(n+1)^i} - \frac{i(s'-n-2)(s'-n-3)\ldots(s'-i-n)}{1.2.3\ldots(i-1)(n+1)^i} \\ &\quad + \frac{i(i-1)}{1.2}\,\frac{(s'-2n-3)(s'-2n-4)\ldots(s'-i-2n-1)}{1.2.3\ldots(i-1)(n+1)^i} - \ldots. \end{aligned}$$

La formule (c), appliquée au cas où s et n sont des nombres infinis, se transforme dans la suivante :

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)n}\left[\left(\frac{s}{n}\right)^{i-1} - i\left(\frac{s}{n}-1\right)^{i-1} + \frac{i(i-1)}{1.2}\left(\frac{s}{n}-2\right)^{i-1} - \ldots\right].$$

Cette expression peut servir à déterminer la probabilité que la somme des inclinaisons à l'écliptique d'un nombre i d'orbites sera comprise dans des limites données, en supposant que, pour chaque orbite, toutes les inclinaisons depuis zéro jusqu'à l'angle droit soient également possibles. En effet, si l'on conçoit que l'angle droit $\frac{1}{2}\pi$ soit divisé en un nombre infini n de parties égales, et que s renferme un nombre infini de ces parties, en nommant φ la somme des inclinaisons des orbites, on aura

$$\frac{s}{n} = \frac{\varphi}{\frac{1}{2}\pi}.$$

En multipliant donc l'expression précédente par ds ou par $\frac{n\,d\varphi}{\frac{1}{2}\pi}$, et en l'intégrant depuis $\varphi - \varepsilon$ jusqu'à $\varphi + \varepsilon$, on aura

$$(o)\quad \frac{1}{1.2.3\ldots i}\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\varphi+\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^i - i\left(\frac{\varphi+\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}-1\right)^i + \frac{i(i-1)}{1.2}\left(\frac{\varphi+\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}-2\right)^i - \ldots \\ &-\left(\frac{\varphi-\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^i + i\left(\frac{\varphi-\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}-1\right)^i - \frac{i(i-1)}{1.2}\left(\frac{\varphi-\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}-2\right)^i + \ldots \end{aligned}\right\};$$

c'est l'expression de la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites sera comprise dans les limites $\varphi - \varepsilon$ et $\varphi + \varepsilon$.

Appliquons cette formule aux orbites des planètes. La somme des inclinaisons des orbites des planètes à celle de la Terre était de $91^\circ,4187$ au commencement de 1801 : il y a dix orbites, sans y comprendre l'écliptique; on a donc ici $i = 10$. Nous ferons ensuite

$$\varphi - \varepsilon = 0,$$
$$\varphi + \varepsilon = 91^\circ,4187.$$

La formule précédente devient ainsi, en observant que $\frac{1}{2}\pi$ ou le quart de la circonférence est de 100°,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots10}(0,914187)^{10}.$$

C'est l'expression de la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites serait comprise dans les limites zéro et $91^\circ,4187$, si toutes les inclinaisons étaient également possibles. Cette probabilité est donc

0,00000011235. Elle est déjà très petite; mais il faut encore la combiner avec la probabilité d'une circonstance très remarquable dans le système du monde, et qui consiste en ce que toutes les planètes se meuvent dans le même sens que la Terre. Si les mouvements directs et rétrogrades sont supposés également possibles, cette dernière probabilité est $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; il faut donc multiplier 0,00000011235 par $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$, pour avoir la probabilité que tous les mouvements des planètes et de la Terre seront dirigés dans le même sens, et que la somme de leurs inclinaisons à l'orbite de la Terre sera comprise dans les limites zéro et $91^\circ,4187$; on aura ainsi $\frac{1,0972}{(10)^{10}}$ pour cette probabilité, ce qui donne $1 - \frac{1,0972}{(10)^{10}}$ pour la probabilité que cela n'a pas dû avoir lieu, si toutes les inclinaisons, ainsi que les mouvements directs et rétrogrades, ont été également faciles. Cette probabilité approche tellement de la certitude, que le résultat observé devient invraisemblable dans cette hypothèse; ce résultat indique donc, avec une très grande probabilité, l'existence d'une cause primitive qui a déterminé les mouvements des planètes à se rapprocher du plan de l'écliptique ou, plus naturellement, du plan de l'équateur solaire et à se mouvoir dans le sens de la rotation du Soleil. Si l'on considère ensuite que les dix-huit satellites observés jusqu'ici font leur révolution dans le même sens, et que les rotations observées au nombre de treize dans les planètes, les satellites et l'anneau de Saturne, sont encore dirigées dans le même sens; enfin, si l'on considère que la moyenne des inclinaisons des orbes de ces astres et de leurs équateurs à l'équateur solaire est fort éloignée d'atteindre un demi-angle droit, on verra que l'existence d'une cause commune, qui a dirigé tous ces mouvements dans le sens de la rotation du Soleil et sur des plans peu inclinés à celui de son équateur, est indiquée avec une probabilité bien supérieure à celle du plus grand nombre des faits historiques sur lesquels on ne se permet aucun doute.

Voyons maintenant si cette cause a influé sur le mouvement des comètes. Le nombre de celles qu'on a observées jusqu'à la fin de 1811, en comptant pour la même les diverses apparitions de celle de 1759, s'élève à cent, dont cinquante-trois sont directes, et quarante-sept sont rétrogrades. La somme des inclinaisons des orbites des premières est de $2657^\circ,993$, et celle des inclinaisons des autres orbites est de $2515^\circ,684$: l'inclinaison moyenne de toutes ces orbites est donc de $51^\circ,73677$; par conséquent la somme de toutes les inclinaisons est $\frac{i.\pi}{4} + i.1^\circ,73677$, i étant ici égal à 100. On voit déjà que l'inclinaison moyenne surpassant le demi-angle droit, les comètes, loin de participer à la tendance des corps du système planétaire, pour se mouvoir dans des plans peu inclinés à l'écliptique, paraissent avoir une tendance contraire. Mais la probabilité de cette tendance est très petite. En effet, si l'on suppose, dans la formule (o),

$$\varphi = \frac{i.\pi}{4}, \qquad \varepsilon = i.1^\circ,73677,$$

elle devient

$$(p)\qquad \frac{1}{1.2.3\ldots i.2^i}\left\{\begin{aligned}&\left(i+\frac{4i.1^\circ,73677}{\pi}\right)^i - i\left(i+\frac{4i.1^\circ,73677}{\pi}-2\right)^i\\ &\quad+\frac{i(i-1)}{1.2}\left(i+\frac{4i.1^\circ,73677}{\pi}-4\right)^i-\ldots\\ &\quad-\left(i-\frac{4i.1^\circ,73677}{\pi}\right)^i + i\left(i-\frac{4i.1^\circ,73677}{\pi}-2\right)^i\\ &\quad-\frac{i(i-1)}{1.2}\left(i-\frac{4i.1^\circ,73677}{\pi}-4\right)^i+\ldots\end{aligned}\right\},$$

π étant 200°. C'est l'expression de la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites des i comètes doit être comprise dans les limites $\pm i.1^\circ,73677$. Le nombre des termes de cette formule et la précision avec laquelle il faudrait avoir chacun d'eux en rendent le calcul impraticable ; il faut donc recourir aux méthodes d'approximation développées dans la seconde Partie du Livre Ier. On a, par le n° 42 du même Livre,

$$\frac{(i+r\sqrt{i})^i - i(i+r\sqrt{i}-2)^i + \frac{i(i-1)}{1.2}(i+r\sqrt{i}-4)^i - \ldots}{1.2.3\ldots i.2^i}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\int dr\, c^{-\frac{3}{2}r^2} - \frac{3}{20\,i}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\, r(1-r^2)\, c^{-\frac{3}{2}r^2},$$

les puissances des quantités négatives étant ici exclues, comme elles le sont dans la formule précédente; en faisant donc

$$r\sqrt{i} = \frac{4i.1^\circ,73677}{200^\circ},$$

la formule (p) devient

$$2\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\int dr c^{-\frac{3}{2}r^2} - \frac{3}{10i}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\, r(1-r^2)\, c^{-\frac{3}{2}r^2},$$

l'intégrale étant prise depuis r nul. On trouve ainsi $0,474$ pour la probabilité que l'inclinaison des 100 orbites doit tomber dans les limites $50^\circ \pm 1^\circ,17377$; la probabilité que l'inclinaison moyenne doit être inférieure à l'inclinaison observée est donc $0,737$. Cette probabilité n'est pas assez grande pour que le résultat observé fasse rejeter l'hypothèse d'une égale facilité des inclinaisons des orbites, et pour indiquer l'existence d'une cause primitive qui a influé sur ces inclinaisons, cause que l'on ne peut s'empêcher d'admettre dans les inclinaisons des orbes du système planétaire.

La même chose a lieu par rapport au sens du mouvement. La probabilité que, sur 100 comètes, 47 au plus seront rétrogrades, est la somme des 48 premiers termes du binôme $(p+q)^{100}$, en faisant dans le résultat du calcul $p = q = \frac{1}{2}$. Mais la somme des 50 premiers termes, plus la moitié du 51^e ou du terme moyen, est la moitié du binôme entier, ou de $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^{100}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$; la probabilité cherchée est donc

$$\frac{1}{2} - \frac{100.99\ldots 51}{1.2.3\ldots 50.2^{100}}\left(\frac{1}{2} + \frac{50}{51} + \frac{50.49}{51.52}\right) \quad \text{ou} \quad = \frac{1}{2} - \frac{1.2.3\ldots 100.1594}{(1.2.3\ldots 50)^2.2^{100}.663}.$$

En vertu du théorème

$$1.2.3\ldots s = s^{s+\frac{1}{2}} c^{-s}\left(1 + \frac{1}{12s} + \ldots\right)\sqrt{2\pi},$$

on a, à très peu près,

$$1.2.3\ldots 100 = (100)^{100+\frac{1}{2}} c^{-100}\left(1 + \frac{1}{1200}\right)\sqrt{2\pi},$$

$$2^{100}(1.2.3\ldots 50)^2 = 100^{100+1} c^{-100}\left(1 + \frac{1}{300}\right)\pi.$$

La probabilité précédente devient ainsi

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{50\pi}} \frac{1197.1594}{1200.663} = 0,3046.$$

Cette probabilité est beaucoup trop grande pour indiquer une cause qui ait favorisé, dans l'origine, les mouvements directs. Ainsi la cause qui a déterminé le sens des mouvements de révolution et de rotation des planètes et des satellites ne paraît pas avoir influé sur le mouvement des comètes.

14. La méthode du numéro précédent a l'avantage de s'étendre au cas où le nombre des boules de l'urne qui portent le même numéro n'est pas égal à l'unité, mais varie suivant une loi quelconque. Concevons, par exemple, qu'il n'y ait qu'une boule portant le n° 0, qu'une boule portant le n° 1, et ainsi de suite jusqu'au n° r inclusivement. Supposons de plus qu'il y ait deux boules portant le n° $r+1$, deux boules portant le n° $r+2$, et ainsi de suite jusqu'au n° n inclusivement. Le nombre total des boules de l'urne sera $2n-r+1$, la probabilité d'en extraire un des numéros inférieurs à $r+1$ sera donc $\frac{1}{2n-r+1}$, et la probabilité d'en extraire le n° $r+1$ ou l'un des numéros supérieurs sera $\frac{2}{2n-r+1}$: nous la représenterons par $\frac{1+l^{r+1}}{2n-r+1}$; mais nous ferons $l=1$ dans le résultat du calcul. Quoiqu'il n'y ait point de numéros au delà du n° n, nous pouvons cependant considérer dans l'urne des numéros supérieurs à n, jusqu'à l'infini, pourvu que nous donnions à leur extraction une probabilité nulle ; nous pourrons donc représenter cette probabilité par $\frac{1+l^{r+1}-2l^{n+1}}{2n-r+1}$, en faisant $l=1$ dans le résultat du calcul. Par cet artifice, nous pourrons représenter généralement la probabilité d'un numéro quelconque par l'expression précédente, pourvu que nous ne fassions commencer l^{r+1} que lorsqu'un des numéros commencera à surpasser r, et que nous ne fassions commencer l^{n+1} que lorsqu'un des numéros commencera à surpasser n. Cela posé, on trouvera, en appliquant ici les raisonnements du numéro précédent, que la probabilité d'amener le nombre s dans i tirages est égale à

$$\frac{(s+i-1)(s+i-2)(s+i-3)\ldots(s+1)}{1.2.3\ldots(i-1)(2n-r+1)^i}(1+l^{r+1}-2l^{n+1})^i,$$

pourvu que, dans le développement de cette fonction suivant les puissances de l, on diminue dans chaque terme s de l'exposant de la puissance de l, qu'on suppose ensuite $l=1$ et qu'on arrête la série lorsque l'on parvient à des facteurs négatifs.

15. Appliquons maintenant cette méthode à la recherche du résultat moyen que doit donner un nombre quelconque d'observations dont les lois de facilité des erreurs sont connues. Pour cela, nous allons résoudre le problème suivant :

Soient i quantités variables et positives $t, t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}$, dont la somme soit s, et dont la loi de possibilité soit connue ; on propose de trouver la somme des produits de chaque valeur que peut recevoir une fonction donnée $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$ de ces variables, multipliée par la probabilité correspondante à cette valeur.

Supposons, pour plus de généralité, que les fonctions qui expriment les possibilités des variables $t, t_1, \ldots$ soient discontinues, et représentons par $\varphi(t)$ la possibilité de t, depuis $t=0$ jusqu'à $t=q$, par $\varphi'(t)+\varphi(t)$ sa possibilité depuis $t=q$ jusqu'à $t=q'$, par $\varphi''(t)+\varphi'(t)+\varphi(t)$ sa possibilité depuis $t=q'$ jusqu'à $t=q''$, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Désignons ensuite les mêmes quantités relatives aux variables t_1, $t_2, \ldots$ par les mêmes lettres, en écrivant respectivement au bas les nombres 1, 2, 3, ..., en sorte que $q_1, q'_1, \ldots; \varphi_1(t_1), \varphi'_1(t_1), \ldots$ correspondent, relativement à t_1, à ce que $q, q', \ldots, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots$ sont respectivement à t, et ainsi de suite. Dans cette manière de représenter les possibilités des variables, il est clair que la fonction $\varphi(t)$ a lieu depuis $t=0$ jusqu'à t infini ; que la fonction $\varphi'(t)$ a lieu depuis $t=q$ jusqu'à t infini, et ainsi de suite. Pour reconnaître les valeurs de t, t_1, $t_2, \ldots$, lorsque ces diverses fonctions commencent à avoir lieu, nous multiplierons, conformément à la méthode exposée dans les numéros précédents, $\varphi(t)$ par l^0 ou l'unité, $\varphi'(t)$ par l^q, $\varphi''(t)$ par $l^{q'}$, ...; nous multiplierons pareillement $\varphi_1(t_1)$ par l'unité, $\varphi'_1(t_1)$ par l^{q_1}, et ainsi de suite; les exposants des puissances de l indiqueront alors ces valeurs. Il suffira ensuite de faire $l=1$ dans le dernier résultat du calcul. Au moyen de ces artifices très simples, on peut facilement résoudre le problème proposé.

La probabilité de la fonction $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$ est évidemment égale au produit des probabilités de $t, t_1, t_2, \ldots$, en sorte que, si l'on substitue pour t sa valeur $s - t_1 - t_2 - \ldots$, que donne l'équation

$$t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{i-1} = s,$$

le produit de la fonction proposée par sa probabilité sera

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned}
&\psi(s - t_1 - t_2 - \ldots, t_1, t_2, \ldots)\\
&\quad \times[\varphi(s - t_1 - t_2 - \ldots) + l^q\varphi'(s - t_1 - t_2 - \ldots) + l^{q'}\varphi''(s - t_1 - t_2 - \ldots) + \ldots]\\
&\quad \times[\varphi_1(t_1) + l^{q_1}\varphi'_1(t_1) + l^{q'_1}\varphi''_1(t_1) + \ldots]\\
&\quad \times[\varphi_2(t_2) + l^{q_2}\varphi'_2(t_2) + l^{q'_2}\varphi''_2(t_2) + \ldots]\\
&\quad \times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

On aura donc la somme de tous ces produits : 1° en multipliant la quantité précédente par dt_1 et en l'intégrant pour toutes les valeurs dont t_1 est susceptible; 2° en multipliant cette intégrale par dt_2 et en l'intégrant pour toutes les valeurs dont t_2 est susceptible, et ainsi de suite jusqu'à la dernière variable t_{i-1}; mais ces intégrations successives exigent quelques attentions particulières.

Considérons un terme quelconque de la quantité (A), tel que

$$l^{q+q_1+q'_2+\cdots}\psi(s - t_1 - t_2 - \ldots, t_1, t_2, \ldots)\,\varphi'(s - t_1 - t_2 - \ldots)\,\varphi'_1(t_1)\,\varphi''_2(t_2)\ldots;$$

en le multipliant par dt_1, il faut intégrer pour toutes les valeurs possibles de t_1; or la fonction $\varphi'(s - t_1 - t_2 - \ldots)$ n'a lieu que lorsque t, dont la valeur est $s - t_1 - t_2 - \ldots$, égale ou surpasse q; la plus grande valeur que t_1 puisse recevoir est donc $s - q - t_2 - t_3 - \ldots$. De plus,

$\varphi'_1(t_1)$ n'ayant lieu que lorsque t_1 est égal ou plus grand que q_1, cette quantité est la plus petite valeur que t_1 puisse recevoir; il faut donc prendre l'intégrale dont il s'agit depuis $t_1 = q_1$ jusqu'à

$$t_1 = s - q - t_2 - t_3 - \ldots;$$

ou, ce qui revient au même, depuis $t_1 - q_1 = 0$ jusqu'à

$$t_1 - q_1 = s - q - q_1 - t_2 - t_3 - \ldots.$$

On trouvera de la même manière qu'en multipliant cette nouvelle intégrale par dt_2, il faudra l'intégrer depuis $t_2 - q'_2 = 0$ jusqu'à

$$t_2 - q'_2 = s - q - q_1 - q'_2 - t_3 - \ldots.$$

En continuant d'opérer ainsi, on arrivera à une fonction de

$$s - q - q_1 - q'_2 - \ldots,$$

dans laquelle il ne restera aucune des variables t, t_1, t_2, ... Cette fonction doit être rejetée, si $s - q - q_1 - q'_2 - \ldots$ est nul ou négatif; car il est visible que, dans ce cas, le système des fonctions $\varphi'(t)$, $\varphi'_1(t_1)$, $\varphi''_2(t_2)$, ... ne peut pas être employé. En effet, les plus petites valeurs de t_1, t_2, ... étant, par la nature de ces fonctions, égales à q_1, q'_2, ..., la plus grande valeur que t puisse recevoir est $s - q_1 - q'_2 - \ldots$; ainsi la plus grande valeur de $t - q$ est

$$s - q - q_1 - q'_2 - \ldots;$$

or la fonction $\varphi'(t)$ ne peut être employée qu'autant que $t - q$ est positif.

De là résulte une solution très simple du problème proposé. Que l'on substitue : 1° $q + t$ au lieu de t dans $\varphi'(t)$, $q' + t$ au lieu de t dans $\varphi''(t)$, $q'' + t$ au lieu de t dans $\varphi'''(t)$ et ainsi de suite; 2° $q_1 + t_1$ au lieu de t_1 dans $\varphi'_1(t_1)$, $q'_1 + t_1$ au lieu de t_1 dans $\varphi''_1(t_1)$, ...; 3° $q_2 + t_2$ au lieu de t_2 dans $\varphi'_2(t_2)$, $q'_2 + t_2$ au lieu de t_2 dans $\varphi''_2(t_2)$, ..., et ainsi de suite; 4° enfin, $k+t$ au lieu de t, k_1+t_1 au lieu de t_1, et ainsi du reste, dans $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$; la fonction (A) deviendra

$$
(\mathrm{A}') \left\{
\begin{aligned}
&\psi(k+s-t_1-t_2-t_3-\ldots, k_1+t_1, k_2+t_2, \ldots)\\
&\times[\varphi(s-t_1-t_2-t_3-\ldots)+l^q\,\varphi'(s+q-t_1-t_2-\ldots)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +l^{q'}\,\varphi''(s+q'-t_2-t_3-\ldots)+\ldots]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\times[\varphi_1(t_1)+l^{q_1}\varphi'_1(q_1+t_1)+l^{q'_1}\varphi''_1(q'_1+t_1)+\ldots]\\
&\times[\varphi_2(t_2)+l^{q_2}\varphi'_2(q_2+t_2)+\ldots].
\end{aligned}
\right.
$$

En multipliant cette fonction par dt_1, on l'intégrera depuis t_1 nul jusqu'à $t_1=s-t_2-t_3-\ldots$. On multipliera ensuite cette première intégrale par dt_2, et on l'intégrera depuis t_2 nul jusqu'à $t_2=s-t_3-t_4-\ldots$. En continuant ainsi, on parviendra à une dernière intégrale, qui sera fonction de s, et que nous désignerons par $\Pi(s)$, et cette fonction sera la somme cherchée de toutes les valeurs de $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$, multipliées par leurs probabilités respectives. Mais pour cela il faut avoir soin de changer dans un terme quelconque, multiplié par une puissance de l, telle que $l^{q+q_1+q'_2+\cdots}$, k dans la partie de l'exposant de la puissance relative à la variable t, et qui dans ce cas est q; et, si cette partie manque, il faut supposer k égal à zéro. Il faut pareillement changer k_1 dans la partie de l'exposant relative à la variable t_1, et ainsi de suite; il faut diminuer s de l'exposant entier de la puissance de l, et écrire ainsi, dans le cas présent, $s-q-q_1-q'_2-\ldots$, au lieu de s, et rejeter le terme, si s, ainsi diminué, devient négatif. Enfin il faut supposer $l=1$.

Si $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\ldots$, $\varphi_1(t_1)$, $\ldots$ sont des fonctions rationnelles et entières des variables t, t_1, t_2, $\ldots$ de leurs exponentielles et de sinus et cosinus, toutes les intégrations successives seront possibles, parce qu'il est de la nature de ces fonctions de se reproduire par les intégrations. Dans les autres cas, les intégrations pourront n'être pas possibles; mais l'analyse précédente réduit alors le problème aux quadratures. Le cas des fonctions rationnelles et entières offre quelques simplifications que nous allons exposer.

Supposons que l'on ait

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) + l^{q}\varphi'(q+t) + l^{q'}\varphi''(q'+t) + \ldots = A + B\,t + C\,t^2 + \ldots,\\
&\varphi_1(t_1) + l^{q_1}\varphi'_1(q_1+t_1) + l^{q'_1}\varphi''_1(q'_1+t_1) + \ldots = A_1 + B_1 t_1 + C_1 t_1^2 + \ldots,\\
&\varphi_2(t_2) + l^{q_2}\varphi'_2(q_2+t_2) + l^{q'_2}\varphi''_2(q'_2+t_2) + \ldots = A_2 + B_2 t_2 + C_2 t_2^2 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et désignons par $H t^n t_1^{n_1} t_2^{n_2}\ldots$ un terme quelconque de

$$\psi(k+t,\, k_1+t_1,\, k_2+t_2,\, \ldots);$$

il est facile de s'assurer que la partie de $\Pi(s)$ correspondante à ce terme est

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned}
&1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots n_1.1.2.3\ldots n_2\ldots H s^{i+n+n_1+n_2+\ldots-1}\\
&\times[A + (n+1)B\,s + (n+1)(n+2)C\,s^2 + \ldots]\\
&\times[A_1 + (n_1+1)B_1 s + (n_1+1)(n_1+2)C_1 s^2 + \ldots]\\
&\times[A_2 + (n_2+1)B_2 s + (n_2+1)(n_2+2)C_2 s^2 + \ldots]\\
&\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

pourvu que, dans le développement de cette quantité, au lieu d'une puissance quelconque a de s, on écrive $\frac{s^a}{1.2.3\ldots a}$. On aura ensuite la partie correspondante de la somme entière des valeurs de $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$, multipliées par leurs probabilités respectives, en changeant un terme quelconque de ce développement, tel que $H\lambda t^{\mu} s^{a}$ dans $H\lambda(s-\mu)^{a}$, et en substituant dans H, au lieu de k, la partie de l'exposant μ qui est relative à la variable t, au lieu de k_1 la partie relative à t_1, et ainsi du reste.

Si dans la formule (B) on suppose $H = 1$, et $n, n_1, n_2, \ldots$ nuls, on aura la somme des valeurs de l'unité multipliées par leur probabilité respective; or il est visible que cette somme n'est autre chose que la somme de toutes les combinaisons dans lesquelles l'équation

$$t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{i-1} = s$$

a lieu, multipliées par leur probabilité; elle exprime conséquemment la probabilité de cette équation. Si, dans les hypothèses précédentes, on suppose de plus que la loi de probabilité est la même pour les r premières variables t, t_1, t_2, ..., t_{r-1}, et que, pour les $i-r$ dernières, elle soit encore la même, mais différente, que pour les premières, on aura

$$A = A_1 = A_2 = \ldots = A_{r-1},$$
$$B = B_1 = B_2 = \ldots = B_{r-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_r = A_{r+1} = \ldots = A_{i-1}$$
$$B_r = B_{r+1} = \ldots = B_{i-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et la formule (B) se changera dans la suivante :

$$\text{(C)} \qquad s^{i-1}(A + Bs + 2Cs^2 + \ldots)^r (A_r + B_r s + 2C_r s^2 + \ldots)^{i-r}.$$

Cette formule servira à déterminer la probabilité que la somme des erreurs d'un nombre quelconque d'observations, dont la loi de facilité des erreurs est connue, sera comprise dans des limites données.

Supposons, par exemple, que l'on ait $i-1$ observations dont les erreurs pour chaque observation puissent s'étendre depuis $-h$ jusqu'à $+g$, et qu'en nommant z l'erreur de la première de ces observations, la loi de facilité de cette erreur soit exprimée par $a + bz + cz^2$. Supposons ensuite que cette loi soit la même pour les erreurs z_1, z_2, ..., z_{i-2} des autres observations, et cherchons la probabilité que la somme de ces erreurs sera comprise dans les limites p et $p+e$.

Si l'on fait

$$z = t - h, \qquad z_1 = t_1 - h, \qquad z_2 = t_2 - h, \qquad \ldots,$$

il est clair que t, t_1, t_2, ... seront positifs et pourront s'étendre depuis zéro jusqu'à $h+g$; de plus, on aura

$$z + z_1 + z_2 + \ldots + z_{i-2} = t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{i-2} - (i-1)h;$$

donc la plus grande valeur de la somme $z + z_1 + z_2 + \ldots + z_{i-2}$ étant, par la supposition, égale à $p+e$, et la plus petite étant égale à p, la plus grande valeur de $t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{i-2}$ sera $(i-1)h + p + e$, et la plus petite sera $(i-1)h + p$; en faisant ainsi

$$(i-1)h + p + e = s$$

et

$$t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{i-2} = s - t_{i-1},$$

t_{i-1} sera toujours positif et pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à e. Cela posé, si l'on applique à ce cas la formule (C), on aura $q = h + g$. D'ailleurs, la loi de facilité des erreurs z étant $a + bz + cz^2$, on en conclura la loi de facilité de t, en y changeant z en $t - h$. Soit

$$a' = a - bh + ch^2, \qquad b' = b - 2ch;$$

on aura $a' + b't + ct^2$ pour cette loi; ce sera donc la fonction $\varphi(t)$. Mais, comme, depuis $t = h + g$ jusqu'à t infini, la facilité des valeurs de t est nulle par l'hypothèse, on aura

$$\varphi'(t) + \varphi(t) = 0,$$

ce qui donne

$$\varphi'(t) = -(a' + b't + ct^2);$$

donc, si l'on fait

$$a'' = a' + b'(h+g) + c(h+g)^2,$$

$$b'' = b' + 2c(h+g),$$

on aura

$$\varphi(t) + l^q \varphi'(q+t) = a' + b't + ct^2 - l^{h+g}(a'' + b''t + ct^2),$$

et cette équation aura encore lieu en y changeant t en t_1, t_2, ..., puisque la loi de facilité des erreurs est supposée la même pour toutes les observations.

Quant à la variable t_{i-1}, on observera que la probabilité de l'équation

$$z + z_1 + \ldots + z_{i-2} = \mu$$

étant, quel que soit μ, égale au produit des probabilités de z, z_1, z_2, ..., la probabilité de l'équation

$$t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{i-2} = s - t_{i-1}$$

sera égale au produit des probabilités de t, t_1, t_2, ...; la loi de probabilité de t_{i-1} est donc constante et égale à l'unité, et, comme cette variable ne doit s'étendre que depuis $t_{i-1}=0$ jusqu'à $t_{i-1}=e$, on aura

$$q_{i-1}=e, \qquad \varphi_{i-1}(t_{i-1})=1, \qquad \varphi'_{i-1}(t_{i-1})+\varphi_{i-1}(t_{i-1})=0$$

et, par conséquent,

$$\varphi'_{i-1}(t_{i-1})=-1,$$

ce qui donne

$$\varphi_{i-1}(t_{i-1})+l^{q_{i-1}}\varphi'_{i-1}(q_{i-1}+t_{i-1})=1-l^{e};$$

la formule (C) deviendra donc

$$(\mathrm{C}') \qquad s^{i-1}[a'+b's+2cs^2-l^{h+g}(a''+b''s+2cs^2)]^{i-1}(1-l^{e}).$$

Soit

$$\begin{aligned}
(a'+b's+2cs^2)^{i-1}&=a^{(1)}+b^{(1)}s+c^{(1)}s^2+f^{(1)}s^3+\ldots,\\
(a'+b's+2cs^2)^{i-2}(a''+b''s+2cs^2)&=a^{(2)}+b^{(2)}s+c^{(2)}s^2+\ldots,\\
(a'+b's+2cs^2)^{i-3}(a''+b''s+2cs^2)&=a^{(3)}+b^{(3)}s+c^{(3)}s^2+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La formule précédente (C′) donnera, en y changeant un terme quelconque, tel que $\lambda l^{\mu}s^{a}$, en $\dfrac{\lambda(s-\mu)^a}{1.2.3\ldots a}$,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)}\left\{\begin{aligned}
&a^{(1)}[s^{i-1}-(s-e)^{i-1}]\\
&+\frac{b^{(1)}}{i}[s^{i}-(s-e)^{i}]\\
&+\frac{c^{(1)}}{i(i+1)}[s^{i+1}-(s-e)^{i+1}]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-(i-1)\left\{\begin{aligned}
&a^{(2)}[(s-h-g)^{i-1}-(s-h-g-e)^{i-1}]\\
&+\frac{b^{(2)}}{i}[(s-h-g)^{i}-(s-h-g-e)^{i}]\\
&+\frac{c^{(2)}}{i(i+1)}[(s-h-g)^{i+1}-(s-h-g-e)^{i+1}]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\\
&+\frac{(i-1)(i-2)}{1.2}\left\{\begin{aligned}
&a^{(3)}[(s-2h-2g)^{i-1}-(s-2h-2g-e)^{i-1}]\\
&+\frac{b^{(3)}}{i}[(s-2h-2g)^{i}-(s-2h-2g-e)^{i}]\\
&+\frac{c^{(3)}}{i(i+1)}[(s-2h-2g)^{i+1}-(s-2h-2g-e)^{i+1}]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\\
&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}.$$

Il faut rejeter de cette expression les termes dans lesquels la quantité élevée sous le signe des puissances est négative.

Supposons maintenant que, $z, z_1, z_2, \ldots$ représentant toujours les erreurs de $i-1$ observations, la loi de facilité, tant de l'erreur z que de l'erreur négative $-z$, soit $\mathfrak{G}(h-z)$, et que h et $-h$ soient les limites de ces erreurs. Supposons de plus que cette loi soit la même pour toutes les observations, et cherchons la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites p et $p+e$.

Si l'on fait $z = t - h$, $z_1 = t_1 - h$, ..., il est clair que $t, t_1, \ldots$ seront toujours positifs et pourront s'étendre depuis zéro jusqu'à $2h$; mais ici la loi de facilité est discontinue en deux points. Depuis $t = 0$ jusqu'à $t = h$, elle est exprimée par $\mathfrak{G}t$. Depuis $t = h$ jusqu'à $t = 2h$, elle est exprimée par $\mathfrak{G}(2h - t)$; enfin elle est nulle depuis $t = 2h$ jusqu'à t infini. On a donc

$$q = h, \qquad q' = 2h;$$

on a ensuite

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \mathfrak{G}t, \\ \varphi'(t) + \varphi(t) &= (2h - t)\mathfrak{G}, \\ \varphi''(t) + \varphi'(t) + \varphi(t) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\varphi'(t) = (2h - 2t)\mathfrak{G}, \qquad \varphi''(t) = (t - 2h)\mathfrak{G}.$$

Ainsi l'on a dans ce cas

$$\varphi(t) + l^q \varphi'(q + t) + l^{q'} \varphi''(q' + t) = \mathfrak{G}\, t(1 - l^h)^2,$$

équation qui a encore lieu en y changeant t en $t_1, t_2, \ldots$. Présentement on a

$$z + z_1 + z_2 + \ldots + z_{i-2} = t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{i-2} - (i-1)h;$$

donc la somme des erreurs $z, z_1, \ldots$ devant être, par hypothèse, renfermée dans les limites p et $p + e$, la somme des valeurs de $t, t_1, \ldots, t_{i-2}$ sera comprise dans les limites $(i-1)h + p$ et $(i-1)h + p + e$; en sorte que, si l'on fait

$$t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{i-2} = s - t_{i-1},$$

s étant supposé égal à $(i-1)h+p+e$, t_{i-1} pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à e, et l'on verra, comme dans l'exemple précédent, que sa facilité doit être supposée égale à l'unité dans cet intervalle, et qu'elle doit être supposée nulle au delà de cet intervalle; ainsi l'on a

$$q_{i-1}=e \qquad \text{et} \qquad \varphi_{i-1}(t_{i-1})+l^{q_{i-1}}\varphi'_{i-1}(t_{i-1})=1-l^e.$$

Cela posé, si l'on observe que, $2\mathfrak{C}\int dz(h-z)$ étant la probabilité que l'erreur d'une observation est comprise dans les limites $-h$ et $+h$, ce qui est certain, on a $\mathfrak{C}=\frac{1}{h^2}$; la formule (C) donnera, pour l'expression de la probabilité cherchée,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(2i-2)h^{2i-2}}\left\{\begin{array}{l} s^{2i-2}-(s-e)^{2i-2} \\ \quad -(2i-2)\left[(s-h)^{2i-2}-(s-h-e)^{2i-2}\right] \\ \quad +\frac{(2i-2)(2i-3)}{1.2}\left[(s-2h)^{2i-2}-(s-2h-e)^{2i-2}\right] \\ \quad -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

en ayant soin de rejeter tous les termes dans lesquels la quantité élevée à la puissance $2i-2$ est négative.

Nous allons encore appliquer cette analyse au problème suivant. Si l'on conçoit un nombre i de points rangés en ligne droite, et sur ces points des ordonnées, dont la première soit au moins égale à la seconde, celle-ci au moins égale à la troisième, et ainsi de suite, et que la somme de ces i ordonnées soit constamment égale à s, en supposant s partagé dans une infinité de parties, on peut satisfaire aux conditions précédentes, d'une infinité de manières. On propose de déterminer la valeur de chacune des ordonnées, moyenne entre toutes les valeurs qu'elle peut recevoir.

Soit z la plus petite ordonnée, ou l'ordonnée $i^{\text{ième}}$; soit $z+z_1$ l'ordonnée $(i-1)^{\text{ième}}$; soit $z+z_1+z_2$ l'ordonnée $(i-2)^{\text{ième}}$, et ainsi de suite jusqu'à la première ordonnée qui sera $z+z_1+\ldots+z_{i-1}$. Les quantités $z, z_1, z_2, \ldots$ seront ou nulles ou positives, et leur somme $iz+(i-1)z_1+(i-2)z_2+\ldots+z_{i-1}$ sera, par les conditions du problème, égale à s. Soit

$$iz = t, \quad (i-1)z_1 = t_1, \quad (i-2)z_2 = t_2, \quad \ldots, \quad z_{i-1} = t_{i-1};$$

on aura

$$t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{i-1} = s;$$

les variables t, t_1, t_2, ... pourront s'étendre jusqu'à s. L'ordonnée $r^{\text{ième}}$ sera

$$\frac{t}{i} + \frac{t_1}{i-1} + \ldots + \frac{t_{i-r}}{r}.$$

Il faut déterminer la somme de toutes les variations que cette quantité peut recevoir, et la diviser par le nombre total de ces variations, pour avoir l'ordonnée moyenne. La formule (B) donne très facilement cette somme, en observant qu'ici

$$\psi(t, t_1, t_2, \ldots) = \frac{t}{i} + \frac{t_1}{i-1} + \ldots + \frac{t_{i-r}}{r},$$

et on la trouve égale à

$$\frac{s^i}{1.2.3\ldots i}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i-2} + \ldots + \frac{1}{r}\right).$$

En divisant cette quantité par le nombre total des combinaisons, qui ne peut être qu'une fonction de i et de s et que nous désignerons par N, on aura, pour la valeur moyenne de l'ordonnée $r^{\text{ième}}$,

$$\frac{s^i}{1.2.3\ldots i\mathrm{N}}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \ldots + \frac{1}{r}\right).$$

Pour déterminer N, nous observerons que toutes les valeurs moyennes doivent ensemble égaler s, ce qui donne

$$\mathrm{N} = \frac{s^{i-1}}{1.2.3\ldots(i-1)};$$

la valeur moyenne de l'ordonnée $r^{\text{ième}}$ est donc

$$(\varepsilon) \qquad \frac{s}{i}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \ldots + \frac{1}{r}\right).$$

Supposons qu'un effet observé n'ait pu être produit que par l'une des

ι causes A, B, C, ..., et qu'une personne, après avoir apprécié leurs probabilités respectives, écrive sur un billet les lettres qui indiquent ces causes, dans l'ordre des probabilités qu'elle leur attribue, en écrivant la première la lettre indiquant la cause qui lui semble la plus probable. Il est clair que l'on aura, par la formule précédente, la valeur moyenne des probabilités qu'il peut supposer à chacune d'elles, en observant qu'ici la quantité s, que l'on doit répartir sur chacune des causes, est la certitude ou l'unité, puisque la personne est assurée que l'effet doit résulter de l'une d'elles. La valeur moyenne de la probabilité qu'elle attribue à la cause qu'elle a placée sur son billet au rang $r^{\text{ième}}$ est donc

$$\frac{1}{i}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i-1}+\ldots+\frac{1}{r}\right).$$

De là il suit que, si un tribunal est appelé à décider sur cet objet, et que chaque membre exprime son opinion par un billet semblable au précédent, alors, en écrivant sur chaque billet, à côté des lettres qui indiquent les causes, les valeurs moyennes qui répondent au rang qu'elles ont sur le billet, en faisant ensuite une somme de toutes les valeurs qui correspondent à chaque cause sur les divers billets, la cause à laquelle répondra la plus grande somme sera celle que le tribunal jugera la plus probable.

Cette règle n'est point applicable aux choix des assemblées électorales, parce que les électeurs ne sont point astreints, comme les juges, à répartir une même somme prise pour unité sur les divers partis entre lesquels ils doivent se déterminer; ils peuvent supposer à chaque candidat toutes les nuances de mérite comprises entre le mérite nul et le maximum de mérite, que nous désignerons par a; l'ordre des noms sur chaque billet ne fait qu'indiquer que l'électeur préfère le premier au second, le second au troisième, etc. On déterminera ainsi les nombres qu'il faut écrire sur le billet à côté des noms des candidats.

Soient $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_i$ les mérites respectifs des ι candidats dans l'opinion de l'électeur, t_1 étant le mérite qu'il suppose à celui des candidats qu'il a mis au premier rang, t_2 étant le mérite qu'il suppose au second, et ainsi de suite. L'intégrale $\int t_r dt_1 dt_2 \ldots dt_i$ exprimera la somme des mérites que l'électeur peut attribuer au candidat r, pourvu que l'on intègre d'abord par rapport à t_i, depuis $t_i = 0$ jusqu'à $t_i = t_{i-1}$, ensuite par rapport à t_{i-1}, depuis t_{i-1} jusqu'à t_{i-2}, et ainsi de suite, jusqu'à l'intégrale relative à t_1, que l'on prendra depuis t_1 nul jusqu'à $t_1 = a$. Car il est visible qu'alors t_i ne surpasse jamais t_{i-1}, t_{i-1} ne surpasse jamais t_{i-2}, ... En divisant l'intégrale précédente par celle-ci $\int dt_1 dt_2 \ldots dt_i$ qui exprime la somme totale des combinaisons dans lesquelles la condition précédente est remplie, on aura l'expression moyenne du mérite que l'électeur peut attribuer au candidat $r^{\text{ième}}$. En exécutant les intégrations, on trouve $\frac{i-r+1}{i+1}a$ pour cette expression.

De là il suit que l'on peut écrire sur le billet de chaque électeur i à côté du premier nom, $i-1$ à côté du second, $i-2$ à côté du troisième, ... En réunissant ensuite tous les nombres relatifs à chaque candidat sur les divers billets, celui des candidats qui aura la plus grande somme doit être présumé le candidat qui, aux yeux de l'Assemblée électorale, a le plus grand mérite, et doit par conséquent être choisi.

Ce mode d'élection serait sans doute le meilleur, si des considérations étrangères au mérite n'influaient point souvent sur le choix des électeurs, même les plus honnêtes, et ne les déterminaient point à placer aux derniers rangs les candidats les plus redoutables à celui qu'ils préfèrent, ce qui donne un grand avantage aux candidats d'un mérite médiocre. Aussi l'expérience l'a-t-elle fait abandonner aux établissements qui l'avaient adopté.

Supposons que les erreurs d'une observation puissent s'étendre dans les limites $+a$ et $-a$, mais qu'ignorant la loi de probabilité de ces erreurs on ne l'assujettisse qu'à la condition de leur donner une probabilité d'autant plus petite qu'elles sont plus grandes, la probabilité des erreurs positives étant supposée la même que celle des erreurs négatives correspondantes, toutes choses qu'il est naturel d'admettre. La formule (ε) donnera encore la loi moyenne des erreurs. Pour cela on concevra l'intervalle a partagé dans un nombre infini i de parties représentées par dx, en sorte que $i = \frac{a}{dx}$; on fera ensuite $r = \frac{x}{dx}$; la formule (ε) devient ainsi

$$\frac{s\,dx}{a}\int\frac{dx}{x},$$

l'intégrale étant prise depuis $x = x$ jusqu'à $x = a$. Dans la question présente $s = \frac{1}{2}$; car l'erreur devant tomber dans les limites $-a$ et $+a$, la probabilité qu'elle tombera dans les limites zéro et a est $\frac{1}{2}$; c'est la quantité s qu'il faut répartir sur tous les points de l'intervalle a; la formule (ε) devient donc alors

$$\frac{dx}{2a}\log\frac{a}{x}.$$

Ainsi la loi moyenne des probabilités des erreurs positives x, ou négatives $-x$, est

$$\frac{1}{2a}\log\frac{a}{x}.$$

CHAPITRE III.

DES LOIS DE LA PROBABILITÉ QUI RÉSULTENT DE LA MULTIPLICATION INDÉFINIE DES ÉVÉNEMENTS.

16. A mesure que les événements se multiplient, leurs probabilités respectives se développent de plus en plus; leurs résultats moyens et les bénéfices ou les pertes qui en dépendent convergent vers des limites dont ils approchent avec des probabilités toujours croissantes. La détermination de ces accroissements et de ces limites est une des parties les plus intéressantes et les plus délicates de l'analyse des hasards.

Considérons d'abord la manière dont les possibilités de deux événements simples, dont un seul doit arriver à chaque coup, se développent lorsqu'on multiplie le nombre de coups. Il est visible que l'événement dont la facilité est la plus grande doit probablement arriver plus souvent dans un nombre donné de coups, et l'on est porté naturellement à penser qu'en répétant les coups un très grand nombre de fois, chacun de ces événements arrivera proportionnellement à sa facilité, que l'on pourra ainsi découvrir par l'expérience. Nous allons démontrer analytiquement cet important théorème.

On a vu dans le n° 6 que, si p et $1-p$ sont les probabilités respectives de deux événements a et b, la probabilité que dans $x+x'$ coups l'événement a arrivera x fois et l'événement b, x' fois, est égale à

$$\frac{1.2.3\ldots(x+x')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'}\,p^x(1-p)^{x'};$$

c'est le $(x'+1)^{\text{ième}}$ terme du binôme $[p+(1-p)]^{x+x'}$. Considérons le plus grand de ces termes que nous désignerons par k. Le terme antérieur sera $\frac{kp}{1-p}\,\frac{x'}{x+1}$, et le terme suivant sera $k\frac{1-p}{p}\,\frac{x}{x'+1}\cdot$ Pour que k soit le plus grand terme, il faut que l'on ait

$$\frac{x}{x'+1} < \frac{p}{1-p} < \frac{x+1}{x'};$$

il est facile d'en conclure que, si l'on fait $x+x'=n$, on aura

$$(n+1)p-1 < x < (n+1)p;$$

ainsi x est le plus grand nombre entier compris dans $(n+1)p$; en faisant donc

$$x=(n+1)p-s,$$

ce qui donne

$$p=\frac{x+s}{n+1}, \quad 1-p=\frac{x'+1-s}{n+1}, \quad \frac{p}{1-p}=\frac{x+s}{x'+1-s},$$

s sera moindre que l'unité. Si x et x' sont de très grands nombres, on aura, à très peu près,

$$\frac{p}{1-p}=\frac{x}{x'},$$

c'est-à-dire que les exposants de p et de $1-p$ dans le plus grand terme du binôme sont à fort peu près dans le rapport de ces quantités; en sorte que, de toutes les combinaisons qui peuvent avoir lieu dans un très grand nombre n de coups, la plus probable est celle dans laquelle chaque événement est répété proportionnellement à sa probabilité.

Le terme $l^{\text{ième}}$, après le plus grand, est

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots(x-l).1.2.3\ldots(x'+l)}\,p^{x-l}(1-p)^{x'+l}.$$

On a, par le n° 33 du Livre I$^{\text{er}}$,

$$1.2.3\ldots n = n^{n+\frac{1}{2}}c^{-n}\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{12n}+\ldots\right),$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(x-l)} = (x-l)^{l-x-\frac{1}{2}} \frac{c^{x-l}}{\sqrt{2\pi}}\left[1 - \frac{1}{12(x-l)} - \ldots\right],$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(x'+l)} = (x'+l)^{-x'-l-\frac{1}{2}} \frac{c^{x'+l}}{\sqrt{2\pi}}\left[1 - \frac{1}{12(x'+l)} - \ldots\right].$$

Développons le terme $(x-l)^{l-x-\frac{1}{2}}$. Son logarithme hyperbolique est

$$(l-x-\tfrac{1}{2})\left[\log x + \log\left(1 - \frac{l}{x}\right)\right];$$

or on a

$$\log\left(1-\frac{l}{x}\right) = -\frac{l}{x} - \frac{l^2}{2x^2} - \frac{l^3}{3x^3} - \frac{l^4}{4x^4} - \ldots;$$

nous négligerons les quantités de l'ordre $\frac{1}{n}$, et nous supposerons que l^2 ne surpasse point l'ordre n; alors on pourra négliger les termes de l'ordre $\frac{l^4}{x^3}$, parce que x et x' sont de l'ordre n. On aura ainsi

$$(l-x-\tfrac{1}{2})\left[\log x + \log\left(1-\frac{l}{x}\right)\right]$$
$$= (l-x-\tfrac{1}{2})\log x + l + \frac{l}{2x} - \frac{l^2}{2x} - \frac{l^3}{6x^2},$$

ce qui donne, en repassant des logarithmes aux nombres,

$$(x-l)^{l-x-\frac{1}{2}} = c^{l-\frac{l^2}{2x}} x^{l-x-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{l}{2x} - \frac{l^3}{6x^2}\right);$$

on aura pareillement

$$(x'+l)^{-l-x'-\frac{1}{2}} = c^{-l-\frac{l^2}{2x'}} x'^{-l-x'-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{l}{2x'} + \frac{l^3}{6x'^2}\right).$$

On a ensuite, par ce qui précède, $p = \frac{x+s}{n+1}$, s étant moindre que l'unité; en faisant donc $p = \frac{x-z}{n}$, z sera compris dans les limites $\frac{x}{n+1}$ et $-\frac{n-x}{n+1}$, et par conséquent il sera, abstraction faite du signe, au-dessous de l'unité. La valeur de p donne $1-p=\frac{x'+z}{n}$; on aura donc, par l'analyse précédente,

$$p^{x-l}(1-p)^{x'+l}=\frac{x^{x-l}x'^{x'+l}}{n^n}\left(1+\frac{nzl}{xx'}\right);$$

de là on tire

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots(x-l).1.2.3\ldots(x'+l)}\,p^{x-l}(1-p)^{x'+l}$$

$$=\frac{\sqrt{n}\,c^{-\frac{nl^2}{2xx'}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2xx'}}\left[1+\frac{nzl}{xx'}+\frac{l(x'-x)}{2xx'}-\frac{l^3}{6x^2}+\frac{l^3}{6x'^2}\right].$$

On aura le terme antérieur au plus grand terme et qui en est éloigné à la distance l, en faisant l négatif dans cette équation; en réunissant ensuite ces deux termes, leur somme sera

$$\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2xx'}}\,c^{-\frac{nl^2}{2xx'}}.$$

L'intégrale finie

$$\Sigma\,\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2xx'}}\,c^{-\frac{nl^2}{2xx'}},$$

prise depuis $l=0$ inclusivement, exprimera donc la somme de tous les termes du binôme $[p+(1-p)]^n$, comprise entre les deux termes, dont l'un a p^{x+l} pour facteur, et l'autre a p^{x-l} pour facteur, et qui sont ainsi équidistants du plus grand terme; mais il faut retrancher de cette somme le plus grand terme qui y est évidemment compris deux fois.

Maintenant, pour avoir cette intégrale finie, nous observerons que l'on a, par le n° 10 du Livre I^{er}, y étant fonction de l,

$$\Sigma y=\frac{1}{c^{\frac{dy}{dl}}-1}=\left(\frac{dy}{dl}\right)^{-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dl}\right)^{0}+\frac{1}{12}\,\frac{dy}{dl}+\ldots,$$

d'où l'on tire, par le même numéro,

$$\Sigma y=\int y\,dl-\frac{1}{2}y+\frac{1}{12}\,\frac{dy}{dl}+\ldots+\text{const.};$$

y étant ici égal à $\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2xx'}}c^{-\frac{nl^2}{2xx'}}$, les différentielles successives de y acquièrent pour facteur $\frac{nl}{2xx'}$ et ses puissances. Ainsi, l étant supposé ne pouvoir être au plus que de l'ordre $\sqrt{n}$, ce facteur est de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$, et par conséquent ses différentielles, divisées par les puissances respectives de dl, décroissent de plus en plus; en négligeant donc, comme on l'a fait précédemment, les termes de l'ordre $\frac{1}{n}$, on aura, en faisant commencer avec l les deux intégrales finies et infiniment petites, et désignant par Y le plus grand terme du binôme,

$$\Sigma y = \int y\,dl - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}\mathrm{Y}.$$

La somme de tous les termes du binôme $[p+(1-p)]^n$ compris entre les deux termes équidistants du plus grand terme du nombre l étant égale à $\Sigma y - \frac{1}{2}\mathrm{Y}$, elle sera

$$\int y\,dl - \tfrac{1}{2}y,$$

et si l'on y ajoute la somme de ces termes extrêmes, on aura, pour la somme de tous ces termes,

$$\int y\,dl + \tfrac{1}{2}y.$$

Si l'on fait

$$t = \frac{l\sqrt{n}}{\sqrt{2xx'}},$$

cette somme devient

$$(o) \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int dt\,c^{-t^2} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2xx'}}c^{-t^2}.$$

Les termes que l'on a négligés étant de l'ordre $\frac{1}{n}$, cette expression est d'autant plus exacte que n est plus grand; elle est rigoureuse lorsque n est infini. Il serait facile, par l'analyse précédente, d'avoir égard aux termes de l'ordre $\frac{1}{n}$ et des ordres supérieurs.

On a, par ce qui précède, $x = np + z$, z étant un nombre plus petit que l'unité; on a donc

$$\frac{x+l}{n} - p = \frac{l+z}{n} = \frac{t\sqrt{2xx'}}{n\sqrt{n}} + \frac{z}{n};$$

ainsi la formule (o) exprime la probabilité que la différence entre le rapport du nombre de fois que l'événement a doit arriver au nombre total des coups, et la facilité p de cet événement, est comprise dans les limites

$$(l) \qquad \pm\frac{t\sqrt{2xx'}}{n\sqrt{n}} + \frac{z}{n}.$$

$\sqrt{2xx'}$ étant égal à

$$n\sqrt{2p(1-p) + \frac{2z}{n}(1-2p) - \frac{2z^2}{n^2}},$$

on voit ue l'intervalle compris entre les limites précédentes est de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Si la limite de t, que nous désignerons par T, est supposée invariable, la probabilité déterminée par la fonction (o) reste la même à très peu près; mais l'intervalle compris entre les limites (l) diminue sans cesse à mesure que les coups se répètent, et il devient nul, lorsque leur nombre est infini.

Cet intervalle étant supposé invariable, lorsque les événements se multiplient, T croît sans cesse, et à fort peu près comme la racine carrée du nombre des coups. Mais, lorsque T est considérable, la formule (o) devient, par le n° **27** du Livre I$^{\text{er}}$,

$$1 - \frac{c^{-T^2}}{2T\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 + \cfrac{3q}{1 + \ldots}}}} + \frac{c^{-T^2}}{\sqrt{2n\pi\left[p(1-p) + \frac{z}{n}(1-2p) - \frac{z^2}{n^2}\right]}},$$

q étant égal à $\frac{1}{2T^2}$. Lorsqu'on fait croître T, c^{-T^2} diminue avec une extrême rapidité, et la probabilité précédente s'approche rapidement de l'unité, à laquelle elle devient égale, lorsque le nombre des coups est infini.

Il y a ici deux sortes d'approximations : l'une d'elles est relative aux limites prises de part et d'autre de la facilité de l'événement a; l'autre approximation se rapporte à la probabilité que le rapport des arrivées de cet événement au nombre total des coups sera renfermé dans ces limites. La répétition indéfinie des coups accroît de plus en plus cette probabilité, les limites restant les mêmes; elle resserre de plus en plus l'intervalle de ces limites, la probabilité restant la même. Dans l'infini, cet intervalle devient nul, et la probabilité se change en certitude.

L'analyse précédente réunit à l'avantage de démontrer ce théorème celui d'assigner la probabilité que, dans un grand nombre n de coups, le rapport des arrivées de chaque événement sera compris dans des limites données. Supposons, par exemple, que les facilités des naissances des garçons et des filles soient dans le rapport de 18 à 17, et qu'il naisse dans une année 14000 enfants; on demande la probabilité que le nombre des garçons ne surpassera pas 7363, et ne sera pas moindre que 7037.

Dans ce cas, on a

$$p=\frac{18}{35}, \quad x=7200, \quad x'=6800, \quad n=14000, \quad l=163;$$

la formule (o) donne à fort peu près 0,994303 pour la probabilité cherchée.

Si l'on connaît le nombre de fois que sur n coups l'événement a est arrivé, la formule (o) donnera la probabilité que sa facilité p, supposée inconnue, sera comprise dans des limites données. En effet, si l'on nomme i ce nombre de fois, on aura, par ce qui précède, la probabilité que la différence $\frac{i}{n}-p$ sera comprise dans les limites $\pm\frac{\mathrm{T}\sqrt{2xx'}}{n\sqrt{n}}+\frac{z}{n}$; par conséquent, on aura la probabilité que p sera compris dans les limites

$$\frac{i}{n} \mp \frac{\mathrm{T}\sqrt{2xx'}}{n\sqrt{n}} - \frac{z}{n}.$$

La fonction $\frac{\mathrm{T}\sqrt{2xx'}}{n\sqrt{n}}$ étant de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$, on peut, en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{n}$, y substituer i au lieu de x et $n-i$ au lieu de x'; les limites précédentes deviennent ainsi, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{n}$,

$$\frac{i}{n} \mp \frac{\mathrm{T}\sqrt{2i(n-i)}}{n\sqrt{n}},$$

et la probabilité que la facilité de l'événement a est contenue dans ces limites est égale à

$$(o') \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dt\, c^{-t^2} + \frac{\sqrt{n}\, c^{-\mathrm{T}^2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2i(n-i)}}.$$

On voit ainsi que, à mesure que les événements se multiplient, l'intervalle des limites se resserre de plus en plus, et la probabilité que la valeur de p tombe dans ces limites approche de plus en plus de l'unité ou de la certitude. C'est ainsi que les événements, en se développant, font connaître leurs probabilités respectives.

On parvient directement à ces résultats, en considérant p comme une variable qui peut s'étendre depuis zéro jusqu'à l'unité, et en déterminant, d'après les événements observés, la probabilité de ses diverses valeurs, comme on le verra lorsque nous traiterons de la probabilité des causes déduite des événements observés.

Si l'on a trois ou un plus grand nombre d'événements a, b, c, ..., dont un seul doive arriver à chaque coup, on aura, par ce qui précède, la probabilité que, dans un très grand nombre n de coups, le rapport du nombre x de fois qu'un de ces événements, a par exemple, arrivera, au nombre n, sera compris dans les limites $p \pm \alpha$, α étant une très petite fraction, et l'on voit que, dans le cas extrême du nombre n infini, l'intervalle 2α de ces limites peut être supposé nul, et la probabilité peut être supposée égale à la certitude, en sorte que les nombres des arrivées de chaque événement seront proportionnels à leurs facilités respectives.

Quelquefois les événements, au lieu de faire connaître directement les limites de la valeur de p, donnent celles d'une fonction de cette valeur; alors on en conclut les limites de p, par la résolution des équations. Pour en donner un exemple fort simple, considérons deux joueurs A et B, dont les adresses respectives soient p et $1-p$, et jouant ensemble à cette condition, que la partie soit gagnée par celui des deux joueurs qui, sur trois coups, aura vaincu deux fois son adversaire, le troisième coup n'étant pas joué, comme inutile, lorsque l'un des joueurs a vaincu dans les deux premiers coups.

La probabilité de A pour gagner la partie est la somme des deux premiers termes du binôme $[p+(1-p)]^3$; elle est par conséquent égale à $p^3+3p^2(1-p)$. Soit P cette fonction; en élevant le binôme $\mathrm{P}+(1-\mathrm{P})$ à la puissance n, on aura, par l'analyse précédente, la probabilité que, sur le nombre n de parties, le nombre des parties gagnées par A sera compris dans des limites données. Il suffit pour cela de changer p en P dans la formule (o).

Si l'on nomme i le nombre des parties gagnées par A, la formule (o') donnera la probabilité que P sera compris dans les limites

$$\frac{i}{n} \mp \frac{\mathrm{T}\sqrt{2i(n-i)}}{n\sqrt{n}}.$$

Soit donc p' la racine réelle et positive de l'équation

$$p^3+3p^2(1-p)=\frac{i}{n};$$

en désignant par $p' \mp \delta p$ les limites de p, les limites correspondantes de P seront à très peu près $3p'^2-2p'^3 \mp 6p'(1-p')\delta p$; en égalant ces limites aux précédentes, on aura

$$\delta p = \frac{\mathrm{T}\sqrt{2i(n-i)}}{6p'(1-p')n\sqrt{n}};$$

ainsi la formule (o') donnera la probabilité que p sera compris dans les limites

$$p' \mp \frac{T\sqrt{2i(n-i)}}{6p'(1-p')n\sqrt{n}}.$$

Le nombre n des parties ne détermine pas le nombre des coups, puisqu'il peut y avoir des parties de deux coups, et d'autres de trois coups. On aura la probabilité que le nombre des parties de deux coups sera compris dans des limites données, en observant que la probabilité d'une partie à deux coups est $p^2 + (1-p)^2$; désignons cette fonction par P'. En élevant le binôme $P' + (1-P')$ à la puissance n, la formule (o) donnera la probabilité que le nombre des parties de deux coups sera compris dans les limites $nP' \pm l$; or le nombre des parties de deux coups étant $nP' \pm l$, le nombre des parties à trois coups sera $n(1-P') \mp l$; le nombre total des coups sera donc $3n - nP' \mp l$; la formule (o) donnera donc la probabilité que le nombre des coups sera compris dans les limites

$$2n(1+p-p^2) \mp T\sqrt{2nP'(1-P')}.$$

17. Considérons une urne A renfermant un très grand nombre n de boules blanches et noires, et supposons qu'à chaque tirage on tire une boule de l'urne, et qu'on la remplace par une boule noire. On demande la probabilité qu'après r tirages le nombre des boules blanches sera x.

Nommons $y_{x,r}$ cette probabilité. Après un nouveau tirage, elle devient $y_{x,r+1}$. Mais, pour qu'il y ait x boules blanches après $r+1$ tirages, il faut qu'il y ait ou $x+1$ boules blanches après le tirage r et que le tirage suivant fasse sortir une boule blanche, ou x boules blanches après le tirage r et que le tirage suivant fasse sortir une boule noire. La probabilité qu'il y aura $x+1$ boules blanches après r tirages est $y_{x+1,r}$, et la probabilité qu'alors le tirage suivant fera sortir une boule blanche est $\frac{x+1}{n}$; la probabilité de l'événement composé est donc $\frac{x+1}{n}y_{x+1,r}$; c'est la première partie de $y_{x,r+1}$. La probabilité qu'il y aura x boules blanches après le tirage r est $y_{x,r}$, et la probabilité qu'alors il sortira une boule noire est $\frac{n-x}{n}$, parce que le nombre des boules noires de l'urne est $n-x$; la probabilité de l'événement composé est donc $\frac{n-x}{n}y_{x,r}$; c'est la seconde partie de $y_{x,r+1}$. Ainsi l'on a

$$y_{x,r+1} = \frac{x+1}{n}y_{x+1,r} + \frac{n-x}{n}y_{x,r}.$$

Si l'on fait

$$x = nx', \quad r = nr', \quad y_{x,r} = y'_{x',r'},$$

cette équation devient

$$y'_{x',r'+\frac{1}{n}} = \left(x'+\frac{1}{n}\right)y'_{x'+\frac{1}{n},r'} + (1-x')y'_{x',r'};$$

n étant supposé un très grand nombre, on peut réduire en séries convergentes $y_{x',r'+\frac{1}{n}}$ et $y_{x'+\frac{1}{n},r'}$; on aura donc, en négligeant les carrés et les puissances supérieures de $\frac{1}{n}$,

$$\frac{1}{n}\frac{\partial y'_{x',r'}}{\partial r'} = \frac{x'}{n}\frac{\partial y'_{x',r'}}{\partial x'} + \frac{1}{n}y'_{x,r'};$$

l'intégrale de cette équation aux différences partielles est

$$y'_{x',r'} = c^{r'}\varphi(x'c^{r'}),$$

$\varphi(x'c^{r'})$ étant une fonction arbitraire de $x'c^{r'}$, qu'il faut déterminer par la valeur de $y'_{x',0}$.

Supposons que l'urne A ait été remplie de cette manière. On projette un prisme droit dont la base, étant un polygone régulier de $p+q$ côtés, est assez étroite pour que le prisme ne retombe jamais sur elle. Sur les $p+q$ faces latérales, p sont blanches et q sont noires, et l'on met dans l'urne A, à chaque projection, une boule de la couleur de la face sur laquelle le prisme retombe. Après n projections, le nombre des boules blanches sera à fort peu près, par le numéro précédent, $\frac{np}{p+q}$, et la probabilité qu'il sera $\frac{np}{p+q}+l$ est, par le même numéro,

$$\frac{p+q}{\sqrt{2npq\pi}}\,c^{-\frac{(p+q)^2 l^2}{2npq}}.$$

Si l'on fait

$$x=\frac{np}{p+q}+l, \qquad \frac{(p+q)^2}{2pq}=i^2,$$

cette fonction devient

$$\frac{i}{\sqrt{\pi n}}\,c^{-\frac{i^2}{n}\left(x-\frac{np}{p+q}\right)^2};$$

c'est la valeur de $y_{x,0}$, ou de $y'_{x',0}$; mais la valeur précédente de $y'_{x',r'}$ donne

$$y_{x,0}=\varphi\left(\frac{x}{n}\right);$$

on a donc

$$\varphi\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{i}{\sqrt{n\pi}}\,c^{-i^2 n\left(\frac{x}{n}-\frac{p}{p+q}\right)^2};$$

partant,

$$y'_{x',r'}=\frac{ic^{r'}}{\sqrt{n\pi}}\,c^{-i^2 n\left(\frac{xc^{r'}}{n}-\frac{p}{p+q}\right)^2};$$

d'où l'on tire

$$y_{x,r}=\frac{ic^{\frac{r}{n}}}{\sqrt{n\pi}}\,c^{-\frac{i^2}{n}\left(xc^{\frac{r}{n}}-\frac{np}{p+q}\right)^2}.$$

La valeur de x la plus probable est celle qui rend nul $xc^{\frac{r}{n}}-\frac{np}{p+q}$, et par conséquent elle est égale à

$$\frac{np}{(p+q)c^{\frac{r}{n}}};$$

la probabilité que la valeur de x sera contenue dans les limites

$$\frac{np}{(p+q)c^{\frac{r}{n}}}\pm\frac{\mu\sqrt{n}}{c^{\frac{r}{n}}}$$

est

$$2\int\frac{i\,d\mu}{\sqrt{\pi}}\,c^{-i^2\mu^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $\mu=0$.

Cherchons maintenant la valeur moyenne du nombre des boules blanches contenues dans l'urne A, après r tirages. Cette valeur est la somme de tous les nombres possibles de boules blanches, multipliés par leurs probabilités respectives; elle est donc égale à

$$\frac{2np}{(p+q)c^{\frac{r}{n}}}\int\frac{i\,d\mu}{\sqrt{\pi}}c^{-i^2\mu^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \infty$. Cette valeur est ainsi

$$\frac{np}{(p+q)c^{\frac{r}{n}}};$$

par conséquent, elle est la même que la valeur de x la plus probable.

Considérons maintenant deux urnes A et B renfermant chacune le nombre n de boules, et supposons que, dans le nombre total $2n$ des boules, il y en ait autant de blanches que de noires. Concevons que l'on tire en même temps une boule de chaque urne, et qu'ensuite on mette dans une urne la boule extraite de l'autre. Supposons que l'on répète cette opération un nombre quelconque r de fois, en agitant à chaque fois les urnes, pour en bien mêler les boules; et cherchons la probabilité qu'après ce nombre r d'opérations, il y aura x boules blanches dans l'urne A.

Soit $z_{x,r}$ cette probabilité. Le nombre des combinaisons possibles dans r opérations est n^{2r}; car à chaque opération les n boules de l'urne A peuvent se combiner avec chacune des n boules de l'urne B, ce qui produit n^2 combinaisons; $n^{2r}z_{x,r}$ est donc le nombre des combinaisons dans lesquelles il peut y avoir x boules blanches dans l'urne A après ces opérations. Maintenant, il peut arriver que l'opération $(r+1)^{\text{ième}}$ fasse sortir une boule blanche de l'urne A, et y fasse rentrer une boule blanche; le nombre de cas dans lesquels cela peut arriver est le produit de $n^{2r}z_{x,r}$ par le nombre x des boules blanches de l'urne A, et par le nombre $n-x$ des boules blanches qui doivent être alors dans l'urne B, puisque le nombre total des boules blanches des deux urnes est n. Dans tous ces cas, il reste x boules blanches dans l'urne A; le produit $x(n-x)n^{2r}z_{x,r}$ est donc une des parties de $n^{2r+2}z_{x,r+1}$.

Il peut arriver encore que l'opération $(r+1)^{\text{ième}}$ fasse sortir et rentrer dans l'urne A une boule noire, ce qui conserve dans cette urne x boules blanches. Ainsi $n-x$ étant, après l'opération $r^{\text{ième}}$, le nombre des boules noires de l'urne A, et x étant celui des boules noires de l'urne B, $(n-x)xn^{2r}z_{x,r}$ est encore une partie de $n^{2r+2}z_{x,r+1}$.

S'il y a $x-1$ boules blanches dans l'urne A après l'opération $r^{\text{ième}}$ et que l'opération suivante en fasse sortir une boule noire et y fasse rentrer une boule blanche, il y aura x boules blanches dans l'urne A après l'opération $(r+1)^{\text{ième}}$. Le nombre des cas dans lesquels cela peut arriver est le produit de $n^{2r}z_{x-1,r}$ par le nombre $n-x+1$ des boules noires de l'urne A après le tirage $r^{\text{ième}}$, et par le nombre $n-x+1$ des boules blanches de l'urne B, après la même opération; $(n-x+1)^2n^{2r}z_{x-1,r}$ est donc encore une partie de $n^{2r+2}z_{x,r+1}$.

Enfin, s'il y a $x+1$ boules blanches dans l'urne A après l'opération $r^{\text{ième}}$, et que l'opération suivante en fasse sortir une boule blanche et y fasse rentrer une boule noire, il y aura encore, après cette dernière opération, x boules blanches dans l'urne. Le nombre des cas dans lesquels cela peut arriver est le produit de $n^{2r}z_{x+1,r}$ par le nombre $x+1$ des boules blanches de l'urne A, et par le nombre $x+1$ des boules noires de l'urne B après l'opération $r^{\text{ième}}$; $(x+1)^2n^{2r}z_{x+1,r}$ est donc encore une partie de $n^{2r+2}{}_{x,r+1}$.

En réunissant toutes ces parties et en égalant leur somme à $n^{2r+2}z_{x,r+1}$, on aura l'équation aux différences finies partielles

$$z_{x,r+1}=\left(\frac{x+1}{n}\right)^2 z_{x+1,r}+\frac{2x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)z_{x,r}+\left(1-\frac{x-1}{n}\right)^2 z_{x-1,r}.$$

Quoique cette équation soit aux différences du second ordre par rapport à la variable x, cependant son intégrale ne renferme qu'une fonction arbitraire qui dépend de la probabilité des diverses valeurs de x dans l'état initial de l'urne A. En effet, il est visible que, si l'on connaît les valeurs de $z_{x,0}$ correspondantes à toutes les valeurs de x depuis

$x=0$ jusqu'à $x=n$, l'équation précédente donnera toutes les valeurs de $z_{x,1}$, $z_{x,2}$, ..., en observant que, les valeurs négatives de x étant impossibles, $z_{x,r}$ est nul lorsque x est négatif.

Si n est un très grand nombre, cette équation se transforme dans une équation aux différences partielles, que l'on obtient ainsi. On a alors, à très peu près,

$$z_{x+1,r}=z_{x,r}+\frac{\partial z_{x,r}}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z_{x,r}}{\partial x^2},$$

$$z_{x-1,r}=z_{x,r}-\frac{\partial z_{x,r}}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z_{x,r}}{\partial x^2},$$

$$z_{x,r+1}=z_{x,r}+\frac{\partial z_{x,r}}{\partial r}.$$

Soient

$$x=\frac{n+\mu\sqrt{n}}{2},\qquad r=nr',\qquad z_{x,r}=\mathrm{U};$$

l'équation précédente aux différences finies partielles deviendra, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{n^2}$,

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r'}=2\mathrm{U}+2\mu\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mu}+\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mu^2}.$$

Pour intégrer cette équation, qui, comme on peut s'en assurer par la méthode que j'ai donnée pour cet objet, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de l'année 1773, n'est intégrable en termes finis qu'au moyen d'intégrales définies, faisons

$$\mathrm{U}=\int \varphi\, dt\, c^{-\mu t},$$

φ étant fonction de t et de r'. On aura

$$2\mu\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mu}=2c^{-\mu t}t\varphi-2\int c^{-\mu t}(\varphi\, dt+t\, d\varphi),$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mu^2}=\int c^{-\mu t}t^2\varphi\, dt;$$

l'équation aux différentielles partielles en U devient ainsi

$$\int c^{-\mu t}\frac{\partial \varphi}{\partial r'}dt=2c^{-\mu t}t\varphi+\int c^{-\mu t}dt\left(t^2\varphi-2t\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right).$$

En égalant entre eux les termes affectés du signe $\int$, on aura l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r'} = t^2\varphi - 2t\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Le terme hors du signe $\int$, égalé à zéro, donnera, pour l'équation aux limites de l'intégrale,

$$0 = t\varphi\, c^{-\mu t}.$$

L'intégrale de l'équation précédente aux différentielles partielles de φ est

$$\varphi = c^{\frac{1}{4}t^2}\,\psi\left(\frac{t}{c^{2r'}}\right),$$

$\psi\left(\frac{t}{c^{2r'}}\right)$ étant une fonction arbitraire de $\frac{t}{c^{2r'}}$; on a donc

$$\mathrm{U} = \int dt\, c^{-\mu t + \frac{1}{4}t^2}\,\psi\left(\frac{t}{c^{2r'}}\right).$$

Soit

$$t = 2\mu + 2s\sqrt{-1}$$

l'expression de U prendra cette forme

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{U} = c^{-\mu^2}\int ds\, c^{-s^2}\,\Gamma\left(\frac{s - \mu\sqrt{-1}}{c^{2r'}}\right).$$

Il est facile de voir que l'équation précédente, aux limites de l'intégrale, exige que les limites de l'intégrale relative à s soient prises depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$. En prenant le radical $\sqrt{-1}$ avec le signe $-$, on aurait pour U une expression de cette forme

$$\mathrm{U} = c^{-\mu^2}\int ds\, c^{-s^2}\,\Pi\left(\frac{s + \mu\sqrt{-1}}{c^{2r'}}\right),$$

la fonction arbitraire $\Pi(s)$ pouvant être différente de $\Gamma(s)$. La somme de ces deux expressions de U sera sa valeur complète. Mais il est facile de s'assurer que, les intégrales étant prises depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$, l'addition de cette nouvelle expression de U n'ajoute rien à la généralité de la première, dans laquelle elle est comprise.

Développons maintenant le second membre de l'équation (A), suivant les puissances de $\frac{1}{c^{2r'}}$, et considérons un des termes de ce développement, tel que

$$\frac{H^{(i)}\,c^{-\mu^2}}{c^{4ir'}}\int ds\, c^{-s^2}(s-\mu\sqrt{-1})^{2i};$$

ce terme devient, après les intégrations,

$$\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2^i}\sqrt{\pi}\,\frac{H^{(i)}c^{-\mu^2}}{c^{4ir'}}$$
$$\times\left[1-\frac{i(2\mu)^2}{1.2}+\frac{i(i-1)(2\mu)^4}{1.2.3.4}-\frac{i(i-1)(i-2)(2\mu)^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots\right].$$

Considérons encore un terme de ce développement, relatif aux puissances impaires de $\frac{1}{c^{2r'}}$, tel que

$$\frac{L^{(i)}\sqrt{-1}\,c^{-\mu^2}}{c^{(4i+2)r'}}\int ds\, c^{-s^2}(s-\mu\sqrt{-1})^{2i+1}.$$

Ce terme devient, après les intégrations,

$$\frac{1.3.5\ldots(2i+1)L^{(i)}\sqrt{\pi}\,\mu\, c^{-\mu^2}}{2^i c^{(4i+2)r'}}\left[1-\frac{i(2\mu)^2}{1.2.3}+\frac{i(i-1)(2\mu)^4}{1.2.3.4.5}-\ldots\right].$$

On aura donc ainsi l'expression générale de la probabilité U, développée dans une série ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{c^{2r'}}$, série qui devient très convergente lorsque r' est un nombre considérable. Cette expression doit être telle que $\int U\,dx$ ou $\frac{1}{2}\int U\,d\mu.\sqrt{n}$ soit égale à l'unité, les intégrales étant étendues à toutes les valeurs de x et de μ, c'est-à-dire depuis x nul jusqu'à $x=n$, et depuis $\mu=-\sqrt{n}$ jusqu'à $\mu=\sqrt{n}$; car il est certain que, l'une des valeurs de x devant avoir lieu, la somme des probabilités de toutes ces valeurs doit être égale à l'unité. En prenant l'intégrale $\int c^{-\mu^2}d\mu$ dans les limites de μ, on a le même résultat, à très peu près, qu'en la prenant depuis $\mu=-\infty$ jusqu'à $\mu=\infty$; la différence n'est que de l'ordre $\frac{c^{-n}}{\sqrt{n}}$, et vu l'extrême rapidité avec laquelle c^{-n} diminue à mesure que n augmente, on voit que cette différence est insensible lorsque n est un grand nombre. Cela posé, considérons dans l'intégrale $\frac{1}{2}\int \mathrm{U}\, d\mu\, \sqrt{n}$ le terme

$$\frac{1.3.5\ldots(2i-1)\frac{1}{2}\mathrm{H}^{(i)}\sqrt{n\pi}}{2^i c^{4ir'}}\int d\mu\, c^{-\mu^2}\left[1-\frac{i(2\mu)^2}{1.2}+\frac{i(i-1)(2\mu)^4}{1.2.3.4}-\ldots\right].$$

En étendant l'intégrale depuis $\mu=-\infty$ jusqu'à $\mu=\infty$, ce terme devient

$$\frac{1.3.5\ldots(2i-1)\frac{1}{2}\mathrm{H}^{(i)}\pi\sqrt{n}}{2^i c^{4ir'}}\left[1-i+\frac{i(i-1)}{1.2}-\frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}+\ldots\right].$$

Le facteur $1-i+\frac{i(i-1)}{1.2}-\ldots$ est égal à $(1-1)^i$; il est donc nul, excepté dans le cas de $i=0$, où il se réduit à l'unité. Il est visible que les termes de l'expression de U qui renferment des puissances impaires de μ donnent un résultat nul dans l'intégrale $\frac{1}{2}\int \mathrm{U}\, d\mu\, \sqrt{n}$, étendue depuis $\mu=-\infty$ jusqu'à $\mu=\infty$; car ces termes ont pour facteur $c^{-\mu^2}$, et l'on a généralement dans ces limites

$$\int \mu^{2i+1}\, d\mu\, c^{-\mu^2}=0.$$

Il n'y a donc que le premier terme de l'expression de U, terme que nous représenterons par $\mathrm{H}c^{-\mu^2}$, qui puisse donner un résultat dans l'intégrale $\frac{1}{2}\int \mathrm{U}\, d\mu\, \sqrt{n}$, et ce résultat est $\frac{1}{2}\mathrm{H}\sqrt{n\pi}$; on a donc

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{H}\sqrt{n\pi}=1;$$

par conséquent,

$$\mathrm{H}=\frac{2}{\sqrt{n\pi}}.$$

L'expression générale de U a ainsi la forme suivante

$$(k)\qquad \mathrm{U}=\frac{2c^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi}}\left\{\begin{aligned}&1+\frac{\mathrm{Q}^{(1)}(1-2\mu^2)}{c^{4r'}}+\frac{\mathrm{Q}^{(2)}(1-4\mu^2+\frac{4}{3}\mu^4)}{c^{8r'}}+\ldots\\&+\frac{\mathrm{L}^{(0)}\mu}{c^{2r'}}+\frac{\mathrm{L}^{(1)}\mu(1-\frac{2}{3}\mu^2)}{c^{6r'}}+\frac{\mathrm{L}^{(2)}\mu(1-\frac{4}{3}\mu^2+\frac{4}{15}\mu^4)}{c^{10r'}}+\ldots\end{aligned}\right\},$$

$\mathrm{Q}^{(1)}, \mathrm{Q}^{(2)}, \ldots, \mathrm{L}^{(0)}, \mathrm{L}^{(1)}, \ldots$ étant des constantes indéterminées, qui dépendent de la valeur initiale de U.

Supposons que U devienne X lorsque r est nul, X étant une fonction donnée de μ. On a généralement ces deux théorèmes,

$$0 = \mathrm{Q}^{(i)} \int \mu^{2q} \, d\mu \, \mathrm{U}_i \, c^{-\mu^2},$$
$$0 = \mathrm{L}^{(i)} \int \mu^{2q+1} \, d\mu \, \mathrm{U}'_i \, c^{-\mu^2},$$

lorsque q est moindre que i; U_i et U'_i étant des fonctions de μ, par lesquelles $\dfrac{2\,\mathrm{Q}^{(i)} c^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi}\, c^{4ir'}}$ et $\dfrac{2\,\mathrm{L}^{(i)} c^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi}\, c^{(4i+2)r'}}$ sont multipliés dans l'expression de U. Pour démontrer ces théorèmes, nous observerons que, par ce qui précède, $\dfrac{2\,\mathrm{Q}^{(i)} c^{-\mu^2} \mathrm{U}_i}{\sqrt{n\pi}}$ est égal à

$$(\sqrt{-1})^{2i} \mathrm{H}^{(i)} c^{-\mu^2} \int ds \, c^{-s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i};$$

il faut donc faire voir que l'on a

$$0 = \int\int \mu^{2q} \, ds \, d\mu \, c^{-\mu^2 - s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i},$$

les intégrales étant prises depuis μ et s égaux à $-\infty$ jusqu'à μ et s égaux à $+\infty$. En intégrant d'abord par rapport à μ, ce terme devient

$$\frac{2q-1}{2} \int\int \mu^{2q-2} \, d\mu \, ds \, c^{-\mu^2 - s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i}$$
$$+ \, i \int\int \mu^{2q-1} \, d\mu \, ds \, c^{-\mu^2 - s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2i-1}.$$

En continuant d'intégrer ainsi par parties relativement à μ, on parvient enfin à des termes de la forme

$$k \int\int d\mu \, ds \, c^{-\mu^2 - s^2} (\mu + s\sqrt{-1})^{2e},$$

e n'étant pas zéro, et, par ce qui précède, ces termes sont nuls.

On prouvera de la même manière que l'on a

$$0 = \mathrm{L}^{(i)} \int \mu^{2q+1} \, d\mu \, \mathrm{U}'_i \, c^{-\mu^2}.$$

De là il suit que l'on a généralement

$$0 = \int \mathrm{U}_i \, \mathrm{U}_{i'} \, d\mu \, c^{-\mu^2}, \qquad 0 = \int \mathrm{U}'_i \, \mathrm{U}'_{i'} \, d\mu \, c^{-\mu^2},$$

i et i' étant des nombres différents. Car si, par exemple, i' est plus grand que i, toutes les puissances de μ dans U_i sont moindres que $2i'$; chacun des termes de U_i donnera donc, par ce qui précède, un résultat nul dans l'intégrale $\int U_i U_{i'} d\mu\, c^{-\mu^2}$. Le même raisonnement a lieu pour l'intégrale $\int U'_i U'_{i'} d\mu\, c^{-\mu^2}$.

Mais ces intégrales ne sont pas nulles, lorsque $i = i'$. On les obtiendra dans ce cas de cette manière. On a, par ce qui précède,

$$U_i = \frac{2^i\left(\sqrt{-1}\right)^{2i} \int ds\, c^{-s^2}\left(\mu + s\sqrt{-1}\right)^{2i}}{1.3.5\ldots(2i-1)\sqrt{\pi}}.$$

Le terme qui a pour facteur μ^{2i} dans cette expression est

$$\frac{2^i\left(\sqrt{-1}\right)^{2i}\mu^{2i}}{1.3.5\ldots(2i-1)};$$

or on peut ne considérer que ce terme dans le premier facteur U_i de l'intégrale $\int U_i U_i\, d\mu\, c^{-\mu^2}$; car les puissances inférieures de μ, dans ce facteur, donnent un résultat nul dans l'intégrale. On a donc

$$\int U_i U_i\, d\mu\, c^{-\mu^2} = \frac{2^{2i}}{[1.3.5\ldots(2i-1)]^2\sqrt{\pi}} \int\int \mu^{2i}\, d\mu\, ds\, c^{-\mu^2-s^2}\left(\mu + s\sqrt{-1}\right)^{2i}.$$

On a, en intégrant par rapport à μ, depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$,

$$\begin{aligned}
&\int\int \mu^{2i}\, d\mu\, ds\, c^{-\mu^2-s^2}\left(\mu + s\sqrt{-1}\right)^{2i} \\
&= \frac{2i-1}{2}\int\int \mu^{2i-2}\, d\mu\, ds\, c^{-\mu^2-s^2}\left(\mu + s\sqrt{-1}\right)^{2i} \\
&\quad + \frac{2i}{2}\int\int \mu^{2i-1}\, d\mu\, ds\, c^{-\mu^2-s^2}\left(\mu + s\sqrt{-1}\right)^{2i-1}.
\end{aligned}$$

Le premier terme du second membre de cette équation est nul par ce qui précède; ce membre se réduit donc à son second terme. On trouve de la même manière que l'on a

$$\begin{aligned}
&\int\int \mu^{2i-1}\, d\mu\, ds\, c^{-\mu^2-s^2}\left(\mu + s\sqrt{-1}\right)^{2i-1} \\
&= \frac{2i-1}{2}\int\int \mu^{2i-2}\, d\mu\, ds\, c^{-\mu^2-s^2}\left(\mu + s\sqrt{-1}\right)^{2i-2},
\end{aligned}$$

et ainsi de suite; on a donc

$$\int\int \mu^{2i} d\mu\, ds\, c^{-\mu^2-s^2}(\mu + s\sqrt{-1})^{2i} = \frac{1.2.3\ldots 2i\pi}{2^{2i}};$$

par conséquent,

$$\int \mathrm{U}_i \mathrm{U}_i\, d\mu\, c^{-\mu^2} = \frac{2.4.6\ldots 2i\sqrt{\pi}}{1.3.5\ldots(2i-1)}.$$

On trouvera de la même manière

$$\int \mathrm{U}'_i \mathrm{U}'_i\, d\mu\, c^{-\mu^2} = \frac{1}{2}\,\frac{2.4.6\ldots 2i\sqrt{\pi}}{1.3.5\ldots(2i+1)}.$$

On a évidemment

$$\int \mathrm{U}_i \mathrm{U}'_{i'}\, d\mu\, c^{-\mu^2} = 0,$$

dans le cas même où i et i' sont égaux, parce que le produit $\mathrm{U}_i \mathrm{U}'_{i'}$ ne contient que des puissances impaires de μ.

Cela posé, l'expression générale de U donne, pour sa valeur initiale, que nous avons désignée par X,

$$\mathrm{X} = \frac{2c^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi}}\left[1 + \mathrm{Q}^{(1)}(1 - 2\mu^2) + \ldots + \mathrm{L}^{(0)}\mu + \mathrm{L}^{(1)}\mu\left(1 - \tfrac{2}{3}\mu^2\right) + \ldots\right].$$

Si l'on multiplie cette équation par $\mathrm{U}_i\, d\mu$, et si l'on prend les intégrales depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$, on aura, en vertu des théorèmes précédents,

$$\int \mathrm{X}\, \mathrm{U}_i\, d\mu = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}\mathrm{Q}^{(i)} \int \mathrm{U}_i \mathrm{U}_i\, d\mu\, c^{-\mu^2},$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{Q}^{(i)} = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)\frac{1}{2}\sqrt{n}}{2.4.6\ldots 2i}\int \mathrm{X}\, \mathrm{U}_i\, d\mu;$$

on trouvera, de la même manière,

$$\mathrm{L}^{(i)} = \frac{1.3.5\ldots(2i+1)\sqrt{n}}{2.4.6\ldots 2i}\int \mathrm{X}\, \mathrm{U}'_i\, d\mu.$$

On aura donc ainsi les valeurs successives de $\mathrm{Q}^{(1)}, \mathrm{Q}^{(2)}, \ldots, \mathrm{L}^{(0)}, \mathrm{L}^{(1)}, \ldots,$ au moyen d'intégrales définies, lorsque X ou la valeur initiale de U sera donnée.

Dans le cas où X est égal à $\frac{2i}{\sqrt{n\pi}}c^{-i^2\mu^2}$, l'expression générale de U prend une forme très simple. Alors la fonction arbitraire $\Gamma\left(\frac{s-\mu\sqrt{-1}}{c^{2r'}}\right)$ de la formule (A) est de la forme $kc^{-6\left(\frac{s-\mu\sqrt{-1}}{c^{2r'}}\right)^2}$. Pour déterminer les constantes 6 et k, nous observerons qu'en supposant

$$6' = \frac{6}{c^{4r'}},$$

on aura

$$U = kc^{-\frac{\mu^2}{1+6'}}\int ds\, c^{-(1+6')\left(s-\frac{6'\mu\sqrt{-1}}{1+6'}\right)^2}.$$

En faisant ensuite

$$\sqrt{1+6'}\left(s-\frac{6'\mu\sqrt{-1}}{1+6'}\right) = s',$$

et observant que l'intégrale relative à s devant être prise depuis $s=-\infty$ jusqu'à $s=\infty$, l'intégrale relative à s' doit être prise dans les mêmes limites, on aura

$$U = \frac{k\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+6'}}c^{-\frac{\mu^2}{1+6'}}.$$

En comparant cette expression à la valeur initiale de U, qui est

$$U = \frac{2i}{\sqrt{n\pi}}c^{-i^2\mu^2},$$

et observant que 6 est la valeur initiale de $6'$, on aura

$$i^2 = \frac{1}{1+6},$$

d'où l'on tire

$$6 = \frac{1-i^2}{i^2}, \qquad 6' = \frac{1-i^2}{i^2 c^{4r'}}.$$

On doit avoir ensuite

$$\frac{k\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+6}} = \frac{2i}{\sqrt{n\pi}},$$

ce qui donne

$$k\sqrt{\pi} = \frac{2}{\sqrt{n\pi}},$$

valeur que l'on obtient encore par la condition que $\frac{1}{2}\int U\,d\mu\,\sqrt{n} = 1$, l'intégrale étant prise depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$; on aura donc, pour l'expression de U, quel que soit r',

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi(1+6')}}\, c^{-\frac{\mu^2}{1+6'}}.$$

On trouve, en effet, que cette valeur de U, substituée dans l'équation aux différentielles partielles en U, y satisfait.

$6'$ diminuant sans cesse quand r' augmente, la valeur de U varie sans cesse et devient à sa limite, lorsque r' est infini,

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}\, c^{-\mu^2}.$$

Pour donner une application de ces formules, imaginons, dans une urne C, un très grand nombre m de boules blanches et un pareil nombre de boules noires. Ces boules ayant été mêlées, supposons que l'on tire de l'urne n boules, que l'on met dans l'urne A. Supposons ensuite que l'on mette dans l'urne B autant de boules blanches qu'il y a de boules noires dans l'urne A, et autant de boules noires qu'il y a de boules blanches dans la même urne. Il est clair que le nombre des cas dans lesquels il y aura x boules blanches, et par conséquent $n-x$ boules noires dans l'urne A, est égal au produit du nombre des combinaisons des m boules blanches de l'urne C, prises x à x, par le nombre des combinaisons des m boules noires de la même urne, prises $n-x$ à $n-x$. Ce produit est, par le n° 3, égal à

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-x+1)}{1.2.3\ldots x}\,\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+x+1)}{1.2.3\ldots(n-x)}$$

ou à

$$\frac{(1.2.3\ldots m)^2}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots(n-x).1.2.3\ldots(m-x).1.2.3\ldots(m-n+x)}.$$

Le nombre de tous les cas possibles est le nombre des combinaisons des $2m$ boules de l'urne C, prises n à n; ce nombre est

$$\frac{1.2.3\ldots 2m}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots(2m-n)};$$

en divisant la fraction précédente par celle-ci, on aura, pour la probabilité de x ou pour la valeur initiale de U,

$$\frac{(1.2.3\ldots m)^2.1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots(2m-n)}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots(m-x).1.2.3\ldots(n-x).1.2.3\ldots(m-n+x).1.2.3\ldots 2m}.$$

Maintenant, si l'on observe que l'on a à très peu près, lorsque s est un grand nombre,

$$1.2.3\ldots s = s^{s+\frac{1}{2}}c^{-s}\sqrt{2\pi},$$

on trouvera facilement, après toutes les réductions, en faisant

$$x = \frac{n+\mu\sqrt{n}}{2},$$

et en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{n}$ qui ne sont pas multipliées par μ^2,

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}\sqrt{\frac{m}{2m-n}}\,c^{-\frac{m\mu^2}{2m-n}};$$

en faisant donc

$$i^2 = \frac{m}{2m-n},$$

on aura

$$U = \frac{2i}{\sqrt{n\pi}}c^{-i^2\mu^2}.$$

Si le nombre m est infini, alors $i^2 = \frac{1}{2}$, et la valeur initiale de U est

$$U = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}}c^{-\frac{1}{2}\mu^2}.$$

Sa valeur, après un nombre quelconque de tirages, est

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi\left(1+c^{-\frac{4r}{n}}\right)}}c^{-\frac{\mu^2}{1+c^{-\frac{4r}{n}}}}.$$

Le cas de m infini revient à celui dans lequel les urnes A et B seraient remplies, en projetant n fois une pièce qui amènerait indifféremment *croix* ou *pile*, et mettant dans l'urne A une boule blanche chaque fois que *croix* arriverait, et une boule noire chaque fois que *pile* arriverait, et faisant l'inverse pour l'urne B. Car il est visible que la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne C est alors $\frac{1}{2}$, comme celle d'amener *croix* ou *pile*.

En prenant l'intégrale $\int U\,dx$ ou $\frac{1}{2}\int U\,d\mu\sqrt{n}$ depuis $\mu = -a$ jusqu'à $\mu = a$, on aura la probabilité que le nombre des boules blanches de l'urne A sera compris dans les limites $\pm a\sqrt{n}$.

On peut généraliser le résultat précédent, en supposant l'urne A remplie, comme au commencement de ce numéro, par la projection d'un prisme de $p+q$ faces latérales, dont p sont blanches et q sont noires. On a vu qu'alors, si l'on fait

$$i^2 = \frac{(p+q)^2}{2pq},$$

on a, à l'origine ou lorsque r est nul,

$$U = \frac{i}{\sqrt{n\pi}}\,c^{-\frac{i^2}{n}\left(x - \frac{np}{p+q}\right)^2}.$$

Supposons p et q très peu différents, en sorte que l'on ait

$$p = \frac{p+q}{2}\left(1 + \frac{a}{\sqrt{n}}\right),$$

$$q = \frac{p+q}{2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{n}}\right),$$

on aura

$$i^2 = \frac{2}{1 - \frac{a^2}{n}}$$

ou, à très peu près, $i^2 = 2$; donc

$$U = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\,c^{-\frac{2}{n}\left(x - \frac{n}{2} - \frac{a\sqrt{n}}{2}\right)^2}.$$

En faisant donc

$$x = \frac{n + \mu\sqrt{n}}{2},$$

on aura

$$U = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} c^{-\frac{1}{2}(\mu-a)^2}.$$

Supposons maintenant qu'après un nombre quelconque de tirages on ait

$$U = \frac{2}{\sqrt{n6\pi}} c^{-\frac{(\mu-\alpha)^2}{6}},$$

6 et α étant des fonctions de r'. Si l'on substitue cette valeur dans l'équation aux différences partielles en U, on aura

$$\begin{aligned} -\frac{d6}{dr'}\left[1-\frac{2(\mu-\alpha)^2}{6}\right]+4\frac{d\alpha}{dr'}(\mu-\alpha) \\ = 4(6-1)\left[1-\frac{2(\mu-\alpha)^2}{6}\right]-8\alpha(\mu-\alpha), \end{aligned}$$

d'où l'on tire les deux équations suivantes :

$$\frac{\frac{d6}{dr'}}{6-1} = -4, \qquad \frac{d\alpha}{dr'} = -2\alpha.$$

En les intégrant et observant qu'à l'origine de r', $\alpha = a$ et $6 = 2$, on aura

$$6 = 1 + c^{-4r'}, \qquad \alpha = a\,c^{-2r'},$$

ce qui donne

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi(1+c^{-4r'})}} c^{-\frac{(\mu - a c^{-2r'})^2}{1+c^{-4r'}}}.$$

Cherchons maintenant la valeur moyenne du nombre des boules blanches contenues dans l'urne A, après r tirages. Cette valeur est la somme des produits des divers nombres des boules blanches, multipliées par leurs probabilités respectives; elle est donc égale à l'intégrale

$$\int \frac{n+\mu\sqrt{n}}{2}\,U\,\frac{d\mu\sqrt{n}}{2},$$

prise depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$. En substituant pour U sa valeur donnée par la formule (k), on aura, en vertu des théorèmes précédents, pour cette intégrale,

$$\tfrac{1}{2}n + \frac{\sqrt{n}}{4}\,\mathrm{L}^{(0)}c^{-\frac{2r}{n}}.$$

A l'origine où r est nul, cette valeur est $\frac{1}{2}n + \frac{\sqrt{n}}{2}\mathrm{L}^{(0)}$; ainsi l'on aura $\mathrm{L}^{(0)}$ au moyen du nombre des boules blanches que l'urne A contient à cette origine.

On peut obtenir fort simplement, de la manière suivante, la valeur moyenne du nombre des boules blanches, après r tirages. Imaginons que chaque boule blanche ait une valeur que nous représenterons par l'unité, les boules noires étant supposées n'avoir aucune valeur. Il est clair que le prix de l'urne A sera la somme des produits de tous les nombres possibles de boules blanches qui peuvent exister dans l'urne, multipliés par leurs probabilités respectives; ce prix est donc ce que nous avons nommé *valeur moyenne du nombre des boules blanches*. Nommons-le z, après le tirage $r^{\text{ième}}$. Au tirage suivant, s'il sort une boule blanche, ce prix diminue d'une unité; or, si l'on suppose que x est le nombre des boules blanches contenues dans l'urne après le tirage $r^{\text{ième}}$, la probabilité d'en extraire une boule blanche sera $\frac{x}{n}$; en nommant donc U la probabilité de cette supposition, l'intégrale $\int \frac{\mathrm{U}x\,dx}{n}$, étendue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, sera la diminution de z, résultante de la probabilité d'extraire une boule blanche de l'urne. Si l'on fait, comme ci-dessus, $\frac{r}{n} = r'$, et si l'on désigne la fraction très petite $\frac{1}{n}$ par dr', cette diminution sera égale à $z\,dr'$; car z est égal à $\int \mathrm{U}x\,dx$, somme des produits des nombres des boules blanches par leurs probabilités respectives. Le prix de l'urne A s'accroît, si l'on extrait une boule blanche de l'urne B, pour la mettre dans l'urne A; or, x étant supposé le nombre des boules blanches de l'urne A, $n - x$ sera celui des boules blanches de l'urne B, et la probabilité d'extraire une boule blanche de cette dernière urne sera $\frac{n-x}{n}$; en multipliant cette probabilité par la probabilité U de x, l'intégrale $\int U \frac{n-x}{n} dx$, prise depuis x nul jusqu'à $x = n$, sera l'accroissement de z. $\int U(n-x)\,dx$ est le prix de l'urne B; en nommant donc z' ce prix, $z'dr'$ sera l'accroissement de z; on aura donc

$$dz = z'\,dr' - z\,dr'.$$

La somme des prix des deux urnes est évidemment égale à n, nombre des boules blanches qu'elles contiennent, ce qui donne $z' = n - z$; substituant cette valeur de z' dans l'équation précédente, elle devient

$$dz = (n - 2z)\,dr';$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$z = \tfrac{1}{2}n + \frac{L^{(0)}}{4c^{2r'}},$$

$L^{(0)}$ étant une constante arbitraire, ce qui est conforme à ce qui précède.

On peut étendre toute cette analyse au cas d'un nombre quelconque d'urnes; nous nous bornerons ici à chercher la valeur moyenne du nombre des boules blanches que chaque urne contient après r tirages.

Considérons un nombre e d'urnes, disposées circulairement, et renfermant chacune le nombre n de boules, les unes blanches, et les autres noires, n étant supposé un très grand nombre. Supposons qu'après r tirages, z_0, z_1, z_2, ..., z_{e-1} soient les prix respectifs des diverses urnes. Chaque tirage consiste à extraire en même temps une boule de chaque urne et à la mettre dans la suivante, en partant de l'une d'elles dans un sens déterminé. Si l'on fait $\frac{r}{n} = r'$ et $\frac{1}{n} = dr'$, on aura, par le raisonnement que nous venons de faire relativement à deux urnes,

$$dz_i = (z_{i-1} - z_i)\,dr';$$

cette équation a lieu depuis $i = 1$ jusqu'à $i = e - 1$. Dans le cas de $i = e$, on a

$$dz_0 = (z_{e-1} - z_0)\,dr'.$$

En intégrant ces équations, et supposant qu'à l'origine les prix respectifs de chaque urne, ou les nombres des boules blanches qu'elles contiennent, soient

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \ldots, \quad \lambda_{e-1},$$

on parvient à ce résultat, qui a lieu depuis $i = 0$ jusqu'à $i = e - 1$,

$$z_i = \frac{1}{e} \mathrm{S} c^{-\left(1 - \cos\frac{2s\pi}{e}\right) r'} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 \ \cos\left(\dfrac{2si\pi}{e} - ar'\right) \\ + \lambda_1 \ \cos\left[\dfrac{2s(i-1)\pi}{e} - ar'\right] \\ + \lambda_2 \ \cos\left[\dfrac{2s(i-2)\pi}{e} - ar'\right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \lambda_{e-1} \cos\left[\dfrac{2s(i-e+1)\pi}{e} - ar'\right] \end{array} \right\},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de s, depuis $s = 1$ jusqu'à $s = e$, et a étant égal à $\sin\frac{2s\pi}{e}$. Le terme de cette expression, correspondant à $s = e$, est indépendant de r', et égal à $\frac{1}{e}(\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{e-1})$, c'est-à-dire à la somme entière des boules blanches des urnes divisée par leur nombre. Ce terme est la limite de l'expression de z_i, d'où il suit qu'après un nombre infini de tirages les prix de chaque urne sont égaux entre eux.

CHAPITRE IV.

DE LA PROBABILITÉ DES ERREURS DES RÉSULTATS MOYENS D'UN GRAND NOMBRE D'OBSERVATIONS ET DES RÉSULTATS MOYENS LES PLUS AVANTAGEUX.

18. Considérons maintenant les résultats moyens d'un grand nombre d'observations dont on connaît la loi de facilité des erreurs. Supposons d'abord que, pour chaque observation, les erreurs puissent être également

$$-n,\quad -n+1,\quad -n+2,\quad \ldots,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad n-2,\quad n-1,\quad n.$$

La probabilité de chaque erreur sera $\frac{1}{2n+1}$. Si l'on nomme s le nombre des observations, le coefficient de $c^{l\varpi\sqrt{-1}}$ dans le développement du polynôme

$$(c^{-n\varpi\sqrt{-1}}+c^{-(n-1)\varpi\sqrt{-1}}+c^{-(n-2)\varpi\sqrt{-1}}+\ldots+c^{-\varpi\sqrt{-1}}+1+c^{\varpi\sqrt{-1}}+\ldots+c^{n\varpi\sqrt{-1}})^s$$

sera le nombre des combinaisons dans lesquelles la somme des erreurs est l. Ce coefficient est le terme indépendant de $c^{\varpi\sqrt{-1}}$ et de ses puissances dans le développement du même polynôme multiplié par $c^{-l\varpi\sqrt{-1}}$, et il est visiblement égal au terme indépendant de ϖ dans le même développement multiplié par $\frac{c^{l\varpi\sqrt{-1}}+c^{-l\varpi\sqrt{-1}}}{2}$ ou par $\cos l\varpi$; on aura donc, pour l'expression de ce coefficient,

$$\frac{1}{\pi}\int d\varpi \cos l\varpi(1+2\cos\varpi+2\cos 2\varpi+\ldots+2\cos n\varpi)^s,$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi=0$ jusqu'à $\varpi=\pi$.

On a vu, dans le n° 36 du Livre Ier, que cette intégrale est

$$\frac{(2n+1)^s\sqrt{3}}{\sqrt{n(n+1)2s\pi}}\,c^{-\frac{\frac{3}{2}l^2}{n(n+1)s}};$$

le nombre total des combinaisons des erreurs est $(2n+1)^s$; en divisant la quantité précédente par celle-ci, on aura

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n(n+1)2s\pi}}\,c^{-\frac{\frac{3}{2}l^2}{n(n+1)s}},$$

pour la probabilité que la somme des erreurs des s observations sera l.

Si l'on fait

$$l = 2t\sqrt{\frac{n(n+1)s}{6}},$$

la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites $+2T\sqrt{\frac{n(n+1)s}{6}}$ et $-2T\sqrt{\frac{n(n+1)s}{6}}$ sera égale à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int dt\,c^{-t^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=T$. Cette expression a lieu encore dans le cas de n infini. Alors, en nommant $2a$ l'intervalle compris entre les limites des erreurs de chaque observation, on aura $n=a$, et les limites précédentes deviendront $\pm\frac{2Ta\sqrt{s}}{\sqrt{6}}$: ainsi la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites $\pm ar\sqrt{s}$ est

$$2\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\int dr\,c^{-\frac{3}{2}r^2};$$

c'est aussi la probabilité que l'erreur moyenne sera comprise dans les limites $\pm\frac{ar}{\sqrt{s}}$; car on a l'erreur moyenne en divisant par s la somme des erreurs.

La probabilité que la somme des inclinaisons des orbites de s comètes sera comprise dans des limites données, en supposant toutes les inclinaisons également possibles, depuis zéro jusqu'à l'angle droit, est évidemment la même que la probabilité précédente; l'intervalle $2a$ des limites des erreurs de chaque observation est, dans ce cas, l'intervalle $\frac{\pi}{2}$ des limites des inclinaisons possibles: alors la probabilité que la somme des inclinaisons doit être comprise dans les limites $\pm\frac{\pi r\sqrt{s}}{4}$ est $2\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\int dr\, c^{-\frac{3}{2}r^2}$, ce qui s'accorde avec ce que l'on a trouvé dans le n° 13.

Supposons généralement que la probabilité de chaque erreur positive ou négative soit exprimée par $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$, x et n étant des nombres infinis. Alors, dans la fonction

$$1+2\cos\varpi+2\cos 2\varpi+2\cos 3\varpi+\ldots+2\cos n\varpi,$$

chaque terme, tel que $2\cos x\varpi$, doit être multiplié par $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$; or on a

$$2\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\varpi=2\varphi\left(\frac{x}{n}\right)-\frac{x^2}{n^2}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)n^2\varpi^2+\ldots.$$

En faisant donc

$$x'=\frac{x}{n},\qquad dx'=\frac{1}{n},$$

la fonction

$$\varphi\left(\frac{0}{n}\right)+2\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\cos\varpi+2\varphi\left(\frac{2}{n}\right)\cos 2\varpi+\ldots+2\varphi\left(\frac{n}{n}\right)\cos n\varpi$$

devient

$$2n\int dx'\,\varphi(x')-n^3\varpi^2\int x'^2\,dx'\,\varphi(x')+\ldots,$$

les intégrales devant être étendues depuis $x'=0$ jusqu'à $x'=1$. Soit alors

$$k=2\int dx'\,\varphi(x'),\qquad k''=\int x'^2\,dx'\,\varphi(x'),\qquad \ldots.$$

La série précédente devient

$$nk\left(1-\frac{k''}{k}n^2\varpi^2+\ldots\right).$$

Maintenant la probabilité que la somme des erreurs des s observations sera comprise dans les limites $\pm l$ est, comme il est facile de s'en assurer par les raisonnements précédents,

$$\frac{2}{\pi}\int\int d\varpi\, dl \cos l\varpi \left\{ \begin{array}{l} \varphi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\cos\varpi + 2\varphi\left(\frac{2}{n}\right)\cos 2\varpi + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad + 2\varphi\left(\frac{n}{n}\right)\cos n\varpi \end{array} \right\}^s,$$

l'intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi = \pi$; cette probabilité est donc

$$(u) \qquad 2\frac{(nk)^s}{\pi}\int\int d\varpi\, dl \cos l\varpi \left(1 - \frac{k''}{k} n^2\varpi^2 - \ldots\right)^s.$$

Supposons

$$\left(1 - \frac{k''}{k} n^2\varpi^2 - \ldots\right)^s = c^{-t^2};$$

en prenant les logarithmes hyperboliques, on aura, à très peu près, lorsque s est un grand nombre,

$$s\frac{k''}{k} n^2\varpi^2 = t^2,$$

ce qui donne

$$\varpi = \frac{t}{n}\sqrt{\frac{k}{k''s}}.$$

Si l'on observe ensuite que, nk ou $2\int dx\,\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ exprimant la probabilité que l'erreur d'une observation est comprise dans les limites $\pm n$, cette quantité doit être égale à l'unité, la fonction (u) deviendra

$$\frac{2}{n\pi}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\int\int dl\, dt\, c^{-t^2}\cos\left(\frac{lt}{n}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\right),$$

l'intégrale relative à t devant être prise depuis t nul jusqu'à $t = \pi n\sqrt{\frac{k''s}{k}}$, ou jusqu'à $t = \infty$, n étant supposé infini. Or on a, par le n° 25 du Livre I^{er},

$$\int dt \cos\left(\frac{lt}{n}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\right) c^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} c^{-\frac{l^2}{4n^2}\frac{k}{k''s}},$$

en faisant donc

$$\frac{l}{n} = 2t'\sqrt{\frac{k''s}{k}},$$

la fonction (u) devient

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int dt'\, c^{-t'^2}.$$

Ainsi, en nommant, comme ci-dessus, $2a$ l'intervalle compris entre les limites des erreurs de chaque observation, la probabilité que la somme des erreurs des s observations sera comprise dans les limites $\pm ar\sqrt{s}$ est

$$\sqrt{\frac{k}{k''\pi}}\int dr\, c^{-\frac{kr^2}{4k''}}.$$

Si $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ est constant, alors $\frac{k}{k''} = 6$, et cette probabilité devient

$$2\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\int dr\, c^{-\frac{3}{2}r^2},$$

ce qui est conforme à ce que l'on a trouvé ci-dessus.

Si $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ ou $\varphi(x')$ est une fonction rationnelle et entière de x', on aura, par la méthode du n° 15, la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites $\pm ar\sqrt{s}$, exprimée par une suite de puissances s, $2s$, ... de quantités de la forme $s - \mu \pm r\sqrt{s}$, dans lesquelles μ augmente en progression arithmétique, ces quantités étant continuées jusqu'à ce qu'elles deviennent négatives. En comparant cette suite à l'expression précédente de la même probabilité, on obtiendra d'une manière fort approchée la valeur de la suite, et l'on parviendra ainsi sur ce genre de suites à des théorèmes analogues à ceux que nous avons donnés dans le n° 42 du Livre I^er^, sur les différences finies des puissances d'une variable.

Si la loi de facilité des erreurs est exprimée par une exponentielle négative qui puisse s'étendre jusqu'à l'infini, et généralement si les erreurs peuvent s'étendre à l'infini, alors a devient infini, et l'application de la méthode précédente peut offrir quelques difficultés. Dans tous ces cas, on fera

$$\frac{x}{h} = x', \qquad \frac{1}{h} = dx',$$

h étant une quantité quelconque finie, et en suivant exactement l'analyse précédente, on trouvera, pour la probabilité que la somme des erreurs des s observations est comprise dans les limites $\pm hr\sqrt{s}$,

$$\sqrt{\frac{k}{k''\pi}} \int dr\, c^{-\frac{kr^2}{4k''}},$$

expression dans laquelle on doit observer que $\varphi\left(\frac{x}{h}\right)$ ou $\varphi(x')$ exprime la probabilité de l'erreur $\pm x$, et que l'on a

$$k = 2\int dx'\, \varphi(x'), \qquad k'' = \int x'^2\, dx'\, \varphi(x'),$$

les intégrales étant prises depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = \infty$.

19. Déterminons présentement la probabilité que la somme des erreurs d'un très grand nombre d'observations sera comprise dans des limites données, abstraction faite du signe de ces erreurs, c'est-à-dire, en les prenant toutes positivement. Pour cela, considérons la suite

$$\varphi\left(\frac{n}{n}\right) c^{-n\varpi\sqrt{-1}} + \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) c^{-(n-1)\varpi\sqrt{-1}} + \ldots + \varphi\left(\frac{0}{n}\right) + \ldots$$
$$+ \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) c^{(n-1)\varpi\sqrt{-1}} + \varphi\left(\frac{n}{n}\right) c^{n\varpi\sqrt{-1}},$$

$\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ étant l'ordonnée de la courbe de probabilité des erreurs, correspondante à l'erreur $\pm x$, et x étant, ainsi que n, considéré comme formé d'un nombre infini d'unités. Si l'on élève cette suite à la puissance s, après avoir changé le signe des exponentielles négatives, le coefficient d'une exponentielle quelconque, telle que $c^{(l+\mu s)\varpi\sqrt{-1}}$, sera la probabilité que la somme des erreurs, prises abstraction faite du signe, est $l + \mu s$; cette probabilité est donc

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varpi\, c^{-(l+\mu s)\varpi\sqrt{-1}} \left\{ \begin{array}{r} \varphi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right)c^{\varpi\sqrt{-1}} + 2\varphi\left(\frac{2}{n}\right)c^{2\varpi\sqrt{-1}} + \ldots \\ + 2\varphi\left(\frac{n}{n}\right)c^{n\varpi\sqrt{-1}} \end{array} \right\}^s,$$

l'intégrale relative à ϖ étant prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$; car, dans cet intervalle, l'intégrale $\int d\varpi c^{-r\varpi\sqrt{-1}}$ ou

$$\int d\varpi(\cos r\varpi - \sqrt{-1}\sin r\varpi)$$

disparaît, quel que soit r, pourvu qu'il ne soit pas nul.

On a, en développant par rapport aux puissances de ϖ,

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \log\left\{ c^{-\mu s\varpi\sqrt{-1}}\left[\varphi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right)c^{\varpi\sqrt{-1}} + \ldots + 2\varphi\left(\frac{n}{n}\right)c^{n\varpi\sqrt{-1}}\right]^s \right\} \\ = s\log \left\{ \begin{array}{l} \varphi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + 2\,\varphi\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + 2\,\varphi\left(\frac{n}{n}\right) \\ + 2\varpi\sqrt{-1}\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + 2\,\varphi\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + n\,\varphi\left(\frac{n}{n}\right)\right] \\ - \varpi^2\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + 2^2\varphi\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + n^2\varphi\left(\frac{n}{n}\right)\right] \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} - \mu s\varpi\sqrt{-1}. \end{array} \right.$$

En faisant donc

$$\frac{x}{n} = x', \qquad \frac{1}{n} = dx',$$

on a

$$2\int dx'\,\varphi(x') = k, \qquad \int x'\,dx'\,\varphi(x') = k', \qquad \int x'^2\,dx'\,\varphi(x') = k'',$$
$$\int x'^3\,dx'\,\varphi(x') = k''', \qquad \int x'^4\,dx'\,\varphi(x') = k^{\text{IV}}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les intégrales étant prises depuis x' nul jusqu'à $x' = 1$; le second membre de l'équation (1) devient

$$s\log nk + s\log\left(1 + \frac{2k'}{k}n\varpi\sqrt{-1} - \frac{k''}{k}n^2\varpi^2 - \ldots\right) - \mu s\varpi\sqrt{-1}.$$

L'erreur de chaque observation devant tomber nécessairement dans les limites $\pm n$, on a $nk = 1$; la quantité précédente devient ainsi

$$s\left(\frac{2k'}{k} - \frac{\mu}{n}\right) n\varpi\sqrt{-1} - \frac{(kk'' - 2k'^2)\, s\, n^2 \varpi^2}{k^2} - \ldots;$$

en faisant donc

$$\frac{\mu}{n} = \frac{2k'}{k}$$

et négligeant les puissances de ϖ supérieures au carré, cette quantité se réduit à son second terme, et la probabilité précédente devient

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varpi\, c^{-l\varpi\sqrt{-1} - \frac{kk''-2k'^2}{k^2} s n^2 \varpi^2}.$$

Soient

$$\beta = \frac{k}{\sqrt{kk'' - 2k'^2}}, \qquad \varpi = \frac{\beta t}{n\sqrt{s}}, \qquad \frac{l}{n} = r\sqrt{s}.$$

L'intégrale précédente devient

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{c^{-\frac{\beta^2 r^2}{4}}}{n\sqrt{s}}\int \beta\, dt\, c^{-\left(t + \frac{l\beta\sqrt{-1}}{2n\sqrt{s}}\right)^2}.$$

Cette intégrale doit être prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$, et alors la quantité précédente devient

$$\frac{\beta}{2\sqrt{\pi}\, n\sqrt{s}}\, c^{-\frac{\beta^2 r^2}{4}}.$$

En la multipliant par dl ou par $n\,dr\sqrt{s}$, l'intégrale

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int \beta\, dr\, c^{-\frac{\beta^2 r^2}{4}}$$

sera la demi-probabilité que la valeur de l, et, par conséquent, la somme des erreurs des observations, est comprise dans les limites $\frac{2k'}{k}as \pm ar\sqrt{s}$, $\pm a$ étant les limites des erreurs de chaque observation, limites que nous désignons par $\pm n$, quand nous les concevons partagées dans une infinité de parties.

On voit ainsi que la somme des erreurs la plus probable, abstraction faite du signe, est celle qui répond à $r = 0$. Cette somme est $\frac{2k'}{k}as$. Dans le cas où $\varphi(x)$ est constant, $\frac{2k'}{k} = \frac{1}{2}$; la somme des erreurs la plus probable est donc alors la moitié de la plus grande somme possible, somme qui est égale à sa. Mais, si $\varphi(x)$ n'est pas constant et diminue à mesure que l'erreur x augmente, alors $\frac{2k'}{k}$ est moindre que $\frac{1}{2}$, et la somme des erreurs, abstraction faite du signe, est au-dessous de la moitié de la plus grande somme possible.

On peut, par la même analyse, déterminer la probabilité que la somme des carrés des erreurs sera $l + \mu s$; il est facile de voir que cette probabilité a pour expression l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varpi\, c^{-(l+\mu s)\varpi\sqrt{-1}} \left\{ \begin{aligned} &\varphi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right)c^{\varpi\sqrt{-1}} + 2\varphi\left(\frac{2}{n}\right)c^{2^2\varpi\sqrt{-1}} + \ldots \\ &\qquad + 2\varphi\left(\frac{n}{n}\right)c^{n^2\varpi\sqrt{-1}} \end{aligned} \right\}^s,$$

prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$. En suivant exactement l'analyse précédente, on aura

$$\mu = \frac{2n^2k''}{k},$$

et en faisant

$$6' = \frac{k}{\sqrt{kk^{\text{IV}} - 2k''^2}},$$

la probabilité que la somme des carrés des erreurs des s observations sera comprise dans les limites $\frac{2k''}{k}a^2s \pm a^2r\sqrt{s}$ sera

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int 6'\,dr\,c^{-\frac{6'^2r^2}{4}}.$$

La somme la plus probable est celle qui répond à r nul; elle est donc $\frac{2k''}{k}a^2s$. Si s est un très grand nombre, le résultat des observations s'écartera très peu de cette valeur, et par conséquent il fera connaître à très peu près le facteur $\frac{a^2k''}{k}$.

20. Lorsque l'on veut corriger un élément déjà connu à fort peu près, par l'ensemble d'un grand nombre d'observations, on forme des équations de condition de la manière suivante. Soient z la correction de l'élément, et ϵ l'observation; l'expression analytique de celle-ci sera une fonction de l'élément. En y substituant, au lieu de l'élément, sa valeur approchée, plus la correction z; en réduisant en série par rapport à z et négligeant le carré de z, cette fonction prendra la forme $h+pz$; en l'égalant à la quantité observée 6, on aura

$$6 = h + pz.$$

z serait donc déterminé, si l'observation était rigoureuse; mais, comme elle est susceptible d'erreur, en nommant ε cette erreur, on a exactement, aux quantités près de l'ordre z^2,

$$6 + \varepsilon = h + pz;$$

et en faisant $6 - h = \alpha$, on a

$$\varepsilon = pz - \alpha.$$

Chaque observation fournit une équation semblable, que l'on peut représenter pour l'observation $(i+1)^{\text{ième}}$ par celle-ci

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)}z - \alpha^{(i)}.$$

En réunissant toutes ces équations, on a

$$\text{(1)} \qquad \text{S}\varepsilon^{(i)} = z\text{S}p^{(i)} - \text{S}\alpha^{(i)},$$

le signe S se rapportant à toutes les valeurs de i, depuis $i=0$ jusqu'à $i=s-1$, s étant le nombre total des observations. En supposant nulle la somme des erreurs, cette équation donne

$$z = \frac{\text{S}\alpha^{(i)}}{\text{S}p^{(i)}};$$

c'est ce que l'on nomme ordinairement *résultat moyen des observations*.

On a vu, dans le n° 18, que la probabilité que la somme des erreurs des s observations sera comprise dans les limites $\pm ar\sqrt{s}$ est

$$\sqrt{\frac{k}{k''\pi}}\int dr\, c^{-\frac{kr^2}{4k''}}.$$

Nommons $\pm u$ l'erreur du résultat z; en substituant, dans l'équation (1), $\pm ar\sqrt{s}$ au lieu de $S\varepsilon^{(i)}$, et $\frac{S\alpha^{(i)}}{Sp^{(i)}} \pm u$ au lieu de z, elle donne

$$r = \frac{uSp^{(i)}}{a\sqrt{s}};$$

la probabilité que l'erreur du résultat z sera comprise dans les limites $\pm u$ est donc

$$\sqrt{\frac{k}{k''s\pi}}\, Sp^{(i)}\int\frac{du}{a}\, c^{-\frac{ku^2(Sp^{(i)})^2}{4k''a^2s}}.$$

Au lieu de supposer nulle la somme des erreurs, on peut supposer nulle une fonction quelconque linéaire de ces erreurs, que nous représenterons ainsi,

$$(m) \qquad m\varepsilon + m^{(1)}\varepsilon^{(1)} + m^{(2)}\varepsilon^{(2)} + \ldots + m^{(s-1)}\varepsilon^{(s-1)},$$

$m, m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots$ étant des nombres entiers positifs ou négatifs. En substituant dans cette fonction (m), au lieu de $\varepsilon, \varepsilon^{(1)}, \ldots$, leurs valeurs données par les équations de condition, elle devient

$$zSm^{(i)}p^{(i)} - Sm^{(i)}\alpha^{(i)};$$

en égalant donc à zéro la fonction (m), on a

$$z = \frac{Sm^{(i)}\alpha^{(i)}}{Sm^{(i)}p^{(i)}}.$$

Soit u l'erreur de ce résultat, en sorte que l'on ait

$$z = \frac{Sm^{(i)}\alpha^{(i)}}{Sm^{(i)}p^{(i)}} + u;$$

la fonction (m) devient

$$uSm^{(i)}p^{(i)}.$$

Déterminons la probabilité de l'erreur u, lorsque les observations sont en grand nombre.

Pour cela, considérons le produit

$$\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)c^{mx\varpi\sqrt{-1}}\times\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)c^{m^{(1)}x\varpi\sqrt{-1}}\times\ldots\times\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)c^{m^{(s-1)}x\varpi\sqrt{-1}},$$

le signe $\int$ s'étendant à toutes les valeurs de x, depuis la valeur négative extrême de x jusqu'à sa valeur positive extrême. $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ est, comme dans les numéros précédents, la probabilité d'une erreur x dans chaque observation; x étant supposé, ainsi que a, formé d'une infinité de parties prises pour unité. Il est clair que le coefficient d'une exponentielle quelconque $c^{l\varpi\sqrt{-1}}$, dans le développement de ce produit, sera la probabilité que la somme des erreurs des observations, multipliées respectivement par m, $m^{(1)}$, ..., c'est-à-dire la fonction (m), sera égale à l; en multipliant donc le produit précédent par $c^{-l\varpi\sqrt{-1}}$, le terme indépendant de $c^{\varpi\sqrt{-1}}$ et de ses puissances, dans ce nouveau produit, exprimera cette probabilité. Si l'on suppose, comme nous le ferons ici, la probabilité des erreurs positives la même que celle des erreurs négatives, on pourra, dans la somme $\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)c^{mx\varpi\sqrt{-1}}$, réunir les termes multipliés, l'un par $c^{mx\varpi\sqrt{-1}}$, et l'autre par $c^{-mx\varpi\sqrt{-1}}$; alors cette somme prend la forme $2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\cos mx\varpi$. Il en est de même de toutes les sommes semblables. De là il suit que la probabilité que la fonction (m) sera égale à l est égale à

$$(i)\qquad \frac{1}{2\pi}\int d\varpi\left\{\begin{array}{l} c^{-l\varpi\sqrt{-1}}\times 2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\cos mx\varpi \\ \quad\times 2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\cos m^{(1)}x\varpi\times\ldots\times 2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\cos m^{(s-1)}x\varpi \end{array}\right\},$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi=-\pi$ jusqu'à $\varpi=\pi$. On a, en réduisant les cosinus en séries,

$$\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\cos mx\varpi=\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)-\tfrac{1}{2}m^2a^2\varpi^2\int\frac{x^2}{a^2}\varphi\left(\frac{x}{a}\right)+\ldots.$$

Si l'on fait $\frac{x}{a}=x'$ et si l'on observe que, la variation de x étant l'unité, on a $dx' = \frac{1}{a}$, on aura

$$\int \varphi\left(\frac{x}{a}\right) = a \int dx'\, \varphi(x').$$

Nommons, comme dans les numéros précédents, k l'intégrale $2\int dx' \varphi(x')$, prise depuis x' nul jusqu'à sa valeur positive extrême; nommons pareillement k'' l'intégrale $\int x'^2\, dx'$, prise dans les mêmes limites, et ainsi de suite; nous aurons

$$2\int \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos m x \varpi = ak\left(1 - \frac{k''}{k} m^2 a^2 \varpi^2 + \frac{k^{\text{IV}}}{12k} m^4 a^4 \varpi^4 - \ldots\right).$$

Le logarithme du second membre de cette équation est

$$-\frac{k''}{k} m^2 a^2 \varpi^2 + \frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k^2} m^4 a^4 \varpi^4 - \ldots + \log ak;$$

ak ou $2a\int dx' \varphi(x')$ exprime la probabilité que l'erreur de chaque observation sera comprise dans ses limites, ce qui est certain; on a donc $ak = 1$; ce qui réduit le logarithme précédent à

$$-\frac{k''}{k} m^2 a^2 \varpi^2 + \frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k^2} m^4 a^4 \varpi^4 - \ldots.$$

De là il est aisé de conclure que le produit

$$2\int \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos m x \varpi \times 2\int \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos m^{(i)} x \varpi \times \ldots \times 2\int \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \cos m^{(s-1)} x \varpi$$

est

$$\left(1 + \frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k^2} a^4 \varpi^4\, \mathrm{S}\, m^{(i)4} + \ldots\right) c^{-\frac{k''}{k} a^2 \varpi^2\, \mathrm{S}\, m^{(i)2}};$$

l'intégrale précédente (i) se réduit donc à

$$\frac{1}{2\pi} \int d\varpi \left(1 + \frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k^2} a^4 \varpi^4\, \mathrm{S}\, m^{(i)4} + \ldots\right) c^{-l\varpi\sqrt{-1} - \frac{k''}{k} a^2 \varpi^2\, \mathrm{S}\, m^{(i)2}}.$$

En faisant $sa^2\varpi^2 = t^2$, cette intégrale devient

$$\frac{1}{2a\pi\sqrt{s}} \int dt \left(1 + \frac{kk^{\text{IV}} - 6k''^2}{12k^2} \frac{\mathrm{S}\, m^{(i)4}}{s^2} t^4 + \ldots\right) c^{-\frac{lt\sqrt{-1}}{a\sqrt{s}} - \frac{k''}{k} \frac{\mathrm{S}\, m^{(i)2}}{s} t^2};$$

$Sm^{(i)2}$, $Sm^{(i)4}$, ... sont évidemment des quantités de l'ordre s; ainsi $\frac{Sm^{(i)4}}{s^2}$ est de l'ordre $\frac{1}{s}$; en négligeant donc les termes de ce dernier ordre vis-à-vis de l'unité, la dernière intégrale se réduit à

$$\frac{1}{2a\pi\sqrt{s}}\int dt\, c^{-\frac{lt\sqrt{-1}}{a\sqrt{s}}-\frac{k''}{k}\frac{Sm^{(i)2}}{s}t^2}.$$

L'intégrale relative à ϖ devant être prise depuis $\varpi=-\pi$ jusqu'à $\varpi=\pi$, l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t=-a\pi\sqrt{s}$ jusqu'à $t=a\pi\sqrt{s}$, et dans ces cas l'exponentielle sous le signe $\int$ est insensible à ces deux limites, soit parce que s est un grand nombre, soit parce que a est ici supposé divisé dans une infinité de parties prises pour unité; on peut donc prendre l'intégrale depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$. Faisons

$$t'=\sqrt{\frac{k''Sm^{(i)2}}{ks}}\left(t+\frac{l\sqrt{-1}\,k\sqrt{s}}{2ak''Sm^{(i)2}}\right);$$

la fonction intégrale précédente devient

$$\frac{c^{-\frac{kl^2}{4k''a^2Sm^{(i)2}}}}{2a\pi\sqrt{\frac{k''}{k}Sm^{(i)2}}}\int dt'\, c^{-t'^2}.$$

L'intégrale relative à t' doit être prise, comme l'intégrale relative à t, depuis $t'=-\infty$ jusqu'à $t'=\infty$, ce qui réduit la quantité précédente à celle-ci,

$$\frac{c^{-\frac{kl^2}{4k''a^2Sm^{(i)2}}}}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{k''}{k}Sm^{(i)2}}}.$$

Si l'on fait $l=ar\sqrt{s}$ et si l'on observe que, la variation de l étant l'unité, on a $a\,dr=1$, on aura

$$\frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{\frac{k''\pi}{k}Sm^{(i)2}}}\int dr\, c^{-\frac{kr^2s}{4k''Sm^{(i)2}}},$$

pour la probabilité que la fonction (m) sera comprise dans les limites zéro et $ar\sqrt{s}$, l'intégrale étant prise depuis r nul.

Nous avons besoin ici de connaître la probabilité de l'erreur u de l'élément déterminé en faisant nulle la fonction (m). Cette fonction étant supposée égale à l ou à $ar\sqrt{s}$, on aura, par ce qui précède,

$$u\,\text{S}\,m^{(i)}p^{(i)} = ar\sqrt{s};$$

en substituant cette valeur dans la fonction intégrale précédente, elle devient

$$\frac{\text{S}\,m^{(i)}p^{(i)}}{2a\sqrt{\dfrac{k''\pi}{k}\,\text{S}\,m^{(i)2}}}\int du\, c^{-\frac{ku^2(\text{S}\,m^{(i)}p^{(i)})^2}{4k''a^2\,\text{S}\,m^{(i)2}}};$$

c'est l'expression de la probabilité que la valeur de u sera comprise dans les limites zéro et u, c'est aussi l'expression de la probabilité que u sera compris dans les limites zéro et $-u$. Si l'on fait

$$u = 2at\sqrt{\frac{k''}{k}}\,\frac{\sqrt{\text{S}\,m^{(i)2}}}{\text{S}\,m^{(i)}p^{(i)}},$$

la probabilité précédente devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dt\, c^{-t^2}.$$

Maintenant, la probabilité restant la même, t reste le même, et l'intervalle des deux limites de u se resserre d'autant plus que $a\sqrt{\frac{k''}{k}}\,\frac{\sqrt{\text{S}\,m^{(i)2}}}{\text{S}\,m^{(i)}p^{(i)}}$ est plus petit. Cet intervalle restant le même, la valeur de t, et par conséquent la probabilité que l'erreur de l'élément tombe dans cet intervalle, est d'autant plus grande que la même quantité $a\sqrt{\frac{k''}{k}}\,\frac{\sqrt{\text{S}\,m^{(i)2}}}{\text{S}\,m^{(i)}p^{(i)}}$ est plus petite; il faut donc choisir le système de facteurs $m^{(i)}$, qui rend cette quantité un minimum; et comme a, k, k'' sont les mêmes dans tous ces systèmes, il faut choisir le système qui rend $\frac{\sqrt{\text{S}\,m^{(i)2}}}{\text{S}\,m^{(i)}p^{(i)}}$ un minimum.

On peut parvenir au même résultat de cette manière. Reprenons l'expression de la probabilité que u sera compris dans les limites zéro et u. Le coefficient de du dans la différentielle de cette expression est l'ordonnée de la courbe des probabilités des erreurs u de l'élément, erreurs représentées par l'abscisse u de cette courbe, que l'on peut étendre à l'infini de chaque côté de l'ordonnée qui répond à u nul. Cela posé, toute erreur, soit positive, soit négative, doit être considérée comme un désavantage ou une perte réelle, à un jeu quelconque; or, par les principes de la théorie des probabilités, exposés au commencement de ce Livre, on évalue ce désavantage en prenant la somme de tous les produits de chaque désavantage par sa probabilité; la valeur moyenne de l'erreur à craindre en plus est donc la somme des produits de chaque erreur par sa probabilité; elle est par conséquent égale à l'intégrale

$$\frac{\int u\,du\, \mathrm{S}m^{(i)}p^{(i)}\, c^{-\frac{ku^2(\mathrm{S}m^{(i)}p^{(i)})^2}{4k''a^2\,\mathrm{S}m^{(i)2}}}}{2a\sqrt{\frac{k''\pi}{k}\,\mathrm{S}m^{(i)2}}},$$

prise depuis u nul jusqu'à u infini; ainsi cette erreur est

$$a\sqrt{\frac{k''}{k\pi}}\,\frac{\sqrt{\mathrm{S}m^{(i)2}}}{\mathrm{S}m^{(i)}p^{(i)}}.$$

Cette quantité, prise avec le signe $-$, donne l'erreur moyenne à craindre en moins. Il est visible que le système des facteurs $m^{(i)}$ qu'il faut choisir doit être tel que ces erreurs soient des minima et par conséquent tel que $\frac{\sqrt{\mathrm{S}m^{(i)2}}}{\mathrm{S}m^{(i)}p^{(i)}}$ soit un minimum.

Si l'on différentie cette fonction par rapport à $m^{(i)}$, on aura, en égalant sa différentielle à zéro, par la condition du minimum,

$$\frac{m^{(i)}}{\mathrm{S}m^{(i)2}} = \frac{p^{(i)}}{\mathrm{S}m^{(i)}p^{(i)}}.$$

Cette équation a lieu, quel que soit i, et, comme la variation de ι ne fait point changer la fraction $\frac{\mathrm{S}m^{(i)2}}{\mathrm{S}m^{(i)}p^{(i)}}$, en nommant μ cette fraction, on aura

$$m = \mu p, \qquad m^{(1)} = \mu p^{(1)}, \qquad \ldots, \qquad m^{(s-1)} = \mu p^{(s-1)},$$

et l'on peut, quels que soient $p, p^{(1)}, \ldots$, prendre μ tel que les nombres $m, m^{(1)}, \ldots$ soient des nombres entiers, comme l'analyse précédente le suppose. Alors on a

$$z = \frac{\mathrm{S}\,p^{(i)}\alpha^{(i)}}{\mathrm{S}\,p^{(i)2}},$$

et l'erreur moyenne à craindre devient

$$\pm \frac{a\sqrt{\dfrac{k''}{k\pi}}}{\sqrt{\mathrm{S}\,p^{(i)2}}}.$$

C'est, dans toutes les hypothèses que l'on peut faire sur les facteurs m, $m^{(1)}, \ldots$, la plus petite erreur moyenne possible.

Si l'on fait les valeurs de $m, m^{(1)}, \ldots$ égales à ± 1, l'erreur moyenne à craindre sera plus petite lorsque le signe $\pm$ sera déterminé, de manière que $m^{(i)}p^{(i)}$ soit positif, ce qui revient à supposer $1 = m = m^{(1)} = \ldots$, et à préparer les équations de condition, de sorte que le coefficient de z dans chacune d'elles soit positif; c'est ce que l'on fait dans la méthode ordinaire. Alors le résultat moyen des observations est

$$z = \frac{\mathrm{S}\,\alpha^{(i)}}{\mathrm{S}\,p^{(i)}},$$

et l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins est

$$\pm \frac{a\sqrt{\dfrac{k''s}{k\pi}}}{\mathrm{S}\,p^{(i)}};$$

mais cette erreur surpasse la précédente, qui, comme on l'a vu, est la plus petite possible. On peut s'en convaincre d'ailleurs de cette manière. Il suffit de faire voir que l'on a l'inégalité

$$\frac{\sqrt{s}}{\mathrm{S}\,p^{(i)}} > \frac{1}{\sqrt{\mathrm{S}\,p^{(i)2}}}$$

ou

$$s\,\mathrm{S}p^{(i)2} > (\mathrm{S}p^{(i)})^2.$$

En effet, $2pp^{(1)}$ est moindre que $p^2 + p^{(1)2}$, puisque $(p^{(1)} - p)^2$ est une quantité positive; on peut donc, dans le second membre de l'inégalité précédente, substituer, pour $2pp^{(1)}$, $p^2 + p^{(1)2} - f$, f étant une quantité positive. En faisant des substitutions semblables pour tous les produits semblables, ce second membre sera égal au premier, moins une quantité positive.

Le résultat

$$z = \frac{\mathrm{S}p^{(i)}\alpha^{(i)}}{\mathrm{S}p^{(i)2}},$$

auquel correspond le minimum d'erreur moyenne à craindre, est celui que donne la méthode des moindres carrés des erreurs des observations; car, la somme de ces carrés étant

$$(pz - \alpha)^2 + (p^{(1)}z - \alpha^{(1)2} + \ldots + (p^{(s-1)}z - \alpha^{(s-1)})^2,$$

la condition du minimum de cette fonction, en faisant varier z, donne pour cette variable l'expression précédente; cette méthode doit donc être employée de préférence, quelle que soit la loi de facilité des erreurs, loi dont dépend le rapport $\frac{k''}{k}$.

Ce rapport est $\frac{1}{6}$, si $\varphi(x)$ est une constante; il est moindre que $\frac{1}{6}$, si $\varphi(x)$ est variable, et tel qu'il diminue à mesure que x augmente, comme il est naturel de le supposer. En adoptant la loi moyenne des erreurs, que nous avons donnée dans le n° 15 et suivant laquelle $\varphi(x)$ est égal à $\frac{1}{2a}\log\frac{a}{x}$, on a

$$\frac{k''}{k} = \frac{1}{18}.$$

Quant aux limites $\pm a$, on peut prendre pour ces limites les écarts du résultat moyen, qui feraient rejeter une observation.

Mais on peut, par les observations mêmes, déterminer le facteur $a\sqrt{\frac{k''}{k}}$ de l'expression de l'erreur moyenne. En effet, on a vu, dans le numéro précédent, que la somme des carrés des erreurs des observations est à très peu près $2s\frac{a^2k''}{k}$, et que, si elles sont en grand nombre, il devient extrêmement probable que la somme observée ne s'écartera pas de cette valeur d'une quantité sensible; on peut donc les égaler; or la somme observée est égale à $S\varepsilon^{(i)2}$ ou à $S(p^{(i)}z-\alpha^{(i)})^2$, en substituant pour z sa valeur $\frac{Sp^{(i)}\alpha^{(i)}}{Sp^{(i)2}}$; on trouve ainsi

$$2s\frac{a^2k''}{k}=\frac{Sp^{(i)2}.S\alpha^{(i)2}-(Sp^{(i)}\alpha^{(i)})^2}{Sp^{(i)2}}.$$

L'expression précédente de l'erreur moyenne à craindre sur le résultat z devient alors

$$\pm\frac{\sqrt{Sp^{(i)2}.S\alpha^{(i)2}-(Sp^{(i)}\alpha^{(i)})^2}}{Sp^{(i)2}\sqrt{2s\pi}},$$

expression dans laquelle il n'y a rien qui ne soit donné par les observations et par les coefficients des équations de condition.

21. Supposons maintenant que l'on ait deux éléments à corriger par l'ensemble d'un grand nombre d'observations. En nommant z et z' les corrections respectives de ces éléments, on formera, comme dans le numéro précédent, des équations de condition, qui seront comprises dans cette forme générale

$$\varepsilon^{(i)}=p^{(i)}z+q^{(i)}z'-\alpha^{(i)},$$

$\varepsilon^{(i)}$ étant, comme dans ce numéro, l'erreur de l'observation $(i+1)^{\text{ième}}$. Si l'on multiplie respectivement par m, $m^{(1)}$, ..., $m^{(s-1)}$ ces équations, et que l'on ajoute ensemble ces produits, on aura une première équation finale

$$Sm^{(i)}\varepsilon^{(i)}=z.Sm^{(i)}p^{(i)}+z'.Sm^{(i)}q^{(i)}-Sm^{(i)}\alpha^{(i)}.$$

En multipliant encore les mêmes équations respectivement par n, $n^{(1)}$, ..., $n^{(s-1)}$ et ajoutant ces produits, on aura une seconde équation finale

$$Sn^{(i)}\varepsilon^{(i)}=z.Sn^{(i)}p^{(i)}+z'.Sn^{(i)}q^{(i)}-Sn^{(i)}\alpha^{(i)},$$

le signe S s'étendant ici, comme dans le numéro précédent, à toutes les valeurs de ι, depuis $\iota = 0$ jusqu'à $i = s - 1$.

Si l'on suppose nulles les deux fonctions $\mathrm{S}m^{(i)}\varepsilon^{(i)}$, $\mathrm{S}n^{(i)}\varepsilon^{(i)}$, fonctions que nous désignerons respectivement par (m) et (n), les deux équations finales précédentes donneront les corrections z et z' des deux éléments. Mais ces corrections sont susceptibles d'erreurs, relatives à celle dont la supposition que nous venons de faire est elle-même susceptible. Concevons donc que les fonctions (m) et (n), au lieu d'être nulles, soient respectivement l et l', et nommons u et u' les erreurs correspondantes des corrections z et z', déterminées par ce qui précède; les deux équations finales deviendront

$$l = u.\mathrm{S}m^{(i)}p^{(i)} + u'.\mathrm{S}m^{(i)}q^{(i)},$$
$$l' = u.\mathrm{S}\,n^{(i)}p^{(i)} + u'.\mathrm{S}n^{(i)}q^{(i)}.$$

Il faut maintenant déterminer les facteurs $m, m^{(1)}, \ldots, n, n^{(1)}, \ldots$, de manière que l'erreur moyenne à craindre sur chaque élément soit un minimum. Pour cela, considérons le produit

$$\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)c^{-(m\varpi+n\varpi')x\sqrt{-1}}\times\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)c^{-(m^{(1)}\varpi+n^{(1)}\varpi')x\sqrt{-1}}\times\ldots$$
$$\times\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)c^{-(m^{(s-1)}\varpi+n^{(s-1)}\varpi')x\sqrt{-1}},$$

le signe $\int$ se rapportant à toutes les valeurs de x, depuis $x = -a$ jusqu'à $x = a$; $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ étant, comme dans le numéro précédent, la probabilité de l'erreur x, ainsi que de l'erreur $-x$. La fonction précédente devient, en réunissant les deux exponentielles relatives à x et à $-x$,

$$2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\cos(mx\varpi + nx\varpi')\times 2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\cos(m^{(1)}x\varpi + n^{(1)}x\varpi')\times\ldots$$
$$\times 2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\cos(m^{(s-1)}x\varpi + n^{(s-1)}x\varpi'),$$

le signe $\int$ s'étendant ici à toutes les valeurs de x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, x étant supposé, ainsi que a, divisé dans une infinité de parties prises pour unité. Présentement, il est clair que le terme indépendant des exponentielles, dans le produit de la fonction précédente par $c^{-l\varpi\sqrt{-1}-l'\varpi'\sqrt{-1}}$, est la probabilité que la somme des erreurs de chaque observation, multipliées respectivement par m, $m^{(1)}$, ..., ou la fonction (m), sera égale à l, en même temps que la fonction (n), somme des erreurs de chaque observation, multipliées respectivement par n, $n^{(1)}$, ..., sera égale à l'; cette probabilité est donc

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\int d\varpi\, d\varpi'\, c^{-l\varpi\sqrt{-1}-l'\varpi'\sqrt{-1}}\left\{\begin{array}{l} 2\int\varphi\left(\dfrac{x}{a}\right)\cos(m\varpi+n\varpi')x\times\ldots \\ \times\, 2\int\varphi\left(\dfrac{x}{a}\right)\cos(m^{(s-1)}\varpi+n^{(s-1)}\varpi')x \end{array}\right\},$$

les intégrales étant prises depuis ϖ et ϖ' égaux à $-\pi$, jusqu'à ϖ et ϖ' égaux à π. Cela posé :

En suivant exactement l'analyse du numéro précédent, on trouve que la fonction précédente se réduit à très peu près à

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\int d\varpi\, d\varpi'\, c^{-l\varpi\sqrt{-1}-l'\varpi'\sqrt{-1}-\frac{k''}{k}a^2[\varpi^2 \mathrm{S}m^{(i)2}+2\varpi\varpi'.\mathrm{S}m^{(i)}n^{(i)}+\varpi'^2.\mathrm{S}n^{(i)2}]},$$

k et k'' ayant ici la même signification que dans le numéro cité. On voit encore, par le même numéro, que les intégrales peuvent s'étendre depuis $a\varpi = -\infty$, $a\varpi' = -\infty$, jusqu'à $a\varpi = \infty$ et $a\varpi' = \infty$. Si l'on fait

$$t = a\varpi + \frac{a\varpi'.\mathrm{S}m^{(i)}n^{(i)}}{\mathrm{S}m^{(i)2}} + \frac{kl\sqrt{-1}}{2k''a.\mathrm{S}m^{(i)2}},$$

$$t' = a\varpi' - \frac{k}{2k''a}\,\frac{(l\mathrm{S}m^{(i)}n^{(i)} - l'\mathrm{S}m^{(i)2})\sqrt{-1}}{\mathrm{S}m^{(i)2}.\mathrm{S}n^{(i)2} - (\mathrm{S}m^{(i)}n^{(i)})^2};$$

si l'on fait ensuite

$$\mathrm{E} = \mathrm{S}m^{(i)2}.\mathrm{S}n^{(i)2} - (\mathrm{S}m^{(i)}n^{(i)})^2,$$

la double intégrale précédente devient

$$c^{-\frac{k}{4k''a^2\mathrm{E}}[l^2\mathrm{S}n^{(i)2}-2ll'\mathrm{S}m^{(i)}n^{(i)}+l'^2\mathrm{S}m^{(i)2}]} \times \int\int \frac{dt\,dt'}{4\pi^2a^2}\,c^{-\frac{k''t^2}{k}\mathrm{S}m^{(i)2}-\frac{k''t'^2\mathrm{E}}{k\mathrm{S}m^{(i)2}}}.$$

En prenant les intégrales dans les limites infinies positives et négatives, comme celles relatives à $a\varpi$ et $a\varpi'$, on aura

$$(o) \qquad \frac{1}{\frac{4k''\pi}{k}a^2\sqrt{\mathrm{E}}}\, c^{-\frac{k}{4k''a^2}\frac{l^2.\mathrm{S}n^{(i)2}-2ll'.\mathrm{S}m^{(i)}n^{(i)}+l'^2.\mathrm{S}m^{(i)2}}{\mathrm{E}}}.$$

Il faut maintenant, pour avoir la probabilité que les valeurs de l et de l' seront comprises dans des limites données, multiplier cette quantité par $dl\,dl'$, et l'intégrer ensuite dans ces limites. En nommant X cette quantité, la probabilité dont il s'agit sera donc $\int\int \mathrm{X}\,dl\,dl'$. Mais, pour avoir la probabilité que les erreurs u et u' des corrections des éléments seront comprises dans des limites données, il faut substituer dans cette intégrale, au lieu de l et de l', leurs valeurs en u et u'. Or, si l'on différentie les expressions de l et de l', en supposant l' constant, on a

$$dl = du\,\mathrm{S}m^{(i)}p^{(i)} + du'\,\mathrm{S}m^{(i)}q^{(i)},$$
$$0 = du\,\mathrm{S}n^{(i)}p^{(i)} + du'\,\mathrm{S}n^{(i)}q^{(i)},$$

ce qui donne

$$dl = \frac{du(\mathrm{S}m^{(i)}p^{(i)}.\mathrm{S}n^{(i)}q^{(i)} - \mathrm{S}n^{(i)}p^{(i)}.\mathrm{S}m^{(i)}q^{(i)})}{\mathrm{S}n^{(i)}q^{(i)}}.$$

Si l'on différentie ensuite l'expression de l', en supposant u constant, on a

$$dl' = du'\,\mathrm{S}n^{(i)}q^{(i)};$$

on aura donc

$$dl\,dl' = (\mathrm{S}m^{(i)}p^{(i)}.\mathrm{S}n^{(i)}q^{(i)} - \mathrm{S}n^{(i)}p^{(i)}.\mathrm{S}m^{(i)}q^{(i)})\,du\,du'.$$

En faisant ensuite

$$\mathrm{F} = \mathrm{S}n^{(i)2}(\mathrm{S}m^{(i)}p^{(i)})^2 - 2\mathrm{S}m^{(i)}n^{(i)}.\mathrm{S}m^{(i)}p^{(i)}.\mathrm{S}n^{(i)}p^{(i)} + \mathrm{S}m^{(i)2}.(\mathrm{S}n^{(i)}p^{(i)})^2,$$
$$\mathrm{G} = \mathrm{S}n^{(i)2}.\mathrm{S}m^{(i)}p^{(i)}.\mathrm{S}m^{(i)}q^{(i)} + \mathrm{S}m^{(i)2}.\mathrm{S}n^{(i)}p^{(i)}.\mathrm{S}n^{(i)}q^{(i)}$$
$$\qquad - \mathrm{S}m^{(i)}n^{(i)}.\mathrm{S}n^{(i)}p^{(i)}.\mathrm{S}m^{(i)}q^{(i)} + \mathrm{S}m^{(i)}p^{(i)}.\mathrm{S}n^{(i)}q^{(i)},$$
$$\mathrm{H} = \mathrm{S}n^{(i)2}.(\mathrm{S}m^{(i)}q^{(i)})^2 - 2\mathrm{S}m^{(i)}n^{(i)}.\mathrm{S}m^{(i)}q^{(i)}.\mathrm{S}n^{(i)}q^{(i)} + \mathrm{S}m^{(i)2}.(\mathrm{S}n^{(i)}q^{(i)})^2,$$
$$\mathrm{I} = \mathrm{S}m^{(i)}p^{(i)}.\mathrm{S}n^{(i)}q^{(i)} - \mathrm{S}n^{(i)}p^{(i)}.\mathrm{S}m^{(i)}q^{(i)},$$

la fonction (o) devient

$$\iint \frac{k}{4k''\pi}\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\,\frac{du\,du'}{a^2}\,c^{-\frac{k(\mathrm{F}u^2+2\mathrm{G}uu'+\mathrm{H}u'^2)}{4k''a^2\mathrm{E}}}.$$

Intégrons d'abord cette fonction depuis $u'=-\infty$ jusqu'à $u'=\infty$. Si l'on fait

$$t=\frac{\sqrt{\frac{k\mathrm{H}}{4k''}}\left(u'+\frac{\mathrm{G}u}{\mathrm{H}}\right)}{a\sqrt{\mathrm{E}}},$$

et si l'on prend l'intégrale depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$, on aura, en ne considérant que la variation de u',

$$\int\sqrt{\frac{k}{4k''\pi}}\,\frac{du}{a}\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}}\,c^{-\frac{ku^2}{4k''a^2}\,\frac{\mathrm{FH}-\mathrm{G}^2}{\mathrm{EH}}}.$$

Or on a

$$\frac{\mathrm{FH}-\mathrm{G}^2}{\mathrm{E}}=\mathrm{I}^2;$$

l'intégrale précédente devient donc

$$\int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}}\,\frac{du}{a}\sqrt{\frac{k}{4k''\pi}}\,c^{-\frac{k}{4k''}\,\frac{\mathrm{I}^2u^2}{a^2\mathrm{H}}}.$$

On aura, par le numéro précédent, l'erreur moyenne à craindre, en plus ou en moins, sur la correction du premier élément, en multipliant la quantité sous le signe $\int$ par $\pm u$, et prenant l'intégrale depuis $u=0$ jusqu'à $u=\infty$, ce qui donne, pour cette erreur,

$$\pm\frac{a\sqrt{\mathrm{H}}}{\mathrm{I}\sqrt{\frac{k\pi}{k''}}},$$

le signe $+$ indiquant l'erreur moyenne à craindre en plus, et le signe $-$ l'erreur moyenne à craindre en moins.

Déterminons présentement les facteurs $m^{(i)}$ et $n^{(i)}$, de manière que cette erreur soit un minimum. En faisant varier $m^{(i)}$ seul, on a

$$d\log\frac{\sqrt{\mathrm{H}}}{\mathrm{I}} = dm^{(i)}\frac{-p^{(i)}\mathrm{S}n^{(i)}q^{(i)} + q^{(i)}\mathrm{S}n^{(i)}p^{(i)}}{\mathrm{I}}$$
$$+ dm^{(i)}\frac{\left\{\begin{array}{l} q^{(i)}\mathrm{S}n^{(i)2}.\mathrm{S}m^{(i)}q^{(i)} - n^{(i)}.\mathrm{S}m^{(i)}q^{(i)}.\mathrm{S}n^{(i)}q^{(i)} \\ \quad - q^{(i)}\mathrm{S}m^{(i)}n^{(i)}.\mathrm{S}n^{(i)}q^{(i)} + m^{(i)}(\mathrm{S}n^{(i)}q^{(i)})^2 \end{array}\right\}}{\mathrm{H}}.$$

Il est facile de voir que cette différentielle disparaît, si l'on suppose, dans les coefficients de $dm^{(i)}$,

$$m^{(i)} = \mu.p^{(i)}, \qquad n^{(i)} = \mu.q^{(i)},$$

μ étant un coefficient arbitraire indépendant de i, et au moyen duquel on peut rendre $m^{(i)}$ et $n^{(i)}$ des nombres entiers; la supposition précédente rend donc nulle la différentielle de $\frac{\sqrt{\mathrm{H}}}{\mathrm{I}}$, prise par rapport à $m^{(i)}$. On verra de la même manière que cette supposition rend nulle la différentielle de la même quantité, prise par rapport à $n^{(i)}$. Ainsi cette supposition rend un minimum l'erreur moyenne à craindre sur la correction du premier élément; et l'on verra de la même manière qu'elle rend encore un minimum l'erreur moyenne à craindre sur la correction du second élément, erreur que l'on obtient en changeant dans l'expression de la précédente H en F. Dans cette supposition, les corrections des deux éléments sont

$$z = \frac{\mathrm{S}q^{(i)2}.\mathrm{S}p^{(i)}\alpha^{(i)} - \mathrm{S}p^{(i)}q^{(i)}.\mathrm{S}q^{(i)}\alpha^{(i)}}{\mathrm{S}p^{(i)2}.\mathrm{S}q^{(i)2} - (\mathrm{S}p^{(i)}q^{(i)})^2},$$
$$z' = \frac{\mathrm{S}p^{(i)2}.\mathrm{S}q^{(i)}\alpha^{(i)} - \mathrm{S}p^{(i)}q^{(i)}.\mathrm{S}p^{(i)}\alpha^{(i)}}{\mathrm{S}p^{(i)2}.\mathrm{S}q^{(i)2} - (\mathrm{S}p^{(i)}q^{(i)})^2}.$$

Il est facile de voir que ces corrections sont celles que donne la méthode des moindres carrés des erreurs des observations, ou du minimum de la fonction

$$\mathrm{S}(p^{(i)}z + q^{(i)}z' - \alpha^{(i)})^2;$$

d'où il suit que cette méthode a généralement lieu, quel que soit le nombre des éléments à déterminer; car il est visible que l'analyse précédente peut s'étendre à un nombre quelconque d'éléments.

En substituant pour $a\sqrt{\frac{k''}{k\pi}}$ la quantité $\sqrt{\frac{\mathrm{S}\varepsilon^{(i)2}}{2s\pi}}$, à laquelle on peut, par le n° 20, le supposer égal, ε, $\varepsilon^{(i)}$, ... étant ce qui reste dans les équations de condition après y avoir substitué les corrections données par la méthode des moindres carrés des erreurs, l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément est

$$\pm \frac{\sqrt{\frac{\mathrm{S}\varepsilon^{(i)2}}{2s\pi}}\sqrt{\mathrm{S}q^{(i)2}}}{\sqrt{\mathrm{S}p^{(i)2}.\mathrm{S}q^{(i)2}-(\mathrm{S}p^{(i)}q^{(i)})^2}}.$$

L'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur le second élément est

$$\pm \frac{\sqrt{\frac{\mathrm{S}\varepsilon^{(i)2}}{2s\pi}}\sqrt{\mathrm{S}p^{(i)2}}}{\sqrt{\mathrm{S}p^{(i)2}.\mathrm{S}q^{(i)2}-(\mathrm{S}p^{(i)}q^{(i)})^2}},$$

d'où l'on voit que le premier élément est plus ou moins bien déterminé que le second, suivant que $\mathrm{S}q^{(i)2}$ est plus petit ou plus grand que $\mathrm{S}p^{(i)2}$.

Si les r premières équations de condition ne renferment point q, et si les $s-r$ dernières ne renferment point p, alors $\mathrm{S}p^{(i)}q^{(i)}=0$, et les formules précédentes coïncident avec celle du numéro précédent.

On peut obtenir ainsi l'erreur moyenne à craindre sur chaque élément déterminé par la méthode des moindres carrés des erreurs, quel que soit le nombre des éléments, pourvu que l'on considère un grand nombre d'observations. Soient $z, z', z'', z''', \ldots$ les corrections de chaque élément, et représentons généralement les équations de condition par la suivante :

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)}z + q^{(i)}z' + r^{(i)}z'' + t^{(i)}z''' + \ldots - \alpha^{(i)}.$$

Dans le cas d'un seul élément, l'erreur moyenne à craindre est, comme on l'a vu,

$$(a) \qquad \pm\sqrt{\frac{\mathrm{S}\varepsilon^{(i)2}}{2s\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{S}p^{(i)2}}}.$$

Lorsqu'il y a deux éléments, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément en changeant, dans la fonction (a), $Sp^{(i)2}$ dans $Sp^{(i)2} - \frac{(Sp^{(i)}q^{(i)})^2}{Sq^{(i)2}}$, ce qui donne, pour cette erreur,

$$(a') \qquad \pm \frac{\sqrt{\frac{S\varepsilon^{(i)2}}{2s\pi}}\sqrt{Sq^{(i)2}}}{\sqrt{Sp^{(i)2}.Sq^{(i)2} - (Sp^{(i)}q^{(i)})^2}}.$$

Lorsqu'il y a trois éléments, on aura l'erreur à craindre sur le premier élément, en changeant, dans cette expression (a'), $Sp^{(i)2}$ dans $Sp^{(i)2} - \frac{(Sp^{(i)}r^{(i)})^2}{Sr^{(i)2}}$, $Sp^{(i)}q^{(i)}$ dans $Sp^{(i)}q^{(i)} - \frac{Sp^{(i)}r^{(i)}.Sq^{(i)}r^{(i)}}{Sr^{(i)2}}$, et $Sq^{(i)2}$ dans $Sq^{(i)2} - \frac{(Sq^{(i)}r^{(i)})^2}{Sr^{(i)2}}$; ce qui donne pour cette erreur

$$(a'') \qquad \pm \frac{\sqrt{\frac{S\varepsilon^{(i)2}}{2s\pi}}\sqrt{Sq^{(i)2}.Sr^{(i)2} - (Sq^{(i)}r^{(i)})^2}}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l} Sp^{(i)2}.Sq^{(i)2}Sr^{(i)2} - Sp^{(i)2}(Sq^{(i)}r^{(i)})^2 - Sq^{(i)2}(Sp^{(i)}r^{(i)})^2 \\ \quad - Sr^{(i)2}(Sp^{(i)}q^{(i)})^2 + 2Sp^{(i)}q^{(i)}.Sp^{(i)}r^{(i)}.Sq^{(i)}r^{(i)} \end{array}\right\}}}.$$

Dans le cas de quatre éléments, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément, en changeant dans cette expression (a''), $Sp^{(i)2}$ dans $Sp^{(i)2} - \frac{(Sp^{(i)}t^{(i)})^2}{St^{(i)2}}$, $Sp^{(i)}q^{(i)}$ dans $Sp^{(i)}q^{(i)} - \frac{Sp^{(i)}t^{(i)}.Sq^{(i)}t^{(i)}}{St^{(i)2}}$, etc. En continuant ainsi, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément, quel que soit le nombre des éléments. En changeant, dans l'expression de cette erreur, ce qui est relatif au premier élément, dans ce qui est relatif au second et réciproquement, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le second élément, et ainsi des autres.

De là résulte un moyen simple de comparer entre elles diverses Tables astronomiques, du côté de la précision. Ces Tables peuvent toujours être supposées réduites à la même forme, et alors elles ne diffèrent que par les époques, les moyens mouvements et les coefficients de leurs arguments; car, si l'une d'elles, par exemple, contient un argument qui ne se trouve point dans les autres, il est clair que cela revient à supposer, dans celles-ci, ce coefficient nul. Maintenant, si l'on comparait ces Tables à la totalité des bonnes observations, en les rectifiant par cette comparaison, ces Tables, ainsi rectifiées, satisferaient, par ce qui précède, à la condition que la somme des carrés des erreurs qu'elles laisseraient subsister encore soit un minimum. Les Tables qui approcheraient le plus de remplir cette condition mériteraient donc la préférence, d'où il suit qu'en comparant ces diverses Tables à un nombre considérable d'observations, la présomption d'exactitude doit être en faveur de celle dans laquelle la somme des carrés des erreurs est plus petite que dans les autres.

22. Jusqu'ici nous avons supposé les facilités des erreurs positives les mêmes que celles des erreurs négatives. Considérons maintenant le cas général dans lequel ces facilités peuvent être différentes. Nommons a l'intervalle dans lequel les erreurs de chaque observation peuvent s'étendre, et supposons-le partagé dans un nombre infini $n+n'$ de parties égales et prises pour l'unité, n étant le nombre des parties qui répondent aux erreurs négatives, et n' étant le nombre des parties qui répondent aux erreurs positives. Sur chaque point de l'intervalle a élevons une ordonnée qui exprime la probabilité de l'erreur correspondante, et désignons par $\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right)$ l'ordonnée correspondante à l'erreur x. Cela posé, considérons la suite

$$\begin{aligned}&\varphi\left(\frac{-n}{n+n'}\right)c^{-qn\varpi\sqrt{-1}}+\varphi\left[\frac{-(n-1)}{n+n'}\right]c^{-q(n-1)\varpi\sqrt{-1}}+\ldots\\&+\varphi\left(\frac{-1}{n+n'}\right)c^{-q\varpi\sqrt{-1}}+\varphi\left(\frac{0}{n+n'}\right)+\varphi\left(\frac{1}{n+n'}\right)c^{q\varpi\sqrt{-1}}+\ldots\\&+\varphi\left(\frac{n'-1}{n+n'}\right)c^{q(n'-1)\varpi\sqrt{-1}}+\varphi\left(\frac{n'}{n+n'}\right)c^{qn'\varpi\sqrt{-1}}.\end{aligned}$$

Représentons cette suite par $\int\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right)c^{qx\varpi\sqrt{-1}}$, le signe $\int$ s'étendant à toutes les valeurs de x, depuis $x=-n$ jusqu'à $x=n'$. Le terme indépendant de $c^{\varpi\sqrt{-1}}$ et de ses puissances, dans le développement de la fonction

$$c^{-(l+\mu)\varpi\sqrt{-1}}\int\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right)c^{qx\varpi\sqrt{-1}}\int\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right)c^{q^{(1)}x\varpi\sqrt{-1}}\ldots\int\varphi\left(\frac{x}{n}\right)c^{q^{(s-1)}x\varpi\sqrt{-1}},$$

sera, par le n° 21, la probabilité que la fonction

$$(m) \qquad q\varepsilon + q^{(1)}\varepsilon^{(1)} + \ldots + q^{(s-1)}\varepsilon^{(s-1)}$$

sera égale à $l+\mu$; cette probabilité est donc

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int d\varpi\, c^{-l\varpi\sqrt{-1}}\, c^{-\mu\varpi\sqrt{-1}} \int \varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right) c^{qx\varpi\sqrt{-1}} \times \ldots,$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$. Le logarithme de la fonction

$$(2) \qquad c^{-\mu\varpi\sqrt{-1}} \int \varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right) c^{qx\varpi\sqrt{-1}} \times \int \varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right) c^{q^{(1)}x\varpi\sqrt{-1}} \ldots$$

est

$$-\mu\varpi\sqrt{-1} + \log\left[\int \varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right) c^{qx\varpi\sqrt{-1}}\right] + \ldots;$$

n et n' étant supposés des nombres infinis, si l'on fait

$$\frac{x}{n+n'} = x', \qquad \frac{1}{n+n'} = dx';$$

si, de plus, on suppose

$$k = \int dx'\,\varphi(x'), \qquad k' = \int x'\,dx'\,\varphi(x'), \qquad k'' = \int x'^2\,dx'\,\varphi(x'), \qquad \ldots,$$

les intégrales étant prises depuis $x' = -\dfrac{n}{n+n'}$ jusqu'à $x' = \dfrac{n'}{n+n'}$, on aura

$$\int \varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right) c^{qx\varpi\sqrt{-1}} = (n+n')k \left\{ \begin{array}{l} 1 + \dfrac{k'}{k} q(n+n')\varpi\sqrt{-1} \\ \quad - \dfrac{k''}{2k} q^2(n+n')^2\varpi^2 + \ldots \end{array} \right\}.$$

L'erreur de chaque observation devant tomber dans les limites $-n$ et $+n'$, et la probabilité que cela aura lieu étant $\int\varphi\left(\dfrac{x}{n+n'}\right)$ ou $(n+n')k$, cette quantité doit être égale à l'unité. De là il est facile de conclure que le logarithme de la fonction (2) est, en faisant $\mu' = \dfrac{\mu}{n+n'}$,

$$\left(\frac{k'}{k} \mathrm{S} q^{(i)} - \mu'\right)(n+n')\varpi\sqrt{-1} - \frac{kk'' - k'^2}{2k^2} \mathrm{S} q^{(i)2}(n+n')^2\varpi^2 + \ldots,$$

le signe S embrassant toutes les valeurs de i, depuis i nul jusqu'à $i = s - 1$. On fera disparaître la première puissance de ϖ, en faisant

$$\mu' = \frac{k'}{k} \mathrm{S} q^{(i)},$$

et si l'on ne considère que sa seconde puissance, ce que l'on peut faire par ce qui précède, lorsque s est un très grand nombre, on aura, pour le logarithme de la fonction (2),

$$-\frac{kk'' - k'^2}{2k^2} \mathrm{S} q^{(i)2} (n + n')^2 \varpi^2.$$

En repassant des logarithmes aux nombres, la fonction (2) se transforme dans la suivante

$$c^{-\frac{kk''-k'^2}{2k^2}(n+n')^2 \varpi^2 \mathrm{S} q^{(i)2}};$$

l'intégrale (1) devient ainsi

$$\frac{1}{2\pi} \int d\varpi \, c^{-l\varpi\sqrt{-1}} \, c^{-\frac{kk''-k'^2}{2k^2}(n+n')^2 \varpi^2 . \mathrm{S} q^{(i)2}}.$$

Supposons

$$l = (n + n') r \sqrt{\mathrm{S} q^{(i)2}},$$

$$t = \sqrt{\frac{(kk'' - k'^2)\mathrm{S} q^{(i)2}}{2k^2}} (n + n')\varpi - \frac{r\sqrt{-1}}{2} \sqrt{\frac{2k^2}{kk'' - k'^2}}.$$

La variation de l étant l'unité, on aura

$$1 = (n + n') \, dr \sqrt{\mathrm{S} q^{(i)2}};$$

l'intégrale précédente devient ainsi, après l'avoir intégrée depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$,

$$\frac{k \, dr}{\sqrt{2(kk'' - k'^2)\pi}} \, c^{-\frac{k^2 r^2}{2(kk''-k'^2)}}.$$

Ainsi la probabilité que la fonction (m) sera comprise dans les limites

$$\frac{ak'}{k} \mathrm{S} q^{(i)} \pm ar\sqrt{\mathrm{S} q^{(i)2}},$$

est égale à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\frac{k\,dr}{\sqrt{2(kk''-k'^2)}}\,c^{-\frac{k^2r^2}{2(kk''-k'^2)}},$$

l'intégrale étant prise depuis r nul.

$\frac{ak'}{k}$ est l'abscisse de l'ordonnée qui passe par le centre de gravité de l'aire de la courbe des probabilités des erreurs de chaque observation; le produit de cette abscisse par $Sq^{(i)}$ est donc le résultat moyen vers lequel la fonction (m) converge sans cesse. Si l'on suppose $1=q=q^{(1)}=\ldots$, la fonction (m) devient la somme des erreurs, et alors $Sq^{(i)}$ devient s; en divisant donc par s la somme des erreurs, pour avoir l'erreur moyenne, cette erreur converge sans cesse vers l'abscisse du centre de gravité, de manière qu'en prenant de part et d'autre un intervalle quelconque aussi petit que l'on voudra, la probabilité que l'erreur moyenne tombera dans cet intervalle finira, en multipliant indéfiniment les observations, par ne différer de la certitude que d'une quantité moindre que toute grandeur donnée.

23. Nous venons de rechercher le résultat moyen que des observations nombreuses et non faites encore doivent indiquer avec le plus d'avantage, et la loi de probabilité des erreurs de ce résultat. Considérons présentement le résultat moyen des observations déjà faites et dont on connaît les écarts respectifs. Pour cela, concevons un nombre s d'observations du même genre, c'est-à-dire telles que la loi des erreurs soit la même pour toutes. Nommons A le résultat de la première, $A+q$ celui de la seconde, $A+q^{(1)}$ celui de la troisième, et ainsi de suite; $q, q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots$ étant des quantités positives et croissantes, ce que l'on peut toujours obtenir par une disposition convenable des observations. Désignons encore par $\varphi(z)$ la probabilité de l'erreur z pour chaque observation, et supposons que $A+x$ soit le vrai résultat. L'erreur de la première observation est alors $-x$; $q-x$, $q^{(1)}-x, \ldots$ sont les erreurs de la deuxième, de la troisième, etc. La probabilité de l'existence simultanée de toutes ces erreurs est le produit de leurs pro-

babilités respectives; elle est donc

$$\varphi(-x)\,\varphi(q-x)\,\varphi(q^{(1)}-x)\,\ldots.$$

Maintenant, x étant susceptible d'une infinité de valeurs, en les considérant comme autant de causes de l'événement observé, la probabilité de chacune d'elles sera, par le n° 1,

$$\frac{dx\,\varphi(-x)\,\varphi(q-x)\,\varphi(q^{(1)}-x)\ldots}{\int dx\,\varphi(-x)\,\varphi(q-x)\,\varphi(q^{(1)}-x)\ldots},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise pour toutes les valeurs dont x est susceptible. Nommons $\frac{1}{\mathrm{H}}$ ce dénominateur. Cela posé, imaginons une courbe dont x soit l'abscisse, et dont l'ordonnée y soit

$$\mathrm{H}\,\varphi(-x)\,\varphi(q-x)\,\varphi(q^{(1)}-x)\ldots,$$

cette courbe sera celle des probabilités des valeurs de x. La valeur qu'il faut choisir pour résultat moyen est celle qui rend l'erreur moyenne à craindre un minimum. Toute erreur, soit positive, soit négative, devant être considérée comme un désavantage, ou une perte réelle au jeu, on a le désavantage moyen, en prenant la somme des produits de chaque désavantage par sa probabilité; la valeur moyenne de l'erreur à craindre est donc la somme des produits de chaque erreur, abstraction faite du signe, par sa probabilité. Déterminons l'abscisse qu'il faut choisir pour que cette somme soit un minimum. Pour cela, donnons aux abscisses pour origine la première extrémité de la courbe précédente, et nommons x' et y' les coordonnées de la courbe, à partir de cette origine. Soit l la valeur qu'il faut choisir. Il est clair que, si le vrai résultat était x', l'erreur du résultat l serait, abstraction faite du signe, $l-x'$, tant que x' serait moindre que l; or y' est la probabilité que x' est le résultat vrai; la somme des erreurs à craindre, abstraction faite du signe, multipliées par leur probabilité, est donc pour toutes les valeurs de x' moindres que l, $\int(l-x')\,y'\,dx'$, l'intégrale étant prise depuis $x'=0$ jusqu'à $x'=l$. On verra de la même manière que, pour les valeurs de x' supérieures à l, la somme des erreurs à craindre, multipliées par leur probabilité, est $\int (x'-l)y'dx'$, l'intégrale étant prise depuis $x'=l$ jusqu'à l'abscisse x' correspondante à la dernière extrémité de la courbe; la somme entière des erreurs à craindre, abstraction faite du signe, et multipliées par leurs probabilités respectives, est donc

$$\int (l-x')\,y'\,dx' + \int (x'-l)\,y'\,dx'.$$

La différentielle de cette fonction, prise par rapport à l, est

$$dl\int y'\,dx' - dl\int y'\,dx';$$

car on a la différentielle de $\int (l-x')\,y'dx'$, en différentiant d'abord la valeur de l sous le signe $\int$, et en ajoutant à cette différentielle l'accroissement qui résulte de la variation de la limite de l'intégrale, limite qui se change en $l+dl$. Cet accroissement est égal à l'élément $(l-x')y'dx'$, à la limite où $x'=l$; il est donc nul, et $dl\int y'dx'$ est la différentielle de l'intégrale $\int (l-x')y'dx'$. On verra de la même manière que $-dl\int y'dx'$ est la différentielle de l'intégrale $\int (x'-l)y'dx'$. La somme de ces différentielles est nulle relativement à l'abscisse l, pour laquelle l'erreur moyenne à craindre est un minimum; on a donc, relativement à cette abscisse,

$$\int y'\,dx' = \int y'\,dx',$$

la première intégrale étant prise depuis $x'=0$ jusqu'à $x'=l$, et la seconde étant prise depuis $x'=l$ jusqu'à la valeur extrême de x'.

Il suit de là que l'abscisse qui rend l'erreur moyenne à craindre un minimum est celle dont l'ordonnée divise l'aire de la courbe en deux parties égales. Ce point jouit encore de la propriété d'être celui en deçà duquel il est aussi probable que le vrai résultat tombe, qu'au delà, et par cette raison il peut encore être nommé *milieu de probabilité*. Des géomètres célèbres ont pris pour le milieu qu'il faut choisir celui qui rend le résultat observé le plus probable, et par conséquent l'abscisse qui répond à la plus grande ordonnée de la courbe; mais le milieu que nous adoptons est évidemment indiqué par la théorie des probabilités.

Si l'on met $\varphi(x)$ sous la forme d'exponentielle, et qu'on le désigne par $c^{-\psi(x^2)}$, afin qu'il puisse également convenir aux erreurs positives et négatives, on aura

$$(1) \qquad y = \mathrm{H}\, c^{-\psi(x^2)-\psi(x-q)^2-\psi(x-q^{(1)})^2-\ldots}.$$

Si l'on fait $x = a + z$, et que l'on développe l'exposant de c par rapport aux puissances de z, y prendra cette forme

$$y = \mathrm{H}\, c^{-\mathrm{M}-2\mathrm{N}z-\mathrm{P}z^2-\mathrm{Q}z^3-\ldots},$$

expression dans laquelle on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} &= \psi(a^2) + \psi(a-q)^2 + \psi(a-q^{(1)})^2 + \ldots,\\
\mathrm{N} &= a\,\psi'(a^2) + (a-q)\,\psi'(a-q)^2 + (a-q^{(1)})\,\psi'(a-q^{(1)})^2 + \ldots\\
\mathrm{P} &= \psi'(a^2) + \psi'(a-q)^2 + \psi'(a-q^{(1)})^2 + \ldots + 2a^2\,\psi''(a^2)\\
&\quad + 2(a-q)^2\,\psi''(a-q)^2 + 2(a-q^{(1)})^2\,\psi''(a-q^{(1)})^2 + \ldots,
\end{aligned}$$

. . . .

$\psi'(t)$ étant le coefficient de dt dans la différentielle de $\psi(t)$, $\psi''(t)$ étant le coefficient de dt dans la différentielle de $\psi'(t)$, et ainsi de suite.

Supposons le nombre s des observations très grand, et déterminons a par l'équation $\mathrm{N} = 0$ que donne la condition du maximum de y; alors on a

$$y = \mathrm{H}\, c^{-\mathrm{M}-\mathrm{P}z^2-\mathrm{Q}z^3-\ldots}.$$

M, P, Q, ... sont de l'ordre s; or, si z est très petit de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{s}}$, $\mathrm{Q}z^3$ devient de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{s}}$, et l'exponentielle $c^{-\mathrm{Q}z^3-\ldots}$ peut se réduire à l'unité. Ainsi, dans l'intervalle depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{r}{\sqrt{s}}$, on peut supposer

$$y = \mathrm{H}\, c^{-\mathrm{M}-\mathrm{P}z^2}.$$

Au delà, et lorsque z est de l'ordre $s^{-\frac{m}{2}}$, m étant plus petit que l'unité, $\mathrm{P}z^2$ devient de l'ordre s^{1-m}; par conséquent $c^{-\mathrm{P}z^2}$ devient, ainsi que y, insensible; en sorte que l'on peut, dans toute l'étendue de la courbe, supposer

$$y = \mathrm{H}\, c^{-\mathrm{M}-\mathrm{P}z^2}.$$

La valeur de a donnée par l'équation $\mathrm{N} = 0$, ou

$$0 = a\, \psi'(a^2) + (a-q)\, \psi'(a-q)^2 + (a-q^{(1)})\, \psi'(a-q^{(1)})^2 + \ldots,$$

est alors l'abscisse x correspondante à l'ordonnée qui divise l'aire de la courbe en parties égales. La condition que l'aire entière de la courbe doit représenter la certitude ou l'unité donne

$$\frac{1}{\mathrm{H}} = \int dz\, c^{-\mathrm{M}-\mathrm{P}z^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$, ce qui donne

$$\mathrm{H} = \frac{c^{\mathrm{M}}\sqrt{\mathrm{P}}}{\sqrt{\pi}}.$$

L'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, en prenant a pour résultat moyen des observations, est $\pm \int zy\, dz$, l'intégrale étant prise depuis z nul jusqu'à z infini, ce qui donne pour cette erreur

$$\pm \frac{1}{2\sqrt{\pi \mathrm{P}}}.$$

Mais l'ignorance entière où l'on est de la loi $c^{-\psi(x^2)}$ des erreurs de chaque observation ne permet pas de former l'équation

$$0 = a\, \psi'(a^2) + (a-q)\, \psi'(a-q)^2 + \ldots.$$

Ainsi, la connaissance des valeurs de q, $q^{(1)}$, ... ne donnant *a posteriori* aucune lumière sur le résultat moyen a des observations, il faut s'en tenir au résultat le plus avantageux déterminé *a priori*, et que l'on a vu être celui que fournit la méthode des moindres carrés des erreurs.

Cherchons la fonction $\psi(x^2)$ qui donne constamment la règle des milieux arithmétiques, admise par les observateurs. Pour cela, concevons que, sur les s observations, les i premières coïncident, ainsi que les $s-i$ dernières. L'équation $\mathrm{N} = 0$ devient alors

$$0 = ia\, \psi'(a^2) + (s-i)(a-q)\, \psi'(a-q)^2.$$

La règle des milieux arithmétiques donne

$$a = \frac{s-i}{s} q;$$

l'équation précédente devient ainsi

$$\psi'\left[\left(\frac{s-i}{s}\right)^2 q^2\right] = \psi'\left(\frac{i^2}{s^2} q^2\right).$$

Cette équation devant avoir lieu quels que soient $\frac{i}{s}$ et q, il est nécessaire que $\psi'(t)$ soit indépendant de t, ce qui donne

$$\psi'(t) = k,$$

k étant une constante. En intégrant, on a

$$\psi(t) = kt - L,$$

L étant une constante arbitraire; partant,

$$c^{-\psi(x^2)} = c^{L - kx^2}.$$

Telle est donc la fonction qui peut seule donner généralement la règle des milieux arithmétiques. La constante L doit être déterminée de manière que l'intégrale $\int dx\, c^{L-kx^2}$, prise depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$, soit égale à l'unité; car il est certain que l'erreur x d'une observation doit tomber dans ces limites; on a donc

$$c^L = \sqrt{\frac{k}{\pi}};$$

par conséquent la probabilité de l'erreur x est $\sqrt{\frac{k}{\pi}}\, c^{-kx^2}$.

A la vérité, cette expression donne l'infini pour la limite des erreurs, ce qui n'est pas admissible; mais, vu la rapidité avec laquelle ce genre d'exponentielles diminue à mesure que x augmente, on peut prendre k assez grand pour qu'au delà de la limite admissible des erreurs leurs probabilités soient insensibles et puissent être supposées nulles.

La loi précédente des erreurs donne, pour l'expression générale (1) de y,

$$y = \sqrt{\frac{sk}{\pi}}\, c^{-ksu^2},$$

en déterminant H de manière que l'intégrale entière $\int y\,dx$ soit l'unité, et faisant

$$x = \frac{\mathrm{S}q^{(i)}}{s} + u.$$

L'ordonnée qui divise l'aire de la courbe en deux parties égales est celle qui répond à $u = 0$ et par conséquent à

$$x = \frac{\mathrm{S}q^{(i)}}{s};$$

c'est donc la valeur de x qu'il faut choisir pour résultat moyen des observations; or cette valeur est celle que donne la règle des milieux arithmétiques; la loi précédente des erreurs de chaque observation donne donc constamment les mêmes résultats que cette règle, et l'on a vu qu'elle est la seule loi qui jouisse de cette propriété.

En adoptant cette loi, la probabilité de l'erreur $\varepsilon^{(i)}$ de l'observation $(i+1)^{\text{ième}}$ est

$$\sqrt{\frac{k}{\pi}}\, c^{-k\varepsilon^{(i)2}};$$

or on a vu dans le n° 20 que, z étant la correction d'un élément, cette observation fournit l'équation de condition

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)} z - \alpha^{(i)}.$$

La probabilité de la valeur de $p^{(i)} z - \alpha^{(i)}$ est donc

$$\sqrt{\frac{k}{\pi}}\, c^{-k(p^{(i)}z - \alpha^{(i)})^2};$$

la probabilité de l'existence simultanée des s valeurs $pz - \alpha$, $p^{(1)}z - \alpha^{(1)}$, ..., $p^{(s-1)}z - \alpha^{(s-1)}$ sera donc

$$\left(\sqrt{\frac{k}{\pi}}\right)^{s-1} c^{-k\,\mathrm{S}(p^{(i)}z - \alpha^{(i)})^2}$$

Cette probabilité varie avec z; on aura donc la probabilité d'une valeur quelconque de z en multipliant cette quantité par dz et divisant le produit par l'intégrale de ce produit, prise depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$. Soit

$$z = \frac{\mathrm{S}p^{(i)}\alpha^{(i)}}{\mathrm{S}p^{(i)2}} + u;$$

cette probabilité devient

$$du\sqrt{\frac{k\,\mathrm{S}p^{(i)2}}{\pi}}\,c^{-ku^2\mathrm{S}p^{(i)2}},$$

en sorte que, si l'on décrit une courbe dont le coefficient de du soit l'ordonnée et dont u soit l'abscisse, cette courbe, étendue depuis $u = -\infty$ jusqu'à $u = \infty$, peut être considérée comme la courbe des probabilités des erreurs u, dont le résultat

$$z = \frac{\mathrm{S}p^{(i)}\alpha^{(i)}}{\mathrm{S}p^{(i)2}}$$

est susceptible. L'ordonnée qui divise l'aire de la courbe en deux parties égales est celle qui répond à $u = 0$, et par conséquent à z égal à $\frac{\mathrm{S}p^{(i)}\alpha^{(i)}}{\mathrm{S}p^{(i)2}}$; ce résultat est donc celui qu'il faut choisir; or il est le même que celui que donne la méthode des moindres carrés des erreurs des observations; la loi précédente des erreurs de chaque observation conduit donc aux mêmes résultats que cette méthode.

La méthode des moindres carrés des erreurs devient nécessaire lorsqu'il s'agit de prendre un milieu entre plusieurs résultats donnés, chacun, par l'ensemble d'un grand nombre d'observations de divers genres. Supposons qu'un même élément soit donné : 1° par le résultat moyen de s observations d'un premier genre et qu'il soit, par ces observations, égal à A; 2° par le résultat moyen de s' observations d'un deuxième genre et qu'il soit égal à $\mathrm{A} + q$; 3° par le résultat moyen de s'' observations d'un troisième genre et qu'il soit égal à $\mathrm{A} + q'$, et ainsi du reste. Si l'on représente par $\mathrm{A} + x$ l'élément vrai, l'erreur du résultat des observations s sera $-x$; en supposant donc 6 égal à

$$\sqrt{\frac{k}{k''}}\frac{\sqrt{\mathrm{S}p^{(i)2}}}{2a},$$

si l'on fait usage de la méthode des moindres carrés des erreurs pour déterminer le résultat moyen, ou à

$$\sqrt{\frac{k}{k''}}\frac{\mathrm{S}p^{(i)}}{2a\sqrt{s}},$$

si l'on fait usage de la méthode ordinaire; la probabilité de cette erreur sera, par le n° 20,

$$\frac{6}{\sqrt{\pi}}c^{-6^2x^2}.$$

L'erreur du résultat des observations s' sera $q-x$, et, en désignant par $6'$ pour ces observations ce que nous avons nommé 6 pour les observations s, la probabilité de cette erreur sera

$$\frac{6'}{\sqrt{\pi}}c^{-6'^2(x-q)^2}.$$

Pareillement, l'erreur du résultat des observations s'' sera $q'-x$, et en nommant pour elles $6''$ ce que nous avons nommé 6 pour les observations s, la probabilité de cette erreur sera

$$\frac{6''}{\sqrt{\pi}}c^{-6''^2(x-q')^2},$$

et ainsi de suite. Le produit de toutes ces probabilités sera la probabilité que $-x$, $q-x$, $q'-x$, ... seront les erreurs des résultats moyens des observations s, s', s'', ... En le multipliant par dx et prenant l'intégrale depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=\infty$, on aura la probabilité que les résultats moyens des observations s', s'', ... surpasseront respectivement de q, q', ... le résultat moyen des observations s.

Si l'on prend l'intégrale dans des limites déterminées, on aura la probabilité que, la condition précédente étant remplie, l'erreur du premier résultat sera comprise dans ces limites; en divisant cette probabilité par celle de la condition elle-même, on aura la probabilité que l'erreur du premier résultat sera comprise dans des limites données, lorsqu'on est certain que la condition a effectivement lieu ; cette probabilité est donc

$$\frac{\int dx\, c^{-\beta^2 x^2 - \beta'^2 (x-q)^2 - \beta''^2 (x-q')^2 - \ldots}}{\int dx\, c^{-\beta^2 x^2 - \beta'^2 (x-q)^2 - \beta''^2 (x-q')^2 - \ldots}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise dans les limites données, et celle du dénominateur étant prise depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$. On a

$$\beta^2 x^2 + \beta'^2 (x-q)^2 + \beta''^2 (x-q')^2 + \ldots$$
$$= (\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 + \ldots)x^2 - 2x(\beta'^2 q + \beta''^2 q' + \ldots) + \beta'^2 q^2 + \beta''^2 q'^2 + \ldots.$$

Soit

$$x = \frac{\beta'^2 q + \beta''^2 q' + \ldots}{\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 + \ldots} + t;$$

la probabilité précédente deviendra

$$\frac{\int dt\, c^{-(\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 + \ldots)t^2}}{\int dt\, c^{-(\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 + \ldots)t^2}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise dans des limites données, et celle du dénominateur étant prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$. Cette dernière intégrale est

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 + \ldots}}.$$

En faisant donc

$$t' = t\sqrt{\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 + \ldots},$$

la probabilité précédente devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dt'\, c^{-t'^2}.$$

La valeur de t' la plus probable est celle qui répond à t' nul, d'où il suit que la valeur de x la plus probable est celle qui répond à $t = 0$; ainsi la correction du premier résultat, que l'ensemble de toutes les observations $s, s', s'', \ldots$ donne avec le plus de probabilité, est

$$\frac{6'^2 q + 6''^2 q' + \ldots}{6^2 + 6'^2 + 6''^2 + \ldots}.$$

Cette correction, ajoutée au résultat A, donne, pour le résultat qu'il faut choisir,

$$\frac{A6^2 + (A+q)6'^2 + (A+q')6''^2 + \ldots}{6^2 + 6'^2 + 6''^2 + \ldots}.$$

La correction précédente est celle qui rend un minimum la fonction

$$(6x)^2 + [6'(x-q)]^2 + [6''(x-q')]^2 + \ldots.$$

Or la plus grande ordonnée de la courbe des probabilités du premier résultat est, comme on vient de le voir, $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$; celle de la courbe des probabilités du second résultat est $\frac{6'}{\sqrt{\pi}}$, et ainsi de suite; le milieu qu'il faut choisir entre les divers résultats est donc celui qui rend un minimum la somme des carrés de l'erreur de chaque résultat multipliée par la plus grande ordonnée de sa courbe de probabilité. Ainsi la loi du minimum des carrés des erreurs devient nécessaire, lorsque l'on doit prendre un milieu entre des résultats donnés chacun par un grand nombre d'observations.

24. On a vu précédemment que, de toutes les manières de combiner les équations de condition pour en former des équations finales linéaires, nécessaires à la détermination des éléments, la plus avantageuse est celle qui résulte de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations, du moins lorsque les observations sont en grand nombre. Si, au lieu de considérer le minimum des carrés des erreurs, on considérait le minimum d'autres puissances des erreurs, ou même de toute autre fonction des erreurs, les équations finales cesseraient d'être linéaires, et leur résolution deviendrait impraticable, si les observations étaient en grand nombre. Cependant il est un cas qui mérite une attention particulière, en ce qu'il donne le système dans

lequel la plus grande erreur, abstraction faite du signe, est moindre que dans tout autre système. Ce cas est celui du minimum des puissances infinies et paires des erreurs. Ne considérons ici que la correction d'un seul élément, et, z exprimant cette correction, représentons, comme précédemment, les équations de condition par la suivante,

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)} z - \alpha^{(i)},$$

i pouvant varier depuis zéro jusqu'à $s - 1$, s étant le nombre des observations. La somme des puissances $2n$ des erreurs sera $S(\alpha^{(i)} - p^{(i)} z)^{2n}$, le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i. On peut supposer dans cette somme toutes les valeurs de $p^{(i)}$ positives; car, si l'une d'elles était négative, elle deviendrait positive en changeant, comme on peut le faire, les signes des deux termes du binôme élevé à la puissance $2n$, auquel elle correspond. Nous supposerons donc les quantités $\alpha - pz$, $\alpha^{(1)} - p^{(1)} z$, $\alpha^{(2)} - p^{(2)} z$, ..., disposées de manière que les quantités p, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, ... soient positives et croissantes. Cela posé, si $2n$ est infini, il est clair que le plus grand terme de la somme $S(\alpha^{(i)} - p^{(i)} z)^{2n}$ sera la somme entière, à moins qu'il n'y ait un ou plusieurs autres termes qui lui soient égaux, et c'est ce qui doit avoir lieu dans le cas du minimum de la somme. En effet, s'il n'y avait qu'une seule quantité la plus grande, abstraction faite du signe, telle que $\alpha^{(i)} - p^{(i)} z$, on pourrait la diminuer en faisant varier z convenablement, et alors la somme $S(\alpha^{(i)} - p^{(i)} z)^{2n}$ diminuerait et ne serait pas un minimum. Il faut de plus que, si $\alpha^{(i)} - p^{(i)} z$ et $\alpha^{(i')} - p^{(i')} z$ sont, abstraction faite du signe, les deux quantités les plus grandes et égales entre elles, elles soient de signe contraire. En effet, la somme

$$(\alpha^{(i)} - p^{(i)} z)^{2n} + (\alpha^{(i')} - p^{(i')} z)^{2n}$$

devant être alors un minimum, sa différentielle

$$-2n\, dz[p^{(i)}(\alpha^{(i)} - p^{(i)} z)^{2n-1} + p^{(i')}(\alpha^{(i')} - p^{(i')} z)^{2n-1}]$$

doit être nulle, ce qui ne peut être, lorsque n est infini, que dans le cas où $\alpha^{(i)} - p^{(i)} z$ et $\alpha^{(i')} - p^{(i')} z$ sont infiniment peu différents et de signe contraire. S'il y a trois quantités les plus grandes, et égales entre elles, abstraction faite du signe, on verra de la même manière que leurs signes ne peuvent être les mêmes.

Maintenant, considérons la suite

$$(o)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha^{(s-1)} - p^{(s-1)}z,\quad \alpha^{(s-2)} - p^{(s-2)}z,\quad \alpha^{(s-3)} - p^{(s-3)}z,\quad \ldots,\quad \alpha - pz,\\ -\alpha + pz,\quad \ldots,\quad -\alpha^{(s-3)} + p^{(s-3)}z,\quad -\alpha^{(s-2)} + p^{(s-2)}z,\quad -\alpha^{(s-1)} + p^{(s-1)}z. \end{array}\right.$$

Si l'on suppose $z = -\infty$, le premier terme de la suite surpasse les suivants, et continue de les surpasser en faisant croître z, jusqu'au moment où il devient égal à l'un d'eux. Alors celui-ci, par l'accroissement de z, devient le plus grand de tous, et à mesure que l'on fait croître z, il continue toujours de surpasser ceux qui le précèdent. Pour déterminer ce terme, on formera la suite des quotients

$$\frac{\alpha^{(s-1)} - \alpha^{(s-2)}}{p^{(s-1)} - p^{(s-2)}},\quad \frac{\alpha^{(s-1)} - \alpha^{(s-3)}}{p^{(s-1)} - p^{(s-3)}},\quad \ldots,\quad \frac{\alpha^{(s-1)} - \alpha}{p^{(s-1)} - p},\quad \frac{\alpha^{(s-1)} + \alpha}{p^{(s-1)} + p},\quad \ldots,\quad \frac{\alpha^{(s-1)} + \alpha^{(s-1)}}{p^{(s-1)} + p^{(s-1)}}.$$

Supposons que $\dfrac{\alpha^{(s-1)} - \alpha^{(r)}}{p^{(s-1)} - p^{(r)}}$ soit le plus petit de ces quotients en ayant égard au signe, c'est-à-dire en regardant une quantité négative plus grande comme plus petite qu'une autre quantité négative moindre. S'il y a plusieurs quotients les plus petits et égaux, nous considérerons celui qui se rapporte au terme le plus éloigné du premier dans la suite (o); ce terme sera le plus grand de tous, jusqu'au moment où, par l'accroissement de z, il devient égal à l'un des suivants, qui commence alors à être le plus grand. Pour déterminer ce nouveau terme, on formera la nouvelle suite de quotients

$$\frac{\alpha^{(r)} - \alpha^{(r-1)}}{p^{(r)} - p^{(r-1)}},\quad \frac{\alpha^{(r)} - \alpha^{(r-2)}}{p^{(r)} - p^{(r-2)}},\quad \ldots,\quad \frac{\alpha^{(r)} - \alpha}{p^{(r)} - p},\quad \frac{\alpha^{(r)} + \alpha}{p^{(r)} + p},\quad \ldots,$$

le terme de la suite (o) auquel répond le plus petit de ces quotients sera le nouveau terme. On continuera ainsi jusqu'à ce que l'un des deux termes qui deviennent égaux et les plus grands soit dans la première moitié de la suite (o), et l'autre dans la seconde moitié. Soient $\alpha^{(i)} - p^{(i)}z$ et $-\alpha^{(i')} + p^{(i')}z$ ces deux termes; alors la valeur de z qui correspond au système du minimum de la plus grande des erreurs, abstraction faite du signe, est

$$z = \frac{\alpha^{(i)} + \alpha^{(i')}}{p^{(i)} + p^{(i')}}.$$

S'il y a plusieurs éléments à corriger, les équations de condition qui déterminent leurs corrections renferment plusieurs inconnues, et la recherche du système de correction, dans lequel la plus grande erreur est, abstraction faite du signe, plus petite que dans tout autre système, devient plus compliquée. J'ai considéré ce cas d'une manière générale dans le Livre III de la *Mécanique céleste*. J'observerai seulement ici qu'alors la somme des puissances $2n$ des erreurs des observations est, comme dans le cas d'une seule inconnue, un minimum lorsque $2n$ est infini; d'où il est facile de conclure que, dans le système dont il s'agit, il doit y avoir autant d'erreurs, plus une, égales, et les plus grandes, abstraction faite du signe, qu'il y a d'éléments à corriger. On conçoit que les résultats correspondants à $2n$ égal à un grand nombre doivent peu différer de ceux que donne $2n$ infini. Il n'est pas même nécessaire pour cela que la puissance $2n$ soit fort élevée, et j'ai reconnu par beaucoup d'exemples que, dans le cas même où cette puissance ne surpasse pas le carré, les résultats diffèrent peu de ceux que donne le système du minimum des plus grandes erreurs, ce qui est un nouvel avantage de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations.

Depuis longtemps, les géomètres prennent un milieu arithmétique entre leurs observations, et, pour déterminer les éléments qu'ils veulent connaître, ils choisissent les circonstances les plus favorables pour cet objet, savoir, celles dans lesquelles les erreurs des observations altèrent le moins qu'il est possible la valeur de ces éléments. Mais Cotes est, si je ne me trompe, le premier qui ait donné une règle générale pour faire concourir à la détermination d'un élément plusieurs observations, proportionnellement à leur influence. En considérant chaque observation comme une fonction de l'élément et regardant l'erreur de l'observation comme une différentielle infiniment petite, elle sera égale à la différentielle de la fonction, prise par rapport à cet élément. Plus le coefficient de la différentielle de l'élément sera considérable, moins il faudra faire varier l'élément, pour que le produit de sa variation par ce coefficient soit égal à l'erreur de l'observation ; ce coefficient exprimera donc l'influence de l'observation sur la valeur de l'élément. Cela posé, Cotes représente toutes les valeurs de l'élément, données par chaque observation, par les parties d'une droite indéfinie, toutes ces parties ayant une commune origine. Il conçoit ensuite, à leurs autres extrémités, des poids proportionnels aux influences respectives des observations. La distance de l'origine commune des parties au centre commun de gravité de tous ces poids est la valeur qu'il choisit pour l'élément.

Reprenons l'équation de condition du n° 20,

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)} z - \alpha^{(i)},$$

$\varepsilon^{(i)}$ étant l'erreur de l'observation $(i+1)^{\text{ième}}$, et z étant la correction de l'élément déjà connu à fort peu près; $p^{(i)}$, que l'on peut toujours supposer positif, exprimera l'influence de l'observation correspondante. $\frac{\alpha^{(i)}}{p^{(i)}}$ étant la valeur de z résultante de l'observation, la règle de Cotes revient à multiplier cette valeur par $p^{(i)}$, à faire une somme de tous les produits relatifs aux diverses valeurs, et à la diviser par la somme de tous les $p^{(i)}$, ce qui donne

$$z = \frac{\mathrm{S}\,\alpha^{(i)}}{\mathrm{S}\,p^{(i)}}.$$

C'était en effet la correction adoptée par les observateurs, avant l'usage de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations.

Cependant on ne voit pas que, depuis cet excellent géomètre, on ait employé sa règle, jusqu'à Euler, qui, dans sa première pièce de Jupiter et Saturne, me paraît s'être servi le premier des équations de condition pour déterminer les éléments du mouvement elliptique de ces deux planètes. Presqu'en même temps, Tobie Mayer en fit usage dans ses belles recherches sur la libration de la Lune, et ensuite pour former ses Tables lunaires. Depuis, les meilleurs astronomes ont suivi cette méthode, et le succès des Tables qu'ils ont construites à son moyen en a constaté l'avantage.

Quand on n'a qu'un élément à déterminer, cette méthode ne laisse aucun embarras; mais, lorsque l'on doit corriger à la fois plusieurs éléments, il faut avoir autant d'équations finales formées par la réunion de plusieurs équations de condition, et au moyen desquelles on détermine par l'élimination les corrections des éléments. Mais quelle est la manière la plus avantageuse de combiner les équations de condition, pour former les équations finales? C'est ici que les observateurs s'abandonnaient à des tâtonnements arbitraires, qui devaient les conduire à des résultats différents, quoique déduits des mêmes observations. Pour éviter ces tâtonnements, M. Legendre eut l'idée simple de considérer la somme des carrés des erreurs des observations, et de la rendre un minimum, ce qui fournit directement autant d'équations finales, qu'il y a d'éléments à corriger. Ce savant géomètre est le premier qui ait publié cette méthode; mais on doit à M. Gauss la justice d'observer qu'il avait eu, plusieurs années avant cette publication, la même idée dont il faisait un usage habituel, et qu'il avait communiquée à plusieurs astronomes. M. Gauss, dans sa *Théorie du mouvement elliptique*, a cherché à rattacher cette méthode à la Théorie des Probabilités, en faisant voir que la même loi des erreurs des observations, qui donne généralement la règle du milieu arithmétique entre plusieurs observations, admise par les observateurs, donne pareillement la règle des moindres carrés des erreurs des observations, et c'est ce qu'on a vu dans le n° 23. Mais, comme rien ne prouve que la première de ces règles donne le résultat le plus avantageux, la même incertitude existe par rapport à la seconde. La recherche de la manière la plus avantageuse de former les équations finales est sans doute une des plus utiles de la Théorie des Probabilités : son importance dans la Physique et l'Astronomie me porta à m'en occuper. Pour cela, je considérai que toutes les manières de combiner les équations de condition, pour en former une équation finale linéaire, revenaient à les multiplier respectivement par des facteurs qui étaient nuls relativement aux équations que l'on n'employait point, et à faire une somme de tous ces produits, ce qui donne une première équation finale. Un second système de facteurs donne une seconde équation finale, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait autant d'équations finales que d'éléments à corriger. Maintenant il est visible qu'il faut choisir les systèmes de facteurs, de sorte que l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur chaque élément soit un minimum; l'erreur moyenne étant la somme des produits de chaque erreur par sa probabilité. Lorsque les observations sont en petit nombre, le choix de ces systèmes dépend de la loi des erreurs de chaque observation. Mais, si l'on considère un grand nombre d'observations, ce qui a lieu le plus souvent dans les recherches astronomiques, ce choix devient indépendant de cette loi, et l'on a vu, dans ce qui précède, que l'Analyse conduit alors directement aux résultats de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations. Ainsi cette méthode qui n'offrait d'abord que l'avantage de fournir, sans tâtonnement, les équations finales nécessaires à la correction des éléments, donne en même temps les corrections les plus précises, du moins lorsqu'on ne veut employer que des équations finales qui soient linéaires, condition indispensable, lorsque l'on considère à la fois un grand nombre d'observations; autrement, l'élimination des inconnues et leur détermination seraient impraticables.

CHAPITRE V.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS A LA RECHERCHE DES PHÉNOMÈNES ET DE LEURS CAUSES.

25. Les phénomènes de la nature se présentent le plus souvent accompagnés de tant de circonstances étrangères, un si grand nombre de causes perturbatrices y mêlent leur influence qu'il est très difficile, lorsqu'ils sont très petits, de les reconnaître. On ne peut alors y parvenir qu'en multipliant les observations, afin que, les effets étrangers venant à se détruire, le résultat moyen des observations ne laisse plus apercevoir que ces phénomènes. On conçoit, par ce qui précède, que cela n'a lieu rigoureusement que dans le cas d'un nombre infini d'observations. Dans tout autre cas, les phénomènes ne sont indiqués par les résultats moyens que d'une manière probable, mais qui l'est d'autant plus que les observations sont en plus grand nombre. La recherche de cette probabilité est donc très importante pour la Physique, l'Astronomie et généralement pour toutes les sciences naturelles. On va voir qu'elle rentre dans les méthodes que nous venons d'exposer. Dans le Chapitre précédent, l'existence du phénomène était certaine; son étendue seule a été l'objet du Calcul des Probabilités : ici l'existence du phénomène et son étendue sont l'objet de ce calcul.

Prenons pour exemple la variation diurne du baromètre, que l'on observe entre les tropiques, et qui devient sensible même dans nos climats, lorsque l'on choisit et que l'on multiplie convenablement les observations. On a reconnu qu'en général, vers 9^h du matin, le baromètre est plus élevé que vers 4^h du soir; ensuite il remonte jusque vers 11^h du soir, et il redescend jusque vers 4^h du matin, pour revenir à son maximum de hauteur vers 9^h. Supposons que l'on ait observé la hauteur du baromètre vers 9^h du matin et vers 4^h du soir, pendant le nombre s de jours, et, pour éviter la trop grande influence des causes perturbatrices, choisissons ces jours de manière que, dans l'intervalle de 9^h à 4^h, le baromètre n'ait pas varié au delà de 4^{mm}. Supposons ensuite qu'en faisant la somme des s hauteurs du matin et la somme des s hauteurs du soir, la première de ces sommes surpasse la seconde de la quantité q; cette différence indiquera une cause constante qui tend à élever le baromètre vers 9^h du matin et à l'abaisser vers 4^h du soir. Pour déterminer avec quelle probabilité cette cause est indiquée, concevons que cette cause n'existe point, et que la différence observée q résulte des causes perturbatrices accidentelles et des erreurs des observations. La probabilité qu'alors la différence observée entre les sommes des hauteurs du matin et du soir doit être au-dessous de q est, par le n° 18, égale à

$$\sqrt{\frac{k}{4k''\pi}}\int dr\, c^{-\frac{kr^2}{4k''}},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = -\infty$ jusqu'à $r = \frac{q}{a\sqrt{s}}$; k et k'' étant des constantes dépendantes de la loi de probabilité des différences entre les hauteurs du matin et du soir, et $\pm a$ étant les limites de ces différences, a étant ici égal à 4^{mm}. $\frac{k}{k''}$ étant au moins égal à 6, comme on l'a vu dans le n° 20, $\frac{k}{4k''}$ ne peut pas être supposé moindre que $\frac{3}{2}$; en faisant donc $s = 400$, et supposant l'étendue de la variation diurne de 1^{mm}, ce qui est à peu près ce que M. Ramond a trouvé dans nos climats, par la comparaison d'un très grand nombre d'observations, on aura $q = 400^{mm}$. Ainsi $r = 5$, et $\frac{kr^2}{4k''}$ est au moins égal à $37,5$; en faisant donc

$$t^2 = \frac{kr^2}{4k''},$$

la probabilité précédente devient au moins

$$1-\frac{\int dt\, c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t=\sqrt{37,5}$ jusqu'à $t=\infty$. Cette intégrale est, à fort peu près, par le n° 27 du Livre I,

$$1-\frac{c^{-37,5}}{2\sqrt{37,5\pi}},$$

et elle approche tellement de l'unité ou de la certitude, qu'il est extrêmement probable que, s'il n'existait point de cause constante de l'excès observé de la somme des hauteurs barométriques du matin sur celles des hauteurs du soir, cet excès serait plus petit que 400^{mm}; il indique donc avec une extrême vraisemblance l'existence d'une cause constante qui l'a produit.

Le phénomène d'une variation diurne étant ainsi bien constaté, déterminons la valeur la plus probable de son étendue, et l'erreur que l'on peut commettre sur son évaluation. Supposons pour cela que cette valeur soit $\frac{q}{s}\pm\frac{ar}{\sqrt{s}}$; la probabilité que l'étendue de la variation diurne du matin au soir sera comprise dans ces limites est, par le n° 18,

$$2\sqrt{\frac{k}{4k''\pi}}\int dr\, c^{-\frac{kr^2}{4k''}},$$

l'intégrale étant prise depuis $r=0$.

On peut éliminer $\frac{k''}{k}$ en observant que, par le n° 20, cette fraction est à peu près égale à $\frac{S\varepsilon^{(i)2}}{2a^2 s}$, $\pm\varepsilon^{(i)}$ étant la différence de $\frac{q}{s}$ à l'étendue observée le $(i+1)^{\text{ième}}$ jour, et le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i, depuis $i=0$ jusqu'à $i=s-1$; en faisant donc

$$ar=t\sqrt{\frac{2S\varepsilon^{(i)2}}{s}},$$

la probabilité que l'étendue de la variation diurne du matin au soir est comprise dans les limites $\frac{q}{s} \pm \frac{t}{\sqrt{s}}\sqrt{\frac{2S\varepsilon^{(i)2}}{s}}$ sera $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int dt\, c^{-t^2}$, l'intégrale étant prise depuis t nul.

La variation diurne des hauteurs du baromètre dépend uniquement du Soleil; mais ces hauteurs sont encore affectées par les marées aériennes que produit l'attraction du Soleil et de la Lune sur notre atmosphère, et dont j'ai donné la théorie dans le Livre IV de la *Mécanique céleste*. Il est donc nécessaire de considérer à la fois ces deux variations, et de déterminer leurs grandeurs et leurs époques respectives, en formant des équations de condition analogues à celles dont les astronomes font usage, pour corriger les éléments des mouvements célestes. Ces variations étant principalement sensibles à l'équateur, et les causes perturbatrices y étant extrêmement petites, on pourra, au moyen d'excellents baromètres, les déterminer avec une grande précision, et je ne doute point que l'on ne reconnaisse alors, dans l'ensemble d'un très grand nombre d'observations, les lois qu'indique la théorie de la pesanteur dans les marées atmosphériques, et qui se manifestent d'une manière si frappante dans les observations des marées de l'Océan, que j'ai discutées avec étendue, dans le Livre cité de la *Mécanique céleste*.

On voit, par ce qui précède, que l'on peut reconnaître l'effet très petit d'une cause constante, par une longue suite d'observations dont les erreurs peuvent excéder cet effet lui-même. Mais alors il faut avoir soin de varier les circonstances de chaque observation, de manière que le résultat moyen de leur ensemble n'en soit point altéré sensiblement et soit presque entièrement l'effet de la cause dont il s'agit; il faut ensuite multiplier les observations, jusqu'à ce que l'analyse indique une très grande probabilité que l'erreur de ce résultat sera comprise dans des limites très rapprochées.

Supposons, par exemple, que l'on veuille reconnaître par l'observation la petite déviation à l'est, produite par la rotation de la Terre, dans la chute des corps. J'ai fait voir, dans le Livre X de la *Mécanique* *céleste,* que si, du sommet d'une tour fort élevée, on abandonne un corps à sa pesanteur, il retombera sur un plan horizontal passant par le pied de la tour, à une petite distance à l'est du point de contact de ce plan avec une boule suspendue par un fil dont le point de suspension est celui du départ du corps. J'ai donné, dans le Livre cité, l'expression de cette déviation, et il en résulte qu'en faisant abstraction de la résistance de l'air, elle est uniquement vers l'est; qu'elle est proportionnelle au cosinus de la latitude et à la racine carrée du cube de la hauteur, et qu'à la latitude de Paris elle s'élève à $5^{mm},1$, lorsque la hauteur de la tour est de 50^{m}. La résistance de l'air change ce dernier résultat; j'en ai donné pareillement l'expression dans ce cas, au Livre cité.

On a déjà fait un grand nombre d'expériences pour confirmer, par ce moyen, le mouvement de rotation de la Terre, qui d'ailleurs est démontré par tant d'autres phénomènes que cette confirmation devient inutile. Les petites erreurs de ces expériences très délicates ont souvent excédé l'effet que l'on voulait déterminer, et ce n'est qu'en multipliant considérablement les expériences que l'on peut ainsi constater son existence et fixer sa valeur. Nous allons soumettre cet objet à l'analyse des probabilités.

Si l'on prend pour origine des coordonnées le point de contact du plan et de la boule suspendue par un fil dont le sommet de suspension est celui du départ d'une balle que l'on fait tomber; si l'on marque ensuite sur ce plan les divers points où la balle va toucher le plan dans chaque expérience; en déterminant le centre commun de gravité de ces points, la ligne menée de l'origine des coordonnées à ce centre déterminera le sens et la quantité moyenne dont la balle s'est écartée de cette origine, et l'un et l'autre seront déterminés avec d'autant plus d'exactitude que les expériences seront plus nombreuses et plus précises.

Considérons maintenant comme axe des abscisses la ligne menée de l'origine des coordonnées à l'est, et désignons par x, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(s-1)}$, y, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ..., $y^{(s-1)}$ les coordonnées respectives des points déterminés par les expériences dont le nombre est s. En exprimant par X et Y les coordonnées du centre de gravité de tous ces points, on aura

$$X = S\frac{x^{(i)}}{s}, \qquad Y = S\frac{y^{(i)}}{s},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i, depuis $i = 0$ jusqu'à $i = s - 1$. Cela posé, en désignant par $\pm a$ les limites des erreurs de chaque expérience, dans le sens des x, la probabilité que l'écart moyen de la balle, du point origine des coordonnées, est compris dans les limites $X \pm \frac{ar}{\sqrt{s}}$, sera, par le n° 18,

$$2\sqrt{\frac{k}{4k''\pi}}\int dr\, c^{-\frac{kr^2}{4k''}},$$

k et k'' étant des constantes qui dépendent de la loi de facilité des erreurs de chaque expérience dans le sens des x.

Pareillement, $\pm a'$ étant les limites des erreurs de chaque expérience dans le sens des y, la probabilité que la valeur moyenne de la déviation dans le sens des y est comprise dans les limites $Y \pm \frac{a'r}{\sqrt{s}}$ sera

$$2\sqrt{\frac{\bar{k}}{4\bar{k}''\pi}}\int dr\, c^{-\frac{\bar{k}r^2}{4\bar{k}''}},$$

$\bar{k}$ et $\bar{k}''$ étant des constantes dépendantes de la loi des erreurs des expériences dans le sens des y. Les fractions $\frac{k}{4k''}$ et $\frac{\bar{k}}{4\bar{k}''}$ étant, par ce qui précède, plus grandes que $\frac{3}{2}$, on pourra juger du degré d'approximation et de probabilité des valeurs de X et de Y, et déterminer la probabilité de l'écart au sud et au nord, indiqué par les observations.

L'analyse précédente peut encore être appliquée à la recherche des petites inégalités des mouvements célestes, dont l'étendue est comprise dans les limites soit des erreurs des observations, soit des perturbations produites par les causes accidentelles. C'est à peu près ainsi que Tycho Brahe reconnut que l'équation du temps, relative au Soleil et aux planètes, n'était point applicable à la Lune, et qu'il fallait en retrancher la partie dépendante de l'anomalie du Soleil, et même une quantité beaucoup plus grande, ce qui conduisit Flamsteed à la découverte de l'inégalité lunaire que l'on nomme *équation annuelle*. C'est encore dans les résultats d'un grand nombre d'observations que Mayer reconnut que l'équation de la précession, relative aux planètes et aux étoiles, n'était point applicable à la Lune; il évalua à $12''$ décimales environ la quantité dont il fallait alors la diminuer, quantité que Mason éleva ensuite à près de $24''$, par la comparaison de toutes les observations de Bradley, et que M. Bürg a réduite à $21''$, au moyen d'un bien plus grand nombre d'observations de Maskelyne. Cette inégalité, quoique indiquée par les observations, était négligée par le plus grand nombre des astronomes, parce qu'elle ne paraissait pas résulter de la théorie de la pesanteur universelle. Mais, ayant soumis son existence au Calcul des Probabilités, elle me parut indiquée avec une probabilité si forte, que je crus devoir en rechercher la cause. Je vis bientôt qu'elle ne pouvait résulter que de l'ellipticité du sphéroïde terrestre, que l'on avait négligée jusqu'alors dans la théorie du mouvement lunaire, comme ne devant y produire que des termes insensibles, et j'en conclus qu'il était extrêmement vraisemblable que ces termes devenaient sensibles par les intégrations successives des équations différentielles. Ayant déterminé ces termes par une analyse particulière, que j'ai exposée dans le Livre VII de la *Mécanique céleste*, je découvris d'abord l'inégalité du mouvement de la Lune en latitude, et qui est proportionnelle au sinus de sa longitude : par son moyen, je reconnus que la théorie de la pesanteur donne effectivement la diminution observée par les astronomes cités, dans l'inégalité de la précession, applicable au mouvement lunaire en longitude. La quantité de cette diminution et le coefficient de l'inégalité en latitude dont je viens de parler sont donc très propres à déterminer l'aplatissement de la Terre. Ayant fait part de mes recherches à M. Bürg qui s'occupait alors de ses *Tables de la Lune*, je le priai de déterminer avec un soin particulier les coefficients de ces deux inégalités. Par un concours remarquable, les coefficients qu'il a déterminés s'accordent à donner à la Terre l'aplatissement $\frac{1}{305}$, aplatissement qui diffère peu du milieu conclu des mesures des degrés du méridien et du pendule, mais qui, vu l'influence des erreurs des observations et des causes perturbatrices sur ces mesures, me paraît plus exactement déterminé par les inégalités lunaires. M. Burckhardt, qui vient de former de nouvelles Tables de la Lune, très précises, sur l'ensemble des observations de Bradley et de Maskelyne, a trouvé le même coefficient que M. Bürg pour l'inégalité lunaire en latitude : il trouve $\frac{1}{34}$ à ajouter au coefficient de l'inégalité en longitude, ce qui réduit l'aplatissement à $\frac{1}{301}$, par cette inégalité. La différence très légère de ces résultats prouve qu'en fixant à $\frac{1}{304}$ cet aplatissement, l'erreur est insensible.

L'Analyse des Probabilités m'a conduit pareillement à la cause des grandes irrégularités de Jupiter et de Saturne. La difficulté d'en reconnaître la loi et de les ramener à la théorie de l'attraction universelle avait fait conjecturer qu'elles étaient dues aux actions passagères des comètes; mais un théorème auquel j'étais parvenu sur l'attraction mutuelle des planètes me fit rejeter cette hypothèse, en m'indiquant l'attraction mutuelle des deux planètes comme la vraie cause de ces irrégularités. Suivant ce théorème, si le mouvement de Jupiter s'accélère en vertu de quelque grande inégalité à très longue période, celui de Saturne doit se ralentir de la même manière, et ce ralentissement est à l'accélération de Jupiter comme le produit de la masse de cette dernière planète par la racine carrée du grand axe de son orbite est au produit semblable relatif à Saturne. Ainsi, en prenant pour unité le ralentissement de Saturne, l'accélération correspondante de Jupiter doit être 0,40884; or Halley avait trouvé, par la comparaison des observations modernes aux anciennes, que l'accélération de Jupiter correspondait au ralentissement de Saturne, et qu'elle était 0,44823 de ce ralentissement. Ces résultats, si bien d'accord avec la théorie, me portèrent à penser qu'il existe, dans les mouvements de ces planètes, deux grandes inégalités correspondantes et de signe contraire, qui produisaient ces phénomènes. J'avais reconnu que l'action mutuelle des planètes ne pouvait point occasionner dans leurs moyens mouvements des variations toujours croissantes ou périodiques, mais d'une période indépendante de leur configuration mutuelle; c'était donc dans le rapport des moyens mouvements de Jupiter et de Saturne que je devais chercher celle dont il s'agit. Or, en examinant ce rapport, il est facile de reconnaître que deux fois le moyen mouvement de Jupiter ne surpasse que d'une quantité très petite cinq fois celui de Saturne; ainsi les inégalités qui dépendent de cette différence, et dont la période est d'environ neuf siècles, peuvent devenir fort grandes par les intégrations successives qui leur donnent pour diviseur le carré du coefficient très petit du temps dans l'argument de ces inégalités. En fixant vers l'époque de Tycho Brahe l'origine de cet argument, je voyais que Halley avait dû trouver, par la comparaison des observations modernes aux anciennes, les altérations qu'il avait observées, tandis que la comparaison des observations modernes entre elles devait présenter des altérations contraires et pareilles à celles que Lambert avait remarquées. L'existence des inégalités dont je viens de parler me parut donc extrêmement vraisemblable, et je n'hésitai point à entreprendre le calcul long et pénible, nécessaire pour m'en assurer complètement. Le résultat de ce calcul, non seulement les confirma, mais il me fit connaître beaucoup d'autres inégalités, dont l'ensemble a porté les Tables de Jupiter et de Saturne au degré de précision des observations mêmes.

On voit par là combien il faut être attentif aux indications de la nature, lorsqu'elles sont le résultat d'un grand nombre d'observations, quoique d'ailleurs elles soient inexplicables par les moyens connus. J'engage ainsi les astronomes à suivre avec une attention particulière l'inégalité lunaire à longue période, qui dépend principalement du mouvement du périgée de la Lune, ajouté au double du moyen mouvement de ses nœuds; inégalité dont j'ai parlé dans le Livre VII de la *Mécanique céleste*, et que déjà les observations indiquent avec beaucoup de vraisemblance. Les cas précédents ne sont pas les seuls dans lesquels les observations ont redressé les analystes. Le mouvement du périgée lunaire et l'accélération du mouvement de la Lune, qui n'étaient point donnés d'abord par les approximations, ont fait sentir la nécessité de rectifier ces approximations. Ainsi l'on peut dire que la nature elle-même a concouru à la perfection analytique des théories fondées sur le principe de la pesanteur universelle, et c'est, à mon sens, une des plus fortes preuves de la vérité de ce principe admirable.

On peut encore, par l'Analyse des Probabilités, vérifier l'existence ou l'influence de certaines causes dont on a cru remarquer l'action sur les êtres organisés. De tous les instruments que nous pouvons employer pour connaître les agents imperceptibles de la nature, les plus sensibles sont les nerfs, surtout lorsque leur sensibilité est exaltée par des circonstances particulières. C'est à leur moyen que l'on a découvert la faible électricité que développe le contact de deux métaux hétérogènes, ce qui a ouvert un champ vaste aux recherches des physiciens et des chimistes. Les phénomènes singuliers, qui résultent de l'extrême sensibilité des nerfs dans quelques individus, ont donné naissance à diverses opinions sur l'existence d'un nouvel agent que l'on a nommé *magnétisme animal*, sur l'action du magnétisme ordinaire et l'influence du Soleil et de la Lune dans quelques affections nerveuses; enfin sur les impressions que peut faire naître la proximité des métaux ou d'une eau courante. Il est naturel de penser que l'action de ces causes est très faible, et peut facilement être troublée par un grand nombre de circonstances accidentelles; ainsi, de ce que, dans quelques cas, elle ne s'est point manifestée, on ne doit pas conclure qu'elle n'existe jamais. Nous sommes si éloignés de connaître tous les agents de la nature qu'il serait peu philosophique de nier l'existence des phénomènes, uniquement parce qu'ils sont inexplicables dans l'état actuel de nos connaissances. Seulement nous devons les examiner avec une attention d'autant plus scrupuleuse qu'il paraît plus difficile de les admettre, et c'est ici que l'Analyse des Probabilités devient indispensable pour déterminer jusqu'à quel point il faut multiplier les observations ou les expériences pour avoir en faveur de l'existence des agents qu'elles semblent indiquer une probabilité supérieure à toutes les raisons que l'on peut avoir d'ailleurs de la rejeter.

La même analyse peut être étendue aux divers résultats de la Médecine et de l'Économie politique, et même à l'influence des causes morales; car l'action de ces causes, lorsqu'elle est répétée un grand nombre de fois, offre dans ses résultats autant de régularité que les causes physiques.

On peut encore déterminer par l'Analyse des Probabilités, comparée à un grand nombre d'expériences, l'avantage et le désavantage des joueurs, dans les cas dont la complication rend impossible leur recherche directe. Tel est l'avantage de la main, au jeu du piquet : telles sont encore les possibilités respectives d'amener les différentes faces d'un prisme droit rectangulaire, dont la longueur, la largeur et la hauteur sont inégales, lorsque le prisme projeté en l'air retombe sur un plan horizontal.

Enfin on pourrait faire usage du Calcul des Probabilités pour rectifier les courbes ou carrer leurs surfaces. Sans doute, les géomètres n'emploieront pas ce moyen; mais, comme il me donne lieu de parler d'un genre particulier de combinaisons du hasard, je vais l'exposer en peu de mots.

Imaginons un plan divisé par des lignes parallèles, équidistantes de la quantité a; concevons de plus un cylindre très étroit, dont $2r$ soit la longueur, supposée égale ou moindre que a. On demande la probabilité qu'en le projetant, il rencontrera une des divisions du plan.

Élevons sur un point quelconque d'une de ces divisions une perpendiculaire prolongée jusqu'à la division suivante. Supposons que le centre du cylindre soit sur cette perpendiculaire et à la hauteur y au-dessus de la première de ces deux divisions. En faisant tourner le cylindre autour de son centre et nommant φ l'angle que le cylindre fait avec la perpendiculaire, au moment où il rencontre cette division, 2φ sera la partie de la circonférence décrite par chaque extrémité du cylindre, dans laquelle il rencontre la division; la somme de toutes ces parties sera donc $4\int\varphi\, dy$, ou $4\varphi y - 4\int y\, d\varphi$; or on a $y = r\cos\varphi$; cette somme est donc

$$4\varphi y - 4r\sin\varphi + \text{const.}$$

Pour déterminer cette constante, nous observerons que l'intégrale doit s'étendre depuis y nul jusqu'à $y=r$, et par conséquent depuis $\varphi=\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\varphi=0$, ce qui donne

$$\text{const.}=4r;$$

ainsi la somme dont il s'agit est $4r$. Depuis $y=a-r$ jusqu'à $y=a$, le cylindre peut rencontrer la division suivante, et il est visible que la somme de toutes les parties relatives à cette rencontre est encore $4r$; $8r$ est donc la somme de toutes les parties relatives à la rencontre de l'une ou de l'autre des divisions par le cylindre, dans le mouvement de son centre le long de la perpendiculaire. Mais le nombre de tous les arcs qu'il décrit en tournant en entier sur lui-même, à chaque point de cette perpendiculaire, est $2a\pi$; c'est le nombre de toutes les combinaisons possibles; la probabilité de la rencontre d'une des divisions du plan par le cylindre est donc $\frac{4r}{a\pi}$. Si l'on projette un grand nombre de fois ce cylindre, le rapport du nombre de fois où le cylindre rencontrera l'une des divisions du plan au nombre total des projections sera, par le n° 16, à très peu près, la valeur de $\frac{4r}{a\pi}$, ce qui fera connaître la valeur de la circonférence 2π. On aura, par le même numéro, la probabilité que l'erreur de cette valeur sera comprise dans des limites données, et il est facile de voir que le rapport $\frac{8r}{a\pi}$ qui, pour un nombre donné de projections, rend l'erreur à craindre la plus petite, est l'unité, ce qui donne la longueur du cylindre égale à l'intervalle des divisions, multiplié par le rapport de la circonférence à quatre diamètres.

Concevons maintenant le plan précédent divisé encore par des lignes perpendiculaires aux précédentes, et équidistantes d'une quantité b égale ou plus grande que la longueur $2r$ du cylindre. Toutes ces lignes formeront avec les premières une suite de rectangles dont b sera la longueur et a la hauteur. Considérons un de ces rectangles; supposons que dans son intérieur on mène à la distance r de chaque côté des lignes qui lui soient parallèles. Elles formeront d'abord un rectangle intérieur, dont $b - 2r$ sera la longueur, et $a - 2r$ la hauteur; ensuite deux petits rectangles, dont r sera la hauteur, et $b - 2r$ la longueur; puis deux autres petits rectangles dont r sera la longueur et $a - 2r$ la hauteur; enfin, quatre petits carrés dont les côtés seront égaux à r.

Tant que le centre du cylindre sera placé dans le rectangle intérieur, le cylindre, en tournant sur son centre, ne rencontrera jamais les côtés du grand rectangle.

Lorsque le centre du cylindre sera placé dans l'intérieur d'un des rectangles dont r est la hauteur et $b - 2r$ la longueur, il est facile de voir, par ce qui précède, que le produit de $8r$ par la longueur $b - 2r$ sera le nombre des combinaisons correspondantes, dans lesquelles le cylindre rencontrera l'un ou l'autre des côtés b du grand rectangle. Ainsi $8r(b - 2r)$ sera le nombre total des combinaisons correspondantes aux cas dans lesquels, le centre du cylindre étant placé dans l'un ou l'autre de ces petits rectangles, le cylindre rencontre le contour du grand rectangle. Par la même raison, $8r(a - 2r)$ sera le nombre total des combinaisons dans lesquelles, le centre du cylindre étant placé dans l'intérieur des petits rectangles dont r et $a - 2r$ sont les dimensions, le cylindre rencontre le contour du grand rectangle.

Il nous reste à considérer les quatre petits carrés. Soit ABCD l'un d'eux. De l'angle A commun à ce carré et au grand rectangle, comme centre, et du rayon r, décrivons un quart de circonférence se terminant aux points B et D. Tant que le centre du cylindre sera compris dans le quart de cercle formé par cet arc, le cylindre, en tournant, rencontrera dans toutes ses positions le contour du grand rectangle; le nombre des combinaisons dans lesquelles cela aura lieu est donc égal au produit de 2π par la surface du quart de cercle, et par conséquent il est égal à $\frac{\pi^2 r^2}{2}$. Si le centre du cylindre est dans la partie du carré qui est au delà du quart de cercle, le cylindre, en tournant autour de son centre, pourra rencontrer l'un ou l'autre des deux côtés AB et AD prolongés, sans jamais les rencontrer tous deux à la fois. Pour déterminer le nombre des combinaisons relatives à cette rencontre, je conçois sur un point quelconque du côté AB, distant de x du point A, une perpendiculaire y dont l'extrémité soit au delà du quart de cercle. Je place le centre du cylindre sur cette extrémité, de laquelle j'abaisse quatre droites égales à r, et dont deux aboutissent sur le côté AB prolongé, si cela est nécessaire, et deux autres sur le côté AD pareillement prolongé. Je nomme 2φ l'angle compris entre les deux premières lignes, et $2\varphi'$ l'angle compris entre les deux secondes. Il est visible que le cylindre, en tournant sur son centre, rencontrera le côté AB prolongé tant qu'une de ses moitiés sera dans l'angle 2φ, et qu'il rencontrera le côté AD prolongé tant qu'une de ses moitiés sera dans l'angle $2\varphi'$; le nombre total des combinaisons dans lesquelles le cylindre rencontrera l'un ou l'autre de ces côtés est donc $4(\varphi+\varphi')$; ainsi ce nombre, relativement à la partie du carré extérieure au quart de cercle, est

$$4\int(\varphi+\varphi')\,dx\,dy;$$

or on a évidemment

$$x = r\cos\varphi', \qquad y = r\cos\varphi;$$

l'intégrale précédente devient ainsi

$$4r^2\int\int(\varphi+\varphi')\,d\varphi\,d\varphi'\sin\varphi\sin\varphi',$$

et il est facile de voir que l'intégrale relative à φ' doit être prise depuis $\varphi' = 0$ jusqu'à $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$, et que l'intégrale relative à φ doit être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne $\frac{1}{2}r^2(12-\pi^2)$ pour cette intégrale. En lui ajoutant $\frac{\pi^2 r^2}{2}$, on aura le nombre des combinaisons relatives au carré, et en quadruplant ce nombre et le réunissant aux nombres précédents des combinaisons relatives à la rencontre du contour du grand rectangle par le cylindre, on aura, pour le nombre total des combinaisons,

$$8(a+b)r - 8r^2.$$

Mais le nombre total des combinaisons possibles est évidemment égal à 2π multiplié par la surface ab du grand rectangle; la probabilité de la rencontre des divisions du plan par le cylindre est donc

$$\frac{4(a+b)r-4r^2}{ab\pi}.$$

CHAPITRE VI.

DE LA PROBABILITÉ DES CAUSES ET DES ÉVÉNEMENTS FUTURS, TIRÉE DES ÉVÉNEMENTS OBSERVÉS.

26. La probabilité de la plupart des événements simples est inconnue : en la considérant *a priori*, elle nous paraît susceptible de toutes les valeurs comprises entre zéro et l'unité; mais, si l'on a observé un résultat composé de plusieurs de ces événements, la manière dont ils y entrent rend quelques-unes de ces valeurs plus probables que les autres. Ainsi, à mesure que le résultat observé se compose par le développement des événements simples, leur vraie possibilité se fait de plus en plus connaître, et il devient de plus en plus probable qu'elle tombe dans des limites qui, se resserrant sans cesse, finiraient par coïncider, si le nombre des événements simples devenait infini. Pour déterminer les lois suivant lesquelles cette possibilité se découvre, nous la nommerons x. La théorie exposée dans les Chapitres précédents donnera la probabilité du résultat observé, en fonction de x. Soit y cette fonction; si l'on considère les différentes valeurs de x comme autant de causes de ce résultat, la probabilité de x sera, par le troisième principe du n° 1, égale à une fraction dont le numérateur est y, et dont le dénominateur est la somme de toutes les valeurs de y; en multipliant donc le numérateur et le dénominateur de cette fraction par dx, cette probabilité sera

$$\frac{y\,dx}{\int y\,dx},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. La probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $x = \theta$ et $x = \theta'$ est par conséquent égale à

$$\frac{\int y\,dx}{\int y\,dx}, \tag{1}$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = \theta$ jusqu'à $x = \theta'$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

La valeur de x la plus probable est celle qui rend y un maximum. Nous la désignerons par a. Si aux limites de x, y est nul, alors chaque valeur de y a une valeur égale correspondante de l'autre côté du maximum.

Quand les valeurs de x, considérées indépendamment du résultat observé, ne sont pas également possibles, en nommant z la fonction de x qui exprime leur probabilité, il est facile de voir, par ce qui a été dit dans le Chapitre Ier de ce Livre, qu'en changeant dans la formule (1), y dans yz, on aura la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $x = \theta$ et $x = \theta'$. Cela revient à supposer toutes les valeurs de x également possibles *a priori*, et à considérer le résultat observé comme étant formé de deux résultats indépendants, dont les probabilités sont y et z. On peut donc ramener ainsi tous les cas à celui où l'on suppose *a priori*, avant l'événement, une égale possibilité aux différentes valeurs de x, et, par cette raison, nous adopterons cette hypothèse dans ce qui va suivre.

Nous avons donné dans les nos 22 et suivants du Livre Ier les formules nécessaires pour déterminer, par des approximations convergentes, les intégrales du numérateur et du dénominateur de la formule (1), lorsque les événements simples dont se compose l'événement observé sont répétés un très grand nombre de fois; car alors y a pour facteurs des fonctions de x élevées à de grandes puissances. Nous allons, au moyen de ces formules, déterminer la loi de probabilité des valeurs de x, à mesure qu'elles s'éloignent de la valeur a, la plus probable, ou qui rend y un maximum. Pour cela, reprenons la formule (c) du n° 27 du Livre I^{er},

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\int y\,dx = {} & Y\left(U + \frac{1}{2}\,\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2} + \frac{1.3}{2^2}\,\frac{d^4.U^5}{1.2.3.4.dx^4} + \ldots\right)\int dt\,c^{-t^2} \\
& + \frac{Y}{2}\,c^{-T^2}\left[\frac{d.U^2}{dx} - T\,\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2} + (T^2+1)\,\frac{d^3.U^4}{1.2.3.dx^3} - \ldots\right] \\
& - \frac{Y}{2}\,c^{-T'^2}\left[\frac{d.U^2}{dx} + T'\,\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2} + (T'^2+1)\,\frac{d^3.U^4}{1.2.3.dx^3} + \ldots\right];
\end{aligned}
\right.
$$

v est égal à $\dfrac{x-a}{\sqrt{\log Y - \log y}}$, et U, $\dfrac{d.U^2}{dx}$, $\dfrac{d^2.U^3}{dx^2}$, $\ldots$ sont ce que deviennent v, $\dfrac{d.v^2}{dx}$, $\dfrac{d^2.v^3}{dx^2}$, $\ldots$, lorsqu'on y change, après les différentiations, x en a, a étant la valeur de x qui rend y un maximum : T est égal à ce que devient la fonction $\sqrt{\log Y - \log y}$, lorsqu'on change x en $a-\theta$ dans y, et T′ est ce que devient la même fonction, lorsqu'on y change x dans $a+\theta'$. L'expression précédente de $\int y\,dx$ donne la valeur de cette intégrale, dans les limites $x = a-\theta$ et $x = a+\theta'$, l'intégrale $\int dt\,c^{-t^2}$ étant prise depuis $t = -\,T$ jusqu'à $t = T'$.

Le plus souvent, aux limites de l'intégrale $\int y\,dx$, étendue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, y est nul; ou, lorsque y n'est pas nul, il devient si petit à ces limites, qu'on peut le supposer nul. Alors, on peut faire à ces limites T et T′ infinis, ce qui donne pour l'intégrale $\int y\,dx$, étendue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$,

$$
\int y\,dx = Y\left(U + \frac{1}{2}\,\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2} + \frac{1.3}{2^2}\,\frac{d^4.U^5}{1.2.3.4.dx^4} + \ldots\right)\sqrt{\pi};
$$

ainsi la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $x = a-\theta$ et $x = a+\theta'$ est égale à

$$
(3)\quad \frac{\int dt\,c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}c^{-T^2}\left[\frac{d.U^2}{dx} - T\,\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2} + (T^2+1)\,\frac{d^3.U^4}{1.2.3.dx^3} - \ldots\right]\\ &-\frac{1}{2}c^{-T'^2}\left[\frac{d.U^2}{dx} + T'\,\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2} + (T'^2+1)\,\frac{d^3.U^4}{1.2.3.dx^3} + \ldots\right]\end{aligned}\right\}}{\left(U + \frac{1}{2}\,\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2} + \frac{1.3}{2^2}\,\frac{d^4.U^5}{1.2.3.4.dx^4} + \ldots\right)\sqrt{\pi}}.
$$

On voit, par le n° 23 du Livre I^{er}, que, dans le cas où y a pour facteurs des fonctions de x élevées à de grandes puissances de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, α étant une fraction extrêmement petite, alors U est le plus souvent de l'ordre $\sqrt{\alpha}$, ainsi que ses différences successives; U, $\frac{d.U^2}{dx}$, $\frac{d^2.U^3}{dx^2}$, ... sont respectivement des ordres $\sqrt{\alpha}$, α, $\alpha^{\frac{3}{2}}$, ...; d'où il suit que la convergence des séries de la formule (3) exige que T et T′ ne soient pas d'un ordre supérieur à $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Si l'on suppose $\theta = \theta'$, alors on a à fort peu près $T = T'$, et la formule (3) se réduit, en négligeant les termes de l'ordre α, à l'intégrale $\frac{\int dt\, c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$, prise depuis $t = -T$ jusqu'à $t = T'$; ce qui revient, en négligeant le carré de la différence $T'^2 - T^2$, à doubler l'intégrale précédente et à la prendre depuis t nul jusqu'à

$$t = \sqrt{\frac{T^2 + T'^2}{2}}.$$

Or on a

$$T^2 = \log Y - \log y,$$

et l'on peut supposer

$$\log y = \frac{1}{\alpha} \log \varphi,$$

φ étant une fonction de x ou de $a - \theta$, qui ne renferme plus de facteurs élevés à de grandes puissances. En nommant donc Φ, $\frac{d\Phi}{dx}$, $\frac{d^2\Phi}{dx^2}$, ... ce que deviennent, lorsque θ est nul, φ, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, ..., en observant ensuite que la condition de Y ou Φ un maximum donne $\frac{d\Phi}{dx} = 0$, on aura

$$\alpha T^2 = -\theta^2 \frac{d^2\Phi}{2\Phi\, dx^2} + \theta^3 \frac{d^3\Phi}{6\Phi\, dx^3} - \frac{\theta^4}{8}\left[\frac{d^4\Phi}{3\Phi\, dx^4} - \left(\frac{d^2\Phi}{\Phi\, dx^2}\right)^2\right] + \ldots.$$

En changeant θ dans $-\theta$, on aura la valeur de $\alpha T'^2$; on aura donc, en négligeant les termes de l'ordre α^2,

$$\frac{\alpha(T^2 + T'^2)}{2} = -\theta^2 \frac{d^2\Phi}{2\Phi\, dx^2};$$

partant,

$$\sqrt{\frac{T^2+T'^2}{2}} = \frac{\theta}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{-\frac{d^2\Phi}{2\Phi\, dx^2}}.$$

Faisons

$$k = \sqrt{-\frac{d^2\Phi}{2\Phi\, dx^2}} = \sqrt{-\frac{\alpha\, d^2 Y}{2 Y\, dx^2}},$$

$$\theta = \frac{t\sqrt{\alpha}}{k};$$

la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $a \pm \frac{t\sqrt{\alpha}}{k}$ sera

$$\frac{2\int dt\, c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = 0$, et pouvant être obtenue d'une manière fort approchée par les formules du n° 27 du Livre Ier.

Il résulte de cette expression que la valeur de x la plus probable est a, ou celle qui rend l'événement observé le plus probable, et qu'en multipliant à l'infini les événements simples dont l'événement observé se compose, on peut à la fois resserrer les limites $a \pm \frac{t\sqrt{\alpha}}{k}$, et augmenter la probabilité que la valeur de x tombera entre ces limites; en sorte qu'à l'infini, cet intervalle devient nul, et la probabilité se confond avec la certitude.

Si l'événement observé dépend d'événements simples de deux différents genres, en nommant x et x' les possibilités de ces deux genres d'événements, on verra, par les raisonnements précédents, que, y étant alors la probabilité de l'événement composé, la fraction

$$(4) \qquad \frac{y\, dx\, dx'}{\int\int y\, dx\, dx'}$$

sera la probabilité des valeurs simultanées de x et de x', les intégrales du dénominateur étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, et depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = 1$. En nommant a et a' les valeurs de x et de x' qui rendent y un maximum, et faisant $x = a + \theta$, $x' = a' + \theta'$, on trouvera, par l'analyse du n° 27 du Livre Ier, que si l'on suppose

$$\frac{\theta}{\sqrt{2Y}}\sqrt{-\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}} - \theta'\,\frac{\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial x'}}{2Y}\sqrt{\frac{-2Y}{\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}} = t,$$

$$\frac{\theta'}{\sqrt{-2Y\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}}\sqrt{\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial x'^2} - \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial x'}\right)^2} = t',$$

la fraction (4) prendra cette forme

$$\frac{dt\,dt'\,c^{-t^2-t'^2}}{\int\int dt\,dt'\,c^{-t^2-t'^2}}.$$

Les intégrales du dénominateur doivent être prises depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$, et depuis $t' = -\infty$ jusqu'à $t' = \infty$; car les intégrales relatives à x et x' de la fraction (4) étant prises depuis $x = 0$ et $x' = 0$ jusqu'à x et x' égaux à l'unité, et à ces limites, les valeurs de θ et de θ' étant $-a$ et $1-a$, $-a'$ et $1-a'$, les limites de t et de t' sont égales à ces dernières limites multipliées par des quantités de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$: ainsi l'exponentielle $c^{-t^2-t'^2}$ est excessivement petite à ces limites, et l'on peut, sans erreur sensible, étendre les intégrales du dénominateur de la fraction précédente jusqu'aux valeurs infinies positives et négatives des variables t et t'. Ce dénominateur devient ainsi égal à π ; et la probabilité que les valeurs de θ' et de θ sont comprises dans les limites

$$\theta' = 0, \qquad \theta' = \frac{t'\sqrt{-2Y\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}}{\sqrt{\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\,\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x'^2} - \left(\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial x'}\right)^2}},$$

$$\theta = 0, \qquad \theta = \frac{t\sqrt{2Y}}{\sqrt{-\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}} + \frac{t'\,\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial x'}}{\sqrt{\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\,\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x'^2} - \left(\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial x'}\right)^2}\,\sqrt{\dfrac{-2Y}{\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}}}$$

est égale à

$$\frac{1}{\pi}\int\int dt\,dt'\,c^{-t^2-t'^2},$$

les intégrales étant prises depuis t et t' nuls.

On voit par cette formule que, dans le cas de deux genres différents d'événements simples, la probabilité que leurs possibilités respectives sont celles qui rendent l'événement composé le plus probable devient de plus en plus grande, et finit par se confondre avec la certitude; ce qui a lieu généralement pour un nombre quelconque de genres différents d'événements simples, qui entrent dans l'événement observé.

Si l'on conçoit une urne renfermant une infinité de boules de plusieurs couleurs différentes, et qu'après en avoir tiré un grand nombre n, p sur ce nombre aient été de la première couleur, q de la seconde, r de la troisième, etc.; en désignant par $x, x', x'', \ldots$ les probabilités respectives d'amener dans un seul tirage une de ces couleurs, la probabilité de l'événement observé sera le terme qui a pour facteur $x^p x'^q x''^r \ldots$, dans le développement du polynôme

$$(x + x' + x'' + \ldots)^n,$$

où l'on a

$$x + x' + x'' + \ldots = 1,$$

$$p + q + r + \ldots = n;$$

on pourra donc supposer ici $y = x^p x'^q x''^r \ldots$, et alors on a pour les valeurs de $x, x', x'', \ldots$ qui rendent l'événement observé le plus probable

$$x = \frac{p}{n}, \qquad x' = \frac{q}{n}, \qquad x'' = \frac{r}{n}, \qquad \ldots.$$

Ainsi les valeurs les plus probables sont proportionnelles aux nombres des arrivées des couleurs, et lorsque le nombre n est un grand nombre, les probabilités respectives des couleurs sont à très peu près égales aux nombres de fois qu'elles sont arrivées divisés par le nombre des tirages.

27. Pour donner une application de la formule précédente, considérons le cas où deux joueurs A et B jouent ensemble avec cette condition, que celui qui sur trois coups en aura gagné deux gagne la partie, et supposons que, sur un très grand nombre n de parties, A en ait gagné un nombre i. En nommant x la probabilité de A pour gagner un coup, et par conséquent $1-x$ la probabilité correspondante de B, la probabilité de A pour gagner une partie sera la somme des deux premiers termes du binôme $(x+1-x)^3$, et la probabilité correspondante de B sera la somme des deux derniers termes. Ces probabilités sont donc $x^2(3-2x)$ et $(1-x)^2(1+2x)$; ainsi la probabilité que, sur n parties, A en gagnera i, et B, $n-i$, sera proportionnelle à $x^{2i}(3-2x)^i(1-x)^{2n-2i}(1+2x)^{n-i}$. En nommant donc y cette fonction, et a la valeur de x qui la rend un maximum, la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $a-\theta$ et $a+\theta$ sera

$$\frac{\int y\,dx}{\int y\,dx},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x=a-\theta$ jusqu'à $x=a+\theta$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Si l'on fait

$$\frac{1}{n}=\alpha, \qquad \frac{i}{n}=i',$$

on aura, par le numéro précédent,

$$\varphi=x^{2i'}(3-2x)^{i'}(1-x)^{2-2i'}(1+2x)^{1-i'}.$$

La condition du maximum de y ou de φ donne $d\varphi=0$; par conséquent, a étant la valeur de x correspondante à ce maximum, on aura

$$0=\frac{2i'}{a}-\frac{2i'}{3-2a}-\frac{2(1-i')}{1-a}+\frac{2(1-i')}{1+2a},$$

d'où l'on tire

$$i'=a^2(3-2a), \qquad 1-i'=(1-a)^2(1+2a);$$

ensuite on a

$$\frac{-d^2\Phi}{2\Phi\,dx^2}=\frac{18}{(3-2a)(1+2a)}=k^2.$$

La probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $a \pm \frac{r}{\sqrt{n}}$ sera donc, par le numéro précédent, égale à

$$\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(3-2a)(1+2a)}}\int dr\, c^{\frac{-18r^2}{(3-2a)(1+2a)}}.$$

On verra facilement que ce résultat s'accorde avec celui que nous avons trouvé dans le n° 16, par une analyse moins directe que celle-ci.

La partie finit en deux coups, si A ou B gagne les deux premiers coups, le troisième coup n'étant pas joué, parce qu'il devient inutile. Ainsi les nombres des parties gagnées par l'un et l'autre des joueurs n'indiquent pas le nombre des coups joués; mais ils indiquent que ce dernier nombre est contenu dans des limites données, avec une probabilité qui croît sans cesse, à mesure que les parties se multiplient. La recherche de ce nombre et de cette probabilité étant très propre à éclaircir l'analyse précédente, nous allons nous en occuper.

La probabilité que A gagnera une partie en deux coups est x^2, x exprimant, comme ci-dessus, sa probabilité de gagner à chaque coup. La probabilité qu'il gagnera la partie en trois coups est $2x^2(1-x)$. La somme $x^2(3-2x)$ de ces deux probabilités est la probabilité que A gagnera la partie. Ainsi, pour avoir la probabilité que, sur i parties gagnées par le joueur A, s seront de deux coups, il faut élever à la puissance i le binôme

$$\frac{x^2}{x^2(3-2x)} + \frac{2x^2(1-x)}{x^2(3-2x)}$$

ou

$$\frac{1}{3-2x} + \frac{2(1-x)}{3-2x},$$

et le terme $i-s+1$ du développement de cette puissance sera cette probabilité qui est ainsi égale à

$$\frac{1.2.3\ldots i\, 2^{i-s}(1-x)^{i-s}}{1.2.3\ldots s.1.2.3\ldots(i-s)(3-2x)^i}.$$

Le plus grand terme de ce développement est, par le n° 16, celui dans lequel les exposants s et $i-s$ du premier et du second terme du binôme sont à très peu près dans le rapport de ces termes, ce qui donne

$$s = \frac{i}{3-2x}.$$

Nous nommerons s' cette quantité, et nous ferons

$$s = s' + l.$$

On aura, par le n° 16,

$$\sqrt{\frac{i}{2s'\pi(i-s')}}\, dl\, c^{\frac{-il^2}{2s'(i-s')}}$$

pour la probabilité de s, correspondante à l'adresse x du joueur A.

On trouvera pareillement que, si l'on nomme z le nombre des parties de deux coups, gagnées par le joueur B, sur le nombre $n-i$ de parties qu'il a gagnées, la valeur de z la plus probable sera $\frac{n-i}{1+2x}$, et qu'en désignant par z' cette quantité et faisant

$$z = z' + l',$$

la probabilité de z correspondante à x sera

$$\sqrt{\frac{n-i}{2z'(n-i-z')\pi}}\, dl'\, c^{\frac{-(n-i)l'^2}{2z'(n-i-z')}}$$

Le produit de ces deux probabilités est donc la probabilité correspondante à x, que le nombre des parties de deux coups, gagnées par le joueur A, sera $s'+l$, tandis que le nombre des parties de deux coups, gagnées par le joueur B, sera $z'+l'$. Soit

$$q = \frac{i}{2s'(i-s')}, \qquad q' = \frac{n-i}{2z'(n-i-z')};$$

on aura, pour cette probabilité composée,

$$\frac{\sqrt{qq'}}{\pi}\, dl\, dl'\, c^{-ql^2 - q'l'^2}.$$

Il faut multiplier cette probabilité par celle de x, qui, comme on l'a vu dans le numéro précédent, est $\frac{y\,dx}{\int y\,dx}$; le produit est

$$(\varepsilon)\qquad \frac{\sqrt{qq'}}{\pi}\,\frac{y\,dx}{\int y\,dx}\,dl\,dl'\,c^{-ql^2-q'l'^2}.$$

L'intégrale du dénominateur doit être prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et par le n° 27 du Livre Ier, cette intégrale est, à très peu près,

$$\frac{Y\sqrt{\pi}}{\sqrt{\dfrac{-2Y}{\dfrac{d^2Y}{dx^2}}}}.$$

Si l'on nomme X la fonction

$$\sqrt{qq'}\,c^{-ql^2-q'l'^2}$$

et que l'on désigne par a' la valeur de x qui rend Xy un maximum, et par X' et Y' ce que deviennent X et y lorsqu'on y change x en a', on aura, par le numéro précédent, en faisant $x=a'+\theta$,

$$y\,dx\,\sqrt{qq'}\,c^{-ql^2-q'l'^2}=Y'X'\,d\theta\,c^{\frac{\theta^2\,d^2(X'Y')}{2X'Y'dx^2}}.$$

Il est facile de voir que a' ne diffère de la valeur a de x qui rend y un maximum, que d'une quantité de l'ordre α, que nous désignerons par $f\alpha$; en substituant dans Y, $a+f\alpha$ au lieu de a', pour en former Y', et développant par rapport aux puissances de α, on verra que $\frac{dY}{da}$ étant nul, parce que Y est le maximum de y, Y' ne diffère de Y que de quantités de l'ordre α; ainsi l'on a, aux quantités près d'un ordre inférieur à celui que l'on conserve, et en observant que $\frac{dX'}{X'dx}$ et $\frac{d^2X'}{X'dx^2}$ peuvent être négligées par rapport à $\frac{dY'}{Y'dx}$,

$$\frac{d^2X'Y'}{2X'Y'dx^2}=\frac{d^2Y}{2Y\,dx^2};$$

la fonction (ε) devient par là

$$(\varepsilon')\qquad \frac{\sqrt{qq'}}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{-\frac{d^2Y}{2Y\,dx^2}}\,dl\,dl'\,d\theta\,c^{-ql^2-q'l'^2+\frac{\theta^2d^2Y}{2Y\,dx^2}}.$$

On doit, dans cette fonction, supposer $x = a$, ce qui donne, en substituant pour i sa valeur $na^2(3-2a)$,

$$q = \frac{3-2a}{4na^2(1-a)}, \qquad q' = \frac{1+2a}{4na(1-a)^2}.$$

Ensuite, x étant égal à $a' + \theta$, il est égal à $a + f\alpha + \theta$; en négligeant donc les quantités de l'ordre α, on aura

$$x = a + \theta.$$

Maintenant le nombre des parties de deux coups étant

$$\frac{i}{3-2x} + \frac{n-i}{1+2x} + l + l',$$

ce nombre sera

$$\frac{i}{3-2a} + \frac{n-i}{1+2a} + \left[\frac{2i}{(3-2a)^2} - \frac{2(n-i)}{(1+2a)^2}\right]\theta + l + l'.$$

Faisons

$$t = \left[\frac{2i}{(3-2a)^2} - \frac{2(n-i)}{(1+2a)^2}\right]\theta + l + l',$$

et désignons par q'' la quantité

$$-\frac{d^2Y}{2Y\,dx^2\left[\frac{2i}{(3-2a)^2} - \frac{2(n-i)}{(1+2a)^2}\right]^2},$$

qui, après toutes les réductions, se réduit à

$$\frac{9(3-2a)(1+2a)}{2n(1-2a)^2(3-2a+2a^2)^2};$$

la fonction (ε') deviendra

$$(\varepsilon'') \qquad \frac{\sqrt{qq'q''}}{\pi\sqrt{\pi}}\,dt\,dl\,dl'\,c^{-ql^2-q'l'^2-q''(t-l-l')^2}.$$

En l'intégrant depuis $l = -\infty$ jusqu'à $l = \infty$, et depuis $l' = -\infty$ jusqu'à $l' = \infty$, on aura la probabilité que le nombre des parties de deux coups sera égal à

$$\frac{i}{3-2a}+\frac{n-i}{1+2a}+t;$$

or on a

$$\int dl\, c^{-ql^2-q'l'^2-q''(t-l-l')^2}=\int dl\, c^{-\frac{qq''}{q+q''}(t-l')^2-q'l'^2-(q+q'')\left[l-\frac{q''}{q+q''}(t-l')\right]^2}.$$

Cette dernière intégrale, prise depuis $l=-\infty$ jusqu'à $l=\infty$, est, par ce qui précède,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{q+q''}}\,c^{-\frac{qq''}{q+q''}(t-l')^2-q'l'^2}.$$

En la multipliant par dl' et la mettant sous cette forme

$$\frac{\sqrt{\pi}\,dl'}{\sqrt{q+q''}}\,c^{-\frac{qq'q''t^2}{qq'+qq''+q'q''}-\frac{qq'+qq''+q'q''}{q+q''}\left(l'-\frac{qq''t}{qq'+qq''+q'q''}\right)^2},$$

et l'intégrant depuis $l'=-\infty$ jusqu'à $l=\infty$, on aura

$$\frac{\pi}{\sqrt{qq'+qq''+q'q''}}\,c^{-\frac{qq'q''t^2}{qq'+qq''+q'q''}}.$$

La fonction (ε'') intégrée par rapport à l et l', dans les limites infinies positives et négatives de ces variables, devient ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{qq'q''}{qq'+qq''+q'q''}}\,dt\,c^{-\frac{qq'q''t^2}{qq'+qq''+q'q''}}.$$

Ainsi la probabilité que le nombre de parties de deux coups sera compris dans les limites

$$\frac{i}{3-2a}+\frac{n-i}{1+2a}\pm t=n[a^2+(1-a)^2]\pm t$$

est égale au double de l'intégrale de la différentielle précédente, prise depuis t nul. On doit observer que q, q', q'' sont de l'ordre $\frac{1}{n}$, en sorte que la quantité $\frac{qq'q''}{qq'+qq''+q'q''}$ est du même ordre. Représentons-la par

$\frac{k'^2}{n}$, et faisons $t = r\sqrt{n}$; on aura

$$(\varepsilon''') \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int k' dr\, c^{-k'^2 r^2},$$

pour l'expression de la probabilité que le nombre de parties de deux coups sera compris dans les limites

$$n[a^2 + (1-a)^2] \pm r\sqrt{n},$$

l'intégrale étant prise depuis r nul. L'intervalle de ces deux limites est $2r\sqrt{n}$, et le rapport de cet intervalle au nombre n de parties est $\frac{2r}{\sqrt{n}}$. Ce rapport diminue sans cesse à mesure que n augmente, et r peut en même temps croître indéfiniment, de sorte que l'intégrale précédente approche indéfiniment de l'unité.

Le nombre total des coups est le triple du nombre des parties de trois coups, plus le double du nombre des parties de deux coups, ou le triple du nombre total n des parties, moins le nombre des parties de deux coups; il est donc

$$2n(1 + a - a^2) \mp r\sqrt{n}.$$

L'intégrale (ε''') est donc l'expression de la probabilité que le nombre des coups sera compris dans ces limites.

Si, au lieu de connaître le nombre i des parties gagnées par le joueur A et le nombre total n de parties, on connaît le nombre i et le nombre total des coups, la même analyse pourra servir à déterminer le nombre inconnu n des parties. Pour cela, désignons par h le nombre total des coups; on aura, par ce qui précède, les deux équations

$$3n - \frac{i}{3-2a} - \frac{n-i}{1+2a} = h \pm r\sqrt{n},$$

$$\frac{i}{a} - \frac{i}{3-2a} = \frac{n-i}{1-a} - \frac{n-i}{1+2a}.$$

Ces équations donnent a et n en fonctions de $h \pm r\sqrt{n}$. Supposons

$$n = i\,\psi\left(\frac{h \pm r\sqrt{n}}{i}\right), \qquad a = \Gamma\left(\frac{h \pm r\sqrt{n}}{i}\right);$$

on aura, en réduisant en série,

$$n = i\,\psi\left(\frac{h}{i}\right) \pm ir\sqrt{n}\,\frac{d\,\psi\left(\frac{h}{i}\right)}{dh} + \ldots;$$

on substituera dans k', au lieu de n et de a, $i\,\psi\left(\frac{h}{i}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{h}{i}\right)$: l'intégrale ($\varepsilon'''$) est alors la probabilité que le nombre n des parties est compris dans les limites

$$i\,\psi\left(\frac{h}{i}\right) \pm ir\sqrt{i\,\psi\left(\frac{h}{i}\right)}\,\frac{d\,\psi\left(\frac{h}{i}\right)}{dh}.$$

28. C'est principalement aux naissances que l'analyse précédente est applicable, et l'on peut en déduire, non seulement pour l'espèce humaine, mais pour toutes les espèces d'êtres organisés, des résultats intéressants. Jusqu'ici les observations de ce genre n'ont été faites en grand nombre que sur l'espèce humaine; nous allons soumettre au calcul les principales.

Considérons d'abord les naissances observées à Paris, à Londres et dans le royaume de Naples. Dans l'espace des quarante années écoulées depuis le commencement de 1745, époque où l'on a commencé à distinguer à Paris, sur les registres, les naissances des deux sexes, jusqu'à la fin de 1784, on a baptisé dans cette capitale 393386 garçons et 377555 filles, les enfants trouvés étant compris dans ce nombre : cela donne à peu près $\frac{25}{24}$ pour le rapport des baptêmes des garçons à ceux des filles.

Dans l'espace des quatre-vingt-quinze années écoulées depuis le commencement de 1664 jusqu'à la fin de 1758, il est né à Londres 737629 garçons et 698958 filles, ce qui donne $\frac{19}{18}$ à peu près, pour le rapport des naissances des garçons à celles des filles.

Enfin, dans l'espace des neuf années écoulées, depuis le commencement de 1774 jusqu'à la fin de 1782, il est né dans le royaume de Naples, la Sicile non comprise, 782352 garçons et 746821 filles, ce qui donne $\frac{22}{21}$ pour le rapport des naissances des garçons à celles des filles.

Les plus petits de ces nombres de naissances sont relatifs à Paris; d'ailleurs c'est dans cette ville que les naissances des garçons et des filles approchent le plus de l'égalité. Par ces deux raisons, la probabilité que la possibilité de la naissance d'un garçon surpasse $\frac{1}{2}$ doit y être moindre qu'à Londres et dans le royaume de Naples. Déterminons numériquement cette probabilité.

Nommons p le nombre des naissances masculines observées à Paris, q celui des naissances féminines, et x la possibilité d'une naissance masculine, c'est-à-dire la probabilité qu'un enfant qui doit naître sera un garçon; $1-x$ sera la possibilité d'une naissance féminine, et l'on aura la probabilité que, sur $p-q$ naissances, p seront masculines, et q seront féminines, égale à

$$\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}\,x^p(1-x)^q.$$

En faisant donc

$$y = x^p(1-x)^q,$$

la probabilité que la valeur de x est comprise dans des limites données sera, par le n° 26, égale à

$$\frac{\int y\,dx}{\int y\,dx},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et celle du numérateur étant prise dans les limites données. Si l'on prend zéro et $\frac{1}{2}$ pour ces limites, on aura la probabilité que la valeur de x ne surpasse pas $\frac{1}{2}$. La valeur qui correspond au maximum de y est $\dfrac{p}{p+q}$, et, vu la grandeur des nombres p et q, l'excès de $\dfrac{p}{p+q}$ sur $\frac{1}{2}$ est trop considérable pour employer ici la formule (c) du n° 27 du Livre I[er], dans l'approximation de l'intégrale $\int y\,dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à

$x=\frac{1}{2}$; il faut donc, dans ce cas, faire usage de la formule (A) du n° 22 du même Livre. Ici l'on a

$$v=-\frac{y\,dx}{dy}=-\frac{x(1-x)}{p-(p+q)x};$$

la formule citée (A) donne ainsi, pour l'intégrale $\int y\,dx$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2^{p+q+1}(p-q)}\left[1-\frac{p+q}{(p-q)^2}+\ldots\right].$$

Quant à l'intégrale $\int y\,dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, on a, par le n° 26,

$$\int y\,dx=\mathrm{Y}\left(\mathrm{U}+\frac{1}{2}\,\frac{d^2.\mathrm{U}^3}{1.2.dx^2}+\ldots\right)\sqrt{\pi},$$

Y étant ce que devient y à son maximum, ou lorsqu'on y substitue $\frac{p}{p+q}$ pour x; v est ici égal à $\frac{x-\frac{p}{p+q}}{\sqrt{\log \mathrm{Y}-\log y}}$, et U, $\frac{d^2.\mathrm{U}^3}{dx^2}$, $\cdots$ sont ce que deviennent v, $\frac{d^2 v^3}{dx^2}$, $\cdots$, lorsqu'on y fait, après les différentiations, $x=\frac{p}{p+q}$. On trouve ainsi, pour l'intégrale $\int y\,dx$ prise depuis x nul jusqu'à $x=1$,

$$\int y\,dx=\frac{p^{p+\frac{1}{2}}q^{q+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}\left[1+\frac{(p+q)^2-13pq}{12pq(p+q)}+\ldots\right];$$

la probabilité que la valeur de x ne surpasse pas $\frac{1}{2}$ est donc égale à

$$(o)\qquad \frac{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{(p-q)\sqrt{\pi}\,2^{p+q+\frac{3}{2}}p^{p+\frac{1}{2}}q^{q+\frac{1}{2}}}\left[1-\frac{p+q}{(p-q)^2}-\frac{(p+q)^2-13pq}{12pq(p+q)}-\ldots\right].$$

Pour appliquer de grands nombres à cette formule, il faudrait avoir les logarithmes de p, q et $p-q$, avec douze décimales au moins : on peut y suppléer de cette manière. On a

$$\log\left[\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p q^q}\right]=-p\log\left(1+\frac{p-q}{p+q}\right)-q\log\left(1-\frac{p-q}{p+q}\right).$$

Lorsque les logarithmes sont hyperboliques, le second membre de cette équation, réduit en série, devient

$$-(p+q)\left[\frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2}{1.2}+\frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^4}{3.4}+\frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^6}{5.6}+\frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^8}{7.8}+\ldots\right].$$

On aura donc, par cette série très convergente, le logarithme hyperbolique de $\frac{(p+q)^{p+q}}{2^{p+q}p^p q^q}$. En le multipliant par 0,43429448, on le convertira en logarithme tabulaire, et, en lui ajoutant le logarithme tabulaire de $\frac{(p+q)^{\frac{3}{2}}}{2(p-q)\sqrt{2pq\pi}}$, on aura le logarithme tabulaire du facteur qui multiplie la série (o). Si l'on nomme $\frac{1}{\mu}$ ce facteur et si l'on fait

$$p=393386, \qquad q=377555,$$

on trouve en logarithme tabulaire

$$\log\mu=72{,}2511780,$$

et la série (o) devient

$$\frac{1}{\mu}(1-0{,}0030761+\ldots).$$

Cette quantité d'une petitesse excessive, retranchée de l'unité, donnera la probabilité qu'à Paris la possibilité des naissances des garçons surpasse celles des filles; d'où l'on voit que l'on doit regarder cette probabilité comme étant égale, au moins, à celle des faits historiques les plus avérés.

Si l'on applique la formule (o) aux naissances observées dans les principales villes de l'Europe, on trouve que la supériorité des naissances des garçons sur les naissances des filles, observée partout depuis Naples jusqu'à Pétersbourg, indique une plus grande possibilité des naissances des garçons, avec une probabilité extrêmement approchante de la certitude. Ce résultat paraît donc être une loi générale, du moins en Europe, et si, dans quelques petites villes, où l'on n'a observé qu'un nombre peu considérable de naissances, la nature semble s'en écarter, il y a tout lieu de croire que cet écart n'est qu'apparent, et qu'à la longue les naissances observées dans ces villes offriraient, en se multipliant, un résultat semblable à celui des grandes villes. Plusieurs philosophes, trompés par ces anomalies, ont cherché la cause de phénomènes qui ne sont que l'effet du hasard; ce qui prouve la nécessité de faire précéder de pareilles recherches par celle de la probabilité avec laquelle les observations indiquent les phénomènes dont on veut déterminer la cause. Je prends pour exemple la petite ville de Vitteaux, dans laquelle, sur 415 naissances observées pendant cinq années, il est né 203 garçons et 212 filles; p étant ici moindre que q, l'ordre naturel paraît renversé. Voyons quelle est, d'après ces observations, la probabilité que les facilités des naissances des garçons surpassent dans cette ville celles des naissances des filles. Cette probabilité est $\frac{\int y\,dx}{\int y\,dx}$, l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x=1$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. La formule (o), qui, retranchée de l'unité, donne cette fraction, devient ici divergente; nous emploierons alors la formule (3) du n° 26, qui se réduit à fort peu près à son premier terme $\frac{\int dt\,c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$, l'intégrale étant prise depuis la valeur de t qui correspond à $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à la valeur de t qui correspond à $x=1$. Or on a, par le numéro cité,

$$t^2 = \log Y - \log y,$$

y étant $x^p(1-x)^q$, et Y étant la valeur de y correspondante au maximum de y, qui a lieu lorsque $x=\frac{p}{p+q}$; la valeur de t^2 qui correspond à $x=\frac{1}{2}$ est $-\log\left[\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p q^q}\right]$, ce logarithme étant hyperbolique, et étant donné, par ce qui précède, par une série très convergente. La valeur de t^2 qui correspond à $x=1$ est $t^2=\infty$; on a donc ainsi les deux limites de l'intégrale $\int dt\,c^{-t^2}$, intégrale qu'il sera facile d'obtenir par les formules que nous avons données pour cet objet. On trouve ainsi la probabilité qu'à Vitteaux les facilités des naissances des garçons l'emportent sur celles des filles égale à 0,33; la supériorité de la facilité des naissances des filles est donc indiquée par ces observations, avec une probabilité égale à 0,67, probabilité beaucoup trop faible pour balancer l'analogie qui nous porte à penser qu'à Vitteaux, comme dans toutes les villes où l'on a observé un nombre considérable de naissances, la possibilité des naissances des garçons l'emporte sur celle des naissances des filles.

29. On a vu qu'à Londres le rapport observé des naissances des garçons à celles des filles est égale à $\frac{19}{18}$, tandis qu'à Paris celui des baptêmes des garçons à ceux des filles n'est que $\frac{25}{24}$. Cela semble indiquer une cause constante de cette différence. Déterminons la probabilité de cette cause.

Soient p et q les nombres des baptêmes des garçons et des filles, faits à Paris dans l'intervalle du commencement de 1745 à la fin de 1784; en désignant par x la possibilité du baptême d'un garçon, et faisant, comme dans le numéro précédent,

$$y = x^p(1-x)^q,$$

la valeur de x la plus probable sera celle qui rend y un maximum : elle est donc $\frac{p}{p+q}$; en supposant ensuite

$$x = \frac{p}{p+q} + \theta,$$

la probabilité de la valeur de θ sera, par le n° 26, égale à

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{(p+q)^3}{2pq}}\, c^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\theta^2}.$$

En désignant par p', q' et θ' ce que deviennent p, q et θ pour Londres, on aura

$$\frac{d\theta'}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}}\, c^{-\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}\theta'^2}$$

pour la probabilité de θ'; le produit

$$\frac{d\theta\, d\theta'}{\pi}\sqrt{\frac{(p+q)^3(p'+q')^3}{4pq\,p'q'}}\,c^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\theta^2-\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}\theta'^2}$$

de ces deux probabilités sera donc la probabilité de l'existence simultanée de θ et de θ'. Faisons

$$\frac{p'}{p'+q'}+\theta'=\frac{p}{p+q}+\theta+t;$$

la fonction différentielle précédente devient

$$\frac{d\theta\, dt}{\pi}\sqrt{\frac{(p+q)^3(p'+q')^3}{4pq\,p'q'}}\,c^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\theta^2-\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}\left[\theta+t-\frac{p'q-pq'}{(p+q)(p'+q')}\right]^2}$$

En l'intégrant pour toutes les valeurs possibles de θ et ensuite pour toutes les valeurs positives de t, on aura la probabilité que la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande à Londres qu'à Paris. Les valeurs de θ peuvent s'étendre depuis θ égal à $-\frac{p}{p+q}$ jusqu'à θ égal à $1-\frac{p}{p+q}$; mais, lorsque p et q sont de très grands nombres, le facteur $c^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\theta^2}$ est si petit à ces deux limites qu'on peut le regarder comme nul; on peut donc étendre l'intégrale relative à θ, depuis $\theta=-\infty$ jusqu'à $\theta=\infty$. On voit, par la même raison, que l'intégrale relative à t peut être étendue depuis $t=0$ jusqu'à $t=\infty$. En suivant le procédé du n° 27 pour ces intégrations multiples, on trouvera facilement que, si l'on fait

$$k^2=\frac{(p+q)^3(p'+q')^3}{2p'q'(p+q)^3+2pq(p'+q')^3},$$

$$h=\frac{p'q-pq'}{(p+q)(p'+q')},$$

$$\theta+\frac{2pq\,k^2}{(p+q)^3}(t-h)=t',$$

ce qui donne $d\theta=dt'$, la différentielle précédente, intégrée d'abord par rapport à t' depuis $t'=-\infty$ jusqu'à $t'=\infty$, et ensuite depuis $t=0$ jusqu'à t infini, donnera

$$\int \frac{k\,dt}{\sqrt{\pi}} c^{-k^2(t-h)^2}$$

pour la probabilité qu'à Londres la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande qu'à Paris. Si l'on fait

$$k(t-h)=t'',$$

cette intégrale devient

$$\int \frac{dt''}{\sqrt{\pi}} c^{-t''^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t''=-kh$ jusqu'à $t''=\infty$, et il est visible qu'elle est égale à

$$1-\int \frac{dt''}{\sqrt{\pi}} c^{-t''^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t''=kh$ jusqu'à t'' infini. De là il suit, par le n° 27 du Livre Ier, que, si l'on suppose

$$i^2=\frac{p'q'(p+q)^3+pq(p'+q')^3}{(p+q)(p'+q')(p'q-pq')^2},$$

la probabilité que la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande à Londres qu'à Paris a pour expression

$$(\mu) \qquad 1-\frac{ic^{-\frac{1}{2i^2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \cfrac{1}{1+\cfrac{i^2}{1+\cfrac{2i^2}{1+\cfrac{3i^2}{1+\cfrac{4i^2}{1+\ldots}}}}}$$

En faisant dans cette formule

$$p=393386, \qquad q=377555,$$

$$p'=737629, \qquad q'=698958,$$

elle devient

$$1-\frac{1}{328269}.$$

Il y a donc 328 268 à parier contre un qu'à Londres la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande qu'à Paris. Cette probabilité approche tellement de la certitude, qu'il y a lieu de rechercher la cause de cette supériorité.

Parmi les causes qui peuvent la produire, il m'a paru que les baptêmes des enfants trouvés, qui font partie de la liste annuelle des baptêmes à Paris, devaient avoir une influence sensible sur le rapport des baptêmes des garçons à ceux des filles, et qu'ils devaient diminuer ce rapport, si, comme il est naturel de le croire, les parents des campagnes environnantes, trouvant de l'avantage à retenir près d'eux les enfants mâles, en avaient envoyé à l'hospice des Enfants-Trouvés de Paris, dans un rapport moindre que celui des naissances des deux sexes. C'est ce que le relevé des registres de cet hospice m'a fait voir avec une très grande probabilité. Depuis le commencement de 1745 jusqu'à la fin de 1809, on y a baptisé 163 499 garçons et 159 405 filles, nombre dont le rapport est $\frac{39}{38}$, et diffère trop du rapport $\frac{25}{24}$ des baptêmes des garçons et des filles à Paris, pour être attribué au simple hasard.

30. Déterminons, d'après les principes précédents, les probabilités des résultats fondés sur les Tables de mortalité ou d'assurance, construites sur un grand nombre d'observations. Supposons d'abord que, sur un nombre p d'individus d'un âge donné A, on ait observé qu'il en existe encore le nombre q à l'âge $A+a$; on demande la probabilité que, sur p' individus de l'âge A, il en existera $q'+z$ à l'âge $A+a$, la raison de p' et q' étant la même que celle de p à q.

Soit x la probabilité d'un individu de l'âge A, pour vivre à l'âge $A+a$; la probabilité de l'événement observé est alors le terme du binôme $x+(1-x)^p$ qui a x^q pour facteur; cette probabilité est donc

$$\frac{1.2.3\ldots p}{1.2.3\ldots(p-q)\,1.2.3\ldots q}\,x^q(1-x)^{p-q};$$

ainsi la probabilité de la valeur de x, prise de l'événement observé, est

$$\frac{x^q\,dx(1-x)^{p-q}}{\int x^q\,dx(1-x)^{p-q}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$.

La probabilité que, sur les p' individus de l'âge A, $q'+z$ vivront à l'âge $A+a$ est

$$\frac{1.2.3\ldots p'}{1.2.3\ldots(q'+z)\,1.2.3\ldots(p'-q'-z)}\,x^{q'+z}(1-x)^{p'-q'-z}.$$

En multipliant cette probabilité par la probabilité précédente de la valeur de x, le produit intégré depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$ sera la probabilité de l'existence de $q'+z$ personnes à l'âge $A+a$. En nommant donc P cette probabilité, on aura

$$P=\frac{1.2.3\ldots p'\int x^{q+q'+z}\,dx(1-x)^{p+p'-q-q'-z}}{1.2.3\ldots(q'+z)\,1.2.3\ldots(p'-q'-z)\int x^q\,dx(1-x)^{p-q}},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. On a, par le n° 28, à très peu près,

$$\begin{aligned}
&\int x^{q+q'+z}\,dx(1-x)^{p+p'-q-q'-z}\\
&=\sqrt{2\pi}\left[(q+q')\left(1+\frac{z}{q+q'}\right)\right]^{q+q'+z+\frac{1}{2}}\\
&\quad\times\frac{\left[(p+p'-q-q')\left(1-\frac{z}{p+p'-q-q'}\right)\right]^{p+p'-q-q'-z+\frac{1}{2}}}{(p+p')^{p+p'+\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

$$\int x^q\,dx(1-x)^{p-q}=\sqrt{2\pi}\,\frac{q^{q+\frac{1}{2}}(p-q)^{p-q+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{3}{2}}}.$$

Ensuite, par le n° 33 du Livre I^{er}, on a

$$1.2.3\ldots p'=p'^{p'+\frac{1}{2}}c^{-p'}\sqrt{2\pi},$$

$$1.2.3\ldots(q'+z)=q'^{q'+z+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{z}{q'}\right)^{q'+z+\frac{1}{2}}c^{-q'-z}\sqrt{2\pi},$$

$$1.2.3\ldots(p'-q'-z)=(p'-q')^{p'-q'-z+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z}{p'-q'}\right)^{p'-q'-z+\frac{1}{2}}c^{-p'+q'+z}\sqrt{2\pi};$$

enfin on a $q' = \frac{qp'}{p}$. Cela posé, on trouve, après toutes les réductions,

$$\mathrm{P} = \sqrt{\frac{p^3}{qp'(p-q)(p+p')2\pi}}\;\frac{\left(1+\frac{z}{q+q'}\right)^{q+q'+z+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z}{p+p'-q-q'}\right)^{p+p'-q-q'-z+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{z}{q'}\right)^{q'+z+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z}{p'-q'}\right)^{p'-q'-z+\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on prend le logarithme hyperbolique du second membre de cette équation, que l'on réduise ce logarithme en série ordonnée par rapport aux puissances de z, et que l'on néglige les puissances supérieures au carré, on aura, en repassant du logarithme à la fonction,

$$\mathrm{P} = \sqrt{\frac{p^3}{qp'(p-q)(p+p')2\pi}}\left[1+\frac{(2q-p)p^2 z}{2qp'(p-q)(p+p')}\right]c^{\frac{-p^3z^2}{2qp'(p-q)(p+p')}}.$$

p, q, p' étant supposés de très grands nombres de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, le coefficient de z est très petit de l'ordre α; celui de $-z^2$ est très petit et du même ordre. Mais, si l'on suppose $\frac{z}{p}$ de l'ordre $\sqrt{\alpha}$, on pourra négliger, dans l'expression précédente, le terme dépendant de la première puissance de z, comme très petit de l'ordre $\sqrt{\alpha}$. De plus, ce terme se détruit lui-même, lorsque l'on a égard à la fois aux valeurs positives et négatives de z. En le négligeant donc, on aura

$$2\sqrt{\frac{p^3}{qp'(p-q)(p+p')2\pi}}\int dz\, c^{-\frac{p^3z^2}{2qp'(p-q)(p+p')}}$$

pour l'expression de la probabilité que, sur p' individus de l'âge A, le nombre de ceux qui parviendront à l'âge $\mathrm{A}+a$ sera compris dans les limites $q' \pm z$, l'intégrale étant prise depuis z nul.

Supposons maintenant que l'on ait trouvé par l'observation que, sur p individus de l'âge A, q vivaient encore à l'âge $\mathrm{A}+a$, et r à l'âge $\mathrm{A}+a+a'$; on demande la probabilité que, sur p' individus du même âge A, $\frac{qp'}{p}+z$ vivront à l'âge $\mathrm{A}+a$, et $\frac{rp'}{p}+z'$ vivront à l'âge $\mathrm{A}+a+a'$.

La probabilité que, sur p' individus de l'âge A, $\frac{qp'}{p}+z$ vivront à l'âge A $+ a$ est, par ce qui précède,

$$\sqrt{\frac{p^3}{2qp'(p-q)(p+p')\pi}}\,c^{-\frac{p^3z^2}{2qp'(p-q)(p+p')}}.$$

On aura la probabilité que, sur $\frac{qp'}{p}+z$ individus de l'âge $A+a$, $\left(\frac{qp'}{p}+z\right)\frac{r}{q}+u$ vivront à l'âge $A+a+a'$, en changeant dans la fonction précédente p' dans $\frac{qp'}{p}+z$, p en q, q en r et z en u; ce qui donne, en négligeant z par rapport à $\frac{qp'}{p}$,

$$\sqrt{\frac{qp^2}{2rp'(q-r)(p+p')\pi}}\,c^{-\frac{qp^2u^2}{2rp'(p-r)(p+p')}}.$$

Le produit de ces deux probabilités est la probabilité de l'existence simultanée de z et de u. Or on a

$$\left(\frac{qp'}{p}+z\right)\frac{r}{q}+u=\frac{rp'}{p}+z',$$

ce qui donne

$$u=z'-\frac{rz}{q};$$

en faisant donc

$$6^2=\frac{p^3}{2qp'(p-q)(p+p')},$$

$$6'^2=\frac{qp^2}{2rp'(q-r)(p+p')},$$

la probabilité P de l'existence simultanée des valeurs de z et de z' sera

$$P=\int\frac{6\,dz}{\sqrt{\pi}}\,\frac{6'\,dz'}{\sqrt{\pi}}\,c^{-6^2z^2-6'^2\left(z'-\frac{rz}{q}\right)^2}.$$

En suivant cette analyse, on trouve généralement que, si l'on fait

$$6''^2 = \frac{rp^2}{2sp'(r-s)(p+p')},$$

$$6'''^2 = \frac{sp^2}{2tp'(s-t)(p+p')},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

la probabilité P que, sur p' individus de l'âge A, les nombres de ceux qui vivront aux âges $A + a$, $A + a + a'$, $A + a + a' + a''$, ... seront compris dans les limites respectives

$$\frac{qp'}{p},\ \frac{qp'}{p} + z; \qquad \frac{rp'}{p},\ \frac{rp'}{p} + z'; \qquad \frac{sp'}{p},\ \frac{sp'}{p} + z''; \qquad \frac{tp'}{p},\ \frac{tp'}{p} + z'''; \qquad \ldots,$$

est

$$P = \int \frac{6\,dz}{\sqrt{\pi}}\,\frac{6'\,dz'}{\sqrt{\pi}}\,\frac{6''\,dz''}{\sqrt{\pi}} \cdots c^{-6^2 z^2 - 6'^2\left(z' - \frac{rz}{q}\right)^2 - 6''^2\left(z'' - \frac{sz'}{r}\right)^2 - \ldots}.$$

On peut apprécier par cette formule les probabilités respectives des nombres d'une Table de mortalité, construite sur un grand nombre d'observations. La manière de former ces Tables est très simple. On prend sur les registres des naissances et des morts un grand nombre d'enfants que l'on suit pendant le cours de leur vie, en déterminant combien il en reste à la fin de chaque année de leur âge, et l'on inscrit ce nombre vis-à-vis de chaque année finissante. Mais, comme dans les deux ou trois premières années de la vie la mortalité est très rapide, il faut, pour plus d'exactitude, indiquer dans ce premier âge le nombre des survivants à la fin de chaque demi-année. Si le nombre p des enfants était infini, on aurait ainsi des Tables exactes qui représenteraient la vraie loi de la mortalité dans le lieu et à l'époque de leur formation. Mais, le nombre d'enfants que l'on choisit étant fini, quelque grand qu'il soit, les nombres de la Table sont susceptibles d'erreurs. Représentons par p', q', r', s', t', ... ces divers nombres. Les vrais nombres, pour un nombre p' de naissances, sont $\frac{qp'}{p}$, $\frac{rp'}{p}$, $\frac{sp'}{p}$, $\frac{tp'}{p}$, ...

Si l'on fait $q' = \frac{qp'}{p} + z$, z sera l'erreur de q'; pareillement, si l'on suppose $r' = \frac{rp'}{p} + z'$, z' sera l'erreur de r', et ainsi de suite. L'expression précédente de P est donc la probabilité que les erreurs de $q', r', s', \ldots$ sont comprises dans les limites zéro et z, zéro et z', zéro et z'', etc. Les valeurs de $\beta, \beta', \ldots$ dépendent de $p, q, r, \ldots$, qui sont inconnues; mais la supposition de p infini donne

$$\beta^2 = \frac{p^2}{2qp'(p-q)}.$$

On peut substituer, sans erreur sensible, $\frac{q'}{p'}$ au lieu de $\frac{q}{p}$, ce qui donne

$$\beta^2 = \frac{p'}{2q'(p'-q')}.$$

On aura de la même manière

$$\beta'^2 = \frac{q'}{2r'(q'-r')},$$

$$\beta''^2 = \frac{r'}{2s'(r'-s')},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on ne veut considérer que l'erreur d'un des nombres de la Table, tel que s', alors on intégrera l'expression de P, relativement à z''', z^{IV}, ..., depuis les valeurs infinies négatives de ces variables jusqu'à leurs valeurs infinies positives, et alors on a

$$\mathrm{P} = \int \frac{\beta\,dz}{\sqrt{\pi}} \frac{\beta'\,dz'}{\sqrt{\pi}} \frac{\beta''\,dz''}{\sqrt{\pi}}\, c^{-\beta^2 z^2 - \beta'^2\left(z' - \frac{r'z}{q'}\right)^2 - \beta''^2\left(z'' - \frac{s'r'}{z'}\right)^2}.$$

Les intégrales relatives à z et z' doivent être prises depuis leurs valeurs infinies négatives jusqu'à leurs valeurs infinies positives; on trouvera ainsi, par le procédé dont nous avons souvent fait usage pour ce genre d'intégrations, que, si l'on suppose

$$\gamma^2 = \frac{p'}{2s'(p'-s')},$$

on aura

$$P = \int \frac{\gamma\, dz''}{\sqrt{\pi}}\, c^{-\gamma^2 z''^2}.$$

La probabilité que l'erreur d'un nombre quelconque de la Table sera comprise dans les limites zéro et une quantité quelconque est donc indépendante, soit des nombres intermédiaires, soit des nombres subséquents.

Si l'on fait $\gamma z'' = t$, on aura

$$\frac{z''}{s'} = t\sqrt{\frac{2(p'-s')}{p's'}},$$

et la probabilité P que le rapport de l'erreur du nombre s' de la Table à ce nombre lui-même sera compris dans les limites $\pm t\sqrt{\frac{2(p'-s')}{p's'}}$ est

$$P = 2\int \frac{dt}{\sqrt{\pi}}\, c^{-t^2},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul. On voit ainsi que, la valeur de t et par conséquent la probabilité P restant les mêmes, ce rapport augmente lorsque s' diminue; ainsi les nombres de la Table sont d'autant moins sûrs qu'ils sont plus éloignés du premier p'. On voit encore que ce rapport diminue à mesure que p' augmente, ou à mesure que l'on multiplie les observations; de manière que l'on peut, par cette multiplication, diminuer à la fois ce rapport et augmenter t, ce rapport devenant nul lorsque p' est infini, et P devenant alors égal à l'unité.

31. Appliquons l'analyse précédente à la recherche de la population d'un grand empire. L'un des moyens les plus simples et les plus propres à déterminer cette population est l'observation des naissances annuelles dont on est obligé de tenir compte pour déterminer l'état civil des enfants. Mais ce moyen suppose que l'on connait, à très peu près, le rapport de la population aux naissances annuelles, rapport que l'on obtient en faisant sur plusieurs points de l'empire le dénombrement exact des habitants, et en le comparant aux naissances correspon-

dantes observées pendant quelques années consécutives; on en conclut ensuite, par une simple proportion, la population de tout l'empire. Le Gouvernement a bien voulu, à ma prière, donner des ordres pour avoir, avec précision, ces données. Dans trente départements, distribués sur la surface de la France, de manière à compenser les effets de la variété des climats, on a fait choix des communes dont les maires, par leur zèle et leur intelligence, pouvaient fournir les renseignements les plus précis. Le dénombrement exact des habitants de ces communes, pour le 22 septembre 1802, s'est élevé à 2037615 individus. Le relevé des naissances, des mariages et des morts, depuis le 22 septembre 1799 jusqu'au 22 septembre 1802, a donné, pour ces trois années,

Naissances.	Mariages.	Décès.
110312 garçons.	46037	103659 mâles.
105287 filles.		99443 femelles.

Le rapport des naissances des garçons à celles des filles, que ce relevé présente, est celui de 22 à 21, et les mariages sont aux naissances comme 3 à 14; le rapport de la population aux naissances annuelles est 28,352845. En supposant donc le nombre des naissances annuelles en France égal à un million, ce qui s'éloigne peu de la vérité, on aura, en multipliant par le rapport précédent, ce dernier nombre, la population de la France égale à 28352845 individus. Voyons l'erreur que l'on peut craindre dans cette évaluation.

Pour cela, concevons une urne qui renferme une infinité de boules blanches et noires dans un rapport inconnu. Supposons ensuite qu'ayant tiré au hasard un grand nombre p de ces boules, q aient été blanches, et que, dans un second tirage, sur un nombre inconnu de boules extraites, il y en ait q' de blanches. Pour en déduire ce nombre inconnu, on suppose son rapport à q', le même que celui de p à q, ce qui donne $\frac{pq'}{q}$ pour ce nombre. Cherchons la probabilité que le nombre des boules extraites au second tirage est compris dans les limites $\frac{pq'}{q} \pm z$. Nommons x le rapport inconnu du nombre des boules blanches au nombre total des boules de l'urne. La probabilité de l'événement observé dans le premier tirage sera exprimée par le terme qui a pour facteur $x^q(1-x)^{p-q}$ dans le développement du binôme $[x+(1-x)]^p$, d'où il est facile de conclure, comme dans le numéro précédent, que la probabilité de x est

$$\frac{x^q\,dx(1-x)^{p-q}}{\int x^q\,dx(1-x)^{p-q}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Concevons maintenant que, dans le second tirage, le nombre total des boules extraites est $\frac{pq'}{q}+z$; la probabilité du nombre observé q' de boules blanches sera le terme du binôme $[x+(1-x)]^{\frac{pq'}{q}+z}$, qui a pour facteur $x^{q'}(1-x)^{\frac{pq'}{q}+z-q'}$; cette probabilité est donc

$$\frac{1.2.3\ldots\left(\frac{pq'}{q}+z\right)}{1.2.3\ldots q'.1.2.3\ldots\left(\frac{pq'}{q}+z-q'\right)}x^{q'}(1-x)^{\frac{pq'}{q}+z-q'}.$$

En la multipliant par la probabilité précédente de x, en intégrant le produit depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et en le divisant par ce même produit multiplié par dz et intégré pour toutes les valeurs positives et négatives de z, on aura la probabilité que le nombre total des boules extraites est $\frac{pq'}{q}+z$. On trouvera ainsi, par l'analyse du numéro précédent, cette probabilité égale à

$$\sqrt{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')\pi}}\,c^{-\frac{q^3z^2}{2pq'(p-q)(q+q')}}.$$

En nommant donc P la probabilité que le nombre des boules extraites dans le second tirage est compris dans les limites $\frac{pq'}{q}\pm z$, on aura

$$P=1-2\int dz\sqrt{\frac{q^3}{2pq'(p-q)(q+q')\pi}}\,c^{-\frac{q^3z^2}{2pq'(p-q)(q+q')}},$$

l'intégrale étant prise depuis $z=z$ jusqu'à z infini.

Maintenant, le nombre p des boules extraites dans le premier tirage peut représenter un dénombrement, et le nombre q des boules blanches qui y sont comprises peut exprimer le nombre des femmes qui, dans ce dénombrement, doivent devenir mères dans l'année, ou le nombre des naissances annuelles, correspondantes au dénombrement. Alors q' exprime le nombre des naissances annuelles observées dans tout l'empire, et d'où l'on conclut la population $\frac{pq'}{q}$. Dans ce cas, la valeur précédente de P exprime la probabilité que cette population est comprise dans les limites $\frac{pq'}{q} \pm z$.

Nous supposerons, conformément aux données précédentes,

$$p = 2037615, \qquad q = \frac{110313 + 105287}{3};$$

nous supposerons ensuite

$$q' = 1500000, \qquad z = 500000;$$

la formule précédente donne alors

$$P = 1 - \frac{1}{1162}.$$

Il y a donc environ 1161 à parier contre un qu'en fixant à 42529267 la population correspondante à quinze cent mille naissances, on ne se trompera pas d'un demi-million.

La différence entre la certitude et la probabilité P diminue avec une très grande rapidité lorsque z augmente; elle serait insensible si l'on supposait $z = 700000$.

32. Considérons maintenant la probabilité des événements futurs, tirée des événements observés, et supposons qu'ayant observé un événement composé d'un nombre quelconque d'événements simples, on cherche la probabilité d'un résultat futur, composé d'événements semblables.

Nommons x la probabilité de chaque événement simple, y la probabilité correspondante du résultat observé, et z celle du résultat futur; la probabilité de x sera, comme on l'a vu,

$$\frac{y\,dx}{\int y\,dx},$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; $\frac{yz\,dx}{\int y\,dx}$ est donc la probabilité du résultat futur, prise de la valeur de x, considérée comme cause de l'événement simple. Ainsi, en nommant P la probabilité entière de l'événement futur, on aura

$$\mathrm{P}=\frac{\int yz\,dx}{\int y\,dx},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$.

Supposons, par exemple, qu'un événement étant arrivé m fois de suite, on demande la probabilité qu'il arrivera les n fois suivantes. Dans ce cas, x étant supposé représenter la possibilité de l'événement simple, x^m sera celle de l'événement observé, et x^n celle de l'événement futur, ce qui donne

$$y=x^m,\qquad z=x^n,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{P}=\frac{m+1}{m+n+1}.$$

Supposons l'événement observé, composé d'un très grand nombre d'événements simples; soient a la valeur de x qui rend y un maximum, et Y ce maximum; soient a' la valeur de x qui rend yz un maximum, et Y′ et Z′ ce que deviennent y et z à ce maximum. On aura, par le n° 27 du Livre I^{er}, à très peu près,

$$\int y\,dx=\frac{\mathrm{Y}^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2}}},$$

$$\int yz\,dx=\frac{(\mathrm{Y'Z'})^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\frac{d^2(\mathrm{Y'Z'})}{dx^2}}}.$$

Le résultat observé étant composé d'un très grand nombre d'événements simples, supposons que l'événement futur soit beaucoup moins composé. L'équation qui donne la valeur a' de x, correspondante au maximum de yz, est

$$o = \frac{dy}{y\,dx} + \frac{dz}{z\,dx};$$

$\frac{dy}{y\,dx}$ est une quantité très grande, de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, et, puisque le résultat futur est très peu composé par rapport au résultat observé, $\frac{dz}{z\,dx}$ sera d'un ordre moindre, que nous désignerons par $\frac{1}{\alpha^{1-\lambda}}$. Ainsi, a étant la valeur de x qui satisfait à l'équation $o = \frac{dy}{y\,dx}$, la différence entre a et a' sera très petite de l'ordre α^λ, et l'on pourra supposer

$$a' = a + \alpha^\lambda \mu.$$

Cette supposition donne

$$Y' = Y + \alpha^\lambda \mu \frac{dY}{dx} + \frac{\alpha^{2\lambda}\mu^2}{1.2}\frac{d^2Y}{dx^2} + \ldots.$$

Mais on a $\frac{dY}{dx} = o$, et il est facile d'en conclure que $\frac{d^nY}{Y\,dx^n}$ est d'un ordre égal ou moindre que $\frac{1}{\alpha^{\frac{n}{2}}}$; le terme $\frac{\alpha^{n\lambda}\mu^n}{1.2.3\ldots n}\frac{d^nY}{Y\,dx^n}$ sera par conséquent au plus de l'ordre $\alpha^{n\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}$. Ainsi la convergence de l'expression de Y' en série exige que λ surpasse $\frac{1}{2}$, et dans ce cas Y' ne diffère de Y que de quantités de l'ordre $\alpha^{2\lambda-1}$.

Si l'on nomme Z ce que devient z lorsqu'on y fait $x = a$, on s'assurera de la même manière que Z' peut se réduire à Z. Enfin on prouvera par un raisonnement semblable que $\frac{d^2(Y'Z')}{dx^2}$ se réduit à très peu près à $Z\frac{d^2Y}{dx^2}$. En substituant ces valeurs dans l'expression de P, on aura

$$P = Z,$$

c'est-à-dire que l'on peut alors déterminer la probabilité du résultat futur, en supposant x égal à la valeur qui rend le résultat observé le plus probable. Mais il faut pour cela que le résultat futur soit assez peu composé pour que les exposants des facteurs de z soient d'un ordre de grandeur plus petit que la racine carrée des facteurs de y; autrement, la supposition précédente exposerait à des erreurs sensibles.

Si le résultat futur est une fonction du résultat observé, z sera une fonction de y, que nous représenterons par $\varphi(y)$. La valeur de x qui rend zy un maximum est, dans ce cas, la même qui rend y un maximum; ainsi l'on a $a' = a$, et si l'on désigne $\frac{d\,\varphi(y)}{dy}$ par $\varphi'(y)$, l'expression de P deviendra, en observant que $\frac{dY}{dx} = 0$,

$$P = \frac{\varphi(Y)}{\sqrt{1 + \frac{Y\,\varphi'(Y)}{\varphi(Y)}}}.$$

Si $\varphi(y) = y^n$, en sorte que l'événement futur soit n fois la répétition de l'événement observé, on aura

$$P = \frac{Y^n}{\sqrt{n+1}}.$$

La probabilité P, calculée dans la supposition que la possibilité des événements simples est égale à celle qui rend le résultat observé le plus probable, est Y^n; on voit ainsi que les petites erreurs qui résultent de cette supposition s'accumulent à raison des événements simples qui entrent dans le résultat futur, et deviennent très sensibles lorsque ces événements sont en grand nombre.

33. Depuis 1745, époque où l'on a commencé à distinguer à Paris sur les registres les baptêmes des garçons de ceux des filles, on a constamment observé que le nombre des premiers a été supérieur à celui des seconds. Déterminons la probabilité que cette supériorité se maintiendra pendant un temps donné, par exemple, dans l'espace d'un siècle.

Soient p le nombre observé des baptêmes des garçons, q celui des filles, $2n$ le nombre des baptêmes annuels, x la probabilité que l'enfant qui va naître et être baptisé sera un garçon. En élevant $x+(1-x)$ à la puissance $2n$ et développant cette puissance, on aura

$$x^{2n}+2nx^{2n-1}(1-x)+\frac{2n(2n-1)}{1.2}x^{2n-2}(1-x)^2+\ldots.$$

La somme des n premiers termes de ce développement sera la probabilité que chaque année le nombre des baptêmes des garçons l'emportera sur celui des baptêmes des filles. Nommons z cette somme; z^i sera la probabilité que cette supériorité se maintiendra pendant le nombre i d'années consécutives; donc, si l'on désigne par P la probabilité entière que cela aura lieu, on aura, par le numéro précédent,

$$P=\frac{\int x^p\,dx\,z^i(1-x)^q}{\int x^p\,dx(1-x)^q},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$.

Si l'on nomme a la valeur de x qui rend $x^p z^i(1-x)^q$ un maximum et que l'on désigne par Z, $\frac{dZ}{dx}$, $\frac{d^2Z}{dx^2}$ ce que deviennent z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, lorsqu'on y change x en a, on aura, par le n° 26,

$$\int x^p\,dx\,z^i(1-x)^q=\frac{a^{p+1}(1-a)^{q+1}Z^i\sqrt{2\pi}}{\sqrt{p(1-a)^2+qa^2+ia^2(1-a)^2\dfrac{dZ^2-Z\,d^2Z}{Z^2dx^2}}}.$$

z étant la somme des n premiers termes de la fonction

$$x^{2n}\left[1+2n\frac{1-x}{x}+\frac{2n(2n-1)}{1.2}\frac{(1-x)^2}{x^2}+\ldots\right],$$

on a, par le n° 37 du Livre I^{er},

$$z=\frac{\displaystyle\int\frac{u^{n-1}\,du}{(1+u)^{2n+1}}}{\displaystyle\int\frac{u^{n-1}\,du}{(1+u)^{2n+1}}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $u=\frac{1-x}{x}$ jusqu'à $u=\infty$, et celle du dénominateur étant prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \infty$.

Soit $u = \frac{1-s}{s}$; cette valeur de z deviendra

$$z = \frac{\int s^n ds (1-s)^{n-1}}{\int s^n ds (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = x$, et celle du dénominateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$. De là on tire

$$\frac{dz}{z\,dx} = \frac{x^n (1-x)^{n-1}}{\int s^n ds (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = x$. On aura ensuite

$$\frac{d^2 z}{z\,dx^2} = \frac{dz}{z\,dx}\,\frac{n-(2n-1)x}{x(1-x)}.$$

En changeant x en a dans ces expressions, on aura celles de Z, $\frac{dZ}{Z\,dx}$, $\frac{d^2 Z}{Z\,dx^2}$.

Pour déterminer a, nous observerons que la condition du maximum de $x^p z^i (1-x)^q$ donne

$$0 = \frac{p}{a} - \frac{q}{1-a} + i\,\frac{dZ}{Z\,dx},$$

d'où l'on tire, en substituant pour $\frac{dZ}{Z\,dx}$ sa valeur précédente,

$$a = \frac{p}{p+q} + \frac{i a^{n+1} (1-a)^n}{(p+q) \int s^n ds (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = a$. Pour conclure a de cette équation, nous observerons que la valeur de s qui rend $s^n (1-s)^{n-1}$ un maximum est à très peu près $\frac{1}{2}$, et par conséquent moindre que $\frac{p}{p+q}$, qui lui-même est plus petit que a. Ainsi, n étant supposé un grand nombre, on peut, sans erreur sensible, étendre l'intégrale de cette expression de a, depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$, le terme qui en dépend étant très petit. Cela donne, par le n° 28,

$$\int s^n\,ds(1-s)^{n-1} = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{(2n-1)^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}\sqrt{n}}.$$

L'équation qui détermine a devient ainsi, à fort peu près,

$$a = \frac{p}{p+q} + \frac{ia^{n+1}(1-a)^n 2^{2n}\sqrt{n}}{(p+q)\sqrt{\pi}}.$$

Pour la résoudre, nous observerons que a diffère très peu de $\frac{p}{p+q}$, en sorte que, si l'on fait

$$a = \frac{p}{p+q} + \mu,$$

μ sera fort petit, et l'on aura, d'une manière très approchée,

$$(1) \qquad \mu = i\sqrt{n}\,\frac{p\left[1-\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2\right]^n}{(p+q)^2\sqrt{\pi}}\,c^{-\frac{n\mu(p+q)(p-q)}{pq}-\frac{(p+q)^2 n\mu^2}{pq}};$$

on aura ensuite, à très peu près,

$$a^p(1-a)^q = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p\left(\frac{q}{p+q}\right)^q c^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\mu^2}.$$

En substituant dans le radical

$$\sqrt{p(1-a)^2 + qa^2 + ia^2(1-a)^2\frac{dZ^2 - Z\,d^2Z}{Z^2\,dx^2}},$$

pour a sa valeur $\frac{p}{p+q} + \mu$, pour $\frac{dZ}{Z\,dx}$ sa valeur $\frac{(p+q)a-p}{ia(1-a)}$ ou $\frac{(p+q)\mu}{ia(1-a)}$, et pour $\frac{d^2Z}{Z\,dx^2}$ sa valeur $\frac{dZ}{Z\,dx}\,\frac{n-(2n-1)a}{a(1-a)}$, ce radical devient à fort peu près

$$\sqrt{\frac{pq}{p+q}}\sqrt{1+\frac{(p+q)\mu}{pq}[n(p-q)-p]+\frac{(p+q)^2}{pq}\mu^2\left(2n+\frac{p+q}{i}\right)}.$$

Enfin on a, par le n° 28,

$$\int x^p dx (1-x)^q = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q \sqrt{\frac{pq}{p+q}} \frac{\sqrt{2\pi}}{p+q}.$$

Cela posé, l'expression de P deviendra à très peu près

$$(2) \quad P = \frac{Z^i c^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\mu^2}}{\sqrt{1 + \frac{(p+q)\mu}{pq}[n(p-q)-p] + \frac{(p+q)^2\mu^2}{pq}\left(2n + \frac{p+q}{i}\right)}}.$$

Il ne s'agit donc plus que de déterminer Z. On a

$$Z = \frac{\int s^n ds (1-s)^{n-1}}{\int s^n ds (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = a$, et celle du dénominateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$. Il est facile d'en conclure que l'on a

$$Z = 1 - \frac{\int s^n ds (1-s)^{n-1}}{\int s^n ds (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s = a$ jusqu'à $s = 1$ et celle du dénominateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$; on aura ainsi, à fort peu près, par le n° 29,

$$(3) \quad Z = 1 - \frac{\int dt\, c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale relative à t étant prise depuis

$$t^2 = \frac{2n-1}{2n(n-1)}\left[\frac{n(p-q)}{p+q} - \frac{p}{p+q} + (2n-1)\mu\right]^2,$$

jusqu'à $t^2 = \infty$.

Pour appliquer des nombres à ces formules, nous observerons que, par ce qui précède, dans l'intervalle du commencement de 1745 à la fin de 1784, on a par le n° 28, relativement à Paris,

$$p = 393386, \qquad q = 377555.$$

En divisant par 40 la somme de ces deux nombres, on aura 19273,5 pour le nombre moyen des baptêmes annuels, ce qui donne $n = 9636,75$; nous supposerons de plus $i = 100$. Au moyen de ces valeurs on déterminera celle de μ par l'équation (1); on déterminera ensuite la valeur de Z par l'équation (3); enfin l'équation (2) donnera la valeur de P. On trouvera ainsi

$$P = 0,782.$$

Il y avait donc à la fin de 1784, d'après ces données, près de quatre contre un à parier que, dans l'espace d'un siècle, les baptêmes de garçons à Paris l'emporteront, chaque année, sur ceux des filles.

CHAPITRE VII.

DE L'INFLUENCE DES INÉGALITÉS INCONNUES QUI PEUVENT EXISTER ENTRE DES CHANCES QUE L'ON SUPPOSE PARFAITEMENT ÉGALES.

34. J'ai déjà considéré cette influence dans le n° 1, où l'on a vu que ces inégalités augmentent la probabilité des événements composés de la répétition des événements simples. Je vais reprendre ici cet objet important dans les applications de l'analyse des probabilités.

Il résulte du numéro cité que si, au jeu de *croix* et *pile*, il existe une différence inconnue entre les possibilités d'amener l'un ou l'autre, en nommant α cette différence, en sorte que $\frac{1\pm\alpha}{2}$ soit la possibilité d'amener *croix*, et par conséquent $\frac{1\mp\alpha}{2}$ celle d'amener *pile*, celui des deux signes $+$ et $-$ que l'on doit adopter étant inconnu, la probabilité d'amener *croix* n fois de suite sera

$$\frac{(1+\alpha)^n+(1-\alpha)^n}{2^{n+1}}$$

ou

$$\frac{1}{2^n}\left[1+\frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\alpha^4+\ldots\right]. \tag{1}$$

Le jeu de *croix* et *pile* consiste, comme on sait, à projeter en l'air une pièce très mince, qui retombe nécessairement sur l'une de ses deux faces opposées que l'on nomme *croix* et *pile*. On peut diminuer la valeur de α, en rendant ces deux faces le plus égales qu'il est possible. Mais il est physiquement impossible d'obtenir une égalité parfaite, et alors celui qui parie d'amener *croix* deux fois de suite ou *pile* deux fois de suite a de l'avantage sur celui qui parie que, dans deux coups, *croix* et *pile* alterneront, sa probabilité étant $\frac{1+\alpha^2}{2}$.

On peut diminuer l'influence de l'inégalité des deux faces de la pièce, en les soumettant elles-mêmes aux chances du hasard. Désignons par A cette pièce, et concevons une seconde pièce B semblable à la première. Supposons qu'après avoir projeté cette seconde pièce, on projette la pièce A pour former un premier coup, et déterminons la probabilité que dans n coups pareils consécutifs, la pièce A présentera les mêmes faces que la pièce B. Si l'on nomme p la probabilité d'amener *croix* avec la pièce A et q la probabilité d'amener *pile;* si l'on désigne ensuite par p' et q' les mêmes probabilités pour la pièce B, $pp'+qq'$ sera la probabilité que dans un coup la pièce A présentera les mêmes faces que la pièce B. Ainsi $(pp'+qq')^n$ sera la probabilité que cela aura lieu constamment dans n coups. Soit

$$p=\frac{1+\alpha}{2},\qquad q=\frac{1-\alpha}{2},$$

$$p'=\frac{1+\alpha'}{2},\qquad q'=\frac{1-\alpha'}{2};$$

on aura

$$(pp'+qq')^n=\frac{1}{2^n}(1+\alpha\alpha')^n.$$

Mais, comme on ignore quelles sont les faces que les inégalités α et α' favorisent, la probabilité précédente peut être également ou $\frac{1}{2^n}(1+\alpha\alpha')^n$ ou $\frac{1}{2^n}(1-\alpha\alpha')^n$, suivant que α et α' sont de même signe ou de signes contraires. La vraie valeur de cette probabilité est donc, α et α' étant supposés positifs,

$$\frac{1}{2^{n+1}}[(1+\alpha\alpha')^n+(1-\alpha\alpha')^n]$$

ou

$$\frac{1}{2^n}\left[1+\frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2\alpha'^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\alpha^4\alpha'^4+\ldots\right].$$

Si l'on compare cette formule à la formule (1), on voit qu'elle se rapproche plus qu'elle de $\frac{1}{2^n}$, ou de la probabilité qui aurait lieu si les faces des pièces étaient parfaitement égales. Ainsi l'inégalité de ces faces est par là corrigée en grande partie; elle le serait même en totalité, si α' était nul, ou si les deux faces de la pièce B étaient parfaitement égales.

p représentant la probabilité de *croix* avec la pièce A, et q celle de *pile*, la probabilité d'amener *croix* un nombre impair de fois dans n coups sera

$$\tfrac{1}{2}[(p+q)^n \mp (p-q)^n],$$

le signe $-$ ayant lieu si n est pair, et le signe $+$ ayant lieu si n est impair. Faisant $p = \frac{1+\alpha}{2}$, $q = \frac{1-\alpha}{2}$, la fonction précédente devient

$$\tfrac{1}{2}(1 \mp \alpha^n).$$

Si n est impair et égal à $2i+1$, cette fonction est

$$\tfrac{1}{2}(1+\alpha^{2i+1});$$

mais, comme on peut y supposer également α positif ou négatif, il faut prendre la moitié de la somme de ses deux valeurs relatives à ces suppositions, ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour sa véritable valeur; l'inégalité des faces de la pièce ne change donc point alors la probabilité $\frac{1}{2}$ d'amener *croix* un nombre impair de fois. Mais, si n est pair et égal à $2i$, cette probabilité devient

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}(1-\alpha^{2i}),$$

$\pm\alpha$ étant l'inégalité inconnue de probabilité entre *croix* et *pile;* il y a donc du désavantage à parier d'amener *croix* ou *pile* un nombre impair de fois dans $2i$ coups, et par conséquent il y a de l'avantage à parier d'amener l'un ou l'autre un nombre pair de fois.

On peut diminuer ce désavantage en changeant le pari d'amener *croix* un nombre impair de fois en $2i$ coups, dans le pari d'amener dans le même nombre de coups un nombre impair de ressemblances entre les faces des deux pièces A et B, projetées comme on l'a dit ci-dessus. En effet, la probabilité d'une ressemblance à chaque coup est, comme on l'a vu, $pp' + qq'$, et la probabilité d'une dissemblance est $pq' + p'q$. Nommons P la première de ces deux quantités et Q la seconde; la probabilité d'amener un nombre impair de ressemblances dans $2i$ coups sera

$$\tfrac{1}{2}[(P+Q)^{2i} - (P-Q)^{2i}].$$

Si l'on fait, comme précédemment,

$$p = \frac{1+\alpha}{2}, \qquad q = \frac{1-\alpha}{2}, \qquad p' = \frac{1+\alpha'}{2}, \qquad q' = \frac{1-\alpha'}{2},$$

on aura

$$P = \frac{1+\alpha\alpha'}{2}, \qquad Q = \frac{1-\alpha\alpha'}{2};$$

la fonction précédente devient ainsi

$$\tfrac{1}{2}(1 - \alpha^{2i}\alpha'^{2i}).$$

Cette fonction reste la même, quelque changement que l'on fasse dans les signes de α et de α'; elle est donc la vraie probabilité d'amener un nombre impair de ressemblances; mais, α et α' étant de petites fractions, on voit qu'elle se rapproche de $\frac{1}{2}$ plus que la formule (2); le désavantage d'un nombre impair est donc par là diminué.

On voit par ce qui précède que l'on peut diminuer l'influence des inégalités inconnues entre des chances que l'on suppose égales, en les soumettant elles-mêmes au hasard. Par exemple, si l'on met dans une urne les numéros 1, 2, 3, ..., n suivant cet ordre, et qu'ensuite, après avoir agité l'urne pour bien mêler ces numéros, on en tire un; s'il y a entre les probabilités de sortie des numéros une petite différence dépendant de l'ordre suivant lequel ils ont été placés dans l'urne, on la diminuera considérablement en mettant dans une seconde urne ces numéros, suivant leur ordre de sortie de la première urne, et en agitant ensuite cette seconde urne, pour en bien mêler les numéros. Alors l'ordre suivant lequel on a placé les numéros dans la première urne aura extrêmement peu d'influence sur l'extraction du premier numéro qui sortira de la seconde urne. On diminuerait encore cette influence, en considérant de la même manière une troisième urne, une quatrième, etc.

Considérons deux joueurs A et B jouant ensemble, de manière qu'à chaque coup celui qui perd donne un jeton à son adversaire, et que la partie dure jusqu'à ce que l'un d'eux ait gagné tous les jetons de l'autre. Soient p et q leurs adresses respectives, a et b leurs nombres de jetons en commençant. Il résulte de la formule (H) du n° 10, en y faisant i infini, que la probabilité de A pour gagner la partie est

$$\frac{p^b(p^a - q^a)}{p^{a+b} - q^{a+b}}.$$

Si l'on fait dans cette expression

$$p = \frac{1 \pm \alpha}{2}, \qquad q = \frac{1 \mp \alpha}{2},$$

on aura, en prenant le signe supérieur, la probabilité relative au cas où A est plus fort que B, et, en prenant le signe inférieur, on aura la probabilité relative au cas où A est moins fort que B. Si l'on ignore quel est le plus fort des joueurs, la demi-somme de ces deux probabilités sera la probabilité de A, que l'on trouve ainsi égale à

$$(3) \qquad \frac{\frac{1}{2}[(1+\alpha)^a - (1-\alpha)^a][(1+\alpha)^b + (1-\alpha)^b]}{(1+\alpha)^{a+b} - (1-\alpha)^{a+b}};$$

en changeant a en b et réciproquement, on aura la probabilité de B. Si l'on suppose α infiniment petit ou nul, ces probabilités deviennent $\frac{a}{a+b}$ et $\frac{b}{a+b}$; elles sont donc proportionnelles aux nombres des jetons des joueurs; ainsi, pour l'égalité du jeu, leurs mises doivent être dans ce rapport. Mais alors l'inégalité qui peut exister entre eux est favorable au joueur qui a le plus petit nombre de jetons; car, si l'on suppose a moindre que b, il est facile de voir que l'expression (3) est plus grande que $\frac{a}{a+b}$. Si les joueurs conviennent de doubler, de tripler, etc.

leurs jetons, l'avantage de A augmente sans cesse, et, dans le cas de a et b infinis, sa probabilité devient $\frac{1}{2}$ ou la même que celle de B.

P étant la probabilité d'un événement composé de deux événements simples dont p et $1-p$ sont les probabilités respectives, si l'on suppose que la valeur de p soit susceptible d'une inégalité inconnue z qui puisse s'étendre depuis $-\alpha$ jusqu'à $+\alpha$, en nommant φ la probabilité de $p+z$, φ étant fonction de z, on aura, pour la vraie probabilité de l'événement composé,

$$\frac{\int P'\varphi\,dz}{\int \varphi\,dz},$$

P' étant ce que devient P lorsqu'on y change p dans $p+z$, et les intégrales étant prises depuis $z=-\alpha$ jusqu'à $z=\alpha$.

Si l'on n'a d'autres données pour déterminer z qu'un événement observé, formé des mêmes événements simples, en nommant Q la probabilité de cet événement, $p+z$ et $1-p-z$ étant les probabilités des événements simples, l'expression précédente donne, en y changeant φ en Q, pour la probabilité de l'événement composé,

$$\frac{\int P'Q\,dz}{\int Q\,dz},$$

les intégrales étant prises ici depuis $z=-p$ jusqu'à $z=1-p$; ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé dans le Chapitre précédent.

CHAPITRE VIII.

DES DURÉES MOYENNES DE LA VIE, DES MARIAGES ET DES ASSOCIATIONS QUELCONQUES.

35. Supposons que l'on ait suivi sur un très grand nombre n d'enfants la loi de mortalité, depuis leur naissance jusqu'à leur extinction totale; on aura leur vie moyenne, en faisant une somme des durées de toutes leurs vies et en la divisant par le nombre n. Si ce nombre était infini, on aurait exactement la durée de la vie moyenne. Cherchons la probabilité que la vie moyenne des n enfants ne s'écartera de celle-ci que dans des limites données.

Désignons par $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ la probabilité de mourir à l'âge x, a étant la limite de x, a et x étant supposés renfermer un nombre infini de parties prises pour l'unité. Considérons la puissance

$$\left[\begin{array}{l}\varphi\left(\frac{0}{a}\right)+\varphi\left(\frac{1}{a}\right)c^{-\varpi\sqrt{-1}}+\varphi\left(\frac{2}{a}\right)c^{-2\varpi\sqrt{-1}}+\ldots\\ \qquad +\varphi\left(\frac{x}{a}\right)c^{-x\varpi\sqrt{-1}}+\ldots+\varphi\left(\frac{a}{a}\right)c^{-a\varpi\sqrt{-1}}\end{array}\right]^n.$$

Il est visible que le coefficient de $c^{-(l+n\mu)\varpi\sqrt{-1}}$, dans le développement de cette puissance, est la probabilité que la somme des âges auxquels les n enfants parviendront sera $l+n\mu$; en multipliant donc par $c^{(l+n\mu)\varpi\sqrt{-1}}$ la puissance précédente, le terme indépendant des puissances de $c^{\pm\varpi\sqrt{-1}}$ dans le produit sera cette probabilité, qui, par conséquent, est égale à

$$(1)\quad \frac{1}{2\pi}\int d\varpi\, c^{l\varpi\sqrt{-1}}\left\{c^{\mu\varpi\sqrt{-1}}\left[\begin{array}{l}\varphi\left(\frac{0}{a}\right)+\varphi\left(\frac{1}{a}\right)c^{-\varpi\sqrt{-1}}+\ldots+\varphi\left(\frac{x}{a}\right)c^{-x\varpi\sqrt{-1}}\\ \qquad+\ldots+\varphi\left(\frac{a}{a}\right)c^{-a\varpi\sqrt{-1}}\end{array}\right]\right\}^n,$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi=-\pi$ jusqu'à $\varpi=\pi$.

Si l'on prend dans cette intégrale le logarithme hyperbolique de la quantité sous le signe $\int$, élevée à la puissance n, on aura, en développant les exponentielles en séries, ce logarithme égal à

$$(2)\quad n\mu\varpi\sqrt{-1}+n\log\left[\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)-\varpi\sqrt{-1}\int x\,\varphi\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{\varpi^2}{2}\int x^2\,\varphi\left(\frac{x}{a}\right)+\ldots\right];$$

le signe $\int$ se rapportant ici à toutes les valeurs de x, depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$. Si l'on fait $\frac{x}{a}=x'$, et si l'on observe que, la variation de x étant l'unité, on a $a\,dx'=1$, on aura

$$\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)=a\int dx'\,\varphi(x'),$$

$$\int x\,\varphi\left(\frac{x}{a}\right)=a^2\int x'\,dx'\,\varphi(x'),$$

$$\int x^2\,\varphi\left(\frac{x}{a}\right)=a^3\int x'^2\,dx'\,\varphi(x'),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les intégrales relatives à x' étant prises depuis $x'=0$ jusqu'à $x'=1$. Nommons $k, k', k'', \ldots$ ces intégrales successives; la probabilité que la durée de la vie d'un enfant sera comprise dans les limites zéro et a est $\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ ou $a\int dx'\varphi(x')$; or cette probabilité est la certitude elle-même; on a donc $ak=1$. Cela posé, la fonction (2) devient

$$n\mu\varpi\sqrt{-1}+n\log\left(1-\frac{k'}{k}a\varpi\sqrt{-1}-\frac{k''}{k}\frac{a^2\varpi^2}{2}+\ldots\right)$$

ou

$$\left(\frac{n\mu}{a}-\frac{nk'}{k}\right)a\varpi\sqrt{-1}-n\frac{kk''-k'^2}{2k^2}a^2\varpi^2-\ldots.$$

Si l'on fait

$$\mu = \frac{ak'}{k} = \frac{a^2 k'}{ak} = a^2 k',$$

la première puissance de ϖ disparaît, et de plus, n étant supposé un très grand nombre, on peut s'arrêter à la seconde puissance de ϖ; la fonction (1) devient ainsi, en repassant des logarithmes aux nombres,

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varpi\, c^{l\varpi\sqrt{-1} - n\frac{kk''-k'^2}{2k^2}a^2\varpi^2}.$$

Si l'on fait

$$6^2 = \frac{k^2}{2(kk''-k'^2)}, \qquad t = \frac{a\varpi\sqrt{n}}{26} - \frac{6l\sqrt{-1}}{a\sqrt{n}},$$

cette intégrale devient, en la prenant depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$,

$$\frac{6}{a\sqrt{n\pi}}\, c^{-\frac{6^2 l^2}{a^2 n}}.$$

En la multipliant par dl, et faisant $l = ar\sqrt{n}$, on aura

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int 6\, dr\, c^{-6^2 r^2}$$

pour la probabilité que la somme des âges auxquels les n enfants parviendront sera comprise dans les limites $na^2k' \pm ar\sqrt{n}$.

La quantité a^2k' ou $\int x\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ est la somme des produits de chaque âge par la probabilité d'y parvenir; elle est donc la vraie durée de la vie moyenne; ainsi la probabilité que la somme des âges auxquels les n enfants cesseront de vivre, divisée par leur nombre, est comprise dans ces limites

Vraie durée de la vie moyenne, plus ou moins $\frac{ar}{\sqrt{n}}$,

a pour expression

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int 6\, dr\, c^{-6^2 r^2}.$$

La valeur moyenne de r, en plus ou en moins, est, par le n° 20,

$$\pm \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int 6 r\, dr\, c^{-6^2 r^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = 0$ jusqu'à r infini. En la multipliant par $\frac{a}{\sqrt{n}}$, on aura l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, lorsqu'on prend pour durée moyenne de la vie la somme des âges qu'ont vécu les n enfants considérés ci-dessus, divisée par n, quotient que nous désignerons par G ; cette erreur est donc

$$\pm \frac{a}{2 6 \sqrt{n\pi}}.$$

On a, à très peu près,

$$a^2 k' = \mathrm{G},$$

et, comme $ak = 1$, on aura

$$\frac{k'}{k} = \frac{\mathrm{G}}{a}.$$

Si l'on nomme ensuite H la somme des carrés des âges qu'ont vécu les n enfants, divisée par n, on trouvera, par l'analyse du n° 19,

$$\frac{k''}{k} a^2 = \mathrm{H};$$

ces valeurs donnent

$$6^2 = \frac{a^2}{2(\mathrm{H} - \mathrm{G}^2)};$$

l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur la durée de la vie devient ainsi

$$\pm \frac{\sqrt{\mathrm{H} - \mathrm{G}^2}}{\sqrt{2 n \pi}}.$$

Il est clair que ces résultats ont également lieu relativement à la durée moyenne de ce qui reste à vivre, lorsque, au lieu de partir de l'époque de la naissance, on part d'une époque quelconque de la vie.

On peut facilement déterminer, au moyen des Tables de mortalité, formées d'année en année, la durée moyenne de ce qui reste à vivre à une personne dont l'âge est d'un nombre entier A d'années. Pour cela, on ajoutera tous les nombres de la Table qui suivent celui qui correspond à l'âge A; on divisera la somme par ce dernier nombre, et l'on ajoutera $\frac{1}{2}$ au quotient. En effet, si l'on désigne par $(1), (2), (3), \ldots$ les nombres de la Table, correspondants à l'année A et aux années suivantes, le nombre des individus qui meurent dans la première année, à partir de l'année A, sera $(1) - (2)$; mais, dans ce court intervalle, la mortalité peut être supposée constante; $\frac{1}{2}[(1) - (2)]$ est donc la somme des durées de leur vie, à partir de l'âge A. Pareillement $\frac{3}{2}[(2) - (3)]$, $\frac{5}{2}[(3) - (4)]$, ... sont les sommes des durées de la vie, à partir du même âge, de ceux qui meurent dans les deuxième, troisième, etc., années comptées depuis l'année A. La réunion de toutes ces sommes est $\frac{(1)}{2} + (2) + (3) + (4) + \ldots$; et, en la divisant par (1), on aura la durée moyenne de ce qui reste à vivre à la personne de l'âge A. On formera ainsi une Table des durées moyennes de ce qui reste à vivre aux différents âges. On pourra même conclure ces durées les unes des autres, en observant que, si F désigne cette durée pour l'âge A, et F′ la durée correspondante à l'âge A + 1, on a

$$F = \frac{(2)}{(1)}\left(F' + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}.$$

36. Déterminons maintenant la durée moyenne de la vie qui aurait lieu, si l'une des causes de mortalité venait à s'éteindre. Soit U le nombre des enfants qui, sur le nombre n de naissances, vivraient encore à l'âge x dans cette hypothèse, u étant celui des enfants vivants à cet âge sur le même nombre de naissances, dans le cas où cette cause de mortalité subsiste. Nommons $z\,\Delta x$ la probabilité qu'un individu de l'âge x périra de cette maladie dans l'intervalle de temps très court Δx; $uz\,\Delta x$ sera, à très peu près, par le n° 25, le nombre des individus u qui périront de cette maladie dans l'intervalle de temps Δx, si ce nombre est considérable. Pareillement, si l'on désigne par $\varphi\,\Delta x$ la probabilité qu'un individu de l'âge x périra par les autres causes de mortalité dans l'intervalle Δx, $u\varphi\,\Delta x$ sera le nombre des individus qui périront

par ces causes, dans l'intervalle de temps Δx; ce sera donc la valeur de $-\Delta u$; j'affecte Δu du signe $-$, parce que u diminue à mesure que x augmente; on a donc

$$-\Delta u = u\,\Delta x(\varphi + z).$$

On aura pareillement

$$-\Delta \mathrm{U} = \mathrm{U}\varphi\,\Delta x.$$

En éliminant φ de ces deux équations, on aura

$$\frac{\Delta \mathrm{U}}{\mathrm{U}} = \frac{\Delta u}{u} + z\,\Delta x.$$

Δx étant une quantité très petite, on peut transformer la caractéristique Δ dans la caractéristique différentielle d, et alors l'équation précédente devient

$$\frac{d\mathrm{U}}{\mathrm{U}} = \frac{du}{u} + z\,dx;$$

d'où l'on tire, en intégrant et observant qu'à l'âge zéro $\mathrm{U} = u = n$,

$$\mathrm{U} = u\,c^{\int z\,dx}, \tag{3}$$

l'intégrale étant prise depuis x nul. On peut obtenir cette intégrale, au moyen des registres de mortalité, dans lesquels on tient compte de l'âge des individus morts et des causes de leur mort. En effet, $uz\,\Delta x$ étant, par ce qui précède, le nombre de ceux qui, parvenus à l'âge x, ont péri dans l'intervalle de temps Δx, par la maladie dont il s'agit, on aura à très peu près l'intégrale $\int z\,dx$, en supposant Δx égal à une année, et en prenant depuis la naissance des n enfants que l'on a considérés, jusqu'à l'année x, la somme des fractions qui ont pour numérateur le nombre des individus que la maladie a fait périr chaque année, et pour dénominateur, le nombre des n enfants qui vivent encore au milieu de la même année. Ainsi l'on pourra transformer, au moyen de l'équation (3), une Table de mortalité ordinaire, dans celle qui aurait lieu si la maladie dont il s'agit n'existait pas.

La petite vérole a cela de particulier, savoir, que le même individu n'en est jamais deux fois atteint, ou du moins ce cas est si rare, que, s'il existe, on peut en faire abstraction. Concevons que, sur un très grand nombre n d'enfants, u parviennent à l'âge x, et que, dans le nombre u, y n'aient point eu la petite vérole. Concevons encore que sur ce nombre y, $iy\,dx$ prennent cette maladie dans l'instant dx, et que, sur ce nombre, $iry\,dx$ périssent de cette maladie. En désignant, comme ci-dessus, par φ la probabilité de périr à l'âge x par d'autres causes, on aura évidemment

$$du = -u\varphi\,dx - iry\,dx.$$

On aura ensuite

$$dy = -y\varphi\,dx - iy\,dx.$$

En effet, y diminue par le nombre de ceux qui, dans l'instant dx, prennent la petite vérole, et ce nombre est, par la supposition, $iy\,dx$; y diminue encore par le nombre des individus compris dans y, qui périssent par d'autres causes, et ce nombre est $y\varphi\,dx$.

Maintenant, si de la première des deux équations précédentes, multipliée par y, on retranche la seconde multipliée par u, et si l'on divise la différence par y^2, on aura

$$d\frac{u}{y} = i\frac{u}{y}\,dx - ir\,dx,$$

ce qui donne, en intégrant depuis x nul, et observant qu'à cette origine $u = y = n$,

$$\frac{u}{y} = \left(1 - \int ir\,dx\, c^{-\int i\,dx}\right) c^{\int i\,dx}; \tag{4}$$

cette équation fera connaître le nombre d'individus de l'âge x qui n'ont point encore eu la petite vérole. On a ensuite

$$z\,dx = \frac{iry\,dx}{u},$$

$uz\,dx$ étant, comme ci-dessus, le nombre de ceux qui périssent dans le temps dx, de la maladie que l'on considère. En substituant, au lieu de $\frac{r}{u}$, sa valeur précédente, on aura, après avoir intégré,

$$c^{\int z\,dx} = \frac{1}{1 - \int ir\,dx\,c^{-\int i\,dx}};$$

l'équation (3) donnera donc

$$(5) \qquad U = \frac{u}{1 - \int ir\,dx\,c^{-\int i\,dx}}.$$

Cette valeur de U suppose que l'on connaît par l'observation i et r. Si ces nombres étaient constants, il serait facile de les déterminer; mais, comme ils peuvent varier d'âge en d'âge, les éléments de la formule (3) sont plus aisés à connaître, et cette formule me semble plus propre à déterminer la loi de mortalité qui aurait lieu, si la petite vérole était éteinte. En lui appliquant les données que l'on a pu se procurer sur la mortalité causée par cette maladie, aux divers âges de la vie, on trouve que son extinction au moyen de la vaccine augmenterait de plus de trois années la durée de la vie moyenne, si d'ailleurs cette durée n'était point restreinte par la diminution relative des subsistances, due à un plus grand accroissement de population.

37. Considérons présentement la durée moyenne des mariages. Pour cela concevons un grand nombre n de mariages entre n garçons de l'âge a, et n filles de l'âge a'; et déterminons le nombre de ces mariages subsistants après x années écoulées depuis leur origine. Nommons φ la probabilité qu'un garçon qui se marie à l'âge a parviendra à l'âge $a+x$; et ψ la probabilité qu'une fille qui se marie à l'âge a' parviendra à l'âge $a'+x$. La probabilité que leur mariage subsistera après sa $x^{\text{ième}}$ année sera $\varphi\psi$; donc, si l'on développe le binôme $[\varphi\psi + (1-\varphi\psi)]^n$, le terme $H(\varphi\psi)^i(1-\varphi\psi)^{n-i}$ de ce développement exprimera la probabilité que, sur les n mariages, i subsisteront après x années. Le plus grand terme du développement est, par le n° 16, celui dans lequel i est égal au plus grand nombre entier contenu dans $(n+1)\varphi\psi$; et, par le même numéro, il est extrêmement probable que le nombre des mariages subsistants ne s'écartera que très peu en plus ou en moins de

ce nombre. Ainsi, en désignant par i le nombre des mariages subsistants, on pourra supposer, à très peu près,

$$i = n\varphi\psi.$$

$n\varphi$ est à fort peu près le nombre des n maris vivants à l'âge $a + x$. Les Tables de mortalité le feront connaître d'une manière fort approchée, si elles ont été formées sur des listes nombreuses de mortalité; car, si l'on désigne par p' le nombre des hommes vivants à l'âge a, sur l'ensemble de ces listes, et par q' le nombre des survivants à l'âge $a + x$, on aura, à fort peu près, par le n° 29,

$$n\varphi = \frac{nq'}{p'}.$$

Si l'on nomme pareillement p'' le nombre des femmes vivantes à l'âge a' et par q'' le nombre des survivantes à l'âge $a' + x$, on aura, à très peu près,

$$n\psi = \frac{nq''}{p''};$$

donc

$$i = \frac{nq'q''}{p'p''}.$$

On formera ainsi, d'année en année, une Table des valeurs de i. En faisant ensuite une somme de tous les nombres de cette Table, et en la divisant par n, on aura la durée moyenne des mariages faits à l'âge a pour les garçons et à l'âge a' pour les filles.

Cherchons maintenant la probabilité que l'erreur de la valeur précédente de i sera comprise dans des limites données. Supposons, pour simplifier le calcul, que les deux conjoints soient du même âge, et que la probabilité de la vie des hommes soit la même que celle des femmes; alors on a

$$a' = a, \qquad q'' = q', \qquad p'' = p', \qquad \varphi = \psi;$$

et l'expression précédente de i devient

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2}.$$

Concevons que la valeur de i soit $\frac{nq'^2}{p'^2}+s$; s sera l'erreur de cette expression de i. On a vu, dans le n° 30, que si l'on a observé que, sur un très grand nombre p d'individus de l'âge a, q sont parvenus à l'âge $a+x$, la probabilité que, sur p' autres individus de l'âge a, $\frac{p'q}{p}+z$ parviendront à l'âge $a+x$, est

$$\sqrt{\frac{p^3}{2qp'(p-q)(p+p')\pi}}\,c^{-\frac{p^3z^2}{2qp'(p-q)(p+p')}}.$$

Si l'on suppose p et q infinis, on aura évidemment

$$\varphi=\frac{q}{p},$$

et, si l'on fait

$$\frac{p'q}{p}+z=q',$$

on aura

$$\varphi=\frac{q'}{p'}-\frac{z}{p'},$$

ce qui donne à très peu près, en négligeant le carré $\frac{nz^2}{p'^2}$,

$$n\varphi^2=\frac{nq'^2}{p'^2}-\frac{2nq'z}{p'^2};$$

ainsi la probabilité précédente de z est en même temps la probabilité de cette expression de $n\varphi^2$. Supposons maintenant $i=n\varphi^2+l$; en considérant le binôme $[\varphi^2+(1-\varphi^2)]^n$, la probabilité de cette expression de i est, par le n° 16,

$$\frac{1}{\sqrt{2n\pi\varphi^2(1-\varphi^2)}}\,c^{-\frac{l^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}}.$$

Mais la valeur précédente de i devient, en y substituant pour $n\varphi^2$ sa valeur,

$$i=\frac{nq'^2}{p'^2}-\frac{2nq'z}{p'^2}+l;$$

la probabilité de cette dernière expression de i est égale au produit de celles de i et de z, trouvées ci-dessus; elle est donc égale à

$$\frac{c^{-\frac{z^2}{2p'\varphi(1-\varphi)}-\frac{l^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}}}{2\pi\sqrt{np'\varphi^3(1-\varphi)^2(1+\varphi)}}.$$

Ayant supposé précédemment $i=\frac{nq'^2}{p'^2}+s$, on aura $s=l-\frac{2nq'z}{p'^2}$; en substituant donc pour l sa valeur tirée de cette équation et observant que l'on a à très peu près $\frac{q'}{p'}=\varphi$, on aura, pour la probabilité que la valeur de s sera comprise dans des limites données, l'expression intégrale

$$\frac{\int\int dz\, ds\, c^{-\frac{z^2}{2\varphi(1-\varphi)p'}-\frac{\left(s+\frac{2nq'z}{p'^2}\right)^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}}}{2\pi\sqrt{np'\varphi^3(1-\varphi)^2(1+\varphi)}},$$

l'intégrale relative à z pouvant être prise depuis $z=-\infty$ jusqu'à $z=\infty$. De là, il est facile de conclure, par les méthodes exposées précédemment, que, si l'on fait

$$k^2=\frac{p'}{2n\varphi^2(1-\varphi)[p'+(p'+4n)\varphi]},$$

l'intégrale précédente devient

$$\int\frac{k\, ds}{\sqrt{\pi}}c^{-k^2s^2};$$

ainsi la probabilité que l'erreur de l'expression $i=\frac{nq'^2}{p'^2}$ sera $\pm s$ est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int k\, ds\, c^{-k^2s^2},$$

l'intégrale étant prise depuis s nul.

L'analyse précédente s'applique également à la durée moyenne d'un grand nombre d'associations formées de trois individus ou de quatre individus, etc. Soit n ce nombre, et supposons que tous les associés soient du même âge a au moment de l'association; désignons par p le nombre des individus de la Table de mortalité de l'âge a, et par q le nombre des individus de l'âge $a + x$; le nombre i des associations existantes après x années écoulées depuis l'origine des associations sera à fort peu près

$$i = \frac{nq^r}{p^r},$$

r étant le nombre des individus de chaque association. On trouvera par la même analyse la probabilité que ce nombre sera renfermé dans des limites données. La somme des valeurs de i correspondantes à toutes les valeurs de x, divisée par n, sera la durée moyenne de ce genre d'associations.

CHAPITRE IX.

DES BÉNÉFICES DÉPENDANTS DE LA PROBABILITÉ DES ÉVÉNEMENTS FUTURS.

38. Concevons que l'arrivée d'un événement procure le bénéfice ν, et que sa non-arrivée cause la perte μ. Une personne A attend l'arrivée d'un nombre s d'événements semblables, tous également probables, mais indépendants les uns des autres; on demande quel est son avantage.

Soient q la probabilité de l'arrivée de chaque événement et par conséquent $1-q$ celle de sa non-arrivée; si l'on développe le binôme $[q+(1-q)]^s$, le terme

$$\frac{1.2.3\ldots s}{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots(s-i)}q^i(1-q)^{s-i}$$

de ce développement sera la probabilité que sur les s événements i arriveront. Dans ce cas, le bénéfice de A est $i\nu$, et sa perte est $(s-i)\mu$; la différence est $i(\nu+\mu)-s\mu$; en la multipliant par sa probabilité exprimée par le terme précédent et prenant la somme de ces produits pour toutes les valeurs de i, on aura l'avantage de A, qui, par conséquent, est égal à

$$-s\mu[q+(1-q)]^s+(\nu+\mu)\,\mathrm{S}\,\frac{i.1.2.3\ldots s}{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots(s-i)}q^i(1-q)^{s-i},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i. On a

$$\mathrm{S}\,\frac{i.1.2.3\ldots s}{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots(s-i)}q^i(1-q)^{s-i}$$
$$=\frac{d}{dt}\,\mathrm{S}\,\frac{1.2.3\ldots s}{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots(s-i)}q^it^i(1-q)^{s-i}=\frac{d}{dt}[qt+(1-q)]^s,$$

pourvu que l'on suppose $t=1$, après la différentiation, ce qui réduit ce dernier membre à qs; l'avantage de A est donc $s[q\nu-(1-q)\mu]$. Cet avantage est nul, si $\nu q=\mu(1-q)$, c'est-à-dire, si le bénéfice de l'arrivée de l'événement, multiplié par sa probabilité, est égal à la perte causée par sa non-arrivée, multipliée par sa probabilité. L'avantage devient négatif et se change en désavantage, si le second produit surpasse le premier. Dans tous les cas, l'avantage ou le désavantage de A est proportionnel au nombre s des événements.

On déterminera par l'analyse du n° 16 la probabilité que le bénéfice réel de A sera compris dans des limites données, si s est un grand nombre. Suivant cette analyse, la somme des divers termes du binôme $[q+(1-q)]^s$ compris entre les deux termes distants de $l+1$, de part et d'autre du plus grand, est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int dt\, c^{-t^2}+\frac{1}{\sqrt{2s\pi q(1-q)}}\,c^{-\frac{l^2}{2sq(1-q)}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=\frac{l}{\sqrt{2sq(1-q)}}$. L'exposant de q dans le plus grand terme est à très peu près, par le même numéro, égal à sq, et les exposants de q, correspondants aux termes extrêmes compris dans l'intervalle précédent, sont respectivement $sq-l$ et $sq+l$. Les bénéfices correspondants à ces trois termes sont

$$\begin{aligned}&s[q\nu-(1-q)\mu]-l(\nu+\mu),\\ &s[q\nu-(1-q)\mu],\\ &s[q\nu-(1-q)\mu]+l(\nu+\mu);\end{aligned}$$

en faisant donc $l=r\sqrt{s}$, la probabilité que le bénéfice réel de A n'excédera pas les limites $s[q\nu-(1-q)\mu]\pm r\sqrt{s}(\nu+\mu)$ est égale à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\int dr\, c^{-\frac{r^2}{2q(1-q)}}}{\sqrt{2q(1-q)}}+\frac{1}{\sqrt{2s\pi q(1-q)}}\,c^{-\frac{r^2}{2q(1-q)}},$$

l'intégrale étant prise depuis $r=0$, et le dernier terme pouvant être négligé. On voit par cette formule que si $q\nu-(1-q)\mu$ n'est pas nul, le bénéfice réel augmente sans cesse et devient infiniment grand et certain dans le cas d'un nombre infini d'événements.

On peut étendre, par l'analyse suivante, ce résultat au cas où les probabilités des s événements sont différentes, ainsi que les bénéfices et les pertes qui y sont attachés. Soient $q, q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(s-1)}$ les probabilités respectives de ces événements; $\nu, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \ldots, \nu^{(s-1)}$ les bénéfices que procurent leurs arrivées. On peut, pour simplifier, faire abstraction des pertes que causent leurs non-arrivées, en comprenant dans le bénéfice que procure l'arrivée de chaque événement la quantité que A perdrait par sa non-arrivée, et en retranchant ensuite de l'avantage total de A la somme de ces dernières quantités; car il est facile de voir que cela ne change point la position de A.

Cela posé, considérons le produit

$$\left(1-q+q\,c^{\nu\varpi\sqrt{-1}}\right)\left(1-q^{(1)}+q^{(1)}c^{\nu^{(1)}\varpi\sqrt{-1}}\right)\ldots\left(1-q^{(s-1)}+q^{(s-1)}c^{\nu^{(s-1)}\varpi\sqrt{-1}}\right).$$

Il est clair que la probabilité que la somme des bénéfices sera $f+l'$ est égale au coefficient de $c^{(f+l')\varpi\sqrt{-1}}$ dans le développement de ce produit; elle est donc égale à

$$(a)\quad \frac{1}{2\pi}\int d\varpi\, c^{-(f+l')\varpi\sqrt{-1}}\left(1-q+q\,c^{\nu\varpi\sqrt{-1}}\right)\ldots\left(1-q^{(s-1)}+q^{(s-1)}c^{\nu^{(s-1)}\varpi\sqrt{-1}}\right),$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi=-\pi$ jusqu'à $\varpi=\pi$, et les nombres ν, $\nu^{(1)}$, ... étant supposés, comme on peut le faire, des nombres entiers. Prenons le logarithme du produit

$$(b)\qquad c^{-f\varpi\sqrt{-1}}\left(1-q+q\,c^{\nu\varpi\sqrt{-1}}\right)\ldots\left(1-q^{(s-1)}+q^{(s-1)}c^{\nu^{(s-1)}\varpi\sqrt{-1}}\right);$$

en le développant suivant les puissances de ϖ, il devient

$$\left(\mathrm{S}q^{(i)}\nu^{(i)}-f\right)\varpi\sqrt{-1}-\frac{\varpi^2}{2}\mathrm{S}q^{(i)}\left(1-q^{(i)}\right)\nu^{(i)2}-\ldots,$$

le signe S se rapportant à toutes les valeurs de i, depuis $i=0$ jusqu'à $i=s-1$. La supposition de f égal à $\mathrm{S}q^{(i)}\nu^{(i)}$ fait disparaître la première puissance de ϖ, et la considération de s, un très grand nombre, rend insensibles les termes dépendants des puissances de ϖ, supérieures au carré. En repassant donc des logarithmes aux nombres dans le développement précédent, le produit (b) devient à très peu près

$$c^{-\frac{\varpi^2}{2}\,\mathrm{S}\,q^{(i)}(1-q^{(i)})\nu^{(i)2}},$$

ce qui change l'intégrale (a) dans celle-ci

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varpi\, c^{-l'\varpi\sqrt{-1}-\frac{\varpi^2}{2}\,\mathrm{S}\,q^{(i)}(1-q^{(i)})\nu^{(i)2}}.$$

L'intégrale devant être prise depuis $\varpi=-\pi$ jusqu'à $\varpi=\pi$, et $\mathrm{S}\,q^{(i)}(1-q^{(i)})\nu^{(i)2}$ étant un grand nombre de l'ordre s, il est clair que cette intégrale peut être étendue sans erreur sensible jusqu'aux valeurs infinies positives et négatives de ϖ. En faisant donc

$$\varpi\sqrt{\frac{\mathrm{S}\,q^{(i)}(1-q^{(i)})\nu^{(i)2}}{2}}+\frac{l'\sqrt{-1}}{\sqrt{2\,\mathrm{S}\,q^{(i)}(1-q^{(i)})\nu^{(i)2}}}=t$$

et intégrant depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$, l'intégrale (a) devient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mathrm{S}\,q^{(i)}(1-q^{(i)})\nu^{(i)2}}}\,c^{-\frac{l'^2}{2\,\mathrm{S}\,q^{(i)}(1-q^{(i)})\nu^{(i)2}}}.$$

Si l'on multiplie cette quantité par $2dl'$, et qu'ensuite on l'intègre depuis $l'=0$, cette intégrale sera l'expression de la probabilité que le bénéfice de A sera compris dans les limites $f\pm l'$, ou $\mathrm{S}\,q^{(i)}\nu^{(i)}\pm l'$; en faisant ainsi

$$l'=r\sqrt{2\,\mathrm{S}\,q^{(i)}(1-q^{(i)})\nu^{(i)2}},$$

la probabilité que le bénéfice de A sera compris dans les limites

$$\mathrm{S}\,q^{(i)}\nu^{(i)}\pm r\sqrt{2\,\mathrm{S}\,q^{(i)}(1-q^{(i)})\nu^{(i)2}}$$

est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int dr\, c^{-r^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $r=0$.

Maintenant il faut, par ce qui précède, changer dans les limites précédentes $\nu^{(i)}$ dans $\nu^{(i)}+\mu^{(i)}$ et en retrancher $S\mu^{(i)}$; la probabilité que le bénéfice réel de A sera compris dans les limites

$$S[q^{(i)}\nu^{(i)}-(1-q^{(i)})\mu^{(i)}]\pm r\sqrt{2Sq^{(i)}(1-q^{(i)})(\nu^{(i)}+\mu^{(i)})^2}$$

est donc

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int dr\, c^{-r^2}.$$

On voit par cette formule que, pour peu que l'espérance mathématique de chaque événement surpasse zéro, en multipliant les événements à l'infini, le premier terme de l'expression des limites étant de l'ordre s, tandis que le second n'est que de l'ordre $\sqrt{s}$, le bénéfice réel s'accroît sans cesse et devient à la fois infiniment grand et certain, dans le cas d'un nombre infini d'événements.

39. Considérons maintenant le cas où, à chaque événement, la personne A a un nombre quelconque de chances à espérer ou à craindre. Supposons, par exemple, qu'une urne renferme des boules de diverses couleurs, que l'on tire une boule de cette urne, en la remettant dans l'urne après le tirage, et que le bénéfice de A soit ν si la boule extraite est de la première couleur, qu'il soit ν' si la boule extraite est de la deuxième couleur, qu'il soit ν'' si la boule extraite est de la troisième couleur, et ainsi de suite, les bénéfices devenant négatifs lorsque A est forcé de donner au lieu de recevoir. Nommons $a, a', a'', \ldots$ les probabilités que la boule extraite à chaque tirage sera de la première, ou de de la deuxième, ou de la troisième, etc. couleur, et supposons que l'on ait ainsi s tirages; on aura d'abord

$$a+a'+a''+\ldots=1.$$

En multipliant ensuite les termes du premier membre de cette équation, respectivement par $c^{\nu\varpi\sqrt{-1}}$, $c^{\nu'\varpi\sqrt{-1}}$, $c^{\nu''\varpi\sqrt{-1}}$, ..., le terme indépendant des puissances de $c^{\varpi\sqrt{-1}}$, dans le développement de la fonction

$$c^{-(l+s\mu)\varpi\sqrt{-1}}\left(a\,c^{\nu\varpi\sqrt{-1}}+a'c^{\nu'\varpi\sqrt{-1}}+a''c^{\nu''\varpi\sqrt{-1}}+\ldots\right)^s,$$

sera, par ce qui précède, la probabilité que, dans s tirages, le bénéfice de A sera $s\mu + l$; cette probabilité est donc égale à

$$(c) \qquad \frac{1}{2\pi}\int d\varpi\, c^{-l\varpi\sqrt{-1}}\left[c^{-\mu\varpi\sqrt{-1}}\left(a\, c^{\nu\varpi\sqrt{-1}} + a'\, c^{\nu'\varpi\sqrt{-1}} + \ldots\right)\right]^s,$$

l'intégrale relative à ϖ étant prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$. Si l'on développe par rapport aux puissances de ϖ le logarithme hyperbolique de la quantité élevée à la puissance s sous le signe $\int$, et si l'on observe que $a + a' + a'' + \ldots = 1$, on aura, pour ce logarithme,

$$\begin{aligned}&\varpi\sqrt{-1}\,(a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \ldots - \mu)\\ &-\frac{\varpi^2}{2}\left[a\nu^2 + a'\nu'^2 + a''\nu''^2 + \ldots - (a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \ldots)^2\right] - \ldots.\end{aligned}$$

On fera disparaître la première puissance de ϖ, en faisant

$$\mu = a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \ldots;$$

si l'on suppose ensuite

$$2k^2 = a\nu^2 + a'\nu'^2 + a''\nu''^2 + \ldots - (a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \ldots)^2,$$

et si l'on observe que, s étant supposé un grand nombre, on peut négliger les puissances de ϖ supérieures au carré, on aura, en repassant des logarithmes aux nombres,

$$\left[c^{-\mu\varpi\sqrt{-1}}\left(a\, c^{\nu\varpi\sqrt{-1}} + a'\, c^{\nu'\varpi\sqrt{-1}} + a''\, c^{\nu''\varpi\sqrt{-1}} + \ldots\right)\right]^s = c^{-sk^2\varpi^2},$$

ce qui change l'intégrale (c) dans celle-ci

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varpi\, c^{-l\varpi\sqrt{-1} - sk^2\varpi^2},$$

qui devient, en intégrant comme dans le numéro précédent,

$$\frac{1}{2k\sqrt{s\pi}}\, c^{-\frac{l^2}{4sk^2}}.$$

En la multipliant par $2dl$ et intégrant le produit depuis $l = 0$, on aura la probabilité que le bénéfice réel de A sera compris dans les limites

$$s(a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \ldots) \pm l;$$

en faisant donc

$$l = 2kr'\sqrt{s},$$

cette probabilité sera, en prenant l'intégrale depuis $r' = 0$,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int dr'\, c^{-r'^2}.$$

Nous avons supposé dans ce qui précède les probabilités des événements connues; examinons le cas où elles sont inconnues. Supposons que, sur m événements semblables attendus, n soient arrivés, et que A attende s pareils événements, dont chacun lui procure par son arrivée le bénéfice ν, la non-arrivée lui causant la perte μ. Si l'on représente par $\frac{n}{m}s + z$ le nombre d'événements qui arriveront sur les s événements attendus, la probabilité que z sera contenu dans les limites $\pm kt$ sera par le n° 30

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int dt\, c^{-t^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = 0$, k^2 étant égal à

$$\frac{2ns(m-n)(m+s)}{m^3}.$$

Mais, $\frac{n}{m}s + z$ étant le nombre des événements arrivés, le bénéfice réel de A est

$$\left[\frac{n\nu}{m} - \frac{(m-n)\mu}{m}\right]s + z(\nu + \mu);$$

l'intégrale précédente est donc la probabilité que le bénéfice réel de A sera compris dans les limites

$$\left[\frac{n\nu}{m} - \frac{(m-n)\mu}{m}\right]s \pm kt(\nu + \mu).$$

k est de l'ordre $\sqrt{s}$, si m et n sont d'un ordre égal ou plus grand que s;

ainsi, quelque petite que soit l'espérance mathématique relative à chaque événement, le bénéfice réel devient à l'infini, certain et infiniment grand, lorsque le nombre des événements passés est supposé infini, comme celui des événements futurs.

40. Nous allons maintenant déterminer les bénéfices des établissements fondés sur les probabilités de la vie humaine. La manière la plus simple de calculer ces bénéfices est de les réduire en capitaux actuels. Prenons pour exemple les rentes viagères. Une personne de l'âge A veut constituer sur sa tête une rente viagère h; on demande le capital qu'elle doit pour cela donner à la caisse de l'établissement qui lui fait cette rente.

Si l'on nomme y_0 le nombre des individus de l'âge A dans la Table de mortalité dont on fait usage, et y_x le nombre des individus de l'âge $A+x$, la probabilité de payer la rente à la fin de l'année $A+x$ sera $\frac{y_x}{y_0}$; par conséquent, la valeur du payement sera $\frac{hy_x}{y_0}$. Mais, si l'on désigne par r l'intérêt annuel de l'unité, en sorte que le capital 1 devienne $1+r$ après un an, il deviendra $(1+r)^x$ après x années; ainsi, le payement $(1+r)^x$ fait à la fin de la $x^{\text{ième}}$ année, réduit en capital actuel, devient l'unité, ou ce même payement divisé par $(1+r)^x$; le payement $\frac{hy_x}{y_0}$ réduit en capital actuel est donc $\frac{hy_x}{y_0(1+r)^x}$. La somme de tous les payements faits pendant la durée de la vie de la personne qui constitue la rente et multipliés par leur probabilité équivaut donc à un capital actuel représenté par l'intégrale finie

$$\Sigma\frac{hy_x}{y_0(1+r)^x},$$

la caractéristique Σ devant embrasser toutes les valeurs de la fonction qu'elle affecte.

On peut déterminer cette intégrale en formant toutes ces valeurs d'après la Table de mortalité, et en les ajoutant ensemble; on déduira ensuite les capitaux les uns des autres, en observant que, si l'on nomme F le capital relatif à l'âge A et F' le capital relatif à l'âge A + 1, on a

$$F = \frac{y_1}{y_0} \frac{F' + h}{1 + r}.$$

Mais ce procédé se simplifie lorsque la loi de mortalité est connue, et surtout lorsqu'elle est donnée par une fonction rationnelle et entière de x, ce qui est toujours possible, en considérant les nombres de la Table de mortalité comme des ordonnées dont les âges correspondants sont les abscisses, et en faisant passer une courbe parabolique par les extrémités des deux ordonnées extrêmes et de plusieurs ordonnées intermédiaires. Les différences qui existent entre les diverses Tables de mortalité permettent de regarder ce moyen comme aussi exact que ces Tables, et même de s'en tenir à un petit nombre d'ordonnées.

Faisons

$$\frac{1}{1+r} = p, \qquad \frac{y_x}{y_0} = u;$$

reprenons la formule (16) du n° 11 du Livre Ier qui donne

$$\Sigma p^x u = \frac{p^x}{p c^{\frac{du}{dx}} - 1} + f,$$

f étant une constante arbitraire. Il faut, dans le développement du premier terme du second membre de cette équation par rapport aux puissances de $\frac{du}{dx}$, changer une puissance quelconque $\left(\frac{du}{dx}\right)^i$ dans $\frac{d^i u}{dx^i}$, et multiplier par u le premier terme, qui est indépendant de $\frac{du}{dx}$. On a ainsi

$$\Sigma p^x u = f - \frac{p^x u}{1-p} - \frac{p^{x+1} \frac{du}{dx}}{(1-p)^2} - \frac{(p+1) p^{x+1}}{1.2.(1-p)^3} \frac{d^2 u}{dx^2} + \dots.$$

Pour déterminer f, on observera que l'intégrale $\Sigma p^x u$ est nulle lorsque $x = 1$, et qu'elle se termine lorsque $x = n + 1$, A + n étant la limite de la vie; car alors elle embrasse les termes correspondants à tous les nombres 1, 2, 3, ..., n. Désignons donc par (u), $\left(\frac{du}{dx}\right)$, ...,

u', $\left(\frac{du'}{dx}\right)$, $\cdots$ les valeurs de u, $\frac{du}{dx}$, $\ldots$, correspondantes à $x=1$ et à $x=n+1$; on aura

$$(o)\qquad \Sigma\,\frac{hp^x y_x}{y_0}=h\left\{\begin{array}{l}\frac{p}{1-p}[(u)-p^n(u')]\\ +\frac{p^2}{(1-p)^2}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)-p^n\left(\frac{du'}{dx}\right)\right]\\ +\frac{(p+1)p^2}{1.2.(1-p)^3}\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)-p^n\left(\frac{d^2u'}{dx^2}\right)\right]\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

Si u ou $\frac{y_x}{y_0}$ est constant et égal à l'unité, depuis $x=1$ jusqu'à $x=n$, alors la rente viagère doit être payée certainement pendant le nombre n d'années, et elle devient une annuité. Dans ce cas, $\frac{du}{dx}$ est nul, et la formule précédente donne $\frac{hp(1-p^n)}{1-p}$ pour le capital équivalent à l'annuité h.

Si $u=1-\frac{x}{n}$, alors la probabilité de la vie décroît en progression arithmétique, et la formule précédente donne

$$\frac{hp}{1-p}\left[1-\frac{1-p^n}{n(1-p)}\right]$$

pour le capital équivalent à la rente viagère h, et ainsi de suite.

Supposons maintenant que l'on veuille constituer une rente viagère h sur plusieurs individus des âges A, $A+a$, $A+a+a'$, $\ldots$, de sorte que la rente reste au survivant. Désignons par y_x, y_{x+a}, $y_{x+a+a'}$, $\cdots$ les nombres de la Table de mortalité, correspondants aux âges A, $A+a$, $A+a+a'$, $\ldots$, la probabilité qu'a le premier individu de vivre à l'âge $A+x$ étant $\frac{y_x}{y_0}$, la probabilité qu'à cet âge il aura cessé de vivre est $1-\frac{y_x}{y_0}$. Pareillement, la probabilité qu'a le deuxième individu de vivre à l'âge $A+a+x$ ou à la fin de la $x^{\text{ième}}$ année de la constitution de la rente étant $\frac{y_{x+a}}{y_a}$, la probabilité qu'il aura cessé de vivre alors est $1-\frac{y_{x+a}}{y_a}$; la probabilité que le troisième individu aura cessé de vivre, à la même époque de la constitution de la rente, est

$1 - \frac{y_{x+a+a'}}{y_{a+a'}}$, et ainsi de suite. La probabilité qu'aucun de ces individus n'existera à cette époque est donc

$$\left(1-\frac{y_x}{y_0}\right)\left(1-\frac{y_{x+a}}{y_a}\right)\left(1-\frac{y_{x+a+a'}}{y_{a+a'}}\right)\cdots$$

En retranchant ce produit de l'unité, la différence sera la probabilité qu'un de ces individus au moins sera vivant à la fin de la $x^{\text{ième}}$ année de la constitution de la rente. Nommons u cette probabilité; $\Sigma h p^x u$ sera le capital actuel équivalent à la rente viagère h. Mais on doit observer, en prenant cette intégrale, que les quantités y_x, y_{x+a}, ... sont nulles, lorsque leurs indices x, $x+a$, ... surpassent le nombre n, $A+n$ étant la limite de la vie.

Si y_x est une fonction rationnelle et entière de x, et d'exponentielles telles que q^x, r^x, ..., on aura facilement, par les formules du Livre I^er^, l'intégrale $h\Sigma p^x u$; mais on peut dans tous les cas former, au moyen d'une Table de mortalité, tous les termes de cette intégrale, en prendre la somme et construire ainsi des Tables de rentes viagères sur une ou plusieurs têtes.

L'analyse précédente sert pareillement à déterminer la rente viagère que l'on doit faire à un établissement pour assurer à ses héritiers un capital après sa mort. Le capital équivalent à la rente viagère h, faite à une personne de l'âge A, est, par ce qui précède, $hS\frac{p^x y_x}{y_0}$, le signe S comprenant tous les termes inclusivement, depuis $x=1$ jusqu'à la limite de la vie de la personne. Nommons hq cette intégrale, et imaginons que l'établissement reçoive de cette personne la rente h, et lui donne en échange le capital hq. Concevons ensuite que la même personne place ce capital à intérêt perpétuel sur l'établissement lui-même, l'intérêt annuel de l'unité étant r ou $\frac{1-p}{p}$. Il est clair que l'établissement doit rendre le capital hq aux héritiers de la personne. Mais elle a fait pendant sa vie la rente h à l'établissement, et elle en a reçu la rente $\frac{hq(1-p)}{p}$; la rente qu'elle a faite réellement est donc $h\left[1-\frac{q(1-p)}{p}\right]$;

c'est donc ce qu'elle doit donner annuellement à l'établissement pour assurer à ses héritiers le capital hq.

Je n'insisterai pas davantage sur ces objets, ainsi que sur ceux qui sont relatifs aux établissements d'assurance de tout genre, parce qu'ils ne présentent aucune difficulté. J'observerai seulement que tous ces établissements doivent, pour prospérer, se réserver un bénéfice et multiplier considérablement leurs affaires, afin que, leur bénéfice réel devenant presque certain, ils soient exposés le moins qu'il est possible à de grandes pertes qui pourraient les détruire. En effet, si le nombre des affaires est s et si l'avantage de l'établissement dans chacune d'elles est b, alors il devient extrêmement probable que le bénéfice réel de l'établissement sera sb, s étant supposé un très grand nombre.

Pour le faire voir, supposons que s personnes de l'âge A constituent, chacune sur sa tête, une rente viagère h, et considérons une de ces personnes que nous désignerons par C. Si C meurt dans l'intervalle de la fin de l'année x écoulée depuis la constitution de sa rente à la fin de l'année $x+1$, l'établissement lui aura payé la rente h pendant x années, et la somme de ces payements, réduite en capital actuel, sera $h(p+p^2+\ldots+p^x)$ ou Σhp^{x+1}; or la probabilité que C mourra dans cet intervalle est $\frac{y_x - y_{x+1}}{y_0}$ ou $-\frac{\Delta y_x}{y_0}$; la valeur de la perte que l'établissement doit alors supporter est donc $-\frac{\Delta y_x}{y_0}\Sigma hp^{x+1}$. La somme de toutes ces pertes est

$$(r) \qquad -\Sigma\left(\frac{\Delta y_x}{y_0}\Sigma hp^{x+1}\right);$$

c'est le capital que C doit verser à la caisse de l'établissement pour en recevoir la rente viagère h. On peut observer ici que l'on a

$$-\Delta y_x \Sigma p^{x+1} = -y_{x+1}\Sigma p^{x+1} + y_x \Sigma p^x + y_x p^x;$$

en intégrant le second membre de cette équation, la fonction (r) se réduit à

$$-\frac{y_x}{y_0}\Sigma hp^x + \frac{\Sigma h y_x p^x}{y_0} + \text{const.};$$

or Σp^x se réduit à zéro, lorsque $x = 1$, et lorsque $x = n + 1$, y_x est nul par ce qui précède; la fonction (r) ou le capital que C doit payer à l'établissement est donc $\frac{\Sigma h y_x p^x}{y_0}$, ce qui est conforme à ce qui précède. Mais sous la forme de la fonction (r) on peut appliquer au bénéfice de l'établissement l'analyse du n° 39. En effet, on a dans ce cas, par le numéro cité,

$$av + a'v' + a''v'' + \ldots = -\Sigma\left(\frac{\Delta y_x}{y_0}\Sigma h p^{x+1}\right);$$

ensuite a, a', ... étant les valeurs successives de $-\frac{\Delta y_x}{y_0}$, on aura

$$av^2 + a'v'^2 + \ldots = \Sigma\left[-\frac{\Delta y_x}{y_0}(\Sigma h p^{x+1})^2\right],$$

en sorte que

$$2k^2 = \Sigma\left[-\frac{\Delta y_x}{y_0}(\Sigma h p^{x+1})^2\right] - \left[\Sigma\left(\frac{\Delta y_x}{y_0}\Sigma h p^{x+1}\right)\right]^2.$$

En supposant que chacune des s personnes qui constitue la rente h sur sa tête verse à la caisse de l'établissement, outre le capital correspondant à cette rente, une somme b, pour subvenir aux frais de l'établissement, on aura, par le n° 39,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int dr'\, c^{-r'^2},$$

pour la probabilité que le bénéfice réel de l'établissement sera compris dans les limites

$$sb \pm 2kr'\sqrt{s}.$$

Ainsi, dans le cas d'un nombre infini d'affaires, le bénéfice réel de l'établissement devient certain et infini. Mais alors ceux qui traitent avec lui ont un désavantage mathématique qui doit être compensé par un avantage moral, dont l'appréciation va être l'objet du Chapitre suivant.

CHAPITRE X.

DE L'ESPÉRANCE MORALE.

41. On a vu, dans le n° 2, la différence qui existe entre l'espérance mathématique et l'espérance morale. L'espérance mathématique résultante de l'attente probable d'un ou de plusieurs biens étant le produit de ces biens par la probabilité de les obtenir, elle peut être évaluée par l'analyse exposée dans ce qui précède. L'espérance morale se règle sur mille circonstances qu'il est presque impossible de bien évaluer. Mais nous avons donné dans le numéro cité un principe qui, s'appliquant aux cas les plus communs, conduit à des résultats souvent utiles, et dont nous allons développer les principaux.

D'après ce principe, x étant la fortune physique d'un individu, l'accroissement dx qu'elle reçoit produit à l'individu un bien moral réciproque à cette fortune; l'accroissement de sa fortune morale peut donc être exprimé par $\frac{k\,dx}{x}$, k étant une constante. Ainsi, en désignant par y la fortune morale correspondante à la fortune physique x, on aura

$$y = k \log x + \log h,$$

h étant une constante arbitraire que l'on déterminera au moyen d'une valeur de y correspondante à une valeur donnée de x. Sur cela, nous observerons que l'on ne peut jamais supposer x et y nuls ou négatifs dans l'ordre naturel des choses; car l'homme qui ne possède rien regarde son existence comme un bien moral qui peut être comparé à l'avantage que lui procurerait une fortune physique dont il est bien difficile d'assigner la valeur, mais que l'on ne peut fixer au-dessous de ce qui lui serait rigoureusement nécessaire pour exister; car on conçoit qu'il ne consentirait point à recevoir une somme modique, telle que cent francs, avec la condition de ne prétendre à rien, lorsqu'il l'aurait dépensée.

Supposons maintenant que la fortune physique d'un individu soit a, et qu'il lui survienne l'expectative d'un des accroissements $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, ces quantités pouvant être nulles ou même négatives, ce qui change les accroissements en diminutions. Représentons par $p, q, r, \ldots$ les probabilités respectives de ces accroissements, la somme de ces probabilités étant supposée égale à l'unité. Les fortunes morales correspondantes de l'individu pourront être

$$k\log(a+\alpha)+\log h, \quad k\log(a+\beta)+\log h, \quad k\log(a+\gamma)+\log h, \quad \ldots.$$

En multipliant ces fortunes respectivement par leurs probabilités $p, q, r, \ldots$, la somme de leurs produits sera la fortune morale de l'individu en vertu de son expectative; en nommant donc Y cette fortune, on aura

$$Y = kp\log(a+\alpha)+kq\log(a+\beta)+kr\log(a+\gamma)+\ldots+\log h.$$

Soit X la fortune physique qui correspond à cette fortune morale, on aura

$$Y = k\log X + \log h.$$

La comparaison de ces deux valeurs de Y donne

$$X = (a+\alpha)^p\,(a+\beta)^q\,(a+\gamma)^r\ldots.$$

Si l'on retranche la fortune primitive a de cette valeur de X, la différence sera l'accroissement de la fortune physique qui procurerait à l'individu le même avantage moral qui résulte pour lui de son expectative. Cette différence est donc l'expression de cet avantage, au lieu que l'avantage mathématique a pour expression

$$p\alpha+q\beta+r\gamma+\ldots.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

De là résultent plusieurs conséquences importantes. L'une d'elles est que le jeu mathématiquement le plus égal est toujours désavantageux. En effet, si l'on désigne par a la fortune physique du joueur avant de commencer le jeu; par p sa probabilité de gagner, et par μ sa mise, celle de son adversaire doit être, pour l'égalité du jeu, $\frac{(1-p)\mu}{p}$; ainsi le joueur gagnant la partie, sa fortune physique devient $a+\frac{1-p}{p}\mu$, et la probabilité de cela est p. S'il perd la partie, sa fortune physique devient $a-\mu$, et la probabilité de cela est $1-p$; en nommant donc X sa fortune physique, en vertu de son expectative, on aura, par ce qui précède,

$$X=\left(a+\frac{1-p}{p}\mu\right)^p(a-\mu)^{1-p};$$

or cette quantité est plus petite que a, c'est-à-dire que l'on a

$$\left(1+\frac{1-p}{p}\frac{\mu}{a}\right)^p\left(1-\frac{\mu}{a}\right)^{1-p}<1$$

ou, en prenant les logarithmes hyperboliques,

$$p\log\left(1+\frac{1-p}{p}\frac{\mu}{a}\right)+(1-p)\log\left(1-\frac{\mu}{a}\right)<0.$$

Le premier membre de cette équation peut être mis sous la forme

$$\int(1-p)\frac{d\mu}{a}\left(\frac{1}{1+\frac{1-p}{p}\frac{\mu}{a}}-\frac{1}{1-\frac{\mu}{a}}\right),$$

quantité qui est évidemment négative.

Il résulte encore de l'analyse précédente qu'il vaut mieux exposer sa fortune par parties à des dangers indépendants les uns des autres, que de l'exposer tout entière au même danger. Pour le faire voir, supposons qu'un négociant, ayant à faire venir par mer une somme ε, l'expose sur un seul vaisseau, et que l'observation ait fait connaître la probabilité p de l'arrivée d'un vaisseau du même genre dans le port; l'avantage mathématique du négociant, résultant de son expectative, sera $p\varepsilon$. Mais, si l'on représente par l'unité sa fortune physique, indépendamment de son expectative, sa fortune morale sera, par ce qui précède,

$$kp\log(1+\varepsilon)+\log h,$$

et son avantage moral sera, en vertu de son expectative,

$$(1+\varepsilon)^p-1,$$

quantité plus petite que $p\varepsilon$; car on a

$$(1+\varepsilon)^p<1+p\varepsilon,$$

puisque $\log(1+\varepsilon)^p$ ou $p\log(1+\varepsilon)$ est moindre que $\log(1+p\varepsilon)$, ce qui est évident, lorsqu'on met ces deux logarithmes sous les formes $\int\frac{p\,d\varepsilon}{1+\varepsilon}$ et $\int\frac{p\,d\varepsilon}{1+p\varepsilon}$.

Supposons maintenant que le négociant expose la somme ε, par parties égales, sur r vaisseaux. Sa fortune physique deviendra $1+\varepsilon$, si tous les vaisseaux arrivent, et la probabilité de cet événement est p^r. Si $r-1$ vaisseaux arrivent, la fortune physique du négociant devient $1+\frac{(r-1)\varepsilon}{r}$, et la probabilité de cet événement est $rp^{r-1}(1-p)$. Si $r-2$ vaisseaux arrivent, la fortune physique du négociant devient $1+\frac{r-2}{r}\varepsilon$, et la probabilité de cet événement est $\frac{r(r-1)}{1.2}p^{r-2}(1-p)^2$, et ainsi de suite; la fortune morale du négociant est donc, par ce qui précède,

$$k\left\{\begin{aligned}&p^r\log(1+\varepsilon)+rp^{r-1}(1-p)\log\left(1+\frac{r-1}{r}\varepsilon\right)\\&+\frac{r(r-1)}{1.2}p^{r-2}(1-p)^2\log\left(1+\frac{r-2}{r}\varepsilon\right)+\ldots\end{aligned}\right\}+\log h,$$

expression que l'on peut mettre sous cette forme

$$(a)\quad kp\int d\varepsilon\left[\frac{p^{r-1}}{1+\varepsilon}+\frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{1+\frac{r-1}{r}\varepsilon}+\frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1.2.\left(1+\frac{r-2}{r}\varepsilon\right)}+\ldots\right]+\log h.$$

Si l'on retranche de cette expression celle de la fortune morale du négociant lorsqu'il expose la somme ε sur un seul vaisseau, et que l'on obtient en faisant $r = 1$ dans la précédente, ce qui, abstraction faite de $\log h$, réduit celle-ci à $kp \int \frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon}$ qui est égal à

$$kp \int d\varepsilon \left[\frac{p^{r-1}}{1+\varepsilon} + \frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{1+\varepsilon} + \frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1.2.(1+\varepsilon)} + \ldots \right] + \log h,$$

la différence sera

$$kp(1-p)\frac{r-1}{r} \int \frac{\varepsilon\, d\varepsilon}{1+\varepsilon} \left[\frac{p^{r-2}}{1+\frac{r-1}{r}\varepsilon} + \frac{(r-2)p^{r-3}(1-p)}{1+\frac{r-2}{r}\varepsilon} + \ldots \right];$$

cette différence étant positive, on voit qu'il y a moralement de l'avantage à partager la somme ε sur plusieurs vaisseaux. Cet avantage s'accroît à mesure que l'on augmente le nombre r des vaisseaux, et, si ce nombre est très grand, l'avantage moral devient à peu près égal à l'avantage mathématique.

Pour le faire voir, reprenons la formule (a) et donnons-lui cette forme

$$(a') \qquad kp \int\int dx\, d\varepsilon\, c^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right)x} \left(pc^{-\frac{\varepsilon x}{r}} + 1 - p \right)^{r-1} + \log h,$$

l'intégrale relative à x étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. Dans cet intervalle, le coefficient de dx sous les signes $\int\int$ n'a ni maximum ni minimum ; car sa différentielle prise par rapport à x est

$$-c^{\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right)x} dx \left(pc^{-\frac{\varepsilon x}{r}} + 1 - p \right)^{r-2} \left[p(1+\varepsilon)c^{-\frac{\varepsilon x}{r}} + (1-p)\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right) \right];$$

cette différentielle est constamment négative depuis $x = 0$ jusqu'à x infini; ainsi le coefficient lui-même diminue constamment dans cet intervalle. C'est donc ici le cas de faire usage de la formule (A) du n° 22 du Livre I[er], pour avoir, par une approximation convergente, l'intégrale $\int y\, dx$, y étant égal à

$$c^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right)x} \left(pc^{-\frac{\varepsilon x}{r}} + 1 - p \right)^{r-1}.$$

La quantité que nous avons nommée v dans le numéro cité devient alors

$$v = -\frac{y\,dx}{dy} = \frac{pc^{-\frac{\varepsilon x}{r}} + 1 - p}{p(1+\varepsilon)c^{-\frac{\varepsilon x}{r}} + (1-p)\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right)},$$

ce qui donne

$$\mathrm{U} = \frac{1}{1 + p\varepsilon + (1-p)\frac{\varepsilon}{r}},$$

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx} = \frac{p(1-p)\varepsilon^2\left(1-\frac{1}{r}\right)}{r\left[1+p\varepsilon+(1-p)\frac{\varepsilon}{r}\right]^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$\mathrm{U}, \frac{d\mathrm{U}}{dx}, \cdots$ étant ce que deviennent $v, \frac{dv}{dx}, \cdots,$ lorsque x est nul. Cela posé, la formule (A) citée donnera

$$\int dx\, c^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right)x}\left(pc^{-\frac{\varepsilon x}{r}} + 1 - p\right)^{r-1}$$

$$= \frac{1}{1+p\varepsilon+(1-p)\frac{\varepsilon}{r}}\left\{1 + \frac{p(1-p)\varepsilon^2\left(1-\frac{1}{r}\right)}{r\left[1+p\varepsilon+(1-p)\frac{\varepsilon}{r}\right]} + \ldots\right\}.$$

La formule (a') devient ainsi, à très peu près, lorsque r est un grand nombre,

$$k\int\frac{p\,d\varepsilon}{1+p\varepsilon} + \log h$$

ou

$$k\log(1+p\varepsilon) + \log h.$$

Maintenant soit X la fortune physique correspondante à cette fortune morale; on a, par ce qui précède,

$$k\log\mathrm{X} + \log h,$$

pour la fortune morale correspondante à X; en comparant donc ces deux expressions, on aura

$$\mathrm{X} = 1 + p\varepsilon.$$

Dans ce cas, l'avantage moral est $p\varepsilon$; il est donc égal à l'avantage mathématique.

Souvent l'avantage moral des individus est augmenté par le moyen des caisses d'assurance, en même temps que ces caisses produisent aux assureurs un bénéfice certain. Supposons, par exemple, qu'un négociant ait une partie ε de sa fortune sur un vaisseau dont la probabilité de l'arrivée est p, et qu'il assure cette partie, en donnant une somme à la compagnie d'assurance. Pour l'égalité parfaite entre les sorts mathématiques de la compagnie et du négociant, celui-ci doit donner $(1-p)\varepsilon$ pour prix de l'assurance. En représentant par l'unité la fortune du négociant, indépendamment de son expectative ε, sa fortune morale sera, par ce qui précède,

$$kp\log(1+\varepsilon)+\log h,$$

dans le cas où il n'assure pas, et dans le cas où il assure, elle sera

$$k\log(1+p\varepsilon)+\log h;$$

or on a

$$\log(1+p\varepsilon)>p\log(1+\varepsilon)$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int\frac{p\,d\varepsilon}{1+p\varepsilon}>\int\frac{p\,d\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

p étant moindre que l'unité; la fortune morale du négociant est donc augmentée, au moyen de son assurance. Il peut ainsi faire à la compagnie d'assurance un sacrifice propre à subvenir aux frais de l'établissement et au bénéfice qu'elle doit faire. Si l'on nomme α ce sacrifice, c'est-à-dire si l'on suppose que le négociant donne à la compagnie, pour prix de son assurance, la somme $(1-p)\varepsilon+\alpha$, on aura, dans le cas de l'égalité des fortunes morales, lorsque le négociant assure, et lorsqu'il n'assure point,

$$\log(1-\alpha+p\varepsilon)=p\log(1+\varepsilon),$$

ce qui donne

$$\alpha=1+p\varepsilon-(1+\varepsilon)^p.$$

C'est tout ce que le négociant peut donner à la compagnie, sans désavantage moral ; il aura donc un avantage moral, en faisant un sacrifice moindre que cette valeur de α, et en même temps, la compagnie aura un bénéfice qui, comme on l'a vu, devient certain, quand ses relations sont très nombreuses. On voit par là comment des établissements de ce genre, bien conçus et sagement administrés, peuvent s'assurer un bénéfice réel, en procurant des avantages aux personnes qui traitent avec eux. C'est en général le but de tous les échanges ; mais ici, par une combinaison particulière, l'échange a lieu entre deux objets de même nature, dont l'un n'est que probable, tandis que l'autre est certain.

42. Le principe dont nous venons de faire usage pour calculer l'espérance morale a été proposé par Daniel Bernoulli, pour expliquer la différence entre le résultat du Calcul des Probabilités et l'indication du sens commun dans le problème suivant. Deux joueurs A et B jouent à *croix* et *pile*, avec la condition que A paye à B deux francs, si *croix* arrive au premier coup ; quatre francs, s'il arrive au deuxième coup ; huit francs s'il arrive au troisième coup, et ainsi de suite jusqu'au $n^{\text{ième}}$ coup. On demande ce que B doit donner à A en commençant le jeu.

Il est visible que l'avantage de B, relatif au premier coup, est un franc ; car il a $\frac{1}{2}$ de probabilité de gagner deux francs à ce coup. Son avantage relatif au deuxième coup est pareillement un franc ; car il a $\frac{1}{4}$ de probabilité de gagner quatre francs à ce coup, et ainsi de suite, en sorte que la somme de tous ses avantages relatifs aux n coups est n francs. Il doit donc, pour l'égalité mathématique du jeu, donner à A cette somme qui devient infinie, si l'on suppose que le jeu continue à l'infini.

Cependant personne, à ce jeu, ne risquera avec prudence une somme même assez modique, telle que cent francs. Pour peu que l'on réfléchisse à cette espèce de contradiction entre le calcul, et ce qu'indique le sens commun, on voit facilement qu'elle tient à ce que, si l'on suppose, par exemple, $n = 50$, ce qui donne 2^{50} pour la somme que B peut espérer au cinquantième coup, cette somme immense ne produit point à B un avantage moral proportionnel à sa grandeur, de manière qu'il y a pour lui un désavantage moral à exposer un franc pour l'obtenir, avec la probabilité excessivement petite $\frac{1}{2^{50}}$ de réussir. Mais l'avantage moral que peut procurer une somme espérée dépend d'une infinité de circonstances propres à chaque individu et qu'il est impossible d'évaluer. La seule considération générale que l'on puisse employer à cet égard est que, plus on est riche, moins une somme très petite peut être avantageuse, toutes choses égales d'ailleurs. Ainsi la supposition la plus naturelle que l'on puisse faire est celle d'un avantage moral réciproque au bien de la personne intéressée. C'est à cela que se réduit le principe de Daniel Bernoulli, principe qui, comme on vient de le voir, fait coïncider les résultats du calcul avec les indications du sens commun, et qui donne le moyen d'apprécier avec quelque exactitude ces indications toujours vagues. Son application au problème dont on vient de parler va nous en fournir un nouvel exemple.

Nommons a la fortune de B avant le jeu, et x ce qu'il donne au joueur A. Sa fortune devient $a-x+2$, si *croix* arrive au premier coup; elle devient $a-x+2^2$, si *croix* arrive au deuxième coup, et ainsi de suite jusqu'au coup n, où elle devient $a-x+2^n$, si *croix* n'arrive qu'au coup $n^{\text{ième}}$. La fortune de B devient $a-x$, si *croix* n'arrive point dans les n coups, après lesquels la partie est supposée finir; mais la probabilité de ce dernier événement est $\frac{1}{2^n}$. En multipliant les logarithmes de ces diverses fortunes par leurs probabilités respectives et par k, on aura, par ce qui précède, la fortune morale de B, en vertu des conditions du jeu, égale à

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}k\log(a-x+2)+\frac{1}{2^2}k\log(a-x+2^2)+\ldots\\&\qquad+\frac{1}{2^n}k\log(a-x+2^n)+\frac{1}{2^n}k\log(a-x)+\log h.\end{aligned}$$

Mais, avant le jeu, sa fortune morale était $k\log a+\log h$; en égalant donc ces deux fortunes, pour que B conserve toujours la même fortune morale, et repassant des logarithmes aux nombres, on aura, $a - x$ étant supposé égal à a', et faisant $\frac{1}{a'} = \alpha$,

$$(o) \qquad 1 + \alpha x = (1 + 2\alpha)^{\frac{1}{2}} (1 + 2^2\alpha)^{\frac{1}{2^2}} \ldots (1 + 2^n\alpha)^{\frac{1}{2^n}};$$

les facteurs $(1 + 2\alpha)^{\frac{1}{2}}$, $(1 + 2^2\alpha)^{\frac{1}{2^2}}$ vont en diminuant sans cesse, et leur limite est l'unité; car on a

$$(1 + 2^i\alpha)^{\frac{1}{2^i}} > (1 + 2^{i+1}\alpha)^{\frac{1}{2^{i+1}}}.$$

En effet, si l'on élève à la puissance 2^{i+1} les deux membres de cette inégalité, elle devient

$$1 + 2^{i+1}\alpha + 2^{2i}\alpha^2 > 1 + 2^{i+1}\alpha,$$

et sous cette forme l'inégalité devient évidente. De plus, le logarithme de $(1 + 2^i\alpha)^{\frac{1}{2^i}}$ est égal à $\frac{i \log 2}{2^i} + \frac{1}{2^i} \log\left(\alpha + \frac{1}{2^i}\right)$, et il est visible que cette fonction est nulle dans le cas de i infini, ce qui exige que dans ce cas $(1 + 2^i\alpha)^{\frac{1}{2^i}}$ soit l'unité.

Si l'on suppose n infini dans l'équation (o), on a le cas où la partie peut se prolonger à l'infini, ce qui est le cas le plus avantageux à B. a' et par conséquent α étant supposés connus, on prendra la somme des logarithmes tabulaires d'un assez grand nombre $i - 1$ des premiers facteurs du second membre, pour que $2^i\alpha$ soit au moins égal à dix. La somme des logarithmes tabulaires des facteurs suivants, jusqu'à l'infini, sera, à très peu près, égale à

$$\frac{\log \alpha}{2^{i-1}} + \frac{(i+1)\log 2}{2^{i-1}} + \frac{0,4342945}{3\alpha 2^{i-2}}.$$

L'addition de ces deux sommes donnera le logarithme tabulaire de $a' + x$ ou de a. Ainsi l'on aura pour une fortune physique a, supposée à B avant le jeu, la valeur de x qu'il doit donner à A au commencement du jeu, pour conserver la même fortune morale. En supposant, par exemple, a' égal à cent, on trouve $a = 107^{\text{fr}},89$, d'où il suit que, la fortune physique de B étant primitivement $107^{fr},89$, il ne doit alors risquer prudemment à ce jeu que $7^{fr},89$, au lieu de la somme infinie que le résultat du calcul indique, lorsqu'on fait abstraction de toutes considérations morales. Ayant ainsi la valeur de a relative à $a' = 100$, il est facile d'en conclure de la manière suivante sa valeur relative à $a' = 200$; en effet on a, dans ce dernier cas,

$$a = (200+2)^{\frac{1}{2}}(200+2^2)^{\frac{1}{4}}\ldots = 2(100+1)^{\frac{1}{2}}(100+2)^{\frac{1}{4}}(100+4)^{\frac{1}{8}}\ldots.$$

Mais on vient de trouver

$$(100+2)^{\frac{1}{4}}(100+4)^{\frac{1}{8}}\ldots = (107,89)^{\frac{1}{2}};$$

donc

$$a = 2\sqrt{101.107,89} = 208,78.$$

Ainsi la fortune physique de B étant primitivement 208,78, il ne peut risquer prudemment à ce jeu au delà de $8^{fr},78$.

43. Nous allons maintenant étendre le principe exposé ci-dessus aux choses dont l'existence est éloignée et incertaine. Pour cela, considérons deux personnes A et B, qui veulent placer chacune, en viager, un capital q. Elles peuvent le faire séparément; elles peuvent s'associer et constituer une rente viagère sur leurs têtes, de manière que la rente soit réversible à celle qui survit à l'autre. Examinons quel est le parti le plus avantageux.

Supposons les deux personnes du même âge et ayant la même fortune annuelle que nous représenterons par l'unité, indépendamment du capital qu'elles veulent placer. Soit 6 la rente viagère que ce capital leur produirait à chacune, si elles plaçaient leurs capitaux séparément, en sorte que leur fortune annuelle devienne $1+6$. Nous exprimerons, conformément au principe dont il s'agit, leur fortune morale annuelle correspondante par $k\log(1+6)+\log h$. Mais cette fortune n'aura lieu que probablement à la $x^{\text{ième}}$ année; ainsi, en désignant par y_x la probabilité que A vivra à la fin de la $x^{\text{ième}}$ année, on doit multiplier sa fortune morale annuelle relative à cette année par y_x; en ajoutant donc tous ces produits, leur somme, que nous désignerons par $[k \log(1+6) + \log h]\Sigma y_x$, sera ce que je nomme ici *fortune morale viagère*.

Supposons maintenant que A et B placent la somme $2q$ de leurs capitaux sur leurs têtes, et que cela produise une rente viagère $6'$, réversible au survivant. Tant que A et B vivront, chacun d'eux ne touchera que $\frac{1}{2}6'$ de rente viagère, et leur fortune morale annuelle sera $k \log(1+\frac{1}{2}6') + \log h$. En la multipliant par la probabilité qu'ils vivront tous deux à la fin de l'année x, probabilité égale à $(y_x)^2$, la somme de ces produits pour toutes les valeurs de x sera la fortune morale viagère de A, relative à la supposition de leur existence simultanée; cette fortune est donc

$$\left[k \log\left(1+\frac{6'}{2}\right) + \log h\right]\Sigma(y_x)^2.$$

La probabilité que A existera seul à la fin de la $x^{\text{ième}}$ année est $y_x - (y_x)^2$; sa fortune morale viagère relative à son existence après la mort de B, qui rend sa fortune morale annuelle égale à $1+6'$, est donc

$$[k \log(1+6') + \log h]\Sigma[y_x - (y_x)^2].$$

La somme de ces deux fonctions

$$k \log\left(1+\frac{6'}{2}\right)\Sigma(y_x)^2 + k\log(1+6')[\Sigma y_x - \Sigma(y_x)^2] + \log h \Sigma y_x$$

sera la fortune morale viagère de A dans l'hypothèse où A et B placent conjointement leurs capitaux.

Si l'on compare cette fortune à celle que nous venons de trouver dans le cas où ils placent séparément leurs capitaux, on voit qu'il y aura pour A de l'avantage ou du désavantage à placer conjointement, suivant que

$$\log\left(1+\frac{6'}{2}\right)\Sigma(y_x)^2 + \log(1+6')[\Sigma y_x - \Sigma(y_x)^2]$$

sera plus grand ou moindre que $\log(1+6)\Sigma y_x$. Pour le savoir, il faut déterminer le rapport de $\mathsf{6}'$ à $\mathsf{6}$; or on a, par le n° 40,

$$q = 6\Sigma p^x y_x,$$

$\frac{1-p}{p}$ étant l'intérêt annuel de l'argent. On a ensuite, par le même numéro,

$$2q = 6'\Sigma p^x[2y_x - (y_x)^2];$$

on a donc

$$6' = \frac{2 6\Sigma p^x y_x}{\Sigma p^x[2y_x - (y_x)^2]}$$

Les Tables de mortalité donneront les valeurs de Σy_x, $\Sigma(y_x)^2$, $\Sigma p^x y_x$, $\Sigma p^x(y_x)^2$; on pourra ainsi juger lequel des deux placements dont il s'agit est le plus avantageux.

Supposons 6 et $6'$ de très petites fractions; la quantité $\log(1+6)\Sigma y_x$ devient à très peu près $6\Sigma y_x$. La quantité

$$\log\left(1+\frac{6'}{2}\right)\Sigma(y_x)^2 + \log(1+6')[\Sigma y_x - \Sigma(y_x)^2]$$

devient

$$\frac{6'}{2}[2\Sigma y_x - \Sigma(y_x)^2],$$

et, en substituant pour $6'$ sa valeur précédente, elle devient

$$6\frac{[2\Sigma y_x - \Sigma(y_x)^2]\Sigma p^x y_x}{2\Sigma p^x y_x - \Sigma p^x(y_x)^2};$$

il y a donc de l'avantage à placer conjointement, si

$$[2\Sigma y_x - \Sigma(y_x)^2]\Sigma p^x y_x$$

l'emporte sur

$$[2\Sigma p^x y_x - \Sigma p^x(y_x)^2]\Sigma y_x,$$

ou si l'on a

$$\frac{\Sigma p^x(y_x)^2}{\Sigma p^x y_x} > \frac{\Sigma(y_x)^2}{\Sigma y_x};$$

c'est en effet ce qui a lieu généralement, p étant plus petit que l'unité.

L'avantage de placer conjointement les capitaux s'accroît par la considération que l'augmentation $\frac{6'}{2}$ de revenu arrive au survivant, à un âge ordinairement avancé, dans lequel de plus grands besoins qui se font sentir la rendent beaucoup plus utile. Cet avantage s'accroît encore de toutes les affections qui peuvent attacher les deux individus l'un à l'autre, et qui leur font désirer le bien-être de celui qui doit survivre. Les établissements dans lesquels on peut ainsi placer ses capitaux et, par un léger sacrifice de son revenu, assurer l'existence de sa famille pour un temps où l'on doit craindre de ne plus suffire à ses besoins, sont donc très avantageux aux mœurs, en favorisant les plus doux penchants de la nature. Ils n'offrent point l'inconvénient que nous avons remarqué dans les jeux même les plus équitables, celui de rendre la perte plus sensible que le gain, puisqu'au contraire ils offrent les moyens d'échanger le superflu contre des ressources assurées dans l'avenir. Le Gouvernement doit donc encourager ces établissements et les respecter dans ses vicissitudes; car les espérances qu'ils présentent portant sur un avenir éloigné, ils ne peuvent prospérer qu'à l'abri de toute inquiétude sur leur durée.

CHAPITRE XI.

DE LA PROBABILITÉ DES TÉMOIGNAGES.

44. Je vais d'abord considérer un seul témoin. La probabilité de son témoignage se compose de sa véracité, de la possibilité de son erreur et de la possibilité du fait en lui-même. Pour fixer les idées, concevons que l'on ait extrait un numéro d'une urne qui en renferme le nombre n, et qu'un témoin du tirage annonce que le n° i est sorti. L'événement observé est ici le témoin annonçant la sortie du n° i. Soit p la véracité du témoin, ou la probabilité qu'il ne cherche point à tromper; soit encore r la probabilité qu'il ne se trompe point. Cela posé :

On peut former les quatre hypothèses suivantes. Ou le témoin ne trompe point et ne se trompe point; ou il ne trompe point et se trompe; ou il trompe et ne se trompe point; enfin, ou il trompe et se trompe à la fois. Voyons quelle est, *a priori*, dans chacune de ces hypothèses, la probabilité que le témoin annoncera la sortie du n° i.

Si le témoin ne trompe point et ne se trompe point, le n° i sera sorti; mais la probabilité de cette sortie est *a priori* $\frac{1}{n}$; en la multipliant par la probabilité pr de l'hypothèse, on aura $\frac{pr}{n}$ pour la probabilité entière de l'événement observé dans cette première hypothèse.

Si le témoin ne trompe point et se trompe, le n° i ne doit point être sorti, pour qu'il annonce sa sortie; la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}$. Mais l'erreur du témoin doit porter sur l'un des numéros non sortis. Supposons qu'elle puisse également porter sur tous : la probabilité qu'elle portera sur le n° i sera $\frac{1}{n-1}$; la probabilité que le témoin ne trompant point et se trompant annoncera le n° i est donc $\frac{n-1}{n}\,\frac{1}{n-1}$ ou $\frac{1}{n}$. En la multipliant par la probabilité $p(1-r)$ de l'hypothèse elle-même, on aura $\frac{p(1-r)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé dans cette seconde hypothèse.

Si le témoin trompe et ne se trompe point, le n° i ne sera point sorti, et la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}$; mais le témoin doit choisir, parmi les $n-1$ numéros non sortis, le n° i. Si l'on suppose que son choix puisse également porter sur chacun d'eux, $\frac{1}{n-1}$ sera la probabilité que son choix se fixera sur le n° i; $\frac{n-1}{n}\,\frac{1}{n-1}$ ou $\frac{1}{n}$ est donc la probabilité que le témoin annoncera le n° i. En la multipliant par la probabilité $(1-p)r$ de l'hypothèse, on aura $\frac{(1-p)r}{n}$ pour la probabilité entière de l'événement observé dans cette troisième hypothèse.

Enfin, si le témoin trompe et se trompe, la probabilité qu'il ne croira pas le n° i sorti sera $\frac{n-1}{n}$, et la probabilité qu'il le choisira parmi les $n-1$ numéros qu'il ne croira pas sortis sera $\frac{1}{n-1}$; $\frac{n-1}{n}\,\frac{1}{n-1}$ ou $\frac{1}{n}$ sera donc la probabilité qu'il annoncera la sortie du n° i. En la multipliant par la probabilité $(1-p)(1-r)$ de l'hypothèse, on aura $\frac{(1-p)(1-r)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé dans cette quatrième hypothèse.

Cette hypothèse renferme un cas dans lequel le n° i est sorti, savoir le cas dans lequel, le n° i étant sorti, le témoin ne le croit pas sorti, et le choisit parmi les $n-1$ numéros qu'il ne croit pas sortis. La probabilité de cela est le produit de $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{n-1}$. En multipliant ce produit par la probabilité $(1-p)(1-r)$ de l'hypothèse, on aura $\frac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)}$ pour la probabilité du cas dont il s'agit.

On peut arriver aux mêmes résultats de cette manière. Soient a, b, c, d, i, ... les n numéros. Puisque le témoin se trompe, il ne doit point croire sorti le numéro sorti, et puisqu'il trompe, il ne doit point annoncer comme sorti le numéro qu'il croit sorti. Mettons donc, à la première place le numéro sorti, à la deuxième le numéro que le témoin croit sorti, et à la troisième le numéro qu'il annonce. Parmi toutes les combinaisons possibles des numéros trois à trois, sans exclure celles où ils sont répétés, il n'y a de compatibles avec l'hypothèse présente que celles où le numéro qui occupe la deuxième place n'occupe ni la première, ni la troisième; telles sont les combinaisons *aba*, *abc*, ... Or il est facile de voir que le nombre des combinaisons qui satisfont aux deux conditions précédentes est $n(n-1)^2$; car la combinaison *ab* peut se combiner avec les $n-1$ numéros autres que b, et le nombre des combinaisons *ab*, *ba*, *ac* est $n(n-1)$. Maintenant les combinaisons dans lesquelles le n° i est annoncé sans être sorti sont de la forme *abi*, *bai*, *aci*, ..., et le nombre de ces combinaisons est $(n-1)(n-2)$; ainsi la probabilité qu'une de ces combinaisons aura lieu est $\frac{n-2}{n(n-1)}$. Les combinaisons dans lesquelles le n° i étant sorti, il est annoncé, sont de la forme *iai*, *ibi*, ..., et le nombre de ces combinaisons est visiblement $n-1$; la probabilité qu'une de ces combinaisons aura lieu est donc $\frac{1}{n(n-1)}$. Il faut multiplier toutes ces combinaisons par la probabilité $(1-p)(1-r)$ de l'hypothèse, et alors on aura les résultats précédents.

Maintenant, pour avoir la probabilité de la sortie du n° i, on doit faire une somme de toutes les probabilités précédentes, relatives à cette sortie, et la diviser par la somme de toutes ces probabilités, ce qui donne, pour cette probabilité,

$$\frac{\frac{pr}{n}+\frac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)}}{\frac{pr}{n}+\frac{p(1-r)}{n}+\frac{(1-p)r}{n}+\frac{(1-p)(1-r)}{n}} \quad \text{ou} \quad pr+\frac{(1-p)(1-r)}{n-1}.$$

Si r est égal à l'unité, ou si le témoin ne se trompe point, la probabilité de la sortie du n° i sera p, c'est-à-dire la probabilité de la véracité du témoin.

Si n est un très grand nombre, cette probabilité sera à très peu près pr ou la probabilité de la véracité du témoin, multipliée par la probabilité qu'il ne se trompe point.

Nous avons supposé que l'erreur du témoin, lorsqu'il se trompe, peut également tomber sur tous les numéros non sortis; mais cette supposition cesse d'avoir lieu, si quelques-uns d'eux ont plus de ressemblance que les autres avec le numéro sorti, parce que la méprise à leur égard est plus facile. Nous avons encore supposé que le témoin, lorsqu'il trompe, n'a pas de motif pour choisir un numéro plutôt qu'un autre, ce qui peut ne pas avoir lieu. Mais il serait très difficile de faire entrer dans une formule toutes ces considérations particulières.

45. Supposons maintenant que l'urne contienne $n-1$ boules noires et une boule blanche, et qu'en ayant extrait une boule, un témoin du tirage annonce la sortie d'une boule blanche. Déterminons la probabilité de cette sortie. Nous formerons les mêmes hypothèses que nous venons de faire. Dans la première, la probabilité de la sortie de la boule blanche est, comme ci-dessus, $\frac{pr}{n}\cdot$ Dans la deuxième hypothèse, le témoin se trompant sans tromper, une boule noire doit être sortie, et la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}$, et comme le témoin, supposé véridique, doit énoncer la sortie d'une boule blanche, par cela seul qu'il se méprend, la probabilité de cette annonce sera donc $\frac{n-1}{n}$, probabilité qu'il faut multiplier par la probabilité $p(1-r)$ de l'hypothèse, ce qui donne $\frac{p(1-r)(n-1)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé dans cette hypothèse. Dans la troisième hypothèse, le témoin étant supposé tromper et ne point se tromper, une boule noire doit être sortie, et la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}\cdot$ En la multipliant par la pro-

babilité $(1-p)r$ de cette hypothèse, on aura $\frac{(1-p)r(n-1)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse. Enfin, dans la quatrième hypothèse, le témoin, trompant et se trompant, ne peut annoncer la sortie de la boule blanche qu'autant qu'elle sera sortie. La probabilité de cette sortie est $\frac{1}{n}\cdot$ En la multipliant par la probabilité $(1-p)(1-r)$ de l'hypothèse, on aura $\frac{(1-p)(1-r)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Présentement, si l'on réunit parmi les probabilités précédentes celles dans lesquelles la boule blanche est sortie, on aura la probabilité de cette sortie, en divisant leur somme par la somme de toutes les probabilités, ce qui donne

$$\frac{pr+(1-p)(1-r)}{pr+(1-p)(1-r)+[p(1-r)+(1-p)r](n-1)}$$

pour la probabilité de la sortie de la boule blanche; par conséquent

$$\frac{[p(1-r)+(1-p)r](n-1)}{pr+(1-p)(1-r)+[p(1-r)+(1-p)r](n-1)}$$

est la probabilité que le fait attesté par le témoin du tirage n'a pas eu lieu.

On peut observer ici que, si l'on nomme q la probabilité que le témoin énonce la vérité, on aura

$$q=pr+(1-p)(1-r);$$

car il est visible qu'il dit vrai, dans le cas dont il s'agit, soit qu'il ne trompe point et ne se trompe point, soit qu'il trompe et se trompe. Cette expression de q donne

$$1-q=p(1-r)+(1-p)r.$$

En effet, la probabilité $1-q$ qu'il n'énonce pas la vérité est la probabilité qu'il ne trompe point et se trompe, plus la probabilité qu'il trompe et ne se trompe point. L'expression précédente de la probabilité que le fait attesté est faux devient ainsi

$$\frac{(1-q)(n-1)}{q+(1-q)(n-1)}.$$

Si le nombre $n-1$ des boules noires est très grand, cette probabilité devient à très peu près égale à l'unité ou à la certitude, pour peu que l'erreur ou le mensonge du témoin soit probable. Alors le fait qu'il atteste devient extraordinaire. Ainsi l'on voit comment les faits extraordinaires affaiblissent la croyance due aux témoins, le mensonge ou l'erreur devenant d'autant plus vraisemblable que le fait attesté est plus extraordinaire en lui-même.

46. Considérons présentement deux urnes A et B, dont la première contienne un grand nombre n de boules blanches, et la seconde le même nombre de boules noires. On tire de l'une de ces urnes une boule que l'on remet dans l'autre urne; ensuite on tire une boule de cette dernière urne. Un témoin du premier tirage atteste qu'une boule blanche est sortie; un témoin du second tirage atteste pareillement qu'il a vu extraire une boule blanche. Chacun de ces témoignages, considéré isolément, n'offre rien d'invraisemblable. Mais la conséquence qui résulte de leur ensemble est que la même boule, sortie au premier tirage, a reparu au second, ce qui est un phénomène d'autant plus extraordinaire que n est un plus grand nombre. Voyons comment la valeur de ces témoignages en est affaiblie.

Nommons q la probabilité que le premier témoin énonce la vérité. On voit, par le numéro précédent, que dans le cas présent cette probabilité se compose de la probabilité que le témoin ne trompe point et ne se trompe point, ajoutée à la probabilité qu'il trompe et se trompe à la fois; car le témoin, dans ces deux cas, énonce la vérité. Soit q' la même probabilité relative au second témoin. On peut former ces quatre hypothèses : ou le premier et le second témoin disent la vérité; ou le premier dit la vérité, le second ne la disant pas; ou le second témoin dit la vérité, le premier ne la disant point; ou enfin aucun des deux ne dit la vérité. Déterminons *a priori*, dans chacune de ces hypothèses, la probabilité de l'événement observé.

Cet événement est l'annonce de la sortie d'une boule blanche à chaque tirage. La probabilité qu'une boule blanche est sortie au premier tirage est $\frac{1}{2}$, puisque la boule extraite peut être également sortie de l'urne A ou de l'urne B. Dans le cas où elle a été extraite de l'urne A et mise dans l'urne B, $n+1$ boules sont contenues dans cette dernière urne, et la probabilité d'en extraire la boule blanche est $\frac{1}{n+1}$; le produit de $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{n+1}$ est donc la probabilité *a priori* de l'extraction d'une boule blanche dans les deux tirages consécutifs. En la multipliant par la probabilité qq' que les deux témoins disent la vérité, on aura

$$\frac{qq'}{2(n+1)}$$

pour la probabilité de l'événement observé, dans la première hypothèse.

Dans la seconde hypothèse, la boule a été extraite de l'urne A et mise dans l'urne B : la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{2}$. De plus, puisque le second témoin ne dit pas la vérité, une boule noire a été extraite de l'urne B, et la probabilité de cette extraction est $\frac{n}{n+1}$. En multipliant donc $\frac{1}{2}$ par $\frac{n}{n+1}$, et le produit par la probabilité $q(1-q')$ que le premier témoin dit la vérité tandis que le second ne la dit pas, on aura

$$\frac{q(1-q')n}{2(n+1)}$$

pour la probabilité de l'événement observé dans la deuxième hypothèse.

Dans la troisième hypothèse, une boule noire a été extraite de l'urne B et mise dans l'urne A : la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{2}$. De plus, une boule blanche a été ensuite extraite de l'urne A, et la probabilité de cette extraction est $\frac{n}{n+1}$; en multipliant donc $\frac{1}{2}$ par $\frac{n}{n+1}$, et le produit par la probabilité $(1-q)q'$ que le second témoin dit la vérité, tandis que le premier ne la dit pas, on aura

$$\frac{(1-q)q'n}{2(n+1)},$$

pour la probabilité relative à la troisième hypothèse.

Enfin, dans la quatrième hypothèse, une boule noire a d'abord été extraite de l'urne B, et la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{2}$. Ensuite cette boule noire, mise dans l'urne A, en a été extraite au second tirage, et la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{n+1}$; en multipliant donc le produit de ces deux probabilités par la probabilité $(1-q)(1-q')$ qu'aucun des témoins ne dit la vérité, on aura

$$\frac{(1-q)(1-q')}{2(n+1)}$$

pour la probabilité relative à la quatrième hypothèse.

Maintenant la probabilité du fait qui résulte de l'ensemble des deux témoignages, savoir, qu'une boule blanche extraite au premier tirage a reparu au second tirage, est visiblement égale à la probabilité relative à la première hypothèse divisée par la somme des probabilités relatives aux quatre hypothèses; cette probabilité est donc

$$\frac{qq'}{qq'+(1-q)(1-q')+[q(1-q')+q'(1-q)]n}.$$

Le phénomène de la réapparition d'une boule blanche au second tirage devient d'autant plus extraordinaire que le nombre n des boules de chaque urne est plus considérable, et alors la probabilité précédente devient très petite. On voit donc que la probabilité du fait résultant de l'ensemble des témoignages est extrêmement affaiblie, lorsqu'il est extraordinaire.

47. Considérons les témoignages simultanés : supposons deux témoins d'accord sur un fait, et déterminons sa probabilité. Pour fixer les idées, supposons que le fait soit l'extraction du n° i d'une urne qui en renferme le nombre n, en sorte que l'événement observé soit l'accord de deux témoins du tirage à énoncer la sortie du n° i. Nommons p et p' leurs véracités respectives, et supposons, pour simplifier, qu'ils ne se trompent point. Cela posé, on ne peut former que ces deux hypothèses : les témoins disent la vérité; les témoins trompent.

Dans la première hypothèse, le n° i est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. En la multipliant par le produit des véracités p et p' des témoins, on aura $\frac{pp'}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Dans la seconde, le n° i n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{n-1}{n}$; mais les deux témoins s'accordent à choisir le n° i parmi les $n-1$ numéros non sortis. Or le nombre des combinaisons différentes qui peuvent résulter de leur choix est $(n-1)^2$, et dans ce nombre ils doivent choisir celle où le n° i est combiné avec lui-même; la probabilité de ce choix est donc $\frac{1}{(n-1)^2}$. En la multipliant par la probabilité précédente $\frac{n-1}{n}$, et par les produits des probabilités $1-p$ et $1-p'$ que les témoins trompent, on aura $\frac{(1-p)(1-p')}{n(n-1)}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans la seconde hypothèse.

Maintenant, on aura la probabilité de la sortie du n° i en divisant la probabilité relative à la première hypothèse par la somme des probabilités relatives aux deux hypothèses; on aura donc, pour cette probabilité,

$$(o)\qquad \frac{pp'}{pp' + \frac{(1-p)(1-p')}{n-1}}.$$

Si $n = 2$, alors la sortie du n° i est aussi probable que sa non-sortie, et la probabilité de sa sortie, résultante de l'accord des témoignages, est

$$\frac{pp'}{pp' + (1-p)(1-p')}.$$

C'est généralement la probabilité d'un fait attesté par deux témoins, lorsque l'existence du fait est aussi probable que sa non-existence. Si les deux témoins sont également véridiques, ce qui donne $p' = p$, cette probabilité devient

$$\frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2}.$$

En général, si un nombre r de témoins également véridiques affirme l'existence d'un fait de ce genre, sa probabilité résultante des témoignages sera

$$\frac{p^r}{p^r + (1-p)^r}.$$

Mais cette formule n'est applicable qu'au cas où l'existence du fait et sa non-existence sont en elles-mêmes également probables.

Si le nombre n des numéros de l'urne est très grand, la formule (o) devient à très peu près l'unité, et par conséquent la sortie du n° i est extrêmement probable. Cela tient à ce qu'il est très peu vraisemblable que les témoins, voulant tromper, s'accordent à énoncer le même numéro, lorsque l'urne en contient un grand nombre. Le simple bon sens indique ce résultat du calcul; mais on voit en même temps que la probabilité de la sortie du n° i est beaucoup diminuée, si les deux témoins, cherchant à tromper, ont pu s'entendre.

Supposons maintenant que le premier témoin affirme la sortie du n° i, et que le second témoin affirme la sortie du n° i'. On peut former alors les trois hypothèses suivantes : le premier témoin dit la vérité et le second trompe; dans ce cas le n° i est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$; de plus, le second témoin, qui trompe, doit choisir parmi les autres numéros non sortis le n° i', et la probabilité de ce choix est $\frac{1}{n-1}$. Le produit de ces deux probabilités par le produit des probabilités p et $1-p'$, que le premier témoin ne trompe pas et que le second trompe, sera la probabilité de l'événement observé ou de l'énonciation de la sortie des n^{os} i et i', dans cette hypothèse, probabilité qui est ainsi $\frac{p(1-p')}{n(n-1)}$.

Dans la seconde hypothèse, le premier témoin trompe et le second ne trompe pas. Alors le n° i' est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}\cdot$ De plus, le premier témoin choisit le n° i sur les $n-1$ numéros non sortis, et la probabilité de ce choix est $\frac{1}{n-1}\cdot$ En multipliant le produit de ces deux probabilités par le produit des probabilités $1-p$ et p', que le premier témoin trompe et que le second ne trompe pas, on aura $\frac{(1-p)p'}{n(n-1)}\cdot$

Enfin, dans la troisième hypothèse, les deux témoins trompent à la fois. Alors aucun des deux numéros i et i' n'est sorti. La probabilité de cet événement est $\frac{n-2}{n}\cdot$ De plus, le premier témoin doit choisir le n° i, et le second doit choisir le n° i', parmi les $n-1$ numéros non sortis, et la probabilité de cet événement composé est $\frac{1}{(n-1)^2}\cdot$ En multipliant le produit de ces deux probabilités par le produit des probabilités $1-p$ et $1-p'$ que le premier et le second témoin trompent, on aura $\frac{(n-2)(1-p)(1-p')}{n(n-1)^2}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Maintenant on aura la probabilité de la sortie du n° i, en divisant la probabilité relative à la première hypothèse par la somme des probabilités relatives aux trois hypothèses; la probabilité de cette sortie est donc

$$\frac{p(1-p')}{1-pp'-\frac{(1-p)(1-p')}{n-1}}\cdot$$

Si $n=2$, c'est-à-dire si l'existence de chaque fait attesté par les deux témoins est *a priori* aussi probable que sa non-existence, alors la probabilité précédente devient $\frac{1}{2}$, lorsque $p = p'$, ce qui est visible d'ailleurs, les deux témoignages se détruisant réciproquement. En général, si un fait de ce genre est attesté par r témoins et nié par r' témoins, tous également véridiques, il est facile de voir que sa probabilité sera

$$\frac{p^{r-r'}}{p^{r-r'} + (1-p)^{r-r'}},$$

c'est-à-dire la même que si le fait était attesté par $r - r'$ témoins.

48. Considérons présentement une chaîne traditionnelle de r témoins, et supposons que le fait transmis soit la sortie du n° i d'une urne qui renferme n numéros. Désignons par y_r sa probabilité. L'addition d'un nouveau témoin changera cette probabilité en y_{r+1}, probabilité qui sera formée : 1° du produit de y_r par la véracité du nouveau témoin, véracité que nous désignerons par p_{r+1}; 2° du produit de la probabilité $1 - p_{r+1}$ que ce nouveau témoin trompe, par la probabilité $1 - y_r$ que le témoin précédent n'a pas dit la vérité, et par la probabilité $\frac{1}{n-1}$ que le nouveau témoin choisira le numéro sorti, dans le nombre des $n - 1$ numéros autres que celui qui lui a été indiqué par le témoin précédent; on aura donc

$$y_{r+1} = p_{r+1} y_r + \frac{1}{n-1}(1 - p_{r+1})(1 - y_r),$$

équation dont l'intégrale est

$$y_r = \frac{1}{n} + C\frac{(np_1 - 1)(np_2 - 1)\ldots(np_r - 1)}{(n-1)^r},$$

C étant une constante arbitraire. Pour la déterminer, on observera que la probabilité du fait, d'après le premier témoignage, est, par ce qui précède, égale à p_1; on a donc $y_1 = p_1$, ce qui donne $C = \frac{n-1}{n}$; partant

$$y_r = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\,\frac{(np_1 - 1)(np_2 - 1)\ldots(np_r - 1)}{(n-1)^r}.$$

Si n est infini, on a

$$y_r = p_1 p_2 \ldots p_r.$$

Si $n = 2$, c'est-à-dire si l'existence du fait est aussi probable que sa non-existence, on a

$$y_r = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(2p_1 - 1)(2p_2 - 1)\ldots(2p_r - 1).$$

En général, à mesure que la chaîne traditionnelle se prolonge, y_r approche indéfiniment de sa limite $\frac{1}{n}$, limite qui est la probabilité, *a priori*, de la sortie du n° i. Le terme $\frac{n-1}{n}\,\frac{np_1 - 1}{n-1}\cdots$ de l'expression de y_r est donc ce que la chaîne des témoins ajoute à cette probabilité. On voit ainsi comment la probabilité s'affaiblit à mesure que la tradition se prolonge. A la vérité, les monuments, l'imprimerie et d'autres causes peuvent diminuer cet effet inévitable du temps; mais ils ne peuvent jamais entièrement le détruire.

Si l'on a deux chaînes traditionnelles, chacune de r témoins, si l'on suppose les témoins de ces chaînes également véridiques et si le dernier témoin de l'une des chaînes s'accorde avec le dernier de l'autre à affirmer la sortie du n° i, on aura la probabilité de cette sortie, en substituant y_r pour p et p' dans la formule (o) du numéro précédent, qui devient par là

$$\frac{y_r^2}{y_r^2 + \frac{(1-y_r)^2}{n-1}}.$$

49. Considérons deux témoins dont p et p' soient les véracités respectives. On sait que tous deux ou du moins l'un d'eux, sans être contredit par l'autre qui, dans ce cas, n'a point prononcé, affirment que le n° i est sorti d'une urne qui en renferme le nombre n. En supposant toujours qu'on n'a extrait qu'un seul numéro, on demande la probabilité de la sortie du n° i.

Soient r et r' les probabilités respectives que les témoins prononcent. On ne peut faire ici que les quatre hypothèses suivantes : 1° les deux témoins prononcent et disent la vérité; 2° les deux témoins prononcent et trompent; 3° l'un des témoins prononce et dit la vérité, et l'autre témoin ne prononce pas; 4° l'un des témoins prononce et trompe, et l'autre ne prononce point.

Dans la première hypothèse, le n° i est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. Il faut la multiplier par le produit des probabilités r et r' que les deux témoins ont prononcé, et par le produit des probabilités p et p' qu'ils disent la vérité; on aura ainsi

$$\frac{pp'.rr'}{n}$$

pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Dans la deuxième, le n° i n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{n-1}{n}$. Mais, si les deux témoins trompent sans s'entendre, la probabilité qu'ils s'accorderont à énoncer le même n° i est $\frac{1}{(n-1)^2}$. Il faut multiplier le produit de ces probabilités par la probabilité rr' que les deux témoins prononcent à la fois, et par la probabilité $(1-p)(1-p')$ qu'ils trompent tous deux. On aura ainsi

$$\frac{(1-p)(1-p')rr'}{n(n-1)}$$

pour la probabilité de l'événement observé, dans la deuxième hypothèse.

Dans la troisième, le n° i est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. Il faut la multiplier par la probabilité $pr(1-r') + p'r'(1-r)$ que l'un des témoins prononce en disant la vérité, tandis que l'autre témoin ne prononce point. On aura ainsi

$$\frac{pr(1-r') + p'r'(1-r)}{n}$$

pour la probabilité de l'événement observé dans cette hypothèse.

Enfin, dans la quatrième, le n° i n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{n-1}{n}$; mais le témoin qui trompe doit le choisir dans les $n-1$ numéros non sortis, et la probabilité de ce choix est $\frac{1}{n-1}$. Il faut multiplier le produit de ces probabilités par la probabilité $(1-p)r(1-r') + (1-p')r'(1-r)$ que l'un des témoins prononçant trompe, tandis que l'autre témoin ne prononce point. On a ainsi

$$\frac{(1-p)r(1-r') + (1-p')r'(1-r)}{n}$$

pour la probabilité correspondante à la quatrième hypothèse.

Maintenant on aura la probabilité de la sortie du n° i, en divisant la somme des probabilités relatives à la première et à la troisième hypothèse par la somme des probabilités relatives à toutes les hypothèses, ce qui donne, pour cette probabilité,

$$\frac{pp'rr' + pr(1-r') + p'r'(1-r)}{pp'.rr' + r(1-r') + r'(1-r) + \frac{(1-p)(1-p')rr'}{n-1}}.$$

Ces exemples indiquent suffisamment la méthode d'assujettir au calcul des probabilités les témoignages.

50. On peut assimiler le jugement d'un tribunal qui prononce entre deux opinions contradictoires au résultat des témoignages de plusieurs témoins de l'extraction d'un numéro d'une urne qui ne contient que deux numéros. En exprimant par p la probabilité que le juge prononce la vérité, la probabilité de la bonté d'un jugement rendu à l'unanimité sera, par ce qui précède,

$$\frac{p^r}{p^r + (1-p)^r},$$

r étant le nombre des juges. On peut déterminer p par l'observation du rapport des jugements rendus à l'unanimité par le tribunal au nombre total des jugements. Lorsque ce nombre est très grand, en le désignant par n, et par i le nombre des jugements rendus à l'unanimité, on aura à fort peu près

$$p^r + (1-p)^r = \frac{i}{n};$$

la résolution de cette équation donnera la véracité p des juges. Cette équation se réduit à un degré de moitié moindre, en faisant $p = 1 + \sqrt{u}$. Elle devient alors

$$(1+\sqrt{u})^r + (1-\sqrt{u})^r = \frac{i}{n},$$

équation qui, développée, est du degré $\frac{r}{2}$ ou $\frac{r-1}{2}$, suivant que r est pair ou impair.

La probabilité de la bonté d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité sera

$$1 - \frac{n}{i}(1-p)^r.$$

Si l'on suppose le tribunal formé de trois juges, on aura

$$p = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4i-n}{12n}}.$$

Nous adopterons le signe $+$; car il est naturel de supposer à chaque juge une plus grande probabilité pour la vérité que pour l'erreur. Si la moitié des jugements rendus par le tribunal a été rendue à l'unanimité, alors $\frac{i}{n} = \frac{1}{2}$, et l'on trouve $p = 0,789$. La probabilité d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité sera $0,981$. Si ce jugement n'est rendu qu'à la pluralité, sa probabilité sera p ou $0,789$.

En général, on voit que la probabilité $1 - \frac{n}{i}(1-p)^r$ de la bonté d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité est d'autant plus grande que r est un plus grand nombre et que les valeurs de p et de $\frac{i}{n}$ sont plus grandes, ce qui dépend des lumières des juges. Il y a donc un grand avantage à former des tribunaux d'appel, composés d'un grand nombre de juges choisis parmi les personnes les plus éclairées.

ADDITIONS.

I.

Nous avons intégré, par une approximation très convergente, dans le n° 34 du Livre Ier, l'équation aux différences finies

$$0 = (n' + s + 1) y_{s+1} - (n + s) y_s.$$

Il est facile de conclure de notre analyse l'expression du rapport de la circonférence au rayon, en produits infinis, donnée par Wallis. En effet, cette analyse nous a conduit, dans le numéro cité, à l'expression générale

$$(a) \quad \frac{(n+\mu)(n+\mu+1)\ldots(n+s-1)}{(n'+\mu+1)(n'+\mu+2)\ldots(n'+s)} = \frac{\int u^{2n'-2n+1}\,du(1-u^2)^{n+s-1}}{\int u^{2n'-2n+1}\,du(1-u^2)^{n+\mu-1}},$$

les intégrales étant prises depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 1$. En faisant d'abord $n' = 0$, $n = \frac{1}{2}$, $\mu = 1$ et observant que $\int du(1-u^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\pi$, π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon, on aura

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.5\ldots(2s-1)}{4.6\ldots 2s \int du(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}}.$$

En supposant donc généralement

$$\frac{1}{\int du(1-u^2)^s} = y_s,$$

on aura

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.5\ldots(2s-1)}{4.6\ldots 2s} y_{s-\frac{1}{2}} = \frac{3.5\ldots(2s+1)}{4.6\ldots(2s+2)} y_{s+\frac{1}{2}} = \ldots,$$

ce qui donne

$$y_{s-\frac{1}{2}} = \frac{2s+1}{2s+2} y_{s+\frac{1}{2}}.$$

Si l'on fait ensuite, dans la formule (a), $n' = -\frac{1}{2}$, $n = 0$ et $\mu = 1$, elle donne

$$\frac{3.5\ldots(2s-1)}{2.4\ldots(2s-2)} = y_{s-1};$$

d'où l'on tire

$$y_{s-1} = \frac{2s}{2s+1}\,y_s,$$

équation qui coincïde avec la précédente entre $y_{s-\frac{1}{2}}$ et $y_{s+\frac{1}{2}}$ en y changeant s dans $s+\frac{1}{2}$, en sorte que cette équation a lieu, s étant entier ou égal à un entier plus $\frac{1}{2}$.

Les deux expressions de y_{s-1} et de $\frac{4}{\pi}$ donnent

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.3}{2.4}.\frac{5.5}{4.6}\ldots\frac{(2s-1)(2s-1)}{(2s-2)2s}\,\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}};$$

les équations aux différences en y_s et $y_{s-\frac{1}{2}}$ donnent

$$\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}} = \frac{(2s+1)^2}{2s(2s+2)}\,\frac{y_{s+\frac{1}{2}}}{y_s} = \frac{(2s+1)^2}{2s(2s+2)}\,\frac{(2s+3)^2}{(2s+2)(2s+4)}\,\frac{y_{s+\frac{3}{2}}}{y_{s+1}} = \ldots.$$

Le rapport $\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}}$ est plus grand que l'unité; il diminue sans cesse, à mesure que s augmente, et, dans le cas de s infini, il devient l'unité. En effet, ce rapport est égal à

$$\frac{\int du(1-u^2)^{s-1}}{\int du(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}}.$$

Or l'élément $du(1-u^2)^{s-1}$ est plus grand que l'élément $du(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}$, ou $du(1-u^2)^{s-1}(1-u^2)^{\frac{1}{2}}$; l'intégrale du numérateur de la fraction précédente surpasse donc celle du dénominateur; cette fraction est donc plus grande que l'unité. Lorsque s est infini, ces intégrales n'ont de valeur sensible que lorsque u est infiniment petit; car, u étant fini, le facteur $(1-u^2)^{s-1}$ devient une fraction ayant un exposant infiniment grand; on peut donc alors supposer $(1-u^2)^{\frac{1}{2}} = 1$, ce qui rend le rapport $\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}}$ égal à l'unité.

Ce rapport est égal au produit d'une suite infinie de fractions, dont la première est $\frac{(2s+1)^2}{2s(2s+2)}$, et dont les autres s'en déduisent, en augmentant successivement s d'une unité; il devient $\frac{y_s}{y_{s-\frac{1}{2}}}$, en y changeant s dans $s+\frac{1}{2}$, et la fraction $\frac{(2s+1)^2}{2s(2s+2)}$ devient $\frac{(2s+2)^2}{(2s+1)(2s+3)}$; or on a, quel que soit s,

$$\frac{(2s+1)^2}{2s(2s+2)} > \frac{(2s+2)^2}{(2s+1)(2s+3)};$$

on a donc cette inégalité

$$\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}} > \frac{y_s}{y_{s-\frac{1}{2}}}.$$

En y changeant s en $s-\frac{1}{2}$, on aura

$$\frac{y_{s-1}}{y_{s-\frac{3}{2}}} > \frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}}.$$

Ces deux inégalités donnent

$$\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}} > \sqrt{\frac{y_s}{y_{s-1}}} < \sqrt{\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-\frac{3}{2}}}}.$$

Substituant au lieu des rapports $\frac{y_s}{y_{s-1}}$ et $\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-\frac{3}{2}}}$ leurs valeurs données par les équations aux différences en y_s, on aura

$$\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}} > \sqrt{1+\frac{1}{2s}} < \sqrt{1+\frac{1}{2s-1}};$$

on aura donc

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{4}{\pi} &> \frac{3.3}{2.4}.\frac{5.5}{4.6}\cdots\frac{(2s-1)(2s-1)}{(2s-2)2s}\sqrt{1+\frac{1}{2s}}, \\ \frac{4}{\pi} &< \frac{3.3}{2.4}.\frac{5.5}{4.6}\cdots\frac{(2s-1)(2s-1)}{(2s-2)2s}\sqrt{1+\frac{1}{2s-1}}. \end{aligned} \right.$$

Wallis publia en 1657, dans son *Arithmetica infinitorum*, ce beau théorème, l'un des plus curieux de l'Analyse, par lui-même et par la manière dont l'inventeur y est parvenu. Sa méthode renfermant les principes de la théorie des intégrales définies, que les géomètres ont spécialement cultivée dans ces derniers temps, je pense qu'ils en verront avec plaisir une exposition succincte dans le langage actuel de l'Analyse.

Wallis considère la suite des fractions dont le terme général est $\frac{1}{\int dx\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^s}$, n et s étant des nombres entiers, en commençant par zéro. En développant le binôme renfermé sous le signe intégral et intégrant chaque terme du développement, il obtient, pour une même valeur de n, les valeurs numériques de la fraction précédente, correspondantes à $s=0$, $s=1$, $s=2$, ..., ce qui lui donne une série horizontale, dont s est l'indice. En supposant successivement $n=0$, $n=1$, $n=2$, ..., il a autant de séries horizontales. Par là, il forme une Table à double entrée, dont s est l'indice horizontal et n l'indice vertical.

Dans cette Table, les séries horizontales et verticales sont les mêmes, en sorte que, en désignant par $y_{n,s}$ le terme correspondant aux indices n et s, on a cette équation fondamentale

$$y_{n,s}=y_{s,n}.$$

Wallis observe ensuite que la première série est l'unité; que la seconde est formée des nombres naturels; que la troisième est formée des nombres triangulaires, et ainsi de suite; de manière que le terme général $y_{n,s}$ de la série horizontale correspondante à n est

$$\frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{1.2.3\ldots n};$$

cette fraction étant égale à

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(s+n)}{1.2.3\ldots s},$$

on voit clairement que $y_{n,s}$ est égale à $y_{s,n}$.

Maintenant, si l'on parvenait à interpoler dans la Table précédente le terme correspondant à n et s égaux à $\frac{1}{2}$, on aurait le rapport du carré du diamètre à la surface du cercle; car le terme dont il s'agit est $\frac{1}{\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, ou $\frac{4}{\pi}$. Wallis cherche donc à faire cette interpolation. Elle est facile dans le cas où l'un des deux nombres n et s est un nombre entier. Ainsi, en faisant successivement s égal à un nombre entier moins $\frac{1}{2}$ dans la fonction $\frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{1.2.3\ldots n}$, il obtient tous les termes des suites horizontales, correspondants aux valeurs de s, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ...; et en faisant n égal à un nombre entier moins $\frac{1}{2}$ dans la fonction $\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+s)}{1.2.3\ldots s}$, il obtient tous les termes des suites verticales, correspondants aux valeurs de n, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, ... Mais la difficulté consiste à trouver les termes correspondants à n et s, égaux tous deux à des nombres entiers moins $\frac{1}{2}$.

Wallis observe pour cela que l'équation

$$y_{n,s} = \frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{1.2.3\ldots n}$$

donne

$$y_{n,s-1} = \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1.2.3\ldots n},$$

et qu'ainsi l'on a

$$(a) \qquad y_{n,s} = \frac{s+n}{s} y_{n,s-1};$$

en sorte que chaque terme d'une série horizontale est égal au précédent, multiplié par la fraction $\frac{s+n}{s}$; d'où il suit que tous les termes d'une série horizontale, à partir de $s=-\frac{1}{2}$, s croissant successivement de l'unité, sont les produits de $y_{n,-\frac{1}{2}}$ par les fractions $\frac{2n+1}{1}$, $\frac{2n+3}{3}$, $\frac{2n+5}{5}$, ..., et, à partir de $s=1$, ces termes sont les produits de $y_{n,0}$ par les fractions $\frac{n+1}{1}$, $\frac{n+2}{2}$, $\frac{n+3}{3}$, ... Il suppose que les mêmes lois subsistent dans le cas de n fractionnaire et égal à $\frac{1}{2}$, en sorte que l'on a tous les termes, à partir de $s=-\frac{1}{2}$, en multipliant $y_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ par la suite des fractions $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$, ... En désignant donc par $\Box$ le terme correspondant à $n=\frac{1}{2}$ et $s=\frac{1}{2}$, terme qui, comme on l'a vu, est égal à $\frac{4}{\pi}$, on a

$$\Box=\tfrac{2}{1}y_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}},$$

ce qui donne

$$y_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}\Box.$$

A partir de $y_{\frac{1}{2},0}$ ou de l'unité, il obtient les termes successifs de la série, correspondants à s entier, en multipliant successivement l'unité, par les fractions $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$, ... Il forme ainsi la série horizontale suivante qui correspond à $n=\frac{1}{2}$, et à s successivement égal à $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, ...,

$$(i)\qquad \tfrac{1}{2}\Box,\quad 1,\quad \Box,\quad \tfrac{3}{2},\quad \tfrac{4}{3}\Box,\quad \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4},\quad \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{6}{5}\Box,\quad \ldots,$$

série qui représente celle-ci,

$$\frac{1}{\int dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}},\quad \frac{1}{\int dx(1-x^2)^{0}},\quad \frac{1}{\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \ldots.$$

La série (i) donne généralement, s étant un nombre entier,

$$y_{\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2s}{2s-1}\Box,$$

$$y_{\frac{1}{2},s-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2s-1}{2s-2};$$

d'où l'on tire

$$(\mathrm{B})\qquad \Box=\frac{3.3}{2.4}\cdot\frac{5.5}{4.6}\cdots\frac{(2s-1)(2s-1)}{(2s-2)2s}\,\frac{y_{\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}}}{y_{\frac{1}{2},s-1}}.$$

Wallis considère ensuite que, dans la série (i), le rapport de chaque terme à celui qui le précède d'une unité est plus grand que l'unité et diminue sans cesse, en sorte que l'on a

$$\frac{y_{\frac{1}{2},s}}{y_{\frac{1}{2},s-1}}>\frac{y_{\frac{1}{2},s+1}}{y_{\frac{1}{2},s}}.$$

Cela résulte en effet de l'équation

$$y_{\frac{1}{2},s} = \frac{2s+1}{2s} y_{\frac{1}{2},s-1}.$$

Il suppose que cela a également lieu pour tous les termes consécutifs de la série, en sorte que l'on a les deux inégalités

$$\frac{y_{\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}}}{y_{\frac{1}{2},s-1}} > \frac{y_{\frac{1}{2},s}}{y_{\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}}} < \frac{y_{\frac{1}{2},s-1}}{y_{\frac{1}{2},s-\frac{3}{2}}};$$

d'où il tire, comme on l'a fait ci-dessus,

$$\frac{y_{\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}}}{y_{\frac{1}{2},s-1}} > \sqrt{1+\frac{1}{2s}} < \sqrt{1+\frac{1}{2s-1}};$$

par là, il change la formule (B) dans la formule (A).

Cette manière de procéder par voie d'induction dut paraître et parut, en effet, extraordinaire aux géomètres accoutumés à la rigueur des anciens. Aussi voyons-nous que de grands géomètres contemporains de Wallis en furent peu satisfaits, et Fermat, dans sa correspondance avec Digby, fit des objections peu dignes de lui contre cette méthode qu'il n'avait pas suffisamment approfondie. Elle doit être, sans doute, employée avec une circonspection extrême : Wallis dit lui-même, en répondant à Fermat, que c'est ainsi qu'il s'en est servi, et, pour en confirmer l'exactitude, il l'appuie sur un calcul par lequel lord Brouncker avait trouvé, par le moyen de la formule (A), le rapport de la circonférence au diamètre, compris entre les limites

$$3,14159\,26535\,69,$$
$$3,14159\,26536\,96,$$

limites qui coïncident dans les dix premiers chiffres avec ce rapport que l'on a porté au delà de cent décimales. Nonobstant ces confirmations, il est toujours utile de démontrer en rigueur ce que l'on obtient par ces moyens d'invention. Wallis observe que les anciens en avaient, sans doute, de semblables qu'ils n'ont point fait connaître, se contentant de donner leurs résultats appuyés de démonstrations synthétiques. Il regrette, avec raison, qu'ils nous aient celé leurs moyens d'y parvenir, et il dit à Fermat qu'on doit lui savoir gré de ne les avoir pas imités, et de n'avoir pas *détruit le pont après avoir passé le fleuve*. Il est digne de remarque que Newton, qui avait profité de cette méthode d'induction de Wallis et de ses résultats pour découvrir son théorème du binôme, ait mérité les reproches que Wallis fait aux anciens géomètres, en cachant les moyens qui l'avaient conduit à ses découvertes.

Reprenons la formule (B) de Wallis. Si l'on suppose

$$\frac{y_{\frac{1}{2}, s-\frac{1}{2}}}{y_{\frac{1}{2}, s-1}} = u_s,$$

cette formule donnera

$$u_{s-1} = \frac{(2s-1)^2}{(2s-2)2s} u_s$$

ou

$$(l) \qquad 0 = 2s(2s-2)(u_s - u_{s-1}) + u_s.$$

Soit

$$u_s = A^{(0)} + \frac{A^{(1)}}{s+1} + \frac{A^{(2)}}{(s+1)(s+2)} + \frac{A^{(3)}}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \ldots,$$

et considérons ce que produit, dans le second membre de l'équation (l), le terme

$$\frac{A^{(r)}}{(s+1)\ldots(s+r)}.$$

En n'ayant égard qu'à ce terme dans u_s, on aura

$$u_s - u_{s-1} = \frac{-rA^{(r)}}{s(s+1)(s+2)\ldots(s+r)};$$

le terme $2s(2s-2)(u_s - u_{s-1})$ de l'équation (l) devient ainsi

$$\frac{-4rA^{(r)}(s-1)}{(s+1)\ldots(s+r)},$$

ou

$$\frac{-4rA^{(r)}}{(s+1)\ldots(s+r-1)}+\frac{4r(r+1)A^{(r)}}{(s+1)\ldots(s+r)}.$$

Le terme de u_s dépendant de $A^{(r+1)}$ produira des termes semblables, et ainsi des autres. En comparant donc dans l'équation (l) les termes qui ont le même dénominateur $(s+1)\ldots(s+r)$, on aura

$$0=4r(r+1)A^{(r)}-4(r+1)A^{(r+1)}+A^{(r)},$$

ce qui donne

$$A^{(r+1)}=\frac{(2r+1)^2A^{(r)}}{4(r+1)}.$$

Il est visible, par ce qui précède, que u_s se réduit à l'unité lorsque s est infini, ce qui donne $A^{(0)}=1$. De là on tire

$$u_s=1+\frac{1^2}{4(s+1)}+\frac{1^2.3^2}{4^2.1.2(s+1)(s+2)}+\frac{1^2.3^2.5^2}{4^3.1.2.3(s+1)(s+2)(s+3)}+\ldots=\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}}.$$

Le rapport du terme moyen du binôme $(1+1)^{2s}$ au binôme entier est

$$\frac{(s+1)(s+2)\ldots 2s}{2^{2s}.1.2.3\ldots s}$$

ou

$$\frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{2.4.6\ldots 2s}.$$

En nommant donc T ce terme moyen, la formule (B) donnera

$$T^2=\frac{1}{s\pi u_s}.$$

Ce théorème et l'expression précédente de u_s en série sont dus à Stirling, et l'on voit comme ils se rattachent au théorème et à l'analyse de Wallis. Cette valeur de T^2 peut servir à déterminer par approximation le rapport de la circonférence au diamètre, ce qui était l'objet de Wallis; ou, ce rapport étant supposé connu, elle donne le terme moyen du binôme, ce qui était l'objet de Stirling.

II.

L'expression de $\Delta^n s^i$, donnée par la formule (μ') du n° 40 du Livre I[er], a été conclue de l'expression de $\Delta^n \frac{1}{s^i}$, en changeant dans celle-ci i en $-i$. Ce passage du positif au négatif est analogue aux inductions que Wallis et d'autres géomètres ont si heureusement employées. Tous ces moyens d'invention, qui tiennent à la généralité de l'Analyse, exigent dans leur usage une grande circonspection, et il est toujours bon d'en démontrer directement les résultats. C'est ce que nous allons faire relativement à la formule (μ').

Considérons l'intégrale

$$\int \frac{d\varpi\, c^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i+1}},$$

prise depuis $\varpi = -\infty$ jusqu'à $\varpi = \infty$. Cette intégrale est égale à

$$\frac{-\sqrt{-1}}{i}\,\frac{c^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i}} + \frac{as}{i}\int \frac{d\varpi\, c^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i}} + \text{const.}$$

Cette constante est

$$\frac{\sqrt{-1}}{i}\,\frac{c^{as\varpi\sqrt{-1}}}{(1+\varpi\sqrt{-1})^{i}},$$

ϖ étant supposé infini. En la réunissant au terme

$$\frac{-\sqrt{-1}}{i}\,\frac{c^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i}},$$

dans lequel on doit pareillement supposer ϖ infini, on aura

$$\frac{\sqrt{-1}}{i}\;\frac{\left\{\begin{array}{c}\cos(as\varpi)\left[(1-\varpi\sqrt{-1})^{i}-(1+\varpi\sqrt{-1})^{i}\right]\\ +\sqrt{-1}\,\sin(as\varpi)\left[(1-\varpi\sqrt{-1})^{i}+(1+\varpi\sqrt{-1})^{i}\right]\end{array}\right\}}{(1+\varpi^2)^{i}}.$$

Le numérateur de cette fraction est réel, ainsi que son dénominateur, et il est visible qu'elle devient nulle, en y faisant ϖ infini ; on a donc

$$\int \frac{d\varpi\, c^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i+1}} = \frac{as}{i} \int \frac{d\varpi\, c^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i}}.$$

De là il est facile de conclure qu'en faisant $i = r - \frac{m}{n}$, r étant un nombre entier positif, on aura

$$\int \frac{d\varpi\, c^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i+1}} = \frac{a^r s^r}{i(i-1)\ldots\left(1-\frac{m}{n}\right)} \int \frac{d\varpi\, c^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}}.$$

Soit $as\varpi = \varpi'$, et faisons $as = q$; nous aurons

$$a^r s^r \int \frac{d\varpi\, c^{-as\varpi\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}} = q^i \int \frac{d\varpi'\, c^{-\varpi'\sqrt{-1}}}{(q-\varpi'\sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}},$$

les intégrales étant prises depuis ϖ et ϖ' égaux à $-\infty$ jusqu'à ϖ et ϖ' égaux à $+\infty$. Désignons par k l'intégrale

$$\int \frac{d\varpi'\, c^{-\varpi'\sqrt{-1}}}{(q-\varpi'\sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}};$$

on aura

$$\frac{dk}{dq} = -\left(1-\frac{m}{n}\right) \int \frac{d\varpi'\, c^{-\varpi'\sqrt{-1}}}{(q-\varpi'\sqrt{-1})^{2-\frac{m}{n}}}$$

$$= \frac{\sqrt{-1}\; c^{-\varpi'\sqrt{-1}}}{(q-\varpi'\sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}} - \int \frac{d\varpi'\, c^{-\varpi'\sqrt{-1}}}{(q-\varpi'\sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}} + \text{const.}$$

On verra, comme ci-dessus, que ce dernier membre se réduit au terme affecté du signe intégral, terme qui est égal à $-k$; on a donc

$$\frac{dk}{dq} = -k,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$k = \mathrm{A}\, c^{-q},$$

A étant une constante arbitraire indépendante de q. Il est visible que cette équation suppose q positif; car, en faisant q infini positif ou négatif, k est infiniment petit. On a donc

$$\int \frac{d\varpi\, c^{as(1-\varpi\sqrt{-1})}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i+1}} = \frac{A a^i s^i}{i(i-1)\ldots\left(1-\frac{m}{n}\right)}.$$

Cette équation a lieu, quelle que soit la valeur de a, pourvu que as soit positif. En faisant $s=1$ et changeant a dans une autre constante a', on aura

$$\int \frac{d\varpi\, c^{a'(1-\varpi\sqrt{-1})}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i+1}} = \frac{A a'^i}{i(i-1)\ldots\left(1-\frac{m}{n}\right)};$$

on aura donc

$$s^i = \frac{a'^i}{a^i}\,\frac{\displaystyle\int \frac{d\varpi\, c^{as(1-\varpi\sqrt{-1})}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i+1}}}{\displaystyle\int \frac{d\varpi\, c^{a'(1-\varpi\sqrt{-1})}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i+1}}},$$

ce qui donne

$$\Delta^n s^i = \frac{a'^i}{a^i}\,\frac{\displaystyle\int \frac{d\varpi\, c^{as(1-\varpi\sqrt{-1})}\left(c^{a(1-\varpi\sqrt{-1})}-1\right)^n}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i+1}}}{\displaystyle\int \frac{d\varpi\, c^{a'(1-\varpi\sqrt{-1})}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i+1}}}.$$

Pour avoir en séries les intégrales, nous supposerons

$$\frac{c^{as(1-\varpi\sqrt{-1})}\left(c^{a(1-\varpi\sqrt{-1})}-1\right)^n}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i+1}} = c^{as}(c^a-1)^n c^{-t^2};$$

nous aurons, en prenant les logarithmes,

$$-as\varpi\sqrt{-1}+n\log\left[1+\frac{c^a}{c^a-1}\left(c^{-a\varpi\sqrt{-1}}-1\right)\right]-(i+1)\log(1-\varpi\sqrt{-1}) = -t^2.$$

Déterminons a de manière que, dans le développement du premier membre de cette équation, la première puissance de ϖ disparaisse, et supposons ce développement égal à

$$-fa^2\varpi^2 - f'a^3\varpi^3 - f''a^4\varpi^4 - \ldots = -t^2;$$

nous aurons d'abord

$$o = \frac{i+1}{a} - s - \frac{nc^a}{c^a-1},$$

ensuite

$$f = \frac{i+1}{2a^2} + \frac{n}{2}\,\frac{c^a}{c^a-1} - \frac{n}{2}\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^2,$$

$$f' = \sqrt{-1}\left[\frac{i+1}{3a^3} - \frac{n}{6}\,\frac{c^a}{c^a-1} + \frac{n}{2}\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^2 - \frac{n}{3}\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^3\right],$$

$$f'' = -\frac{i+1}{4a^4} - \frac{n}{24}\,\frac{c^a}{c^a-1} + \frac{7n}{24}\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^2 - \frac{n}{2}\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^3 + \frac{n}{24}\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^4,$$

. . . .

On a ensuite, par le retour des séries,

$$a\varpi = \frac{t}{\sqrt{f}}\left(1 - \frac{f't}{2f\sqrt{f}} + \frac{5f'^2 - 4ff''}{8f^3}\,t^2 + \ldots\right);$$

on a donc, en prenant les intégrales depuis ϖ et t égaux à $-\infty$ jusqu'à t et ϖ égaux à $+\infty$,

$$\int \frac{d\varpi\, c^{as(1-\varpi\sqrt{-1})}\left(c^{a(1-\varpi\sqrt{-1})} - 1\right)^n}{\left(1-\varpi\sqrt{-1}\right)^n}$$

$$= \frac{c^{as}(c^a-1)^n}{a}\int \frac{c^{-t^2}\,dt}{\sqrt{f}}\left(1 - \frac{f't}{f\sqrt{f}} + 3\,\frac{5f'^2 - 4ff''}{8f^3}\,t^2 + \ldots\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}}\left(1 + \frac{15f'^2 - 12ff''}{16f^3} + \ldots\right)\frac{c^{as}(c^a-1)^n}{a}.$$

Si l'on suppose $s = 1$, $n = 0$ et si l'on change a en a', on aura

$$a' = i+1, \qquad f = \frac{1}{2(i+1)}, \qquad f' = \frac{\sqrt{-1}}{3(i+1)^2}, \qquad f'' = \frac{1}{4(i+1)^3}, \quad \ldots;$$

on aura donc

$$\int \frac{d\varpi\, c^{a'(1-\varpi\sqrt{-1})}}{\left(1-\varpi\sqrt{-1}\right)^{i+1}} = \frac{c^{i+1}}{i+1}\left(1 - \frac{1}{12i} + \ldots\right)\sqrt{2(i+1)}\,\pi.$$

De là il est aisé de conclure

$$\Delta^n s^i = \frac{\left(\frac{i}{a}\right)^{i+1} c^{as-i}(c^a-1)^n}{\sqrt{\frac{i(i+1)}{a^2} - in\frac{c^a}{(c^a-1)^2}}}\left(1 + \frac{15f'^2 - 12ff''}{16f^3} + \frac{1}{12i} + \dots\right),$$

formule qui coïncide avec la formule (μ') du n° 40 du Livre I$^{\text{er}}$.

Cette formule suppose a positif, et c'est ce qui a lieu lorsque $i+1$ surpasse n. En effet, si, dans l'équation

$$0 = \frac{i+1}{a} - s - \frac{nc^a}{c^a-1},$$

on suppose a infiniment petit, le second membre est positif et égal à $\frac{i+1-n}{a}$; ensuite, a étant positif et infini, ce second membre devient négatif et égal à $-s-n$; il y a donc une valeur positive de a qui satisfait à cette équation. Mais il n'y en a qu'une; car, s'il y en avait deux, la fonction $\frac{i+1}{a} - s - \frac{nc^a}{c^a-1}$ aurait un maximum entre ces deux valeurs; on aurait donc à ce maximum

$$0 = -\frac{i+1}{a^2} + \frac{nc^a}{(c^a-1)^2},$$

ce qui ne se peut, a étant positif. En effet, $(c^a-1)^2$ est plus grand que a^2c^a ou $c^a - 1 > ac^{\frac{a}{2}}$, ce qui est visible; car on a

$$c^{\frac{a}{2}} - c^{-\frac{a}{2}} = a + \frac{a^3}{4.1.2.3} + \dots > a;$$

on a donc

$$\frac{nc^a}{(c^a-1)^2} < \frac{n}{a^2} < \frac{i+1}{a^2}.$$

Ainsi la formule (μ') peut être employée, tant que $i+1$ surpasse n, ce qui est conforme à ce que l'on a dit dans le n° 41 du Livre I$^{\text{er}}$, d'après la considération des passages du réel à l'imaginaire, passages que l'analyse précédente confirme.

III.

La formule (p) du n° 42 du Livre I[er] est fort remarquable : elle peut se démontrer de la manière suivante, qui montre distinctement la raison pour laquelle la série des différences doit être arrêtée, lorsque la quantité sous l'exposant de la puissance devient négative.

Considérons l'intégrale

$$\int x^{-\frac{m}{n}} dx \cos\left(zx - \frac{m\pi}{2n}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n,$$

et donnons-lui cette forme

$$\cos\frac{m\pi}{2n}\int x^{-\frac{m}{n}} dx \cos zx \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n + \sin\frac{m\pi}{2n}\int x^{-\frac{m}{n}} dx \sin zx \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n,$$

les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini. Supposons d'abord n pair et égal à $2i$; on aura, par les formules connues,

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2i} = \frac{(-1)^i}{2^{2i-1}x^{2i}}\left\{\begin{array}{l} \cos nx - n\cos(n-2)x + \dfrac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x - \ldots \\ \quad \pm \dfrac{1}{2}\,\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i} \end{array}\right\},$$

le signe $+$ ayant lieu, si i est pair, et le signe $-$, si i est impair. En multipliant cette équation par $\cos zx$, on aura

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2i}\cos zx = \frac{(-1)^i}{2^{2i}x^{2i}}\left\{\begin{array}{l} \cos(n\pm z)x - n\cos(n-2\pm z)x \pm \ldots \\ \quad \pm \dfrac{1}{2}\,\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}\cos(\tfrac{1}{2}zx) \end{array}\right\},$$

où l'on doit observer que, par $\cos(n-2r\pm z)x$, je comprends la somme des cosinus $\cos(n-2r+z)x$ et $\cos(n-2r-z)x$, $2r$ étant ici au plus égal à n ou $2i$. Multiplions le second membre de cette équation par $x^{-\frac{m}{n}}dx$; on a généralement

$$
\begin{aligned}
&\int x^{-n-\frac{m}{n}}dx\cos(n-2r\pm z)x\\
&\quad=-\frac{\cos(n-2r\pm z)x}{\left(n+\frac{m}{n}-1\right)x^{n+\frac{m}{n}-1}}+\frac{(n-2r\pm z)\sin(n-2r\pm z)x}{\left(n+\frac{m}{n}-1\right)\left(n+\frac{m}{n}-2\right)x^{n+\frac{m}{n}-2}}\\
&\quad+\frac{(n-2r\pm z)^2\cos(n-2r\pm z)x}{\left(n+\frac{m}{n}-1\right)\left(n+\frac{m}{n}-2\right)\left(n+\frac{m}{n}-3\right)x^{n+\frac{m}{n}-3}}\\
&\quad-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad+\frac{(-1)^i(n-2r\pm z)^n}{\left(n+\frac{m}{n}-1\right)\ldots\frac{m}{n}}\int dx\,x^{-\frac{m}{n}}\cos(n-2r\pm z)x.
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
&\int x^{-\frac{m}{n}}dx\cos zx\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\\
&=\frac{(-1)^i}{2^{2i}x^{n+\frac{m}{n}}}\left|\begin{array}{l}
-\dfrac{x}{n+\frac{m}{n}-1}\left\{\begin{array}{l}\cos(n\pm z)x-n\cos(n-2\pm z)x\\ +\dfrac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4\pm z)x\\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm\dfrac{1}{2}\dfrac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}\cos(\pm zx)\end{array}\right\}\\
+\dfrac{x^2}{\left(n+\frac{m}{n}-1\right)\left(n+\frac{m}{n}-2\right)}\left\{\begin{array}{l}(n\pm z)\sin(n\pm z)x\\ -n(n-2\pm z)\sin(n-2\pm z)x\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\\
+\dfrac{x^3}{\left(n+\frac{m}{n}-1\right)\left(n+\frac{m}{n}-2\right)\left(n+\frac{m}{n}-3\right)}\left\{\begin{array}{l}(n\pm z)^2\cos(n\pm z)x\\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\\
-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right|\\
&+\frac{1}{2^{2i}\left(n+\frac{m}{n}-1\right)\ldots\frac{m}{n}}\int dx\,x^{-\frac{m}{n}}\left\{\begin{array}{l}(n\pm z)^n\cos(n\pm z)x\\ -n(n-2\pm z)^n\cos(n-2\pm z)x\\ +\dfrac{n(n-1)}{1.2}(n-4\pm z)^n\cos(n-4\pm z)x\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\dfrac{1}{2}\dfrac{n(n-1)\ldots(n+i-1)}{1.2.3\ldots i}z^n\cos(\pm zx)\end{array}\right\}\\
&+\text{const.}
\end{aligned}
$$

Cette constante doit être déterminée de manière que le second membre de cette équation soit nul lorsque x est nul : or on a, par ce qui précède,

$$\cos(n \pm z)x - n\cos(n - 2 \pm z)x + \ldots = (-1)^i 2^{2i}(\sin x)^n \cos zx.$$

En différentiant cette équation par rapport à x, on a

$$\begin{aligned} &-[(n \pm z)\sin(n \pm z)x - n(n - 2 \pm z)\sin(n - 2 \pm z)x + \ldots] \\ &= (-1)^i 2^{2i} \frac{d[(\sin x)^n \cos zx]}{dx}; \end{aligned}$$

différentiant encore, on a

$$\begin{aligned} &-[(n \pm z)^2 \cos(n \pm z)x - n(n - 2 \pm z)^2 \cos(n - 2 \pm z)x + \ldots] \\ &= (-1)^i 2^{2i} \frac{d^2[(\sin x)^n \cos zx]}{dx^2}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite : or on a, aux deux limites $x = 0$ et x infini,

$$\begin{aligned} x^{-n-\frac{m}{n}+1} \quad (\sin x)^n \cos zx &= 0, \\ x^{-n-\frac{m}{n}+2} \frac{d[(\sin x)^n \cos zx]}{dx} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On a donc, en intégrant depuis x nul jusqu'à x infini,

$$\begin{aligned} &\int x^{-\frac{m}{n}} dx \cos zx \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \\ &= \frac{1}{2^{2i}\left(n + \frac{m}{n} - 1\right) \cdots \frac{m}{n}} \\ &\times \int x^{-\frac{m}{n}} dx \left\{ \begin{array}{l} (n \pm z)^n \cos(n \pm z)x \\ - n(n - 2 \pm z)^n \cos(n - 2 \pm z)x \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm \frac{1}{2} \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i} z^n \cos(\pm zx) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Maintenant on a, en faisant $(n-2r\pm z)x = x'$,

$$\int x^{-\frac{m}{n}} dx (n-2r\pm z)^n \cos(n-2r\pm z)x$$
$$= (n-2r\pm z)^{n-1+\frac{m}{n}} \int dx' x'^{-\frac{m}{n}} \cos x'.$$

On a de plus, comme nous le démontrerons ci-après,

$$\int x'^{-\frac{m}{n}} dx' \cos x' = k' \sin\frac{m\pi}{2n},$$
$$\int x'^{-\frac{m}{n}} dx' \sin x' = k' \cos\frac{m\pi}{2n},$$

k' étant égal à $\int t^{-\frac{m}{n}} dt\, c^{-t}$, l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t infini. Cela posé, on aura

$$\int x^{-\frac{m}{n}} dx \cos zx \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$
$$= \frac{k' \sin\frac{m\pi}{2n}}{2^n\left(n+\frac{m}{n}-1\right)\left(n+\frac{m}{n}-2\right)\cdots\frac{m}{n}}$$
$$\times \left\{\begin{array}{l} (n+z)^{n-1+\frac{m}{n}} - n(n+z-2)^{n-1+\frac{m}{n}} \\ + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+z-4)^{n-1+\frac{m}{n}} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm \frac{1}{2}\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i} z^n \\ + (n-z)^{n-1+\frac{m}{n}} - n(n-z-2)^{n-1+\frac{m}{n}} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm \frac{1}{2}\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}(-z)^{n-1+\frac{m}{n}} \end{array}\right\}.$$

Il est facile de voir, par l'analyse précédente, que, si $n-z-2r$ est négatif, il faut changer la puissance $(n-z-2r)^{n-1+\frac{m}{n}}$ dans $(2r+z-n)^{n-1+\frac{m}{n}}$, parce que l'on a

$$\cos(n-z-2r)x = \cos(2r+z-n)x.$$

On trouvera, par la même analyse,

$$\int x^{-\frac{m}{n}}\,dx\sin zx\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

$$=\frac{1}{2^n\left(n+\dfrac{m}{n}-1\right)\cdots\dfrac{m}{n}}\int x^{-\frac{m}{n}}dx\left\{\begin{array}{l}(n+z)^n\sin(n+z)x\\ -n(n+z-2)^n\sin(n+z-2)x\\ +\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ -(n-z)^n\sin(n-z)x\\ +n(n-z-2)^n\sin(n-z-2)x\\ -\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}.$$

Or on a

$$\int x^{-\frac{m}{n}}(n\pm z-2r)^n\,dx\sin(n\pm z-2r)x=(n\pm z-2r)^{n-1+\frac{m}{n}}k'\cos\frac{m\pi}{2n}.$$

Si $(n-z-2r)$ est négatif, on a

$$\begin{aligned}&\int x^{-\frac{m}{n}}(n-z-2r)^n\,dx\sin(n-z-2r)x\\ &=-\int x^{-\frac{m}{n}}dx(2r+z-r)^n\sin(2\ +z-n)x\\ &=-(2r+z-n)^{n-1+\frac{m}{n}}k'\cos\frac{m\pi}{2n}.\end{aligned}$$

De là on tire

$$(i)\left\{\begin{aligned}&\cos\frac{m\pi}{2n}\int x^{-\frac{m}{n}}dx\cos zx\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n+\sin\frac{m\pi}{2n}\int x^{-\frac{m}{n}}dx\sin zx\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\\ &=\frac{k'\sin\dfrac{m\pi}{n}\left[(n+z)^{n-1+\frac{m}{n}}-n(n+z-2)^{n-1+\frac{m}{n}}+\dfrac{n(n-1)}{1.2}(n+z-4)^{n-1+\frac{m}{n}}-\dots\right]}{2^n\left(n+\dfrac{m}{n}-1\right)\left(n+\dfrac{m}{n}-2\right)\cdots\dfrac{m}{n}},\end{aligned}\right.$$

la série étant continuée jusqu'à ce que, dans la puissance $(n+z-2r')^{n-1+\frac{m}{n}}$, la quantité $n+z-2r'$ devienne négative, $2r'$ pouvant ici s'étendre jusqu'à $2n$. En effet, il est visible que dans les expressions des deux termes du premier membre de l'équation (i), les termes relatifs à la puissance $(n+z-2r)^{n-1+\frac{m}{n}}$ sont les mêmes et s'ajoutent. Les termes relatifs à la puissance $(n-z-2r)^{n-1+\frac{m}{n}}$ sont les mêmes et de signes contraires, tant que $n-z-2r$ est positif;

mais ils ont le même signe lorsque $n-z-2r$ est négatif; et la puissance précédente doit, par ce qui précède, être changée dans $(2r+z-n)^{n-1+\frac{m}{n}}$. La somme des termes relatifs à cette puissance est

$$\frac{(-1)^r\dfrac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}(z+2r-n)^{n-1+\frac{m}{n}}}{2^n\left(n+\dfrac{m}{n}-1\right)\cdots\dfrac{m}{n}}k'\sin\frac{m\pi}{n};$$

or ce terme se rencontre dans la série du second membre de l'équation (i). Cette série contient le terme

$$\frac{(-1)^{r'}\dfrac{n(n-1)\ldots(n-r'+1)}{1.2.3\ldots r'}(n+z-2r')^{n-1+\frac{m}{n}}}{2^n\left(n+\dfrac{m}{n}-1\right)\cdots\dfrac{m}{n}}k'\sin\frac{m\pi}{n},$$

$n+z-2r'$ étant supposé positif. Si l'on fait $n-2r'=2r-n$, ce qui donne $r'=n-r$, ce terme devient égal au précédent; car alors on a $(-1)^{r'}=(-1)^r$ et

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r'+1)}{1.2.3\ldots r'}=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}.$$

La formule (T) du n° 24 du Livre Ier donne

$$\frac{1}{r-1}\int t^{r-1}\,dt\,c^{-t}\int t^{1-r}\,dt\,c^{-t}=\frac{\pi}{\sin(r-1)\pi},$$

les intégrales étant prises depuis t nul jusqu'à t infini. Si l'on suppose $r-1=\frac{m}{n}$, on aura

$$\int t^{\frac{m}{n}}\,dt\,c^{-t}\int t^{-\frac{m}{n}}\,dt\,c^{-t}=\frac{\dfrac{m}{n}\pi}{\sin\dfrac{m\pi}{n}}.$$

Ce que nous avons nommé k dans la formule (p) du n° 42 du Livre Ier est égal à $\int t^{n+m-1}\,dt\,c^{-t^n}$, et il est facile de voir que, les intégrales étant prises depuis t nul jusqu'à t infini, on a

$$\int t^{n-1+m}\,dt\,c^{-t^n} = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m}{n}}\,dt\,c^{-t};$$

on a donc

$$nkk' = \frac{\frac{m}{n}\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

En multipliant les deux membres de l'équation (i) par $\frac{nk2^n}{\pi}$ et substituant dans le second membre ainsi multiplié, au lieu de nkk', sa valeur $\frac{\frac{m}{n}\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}$, on aura la formule (p) citée.

La même analyse s'applique au cas où n est un nombre impair. Elle montre distinctement la raison pour laquelle la série des différences doit s'arrêter, lorsque la quantité élevée à la puissance $n-1+\frac{m}{n}$ devient négative.

Il nous reste maintenant à démontrer les formules

$$\int x^{-\frac{m}{n}}\,dx'\cos x' = k'\sin\frac{m\pi}{n},$$

$$\int x^{-\frac{m}{n}}\,dx'\,\sin x' = k'\cos\frac{m\pi}{n}.$$

Pour cela, considérons l'intégrale définie

$$\int\frac{dx\,c^{-ax}}{x^{\omega}}(\cos rx - \sqrt{-1}\,\sin rx),$$

cette intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini; ω étant moindre que l'unité. En la développant par les expressions connues de $\cos rx$ et de $\sin rx$, en séries, elle devient

$$\int\frac{dx\,c^{-ax}}{x^{\omega}}\left[1-\frac{r^2x^2}{1.2}+\frac{r^4x^4}{1.2.3.4}-rx\sqrt{-1}\left(1-\frac{r^2x^2}{1.2.3}+\frac{r^4x^4}{1.2.3.4.5}-\dots\right)\right].$$

Or on a généralement, en prenant l'intégrale depuis x nul jusqu'à x infini,

$$\int x^{i-\omega}\,dx\,c^{-ax} = \frac{(1-\omega)(2-\omega)\ldots(i-\omega)}{a^i}\int \frac{dx\,c^{-ax}}{x^\omega}.$$

En faisant ensuite $ax = t$, on a

$$\int \frac{dx\,c^{-ax}}{x^\omega} = \frac{1}{a^{1-\omega}}\int t^{-\omega}\,dt\,c^{-t} = \frac{k'}{a^{1-\omega}},$$

l'intégrale relative à t étant prise depuis t nul jusqu'à t infini, et k' étant supposé exprimer l'intégrale $\int t^{-\omega}\,dt\,c^{-t}$, prise dans ces limites. On aura ainsi

$$\int x^{i-\omega}\,dx\,c^{-ax} = \frac{(1-\omega)(2-\omega)\ldots(i-\omega)k'}{a^{i+1-\omega}};$$

d'où l'on tire

$$\int \frac{dx\,c^{-ax}}{x^\omega}(\cos rx - \sqrt{-1}\sin rx)$$
$$= \frac{k'}{a^{1-\omega}}\left\{\begin{array}{l} 1 - \dfrac{(1-\omega)(2-\omega)}{1.2}\dfrac{r^2}{a^2} + \dfrac{(1-\omega)(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)}{1.2.3.4}\dfrac{r^4}{a^4} - \ldots \\ - \sqrt{-1}\left[(1-\omega)\dfrac{r}{a} - \dfrac{(1-\omega)(2-\omega)(3-\omega)}{1.2.3}\dfrac{r^3}{a^3} - \ldots\right] \end{array}\right\}.$$

Si l'on fait $\frac{r}{a} = s$, le second membre de cette équation devient

$$\frac{k'}{a^{1-\omega}(1+s\sqrt{-1})^{1-\omega}}.$$

Soit A un angle dont s soit la tangente; on aura

$$\sin A = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, \qquad \cos A = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}},$$

ce qui donne

$$\cos A - \sqrt{-1}\sin A = \frac{\sqrt{1+s^2}}{1+s\sqrt{-1}};$$

d'où l'on tire, par le théorème connu,

$$\cos(1-\omega)A - \sqrt{-1}\sin(1-\omega)A = \frac{(1+s^2)^{\frac{1-\omega}{2}}}{(1+s\sqrt{-1})^{1-\omega}}.$$

La tangente s est non seulement la tangente de l'angle A, mais encore celle du même angle, augmenté d'un multiple quelconque de la demi-circonférence; mais le premier membre de cette équation devant se réduire à l'unité, lorsque s est nul, il est clair que l'on doit prendre pour A le plus petit des angles qui ont s pour tangente.

Maintenant, cette équation donne, en y substituant $\frac{r}{a}$ au lieu de s,

$$\frac{k'}{a^{1-\omega}\left(1+s\sqrt{-1}\right)^{1-\omega}} = \frac{k'}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}}\left[\cos(1-\omega)A - \sqrt{-1}\sin(1-\omega)A\right];$$

on a donc

$$\int \frac{dx\, c^{-ax}}{x^{\omega}}\left(\cos rx - \sqrt{-1}\sin rx\right)$$
$$= \frac{k'}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}}\left[\cos(1-\omega)A - \sqrt{-1}\sin(1-\omega)A\right].$$

En comparant séparément les quantités réelles et les imaginaires, on a

$$\int \frac{dx \cos rx\, c^{-ax}}{x^{\omega}} = \frac{k'}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}}\cos(1-\omega)A,$$
$$\int \frac{dx \sin rx\, c^{-ax}}{x^{\omega}} = \frac{k'}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}}\sin(1-\omega)A.$$

Si a est nul, $\frac{r}{a}$ est infini, et le plus petit angle, dont il est la tangente, est $\frac{\pi}{2}$; on a donc

$$\int \frac{dx \cos rx}{x^{\omega}} = \frac{k'}{r^{1-\omega}}\sin\frac{\omega\pi}{2},$$
$$\int \frac{dx \sin rx}{x^{\omega}} = \frac{k'}{r^{1-\omega}}\cos\frac{\omega\pi}{2}.$$

En supposant $r=1$ et $\omega=\frac{m}{n}$, on aura les équations qu'il s'agissait de démontrer.

SUPPLÉMENTS.

PREMIER SUPPLÉMENT.

SUR L'APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS A LA PHILOSOPHIE NATURELLE.

Les phénomènes de la nature sont le plus souvent enveloppés de tant de circonstances étrangères, un si grand nombre de causes perturbatrices y mêlent leur influence, qu'il est très difficile de les reconnaître. On ne peut y parvenir qu'en multipliant les observations ou les expériences, afin que les effets étrangers venant à se détruire réciproquement, les résultats moyens mettent en évidence ces phénomènes et leurs éléments divers. Plus les observations sont nombreuses et moins elles s'écartent entre elles, plus leurs résultats approchent de la vérité. On remplit cette dernière condition par le choix des méthodes, par la précision des instruments et par le soin que l'on met à bien observer. Ensuite on détermine par la théorie des probabilités les résultats moyens les plus avantageux ou ceux qui donnent le moins de prise à l'erreur. Mais cela ne suffit pas; il est de plus nécessaire d'apprécier la probabilité que les erreurs de ces résultats sont comprises dans des limites données. Sans cela, on n'a qu'une connaissance imparfaite du degré d'exactitude obtenu. Des formules propres à cet objet sont donc un vrai perfectionnement de la méthode des sciences, et qu'il est bien important d'ajouter à cette méthode. L'analyse qu'elles exigent est la plus délicate et la plus difficile de la théorie des probabilités. C'est une des choses que j'ai eue principalement en vue dans mon Ouvrage, dans lequel je suis parvenu à des formules de ce genre, qui ont l'avantage remarquable d'être indépendantes de la loi de probabilités des erreurs et de ne renfermer que des quantités données par les observations mêmes et par leurs expressions. Je vais en rappeler ici les principes.

Chaque observation a pour expression analytique une fonction des éléments que l'on veut déterminer; et, si ces éléments sont à peu près connus, cette fonction devient une fonction linéaire de leurs corrections. En l'égalant à l'observation même, on forme ce que l'on nomme *équation de condition*. Si l'on a un grand nombre d'équations semblables, on les combine, de manière à obtenir autant d'équations finales qu'il y a d'éléments dont on détermine ensuite les corrections, en résolvant ces équations. Mais quelle est la manière la plus avantageuse de combiner les équations de condition pour obtenir les équations finales? Quelle est la loi des erreurs dont les éléments que l'on en tire sont encore susceptibles? C'est ce que la théorie des probabilités fait connaître. La formation d'une équation finale, au moyen des équations de condition, revient à multiplier chacune de celles-ci par un facteur indéterminé et à réunir ces produits; mais il faut choisir le système de facteurs qui donne la plus petite erreur à craindre. Or il est visible que, si l'on multiplie les erreurs possibles d'un élément par leurs probabilités respectives, le système le plus avantageux sera celui dans lequel la somme de ces produits, tous pris positivement, est un minimum; car une erreur positive ou négative doit être considérée comme une perte. En formant donc cette somme de produits, la condition du minimum déterminera le système de facteurs qu'il faut choisir. On trouve ainsi que ce système est celui des coefficients des éléments dans chaque équation de condition, en sorte que l'on forme une première équation finale en multipliant respectivement chaque équation de condition par son coefficient du premier élément et en réunissant toutes ces équations ainsi multipliées. On forme une seconde équation finale en employant de même les coefficients du second élément, et ainsi de suite. De cette manière, les éléments et les lois des phénomènes, renfermés dans le recueil d'un grand nombre d'observations, se développent avec le plus d'évidence. J'ai donné, dans le n° 21 du Livre II de ma *Théorie analytique des Probabilités,* l'expression de l'erreur moyenne à craindre sur chaque élément. Cette expression donne la probabilité des erreurs dont l'élément est encore susceptible, et qui est proportionnelle au nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, élevé à une puissance égale au carré de l'erreur pris en moins et divisé par le carré du double de cette expression et par le rapport de la circonférence au diamètre. Le coefficient du carré négatif de l'erreur dans cet exposant peut donc être considéré comme le module de la probabilité des erreurs, puisque l'erreur restant la même, la probabilité décroît avec rapidité quand il augmente, en sorte que le résultat obtenu pèse, si je puis ainsi dire, vers la vérité, d'autant plus que ce module est plus grand. Je nommerai, par cette raison, ce module *poids* du résultat. Par une analogie remarquable de ces poids avec ceux des corps comparés à leur centre commun de gravité, il arrive que, si un même élément est donné par divers systèmes, composés chacun d'un grand nombre d'observations, le résultat moyen le plus avantageux de leur ensemble est la somme des produits de chaque résultat partiel par son poids, cette somme étant divisée par la somme de tous les poids. De plus le poids total des divers systèmes est la somme de leurs poids partiels, en sorte que la probabilité du résultat moyen de leur ensemble est proportionnelle au nombre qui a l'unité pour logarithme hyperbolique, élevé à une puissance égale au carré de l'erreur, pris en moins et multiplié par la somme de tous les poids. Chaque poids dépend, à la vérité, de la loi de probabilité des erreurs dans chaque système, et presque toujours cette loi est inconnue; mais je suis heureusement parvenu à éliminer le facteur qui la renferme, au moyen de la somme des carrés des écarts des observations du système, de leur résultat moyen. Il serait donc à désirer, pour compléter nos connaissances sur les résultats obtenus par l'ensemble d'un grand nombre d'observations, qu'on écrivît à côté de chaque résultat le poids qui lui correspond. Pour faciliter le calcul de ce poids, je développe son expression analytique, lorsque l'on n'a pas plus de trois éléments à déterminer. Mais, cette expression devenant de plus en plus compliquée à mesure que le nombre des éléments augmente, je donne un moyen fort simple pour déterminer le poids d'un résultat, quel que soit le nombre des éléments. Quand on a ainsi obtenu l'exponentielle qui représente la loi de probabilité des erreurs, on aura la probabilité que l'erreur du résultat est comprise dans des limites données, en prenant, dans ces limites, l'intégrale du produit de cette exponentielle par la différentielle de l'erreur et en la multipliant par la racine carrée du poids du résultat divisé par la circonférence dont le diamètre est l'unité. De là il suit que, pour une même probabilité, les erreurs des résultats sont réciproques aux racines carrées de leurs poids, ce qui peut servir à comparer leur précision respective.

Pour appliquer cette méthode avec succès, il faut varier les circonstances des observations ou des expériences, de manière à éviter les causes constantes d'erreur. Il faut que les observations soient nombreuses et qu'elles le soient d'autant plus qu'il y a plus d'éléments à déterminer; car le poids du résultat moyen croît comme le nombre des observations divisé par le nombre des éléments. Il est encore nécessaire que les éléments suivent, dans ces observations, une marche différente; car, si la marche de deux éléments était rigoureusement la même, ce qui rendrait leurs coefficients proportionnels dans les équations de condition, ces éléments ne formeraient qu'une seule inconnue, et il serait impossible de les distinguer par ces observations. Enfin il faut que les observations soient précises. Cette condition, la première de toutes, augmente beaucoup le poids du résultat, dont l'expression a pour diviseur la somme des carrés de leurs écarts de ce résultat. Avec ces précautions, on pourra faire usage de la méthode précédente et mesurer le degré de confiance que méritent les résultats déduits d'un grand nombre d'observations.

1. Un grand avantage de cette méthode, qui permet d'en évaluer numériquement les expressions, est, comme nous l'avons dit, d'être indépendante de la loi de probabilité des erreurs des observations. Le facteur $\frac{2k''}{k}a^2s$, qui dépend de cette loi, a été éliminé des formules des nos 19 et 21 du Livre II, en observant que ce facteur qui est la somme des

carrés de toutes les erreurs possibles des observations, multipliées par leurs probabilités respectives, et qui exprime ainsi la vraie moyenne de ces carrés, est très probablement égal à la somme des carrés des restes des équations de condition, lorsqu'on y a substitué les éléments déterminés par la méthode la plus avantageuse. L'importance de cette méthode dans la philosophie naturelle exige que l'incertitude qu'elle peut laisser soit dissipée, et la seule qui reste encore est relative à l'égalité dont je viens de parler. Je vais d'abord éclaircir ce point délicat de la théorie des probabilités et faire voir que l'égalité précédente peut être employée sans erreur sensible.

La somme des carrés des erreurs des observations, dont le nombre est s, étant supposée égale à $\frac{2k''}{k}a^2 s + a^2 r\sqrt{s}$, la probabilité que la valeur de r est comprise dans des limites données est, par le n° 19 cité,

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int \text{б}' \, dr \, c^{-\frac{\text{б}'^2 r^2}{4}},$$

l'intégrale étant prise dans ces limites. Représentons l'équation générale de condition des éléments $z, z', \ldots$ par celle-ci

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)} z + q^{(i)} z' + \ldots - \alpha^{(i)},$$

$\varepsilon^{(i)}$ étant l'erreur de l'observation. Les éléments $z, z', \ldots$ étant déterminés par la méthode la plus avantageuse, désignons par $u, u', \ldots$ leurs erreurs; nous aurons, en nommant $\varepsilon'^{(i)}$ le reste de la fonction

$$p^{(i)} z + q^{(i)} z' + \ldots - \alpha^{(i)}$$

lorsqu'on y a substitué pour $z, z', \ldots$ leurs valeurs ainsi déterminées,

$$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon'^{(i)} + p^{(i)} u + q^{(i)} u' + \ldots,$$

ce qui donne

$$\text{S}\varepsilon^{(i)2} = \text{S}\varepsilon'^{(i)2} + 2\text{S}\varepsilon'^{(i)}(p^{(i)} u + q^{(i)} u' + \ldots) + \text{S}(p^{(i)} u + q^{(i)} u' + \ldots)^2,$$

le signe intégral S s'étendant à toutes les valeurs de i, depuis $i = 0$ jusqu'à $i = s - 1$. Mais, par les conditions de la méthode la plus avantageuse, on a

$$\mathrm{S}p^{(i)}\varepsilon'^{(i)} = 0, \qquad \mathrm{S}q^{(i)}\varepsilon'^{(i)} = 0, \qquad \ldots;$$

on a donc

$$\mathrm{S}\varepsilon^{(i)2} = \mathrm{S}\varepsilon'^{(i)2} + \mathrm{S}(p^{(i)}u + q^{(i)}u' + \ldots)^2;$$

en comparant cette valeur de $\mathrm{S}\varepsilon^{(i)2}$ à sa valeur précédente $\frac{2k''}{k}a^2s + a^2r\sqrt{s}$, on aura

$$a^2r\sqrt{s} = \mathrm{S}\varepsilon'^{(i)2} - \frac{2k''}{k}a^2s + \mathrm{S}(p^{(i)}u + q^{(i)}u' + \ldots)^2.$$

Faisons

$$\mathrm{S}\varepsilon'^{(i)2} - \frac{2k''}{k}a^2s = t\sqrt{s},$$

$$u = \frac{v}{\sqrt{s}}, \qquad u' = \frac{v'}{\sqrt{s}}, \qquad u'' = \frac{v''}{\sqrt{s}}, \qquad \ldots;$$

nous aurons

$$a^2r = t + \frac{\mathrm{S}(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \ldots)^2}{s\sqrt{s}}.$$

L'exponentielle $c^{-\frac{\beta'^2 r^2}{4}}$ devient ainsi

$$c^{-\frac{\beta'^2}{4a^4}\left[t + \frac{\mathrm{S}(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \ldots)^2}{s\sqrt{s}}\right]^2};$$

ainsi la probabilité de t est proportionnelle à cette exponentielle.

L'analyse du n° 21 du Livre II conduit à ce théorème général, savoir que la probabilité de l'existence simultanée des quantités u, u', u'', … est proportionnelle à l'exponentielle

$$c^{-\frac{k}{4k''a^2s}\mathrm{S}(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \ldots)^2};$$

la probabilité de l'existence simultanée de t, v, v', v'', … est donc proportionnelle à

$$c^{-\frac{\beta'^2}{4a^4}\left[t + \frac{\mathrm{S}(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \ldots)^2}{s\sqrt{s}}\right]^2 - \frac{k}{4k''a^2s}\mathrm{S}(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \ldots)^2}.$$

En substituant pour $\frac{4k''a^2s}{k}$ sa valeur $2\mathrm{S}\varepsilon'^{(i)} - 2t\sqrt{s}$, cette exponentielle se réduit, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{s}$, à la fonction suivante :

$$\left[1-\frac{t\sqrt{s}}{2(\mathrm{S}\varepsilon'^{(i)2})^2}\mathrm{S}(p^{(i)}v+q^{(i)}v'+\ldots)^2\right]c^{-\frac{\beta'^2}{4a^4}\left[t+\frac{\mathrm{S}(p^{(i)}v+q^{(i)}v'+\ldots)^2}{s\sqrt{s}}\right]^2-\frac{\mathrm{S}(p^{(i)}v+q^{(i)}v'+\ldots)^2}{2\mathrm{S}\varepsilon'^{(i)}}}.$$

Maintenant, pour avoir la probabilité que la valeur de v est comprise dans des limites données, il faut : 1° multiplier cette fonction par $dt\,dv\,dv'\ldots$; 2° prendre l'intégrale du produit pour toutes les valeurs possibles de $t, v', v'', \ldots$; et, par rapport à v, intégrer seulement dans les limites données; 3° diviser le tout par cette même intégrale prise par rapport à toutes les valeurs possibles de $t, v, v', \ldots$. En regardant $\mathrm{S}\varepsilon'^{(i)2}$ comme une donnée de l'observation, t ne varie qu'à raison de la valeur inconnue $\frac{2k''a^2s}{k}$, et cette valeur peut varier depuis zéro jusqu'à l'infini; t peut donc varier depuis $\frac{\mathrm{S}\varepsilon'^{(i)2}}{\sqrt{s}}$ jusqu'à l'infini négatif; et, comme $\mathrm{S}\varepsilon'^{(i)2}$ est de l'ordre s, t peut varier depuis l'infini négatif jusqu'à une valeur positive de l'ordre $\sqrt{s}$. L'exponentielle précédente devient, à cette limite de l'intégrale prise par rapport à t, de la forme c^{-Q^2s} et pourra être supposée nulle, à cause de la grandeur de s. Ainsi l'on peut prendre l'intégrale relative à t, depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$. Pareillement les intégrales relatives à $v', v'', \ldots$ peuvent être prises dans les mêmes limites. Si l'on fait

$$t+\frac{\mathrm{S}(p^{(i)}v+q^{(i)}v'+\ldots)^2}{s\sqrt{s}}=t',$$

l'intégrale relative à t' pourra être prise par rapport à t' depuis $t'=-\infty$ jusqu'à $t'=\infty$.

De là il est facile de conclure que la probabilité que v est compris dans des limites données est proportionnelle à l'intégrale

$$\int dv\,dv'\ldots\left\{1+\frac{[\mathrm{S}(p^{(i)}v+q^{(i)}v'+\ldots)^2]^2}{2(\mathrm{S}\varepsilon'^{(i)2})^2s}\right\}c^{-\frac{\mathrm{S}(p^{(i)}v+q^{(i)}v'+\ldots)^2}{2\mathrm{S}\varepsilon'^{(i)2}}},$$

les intégrales étant prises depuis $v', v'', \ldots$ égaux à $-\infty$ jusqu'à leurs valeurs infinies positives et par rapport à v dans les limites données, et étant divisée par la même intégrale étendue aux valeurs infinies positives et négatives de v, v', v'', ...

La considération de la différence qui peut exister entre $\frac{2k''}{k}a^2 s$ et $S\varepsilon'^{(i)2}$ n'introduit donc dans l'expression de la probabilité dont il s'agit qu'un terme de l'ordre $\frac{1}{s}$, ordre que je me suis permis de négliger dans mon Ouvrage. Par là, l'intégrale précédente devient

$$\int dv\, dv' \ldots c^{-\frac{S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \ldots)^2}{2S\varepsilon'^{(i)2}}}.$$

Si l'on fait

$$v_1^{(i)} = p^{(i)} - \frac{q^{(i)} S p^{(i)} q^{(i)}}{S q^{(i)2}},$$

$$r_1^{(i)} = r^{(i)} - \frac{q^{(i)} S r^{(i)} q^{(i)}}{S q^{(i)2}},$$

$$t_1^{(i)} = t^{(i)} - \frac{q^{(i)} S t^{(i)} q^{(i)}}{S q^{(i)2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

l'exponentielle

$$c^{-\frac{S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + r^{(i)}v'' + \ldots)^2}{2S\varepsilon'^{(i)2}}}$$

pourra être mise sous cette forme

$$c^{-\frac{S(p_1^{(i)}v + r_1^{(i)}v'' + \ldots)^2}{2S\varepsilon'^{(i)2}} - \frac{S q^{(i)2}}{2S\varepsilon'^{(i)2}}\left(v' + \frac{v S p^{(i)} q^{(i)} + v'' S r^{(i)} q^{(i)} + \ldots}{S q^{(i)2}}\right)^2}.$$

En multipliant cette quantité par dv', et en l'intégrant depuis $v' = -\infty$ jusqu'à $v' = \infty$, on aura une quantité proportionnelle à

$$c^{-\frac{S(p_1^{(i)}v + r_1^{(i)}v'' + \ldots)^2}{2S\varepsilon'^{(i)2}}},$$

et dans laquelle la variable v' a disparu. En suivant le même procédé, on fera disparaître les variables v'', v''', ... On arrivera ainsi à une exponentielle de la forme $c^{-\frac{v^2 S p_{n-1}^{(i)2}}{2S\varepsilon'^{(i)2}}}$, n étant le nombre des éléments. Si l'on restitue, au lieu de v, sa valeur $u\sqrt{s}$, cette exponentielle devient

$$c^{-\mathrm{P}u^2},$$

en faisant

$$\mathrm{P} = \frac{s\,\mathrm{S}p_{n-1}^{(i)2}}{2\,\mathrm{S}\varepsilon'^{(i)2}}.$$

u étant l'erreur de la valeur de z, P est ce que je nomme *poids* de cette valeur. La probabilité que cette erreur est comprise dans des limites données est donc

$$\frac{\int du\sqrt{\mathrm{P}}\,c^{\mathrm{P}-u^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise dans ces limites, et π étant la circonférence dont le diamètre est l'unité. Mais il est plus simple d'appliquer le procédé dont nous venons de faire usage aux équations finales qui déterminent les éléments, pour les réduire à une seule, ce qui donne une méthode facile de résoudre ces équations.

2. Reprenons l'équation générale de condition, et, pour plus de simplicité, bornons-la aux six éléments $z, z', z'', z''', z^{\text{iv}}, z^{\text{v}}$; elle devient alors

$$(1)\qquad \varepsilon^{(i)} = p^{(i)}z + q^{(i)}z' + r^{(i)}z'' + t^{(i)}z''' + \gamma^{(i)}z^{\text{iv}} + \lambda^{(i)}z^{\text{v}} - \alpha^{(i)}.$$

En la multipliant par $\lambda^{(i)}$ et réunissant tous les produits semblables, on aura

$$\mathrm{S}\lambda^{(i)}\varepsilon^{(i)} = z\,\mathrm{S}\lambda^{(i)}p^{(i)} + z'\,\mathrm{S}\lambda^{(i)}q^{(i)} + \ldots - \mathrm{S}\lambda^{(i)}\alpha^{(i)},$$

le signe intégral S s'étendant à toutes les valeurs de i, depuis $i = 0$ jusqu'à $i = s - 1$, s étant le nombre des observations employées. Par les conditions de la méthode la plus avantageuse, on a $\mathrm{S}\lambda^{(i)}\varepsilon^{(i)} = 0$; l'équation précédente donnera donc

$$z^{\text{v}} = -z^{\text{iv}}\frac{\mathrm{S}\lambda^{(i)}\gamma^{(i)}}{\mathrm{S}\lambda^{(i)2}} - z'''\frac{\mathrm{S}\lambda^{(i)}t^{(i)}}{\mathrm{S}\lambda^{(i)2}} - z''\frac{\mathrm{S}\lambda^{(i)}r^{(i)}}{\mathrm{S}\lambda^{(i)2}}$$
$$- z'\frac{\mathrm{S}\lambda^{(i)}q^{(i)}}{\mathrm{S}\lambda^{(i)2}} - z\frac{\mathrm{S}\lambda^{(i)}p^{(i)}}{\mathrm{S}\lambda^{(i)2}} + \frac{\mathrm{S}\lambda^{(i)}\alpha^{(i)}}{\mathrm{S}\lambda^{(i)2}}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (1) et si l'on fait

$$\gamma_1^{(i)} = \gamma^{(i)} - \lambda^{(i)} \frac{S\lambda^{(i)}\gamma^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}},$$

$$t_1^{(i)} = t^{(i)} - \lambda^{(i)} \frac{S\lambda^{(i)} t^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}},$$

$$r_1^{(i)} = r^{(i)} - \lambda^{(i)} \frac{S\lambda^{(i)} r^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}},$$

$$q_1^{(i)} = q^{(i)} - \lambda^{(i)} \frac{S\lambda^{(i)} q^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}},$$

$$p_1^{(i)} = p^{(i)} - \lambda^{(i)} \frac{S\lambda^{(i)} p^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}},$$

$$\alpha_1^{(i)} = \alpha^{(i)} - \lambda^{(i)} \frac{S\lambda^{(i)} \alpha^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}},$$

on aura

$$(2) \qquad \varepsilon^{(i)} = p_1^{(i)} z + q_1^{(i)} z' + r_1^{(i)} z'' + t_1^{(i)} z''' + \gamma_1^{(i)} z^{\text{iv}} - \alpha_1^{(i)};$$

par ce moyen, l'élément z^{v} a disparu des équations de condition que représente l'équation (2). En multipliant cette équation par $\gamma_1^{(i)}$ et réunissant tous les produits semblables, en observant ensuite que l'on a

$$S\gamma_1^{(i)}\varepsilon^{(i)} = 0$$

en vertu des équations

$$0 = S\lambda^{(i)}\varepsilon^{(i)}, \qquad 0 = S\gamma^{(i)}\varepsilon^{(i)}$$

que donnent les conditions de la méthode la plus avantageuse, on aura

$$0 = z\, S\gamma_1^{(i)} p_1^{(i)} + z'\, S\gamma_1^{(i)} q_1^{(i)} + z''\, S\gamma_1^{(i)} r_1^{(i)} + z'''\, S\gamma_1^{(i)} t_1^{(i)} + z^{\text{iv}}\, S\gamma_1^{(i)2} - S\gamma_1^{(i)}\alpha_1^{(i)};$$

d'où l'on tire

$$z^{\text{iv}} = -z''' \frac{S\gamma_1^{(i)} t_1^{(i)}}{S\gamma_1^{(i)2}} - z'' \frac{S\gamma_1^{(i)} r_1^{(i)}}{S\gamma_1^{(i)2}} - z' \frac{S\gamma_1^{(i)} q_1^{(i)}}{S\gamma_1^{(i)2}} - z \frac{S\gamma_1^{(i)} p_1^{(i)}}{S\gamma_1^{(i)2}} + \frac{S\gamma_1^{(i)} \alpha_1^{(i)}}{S\gamma_1^{(i)2}}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (2) et si l'on fait

$$t_2^{(i)} = t_1^{(i)} - \gamma_1^{(i)} \frac{S\gamma_1^{(i)} t_1^{(i)}}{S\gamma_1^{(i)2}},$$

$$r_2^{(i)} = r_1^{(i)} - \gamma_1^{(i)} \frac{S\gamma_1^{(i)} r_1^{(i)}}{S\gamma_1^{(i)2}},$$

$$q_2^{(i)} = q_1^{(i)} - \gamma_1^{(i)} \frac{S\gamma_1^{(i)} q_1^{(i)}}{S\gamma_1^{(i)2}},$$

$$p_2^{(i)} = p_1^{(i)} - \gamma_1^{(i)} \frac{S\gamma_1^{(i)} p_1^{(i)}}{S\gamma_1^{(i)2}},$$

$$\alpha_2^{(i)} = \alpha_1^{(i)} - \gamma_1^{(i)} \frac{S\gamma_1^{(i)} \alpha_1^{(i)}}{S\gamma_1^{(i)2}},$$

on aura

$$(3) \qquad \varepsilon^{(i)} = p_2^{(i)} z + q_2^{(i)} z' + r_2^{(i)} z'' + t_2^{(i)} z''' - \alpha_2^{(i)}.$$

En continuant ainsi, on parviendra à une équation de la forme

$$(4) \qquad \varepsilon^{(i)} = p_5^{(i)} z - \alpha_5^{(i)}.$$

Il résulte du n° 20 du Livre II que, si la valeur de z est déterminée par cette équation et que u soit l'erreur de cette valeur, la probabilité de cette erreur est

$$\sqrt{\frac{s S p_5^{(i)2}}{2 S \varepsilon'^{(i)2} \pi}}\, c^{-\frac{s S p_5^{(i)2}}{2 S \varepsilon'^{(i)2}} u^2},$$

$S\varepsilon'^{(i)2}$ étant la somme des carrés des restes des équations de condition, lorsqu'on y a substitué les éléments déterminés par la méthode la plus avantageuse. Le poids P de cette erreur est donc égal à $\frac{s S p_5^{(i)2}}{2 S \varepsilon'^{(i)2}}$.

Il s'agit maintenant de déterminer $Sp_5^{(i)2}$. Pour cela, on multipliera respectivement chacune des équations de condition représentées par l'équation (1), d'abord par le coefficient du premier élément, et l'on prendra la somme de ces produits; ensuite par le coefficient du second élément, et l'on prendra la somme de ces produits, et ainsi du reste. On aura, en observant que par les conditions de la méthode la plus avantageuse $Sp^{(i)}\varepsilon^{(i)} = 0$, $Sq^{(i)}\varepsilon^{(i)} = 0$, ..., les six équations suivantes :

$$
(\mathrm{A})\quad \left\{
\begin{aligned}
\overline{p\alpha} &= p^{(2)} z + \overline{pq}\, z' + \overline{pr}\, z'' + \overline{pt}\, z''' + \overline{p\gamma}\, z^{\text{iv}} + \overline{p\lambda}\, z^{\text{v}},\\
\overline{q\alpha} &= \overline{pq}\, z + q^{(2)} z' + \overline{qr}\, z'' + \overline{qt}\, z''' + \overline{q\gamma}\, z^{\text{iv}} + \overline{q\lambda}\, z^{\text{v}},\\
\overline{r\alpha} &= \overline{rp}\, z + \overline{rq}\, z' + r^{(2)} z'' + \overline{rt}\, z''' + \overline{r\gamma}\, z^{\text{iv}} + \overline{r\lambda}\, z^{\text{v}},\\
\overline{t\alpha} &= \overline{tp}\, z + \overline{tq}\, z' + \overline{tr}\, z'' + t^{(2)} z''' + \overline{t\gamma}\, z^{\text{iv}} + \overline{t\lambda}\, z^{\text{v}},\\
\overline{\gamma\alpha} &= \overline{\gamma p}\, z + \overline{\gamma q}\, z' + \overline{\gamma r}\, z'' + \overline{\gamma t}\, z''' + \gamma^{(2)} z^{\text{iv}} + \overline{\gamma\lambda}\, z^{\text{v}},\\
\overline{\lambda\alpha} &= \overline{\lambda p}\, z + \overline{\lambda q}\, z' + \overline{\lambda r}\, z'' + \overline{\lambda t}\, z''' + \overline{\lambda\gamma}\, z^{\text{iv}} + \lambda^{(2)} z^{\text{v}},
\end{aligned}
\right.
$$

où l'on doit observer que nous supposons

$$
p^{(2)} = Sp^{(i)2}, \qquad \overline{pq} = Sp^{(i)}q^{(i)}, \qquad q^{(2)} = Sq^{(i)2}, \qquad \overline{qr} = Sq^{(i)}r^{(i)}, \qquad \ldots .
$$

Si l'on multiplie pareillement les équations de condition représentées par l'équation (2) respectivement par les coefficients de z et que l'on ajoute ces produits, ensuite par les coefficients de z' en ajoutant encore ces produits, et ainsi de suite, on aura le système suivant d'équations, en observant que $Sp_1^{(i)}\varepsilon^{(i)} = 0$, $Sq_1^{(i)}\varepsilon^{(i)} = 0$, ..., par les conditions de la méthode la plus avantageuse,

$$
(\mathrm{B})\quad \left\{
\begin{aligned}
\overline{p_1\alpha_1} &= p_1^{(2)} z + \overline{p_1 q_1}\, z' + \overline{p_1 r_1}\, z'' + \overline{p_1 t_1}\, z''' + \overline{p_1\gamma_1}\, z^{\text{iv}},\\
\overline{q_1\alpha_1} &= \overline{p_1 q_1}\, z + q_1^{(2)} z' + \overline{q_1 r_1}\, z'' + \overline{q_1 t_1}\, z''' + \overline{q_1\gamma_1}\, z^{\text{iv}},\\
\overline{r_1\alpha_1} &= \overline{p_1 r_1}\, z + \overline{q_1 r_1}\, z' + r_1^{(2)} z'' + \overline{r_1 t_1}\, z''' + \overline{r_1\gamma_1}\, z^{\text{iv}},\\
\overline{t_1\alpha_1} &= \overline{p_1 t_1}\, z + \overline{q_1 t_1}\, z' + \overline{r_1 t_1}\, z'' + t_1^{(2)} z''' + \overline{t_1\gamma_1}\, z^{\text{iv}},\\
\overline{\gamma_1\alpha_1} &= \overline{p_1\gamma_1}\, z + \overline{q_1\gamma_1}\, z' + \overline{r_1\gamma_1}\, z'' + \overline{t_1\gamma_1}\, z''' + \gamma_1^{(2)} z^{\text{iv}},
\end{aligned}
\right.
$$

où l'on doit observer que

$$
\overline{p_1 q_1} = Sp_1^{(i)}q_1^{(i)}, \qquad p_1^{(2)} = Sp_1^{(i)2}, \qquad \ldots .
$$

En substituant, au lieu de $p_1^{(i)}$, $q_1^{(i)}$, ..., leurs valeurs précédentes, on a

$$
\overline{p_1 q_1} = Sp^{(i)}q^{(i)} - \frac{S\lambda^{(i)}p^{(i)}\,S\lambda^{(i)}q^{(i)}}{S\lambda^{(i)2}}
$$

ou

$$
\overline{p_1 q_1} = \overline{pq} - \frac{\overline{\lambda p}\;\overline{\lambda q}}{\lambda^{(2)}};
$$

on a pareillement

$$p_1^{(2)} = p^{(2)} - \frac{\overline{\lambda p}^2}{\lambda^{(2)}},$$

$$q_1^{(2)} = q^{(2)} - \frac{\overline{\lambda q}^2}{\lambda^{(2)}},$$

$$\overline{p_1 r_1} = \overline{pr} - \frac{\overline{\lambda p}\,\overline{\lambda r}}{\lambda^{(2)}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\overline{p_1 \alpha_1} = \overline{p\alpha} - \frac{\overline{\lambda p}\,\overline{\lambda\alpha}}{\lambda^{(2)}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ainsi les coefficients du système des équations (B) se déduisent facilement des coefficients du système des équations (A).

Les équations de condition représentées par l'équation (3) donneront semblablement le système suivant d'équations

$$(\mathrm{C})\quad \begin{cases} \overline{p_2\alpha_2} = p_2^{(2)}\ z + \overline{p_2 q_2}\, z' + \overline{p_2 r_2}\, z'' + \overline{p_2 t_2}\, z''', \\ \overline{q_2\alpha_2} = \overline{p_2 q_2}\, z + q_2^{(2)}\ z' + \overline{q_2 r_2}\, z'' + \overline{q_2 t_2}\, z''', \\ \overline{r_2\alpha_2} = \overline{p_2 r_2}\, z + \overline{q_2 r_2}\, z' + r_2^{(2)}\ z'' + \overline{r_2 t_2}\, z''', \\ \overline{t_2\alpha_2} = \overline{p_2 t_2}\, z + \overline{q_2 t_2}\, z' + \overline{r_2 t_2}\, z'' + t_2^{(2)}\ z''', \end{cases}$$

et l'on a

$$p_2^{(2)} = p_1^{(2)} - \frac{\overline{\gamma_1 p_1}^2}{\gamma_1^{(2)}},$$

$$\overline{p_2 q_2} = \overline{p_1 q_1} - \frac{\overline{\gamma_1 p_1}\,\overline{q_1\gamma_1}}{\gamma_1^{(2)}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\overline{p_2 \alpha_2} = \overline{p_1 \alpha_1} - \frac{\overline{\gamma_1 p_1}\,\overline{\gamma_1 \alpha_1}}{\gamma_1^{(2)}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On aura pareillement le système d'équations

$$(\mathrm{D})\quad \begin{cases} \overline{p_3\alpha_3} = p_3^{(2)}\ z + \overline{p_3 q_3}\, z' + \overline{p_3 r_3}\, z'', \\ \overline{q_3\alpha_3} = \overline{p_3 q_3}\, z + q_3^{(2)}\ z' + \overline{q_3 r_3}\, z'', \\ \overline{r_3\alpha_3} = \overline{p_3 r_3}\, z + \overline{q_3 r_3}\, z' + r_3^{(2)}\ z'', \end{cases}$$

en faisant

$$p_3^{(2)} = p_2^{(2)} - \frac{\overline{p_2 t_2}^2}{t_2^{(2)}},$$

$$\overline{p_3 q_3} = \overline{p_2 q_2} - \frac{\overline{p_2 t_2}\,\overline{q_2 t_2}}{t_2^{(2)}},$$

$$\overline{p_3 \alpha_3} = \overline{p_2 \alpha_2} - \frac{\overline{t_2 p_2}\,\overline{t_2 \alpha_2}}{t_2^{(2)}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

on aura encore

$$\text{(E)} \quad \begin{cases} \overline{p_4 \alpha_4} = p_4^{(2)} z + \overline{p_4 q_4} z', \\ \overline{q_4 \alpha_4} = \overline{p_4 q_4} z + q_4^{(2)} z', \end{cases}$$

en faisant

$$p_4^{(2)} = p_3^{(2)} - \frac{\overline{p_3 r_3}^2}{r_3^{(2)}},$$

$$\overline{p_4 q_4} = \overline{p_3 q_3} - \frac{\overline{p_3 r_3}\,\overline{q_3 r_3}}{r_3^{(2)}},$$

$$\overline{p_4 \alpha_4} = \overline{p_3 \alpha_3} - \frac{\overline{p_3 r_3}\,\overline{\alpha_3 r_3}}{r_3^{(2)}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Enfin on aura

$$\text{(F)} \quad \overline{p_5 \alpha_5} = p_5^{(2)} z,$$

en faisant

$$p_5^{(2)} = p_4^{(2)} - \frac{\overline{p_4 q_4}^2}{q_4^{(2)}}, \quad \overline{p_5 \alpha_5} = \overline{p_4 \alpha_4} - \frac{\overline{p_4 q_4}\,\overline{q_4 \alpha_4}}{q_4^{(2)}};$$

$p_5^{(2)}$ est la valeur de $Sp_5^{(i)2}$, et le poids P sera

$$\frac{sp_5^{(2)}}{2 S\varepsilon'^{(i)2}}.$$

On voit par la suite des valeurs de $p^{(2)}, p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \dots$ qu'elles vont en diminuant sans cesse, et qu'ainsi, pour le même nombre d'observations, le poids P diminue quand le nombre des éléments augmente.

Si l'on considère la suite des équations qui déterminent $\overline{p_5 \alpha_5}$, on voit que cette fonction, développée suivant les coefficients du système des équations (A), est de la forme

$$\overline{p\alpha} + \mathrm{M}\overline{q\alpha} + \mathrm{N}\overline{r\alpha} + \ldots,$$

le coefficient de $\overline{p\alpha}$ étant l'unité. Il suit de là que si l'on résout les équations (A), en y laissant $\overline{p\alpha}$, $\overline{q\alpha}$, $\overline{r\alpha}$, ... comme indéterminées, $\frac{1}{p_5^{(2)}}$ sera, en vertu de l'équation (F), le coefficient de $\overline{p\alpha}$ dans l'expression de z. Pareillement, $\frac{1}{q_5^{(2)}}$ sera le coefficient de $\overline{q\alpha}$ dans l'expression de z'; $\frac{1}{r_5^{(2)}}$ sera le coefficient de $\overline{r\alpha}$ dans l'expression de z''; et ainsi du reste; ce qui donne un moyen simple d'obtenir $p_5^{(2)}$, $q_5^{(2)}$, ...; mais il est plus simple encore de les déterminer ainsi.

D'abord l'équation (F) donne la valeur de $p_5^{(2)}$ et de z. Si dans le système des équations (E) on élimine z au lieu de z', on aura une seule équation en z', de la forme

$$\overline{q_5\alpha_5} = q_5^{(2)} z';$$

en faisant

$$q_5^{(2)} = q_4^{(2)} - \frac{\overline{p_4 q_4}^2}{p_4^{(2)}}, \qquad \overline{q_5\alpha_5} = \overline{q_4\alpha_4} - \frac{\overline{p_4 q_4}\,\overline{p_4\alpha_4}}{p_4^{(2)}}.$$

Si dans le système des équations (D) on élimine z au lieu de z'', pour ne conserver à la fin du calcul que z'', on aura $r_5^{(2)}$ en changeant dans la suite des équations qui, à partir de ce système, déterminent $p_5^{(2)}$, la lettre p dans la lettre r, et réciproquement. On aura ainsi

$$r_4^{(2)} = r_3^{(2)} - \frac{\overline{p_3 r_3}^2}{p_3^{(2)}},$$

$$\overline{r_4 q_4} = \overline{r_3 q_3} - \frac{\overline{p_3 q_3}\,\overline{p_3 r_3}}{p_3^{(2)}},$$

$$q_4^{(2)} = q_3^{(2)} - \frac{\overline{p_3 q_3}^2}{p_3^{(2)}},$$

$$r_5^{(2)} = r_4^{(2)} - \frac{\overline{p_4 q_4}^2}{q_4^{(2)}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour avoir $t_5^{(2)}$, on partira du système des équations (C), en changeant, dans la suite des valeurs de $p_3^{(2)}$, $\overline{p_3 q_3}$, ..., $r_3^{(2)}$, $\overline{q_3 r_3}$, ..., la lettre p dans la lettre t, et réciproquement.

On aura pareillement la valeur de $\gamma_5^{(2)}$, en partant du système des équations (B) et changeant dans la suite des valeurs de $p_2^{(2)}, p_3^{(2)}, \ldots,$ la lettre p dans la lettre γ, et réciproquement.

Enfin, on aura la valeur de $\lambda_5^{(2)}$ en changeant, dans la suite des valeurs de $p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \ldots,$ la lettre p dans la lettre λ, et réciproquement.

3. L'erreur dont la valeur de z est susceptible étant u, sa probabilité est, comme on l'a vu,

$$\frac{\sqrt{\mathrm{P}}\, c^{-\mathrm{P}u^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

En la multipliant par $u\,du$ et prenant l'intégrale depuis u nul jusqu' u infini, on aura

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\mathrm{P}}}$$

pour l'erreur moyenne à craindre en plus dans la valeur de z. Cette expression affectée du signe $-$ sera l'erreur moyenne à craindre en moins sur cette valeur. J'ai donné dans le n° 21 du Livre II l'expression analytique de ces erreurs moyennes, quel que soit le nombre des éléments. On aura donc, en la comparant à la précédente, la valeur de P, et il est facile de reconnaître l'identité de ces expressions. On trouve ainsi, dans le cas d'un seul élément,

$$\mathrm{P} = \frac{s p^{(2)}}{2\,\mathrm{S}\varepsilon'^{(i)2}}.$$

Si l'on fait généralement, pour un nombre quelconque d'éléments,

$$\mathrm{P} = \frac{s}{2\,\mathrm{S}\varepsilon'^{(i)2}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}},$$

on trouve, pour deux éléments,

$$\mathrm{A} = p^{(2)} q^{(2)} - \overline{pq}^2,$$
$$\mathrm{B} = q^{(2)}.$$

En appliquant ces résultats aux équations (E), on aura la valeur de P relative à l'élément z.

On trouve, pour trois éléments,

$$A = p^{(2)}q^{(2)}r^{(2)} - p^{(2)}\overline{qr}^2 - q^{(2)}\overline{pr}^2 - r^{(2)}\overline{pq}^2 + 2\overline{pq}\,\overline{pr}\,\overline{qr},$$

$$B = q^{(2)}r^{(2)} - \overline{qr}^2.$$

Ces résultats appliqués aux équations (D) donneront la valeur de P relative à l'élément z.

En continuant ainsi, on aura, quel que soit le nombre des éléments, le poids relatif au premier élément z. En changeant dans son expression p en q et q en p, on aura le poids relatif au deuxième élément z'. En changeant, dans l'expression du poids du premier élément, p en r et r en p, on aura le poids relatif au troisième élément z'', et ainsi de suite. Mais, lorsque le nombre des éléments surpasse trois, il est beaucoup plus simple de faire usage de la méthode du numéro précédent.

Nous observerons ici que l'erreur moyenne à craindre sur chaque élément étant, par les nos 20 et 21 du Livre II, plus petite dans le système de facteurs qui constitue la méthode la plus avantageuse que dans tout autre système, la valeur de P y est la plus grande possible. Ainsi, pour une même erreur d'un élément dans cette méthode, la probabilité est plus petite que dans toute autre méthode, ce qui assure sa supériorité.

4. Toute mon analyse repose sur l'hypothèse que la facilité des erreurs est la même pour les erreurs positives et pour les erreurs négatives; ce qui rend nulle l'intégrale du produit de l'erreur par sa probabilité et par sa différentielle, l'intégrale étant prise dans toute l'étendue des limites des erreurs, et l'origine des erreurs étant au milieu de l'intervalle qui sépare ces limites. Mais, si la loi de facilité est différente pour les erreurs positives et pour les erreurs négatives,

alors l'intégrale précédente ne devient nulle que dans le cas où cette origine est au point de l'abscisse par où passe l'ordonnée du centre de gravité de la courbe, dont les ordonnées représentent la loi de facilité des erreurs représentées elles-mêmes par les abscisses. Pour tout autre point, l'erreur moyenne de l'observation est cette intégrale divisée par l'intervalle des limites; et, si l'on a un grand nombre d'observations, la moyenne des erreurs de ces observations sera, par ce que l'on a vu dans le Livre II, égale à très peu près à ce quotient. En faisant donc en sorte que la somme des erreurs soit nulle, on pourra supposer nulle l'intégrale dont nous venons de parler, et alors toute mon analyse subsiste et devient indépendante de l'hypothèse d'une égale facilité des erreurs positives et des erreurs négatives. On peut toujours obtenir cet avantage en ajoutant aux équations de condition un élément indéterminé dont le coefficient soit l'unité. C'est ce qui a lieu de soi-même dans les équations de condition relatives au mouvement des planètes en longitude; car la correction de l'époque y a pour coefficient l'unité. Mais, l'addition d'un élément affaiblissant, comme nous l'avons dit, la probabilité des erreurs des autres éléments, probabilité qui, pour le même nombre d'observations, diminue quand le nombre des éléments qui s'appuient sur elles est plus grand, il ne faut recourir à cette addition que lorsque l'on peut craindre qu'une cause constante favorise plutôt les erreurs d'un signe que celles du signe contraire. Au reste, on s'en assurera facilement, en faisant la somme des restes positifs et celle des restes négatifs des équations de condition, lorsqu'on y aura substitué les valeurs des éléments déterminés par la méthode la plus avantageuse, sans l'addition dont on vient de parler et en voyant si l'excès de l'une de ces sommes sur l'autre indique une cause constante.

Pour ne laisser aucun doute sur cet objet, je vais y appliquer le calcul. Il résulte du n° 22 du Livre II que la probabilité que la somme des erreurs des observations égale

$$\frac{ak'}{k}s + ar\sqrt{s}$$

est proportionnelle à l'exponentielle

$$c^{-\frac{k^2 r^2}{2(kk''-k'^2)}}.$$

Cette somme est $S\varepsilon^{(i)}$, et, par le n° 1, on a

$$S\varepsilon^{(i)} = S\varepsilon'^{(i)} + S(p^{(i)}u + q^{(i)}u' + \ldots).$$

Par la nature des équations finales, on a $S\varepsilon'^{(i)} = 0$; on a donc

$$\frac{ak'}{k}s + ar\sqrt{s} = S(p^{(i)}u + q^{(i)}u' + \ldots).$$

Si l'on fait, comme dans ce numéro, $u = \frac{v}{\sqrt{s}}$, $u' = \frac{v'}{\sqrt{s}}$, ..., on aura ainsi

$$r = -\frac{k'}{k}\sqrt{s} + \frac{1}{as}S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \ldots).$$

Ainsi $\frac{k'}{k}$ est de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{s}}$, et son carré est de l'ordre $\frac{1}{s}$; on peut donc le négliger, eu égard à $\frac{k''}{k}$. La probabilité de l'existence simultanée de r, v, v', ... est ainsi proportionnelle à l'exponentielle

$$c^{-\frac{k}{2k''}r^2 - \frac{S(p^{(i)}v + q^{(i)}v' + \ldots)^2}{2S\varepsilon'^{(i)2}}}.$$

En la multipliant par dr, dv', ..., en l'intégrant par rapport à r, v', v'', ..., depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif, on aura une quantité proportionnelle à la probabilité de v. En multipliant donc cette quantité par dv et en prenant l'intégrale dans des limites données, en la divisant ensuite par cette même intégrale prise depuis $v = -\infty$ jusqu'à $v = +\infty$, on aura la probabilité que la valeur de v est contenue dans ces limites. On voit ainsi que la considération des valeurs que k' peut avoir et dont dépend la différence de probabilité des erreurs positives et négatives n'a aucune influence sensible sur les résultats de la méthode générale exposée ci-dessus.

5. Appliquons maintenant cette méthode à un exemple. Pour cela, j'ai profité de l'immense travail que Bouvard vient de terminer sur les mouvements de Jupiter et de Saturne, dont il a construit des Tables très précises. Il a fait usage de toutes les oppositions observées par Bradley et par les astronomes qui l'ont suivi : il les a discutées de nouveau et avec le plus grand soin, ce qui lui a donné 126 équations de condition pour le mouvement de Jupiter en longitude et 129 équations pour le mouvement de Saturne. Dans ces dernières équations, Bouvard a fait entrer la masse d'Uranus comme indéterminée. Voici les équations finales qu'il a conclues par la méthode la plus avantageuse :

$$\begin{aligned}
7212'',600 &= 795938\,z - 12729398\,z' \\
&\quad + 6788,2\,z'' - 1959,0\,z''' + 696,13\,z^{\text{iv}} + 2602\,z^{\text{v}},\\[1ex]
-738297'',800 &= -12729398\,z + 424865729\,z' \\
&\quad - 153106,5\,z'' - 39749,1\,z''' - 5459\,z^{\text{iv}} + 5722\,z^{\text{v}},\\[1ex]
237'',782 &= 6788,2\,z - 153106,5\,z' \\
&\quad + 71,8720\,z'' - 3,2252\,z''' + 1,2484\,z^{\text{iv}} + 1,3371\,z^{\text{v}},\\[1ex]
-40'',335 &= -1959,0\,z - 39749,1\,z' \\
&\quad - 3,2252\,z'' + 57,1911\,z''' + 3,6213\,z^{\text{iv}} + 1,1128\,z^{\text{v}},\\[1ex]
-343'',455 &= 696,13\,z - 5459\,z' \\
&\quad + 1,2484\,z'' + 3,6213\,z''' + 21,543\,z^{\text{iv}} + 46,310\,z^{\text{v}},\\[1ex]
-1002'',900 &= 2602\,z + 5722\,z' \\
&\quad + 1,3371\,z'' + 1,1128\,z''' + 46,310\,z^{\text{iv}} + 129\,z^{\text{v}}.
\end{aligned}$$

Dans ces équations, la masse d'Uranus est supposée $\frac{1+z}{19504}$; la masse de Jupiter est supposée $\frac{1+z'}{1067,09}$; z'' est le produit de l'équation du centre par la correction du périhélie employé d'abord par Bouvard; z''' est la correction de l'équation du centre; z^{iv} est la correction séculaire du moyen mouvement; z^{v} est la correction de l'époque de la longitude au commencement de 1750. La seconde du degré décimal est prise pour unité.

Au moyen des équations précédentes renfermées dans le système (A), j'ai conclu les suivantes, renfermées dans le système (B) :

$$27441'',68 \;= 743454z - 1284814z' + 6761,23z'' - 1981,45z''' - 237,97z^{\text{IV}},$$

$$-693812'',58 \;= -1284814z + 4246119 20z' - 153165,81z'' - 39798,46z''' - 7513,15z^{\text{IV}},$$

$$248'',1772 = 6761,23z - 153165,81z' + 71,8581z'' - 3,2367z''' + 0,7684z^{\text{IV}},$$

$$-31'',6836 = -1981,45z - 39798,46z' - 3,2367z'' + 57,1815z''' + 3,2218z^{\text{IV}},$$

$$16'',5783 = -237,97z - 7513,15z' + 0,7684z'' + 3,2218z''' + 4,9181z^{\text{IV}}.$$

De ces équations, j'ai tiré les quatre suivantes, renfermées dans le système (C),

$$28243'',85 \;= 731939,5z - 13208350z' + 6798,41z'' - 1825,56z''',$$

$$-668486'',70 \;= -13208350z + 413134432z' - 151992 0z'' - 34876,7z''',$$

$$245'',5870 = 6798,41z - 151992,0z' + 71,7381z'' - 3,7401z''',$$

$$-42'',5434 = -1825,56z - 34876,7z' - 3,7401z'' + 55,0710z''';$$

ces dernières équations donnent les suivantes, renfermées dans le système (D),

$$26833'',55 \;= 671414,7z - 14364541z' + 6674,43z'',$$

$$-695430'',0 \;= -14364541z + 391046861z' - 154360,6z'',$$

$$242'',6977 = 6674,43z - 154360,6z' + 71,4841z''.$$

Enfin j'ai conclu de là les deux équations suivantes, renfermées dans le système (E) :

$$4172'',95 = 48442z + 48020z', \qquad -171455'',2 = 48020z + 57725227z'.$$

Je m'arrête à ce système, parce qu'il est facile d'en conclure les valeurs du poids P relatives aux deux éléments z et z' que je désirais particulièrement de connaître. Les formules du n° 3 donnent, pour z,

$$P = \frac{s}{2 S \varepsilon'^{(i)2}} \left[48442 - \frac{(48020)^2}{57725227} \right]$$

et, pour z',

$$P = \frac{s}{2 S \varepsilon'^{(i)2}} \left[57725227 - \frac{(48020)^2}{48442} \right].$$

Le nombre s des observations est ici 129 et Bouvard a trouvé

$$S \varepsilon'^{(i)2} = 31096;$$

on a donc, pour z,

$$\log P = 2,0013595$$

et, pour z',

$$\log P = 5,0778624.$$

Les équations précédentes donnent

$$z' = -0,00305,$$

$$z = 0,08916.$$

La masse de Jupiter est $\frac{1}{1067,09}(1 + z')$. En substituant pour z' sa valeur précédente, cette masse devient $\frac{1}{1070,35}$. La masse du Soleil est prise pour unité. La probabilité que l'erreur de z' est comprise dans les limites $\pm$ U est, par le n° 1,

$$\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{\pi}} \int du \, c^{-Pu^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $u = -$ U jusqu'à $u =$ U. On trouve ainsi la probabilité que la masse de Jupiter est comprise dans les limites

$$\frac{1}{1070,35} \pm \frac{1}{100} \frac{1}{1067,09},$$

égale à $\frac{1000000}{1000001}$; en sorte qu'il y a un million à très peu près à parier contre un que la valeur $\frac{1}{1070,35}$ n'est pas en erreur d'un centième de sa valeur; ou, ce qui revient à fort peu près au même, qu'après un siècle de nouvelles observations, ajoutées aux précédentes et discutées de la même manière, le nouveau résultat ne différera pas du précédent d'un centième de sa valeur.

Newton avait trouvé, par les observations de Pound, sur les élongations des satellites de Jupiter, la masse de cette planète égale à la 1067ᵉ partie de celle du Soleil, ce qui diffère très peu du résultat de Bouvard.

La masse d'Uranus est $\frac{1+z}{19504}$. En substituant pour z sa valeur précédente, cette masse devient $\frac{1}{17907}$. La probabilité que cette valeur est comprise dans des limites

$$\frac{1}{17907} \pm \frac{1}{4}\,\frac{1}{19504}$$

est égale à $\frac{2508}{2509}$, et la probabilité que cette masse est comprise dans les limites

$$\frac{1}{17907} \pm \frac{1}{5}\,\frac{1}{19504}$$

est égale à $\frac{215,6}{216,6}$.

Les perturbations qu'Uranus produit dans le mouvement de Saturne étant peu considérables, on ne doit pas encore attendre des observations de ce mouvement une grande précision dans la valeur de sa masse. Mais, après un siècle de nouvelles observations, ajoutées aux précédentes et discutées de la même manière, la valeur de P augmentera de manière à donner cette masse avec une grande probabilité que sa valeur sera contenue dans d'étroites limites; ce qui sera de beaucoup préférable à l'emploi des élongations des satellites d'Uranus, à cause de la difficulté d'observer ces élongations.

Bouvard, en appliquant la méthode précédente aux 126 équations de condition que lui ont données les observations de Jupiter et en supposant la masse de Saturne égale à $\frac{1+z}{3534,08}$, a trouvé

$$z = 0,00620$$

et

$$\log P = 4,8856829.$$

Ces valeurs donnent la masse de Saturne égale à $\frac{1}{3512,3}$, et la probabilité que cette masse est comprise dans les limites

$$\frac{1}{3512,3} \pm \frac{1}{100} \frac{1}{3534,08}$$

est égale à $\frac{11327}{11328}$.

Newton avait trouvé, par les observations de Pound sur la plus grande élongation du quatrième satellite de Saturne, la masse de cette planète égale à $\frac{1}{3012}$, ce qui surpasse d'un sixième le résultat précédent. Il y a des millions de milliards à parier contre un que celui de Newton est en erreur, et l'on n'en sera point surpris si l'on considère la difficulté d'observer les plus grandes élongations des satellites de Saturne. La facilité d'observer celles des satellites de Jupiter a rendu, comme on l'a vu, beaucoup plus exacte la valeur que Newton a conclue des observations de Pound.

De la probabilité des jugements.

J'ai assimilé, dans le n° 50 du Livre II, le jugement d'un tribunal qui prononce entre deux opinions contradictoires au résultat des témoignages de plusieurs témoins de l'extraction du numéro d'une urne qui ne contient que deux numéros. Il y a cependant entre ces deux cas cette différence, savoir, que la probabilité du témoignage est indépendante de la nature de la chose attestée, parce que l'on suppose que le témoin n'a pu se tromper sur cette chose; au lieu qu'un objet en litige peut être environné d'obscurités telles, que les juges, en leur supposant toute la bonne foi désirable, peuvent être cependant d'avis contraires. La nature de l'affaire qui leur est soumise doit donc influer sur leur jugement. Je vais faire entrer cette considération dans les recherches suivantes, en l'appliquant aux jugements en matière criminelle.

Il faut sans doute aux juges, pour condamner un accusé, les plus fortes preuves de son délit. Mais une preuve morale n'est jamais qu'une probabilité, et l'expérience n'a que trop fait connaître les erreurs dont les jugements criminels, ceux même qui paraissent être les plus justes, sont encore susceptibles. La possibilité de réparer ces erreurs est le plus solide argument des philosophes qui ont voulu proscrire la peine de mort. Nous devrions donc nous abstenir de juger, s'il nous fallait attendre l'évidence mathématique. Mais, lorsque les preuves ont une force telle que le produit de l'erreur à craindre par sa faible probabilité soit inférieure au danger qui résulterait de l'impunité du crime, le jugement est commandé par l'intérêt de la société. Ce jugement se réduit, si je ne me trompe, à la solution de la question suivante : La preuve du délit de l'accusé a-t-elle le haut degré de probabilité nécessaire pour que les citoyens aient moins à redouter les erreurs des tribunaux, s'il est innocent et condamné, que ses nouveaux attentats et ceux des malheureux qu'enhardirait l'exemple de son impunité, s'il était coupable et absous? La solution de cette question dépend de plusieurs éléments très difficiles à connaître. Telle est l'imminence du danger qui menacerait la société si l'accusé criminel restait impuni. Quelquefois, ce danger est si grand que le magistrat se voit obligé de renoncer aux formes sagement établies pour la sûreté de l'innocence. Mais ce qui rend presque toujours la question dont il s'agit insoluble est l'impossibilité d'apprécier exactement la probabilité du délit, et de fixer celle qui est nécessaire pour la condamnation de l'accusé. Chaque juge, à cet égard, est forcé de s'en rapporter à son propre tact. Il forme son opinion en comparant les divers témoignages et les circonstances dont le délit est accompagné aux résultats de ses réflexions et de son expérience; et, sous ce rapport, une longue habitude d'interroger et de juger les accusés donne beaucoup d'avantages pour saisir la vérité au milieu d'indices souvent contradictoires.

La question précédente dépend encore de la grandeur de la peine appliquée au délit; car on exige naturellement, pour prononcer la mort, des preuves beaucoup plus fortes que pour infliger une détention de quelques mois. C'est une raison de proportionner la peine au délit, une peine grave appliquée à un léger délit devant inévitablement faire absoudre beaucoup de coupables. Le produit de la probabilité du délit par sa gravité étant la mesure du danger que l'absolution de l'accusé peut faire éprouver à la société, on pourrait penser que la peine doit dépendre de cette probabilité. C'est ce que l'on fait indirectement dans les tribunaux où l'on retient pendant quelque temps l'accusé contre lequel s'élèvent des preuves très fortes, mais insuffisantes pour le condamner. Dans la vue d'acquérir de nouvelles lumières, on ne le remet point sur-le-champ au milieu de ses concitoyens, qui ne le reverraient pas sans de vives alarmes. Mais l'arbitraire de cette mesure et l'abus qu'on en peut faire l'ont fait rejeter dans les pays où l'on attache un très grand prix à la liberté individuelle.

Maintenant, quelle est la probabilité que la décision d'un tribunal qui ne peut condamner qu'à une majorité donnée sera juste, c'est-à-dire, conforme à la vraie solution de la question posée ci-dessus? Ce problème important bien résolu donnera le moyen de comparer entre eux les tribunaux divers. La majorité d'une seule voix dans un nombreux tribunal indique que l'affaire dont il s'agit est à peu près douteuse; la condamnation de l'accusé serait donc alors contraire aux principes d'humanité, protecteurs de l'innocence. L'unanimité des juges donnerait une très grande probabilité d'une décision juste; mais, en s'y astreignant, trop de coupables seraient absous. Il faut donc ou limiter le nombre des juges, si l'on veut qu'ils soient unanimes, ou accroître la majorité nécessaire pour condamner, lorsque le tribunal devient plus nombreux. Je vais essayer d'appliquer le calcul à cet objet, persuadé que les applications de ce genre, lorsqu'elles sont bien conduites et fondées sur des données que le bon sens nous suggère, sont toujours préférables aux raisonnements les plus spécieux.

La probabilité que l'opinion de chaque juge est juste entre comme élément principal dans ce calcul. Cette probabilité est évidemment relative à chaque affaire. Si, dans un tribunal de mille et un juges, cinq cent un sont d'une opinion, et cinq cents sont d'une opinion contraire, il est visible que la probabilité de l'opinion de chaque juge surpasse bien peu $\frac{1}{2}$; car, en la supposant sensiblement plus grande, une seule voix de différence serait un événement invraisemblable. Mais, si les juges sont unanimes, cela indique dans les preuves ce degré de force qui entraîne la conviction. La probabilité de l'opinion de chaque juge est donc alors très près de l'unité ou de la certitude ; à moins que des passions ou des préjugés communs n'égarent tous les juges. Hors de ces cas, le rapport des voix pour ou contre l'accusé doit seul déterminer cette probabilité. Je suppose ainsi qu'elle peut varier depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à l'unité, mais qu'elle ne peut être au-dessous de $\frac{1}{2}$. Si cela n'était pas, la décision du tribunal serait insignifiante comme le sort : elle n'a de valeur qu'autant que l'opinion du juge a plus de tendance à la vérité qu'à l'erreur. C'est ensuite par le rapport des nombres de voix favorables ou contraires à l'accusé que je détermine la probabilité de cette opinion.

Ces données suffisent pour avoir l'expression générale de la probabilité que la décision du tribunal jugeant à une majorité donnée est juste. Dans nos tribunaux spéciaux composés de huit juges, cinq voix sont nécessaires pour la condamnation d'un accusé : la probabilité de l'erreur à craindre sur la justesse de la décision surpasse alors $\frac{1}{4}$. Si le tribunal était réduit à six membres qui ne pourraient condamner qu'à la pluralité de quatre voix, la probabilité de l'erreur à craindre serait alors au-dessous de $\frac{1}{4}$; il y aurait donc pour l'accusé un avantage à cette réduction du tribunal. Dans l'un et l'autre cas, la majorité exigée est la même et égale à deux. Ainsi, cette majorité demeurant constante, la probabilité de l'erreur augmente avec le nombre des juges. Cela est général, quelle que soit la majorité exigée, pourvu qu'elle reste la même. En prenant donc pour règle le rapport arithmétique, l'accusé se trouve dans une position de moins en moins avantageuse à mesure que le tribunal devient plus nombreux. Ce rapport est suivi dans la Chambre des pairs d'Angleterre. On y exige pour la condamnation une majorité de douze voix, quel que soit le nombre des juges. Si l'on a cru que, les voix opposées se détruisant réciproquement, les douze voix restantes représentent l'unanimité d'un jury de douze membres, exigée dans le même pays pour la condamnation d'un accusé, on a été dans une grande erreur. Le bon sens fait voir qu'il y a différence entre la décision d'un tribunal de deux cent douze juges, dont cent douze condamment l'accusé, tandis que cent l'absolvent, et celle d'un tribunal de douze juges unanimes pour la condamnation. Dans le premier cas, les cent voix favorables à l'accusé autorisent à penser que les preuves sont loin d'atteindre le degré de force qui entraîne la conviction. Dans le second cas, l'unanimité des juges porte à croire qu'elles ont atteint ce degré. Mais le simple bon sens ne suffit pas pour apprécier l'extrême différence de la probabilité de l'erreur dans ces deux cas. Il faut alors recourir au calcul, et l'on trouve à très peu près $\frac{1}{5}$ pour la probabilité de l'erreur dans le premier cas, et seulement $\frac{1}{8192}$ pour cette probabilité dans le second cas, probabilité qui n'est pas $\frac{1}{1000}$ de la première. C'est une confirmation du principe que le rapport arithmétique est défavorable à l'accusé quand le nombre des juges augmente. Au contraire, si l'on prend pour règle le rapport géométrique, la probabilité de l'erreur de la décision diminue quand le nombre des juges s'accroît. Par exemple, dans les tribunaux qui ne pourraient condamner qu'à la pluralité des deux tiers des voix, la probabilité de l'erreur à craindre est à peu près $\frac{1}{4}$ si le nombre des juges est six : elle est au-dessous de $\frac{1}{7}$ si ce nombre s'élève à douze. Ainsi l'on ne doit se régler ni sur le rapport arithmétique, ni sur le rapport géométrique, si l'on veut que la probabilité de l'erreur ne soit jamais au-dessus ni au-dessous d'une fraction déterminée.

Mais à quelle fraction doit-on se fixer? C'est ici que l'arbitraire commence, et les tribunaux offrent à cet égard de grandes variétés. Dans les tribunaux spéciaux, où cinq voix sur huit suffisent pour la condamnation de l'accusé, la probabilité de l'erreur à craindre sur la bonté du jugement est $\frac{65}{256}$ ou au-dessous de $\frac{1}{4}$. La grandeur de cette fraction est effrayante; mais ce qui doit rassurer un peu est la considération que, le plus souvent, le juge qui absout un accusé ne le regarde pas comme innocent. Il prononce seulement qu'il n'est pas atteint par des preuves suffisantes pour qu'il soit condamné. On est surtout rassuré par la pitié que la nature a mise dans le cœur de l'homme, et qui dispose l'esprit à voir difficilement un coupable dans l'accusé soumis à son jugement. Ce sentiment, plus vif dans ceux qui n'ont point l'habitude des jugements criminels, compense les inconvénients attachés à l'inexpérience des jurés. Dans un jury de douze membres, si la pluralité exigée pour la condamnation est de huit voix sur douze, la probabilité de l'erreur à craindre est $\frac{1093}{8192}$ ou un peu moindre que $\frac{1}{8}$: elle est à peu près $\frac{1}{22}$ si cette pluralité est de neuf voix. Dans le cas de l'unanimité, la probabilité de l'erreur à craindre est $\frac{1}{8192}$, c'est-à-dire plus de mille fois moindre que dans nos jurys.

La solution du problème que nous venons de considérer ne suffit pas pour fixer la majorité convenable, dans un tribunal d'un nombre quelconque de juges. Il faut, pour cela, connaître la probabilité du délit au-dessous de laquelle un accusé ne peut être condamné, sans que les citoyens aient plus à redouter les erreurs des tribunaux, que les attentats qui pourraient naître de l'impunité d'un coupable absous. Il faut ensuite déterminer la probabilité du délit résultante de la décision du tribunal et fixer la majorité de manière que ces probabilités soient égales. Mais il est impossible de les obtenir. La première est, comme nous l'avons dit, relative à la position dans laquelle la société se trouve, position variable, très difficile à bien définir et toujours trop compliquée pour être soumise au calcul. La seconde dépend d'une chose entièrement inconnue, la loi de probabilité de l'opinion de chaque juge dans l'estimation qu'il fait de la probabilité du délit. Vu notre ignorance de ces deux éléments du calcul, quoi de plus raisonnable que de partir de la solution du seul problème que nous puissions résoudre dans cette matière, celui de la probabilité de l'erreur de la décision d'un tribunal? Cette probabilité me paraît trop forte dans nos tribunaux, et je pense qu'à cet égard il convient de se rapprocher du jury anglais où elle n'est que $\frac{1}{8192}$. En la fixant à la fraction $\frac{1}{1024}$ et en déterminant la majorité nécessaire pour l'atteindre, on place l'accusé dans la position où il serait vis-à-vis d'un jury de neuf membres, dont on exigerait l'unanimité; ce qui me paraît garantir suffisamment l'innocence des erreurs des tribunaux, et la société des maux que produirait l'impunité des coupables. Il doit être extrêmement rare alors qu'un accusé soit condamné avec une probabilité moindre que celle qui est nécessaire à sa condamnation; car la majorité qui le condamne déclare que la probabilité de son délit est au moins égale à cette probabilité nécessaire : la minorité qui l'absout déclare que la première de ces probabilités lui paraît inférieure à la seconde; mais il est naturel de croire que cette infériorité est peu considérable. Il devra donc rarement arriver que la probabilité moyenne qui résulte de l'ensemble des jugements des membres du tribunal soit inférieure à la probabilité requise pour la condamnation de l'accusé, si l'on réduit, par une majorité convenable, la probabilité de l'erreur à craindre sur la justesse de la décision, à la fraction $\frac{1}{1024}$. L'analyse fournit, pour avoir cette majorité, des formules que je vais exposer ici et qu'il est facile de réduire dans une Table dépendante du nombre des juges. Mais une pareille Table paraîtra trop arbitraire au commun des hommes qui préféreront toujours l'un ou l'autre des rapports arithmétique et géométrique qu'ils peuvent aisément concevoir.

1. Le juge ne doit pas, pour condamner un accusé, attendre l'évidence mathématique qu'il est impossible d'atteindre dans les choses morales. Mais, lorsque la probabilité du délit est telle que les citoyens aient plus à redouter les attentats qui pourraient naître de son impunité que les erreurs des tribunaux, l'intérêt de la société exige la condamnation de l'accusé. Je nomme a ce degré de probabilité, et je suppose que le juge qui condamne un accusé prononce par là que la probabilité de son délit est au moins a. Je nomme x la probabilité de cette opinion du juge, probabilité que je supposerai égale ou supérieure à $\frac{1}{2}$, et variant par des degrés infiniment petits, égaux à x et également probables *a priori*. Je suppose encore que le tribunal est composé de $p+q$ juges, dont p condamnent l'accusé et q l'absolvent. La probabilité que l'opinion du tribunal est juste sera proportionnelle à $x^p(1-x)^q$, et la probabilité qu'elle ne l'est pas sera proportionnelle à $(1-x)^p x^q$; la probabilité de la bonté du jugement sera donc, par le n° 1 du Livre II,

$$(a) \qquad \frac{x^p(1-x)^q}{x^p(1-x)^q+(1-x)^p x^q}.$$

Il faut multiplier cette quantité par la probabilité de la valeur de x, prise de l'événement observé. Cet événement est que le tribunal s'est divisé en deux parties dont l'une, composée de p juges, condamne l'accusé, et dont l'autre, formée de q juges, l'absout. La probabilité de x est donc la fonction $x^p(1-x)^q+(1-x)^p x^q$ divisée par la somme de toutes les fonctions semblables relatives à toutes les valeurs de x, depuis $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x=1$; elle est par conséquent

$$\frac{[x^p(1-x)^q+(1-x)^p x^q]\,dx}{\int x^p\,dx(1-x)^q},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. En multipliant cette fonction par la fonction (a), on aura

$$\frac{x^p(1-x)^q\,dx}{\int x^p\,dx(1-x)^q}$$

pour la probabilité de la bonté du jugement relative à x. La même probabilité relative à toutes les valeurs de x est donc

$$(b) \qquad \frac{\int x^p\,dx(1-x)^q}{\int x^p\,dx(1-x)^q},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x=1$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Il suit de là que la probabilité de l'erreur à craindre sur la bonté du jugement est encore exprimée par la formule (b), pourvu que l'on prenne l'intégrale du numérateur depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$. On trouve ainsi cette dernière probabilité égale à

$$(c) \qquad \frac{1}{2^{p+q+1}}\left\{\begin{array}{l} 1+\dfrac{p+q+1}{1}+\dfrac{(p+q+1)(p+q)}{1.2}+\dfrac{(p+q+1)(p+q)(p+q-1)}{1.2.3}+\ldots \\ +\dfrac{(p+q+1)(p+q)(p+q-1)\ldots(p+2)}{1.2.3\ldots q} \end{array}\right\}.$$

Si l'on exige l'unanimité, q est nul, et cette expression devient $\frac{1}{2^{p+1}}$.

2. Déterminons présentement la probabilité de l'erreur à craindre sur la justesse de la décision d'un tribunal, lorsque p et q sont de

grands nombres; ce qui rend la formule (c) très difficile à évaluer en nombres. Il faut distinguer ici deux cas, l'un dans lequel $p-q$ est considérable, l'autre dans lequel $p-q$ est assez petit. Dans le premier cas, on fera usage de la formule (o) du n° 28 du Livre II qui donne, pour la probabilité de l'erreur,

$$(e)\qquad \frac{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{2^{p+q+\frac{3}{2}}p^{p+\frac{1}{2}}q^{q+\frac{1}{2}}(p-q)\sqrt{\pi}}\left\{1-\frac{p+q}{(p-q)^2}-\frac{[(p+q)^2-13pq]}{12pq(p+q)}\right\},$$

π étant la circonférence dont le diamètre est l'unité.

Dans le second cas, où $p-q$ est un petit nombre relativement à p, on trouvera facilement, par l'analyse du n° 19 du Livre II, la probabilité de l'erreur à craindre égale à

$$(f)\qquad \frac{\int dt\, c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis

$$t^2=\frac{(p-q)^2(p+q)}{8pq}$$

jusqu'à l'infini.

Pour donner un exemple de chacune de ces formules, supposons un tribunal formé de 144 juges, et qu'il faille les $\frac{5}{8}$ pour la condamnation de l'accusé. Alors on a

$$p=90,\qquad q=54,$$

et la formule (e) donne $\frac{1}{773}$ pour la probabilité de l'erreur à craindre sur la bonté de la décision du tribunal. Dans le cas de l'unanimité d'un jury de huit membres, la probabilité de l'erreur à craindre est $\frac{1}{512}$; l'accusé est donc alors dans une position plus favorable que vis-à-vis d'un semblable jury.

Supposons le tribunal formé de 212 juges et qu'une majorité de douze voix suffise pour la condamnation. Dans ce cas

$$p+q=212,\qquad p-q=12,$$

et la formule (f) donne $\frac{1}{4{,}889}$ pour la probabilité de l'erreur à craindre.

(1816.)

Sur une disposition du Code d'instruction criminelle.

L'article 351 du Code d'instruction criminelle est ainsi conçu :

« Si néanmoins l'accusé n'est déclaré coupable qu'à une simple majorité, les juges délibéreront entre eux sur le même point; et si l'avis de la minorité des jurés est adopté par la majorité des juges, de telle sorte qu'en réunissant le nombre des voix, ce nombre excède celui de la majorité des jurés et de la minorité des juges, l'avis favorable à l'accusé prévaudra. »

D'après cet article, sept jurés déclarant l'accusé coupable et cinq le déclarant non coupable, l'accusé est condamné lorsque trois seulement des cinq juges de la Cour d'assises se réunissent à la minorité des jurés. Cela paraît choquer à la fois les règles du sens commun et les principes d'humanité, protecteurs de l'innocence. La Cour d'assises intervient alors avec justice, parce que le délit de l'accusé n'est pas suffisamment établi par une simple majorité du jury, ce que le Calcul des Probabilités rend indubitable. Mais, quand l'avis de la Cour d'assises infirme celui de la majorité des jurés, loin de le confirmer, quand la différence de deux voix, qui ne donnait à cette majorité qu'une prépondérance insuffisante, est réduite à une seule voix, par l'adjonction des juges dont l'état et les lumières doivent inspirer la confiance (1), n'est-il pas injuste de condamner l'accusé?

(1) La différence d'une voix donne à la majorité une prépondérance d'autant moindre que le nombre des juges est plus considérable : le simple bon sens le fait voir sans le secours du calcul. Dans la question présente, la prépondérance de la majorité des jurés diminue donc non seulement par la réduction de deux voix à une, mais encore par l'accroissement du nombre des votants, qui s'élève de douze à dix-sept. Généralement, une différence constante entre la majorité et la minorité au-dessous de laquelle l'accusé ne puisse être condamné lui est d'autant moins favorable que le nombre des juges est plus grand : au contraire, le rapport constant des voix de la majorité à celles de la minorité lui devient plus favorable, à mesure que le nombre des juges augmente. Le rapport $\frac{5}{8}$, adopté par la Chambre des Pairs de France, est très favorable aux accusés devant un tribunal aussi nombreux. (On peut voir, sur cet objet, le Supplément à ma *Théorie analytique des Probabilités*, et la troisième édition de mon *Essai philosophique sur les Probabilités*.)

Je propose donc de réformer ainsi l'article cité :

« Si néanmoins l'accusé n'est déclaré coupable qu'à une simple ma-
» jorité, les juges délibéreront entre eux sur le même point; et si
» l'avis de la minorité des jurés est adopté par la majorité des juges,
» cet avis prévaudra. »

Si cette réforme paraît juste, le devoir indispensable d'abroger promptement tout ce qui peut compromettre l'innocence ne permet pas d'attendre, pour la convertir en loi, la revision générale du Code criminel, revision qui demande beaucoup de réflexions et de temps. C'est pour remplir ce devoir autant qu'il m'est possible que je publie cet écrit.

15 novembre 1816.

DEUXIÈME SUPPLÉMENT.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS AUX OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES.

On détermine la longueur d'un grand arc, à la surface de la Terre, par une chaîne de triangles qui s'appuient sur une base mesurée avec exactitude. Mais, quelque précision que l'on apporte dans la mesure des angles, leurs erreurs inévitables peuvent, en s'accumulant, écarter sensiblement de la vérité la valeur de l'arc que l'on a conclue d'un grand nombre de triangles. On ne connaît donc qu'imparfaitement cette valeur, si l'on ne peut pas assigner la probabilité que son erreur est comprise dans des limites données. Le désir d'étendre l'application du Calcul des Probabilités à la Philosophie naturelle m'a fait rechercher les formules propres à cet objet.

Cette application consiste à tirer des observations les résultats les plus probables et à déterminer la probabilité des erreurs dont ils sont toujours susceptibles. Lorsque, ces résultats étant connus à peu près, on veut les corriger par un grand nombre d'observations, le problème se réduit à déterminer la probabilité d'une ou de plusieurs fonctions linéaires des erreurs partielles des observations, la loi de probabilité de ces erreurs étant supposée connue. J'ai donné, dans le Livre II de ma *Théorie analytique des Probabilités,* une méthode et des formules générales pour cet objet, et je les ai appliquées, dans le premier Supplément, à quelques points intéressants du Système du monde. Dans les questions d'Astronomie, chaque observation fournit, pour corriger les éléments, une équation de condition : lorsque ces équations sont très multipliées, mes formules donnent, à la fois, les corrections les plus avantageuses et la probabilité que les erreurs, après ces corrections, seront contenues dans des limites assignées, quelle que soit d'ailleurs la loi de probabilité des erreurs de chaque observation. Il est d'autant plus nécessaire de se rendre indépendant de cette loi, que les lois les plus simples sont toujours infiniment peu probables, vu le nombre infini de celles qui peuvent exister dans la nature. Mais la loi inconnue que suivent les observations dont on fait usage introduit dans les formules une indéterminée qui ne permettrait point de les réduire en nombres, si l'on ne parvenait pas à l'éliminer. C'est ce que j'ai fait, au moyen de la somme des carrés des restes, lorsque l'on a substitué, dans chaque équation de condition, les corrections les plus probables. Les questions géodésiques n'offrant point de semblables équations, il a fallu chercher un autre moyen d'éliminer des formules de probabilité l'indéterminée dépendante de la loi de probabilité des erreurs de chaque observation partielle. La quantité dont la somme des angles de chaque triangle observé surpasse deux angles droits plus l'excès sphérique m'a fourni ce moyen, et j'ai remplacé par la somme des carrés de ces quantités la somme des carrés des restes des équations de condition. Par là, on peut déterminer numériquement la probabilité que le résultat final d'une longue suite d'opérations géodésiques n'excède pas une quantité donnée. En appliquant ces formules à la mesure d'une perpendiculaire à la méridienne, elles feront apprécier les erreurs, non seulement de l'arc total, mais encore de la différence en longitude de ses points extrêmes, conclue de la chaîne des triangles qui les unissent et des azimuts du premier et du dernier côté de cette chaîne. Si l'on diminue, autant qu'il est possible, le nombre des triangles et si l'on donne une grande précision à la mesure de leurs angles, deux avantages que procure l'emploi du cercle répétiteur et des réverbères, ce moyen d'avoir la différence en longitude des points extrêmes de la perpendiculaire sera l'un des meilleurs dont on puisse faire usage.

Pour s'assurer de l'exactitude d'un grand arc qui s'appuie sur une base mesurée vers une de ses extrémités, on mesure une seconde base vers l'autre extrémité, et l'on conclut de l'une de ces bases la longueur de l'autre. Si la longueur ainsi calculée s'écarte très peu de l'observation, il y a tout lieu de croire que la chaîne des triangles est exacte à fort peu près, ainsi que la valeur du grand arc qui en résulte. On corrige ensuite cette valeur, en modifiant les angles des triangles, de manière que les bases calculées s'accordent avec les bases mesurées, ce qui peut se faire d'une infinité de manières. Celles que l'on a jusqu'à présent employées sont fondées sur des considérations vagues et incertaines. Les méthodes exposées dans le Livre II conduisent à des formules très simples, pour avoir directement la correction de l'arc total qui résulte des mesures de plusieurs bases. Ces mesures ont non seulement l'avantage de corriger l'arc, mais encore d'augmenter ce que j'ai nommé le *poids* d'un résultat, c'est-à-dire de rendre la probabilité de ses erreurs plus rapidement décroissante, en sorte que les mêmes erreurs deviennent moins probables par la multiplicité des bases. J'expose ici les lois de probabilité des erreurs que fait naître l'addition de nouvelles bases. La mesure d'une seconde base sert pareillement à corriger la différence en longitude des points extrêmes d'une perpendiculaire à la méridienne et à augmenter le poids de la valeur de cette différence.

Avant que l'on apportât, dans les observations et dans les calculs, l'exactitude que l'on exige maintenant, on considérait les côtés des triangles géodésiques comme rectilignes, et l'on supposait la somme de leurs angles égale à deux angles droits. Legendre a remarqué le premier que les deux erreurs qu'on commet ainsi se compensent mutuellement, c'est-à-dire qu'en retranchant de chaque angle d'un triangle le tiers de l'excès sphérique, on peut négliger la courbure de ses côtés et les regarder comme rectilignes. Mais l'excès des trois angles observés sur deux angles droits se compose de l'excès sphérique et de la somme des erreurs de la mesure de chacun des angles. L'analyse des probabilités fait voir que l'on doit encore retrancher de chaque angle le tiers de cette somme, pour avoir la loi de probabilité des erreurs des résultats le plus rapidement décroissante. Ainsi, par la répartition égale de l'erreur de la somme observée des trois angles du triangle considéré comme rectiligne, on corrige à la fois l'excès sphérique et les erreurs des observations. Le poids des angles ainsi corrigés augmente, en sorte que les mêmes erreurs deviennent, par cette correction, moins probables. Il y a donc de l'avantage à observer les trois angles de chaque triangle, et à les corriger comme on vient de le dire. Le simple bon sens fait pressentir cet avantage; mais le Calcul des probabilités peut seul l'apprécier et faire voir que, par cette correction, il devient le plus grand qu'il est possible.

Les formules dont je viens de parler sont relatives à des observations futures : ainsi, lorsqu'on les applique à des observations passées, on fait abstraction de toutes les données que la comparaison de ces observations peut fournir sur les erreurs, données dont on peut faire usage quand on connaît la loi de probabilité des erreurs des observations partielles. Si cette loi est exprimée par une constante moindre que l'unité, dont l'exposant soit le carré de l'erreur, alors mes formules conviennent aux observations passées comme aux observations futures, et elles satisfont à toutes les données de ces observations, comme je l'ai fait voir dans le n° 25 du Livre II. Dans le cas où les angles sont mesurés au moyen d'un cercle répétiteur, chaque angle simple est le résultat moyen d'un grand nombre de mesures du même angle contenues dans l'arc total observé; l'erreur de l'angle est donc la moyenne des erreurs de toutes ces mesures; et, par le n° 18 du Livre II, la probabilité de cette erreur est exprimée par une constante, dont l'exposant est égal au carré de l'erreur. L'emploi du cercle répétiteur réunit donc à l'avantage de donner une mesure précise des angles celui d'établir une loi de probabilité des erreurs qui satisfait à toutes les données des observations.

Pour appliquer avec succès les formules de probabilité aux observations géodésiques, il faut rapporter fidèlement toutes celles que l'on admettrait si elles étaient isolées, et n'en rejeter aucune par la seule considération qu'elle s'éloigne un peu des autres. Chaque angle doit être uniquement déterminé par ses mesures, sans égard aux deux autres angles du triangle auquel il appartient; autrement, l'erreur de la somme des trois angles ne serait pas le simple résultat des observations, comme les formules de probabilité le supposent. Cette remarque me paraît importante, pour démêler la vérité au milieu des légères incertitudes que les observations présentent.

1. Concevons, sur une sphère, un arc de grand cercle $AA'A''\ldots$, et supposons que l'on ait formé autour la chaîne des triangles ACC', $CC'C''$, $C'C''C'''$, $C''C'''C^{\text{IV}}$, ..., dont les côtés CC', $C'C''$, $C''C'''$, ... coupent cet arc en A', A'', A''', ... Je ne donne point de figure, parce qu'il est facile de la tracer d'après ces indications. Soient A l'angle CAA', $A^{(1)}$ l'angle $C'A'A''$, $A^{(2)}$ l'angle $C''A''A'''$, ... Soient encore C l'angle ACC', $C^{(1)}$ l'angle $CC'C''$, $C^{(2)}$ l'angle $C'C''C'''$, ... On aura

$$A + A^{(1)} + C - \alpha = \pi + t,$$

α étant l'erreur de l'angle observé C, t étant l'excès des angles du triangle sphérique ACA' sur π qui exprime deux angles droits ou la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. On aura pareillement

$$A^{(1)} + A^{(2)} + C^{(1)} - \alpha^{(1)} = \pi + t^{(1)},$$

$\alpha^{(1)}$ étant l'erreur de l'angle observé $CC'C''$, et $t^{(1)}$ étant l'excès des angles du triangle sphérique $A'C'A''$ sur deux angles droits. On formera semblablement les équations

$$\begin{gathered}A^{(2)} + A^{(3)} + C^{(2)} - \alpha^{(2)} = \pi + t^{(2)},\\ A^{(3)} + A^{(4)} + C^{(3)} - \alpha^{(3)} = \pi + t^{(3)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{gathered}$$

d'où l'on tire facilement

$$\begin{aligned}A^{(2i)} &= A + C - C^{(1)} + C^{(2)} - C^{(3)} + \ldots + C^{(2i-2)} - C^{(2i-1)}\\ &\quad - \alpha + \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)} - \ldots - \alpha^{(2i-2)} + \alpha^{(2i-1)}\\ &\quad - t + t^{(1)} - t^{(2)} + t^{(3)} - \ldots - t^{(2i-2)} + t^{(2i-1)},\\ A^{(2i-1)} &= \pi - A - C + C^{(1)} - C^{(2)} + C^{(3)} - \ldots - C^{(2i-2)}\\ &\quad + \alpha - \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} - \alpha^{(3)} + \ldots + \alpha^{(2i-2)}\\ &\quad + t - t^{(1)} + t^{(2)} - t^{(3)} + \ldots + t^{(2i-2)};\end{aligned}$$

en supposant donc A bien connu, l'erreur de l'angle $A^{(n)}$ est

$$\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)} + \alpha^{(n-3)} - \ldots \pm \alpha,$$

le signe supérieur ayant lieu si n est impair, et le signe inférieur ayant lieu si n est pair. Les valeurs de t, $t^{(1)}$, ... sont fort petites et peuvent être déterminées avec précision.

Il s'agit maintenant d'avoir la probabilité que cette erreur sera contenue dans des limites données. Pour cela, je supposerai d'abord que la probabilité d'une erreur quelconque α est proportionnelle à $c^{-h\alpha^2}$, c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Cette supposition, la plus naturelle et la plus simple de toutes, résulte de l'emploi du cercle répétiteur dans la mesure des angles des triangles. En effet, nommons $\varphi(q)$ la probabilité d'une erreur q dans la mesure d'un angle simple, cette probabilité étant supposée la même pour les erreurs positives et pour les erreurs négatives. Supposons encore que s soit le nombre des angles simples contenus dans toutes les séries que l'on a faites pour déterminer cet angle. La probabilité que l'erreur du résultat moyen ou de l'angle conclu par ces séries sera $\pm \frac{r}{\sqrt{s}}$ est, par le n° 18 du Livre II, proportionnelle à

$$c^{-\frac{kr^2}{2k''}},$$

k étant égal à $\int dq\, \varphi(q)$, l'intégrale étant prise depuis q nul jusqu'à q égal à sa plus grande valeur, que l'on peut toujours supposer infinie; en faisant $\varphi(q)$ discontinu et nul au delà de la limite de q, k'' est égal $\int q^2\, dq\, \varphi(q)$. En supposant donc

$$r = \alpha\sqrt{s}, \qquad h = \frac{ks}{2k''},$$

$c^{-h\alpha^2}$ sera la probabilité de l'erreur α. On verra, à la fin de cet article, que les résultats suivants ont toujours lieu, quelle que soit la probabilité de α.

Soient 6 et γ les erreurs des deux angles AC′C et CAC′ du premier triangle ACC′; la probabilité des trois erreurs α, β et γ sera proportionnelle à

$$c^{-h\alpha^2-h\beta^2-h\gamma^2};$$

mais l'observation de ces angles donne la somme $\alpha+\beta+\gamma$ des trois erreurs; car la somme des trois angles devant être égale à deux angles droits plus la surface du triangle ACC′, si l'on nomme T l'excès des trois angles observés sur cette quantité, on aura

$$\alpha+\beta+\gamma=\mathrm{T};$$

l'exponentielle précédente devient ainsi

$$c^{-2h\left(\beta+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\mathrm{T}\right)^2-\frac{3h}{2}\left(\alpha-\frac{1}{3}\mathrm{T}\right)^2-\frac{h}{3}\mathrm{T}^2},$$

β étant susceptible de toutes les valeurs depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; il faut multiplier cette exponentielle par $d\beta$ et prendre l'intégrale dans ces limites, ce qui donne une intégrale qui a pour facteur

$$c^{-\frac{3}{2}h\left(\alpha-\frac{1}{3}\mathrm{T}\right)^2-\frac{h}{3}\mathrm{T}^2};$$

la probabilité de α est donc proportionnelle à ce facteur. La valeur de α la plus probable est évidemment celle qui rend nulle la quantité $\alpha-\frac{1}{3}\mathrm{T}$; il faut donc corriger les trois angles de chaque triangle du tiers de l'excès T de leur somme observée sur deux angles droits plus l'excès sphérique. C'est ce que l'on fait communément.

Nommons $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ les quantités $\alpha-\frac{1}{3}\mathrm{T}$, $\beta-\frac{1}{3}\mathrm{T}$; la probabilité de $\bar{\alpha}$ sera donc proportionnelle à

$$c^{-\frac{3}{2}h\bar{\alpha}^2}.$$

Si l'on diminue l'angle C de $\frac{1}{3}\mathrm{T}$, c'est-à-dire si l'on emploie les angles corrigés de chaque triangle, en nommant $\bar{\mathrm{C}}$, $\bar{\mathrm{C}}^{(1)}$, ..., ce que deviennent, par ces corrections, les angles C, $\mathrm{C}^{(1)}$, ..., on aura

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^{(2i)} &= \mathrm{A}+\bar{\mathrm{C}}-\bar{\mathrm{C}}^{(1)}+\bar{\mathrm{C}}^{(2)}-\ldots-\bar{\alpha}+\bar{\alpha}^{(1)}-\bar{\alpha}^{(2)}+\ldots-t+t^{(1)}-\ldots,\\
\mathrm{A}^{(2i-1)} &= \pi-\mathrm{A}-\bar{\mathrm{C}}\quad+\bar{\mathrm{C}}^{(1)}-\ldots+\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^{(1)}+\ldots+t-t^{(1)}+\ldots.
\end{aligned}$$

La probabilité que la quantité

$$\bar{\alpha}^{(n-1)} - \bar{\alpha}^{(n-2)} - \ldots \pm \bar{\alpha}$$

ou l'erreur de l'angle $A^{(n)}$ sera comprise dans les limites $\pm r\sqrt{n}$, sera, par le n° 18 cité,

$$\frac{2\sqrt{\frac{3}{2}h}}{\sqrt{\pi}} \int dr\, c^{-\frac{3}{2}hr^2}.$$

On peut observer ici l'avantage que produit l'observation des trois angles de chaque triangle, par la correction de ces angles. Sans cette correction, l'erreur de l'angle $A^{(n)}$ serait

$$\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-1)} + \ldots \pm \alpha,$$

et la probabilité que cette erreur est comprise dans les limites $\pm r\sqrt{n}$ serait

$$\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{\pi}} \int dr\, c^{-hr^2},$$

probabilité moindre que la précédente dans laquelle le poids du résultat est $\frac{3}{2}h$, au lieu qu'il est ici h.

Déterminons maintenant la valeur de h. Parmi les données des observations, les quantités dont les sommes des angles de chaque triangle surpassent deux angles droits plus l'excès sphérique paraissent être les plus propres à faire connaître cette valeur. Par ce qui précède, la probabilité de l'existence simultanée de $\bar{\alpha}$ et de T est proportionnelle à

$$c^{-\frac{h}{3}T^2 - \frac{3h}{2}\bar{\alpha}^2}.$$

En multipliant cette exponentielle par $d\bar{\alpha}$, et prenant l'intégrale depuis $\bar{\alpha} = -\infty$ jusqu'à $\bar{\alpha} = \infty$, l'intégrale aura pour facteur $c^{-\frac{h}{3}T^2}$, et ce facteur sera proportionnel à la probabilité de T; cette probabilité sera donc

$$\frac{dT\, c^{-\frac{h}{3}T^2}}{\int dT\, c^{-\frac{h}{3}T^2}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $T = -\infty$ jusqu'à $T = \infty$. Elle sera ainsi proportionnelle à

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{3}h}}{\sqrt{\pi}} c^{-\frac{h}{3}T^2}.$$

Ici l'événement observé est que les sommes des angles du premier triangle, du deuxième, du troisième, etc. surpassent deux angles droits plus l'excès sphérique, respectivement, des quantités T, $T^{(1)}$, ..., $T^{(n-1)}$, n étant le nombre des triangles; la probabilité de cet événement sera donc proportionnelle à

$$\left(\frac{\frac{1}{3}h}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} c^{-\frac{h}{3}\theta^2},$$

en faisant

$$\theta^2 = T^2 + T^{(1)2} + \ldots + T^{(n-1)2}.$$

Maintenant, si l'on considère les diverses valeurs de h comme causes de l'événement observé, la probabilité de h sera, par le principe de la probabilité des causes tirée des événements observés, égale à

$$\frac{h^{\frac{n}{2}}\, dh\, c^{-\frac{h}{3}\theta^2}}{\int h^{\frac{n}{2}}\, dh\, c^{-\frac{h}{3}\theta^2}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise pour toutes les valeurs de h, c'est-à-dire depuis $h = 0$ jusqu'à $h = \infty$. La valeur de h qu'il faut choisir est évidemment l'intégrale des produits des valeurs de h multipliées par leurs probabilités; cette valeur est donc

$$\frac{\int h^{\frac{n+2}{2}}\, dh\, c^{-\frac{h}{3}\theta^2}}{\int h^{\frac{n}{2}}\, dh\, c^{-\frac{h}{3}\theta^2}},$$

les intégrales étant prises depuis $h = 0$ jusqu'à $h = \infty$. L'intégrale du numérateur est égale à

$$\frac{3(n+2)}{2\theta^2} \int h^{\frac{n}{2}}\, dh\, c^{-\frac{h}{3}\theta^2}.$$

La fraction précédente devient ainsi $\frac{3(n+2)}{2\theta^2}$; c'est donc la valeur de h

qu'il faut adopter. Si l'on suppose n un grand nombre, cette valeur devient à fort peu près $\frac{3n}{2\theta^2}$. Cette quantité est la valeur de h qui rend l'événement observé le plus probable, la probabilité de cet événement, *a priori*, étant proportionnelle à $h^{\frac{n}{2}}c^{-\frac{h}{3}\theta^2}$. En prenant pour h la quantité $\frac{3n}{2\theta^2}$, la probabilité que l'erreur de l'angle $A^{(n)}$ sera comprise dans les limites $\pm r\sqrt{n}$ est

$$\frac{3\sqrt{n}}{\theta\sqrt{\pi}}\int dr\, c^{-\frac{9}{4}\frac{nr^2}{\theta^2}};$$

la probabilité qu'elle sera comprise dans les limites $\pm \frac{2}{3}\theta r'$ est donc

$$\frac{2\int dr'\, c^{-r'^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis r' nul.

2. Supposons l'arc $AA'A''\ldots$ perpendiculaire au méridien du point A. Soient φ l'angle formé par ce méridien et par celui du point extrême $A^{(n)}$, et V le plus petit des angles que ce dernier méridien fait avec l'arc $AA'\ldots$; on aura

$$\sin\varphi = \frac{\cos V}{\sin l},$$

l étant la latitude du point A. En désignant donc par $\delta\varphi$ et δV les erreurs des angles φ et V, on aura

$$\delta\varphi = -\frac{\delta V \sin V}{\sin l \cos\varphi}.$$

Si l'on a mesuré avec une grande exactitude l'angle que le dernier côté de la chaîne des triangles forme en $A^{(n)}$ avec la méridienne de ce point, il est facile de voir que

$$\delta V = \pm\,\delta A^{(n)},$$

$\delta A^{(n)}$ étant l'erreur de $A^{(n)}$; l'intégrale précédente en r' est donc la probabilité que l'erreur $\delta\varphi$ de la longitude φ conclue des azimuts observés en A et $A^{(n)}$ sera comprise dans les limites $\pm\frac{2}{3}\theta r'\dfrac{\sin V}{\sin l\cos\varphi}$.

Il résulte de l'analyse exposée dans le Chapitre V du Livre III de la *Mécanique céleste* que, s'il existe une excentricité dans les parallèles terrestres, elle n'a aucune influence sensible sur la valeur de φ conclue de cette manière, pourvu que l'arc mesuré soit peu considérable. En mesurant donc, avec une grande précision, les angles des divers triangles et les amplitudes des points extrêmes, on aura fort exactement la différence en longitude de ces points, et l'on pourra, par la formule précédente, apprécier la probabilité des petites erreurs à craindre sur cette différence.

Déterminons présentement la probabilité que l'erreur de la mesure de la ligne AA'A''.... sera comprise dans des limites données. Pour cela, supposons que dans les triangles CAC', C'CC'', ... on ait corrigé les angles comme on le fait ordinairement, c'est-à-dire en retranchant de chacun le tiers de la quantité dont la somme des trois angles observés surpasse deux angles droits plus l'excès sphérique. Que l'on abaisse des sommets C, C', C'', ... des perpendiculaires CI, C'I', C''I'', ... sur la ligne AA'A''...; on aura, à très peu près,

$$AI = AC\cos IAC.$$

On aura ensuite, à fort peu près,

$$II' = CC'\cos A^{(1)}$$

et, généralement,

$$I^{(i)}I^{(i+1)} = C^{(i)}C^{(i+1)}\cos A^{(i+1)}.$$

En supposant donc que δ soit la caractéristique des erreurs, on aura

$$\frac{\delta.I^{(i)}I^{(i+1)}}{I^{(i)}I^{(i+1)}} = \frac{\delta.C^{(i)}C^{(i+1)}}{C^{(i)}C^{(i+1)}} - \delta A^{(i+1)}\operatorname{tang}A^{(i+1)}.$$

On a, par ce qui précède,

$$\delta A^{(i+1)} = \bar\alpha^{(i)} - \bar\alpha^{(i-1)} + \bar\alpha^{(i-2)} - \ldots \pm \bar\alpha;$$

ensuite, on a, dans le $(i+1)^{\text{ième}}$ triangle,

$$C^{(i)}C^{(i+1)} = \frac{C^{(i)}C^{(i-1)}\sin C^{(i+1)}C^{(i-1)}C^{(i)}}{\sin C^{(i-1)}C^{(i+1)}C^{(i)}},$$

ce qui donne

$$\frac{\delta.C^{(i)}C^{(i+1)}}{C^{(i)}C^{(i+1)}} = \frac{\delta.C^{(i)}C^{(i-1)}}{C^{(i)}C^{(i-1)}} + \delta C^{(i+1)}C^{(i-1)}C^{(i)}\cot C^{(i+1)}C^{(i-1)}C^{(i)}$$
$$- \delta C^{(i-1)}C^{(i+1)}C^{(i)}\cot C^{(i-1)}C^{(i+1)}C^{(i)};$$

mais $\bar{\alpha}^{(i)}$ est, par ce qui précède, l'erreur de l'angle $C^{(i)}$ ou $C^{(i-1)}C^{(i)}C^{(i+1)}$, corrigé en en retranchant le tiers de l'excès de la somme des trois angles observés du triangle sur deux angles droits. Soit $\bar{\varepsilon}^{(i)}$ l'erreur de l'angle $C^{(i-1)}C^{(i+1)}C^{(i)}$, ainsi corrigé; $-(\bar{\alpha}^{(i)}+\bar{\varepsilon}^{(i)})$ sera l'erreur du troisième angle $C^{(i+1)}C^{(i-1)}C^{(i)}$. On aura donc

$$\frac{\delta.C^{(i)}C^{(i+1)}}{C^{(i)}C^{(i+1)}} = \frac{\delta.C^{(i)}C^{(i-1)}}{C^{(i)}C^{(i-1)}} - (\bar{\alpha}^{(i)}+\bar{\varepsilon}^{(i)})\cot C^{(i+1)}C^{(i-1)}C^{(i)}$$
$$- \bar{\varepsilon}^{(i)}\cot C^{(i-1)}C^{(i+1)}C^{(i)};$$

ce qui donne, en observant que, dans le premier triangle, le côté $C^{(i-1)}C$ est AC que je suppose mesuré très exactement,

$$\frac{\delta.C^{(i)}C^{(i+1)}}{C^{(i)}C^{(i+1)}} = -\,\mathrm{S}\left[(\bar{\alpha}^{(i)}+\bar{\varepsilon}^{(i)})\cot C^{(i+1)}C^{(i-1)}C^{(i)} + \bar{\varepsilon}^{(i)}\cot C^{(i-1)}C^{(i+1)}C^{(i)}\right],$$

le signe S servant à exprimer la somme de toutes les quantités qu'il renferme depuis $i=0$ jusqu'à i inclusivement. On aura donc ainsi la valeur de $\delta.I^{(i)}I^{(i+1)}$. En réunissant toutes ces valeurs, on aura, pour l'erreur entière de leur somme ou de la ligne mesurée, une expression de cette forme

$$(o) \qquad p\bar{\alpha} + q\bar{\varepsilon} + p^{(1)}\bar{\alpha}^{(1)} + q^{(1)}\bar{\varepsilon}^{(1)} + \ldots.$$

La probabilité des valeurs simultanées de $\bar{\alpha}$ et de $\bar{\varepsilon}$ est, par ce qui précède, proportionnelle à

$$c^{-2h\left(\bar{\varepsilon}+\frac{1}{2}\bar{\alpha}\right)^2 - \frac{3}{2}h\bar{\alpha}^2}.$$

En faisant

$$\bar{\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\bar{\alpha} = \tfrac{1}{2}\underline{\alpha}\sqrt{3},$$

l'exponentielle précédente devient

$$c^{-\frac{3}{2}h\underline{\alpha}^2-\frac{3}{2}h\bar{\alpha}^2};$$

ainsi les lois de probabilité des valeurs de $\underline{\alpha}$ et de $\bar{\alpha}$ sont les mêmes. La fonction (o) prend alors cette forme

$$(o') \qquad r\underline{\alpha}+r^{(1)}\bar{\alpha}+r^{(2)}\underline{\alpha}^{(1)}+r^{(3)}\bar{\alpha}^{(1)}+\ldots.$$

La probabilité que l'erreur de cette fonction, et par conséquent de la fonction (o), est comprise dans les limites $\pm s$ est, par le n° 20 du Livre II,

$$\frac{2\int dt\, c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t égal à

$$s\sqrt{\frac{\frac{3}{2}h}{r^2+r^{(1)2}+r^{(2)2}+\ldots}}.$$

On a évidemment

$$p\bar{\alpha}+q\bar{6}=(p-\tfrac{1}{2}q)\bar{\alpha}+\tfrac{1}{2}q\underline{\alpha}\sqrt{3};$$

ce qui donne, en l'égalant à $r\underline{\alpha}+r^{(1)}\bar{\alpha}$,

$$r=\tfrac{1}{2}q\sqrt{3}, \qquad r^{(1)}=p-\tfrac{1}{2}q;$$

la valeur de t sera donc, en y substituant pour h sa valeur $\frac{3n}{2\theta^2}$,

$$\frac{3s}{2\theta}\sqrt{\frac{n}{p^2-pq+q^2+p^{(1)2}-p^{(1)}q^{(1)}+q^{(1)2}+\ldots}}.$$

La longueur de l'arc mesuré fait connaître celle du rayon osculateur de la surface au point A de départ. Soit $1+u$ le rayon mené du centre de gravité de la Terre à sa surface, u étant une fonction de la longitude et de la latitude, le demi-axe de la Terre étant pris pour unité; si l'on nomme R le rayon osculateur à ce point, dans le sens AA′, on aura, par le Chapitre cité du Livre III de la *Mécanique céleste*,

$$R = 1 + u - \left(\frac{du}{dl}\right)\operatorname{tang} l + \frac{\left(\frac{d\,du}{d\varphi^2}\right)}{\cos^2 l};$$

et si l'on nomme ε la longueur de l'arc mesuré $AA^{(1)}$, on aura, à fort peu près,

$$R = \frac{\varepsilon}{\varphi\cos l}\left(1 - \tfrac{1}{3}\varepsilon^2\operatorname{tang}^2 l\right);$$

ce qui donne, à fort peu près,

$$\delta R = \frac{\delta\varepsilon}{\varphi\cos l} - \frac{\varepsilon\,\delta\varphi}{\varphi^2\cos l};$$

mais on a, par ce qui précède,

$$\delta\varepsilon = p\bar{\alpha} + q\bar{6} + \ldots,$$

$$\delta\varphi = \frac{\mp\,\delta A^{(n)}}{\sin l} = \frac{\pm\left(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}^{(1)} + \bar{\alpha}^{(2)} - \ldots\right)}{\sin l},$$

le signe inférieur ayant lieu si n est pair, et le signe supérieur si n est impair. En faisant donc

$$\bar{p} \;\;= \frac{p}{\varphi\cos l} \mp \frac{\varepsilon}{\varphi^2\sin l\cos l}, \qquad \bar{q} \;\;= \frac{q}{\varphi\cos l},$$

$$\bar{p}^{(1)} = \frac{p^{(1)}}{\varphi\cos l} \pm \frac{\varepsilon}{\varphi^2\sin l\cos l}, \qquad \bar{q}^{(1)} = \frac{q^{(1)}}{\varphi\cos l},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

la probabilité que l'erreur δR sera comprise dans les limites $\pm s$ sera

$$\frac{2\int dt\, c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à

$$t = \frac{3s}{2\theta}\sqrt{\frac{n}{\bar{p}^2 - \bar{p}\bar{q} + \bar{q}^2 + \bar{p}^{(1)2} - \bar{p}^{(1)}\bar{q}^{(1)} + \ldots}}.$$

La différence en latitude des points extrêmes de la perpendiculaire dépend, par le Chapitre cité de la *Mécanique céleste*, de l'excentricité des parallèles terrestres, qui introduit dans son expression la quantité

$$(u)\qquad -\varphi\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)\operatorname{tang} l+\left(\frac{d\,du}{d\varphi\,dl}\right)\right];$$

la partie de cette expression qui est indépendante de cette excentricité est proportionnelle à φ^2; ainsi la petite erreur dont φ est susceptible n'a point d'influence sensible sur la différence en latitude. En observant donc avec un grand soin cette différence, l'excentricité des parallèles terrestres doit se manifester, pour peu qu'elle soit sensible.

Si la ligne géodésique a été tracée dans le sens du méridien, l'azimut, à l'extrémité de l'arc mesuré, fera connaître l'excentricité des parallèles terrestres, et il est remarquable que cet azimut soit la fonction (u), en y changeant φ dans la différence en latitude des points extrêmes de l'arc mesuré et en la multipliant par le sinus de la latitude divisé par le carré du cosinus de la latitude à l'origine de l'arc.

L'arc mesuré dans le sens du méridien fera connaître le rayon osculateur de la Terre dans ce sens, et, par les formules précédentes, on aura la probabilité des erreurs dont sa valeur est susceptible.

On obtiendra plus de précision dans tous les résultats en fixant vers le milieu de l'arc mesuré l'origine des angles; car alors les puissances supérieures de ces angles, que l'on néglige, deviennent beaucoup plus petites.

3. Supposons que, pour vérifier les opérations, on mesure, vers l'extrémité $A^{(n)}$ de l'arc $AA'A''\ldots$, une seconde base. L'expression de l'erreur de cette base, conclue de la chaîne des triangles et de la base mesurée au point A, sera, par ce qui précède, de la forme

$$(p)\qquad l\bar{\alpha}+m\bar{6}+l^{(1)}\bar{\alpha}^{(1)}+m^{(1)}\bar{6}^{(1)}+\ldots;$$

soit λ cette erreur qui sera connue par la mesure directe de la seconde base. Si dans la fonction (p) on fait, comme précédemment,

$$6+\tfrac{1}{2}\bar{\alpha}=\tfrac{1}{2}\underline{\alpha}\sqrt{3},$$

elle prend cette forme

$$f\underline{\alpha} + f^{(1)}\bar{\alpha} + f^{(2)}\underline{\alpha}^{(1)} + f^{(3)}\bar{\alpha}^{(1)} + \ldots.$$

En désignant par s la valeur de la fonction (o) ou de son équivalente (o') et observant que les probabilités de $\underline{\alpha}$ et de $\bar{\alpha}$ suivent la même loi et sont proportionnelles à $c^{-\frac{3}{2}h\underline{\alpha}^2}$ et $c^{-\frac{3}{2}h\bar{\alpha}^2}$, la probabilité de la fonction précédente sera proportionnelle à

$$c^{-\frac{3}{2}h(\underline{\alpha}^2 + \bar{\alpha}^2 + \underline{\alpha}^{(1)2} + \bar{\alpha}^{(1)2} + \ldots)}.$$

En supposant la fonction égale à λ, cette exponentielle devient

$$c^{-\frac{3}{2}h\left[\left(\underline{\alpha} - \frac{f\lambda}{\mathrm{F}}\right)^2 + \left(\bar{\alpha} - \frac{f^{(1)}\lambda}{\mathrm{F}}\right)^2 + \ldots + \frac{\lambda^2}{\mathrm{F}}\right]},$$

F exprimant la somme des carrés $f^2 + f^{(1)2} + f^{(2)2} + \ldots$. Les valeurs de $\underline{\alpha}$, $\bar{\alpha}$, $\underline{\alpha}^{(1)}$, ... les plus probables sont évidemment celles qui rendent un minimum l'exposant de cette exponentielle, ce qui donne

$$\underline{\alpha} = \frac{f\lambda}{\mathrm{F}}, \qquad \bar{\alpha} = \frac{f^{(1)}\lambda}{\mathrm{F}}, \qquad \underline{\alpha}^{(1)} = \frac{f^{(2)}\lambda}{\mathrm{F}}, \qquad \ldots.$$

Si l'on observe ensuite que l'on a, par ce qui précède,

$$f = \tfrac{1}{2}m\sqrt{3}, \quad f^{(1)} = l - \tfrac{1}{2}m,$$
$$\bar{\beta} = \tfrac{1}{2}\underline{\alpha}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\bar{\alpha},$$

on aura

$$\begin{aligned} \underline{\alpha} &= \frac{(l - \frac{1}{2}m)\lambda}{\mathrm{F}}, & \bar{\beta} &= \frac{(m - \frac{1}{2}l)\lambda}{\mathrm{F}}, \\ \bar{\alpha}^{(1)} &= (l^{(1)} - \tfrac{1}{2}m^{(1)})\frac{\lambda}{\mathrm{F}}, & \bar{\beta}^{(1)} &= \frac{(m^{(1)} - \frac{1}{2}l^{(1)})\lambda}{\mathrm{F}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et F deviendra

$$l^2 - ml + m^2 + l^{(1)2} - m^{(1)}l^{(1)} + m^{(1)2} + \ldots.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la fonction (o), on aura la correction résultante de la mesure d'une seconde base, en l'affectant d'un signe contraire. Mais on peut directement arriver à ce résultat, par le n° 21 du Livre II, d'après lequel on voit que, s étant la valeur de la fonction (o), sa probabilité est proportionnelle à

$$c^{-\frac{\frac{3}{2}h\left(s-\lambda\frac{\mathrm{S}\,r^{(i)}f^{(i)}}{\mathrm{S}\,f^{(i)2}}\right)}{\mathrm{S}\,r^{(i)2}-\frac{(\mathrm{S}\,r^{(i)}f^{(i)})^2}{\mathrm{S}\,f^{(i)2}}}},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i, depuis $i=0$ inclusivement. La valeur de s la plus probable est celle qui rend nul l'exposant de c, ce qui donne

$$s=\lambda\frac{\mathrm{S}\,r^{(i)}f^{(i)}}{\mathrm{S}\,f^{(i)2}};$$

il faut donc retrancher de l'arc mesuré $\mathrm{AA}^{(1)}\ldots\mathrm{A}^{(n)}$ cette valeur de s; et, si l'on nomme u l'erreur de l'arc ainsi corrigé, la probabilité de u sera proportionnelle à

$$c^{-\frac{\frac{3}{2}hu^2}{\mathrm{S}\,r^{(i)2}-\frac{(\mathrm{S}\,r^{(i)}f^{(i)})^2}{\mathrm{S}\,f^{(i)2}}}}.$$

On voit par cette expression que le poids du résultat est augmenté en vertu de la mesure de la seconde base; car, avant cette mesure, le coefficient de $-s^2$ était, par le numéro précédent,

$$\frac{\frac{3}{2}h}{\mathrm{S}\,r^{(i)2}},$$

et, par cette mesure, le coefficient de $-u^2$ devient

$$\frac{\frac{3}{2}h}{\mathrm{S}\,r^{(i)2}-\frac{(\mathrm{S}\,r^{(i)}f^{(i)})^2}{\mathrm{S}\,f^{(i)2}}}.$$

La même erreur devient donc moins probable par cette mesure et par la correction précédente de cet arc.

On peut observer ici que les valeurs précédentes de r, $r^{(1)}$, f et $f^{(1)}$ donnent

$$r^2+r^{(1)2}=p^2-pq+q^2,$$
$$f^2+f^{(1)2}=l^2-ml+m^2,$$
$$rf+r^{(1)}f^{(1)}=l(p-\tfrac{1}{2}q)+m(q-\tfrac{1}{2}p).$$

On pourra donc former aisément $Sr^{(i)2}$ et $Sr^{(i)}f^{(i)}$ au moyen des coefficients de $\bar{\alpha}$, $\bar{\mathcal{E}}$, $\bar{\alpha}^{(1)}$, ... dans les fonctions (o) et (p).

Si l'on avait mesuré d'autres bases, on aurait, par l'analyse du n° 21 du Livre II, les corrections qu'il faudrait faire à l'arc mesuré, et la loi de ses erreurs.

La mesure d'une nouvelle base peut servir à corriger, non seulement l'arc mesuré, mais encore la différence en longitude de ses points extrêmes ou l'angle $A^{(n)}$. Il suffira de substituer à la fonction (o) celle-ci

$$\pm(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}^{(1)} + \bar{\alpha}^{(2)} - \ldots)$$

qui exprime l'erreur de $A^{(n)}$, le signe supérieur ayant lieu si n est impair, et l'inférieur si n est pair. Alors on a

$$p = \pm 1, \qquad q = 0, \qquad p^{(1)} = \mp 1, \qquad q^{(1)} = 0, \qquad \ldots;$$

de là il est facile de conclure que, pour corriger l'angle $A^{(n)}$, il faut lui ajouter la quantité

$$\frac{\mp\lambda(l - l^{(1)} + l^{(2)} - \ldots - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m^{(1)} - \ldots)}{l^2 - ml + m^2 + l^{(1)2} - m^{(1)}l^{(1)} + m^{(1)2} + \ldots}.$$

La probabilité que l'erreur de $A^{(n)}$ ainsi corrigé est dans les limites $\pm u$ sera

$$\frac{2\int dt\, c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à

$$t = \frac{u\sqrt{\frac{3}{2}h}}{\sqrt{n - \dfrac{(l - l^{(1)} + l^{(2)} - \ldots - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m^{(1)} - \ldots)^2}{l^2 - ml + m^2 + l^{(1)2} - \ldots}}}.$$

4. Nous sommes parvenus aux résultats précédents en partant de la loi de probabilité de l'erreur α proportionnelle à $c^{-h\alpha^2}$, et nous avons prouvé que cette loi de probabilité peut être admise à l'égard des angles mesurés avec le cercle répétiteur. Nous allons faire voir ici que ces résultats ont lieu généralement, quelle que soit la loi de probabilité de l'erreur α. Soit $\varphi(\alpha)$ cette loi. Nous la supposerons telle que les

mêmes erreurs positives et négatives soient également probables. Nous supposerons, de plus, que $\varphi(\alpha)$ s'étend depuis $\alpha = -\infty$ jusqu'à $\alpha = +\infty$: cette supposition est toujours permise; car, si la probabilité devient nulle au delà de certaines limites, la fonction $\varphi(\alpha)$ est alors discontinue et nulle au delà de ces limites. Cherchons maintenant la probabilité des valeurs de la fonction (o) du n° 1. Cette fonction a été calculée en corrigeant les angles de chaque triangle du tiers de la somme observée de leurs erreurs. Supposons généralement que, dans le premier triangle, on corrige l'erreur α de $(i + \frac{1}{3})T$, l'erreur β de $(i_1 + \frac{1}{3})T$, et par conséquent la troisième erreur de $(\frac{1}{3} - i - i_1)T$, en désignant par $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ les erreurs α et β ainsi corrigées, on aura

$$\alpha = \underline{\alpha} + (i + \tfrac{1}{3})T, \qquad \beta = \underline{\beta} + (i_1 + \tfrac{1}{3})T.$$

En désignant pareillement par $\underline{\alpha}^{(1)}$ et $\underline{\beta}^{(1)}$ les erreurs $\alpha^{(1)}$ et $\beta^{(1)}$ respectivement corrigées de $(i^{(1)} + \frac{1}{3})T^{(1)}$, $(i_1^{(1)} + \frac{1}{3})T^{(1)}$, on aura

$$\alpha^{(1)} = \underline{\alpha}^{(1)} + (i^{(1)} + \tfrac{1}{3})T^{(1)}, \qquad \beta^{(1)} = \underline{\beta}^{(1)} + (i_1^{(1)} + \tfrac{1}{3})T^{(1)},$$

et ainsi de suite. La fonction (o) est, par le n° 1, égale à

$$p\bar{\alpha} + q\bar{\beta} + p^{(1)}\bar{\alpha}^{(1)} + q^{(1)}\bar{\beta}^{(1)} + \ldots;$$

ensuite, on a

$$\alpha = \bar{\alpha} + \tfrac{1}{3}T = \underline{\alpha} + (i + \tfrac{1}{3})T;$$

ce qui donne

$$\bar{\alpha} = \underline{\alpha} + iT;$$

on a pareillement

$$\bar{\beta} = \underline{\beta} + i_1 T, \qquad \bar{\alpha}^{(1)} = \underline{\alpha}^{(1)} + i^{(1)}T, \qquad \ldots.$$

La fonction (o) devient ainsi

$$p\underline{\alpha} + q\underline{\beta} + p^{(1)}\underline{\alpha}^{(1)} + q^{(1)}\underline{\beta}^{(1)} + \ldots + S(pi + qi_1)T,$$

$S(pi + qi_1)T$ désignant la somme

$$(pi + qi_1)T + (p^{(1)}i^{(1)} + q^{(1)}i_1^{(1)})T^{(1)} + \ldots.$$

La correction de la fonction (o) relative aux valeurs de i, i_1, $i^{(1)}$, ... est donc

$$-\mathrm{S}(pi+qi_1)\mathrm{T},$$

et alors cette fonction ainsi corrigée devient

$$(\varepsilon)\qquad p\alpha+q\beta+p^{(1)}\alpha^{(1)}+q^{(1)}\beta^{(1)}+p^{(2)}\alpha^{(2)}+\ldots.$$

Pour avoir la probabilité des valeurs de cette dernière fonction, nous observerons que la probabilité de l'existence simultanée des valeurs de α, β et T est

$$\frac{d\alpha\, d\beta\, d\mathrm{T}\,\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,\varphi(\mathrm{T}-\alpha-\beta)}{\int\int\int d\alpha\, d\beta\, d\mathrm{T}\,\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,\varphi(\mathrm{T}-\alpha-\beta)},$$

les intégrales du dénominateur étant prises dans leurs limites infinies positives et négatives. Désignons par k l'intégrale $\int d\alpha\,\varphi(\alpha)$, prise dans ces limites; il est facile de voir que ce dénominateur sera égal à k^3. La fraction précédente devient ainsi

$$\frac{d\alpha\, d\beta\, d\mathrm{T}}{k^3}\,\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,\varphi(\mathrm{T}-\alpha-\beta);$$

la probabilité de l'existence simultanée des valeurs de $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ et T sera donc

$$\frac{d\alpha\, d\beta\, d\mathrm{T}}{k^3}\,\varphi\left[\underline{\alpha}+(i+\tfrac{1}{3})\mathrm{T}\right]\varphi\left[\underline{\beta}+(i_1+\tfrac{1}{3})\mathrm{T}\right]\varphi\left[(\tfrac{1}{3}-i-i_1)\mathrm{T}-\underline{\alpha}-\underline{\beta}\right].$$

T étant supposé pouvoir varier depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on aura la probabilité des valeurs simultanées de $\underline{\alpha}$ et de $\underline{\beta}$ en intégrant la fonction précédente par rapport à T, dans les limites infinies. Nommons $\dfrac{d\alpha\, d\beta}{k^3}\,\psi(\underline{\alpha},\underline{\beta})$ cette intégrale. On voit, par le n° 20 du Livre II, qu'en désignant par s la valeur de la fonction (ε), la probabilité de s sera proportionnelle à

$$(\mathrm{H})\quad \int d\omega\, c^{-s\omega\sqrt{-1}}\left\{\begin{array}{l}\int\int d\underline{\alpha}\, d\underline{\beta}\,\psi(\underline{\alpha},\underline{\beta})\cos(p\underline{\alpha}+q\underline{\beta})\omega\\ \times\int\int d\underline{\alpha}^{(1)}\, d\underline{\beta}^{(1)}\,\psi(\underline{\alpha}^{(1)},\underline{\beta}^{(1)})\cos(p^{(1)}\underline{\alpha}^{(1)}+q^{(1)}\underline{\beta}^{(1)})\omega\\ \times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\},$$

l'intégrale relative à ω étant prise depuis $\omega=-\pi$ jusqu'à $\omega=\pi$ et les intégrales relatives à $\underline{\alpha}$ et $\underline{6}$ étant prises dans leurs limites infinies. Développons dans une série, ordonnée par rapport aux puissances de ω, la fonction comprise dans la parenthèse. Le logarithme de $\int\int d\underline{\alpha}\, d\underline{6}\, \psi(\underline{\alpha}, \underline{6}) \cos(p\underline{\alpha} + q\underline{6})\omega$ est égal à

$$\log \int\int d\underline{\alpha}\, d\underline{6}\, \psi(\underline{\alpha}, \underline{6}) - \frac{\frac{\omega^2}{2}\int\int d\underline{\alpha}\, d\underline{6}\, \psi(\underline{\alpha}, \underline{6})(p\underline{\alpha} + q\underline{6})^2}{\int\int d\underline{\alpha}\, d\underline{6}\, \psi(\underline{\alpha}, \underline{6})} - \dots$$

Or on a

$$\begin{aligned}&\int\int d\underline{\alpha}\, d\underline{6}\, \psi(\underline{\alpha}, \underline{6})\\ &\quad = \int\int\int d\underline{\alpha}\, d\underline{6}\, d\mathrm{T}\, \varphi\left[\underline{\alpha} + (i+\tfrac{1}{3})\mathrm{T}\right] \varphi\left[\underline{6} + (i_1+\tfrac{1}{3})\mathrm{T}\right] \varphi\left[(\tfrac{1}{3} - i - i_1)\mathrm{T} - \underline{\alpha} - \underline{6}\right].\end{aligned}$$

Les intégrales étant prises dans leurs limites infinies, il est aisé de voir, par la théorie connue des intégrales multiples, que le second membre de cette équation est égal à

$$\int\int\int d\alpha\, d6\, d\mathrm{T}'\, \varphi(\alpha)\, \varphi(6)\, \varphi(\mathrm{T}'),$$

T' étant égal à $\mathrm{T} - \alpha - 6$; il est donc égal à k^3.

On a ensuite

$$(u)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int\int d\underline{\alpha}\, d\underline{6}\, \psi(\underline{\alpha}, \underline{6})(p\underline{\alpha} + q\underline{6})^2\\ &\quad = \int\int\int d\alpha\, d6\, d\mathrm{T}'\, \varphi(\alpha)\, \varphi(6)\, \varphi(\mathrm{T}')(p\underline{\alpha} + q\underline{6})^2,\end{aligned}\right.$$

en substituant pour $\underline{\alpha}$ et $\underline{6}$ leurs valeurs en α, 6, et T' dans la quantité $(p\underline{\alpha} + q\underline{6})^2$. Or il suit de ce qui précède que l'on a

$$\begin{aligned}\underline{\alpha} &= (\tfrac{2}{3} - i)\alpha - (i + \tfrac{1}{3})6 - (i + \tfrac{1}{3})\mathrm{T}',\\ \underline{6} &= (\tfrac{2}{3} - i)6 - (i_1 + \tfrac{1}{3})\alpha - (i_1 + \tfrac{1}{3})\mathrm{T}'.\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans la quantité $(p\underline{\alpha} + q\underline{6})^2$, on pourra, dans son développement, négliger les termes dépendants des produits $\alpha 6$, $\alpha \mathrm{T}'$ et $6\mathrm{T}'$, car la triple intégrale

$$(u)\qquad \int\int\int d\alpha\, d6\, d\mathrm{T}'\, \varphi(\alpha)\, \varphi(6)\, \varphi(\mathrm{T}')(p\underline{\alpha} + q\underline{6})^2$$

étant prise dans ses limites infinies, et la fonction $\varphi(\alpha)$ étant supposée la même pour les valeurs $+\alpha$ et $-\alpha$, il est clair que les éléments de cette intégrale dépendants de $+\alpha\beta$ seront détruits par les éléments négatifs dépendants de $-\alpha\beta$. Si l'on observe ensuite qu'en désignant $\int \alpha^2\, d\alpha\, \varphi(\alpha)$ par k'', on a

$$\int\int\int \alpha^2\, d\alpha\, d\beta\, dT'\, \varphi(\alpha)\, \varphi(\beta)\, \varphi(T') = k^2 k'',$$

la fonction (u) deviendra

$$k^2 k''\left[\tfrac{2}{3}(p^2 - pq + q^2) + 3(pi + qi_1)^2\right];$$

le logarithme de

$$\int\int d\alpha\, d\beta\, \psi(\alpha, \beta) \cos(p\alpha + q\beta)\omega$$

devient ainsi

$$\log k^3 - \frac{k''}{2k}\omega^2\left[\tfrac{2}{3}(p^2 - pq + q^2) + 3(pi + qi_1)^2\right] - \ldots.$$

En repassant des logarithmes aux nombres et négligeant, conformément à l'analyse du n° 20 du Livre II, les puissances de ω supérieures au carré, l'intégrale (H) prendra cette forme

$$k^{3n} \int d\omega\, c^{-s\omega\sqrt{-1} - \frac{k''\omega^2}{2k}\left[\frac{2}{3}S(p^2 - pq + q^2) + 3S(pi + qi_1)^2\right]},$$

$S(p^2 - pq + q^2)$ représentant la somme des quantités

$$p^2 - pq + q^2 + p^{(1)2} - p^{(1)}q^{(1)} + \ldots;$$

$S(pi + qi_1)^2$ représentant la somme des quantités

$$(pi + qi)^2 + (p^{(1)}i^{(1)} + q^{(1)}i^{(1)})^2 + \ldots,$$

et n étant le nombre des triangles. Donnons à l'intégrale précédente cette forme

$$k^{3n} \int d\omega\, c^{-Q\left(\omega + \frac{s\sqrt{-1}}{2Q}\right)^2 - \frac{s^2}{4Q}},$$

Q étant égal à

$$\frac{k''}{2k}\left[\tfrac{2}{3}S(p^2 - pq + q^2) + 3S(pi + qi_1)^2\right].$$

L'intégrale doit être prise depuis $\omega = -\pi$ jusqu'à $\omega = \pi$, et l'on a vu, dans le numéro cité du Livre II, qu'elle peut être étendue depuis

$\omega = -\infty$ jusqu'à $\omega = \infty$; alors l'intégrale précédente, ou la probabilité de s, devient proportionnelle à $c^{-\frac{s^2}{4Q}}$ ou à

$$c^{-\frac{3ks^2}{4k''[S(p^2-pq+q^2)+\frac{3}{2}S(p_i+q_{i_1})^2]}}.$$

Il faut maintenant déterminer la valeur de $\frac{k}{k''}$. Pour cela nous ferons, comme ci-dessus, usage des valeurs observées de T, $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, ... Lorsque ces valeurs sont en grand nombre, la somme de leurs carrés divisée par leur nombre sera, à fort peu près, par ce que nous avons établi dans le Livre II, la valeur moyenne de T^2; en faisant donc

$$\theta^2 = T^2 + T^{(1)2} + T^{(2)2} + \ldots,$$

$\frac{\theta^2}{n}$ sera cette valeur moyenne. Or on a cette valeur en multipliant chaque valeur possible de T^2 par sa probabilité et en prenant la somme de tous ces produits; l'expression de la valeur moyenne de T^2 sera donc

$$\frac{\int\int\int d\alpha\, d\beta\, dT . T^2 \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(T-\alpha-\beta)}{\int\int\int d\alpha\, d\beta\, dT\, \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(T-\alpha-\beta)},$$

les intégrales étant prises dans leurs limites infinies. Soit, comme ci-dessus,

$$T' = T - \alpha - \beta;$$

la fraction précédente deviendra

$$\frac{\int\int\int (T'+\alpha+\beta)^2\, d\alpha\, d\beta\, dT' \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(T')}{\int\int\int d\alpha\, d\beta\, dT' \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(T')},$$

toutes ces intégrales étant prises encore dans leurs limites infinies. Il est facile de voir, par l'analyse précédente, que le numérateur de cette fraction est égal à $3k^2k''$, et que son dénominateur est égal à k^3; la fraction devient ainsi $\frac{3k''}{k}$; en l'égalant à $\frac{\theta^2}{n}$, on aura

$$\frac{k''}{k} = \frac{\theta^2}{3n};$$

la probabilité de s est donc proportionnelle à

$$c^{-\frac{9ns^2}{4\theta^2[S(p^2-pq+q^2)+\frac{9}{2}S(pi+qi_1)^2]}}.$$

Il est clair que les valeurs de i et de i_1 qui rendent cette probabilité le plus rapidement décroissante sont celles qui donnent $pi+qi_1=0$; et alors la correction précédente de l'arc mesuré devient nulle. Le cas de i et i_1 nuls donne donc la loi de probabilité des erreurs géodésiques, le plus rapidement décroissante, loi qui doit être évidemment adoptée.

De là, il est facile de conclure que la probabilité que la valeur de s sera comprise dans les limites $\pm s$ est égale à

$$\frac{2\int dt\, c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à

$$t=\frac{3s}{2\theta}\sqrt{\frac{n}{S(p^2-pq+q^2)}},$$

ce qui est conforme à ce que nous avons déduit dans le n° 1 de la loi particulière de probabilité des erreurs α proportionnelle à $c^{-h\alpha^2}$.

Exprimons, comme dans le n° 2, l'erreur d'une nouvelle base conclue de la première par la fonction

$$l\bar{\alpha}+m\bar{\beta}+l^{(1)}\bar{\alpha}^{(1)}+m^{(1)}\bar{\beta}^{(1)}+\ldots.$$

En faisant, comme précédemment,

$$\underline{\alpha}=\bar{\alpha}-iT,\qquad \underline{\beta}=\bar{\beta}-i_1T,\qquad \underline{\alpha}^{(1)}=\bar{\alpha}^{(1)}-i^{(1)}T^{(1)},\qquad \ldots,$$

la correction de cette fonction, relative aux valeurs de i, i_1, $i^{(1)}$, ... sera $-S(li+mi_1)T$, et l'erreur de la nouvelle base ainsi corrigée sera

$$(\lambda)\qquad l\underline{\alpha}+m\underline{\beta}+l^{(1)}\underline{\alpha}^{(1)}+m^{(1)}\underline{\beta}^{(1)}+\ldots.$$

Soit s' la valeur de cette fonction; la probabilité de l'existence simultanée des valeurs s et s' des fonctions (ε) et (λ) sera, par le nº 21 du Livre II, proportionnelle à

$$\int\int d\omega\, d\omega'\, c^{-s\omega\sqrt{-1}-s'\omega'\sqrt{-1}-Q\omega^2-2Q_1\omega\omega'-Q_2\omega'^2},$$

les intégrales étant prises depuis ω et ω' égaux à $-\infty$ jusqu'à ω et ω' égaux à $+\infty$. On voit ensuite, par l'analyse du numéro cité, que l'on a

$$Q\omega^2 + 2Q_1\omega\omega' + Q_2\omega'^2 = \frac{\frac{1}{2}S\int\int\int d\alpha\, d\beta\, dT'\,\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,\varphi(T')\left[(p\underline{\alpha}+q\underline{\beta})\omega+(l\underline{\alpha}+m\underline{\beta})\omega'\right]^2}{\int\int\int d\alpha\, d\beta\, dT'\,\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,\varphi(T')},$$

les intégrales relatives à α, β et T' étant prises dans leurs limites infinies; ce qui donne, en substituant pour $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ leurs valeurs précédentes,

$$Q = \frac{1}{3}\frac{k''}{k}\left[S(p^2-pq+q^2)+\frac{9}{2}S(pi+qi_1)^2\right],$$

$$Q_1 = \frac{1}{3}\frac{k''}{k}\left\{S\left[\left(p-\frac{q}{2}\right)l+\left(q-\frac{p}{2}\right)m\right]+\frac{9}{2}S(pi+qi_1)(li+mi_1)\right\},$$

$$Q_2 = \frac{1}{3}\frac{k''}{k}\left[S(l^2-ml+m^2)+\frac{9}{2}S(li+mi_1)^2\right];$$

d'où l'on conclut, par l'analyse du numéro cité, que la probabilité de l'existence simultanée des valeurs de s et de s' est proportionnelle à

$$c^{-\frac{(Q_2s^2-2Q_1ss'+Qs'^2)}{4(QQ_2-Q_1^2)}}$$

ou

$$c^{-\frac{Q_2\left(s-s'\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2}{4(QQ_2-Q_1^2)}-\frac{s'^2}{4Q_2}}.$$

La mesure de la seconde base détermine la valeur de s'; et, en la nommant λ comme ci-dessus, la probabilité de s sera proportionnelle à

$$c^{-\frac{Q_2\left(s-\frac{\lambda Q_1}{Q_2}\right)^2}{4(QQ_2-Q_1^2)}}.$$

La valeur de s la plus probable est celle qui rend nul l'exposant de c;

ce qui donne

$$s = \lambda \frac{Q_1}{Q_2};$$

en faisant donc

$$s = \lambda \frac{Q_1}{Q_2} + u,$$

u sera l'erreur de l'arc mesuré et diminué de $\frac{\lambda Q_1}{Q_2}$; et la probabilité de cette erreur sera proportionnelle à

$$c^{-\frac{Q_2 u^2}{4(QQ_2 - Q_1^2)}}.$$

Les valeurs de i, i_1, $i^{(1)}$, ... doivent être déterminées par la condition que le coefficient de u^2, dans cette exponentielle, soit un maximum; voyons donc quelles sont les valeurs de ces quantités qui rendent la fraction

$$\frac{Q_2}{QQ_2 - Q_1^2}$$

un maximum. Si l'on nomme Q' ce que devient l'expression de Q lorsqu'on y diminue l'intégrale finie $S(pi + qi_1)^2$ de l'élément $(pi + qi_1)^2$, on aura

$$Q' = Q - \frac{3}{2} \frac{k''}{k} (pi + qi_1)^2.$$

Si l'on nomme pareillement Q'_1 ce que devient l'expression de Q_1 lorsque l'on y diminue l'intégrale finie $S(pi + qi_1)(li + mi_1)$ de l'élément $(pi + qi_1)(li + mi_1)$, on aura

$$Q'_1 = Q_1 - \frac{3}{2} \frac{k''}{k} (pi + qi_1)(li + mi_1).$$

Enfin, si l'on nomme Q'_2 ce que devient Q_2, lorsque l'on y diminue l'intégrale finie $S(li + mi_1)^2$ de l'élément $(li + mi_1)^2$, on aura

$$Q'_2 = Q_2 - \frac{3}{2} \frac{k''}{k} (li + mi_1)^2.$$

La fraction

$$\frac{Q'_2}{Q'Q'_2 - Q'^2_1}$$

surpasse la fraction

$$\frac{Q_2}{QQ_2 - Q_1^2};$$

car, en substituant dans la première, au lieu de Q', Q'_1 et Q'_2, leurs valeurs, et réduisant au même dénominateur son excès sur la seconde, le numérateur de cet excès devient

$$\frac{3}{2}\,\frac{k''}{k}\,[Q_2(pi + qi_1) - Q_1(li + mi_1)]^2.$$

Nommons encore Q'' ce que devient Q' lorsqu'on en retranche $\frac{3}{2}\frac{k''}{k}(p^{(1)}i^{(1)} + q^{(1)}i_1^{(1)})^2$; et, par conséquent, ce que devient l'expression de Q lorsque l'on y diminue l'intégrale $S(pi + qi_1)^2$ des deux éléments $(pi + qi_1)^2 + (p^{(1)}i^{(1)} + q^{(1)}i_1^{(1)})^2$. Nommons pareillement Q''_1 ce que devient Q'_1, lorsqu'on en retranche

$$\frac{3}{2}\,\frac{k''}{k}(p^{(1)}i^{(1)} + q^{(1)}i_1^{(1)})(l^{(1)}i^{(1)} + m^{(1)}i_1^{(1)});$$

enfin, nommons Q''_2 ce que devient Q'_2 lorsque l'on en retranche

$$\frac{3}{2}\,\frac{k''}{k}(l^{(1)}i^{(1)} + m_1^{(1)}i_1^{(1)})^2;$$

on verra, par le même procédé, que la fraction

$$\frac{Q''_2}{Q''Q''_2 - Q''^2_1}$$

surpasse la fraction

$$\frac{Q'_2}{Q'Q'_2 - Q'^2_1}$$

et, par conséquent, la fraction

$$\frac{Q_2}{QQ_2 - Q_1^2}.$$

En continuant ainsi, on voit que cette dernière fraction devient à son maximum lorsque les intégrales finies $S(pi+qi_1)^2$, $S(pi+qi_1)(li+mi_1)^2$ et $S(li + mi_1)^2$ sont nulles dans les expressions de Q, Q_1 et Q_2, ce qui revient à supposer nulles les valeurs de i, i_1, $i^{(1)}$, ...; cette supposition donne donc la loi de probabilité des valeurs de Q le plus rapidement décroissante, et alors on a

$$Q = \frac{\theta^2}{9n} S(p^2 - pq + q^2),$$

$$Q_1 = \frac{\theta^2}{9n} S\left[\left(p - \frac{q}{2}\right)l + \left(q - \frac{p}{2}\right)m\right],$$

$$Q_2 = \frac{\theta^2}{9n} S(l^2 - ml + m^2).$$

Le poids de l'erreur u devient ainsi

$$\frac{-\frac{9n}{4\theta^2}}{S(p^2 - pq + q^2) - \frac{\left[S\left(p - \frac{q}{2}\right)l + S\left(q - \frac{p}{2}\right)m\right]^2}{S(l^2 - ml + m^2)}}$$

Il est facile de voir que ce résultat coïncide avec le résultat analogue du n° 3.

Sur la probabilité des résultats déduits, par des procédés quelconques, d'un grand nombre d'observations.

La vraie marche des sciences naturelles consiste à remonter, par la voie de l'induction, des phénomènes aux lois et des lois aux forces. On redescend ensuite de ces forces à l'explication complète des phénomènes jusque dans leurs plus petits détails. L'inspection attentive d'un grand ensemble d'observations et leurs comparaisons multipliées font pressentir les lois qu'il recèle. L'expression analytique de ces lois dépend de coefficients constants que l'on nomme *éléments*. On détermine, par la théorie des probabilités, les valeurs les plus probables de ces éléments, et si, en les substituant dans les expressions analytiques, ces expressions satisfont à toutes les observations, dans les limites des erreurs possibles, on sera sûr que ces lois sont celles de la nature, ou du moins qu'elles en sont très peu différentes. On voit par là combien est utile l'application du Calcul des Probabilités à la Philosophie naturelle, et combien il est essentiel d'avoir des méthodes pour tirer des observations les résultats les plus avantageux. Ces résultats sont évidemment ceux avec lesquels une même erreur est moins probable qu'avec tout autre résultat. Ainsi la condition qu'il faut remplir dans le choix d'un résultat est que la loi de probabilité de ses erreurs soit le plus rapidement décroissante. Avant l'application du Calcul des Probabilités à cet objet, chaque calculateur assujettissait les résultats des observations aux conditions qui lui paraissaient être les plus naturelles. Maintenant que l'on a des formules certaines pour obtenir le résultat le plus avantageux, il ne peut plus y avoir d'incertitude à cet égard, du moins lorsque l'on fait usage des facteurs. On peut, non seulement déterminer ce résultat, mais encore assigner la probabilité des erreurs des résultats obtenus par d'autres procédés et comparer ces procédés à la méthode la plus avantageuse. L'excessive longueur des calculs que cette méthode exige, lorsque l'on emploie un très grand nombre d'observations, ne permet pas alors d'en faire usage. Mais, en groupant convenablement les équations de condition et en appliquant cette méthode aux équations qui résultent de chacun de ces groupes, on peut à la fois simplifier considérablement les calculs et conserver une partie des avantages qui lui sont attachés, comme on le verra dans la suite. Quel que soit le procédé dont on fait usage, il est très utile d'avoir un moyen pour déterminer la probabilité des résultats auxquels on parvient, surtout lorsqu'il s'agit d'éléments importants. On aura facilement cette probabilité par la méthode suivante.

1. Considérons d'abord un cas fort simple, celui des angles mesurés au moyen du cercle répétiteur. Supposons qu'à la fin de chaque opération partielle on lise la division correspondante du cercle; on aura, en partant du point de départ, une suite de termes dont le premier sera l'angle même, le deuxième sera le double de cet angle, le troisième en sera le triple, et ainsi de suite. Désignons par A_1, A_2, ..., A_n ces diffé-

rents termes, et par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les n angles partiels successivement mesurés. On aura

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1, \\ A_2 &= a_2 + a_1, \\ A_3 &= a_3 + a_2 + a_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

et, si l'on nomme y le véritable angle simple, on aura cette suite d'équations

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} &y - a_1 + x_1 = 0, \\ &y - a_2 + x_2 = 0, \\ &y - a_3 + x_3 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &y - a_n + x_n = 0, \end{aligned} \right.$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ étant les erreurs des angles $a_1, a_2, a_3, \ldots$. On aura, par le n° 20 du Livre II, le résultat le plus avantageux en multipliant par l'unité chacune des équations précédentes et en les ajoutant, ce qui donne

$$y = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

En supposant $x_1, x_2, \ldots$ nuls, on aura le résultat de la méthode la plus avantageuse, et l'erreur de ce résultat sera $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. En désignant par u cette erreur, on voit, par le numéro cité, que la probabilité de u est proportionnelle à $c^{-\frac{knu^2}{2k''}}$, k étant égal à $\int dx\, \varphi(x)$, et k'' étant égal à $\int x^2 dx\, \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant la loi de probabilité des erreurs x des observations partielles, cette loi étant supposée la même pour les erreurs positives et négatives et pouvant s'étendre à l'infini; c est toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité.

Svanberg, dans son excellent Ouvrage sur le degré de Laponie, expose, pour déterminer y, un nouveau procédé fondé sur les considérations suivantes. Chaque terme de la série $A_1, A_2, \ldots$ peut donner sa valeur, qui peut être également déterminée par la différence $A_{s'} - A_s$ de deux termes quelconques de cette série, s' étant plus grand que s.

Cette différence, divisée par $s'-s$, donne une valeur de y d'autant plus exacte que ce diviseur est plus grand. En la multipliant donc par ce diviseur, on la rendra prépondérante en raison de son exactitude. Si l'on fait ensuite une somme de ces produits et qu'on la divise par le nombre d'angles simples qu'elle contient, on aura une valeur de y qui, conclue de toutes les combinaisons des quantités A_1, A_2, ... en donnant à chacune de ces combinaisons l'influence qu'elle doit avoir, semble devoir approcher de la vérité le plus près qu'il est possible. Cela serait juste, en effet, si toutes ces valeurs de y étaient indépendantes. Mais leur dépendance mutuelle fait que les mêmes angles simples sont employés plusieurs fois et d'une manière différente pour chacun d'eux, ce qui doit changer les probabilités respectives des valeurs de y et, par conséquent, la probabilité de la valeur moyenne. C'est un nouvel exemple des illusions auxquelles on est exposé dans ces recherches délicates.

Le procédé dont il s'agit revient à former la somme des différences $A_{s'}-A_s$, s' étant plus grand que s et devant avec cette condition être étendu depuis $s'=1$ jusqu'à $s'=n$; s doit être étendu depuis $s=0$ jusqu'à $s=n-1$, et l'on doit faire $A_0=0$. En divisant ensuite cette somme par le nombre d'angles simples qu'elle contient, on a la valeur de y. Il est aisé de voir que cette valeur est

$$y=\frac{n\,\mathrm{S}\,A_n-2\,\mathrm{SS}\,A_{n-1}}{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}},$$

$\mathrm{S}\,A_n$ exprimant la somme des quantités A_1, A_2, ..., A_n; $\mathrm{SS}\,A_{n-1}$ est la somme des quantités

$$\begin{array}{l}
A_1,\\
A_1+A_2,\\
A_1+A_2+A_3,\\
\dots\dots\dots\dots\dots,\\
A_1+A_2+\ldots+A_{n-1};
\end{array}$$

l'angle a_i est contenu $n-i+1$ fois dans $\mathrm{S}\,A_n$, il est contenu

$\frac{(n-i)(n-i+1)}{1.2}$ fois dans la fonction SSA_{n-1}; il est donc contenu $\dfrac{\frac{i(n-i+1)}{n(n+1)(n+2)}}{1.2.3}$ fois dans l'expression précédente de y. De là il suit que ce procédé revient à multiplier les équations (a) respectivement par les facteurs

$$\frac{n}{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}},\quad \frac{2(n-1)}{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}},\quad \frac{3(n-2)}{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}},\quad \ldots;$$

et alors on trouve, par le n° 20 du Livre II, que la probabilité de l'erreur u dans l'expression précédente de y est proportionnelle à

$$c^{-\frac{k}{2k''}\frac{u^2}{SM_i^2}},$$

M_i étant ici égal à $\dfrac{i(n-i+1)}{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$; l'intégrale SM_i^2 devant comprendre toutes les valeurs de M_i^2 depuis $i=1$ jusqu'à $i=n$ inclusivement. On a ainsi

$$SM_i^2 = \frac{6}{5}\,\frac{n^2+2n+2}{n(n+1)(n+2)}.$$

n étant supposé fort grand, cette valeur de SM_i^2 se réduit à fort peu près à $\frac{6}{5n}$; la probabilité de l'erreur u est donc proportionnelle à

$$c^{-\frac{5}{6}\frac{k}{2k''}nu^2}.$$

On vient de voir que, dans la méthode la plus avantageuse, la probabilité d'une pareille erreur du résultat est proportionnelle à

$$c^{-\frac{knu^2}{2k''}}.$$

Ainsi, pour que les mêmes erreurs deviennent également probables, les observations doivent être, dans le procédé de Svanberg, plus nombreuses que dans le procédé ordinaire, suivant le rapport de six à cinq.

On pourrait croire que, le résultat obtenu par le procédé de Svanberg étant une nouvelle donnée des observations, sa combinaison avec le résultat de la méthode ordinaire doit donner un résultat plus exact, et dont la loi de probabilité des erreurs soit plus rapidement décroissante. Mais l'analyse prouve que cela n'est pas. Considérons, en effet, le système d'équations

$$(b)\qquad \begin{cases} p_1 y - a_1 + x_1 = 0, \\ p_2 y - a_2 + x_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ p_n y - a_n + x_n = 0, \end{cases}$$

$x_1, x_2, \dots$ étant, comme ci-dessus, les erreurs des observations. La méthode la plus avantageuse prescrit de multiplier ces équations, respectivement, par $p_1, p_2, \dots$ et de les ajouter, ce qui donne

$$y = \frac{\mathrm{S}\, p_i a_i}{\mathrm{S}\, p_i^2} - \frac{\mathrm{S}\, p_i x_i}{\mathrm{S}\, p_i^2},$$

le signe S comprenant, comme ci-dessus, toutes les valeurs qu'il précède, depuis $i = 1$ jusqu'à $i = n$ inclusivement. Le premier terme de cette expression sera la valeur de y donnée par la méthode la plus avantageuse, et son erreur sera $\frac{\mathrm{S}\, p_i x_i}{\mathrm{S}\, p_i^2}$; en la désignant par u, sa probabilité sera, par le n° 20 du Livre II, proportionnelle à

$$c^{-\frac{k}{2k''} u^2 \mathrm{S}\, p_i^2}.$$

Si l'on multiplie les équations (b) respectivement par $m_1, m_2, m_3, \dots$, leur somme donnera

$$y = \frac{\mathrm{S}\, m_i a_i}{\mathrm{S}\, m_i p_i} - \frac{\mathrm{S}\, m_i x_i}{\mathrm{S}\, m_i p_i}$$

Le premier terme de cette expression sera la valeur de y relative au système de facteurs $m_1, m_2, \dots$, et $\frac{\mathrm{S}\, m_i x_i}{\mathrm{S}\, m_i p_i}$ sera l'erreur de cette valeur, erreur que nous désignerons par u'. Si l'on fait

$$l = \mathrm{S}\, p_i x_i, \qquad l' = \mathrm{S}\, m_i x_i,$$

la probabilité de l'existence simultanée de l et de l' sera, par le n° 21 du Livre II, proportionnelle à

$$c^{-\frac{k}{2k''\mathrm{E}}(l^2\,\mathrm{S}\,m_i^2 - 2ll'\,\mathrm{S}\,m_i p_i + l'^2\,\mathrm{S}\,p_i^2)},$$

E étant égal à $\mathrm{S}\,m_i^2\,\mathrm{S}p_i^2 - (\mathrm{S}\,m_i p_i)^2$. Or on a

$$l = u\,\mathrm{S}\,p_i^2, \qquad l' = u'\,\mathrm{S}\,m_i p_i;$$

l'existence simultanée de u et de u' est donc proportionnelle à

$$c^{-\frac{k}{2k''}\frac{\mathrm{S}\,p_i^2}{\mathrm{E}}[u^2\mathrm{E} + (u'-u)^2(\mathrm{S}\,m_i p_i)^2]}.$$

Soit e la différence des valeurs précédentes de y; on a

$$e = \frac{\mathrm{S}\,p_i a_i}{\mathrm{S}\,p_i^2} - \frac{\mathrm{S}\,m_i a_i}{\mathrm{S}\,m_i p_i},$$

l'égalité de ces valeurs, corrigées respectivement de leurs erreurs u et u', donne

$$e = u - u';$$

l'exponentielle précédente devient ainsi

$$c^{-\frac{k}{2k''}\mathrm{S}\,p_i^2\left[u^2 + e^2\frac{(\mathrm{S}\,m_i p_i)^2}{\mathrm{E}}\right]}.$$

e est une quantité donnée par les observations; la valeur de u qui rend cette exponentielle un maximum est évidemment $u = 0$; ainsi la considération du résultat donné par le système de facteurs $m_1, m_2, \ldots$ n'ajoute aucune correction au résultat de la méthode la plus avantageuse et ne change point la loi de probabilité de son erreur u, qui reste toujours proportionnelle à

$$c^{-\frac{k}{2k''}u^2\,\mathrm{S}\,p_i^2}.$$

Si le très grand nombre des équations de condition ne permet pas de leur appliquer cette méthode, il y aura toujours de l'avantage à l'appliquer à des équations résultantes de groupes de ces équations. Supposons que l'on ait r groupes, formés chacun de s équations, en sorte que $n = rs$; on aura les r équations suivantes

$$(\mathrm{V})\qquad \begin{cases} \mathrm{P}_1 y - \mathrm{A}_1 + \mathrm{X}_1 = 0, \\ \mathrm{P}_2 y - \mathrm{A}_2 + \mathrm{X}_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \mathrm{P}_r y - \mathrm{A}_r + \mathrm{X}_r = 0; \end{cases}$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_1 &= p_1 \quad + p_2 \quad + \ldots + p_s, \\ \mathrm{A}_1 &= a_1 \quad + a_2 \quad + \ldots + a_s, \\ \mathrm{X}_1 &= x_1 \quad + x_2 \quad + \ldots + x_s, \\ \mathrm{P}_2 &= p_{s+1} + p_{s+2} + \ldots + p_{2s}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

En appliquant aux équations (V) le procédé de la méthode la plus avantageuse, on a

$$y = \frac{\mathrm{S\,P}_t \mathrm{A}_t}{\mathrm{S\,P}_t^2} - \frac{\mathrm{S\,P}_t \mathrm{X}_t}{\mathrm{S\,P}_t^2};$$

le signe S embrassant toutes les quantités qu'il précède, depuis $t = 1$ jusqu'à $t = r$ inclusivement. $\frac{\mathrm{S\,P}_t \mathrm{X}_t}{\mathrm{S\,P}_t^2}$ est l'erreur de la valeur $\frac{\mathrm{S\,P}_t \mathrm{A}_t}{\mathrm{S\,P}_t^2}$ prise pour y; en désignant par u cette erreur, sa probabilité sera, par le n° 20 du Livre II, proportionnelle à

$$c^{-\frac{k}{2k''}\frac{u^2}{\mathrm{S}\,m_i^2}};$$

$m_1, m_2, \ldots$ étant les coefficients de $x_1, x_2, \ldots$ dans l'expression de u; et l'intégrale $\mathrm{S}\,m_i^2$ s'étendant depuis $i = 0$ jusqu'à $i = n$ inclusivement. Or il est aisé de voir que l'on a

$$\begin{array}{llll} m_1 \quad = \dfrac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{S\,P}_t^2}, & m_2 = \dfrac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{S\,P}_t^2}, & \ldots, & m_s = \dfrac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{S\,P}_t^2}, \\ m_{s+1} = \dfrac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{S\,P}_t^2}, & \dots\dots\dots, & \ldots, & m_{2s} = \dfrac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{S\,P}_t^2}, \\ m_{2s+1} = \dfrac{\mathrm{P}_3}{\mathrm{S\,P}_t^2}, & \dots\dots\dots, & \ldots, & \dots\dots\dots; \end{array}$$

de là il est facile de conclure que l'on a

$$S\,m_i^2 = \frac{s}{S\,P_t^2} = \frac{n}{r\,S\,P_t^2};$$

la probabilité de u est donc proportionnelle à

$$c^{-\frac{k}{2k''}\frac{r}{n}u^2\,S\,P_t^2}.$$

Si l'on réunissait toutes les équations en un seul groupe, la probabilité de u serait proportionnelle à

$$c^{-\frac{k}{2k''}\frac{u^2}{n}(S\,p_i)^2};$$

car alors r deviendrait l'unité, P_1 deviendrait $S\,p_i$, P_2, P_3, ... seraient nuls. Le poids du résultat ou le coefficient de $-u^2$ serait donc, dans le premier cas,

$$\frac{k}{2k''}\,\frac{r}{n}\,S\,P_t^2,$$

et, dans le second cas, il serait

$$\frac{k}{2k''n}(S\,p_i)^2.$$

Or la première de ces quantités surpasse la seconde; en effet,

$$(S\,p_i)^2 = (P_1 + P_2 + \ldots + P_r)^2.$$

Si, dans le développement de ce dernier carré, on substitue, au lieu du produit $2P_1P_2$, sa valeur $P_2^1 + P_2^2 - (P_1 - P_2)^2$, et ainsi des autres produits, on voit que ce carré est égal à $r\,S\,P_t^2$, moins une quantité positive; il y a donc de l'avantage à partager les équations de condition en plusieurs groupes auxquels on applique la méthode la plus avantageuse.

On voit encore qu'il y a de l'avantage à augmenter le nombre des groupes; car, si l'on suppose r pair et égal à $2r'$, le poids du résultat relatif au nombre r' de groupes sera proportionnel à

$$r'[(P_1 + P_2)^2 + (P_3 + P_4)^2 + \ldots + (P_{2r'-1} + P_{2r'})^2];$$

et le poids du résultat relatif à $2r'$ groupes sera proportionnel à

$$2r'(P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_{2r'}^2).$$

Cette dernière quantité surpasse la précédente, comme on le voit en observant que

$$2(P_1^2 + P_2^2) > (P_1 + P_2)^2.$$

Si les équations de condition renferment plusieurs éléments inconnus, $y, y', \ldots$, il y aura toujours de l'avantage à les partager en groupes pour appliquer aux équations résultantes de ces groupes la méthode la plus avantageuse. Plus on multipliera ces groupes, plus on augmentera le poids des résultats.

Mais, de quelque manière que l'on ait obtenu ces résultats, on pourra toujours déterminer, par le théorème suivant, la probabilité de leurs erreurs. Si l'on a, par un procédé quelconque, tiré des équations de condition l'équation $y - a = 0$, il est clair que l'on a multiplié les équations de condition, respectivement, par des facteurs M_1, M_2, $M_3, \ldots$ tels que les inconnues ont disparu, à l'exception de y qui a l'unité pour facteur. L'erreur u du résultat $y = a$ est évidemment $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots$; la probabilité de cette erreur sera donc, par le n° 20 du Livre II, proportionnelle à

$$c^{-\frac{k}{2k''}\frac{u^2}{\mathrm{S}\,M_i^2}},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i depuis $i = 1$ jusqu'à $i = n$, n étant le nombre des observations. Tout se réduit donc à déterminer, dans le procédé que l'on a suivi, les facteurs M_1, M_2, ….

Si, par exemple, les équations de condition renferment deux inconnues y et y' et si, pour former les deux équations finales, on ajoute ensemble toutes ces équations : 1° en changeant les signes des équations dans lesquelles y a le signe $-$; 2° en changeant les signes des équations dans lesquelles y' a le signe $-$, on obtiendra, par ce procédé dont on a souvent fait usage, deux équations que nous représenterons par les suivantes :

$$P\,y + R\,y' - A = 0,$$
$$P_1 y + R_1 y' - A_1 = 0.$$

En multipliant la première de ces équations par

$$\frac{R_1}{PR_1 - P_1 R}$$

et la seconde par

$$\frac{-R}{PR_1 - P_1 R},$$

on aura, en les ajoutant,

$$y - \frac{AR_1 - A_1 R}{PR_1 - P_1 R} = 0.$$

Dans les équations de condition, x_i a été multiplié par ± 1; le signe $-$ ayant lieu si, pour former les équations finales, on a changé les signes de l'équation $i^{\text{ième}}$. De là il est facile de conclure que, si l'on désigne par s le nombre des équations de condition dans lesquelles les coefficients de y et de y' ont le même signe, on aura

$$S\,M_i^2 = \frac{s(R_1 - R)^2 + (n-s)(R_1 + R)^2}{(PR_1 - P_1 R)^2}.$$

On simplifiera le calcul en préparant les équations de condition de manière que dans toutes le coefficient de y ait le signe $+$. On formera ensuite une première équation finale en ajoutant les s équations dans lesquelles le coefficient de y' a le signe $+$. On formera une seconde équation finale en ajoutant les $n-s$ équations dans lesquelles le coefficient de y' a le signe $-$. Soient

$$f\,y + g\,y' - h = 0,$$
$$f_1 y - g_1 y' - h_1 = 0$$

ces deux équations. En multipliant la première par $\frac{g_1}{fg_1 + f_1 g}$ et la se-

seconde par $\frac{g}{fg_1+f_1g}$, on aura

$$y - \frac{hg_1+h_1g}{fg_1+f_1g} = 0,$$

et il est facile de voir que

$$\mathrm{S}\,\mathrm{M}_i^2 = \frac{sg_1^2+(n-s)g^2}{(fg_1+f_1g)^2}.$$

Ces valeurs de y et de $\mathrm{S}\,\mathrm{M}_i^2$ coïncident avec les précédentes, comme il est aisé de le voir en observant que l'on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{P} = f+f_1, && \mathrm{R} = g-g_1, && \mathrm{A} = h+h_1,\\ &\mathrm{P}_1 = f-f_1, && \mathrm{R}_1 = g_1+g, && \mathrm{A}_1 = h-h_1. \end{aligned}$$

Les équations de condition étant représentées généralement par la suivante

$$0 = x_i - a_i + p_i y + q_i y',$$

si on les multiplie respectivement par $m_1, m_2, \ldots$ et qu'on les ajoute, on aura l'équation finale

$$0 = \mathrm{S}\,m_i x_i - \mathrm{S}\,m_i a_i + y\,\mathrm{S}\,m_i p_i + y'\,\mathrm{S}\,m_i q_i;$$

si l'on multiplie ensuite les mêmes équations, respectivement par n_1, $n_2, \ldots$, on aura, en les ajoutant, l'équation finale

$$0 = \mathrm{S}\,n_i x_i - \mathrm{S}\,n_i a_i + y\,\mathrm{S}\,n_i p_i + y'\,\mathrm{S}\,n_i q_i.$$

En multipliant la première de ces équations par $\frac{\mathrm{S}\,n_i q_i}{\mathrm{I}}$ et la seconde par $-\frac{\mathrm{S}\,m_i q_i}{\mathrm{I}}$, I étant égal à

$$\mathrm{S}\,m_i p_i\,\mathrm{S}\,n_i q_i - \mathrm{S}\,n_i p_i\,\mathrm{S}\,m_i q_i,$$

on aura

$$0 = y - \frac{\mathrm{S}\,m_i a_i\,\mathrm{S}\,n_i q_i - \mathrm{S}\,n_i a_i\,\mathrm{S}\,m_i q_i}{\mathrm{I}} + \frac{\mathrm{S}\,m_i x_i\,\mathrm{S}\,n_i q_i - \mathrm{S}\,n_i x_i\,\mathrm{S}\,m_i q_i}{\mathrm{I}}.$$

Ce dernier terme est l'erreur de la valeur que l'on obtient pour y, en supposant nuls $x_1, x_2, \ldots$: on a donc alors

$$M_i = \frac{m_i \, S\, n_i q_i - n_i \, S\, m_i q_i}{I};$$

d'où il est facile de conclure

$$c^{-\frac{k}{2k''}\frac{u^2}{S\,M_i^2}} = c^{-\frac{k}{2k''}u^2\frac{I^2}{H}},$$

en faisant

$$H = S\, m_i^2 (S\, n_i q_i)^2 - 2\, S\, m_i n_i \, S\, m_i q_i \, S\, n_i q_i + S\, n_i^2 (S\, m_i q_i)^2,$$

résultat qui coïncide avec celui du n° 21 du Livre II, dans lequel nous avons prouvé que le maximum du coefficient de $-u^2$ dans cette exponentielle a lieu lorsque l'on suppose généralement $m_i = p_i$, $n_i = q_i$; cette supposition donne donc le résultat le plus avantageux ou celui dont le poids est un maximum.

On déterminera la valeur de $\frac{k}{2k''}$ au moyen des carrés des restes qui ont lieu lorsque l'on substitue dans les équations de condition les valeurs déterminées pour y et y'. En désignant par ε_i ce reste dans la $i^{\text{ième}}$ équation de condition

$$0 = x_i - a_i + p_i y + q_i y',$$

et désignant par u et u' les erreurs de ces valeurs, on aura

$$0 = x_i + \varepsilon_i - p_i u - q_i u';$$

ce qui donne

$$S\,\varepsilon_i^2 = S\,x_i^2 - 2u\, S\, p_i x_i - 2u'\, S\, q_i x_i + u^2\, S\, p_i^2 + 2uu'\, S\, p_i q_i + u'^2\, S\, q_i^2.$$

On a, par le n° 19 du Livre II,

$$S\,x_i^2 = \frac{k''}{k} n;$$

ensuite, les valeurs u et u' cessent d'être vraisemblables, lorsqu'elles surpassent des quantités de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Les valeurs de $S\,p_i x_i$ et $S\,q_i x_i$ cessent d'être vraisemblables lorsqu'elles surpassent des quantités de l'ordre $\sqrt{n}$; les valeurs de $-2u\,\mathrm{S}p_ix_i$ et $-2u'\,\mathrm{S}q_ix_i$ cessent donc d'être vraisemblables lorsqu'elles cessent d'être d'un ordre fini, n étant supposé infiniment grand. $\mathrm{S}p_i^2$, $\mathrm{S}p_iq_i$ et $\mathrm{S}q_i^2$ étant de l'ordre n, les valeurs de $u^2\,\mathrm{S}p_i^2$, $2uu'\,\mathrm{S}p_iq_i$, $u'^2\,\mathrm{S}q_i^2$ cessent d'être vraisemblables lorsqu'elles cessent d'être des quantités finies. On peut donc négliger toutes ces quantités et supposer, quel que soit le procédé dont on fait usage,

$$\mathrm{S}\,\varepsilon_i^2 = \frac{k''}{k}n,$$

ce qui donne

$$\frac{k}{2k''} = \frac{n}{2\,\mathrm{S}\varepsilon_i^2}.$$

2. Les méthodes précédentes se réduisent à multiplier chaque équation de condition par un facteur et à ajouter tous ces produits pour former une équation finale. Mais on peut employer d'autres considérations pour obtenir le résultat cherché : par exemple, on peut choisir celle des équations de condition qui doit le plus approcher de la vérité. Le procédé que j'ai donné dans le n° 40 du Livre III de la *Mécanique céleste* est de ce genre. En supposant les équations (b) du numéro précédent préparées de manière que $p_1, p_2, p_3, \ldots$ soient positifs et que les valeurs $\frac{a_1}{p_1}, \frac{a_2}{p_2}, \cdots$ de y, données par ces équations dans la supposition de $x_1, x_2, \ldots$ nuls, forment une série décroissante, le procédé dont il s'agit consiste à choisir l'équation de condition $r^{\text{ième}}$, telle que l'on ait

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{r-1} < p_r \quad + p_{r+1} + \ldots + p_n,$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_r \quad > p_{r+1} + p_{r+2} + \ldots + p_n,$$

et à supposer

$$y = \frac{a_r}{p_r}.$$

Cette valeur de y rend un minimum la somme de tous les écarts des autres valeurs, pris positivement; car, en nommant $x_1, x_2, \ldots$ ces écarts, $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$ seront positifs et $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ seront négatifs. Si l'on accroît la valeur précédente de y de la quantité infiniment petite δy, la somme des écarts positifs $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$ diminuera de la quantité

$$\delta y(p_1 + p_2 + \ldots + p_{r-1});$$

mais la somme des écarts négatifs, pris avec le signe $+$, augmentera de la quantité

$$\delta y(p_{r+1} + p_{r+2} + \ldots + p_n);$$

l'écart x_r deviendra $p_r\,\delta y$. La somme des écarts, pris tous positivement, sera donc augmentée de la quantité

$$\delta y(p_r + p_{r+1} + \ldots + p_n - p_1 - p_2 - \ldots - p_{r-1});$$

par les conditions auxquelles le choix de l'équation $r^{\text{ième}}$ est assujettie, cette quantité est positive. On verra, de la même manière, que si l'on diminue $\frac{a_r}{p_r}$ de δy, la somme des écarts pris positivement sera augmentée de la quantité positive

$$\delta y(p_1 + p_2 + \ldots + p_r - p_{r+1} - p_{r+2} - \ldots - p_n).$$

Ainsi, dans les deux cas d'un accroissement et d'une diminution de la valeur $\frac{a_r}{p_r}$ de y, la somme des écarts, pris positivement, est augmentée. Cette considération semble donner un grand avantage à la valeur précédente de y, qui, lorsqu'il s'agit de choisir un milieu entre les résultats d'un nombre impair d'observations, devient le résultat équidistant des extrêmes. Mais le Calcul des probabilités peut seul faire apprécier cet avantage; je vais donc l'appliquer à cette question délicate.

Les seules données dont nous ferons usage sont que l'équation de condition

$$o = x_r - a_r + p_r y$$

donne, abstraction faite des erreurs, une valeur de y plus petite que les $r-1$ équations antérieures et plus grande que les $n-r$ équations postérieures; et que l'on a

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{r-1} < p_r + p_{r+1} + \ldots + p_n,$$
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_r > p_{r+1} + p_{r+2} + \ldots + p_n.$$

On a

$$y = \frac{a_1}{p_1} - \frac{x_1}{p_1} = \frac{a_r}{p_r} - \frac{x_r}{p_r};$$

ce qui donne

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{a_1}{p_1} - \frac{a_r}{p_r} + \frac{x_r}{p_r}.$$

Ainsi, $\frac{a_1}{p_1}$ surpassant $\frac{a_r}{p_r}$, $\frac{x_1}{p_1}$ surpasse $\frac{x_r}{p_r}$. Il en est de même de $\frac{x_2}{p_2}$, $\frac{x_3}{p_3}$, $\ldots$ jusqu'à $\frac{x_{r-1}}{p_{r-1}}$. On verra de la même manière que $\frac{x_{r+1}}{p_{r+1}}$, $\frac{x_{r+2}}{p_{r+2}}$, $\ldots$, $\frac{x_n}{p_n}$ sont moindres que $\frac{x_r}{p_r}$. Ainsi, les seules conditions auxquelles nous assujettirons les erreurs et les équations de condition sont les suivantes :

$$(c) \qquad \begin{cases} s > r, & s < r, \\ \dfrac{x_s}{p_s} < \dfrac{x_r}{p_r}, & \dfrac{x_s}{p_s} > \dfrac{x_r}{p_r}; \end{cases}$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{r-1} < p_r \quad + p_{r+1} + \ldots + p_n,$$
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_r \quad > p_{r+1} + p_{r+2} + \ldots + p_n.$$

C'est uniquement d'après ces données des observations que nous allons déterminer la probabilité de l'erreur x_r. Nous n'aurons d'ailleurs aucun égard à l'ordre qu'observent entre elles les $r - 1$ premières équations de condition et les $n - r$ dernières, ni aux valeurs des quantités a_1, a_2, $\ldots$, a_n.

Représentons, comme ci-dessus, par $\varphi(x)$ la loi de probabilité de l'erreur x des observations et, pour exprimer que cette probabilité est la même pour les erreurs positives et négatives, supposons $\varphi(x)$ fonction de x^2.

Maintenant, si l'on suppose x_r positif, la probabilité que x_1 surpassera $p_1 \frac{x_r}{p_r}$ sera

$$\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}\int dx\,\varphi(x)}{k},$$

l'intégrale $\int dx\,\varphi(x)$ étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = p_1 \frac{x_r}{p_r}$ et k étant, comme ci-dessus, cette intégrale prise depuis x nul jusqu'à x

infini. La probabilité que les quantités $\frac{x_1}{p_1}, \frac{x_2}{p_2}, \ldots, \frac{x_{r-1}}{p_{r-1}}$ seront toutes plus grandes que $\frac{x_r}{p_r}$ est donc proportionnelle au produit des $r-1$ facteurs

$$1-\frac{\int dx\,\varphi(x)}{k},\quad 1-\frac{\int dx\,\varphi(x)}{k},\quad \ldots;$$

l'intégrale du premier facteur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=p_1\frac{x_r}{p_r}$; l'intégrale du second facteur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=p_2\frac{x_r}{p_r}$; et ainsi de suite.

Pareillement, toutes les quantités $\frac{x_{r+1}}{p_{r+1}}, \frac{x_{r+2}}{p_{r+2}}, \ldots, \frac{x_n}{p_n}$ étant supposées plus petites que $\frac{x_r}{p_r}$, on voit, par le même raisonnement, que la probabilité de cette supposition est proportionnelle au produit des $n-r$ facteurs

$$1+\frac{\int dx\,\varphi(x)}{k},\quad 1+\frac{\int dx\,\varphi(x)}{k},\quad \ldots;$$

l'intégrale du premier facteur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=p_{r+1}\frac{x_r}{p_r}$, celle du second facteur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=p_{r+2}\frac{x_r}{p_r}$, et ainsi de suite. La probabilité de l'erreur x_r est $\varphi(x_r)$; ainsi la probabilité que l'erreur de la $r^{\text{ième}}$ observation sera x_r et que la valeur de y donnée par la $r^{\text{ième}}$ équation sera plus petite que les valeurs données par les équations précédentes, et surpassera les valeurs données par les équations suivantes, cette probabilité, dis-je, sera proportionnelle au produit des $n-1$ facteurs précédents et de $\varphi(x_r)$.

x étant supposé très petit, on a, aux quantités près de l'ordre x^3,

$$\int dx\,\varphi(x) = x\,\varphi(0)+\tfrac{1}{2}x^2\,\varphi'(0),$$

$\varphi'(0)$ étant ce que devient $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ lorsque x est nul. Dans la question présente, $\varphi(x)$ étant une fonction de x^2, on a $\varphi'(0)=0$, et alors on a

$$\int dx\,\varphi(x) = x\,\varphi(0).$$

Les facteurs précédents deviendront ainsi, en faisant $\frac{x_r}{p_r} = \zeta$,

$$1 - p_1 \zeta \frac{\varphi(0)}{k},$$

$$1 - p_2 \zeta \frac{\varphi(0)}{k},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$1 - p_{r-1} \zeta \frac{\varphi(0)}{k},$$

$$1 + p_{r+1} \zeta \frac{\varphi(0)}{k},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$1 + p_n \ \zeta \frac{\varphi(0)}{k}.$$

Si l'on désigne par $\varphi''(0)$ la valeur de $\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2}$ lorsque x est nul, $\varphi(x_r)$ devient

$$\varphi(0) + \tfrac{1}{2} p_r^2 \zeta^2 \varphi''(0).$$

La somme des logarithmes hyperboliques de tous ces facteurs est, aux quantités près de l'ordre ζ^3, en divisant le facteur $\varphi(x_r)$ par $\varphi(0)$,

$$\begin{aligned} &-\zeta \frac{\varphi(0)}{k} (p_1 + p_2 + \ldots + p_{r-1} - p_{r+1} - p_{r+2} - \ldots - p_n) \\ &\quad - \frac{\zeta^2}{2} \left[\frac{\varphi(0)}{k}\right]^2 (p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_r^2 + p_{r+1}^2 + \ldots + p_n^2) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} p_r^2 \zeta^2 \left\{ \frac{\varphi''(0)}{k} + \left[\frac{\varphi(0)}{k}\right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

La probabilité de ζ est donc proportionnelle à la base c des logarithmes hyperboliques, élevée à une puissance dont l'exposant est la fonction précédente. On doit observer qu'en vertu des conditions auxquelles le choix de l'équation $r^{\text{ième}}$ est assujetti, la quantité

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{r-1} - p_{r+1} - p_{r+2} - \ldots - p_n$$

est, abstraction faite du signe, une quantité moindre que p_r, et qu'ainsi, en supposant ζ de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$, le nombre n des observations étant supposé fort grand, le terme dépendant de la première puissance de ζ, dans la fonction précédente, est de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$; on peut donc le négliger, ainsi que le dernier terme de cette fonction. En désignant donc par $\mathrm{S}\,p_i^2$ la somme entière

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2,$$

la probabilité de ζ sera proportionnelle à

$$c^{-\frac{\zeta^2}{2}\left[\frac{\varphi(0)}{k}\right]^2 \mathrm{S}\,p_i^2},$$

ζ ou $\frac{x_r}{p_r}$ étant l'erreur de la valeur $\frac{a_r}{p_r}$ donnée pour y par l'équation $r^{\text{ième}}$. La valeur donnée par la méthode la plus avantageuse est, par le numéro précédent,

$$y = \frac{\mathrm{S}\,p_i a_i}{\mathrm{S}\,p_i^2},$$

et la probabilité d'une erreur ζ dans ce résultat est proportionnelle à

$$c^{-\frac{k}{2k''}\zeta^2 \mathrm{S}\,p_i^2},$$

k'' étant toujours l'intégrale $\int x^2\,dx\,\varphi(x)$, prise depuis x nul jusqu'à x infini. Le résultat de la méthode que nous venons d'examiner, et que nous nommerons méthode de *situation*, sera préférable à celui de la méthode la plus avantageuse, si le coefficient de $-\zeta^2$, qui lui est relatif, surpasse le coefficient relatif à la méthode la plus avantageuse, parce qu'alors la loi de probabilité des erreurs y sera plus rapidement décroissante. Ainsi, la méthode de situation doit être préférée si l'on a

$$\left[\frac{\varphi(0)}{k}\right]^2 > \frac{k}{k''};$$

dans le cas contraire, la méthode la plus avantageuse est préférable. Si l'on a, par exemple,

$$\varphi(x) = c^{-hx^2},$$

k devient $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{h}}$ et k'' devient $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4h\sqrt{h}}$; ce qui donne $\dfrac{k}{k''} = 2h$. La quantité $\left[\dfrac{\varphi(0)}{k}\right]^2$ devient $\dfrac{4h}{\pi}$; or on a $2h > \dfrac{4h}{\pi}$; la méthode la plus avantageuse doit donc alors être préférée.

En combinant les résultats de ces deux méthodes, on peut obtenir un résultat dont la loi de probabilité des erreurs soit plus rapidement décroissante. Nommons toujours ζ l'erreur du résultat de la méthode de situation, et désignons par ζ' l'erreur du résultat de la méthode la plus avantageuse. Le premier de ces résultats est, comme on l'a vu, $\dfrac{a_r}{p_r}$, et le second est $\dfrac{\mathrm{S}\,p_i a_i}{\mathrm{S}\,p_i^2}$. Si l'on désigne $\mathrm{S}\,p_i x_i$ par l, $\dfrac{l}{\mathrm{S}\,p_i^2}$ sera l'erreur de ce dernier résultat; ainsi l'on aura $l = \zeta' \mathrm{S}\,p_i^2$. La probabilité de l'existence simultanée de l et de ζ est, par le n° 21 du Livre II, proportionnelle à

$$\int d\omega\, c^{-l\omega\sqrt{-1}}\, \varphi(p_r\zeta)\, c^{p_r\zeta\omega\sqrt{-1}} \int dx\, \varphi(x)\, c^{p_1 x\omega\sqrt{-1}} \int dx\, \varphi(x)\, c^{p_2 x\omega\sqrt{-1}} \ldots,$$

l'intégrale relative à ω étant prise depuis $\omega = -\pi$ jusqu'à $\omega = \pi$. L'intégrale relative à x, dans le facteur $\int dx\, \varphi(x)\, c^{p_1 x\omega\sqrt{-1}}$, doit être prise, par ce qui précède, depuis $x = p_1\zeta$ jusqu'à $x = \infty$. En développant ce facteur suivant les puissances de x, il devient

$$\int dx\, \varphi(x) + p_1\omega\sqrt{-1} \int x\, dx\, \varphi(x) - p_1^2 \frac{\omega^2}{2} \int x^2\, dx\, \varphi(x) + \ldots.$$

En prenant l'intégrale dans les limites précédentes, on a, aux quantités près de l'ordre ζ^3,

$$\int dx\, \varphi(x) = k - p_1\zeta\, \varphi(0).$$

En négligeant pareillement les quantités des ordres $\zeta^2\omega$, $\zeta^3\omega^2$, ..., on a

$$p_1\omega\sqrt{-1} \int x\, dx\, \varphi(x) = k' p_1\omega\sqrt{-1}, \qquad \frac{-p_1^2}{2}\omega^2 \int x^2\, dx\, \varphi(x) = -\frac{k''}{2} p_1^2\omega^2,$$

k' étant l'intégrale $\int x\, dx\, \varphi(x)$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à x infini. Le facteur dont il s'agit devient donc, en négligeant ω^3, conformément à l'analyse du numéro cité du Livre II,

$$k - p_1 \zeta\, \varphi(o) + k' p_1 \omega \sqrt{-1} - \frac{k''}{2} p_1^2 \omega^2.$$

Son logarithme hyperbolique est

$$-p_1 \zeta \frac{\varphi(o)}{k} + \frac{k'}{k} p_1 \omega \sqrt{-1} - \frac{k''}{2k} p_1^2 \omega^2 - \frac{p_1^2}{2}\left[\zeta \frac{\varphi(o)}{k} - \frac{k'}{k}\omega\sqrt{-1}\right]^2 + \log k.$$

En changeant p_1 successivement en $p_2, p_3, \ldots, p_{r-1}$, on aura les logarithmes des facteurs suivants, jusqu'au facteur relatif à p_{r-1}.

Dans le facteur $\int dx\, \varphi(x)\, c^{p_{r+1} x \omega \sqrt{-1}}$, l'intégrale doit être prise depuis $x = -\infty$, jusqu'à $x = p_{r+1}\zeta$; alors $\int x\, dx\, \varphi(x)$ devenant $-k'$, le logarithme de ce facteur est

$$p_{r+1} \zeta \frac{\varphi(o)}{k} - \frac{k'}{k} p_{r+1} \omega \sqrt{-1} - \frac{k''}{2k} p_{r+1}^2 \omega^2 \\ - \frac{p_{r+1}^2}{2}\left[\zeta \frac{\varphi(o)}{k} - \frac{k'}{k}\omega\sqrt{-1}\right]^2 + \log k.$$

On aura les logarithmes des facteurs suivants en changeant p_{r+1} successivement en $p_{r+2}, p_{r+3}, \ldots, p_n$. Le facteur $\varphi(p_r \zeta)\, c^{p_r \zeta \omega \sqrt{-1}}$ est égal à

$$\left[\varphi(o) + \frac{p_r^2 \zeta^2}{2}\right] \varphi''(o)\, c^{p_r \zeta \omega \sqrt{-1}},$$

et son logarithme est

$$\frac{p_r^2}{2} \zeta^2 \frac{\varphi''(o)}{\varphi(o)} + p_r \zeta \omega \sqrt{-1} + \log \varphi(o).$$

Maintenant, si l'on rassemble tous ces logarithmes, si l'on considère ensuite les conditions (c) auxquelles l'équation $r^{\text{ième}}$ est assujettie, enfin si l'on repasse des logarithmes aux nombres, on trouve, en négligeant ce qu'il est permis de négliger, que la probabilité de l'existence simultanée de l et de ζ est proportionnelle à

$$\int d\varphi\, c^{-l\omega\sqrt{-1} - \left\{\left[\zeta \frac{\varphi(o)}{k} - \frac{k'}{k}\omega\sqrt{-1}\right]^2 + \frac{k''}{k}\omega^2\right\} \frac{S\, p_i^2}{2}},$$

En faisant donc

$$\mathrm{F} = \left(\frac{k''}{k} - \frac{k'^2}{k^2}\right)\frac{\mathrm{S}\,p_i^2}{2},$$

la probabilité de l'existence simultanée de ζ et de ζ' sera proportionnelle à

$$c^{-\frac{\zeta^2}{2}\left[\frac{\varphi(\mathrm{o})}{k}\right]^2 \mathrm{S}\,p_i^2 - \frac{\left[\zeta' - \zeta\frac{k'}{k}\frac{\varphi(\mathrm{o})}{k}\right]^2}{4\mathrm{F}}(\mathrm{S}\,p_i^2)^2} \int d\omega\, c^{-\mathrm{F}\left\{\omega + \frac{\left[\zeta' - \zeta\frac{k'}{k}\frac{\varphi(\mathrm{o})}{k}\right]\sqrt{-1}\,\mathrm{S}\,p_i^2}{2\mathrm{F}}\right\}}.$$

Par l'analyse du n° 21 du Livre II, l'intégrale relative à ω peut être prise depuis $\omega = -\infty$ jusqu'à $\omega = \infty$, et alors la probabilité précédente devient proportionnelle à

$$c^{-\frac{\zeta^2}{2}\mathrm{S}\,p_i^2\left[\frac{\varphi(\mathrm{o})}{k}\right]^2 - \frac{\left[\zeta' - \zeta\frac{k'}{k}\frac{\varphi(\mathrm{o})}{k}\right]^2}{2\left(\frac{k''}{k} - \frac{k'^2}{k^2}\right)}\mathrm{S}\,p_i^2},$$

expression que l'on peut encore mettre sous cette forme

$$c^{-\frac{k}{2k''}\zeta'^2\,\mathrm{S}\,p_i^2 - \frac{k''}{k}\frac{\left[\zeta\frac{\varphi(\mathrm{o})}{k} - \zeta'\frac{k'}{k''}\right]^2}{2\left(\frac{k''}{k} - \frac{k'^2}{k^2}\right)}\mathrm{S}\,p_i^2}.$$

Si l'on nomme e l'excès de la valeur de y donnée par la méthode la plus avantageuse sur celle que donne la méthode de situation, on aura $\zeta = \zeta' - e$. Supposons

$$\zeta' = u + \frac{e\,\frac{\varphi(\mathrm{o})}{k}\left[\frac{\varphi(\mathrm{o})}{k} - \frac{k'}{k''}\right]}{\frac{k}{k''} - \frac{k'^2}{k''^2} + \left[\frac{\varphi(\mathrm{o})}{k} - \frac{k'}{k''}\right]^2};$$

la probabilité de u sera proportionnelle à

$$c^{-\frac{u^2}{2}\,\mathrm{S}\,p_i^2\left\{\frac{k}{k''} + \frac{\frac{k''}{k}\left[\frac{\varphi(\mathrm{o})}{k} - \frac{k'}{k''}\right]^2}{\frac{k''}{k} - \frac{k'^2}{k^2}}\right\}};$$

le résultat de la méthode la plus avantageuse doit donc être diminué de la quantité

$$\frac{e\,\frac{\varphi(\mathrm{o})}{k}\left[\frac{\varphi(\mathrm{o})}{k} - \frac{k'}{k''}\right]}{\frac{k}{k''} - \frac{k'^2}{k''^2} + \left[\frac{\varphi(\mathrm{o})}{k} - \frac{k'}{k''}\right]^2};$$

et la probabilité d'une erreur u, dans ce résultat ainsi corrigé, sera proportionnelle à l'exponentielle précédente. Le poids du nouveau résultat sera augmenté, si $\frac{\varphi(o)}{k} - \frac{k'}{k''}$ n'est pas nul; il y a donc de l'avantage à corriger ainsi le résultat de la méthode la plus avantageuse. L'ignorance où l'on est de la loi de probabilité des erreurs des observations rend cette correction impraticable; mais il est remarquable que, dans le cas où cette probabilité est proportionnelle à c^{-hx^2}, c'est-à-dire où l'on a $\varphi(x) = c^{-hx^2}$, la quantité $\frac{\varphi(o)}{k} - \frac{k'}{k''}$ soit nulle. Alors le résultat de la méthode la plus avantageuse ne reçoit aucune correction du résultat de la méthode de situation, et la loi de probabilité des erreurs reste la même.

(Février 1818.)

TROISIÈME SUPPLÉMENT.

APPLICATION DES FORMULES GÉODÉSIQUES DE PROBABILITÉ A LA MÉRIDIENNE DE FRANCE.

1. La partie de la méridienne qui s'étend de Perpignan à Formentera s'appuie sur une base mesurée près de Perpignan. Sa longueur est d'environ 466^{km}, et sa dernière extrémité est jointe à la base de Perpignan par une chaîne de vingt-six triangles. On peut craindre qu'une aussi grande longueur, qui n'a point été vérifiée par la mesure d'une seconde base vers son autre extrémité, ne soit susceptible d'une erreur sensible provenant des erreurs des vingt-six triangles employés à la mesurer. Il est donc intéressant de déterminer la probabilité que cette erreur n'excède pas 40^m ou 50^m. M. Damoiseau, lieutenant-colonel d'Artillerie, qui vient de remporter le prix proposé par l'Académie de Turin, sur le retour de la comète de 1759, a bien voulu, à ma prière, appliquer à cette partie de la méridienne mes formules de probabilité. Ici la méridienne ne coupe point tous les triangles, comme nous l'avons supposé pour plus de simplicité; mais il est facile de voir que l'on peut appliquer, aux angles formés par les prolongements des côtés des triangles avec la méridienne, ce que j'ai dit sur les angles que ces côtés formeraient s'ils étaient coupés par la méridienne. M. Damoiseau a trouvé ainsi qu'à partir de la latitude du signal de Busgarach, un peu plus au nord que Perpignan, jusqu'à Formentera, ce qui comprend un arc de la méridienne d'environ 466006^m, et en prenant pour unité la base de Perpignan, on a (deuxième Supplément, n° 1)

$$p^2 - pq + q^2 + p^{(1)^2} - p^{(1)}q^{(1)} + q^{(1)^2} + \ldots \\ + p^{(25)^2} - p^{(25)}q^{(25)} + q^{(25)^2} = 48350{,}606.$$

La probabilité qu'une erreur dans la mesure de cet arc est comprise dans les limites $\pm s$ devient, par les formules du même numéro,

$$\frac{2\int dt\, c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à la valeur de t égale à

$$\frac{s}{2\theta}\,\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{48350,606}},$$

$n+1$ étant le nombre des triangles employés, et θ^2 étant la somme des carrés des erreurs observées dans la somme des trois angles de chaque triangle; π est le rapport de la circonférence au diamètre. En prenant pour unité la seconde sexagésimale, on trouve

$$\theta^2 = 118,178.$$

Mais, le nombre des triangles employés n'étant que 26, il est préférable de déterminer par un plus grand nombre de triangles cette constante θ^2 qui dépend de la loi inconnue des observations partielles. Pour cela, on a fait usage des cent sept triangles qui ont servi à mesurer la méridienne depuis Dunkerque jusqu'à Formentera. L'ensemble des sommes d'erreurs observées des trois angles de chaque triangle est, en les prenant toutes positivement, égal à 173,82. La somme des carrés de ces erreurs est 445,217. En la multipliant par $\frac{26}{107}$, on aura, pour la valeur de θ^2,

$$\theta^2 = 108,184.$$

Cette valeur, qui diffère peu de la précédente, doit être préférée. Il faut réduire θ en parties du rayon pris pour unité, ce que l'on fera en le divisant par le nombre de secondes sexagésimales que ce rayon renferme. On aura ainsi

$$t = s\,689,797;$$

s est une fraction de la base de Perpignan prise pour unité. Cette base est de $11706^{m},40$. En supposant donc l'erreur de 60^{m}, on aura

$$t = \frac{60 \times 689,797}{11706,40}.$$

Cela posé, on trouve, pour les probabilités que les erreurs de l'arc de la méridienne dont il s'agit sont comprises dans les limites $\pm 60^{m}$, $\pm 50^{m}$, $\pm 40^{m}$, les fractions suivantes :

$$\frac{1743695}{1743696}, \quad \frac{32345}{32346}, \quad \frac{1164}{1165}.$$

Il y a un contre un à parier que l'erreur tombe dans les limites $\pm 8^{m},0757$.

Si la Terre était un sphéroïde de révolution et si les angles de tous les triangles étaient exacts, on aurait exactement l'inclinaison du dernier côté de la chaîne des triangles sur sa méridienne, en supposant donnée cette inclinaison relativement à la base. La probabilité que l'erreur de la première de ces inclinaisons, provenant des erreurs des angles observés des triangles, est comprise dans les limites $\pm \frac{2}{3}\theta t$ est, par ce qui précède,

$$\frac{2\int dt\, c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul : ces limites deviennent, en substituant pour θ sa valeur précédente, $\pm t\,6'',8997$, les secondes étant sexagésimales. De là il suit qu'il y a un contre un à parier que l'erreur tombe dans les limites $\pm 3'',2908$. Si les observations azimutales étaient faites avec une grande précision, on déterminerait par ce moyen la probabilité qu'elles indiquent une excentricité dans les parallèles terrestres. Si l'on mesurait, sur la côte d'Espagne, une base de vérification égale à la base de Perpignan, et qu'on la joignît par deux triangles à la chaîne des triangles de la méridienne, on trouve, par le calcul, qu'il y a un contre un à parier que la différence, entre cette base et sa valeur conclue de la base de Perpignan, ne surpassera pas un tiers de mètre : c'est, à fort peu près, la différence de la mesure de la base de Perpignan à sa valeur conclue de la base de Melun.

On a vu, dans le numéro cité, que, les angles des triangles ayant été mesurés au moyen du cercle répétiteur, on peut supposer la probabilité d'une erreur x dans la somme observée des trois angles de chaque triangle proportionnelle à l'exponentielle c^{-kx^2}, k étant une constante. De là il suit que la probabilité de cette erreur est

$$\frac{dx\sqrt{k}\,c^{-kx^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

En multipliant cette différentielle par x et l'intégrant depuis x nul jusqu'à x infini, le double de cette intégrale sera la moyenne de toutes les erreurs prises positivement. En désignant donc par ε cette erreur moyenne, on aura

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{k\pi}}.$$

On aura la valeur moyenne des carrés de ces erreurs en multipliant par x^2 la différentielle précédente et en l'intégrant depuis $x = -\infty$ jusqu'à x infini. En nommant donc ε' cette valeur, on aura

$$\varepsilon' = \frac{1}{2k};$$

de là on tire

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon^2\pi}{2}.$$

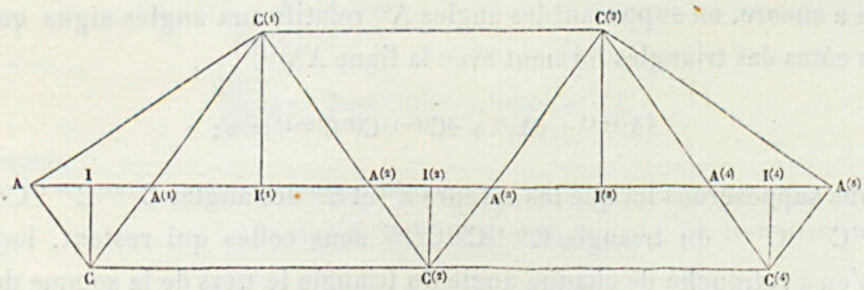
On peut ainsi obtenir θ^2 au moyen des erreurs, prises toutes en plus, des sommes observées des angles de chaque triangle. Dans les cent sept triangles de la méridienne, la somme de ces erreurs est 173,82; on peut ainsi prendre, pour ε, $\frac{173,82}{107}$; ce qui donne, pour $26\varepsilon'$ ou pour θ^2,

$$\theta^2 = 13\pi\left(\frac{173,82}{107}\right)^2 = 107,78;$$

cela diffère très peu de la valeur 108,134 donnée par la somme des carrés des erreurs de la somme observée des angles de chacun des cent sept triangles. Cet accord est remarquable.

On peut apprécier l'exactitude relative des instruments dont on fait usage dans les observations géodésiques, par la valeur de ε' conclue d'un grand nombre de triangles. Cette valeur, conclue des cent sept triangles de la méridienne, est $\frac{445,217}{107}$ ou $4,1609$. La même valeur, conclue des quarante-trois triangles employés par La Condamine dans la mesure des trois degrés de l'équateur, est $\frac{1718}{43}$ ou $39,953$, et, par conséquent, près de dix fois plus grande que la précédente. Les erreurs également probables, relatives aux instruments employés dans ces deux opérations, sont proportionnelles aux racines carrées des valeurs de ε'. De là il suit que les limites $\pm 8^{m},0937$, entre lesquelles nous venons de voir qu'il y a un contre un à parier que tombe l'erreur de l'arc mesuré depuis Perpignan jusqu'à Formentera, auraient été $\pm 25^{m},022$ avec les instruments employés par La Condamine. Ces limites auraient surpassé $\pm 40^{m}$ avec les instruments employés par La Caille et Cassini dans leur mesure de la méridienne. On voit ainsi combien l'introduction du cercle répétiteur dans les opérations géodésiques a été avantageuse.

2. Pour donner un exemple très simple de l'application des formules géodésiques, je vais considérer la droite $AA^{(5)}$, dont on a déterminé la



longueur par la chaîne des triangles $CC^{(1)}C^{(2)}$, $C^{(1)}C^{(2)}C^{(3)}$, ... Je supposerai tous ces triangles égaux et isoscèles, et tels que leurs bases $CC^{(2)}$, $C^{(1)}C^{(3)}$, ... soient parallèles à la ligne $AA^{(5)}$. On aura, en abaissant sur cette ligne les perpendiculaires CI, $C^{(1)}I^{(1)}$, ...,

$$II^{(1)} = CC^{(1)} \cos A^{(1)},$$

$$C^{(1)}C^{(2)} = \frac{CC^{(1)} \sin C^{(1)}CC^{(2)}}{\sin C^{(1)}C^{(2)}C},$$

$$I^{(1)}I^{(2)} = C^{(1)}C^{(2)} \cos A^{(2)},$$

$$C^{(2)}C^{(3)} = \frac{C^{(1)}C^{(2)} \sin C^{(2)}C^{(1)}C^{(3)}}{\sin C^{(2)}C^{(3)}C^{(1)}},$$

et généralement

$$I^{(i)}I^{(i+1)} = C^{(i)}C^{(i+1)} \cos A^{(i+1)},$$

$$C^{(i+1)}C^{(i+2)} = \frac{C^{(i)}C^{(i+1)} \sin C^{(i+1)}C^{(i)}C^{(i+2)}}{\sin C^{(i+1)}C^{(i+2)}C^{(i)}}.$$

Soient $\alpha^{(1)}$ et $6^{(1)}$ les erreurs des angles opposés aux côtés $CC^{(1)}$ et $C^{(1)}C^{(2)}$ dans le premier triangle. Soient $\alpha^{(2)}$ et $6^{(2)}$ les erreurs des angles opposés aux côtés $C^{(1)}C^{(2)}$ et $C^{(1)}C^{(3)}$ du second triangle, et ainsi de suite. En désignant par δ une variation relative à ces erreurs, on aura

$$\frac{\delta I^{(i)}I^{(i+1)}}{I^{(i)}I^{(i+1)}} = \frac{\delta C^{(i)}C^{(i+1)}}{C^{(i)}C^{(i+1)}} - \delta A^{(i+1)} \operatorname{tang} A^{(i+1)},$$

$$\frac{\delta C^{(i)}C^{(i+1)}}{C^{(i)}C^{(i+1)}} = \frac{\delta C^{(i)}C^{(i-1)}}{C^{(i)}C^{(i-1)}} + 6^{(i)} \cot C^{(i+1)}C^{(i-1)}C^{(i)} - \alpha^{(i)} \cot C^{(i)}C^{(i+1)}C^{(i-1)}.$$

On a encore, en supposant les angles $A^{(i)}$ relatifs aux angles aigus que les côtés des triangles forment avec la ligne $AA^{(1)}$, ...,

$$\delta A^{(i+1)} + \delta A^{(i)} + \delta C^{(i-1)}C^{(i)}C^{(i+1)} = 0;$$

nous supposerons ici que les erreurs $\alpha^{(i)}$ et $6^{(i)}$ des angles $C^{(i+1)}C^{(i-1)}C^{(i)}$, $C^{(i)}C^{(i+1)}C^{(i-1)}$ du triangle $C^{(i-1)}C^{(i)}C^{(i+1)}$ sont celles qui restent, lorsqu'on a retranché de chaque angle du triangle le tiers de la somme des erreurs des trois angles. Alors on a

$$\delta C^{(i-1)}C^{(i)}C^{(i+1)} = -\alpha^{(i)} - 6^{(i)},$$

ce qui donne

$$\delta A^{(i+1)} = -\delta A^{(i)} + \alpha^{(i)} + 6^{(i)};$$

on aura donc

$$\begin{aligned}\delta A^{(i+1)} = \alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)} + \alpha^{(i-2)} - \ldots \mp \alpha^{(1)} \\ + 6^{(i)} - 6^{(i-1)} + 6^{(i-2)} - \ldots \mp 6^{(1)} \pm \delta A^{(1)},\end{aligned}$$

le signe supérieur ayant lieu si i est pair, et l'inférieur si i est impair.

On aura ensuite, en observant que

$$\cot C^{(i)} C^{(i-1)} C^{(i+1)} = \cot C^{(i)} C^{(i+1)} C^{(i-1)} = \cot A^{(i)}$$

et que $A^{(i)} = A^{(1)}$,

$$\frac{\delta C^{(i)} C^{(i+1)}}{C^{(i)} C^{(i+1)}} = \frac{\delta CC^{(1)}}{CC^{(1)}} + (6^{(i)} + 6^{(i-1)} + \ldots + 6^{(1)} - \alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)} - \ldots - \alpha^{(1)}) \cot A^{(1)};$$

on aura donc

$$\begin{aligned}\frac{\delta I^{(i)} I^{(i+1)}}{I^{(i)} I^{(i+1)}} = \frac{\delta CC^{(1)}}{CC^{(1)}} + (6^{(i)} + 6^{(i-1)} + \ldots + 6^{(i)} - \alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)} - \ldots - \alpha^{(1)}) \cot A^{(1)} \\ - (\alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)} + \ldots \mp \alpha^{(1)} + 6^{(i)} - 6^{(i-1)} + \ldots \mp 6^{(1)} \pm \delta A^{(i)}) \operatorname{tang} A^{(1)}.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que l'on ait mesuré une base AC située de manière que l'angle $CAA^{(1)}$ soit égal à l'angle $CA^{(1)}A$. Le premier de ces angles détermine la position de la ligne $AA^{(1)}$ par rapport à la base, et il est supposé connu. En nommant α et 6 les erreurs des angles $CC^{(1)}A$ et $CAC^{(1)}$, on aura

$$\delta A^{(1)} = \alpha + 6,$$

$$\frac{\delta CC^{(1)}}{CC^{(1)}} = 6 \cot CAC^{(1)} - \alpha \cot CC^{(1)} A.$$

Faisons

$$\cot CAC^{(1)} = \cot A + h,$$

$$\cot CC^{(1)} A = \cot A + h';$$

nous aurons, en désignant par b la base AC et par a la droite $II^{(1)}$,

$$h = \frac{b}{2a \sin A} - \frac{1}{\sin 2A},$$

$$h' = \frac{a}{2b \sin A \cos^2 A} - \frac{1}{\sin 2A}.$$

nous aurons ensuite

$$\delta A^{(i+1)} = \alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)} + \ldots \pm \alpha + 6^{(i)} - 6^{(i-1)} + \ldots \pm 6,$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta I^{(i)} I^{(i+1)}}{I^{(i)} I^{(i+1)}} &= (6^{(i)} + 6^{(i-1)} + \ldots + 6 - \alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)} - \ldots - \alpha) \cot A \\ &\quad - (\alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)} + \ldots \pm \alpha + 6^{(i)} - 6^{(i-1)} + \ldots \pm 6) \operatorname{tang} A + h6 - h'\alpha.\end{aligned}$$

La variation de la longueur totale $II^{(i+1)}$ sera donc

$$\begin{aligned}\delta II^{(i+1)} &= [(i+1)(6-\alpha) + i(6^{(1)} - \alpha^{(1)}) + \ldots + (6^{(i)} - \alpha^{(i)})] a \cot A \\ &\quad + (i+1) h a 6 - (i+1) h' a \alpha \\ &\quad - (\alpha^{(i)} + \alpha^{(i-2)} + \alpha^{(i-4)} + \ldots + 6^{(i)} + 6^{(i-2)} + 6^{(i-4)} + \ldots) a \operatorname{tang} A.\end{aligned}$$

La quantité

$$p^2 - pq + q^2 + p^{(1)2} - p^{(1)} q^{(1)} + q^{(1)2} + \ldots + p^{(i)2} - p^{(i)} q^{(i)} + q^{(i)2}$$

devient ainsi, en négligeant les termes de l'ordre i,

$$\frac{(i+1)(i+2)(2i+3)}{2} a^2 \cot^2 A + 3(h+h')(i+1)^2 a^2 \cot A + (h^2 + hh' + h'^2)(i+1)^2 a^2.$$

Nommons Q cette quantité; la probabilité que l'erreur de la ligne $II^{(i+1)}$ est comprise dans les limites $\pm s$ sera, par ce qui précède,

$$\frac{2 \int dt\, c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à

$$t = \frac{3s}{2\theta} \sqrt{\frac{i+1}{Q}},$$

θ^2 étant la somme des carrés des erreurs de la somme des trois angles des $i+1$ triangles.

Supposons que l'on ait, comme pour la partie de la méridienne dont nous avons parlé précédemment, vingt-six triangles, ce qui donne $i = 25$. Supposons encore que la longueur $II^{(i+1)}$ soit celle de cette partie de la méridienne ou de $466\,006^{\text{m}}$; alors on aura

$$a = \frac{466006}{26}.$$

En prenant pour unité la base mesurée près de Perpignan, qui est de $11706^m,40$, et en supposant rectangles les triangles isoscèles $CC^{(1)}C^{(2)}$, $C^{(1)}C^{(2)}C^{(3)}$, ..., ce qui donne $\tang A = \cot A = 1$, on trouve

$$Q = 48207,6.$$

On a vu précédemment que les vingt-six triangles qui joignent la base de Perpignan à Formentera donnent

$$Q = 48350,6;$$

ces deux valeurs de Q sont très peu différentes, et comme les erreurs également probables sont proportionnelles aux racines carrées de ces valeurs, on voit que l'on peut parier un contre un que les erreurs de la mesure entière sont comprises dans les limites $\pm 8^m,1$. Sous ce rapport, le cas que nous examinons représente parfaitement la mesure de l'arc du méridien depuis la base de Perpignan jusqu'à Formentera.

3. Supposons maintenant que l'on mesure, vers la dernière extrémité de la ligne $II^{(i+1)}$, une base $C^{(i+1)}A^{(i+2)}$ égale à la base CA, et posée de manière que l'angle $C^{(i+1)}C^{(i)}A^{(i+2)}$ soit égal à l'angle $CC^{(1)}A$, et que l'angle $C^{(i)}A^{(i+2)}C^{(i+1)}$ soit égal à l'angle $CAC^{(1)}$. En désignant par $\alpha^{(i+1)}$ et $6^{(i+1)}$ les erreurs des angles $C^{(i+1)}C^{(i)}A^{(i+2)}$ et $C^{(i)}A^{(i+2)}C^{(i+1)}$, l'équation

$$C^{(i+1)}A^{(i+2)} = C^{(i+1)}C^{(i)}\frac{\sin C^{(i+1)}C^{(i)}A^{(i+2)}}{\sin C^{(i+1)}A^{(i+2)}C^{(i)}}$$

donnera

$$\frac{\delta C^{(i+1)}A^{(i+2)}}{C^{(i+1)}A^{(i+2)}} = \frac{\delta C^{(i)}C^{(i+1)}}{C^{(i)}C^{(i+1)}} + \alpha^{(i+1)}\cot CC^{(1)}A - 6^{(i+1)}\cot CAC^{(1)},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{\delta C^{(i+1)}A^{(i+2)}}{C^{(i+1)}A^{(i+2)}} = {} & (6^{(1)} + 6^{(2)} + \ldots + 6^{(i)} - \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} - \ldots - \alpha^{(i)}) \cot A \\ & + 6(h + \cot A) - \alpha(h' + \cot A) \\ & + \alpha^{(i+1)}(h' + \cot A) - 6^{(i+1)}(h + \cot A).\end{aligned}$$

Ce que nous avons désigné dans le n° 2 du deuxième Supplément par

$l, l^{(1)}, \ldots, m, m^{(1)}, \ldots$ devient

$$\begin{array}{ll} l \quad = -(1+h')b, & m \quad = (1+h)b, \\ l^{(1)} \quad = -b, & m^{(1)} \quad = b, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l^{(i)} \quad = -b, & m^{(i)} \quad = b \\ l^{(i+1)} = (1+h')b, & m^{(i+1)} = -(1+h)b; \end{array}$$

la quantité que nous avons désignée par $\mathrm{S}\, f^{(i)2}$ dans le numéro cité ou par

$$l^2 - ml + m^2 + l^{(1)2} - m^{(1)} l^{(1)} + m^{(1)2} + \ldots$$

devient ici

$$3(i+2)b^2 + 6(h+h')b^2 + 2(h^2 + hh' + h'^2)b^2.$$

La quantité que nous avons nommée $\mathrm{S}\, r^{(i)} f^{(i)}$ dans le même numéro, ou

$$l(p - \tfrac{1}{2}q) + m(q - \tfrac{1}{2}p) + l^{(1)}(p^{(1)} - \tfrac{1}{2}q^{(1)}) + m^{(1)}(q^{(1)} - \tfrac{1}{2}p^{(1)}) + \ldots,$$

devient, en négligeant les termes qui n'ont pas i pour coefficient,

$$\frac{3(i+1)(i+2)}{2}ab + 3(i+1)(h+h')ab + (i+1)(h^2 + hh' + h'^2)ab;$$

en représentant donc, comme ci-dessus, par λ l'excès de la base mesurée $\mathrm{C}^{(i+1)}\mathrm{A}^{(i+2)}$ sur la base calculée, et par s l'excès de la longueur vraie de la ligne $\mathrm{II}^{(i+1)}$ sur cette longueur calculée, on aura

$$s = \frac{\lambda\, \mathrm{S}\, r^{(i)} f^{(i)}}{\mathrm{S}\, f^{(i)2}} = \frac{(i+1)a\lambda}{2b};$$

il faut, par conséquent, ajouter à la longueur calculée de la ligne $\mathrm{II}^{(i+1)}$ le produit de λ par le rapport de la moitié de cette ligne à la base b; ce qui revient à calculer la première moitié de la ligne $\mathrm{II}^{(i+1)}$ avec la base AC, et la seconde moitié avec la base $\mathrm{A}^{(i+2)}\mathrm{C}^{(i+1)}$. Ce procédé serait généralement exact, quelles que fussent la grandeur et la disposition des triangles qui unissent les deux bases, si les parties de $\mathrm{S}\, r^{(i)} f^{(i)}$ et de $\mathrm{S}\, f^{(i)2}$ correspondantes à ces moitiés étaient respectivement égales. C'est le procédé que nous adoptâmes dans la Commission qui fixa la longueur du mètre; et, dans l'ignorance où nous étions alors de la vraie théorie de ces corrections, il était le plus convenable; mais il ne faisait pas connaître la correction des diverses parties de l'arc total $\Pi^{(i+1)}$. Pour cela, il est nécessaire de corriger les angles de chaque triangle, ou de déterminer les corrections α, 6, $\alpha^{(1)}$, $6^{(1)}$, ... qui résultent de l'excès λ de la seconde base observée sur cette base calculée d'après la première. J'ai donné, dans le deuxième Supplément, ces corrections, en supposant la loi des erreurs des observations des angles proportionnelle à l'exponentielle $c^{-k\left(\alpha+\frac{1}{3}\mathrm{T}\right)^2}$, k étant une constante, T étant la somme des erreurs des trois angles du triangle, $\alpha+\frac{1}{3}\mathrm{T}$, $6+\frac{1}{3}\mathrm{T}$ et $\frac{1}{3}\mathrm{T}-\alpha-6$ étant les erreurs de chacun des angles. On a vu, dans le Supplément cité, que la supposition de cette loi de probabilité doit être admise lorsque les angles ont été mesurés avec le cercle répétiteur, et qu'alors on a

$$\alpha^{(s)}=\frac{l^{(s)}-\frac{1}{2}m^{(s)}}{\mathrm{F}}\lambda,\qquad 6^{(s)}=\frac{m^{(s)}-\frac{1}{2}l^{(s)}}{\mathrm{F}}\lambda,$$

en désignant par F la somme de toutes les quantités l^2-ml+m^2, $l^{(1)2}-m^{(1)}l^{(1)}+l^{(1)2}$, ... Je vais démontrer ici que ces corrections ont lieu, quelle que soit la loi de probabilité des erreurs.

Pour cela, je désigne cette loi par $\varphi(\alpha+\frac{1}{3}\mathrm{T})^2$: en la supposant la même pour les erreurs positives et pour les erreurs négatives, son expression ne doit renfermer que des puissances paires de ces erreurs. La loi de probabilité des valeurs simultanées de α et de 6 sera ainsi proportionnelle au produit

$$\varphi(\alpha+\tfrac{1}{3}\mathrm{T})^2\,\varphi(6+\tfrac{1}{3}\mathrm{T})^2\,\varphi(\tfrac{1}{3}\mathrm{T}-\alpha-6)^2.$$

Si l'on développe ce produit, par rapport aux puissances de α et de 6, en s'arrêtant aux carrés et aux produits de ces quantités, on aura

$$\begin{aligned}&[\varphi(\tfrac{1}{9}\mathrm{T}^2)]^3+(\alpha^2+\alpha 6+6^2)\,\varphi(\tfrac{1}{9}\mathrm{T}^2)\\ &\times\left\{2\varphi(\tfrac{1}{9}\mathrm{T}^2)\,\varphi'(\tfrac{1}{9}\mathrm{T}^2)-\tfrac{4}{9}\mathrm{T}^2[\varphi'(\tfrac{1}{9}\mathrm{T}^2)]^2+\tfrac{4}{9}\mathrm{T}^2\,\varphi(\tfrac{1}{9}\mathrm{T}^2)\,\varphi''(\tfrac{1}{9}\mathrm{T}^2)\right\},\end{aligned}$$

$\varphi'(x)$ exprimant $\frac{d\varphi(x)}{dx}$, et $\varphi''(x)$ exprimant $\frac{d\varphi'(x)}{dx}$. T pouvant être supposé varier depuis $-\infty$ jusqu'à $T=\infty$, on multipliera la fonction précédente par dT et on l'intégrera dans ces limites; on aura ainsi pour la probabilité des valeurs simultanées de α et de 6 une quantité de la forme

$$H - H'(\alpha^2 + \alpha 6 + 6^2).$$

Cette probabilité sera donc proportionnelle à

$$1 - \frac{H'}{H}(\alpha^2 + \alpha 6 + 6^2).$$

La probabilité de l'existence simultanée de α, 6, $\alpha^{(1)}$, $6^{(1)}$, ... sera proportionnelle au produit des quantités

$$1 - \frac{H'}{H}(\alpha^2 + \alpha 6 + 6^2),$$

$$1 - \frac{H'}{H}(\alpha^{(1)2} + \alpha^{(1)} 6^{(1)} + 6^{(1)2}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Le logarithme de ce produit est, s étant un nombre indéterminé,

$$-\frac{H'}{H} S(\alpha^{(s)2} + \alpha^{(s)} 6^{(s)} + 6^{(s)2}) - \dots;$$

ce produit est à son maximum si le terme précédent est à son minimum, ou si la fonction

$$S(\alpha^{(s)2} + \alpha^{(s)} 6^{(s)} + 6^{(s)2})$$

est la plus petite possible, les quantités α, 6, $\alpha^{(1)}$, ... satisfaisant d'ailleurs à l'équation

$$\lambda = l\alpha + m6 + l^{(1)}\alpha^{(1)} + m^{(1)}6^{(1)} + \dots.$$

On peut donner à cette fonction la forme

$$\frac{1}{4} S \left\{ \left(2 6^{(s)} + \alpha^{(s)} - \frac{3m^{(s)}\lambda}{2F} \right)^2 + \frac{3}{4}\left[\alpha^{(s)} - \frac{(l^{(s)} - \frac{1}{2}m^{(s)})\lambda}{F} \right]^2 \right\} + \frac{3}{4}\frac{\lambda^2}{F};$$

cette fonction est évidemment à son minimum si l'on suppose

$$2\beta^{(s)}+\alpha^{(s)}-\frac{3m^{(s)}\lambda}{2F}=0, \qquad \alpha^{(s)}-\frac{(l^{(s)}-\frac{1}{2}m^{(s)})\lambda}{F}=0;$$

d'où l'on tire généralement

$$\alpha^{(s)}=(l^{(s)}-\tfrac{1}{2}m^{(s)})\frac{\lambda}{F}, \qquad \beta^{(s)}=(m^{(s)}-\tfrac{1}{2}l^{(s)})\frac{\lambda}{F}.$$

Dans le cas que nous venons de considérer, on a

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{\lambda b}{F}(\tfrac{3}{2}+h'+\tfrac{1}{2}h), & \beta &= \frac{\lambda b}{F}(\tfrac{3}{2}+h+\tfrac{1}{2}h'),\\
\alpha^{(1)} &= \alpha^{(2)}=\ldots=\alpha^{(i)}=-\frac{\frac{3}{2}b\lambda}{F}, & \beta^{(1)} &= \beta^{(2)}=\ldots=\beta^{(i)}=\frac{\frac{3}{2}b\lambda}{F},\\
\alpha^{(i+1)} &= \frac{\lambda b}{F}(\tfrac{3}{2}+h'+\tfrac{1}{2}h), & \beta^{(i)} &= -\frac{\lambda b}{F}(\tfrac{3}{2}+h+\tfrac{1}{2}h');
\end{aligned}$$

ainsi par ces corrections tous les triangles autres que ceux qui ont une des bases pour un de leurs côtés resteront rectangles.

La probabilité de l'erreur $\pm u$ de la ligne $\mathrm{II}^{(i+1)}$, corrigée par la seconde base, sera, par le numéro cité du deuxième Supplément,

$$\frac{2\int dt\, c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à

$$t=\frac{3u}{2\theta}\sqrt{\frac{i+1}{Q\dfrac{(\mathrm{S}\,r^{(i)}f^{(i)})^2}{\mathrm{S}\,f^{(i)2}}}},$$

qui devient ici

$$t=\frac{3u}{2\theta}\sqrt{\frac{i+1}{Q'}},$$

en désignant par Q' la fonction

$$\frac{(i+1)(i+2)(i+3)}{4}a^2+\tfrac{3}{2}(i+1)^2(h+h')a^2+\tfrac{1}{2}(i+1)^2(h^2+hh'+h'^2)a^2.$$

Les erreurs également probables étant proportionnelles aux racines carrées de Q et de Q′, on voit qu'elles sont diminuées et à peu près réduites de moitié par la mesure d'une seconde base.

La probabilité d'une erreur $\pm\lambda$ dans la mesure d'une seconde base est, par le deuxième Supplément,

$$\frac{2\int dt\, c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à

$$t = \frac{3\lambda}{2\theta}\sqrt{\frac{i+1}{\mathrm{S}\, f^{(i)2}}};$$

et $f^{(i)2}$ est égal à

$$3(i+1)b^2 + 6(h+h')b^2 + 2(h^2 + hh' + h'^2)b^2.$$

Dans le cas présent où $i = 25$, cette quantité devient

$$86{,}8030\, b^2;$$

les erreurs également probables dans les mesures de l'arc $\mathrm{H}^{(i+1)}$ et d'une nouvelle base égale à la première sont donc dans le rapport de $\sqrt{\mathrm{Q}}$ à $\sqrt{86{,}8030}$; d'où il suit qu'il y a un contre un à parier que l'erreur d'une nouvelle base sera comprise dans les limites $\pm\,0^{\mathrm{m}},34236$, ou à très peu près $\pm\,\frac{1^{\mathrm{m}}}{3}$. Ce sont les mêmes limites qui résultent des angles des vingt-six triangles qui unissent la base de Perpignan à Formentera. Ainsi, sous ce rapport encore, le cas hypothétique, que nous venons d'examiner, s'accorde avec ce que donne cette chaîne de triangles.

4. Je vais maintenant considérer les distances zénithales des sommets des triangles et le nivellement qui en résulte. D'un même sommet tel que $\mathrm{C}^{(2)}$, on peut observer les quatre points C, $\mathrm{C}^{(1)}$, $\mathrm{C}^{(3)}$, $\mathrm{C}^{(4)}$. Nommons f la distance $\mathrm{CC}^{(1)}$ et h la base $\mathrm{CC}^{(2)}$ du triangle isoscèle; tous les triangles étant supposés égaux, si l'on nomme $x^{(i)}$ la hauteur de $\mathrm{C}^{(i)}$ au-dessus du niveau de la mer, la distance observée de $\mathrm{C}^{(i-2)}$ au zénith de $\mathrm{C}^{(i)}$ étant désignée par θ, la distance vraie sera à fort peu près, les

triangles pouvant être supposés horizontaux,

$$\theta + \frac{hu}{R} + \frac{h\varepsilon}{R},$$

u étant le facteur par lequel on doit multiplier l'angle $\frac{h}{R}$ pour avoir la réfraction terrestre au point $C^{(i)}$, R étant le rayon de la Terre et ε étant l'erreur de u. Je ne tiens compte ici que de cette erreur, comme étant beaucoup plus grande que celle de θ. Si l'on nomme pareillement θ' la distance zénithale de $C^{(i)}$, observée de $C^{(i-2)}$, la distance vraie sera

$$\theta' + \frac{hu}{R} + \frac{h\varepsilon'}{R},$$

ε' étant l'erreur de u dans cette observation. On aura

$$\theta + \theta' + \frac{2hu}{R} + \frac{h}{R}(\varepsilon + \varepsilon') = \pi + \frac{h}{R};$$

on aura ensuite

$$x^{(i)} - x^{(i-2)} = \frac{h}{2}(\theta - \theta') + \frac{h^2}{2R}(\varepsilon - \varepsilon').$$

Si l'on nomme pareillement θ'' la distance zénithale de $C^{(i-1)}$ observée de $C^{(i)}$, la distance vraie sera

$$\theta'' + \frac{fu}{R} + \frac{f\varepsilon''}{R},$$

ε'' étant l'erreur de u dans cette observation. En nommant encore θ''' et ε''' les mêmes quantités relatives à la distance zénithale de $C^{(i)}$, observée de $C^{(i-1)}$, on aura

$$\theta'' + \theta''' + \frac{2fu}{R} + \frac{f}{R}(\varepsilon'' + \varepsilon''') = \pi + \frac{f}{R},$$

$$x^{(i)} - x^{(i-1)} = \frac{f}{2}(\theta'' - \theta''') + \frac{f^2}{2R}(\varepsilon'' - \varepsilon''').$$

Comme je ne me propose ici que d'examiner quel degré de confiance on doit accorder à ce genre de nivellement, je ferai $h = f$, ce qui revient à supposer tous les triangles équilatéraux. Je prendrai, de plus,

$\frac{h^2}{2R}$ pour unité de distance : en faisant ensuite $\varepsilon - \varepsilon' = \lambda^{(i)}$, $\varepsilon'' - \varepsilon''' = \gamma^{(i)}$, on aura deux équations de la forme

$$(\text{A}) \quad \begin{cases} x^{(i)} - x^{(i-1)} = \gamma^{(i)} + p^{(i)}, \\ x^{(i)} - x^{(i-2)} = \lambda^{(i)} + q^{(i)}. \end{cases}$$

La première de ces équations s'étend depuis $i = 1$ jusqu'à $i = n + 1$, n étant le nombre des triangles. La seconde équation s'étend depuis $i = 2$ jusqu'à $i = n + 1$. Il faut maintenant conclure de ce système d'équations la valeur la plus avantageuse de $x^{(n+1)} - x^{(0)}$, l'élévation $x^{(0)}$ du point C au-dessus de la mer étant supposée connue. Pour cela, on multipliera la première des équations (A) par $f^{(i)}$ et la seconde par $g^{(i)}$, $f^{(i)}$ et $g^{(i)}$ étant des constantes indéterminées. Dans le système de ces équations ajoutées toutes ensemble, le coefficient de $x^{(i)}$ sera $f^{(i)} - f^{(i+1)} + g^{(i)} - g^{(i+2)}$. En l'égalant à zéro et observant que $g^{(i+2)} - g^{(i)} = \Delta g^{(i+1)} + \Delta g^{(i)}$, Δ étant la caractéristique des différences finies, on aura, en intégrant,

$$f^{(i)} = a - g^{(i)} - g^{(i+1)},$$

a étant une constante. Mais, les valeurs de $g^{(i)}$ ne commençant à avoir lieu que lorsque $i = 2$, cette expression de $f^{(i)}$ ne peut servir que lorsque $i = 2$. Pour avoir la valeur de $f^{(1)}$, on observera que l'égalité à zéro du coefficient de $x^{(1)}$ donne

$$f^{(1)} = f^{(2)} + g^{(3)};$$

substituant, au lieu de $f^{(2)}$, $a - g^{(2)} - g^{(3)}$, on aura

$$f^{(1)} = a - g^{(2)}.$$

Ensuite, l'expression précédente de $f^{(i)}$ ne s'étend que jusqu'à $i = n$; mais, relativement à $i = n + 1$, on doit observer que le coefficient de $x^{(n+1)}$ doit être l'unité, ce qui donne

$$f^{(n+1)} + g^{(n+1)} = 1$$

ou

$$f^{(n+1)} = 1 - g^{(n+1)};$$

l'égalité à zéro du coefficient de $x^{(n)}$ donne $f^{(n)} = f^{(n+1)} - g^{(n)}$, ou $f^{(n)} = 1 - g^{(n)} - g^{(n+1)}$. En comparant cette expression à celle-ci $f^{(n)} = a - g^{(n)} - g^{(n+1)}$, on aura $a = 1$. L'erreur de la valeur de $x^{(n+1)}$ sera ainsi

$$\begin{aligned} & f^{(1)}\gamma^{(1)} + f^{(2)}\gamma^{(2)} + \ldots + f^{(n+1)}\gamma^{(n+1)} \\ & + g^{(2)}\lambda^{(2)} + g^{(3)}\lambda^{(3)} + \ldots + g^{(n+1)}\lambda^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Les valeurs de $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ étant évidemment assujetties à la même loi de probabilité, si l'on nomme s cette erreur et si l'on fait

$$\begin{aligned} \mathrm{H} = & f^{(1)2} + f^{(2)2} + \ldots + f^{(n+1)2} \\ & + g^{(1)2} + g^{(3)2} + \ldots + g^{(n+1)2}, \end{aligned}$$

la probabilité de l'erreur s sera proportionnelle, par le n° 20 du Livre II, à une exponentielle de la forme

$$c^{-\frac{\mathrm{K}s^2}{\mathrm{H}}},$$

K étant une constante dépendante de la loi de probabilité de $\gamma^{(i)}$ et $\lambda^{(i)}$.

Il faut maintenant déterminer les constantes de H, de manière que H soit un minimum. Or on a

$$\begin{aligned} \mathrm{H} = & (1 - g^{(2)})^2 + (1 - g^{(2)} - g^{(3)})^2 + \ldots + (1 - g^{(n)} - g^{(n+1)})^2 + (1 - g^{(n+1)})^2 \\ & + g^{(2)2} + g^{(3)2} + \ldots + g^{(n+1)2}; \end{aligned}$$

en égalant à zéro le coefficient de la différentielle de $g^{(i)}$, on a

$$(1) \qquad g^{(i+1)} + 3g^{(i)} + g^{(i-1)} = 2.$$

Cette équation a lieu depuis $i = 3$ jusqu'à $i = n$. L'égalité à zéro du coefficient de $dg^{(2)}$ donne

$$g^{(3)} + 3g^{(2)} = 2,$$

et l'égalité à zéro du coefficient de $dg^{(n+1)}$ donne

$$3g^{(n+1)} + g^{(n)} = 2,$$

ce qui revient à considérer l'équation générale (1) comme ayant lieu depuis $i = 2$ jusqu'à $i = n + 1$, et à supposer nuls $g^{(1)}$ et $g^{(n+2)}$. L'intégration de l'équation (1) aux différences finies donne

$$g^{(i)} = \tfrac{2}{5} + A\,l^{i-1} + A'\,l'^{i-1},$$

l et l' étant les deux racines $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ de l'équation

$$y^2 + 3y + 1 = 0;$$

A et A′ sont deux arbitraires telles que $g^{(i)}$ devienne nul lorsque $i = 1$ et lorsque $i = n + 2$. On a donc

$$A\,l^{n+1} + A'\,l'^{n+1} = -\tfrac{2}{5},$$
$$A + A' = -\tfrac{2}{5}.$$

l^{n+1} est une quantité extrêmement grande lorsque n est un grand nombre et, l'^{n+1} étant $\frac{1}{l^{n+1}}$, on voit que A est alors une quantité excessivement petite et qu'ainsi $A' = -\frac{2}{5}$. On a ensuite

$$f^{(i)} = \tfrac{1}{5} - A\,l^{i-1}(1 + l) - A'\,l'^{i-1}(1 + l').$$

De là il est facile de conclure que l'on a, à très peu près et sans craindre $\frac{1}{25}$ d'erreur,

$$H = \frac{n+1}{5},$$

et qu'ainsi l'exponentielle proportionnelle à la probabilité de l'erreur s est

$$c^{-\frac{5Ks^2}{n+1}};$$

on peut donc ainsi déterminer cette probabilité.

On a conclu la valeur de $x^{(n+1)}$ du système des équations (A) par le procédé suivant.

Le système des équations (A) donne

$$x^{(1)} - x^{(0)} = p^{(1)} + y^{(1)};$$

d'où l'on tire

$$x^{(1)} = p^{(1)} + x^{(0)} + y^{(1)}.$$

On a ensuite les deux équations

$$x^{(2)} - x^{(1)} = p^{(2)} + \gamma^{(2)},$$
$$x^{(2)} - x^{(0)} = q^{(2)} + \lambda^{(2)};$$

ce qui donne

$$x^{(2)} = \tfrac{1}{2}x^{(1)} + \tfrac{1}{2}x^{(0)} + \tfrac{1}{2}(p^{(2)} + q^{(2)}) + \tfrac{1}{2}\gamma^{(2)} + \tfrac{1}{2}\lambda^{(2)}.$$

On a les deux équations

$$x^{(3)} - x^{(2)} = p^{(3)} + \gamma^{(3)},$$
$$x^{(3)} - x^{(1)} = q^{(3)} + \lambda^{(3)};$$

ce qui donne

$$x^{(3)} = \tfrac{1}{2}x^{(2)} + \tfrac{1}{2}x^{(1)} + \tfrac{1}{2}(p^{(3)} + q^{(3)}) + \tfrac{1}{2}\gamma^{(3)} + \tfrac{1}{2}\lambda^{(3)}.$$

En continuant ainsi, on aura $x^{(n+1)}$. Les quantités $\gamma^{(m)}$ et $\lambda^{(m)}$ ne commencent à être introduites dans cette expression que par les deux valeurs de $x^{(m)} - x^{(m-1)}$ et de $x^{(m)} - x^{(m-2)}$. Désignons par $k^{(r)}$ le coefficient de $\gamma^{(m)}$ dans l'expression de $x^{(m+r)}$; cette expression est

$$x^{(m+r)} = \tfrac{1}{2}x^{(m+r-1)} + \tfrac{1}{2}x^{(m+r-2)} + \tfrac{1}{2}(p^{(m+r)} + q^{(m+r)}) + \tfrac{1}{2}\gamma^{(m+r)} + \tfrac{1}{2}\lambda^{(m+r)};$$

en substituant pour $x^{(m+r)}$, $x^{(m+r-1)}$, $x^{(m+r-2)}$ les parties de leurs valeurs relatives à $\gamma^{(m)}$, la comparaison des coefficients de cette quantité donnera

$$k^{(r)} = \tfrac{1}{2}k^{(r-1)} + \tfrac{1}{2}k^{(r-2)};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$k^{(r)} = \mathrm{A} + \mathrm{A}'(-\tfrac{1}{2})^{r-1},$$

A et A′ étant deux arbitraires. Pour les déterminer, nous observerons que, r étant nul, on a $k^{(0)} = \frac{1}{2}$, et que, r étant 1, on a

$$k^{(1)} = \tfrac{1}{2}k^{(0)} = \tfrac{1}{4};$$

de là on tire

$$\mathrm{A} = \tfrac{1}{3}, \qquad \mathrm{A}' = -\tfrac{1}{12};$$

ainsi, dans la valeur de $x^{(n+1)}$, où $r = n + 1 - m$, on aura, pour le coefficient $k^{(n+1-m)}$ de $\gamma^{(m)}$,

$$k^{(n+1-m)} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{12}(-\tfrac{1}{2})^{n-m};$$

le coefficient de $\lambda^{(m)}$ dans la même valeur sera évidemment le même. Ainsi l'expression de $x^{(n+1)}$ sera une quantité connue, plus la suite

$$k^{(n)}\gamma^{(1)} + k^{(n-1)}(\gamma^{(2)} + \lambda^{(2)}) + \ldots + k^{(0)}(\gamma^{(n+1)} + \lambda^{(n+1)}).$$

Désignons par s cette erreur et par H la somme des carrés des coefficients de $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \ldots$; la probabilité de s sera proportionnelle à $c^{-\frac{Ks^2}{H}}$. On a, à très peu près,

$$H = \tfrac{2}{9}(n+1);$$

ainsi la probabilité de s est à très peu près proportionnelle à $c^{\frac{-9Ks^2}{2(n+1)}}$; les erreurs également probables sont donc plus grandes dans ce procédé que suivant la méthode la plus avantageuse, et à peu près dans le rapport de $\sqrt{5}$ à $\sqrt{\frac{9}{2}}$; ce procédé approche donc beaucoup de l'exactitude de la méthode la plus avantageuse, et, comme le calcul en est fort simple, nous allons déterminer la probabilité des erreurs auxquelles il expose, dans le cas général où les divers triangles ne sont ni égaux ni équilatéraux.

Si l'on représente par $m^{(i)}$ le carré de $C^{(i-1)}C^{(i)}$ divisé par $2R$, et par $n^{(i)}$ le carré de $C^{(i-2)}C^{(i)}$ divisé pareillement par $2R$, le système des équations (A) se changera dans le suivant :

$$(A')\qquad \begin{cases} x^{(i)} - x^{(i-1)} = p^{(i)} + m^{(i)}\gamma^{(i)}, \\ x^{(i)} - x^{(i-2)} = q^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)}. \end{cases}$$

Le procédé que nous venons d'examiner donne, en suivant l'analyse précédente, le coefficient de $\gamma^{(i)}$ dans l'expression de $x^{(n+1)}$ égal à

$$\tfrac{1}{3}m^{(i)} - \tfrac{1}{12}m^{(i)}(-\tfrac{1}{2})^{n-i}.$$

Pareillement, le coefficient de $\lambda^{(i)}$, dans la même expression, est

$$\tfrac{1}{3}n^{(i)} - \tfrac{1}{12}n^{(i)}(-\tfrac{1}{2})^{n-i};$$

de là il suit que la valeur de H est, à très peu près,

$$\tfrac{1}{9}S\,(m^{(i)2} + n^{(i)2}),$$

le signe intégral S s'étendant à toutes les valeurs de i jusqu'à $i = n+1$; la probabilité d'une erreur s, dans l'expression de $x^{(n+1)}$, est donc proportionnelle à

$$c^{\frac{-9Ks^2}{S(m^{(i)2}+n^{(i)2})}}.$$

Si l'on applique aux équations (A′) l'analyse que nous avons donnée ci-dessus pour le cas de la méthode la plus avantageuse, on trouvera, en les multipliant respectivement par $f^{(i)}$ et $g^{(i)}$, l'équation suivante

$$f^{(i)} = 1 - g^{(i)} - g^{(i+1)},$$

et cette équation aura lieu depuis $i = 1$ jusqu'à $i = n+1$, en supposant $g^{(i)}$ et $g^{(n+2)}$ nuls. On aura ensuite l'équation générale

$$m^{(i)2} g^{(i+1)} + (n^{(i)2} + m^{(i)2} + n^{(i-1)2}) g^{(i)} + m^{(i-1)2} g^{(i-1)} = m^{(i)2} + m^{(i-1)2}.$$

Cette équation a lieu depuis $i = 2$ jusqu'à $i = n+1$. En la combinant avec les équations $g^{(1)} = 0$, $g^{(n+2)} = 0$, on aura les valeurs de $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, …, $f^{(n+1)}$; $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(n+2)}$; on aura ensuite

$$H = S(f^{(i)2} m^{(i)2} + g^{(i)2} n^{(i)2}),$$

le signe S comprenant toutes les valeurs de $f^{(i)} m^{(i)2}$ et de $g^{(i)} n^{(i)2}$; la probabilité d'une erreur s dans la valeur de $x^{(n+1)}$ sera proportionnelle à

$$c^{\frac{-Ks^2}{H}}.$$

5. Il faut maintenant déterminer la valeur de K. Pour cela, nous observerons que le facteur u est déterminé, par ce qui précède, au moyen de l'équation

$$u = \frac{\pi - \theta - \theta' + \frac{h}{R}}{\frac{2h}{R}},$$

et que l'erreur de cette expression est $\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}$. Chaque double station fournit une valeur de u, et la moyenne de ces valeurs est la valeur qu'il faut adopter. Si l'on nomme i le nombre de ces valeurs, l'erreur à craindre sera $S\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2i}$, le signe S se rapportant aux i quantités $\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2i}$ relatives à chaque double station. Soit s la somme $S\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}$; la probabilité de s sera, par le n° 20 du Livre II, proportionnelle à une exponentielle de la forme

$$c^{-\frac{K's^2}{i}},$$

et, si l'on nomme q la somme des carrés des différences de chaque valeur partielle à sa valeur moyenne, on aura

$$K' = \frac{i}{2q}.$$

On a, par ce qui précède, la probabilité de l'erreur d'une valeur s' de la fonction $S\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2}$ proportionnelle à l'exponentielle

$$c^{\frac{-4Ks'^2}{i}},$$

le signe S s'étendant à i quantités de la forme $\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2}\cdot$ Or, les erreurs ε et $-\varepsilon$ étant supposées également probables, il est visible que les mêmes valeurs de $S\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}$ et de $S\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2}$ sont également probables; on a donc

$$4K = K',$$

ce qui donne

$$K = \frac{i}{8q}.$$

Les quarante-cinq premières valeurs de u, données dans le second Volume de la *Base du Système métrique* (p. 771), et qui sont fondées sur des observations faites dans les mois de l'année où l'on observe le plus souvent, donnent, pour sa valeur moyenne,

$$u = 0,07818,$$

et la somme q des carrés des différences de ces valeurs à la moyenne est 0,04900629; i étant ici égal à 45, on a

$$K = \frac{45}{0,39205032} = 114,781.$$

Si l'on suppose le nombre n de triangles égal à 25 et si l'on fait tous les côtés égaux à 20000^{m}, on aura 240000^{m} pour la distance de $x^{(26)}$ à $x^{(0)}$: c'est à peu près la distance de Paris à Dunkerque. Dans ce cas, la quantité $\frac{f^2}{2R}$, prise pour unité de distance, est $31^{\text{m}},416$. De là on conclut qu'il y a un contre un à parier que l'erreur sur la hauteur $x^{(26)}$ est comprise dans les limites $\pm 3^{\text{m}},1839$. Il y a neuf contre un à parier qu'elle est comprise dans les limites $\pm 7^{\text{m}},761$; on ne peut donc pas alors répondre avec une probabilité suffisante que cette erreur n'excédera pas $\pm 8^{\text{m}}$.

La chaîne de triangles que nous venons de considérer est beaucoup plus favorable à la détermination de la hauteur de son dernier point que celle dont Delambre a fait usage, dans l'Ouvrage cité, pour déterminer la hauteur du Panthéon au-dessus du niveau de la mer. En considérant cette dernière chaîne, on voit que l'on ne peut pas répondre, avec une probabilité suffisante, que l'erreur sur cette hauteur n'excédera pas $\pm 16^{\text{m}}$.

6. On voit, par ce qui précède, que les grands triangles, qui sont très propres à la mesure des degrés terrestres, le sont fort peu pour déterminer les hauteurs respectives des diverses stations. Ainsi, dans le cas d'une chaîne de triangles équilatéraux dont f est la longueur de chaque côté, les erreurs également probables de la différence de niveau des deux stations extrêmes étant proportionnelles à $\frac{f^2\sqrt{n+1}}{2R}$, n étant le nombre des triangles, si l'on nomme a la distance de ces deux stations, on aura, en supposant $n+1$ pair,

$$a = \tfrac{1}{2}(n+1)f;$$

$\frac{f^2\sqrt{n+1}}{2R}$ sera donc proportionnelle à $\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$; les erreurs également probables seront donc proportionnelles à cette fraction. Ainsi, en quadruplant le nombre des triangles, elles deviendront huit fois plus petites; mais alors les erreurs dues aux observations des angles deviennent comparables aux erreurs dues à la variabilité des réfractions terrestres. Examinons comment on peut avoir égard à la fois à ces deux genres d'erreurs.

Considérons une suite de points C, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, ... Soient $h^{(0)}$ la distance de C à $C^{(1)}$; $h^{(1)}$ la distance de $C^{(1)}$ à $C^{(2)}$; $h^{(2)}$ la distance de $C^{(2)}$ à $C^{(3)}$, et ainsi de suite. Concevons que du point $C^{(i)}$ on observe $C^{(i+1)}$, et réciproquement. La distance zénithale de $C^{(i+1)}$, observée de $C^{(i)}$, sera, par ce qui précède,

$$\theta+\frac{h^{(i)}u}{R}+\frac{h^{(i)}\varepsilon}{R}+\alpha,$$

ε étant l'erreur de u et α étant celle de l'angle observé θ. La distance zénithale de $C^{(i)}$, observée de $C^{(i+1)}$, sera

$$\theta'+\frac{h^{(i)}u}{R}+\frac{h^{(i)}\varepsilon'}{R}+\alpha',$$

ε' et α' étant les erreurs de u et de θ' dans l'observation faite au point $C^{(i+1)}$. On aura donc les deux équations

$$\theta+\theta'+\frac{2h^{(i)}u}{R}+\frac{h^{(i)}u}{R}(\varepsilon+\varepsilon')+\alpha+\alpha'=\pi+\frac{h^{(i)}}{R},$$

$$x^{(i+1)}-x^{(i)}=\frac{\theta-\theta'}{2}h^{(i)}+\frac{h^{(i)2}}{2R}(\varepsilon-\varepsilon')+\tfrac{1}{2}h^{(i)}(\alpha-\alpha').$$

Désignons comme ci-dessus $\varepsilon-\varepsilon'$ par $\gamma^{(i)}$, et faisons $\alpha-\alpha'$ égal à $\lambda^{(i)}$; on aura, pour l'élévation $x^{(n+1)}-x^{(0)}$ du point $C^{(n+1)}$ au-dessus de C, une expression de cette forme

$$x^{(n+1)}-x^{(0)}=M+S\,\frac{h^{(i)2}}{2R}\gamma^{(i)}+S\,\tfrac{1}{2}h^{(i)}\lambda^{(i)},$$

le signe intégral S se rapportant à toutes les valeurs de i, depuis $i = 0$ jusqu'à $i = n$. L'erreur de cette valeur de $x^{(n+i)}$ est

$$\mathrm{S}\,\frac{h^{(i)2}\gamma^{(i)}}{2\mathrm{R}} + \mathrm{S}\,\frac{h^{(i)}}{2}\lambda^{(i)}.$$

Il faut maintenant déterminer la probabilité de cette erreur que nous désignerons par s. Soit généralement

$$s = \mathrm{S}\,m^{(i)}\gamma^{(i)} + \mathrm{S}\,n^{(i)}\lambda^{(i)};$$

la probabilité de s sera, par l'analyse du n° 20 du Livre II de la *Théorie analytique des Probabilités,* proportionnelle à

$$\int d\varpi\, dx\, dy\, \varphi(x)\, \psi(y) c^{-s\varpi\sqrt{-1}}$$
$$\times [\cos(m^{(0)}x + n^{(0)}y)\varpi \cos(m^{(1)}x + n^{(1)}y)\varpi \cos(m^{(2)}x + n^{(2)}y)\varpi \ldots];$$

$\varphi(x)$ est la loi de probabilité d'une valeur x de $\gamma^{(0)}$; $\psi(y)$ est la loi de probabilité d'une valeur y de $\lambda^{(0)}$. Les erreurs négatives et positives sont supposées également probables : les intégrales relatives à x et y sont prises depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif, et l'intégrale relative à ϖ est prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$. En faisant

$$2\int dx\, \varphi(x) = k, \qquad \int x^2\, dx\, \varphi(x) = k'',$$
$$2\int dy\, \psi(y) = \bar{k}, \qquad \int y^2\, dy\, \psi(y) = \bar{k}'',$$

les intégrales étant prises depuis x et y nuls jusqu'à x et y égaux à l'infini, l'analyse du numéro cité donnera la probabilité de s proportionnelle à

$$c^{\frac{-s^2}{\frac{4k''}{k}\mathrm{S}\,m^{(i)2} + \frac{4\bar{k}''}{\bar{k}}\mathrm{S}\,n^{(i)2}}}.$$

Il est facile de conclure généralement de la même analyse que, si l'on fait

$$s = \mathrm{S}\,m^{(i)}\gamma^{(i)} + \mathrm{S}\,n^{(i)}\lambda^{(i)} + \mathrm{S}\,r^{(i)}\delta^{(i)} + \ldots,$$

$\gamma^{(i)}$, $\lambda^{(i)}$, $\delta^{(i)}$, ... étant des erreurs dérivant de sources différentes, la probabilité de s est proportionnelle à l'exponentielle

$$c^{\frac{-s^2}{\frac{4k''}{k}\,\mathrm{S}\,m^{(i)2}+\frac{4\bar{k}''}{\bar{k}}\,\mathrm{S}\,n^{(i)2}+\frac{4\bar{\bar{k}}''}{\bar{\bar{k}}}\,\mathrm{S}\,r^{(i)2}+\ldots}},$$

en désignant par $\pi(x)$ la probabilité d'une erreur x due à la troisième source d'erreur, et faisant

$$2\int dx\,\pi(x)=\bar{\bar{k}},\qquad \int x^2\,dx\,\pi(x)=\bar{\bar{k}}'',$$

les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini ; et ainsi des autres erreurs.

Pour déterminer, dans la question présente, les constantes $\frac{4k''}{k}$ et $\frac{4\bar{k}''}{\bar{k}}$, je supposerai d'abord la seconde nulle ou très petite, relativement à la première, comme on peut le faire dans les grandes triangulations de la méridienne. Dans ce cas, la probabilité d'une erreur s sera, en faisant $m^{(i)}=1$, proportionnelle à

$$c^{\frac{-s^2}{\frac{4k''}{k}n}},$$

n étant le nombre des intervalles qui séparent les stations. La probabilité d'une valeur s' de $\mathrm{S}\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2}$ ou de $\mathrm{S}\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}$, ce qui répond à une erreur $2s'$ dans la valeur de $\mathrm{S}(\varepsilon-\varepsilon')$, sera proportionnelle à

$$c^{\frac{-4s'^2}{\frac{4k''}{k}n}};$$

mais, par ce qui précède, cette probabilité est proportionnelle à

$$c^{\frac{-i}{2q}\frac{s'^2}{n}};$$

on a donc

$$\frac{2q}{i}=\frac{k''}{k}\qquad\text{ou}\qquad\frac{4k''}{k}=\frac{8q}{i}=\frac{1}{114{,}781}.$$

Si l'on suppose maintenant $\frac{\bar{k}''}{\bar{k}}$ nul et $n^{(i)} = 1$, la probabilité d'une valeur s' de la somme $S\frac{\alpha' - \alpha}{2}$ sera proportionnelle à

$$c^{\frac{-4s'^2}{\frac{4\bar{k}''}{\bar{k}}n}},$$

et la probabilité d'une même valeur s' de $S(\alpha + \alpha' + \alpha'')$ sera proportionnelle à

$$c^{\frac{-2s'^2}{\frac{12\bar{k}''}{\bar{k}}n}}.$$

Si l'on suppose cette loi de probabilité la même que pour les erreurs de la somme des trois angles d'un triangle sphérique, dans les mesures géodésiques, et qui, par le n° 1 du deuxième Supplément, peut être supposée proportionnelle à

$$c^{\frac{-(i+2)}{2\theta^2}\frac{s'^2}{n}},$$

θ^2 étant la somme des carrés des excès observés dans la somme des erreurs des trois angles dans i triangles, on aura

$$\frac{4\bar{k}''}{\bar{k}} = \frac{4\theta^2}{3(i+2)}.$$

On a, par ce que l'on a vu,

$$\frac{i+2}{\theta^2} = \frac{109}{445,217};$$

partant,

$$\frac{4\bar{k}''}{\bar{k}} = \frac{4}{3}\,\frac{445,217}{109},$$

quantité qu'il faut diviser par le carré du nombre de secondes sexagésimales que ce rayon renferme, et alors on a

$$\frac{4\bar{k}''}{\bar{k}} = \frac{1,2801}{10^{10}}.$$

Supposons les distances des stations consécutives égales à 1200^{m}; on trouvera qu'il y a un contre un à parier que l'erreur sur la valeur de $x^{(n+1)}$ n'est pas au-dessus de $\pm\, 0^{m},08555$ lorsque $n = 200$. Il y a mille contre un à parier que l'erreur n'est pas au-dessus de $\pm\, 0^{m},413$.

Méthode générale du Calcul des probabilités, lorsqu'il y a plusieurs sources d'erreurs.

La considération des deux sources d'erreur indépendantes qui existent dans les opérations du nivellement m'a conduit à examiner le cas général des observations assujetties à plusieurs sources d'erreurs. Telles sont les observations astronomiques. La plupart sont faites au moyen de deux instruments, la lunette méridienne et le cercle, dont les erreurs ne doivent pas être supposées avoir la même loi de probabilité. Dans les équations de condition que l'on déduit de ces observations, pour obtenir les éléments des mouvements célestes, ces erreurs sont multipliées par des coefficients différents pour chaque source d'erreur et pour chaque équation. Les systèmes les plus avantageux de facteurs par lesquels il faut multiplier ces équations, pour avoir les équations finales qui déterminent les éléments, ne sont plus, comme dans le cas d'une source unique d'erreurs, les coefficients de chaque élément dans les équations de condition. La facilité avec laquelle l'analyse que j'ai donnée dans le Livre II de ma *Théorie des Probabilités* s'applique à ce cas général va montrer les avantages de cette analyse.

Supposons d'abord que l'on ait un système d'équations de condition représentées par celle-ci

$$p^{(i)} y = a^{(i)} + m^{(i)} \gamma^{(i)} + n^{(i)} \lambda^{(i)} + \ldots,$$

y étant un élément dont on cherche la valeur la plus avantageuse. Si l'on multiplie l'équation précédente par un facteur $f^{(i)}$, la réunion de tous ces produits donnera pour y l'expression

$$y = \frac{\mathrm{S}\, a^{(i)} f^{(i)}}{\mathrm{S}\, p^{(i)} f^{(i)}} + \frac{\mathrm{S}\, m^{(i)} f^{(i)} \gamma^{(i)} + \mathrm{S}\, n^{(i)} f^{(i)} \lambda^{(i)} + \ldots}{\mathrm{S}\, p^{(i)} f^{(i)}}.$$

L'erreur de γ sera

$$\frac{\mathrm{S}\,m^{(i)}f^{(i)}\gamma^{(i)}+\mathrm{S}\,n^{(i)}f^{(i)}\lambda^{(i)}+\ldots}{\mathrm{S}\,p^{(i)}f^{(i)}}.$$

En désignant par s cette erreur, sa probabilité sera proportionnelle, par le numéro précédent, à l'exponentielle

$$c^{\dfrac{-s^2(\mathrm{S}\,p^{(i)}f^{(i)})^2}{\frac{4k''}{k}\mathrm{S}\,m^{(i)2}f^{(i)2}+\frac{4\bar{k}''}{\bar{k}}\mathrm{S}\,n^{(i)2}f^{(i)2}+\ldots}}.$$

Il faut déterminer $f^{(i)}$ de manière que

$$\frac{\frac{4k''}{k}\mathrm{S}\,m^{(i)2}f^{(i)2}+\frac{4\bar{k}''}{\bar{k}}\mathrm{S}\,n^{(i)2}f^{(i)2}+\ldots}{(\mathrm{S}\,p^{(i)}f^{(i)})^2}$$

soit un minimum, car il est visible qu'alors la même erreur s devient moins probable que dans tout autre système de facteurs. Si l'on nomme A le numérateur de cette fraction, et si l'on fait varier $f^{(i)}$ d'une quantité dq, on aura, par la condition du minimum, en égalant à zéro la différentielle de cette fraction,

$$0=\frac{\frac{k''}{k}m^{(i)2}f^{(i)}+\frac{\bar{k}''}{\bar{k}}n^{(i)2}f^{(i)}+\ldots}{\mathrm{A}}-\frac{p^{(i)}}{\mathrm{S}\,p^{(i)}f^{(i)}},$$

ce qui donne pour $f^{(i)}$ une expression de cette forme

$$f^{(i)}=\frac{\mu\,p^{(i)}}{\frac{k''}{k}m^{(i)2}+\frac{\bar{k}''}{\bar{k}}n^{(i)2}+\ldots}.$$

On peut faire ici $\mu=1$, parce que, cette quantité étant indépendante de i, elle affecte également tous les multiplicateurs $f^{(i)}$; ainsi la quantité $f^{(i)}$, par laquelle on doit multiplier chaque équation de condition pour avoir le résultat le plus avantageux, est

$$\frac{p^{(i)}}{\frac{k''}{k}m^{(i)2}+\frac{\bar{k}''}{\bar{k}}n^{(i)2}+\ldots}$$

et la probabilité d'une erreur s de ce résultat est proportionnelle à l'exponentielle

$$c^{\frac{-s^2}{4}\,\mathrm{S}\,\frac{p^{(i)2}}{\frac{k''}{k}m^{(i)2}+\frac{\bar{k}''}{\bar{k}}n^{(i)2}+\ldots}}.$$

On aura, par la même analyse et par le n° 22 du Livre II, les facteurs par lesquels on doit multiplier les équations de condition pour avoir les résultats les plus avantageux, quels que soient le nombre des éléments à déterminer et le nombre des genres d'erreurs; on aura pareillement les lois de probabilité des erreurs de ces résultats.

Supposons que l'on ait, entre deux éléments x et y, l'équation de condition

$$l^{(i)}x+p^{(i)}y=a^{(i)}+m^{(i)}\gamma^{(i)}+n^{(i)}\lambda^{(i)}+r^{(i)}\delta^{(i)}+\ldots,$$

$\gamma^{(i)}$, $\lambda^{(i)}$, $\delta^{(i)}$, ... étant des erreurs dont les sources sont différentes. En multipliant d'abord cette équation par un système $f^{(i)}$ de facteurs, la réunion de ces produits donnera l'équation finale

$$x\,\mathrm{S}\,l^{(i)}f^{(i)}+y\,\mathrm{S}\,p^{(i)}f^{(i)}=\mathrm{S}\,a^{(i)}f^{(i)}+\mathrm{S}\,m^{(i)}f^{(i)}\gamma^{(i)}+\mathrm{S}\,n^{(i)}f^{(i)}\lambda^{(i)}+\ldots.$$

En multipliant ensuite l'équation de condition par un autre système $g^{(i)}$ de facteurs, la réunion des produits donnera une seconde équation finale

$$x\,\mathrm{S}\,l^{(i)}g^{(i)}+y\,\mathrm{S}\,p^{(i)}g^{(i)}=\mathrm{S}\,a^{(i)}g^{(i)}+\mathrm{S}\,m^{(i)}g^{(i)}\gamma^{(i)}+\ldots.$$

On tire de ces deux équations finales

$$x=\frac{\mathrm{S}\,a^{(i)}f^{(i)}\,\mathrm{S}\,p^{(i)}g^{(i)}-\mathrm{S}\,a^{(i)}g^{(i)}\,\mathrm{S}\,p^{(i)}f^{(i)}}{\mathrm{L}}$$
$$+\frac{\mathrm{S}\,m^{(i)}f^{(i)}\gamma^{(i)}\,\mathrm{S}\,p^{(i)}g^{(i)}-\mathrm{S}\,m^{(i)}g^{(i)}\gamma^{(i)}\,\mathrm{S}\,p^{(i)}f^{(i)}+\ldots}{\mathrm{L}},$$

L étant égal à

$$\mathrm{S}\, l^{(i)} f^{(i)}\ \mathrm{S}\, p^{(i)} g^{(i)} - \mathrm{S}\, l^{(i)} g^{(i)}\ \mathrm{S}\, p^{(i)} f^{(i)}.$$

Le coefficient de $\gamma^{(i)}$ dans cette valeur est

$$\frac{m^{(i)} f^{(i)}\ \mathrm{S}\, p^{(i)} g^{(i)} - m^{(i)} g^{(i)}\ \mathrm{S}\, p^{(i)} f^{(i)}}{\mathrm{L}}.$$

En changeant $m^{(i)}$ en $n^{(i)}$, $r^{(i)}$, ..., on aura les coefficients correspondants de $\lambda^{(i)}$, $\delta^{(i)}$, ... En nommant donc s la valeur de la partie de x dépendante des erreurs $\gamma^{(i)}$, $\lambda^{(i)}$, $\delta^{(i)}$, ..., la probabilité de cette valeur sera, par ce qui précède, proportionnelle à l'exponentielle

$$c^{\frac{-s^2}{\mathrm{H}}},$$

en faisant

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{S}\,\mathrm{M}^{(i)} f^{(i)2} (\mathrm{S}\, p^{(i)} g^{(i)})^2 - 2\,\mathrm{S}\,\mathrm{M}^{(i)} f^{(i)} g^{(i)}\ \mathrm{S}\, p^{(i)} f^{(i)}\ \mathrm{S}\, p^{(i)} g^{(i)} + \mathrm{S}\,\mathrm{M}^{(i)} g^{(i)2} (\mathrm{S}\, p^{(i)} f^{(i)})^2}{\mathrm{L}^2},$$

$\mathrm{M}^{(i)}$ étant égal à

$$\frac{4k''}{k} m^{(i)2} + \frac{4\bar{k}''}{\bar{k}} n^{(i)2} + \frac{4\bar{\bar{k}}''}{\bar{\bar{k}}} r^{(i)2} + \dots.$$

Il faut maintenant déterminer $f^{(i)}$ et $g^{(i)}$ de manière que H soit un minimum. Pour cela, on fera varier $f^{(i)}$, et l'on égalera à zéro le coefficient de sa différentielle; ce qui donnera, en nommant P le numérateur de l'expression de H,

$$\begin{aligned} 0 = {} & \mathrm{M}^{(i)} f^{(i)} (\mathrm{S}\, p^{(i)} g^{(i)})^2 - \mathrm{M}^{(i)} g^{(i)}\ \mathrm{S}\, p^{(i)} f^{(i)}\ \mathrm{S}\, p^{(i)} g^{(i)} \\ & - p^{(i)}\ \mathrm{S}\,\mathrm{M}^{(i)} f^{(i)} g^{(i)}\ \mathrm{S}\, p^{(i)} g^{(i)} + p^{(i)}\ \mathrm{S}\,\mathrm{M}^{(i)} g^{(i)2}\ \mathrm{S}\, p^{(i)} f^{(i)} \\ & - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{L}} (l^{(i)}\ \mathrm{S}\, p^{(i)} g^{(i)} - p^{(i)}\ \mathrm{S}\, l^{(i)} g^{(i)}). \end{aligned}$$

Il est facile de voir que l'on satisfait à cette équation en supposant

$$f^{(i)} = \frac{l^{(i)}}{\mathrm{M}^{(i)}}, \qquad g^{(i)} = \frac{p^{(i)}}{\mathrm{M}^{(i)}};$$

et l'on doit en conclure que l'on satisferait, par la même supposition, à l'équation correspondante que donnerait $d\mathrm{H} = 0$, en y faisant varier $g^{(i)}$. On voit encore que les mêmes valeurs de $f^{(i)}$ et de $g^{(i)}$ satisfont aux équations semblables qui résultent de la considération de l'élément y.

Si l'on a, entre les éléments $x, y, z, \ldots$, des équations de condition représentées par l'équation générale

$$l^{(i)}x + p^{(i)}y + q^{(i)}z + \ldots = a^{(i)} + m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)} + r^{(i)}\delta^{(i)} + \ldots,$$

$\gamma^{(i)}, \lambda^{(i)}, \delta^{(i)}, \ldots$ étant des erreurs de divers genres, on trouvera par l'analyse précédente que les facteurs par lesquels on doit multiplier respectivement cette équation, pour former les équations finales qui donnent les valeurs des éléments les plus avantageuses, sont, pour la première équation finale, représentés par

$$\frac{l^{(i)}}{\frac{k''}{k}m^{(i)2} + \frac{\bar{k}''}{\bar{k}}n^{(i)2} + \frac{\bar{\bar{k}}''}{\bar{\bar{k}}}r^{(i)2} + \ldots}.$$

Ils sont représentés, pour la seconde équation finale, par

$$\frac{p^{(i)}}{\frac{k''}{k}m^{(i)2} + \frac{\bar{k}''}{\bar{k}}n^{(i)2} + \frac{\bar{\bar{k}}''}{\bar{\bar{k}}}r^{(i)2} + \ldots},$$

et ainsi de suite. En appliquant donc aux équations ainsi multipliées l'analyse du nº 2 du premier Supplément, on aura les valeurs des éléments les plus avantageuses et les lois de probabilités de leurs erreurs.

Pour donner un exemple de cette application, ne considérons que deux éléments x et y. Si l'on fait

$$\mathrm{M}^{(i)} = \frac{k''}{k}m^{(i)2} + \frac{\bar{k}''}{\bar{k}}n^{(i)2} + \frac{\bar{\bar{k}}''}{\bar{\bar{k}}}r^{(i)2} + \ldots.$$

On multipliera l'équation de condition précédente par $\frac{p^{(i)}}{\mathrm{M}^{(i)}}$, et l'on en tirera

$$x\,\mathrm{S}\,\frac{l^{(i)}p^{(i)}}{\mathrm{M}^{(i)}}+y\,\mathrm{S}\,\frac{p^{(i)2}}{\mathrm{M}^{(i)}}=\mathrm{S}\,\frac{a^{(i)}p^{(i)}}{\mathrm{M}^{(i)}}+\mathrm{S}\,\frac{p^{(i)}}{\mathrm{M}^{(i)}}(m^{(i)}\gamma^{(i)}+n^{(i)}\lambda^{(i)}+\ldots);$$

mais la condition de la méthode la plus avantageuse donne

$$\mathrm{o}=\mathrm{S}\,\frac{l^{(i)}}{\mathrm{M}^{(i)}}(m^{(i)}\gamma^{(i)}+n^{(i)}\lambda^{(i)}+\ldots),$$

$$\mathrm{o}=\mathrm{S}\,\frac{p^{(i)}}{\mathrm{M}^{(i)}}(m^{(i)}\gamma^{(i)}+n^{(i)}\lambda^{(i)}+\ldots);$$

on aura donc

$$y=\frac{\mathrm{S}\,\frac{a^{(i)}p^{(i)}}{\mathrm{M}^{(i)}}-x\,\mathrm{S}\,\frac{p^{(i)}l^{(i)}}{\mathrm{M}^{(i)}}}{\mathrm{S}\,\frac{p^{(i)2}}{\mathrm{M}^{(i)}}}.$$

Substituant cette valeur de y dans l'équation générale de condition, et faisant

$$l_1^{(i)}=l^{(i)}-p^{(i)}\frac{\mathrm{S}\,\frac{l^{(i)}p^{(i)}}{\mathrm{M}^{(i)}}}{\mathrm{S}\,\frac{p^{(i)2}}{\mathrm{M}^{(i)}}},$$

$$a_1^{(i)}=a^{(i)}-p^{(i)}\frac{\mathrm{S}\,\frac{l^{(i)}p^{(i)}}{\mathrm{M}^{(i)}}}{\mathrm{S}\,\frac{p^{(i)2}}{\mathrm{M}^{(i)}}},$$

on aura

$$x=\frac{\mathrm{S}\,\frac{a_1^{(i)}l_1^{(i)}}{\mathrm{M}^{(i)}}}{\mathrm{S}\,\frac{l_1^{(i)2}}{\mathrm{M}^{(i)}}};$$

et la probabilité d'une erreur s de cette valeur sera proportionnelle à

$$c^{\frac{-s^2}{4}\,\mathrm{S}\,\frac{l_1^{(i)2}}{\mathrm{M}^{(i)}}}.$$

Cette analyse suppose la connaissance des constantes $\frac{k''}{k}$ et $\frac{\overline{k}''}{\overline{k}}$. Mais on peut en obtenir, par les observations mêmes, des valeurs très approchées, de la manière suivante.

Concevons que l'on ait déterminé les éléments $x, y, z, \ldots$ par la méthode suivant laquelle on forme les équations finales, en multipliant chaque équation de condition successivement par le coefficient correspondant de chaque élément. Si l'on substitue les valeurs des éléments ainsi déterminées dans l'équation de condition

$$l^{(i)}x + p^{(i)}y + \ldots - a^{(i)} = m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)} + \ldots,$$

on aura une équation de cette forme

$$R^{(i)} = m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)} + \ldots.$$

Supposons, pour plus de simplicité, que l'on n'ait que les deux genres d'erreurs $\gamma^{(i)}$ et $\lambda^{(i)}$: on multipliera d'abord l'équation précédente par $m^{(i)}$. En élevant ensuite chaque membre au carré et prenant la somme de toutes les équations ainsi formées, on aura

$$S\, m^{(i)2} R^{(i)2} = S\left(m^{(i)4}\gamma^{(i)2} + 2m^{(i)3}n^{(i)}\gamma^{(i)}\lambda^{(i)} + n^{(i)2}m^{(i)2}\lambda^{(i)2}\right).$$

La valeur moyenne de $m^{(i)4}\gamma^{(i)2}$ est évidemment

$$\frac{m^{(i)4}\int \gamma^2\, d\gamma\, \varphi(\gamma)}{\int d\gamma\, \varphi(\gamma)},$$

les intégrales étant prises depuis $\gamma = -\infty$ jusqu'à γ infini, ce qui donne $\frac{2k'' m^{(i)4}}{k}$. On a pareillement $\frac{2\bar{k}''}{\bar{k}} m^{(i)2} n^{(i)2}$ pour la valeur moyenne de $m^{(i)2} n^{(i)2} \lambda^{(i)2}$. On trouve de la même manière que la valeur moyenne de $2m^{(i)3} n^{(i)} \gamma^{(i)} \lambda^{(i)}$ est nulle; on a donc, en substituant au lieu des quantités leurs valeurs moyennes, ce que l'on peut faire avec d'autant plus de précision que le nombre des observations est plus grand,

$$S\, m^{(i)2} R^{(i)2} = \frac{2k''}{k} S\, m^{(i)4} + \frac{2\bar{k}''}{\bar{k}} S\, m^{(i)2} n^{(i)2}.$$

On aura pareillement

$$\mathrm{S}\, n^{(i)2}\mathrm{R}^{(i)2} = \frac{2k''}{k}\,\mathrm{S}\, m^{(i)2}n^{(i)2} + \frac{2\bar{k}''}{\bar{k}}\,\mathrm{S}\, n^{(i)4};$$

de là on tire

$$\frac{4k''}{k} = \frac{2\,\mathrm{S}\, n^{(i)4}\;\mathrm{S}\, m^{(i)2}\mathrm{R}^{(i)2} - 2\,\mathrm{S}\, m^{(i)2}n^{(i)2}\;\mathrm{S}\, n^{(i)2}\mathrm{R}^{(i)2}}{\mathrm{S}\, m^{(i)4}\;\mathrm{S}\, n^{(i)4} - (\mathrm{S}\, m^{(i)2}n^{(i)2})^2},$$

$$\frac{4\bar{k}''}{\bar{k}} = \frac{2\,\mathrm{S}\, m^{(i)4}\;\mathrm{S}\, n^{(i)2}\mathrm{R}^{(i)2} - 2\,\mathrm{S}\, m^{(i)2}n^{(i)2}\;\mathrm{S}\, m^{(i)2}\mathrm{R}^{(i)2}}{\mathrm{S}\, m^{(i)4}\;\mathrm{S}\, n^{(i)4} - (\mathrm{S}\, m^{(i)2}n^{(i)2})^2};$$

en désignant donc par $2\mathrm{P}$ et $2\mathrm{Q}$ les numérateurs de ces deux expressions, les facteurs par lesquels on doit multiplier l'équation de condition seront

$$\frac{l^{(i)}}{m^{(i)2}\mathrm{P} + n^{(i)2}\mathrm{Q}},$$

$$\frac{p^{(i)}}{m^{(i)2}\mathrm{P} + n^{(i)2}\mathrm{Q}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il s'agit maintenant de faire voir que ces valeurs de $\frac{4k''}{k}$, $\frac{4\bar{k}''}{\bar{k}}$ sont fort approchées. Pour cela, ne considérons qu'un élément x : l'équation de condition

$$l^{(i)}x = a^{(i)} + m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)}$$

donnera

$$x = \frac{\mathrm{S}\, a^{(i)}l^{(i)}}{\mathrm{S}\, l^{(i)2}} + \frac{\mathrm{S}\, l^{(i)}m^{(i)}\gamma^{(i)} + \mathrm{S}\, l^{(i)}n^{(i)}\lambda^{(i)}}{\mathrm{S}\, l^{(i)2}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation de condition, on aura

$$\mathrm{R}^{(i)} = \frac{l^{(i)}\,\mathrm{S}\, a^{(i)}l^{(i)} - a^{(i)}\,\mathrm{S}\, l^{(i)2}}{\mathrm{S}\, l^{(i)2}},$$

$$\mathrm{R}^{(i)} + l^{(i)}\,\frac{\mathrm{S}\,(l^{(i)}m^{(i)}\gamma^{(i)} + l^{(i)}n^{(i)}\lambda^{(i)})}{\mathrm{S}\, l^{(i)2}} = m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)};$$

mais il est facile de voir que les valeurs de $\mathrm{S}\, l^{(i)}m^{(i)}\gamma^{(i)}$ et de $\mathrm{S}\, l^{(i)}n^{(i)}\lambda^{(i)}$

sont nulles par la supposition des erreurs négatives aussi probables que les erreurs positives : on peut donc faire, comme ci-dessus,

$$\mathrm{R}^{(i)} = m^{(i)}\gamma^{(i)} + n^{(i)}\lambda^{(i)},$$

ce qu'il fallait établir.

QUATRIÈME SUPPLÉMENT.

1. U étant une fonction quelconque d'une variable t, si on la développe suivant les puissances de t, le coefficient de t^x, dans ce développement, sera une fonction de x que je désignerai par y_x; U est ce que j'ai nommé *fonction génératrice* de y_x. Si l'on multiplie U par une fonction T de t, pareillement développée suivant les puissances ascendantes de t, le produit UT sera une nouvelle fonction génératrice d'une fonction de x, dérivée de la fonction y_x suivant une loi qui dépendra de la fonction T. Si T est égal à $\frac{1}{t} - 1$, il est facile de voir que la dérivée sera $y_{x+1} - y_x$, ou la différence finie de y_x. Désignons généralement, quel que soit T, cette dérivée par δy_x. Si l'on multiplie le produit UT par T, la dérivée du produit UT^2 sera une dérivée de δy_x semblable à la dérivée de δy_x en y_x; on pourra donc désigner par $\delta^2 y_x$ cette seconde dérivée; d'où il est visible généralement que UT^n sera la fonction génératrice de $\delta^n y_x$.

Si l'on multiplie U par une autre fonction Z de t, pareillement développée suivant les puissances ascendantes de t, et si l'on désigne par la caractéristique Δ ce que nous avons nommé δ relativement à la fonction T, UZ^n sera la fonction génératrice de $\Delta^n y_x$.

On peut concevoir T comme une fonction de Z. En développant cette fonction en série par rapport aux puissances ascendantes de Z, on aura une expression de T de cette forme

$$T = A^{(0)} + A^{(1)}Z + A^{(2)}Z^2 + \ldots.$$

En multipliant cette équation par U et repassant des fonctions génératrices aux coefficients, on aura

$$\delta y_x = A^{(0)} y_x + A^{(1)} \Delta y_x + A^{(2)} \Delta^2 y_x + \ldots.$$

On voit ainsi que la même équation, qui a lieu entre T et Z, a lieu entre leurs caractéristiques δ et Δ, pourvu que, dans le développement de cette équation suivant les puissances de δ et de Δ, on substitue, au lieu d'une puissance quelconque δ^r, $\delta^r y_x$; au lieu d'une puissance $\Delta^{r'}$, $\Delta^{r'} y_x$; au lieu d'un produit tel que $\delta^r \Delta^{r'}$, $\delta^r \Delta^{r'} y_x$; et que l'on multiplie par y_x les termes indépendants de δ et Δ. Ainsi, en supposant T égal à $\frac{1}{t} - 1$, $Z = \frac{1}{t^i} - 1$, δy_x sera la différence finie de y_x, x variant de l'unité; Δy_x sera la différence finie de y_x, x variant de i; on a ensuite

$$Z = (1 + T)^i - 1,$$

et, par conséquent,

$$Z^n = [(1 + T)^i - 1]^n;$$

ce qui donne

$$\Delta^n = [(1 + \delta)^i - 1]^n,$$

pourvu qu'après le développement on place y_x après les puissances des caractéristiques. Cette équation aura encore lieu en faisant n négatif, mais alors les différences se changent en intégrales. La considération des fonctions génératrices fait voir ainsi, de la manière la plus naturelle et la plus simple, l'analogie des puissances et des différences. On peut considérer cette théorie comme le calcul des caractéristiques.

Si l'on a $0 = \delta y_x$, on aura une équation aux différences finies : UT devient alors un polynôme qui ne renferme que des puissances de t plus petites que la plus haute de t dans T. Désignons par Q le polynôme en t le plus général de cette nature; on aura

$$U = \frac{Q}{T}.$$

Le coefficient de t^x dans le développement de U sera l'intégrale y_x de l'équation $0 = \delta y_x$; par cette raison, je nomme U fonction génératrice de cette équation.

Si l'on conçoit U fonction de deux variables t et t', le coefficient du produit $t^x t'^{x'}$, dans le développement de U, sera une fonction de x et de x' que je désigne par $y_{x,x'}$; T étant une fonction développée des mêmes variables t et t', le produit UT sera la fonction génératrice d'une dérivée de $y_{x,x'}$, que je désignerai par $\delta y_{x,x'}$; et il est facile d'en conclure que UT^n sera la fonction génératrice de $\delta^n y_{x,x'}$.

Si l'on a $0 = \delta y_{x,x'}$, on aura une équation aux différences finies partielles. Représentons cette équation par la suivante

$$
\begin{aligned}
0 = a\, y_{x,x'} & + b\, y_{x,x'+1} + c\, y_{x,x'+2} + \ldots,\\
& + a' y_{x+1,x'} + b' y_{x+1,x'+1} + \ldots,\\
& + a'' y_{x+2,x'} + \ldots\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}
$$

il est facile de voir que la fonction génératrice de l'équation proposée sera

$$
\frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}t' + \mathrm{C}t'^2 + \ldots + \mathrm{H}t'^{n'-1} + \mathrm{A}' + \mathrm{B}'t + \mathrm{C}'t^2 + \ldots + \mathrm{H}'t^{n-1}}{\left(\begin{aligned} & a t^n t'^{n'} + b t^n t'^{n'-1} + c t^n t'^{n'-2} + \ldots\\ & + a' t^{n-1} t'^{n'} + b' t^{n-1} t'^{n'-1} + \ldots\\ & + a'' t^{n-2} t'^{n'} + \ldots\\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right)},
$$

n et n' étant les plus grands accroissements de x et de x', dans l'équation proposée aux différences partielles; A, B, C, ..., H sont des fonctions arbitraires de t; A′, B′, C′, ..., H′ sont des fonctions arbitraires de t'. On déterminera toutes ces fonctions au moyen des fonctions génératrices de

$$
\begin{gathered}
y_{0,x'},\quad y_{1,x'},\quad y_{2,x'},\quad \ldots,\quad y_{n-1,x'},\\
y_{x,0},\quad y_{x,1},\quad y_{x,2},\quad \ldots,\quad y_{x,n'-1}.
\end{gathered}
$$

Un des principaux avantages de cette manière d'intégrer les équations aux différences partielles consiste en ce que, l'analyse algébrique fournissant divers moyens pour développer les fonctions, on peut choisir celui qui convient le mieux à la question proposée. La solution des problèmes suivants, par le comte de Laplace, mon fils, et les considérations qu'il y a jointes répandront un nouveau jour sur le calcul des fonctions génératrices.

2. Un joueur A tire d'une urne, renfermant des boules blanches et noires, une boule qu'il remet après le coup, avec la probabilité p d'amener une boule blanche et la probabilité q d'en extraire une noire; un second joueur B tire ensuite, d'une autre urne, une boule qu'il remet également après le tirage, avec les probabilités p' d'une boule blanche et q' d'une noire. Ces deux joueurs continuent ainsi à extraire alternativement, chacun de leur urne respective, une boule qu'ils ont toujours soin de remettre. Si l'un des joueurs amène une boule blanche, il compte un point; si, au contraire, il fait sortir une boule noire, il ne compte rien, et le tour de jouer passe simplement à l'autre. Les joueurs ayant réglé, par les conditions de leur jeu, le nombre de points que chacun doit atteindre le premier pour gagner la partie, et ayant commencé à jouer, il manque encore au joueur A le nombre x de points pour gagner, et x' au joueur B; et le tour de jouer appartient au joueur A. On demande, dans cette position, quelle est la probabilité de l'un et l'autre joueur pour gagner la partie.

Soit $z_{x,x'}$ la probabilité de second joueur B, et représentons par $Y_{x,x'}$ sa probabilité, s'il était le premier à jouer. Le joueur A, en commençant, peut amener une boule blanche, et la probabilité de B devient $Y_{x-1,x'}$; ou le premier joueur fait sortir une noire, et alors ne compte rien, et la probabilité du second se change en $Y_{x,x'}$; mais la probabilité du premier cas est p, celle du second q; on aura donc l'équation

$$z_{x,x'} = pY_{x-1,x'} + qY_{x,x'};$$

par un raisonnement semblable, on aura encore celle-ci

$$Y_{x,x'} = p'z_{x,x'-1} + q'z_{x,x'};$$

d'où l'on tire

$$Y_{x-1,x'} = p'z_{x-1,x'-1} + q'z_{x-1,x'},$$

et conséquemment

$$z_{x,x'} = p(p'z_{x-1,x'-1} + q'z_{x-1,x'}) + q(p'z_{x,x'-1} + q'z_{x,x'}) \quad (1)$$

ou

$$z_{x,x'} = \frac{pq'}{1-qq'} z_{x-1,x'} + \frac{p'q}{1-qq'} z_{x,x'-1} + \frac{pp'}{1-qq'} z_{x-1,x'-1},$$

et en faisant

$$\frac{pq'}{1-qq'} = m, \qquad \frac{p'q}{1-qq'} = m' \qquad \text{et} \qquad \frac{pp'}{1-qq'} = n,$$

il viendra

$$z_{x,x'} = m z_{x-1,x'} + m' z_{x,x'-1} + n z_{x-1,x'-1}.$$

La fonction génératrice de $z_{x,x'}$, dans cette équation aux différences partielles, est

$$\frac{A + A'}{1 - mt - m't' - ntt'},$$

A étant une fonction arbitraire de t, et A′ une autre fonction arbitraire de t'; j'observe d'abord qu'en attribuant à la fonction A′ le terme indépendant de t dans la fonction A, la fonction génératrice ci-dessus peut se mettre sous cette forme

$$\frac{A_1 t + A'_1}{1 - mt - m't' - ntt'},$$

A et A'_1 étant de nouvelles fonctions arbitraires de t et de t' qu'il s'agit

(1) On arrive encore à cette équation aux différences partielles en considérant l'ensemble des deux tirages successifs de A et B comme un coup, et en examinant les différents cas qui peuvent se présenter après ce coup joué; or ils sont au nombre de quatre : 1° ou les deux joueurs amènent chacun une boule blanche, événement dont la probabilité est pp'; alors la probabilité $z_{x,x'}$ se changera en celle-ci $z_{x-1,x'-1}$; 2° ou le premier joueur extrait une boule blanche et le second une noire; dans cette hypothèse, qui a pour probabilité pq', $z_{x,x'}$ deviendra $z_{x-1,x'}$; 3° ou au contraire le premier joueur fait sortir une boule noire et le second une blanche; dans cette hypothèse, qui a pour probabilité $p'q$, $z_{x,x'}$ deviendra $z_{x,x'-1}$; 4° ou enfin l'un et l'autre joueur tirent une boule noire, événement dont la probabilité est qq', et alors la probabilité $z_{x,x'}$ reste la même. On aura donc, par les principes connus des probabilités, l'équation

$$z_{x,x'} = pp'z_{x-1,x'-1} + pq'z_{x-1,x'} + p'qz_{x,x'-1} + qq'z_{x,x'}.$$

On obtient la fonction génératrice de $z_{x,x'}$, dans cette équation aux différences partielles, en appliquant à ce cas la règle générale qui vient d'être exposée.

de déterminer. Or, si l'on fait attention que $z_{0,x'}$ est nul, quel que soit x', la probabilité du joueur A se changeant alors en certitude, on voit que le coefficient de t^0 dans le développement de la fonction génératrice par rapport aux puissances de t doit être nul, et l'on aura

$$\frac{A'_1}{1-m't'}=0 \quad \text{ou} \quad A'_1=0.$$

De plus, $z_{x,0}$ est nul quand x est zéro, et égal à l'unité quand x est ou 1 ou 2, ou 3, ..., puisqu'alors la probabilité du joueur B se change en certitude; la fonction génératrice de $z_{x,0}$ est donc $\frac{t}{1-t}$; c'est le coefficient de t'^0 dans le développement de la fonction génératrice suivant les puissances de t'; on aura donc

$$\frac{A_1 t}{1-mt}=\frac{t}{1-t};$$

ce qui donne

$$A_1 t=\frac{t(1-mt)}{1-t};$$

par conséquent la fonction génératrice de $z_{x,x'}$ est

$$(a) \qquad \frac{t(1-mt)}{(1-t)(1-mt-m't'-ntt')};$$

en la mettant sous cette forme

$$\frac{t}{1-t}\,\frac{1}{1-\left(\dfrac{m'+nt}{1-mt}\right)t'}$$

et la développant par rapport aux puissances de t', on a

$$\frac{t}{1-t}\left[1+\left(\frac{m'+nt}{1-mt}\right)t'+\left(\frac{m'+nt}{1-mt}\right)^2 t'^2+\left(\frac{m'+nt}{1-mt}\right)^3 t'^3+\ldots\right].$$

Le coefficient de $t'^{x'}$ dans cette série est

$$\frac{t}{1-t}\left(\frac{m'+nt}{1-mt}\right)^{x'},$$

et celui de t^x dans le développement de cette dernière fonction sera l'expression de $z_{x,x'}$. Or, si l'on réduit d'abord l'expression $t\left(\frac{m'+nt}{1-mt}\right)^{x'}$ en une série ordonnée selon les puissances de t, et qu'on la multiplie ensuite par le développement de $\frac{1}{1-t}$, il est facile de voir que le coefficient de t^x dans ce produit est ce que devient la série en y faisant $t=1$ et s'arrêtant à la puissance x de t; et l'on trouvera, pour la valeur de ce coefficient ou de $z_{x,x'}$,

$$z_{x,x'} = m'^{x'} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{x'}{1}\frac{n}{m'} + \frac{x'(x'-1)}{1.2}\frac{n^2}{m'^2} + \frac{x'(x'-1)(x'-2)}{1.2.3}\frac{n^3}{m'^3} + \ldots + \frac{x'(x'-1)\ldots(x'-x+2)}{1.2\ldots(x-1)}\frac{n^{x-1}}{m'^{x-1}} \\ + \frac{x'}{1} m \left[1 + \frac{x'}{1}\frac{n}{m'} + \frac{x'(x'-1)}{1.2}\frac{n^2}{m'^2} + \ldots + \frac{x'(x'-1)\ldots(x'-x+3)}{1.2\ldots(x-2)}\frac{n^{x-2}}{m'^{x-2}}\right] \\ + \frac{x'(x'+1)}{1.2} m^2 \left[1 + \frac{x'}{1}\frac{n}{m'} + \ldots + \frac{x'(x'-1)\ldots(x'-x+4)}{1.2\ldots(x-3)}\frac{n^{x-3}}{m'^{x-3}}\right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{x'(x'+1)\ldots(x'+x-2)}{1.2\ldots(x-1)} m^{x-1} \end{array} \right\}.$$

En désignant par $y_{x,x'}$ la probabilité du joueur A, on serait conduit, par les mêmes raisonnements, à une équation semblable aux différences partielles,

$$y_{x,x'} = m y_{x-1,x'} + m' y_{x,x'-1} + n y_{x-1,x'-1},$$

qui donne pareillement pour la variable $y_{x,x'}$ une fonction génératrice de la forme

$$\frac{A_1 t + A'_1}{1 - mt - m't' - ntt'},$$

A_1 et A'_1 étant, comme plus haut, des fonctions arbitraires de t et de t' que l'on déterminera par les mêmes considérations. En effet la fonction génératrice de $y_{0,x'}$ est $\frac{1}{1-t'}$, celle de $y_{x,0}$ est l'unité : on formera donc les équations

$$\frac{A'_1}{1-m't'} = \frac{1}{1-t'};$$

d'où l'on tire

$$A'_1 = \frac{1-m't'}{1-t'}$$

et
$$\frac{A_1 t + 1}{1 - mt} = 1;$$
d'où l'on conclut
$$A_1 t = -mt.$$
La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ sera donc
$$(b)\qquad \frac{\dfrac{1 - m't'}{1 - t'} - mt}{1 - mt - m't' - ntt'},$$
laquelle, développée selon les puissances de t et de t', donnera, par le coefficient de $t^x t'^{x'}$, l'expression de $y_{x,x'}$ qui sera d'une forme semblable à celle de $z_{x,x'}$, quoique un peu plus compliquée.

En ajoutant les deux fonctions génératrices (a) et (b), leur somme se réduit à celle-ci
$$\frac{1}{(1 - t)(1 - t')},$$
dans laquelle le coefficient de $t^x t'^{x'}$ est l'unité; ainsi l'on a
$$y_{x,x'} + z_{x,x'} = 1;$$
et effectivement, la partie doit être nécessairement gagnée par l'un des joueurs, car l'un et l'autre sont certains de pouvoir extraire chacun de leur urne les nombres déterminés de boules blanches.

Maintenant, supposons $p = 0$ et conséquemment $q = 1$, on a
$$m = 0, \quad m' = 1 \quad \text{et} \quad n = 0;$$
alors l'expression de $z_{x,x'}$ devient l'unité; ce qui est évident, puisque le joueur B, n'ayant plus de chances de perte, doit toujours finir par gagner.

Si, au contraire, on suppose $p = 1$ et $q = 0$, c'est-à-dire si le premier joueur A compte un point avant chaque tirage du joueur B, alors
$$m = q', \quad m' = 0 \quad \text{et} \quad n = p';$$
x' étant plus grand que x ou égal, l'expression $z_{x,x'}$ se réduit à zéro;

et, en effet, il est évidemment impossible que, dans ce cas, le joueur B puisse gagner la partie; mais, quand x est plus grand que x', la valeur de $z_{x,x'}$ prend cette forme

$$z_{x,x'} = p'^{x'}\left[1 + \frac{x'}{1}q' + \frac{x'(x'+1)}{1.2}q'^2 + \ldots + \frac{x'(x'+1)\ldots(x-2)}{1.2\ldots(x-x'-1)}q^{x-x'-1}\right].$$

Dans cette supposition, le joueur B ne peut gagner qu'autant qu'il amènera x' boules blanches avant $x - x'$ boules noires; autrement, il est devancé par le joueur A qui compte un point à chaque coup : cette expression de $z_{x,x'}$ est donc la probabilité que le joueur B aura tiré x' boules blanches avant d'en avoir extrait $x - x'$ noires, et, par conséquent, la probabilité pour gagner, s'il faisait le pari avec le joueur A, qui compterait alors un point par la sortie de chaque boule noire tandis qu'il en compte un à la sortie d'une blanche, d'atteindre x' points avant que son adversaire en ait $x - x'$; ce qui est le *problème des partis* (1).

(1) La fonction génératrice de $z_{x,x'}$ se réduit dans ce cas à

$$\frac{t(1-q't)}{(1-t)(1-q't-p'tt')},$$

et l'équation aux différences partielles correspondante serait

$$z_{x,x'} = q'z_{x-1,x'} + p'z_{x-1,x'-1},$$

dans laquelle $z_{x,x'}$ est une fonction de x et de x' que nous désignerons par $\varphi(x, x')$; si l'on fait $x - x' = s$, on aura

$$\varphi(x, x') = \varphi(s + x', x'),$$

et, si l'on représente par $z_{s,x'}$ cette dernière fonction, il en résulte

$$z_{x,x'} = z_{s,x'}, \qquad z_{x-1,x'} = z_{s-1,x'}, \qquad z_{x-1,x'-1} = z_{s,x'-1};$$

et l'équation aux différences partielles se change en celle-ci

$$z_{s,x'} = q'z_{s-1,x'} + p'z_{s,x'-1},$$

équation à laquelle conduirait directement le problème des partis dans les conditions énoncées ci-dessus. En faisant attention que, par suite de cette transformation, $z_{s,0} = 1$ et $z_{0,x'} = 0$, et que $z_{0,0}$ ne peut avoir lieu, il est aisé de voir que la fonction génératrice de $z_{s,x'}$ sera

$$\frac{t(1-q't)}{(1-t)(1-q't-p't')},$$

dans le développement de laquelle le coefficient de $t^s t'^{x'}$ sera l'expression de $z_{s,x'}$.

Si l'on examine avec attention la forme de l'expression générale qui donne $z_{x,x'}$, on reconnaîtra que ce problème peut encore être résolu, et même avec simplicité, au moyen de la théorie des combinaisons : en effet, soient a le nombre des boules blanches contenues dans l'urne du joueur A, et b celui des noires; a' le nombre des boules blanches du joueur B, et b' celui des noires; en considérant, comme on l'a déjà fait, l'ensemble de deux tirages successifs de A et B comme un coup,

aa' sera le nombre des combinaisons dans lesquelles les joueurs amènent chacun une boule blanche;

ab' celui des combinaisons qui donneront une boule blanche à A et une noire à B ;

$a'b$ celui des combinaisons qui donneront, au contraire, une boule noire à A et une blanche à B;

bb' celui des combinaisons dans lesquelles l'un et l'autre joueur tirent une boule noire;

Et la somme $aa' + ab' + a'b + bb'$ formera l'ensemble de toutes les combinaisons qui peuvent avoir lieu dans un coup. Les combinaisons où les joueurs amènent chacun une boule noire n'apportant aucun changement à leur position, nous pouvons en faire abstraction, et alors ne nous occuper que des coups où il sera amené au moins une boule blanche. Il est visible qu'en $x + x'$ coups semblables l'un des joueurs a nécessairement gagné, et la partie doit être décidée : or le nombre de toutes les combinaisons également possibles, suivant lesquelles ces $x + x'$ coups peuvent se présenter, sera

$$(aa' + ab' + a'b)^{x+x'};$$

la question se réduit donc à choisir dans toutes ces combinaisons celles qui font gagner le joueur B, c'est-à-dire celles dans lesquelles ce joueur aura x' boules blanches avant que le joueur A en ait amené x. Pour fixer les idées, supposons x' plus grand que x; on peut former les hypothèses suivantes : ou le joueur B aura gagné au $x'^{\text{ième}}$ coup, c'est-à-dire en tirant sans interruption une boule blanche à chaque coup, et alors le nombre des combinaisons précédentes qui se rapportent à ce cas est évidemment

$$a'^{x'}\left[b^{x'}+\frac{x'}{1}ab^{x'-1}+\frac{x'(x'-1)}{1.2}a^2b^{x'-2}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{x'(x'-1)\ldots(x'-x+2)}{1.2\ldots(x-1)}a^{x-1}b^{x'-x+1}\right](aa'+ab'+a'b)^x;$$

et en le divisant par $(aa'+ab'+a'b)^{x+x'}$, nombre total des combinaisons, on aura, pour la probabilité de cette hypothèse,

$$\frac{a'^{x'}b^{x'}}{(aa'+ab'+a'b)^{x'}}\left[1+\frac{x'}{1}\frac{a}{b}+\frac{x'(x'-1)}{1.2}\frac{a^2}{b^2}+\ldots+\frac{x'(x'-1)\ldots(x'-x+2)}{1.2\ldots(x-1)}\frac{a^{x-1}}{b^{x-1}}\right];$$

ou le joueur B aura gagné au $(x'+1)^{\text{ième}}$ coup, c'est-à-dire en n'ayant tiré qu'une seule boule noire, par exemple en commençant, et alors le nombre des combinaisons favorables à cet événement est

$$b'a'^{x'}\left[b^{x'}+\frac{x'}{1}ab^{x'-1}+\frac{x'(x'-1)}{1.2}a^2b^{x'-2}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{x'(x'-1)\ldots(x'-x+3)}{1.2\ldots(x-2)}a^{x-2}b^{x-x'+2}\right](aa'+ab'+a'b)^{x-1};$$

mais ce nombre est le même, que la boule noire soit amenée au premier coup ou au deuxième, ..., ou au $x'^{\text{ième}}$ coup; il faut donc le multiplier par x' pour avoir toutes les combinaisons relatives à cette hypothèse, dont la probabilité est, par ce moyen,

$$\frac{x'}{1}\frac{ab'a'^{x'}b^{x'}}{(aa'+ab'+a'b)^{x'+1}}\left[1+\frac{x'}{1}\frac{a}{b}+\frac{x'(x'-1)}{1.2}\frac{a^2}{b^2}+\ldots+\frac{x'(x'-1)\ldots(x'-x+3)}{1.2\ldots(x-2)}\frac{a^{x-2}}{b^{x-2}}\right];$$

ou le joueur B aura gagné au $(x'+2)^{\text{ième}}$ coup, et l'on verrait de la même manière que la probabilité de cette hypothèse serait

$$\frac{x'(x'+1)}{1.2}\frac{a^2b'^2a'^{x'}b^{x'}}{(aa'+ab'+a'b)^{x'+2}}\left[1+\frac{x'}{1}\frac{a}{b}+\ldots+\frac{x'(x'-1)\ldots(x'-x+4)}{1.2\ldots(x-2)}\frac{a^{x-3}}{b^{x-3}}\right].$$

En continuant ainsi, on aura les probabilités de toutes les hypothèses successives qui peuvent se présenter dans la supposition du gain de la partie par le joueur B, jusqu'à celle où il ne gagnerait qu'au $(x'+x-1)^{\text{ième}}$ coup, événement dont la probabilité serait

$$\frac{x'(x'+1)\ldots(x'+x-2)}{1.2\ldots(x-1)}\,\frac{a^{x-1}\,b'^{x-1}\,a'^{x'}\,b^{x'}}{(aa'+ab'+a'b)^{x'+x-1}};$$

et effectivement, dans ce cas, il ne peut y avoir de coups où les joueurs amènent en même temps une boule blanche.

La somme de toutes ces probabilités donnera évidemment celle du joueur B pour gagner la partie.

Si l'on fait attention que

$$\frac{ab'}{aa'+ab'+a'b}=m,\qquad \frac{a'b}{aa'+ab'+a'b}=m'\qquad\text{et}\qquad \frac{a}{b}=\frac{n}{m'},$$

on retrouve l'expression de $z_{x,x'}$.

Concevons présentement qu'il y ait dans les urnes des boules blanches portant le n° 1, et d'autres boules, de la même couleur, qui portent le n° 2; chaque boule diminuant de son numéro, par sa sortie, le nombre de points qui manquent encore au joueur auquel elle est favorable. Le problème n'est plus susceptible d'être résolu généralement au moyen des combinaisons, au lieu que le calcul des fonctions génératrices continuera à fournir une expression générale dont le développement contiendra la solution complète de la question et pourra, dans certains cas, s'effectuer par des lois faciles à saisir, comme nous aurons occasion de le voir.

Soient p la probabilité du joueur A d'extraire une boule numérotée 1, p_1 celle d'extraire une boule numérotée 2, et q celle d'amener une boule noire; p', p'_1 et q' les probabilités correspondantes pour le joueur B; et soit toujours $z_{x,x'}$ la probabilité de ce dernier joueur pour gagner la partie. En suivant la même marche que plus haut, on sera conduit à l'équation aux différences partielles

$$\begin{aligned}z_{x,x'}=\;&m z_{x-1,x'}+m_1 z_{x-2,x'}+m' z_{x,x'-1}+m'_1 z_{x,x'-2}\\&+n z_{x-1,x'-1}+n_1 z_{x-2,x'-1}+n' z_{x-1,x'-2}+n'_1 z_{x-2,x'-2},\end{aligned}$$

dans laquelle on fait

$$\frac{pq'}{1-qq'}=m,\qquad \frac{p_1q'}{1-qq'}=m_1,\qquad \frac{p'q}{1-qq'}=m',\qquad \frac{p'_1q}{1-qq'}=m'_1,$$

$$\frac{pp'}{1-qq'}=n,\qquad \frac{p_1p'}{1-qq'}=n_1,\qquad \frac{pp'_1}{1-qq'}=n',\qquad \frac{p_1p'_1}{1-qq'}=n'_1;$$

la fonction génératrice de la variable $z_{x,x'}$, donnée par cette équation, sera

$$(c)\qquad \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}t'+\mathrm{A}'+\mathrm{B}'t}{1-mt-m_1t^2-m't'-m'_1t'^2-ntt'-n_1t^2t'-n'tt'^2-n'_1t^2t'^2},$$

A et B étant des fonctions arbitraires de t, A′ et B′ des fonctions arbitraires de t', lesquelles seront déterminées au moyen des fonctions génératrices de

$$z_{0,x'},\quad z_{x,0},\quad z_{1,x'},\quad z_{x,1}$$

qui le sont elles-mêmes par les conditions du jeu.

On trouve, comme précédemment, que la fonction génératrice de $z_{0,x'}$ est zéro et celle de $z_{x,0}$, $\frac{t}{1-t}$.

De l'équation générale, on déduit l'équation aux différences finies

$$z_{1,x'}=m'z_{1,x'-1}+m'_1z_{1,x'-2},$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de x' depuis $x'=2$ inclusivement, et qui donne conséquemment, pour la fonction génératrice de $z_{1,x'}$,

$$\frac{a+bt'}{1-m't'-m'_1t'^2},$$

a et b étant des constantes que l'on détermine au moyen des valeurs de $z_{1,0}$ et $z_{1,1}$; et comme $z_{1,0}$ est égal à l'unité, $z_{1,1}$ est égal à $m'+m'_1$, et est en même temps le coefficient de t' dans le développement de la fonction génératrice; il en résulte

$$a=1\qquad\text{et}\qquad b=m'_1;$$

la fonction génératrice de $z_{1,x'}$ est donc

$$\frac{1+m'_1t'}{1-m't'-m'_1t'^2}.$$

Maintenant, si dans l'équation précédente on met $1 - y_{x,x'}$ à la place de $z_{x,x'}$, $y_{x,x'}$ étant toujours la probabilité du premier joueur A, elle se reforme de la même manière par rapport à cette dernière variable, et l'on en déduirait pareillement l'équation aux différences finies

$$y_{x,1} = my_{x-1,1} + m_1 y_{x-2,1}.$$

Mais on verrait en même temps qu'elle ne commence à avoir lieu que lorsque x surpasse 2; car, x étant 2, on aurait

$$y_{2,1} = my_{1,1} + m_1 y_{0,1} + n_1 + n'_1.$$

Il ne faut donc l'employer qu'à partir de $x = 3$, et alors la fonction génératrice de $y_{x,1}$ est de la forme

$$\frac{a + bt + ct^2}{1 - mt - m_1 t^2},$$

a, b et c étant des constantes que l'on déterminera, comme précédemment, au moyen des valeurs de $y_{1,0}$, $y_{1,1}$ et $y_{1,2}$; or $y_{1,0}$ est l'unité; $y_{1,1}$ est égal à $1 - m' - m'_1$, et est le coefficient de t dans le développement de la fonction génératrice; $y_{2,1}$ a pour valeur, comme nous venons de le voir,

$$m(1 - m' - m'_1) + m_1 + n_1 + n'_1;$$

c'est le coefficient de t^2 dans le développement de la fonction. On en conclura

$$a = 1, \qquad b = 1 - m - m' - m'_1 \qquad \text{et} \qquad c = n_1 + n'_1,$$

et la fonction génératrice de $y_{x,1}$ sera donc

$$\frac{1 + (1 - m - m' - m'_1)t + (n_1 + n'_1)t^2}{1 - mt - m_1 t^2};$$

conséquemment celle de $z_{x,1}$ est

$$\frac{1}{1-t} - \frac{1 + (1 - m - m' - m'_1)t + (n_1 + n'_1)t^2}{1 - mt - m_1 t^2}$$
$$= \frac{(m' + m'_1)t + (n + n')t^2 + (n_1 + n'_1)t^3}{(1-t)(1 - mt - m_1 t^2)}.$$

Reprenons actuellement la fonction génératrice (c); on peut toujours la ramener à cette forme

$$\frac{A_1 t + B_1 t^2 t' + A'_1 + B'_1 tt'}{1 - mt - m_1 t^2 - m' t' - m'_1 t'^2 - ntt' - n_1 t^2 t' - n' tt'^2 - n'_1 t^2 t'^2},$$

A_1 et B_1 étant les fonctions arbitraires de t, A'_1 et B'_1 les fonctions arbitraires de t'; lesquelles on détermine aisément, en égalant d'abord le coefficient de t^0 dans le développement de cette fonction à la fonction génératrice de $z_{0,x'}$ ou zéro, ensuite celui de t'^0 à la fonction génératrice de $z_{x,0}$ ou $\frac{t}{1-t}$, puis celui de t à la fonction génératrice de $z_{1,x'}$, et enfin celui de t' à la fonction génératrice de $z_{x,1}$, ce qui donnera successivement

$$A'_1 = 0, \qquad A_1 = \frac{1 - mt - m_1 t^2}{1 - t}, \qquad B'_1 = m'_1, \qquad B_1 = \frac{m'_1 + n' + n'_1 t}{1 - t},$$

et, par conséquent, pour la fonction génératrice de $z_{x,x'}$,

$$(d) \qquad \frac{(1 - mt - m_1 t^2) t + m'_1 tt' + n' t^2 t' + n'_1 t^3 t'}{(1-t)(1 - mt - m_1 t^2 - m' t' - m'_1 t'^2 - ntt' - n_1 t^2 t' - n' tt'^2 - n'_1 t^2 t'^2)}.$$

Si l'on suppose p et p' nuls, alors on a

$$m = 0, \qquad m' = 0, \qquad n = 0, \qquad n_1 = 0 \quad \text{et} \quad n' = 0,$$

et la fonction (d) prend cette forme

$$\frac{tt'(m'_1 + n'_1 t^2)}{(1-t)(1 - m_1 t^2)\left[1 - \left(\frac{m'_1 + n'_1 t^2}{1 - m_1 t^2}\right) t'^2\right]} + \frac{t}{(1-t)\left[1 - \left(\frac{m'_1 + n'_1 t^2}{1 - m_1 t^2}\right) t'^2\right]},$$

sous laquelle elle est susceptible des mêmes développements que la fonction (a). Il est à remarquer que l'on retrouvera le même coefficient pour

$$t^{2r} t'^{2r'}, \quad t^{2r-1} t'^{2r'}, \quad t^{2r} t'^{2r'-1}, \quad t^{2r-1} t'^{2r'-1};$$

ce qui se voit *a priori*, en faisant attention que les joueurs comptent toujours deux points à chaque boule blanche qu'ils font sortir.

Supposons que le joueur A ait seul des boules numérotées 1 et 2, et que l'autre joueur n'ait que des boules blanches marquées 1, ou qui ne lui comptent qu'un point en sortant; alors

$$p'_1 = 0$$

et, par suite,

$$m'_1 = 0, \qquad n' = 0, \qquad n'_1 = 0;$$

la fonction (d) devient

$$\frac{t(1 - mt - m_1 t^2)}{(1-t)(1 - mt - m_1 t^2 - m't' - ntt' - n_1 t^2 t')} = \frac{t}{1-t} \frac{1}{1 - \left[\dfrac{m' + (n + n_1 t)t}{1 - (m + m_1 t)t}\right] t'};$$

en la développant suivant les puissances de t', le coefficient de $t'^{x'}$ sera

$$\frac{t[m' + (n + n_1 t)t]^{x'}}{(1-t)[1 - (m + m_1 t)t]^{x'}},$$

expression qu'il s'agit maintenant de développer par rapport aux puissances de t pour avoir le coefficient de t^x; or ce coefficient sera la somme de tous les coefficients des puissances de t inférieures ou égales à t^{x-1}, dans le développement de l'expression

$$\frac{[m' + (n + n_1 t)t]^{x'}}{[1 - (m + m_1 t)t]^{x'}},$$

laquelle, en omettant les termes où les puissances de t en dehors des binômes sont supérieures à t^{x-1}, peut être mise sous cette forme

$$m'^{x'} \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{x'}{1}\left(\frac{n + n_1 t}{m'}\right) t + \frac{x'(x'-1)}{1.2}\left(\frac{n + n_1 t}{m'}\right)^2 t^2 + \ldots + \frac{x'(x'-1)\ldots(x'-x+2)}{1.2\ldots(x-1)}\left(\frac{n + n_1 t}{m'}\right)^{x-1} t^{x-1} \\ & + \frac{x'}{1}(m + m_1 t)t\left[1 + \frac{x'}{1}\left(\frac{n + n_1 t}{m'}\right)t + \ldots + \frac{x'(x'-1)\ldots(x'-x+3)}{1.2\ldots(x-2)}\left(\frac{n + n_1 t}{m'}\right)^{x-2} t^{x-2}\right. \\ & + \frac{x'(x'+1)}{1.2}(m + m_1 t)^2 t^2 \left[1 + \ldots + \frac{x'(x'-1)\ldots(x'-x+4)}{1.2\ldots(x-3)}\left(\frac{n + n_1 t}{m'}\right)^{x-3} t^{x-3}\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{x'(x'+1)\ldots(x'+x-2)}{1.2\ldots(x-1)}(m + m_1 t)^{x-1} t^{x-1}. \end{aligned} \right\}.$$

Si l'on rejette encore de cette série toutes les puissances de t supérieures à t^{x-1}, qui résulteront des développements des binômes, et si, dans ce qui reste, on fait $t = 1$, on aura l'expression de $z_{x,x'}$.

Examinons encore le cas où le joueur A serait certain d'extraire à chaque coup une boule qui compterait à ce joueur un point, c'est-à-dire où l'on aurait

$$p = 1, \qquad p_1 = 0, \qquad q = 0,$$

et conséquemment

$$m = q', \qquad m_1 = 0, \qquad m' = 0, \qquad m'_1 = 0,$$
$$n = p', \qquad n_1 = 0, \qquad n' = p'_1, \qquad n'_1 = 0.$$

La fonction génératrice de $z_{x,x'}$ ou la fonction (d) se réduirait alors à

$$\frac{t(1-q't)+p'_1 t^2 t'}{(1-t)(1-q't-p'tt'-p'_1 tt'^2)},$$

et celle de $y_{x,x'}$ serait, par suite,

$$\frac{1}{(1-t)(1-t')} - \frac{t(1-q't)+p'_1 t^2 t'}{(1-t)(1-q't-p'tt'-p'_1 tt'^2)}$$
$$= \frac{1}{1-t'} + \frac{tt'}{(1-t')(1-q't-p'tt'-p'_1 tt'^2)}.$$

Dans cette dernière expression, le premier terme représente la fonction génératrice de $y_{0,x'}$, qui est égal à l'unité quel que soit x', et le second donnera, en le développant par rapport aux puissances de t et de t', toutes les autres valeurs de $y_{x,x'}$; or le coefficient de t^x sera

$$\frac{t'[q'+(p'+p'_1 t')t']^{x-1}}{1-t'};$$

d'où il résulte que, si l'on rejette du développement de la série

$$q'^{x-1}\left[t' + \frac{(x-1)}{1}\left(\frac{p'+p'_1 t'}{q'}\right)t'^2 + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}\left(\frac{p'+p'_1 t'}{q'}\right)^2 t'^3 + \ldots\right]$$

toutes les puissances de t' supérieures à $t'^{x'}$, et si l'on fait dans ce qui reste $t' = 1$, on aura, en supposant x' pair et égal à $2r+2$, le coefficient de $t^x t'^{x'}$, ou

$$y_{x,x'} = q'^{x-1} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \dfrac{(x-1)}{1}\left(\dfrac{p'+p'_1}{q'}\right) + \dfrac{(x-1)(x-2)}{1.2}\left(\dfrac{p'+p'_1}{q'}\right)^2 + \ldots + \dfrac{(x-1)(x-2)\ldots(x-r)}{1.2\ldots r}\left(\dfrac{p'+p'_1}{q'}\right)^r \\ + \dfrac{(x-1)(x-2)\ldots(x-r-1)}{1.2\ldots(r+1)}\dfrac{p'^{r+1}}{q'^{r+1}}\left[1 + \dfrac{(r+1)}{1}\dfrac{p'_1}{p'} + \dfrac{(r+1)r}{1.2}\dfrac{p'^2_1}{p'^2} + \ldots + \dfrac{(r+1)r\ldots 2}{1.2\ldots r}\dfrac{p'^r_1}{p'^r}\right] \\ + \dfrac{(x-1)(x-2)\ldots(x-r-2)}{1.2\ldots(r+2)}\dfrac{p'^{r+2}}{q'^{r+2}}\left[1 + \dfrac{(r+2)}{1}\dfrac{p'_1}{p'} + \ldots + \dfrac{(r+2)(r+1)\ldots 4}{1.2\ldots(r+1)}\dfrac{p'^{r-1}_1}{p'^{r-1}}\right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \dfrac{(x-1)(x-2)\ldots(x-2r-1)}{1.2\ldots(2r+1)}\dfrac{p'^{2r+1}}{q'^{2r+1}} \end{array} \right\},$$

et, dans le cas de x' impair ou égal à $2r+1$,

$$y_{x,x'} = q'^{x-1} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(\dfrac{x-1}{1}\right)\left(\dfrac{p'+p'_1}{q'}\right) + \dfrac{(x-1)(x-2)}{1.2}\left(\dfrac{p'+p'_1}{q'}\right)^2 + \ldots + \dfrac{(x-1)(x-2)\ldots(x-r)}{1.2\ldots r}\left(\dfrac{p'+p'_1}{q'}\right)^r \\ + \dfrac{(x-1)(x-2)\ldots(x-r-1)}{1.2\ldots(r+1)}\dfrac{p'^{r+1}}{q'^{r+1}}\left[1 + \left(\dfrac{r+1}{1}\right)\dfrac{p'_1}{p'} + \dfrac{(r+1)r}{1.2}\dfrac{p'^2_1}{p'^2} + \ldots + \dfrac{(r+1)r\ldots 3}{1.2\ldots(r-1)}\dfrac{p'^{r-1}_1}{p'^{r-1}}\right] \\ + \dfrac{(x-1)(x-2)\ldots(x-r-2)}{1.2\ldots(r+2)}\dfrac{p'^{r+2}}{q'^{r+2}}\left[1 + \dfrac{(r+2)}{1}\dfrac{p'_1}{p'} + \ldots + \dfrac{(r+2)(r+1)\ldots 5}{1.2\ldots(r-2)}\dfrac{p'^{r-2}_1}{p'^{r-2}}\right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \dfrac{(x-1)(x-2)\ldots(x-2r)}{1.2\ldots 2r}\dfrac{p'^{2r}}{q'^{2r}} \end{array} \right\}.$$

Il est visible que le joueur B ne peut espérer de gagner qu'autant que x est plus grand que $r+1$, soit que x' égale $2r+2$ ou $2r+1$; et effectivement, hors de cette supposition, les valeurs précédentes de $y_{x,x'}$ deviennent toutes égales à l'unité.

Nous ferons aussi remarquer que le joueur A a nécessairement gagné la partie lorsque le joueur B aura tiré $x-r-1$ boules noires avant d'avoir atteint x' points; mais ce dernier joueur peut encore avoir perdu avant d'avoir amené la totalité de ce nombre de boules noires, ce qui fait que cette question n'est point susceptible de rentrer dans celle qui est traitée dans la Théorie analytique, à la suite du *problème des partis,* comme précédemment une supposition semblable nous a conduits à ce dernier problème.

3. Le problème des partis ayant été l'objet des recherches de deux

grands géomètres du XVII[e] siècle (1), et en quelque sorte le premier de ce genre soumis à des méthodes analytiques, on sera peut-être curieux de voir comment ce même problème se déduit encore, comme corollaire, d'une autre question de probabilité, dont la solution offrira d'ailleurs une nouvelle application de la méthode des fonctions génératrices.

On tire successivement d'une urne, qui contient une quantité déterminée de boules blanches et noires, une boule que l'on ne remet point après le coup, et l'on demande, après un certain nombre de tirages connus, quelle est la probabilité de compléter la sortie de tel nombre donné de boules blanches avant celle de tel autre nombre, également donné, de boules noires.

Soient a et a' les nombres de boules blanches et noires contenues primitivement dans l'urne, n le nombre de boules blanches que l'on se propose d'atteindre avant d'avoir extrait un autre nombre n' de boules noires; et supposons qu'après avoir tiré successivement de l'urne une boule sans la remettre, on ait amené $n-x$ boules blanches et $n'-x'$ boules noires, x et x' étant alors les nombres de boules blanches et noires qu'il reste à faire sortir pour décider la question. Représentons par $y_{x,x'}$ la probabilité d'amener dans les tirages suivants x boules blanches avant x' boules noires, ou d'atteindre la totalité des n boules blanches avant d'avoir extrait n' noires; on aura, d'après les règles connues des probabilités, l'équation

$$y_{x,x'} = \frac{a-n+x}{a+a'-n-n'+x+x'}\,y_{x-1,x'} + \frac{a'-n'+x'}{a+a'-n-n'+x+x'}\,y_{x,x'-1}.$$

Faisons

$$a-n+x=s, \qquad a'-n'+x'=s' \qquad \text{et} \qquad y_{x,x'}=u_{s,s'};$$

l'équation précédente devient

$$u_{s,s'} = \frac{s}{s+s'}\,u_{s-1,s'} + \frac{s'}{s+s'}\,u_{s,s'-1},$$

(1) Pascal et Fermat.

et, en supposant

$$u = \frac{1.2.3\ldots s.1.2.3\ldots s'}{1.2.3\ldots(s+s')} z_{s,s'},$$

elle se ramène à cette forme

$$z_{s,s'} = z_{s-1,s'} + z_{s,s'-1},$$

équation aux différences partielles à coefficients constants, laquelle doit avoir lieu pour toutes les valeurs entières et positives de s et de s', à partir de $s = a - n$ et de $s' = a' - n'$, et donne conséquemment pour la fonction génératrice de $z_{s,s'}$

$$t^{a-n} t'^{a'-n'} \frac{A + A'}{1 - t - t'},$$

A étant une fonction arbitraire de t, et A' une fonction arbitraire de t'. On peut toujours transformer cette expression en celle-ci

$$t^{a-n} t'^{a'-n'} \frac{A_1 + A'_1 t'}{1 - t - t'},$$

dans laquelle A_1 et A'_1 sont de nouvelles fonctions arbitraires de t et de t'. Pour les déterminer, nous observerons que, $y_{0,0}$ ne pouvant avoir lieu et $y_{x,0}$ étant égal à zéro, quelles que soient les valeurs entières et positives de x, on aura

$$0 = u_{s,a'-n'} = \frac{1.2.3\ldots s.1.2\ldots(a'-n')}{1.2.3\ldots(a'-n'+s)} z_{s,a'-n'};$$

par conséquent la fonction génératrice de $z_{s,a'-n'}$ sera nulle, ce qui donne

$$t^{a-n} t'^{a'-n'} \frac{A_1}{1-t} = 0, \quad \text{et par suite} \quad A_1 = 0.$$

De plus, $y_{0,x'}$ étant égal à l'unité pour toutes les valeurs de x' depuis $x' = 1$, on aura semblablement

$$1 = u_{a-n,s'} = \frac{1.2\ldots(a-n).1.2.3\ldots s'}{1.2.3\ldots(a-n+s')} z_{a-n,s'};$$

d'où l'on tire, pour la valeur de $z_{a-n,s'}$ ou le coefficient de $t^{a-n} t'^{s'}$ dans le développement de sa fonction génératrice,

$$z_{a-n,s'} = \frac{(a-n+1)(a-n+2)\ldots(a-n+s')}{1.2.3\ldots s'},$$

ce qui donne

$$t^{a-n}t'^{a'-n'}\frac{A'_1 t'}{1-t'} = t^{a-n}t'^{a'-n'}\frac{(a-n+1)\ldots(a+a'-n-n'+1)}{1.2.3\ldots(a'-n'+1)}$$

$$\times\left[\begin{array}{l} t' + \dfrac{(a+a'-n-n'+2)t'^2}{a'-n'+2} + \ldots \\ + \dfrac{(a+a'-n-n'+2)\ldots(a+a'-n-n'+x')t'^{x'}}{(a'-n'+2)\ldots(a'-n'+x')} + \ldots \end{array}\right].$$

Le second membre de cette équation multiplié par $\dfrac{1}{1-\dfrac{t}{1-t'}}$ sera donc la fonction génératrice de $z_{s,s'}$; en la développant par rapport aux puissances de t et ensuite par rapport à celles de t', il est aisé de voir que le coefficient de t^s ou de t^{a-n+x} est

$$t'^{a'-n'}\frac{(a-n+1)\ldots(a+a'-n-n'+1)}{1.2.3\ldots(a'-n'+1)}$$

$$\times\left[t' + \frac{(a+a'-n-n'+2)}{a'-n'+2}t'^2 + \ldots\right]$$

$$\times\left[1 + \frac{x}{1}t' + \frac{x(x+1)}{1.2}t'^2 + \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+x'-2)}{1.2\ldots(x'-1)}t'^{x'-1} + \ldots\right],$$

et que celui de $t'^{s'}$, ou de $t'^{a'-n'+x'}$ dans cette dernière expression, ou $z_{s,s'}$, est égal à

$$\frac{a-n+1)\ldots(a+a'-n-n'+1)}{1.2.3\ldots(a'-n'+1)}$$

$$\times\left[\begin{array}{l} \dfrac{x(x+1)\ldots(x+x'-2)}{1.2\ldots(x'-1)} + \dfrac{a+a'-n-n'+2}{a'-n'+2}\,\dfrac{x(x+1)\ldots(x+x'-3)}{1.2\ldots(x'-2)} + \ldots \\ + \dfrac{(a+a'-n-n'+2)\ldots(a+a'-n-n'+x')}{(a'-n'+2)\ldots(a'-n'+x')} \end{array}\right].$$

Maintenant, en multipliant cette valeur de $z_{s,s'}$ par

$$\frac{1.2.3\ldots(a'-n'+x')}{(a'-n'+x+1)\ldots(a+a'-n-n'+x+x')},$$

on aura, après toutes les réductions, pour l'expression de $y_{x,x'}$,

$$y_{x,x'} = \frac{(a-n+x)\ldots(a-n+1)}{(a+a'-n-n'+x+x')\ldots(a+a'-n-n'+x'+1)}$$

$$\times \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{x}{1}\,\frac{a'-n'+x'}{a+a'-n-n'+x'} + \frac{x(x+1)}{1.2}\,\frac{(a'-n'+x')(a'-n'+x'-1)}{(a+a'-n-n'+x')(a+a'-n-n'+x'-1)} + \ldots \\ + \frac{x(x+1)\ldots(x+x'-2)}{1.2\ldots(x'-1)}\,\frac{(a'-n'+x')\ldots(a'-n'+2)}{(a+a'-n-n'+x')\ldots(a+a'-n-n'+2)} \end{array} \right].$$

Concevons actuellement $a-n$ et $a'-n'$ dans le rapport de p à q, en sorte que l'on ait $a-n=pk$ et $a'-n'=qk$, et imaginons que k devienne un très grand nombre ou l'infini ; il est clair que la probabilité de la sortie d'une boule blanche ou d'une noire dans les tirages successifs deviendra constante et sera $\frac{p}{p+q}$ pour une boule blanche et $\frac{q}{p+q}$ pour une noire, et la probabilité $y_{x,x'}$ se réduira à cette expression

$$y_{x,x'} = \left(\frac{p}{p+q}\right)^x \left[1 + \frac{x}{1}\,\frac{q}{p+q} + \frac{x(x+1)}{1.2}\left(\frac{q}{p+q}\right)^2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{x(x+1)\ldots(x+x'-2)}{1.2\ldots(x'-1)}\left(\frac{q}{p+q}\right)^{x'-1} \right];$$

telle est la formule à laquelle conduit le *problème des partis*, et effectivement nous rentrons dans les conditions de ce problème par la supposition de k infini.

Si l'on suppose n égal à a et n' égal à a', $y_{x,x'}$ exprimera alors la probabilité de la sortie de toutes les boules blanches restantes dans l'urne avant que toutes les noires aient été épuisées, et son expression se changera en celle-ci

$$\frac{1.2.3\ldots x}{(x+x')\ldots(x'+1)} \left[1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x+1)}{1.2} + \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+x'-2)}{1.2\ldots(x'-1)} \right],$$

laquelle se réduit elle-même à

$$\frac{x'}{x+x'}.$$

La probabilité d'extraire de l'urne la totalité des boules blanches avant celle des noires est donc à la probabilité contraire en raison inverse du nombre des boules blanches à celui des noires.

On arrive à ce dernier résultat, d'une manière extrêmement simple, au moyen des combinaisons; en effet, la probabilité de la sortie de toutes les boules de l'urne, dans un ordre quelconque, par couleur, sera

$$\frac{x(x-1)\ldots 2.1\, x'(x'-1)\ldots 2.1}{(x+x')(x+x'-1)\ldots 3.2.1} = \frac{1.2.3\ldots x'}{(x+1)\ldots(x+x')}.$$

Mais, pour que les boules blanches sortent en totalité les premières, il faut nécessairement qu'une boule de la couleur noire sorte la dernière : en combinant $x'-1$ à $x'-1$ les $x+x'-1$ rangs de sortie qui se trouvent avant le dernier, on formera autant de classements différents pour les boules de la couleur noire, et autant d'ordres de sortie par couleur, qui comprendront tous ceux où une boule noire sort en dernier lieu; or le nombre de ces combinaisons est

$$\frac{(x+x'-1)(x+x'-2)\ldots(x+1)}{1.2\ldots(x'-1)},$$

et en le multipliant par la probabilité commune à chaque ordre de sortie par couleur, on aura la probabilité cherchée égale à

$$\frac{1.2.3\ldots x'}{(x+1)\ldots(x+x')}\,\frac{(x+1)\ldots(x+x'-1)}{1.2.3\ldots(x'-1)} = \frac{x'}{x+x'}.$$

Remarques sur les fonctions génératrices.

4. Soit u une fonction génératrice à une ou plusieurs variables; toute équation entre cette fonction et ses variables, linéaire par rapport à u, rationnelle par rapport aux variables, subsistera encore si l'on passe des fonctions génératrices aux coefficients, entre ces mêmes coefficients, et donnera lieu à une équation aux différences partielles ; mais si, dans cette équation aux différences partielles, on repasse des coefficients aux fonctions génératrices, on n'arrivera plus à une équation rigoureusement exacte, à moins qu'on n'y rétablisse en même

temps les fonctions des variables qui ont pu disparaître dans le premier passage. Ainsi, dans une des questions que nous avons traitées plus haut, l'équation aux différences partielles

$$z_{x,x'} = m z_{x-1,x'} + m' z_{x,x'-1} + n z_{x-1,x'-1}$$

donnerait, en remontant simplement des coefficients aux fonctions génératrices, celle-ci

$$u = mut + m'ut' + nutt',$$

laquelle n'est point exacte; car il est aisé de voir que, d'après les conditions du problème, il faudrait ajouter au second membre la fonction génératrice de $z_{x,0}$ moins cette même fonction multipliée par m. Cette fonction de t, qu'il est nécessaire de rétablir dans le second membre de l'équation pour la compléter, est précisément la fonction arbitraire que nous avons eu à déterminer dans la solution de cette question. En général, les fonctions à ajouter pour avoir encore une équation dans le passage des coefficients aux fonctions génératrices sont les mêmes que les fonctions arbitraires qui forment le numérateur de la fonction génératrice intégrale, avant qu'elle soit développée.

Faute d'avoir égard à ces fonctions, on peut tomber dans des erreurs graves, en se servant de ce moyen pour intégrer les équations aux différences partielles. Par cette même raison, la marche suivie dans la solution des problèmes des n^{os} 8 et 10 du Livre II de la *Théorie analytique des Probabilités* n'est nullement rigoureuse, et semble impliquer contradiction en ce qu'elle établit une liaison entre les variables qui sont et doivent être toujours indépendantes. Sans entrer dans les considérations particulières qui ont pu la faire réussir ici, et qu'il est aisé de saisir, nous allons faire voir que la méthode d'intégration exposée au commencement de ce *Supplément* s'applique également à ces questions, et les résout avec non moins de simplicité.

Dans le problème du n° 8, on se propose de déterminer le sort d'un nombre n de joueurs A, B, C, ... dont p, q, r, ... représentent les probabilités respectives, c'est-à-dire leurs probabilités pour gagner un coup lorsque, pour gagner la partie, il manque x coups au joueur A,

x' coups au joueur B, x'' coups au joueur C, etc. En nommant $y_{x,x',x'',\ldots}$ la probabilité du joueur A pour gagner la partie, on a l'équation aux différences partielles

$$y_{x,x',x'',\ldots} = p y_{x-1,x',x'',\ldots} + q y_{x,x'-1,x'',\ldots} + r y_{x,x',x''-1,\ldots} + \ldots,$$

qui donne pour $y_{x,x',x'',\ldots}$ cette fonction génératrice

$$\frac{P + Q + R + \ldots}{1 - pt - qt' - rt'' - \ldots},$$

dans laquelle P, Q, R, ... sont autant de fonctions arbitraires des variables t, t', t'', ... qu'il y a de ces variables, en ne comprenant point t dans la première, t' dans la deuxième, t'' dans la troisième, etc. Or, cette fonction peut être mise sous la forme

$$\frac{P' + Q' t + R' tt' + S' tt't'' + \ldots}{1 - pt - qt' - rt'' - st''' - \ldots},$$

P', Q', R', ... étant, comme plus haut, des fonctions arbitraires, la première de toutes les variables à l'exception de t, la deuxième de toutes les variables en exceptant t', la troisième également de toutes les variables hormis t'', et ainsi de suite. Pour les déterminer, nous observerons que, dans $y_{x,x',x'',\ldots}$, deux des indices x, x', x'', ... ou un plus grand nombre ne peuvent être nuls à la fois, puisque la partie cesse quand l'un des joueurs a atteint ses points; de plus, $y_{0,x',x'',\ldots}$ est égal à l'unité, quels que soient x', x'', ...; la fonction génératrice de cette expression, ou celle qui donne l'unité pour le coefficient d'un produit quelconque $t'^{x'} t''^{x''} t'''^{x'''} \ldots$, est

$$\frac{t'}{1-t'}\,\frac{t''}{1-t''}\,\frac{t'''}{1-t'''}\cdots;$$

par conséquent, on aura

$$P' = \frac{t'}{1-t'}\,\frac{t''}{1-t''}\,\frac{t'''}{1-t'''}\cdots(1 - qt' - rt'' - st''' - \ldots).$$

Toute valeur de $y_{x,x',x'',\ldots}$ dans laquelle un autre indice que x est nul étant égale à zéro, la fonction génératrice correspondante devient nulle aussi; on aura donc successivement

$$Q'=0, \qquad R'=0, \qquad S'=0, \qquad \ldots.$$

Partant, la fonction génératrice de $y_{x,x',x'',\ldots}$ sera

$$\frac{t'}{1-t'}\,\frac{t''}{1-t''}\cdots\frac{1-qt'-rt''-\ldots}{1-pt-qt'-rt''-\ldots},$$

et le coefficient de t^x, dans le développement de cette fonction par rapport aux puissances de t,

$$\frac{t'}{1-t'}\,\frac{t''}{1-t'}\cdots\frac{p^x}{(1-qt'-rt''-\ldots)^x};$$

d'où il est facile de tirer le coefficient de $t'^{x'}t''^{x''}\ldots$, ou

$$y_{x,x',x'',\ldots}=p^x\left\{\begin{array}{l} 1+\dfrac{x}{1}(q+r+\ldots)\\[2ex] +\dfrac{x(x+1)}{1.2}(q+r+\ldots)^2\\[2ex] +\dfrac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}(q+r+\ldots)^3\\[2ex] +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

en ayant soin de rejeter les termes dans lesquels la puissance de q surpasse $x'-1$, ceux dans lesquels la puissance de r surpasse $x''-1$, ...

Dans le problème du n° 10, on considère deux joueurs A et B dont les adresses soient p et q, et dont le premier ait a jetons et le second b jetons; et l'on suppose qu'à chaque coup, celui qui perd donne un jeton à son adversaire, et que la partie ne finisse que lorsqu'un des joueurs aura perdu tous ses jetons. On demande la probabilité que l'un des joueurs, A par exemple, gagnera la partie avant ou au $n^{\text{ième}}$ coup.

En représentant par $y_{x,x'}$ la probabilité de ce joueur pour gagner la partie lorsqu'il a x jetons et lorsqu'il n'a plus que x' coups à jouer pour atteindre les n coups, on arrive, par les premiers principes des probabilités, à l'équation aux différences partielles

$$y_{x,x'} = p y_{x+1,x'-1} + q y_{x-1,x'-1},$$

qui donne, pour la fonction génératrice de $y_{x,x'}$,

$$\frac{\mathrm{A} + \mathrm{A}' + \mathrm{B}' t}{q t^2 t' - t + p t'},$$

A étant une fonction arbitraire de t, A′ et B′ deux fonctions arbitraires de t'. Pour les déterminer plus commodément, nous transformerons cette fonction génératrice en celle-ci

$$\frac{\mathrm{A}_1 t + \mathrm{A}'_1 + \mathrm{B}'_1 t t'}{q t^2 t' - t + p t'},$$

dans laquelle A_1, A'_1 et B'_1 sont, comme plus haut, des fonctions arbitraires de t et de t'. Or $\frac{\mathrm{A}'_1}{p t'}$ est le coefficient de t^0 dans le développement de la fonction par rapport aux puissances de t, ou la fonction génératrice de $y_{0,x'}$; mais, par les conditions du problème, $y_{0,x'}$ est nul quel que soit x'; par conséquent sa fonction génératrice l'est aussi; A'_1 est donc égal à zéro.

Le coefficient de t'^0, dans le développement de la fonction génératrice par rapport à t', est $-\mathrm{A}_1$, ce qui est en même temps la fonction génératrice de $y_{x,0}$, quantité qui est nulle tant que x est moindre que la somme des jetons ou $a+b$, et qui devient l'unité quand $x = a+b$; A_1 est donc une fonction de t qui a pour facteur t^{a+b}, et dont on peut ne tenir aucun compte dans le numérateur de la fonction génératrice, car elle ne doit donner que des puissances de t supérieures à t^{a+b}, et nous n'avons en vue que d'avoir une fonction génératrice composée des puissances inférieures de t, puisque x ne peut s'étendre que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a+b$.

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$, ainsi limitée entre ces valeurs, se réduit donc à

$$\frac{\mathrm{B}'_1 t t'}{q t^2 t' - t + p t'},$$

laquelle on peut mettre aisément sous cette forme

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{B'_1}{p}\,t\,\frac{1}{\left(1-\dfrac{\frac{1}{t'}+\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}}{2p}\,t\right)\left(1-\dfrac{\frac{1}{t'}-\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}}{2p}\,t\right)}\\ &=\frac{B'_1}{p}\,\frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}}\left\{\frac{\frac{1}{t'}+\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}}{1-\dfrac{\frac{1}{t'}+\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}}{2p}\,t}-\frac{\frac{1}{t'}-\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}}{1-\dfrac{\frac{1}{t'}-\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}}{2p}\,t}\right\};\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire, pour le coefficient de t^{a+b}, l'expression

$$\frac{B'_1}{p}\,\frac{1}{(2p)^{a+b-1}}\,\frac{\left(\frac{1}{t'}+\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^{a+b}-\left(\frac{1}{t'}-\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^{a+b}}{2\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}}.$$

Mais ce coefficient est la fonction génératrice de $y_{a+b,x'}$, quantité qui est égale à l'unité; car il est certain que le joueur A a gagné la partie lorsqu'il a gagné tous les jetons de B : de plus, x' doit être ici zéro ou un nombre pair, puisque le nombre de coups dans lesquels A peut gagner la partie est égal à b plus un nombre pair; et, en effet, il doit gagner tous les jetons de B, et encore regagner chaque jeton qu'il a perdu, ce qui exige deux coups. La série

$$y_{a+b,0}\,t'^0+y_{a+b,2}\,t'^2+y_{a+b,4}\,t'^4+\ldots,$$

qui représente le coefficient de t^{a+b}, est donc égale à $\frac{1}{1-t'^2}$, et l'on en conclut

$$\frac{B'_1}{p}=\frac{(2p)^{a+b-1}}{1-t'^2}\,\frac{2\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}}{\left(\frac{1}{t'}+\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^{a+b}-\left(\frac{1}{t'}-\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^{a+b}}.$$

Maintenant le coefficient de t^a, tiré du développement de la fonction (II), toujours par rapport aux puissances de t, sera

$$\frac{B'_1}{p}\frac{1}{(2p)^{a-1}}\frac{\left(\frac{1}{t'}+\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^a-\left(\frac{1}{t'}-\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^a}{2\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}},$$

et en substituant pour $\frac{B'_1}{p}$ sa valeur, on aura ce coefficient ou la fonction génératrice de $y_{x,x'}$ égale à

$$\frac{2^b p^b}{1-t'^2}\frac{\left(\frac{1}{t'}+\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^a-\left(\frac{1}{t'}-\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^a}{\left(\frac{1}{t'}+\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^{a+b}-\left(\frac{1}{t'}-\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^{a+b}}$$

ou

$$\frac{2^b p^b t'^b}{1-t'^2}\frac{(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^a-(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^a}{(1+\sqrt{1-4pqt'^2})^{a+b}-(1-\sqrt{1-4pqt'^2})^{a+b}},$$

ce qui est la formule (o) de la *Théorie analytique*.

(1825.)

FIN DU TOME SEPTIÈME.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ